

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique



Département de Génie Mécanique

Mémoire de magistère  
Spécialité : **Energétique**

Thème :  
**Optimisation d'une cascade à puissance maximale : application à  
la regazéification du GNL**

Etudié par :  
**M<sup>r</sup> Mohamed Rabie BOUDERBALA**  
(Ingénieur en Aéronautique)

Soutenu devant le jury :

|              |                 |                      |       |
|--------------|-----------------|----------------------|-------|
| Président :  | Pr S.E. CHITOUR | Professeur           | ENSP  |
| Rapporteur : | Pr M.A AIT ALI  | Professeur           | ENSP  |
| Examineurs : | Pr H.GUERMOUCHE | Professeur           | USTHB |
|              | Dr A. SMAILI    | Maitre de conférence | ENSP  |

---

**ملخص:** ان الطلب العالمي على الغاز الطبيعي المسال ينمو حاليا بمعدل 3.5 ٪ سنويا ، مما يخلق الحاجة إلى انجاز محطات إعادة تبخير في المستقبل القريب جدا في البلدان المستوردة. إن الشروط البيئية الصارمة و التي سنتها معاهدة كيوتو، تحفز على انجاز طرق جديدة تعتمد على إنتاج الطاقة لإعادة التبخير في النهايات البحرية. كما أن فرق درجات الحرارة بين حرارة المنبع الساخن ودرجة حرارة الغاز الطبيعي المسال وتقتصر استخدام دورة مركبة من الميثان و الاث ان ، بدلا من مجرد دورة الميثان حيث الفرق بين درجة الغليان الطبيعية ودرجة الحرارة الحرجة ليست كافية. إن البرامترات المثلى لهذا المركب تم تحديدها بمفهوم الترموديناميك محدودة في الزمن ، فإنها تؤدي إلى النتائج التحليلية التي تترك الاختيار بين تحقيق أقصى قدر من الطاقة من غاز الميثان لدورة أو حلقة مركبة الاث ان والميثان ، وذلك لنفس الأداء الإجمالي.

**كلمات مفتاحية :** إعادة التبخير/ دورة مركبة /لا رجعي/منهج egnargal

**Résumé :** La demande mondiale de GNL s'accroît actuellement au rythme de 3,5% par an, ce qui laisse entrevoir la nécessité de réaliser dans un avenir très proche de nouveaux terminaux de regazéification dans les pays importateurs. Les contraintes environnementales plus sévères mises en application par les accords de Kyoto incitent à la conception de procédés nouveaux intégrant la production de puissance à la regazéification dans les terminaux maritimes. L'écart de température existant entre la source chaude et la température du GNL suggère l'utilisation d'une simple cascade de cycles Méthane- Ethane au lieu d'un simple cycle à méthane dont l'écart entre la température normale d'ébullition et la température critique est insuffisant. Les paramètres optimaux de cette cascade ont été déterminés sur le concept de la thermodynamique en temps fini ; ils donnent lieu à des résultats analytiques qui laissent le choix entre la maximisation de la puissance du cycle Méthane, ou celle du cycle Ethane, pour le même rendement global, tenant en compte des coefficients d'irréversibilité des cycles.

**Mots clés :** Regazéification/cascade/ irréversible/méthode de Lagrange.

**Abstract:** The world demand for LNG increases currently at about 3,5% per year, which makes it necessary to build new terminals of regasification in the importing countries. The environmental constraints to be implemented in agreement with Kyoto protocol incites to design new regasifying processes integrating production of power to the regasification in the LNG maritime terminals. The large temperature potential between the hot source and the temperature of the LNG suggests using a Methane – Ethane cascade instead of a simple methane cycle. The optimal parameters of this combined cycle have been determined based on the concept of the finite time thermodynamics; they lead to analytical results that give the choice between the maximization of the power Methane cycle, or the one of the Ethane cycle, for the same global output, taking in consideration irreversibility factors.

**Key words:** Regasification/ combined cycles/irreversible/Lagrange method.

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Table des matières.....</b>  | <b>1</b>  |
| Nomenclature.....   | 2         |
| <b>Chapitre I : Introduction.....</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1. Le commerce mondial du GNL.....  | 5         |
| 1.2. Qu'est- ce que le GNL ?.....   | 8         |
| 1.3. La liquéfaction du gaz nature.....   | 9         |
| 1.4. Description d'une usine de liquéfaction.....   | 9         |
| 1.5. Les deux modes de transport : gazoduc et méthaniers.....   | 11        |
| 1.6. Les solutions de regazéification du GNL.....   | 13        |
| <b>Chapitre II : Problématique de la regazéification du GNL.....</b>  | <b>17</b> |
| <b>Chapitre III : Cascade à deux cycles endoreversibles à puissance maximale.....</b>                           | <b>22</b> |
| 3.1 Introduction .....  | 23        |
| 3.2 Résolution du problème et établissement des règles d'optimalité.....  | 23        |
| 3.3 Enoncé de la méthode de Lagrange.....   | 25        |
| 3.4 Détermination des températures extrêmes et du rapport des températures intermédiaires de<br>La cascade..... | 26        |
| 3.5 Hypothèse de la répartition de la puissance de la cascade.....  | 28        |
| 3.6 Détermination des températures intermédiaires.....  | 28        |
| 3.6.1 Hypothèse 1 : Cycle 1 à puissance maximale.....   | 28        |
| 3.6.2 Hypothèse 1 : Cycle 2 à puissance maximale.....   | 29        |
| 3.7 Conclusion.....   | 30        |
| <b>Chapitre IV : Cascade à deux cycles irréversibles à puissance maximale.....</b>                              | <b>32</b> |
| 4.1 Introduction.....   | 33        |
| 4.2 Résolution du problème et établissement des règles d'optimalité.....  | 33        |
| 4.3 Hypothèse de la répartition de la puissance de la cascade .....   | 37        |
| 4.4 Détermination des températures intermédiaires de la cascade.....  | 37        |
| 4.4.1 Hypothèse 1 : La puissance du cycle 1 est maximale.....   | 37        |
| 4.4.2 Hypothèse 1 : La puissance du cycle 2 est maximale.....   | 39        |
| 4.5 Conclusion.....   | 39        |
| <b>Chapitre V : Application d'une cascade irréversible à la regazéification du GNL .....</b>                    | <b>41</b> |
| 5.1 Introduction.....   | 41        |
| 5.2 Application d'une cascade conceptuelle à deux cycles endoreversibles .....                                  | 41        |
| 5.3 Amélioration des performances par la température de la source chaude.....                                   | 44        |
| 5.4 Cascade conceptuelle à deux cycles irréversibles.....   | 45        |
| 5.5 Amélioration des performances par la température de la source chaude.....                                   | 47        |
| <b>Chapitre VI : Conclusion générale et recommandations.....</b>  | <b>50</b> |
| <b>Annexe 1 : Cascade à trois cycles endoreversibles à puissance maximale.....</b>                              | <b>53</b> |
| <b>Annexe 2 : Cascade à trois cycles irréversibles à puissance maximale.....</b>                                | <b>61</b> |
| Références bibliographiques.....  | 69        |

**Nomenclature :**

$\dot{Q}_h$  : Flux de chaleur cédée par la source chaude (cycle endoréversible)..... [kW]  
 $\dot{Q}_c$  : Flux de chaleur cédée vers la source froide (cycle endoréversible)..... [kW]  
 $\dot{Q}_{hi}$  : Flux de chaleur cédée par la source chaude (cascade irréversible)..... [kW]  
 $\dot{Q}_{ci}$  : Flux de chaleur cédée vers la source froide (cycle irréversible)..... [kW]  
 $\dot{Q}_i$  : Flux de chaleur échangé entre les deux cycles (cascade endoreversible)..... [kW]  
 $\dot{Q}_{ij}$  : Flux de chaleur échangé entre les deux cycles (cascade irréversible)..... [kW]  
 $\dot{Q}_{h1}$  : Flux de chaleur échangé entre premier et le deuxième cycle de la cascade a 3 cycles..... [kW]  
 $\dot{Q}_{h2}$  : Flux de chaleur échangé entre deuxième et le troisième cycle de la cascade à 3 cycles..... [kW]  
 $W_1$  : Le travail fourni par le premier cycle de la cascade..... [kW]  
 $W_2$  : Le travail fourni par le deuxième cycle de la cascade..... [W]  
 $W_3$  : Le travail fourni par le troisième cycle de la cascade..... [W]  
 $P$  : Puissance de la cascade ..... [kW]  
 $T_h$  : Température de la source chaude..... [K]  
 $T_c$  : Température de la source froide..... [K]  
 $T_{hc1}$  : Isotherme supérieur du premier cycle de la cascade..... [K]  
 $T_{hc2}$  : Isotherme supérieur du deuxième cycle de la cascade..... [K]  
 $T_{ce1}$  : Isotherme bat du premier cycle de la cascade..... [K]  
 $T_{ce2}$  : Isotherme bat du deuxième cycle de la cascade..... [K]  
 $T_{hc3}$  : Isotherme supérieur du troisième cycle de la cascade..... [K]  
 $T_{ce3}$  : Isotherme bat du troisième cycle de la cascade..... [K]  
 $C_t$  : Conductance thermique totale de la cascade..... [kW/K]  
 $f$  : Fonction objective.  
 $L$  : Lagrangien.  
 $R$  : Rapport de simplification.  $R \equiv \sqrt{T_h/T_c}$   
 $\dot{Q}_{hi}$  : Flux de chaleur cédée par la source chaude (cycle irréversible)..... [kW]  
 $\dot{Q}_{ci}$  : Flux de chaleur cédée vers la source froide (cycle irréversible)..... [K]  
 $T_h$  : Température de la source chaude..... [K]  
 $T_c$  : Température de la source froide..... [K]  
 $T_a$  : Température de l'eau de mer a l'entrée de la chaudière ..... [K]  
 $T_b$  : Température de l'eau de mer a la sortie de la chaudière ..... [K]  
 $U$  : Coefficient globale d'échange..... [kW/m<sup>2</sup>.K]  
 $A$  : La surface d'échange thermique..... [m<sup>2</sup>]

**Lettres grecques :**

- $\lambda_3$  : Multiplicateurs indéterminés
- $\eta_1$  : Rendement thermique du premier cycle
- $\eta_2$  : Rendement thermique du deuxième cycle de la cascade
- $\eta$  : Rendement global de la cascade.
- $\eta_{C-A}$  : Rendement de Curzon and Ahlborn.
- $\eta_C$  : Rendement de Carnot

**Indices :**

- $k_1$  : Constante d'irréversibilité du premier cycle de la cascade irréversible.
- $k_2$  : Constante d'irréversibilité du deuxième cycle de la cascade irréversible.
- $k_3$  : Constante d'irréversibilité du troisième cycle de la cascade irréversible.
- $A_{mi}$  : Ecart moyen de température dans les échangeurs thermiques..... [K]
- $w_{ij}$  : Variables poids dans le Lagrangien.
- $D$  : Dénominateur..... [K]

**Liste des tableaux :**

- Tableau 1.1** : Terminaux de réception de GNL.....5
- Tableau 1.2** : Production mondiale du GNL.....6
- Tableau 1.3** : Coût de capital et de production du Projet GNL Nigeria-Greenfield.....7
- Tableau 1.4** : Investissement en milliards USD pour une chaîne de capacité 2x3 Mt/an.....12
- Tableau 1.5** : Navires livrés en 2002/2006.....13
- Tableau 3.1** : Résultats de l'optimisation de la cascade de deux cycles endoréversibles.....31
- Tableau 4.1** : Résultats de l'optimisation de la cascade de deux cycles irréversibles.....40
- Tableau 5.1**: Comparaison des paramètres de la cascade et du cycle endoréversible pour  $R=\sqrt{283,2/111,6}$  .....43
- Tableau 5.2** : Performances de la cascade endoréversible pour deux valeurs de  $\Delta T$  égales à 15 et 70 °C .....44
- Tableau 5.3** : Comparaison des paramètres de la cascade endoreversible et celle irréversible.....45
- Tableau 5.4** : Performances de la cascade irréversible pour deux valeurs de  $\Delta T$  égales à 15 et 70 °C.....47
- Tableau A.1.1** : Résultats de l'optimisation de la cascade de trois cycles endoréversibles .....60

**Liste des Figures :**

- Figure 1.1** : Chaîne d'approvisionnement du GNL.....9
- Figure 1.2**: Schéma illustratif du procédé de liquéfaction du GNL.....10
- Figure 2.1** : Diagramme Température Entropie d'un cycle endoréversible.....18
- Figure 2.2**: Diagramme Température Entropie d'une cascade à deux cycles endoréversibles.....18
- Figure 2.3** : Schéma d'une cascade de regazéification à deux cycles.....20
- Figure 3.1**: Diagramme Température Entropie d'une cascade à deux cycles endoréversibles.....23
- Figure 4.1** : Diagramme Température Entropie d'une cascade à deux cycles irréversibles.....33
- Figure 5.1** : Diagramme T-s d'un cycle puissance endoreversible.....42
- Figure 5.2** : Diagramme T-s d'une cascade de deux cycles endoreversibles.....42
- Figure 5.3** : Diagramme T-s d'un cycle de puissance endoreversible.....46
- Figure 5.4** : Diagramme T-s d'un cycle de puissance irréversible.....46
- Figure 5.5**: Puissance de la cascade en fonction des coefficients d'irréversibilité.....47
- Figure 5.6** : Rendement thermique de la cascade en fonction des coefficients d'irréversibilité. ....47
- Figure 5.7** : Effet d'augmentation de la température de la source chaude sur la puissance de la cascade.....48
- Figure 5.8** : Effet d'augmentation de la température de la source chaude sur la puissance de la cascade.....48
- Figure A.1.1** : Diagramme Température Entropie d'une cascade à trois cycles endoréversibles.....54
- Figure A.2.1** : Diagramme Température Entropie d'une cascade à trois cycles irréversibles.....62

# Chapitre I : Introduction

## 1.1 Le commerce mondial du GNL

La demande mondiale de GNL (Gaz Naturel Liquéfié) a progressé de 6,2% entre 2003 et 2004; elle laisse entrevoir la nécessité de réaliser de nouveaux terminaux de regazéification dans les pays de la communauté Européenne, aux USA et au Japon dans un avenir très proche. La capacité mondiale de réception est actuellement de 22.578.000 m<sup>3</sup> de GNL, le principal importateur de GNL étant le Japon avec une capacité de 14.368.000 m<sup>3</sup> soit 64%, dans 25 terminaux et une capacité additionnelle de 580.000 m<sup>3</sup>, dans deux nouveaux terminaux d'ici 2010. La Corée du Sud est le second importateur avec 3.460.000 m<sup>3</sup> dans 4 terminaux et l'Europe occidentale troisième avec 2 141.000 m<sup>3</sup> dans onze terminaux [1-2].

En effet, Il existe actuellement plus d'une cinquantaine de terminaux d'importation dans 17 pays différents [3]. Le tableau ci-dessous donne les chiffres d'importation par pays en 2007 et le nombre de terminaux qui y existent.

**Tableau 1.1** : Terminaux de réception de GNL [3].

| Pays             | Volume (Mt/an) 2007 | %      | Terminaux d'importation actifs | %      |
|------------------|---------------------|--------|--------------------------------|--------|
| Japon            | 64,8                | 39,24% | 25                             | 44,64% |
| Corée du Sud     | 25,1                | 15,20% | 4                              | 7,14%  |
| Espagne          | 17,6                | 10,66% | 5                              | 8,93%  |
| États-Unis       | 15,9                | 9,63%  | 5                              | 8,93%  |
| France           | 9,5                 | 5,75%  | 2                              | 3,57%  |
| Taiwan           | 8                   | 4,84%  | 1                              | 1,79%  |
| Inde             | 7,3                 | 4,42%  | 3                              | 5,36%  |
| Turquie          | 4,4                 | 2,66%  | 2                              | 3,57%  |
| Belgique         | 2,3                 | 1,39%  | 1                              | 1,79%  |
| Italie           | 1,8                 | 1,09%  | 1                              | 1,79%  |
| Portugal         | 1,7                 | 1,03%  | 1                              | 1,79%  |
| Royaume-Uni      | 1,1                 | 0,67%  | 1                              | 1,79%  |
| Chine            | 2,83                | 1,71%  | 1                              | 1,79%  |
| Mexique          | 1,6                 | 0,97%  | 1                              | 1,79%  |
| Grèce            | 0,4                 | 0,24%  | 1                              | 1,79%  |
| Porto Rico       | 0,5                 | 0,30%  | 1                              | 1,79%  |
| Rép. dominicaine | 0,3                 | 0,18%  | 1                              | 1,79%  |
| Total            | 165,13              | 100%   | 56                             | 100%   |

En 2005, le commerce de GNL représentait au total 135 millions de tonnes, correspondant à 190 Gm<sup>3</sup> de gaz naturel. Plus de 6% du gaz consommé dans le monde est transporté sous cette forme, et cette part ne cesse d'augmenter. En matière de production de

GNL, treize pays exportaient du gaz naturel liquéfié en 2004, et quinze en importent, un seul pays, en l'occurrence les Etats-Unis d'Amérique, est à la fois exportateur et importateur.

**Tableau 1.2** : Production mondiale du GNL [3]

| <i>Pays</i>                | <b>Volume<br/>(Mt/an)<br/>2005</b> | <b>%</b> |
|----------------------------|------------------------------------|----------|
| <i>Algérie</i>             | 23,4                               | 17,28%   |
| <i>Indonésie</i>           | 22,6                               | 16,69%   |
| <i>Malaisie</i>            | 20,4                               | 15,07%   |
| <i>Qatar</i>               | 19,43                              | 14,35%   |
| <i>Trinidad</i>            | 10,05                              | 7,42%    |
| <i>Australie</i>           | 10,65                              | 7,87%    |
| <i>Nigeria</i>             | 8,63                               | 6,37%    |
| <i>Brunei</i>              | 6,6                                | 4,87%    |
| <i>Oman</i>                | 6,6                                | 4,87%    |
| <i>Émirats</i>             | 5,1                                | 3,77%    |
| <i>États-Unis (Alaska)</i> | 1,32                               | 0,97%    |
| <i>Libye</i>               | 0,62                               | 0,46%    |
| <i>Total</i>               | 135,4                              | 100%     |

L'expansion des moyens d'exportation suit celle des importations. Contrairement au pétrole où le marché est très diversifié, le commerce du GNL s'est développé dans les années 1970 et 1980 sur la base de contrats spécifiques et de livraison dédiées ; la flotte de méthaniers était optimisée pour des volumes annuels déterminés et une distance maritime unique. La condition commerciale contractuelle du *take or pay* était destinée à assurer la rentabilité des usines de liquéfaction qui requiert des investissements lourds et des prix de cession relativement bas. Le projet *Sonatrach El Paso* a été un modèle du genre, en lourdeurs administratives imposées par la *FPC (Federal Power Commission)* en application des conditions de la régulation du marché du gaz aux USA, et en planification serrée entre les installations de production, de stockage et de la flotte de méthaniers [4]. Il avait nécessité une dizaine d'années avant de connaître un début d'exécution vers la fin des années 1970.

Le commerce du GNL s'est surtout développé pour satisfaire les demandes pressantes du Japon, de Taiwan et de la Corée du Sud en gaz naturel. Les fournisseurs potentiels sont les pays les plus proches ; d'abord l'Alaska, puis Brunei en Indonésie, et enfin les pays du Golfe et le Yémen. L'Algérie qui est désavantagée par la distance et le passage obligé du canal de Suez est restée sans marché de remplacement après l'annulation du contrat *El Paso* pour lequel le complexe *GNL1* avait été construit et pour lequel elle est restée endettée jusqu'en début des années 1980. La Libye subit le même désavantage de distance mais ne connaît pas les mêmes besoins financiers étant, elle, dotée d'une plus grande capacité de production de pétrole pour une population relativement réduite.



Le commerce du GNL s’est modifié après la libéralisation du marché américain de l’énergie dans les années 1980, l’augmentation du prix de cession du GNL après son alignement sur celui du pétrole brut et la dénonciation de la clause du *Take or Pay* par les USA. Les pays européens qui ont depuis vingt ans bénéficié des fournitures des gisements de Hollande et de la mer du Nord et qui continuent à recevoir de grandes quantités de gaz russe, ont moins besoin de GNL. Aujourd’hui, les marchés européen et américain du GNL s’organisent autour de pôles de réception *Hubs* qui alimentent des réseaux de distribution existants. Le GNL y est livré selon des contrats de longue durée ou de marché *spot*, stocké pour le compte d’acheteurs qui le vendront comme toute autre commodité. Ce commerce s’est ainsi libéralisé et ouvert aux compagnies de distributions et aux traders [5].

Le commerce du GNL s’organise aujourd’hui autour de pôles de réception ; le Bassin Pacifique pour les marchés asiatique et américain, et le Bassin Atlantique pour le marché américain et européen. Les pôles de réception de l’Europe méditerranéenne se développent en Espagne pour des livraisons en provenance d’Egypte, de Libye, d’Algérie, du Nigeria et de Trinidad. On remarque la fourniture de GNL à partir de pays éloignés comme le Nigeria et Trinidad devient compétitive avec la rentabilité induite par les économies d’échelles obtenues avec les grandes unités de production.

Une distribution typique des investissements entre la production, le transport par méthaniers et la regazéification est donnée en tableau 1.3 pour une installation de production au Nigeria composée de deux trains de 3,3 millions de tonnes métriques par an chacun destiné à la côte Est des USA pendant 20 ans. La distance est d’environ 11 480 kms.

**Tableau 1.3 :** Coût de capital et de production du Projet GNL Nigeria-Greenfield [6].

| <b>Installations de production et de transport</b> | <b>Capital, \$/MT.an</b> | <b>%</b>    | <b>Coût opératoire \$/MT</b> | <b>Coût total \$/MT et par million BTU</b> |
|--|--------------------------|-------------|------------------------------|--|
| Production, collecte, traitement et gazoduc        | 197,0                    | 26,0%       | 0,80                         | 10,65/ 0,208                               |
| Liquéfaction et stockage                           | 242,4                    | 32,0%       | 1,22                         | 13,34 /0,261                               |
| Flotte de 10 méthaniers                            | 242,4                    | 32,0        | 0,98                         | 13,10 /0,256                               |
| Regazéification (variable)                         | 75,8                     | 10,0%       | 0,39                         | 4,18 /0,082                                |
| <b>Total</b>                                       | <b>757,6</b>             | <b>100%</b> | <b>3,39</b>                  | <b>41,27 /0,806</b>                        |

On remarquera tout d’abord que les coûts d’investissement et opératoire liés à la regazéification semblent élevés par rapport à ceux liés à la production et la liquéfaction ; alors que la liquéfaction consomme environ 12% du gaz reçu, la regazéification n’en consomme que 1,5 à 2% [6] ; de plus la regazéification ne nécessite que des échanges thermiques alors que le procédé de liquéfaction nécessite des machines tournantes et des procédés plus sophistiqués. On

peut penser que la différence provient principalement du coût de la main d'œuvre qui est environ 10 fois plus élevé dans les pays industrialisés importateurs.

Les coûts de production, de transport et regazéification varient beaucoup d'une source à une autre ; certains pourraient même être biaisés en faveur des importateurs, une façon d'augmenter la marge bénéficiaire du distributeur.

