

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique



Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE MAGISTER

Option : **ENERGETIQUE**

THEME

**ETUDE ET SIMULATION DES PERTES DE BOIL OFF
DANS UN RESERVOIR DE GNL**

Etudié par :

Mr Rachid LEKHAL

Soutenue devant le jury :

Président :	Pr. S.E. CHITOUR	Professeur	E.N.P
Rapporteur :	Pr. M.A. AIT ALI	Professeur	E.N.P
Examineurs :	Dr. S. LARBI	Maître de Conférence	E.N.P
	Dr. A. SMAILI	Maître de Conférence	E.N.P
	Dr. T. BOUREZGUE	Maître de Conférence	E.N.P

Dédicaces

Avec ma profonde gratitude et grand amour, je dédie ce travail en signe de reconnaissance et de respect.

- *A ma mère et mon père qui ont consacré leur vie pour bâtir la mienne. Je leurs serai éternellement reconnaissant.*
- *A ma tante et ma grand-mère.*
- *A mes frangines, Razika et Fahima.*
- *A mes frangins, Samir et Arezki.*
- *A toute ma grande famille.*
- *A l'amour de ma vie Djedji.*
- *A tous mes amis (es).*
- *A tous ceux qui luttent pour une Algérie meilleure.*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire de Magister a été effectué au sein du département de Génie Mécanique de l'Ecole Nationale Polytechnique.

Je tiens à exprimer en premier lieu ma profonde et sincère gratitude à Monsieur M.A. AIT ALI, Professeur à l'ENP pour m'avoir encadré et orienté durant la préparation de ce mémoire. Son engagement scientifique, sa disponibilité et son esprit d'analyse et de synthèse m'ont beaucoup aidé à me surpasser durant cette période.

Je remercie également Monsieur S.E. CHITOUR, Professeur à l'ENP, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être le président du jury.

Merci à Monsieur S. LARBI, Maître de conférences à l'ENP, à Monsieur A. SMAILI, Maître de conférences à l'ENP et Monsieur T. BOUREZGUE, Maître de conférences à l'ENP pour avoir accepté de faire partie des membres du jury.

Mes remerciements et ma profonde sympathie vont aussi à tous mes collègues et amis de l'Ecole Nationale Polytechnique et de l'Université de M.MAMMERI de Tizi-Ouzou ainsi qu'à toute l'équipe de Société CIMETspa.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé pour mener à bien ce modeste travail.

ملخص : الدراسة النظرية للسلوك الحراري لخزانات التبريد بنموذج تحليلي هي طريقة منتهجة لتوضيح المشكلة الفيزيائية وهذا باستعمال نظام معادلات تفاضلية مع تعيين الحدود. الجزأين الأولين من هذا العمل خُصَّصا لإعطاء نموذج خزان النتروجين السائل من طرف نظام أجنحة مرتبطة مع العلم أن الفرق الرئيسي هو طريقة تغيير درجة الحرارة لطور التبخر. المقاربة الأولى تستند على استيفاء القيم التجريبية للمرجع [1] أما الثانية فهي ناتجة من الحصيلة الطاقوية المطبقة على طبقة عنصرية من البخار ملخصة بمعادلة تفاضلية أرفقناها لنظام المعادلات التفاضلية السابقة حيث مكنتنا من الحصول على حلولها .

من جهة أخرى، في الجزء الثالث قمنا بتحليل مشابه مع طريقة الحل المعتمدة لخزانات النتروجين السائل، و قد مكنا هذا التحليل من إنشاء نموذج فيزيائي مناسب لخزانات الغاز الطبيعي السائل والذي نميزه بنظام ثلاث معادلات تفاضلية مترابطة. حلها سمح لنا بتقييم تدفق التبخر ومعرفة الحقول الحرارية بدلالة معدل تعبئة الخزانات.