## 1.2 Qu'est- ce que le GNL ?

Le gaz naturel liquéfié, ou GNL, est tout simplement du gaz naturel à l'état liquide. Lorsque le gaz naturel est refroidi à une température d'environ  $-160\text{ }^{\circ}\text{C}$  (ou  $-260\text{ }^{\circ}\text{F}$ ) [5] à la pression atmosphérique, il se transforme en un liquide clair, transparent et inodore. Le GNL est non corrosif et non toxique. Le procédé de liquéfaction retire d'abord le dioxyde de carbone, les composés sulfurés et l'eau contenus dans le gaz naturel, le transformant ainsi en un mélange composé principalement de Méthane et de faibles concentrations d'Ethane, Propane, Butanes et C5+. À l'état liquide débarrassé des C5+, le gaz naturel est réduit à  $1/600$  de son volume original, ce qui rend économique son transport sur de longues distances dans des navires-citernes spécialement conçus à cet effet, donnant ainsi naissance à de véritables chaînes d'approvisionnement incluant les puits producteurs, les usines de traitement, les réseaux de gazoducs, les usines de liquéfaction, les terminaux de chargement des méthaniers, les terminaux d'importation et de stockage, les usines de regazéification et de réinjection dans les réseaux de distribution.

La combustion du gaz naturel est plus rapide et plus propre que celle des hydrocarbures liquides ; elle produit aussi moins de suie et environ 20% de moins de  $\text{CO}_2$  pour la même énergie, ce qui permet de réduire les effets de serre et le réchauffement climatique. Son transport est plus économique sous forme liquéfié pour les marchés d'outre mer et les grandes distances (2000-3000 km) sur le même continent. Cependant, le gaz russe de Sibérie est encore transporté sous forme gazeuse par faisceau de conduites de gros diamètres atteignant les 60 pouces.

La chaîne d'approvisionnement du GNL, illustrée dans la figure 1.1 ci-dessous consiste en plusieurs éléments inter-reliés. Dans les pays producteurs, le gaz naturel est extrait des bassins et acheminé par pipelines jusqu'aux usines de liquéfaction, où il est réduit à l'état liquide et stocké avant chargement.

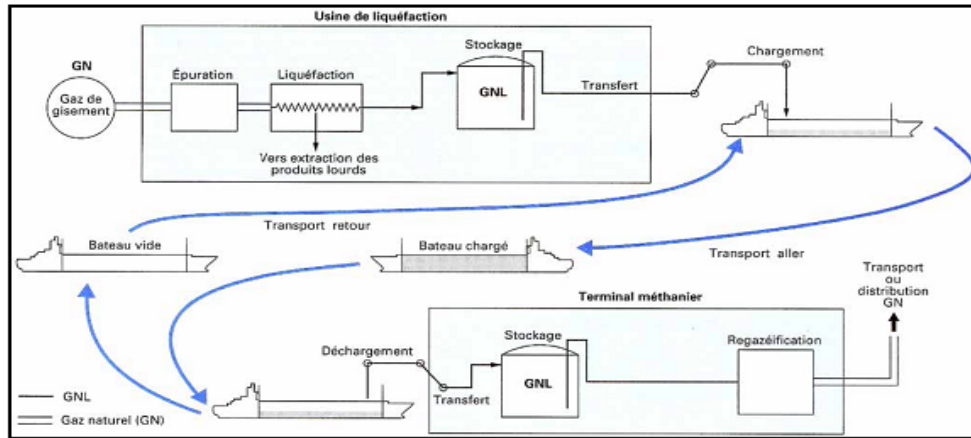


Figure 1.1 : Chaîne d’approvisionnement du GNL [7]

Les usines de liquéfaction sont construites sur des sites portuaires afin de permettre le remplissage des citernes des navires méthaniers à quai. Les méthaniers livrent la cargaison de GNL dans les terminaux de réception des pays importateurs, où le gaz naturel est stocké, regazéifié et injecté dans des pipelines afin d’être livré aux consommateurs.

### 1.3 La liquéfaction du gaz naturel

C’est en Algérie, dans les années 1960, qu’est née l’industrie du GNL de grande capacité, avec pour objectif l’approvisionnement en gaz des marchés britannique et français par l’usine de liquéfaction de la *CAMEL*. Cette initiative découlait principalement de l’eau et des fractions lourdes ; ce gaz est ainsi rendu apte au transport sur une distance de 550 km, ce qui a nécessité la réalisation de plusieurs stations de recompression. Aujourd’hui, les installations de production et de traitement de gaz naturel de Hassi R’Mel sont devenues une plaque tournante qui reçoit aussi le gaz associé de Hassi Messaoud et des champs limitrophes. Ces installations produisent également de grandes quantités de GPL et de gasoline. L’importance des réserves du champ de Hassi R’Mel, crédité à l’époque à plus de 2000 milliards de M3, et la faible capacité du marché domestique algérien de cette époque, ont amenés les dirigeants du pays à mettre en place une stratégie tournée vers l’extérieur, notamment le marché européen. Avant d’être acheminé par gazoduc, le gaz de Hassi R’Mel est d’abord traité sur le champ pour le débarrasser

### 1.4 Description d’une usine de liquéfaction

La capacité d’un train (module) étant technologiquement limitée ; une usine de liquéfaction de GNL se compose de plusieurs trains de production. Chaque train comporte toutes les sections nécessaires permettant la production de GNL à partir de gaz naturel brut :

- **Section de démercuration** : le mercure étant très corrosif, il risque d’endommager les tubes en aluminium ; on l’extrait dans des ballons.
- **Section de décarbonatation** : le CO<sub>2</sub> est extrait dans des colonnes d’absorption. Il est très important de l’extraire car il se solidifie aux basses températures, obstruant ainsi les tubes.

- **Section de déshydratation** : le gaz naturel décarbonaté est refroidi au propane pour enlever de grandes quantités d'eau dans un séparateur avant de passer dans le sécheur et puis dans un filtre pour être débarrassé de toute l'eau.
- **Section de pré-refroidissement au propane** : le gaz, une fois traité, passe dans un échangeur pour être refroidi à une température de  $-26^{\circ}\text{C}$ .
- **Section de séparation des hydrocarbures** ; où l'on sépare les composants lourds de ce qui va être la composition finale du GNL ; on extrait ainsi un produit commercialisable, la gazoline.
- **Section compression au MCR** : le MCR est un mélange d'azote, de méthane et de propane. Ce mélange circule dans une boucle fermée à deux compresseurs où il est utilisé pour sous refroidir le GN à une température de  $-148^{\circ}\text{C}$ .
- **Section finale de liquéfaction** : le GNL sortant en tête de l'échangeur principale passe dans un ballon de détente où sa température atteint  $-161^{\circ}\text{C}$ , ce flash qui s'est produit libère un gaz léger riche en azote qui sera acheminé vers des brûleurs.

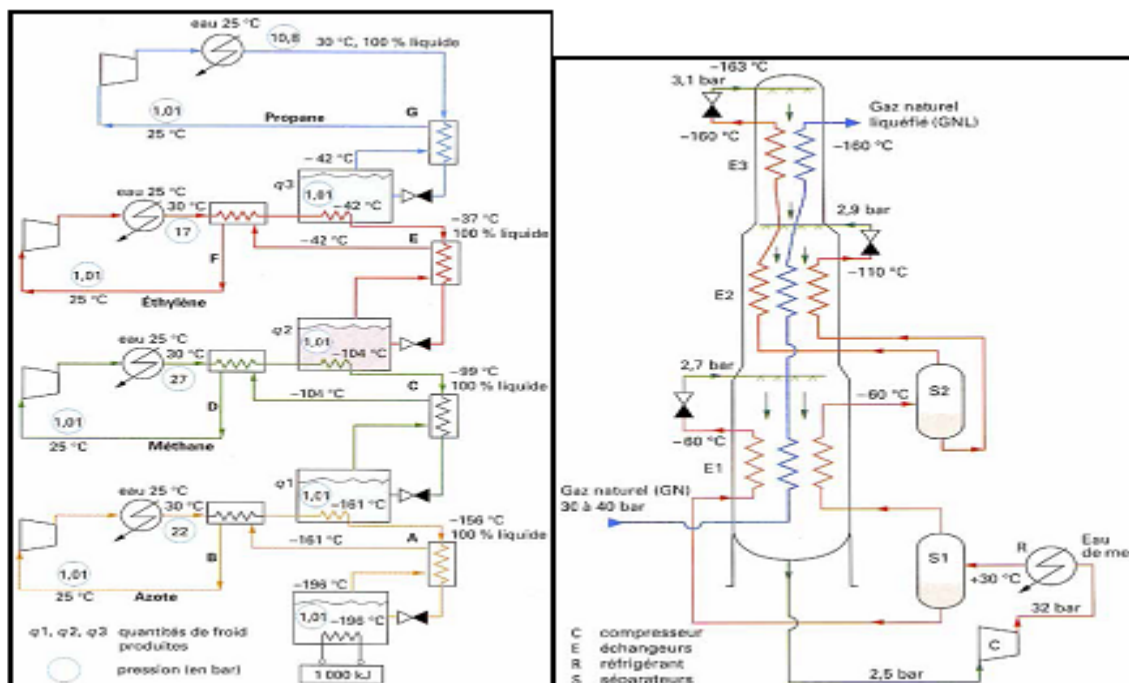


Figure 1.2: Schéma illustratif du procédé de liquéfaction du GNL [7]

Le GNL ainsi produit est envoyé pour être stocké de façon temporaire dans des réservoirs, via des lignes de transfert. Le GNL sera ensuite transporté dans des lignes vers les terminaux de chargement. Au bout de chaque ligne il y a une conduite avec une vanne pour le dépotage sur méthanier.

La liquéfaction du gaz naturel nécessite une grande puissance de réfrigération du fait de la baisse de température de liquéfaction nécessaire,  $-161^{\circ}\text{C}$  à  $1\text{ atm}$ . En cet état, l'enthalpie de vaporisation du Méthane est de  $510\text{ kJ/kg}$  et sa liquéfaction environ  $1500\text{ kJ/kg}$ , soit environ  $450000\text{ kW}$  pour une capacité de production de 10 milliards de  $\text{m}^3$  par an répartie sur six modules. Les compresseurs absorbent ainsi quelques  $96.000\text{ ch}$  par module. Ces chiffres relativement optimistes sont consistants avec une auto consommation d'environ  $12\%$ .

Le GNL doit répondre à des spécifications commerciales précises, variables selon le marché auquel il est destiné, en termes de pouvoir calorifique et d'indice de *Wobbe*, qui caractérise la capacité d'accrochage de la flamme sur les brûleurs dans les réseaux domestiques. Certains marchés nécessitent donc un GNL appauvri en Ethane, donc un cycle de liquéfaction qui extrait la quantité excédentaire d'Ethane. Les premières usines de liquéfaction de grande production (*CAMEL et Phillips Marathon*) ont utilisé le procédé à trois cascades développé dans les années 1950 pour les usines de *Peak shaving* aux USA; les usines suivantes ont toutes utilisé le procédé à réfrigérant mixte avec pour objectif de réduire la puissance de liquéfaction et l'auto consommation (*Marsa el Brega, Skikda, Arzew*). Le cycle de liquéfaction le plus utilisé actuellement est le procédé *APCI* qui allie une cascade de pré refroidissement au propane et un cycle de liquéfaction à réfrigérant mixte dans le but d'augmenter la capacité de liquéfaction par module pour réduire le coût du capital. Les six trains de GNL 1 (technologie des années 1970) produisent la même capacité que les deux modules de l'usine de Greenfield-Nigéria (technologie des années 2004).

### **1.5 Les deux modes de transport: gazoduc et méthaniers**

Le gaz naturel est transporté soit sous forme de gaz comprimé dans les gazoducs, soit sous forme liquide (GNL) dans des méthaniers. Aujourd'hui, le transport par gazoduc est de très loin majoritaire (près de  $95\%$  des quantités), mais le transport par méthanier est en croissance rapide.

Le gaz naturel est transporté sur les distances terrestres sous forme de gaz comprimé dans les gazoducs ; selon les débits, le diamètre des conduites et le profil du parcours. Les stations de recompression sont distantes de  $50$  à  $60\text{ kms}$  ; un calcul énergétique simplifié permet de montrer qu'un transport par liquide comprimé serait théoriquement justifié pour des distances allant de  $2000$  à  $3000\text{ kms}$  selon les diamètres des conduites. Plus le diamètre est grand, plus cette distance seuil est élevée. Mais ce calcul simplifié est loin de représenter la complexité de la solution économique actuelle. Ces réserves expliquent les solutions de transports adoptées pour les gazoducs de gros diamètre en nappe pour acheminer le gaz russe de Sibérie aux pays de l'Ouest européen. A titre d'illustration, les stations de recompression qui sont au nombre de  $10$  sur les gazoducs partant de Hassi R'Mel consomment  $1\%$  par station, soit au total  $10\%$ . La liquéfaction, outre qu'elle nécessite un investissement élevé, consomme entre  $12$  et  $15\%$ . Actuellement, seuls  $75\%$  du gaz partant de Hassi R'Mel sont disponibles dans les cuves des méthaniers pour la commercialisation. L'amélioration des rendements énergétiques des stations de compression et de l'usine de liquéfaction devrait pouvoir réduire l'autoconsommation de cette chaîne à  $18-20\%$ .

Mais l'éloignement des champs gaziers de la côte reste un handicap commercial important pour le cout de la liquéfaction du gaz algérien.

Les nouveaux méga projets de gazoducs actuellement à l'étude devraient bénéficier d'un meilleur rendement énergétique étant donné la valeur commerciale acquise par le gaz naturel. Le projet de gazoduc de Sibérie vers la Chine a une capacité de 25-30 milliards de  $m^3/an$  est considéré avec un diamètre de 56 pouces selon une route directe à travers la Mongolie, (2.800-3.400 kms) et une route qui évite la Mongolie (5.600-6.500 kms) ; le coût de ces alternatives est estimé respectivement entre 7 et 8 milliards, et 12-15 milliards de USD. A titre de comparaison, le projet destiné à la Corée d'une capacité de 25-28 milliards de  $m^3/an$ , comporte deux possibilités, chacune avec un gazoduc à deux pipes de 48 pouces ; la première de la *Yacoutie* vers la *Corée* sur une distance de 5.000 à 6.000 kms, pour un coût de 14-16 milliards de USD et la seconde de Vladivostok-Corée, sur une distance de 2.200-2.600, kms pour un coût de 5,5-6,5 milliards de USD [8].

Quoiqu'approximatives, ces estimations permettent d'obtenir des coûts unitaires de 2,35-2,50 millions USD/km pour la première et 2,14-2,31 millions USD/km pour la deuxième solution du gazoduc vers la Chine. Pour le projet de gazoduc vers la Corée, on obtient respectivement 2,67-2,80 millions USD/km pour la première, et 2,50 millions USD/km pour la deuxième version. Les coûts unitaires d'investissement du projet Coréen sont environ 23% plus chers, mais plus économiques en énergie ; les diamètres de 48 *pouces* sont équivalant à un diamètre unique de 67,88 *pouces* et ont sait que les pertes de charges sont approximativement inversement proportionnelles au diamètre du gazoduc [8].

**Transport par méthaniers :** Le tableau 1.4 donne un exemple de coûts d'investissement pour une chaîne de GNL, depuis le gisement de gaz jusqu'au terminal de réception. La plupart des installations de liquéfaction existantes comportent des unités dont la capacité unitaire voisine les 3  $Mt/an$  (en pratique, entre 2 et 4) ; l'exemple donné sur le tableau correspond à une capacité de 2 fois 3  $Mt/an$ , alimentant en aval une centrale à cycle combiné d'une capacité de 7000 MW électrique. Cependant, la nouvelle tendance est pour des capacités unitaires plus élevées afin de diminuer le coût de la liquéfaction et de rendre plus économiques des projets potentiels qui ne l'étaient pas (comme par exemple le projet du Nigeria).

**Tableau 1.4 :** Investissement en milliards USD pour une chaîne de capacité 2x3  $Mt/an$  [8].

| Production | Liquéfaction | Flotte de 10 méthaniers | Regazeification | Centrale à cycle combiné (7200mw) | Cout total en 109 USD |
|------------|--------------|-------------------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------------|
| 1          | 2.5          | 2                       | 1               | 4                                 | 10.5                  |



On constate que l'investissement total est légèrement supérieur à 10,5 milliards USD, dont 6,5 pour l'ensemble de la chaîne Production et Transport. En d'autres termes, il faut prévoir un investissement "amont" de l'ordre de 1000 USD pour acheminer un débit de 1tonne/an de gaz.

**Tableau1.5** : Navires livrés en 2002/2006. [9]

| Année de livraison | Nombre de méthanier livrés | Capacité totale en m <sup>3</sup> |
|--------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 2002               | 3                          | 413 500                           |
| 2003               | 17                         | 2 343 700                         |
| 2004               | 20                         | 2 764 500                         |
| 2005               | 13                         | 1751 200                          |
| 2006               | 7                          | 980 800                           |
| <b>Total</b>       | <b>60</b>                  | <b>8 253 700</b>                  |

## 1.6 Les solutions de regazéification du GNL

La croissance récente de la consommation du gaz naturel dans les pays industrialisés a résulté, à la fois d'un développement de l'offre liée à l'extension des réseaux de distribution, mais aussi de la mise au point de nouvelles technologies permettant une meilleure utilisation du gaz naturel pour des applications dans presque tous les services énergétiques : production d'électricité, chauffage et climatisation dans l'habitat et les bâtiments tertiaires et industriels, et procédés industriels. Seule l'application aux transports reste modeste, mais fait l'objet de recherches très actives.

La regazéification conventionnelle du GNL est un processus qui demande une source de chaleur extérieure et des équipements. Comme dans tout projet de transformation, la solution recherchée consiste à obtenir le coût minimal par m<sup>3</sup> de GNL regazéifié ; celui-ci comprend un coût lié à l'investissement et un autre au coût opératoire dont l'essentiel est le coût énergétique. La chaleur de regazéification est généralement prévue pour utiliser plusieurs types de vaporisateurs. La regazéification qui consiste globalement au réchauffement du gaz, de -160 °C jusqu'au-dessus de 0°C, s'effectue à haute pression (*entre 60 et 100 bars*), le plus souvent au moyen d'échangeurs à ruissellement d'eau de mer ; c'est une technique attrayante par son efficacité énergétique lorsque la disponibilité de l'eau s'y prête. Le GNL peut aussi être réchauffé par combustion d'une partie du gaz dans des brûleurs immergés.

La regazéification par chauffage d'un milieu intermédiaire avec l'eau de mer est la méthode de vaporisation qui devient plus courante ; elle est choisit de telle sorte que la

consommation du carburant GNL soit minime. Toutefois, les brûleurs immergés, les pompes à eau de mer et les structures des prises d'eau et les déversoirs d'eau sont relativement coûteux.

La vaporisation par échange thermique avec l'eau de mer [10], sans autre apport thermique par combustion, nécessite de gros investissements en échangeurs et pompes à eau dont les débits élevés sont dus au faible différentiel, de  $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ , imposé aux débits d'eau de mer pour des contraintes environnementales, et qui ne peut physiquement aller au delà des  $20^{\circ}\text{C}$ . La vaporisation, la plus utilisée actuellement, est moins contraignante au regard de l'environnement ; elle consiste à utiliser une combustion de GNL vaporisé dans des brûleurs immergés dans un bain d'eau traversé par des faisceaux tubulaires transportant le GNL à gazéifier. L'énergie de combustion ne sert qu'à la regazéification.

La vaporisation avec cogénération de puissance utilise des gaz d'échappement qui échangent leur énergie par contact direct avec de l'eau pulvérisée ; celle-ci s'évapore puis se condense à  $40^{\circ}\text{C}$  avant d'alimenter un bain d'eau traversé par des faisceaux tubulaires dans lesquels circule le GNL. Cette solution innovante est créditée avec une efficacité énergétique totale de  $106\%$  ; la puissance générée paie largement pour l'investissement additionnel requis.

Un exemple récent d'une plus grande intégration de terminal de GNL au réseau énergétique est le projet de réalisation d'un cycle combiné au terminal du Port de Barcelone [11]. Cette centrale thermique comportera deux cycles de  $400\text{ MWe}$  chacun avec une turbine à gaz, un récupérateur générateur de vapeur *HSRG*, une turbine à vapeur à triple pression avec réchauffe et une tour de refroidissement hybride. La vaporisation du GNL est obtenue par échange thermique avec une solution de  $60\%$  d'eau et  $40\%$  de glycol d'Éthylène en circuit fermé qui permet aussi de refroidir l'air admis aux compresseurs de  $17$  à  $7^{\circ}\text{C}$  avec une approche constante égale à  $5^{\circ}\text{C}$ . Cette intégration du froid permet d'augmenter la puissance de la turbine de  $14\text{ MW}$  en Janvier à  $34\text{ MW}$  en Juillet-Août et d'atténuer les effets des variations saisonnières de la température ambiante

Dans les nouveaux complexes énergétiques, la regazéification du GNL est ainsi abordée dans un contexte d'intégration énergétique généralisée pour une plus large optimisation; la regazéification, qui était à l'origine, une simple transformation de phase pour la commodité de transport par canalisations est aujourd'hui intégrée dans la conversion thermomécanique, elle-même optimisée dans des cycles combinés gaz vapeur avec une réfrigération de l'air compresseur pour éviter les chutes de puissance du cycle à gaz par temps chaud . Les aspects essentiels de la regazéification du GNL ont aussi été abordés avec l'extraction des fractions lourdes et autres utilisations du froid dans le contexte du terminal de *Fos sur Mer* [7].

Une publication plus récente compare brièvement six procédés de regazéification [12]:

- par combustion et boucle intermédiaire Ethylène-glycol.
- par combustion avec brûleurs immergés.
- par batterie d'échangeurs à eau de mer.



- par boucle fermée par tour de chauffage et brûleurs d'appoint.
- par boucle fermée à eau chauffée par des gaz d'échappement de turbine à gaz.
- par boucle fermée dans le circuit de condensation d'un cycle de Rankine.

La regazéification avec une combustion immergée aidée par une boucle fermée chauffée par aero-réfrigérants peut constituer une solution de compromis temporaire entre le coût de capital et le coût opératoire, au détriment de la complexité du système dont l'évaluation économique devient moins fiable [13].

Les procédés de regazéification se répartissent généralement en trois catégories : les procédés avec combustion, les procédés sans combustion et les procédés avec intégration énergétique qui sont caractérisés par un investissement relativement élevé. Les procédés avec combustion sont affectés par un coût opératoire croissant. On peut penser que l'évolution ascendante du coût de l'énergie et les contraintes environnementales imposeront de plus en plus les solutions de regazéification intégrées à la production de puissance électrique.

L'intégration énergétique des cycles de conversion d'énergie et des échangeurs de chaleur doit considérer non seulement les différences de températures qui affectent la taille des échangeurs mais aussi les niveaux de ces températures qui affectent le rendement des cycles thermomécaniques différemment. Le concept de thermodynamique en temps fini permet de concilier ces deux aspects antagonistes dans la production d'une puissance maximum par unité de conductance totale; le critère de puissance maximum semble tout à fait adapté aux cycles combinés et à la production de puissance mécanique à partir de flux énergétiques de récupération. On peut ainsi concevoir que l'énergie utilisée pour la regazéification serve aussi à produire de la puissance mécanique en prenant avantage du potentiel de température ainsi créé.

Le recours éventuel à une cascade de deux cycles est principalement lié à la difficulté de réaliser un cycle de puissance utilisant un fluide composé à base d'hydrocarbures dont les températures d'ébullition et de condensation accommodent les températures des sources.

La cascade de puissance à deux cycles endoréversibles et le cycle simple endoréversible, ont le même rendement, qui ne dépend que des températures des sources, et une puissance différente. Aussi, une cascade produit beaucoup moins de puissance que le cycle simple, la surface d'échange requise pour produire la même puissance est alors plus grande et inversement pour le rapport des puissances (cascade a deux cycles / un seul cycle endoréversible) ; dans le sens où le rapport des surfaces d'échange entre les deux options est l'inverse de celui des puissances.

Ainsi, le recours à la cascade de puissance est plus coûteux car il nécessite des moyens supplémentaires (moyens matériels et financiers), par rapport au cycle simple qui présente l'inconvénient de ne pas convenir à toutes les situations. En effet, la cascade à deux cycles est prioritaire par rapport au cycle endoréversible uniquement dans la situation où l'écart entre les

températures des sources froide et chaude soit tellement grand au point où on ne peut pas trouver le fluide qui se soumet à cette contrainte ; il serait alors plus opportun, dans ce cadre, d'optimiser la cascade afin que la puissance fournie soit maximum : c'est l'objectif recherché à travers notre étude.

Le concept de cycles de puissance à conductance thermique finie repose sur celui de cycles endoreversibles qui a fait l'objet d'un certain nombre de publications dont [14-19]. Le concept de cascade de puissance n'a pas fait à notre connaissance l'objet de publication.

Le présent travail se propose d'analyser le concept de cascades de cycles puissance endoreversibles et irréversibles, de comparer leurs performances avec un exemple d'application d'intérêt actuel.

Cette étude vise à élaborer des résultats purement analytiques qui déterminent les températures qui définissent les deux cycles de la cascade afin que la puissance soit maximale. Pour ce faire, nous avons structuré notre travail en cinq grands volets :

- Le premier volet pose la problématique de la regazéification du GNL.
- Le second étudie le problème de l'optimisation d'une cascade de puissance à deux cycles.
- Le troisième est consacré à l'optimisation d'une cascade irréversible de puissance.
- Le quatrième consiste à analyser et évaluer la signification des résultats obtenus.
- Le cinquième volet offre une conclusion générale et des perspectives de poursuite de cette étude.

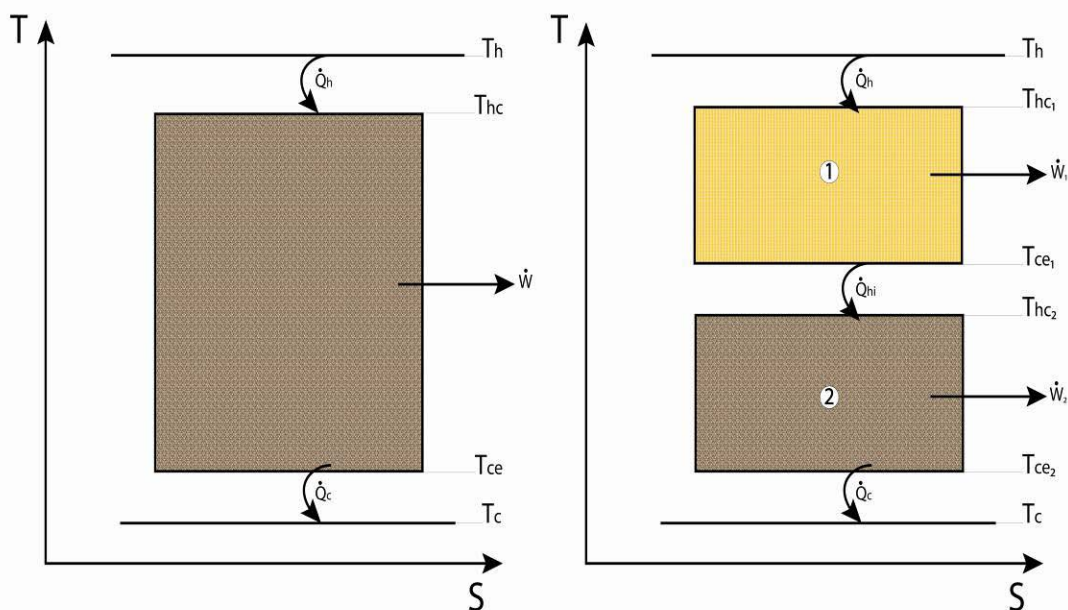
# **Chapitre II :**

# **Problématique de la regazéification du**

# **GNL**

Le gaz naturel est souvent considéré comme un bon combustible vis-à-vis de la limitation des émissions de gaz à effet de serre liées à la consommation d'énergie. Il est en effet très bien placé, à la fois parce qu'il peut se substituer à toutes les autres énergies primaires tant pour la production d'électricité que pour le transport, et parce qu'il rejette, moins de  $CO_2$  que le pétrole ou le charbon par unité d'énergie consommée. En contrepartie, les ressources recouvrables de gaz ne sont pas infinies, et une utilisation massive du gaz risque de provoquer des spéculations fortes sur les prix avant de se traduire par une raréfaction des ressources.

Comme le montrent les figures 2.1 et 2.2. Une cascade de deux cycles produit moins de puissance qu'un cycle endoréversible pour les mêmes températures des sources chaude et froide, et la même conductance thermique spécifiée.



**Figure 2.1** : Diagramme Température Entropie d'un cycle endoréversible.

**Figure 2.2**: Diagramme Température Entropie d'une cascade à deux cycles endoréversibles.

L'utilisation d'une cascade plutôt qu'un simple cycle est utile lorsqu'on ne dispose pas d'un fluide moteur de cycle dont les températures de condensation et d'ébullition conviennent aux températures de la source chaude et de la source froide. La cascade à puissance maximale consomme un plus grand potentiel de température qu'un simple cycle. Les résultats de travaux antérieurs sur les cycles endoréversibles de puissance et en particulier ceux donnés par [20] pour des écarts de températures moyens arithmétiques dans la chaudière et dans le condenseur, où  $T_h$  est défini par :  $T_h \equiv \frac{(T_a + T_b)}{2}$  ( $T_a$  et  $T_b$  étant respectivement les températures d'entrée et de sortie de l'eau de mer dans la chaudière), montrent que la puissance maximale et les flux thermiques par unité de conductance totale  $C_t$  sont donnés par les expressions:

$$\begin{aligned}
 P_{MAX} / C_t &= \frac{T_c}{4} (R-1)^2 \\
 Q_h / C_t &= \frac{T_c}{4} R(R-1) \\
 Q_c / C_t &= \frac{T_c}{4} (R-1)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les isothermes du cycle endoréversible et son rendement sont donnés par les expressions:

$$\begin{aligned}
 T_{hc} &= \frac{T_c}{2} R(R+1) \\
 T_{ce} &= \frac{T_c}{2} (R+) \\
 \eta &\equiv \frac{P_{MAX}}{Q_h} = 1 - \frac{T_{ce}}{T_{hc}} = 1 - \frac{1}{R}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

R étant défini par le rapport  $\sqrt{\frac{T_h}{T_c}}$ ; le rapport du rendement de Carnot et du rendement à puissance maximale, dit aussi rendement de Curzon-Ahlborn est compris entre 1 et 2, car il est égal à :

$$\frac{\eta_c}{\eta_{c-A}} = 1 + \frac{1}{R} \tag{2.3}$$

Le rendement de Curzon-Ahborn [23] est crédité pour correspondre à deux ou trois pourcent près, au rendement actuellement observé dans un certain nombre de centrales thermiques [20]. Pour un fluide de cycle hypothétique, qui pourrait accommoder la température de la source chaude correspondant à de l'eau de mer qui entre à 15 °C et sort à 5 °C ( $T_h=283,2 K$ ) et celle de la source froide correspondant à la température normale d'ébullition du méthane ( $T_c=111,6 K$ ), les équations (2.1) à (2.2) donnent les résultats suivants:

$$\begin{aligned}
 P_{MAX} / C_t &= 9.811 K \\
 Q_h / C_t &= 26.355 K \\
 Q_c / C_t &= 16.545 K
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$T_{hc} = 230.49 K; T_{ce} = 144.69 K \tag{2.5}$$

$$\eta_{c-A} \equiv 0.372$$

$$\frac{\eta_c}{\eta_{c-A}} = 1.628 \tag{2.6}$$

On sait aussi que dans le cycle endoréversible à puissance maximale [20], la conductance thermique totale définie par le produit  $U.A$  (coefficient global d'échange par la surface d'échange) est répartie également entre la chaudière et le condenseur. Les coefficients  $U$  dans la chaudière et le condenseur sont en général très différents, mais ici il s'agit d'échanges liquide-liquide dans les deux cas et on peut en première approximation prendre la même valeur égale à 3  $kW/m^2-K$ .

D'après [20], la vaporisation d'un kg/s de méthane à 111,6 K donne lieu à un transfert thermique de,  $Q_c= 510.8 kW$  donc à une puissance de  $P = 302.9 kW$  et à un flux thermique chaudière de  $Q_h= 813.7 kW$ . Les écarts de température moyens dans la chaudière et le condenseur

sont de 52,6 et 33,1 K respectivement ; la conductance thermique totale est égale à 30,87 kW/K, à répartir également entre la chaudière et le condenseur, Ces résultat seront détaillés par la suite.

Ainsi, pour un coefficient d'échange global  $U$  égal à  $3 \text{ kW/m}^2.K$  pour les deux échangeurs, la surface d'échange nécessaire à la regazéification de 1 kg/s de méthane serait de  $10,29 \text{ m}^2$ . D'après ces estimations, la regazéification d'un kg/s de méthane nécessite  $10,29 \text{ m}^2$  de surface d'échange et  $19,5 \text{ kg/s}$  de débit d'eau pour produire  $302,9 \text{ kW}$  de puissance mécanique. On peut réduire le débit d'eau et la surface d'échange nécessaires tout en augmentant la puissance mécanique générée ; il suffirait d'augmenter la température de la source chaude en utilisant par exemple en circuit fermé une solution d'eau et glycol d'éthylène chauffée par des gaz résiduels d'un cycle combiné gaz-vapeur ou par combustion de gaz naturel à prélever sur la regazéification. Ce concept sera abordé maintenant avec une cascade de deux cycles endoréversibles utilisant le méthane et l'éthane comme fluides de cycle.

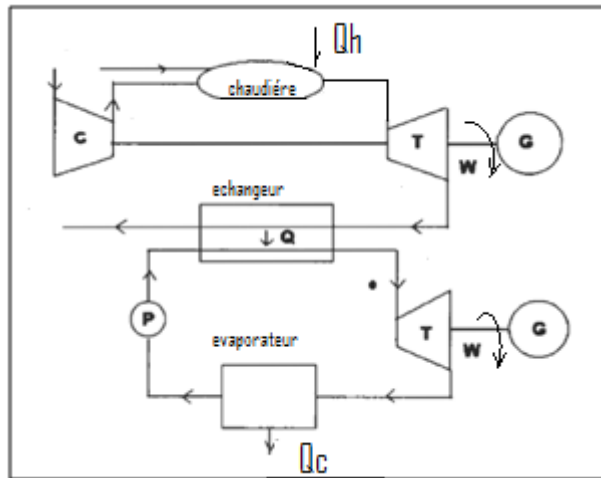


Figure 2.3 : Schéma d'une cascade de regazéification à deux cycles [22].

Dans les prochains chapitres, on compare les performances d'un seul cycle à celles d'une cascade Méthane-Ethane dans les deux cas : endoréversible et irréversible.

La figure 2.2 montre la disposition d'une telle cascade qui reçoit un flux  $Q_h$  de la source chaude à la température moyenne  $T_h$  et cède un flux  $Q_c$  à la source froide à la température moyenne  $T_c$  constituée par le débit de GNL à regazéifier. La définition du problème d'optimisation et sa méthode de solution sont les suivantes :

Soit  $P$  la puissance de la cascade à maximiser pour une conductance thermique totale donnée : La puissance  $P$  est en fait la somme des deux puissances des deux cycles 1 et 2.

$$P = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 \quad (2.7)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = \dot{Q}_h - \dot{Q}_{h1} \\ \dot{W}_2 = \dot{Q}_{h1} - \dot{Q}_c \end{cases} \quad (2.8)$$

D'où :

$$P = \dot{Q}_h - \dot{Q}_c$$

La conductance thermique globale (la somme des trois conductances thermiques dans les trois échangeurs) peut être définie par la somme suivante :

$$C_t = \frac{\dot{Q}_h}{T_h - T_{hc1}} + \frac{\dot{Q}_{hl}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + \frac{\dot{Q}_c}{T_{ce2} - T_c} \quad (2.9)$$

Du fait que les deux cycles soient endoréversibles, on établit le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\dot{Q}_h}{T_{hc1}} - \frac{\dot{Q}_{hl}}{T_{ce1}} = 0 \\ \frac{\dot{Q}_{hl}}{T_{hc2}} - \frac{\dot{Q}_c}{T_{ce2}} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

En combinant (2.9) et (2.10) et les remplaçant dans (2.7), on aura la puissance totale à maximiser sans contraintes :

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1} T_{hc2} - T_{ce1} T_{ce2}}{\frac{T_{hc1} T_{hc2}}{T_h - T_{hc1}} + \frac{T_{ce1} T_{hc2}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + \frac{T_{hc2} T_{ce2}}{T_{ce2} - T_c}} \quad (2.11)$$

Cette équation exprime la puissance  $P$  en fonction des températures qui définissent la cascade endoreversible à deux cycles. De la même façon, on peut établir cette relation dans le cas d'une cascade irréversible à deux cycles, des cascade endoreversibles et irréversibles à trois cycles. C'est l'objet du chapitre qui suit.

Le problème considéré ici consiste à maximiser la puissance produite par la cascade de deux cycles endoréversibles : c'est l'objectif du *chapitre 3*, et la puissance produite par une cascade de deux cycles irréversibles auquel le *chapitre 4* est consacré. Les cascades à trois cycles endoreversibles ou irréversibles ne présentent pas d'intérêt pratique car la puissance produite par unité de conductance diminue alors que la complexité de la cascade et son coût d'investissement augmentent. Cependant, la puissance de ces cascades à trois cycles sera donnée en annexe A et B pour généraliser ces arguments.

La maximisation de la fonction objective (2.11) en fonction de quatre températures variables sera obtenue par une méthode apparentée à la programmation géométrique et à la méthode de Lagrange [22] qui sera définie par la suite. Cette méthode permet d'abord d'obtenir les règles d'optimalité qui gouvernent la solution optimale puis les variables de décision. En effet, l'expérience montre qu'une solution par une méthode de calcul classique donne lieu à des équations non linéaires couplées, difficiles à séparer pour exprimer la solution de façon analytique explicite. Par ailleurs, il est utile de conserver à la solution sa dimension physique initiale en prenant des dérivées semi logarithmiques au lieu des dérivées habituelles. Cette méthode de solution est d'une algèbre simplifiée.

# **Chapitre III :**

## **Cascade à deux cycles endoreversibles à puissance maximale**



### 3.1. Introduction :

Il s'agit, dans ce chapitre, de modéliser une cascade à deux cycles endoréversibles, et établir la puissance de la cascade et l'optimiser en fonction des paramètres de cette cascade.

La figure 3.1 ci-dessous représente le diagramme température-entropie d'une cascade à deux cycles endoréversibles disposés en série entre la température  $T_h$  d'une source chaude à capacité thermique infinie et la température  $T_c$  d'une source froide aussi à capacité thermique infinie ; la source chaude fournit un flux thermique  $\dot{Q}_h$  au cycle 1 et la source froide reçoit un flux thermique  $\dot{Q}_c$  rejeté par le cycle 2 qui reçoit un flux  $\dot{Q}_{h1}$  du cycle 1.

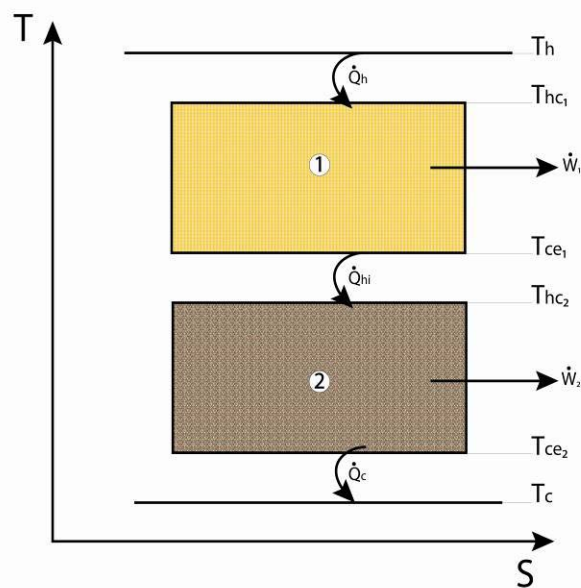


Figure 3.1 : Diagramme Température Entropie d'une cascade à deux cycles endoréversibles.

### 3.2. Résolution du problème et établissement des règles d'optimalité

Le problème à résoudre consiste à maximiser la puissance totale fournie par les cycles 1 et 2.

La puissance à maximiser est sujette aux deux contraintes :

- i. La conductance thermique totale dont on dispose qui est égale à  $C_t$
- ii. Les deux cycles de puissance sont endoréversibles.

Ces contraintes sont définies par les équations (2-9), (2-10).

En remplaçant le système (2-8) dans l'équation (2-7), on aura :  $P = \dot{Q}_h - \dot{Q}_c$  (3-1)

En solutionnant le système linéaire de trois équations de trois inconnues représentant les trois flux thermiques, et remplaçant dans (3.1), on obtient la puissance totale par unité de conductance à maximiser:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1} T_{hc2} - T_{ca1} T_{ce2}}{\frac{T_{hc1} T_{hc2}}{T_h - T_{hc1}} + \frac{T_{ca1} T_{hc2}}{T_{ca1} - T_{hc2}} + \frac{T_{hc2} T_{ce2}}{T_{ce2} - T_c}} \quad (3.2)$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}_h}{C_t} &= \frac{T_{hc1} T_{hc2}}{\left[ \frac{T_{hc1} T_{hc2}}{A_{m1}} + \frac{T_{ce1} T_{hc2}}{A_{m2}} + \frac{T_{ce1} T_{ce2}}{A_{m3}} \right]} \\ \frac{\dot{Q}_{hi}}{C_t} &= \frac{T_{ce1} T_{hc2}}{\left[ \frac{T_{hc1} T_{hc2}}{A_{m1}} + \frac{T_{ce1} T_{hc2}}{A_{m2}} + \frac{T_{ce1} T_{ce2}}{A_{m3}} \right]} \\ \frac{\dot{Q}_c}{C_t} &= \frac{T_{ce1} T_{ce2}}{\left[ \frac{T_{hc1} T_{hc2}}{A_{m1}} + \frac{T_{ce1} T_{hc2}}{A_{m2}} + \frac{T_{ce1} T_{ce2}}{A_{m3}} \right]} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les variables de décision sont les isothermes de cycles  $T_{hc1}, T_{ce1}, T_{hc2}, T_{ce2}$ .

L'équation (3.2) peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1} T_{hc2} - T_{ce1} T_{ce2}}{D} \quad (3.4)$$

Avec :

$$D = \frac{T_{hc1} T_{hc2}}{A_{m1}} + \frac{T_{ce1} T_{hc2}}{A_{m2}} + \frac{T_{ce1} T_{ce2}}{A_{m3}} \quad (3.5)$$

Et :

$$\begin{aligned} A_{m1} &= T_h - T_{hc1} \\ A_{m2} &= T_{ca1} - T_{hc2} \\ A_{m3} &= T_{ce2} - T_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les équations (3.5) et (3.6) sont réécrites sous la forme suivante afin d'utiliser la notation de la programmation géométrique:

$$\begin{aligned} D^{-1} \cdot [A_{m1}^{-1}(T_{hc1} T_{hc2}) + A_{m2}^{-1}(T_{ca1} T_{hc2}) + A_{m3}^{-1}(T_{ca1} T_{ce2})] &= 1 \\ A_{m1}^{-1} \cdot (T_h - T_{hc1}) &= 1 \\ A_{m2}^{-1} \cdot (T_{ca1} - T_{hc2}) &= 1 \\ A_{m3}^{-1} \cdot (T_{ce2} - T_c) &= 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

On pose les variables suivantes dont le poids est égal ou inférieur à l'unité:

$$\begin{cases} w_{01} = \frac{T_{hc1} T_{hc2}}{D} \\ w_{02} = \frac{T_{ca1} T_{ce2}}{D} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} w_{11} = D^{-1} [A_{m1}^{-1}(T_{hc1} T_{hc2})] \\ w_{12} = D^{-1} [A_{m2}^{-1}(T_{ca1} T_{hc2})] \\ w_{13} = D^{-1} [A_{m3}^{-1} k_1 (T_{ca1} T_{ce2})] \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} w_{21} = A_{m1}^{-1} T_h \\ w_{22} = A_{m1}^{-1} T_{hc1} \\ w_{31} = A_{m2}^{-1} T_{ca} \\ w_{32} = A_{m2}^{-1} T_{hc2} \\ w_{41} = A_{mB}^{-1} T_{ca2} \\ w_{42} = A_{mB}^{-1} T_c \end{cases} \quad (3.10)$$

Avec cette notation, le problème de maximisation s'écrit :

$$\text{Maximiser la puissance unitaire: } \frac{P}{C_t} = w_{01} - w_{02} \quad (3.11)$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} w_{11} + w_{12} + w_{13} &= 1 & (a) \\ w_{21} - w_{22} &= 1 & (b) \\ w_{31} - w_{32} &= 1 & (c) \\ w_{41} - w_{42} &= 1 & (d) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette méthode s'apparente à celle de Lagrange avec les variables poids  $w_i$  prises inférieures ou égales à l'unité.

### 3.3. Enoncé de la méthode de Lagrange

Soit  $f$  une fonction des  $n$  variables  $x_i (1 \leq i \leq n)$  qui satisfont les équations de liaison (contraintes) :  $\phi_j(x_1, \dots, x_n) = C_j$  où les  $C_j$  sont des constantes données : Une condition nécessaire pour que  $f$  soit extrémale par rapport aux variables  $x_i$  est que :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

Avec :

$$L = f + \sum_j \lambda_j \phi_j$$

Les  $\lambda_j$  sont appelés multiplicateurs de Lagrange et peuvent être déterminés à l'aide des équations précédentes, et  $\phi_j$  sont les équations définies par le système (1.13).

Le Lagrangien est ici défini par :

$$L = (w_{01} - w_{02}) + \lambda_1 (w_{11} + w_{12} + w_{13} - 1) + \lambda_2 (w_{21} - w_{22} - 1) + \lambda_3 (w_{31} - w_{32} - 1) + \lambda_4 (w_{41} - w_{42} - 1) \quad (3.13)$$

Les  $\lambda_j$  sont les multiplicateurs de Lagrange dont il faudra également déterminer les valeurs qui définissent les extrema. La recherche des extrema se fait par rapport aux variables primaires ; on écrit pour cela les équations des dérivées premières. La formulation initiale comporte quatre degrés de liberté et quatre variables de décision, les isothermes des fluides de cycles. La formulation par la programmation géométrique comporte huit variables primaires et quatre contraintes de définition, le dénominateur  $D$  et les écarts moyens arithmétiques ; ce qui détermine quatre degrés de liberté, si aucune contrainte implicite n'a été oubliée.