الكلمات المفتاحية : خزان النتروجين السائل / أجنحة حرارية/التبخر/ خزانات الغاز الطبيعي السائل

Résumé : L'étude du comportement thermique des réservoirs cryogéniques par un modèle analytique est une approche formelle adoptée ici pour expliciter le problème physique par des systèmes d'équations différentielles et leurs conditions aux limites. Les deux premières parties de ce travail ont été consacrées à la modélisation d'un cryostat à Azote liquide par un système d'ailettes assemblées dont la différence principale est l'évolution de la température de la phase vapeur ; la première approche utilise une interpolation de valeurs expérimentales et la deuxième est issue d'un bilan d'énergie effectué sur une couche élémentaire de vapeurs explicité par une équation différentielle adjointe au système d'équations différentielles précédent et dont la solution analytique a été obtenue. Par ailleurs, dans la troisième partie, une analyse de similarité avec la méthodologie de résolution adoptée pour le cryostat à Azote liquide nous a permis d'élaborer un modèle physique adéquat pour les réservoirs de stockage de GNL caractérisé par un système de trois équations différentielles couplées ; sa résolution analytique a permis l'évaluation des débits de Boil-off et des champs de températures en fonction du taux de remplissage des bacs.

Mots clés : Cryostat / Azote liquide / ailettes / Boil-off / réservoirs de GNL

Abstract: A theoretical study of thermal behavior of cryogenic tanks by an analytical model is a formal approach adopted here to define the heat transfer problem by systems of differential equations and their boundary conditions. The first two parts of this work were devoted to modeling a liquid nitrogen cryostat by a system of assembled fins where the main difference is the change of temperature of the vapor phase. The first approach uses an interpolation of experimental values; the second results from an assessment of an energy balance carried out on an elementary vapor layer modeled by a differential equation. This equation is associated with the preceding system to obtain the analytical solution of the modified problem. In addition, as a third part, a similarity analysis of a liquid nitrogen cryostat has been carried out with the aim of applied the same methodology to LNG storage tanks described by a system of three coupled differential equations. The obtained analytical solution of this problem gave the LNG rate of Boil-off and the temperature field according to the LNG level in the tank.

Keywords: cryostat / Liquid nitrogen / fins / Boil off / LNG tanks

Nomenclature

a, a_1, a_2	: Constantes de substitution	
b, b_1, b_2	: Constantes de substitution	
c, c_1, c_2	: Constantes de substitution	
d_1	: Constante de substitution	
c_{pv}	: Chaleur spécifique des vapeurs d'Azote à pression constante.....	[J/kg.K]
c_{pg}	: Chaleur spécifique des vapeurs de GNL à pression constante.....	[J/kg.K]
e, e_1, e_t, e_f	: Epaisseurs des enveloppes	[m]
f_1	: Constante de substitution	
df_{1-2}	: Facteur de forme géométrique élémentaire	
F_{1-2}, F_τ	: Facteurs de forme géométriques / gris	
h_{cf}	: Chaleur latente d'évaporation de l'Azote liquide à pression atmosphérique.....	[J/kg]
h_{fg}	: Chaleur latente d'évaporation du GNL à pression atmosphérique.....	[J/kg]
h	: Coefficient d'échange convectif	[W/m ² .K]
I_0	: Fonction de Bessel modifiée du 1 ^{ier} type d'ordre zéro	
I_1	: Fonction de Bessel modifiée du 1 ^{ier} type d'ordre 1	
K_0	: Fonction de Bessel modifiée du 2 ^{eme} type d'ordre zéro	
K_1, K_3	: Racines du polynôme caractéristique	
L	: Hauteur du bain cryogénique.....	[m]
M_i (i = 1 à 5)	: Constantes de substitution	
\dot{m}_g	: Débit massique des vapeurs de GNL.....	[kg/s]
\dot{m}_v	: Débit massique des vapeurs d'Azote.....	[kg/s]
P	: Polynôme caractéristique	
R_e	: Rayon extérieur de l'enveloppe externe	[m]
R_i	: Rayon intérieur de l'enveloppe externe.....	[m]
R_m	: Rayon moyen de l'enveloppe externe.....	[m]
r_e	: Rayon extérieur de l'enveloppe interne.....	[m]
r_i	: Rayon intérieur de l'enveloppe interne	[m]
r_m	: Rayon moyen de l'enveloppe interne.....	[m]
T	: Température.....	[K]
$U_{e,l}$: Conductance globale (environnement externe – liner).....	[W/m ² .K]
$U_{e,t}$: Conductance globale (environnement externe – toit interne).....	[W/m ² .K]
X_1, X_3	: Constantes de substitution	
z_0	: Hauteur au niveau de la base de l'enveloppe interne à partir du socle.....	[m]
z_L	: Hauteur au niveau de l'interface liquide vapeur.....	[m]
z_1	: Hauteur au niveau du couvercle/toit interne.....	[m]