### 3.4. Détermination des températures extrêmes et du rapport des températures intermédiaires de la cascade

$$\begin{cases} T_{hc1} : w_{01} + \lambda_1 w_{11} - \lambda_2 w_{22} = 0 \\ T_{hc2} : w_{01} + \lambda_1 (w_{11} + w_{12}) - \lambda_3 w_{32} = 0 \\ T_{ce1} : -w_{02} + \lambda_1 (w_{13} + w_{12}) + \lambda_3 w_{31} = 0 \\ T_{ce2} : -w_{02} + \lambda_1 w_{13} + \lambda_4 w_{41} \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} A_{m1} : -\lambda_1 w_{11} - \lambda_2 = 0 \\ A_{m2} : -\lambda_1 w_{13} - \lambda_3 = 0 \\ A_{m3} : -\lambda_1 w_{13} - \lambda_4 = 0 \\ D : -\lambda_1 - w_{01} + w_{02} \end{cases} \quad (3.15)$$

Il y a huit équations et huit inconnues. On obtient d'abord les valeurs des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ , qui sont égales à :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(w_{01} - w_{02}) \\ \lambda_2 &= w_{11}(w_{01} - w_{02}) \\ \lambda_3 &= w_{12}(w_{01} - w_{02}) \\ \lambda_4 &= w_{13}(w_{01} - w_{02}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Il s'agit de remplacer pour les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_j$  dans le système d'équations (3.14) pour obtenir les quatre équations qui régissent les règles d'optimalité. Ces règles sont théoriquement suffisantes (si elles sont indépendantes) pour déterminer, avec les contraintes de définition, les variables de décision que sont les isothermes des fluides de cycles, et par la suite, la puissance maximale de la cascade.

Les quatre règles d'optimalité sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} w_{01} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot w_{11} \cdot w_{21} & (a) \\ w_{01} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot w_{11} \cdot w_{31} & (b) \\ w_{02} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot (w_{12} \cdot w_{32} - w_{31}) & (c) \\ w_{02} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot w_{31} \cdot w_{42} & (d) \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'addition (3.17.a) et (3.17.c), donne :

$$\frac{w_{11}}{w_{12}} = \frac{w_{31}}{w_{22}}$$

Qui se traduit par la règle :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m2}} = \frac{T_{hc1}}{T_{ce1}} \quad (3.18)$$

Et l'addition de (3.17.b) et (3.17.d) donne :

$$\frac{w_{12}}{w_{13}} = \frac{w_{41}}{w_{32}}$$

Qui se traduit par la règle :

$$\frac{A_{m2}}{A_{m3}} = \frac{T_{hc2}}{T_{ce2}} \quad (3.19)$$

On remarque que les règles (3.18) et (3.19) se rapportent aux cycles 1 et 2 respectivement. De plus, en utilisant la contrainte (3.12.a) et les résultats (3.18) et (3.19), on aura :

$$\begin{aligned} \frac{w_{11}}{w_{12}} &= \frac{A_{m2}}{A_{m1}} \frac{T_{hc1}}{T_{ce1}} = 1 \\ \frac{w_{12}}{w_{13}} &= \frac{A_{m3}}{A_{m2}} \frac{T_{hc2}}{T_{ce2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{w_{11}}{w_{12}} + \frac{w_{12}}{w_{12}} + \frac{w_{13}}{w_{12}} = \frac{1}{w_{12}}$$

Ces résultats se traduisent par l'égalité:  $w_{11} = w_{12} = w_{13} = \frac{1}{3}$  (3.20)

Ce qui signifie que le dénominateur  $D$  est constitué de trois quantités égales; ce qui nous amène à dire que les 02 résistances thermiques extrêmes et la résistance intermédiaire sont égales.

La détermination de ce résultat est la suivante :

Si on écrit le système (3.3) de la manière suivante :

$$\frac{\dot{Q}_h}{C_t} = \frac{T_{hc1}T_{hc2}}{D} = \frac{1}{3} A_{m1}$$

$$\frac{\dot{Q}_{hi}}{C_t} = \frac{T_{ce1}T_{hc2}}{D} = \frac{1}{3} A_{m2}$$

$$\frac{\dot{Q}_c}{C_t} = \frac{T_{ce1}T_{ce2}}{D} = \frac{1}{3} A_{m3}$$

Ou bien :

$$w_{11} = \frac{1}{C_t} \frac{\dot{Q}_h}{A_{m1}}$$

$$w_{12} = \frac{1}{C_t} \frac{\dot{Q}_{hi}}{A_{m2}}$$

$$w_{13} = \frac{1}{C_t} \frac{\dot{Q}_c}{A_{m3}}$$

$$\frac{\dot{Q}_h}{A_{m1}} = \frac{\dot{Q}_{hi}}{A_{m2}} = \frac{\dot{Q}_c}{A_{m3}}$$

Alors :

Par définition :  $C_1 = \frac{\dot{Q}_h}{A_{m1}}$ ;  $C_2 = \frac{\dot{Q}_{hi}}{A_{m2}}$ ;  $C_3 = \frac{\dot{Q}_c}{A_{m3}}$ , où  $C_1, C_2$  et  $C_3$  représentent les trois conductances thermiques.

Dans ce cas on voit clairement que les conductances thermiques sont réparties d'une façon égale et leur somme est évidemment égale à la conductance globale de la cascade.

On divise (3.17.a) par (3.17.b) et on obtient :

$$\frac{w_{11}(w_{22}+1)}{w_{11} + w_{12} w_{31}} = 1 \quad (3.21)$$

Sachant que  $(w_{22} + 1) = w_{21}$  et que  $w_{11} = w_{12}$ , l'équation (3.21) devient :

$$\frac{w_{21}}{1 + w_{31}} = 1$$

Qui se traduit par :

$$\frac{T_h}{A_{m1}} = \frac{T_{ce1}}{A_{m2}} + 1 \quad (3.22)$$

On effectue la division (3.17.c) / (3.17.d) pour obtenir:

$$\frac{w_{42}}{w_{32} - 1} = 1$$

Ce qui donne :

$$\frac{T_{hc2}}{A_{m2}} - 1 = \frac{T_c}{A_{m3}} \quad (3.23)$$

D'autre part, la combinaison par la division des deux équations (3.17.1) et (3.17.4) donne :

$$\frac{w_{02} w_{11} w_{21}}{w_{01} w_{13} w_{42}} = 1$$

En remplaçant les contraintes  $w$  on trouve :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m3}} = \sqrt{\frac{T_h}{T_c}} = R \quad (3.24)$$

En combinant (3.22), (3.23) et (3.24) en utilisant la définition  $R \equiv \sqrt{T_h/T_c}$ , on obtient la valeur optimale des isothermes extrêmes:

$$T_{hc1} = \frac{2}{3}T_h + \frac{\sqrt{T_h T_c}}{3} = \frac{RT_c}{3}(2R+1) \quad (3.25)$$

$$T_{ce2} = \frac{2}{3}T_c + \frac{\sqrt{T_h T_c}}{3} = \frac{T_c}{3}(R+2) \quad (3.26)$$

Et le rapport des deux isothermes internes de l'équation (3.23) :

$$\frac{T_{ca}}{T_{hc2}} = \frac{2R+1}{R+2} \quad (3.27)$$

La puissance et le rendement de la cascade sont obtenus en remplaçant dans leurs définitions sans qu'il soit nécessaire de connaître les isothermes intermédiaires  $T_{ce1}$  et  $T_{hc2}$ .

$$\frac{P}{C_t} = \frac{1}{3}(T_h - T_{hc1}) - \frac{1}{3}(T_{ce2} - T_c) = \frac{T_c(R-1)^2}{9} \quad (3.28)$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{R}$$

Le résultat obtenu ici est que le rendement est identique à celui d'un cycle ayant les mêmes isothermes externes. Par contre sa puissance est inférieure à celle d'un seul cycle à cause de la résistance thermique intermédiaire qui épuise le potentiel énergétique de la cascade.

Une condition supplémentaire est nécessaire pour déterminer les isothermes  $T_{ce1}$  et  $T_{hc2}$ . L'explication est que la puissance maximale de la cascade peut être obtenue avec soit la puissance maximale du premier cycle, soit celle du second cycle maximale. Ce qui déterminera les valeurs des isothermes internes  $T_{ce1}$  et  $T_{hc2}$ .

### 3.5. Hypothèse de la répartition de la puissance de la cascade

Pour que la puissance globale du cycle soit maximale, et suite à l'impossibilité de résoudre ce système sans avoir besoin d'une équation supplémentaire, on aura besoin de la contrainte qui stipule qu'au moins la puissance d'un des deux cycles considérés séparément, soit maximale ; C'est-à-dire qu'on doit avoir deux solutions théoriques : la première, avec la puissance du premier cycle pris seul, soit maximale et la deuxième, avec celle du deuxième cycle, de même avec puissance maximale.

### 3.6. Détermination des températures intermédiaires

#### 3.6.1. Hypothèse 1 : La puissance du cycle 1 est maximale.

D'après [22], un cycle à puissance maximale implique que :

$$\eta_{C-A} = \eta_C$$

$$\eta_1 = 1 - \sqrt{\frac{T_{hc2}}{T_h}} = 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}}$$

Ce qui fait :

$$\text{D'ou:} \quad T_{hc2} = \frac{T_c}{9}(R+2)^2 \quad (3.29)$$

En utilisant les équations (3.26) et (3.28), on peut écrire :

$$T_{hc2} = \left( \left( \frac{R+2}{2R+1} \right) \frac{\sqrt{T_c}(2R+1)}{3} \right)^2 = \frac{T_c}{9}(R+2)^2 \quad (3.30)$$

De (3.26) et (3.29) on tire:

$$T_{ce1} = \frac{T_c}{9}(2R+1)(R+2) \quad (3.31)$$

Les rendements des deux cycles sont données par :

$$\eta_{1\max} = 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \quad (3.32)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}} = \frac{R-1}{R+2}$$

On note que le cycle 1 étant à puissance maximale, a un rendement égal aux deux tiers de celui de la cascade. La puissance maximale de la cascade et celle de chacun des cycles sont obtenues en utilisant l'équipartition de la conductance thermique totale et les valeurs optimales des isothermes des fluides de cycles dans les équations du système (3.3) :

$$\frac{\dot{W}_1}{C_t} = \frac{1}{3}(T_h - T_{hc1}) - \frac{1}{3}(T_{ce1} - T_{hc2}) = \frac{2T_c(R-1)^2}{27}$$

$$\frac{\dot{W}_2}{C_t} = \frac{1}{3}(T_{ce1} - T_{hc2}) - \frac{1}{3}(T_{ce2} - T_c) = \frac{T_c(R-1)^2}{27} \quad (3.33)$$

$$\frac{P}{C_t} = \frac{1}{3}(T_h - T_{hc1}) - \frac{1}{3}(T_{ce2} - T_c) = \frac{T_c(R-1)^2}{9}$$

$$\frac{\dot{Q}_h}{C_t} = \frac{1}{9}T_c R(R-1)$$

$$\frac{\dot{Q}_{hi}}{C_t} = \frac{1}{27}T_c(R+2)(R-1) \quad (3.34)$$

$$\frac{\dot{Q}_c}{C_t} = \frac{1}{9}T_c(R-1)$$

Les rendements des deux cycles n'étant pas additifs, leur somme n'est pas égale à celui de la cascade. Le rendement de la cascade de deux cycles combinés en série est en fait donné par :

$$\eta = \eta_1 + (1 - \eta_1)\eta_2 \quad (3.35)$$

$$\eta = \frac{2}{3} \left( \frac{R-1}{R} \right) + \left( \frac{R+2}{3R} \right) \left( \frac{R-1}{R+2} \right) = 1 - \frac{1}{R} \quad (3.36)$$

### 3.6.2. Hypothèse 2 : La puissance du cycle 2 est maximale.

Le rendement du cycle 2 est exprimé par :

$$\eta_2 = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_{ce1}}} = 1 - \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}}$$

$$\text{D'où :} \quad \frac{\sqrt{T_c}}{\sqrt{T_{ce1}}} = \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}} \quad (3.37)$$

On utilise la même démarche que pour la première hypothèse, on aura successivement:

$$T_{hc2} = \frac{T_c}{9}(2R+1)(R+2) \quad (3.38)$$

$$T_{ca} = \frac{T_c}{9}(2R+1)^2 \quad (3.39)$$

$$\eta_{2max} = \frac{2(R-1)}{2R+1} \quad (3.40)$$

$$\eta_1 = \frac{R-1}{3R} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \quad (3.41)$$

Dans ce cas, le cycle 1, qui n'est pas à puissance maximale, a un rendement égal à seulement un tiers de celui de la cascade et inférieur au rendement du cycle 2 qui est à puissance maximale.

La puissance maximale de la cascade et celle de chacun des cycles sont obtenues en utilisant l'équipartition de la conductance thermique et les valeurs optimales des isothermes des fluides de cycles dans les équations (3.3) :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}_1}{C_t} &= \frac{1}{3}(T_h - T_{hc1}) - \frac{1}{3}(T_{ce1} - T_{hc2}) = \frac{T_c(R-1)^2}{27} \\ \frac{\dot{W}_2}{C_t} &= \frac{1}{3}(T_{ce1} - T_{hc2}) - \frac{1}{3}(T_{ce2} - T_c) = \frac{2T_c(R-1)^2}{27} \\ \frac{P}{C_t} &= \frac{1}{3}(T_h - T_{hc1}) - \frac{1}{3}(T_{ce2} - T_c) = \frac{T_c(R-1)^2}{9} \\ \frac{\dot{Q}_h}{C_t} &= \frac{1}{9} T_c R (R-1) \\ \frac{\dot{Q}_{hi}}{C_t} &= \frac{1}{27} T_c (2R+1)(R-1) \\ \frac{\dot{Q}_c}{C_t} &= \frac{1}{9} T_c (R-1) \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.7. Conclusion

La cascade à deux cycles endoréversibles à puissance maximale est un problème à trois degrés de liberté : les deux isothermes extrêmes et le rapport deux isothermes internes. Cette puissance maximale est obtenue soit par le premier cycle à puissance maximum, soit par le deuxième ; cette puissance étant la même dans les deux cas. Ainsi, la puissance maximale de la cascade est partagée à raison de deux tiers pour le cycle à puissance maximale, et un tiers pour l'autre cycle.

Le cycle bas réussit à produire la même puissance maximale que le cycle haut en relevant la valeur des isothermes intermédiaires, ce qui nécessite un fluide de cycle à domaine de températures étendu entre la température normale d'ébullition et le point critique. Ce critère permet éventuellement de faire le choix approprié entre un cycle haut à puissance maximale, ou un cycle bas.

Les résultats de l'optimisation de la cascade de deux cycles endoréversibles sont résumés par le tableau 3.1 ci-dessous.



**Tableau 3.1** : Résultats de l'optimisation de la cascade de deux cycles endoréversibles.

| <i>Cycle haut à puissance maximum</i>                  | <i>Cycle bas à puissance maximum</i>                    |
|--|---|
| $T_{hc1} = \frac{2}{3}T_h + \frac{\sqrt{T_h T_c}}{3}$  | $T_{hc1} = \frac{2}{3}T_h + \frac{\sqrt{T_h T_c}}{3}$   |
| $T_{ce2} = \frac{2}{3}T_c + \frac{\sqrt{T_h T_c}}{3}$  | $T_{ce2} = \frac{2}{3}T_c + \frac{\sqrt{T_h T_c}}{3}$   |
| $T_{hc2} = \frac{T_c}{9}(R+2)^2$                       | $T_{hc2} = \frac{T_c}{9}(2R+1)(2R+1)$                   |
| $T_{ce1} = \frac{T_c}{9}(2R+1)(R+2)$                   | $T_{ce1} = \frac{T_c}{9}(2R+1)^2$                       |
| $\eta_1 = \frac{2R-2}{3R}$                             | $\eta_1 = \frac{R-1}{3R}$                               |
| $\eta_2 = \frac{R-1}{R+2}$                             | $\eta_2 = \frac{2R-2}{2R+1}$                            |
| $\frac{\dot{W}_1}{C_t} = \frac{2T_c(R-1)^2}{27}$       | $\frac{\dot{W}_1}{C_t} = \frac{T_c(R-1)^2}{27}$         |
| $\frac{\dot{W}_2}{C_t} = \frac{T_c(R-1)^2}{27}$        | $\frac{\dot{W}_2}{C_t} = \frac{2T_c(R-1)^2}{27}$        |
| $\frac{P}{C_t} = \frac{T_c(R-1)^2}{9}$                 | $\frac{P}{C_t} = \frac{T_c(R-1)^2}{9}$                  |
| $\frac{\dot{Q}_h}{C_t} = \frac{1}{9}T_c R(R-1)$        | $\frac{\dot{Q}_h}{C_t} = \frac{1}{9}T_c R(R-1)$         |
| $\frac{\dot{Q}_{hi}}{C_t} = \frac{1}{27}T_c(R+2)(R-1)$ | $\frac{\dot{Q}_{hi}}{C_t} = \frac{1}{27}T_c(2R+1)(R-1)$ |
| $\frac{\dot{Q}_c}{C_t} = \frac{1}{9}T_c(R-1)$          | $\frac{\dot{Q}_c}{C_t} = \frac{1}{9}T_c(R-1)$           |
| $\eta = 1 - \frac{1}{R}$                               | $\eta = 1 - \frac{1}{R}$                                |

# **Chapitre IV :**

## **Cascade à deux cycles irréversibles à puissance maximale**

### 4.1. Introduction

La figure 4.1 ci-dessous représente le diagramme température-entropie d'une cascade à deux cycles irréversibles disposés en série entre la température  $T_h$  d'une source chaude à capacité thermique infinie et la température  $T_c$  d'une source froide aussi à capacité thermique infinie ; la source chaude fournit un flux thermique  $\dot{Q}_h$  au cycle 1 et la source froide reçoit un flux thermique  $\dot{Q}_c$  rejeté par le cycle 2 qui reçoit un flux  $\dot{Q}_{hi}$  du cycle 1.

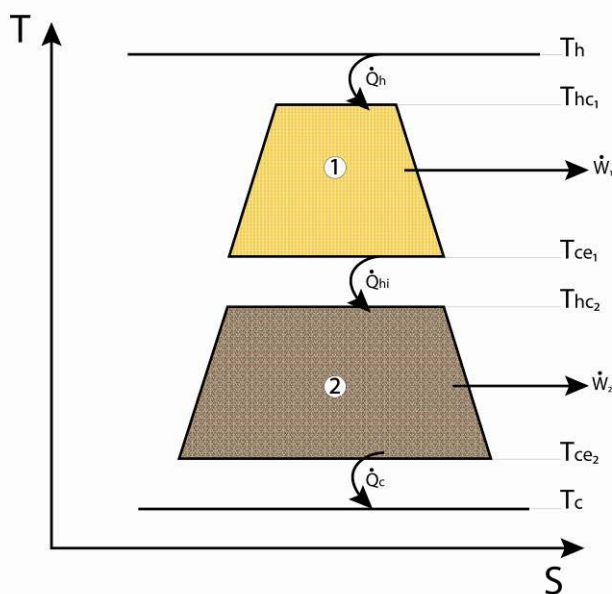


Figure 4.1 : Diagramme Température Entropie D'une cascade à deux cycles irréversibles

### 4.2. Résolution du problème et établissement des règles d'optimalité

Comme annoncé dans le chapitre II, le but de ce chapitre est d'optimiser la puissance globale de la cascade de deux cycles irréversibles ou, en d'autres termes, trouver la valeur maximale que peut atteindre la puissance de la cascade exprimée en fonction des différentes températures qui définissent la cascade.

Le problème à résoudre consiste à maximiser la puissance totale fournie par les cycles 1 et 2 :

$$P = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 \tag{4-1}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= \dot{Q}_h - \dot{Q}_{h1} \\ \dot{W}_2 &= \dot{Q}_{h1} - \dot{Q}_c \end{aligned} \tag{4-2}$$

Ce qui donne :

$$P = \dot{Q}_h - \dot{Q}_c \tag{4-3}$$

La puissance à maximiser est soumise à trois contraintes :

- i. La conductance thermique totale dont on dispose est égale à  $C_t$

- ii. Les deux cycles de puissance sont irréversibles où  $k_1$  et  $k_2$  sont les coefficients d'irréversibilité de chaque cycle.
- iii. La valeur de  $k_1$  et  $k_2$  est supérieure à 1.

Ces trois contraintes sont définies par les trois équations suivantes :

$$\frac{\dot{Q}_h}{T_h - T_{hc1}} + \frac{\dot{Q}_{h1}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + \frac{\dot{Q}_c}{T_{ce2} - T_c} = C_t \quad (4-4)$$

$$\begin{cases} \frac{\dot{Q}_{hi}}{T_{hc1}} - \frac{1}{k_1} \frac{\dot{Q}_{ii}}{T_{ce1}} = 0 \\ \frac{\dot{Q}_{ii}}{T_{hc2}} - \frac{1}{k_2} \frac{\dot{Q}_{ci}}{T_{ce2}} = 0 \end{cases} \quad (4-5)$$

En solutionnant le système linéaire de trois équations en trois inconnues représentant les trois flux thermiques, et remplaçant dans (4-3), on obtient la puissance totale par unité de conductance à maximiser:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1}T_{hc2} - (k_1T_{ce1})(k_2T_{ce2})}{\frac{T_{hc1}T_{hc2}}{T_h - T_{hc1}} + k_1 \frac{T_{ce1}T_{hc2}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + k_1k_2 \frac{T_{hc2}T_{ce2}}{T_{ce2} - T_c}} \quad (4-6)$$

La méthode de résolution est identique à celle du chapitre 3, à l'exception des coefficients  $k_1$  et  $k_2$ .

Les variables de décision sont les isothermes de cycles  $T_{hc1}, T_{ce1}, T_{hc2}, T_{ce2}$ .

L'équation (4.6) peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1}T_{hc2} - (k_1T_{ce1})(k_2T_{ce2})}{D} \quad (4-7)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \dot{Q}_{hi} = \frac{T_{hc1} \cdot T_{hc2}}{D} \\ \dot{Q}_{ii} = k_1 \frac{T_{ce1} \cdot T_{hc2}}{D} \\ \dot{Q}_{ci} = k_1 k_2 \frac{T_{ce1} \cdot T_{ce2}}{D} \end{cases} \quad (4.8)$$

Avec :

$$D = \frac{T_{hc1}T_{hc2}}{A_{m1}} + \frac{(k_1T_{ce1})T_{hc2}}{A_{m2}} + \frac{(k_1T_{ce1})(k_2T_{ce2})}{A_{m3}} \quad (4.9)$$

Et :

$$\begin{aligned} A_{m1} &= T_h - T_{hc1} \\ A_{m2} &= T_{ce1} - T_{hc2} \\ A_{m3} &= T_{ce2} - T_c \end{aligned} \quad (4-10)$$

Les équations (4.7) et (4.8) sont réécrites sous la forme suivante afin d'utiliser la notation de la programmation géométrique:

$$\begin{aligned} D^{-1} \cdot [A_{m1}^{-1}(T_{hc1}T_{hc2}) + A_{m2}^{-1}k_1(T_{ce1}T_{hc2}) + A_{m3}^{-1}k_1k_2(T_{ce1}T_{ce2})] &= 1 \\ A_{m1}^{-1} \cdot (T_h - T_{hc1}) &= 1 \\ A_{m2}^{-1} \cdot (T_{ce1} - T_{hc2}) &= 1 \\ A_{m3}^{-1} \cdot (T_{ce2} - T_c) &= 1 \end{aligned} \quad (4-11)$$

On pose les variables suivantes dont le poids est égal ou inférieur à l'unité:

$$\begin{cases} w_{01} = \frac{T_{hc1}T_{hc2}}{D} \\ w_{02} = k_1k_2 \frac{T_{ce1}T_{ce2}}{D} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} w_{11} = D^{-1} [A_{m1}^{-1} (T_{hc1} T_{hc2})] \\ w_{12} = D^{-1} [A_{m2}^{-1} k_1 (T_{ce1} T_{hc2})] \\ w_{13} = D^{-1} [A_{m3}^{-1} k_1 k_2 (T_{ce1} T_{ce2})] \end{cases} \quad (4.13)$$

Les  $w_{1i}$  sont la répartition du dénominateur  $D$  par conductance globale.

$$\begin{cases} w_{21} = A_{m1}^{-1} T_h \\ w_{22} = A_{m1}^{-1} T_{hc1} \\ w_{31} = A_{m2}^{-1} T_{ce1} \\ w_{32} = A_{m2}^{-1} T_{hc2} \\ w_{41} = A_{m3}^{-1} T_{ce2} \\ w_{42} = A_{m3}^{-1} T_c \end{cases} \quad (4.14)$$

Avec cette notation, le problème de maximisation s'écrit :

$$\text{Maximiser la puissance unitaire: } \frac{P}{C_t} = w_{01} - w_{02} \quad (4-15)$$

Sous les contraintes de conservation de définition:

$$\begin{aligned} w_{11} + w_{12} + w_{13} &= 1 & (a) \\ w_{21} - w_{22} &= 1 & (b) \\ w_{31} - w_{32} &= 1 & (c) \\ w_{41} - w_{42} &= 1 & (d) \end{aligned} \quad (4-16)$$

$$\begin{cases} T_{hc1} : w_{01} + \lambda_1 w_{11} - \lambda_2 w_{22} = 0 \\ T_{hc2} : w_{01} + \lambda_1 (w_{11} + w_{12}) - \lambda_3 w_{32} = 0 \\ T_{ce1} : -w_{02} + \lambda_1 (w_{13} + w_{12}) + \lambda_3 w_{31} = 0 \\ T_{ce2} : -w_{02} + \lambda_1 w_{13} + \lambda_4 w_{41} \end{cases} \quad (4-15)$$

$$\begin{cases} A_{m1} : -\lambda_1 w_{11} - \lambda_2 = 0 \\ A_{m2} : -\lambda_1 w_{13} - \lambda_3 = 0 \\ A_{m3} : -\lambda_1 w_{13} - \lambda_4 = 0 \\ D : -\lambda_1 - w_{01} + w_{02} \end{cases}$$

Il y a huit équations et huit inconnues. On obtient d'abord les valeurs des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ , qui sont égales à :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(w_{01} - w_{02}) \\ \lambda_2 &= w_{11} (w_{01} - w_{02}) \\ \lambda_3 &= w_{12} (w_{01} - w_{02}) \\ \lambda_4 &= w_{13} (w_{01} - w_{02}) \end{aligned} \quad (4-16)$$

Il s'agit de remplacer pour les multiplicateurs de Lagrange lambda dans l'équation (4-15) pour obtenir les quatre équations qui régissent les règles d'optimalité. Ces règles sont théoriquement suffisantes (si elles sont indépendantes) pour déterminer avec les contraintes de définition, les variables de décision que sont les isothermes des fluides de cycles, et par la suite, la puissance maximale de la cascade.

Les quatre règles d'optimalité sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot w_{11} \cdot w_{21} & (a) \\
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot w_{11} \cdot w_{31} & (b) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot (w_{12} \cdot w_{32} - w_{31}) & (c) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02}) \cdot w_{31} \cdot w_{42} & (d)
 \end{aligned}
 \tag{4-17}$$

L'addition (4.17.a) et (4.17.c), donne :

$$\frac{w_{11}}{w_{12}} = \frac{w_{31}}{w_{22}}$$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m2}} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{T_{hc1}}{T_{ce1}} \tag{4-18}$$

Et l'addition de (4.17.b) et (4.17.d) donne

$$\frac{w_{12}}{w_{13}} = \frac{w_{41}}{w_{32}}$$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m2}}{A_{m3}} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \frac{T_{hc2}}{T_{ce2}} \tag{4-19}$$

On remarque que les règles (4-18) et (4-19) se rapportent aux cycles 1 et 2 respectivement. De plus, en utilisant la contrainte (4.16.a) et les résultats (4-18) et (4-19), on obtient :

$$\frac{w_{11}}{w_{12}} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} \frac{T_{hc1}}{T_{ce1}} \frac{1}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \quad \text{et} \quad \frac{w_{12}}{w_{13}} = \frac{A_{m3}}{A_{m2}} \frac{T_{hc2}}{T_{ce2}} \frac{1}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{k_2}}$$

Sachant que :

$$w_{11} + w_{12} + w_{13} = 1$$

On aura :

$$\begin{cases}
 w_{11} = \frac{1}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} \\
 w_{12} = \frac{\sqrt{k_1}}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} \\
 w_{13} = \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}}
 \end{cases}
 \tag{4-20}$$

Ce résultat signifie qu'à l'optimum, la conductance thermique totale est répartie en trois parties liées directement à la valeur des  $k_i$  entre les trois échangeurs de chaleur. Il constitue une règle d'optimalité importante de portée générale. Son utilisation dans la formulation initiale du problème simplifie grandement la solution de celui-ci.

On remarque que les valeurs de  $w_{11}$  et  $w_{12}$  sont toujours inférieurs à 1/3 contrairement à  $w_{13}$  qui est toujours supérieur à , ce qui est explicables par le fait que la résistance thermique au niveau de la chaudière et nettement supérieur a celle de l'échangeur intermédiaire et celle du condenseur.

On divise maintenant (4.17.a) et (4.17.b) et on obtient :

$$\frac{w_{21}}{1 + \frac{w_{21}}{w_{11}} w_{31}} = 1 \tag{4-21}$$

Sachant que  $(w_{22} + 1) = w_{21}$  et  $w_{11} = w_{12}$ , l'équation (4.21) devient :

$$\frac{w_{21}}{1 + \sqrt{k_1} (w_{31})} = 1$$

D'ou :

$$\frac{T_{hc1}}{A_{m1}} = \sqrt{k_1} \frac{T_{ce1}}{A_{m2}} \tag{4-22}$$

On égalise maintenant (4.17-a) et (4.17-d) pour obtenir:

$$\frac{w_{32}}{w_{41}} = \sqrt{k_2}$$

Ce qui donne :

$$\frac{T_{hc2}}{T_{ce1} - T_{hc2}} \cdot \frac{T_{ce2} - T_c}{T_{ce2}} = \sqrt{k_2} \tag{4-23}$$

D'autre part, la combinaison des deux équations (17.1) et (17.4) donne:

$$\frac{w_{11} w_{21} k_1 k_2 T_{ce1} T_{ce2}}{w_{13} w_{42} T_{hc1} T_{hc2}} = 1.$$

En remplaçant les contraintes  $w_i$  on trouve :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m3}} = \sqrt{\frac{T_h}{T_c}} \quad (4-24)$$

En combinant (22), (23) et (24) et en utilisant la définition  $R \equiv \sqrt{T_h/T_c}$ , on obtient la valeur optimale des isothermes extrêmes:

$$T_{hc1} = \frac{\sqrt{k_1} R T_c [(R+1)\sqrt{k_2} + R]}{\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1} + 1} \quad (4-26)$$

$$T_{ce2} = \frac{T_c [R+1 + \sqrt{k_1}]}{\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1} + 1} \quad (4-27)$$

Et le rapport des deux isothermes internes de l'équation (23) :

$$\frac{T_{ce1}}{T_{hc2}} = \frac{\sqrt{k_2}(R+1) + R}{\sqrt{k_2}[R+1 + \sqrt{k_1}]} \quad (4-28)$$

La puissance et le rendement de la cascade sont obtenus en remplaçant dans leurs définitions sans qu'il soit nécessaire de connaître les isothermes intermédiaires  $T_{ce1}$  et  $T_{hc2}$ .

$$\frac{P}{C_i} = \frac{1}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_h - T_{hc1}) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_{ce2} - T_c)$$

On déduit :

$$\frac{P}{C_i} = T_c \frac{(R - \sqrt{k_1 k_2})^2}{1 + \sqrt{k_1} (1 + \sqrt{k_2})^2} \quad (4-29)$$

Une condition supplémentaire est nécessaire pour déterminer celles-ci ; ce qui peut laisser penser que les conditions nécessaires (17) ne sont pas toutes indépendantes.

### 4.3. Hypothèse de la répartition de la puissance de la cascade

Pour que la puissance globale du cycle soit maximale, et suite à l'impossibilité de résoudre ce système sans avoir besoin d'une équation supplémentaire, On aura besoin de la contrainte qui stipule qu'au moins la puissance d'un cycle des deux cycles, considérés séparément, soit maximale ; C'est-à-dire qu'on doit avoir deux solutions théoriques : la première, avec la puissance du premier cycle pris seul, soit maximale et la deuxième, avec celle du deuxième cycle, de même avec puissance maximale.

### 4.4. Détermination des températures intermédiaires de la cascade :

#### 4.4.1. Hypothèse 1 : La puissance du cycle 1 est maximale.

D'après [22], un cycle à puissance maximale implique que :

$$\eta_{C-A} = \eta_C$$

$$\eta_1 = 1 - \sqrt{\frac{T_{hc2}}{T_h}} = 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}}$$

Ce qui fait :

D'où:

$$T_{hc2} = \left( \frac{T_{hc2} T_{hc1}}{T_{ce1} \sqrt{T_h}} \right)^2 \quad (4-30)$$

En utilisant les équations (4.28) et (4.30) on peut écrire :

$$T_{hc2} = k_1 k_2 \left( \frac{R+1+\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1} + 1} \right)^2 \cdot T_c \quad (4-31)$$

Des équations (4.28) et (4.31) on tire:

$$T_{ce1} = \frac{k_1}{\sqrt{k_2}} \frac{(R+1+\sqrt{k_1})(\sqrt{k_2}(R+1)+R)}{(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1} + 1)^2} \cdot T_c \quad (4-32)$$

Les rendements des deux cycles sont donnés par :

$$\eta_{1\max} = 1 - k_1 \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{R} \frac{R+1+\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1} + 1} \quad (4-33)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{1}{k_1} \frac{\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1} + 1}{R+1+\sqrt{k_2}}$$

$$\frac{\dot{W}_1}{C_i} = \frac{1}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_h - T_{hc1}) - \frac{\sqrt{k_1}}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_{ce1} - T_{hc2})$$

$$\frac{\dot{W}_2}{C_i} = \frac{\sqrt{k_1}}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_{ce1} - T_{hc2}) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_{ce2} - T_c)$$

$$\frac{P}{C_i} = \frac{1}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_h - T_{hc1}) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}} (T_{ce2} - T_c)$$

Sachant que :

$$(T_{ce1} - T_{hc2}) = \frac{T_c k_1 k_2}{(1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^2} (R+1+\sqrt{k_1})(k_2(R+1)+\sqrt{k_2}R-1)$$

Et :

$$(T_h - T_{hc1}) = \frac{T_c R (R - \sqrt{k_1 k_2})}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}}$$

$$(T_{ce2} - T_c) = \frac{T_c (R - \sqrt{k_1 k_2})}{1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2}}$$

On déduit :

$$\frac{\dot{W}_1}{C_i} = \frac{RT_c}{(1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^2} (R - \sqrt{k_1 k_2}) - \frac{k_2 \sqrt{k_1} T_c}{(1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^3} (R+1+\sqrt{k_1})(k_2(R+1)+\sqrt{k_2}R-1)$$

$$\frac{\dot{W}_2}{C_i} = \frac{k_2 \sqrt{k_1} T_c}{(1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^3} (R+1+\sqrt{k_1})(k_2(R+1)+\sqrt{k_2}R-1) - \left( \frac{T_c \sqrt{k_1 k_2}}{(1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^2} \right) (R - \sqrt{k_1 k_2})$$

$$\frac{P}{C_i} = \frac{T_c (R - \sqrt{k_1 k_2})^2}{(1+\sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^2} \quad (4-34)$$

Les rendements des deux cycles n'étant pas additionnels, leur somme n'est pas égale à celui de la cascade. Le rendement de la cascade de deux cycles combinés en série est en fait donné par :

$$\eta = \eta_1 + (1 - \eta_1)\eta_2 \quad (4-35)$$



Le rendement de la cascade :

$$\eta = 1 - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{R} \quad (4-36)$$

#### 4.4.2. Hypothèse 2 : la puissance du cycle 2 est maximale.

Le rendement du cycle 2 est exprimé par :

$$\eta_2 = 1 - k_2 \sqrt{\frac{T_c}{T_{ce1}}} = 1 - k_2 \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}}$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{T_c}}{\sqrt{T_{ce1}}} = \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}} \quad (4-37)$$

On utilise la même démarche que pour la première hypothèse, on aura successivement:

$$T_{hc2} = \frac{T_c}{\sqrt{k_2}} \frac{(R+1 + \sqrt{k_2})(\sqrt{k_2}(R+1) + R)}{(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 + 1})^2} \quad (4-37)$$

$$T_{ce1} = \frac{T_c}{k_2} \frac{(\sqrt{k_2}(R+1) + R)^2}{(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 + 1})^2} \quad (4-38)$$

$$\eta_{2max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k_1} R} \frac{(\sqrt{k_2}(R+1) + R)}{(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 + 1})} \quad (4-39)$$

$$\eta_1 = 1 - k_1 \sqrt{k_2} \frac{(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 + 1})}{(\sqrt{k_2}(R+1) + R)} \quad (4-40)$$

La puissance maximale de la cascade et celle de chacun des cycles sont obtenues en utilisant la répartition de la conductance thermique et les valeurs optimales des isothermes des fluides de cycles dans les équations (4.1), (4.2) et (4.3) :

Sachant que dans ce cas :

$$T_{ce1} - T_{hc2} = \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{k_2}}(R+1) + R \right)^2 - (k_1 k_2)(R+1 + \sqrt{k_1})}{(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 + 1})^2} T_c$$

On établit les puissances mécaniques fournies par la cascade :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}_1}{C_i} &= \frac{RT_c}{(1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^2} (R - \sqrt{k_1 k_2}) - \frac{\sqrt{k_1} T_c}{(1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^3} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{k_2}}(R+1) + R \right)^2 - (k_1 k_2)(R+1 + \sqrt{k_1}) \right) \\ \frac{\dot{W}_2}{C_i} &= \frac{\sqrt{k_1} T_c}{(1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^3} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{k_2}}(R+1) + R \right)^2 - (k_1 k_2)(R+1 + \sqrt{k_1}) \right) - \left( \frac{T_c \sqrt{k_1 k_2}}{(1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^2} \right) (R - \sqrt{k_1 k_2}) \\ \frac{P}{C_i} &= \frac{T_c (R - \sqrt{k_1 k_2})^2}{(1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2})^2} \end{aligned} \quad (4-41)$$

#### 4.5. Conclusion

La cascade à deux cycles irréversibles à puissance maximale est un problème à trois degrés de liberté : les deux isothermes extrêmes et le rapport deux isothermes internes. Cette

puissance maximale est obtenue soit par le premier cycle à puissance maximum, soit par le deuxième ; cette puissance étant la même dans les deux cas.

Le cycle bas réussit à produire la même puissance maximum que le cycle haut en relevant la valeur des isothermes intermédiaires, ce qui nécessite un fluide de cycle à domaine de températures étendu entre la température normale d'ébullition et le point critique. Ce critère permet éventuellement de faire le choix approprié entre un cycle haut à puissance maximum, ou un cycle bas.

Le rendement de la cascade est déterminé par les isothermes extrêmes et les coefficients d'irréversibilité.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

**Tableau 4.1** : Résultats de l'optimisation de la cascade de deux cycles irréversibles.

| <i>Première hypothèse</i>  | <i>Deuxième hypothèse</i>  |
|--|--|
| $T_{hc1} = \frac{\sqrt{k_1}RT_c \left[ (R+1)\sqrt{k_2} + R \right]}{\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1}$   | $T_{hc1} = \frac{\sqrt{k_1}RT_c \left[ (R+1)\sqrt{k_2} + R \right]}{\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1}$   |
| $T_{ce2} = \frac{T_c \left[ R+1 + \sqrt{k_1} \right]}{\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1}$   | $T_{ce2} = \frac{T_c \left[ R+1 + \sqrt{k_1} \right]}{\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1}$   |
| $T_{hc2} = k_1k_2 \left( \frac{R+1 + \sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1} \right)^2 \cdot T_c$  | $T_{hc2} = \frac{T_c \left( R+1 + \sqrt{k_2} \right) \left( \sqrt{k_2} (R+1) + R \right)}{\sqrt{k_2} \left( \sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1 \right)^2}$ |
| $T_{ce1} = \frac{k_1 \left( R+1 + \sqrt{k_1} \right) \left( \sqrt{k_2} (R+1) + R \right)}{\sqrt{k_2} \left( \sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1 \right)^2} \cdot T_c$ | $T_{ce1} = \frac{T_c \left( \sqrt{k_2} (R+1) + R \right)^2}{k_2 \left( \sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1 \right)^2}$                                      |
| $\eta_{1\max} = 1 - \frac{k_1\sqrt{k_1k_2}}{R} \frac{R+1 + \sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1}$  | $\eta_1 = 1 - k_1\sqrt{k_2} \frac{\left( \sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1 \right)}{\left( \sqrt{k_2} (R+1) + R \right)}$                                 |
| $\eta_2 = 1 - \frac{1}{k_1} \frac{\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1}{R+1 + \sqrt{k_2}}$   | $\eta_{2\max} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k_1}R} \frac{\left( \sqrt{k_2} (R+1) + R \right)}{\left( \sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_1} + 1 \right)}$                   |
| $\eta = 1 - \frac{\sqrt{k_1k_2}}{R}$   | $\eta = 1 - \frac{\sqrt{k_1k_2}}{R}$   |

# **Chapitre V :**

## **Application d'une cascade irréversible à la regazéification du GNL**

## 5.1 Introduction

Le GNL algérien à regazéifier est typiquement composé de 88% de  $C_1$ , 6% de  $C_2$ , 3% pour  $C_3$  et  $C_5$ , et 1,4-3,5% pour  $N_2$  et  $CO_2$ ; Son enthalpie de vaporisation peut être estimée par une combinaison linéaire des enthalpies de vaporisation de chaque composant à une température commune. La pression du process de regazéification est celle de la vaporisation du GNL. La pression totale est égale à la pression atmosphérique du stockage quoique pour la regazéification du GNL la pression totale est une pression légèrement supérieure.

Dans la pratique, l'enthalpie de vaporisation du GNL, à une pression donnée, passe par un calcul nécessitant la détermination de l'état d'équilibre correspondant.

S'agissant de l'évaluation d'un cycle conceptuel de regazéification, nous pourrions nous contenter d'une estimation de l'enthalpie de vaporisation du GNL maximisée et égale à celle du méthane et du travail spécifique développé par  $KJ$  de GNL regazéifié.

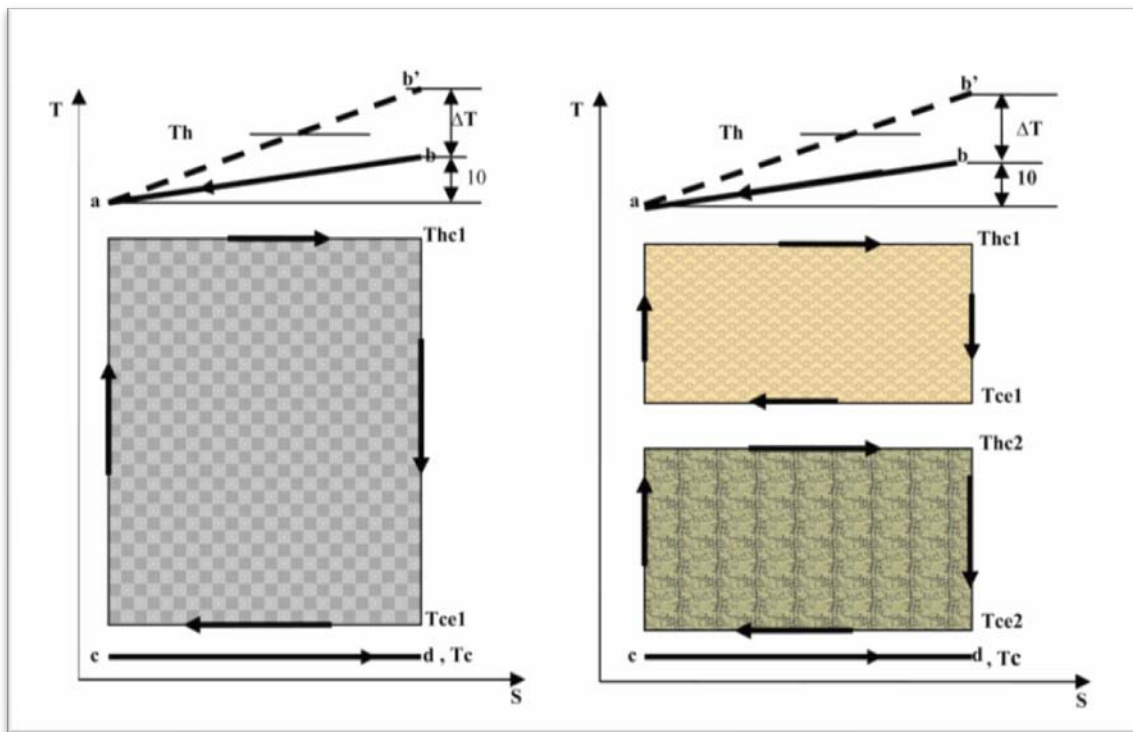


Figure 5.1 : Diagramme T-s d'un cycle de puissance endoréversible

Figure 5.2 : Diagramme T-s d'une cascade de deux cycles endoréversibles

## 5.2 Application d'une cascade conceptuelle à deux cycles endoréversibles

La figure 5.2 montre la disposition d'une cascade qui reçoit un flux  $\dot{Q}_h$  de la source chaude à la température moyenne  $T_h$  et cède un flux  $\dot{Q}_c$  à la source froide à la température

moyenne  $T_c$  constituée par le débit de GNL à regazéifier. La définition du problème d'optimisation et sa méthode de solution sont celles données en [19] ; les résultats principaux sont consignés dans le tableau ci-dessous.

La solution du problème laisse le rapport  $T_{ce1}/T_{hc2}$  indéterminé ; cette indétermination est levée en choisissant le cycle supérieur à puissance maximale. La puissance de la cascade et son rendement étant déjà déterminés. Les résultats sont résumés et comparés à ceux d'un simple cycle endoréversible dans le tableau 1 ci-dessous.