Lettres grecques

α_i ; (i = 1 à 5)	: Constantes de substitution	
$\alpha_g, \alpha_l, \alpha_t, \alpha_v$: Constantes de substitution	
β_i ; (i = 1 à 5)	: Constantes de substitution	
β_1, β_t	: Constantes de substitution	
γ_1, γ_2	: Constantes de substitution	
δ_1	: Constante de substitution	
σ	: Constante de Stefan Boltzmann	
ε	: Emissivité thermique des enveloppes du cryostat	
ε_l	: Emissivité thermique du liner du bac de GNL	
ε_t	: Emissivité thermique du toit interne du bac de GNL	
ξ_i ; (i = 1 à 5)	: Constantes de substitution	
η_i ; (i = 1 à 5)	: Constantes de substitution	
λ_i (i = 1 à 5)	: Coefficients de conductivité thermique des différentes ailettes du cryostat.....	[W/m.K]
λ_l	: Coefficients de conductivité thermique du liner du bac de GNL.....	[W/m.K]
λ_t	: Coefficients de conductivité thermique du toit interne du bac de GNL.....	[W/m.K]
ν	: Viscosité cinématique.....	[m ² /s]

Ω_i ($i = 1 \text{ à } 3$) : Solutions du polynôme caractéristique du modèle mathématique du réservoir de GNL
 ω_i ($i = 1 \text{ à } 5$) : Solutions du polynôme caractéristique du modèle cryostat à Azote liquide 2^{ème} approche
 \emptyset : Flux de chaleur de conduction / convection / convection équivalente.[W]

Nombre sans dimension

Gr : Nombre de Grashoff
Nu : Nombre de Nusselt,
Pr : Nombre de Prandtl,
Ra : Nombre de Rayleigh

Indices

A_1 : Ailette intérieure du cryostat
 A_2 : Ailette extérieure haute du cryostat
 A_3 : Ailette extérieure intermédiaire du cryostat
 A_4 : Ailette extérieure basse du cryostat
 A_5 : Ailette extérieure radiale (socle du cryostat)
 A_L : Ailette liner du bac de GNL
 A_T : Ailette toit interne du bac de GNL
a : Environnement extérieur
C : Couvercle
cd : Conduction
cv : Convection
e : Extérieur
g : Boil-off
GNL : Gaz Naturel Liquéfié
 Ln_2 : Azote liquide
i : Intérieur
m : Moyen
re : Rayonnement extérieur (convection équivalente)
ri : Rayonnement intérieur (convection équivalente)
S : Surface
v : Vapeur

Liste des figures

- Fig. I-1** : Différentes techniques d'isolation et de rétention de réservoirs cryogéniques
- Fig. II-1** : Schéma physique du cryostat modélisé par cinq ailettes concentriques
- Fig. II-2** : Ailette interne A_1 (Col du cryostat)
- Fig. II-3** : Ailette extérieure du haut A_2
- Fig. II-4** : Ailette latérale intermédiaire A_3
- Fig. II-5** : Ailette externe du bas A_4
- Fig. II-6** : Socle du cryostat Ailette A_5
- Fig. II-7** : Couche élémentaire de vapeurs d'Azote
- Fig. III-1** : Bac de stockage de GNL
- Fig. III-2** : Couche élémentaire de vapeurs de GNL
- Fig. III-3** : Ailette latérale interne (Liner) A_L
- Fig. III-4** : Paroi interne du toit Ailette A_T
- Fig. IV-1** : Points de jonction des différentes Ailettes
- Fig. IV-2** : Bilan thermique du bain cryogénique
- Fig. IV-3** : Bilan thermique du GNL
- Fig. V-1** : Variation du champ de température de l'ailette interne A_1 en fonction de la hauteur du col
- Fig. V-2** : Variation des profils de températures de l'enveloppe latérale externe du cryostat ($A_2 + A_3 + A_4$) en fonction de la hauteur
- Fig. V-3** : Variation du profil de température du socle du cryostat (A_4) en fonction du rayon
- Fig. (V-4-a)** : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide $L = 0, 075$ m
- Fig. (V-4-b)** : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide $L = 0, 150$ m
- Fig. (V-4-c)** : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide $L = 0, 300$ m
- Fig. (V-4-d)** : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide $L = 0, 375$ m
- Fig. (V-5-a)** : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0, 075$ m
- Fig. (V-5-b)** : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0, 150$ m
- Fig. (V-5-c)** : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0, 300$ m
- Fig. (V-5-d)** : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0, 375$ m
- Fig. (V-6-a)** : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe pour une hauteur liquide $L = 0, 075$ m
- Fig. (V-6-b)** : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe pour une hauteur liquide $L = 0, 150$ m
- Fig. (V-6-c)** : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe pour une hauteur liquide $L = 0, 300$ m
- Fig. (V-6-d)** : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe pour une hauteur liquide $L = 0, 375$ m
- Fig. (V-7-a)** : Variation de la température du socle du cryostat (A_5) pour une hauteur liquide $L = 0, 075$ m
- Fig. (V-7-b)** : Variation de la température du socle du cryostat (A_5) pour une hauteur liquide $L = 0, 150$ m
- Fig. (V-7-c)** : Variation de la température du socle du cryostat (A_5) pour une hauteur liquide $L = 0, 300$ m
- Fig. (V-7-d)** : Variation de la température du socle du cryostat (A_5) pour une hauteur liquide $L = 0, 375$ m
- Fig. (V-8-a)** : Débit massique en fonction de la conductivité thermique pour différentes hauteurs du bain cryogénique
- Fig. (V-8-b)** : Débit massique en fonction du niveau du liquide pour différentes conductivités thermiques
- Fig. (V-9-a)** : Variation de la température des vapeurs de GNL pour un niveau liquide $L = 3, 85$ m
- Fig. (V-9-b)** : Variation de la température des vapeurs de GNL pour un niveau liquide $L = 14, 05$ m
- Fig. (V-9-c)** : Variation de la température des vapeurs de GNL pour un niveau liquide $L = 28, 85$ m
- Fig. (V-10-a)** : Variation de la température de l'ailette verticale interne (A_L) pour un niveau liquide $L = 3, 85$ m
- Fig. (V-10-b)** : Variation de la température de l'ailette verticale interne (A_L) pour un niveau liquide $L = 14, 05$ m
- Fig. (V-10-c)** : Variation de la température de l'ailette verticale interne (A_L) pour un niveau liquide $L = 28, 85$ m
- Fig. (V-11-a)** : Variation de la température du toit interne (A_T) pour un niveau liquide $L = 3, 85$ m
- Fig. (V-11-b)** : Variation de la température du toit interne (A_T) pour un niveau liquide $L = 14, 05$ m
- Fig. (V-11-c)** : Variation de la température du toit interne (A_T) pour un niveau liquide $L = 28, 85$ m
- Fig. (V-12)** : Variation du débit de Boil-off en fonction du taux de remplissage du bac de stockage de GNL
- Fig. (V-13)** : Variation du débit de Boil-off en fonction de l'émissivité thermique de l'enveloppe interne du réservoir de stockage de GNL
- Fig. (V-14)** : Influence de la température extérieure sur le débit de Boil-off pour différents taux de remplissage du bac de GNL

Table des matières

Nomenclature	I
--------------------	---

CHAPITRE I : Introduction Générale

1. Le Gaz Naturel	1
2. Bref historique du GNL.....	1
3. La cryogénie.....	2
4. Types de réservoirs de stockage de GNL utilisés en Algérie.....	2
5. La chaîne du GNL.....	4
5.1. La liquéfaction.....	5
5.2. Les navires méthaniers	6
5.3. Les terminaux méthaniers.....	8
6. Objet de l'étude	9

CHAPITRE II : Modélisation du Cryostat à Azote Liquide

1. Introduction	11
2. Partie 1 : Cryostat avec profil de température linéaire des vapeurs d'Azote	11
2.1. Présentation du modèle physique	11
2.2. Bilans thermiques et mise en équations.....	12
2.2.1 Col du cryostat (Ailette A_1).....	12
2.2.2 Ailette extérieure du haut (Ailette A_2)	16
2.2.3 Ailette extérieure intermédiaire (Ailette A_3)	18
2.2.4 Ailette extérieure du bas (Ailette A_4)	21
2.2.5 Socle du cryostat (Ailette A_5)	23
2.3. Profil de température des vapeurs d'Azote.....	25
2.4. Méthode de résolution	26
3. Partie 2 : Cryostat avec profil de température non linéaire des vapeurs d'Azote	26
3.1. Bilan thermique sur une couche de vapeurs	26
3.2. Méthode de résolution	28