**Tableau 5.1** : Comparaison des paramètres de la cascade et du cycle endoréversible pour  $R = \sqrt{283,2/111,6} = 1,593$ .

| <i>Variables et paramètres</i>   | <i>Cascade à deux cycles endoreverssibles</i> | <i>Cascade à un seul cycle endoreverssible</i> | <i>Différence entre les deux variantes</i> |
|----------------------------------|---|--|--|
| $P/C_t, K$                       | $T_c(R-1)^2/9 = 4,3$                          | $T_c(R-1)^2/4 = 9.8$                           | 5.4  |
| $Q_h/C_t, K$                     | $RT_c(R-1)/9 = 11,7$                          | $RT_c(R-1)/4 = 26.3$                           | 14.6                                       |
| $Q_c/C_t, K$                     | $T_c(R-1)/9 = 7,3$                            | $T_c(R-1)/4 = 16.5$                            | 9.2  |
| $T_{hc1}, K$                     | $RT_c.(2R+1)/3 = 248.1$                       | $RT_c.(R+1)/2 = 230.5$                         | -17.6                                      |
| $T_{hc2}, K$                     | $T_c.(R+2)^2/9 = 160.1$                       | N.A  | N.A  |
| $T_{ce1}, K$                     | $T_c.(R+2)(2R+1)/9 = 186.5$                   | $T_c.(R+1)/2 = 144.7$                          | 41.8                                       |
| $T_{ce2}, K$                     | $T_c.(R+2)/3 = 133.6$                         | N.A  | N.A  |
| $T_{ce1}/T_{hc2}$                | $(R+2)(2R+1) = 1,1650$                        | N.A  | N.A  |
| $\eta$                           | $1-1/R = 0,38 = 37.2\%$                       | $1-1/R = 0,372 = 37.2\%$                       | 0  |
| $A_{m1}$                         | $RT_c(R-1)/3 = 35.1$                          | $RT_c(R-1)/2 = 52.7K$                          | 17.6                                       |
| $A_{m2}$                         | $T_c.(R+2)(R-1)/9 = 26.4$                     | N.A  | N.A  |
| $A_{m3}$                         | $T_c.(R-1)/3 = 22.1$                          | $T_c.(R-1)/2 = 33.1K$                          | 1.00                                       |
| $\dot{P}/Kg \text{ de } C_1, kW$ | 302.9   | 134.6  | 168,3                                      |
| $\dot{m}_{eau}, Kg/s$            | 19.5  | 7.9  | 11.6                                       |
| <i>Unités UA des échangeurs</i>  | <i>67,1 unités soit 22.4 m<sup>2</sup></i>    | <i>30.9 unités soit 10.3 m<sup>2</sup></i>     | <i>-32.2 unités soit -12.1 m</i>           |

Ces résultats montrent que :

1. Le rendement de la cascade est le même que celui du cycle simple, soit 37,2% pour la valeur de  $R$  considérée; mais le flux de chaleur prélevé à la source chaude étant 2,25 fois plus faible dans la cascade, celle-ci produit 2,25 moins de puissance que le cycle simple pour la même conductance totale donnée. Elle nécessite donc 2,25 fois plus de conductance totale, à répartir également entre les trois échangeurs, pour produire la même puissance que le simple cycle endoréversible.

2. Le rendement du cycle supérieur, dont la puissance a été maximisée, est égal aux deux tiers du rendement de la cascade,  $\eta_1 = 2(1-1/R)/3$ .
3. Le rendement du cycle inférieur est égal à  $\eta_2 = \left(\frac{R-1}{R+2}\right)$ .
4. Le rendement des deux cycles combinés en série est donné par la relation :  $\eta = \eta_1 + (1-\eta_1)\eta_2$  On vérifie bien que le rendement de cette cascade est égal à  $\eta = (1-1/R)$ .

### 5.3 Amélioration des performances par la température de la source chaude

On peut réduire le débit d'eau et la surface d'échange nécessaires tout en augmentant la puissance mécanique générée. Il suffirait d'augmenter la température de la source chaude en utilisant, par exemple, en circuit fermé, une solution d'eau et de glycol d'éthylène chauffée par des gaz résiduels d'un cycle combiné ou par combustion de gaz naturel à prélever sur la regazéification.

La figure 5.2 représente une augmentation de  $\Delta T$  au-dessus des  $10^\circ\text{C}$  permise par une eau de mer à  $15^\circ\text{C}$ . L'eau de condensation d'un cycle à vapeur serait disponible à  $30^\circ\text{C}$ , ce qui donnerait un  $\Delta T$  de  $15^\circ\text{C}$  ; les fumées résiduelles d'un récupérateur générateur de vapeur permettraient de porter cette température à  $80-85^\circ\text{C}$  [19].

**Tableau 5.2 :** Performances de la cascade endoréversible pour deux valeurs de  $\Delta T$  égales à 15 et  $70^\circ\text{C}$ , avec  $k_1 = k_2 = 1.1$ .

| Variables et paramètres  | Cas A : $\Delta T=15^\circ\text{C}$<br>d'où $R=1,6140$ | Cas A : $\Delta T=70^\circ\text{C}$<br>d'où $R=1,6886$ | Cas de base<br>$R = \sqrt{283,2/111,6} = 1,593$ |
|--------------------------|--|--|---|
| $P/C_t, K$               | $T_c(R-1)^2/9 = 4,7$                                   | $T_c(R-1)^2/9 = 5,9$                                   | $T_c(R-1)^2/9 = 4,4$                            |
| $Q_h/C_t, K$             | $RT_c(R-1)/9 = 12,3$                                   | $RT_c(R-1)/9 = 14,4$                                   | $RT_c(R-1)/9 = 11,7$                            |
| $Q_c/C_t, K$             | $T_c(R-1)/9 = 7,6$                                     | $T_c(R-1)/9 = 8,5$                                     | $T_c(R-1)/9 = 7,4$                              |
| $T_{hc1}, K$             | $RT_c(2R+1)/3 = 253,8$                                 | $RT_c(R+1)/3 = 275,0$                                  | $RT_c(2R+1)/3 = 248,1$                          |
| $T_{hc2}, K$             | $T_c(R+2)^2/9 = 161,9$                                 | $T_c(R+2)^2/9 = 168,7$                                 | $T_c(R+2)^2/9 = 160,1$                          |
| $T_{ce1}, K$             | $T_c(R+2)(2R+1)/9 = 189,5$                             | $T_c(R+2)(2R+1)/9 = 200,2$                             | $T_c(R+2)(2R+1)/9 = 186,5$                      |
| $T_{ce2}, K$             | $T_c(R+2)/3 = 134,4$                                   | $T_c(R+2)/3 = 137,2$                                   | $T_c(R+2)/3 = 133,7$                            |
| $T_{ce1}/T_{hc2}$        | $(R+2)(2R+1) = 1,17$                                   | $(R+2)(2R+1) = 1,19$                                   | $(R+2)(2R+1) = 1,16$                            |
| $\eta$                   | $1-1/R = 0,38 = 38,0\%$                                | $1-1/R = 0,372 = 40,8\%$                               | $1-1/R = 0,372 = 37,2\%$                        |
| $A_{m1}$                 | $RT_c(R-1)/3 = 36,9$                                   | $RT_c(R-1)/3 = 43,3$                                   | $RT_c(R-1)/3 = 35,1$                            |
| $A_{m2}$                 | $T_c(R+2)(R-1)/9 = 27,5$                               | $T_c(R+2)(R-1)/9 = 31,5$                               | $T_c(R+2)(R-1)/9 = 26,4$                        |
| $A_{m3}$                 | $T_c(R-1)/3 = 22,8$                                    | $T_c(R-1)/2 = 25,6$                                    | $T_c(R-1)/3 = 22,1$                             |
| $\dot{P}/Kg/sdc_1$       | 113,6  | 351,7  | 134,6   |
| $\dot{m}_{eau}, Kg/s$    | 7,9  | 2,5  | 19,5  |
| Unités UA des échangeurs | 67,1 unités<br>soit $22,4\text{ m}^2$                  | 59,8 unités<br>soit $19,4\text{ m}^2$                  | 69,5 unités<br>soit $23,2\text{ m}^2$           |

### 5.4 Cascade conceptuelle à deux cycles irréversibles

La figure 5.4 montre la disposition d'une telle cascade qui reçoit un flux  $\dot{Q}_{hi}$  de la source chaude à la température moyenne  $T_h$  et cède un flux  $\dot{Q}_{ci}$  à la source froide à la température moyenne  $T_c$  constituée par le débit de GNL à regazéifier. De la même façon que pour le premier cas, la résolution du problème est précédée par l'élimination de l'indétermination en choisissant le cycle supérieur à puissance maximale, sauf que, dans ce cas il s'agit d'une cascade irréversible où l'irréversibilité est concrétisée par les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  que l'on pose égaux à 1.1. Les résultats sont résumés et comparés à ceux d'une cascade endoreversible dans le tableau 5.3 ci-dessous.

**Tableau 5.3 :** Comparaison des paramètres de la cascade endoreversible et celle irréversible pour  $R \equiv \sqrt{283.2/111.6}$  avec  $k_1 = k_2 = 1.1$ .

| <i>Variables et paramètres</i>     | <i>Cascade à deux cycles endoreversibles (Ethane à puissance maximale)</i> | <i>Cascade à deux cycles irréversibles (Ethane à puissance maximale)</i> | <i>Différences entre valeurs de cascade endoreversible et irréversible.</i> |
|------------------------------------|--|--|---|
| $P/C_t, K$                         | 4.4  | 2.7  | 1.7   |
| $Q_h/C_t, K$                       | 11.7   | 8.8  | 2.9   |
| $Q_c/C_t, K$                       | 7.4  | 6.1  | 1.3   |
| $T_{hc1}, K$                       | 248.1  | 255.4  | -7.3  |
| $T_{hc2}, K$                       | 160.1  | 180.6  | -20.5   |
| $T_{ce1}, K$                       | 186.5  | 203.9  | -17.4   |
| $T_{ce2}, K$                       | 133.7  | 129.1  | 4.6   |
| $T_{ce1}/T_{hc2}$                  | 1.2  | 1.1  | 0.1   |
| $\eta$                             | 37.2%  | 32.0%  | 5.2%  |
| $A_{m1}, K$                        | 35.1   | 27.9   | 7.2   |
| $A_{m2}, K$                        | 26.4   | 23.3   | 3.1   |
| $A_{m3}, K$                        | 22.1   | 17.5   | 4.6   |
| $\dot{P}/(kg / s \text{ methane})$ | 134.6  | 228.9  | -94.3   |
| <i>Unité UA des échangeurs</i>     | <i>69.5 unités<br/>soit 23.3 m<sup>2</sup></i>                             | <i>83.7 unités<br/>soit 27.9 m<sup>2</sup></i>                           | <i>-14.2 unités<br/>soit -4.6 m<sup>2</sup></i>                             |

#### Résultats :

Le flux de chaleur prélevé à la source chaude étant 1.32 fois plus faible dans la cascade irréversible, celle-ci produit 1.59 fois moins de puissance que la cascade endoreversible pour la

même conductance totale donnée. Elle nécessite donc 1.32 fois plus de conductance totale, à répartir également entre les trois échangeurs, pour produire la même puissance que la cascade endoréversible.

Le rendement de la cascade irréversible est 1.2 fois inférieur à celui de la cascade endoreversible, du fait que le flux de chaleur de la source chaude est plus affecté par l'irréversibilité que le flux au niveau de la source froide. Cette situation amène les rapports  $\frac{\dot{Q}_{ci}}{\dot{Q}_{cj}}$  et  $\frac{\dot{Q}_{ci}}{\dot{Q}_{ji}}$  à augmenter en diminuant le rendement de chaque cycle ce qui entraîne la diminution du rendement global de la cascade.

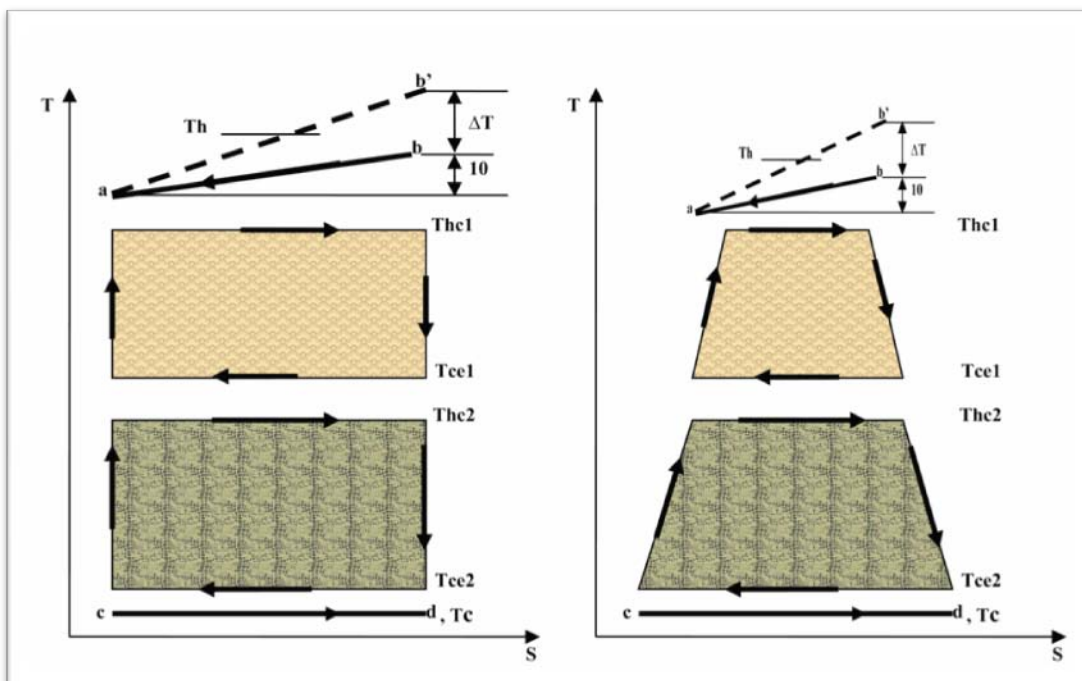


Figure 5.3 : Diagramme T-s d'un cycle de puissance endoréversible.

Figure 5.4 : Diagramme T-s d'un cycle de puissance irréversible.



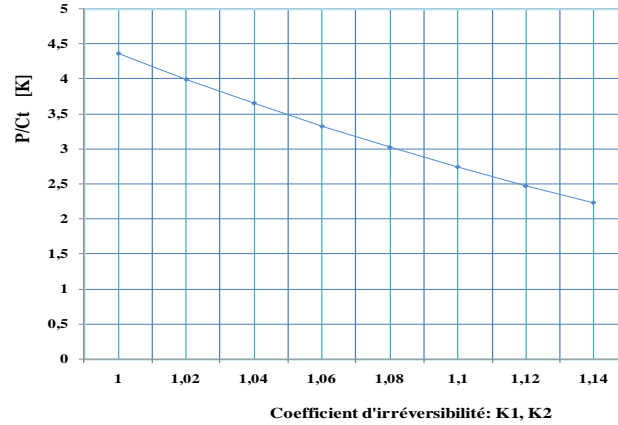


Figure 5.5 : Puissance de la cascade en fonction des coefficients d'irréversibilité

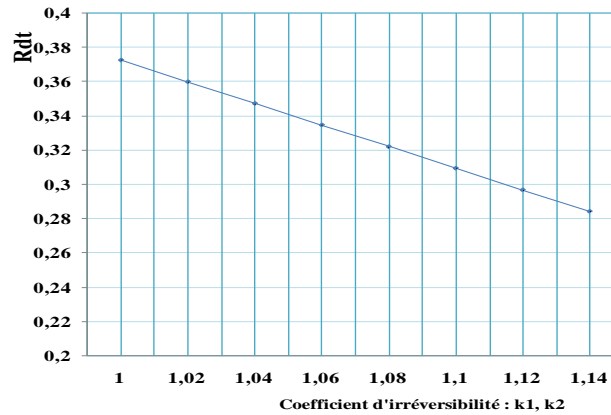


Figure 5.6 : Rendement thermique de la cascade en fonction des coefficients d'irréversibilité.

Plus les coefficients d'irréversibilité augmentent, plus le rendement de la cascade diminue à cause des irréversibilités aux échangeurs ce qui affecte le niveau de puissance de la cascade qui diminue d'une manière plus accentuée. Pour une faible augmentation de coefficient  $k_1$  et  $k_2$  qui définissent les irréversibilités de la cascade une perte importante de puissance s'en suit.

### 5.5. Amélioration des performances par la température de la source chaude.

De la même façon que le cas précédent, le tableau 5.4 qui suit, illustre les résultats d'une amélioration de performances en faisant changer le  $\Delta T$ .

Tableau 5.4 : Performances de la cascade irréversible pour deux valeurs de  $\Delta T$  égales à 15 et 70 °C, avec  $k_1 = k_2 = 1.1$ .

| Variables et paramètres | Cas A: $\Delta T=15^\circ$<br>D'ou $R=1.6140$ | Cas A: $\Delta T=70^\circ$<br>D'ou $R=1.6886$ | Cas de base<br>$R=1.593$ |
|-------------------------|---|---|--------------------------|
| $P/C_t, K$              | 3.0   | 3.9   | 2.7                      |
| $Q_h/C_t, K$            | 9.336   | 11.213  | 8.84                     |

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| $Q_c / C_t, K$                             | 6.4                                    | 7.3                                    | 6.1                                    |
| $T_{hc1}, K$                               | 261.3                                  | 283.3                                  | 255.4                                  |
| $T_{hc2}, K$                               | 182.7                                  | 190.3                                  | 180.6                                  |
| $T_{ce1}, K$                               | 207.2                                  | 219.0                                  | 203.9                                  |
| $T_{ce2}, K$                               | 129.8                                  | 132.5                                  | 129.1                                  |
| $T_{ce1} / T_{hc2}$                        | 1.1                                    | 1.1                                    | 1.1                                    |
| $\eta$                                     | 31.8%                                  | 34.9%                                  | 31.0%                                  |
| $A_{m1}, K$                                | 29.4                                   | 35.3                                   | 27.8                                   |
| $A_{m2}, K$                                | 24.4                                   | 28.6                                   | 23.3                                   |
| $A_{m3}, K$                                | 18.2                                   | 20.9                                   | 17.5                                   |
| $\dot{P} / (\text{kg} / \text{s methane})$ | 238.7                                  | 273.3                                  | 228.9                                  |
| Unité UA des échangeurs                    | 80.8 unités<br>soit $26.8 \text{ m}^2$ | 70.1 unités<br>soit $23.4 \text{ m}^2$ | 83.7 unités<br>soit $27.9 \text{ m}^2$ |

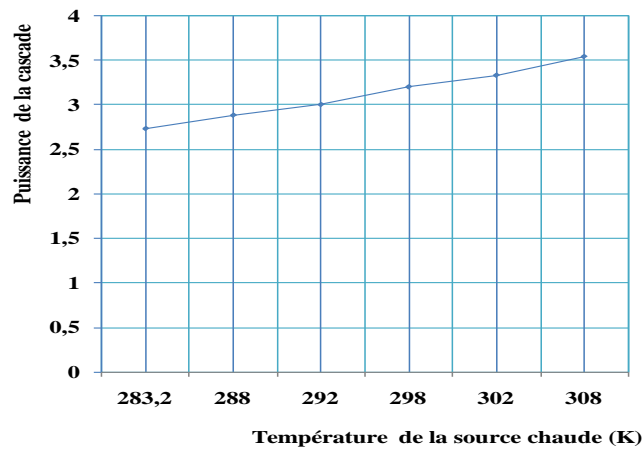


Figure 5.7: Effet de l'augmentation de la  $T^\circ$  de la source chaude sur la puissance de la cascade

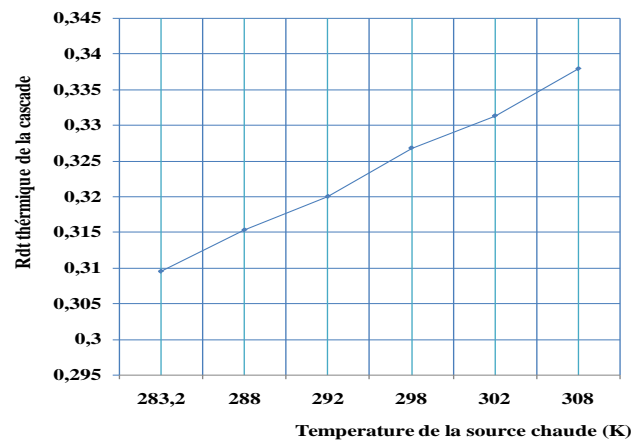


Figure 5.8: Effet de l'augmentation de la  $T^\circ$  de la source chaude sur le rendement de la cascade

L'augmentation de la température de la source chaude à l'aide d'un circuit fermé d'une solution d'eau et glycol d'éthylène chauffé amplifie l'écart de température du cycle du haut, ce qui se traduit en conséquence sur l'écart de température du cycle bas. Ces amplifications des écarts de température induisent une augmentation du travail fourni par chacun des deux cycles, ce qui se traduit par une augmentation de la puissance.

Aussi, l'augmentation de la température de la source chaude  $T_h$  entraîne une augmentation de la valeur du coefficient  $R$  ce qui se traduit par une augmentation du rendement global de la cascade qui est égal à  $1-(1/R)$  dans le cas d'une cascade endoréversible et à  $1-(\sqrt{k_1 k_2}/R)$  dans le cas d'une cascade irréversible.

# **Chapitre VI :**

## **Conclusion générale et recommandations**

## 6. Conclusion générale et recommandations

Le sujet traité dans ce mémoire de magistère est du domaine de l'optimisation de cycles thermomécaniques à conductance thermique finie. Un grand nombre de travaux ont été publiés sur les cycles endoréversibles à puissance maximale et dans une moindre mesure sur des cycles irréversibles, mais à notre connaissance, pas sur les cascades de cycles.

Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire a consisté à optimiser d'abord une cascade de cycles endoréversibles à puissance maximum, ensuite une cascade de cycles irréversibles et finalement à appliquer les résultats obtenus à une cascade conceptuelle pour la regazéification de GNL. Une cascade à trois cycles irréversibles a également été évaluée et présentée en annexe comme une généralisation possible à une cascade de cycles combinés en général. Les paramètres optimums obtenus ont été comparés pour le simple cycle et la cascade de cycles endoréversibles. La deuxième comparaison a concerné une cascade de cycles endoréversibles et une autre à cycles irréversibles.

Les considérations préliminaires relatives à une cascade de puissance de deux cycles endoréversibles montrent que la puissance produite est 2,25 fois moindre par unité de conductance que celle du simple cycle endoréversible; la surface d'échange requise pour produire la même puissance sera donc 9/4 fois plus que celle d'un cycle simple. Le recours éventuel à une cascade de deux cycles n'est justifié que par la complexité de réaliser un cycle de puissance utilisant un fluide composé à base d'hydrocarbures dont les températures d'ébullition et de condensation accommodent les températures des sources. Le rendement de la cascade et du simple cycle ont la même valeur : celle donnée par Curzon – Ahlborn. Celle-ci ne dépend que des températures des sources et du niveau de puissance produite. La puissance de la cascade diminuant avec le nombre de cycles, il importe d'augmenter la conductance thermique, ce pour obtenir le niveau de puissance désiré.

L'application à une cascade conceptuelle de cycles à Méthane et Ethane destiné à la regazéification de GNL a été évaluée avec et sans recours à l'augmentation de la température de la source chaude. L'augmentation de la température de la source chaude par une énergie de récupération permet de réduire le débit d'eau de regazéification et la surface d'échange nécessaire en proportion de la valeur  $d\Delta T$  considéré. L'économie de surface d'échange est évaluée à 0,23 % par degré pour  $\Delta T=15^\circ\text{C}$  et 0,27% par degré pour  $\Delta T=70^\circ\text{C}$ . Le gain de puissance évalué sur les mêmes bases donne 0,24%/°C pour  $\Delta T=15^\circ\text{C}$  et 0,23%/°C pour  $\Delta T=70^\circ\text{C}$ . On voit ainsi que l'économie de surface d'échange et le gain de puissance donnent des gains constants par °C; une valeur élevée  $d\Delta T$  n'est pas justifiée à priori mais seulement si des calculs économiques plus fiables le confirment. Une valeur de la température de  $85^\circ\text{C}$  à l'entrée de la turbine à Ethane permet d'obtenir un rendement de 40,8% à puissance maximale, valeur qui n'est pas très éloignée du rendement des centrales thermiques. Les conductances thermiques et les surfaces d'échange ont été évaluées sur la base des écarts moyens arithmétiques et de l'écart moyen logarithmique; l'erreur commise est de 20% pour  $\Delta T=15^\circ\text{C}$  et 37% pour  $\Delta T=70^\circ\text{C}$ . Une évaluation plus précise des inventaires de transferts thermiques et de la puissance de cycles irréversibles pourrait être faite ultérieurement.