CHAPITRE III : Modélisation du Réservoir de Stockage de GNL

1. Introduction	29
2. Présentation du modèle physique adopté.....	29
3. Bilans thermiques et mise en équations.....	31
3.1. Vapeurs de GNL.....	31
3.2. Ailette latérale interne A_L (liner)	33
3.3. Ailette du toit interne du réservoir (Ailette A_T)	36
3.4. Méthodologie de résolution	38

CHAPITRE IV : Résolution Analytique

1. Introduction	39
2. Cryostat à Azote liquide	39
2.1. Cas du profil de température linéaire de la phase vapeur.....	39
2.1.1. Résolution analytique	42
2.2. Cas du profil de température non linéaire de la phase vapeur.....	47
2.2.1. Détermination analytique des champs de températures	48
2.2.2. Détermination du débit d'évaporation \dot{m}_v	51
2.2.3. Résumé de la méthode de résolution	56
3. Réservoir de stockage de gaz naturel liquéfié.....	57
3.1. Résolution analytique	57
3.2. Détermination du débit de Boil-off \dot{m}_g	60
3.3. Méthode de résolution	63
4. Organigramme de calcul des deux modèles de rétention cryogénique	63

CHAPITRE V : Résultats et Interprétations

1. Introduction	64
2. Présentation des résultats relatifs au modèle cryostat à Azote liquide.....	64
2.1. Résultats de la première approche	64
2.1.1. Analyse et interprétations	66
2.2. Résultats de la deuxième approche.....	68
2.2.1. Champs de températures de la phase vapeur	69

2.2.2. Champs de températures de l'ailette interne A_1 (col du cryostat)	71
2.2.3. Champs de températures des ailettes ($A_2+A_3+A_4$) assemblées	73
2.2.4. Champs de températures du socle du cryostat (Ailette A_5)	75
2.2.5. Influence du taux de remplissage et de la conductivité thermique sur le débit des vapeurs issues du bain cryogénique d'Azote liquide	77
3. Présentation des résultats relatifs au modèle du bac de stockage de GNL	79
3.1. Distributions de températures de la phase vapeur (Boil-off)	80
3.2. Distributions de températures de l'ailette verticale interne A_L (liner)	82
3.3. Distributions de la température de l'ailette du toit interne (A_T)	84
3.4. Débit de Boil-off en fonction du taux de remplissage du réservoir de GNL.....	85
3.5. Influence de l'émissivité thermique sur le débit de Boil-off	86
3.6. Influence de la température extérieure sur le débit de Boil-off	87
3.7. Influence de la dégradation de l'isolation sur le débit de Boil-off	87
8. Conclusion générale	89
Annexes	93
Références bibliographiques	96

Fig. (V-15) : Influence de la dégradation de l'isolation sur le débit de Boil-off pour différents taux de remplissage du bac de GNL

Liste des tableaux

Tableau I-1 : Différents types de réservoirs de stockage de G.N.L.

Tableau IV-1 : Températures mesurées des vapeurs et du col du cryostat

Tableau V-1 : Caractéristiques géométriques du cryostat

Tableau V-2 : Caractéristiques thermiques du cryostat

Tableau V-3 : Débits des vapeurs en fonction du niveau liquide et de la conductivité thermique du cryostat

Tableau V-4 : Caractéristiques géométriques du bac de GNL

Tableau V-5 : Caractéristiques thermiques du bac de GNL

CHAPITRE I :

Introduction Générale

1. Le Gaz Naturel

Le gaz naturel gagne rapidement en importance à l'échelle mondiale, tant comme source d'énergie que comme charge d'alimentation pour l'industrie en aval. En équivalent énergétique, la contribution du gaz naturel représente maintenant près de 60 pourcents de celle du pétrole. Cette croissance repose sur l'expansion économique générale et sur la préférence environnementale accordée au gaz naturel, qui pollue beaucoup moins que le pétrole et le charbon, ses deux principaux concurrents parmi les combustibles fossiles.

L'industrie du gaz naturel est également en rapide évolution, alors que l'on établit l'existence de nouvelles réserves et que l'on met en œuvre des options de transport de longue distance, principalement au moyen de gazoducs et de transporteurs de GNL.

L'industrie est donc devenue mondiale et acquiert des caractéristiques clairement distinctes de celles du secteur pétrolier traditionnel. Ce contexte exige des entreprises et des gouvernements des réactions adaptées à l'industrie du gaz naturel.

2. Bref historique du GNL

Même s'il est encore loin d'être une commodité, le GNL apparaît indéniablement comme un vecteur essentiel de l'expansion gazière mondiale.

La flexibilité qu'il procure en matière d'approvisionnement représente un atout primordial pour l'équilibre futur des marchés. Malgré un certain nombre d'incertitudes et de contraintes susceptibles d'entacher quelque peu la réalisation des perspectives de croissance les plus optimistes, le commerce du GNL reste promis à un développement rapide, de l'ordre de 7 %/an d'ici à 2020, ce qui porterait sa part dans les échanges gaziers internationaux à quelque 38 % à cet horizon.

Les premières expériences de liquéfaction du gaz naturel datent de 1934 en URSS et de 1940 aux États-Unis. Toutefois, ce n'est qu'en 1961 que fut entreprise la réalisation de l'usine Camel, premier projet de transport de GNL au monde destiné à exporter le gaz du gisement de Hassi R'Mel en Algérie. Depuis le démarrage de cette usine et ses premières livraisons commerciales au terminal britannique de Canvey Island en 1964, l'industrie du GNL a connu un bel essor. Alors que sa part dans le volume total de gaz commercialisé chaque année peut être considérée comme très modeste puisqu'elle ne passe que légèrement la barre des 6 %, le taux de croissance du commerce mondial de GNL a régulièrement dépassé celui du commerce par gazoducs.

Ainsi, au cours des dix dernières années, les échanges par méthaniers ont progressé de 7,2 %/an en moyenne, s'établissant à environ $187 \cdot 10^9 \text{ m}^3$, soit 138,5 millions de tonnes (Mt), en 2005, selon les premières estimations de Cedigaz.

Le Gaz Naturel Liquéfié est souple, simple d'usage et c'est aussi devenu un grand combustible industriel par sa haute température de flamme, sa facilité de régulation et son faible impact sur l'environnement.

Comme son nom l'indique c'est un produit naturel, essentiellement composé de méthane pur (CH₄), de chaînes carbone saturées : éthane, propane, butane, C₅+ avec quelquefois de l'azote, des sulfurés, du dioxyde de carbone, des impuretés, de l'eau, etc.

En fait, il y a deux voies physiques permettant de réduire le volume du gaz pour le transporter en le liquéfiant :

- la compression et / ou la réfrigération

- le butane (C4) est liquide à 5 bars à température normale.
- le propane (C3) est liquide à 12 bars à température normale. C'est pourquoi on les distribue en bouteille.
- l'éthylène (C2), c'est déjà plus difficile, sauf si on le refroidit. Ainsi à pression atmosphérique l'éthylène est liquide à -102°C .
- pour le méthane (C1), la plus petite molécule hydrocarbonée et très énergétique, avec un point critique à 45 bars, on ne sait pas le liquéfier. C'est à cette pression un pseudoliquide.

Par contre, c'est un liquide transparent, coulant comme de l'eau, lorsqu'à pression atmosphérique on le porte à une température d'environ -162°C .

- en comparaison, l'oxygène est liquide à -186°C , et l'azote liquide utilisé dans tous les laboratoires cryogéniques l'est à -196°C . La petite molécule d'hydrogène se liquéfie à $+4\text{ Kelvin}$ soit : -269°C .

A -162°C le méthane a perdu 600 fois son volume gazeux, c'est un liquide de densité 0,41 par rapport à l'eau.

Il est aussi remarquable de constater, que le gaz méthane à l'air libre a une densité de 0,60 par rapport à l'air, c'était le gaz porteur des premiers ZEPPLIN. Ceci explique aussi vraisemblablement, qu'en cas d'épandage ouvert de GNL il y ait si peu d'accidents majeurs malgré sa grande énergie et son inflammabilité.

3. La cryogénie

La cryogénie ou l'art de la technologie d'obtention et du maintien des basses températures (jusqu'à -253°C) et très basses températures (jusqu'au milli kelvin) était, il y a quatre décennies, monopolisée par des scientifiques chevronnés pour des applications très pointues tel que le développement spatial et le nucléaire.

De nos jours, l'utilisation des techniques cryogéniques a pris, dans de nombreux domaines, une extension considérable notamment dans le domaine énergétique avec l'exploitation et la valorisation du gaz naturel, agro-alimentaire, biomédical, dans l'industrie sidérurgique et pétrolière et dans beaucoup d'autres domaines.