La comparaison de la même cascade avec une cascade de cycles irréversibles dont le coefficient correspond à un rendement isentropique d'environ 90% permet de voir que les rendements sont réduits de 6% et que les puissances sont réduites de 38 à 34%. Les conductances thermiques sont augmentées par les irréversibilités parce que les écarts de températures dans les échangeurs sont diminués par ces mêmes irréversibilités.

A fin de rapprocher les performances obtenues pour le concept de cascade de cycles à celles de cycles réels, il est proposé d'appliquer les résultats obtenus ici à une étude qui emploierait les propriétés physiques du Méthane et l'Ethane dans deux cycles réels de Rankine avec surchauffe.

**Annexe A1 :**  
**Cascade à trois cycles**  
**endoreversibles à puissance maximale**

La figure A1.1 ci-dessous représente le diagramme température-entropie d'une cascade à trois cycles thermique  $\dot{Q}_h$  au cycle 1 et la source froide reçoit un flux thermique  $\dot{Q}_c$  rejeté par le cycle 2 qui reçoit un flux  $\dot{Q}_{h2}$  du cycle 1 et qui cède la quantité  $\dot{Q}_{h2}$  au troisième  $\dot{Q}_{h2}$  cycle à son tour.

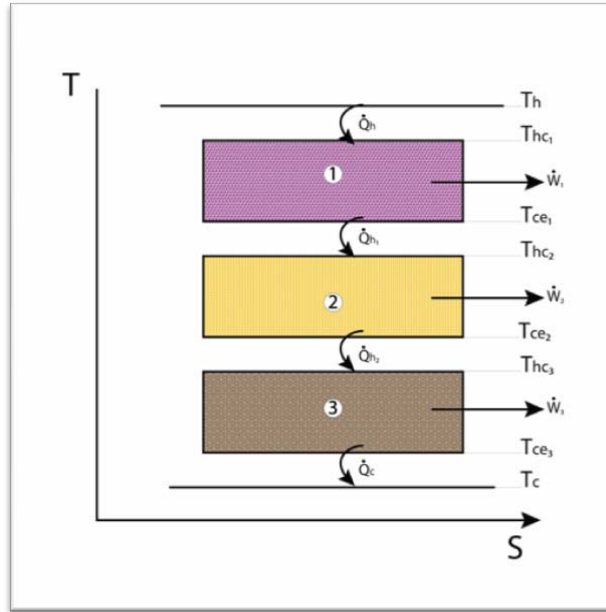


Figure A1.1 : Diagramme Température Entropie d'une cascade à trois cycles endoreversibles

Comme il été annoncé dans le chapitre précédent, Le but recherché à travers la présente annexe est d'optimiser la puissance globale de la cascade ou, en d'autres termes, trouver la valeur maximale qui peut atteindre la puissance de la cascade exprimée en fonction des différentes températures qui définissent la cascade.

Le problème à résoudre consiste à maximiser la puissance totale fournie par les cycles 1 et 2 :

$$P = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 + \dot{W}_3 \quad (A1-1)$$

Sachant que

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = \dot{Q}_h - \dot{Q}_{h1} \\ \dot{W}_2 = \dot{Q}_{h1} - \dot{Q}_{h2} \\ \dot{W}_3 = \dot{Q}_{h2} - \dot{Q}_c \end{cases} \quad (A1-2)$$

Ce qui donne :

$$P = \dot{Q}_h - \dot{Q}_c \quad (A1-3)$$

La puissance à maximiser est sujette à deux contraintes :

- i. La conductance thermique totale dont on dispose est égale à  $C_t$
- ii. Les trois cycles de puissance sont endoreversibles.

Ces contraintes sont définies par les trois équations suivantes :

$$\frac{\dot{Q}_h}{T_h - T_{hc1}} + \frac{\dot{Q}_{h1}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + \frac{\dot{Q}_{h2}}{T_{ce2} - T_{hc3}} + \frac{\dot{Q}_c}{T_{ce3} - T_c} = C_t \quad (A1-4)$$



$$\begin{cases} \frac{\dot{Q}_h}{T_{hc1}} - \frac{\dot{Q}_{h1}}{T_{ce1}} = 0 \\ \frac{\dot{Q}_{h1}}{T_{hc2}} - \frac{\dot{Q}_{h2}}{T_{ce2}} = 0 \\ \frac{\dot{Q}_{h2}}{T_{hc3}} - \frac{\dot{Q}_c}{T_{ce3}} = 0 \end{cases} \quad (A1-5)$$

En solutionnant le système linéaire de trois équations à trois inconnues représentant les trois flux thermiques, et remplaçant dans (3), on obtient la puissance totale par unité de conductance à maximiser:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3} - T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3}}{\frac{T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3}}{T_h - T_{hc1}} + \frac{T_{ce1}T_{hc2}T_{hc3}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + \frac{T_{ce1}T_{ce2}T_{hc3}}{T_{ce2} - T_{hc3}} + \frac{T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3}}{T_{ce3} - T_c}} \quad (A1-6)$$

Les variables de décision sont les isothermes de cycles  $T_{hc1}, T_{hc2}, T_{hc3}, T_{ce1}, T_{ce2}, T_{ce3}$ . L'équation (6) peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3} - T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3}}{D} \quad (A1-7)$$

Avec :

$$D = \frac{T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3}}{T_h - T_{hc1}} + \frac{T_{ce1}T_{hc2}T_{hc3}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + \frac{T_{ce1}T_{ce2}T_{hc3}}{T_{ce2} - T_{hc3}} + \frac{T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3}}{T_{ce3} - T_c} \quad (A1-8)$$

Et :

$$\begin{aligned} A_{m1} &= T_h - T_{hc1} \\ A_{m2} &= T_{ce1} - T_{hc2} \\ A_{m3} &= T_{ce2} - T_{hc3} \\ A_{m4} &= T_{ce3} - T_c \end{aligned} \quad (A1-9)$$

Les équations (A1.8) et (A1.9) sont réécrites sous la forme suivante afin d'utiliser la notation de la programmation géométrique:

$$\begin{aligned} D^{-1} \cdot [A_{m1}^{-1}(T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3}) + A_{m2}^{-1}(T_{ce1}T_{hc2}T_{hc3}) + A_{m3}^{-1}(T_{ce1}T_{ce2}T_{hc3}) + A_{m4}^{-1}(T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3})] &= 1 \\ A_{m1}^{-1} \cdot (T_h - T_{hc1}) &= 1 \\ A_{m2}^{-1} \cdot (T_{ce1} - T_{hc2}) &= 1 \\ A_{m3}^{-1} \cdot (T_{ce2} - T_{hc3}) &= 1 \\ A_{m4}^{-1} \cdot (T_{ce3} - T_c) &= 1 \end{aligned} \quad (A1-10)$$

On pose les variables suivantes dont le poids est égal ou inférieur à l'unité:

$$\begin{aligned} w_{01} &= \frac{T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3}}{D} \\ w_{02} &= \frac{T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3}}{D} \end{aligned} \quad (A1-11)$$

$$\begin{aligned} w_{11} &= D^{-1} [A_{m1}^{-1}(T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3})] \\ w_{12} &= D^{-1} [A_{m2}^{-1}(T_{ce1}T_{hc2}T_{hc3})] \\ w_{13} &= D^{-1} [A_{m3}^{-1}(T_{ce1}T_{ce2}T_{hc3})] \\ w_{14} &= D^{-1} [A_{m4}^{-1}(T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3})] \end{aligned} \quad (A1-12)$$

$$\begin{aligned}
 w_{21} &= A_{m1}^{-1} T_h \\
 w_{22} &= A_{m1}^{-1} T_{hc1} \\
 w_{31} &= A_{m2}^{-1} T_{ce1} \\
 w_{32} &= A_{m2}^{-1} T_{hc2} \\
 w_{41} &= A_{m3}^{-1} T_{ce2} \\
 w_{42} &= A_{m3}^{-1} T_{hc3} \\
 w_{51} &= A_{m4}^{-1} T_{ce3} \\
 w_{52} &= A_{m4}^{-1} T_c
 \end{aligned} \tag{A1-13}$$

Avec cette notation, le problème de maximisation s'écrit :

$$\frac{P}{C_t} = w_{01} - w_{02} \tag{A1-14}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
 w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14} &= 1 & (a) \\
 w_{21} - w_{22} &= 1 & (b) \\
 w_{31} - w_{32} &= 1 & (c) \\
 w_{41} - w_{42} &= 1 & (d) \\
 w_{51} - w_{52} &= 1 & (e)
 \end{aligned} \tag{A1-15}$$

$$L = (w_{01} - w_{02}) + \lambda_1(w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14} - 1) + \lambda_2(w_{21} - w_{22} - 1) + \lambda_3(w_{31} - w_{32} - 1) + \lambda_4(w_{41} - w_{42} - 1) + \lambda_5(w_{51} - w_{52} - 1) \tag{A1-16}$$

$$\begin{aligned}
 T_{hc1} : w_{01} + \lambda_1 w_{11} - \lambda_2 w_{22} &= 0 \\
 T_{hc2} : w_{01} + \lambda_1(w_{11} + w_{12}) - \lambda_3 w_{32} &= 0 \\
 T_{hc3} : w_{01} + \lambda_1(w_{11} + w_{12} + w_{13}) - \lambda_4 w_{42} &= 0 \\
 T_{ce1} : -w_{02} + \lambda_1(w_{13} + w_{12} + w_{14}) + \lambda_3 w_{31} &= 0 \\
 T_{ce2} : -w_{02} + \lambda_1(w_{13} + w_{41}) + \lambda_4 w_{41} &= 0 \\
 T_{ce3} : -w_{02} + \lambda_1 w_{14} + \lambda_5 w_{51} &= 0 \\
 A_{m1} : -\lambda_1 w_{11} - \lambda_2 &= 0 \\
 A_{m2} : -\lambda_1 w_{12} - \lambda_3 &= 0 \\
 A_{m3} : -\lambda_1 w_{13} - \lambda_4 &= 0 \\
 D : \lambda_1 + w_{01} - w_{02} &= 0
 \end{aligned} \tag{A1-17}$$

Il y a huit équations et huit inconnues. On obtient les valeurs des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ , qui sont égales à :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -(w_{01} - w_{02}) \\
 \lambda_2 &= (w_{01} - w_{02})w_{11} \\
 \lambda_3 &= (w_{01} - w_{02})w_{12} \\
 \lambda_4 &= (w_{01} - w_{02})w_{13} \\
 \lambda_5 &= (w_{01} - w_{02})w_{14}
 \end{aligned} \tag{A1-18}$$

Il s'agit maintenant de remplacer, pour les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  dans le système d'équations (A1-12) pour obtenir les quatre équations qui régissent les règles d'optimalité. Ces règles sont théoriquement suffisantes (si elles sont indépendantes) pour déterminer avec les contraintes de définition, les variables de décision que sont les isothermes des fluides de cycles, et par la suite, la puissance maximale de la cascade.

Les quatre règles d'optimalité sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02})w_{11}w_{21} & (a) \\
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02})(w_{11} + w_{12}w_{31}) & (b) \\
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02})(w_{11} + w_{12} + w_{13}w_{41}) & (c) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02})(w_{12}w_{32} - w_{13} - w_{14}) & (d) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02})(w_{13}w_{42} - w_{14}) & (e) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02})(w_{14}w_{52}) & (f)
 \end{aligned} \tag{A1-19}$$

L'addition de (A1.19-a) et (A1.19-c), donne :

$$\frac{w_{11}}{w_{12}} = \frac{w_{31}}{w_{22}}$$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m2}} = \frac{T_{hc1}}{T_{ce1}} \tag{A1-20}$$

L'addition de (A1.19-b) et (A1.19-d) donne :

$$\frac{w_{12}}{w_{13}} = \frac{w_{41}}{w_{32}}$$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m2}}{A_{m3}} = \frac{T_{hc2}}{T_{ce2}} \tag{A1-21}$$

Et l'addition de (A1.19-c) et (A1.19-f) donne :  $w_{42} = w_{51}$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m3}}{A_{m4}} = \frac{T_{hc3}}{T_{ce3}} \tag{A1-22}$$

On remarque que les règles (A1-18), (A1-19) et (A1-20), se rapportent aux cycles 1,2 et 3 respectivement. De plus, en utilisant la contrainte (A1.15-a) et les résultats (A1.20), (A1.21) et (A1.22), on aura :

$$\begin{aligned}
 \frac{w_{11}}{w_{12}} &= \frac{A_{m2}}{A_{m1}} \frac{T_{hc1}}{T_{ce1}} = 1 \\
 \frac{w_{12}}{w_{13}} &= \frac{A_{m3}}{A_{m2}} \frac{T_{hc2}}{T_{ce2}} = 1 \\
 \frac{w_{13}}{w_{14}} &= \frac{A_{m4}}{A_{m3}} \frac{T_{hc3}}{T_{ce3}} = 1
 \end{aligned}$$

Ces résultats se traduisent par l'égalité:

$$w_{11} = w_{12} = w_{13} = w_{14} = \frac{1}{4} \tag{A1-23}$$

Ce résultat signifie qu'à l'optimum, la conductance thermique totale est répartie en quatre parties égales entre les trois échangeurs de chaleur. Il constitue une règle d'optimalité importante de portée générale. Son utilisation dans la formulation initiale du problème simplifie grandement la solution de celui-ci.

On divise maintenant (A1-19-a) par (A1-19-b) et on obtient :

$$\frac{1 + \frac{w_{12}}{w_{11}} w_{31}}{w_{21}} = 1 \tag{A1-24}$$

Sachant que  $(w_{22} + 1) = w_{21}$  et que  $w_{11} = w_{12}$ , l'équation (3.21) devient :

$$\frac{w_{21}}{1 + w_{31}} = 1$$

Qui se traduit par :

$$\frac{T_h}{A_{m1}} = \frac{T_{ce1}}{A_{m2}} + 1 \quad (A1-25)$$

On effectue la division de (3.17-3) / (3.17-4) pour obtenir:

$$\frac{w_{52}}{w_{42} - 1} = 1$$

Ce qui donne :

$$\frac{T_{hc3}}{A_{m3}} - 1 = \frac{T_c}{A_{m4}} \quad (A1-26)$$

D'autre part, la combinaison par division des deux équations (A1-17.1) et (A1-17.4) donne :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m4}} = \sqrt{\frac{T_h}{T_c}} = R \quad (A1-27)$$

En combinant (A1-25), (A1-26) et (A1-27) en utilisant la définition  $R \equiv \sqrt{T_h/T_c}$ , on obtient la valeur optimale des isothermes extrêmes:

$$T_{hc1} = \frac{R}{4} T_c (3R + 1) \quad (A1-28)$$

$$T_{ce3} = \frac{1}{4} T_c (R + 3) \quad (A1-29)$$

$$\frac{T_{ce1}}{T_{hc2}} = \frac{3R + 1}{2(R + 1)} \quad (A1-30)$$

$$\frac{T_{ce2}}{T_{hc3}} = \frac{2(R + 1)}{R + 3} \quad (A1-31)$$

La puissance et le rendement de la cascade sont obtenus sans qu'il soit nécessaire de connaître les isothermes intermédiaires  $T_{ce1}$  et  $T_{hc2}$ .

### Hypothèses :

Pour que la puissance globale du cycle soit maximale, et suite à l'impossibilité de résoudre ce système sans avoir besoin d'une équation supplémentaire, on aura besoin de la contrainte qui stipule qu'au moins deux puissances de deux des trois cycles, considérés séparément, seront maximales. C'est-à-dire qu'on doit avoir trois solutions théoriques ; la première, avec la puissance du premier et deuxième cycle pris seuls, soit maximale et la deuxième, avec celles du deuxième et le troisième cycle, et la troisième solution pour le premier et le troisième cycle, de même avec puissance maximale.

### Détermination de $T_{ce1}$ et $T_{hc2}$ :

**Hypothèse (1) :** les puissances des cycles 1 et 2 sont maximales

$$\eta_1 = 1 - \sqrt{\frac{T_{hc2}}{T_h}} = 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{T_{hc2}}{T_h}} = \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}}$$

D'où:

$$T_{hc2} = \left( \frac{T_{hc2}}{T_{ce1}} \frac{T_{hc1}}{\sqrt{T_h}} \right)^2 \quad (A1-32)$$

En utilisant les équations (A1-31) et (A1-32), on peut écrire :

$$T_{hc2} = \frac{T_c}{4} (R + 1)^2 \quad (A1-33)$$

De (A1-31) et (A1-33) :

$$T_{ce1} = \frac{T_c}{8} (R + 1)(3R + 1) \quad (A1-34)$$

De (A1-33), (A1-32), (A1-31, et (A1-30) :

$$T_{hc3} = \frac{T_c}{8} \left( \frac{(R + 1)^2 (R + 3)}{3R + 1} \right)$$

$$T_{ce2} = T_{hc3} = \frac{T_c}{4} (R+1)^3 (R+3)$$

Les rendements des deux cycles sont donnés par :

$$\begin{aligned} \eta_2 &= 1 - \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}} ; \quad \eta_2 = 2 \left( \frac{R-1}{3R+1} \right) \\ \eta_1 &= 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}} ; \quad \eta_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{R} \right) \end{aligned} \quad (A1-35)$$

$$\eta_3 = 1 - \frac{T_{ce3}}{T_{hc3}} \quad \eta_3 = \frac{(R-1)^2}{(R+1)(R+3)}$$

**Hypothèse (2) :** Les puissances des cycles 2 et 3 sont maximales

Le rendement du cycle 2 est exprimé par :

$$\eta_2 = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_{ce1}}} = 1 - \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}}$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{T_c}}{\sqrt{T_{ce1}}} = \frac{T_{ce3}}{T_{hc3}} \quad (A1-36)$$

On utilise la même démarche que pour la première hypothèse, on aura successivement:

$$\begin{aligned} T_{hc2} &= \frac{1}{4} T_c (3R+1)(R+1)^2 \\ T_{ce1} &= \frac{1}{8} T_c (3R+1)^2 (R+1) \\ T_{hc3} &= \frac{1}{8} T_c (R+1)(R+3) \end{aligned} \quad (A1-37)$$

$$\begin{aligned} T_{ce2} &= \frac{1}{4} T_c (R+1)^2 \\ \eta_2 &= 1 - \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}} ; \quad \eta_2 = \frac{3R}{3R+1} \\ \eta_1 &= 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}} ; \quad \eta_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{(3R+1)(R+1)}{R} \\ \eta_3 &= 1 - \frac{T_{ce3}}{T_{hc3}} ; \quad \eta_3 = 1 - \frac{2}{(R+1)} \end{aligned} \quad (A1-38)$$

Dans ce cas, le cycle 1, qui n'est pas à puissance maximale, a un rendement égal à seulement un tiers de celui de la cascade et inférieur au rendement du cycle 2 qui est à puissance maximale.

La puissance maximale de la cascade et celle de chacun des cycles sont obtenues en utilisant l'équipartition de la conductance thermique et les valeurs optimales des isothermes des fluides de cycles dans les équations (A1.1), (A1.2) et (A1.3) :

**Hypothèse (3) :** Les puissances des cycles 1 et 3 sont maximales

$$\eta_1 = 1 - \sqrt{\frac{T_{hc2}}{T_h}} = 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}} \quad (A1-39)$$

Alors :

$$\frac{\sqrt{T_{hc2}}}{\sqrt{T_h}} = \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}
 T_{hc2} &= \frac{T_c}{4}(R+1)^2 \\
 T_{ce1} &= \frac{T_c}{2}(R+1)(3R+1)
 \end{aligned}
 \tag{A1-40}$$

$$\begin{aligned}
 T_{hc3} &= \frac{T_c}{8}(R+2)(R+3) \\
 T_{ce2} &= \frac{T_c}{4}(R+1)^2 \\
 \eta_2 &= 1 - \frac{T_{ce2}}{T_{hc2}} ; \quad \eta_2 = 0 \\
 \eta_1 &= 1 - \frac{T_{ce1}}{T_{hc1}} ; \quad \eta_1 = 1 - \frac{2(R+1)}{R} \\
 \eta_3 &= 1 - \frac{T_{ce3}}{T_{hc3}} \quad \eta_3 = 1 - \frac{2}{(R+2)}
 \end{aligned}
 \tag{A1-41}$$

### Conclusion

Les résultats de l'optimisation de la cascade de trois cycles endoreversibles sont résumés dans le tableau A1.1 ci-dessous.

**Tableau A.1.1** : Résultats de l'optimisation de la cascade de trois cycles endoreversibles.

| <i>Hypothèse 1</i>   | <i>Hypothèse 2</i>                               | <i>Hypothèse 3</i>                   |
|--|--|--------------------------------------|
| $T_{hc1} = \frac{R}{4}T_c(3R+1)$                                   | $T_{hc1} = \frac{R}{4}T_c(3R+1)$                 | $T_{hc1} = \frac{R}{4}T_c(3R+1)$     |
| $T_{hc2} = \frac{T_c}{4}(R+1)^2$                                   | $T_{hc2} = \frac{1}{4}T_c(3R+1)(R+1)^2$          | $T_{hc2} = \frac{T_c}{4}(R+1)^2$     |
| $T_{hc3} = \frac{T_c}{8} \left( \frac{(R+1)^2(R+3)}{3R+1} \right)$ | $T_{ce1} = \frac{1}{8}T_c(3R+1)^2(R+1)$          | $T_{ce1} = \frac{T_c}{2}(R+1)(3R+1)$ |
| $T_{ce1} = \frac{T_c}{8}(R+1)(3R+1)$                               | $T_{hc3} = \frac{1}{8}T_c(R+1)(R+3)$             | $T_{hc3} = \frac{T_c}{8}(R+2)(R+3)$  |
| $T_{ce2} = \frac{T_c}{4}(R+1)^3(R+3)$                              | $T_{ce2} = \frac{1}{4}T_c(R+1)^2$                | $T_{ce2} = \frac{T_c}{4}(R+1)^2$     |
| $T_{ce3} = \frac{1}{4}T_c(R+3)$                                    | $T_{ce3} = \frac{1}{4}T_c(R+3)$                  | $T_{ce3} = \frac{1}{4}T_c(R+3)$      |
| $\eta_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{R} \right)$              | $\eta_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{(3R+1)(R+1)}{R}$ | $\eta_1 = 1 - \frac{2(R+1)}{R}$      |
| $\eta_2 = 2 \left( \frac{R-1}{3R+1} \right)$                       | $\eta_2 = \frac{3R}{3R+1}$                       | $\eta_2 = 0$                         |
| $\eta_3 = \frac{(R-1)^2}{(R+1)(R+3)}$                              | $\eta_3 = 1 - \frac{2}{(R+1)}$                   | $\eta_3 = 1 - \frac{2}{(R+2)}$       |

La cascade à trois cycles endoreversibles à puissance maximale est un problème à quatre degrés de liberté : les deux isothermes extrêmes et les deux rapports des deux isothermes internes. Cette puissance maximale est obtenue pour que deux des trois puissances des trois cycles prises séparément soient maximales.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

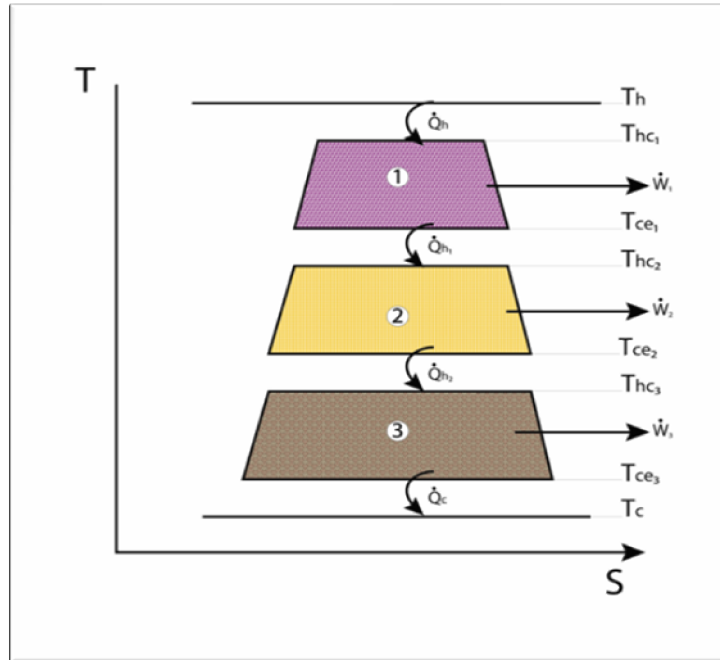
- [1] Gas storage in the APE Region, Asia Pacific Energy Research Center, Institute of Energy Economics, Japan 2002, PP. 25-26.
- [2] LNG Liquefaction Facilities Worldwide, World LNG Map 2004, Petroleum Economist Ltd.
- [3] BP statistical review of world energy, 2008.
- [4] Lower Emission LNG Vaporization, C.C. Yang and Zupeng Huang, Foster Wheeler North America Corporation, USA.
- [5] CMC Energie “Le gaz naturel liquéfié: une ressource prometteuse”.
- [6] Le GNL : une commodité en devenir. Marie-Françoise Chabrelie, CEDIGAZ, Manuscrit définitif remis le 17 janvier 2006.
- [7] P.PETIT. Liquifaction du gaz naturel, Technique de l’Ingenieur. J3 601.
- [8] Commission energie-environnement, La problematique du gas naturel au XXIème siècle. NOVEMBRE 2002.
- [9] Saleem Alavi. LNG Tanker Market , MSc in Maritime Economics and Logistics,2003 / 2004.
- [10] Antoine Gérard et Francis van de Walle, Distrigas N.V. Brussels, “40 MW combined Heat and Power Plant at Zeebrugge LNG Terminal, Innovations and Performances” World Energy Council Information, London.
- [11] Rafael Peiro Ripoli et al. , Integration of CCGT plant & Existing LNG Terminal at Barcelona Port, Offshore World, April-May 2006, pp23-28.
- [12] Brian Eizentrout et al., Study focuses on six LNG regasification systems. LNG journal, july/August 2006 pp.21-22.
- [13] W.S. Worthington and B.S. Hubbard, « Improved regasification methods reduce emissions », Hydrocarbon Processing, July 2005, pp. 51-54.
- [14] A. Bejan, Theory of heat transfer irreversible power plant, Int. J; Heat Mass Transfer 31, 1211-1219 (1988).
- [15] L.Chen et al. “ Theoretical analysis of the performance of a regenerative closed Brayton cycle with internal irreversibilities” Energie Convers. Mgmt vol 9 1997. Pp 871- 877.
- [16] Abdul khaliq, “Finite time heat transfer analysis and generalized power optimization of an endoreverssible Rankine heat engine” Applied Energy, 79(1), (2004), 27-40.
- [17] Lingen chen et al. “Generalized irreversible heat-engine experiencing. Complex heat-transfer law “Applied Energy 85 (2008) 52-60.
- [18] Yanlin Ge, et al. “Finite time thermodynamic modeling and analysis of an irreversible Otto-cycle. 85(2008) 618-624.
- [19] Mohand A Ait-Ali ., Cascade conceptuelle de cycles endoreversibles pour la regazéification du GNL.
- [20] Mohand A. Ait-Ali, “Optimum endoréversible power cycle with a specified temperature range”, J. Appl. Phys. 76 (6), 15 September 1995, pp. 3231-3236.
- [21] J.H.Horlock, Advanced Gas Turbine Cycles, Chapter 07 (The combined cycle gas turbine (CCGT) );2003.
- [22] F.L.Curzon and B. Ahlborn, Efficiency of a Carnot engin at maximum power output, J.Appl.Phys., 43, pp 22-24, (1975).

# **Annexe A2 :**

## **Cascade à trois cycles irréversibles à puissance maximale**



La figure A2.1 ci-dessous représente le diagramme température-entropie d'une cascade à trois cycles irréversibles disposés en série entre la température  $T_h$  d'une source chaude à capacité thermique infinie et la température  $T_c$  d'une source froide aussi à capacité thermique infinie ; la source chaude fournit un flux thermique  $\dot{Q}_h$  au cycle 1 et la source froide reçoit un flux thermique  $\dot{Q}_c$  rejeté par le cycle 2 qui reçoit un flux  $\dot{Q}_{h1}$  du cycle 1 et qui cède la quantité au troisième  $\dot{Q}_{h2}$  cycle à son tour.



**Figure A 2.1** : Diagramme Température Entropie d'une cascade à trois cycles irréversibles

Comme il été annoncé dans le corps du mémoire, la présente annexe a but d'optimiser la puissance globale de la cascade ou, en d'autres termes, trouver la valeur maximale qui peut atteindre la puissance de la cascade exprimée en fonction des différentes températures qui définissent la cascade.

Le problème à résoudre consiste à maximiser la puissance totale fournie par les cycles 1 et 2 :

$$P = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 + \dot{W}_3 \quad (A2-1)$$

Sachant que

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = \dot{Q}_h - \dot{Q}_{h1} \\ \dot{W}_2 = \dot{Q}_{h1} - \dot{Q}_{h2} \\ \dot{W}_3 = \dot{Q}_{h2} - \dot{Q}_c \end{cases} \quad (A2-2)$$

Ce qui donne :

$$P = \dot{Q}_h - \dot{Q}_c \quad (A2-3)$$

La puissance à maximiser est sujette à trois contraintes :

- i. La conductance thermique totale dont on dispose est égale à  $C_t$
- ii. Les trois cycles de puissance sont endoréversibles.
- iii. Les coefficients d'irréversibilités sont toujours supérieurs à 1.

Ces contraintes sont définies par les trois équations suivantes :

$$\frac{\dot{Q}_h}{T_h - T_{hc1}} + \frac{\dot{Q}_{h1}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + \frac{\dot{Q}_{h2}}{T_{ce2} - T_{hc3}} + \frac{\dot{Q}_c}{T_{ce3} - T_c} = C_t \quad (\text{A2-4})$$

$$\begin{cases} \frac{Q_h}{T_{hc1}} - \frac{1}{k_1} \frac{Q_{h1}}{T_{ce1}} = 0 \\ \frac{Q_{h1}}{T_{hc2}} - \frac{1}{k_2} \frac{Q_{h2}}{T_{ce2}} = 0 \\ \frac{Q_{h2}}{T_{hc3}} - \frac{1}{k_3} \frac{Q_c}{T_{ce3}} = 0 \end{cases} \quad (\text{A2-5})$$

En solutionnant le système linéaire de trois équations à trois inconnues représentant les trois flux thermiques, et remplaçant dans (A2.3), on obtient la puissance totale par unité de conductance à maximiser:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1} T_{hc2} T_{hc3} - k_1 k_2 k_3 T_{ce1} T_{ce2} T_{ce3}}{\frac{T_{hc1} T_{hc2} T_{hc3}}{T_h - T_{hc1}} + k_1 \frac{T_{ce1} T_{hc2} T_{hc3}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + k_1 k_2 \frac{T_{ce1} T_{ce2} T_{hc3}}{T_{ce2} - T_{hc3}} + k_1 k_2 k_3 \frac{T_{ce1} T_{ce2} T_{ce3}}{T_{ce3} - T_c}} \quad (\text{A2-6})$$

Les variables de décision sont les isothermes de cycles  $T_{hc1}, T_{hc2}, T_{hc3}, T_{ce1}, T_{ce2}, T_{ce3}$ .

L'équation (A2.6) peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{P}{C_t} = \frac{T_{hc1} T_{hc2} T_{hc3} - k_1 k_2 k_3 T_{ce1} T_{ce2} T_{ce3}}{D} \quad (\text{A2-7})$$

Avec :

$$D = \frac{T_{hc1} T_{hc2} T_{hc3}}{T_h - T_{hc1}} + k_1 \frac{T_{ce1} T_{hc2} T_{hc3}}{T_{ce1} - T_{hc2}} + k_1 k_2 \frac{T_{ce1} T_{ce2} T_{hc3}}{T_{ce2} - T_{hc3}} + k_1 k_2 k_3 \frac{T_{ce1} T_{ce2} T_{ce3}}{T_{ce3} - T_c} \quad (\text{A2-8})$$

Et :

$$\begin{aligned} A_{m1} &= T_h - T_{hc1} \\ A_{m2} &= T_{ce1} - T_{hc2} \\ A_{m3} &= T_{ce2} - T_{hc3} \\ A_{m4} &= T_{ce3} - T_c \end{aligned} \quad (\text{A2-9})$$

Les équations (A2.8) et (A2.9) sont réécrites sous la forme suivante afin d'utiliser la notation de la programmation géométrique:

$$\begin{aligned} D^{-1} \cdot [A_{m1}^{-1} (T_{hc1} T_{hc2} T_{hc3}) + A_{m2}^{-1} k_1 (T_{ce1} T_{hc2} T_{hc3}) + A_{m3}^{-1} k_1 k_2 (T_{ce1} T_{ce2} T_{hc3}) + A_{m4}^{-1} k_1 k_2 k_3 (T_{ce1} T_{ce2} T_{ce3})] &= 1 \\ A_{m1}^{-1} \cdot (T_h - T_{hc1}) &= 1 \\ A_{m2}^{-1} \cdot (T_{ce1} - T_{hc2}) &= 1 \\ A_{m3}^{-1} \cdot (T_{ce2} - T_{hc3}) &= 1 \\ A_{m4}^{-1} \cdot (T_{ce3} - T_c) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A2-10})$$

On pose les variables suivantes dont le poids est égal ou inférieur à l'unité:

$$\begin{aligned}
 w_{01} &= \frac{T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3}}{D} \\
 w_{02} &= k_1k_2k_3 \frac{T_{ce1}T_{ce2}T_{ce3}}{D} \\
 w_{11} &= D^{-1} \left[ A_{m1}^{-1} (T_{hc1}T_{hc2}T_{hc3}) \right] \\
 w_{12} &= D^{-1} \left[ A_{m2}^{-1} k_1 (T_{ce1}T_{hc2}T_{hc3}) \right] \\
 w_{13} &= D^{-1} \left[ A_{m3}^{-1} k_1k_2 (T_{ce1}T_{ce2}T_{hc3}) \right] \\
 w_{14} &= D^{-1} \left[ A_{m4}^{-1} k_1k_2k_3 (T_{ce1}T_{ce3}T_{ce3}) \right] \\
 \\
 w_{21} &= A_{m1}^{-1} T_h \\
 w_{22} &= A_{m1}^{-1} T_{hc1} \\
 w_{31} &= A_{m2}^{-1} T_{ce1} \\
 w_{32} &= A_{m2}^{-1} T_{hc2} \\
 w_{41} &= A_{m3}^{-1} T_{ce2} \\
 w_{42} &= A_{m3}^{-1} T_{hc3} \\
 w_{51} &= A_{m4}^{-1} T_{ce3} \\
 w_{52} &= A_{m4}^{-1} T_c
 \end{aligned} \tag{A2-11}$$

Avec cette notation, le problème de maximisation s'écrit :  $\frac{P}{C_t} = w_{01} - w_{02}$  (A2-12)

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
 w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14} &= 1 & (a) \\
 w_{21} - w_{22} &= 1 & (b) \\
 w_{31} - w_{32} &= 1 & (c) \\
 w_{41} - w_{42} &= 1 & (d) \\
 w_{51} - w_{52} &= 1 & (e)
 \end{aligned} \tag{A2-13}$$

$$L = (w_{01} - w_{02}) + \lambda_1 (w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14} - 1) + \lambda_2 (w_{21} - w_{22} - 1) + \lambda_3 (w_{31} - w_{32} - 1) + \lambda_4 (w_{41} - w_{42} - 1) + \lambda_5 (w_{51} - w_{52} - 1) \tag{A2-14}$$

Les  $\lambda$  sont les multiplicateurs de Lagrange dont il faudra également déterminer les valeurs qui définissent les extrema. La recherche des extrema se fait par rapport aux variables primaires ; on écrit pour cela les équations des dérivées premières. La formulation initiale comporte quatre degrés de liberté et quatre variables de décision : les isothermes des fluides de cycles.

La formulation par la programmation géométrique comporte huit variables primaires et quatre contraintes de définition, le dénominateur D et les écarts moyens arithmétiques ; ce qui détermine quatre degrés de liberté, si aucune contrainte implicite n'a été oubliée.

$$\begin{aligned}
 T_{hc1} &: w_{01} + \lambda_1 w_{11} - \lambda_2 w_{22} = 0 \\
 T_{hc2} &: w_{01} + \lambda_1 (w_{11} + w_{12}) - \lambda_3 w_{32} = 0 \\
 T_{hc3} &: w_{01} + \lambda_1 (w_{11} + w_{12} + w_{13}) - \lambda_4 w_{42} = 0 \\
 T_{ce1} &: -w_{02} + \lambda_1 (w_{13} + w_{12} + w_{14}) + \lambda_3 w_{31} = 0 \\
 T_{ce2} &: -w_{02} + \lambda_1 (w_{13} + w_{41}) + \lambda_4 w_{41} = 0 \\
 T_{ce3} &: -w_{02} + \lambda_1 w_{14} + \lambda_5 w_{51} = 0 \\
 A_{m1} &: -\lambda_1 w_{11} - \lambda_2 = 0 \\
 A_{m2} &: -\lambda_1 w_{12} - \lambda_3 = 0 \\
 A_{m3} &: -\lambda_1 w_{13} - \lambda_4 = 0 \\
 D &: \lambda_1 + w_{01} - w_{02} = 0
 \end{aligned} \tag{A2-15}$$

Il y a huit équations et huit inconnues. On obtient d'abord les valeurs des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ , qui sont égales à :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -(w_{01} - w_{02}) \\
 \lambda_2 &= (w_{01} - w_{02}) w_{11} \\
 \lambda_3 &= (w_{01} - w_{02}) w_{12} \\
 \lambda_4 &= (w_{01} - w_{02}) w_{13} \\
 \lambda_5 &= (w_{01} - w_{02}) w_{14}
 \end{aligned} \tag{A2-16}$$

Il s'agit de remplacer les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  dans le système d'équations (A2.12) pour obtenir les quatre équations qui régissent les règles d'optimalité. Ces règles sont théoriquement suffisantes (si elles sont indépendantes) pour déterminer avec les contraintes de définition, les variables de décision que sont les isothermes des fluides de cycles, et par la suite, la puissance maximale de la cascade.

Les quatre règles d'optimalité sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02}) w_{11} w_{21} & (a) \\
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02}) (w_{11} + w_{12} w_{31}) & (b) \\
 w_{01} &= (w_{01} - w_{02}) (w_{11} + w_{12} + w_{13} w_{41}) & (c) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02}) (w_{12} w_{32} - w_{13} - w_{14}) & (d) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02}) (w_{13} w_{42} - w_{14}) & (e) \\
 w_{02} &= (w_{01} - w_{02}) (w_{14} w_{52}) & (f)
 \end{aligned} \tag{A2-17}$$

L'addition de (A2.17-1) et (A2.17-3), donne :  $\frac{w_{11}}{w_{12}} = \frac{w_{31}}{w_{22}}$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m2}} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{T_{hc1}}{T_{ce1}} \tag{A2-18}$$

L'addition (A2.17-2) et (A2.17-4) donne :  $\frac{w_{12}}{w_{13}} = \frac{w_{41}}{w_{32}}$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m2}}{A_{m3}} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \frac{T_{hc2}}{T_{ce2}} \tag{A2-19}$$

Et l'addition (A2.17-3) et (A2.17-6) donne :  $w_{42} = w_{51}$

Qui se traduit par :

$$\frac{A_{m3}}{A_{m4}} = \frac{1}{\sqrt{k_3}} \frac{T_{hc3}}{T_{ce3}} \tag{A2-20}$$

On remarque que les règles (A2-18), (A2-19) et (A2-20) se rapportent aux cycles 1,2 et 3 respectivement.

De plus, en utilisant la contrainte (A2-13-1) et les résultats (A2-18), (A2-19) et (A2-20), on remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{w_{11}}{w_{12}} &= \frac{A_{m2} T_{hc1}}{A_{m1} T_{ce1}} \frac{1}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \\ \frac{w_{12}}{w_{13}} &= \frac{A_{m3} T_{hc2}}{A_{m2} T_{ce2}} \frac{1}{k_2} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} \\ \frac{w_{13}}{w_{14}} &= \frac{A_{m4} T_{hc3}}{A_{m3} T_{ce3}} \frac{1}{k_3} = \frac{1}{\sqrt{k_3}} \end{aligned}$$

Ces résultats se traduisent par :

$$\left\{ \begin{aligned} w_{11} &= \frac{1}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 k_2 k_3}} \\ w_{12} &= \frac{\sqrt{k_1}}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 k_2 k_3}} \\ w_{13} &= \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 k_2 k_3}} \\ w_{14} &= \frac{\sqrt{k_1 k_2 k_3}}{1 + \sqrt{k_1} + \sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_1 k_2 k_3}} \end{aligned} \right. \quad (\text{A2-21})$$

On divise maintenant (A2-17-1) par (A2-17-2), on obtient :

$$\frac{1 + \frac{w_{12}}{w_{11}} w_{31}}{w_{21}} = 1$$

Qui se traduit par :

$$1 + \sqrt{k_1} \frac{T_{ce1}}{A_{m2}} = \frac{T_h}{A_{m1}} \quad (\text{A2-23})$$

On effectue maintenant la division (A2-17-5) / (A2-17-6) pour obtenir:

$$\frac{\frac{w_{13}}{w_{14}} w_{42} - 1}{w_{52}} = 1$$

Ce qui donne :

$$\sqrt{k_3} \frac{T_{hc3}}{A_{m3}} - 1 = \frac{T_h}{A_{m4}} \quad (\text{A2-24})$$

D'autre part, la combinaison par division des deux équations (A2-17.1) et (A2-17.4) donne :

$$\frac{A_{m1}}{A_{m4}} = \sqrt{\frac{T_h}{T_c}} \quad (\text{A2-25})$$

En combinant (A2-22), (A2-24) et (A2-25) en utilisant la définition  $R \equiv \sqrt{T_h/T_c}$ , on obtient la valeur optimale des isothermes extrêmes:

$$T_{hc1} = T_c R(R+1) \left[ \frac{\left( \sqrt{k_1 k_2 k_3} + \sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} \right) R + \left( \sqrt{k_1 k_2 k_3} + \sqrt{k_1} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} \right)}{\left( \sqrt{k_1 k_2 k_3} + \sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} + 1 \right) R + \left( \sqrt{k_1 k_2 k_3} + 2\sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} \right)} \right] \quad (\text{A2-26})$$

$$T_{ce3} = T_c (R+1) \left[ \frac{R + (\sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} + 1)}{(\sqrt{k_1 k_2 k_3} + \sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} + 1)R + \left( \sqrt{k_1 k_2 k_3} + 2\sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} \right)} \right] \quad (A2-27)$$

$$\frac{T_{hc2}}{T_{ce1}} = \frac{(1 + \sqrt{k_3})(R+1)}{\left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k_2 k_3}} + \sqrt{k_3} \right)R + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{k_2 k_3}} - \frac{1}{k_3} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \right)} \quad (A2-28)$$

$$\frac{T_{ce2}}{T_{hc3}} = \frac{(1 + \sqrt{k_3})(R+1)}{R + (1 + \sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2})} \quad (A2-29)$$

$$\alpha = \sqrt{k_1 k_2 k_3} + \sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} + 1$$

On pose à titre de simplification :  $\beta = k_3 \sqrt{k_2} + \sqrt{k_3} + k_3 \sqrt{k_2 k_3}$

$$\gamma = \sqrt{k_1} + k_3 \sqrt{k_1 k_2} + 1$$

Les équations (A2-25), (A2-26), et (A2-27), deviennent :

$$T_{ce3} = T_c (R+1) \frac{R + (\alpha - \sqrt{k_1 k_2 k_3})}{\alpha R + \left( \alpha + \sqrt{k_1} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} \right)}$$

$$T_{hc1} = T_c R (R+1) \frac{(\alpha - 1)R + \left( \alpha - k_3 \sqrt{k_1 k_2} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} - 1 \right)}{\alpha R + \left( \alpha + \sqrt{k_1} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} \right)}$$

$$\frac{T_{ce2}}{T_{hc3}} = \frac{(1 + \sqrt{k_3})(R+1)}{R + \gamma}$$

$$\frac{T_{ce1}}{T_{hc2}} = \frac{\beta R + (\beta - k_3 \sqrt{k_2 k_3} - \sqrt{k_1})}{k_3 \sqrt{k_2} (1 + \sqrt{k_3})}$$

### Hypothèses :

Pour que la puissance globale du cycle soit maximale, et suite à l'impossibilité de résoudre ce système sans avoir besoin d'une équation supplémentaire, on aura besoin de la contrainte qui stipule qu'au moins deux puissance de deux des trois cycles, considérés séparément, seront maximales. C'est-à-dire qu'on doit avoir trois solutions théoriques ; la première, avec la puissance du premier et deuxième cycle pris seuls, soit maximale et la deuxième, avec celles du deuxième et le troisième cycle, et la troisième solution pour le premier et le troisième cycle, de même avec puissance maximale.

**Détermination des températures inconnues:**

**Hypothèse 1 :** les puissances des cycles 1 et 2 sont maximales (exemple)

$$T_{hc2} = (R+1)^2 \left( \frac{k_3 \sqrt{k_2} (R+1)}{\beta R + (\beta - k_3 \sqrt{k_2 k_3} - \sqrt{k_1})} \frac{(\alpha-1)R + \left( \alpha - k_3 \sqrt{k_1 k_2} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} - 1 \right)}{\alpha R + \left( \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} + \sqrt{k_1} \right)} \right)^2 T_c$$

$$T_{ce1} = (R+1)^2 \left( \frac{(\alpha-1)R + \left( \alpha - k_3 \sqrt{k_1 k_2} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} - 1 \right)}{\alpha R + \left( \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} + \sqrt{k_1} \right)} \right)^2 T_c$$

$$T_{ce2} = \frac{(R+1)^3 (\gamma + R)}{(\beta R + (\beta - k_3 \sqrt{k_2 k_3} - \sqrt{k_1}))^3 (1 + \sqrt{k_3})} \left( \frac{(\alpha-1)R + \left( \alpha - k_3 \sqrt{k_1 k_2} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} - 1 \right)}{\alpha R + \left( \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} + \sqrt{k_1} \right)} \right)^2 T_c$$

$$T_{hc3} = \frac{(R+1)^4 (\gamma + R)^2}{(\beta R + (\beta - k_3 \sqrt{k_2 k_3} - \sqrt{k_1}))^4} \left( \frac{(\alpha-1)R + \left( \alpha - k_3 \sqrt{k_1 k_2} - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} - 1 \right)}{\alpha R + \left( \alpha - \frac{k_1}{\sqrt{k_3}} + \sqrt{k_1} \right)} \right)^2 T_c$$

**Hypothèses 2 et 3:** Non utiles à développer.