Ces techniques de stockage à des très basses températures utilisent les liquides cryogéniques tels que : l'hélium ($T_{\text{LHe}}=-269^{\circ}\text{C}$), l'hydrogène ($T_{\text{LH}_2}=-253^{\circ}\text{C}$), l'azote ($T_{\text{LN}_2}=-196^{\circ}\text{C}$), l'argon ($T_{\text{LAr}}=-187^{\circ}\text{C}$), l'oxygène ($T_{\text{LO}_2}=-183^{\circ}\text{C}$) et le GNL ($T_{\text{LNG}}=-161^{\circ}\text{C}$) [14].

En Algérie l'utilisation de cette technologie de pointe reste dominée par les procédés de liquéfaction, de stockage et de transport de gaz naturel à l'état liquide, implantés à Arzew et Skikda. Les réservoirs de stockage de GNL de grande capacité conçus à cet effet, dotés de matériaux spéciaux pour résister aux chocs thermiques (acier 9%Ni) et isolés avec de la perlite expansée, conduisent inévitablement de la chaleur de l'environnement vers la masse liquide, le long des parois, l'instrumentation et les lignes de transfert. L'énergie absorbée par la masse liquide crée ainsi une condition favorable de stratification donnant lieu à des situations imprévisibles et parfois dangereuses dont les mécanismes ne sont, à ce jour, pas suffisamment maîtrisés. Ce phénomène observé régulièrement dans les bacs de stockage de

GNL, peut aussi, se produire dans les cryostats de laboratoire (Azote liquide, oxygène liquide...) qui sont souvent soumis à des variations importantes et parfois brutales de pression et de température.

4. Types de réservoirs de stockage de GNL utilisés en Algérie

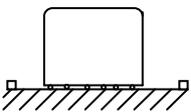
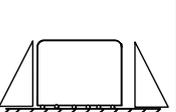
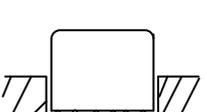
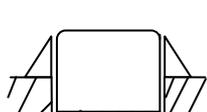
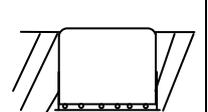
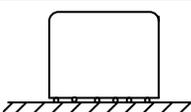
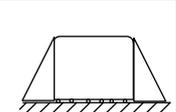
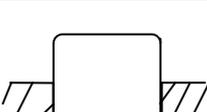
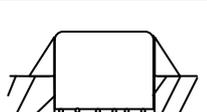
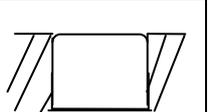
Ce paragraphe traite des réservoirs de G.N.L. dont la pression de stockage est légèrement supérieure à la pression atmosphérique et la température voisine les 110K, pour rester dans les conditions opératoires des cryostats en général. La forme des réservoirs de G.N.L. est généralement cylindrique, avec un toit en forme de dôme. Le volume des grands réservoirs est de 150 000 m³.

Leurs principales caractéristiques de fonctionnement de ces réservoirs sont :

- Leur pression relative maximale (de 100 à 230 mbar selon les différentes conceptions),
- Leur taux journalier d'évaporation, c'est à dire le pourcentage du volume de G.N.L. évaporé par jour est compris entre 0.05% à 4% selon les différentes conceptions et les capacités.

Plusieurs modèles réservoirs de stockages de G.N.L sont construits dans le monde .Selon les différentes conceptions, ils peuvent être munis d'une cuvette de rétention ou pas, et construits en aérien, semi enterrés ou complètement enterrés (Tableau I-1) ci-dessous. Enterrés ou pas, les cuves des réservoirs de stockage sont en acier spécial capable de supporter les températures cryogéniques qui fragilisent les aciers ordinaires ; auto portantes ou à membrane, elles sont isolées des parois extérieures du réservoir par une ou plusieurs épaisseurs de matériaux isolants tels que la laine de verre et la perlite (Fig. I.1).

Tableau I-1 : Différents types de réservoirs de stockage de G.N.L.

Type de Réservoir	Aérien	Aérien Taluté	Semi enterré	Semi enterré taluté	Enterré
Avec cuvette de rétention					
Sans cuvette de rétention					

Les différentes conceptions de réservoirs ont en commun sur les caractéristiques des trois parties constituantes qui sont :

- La cuve interne,
- La cuve externe,
- L'espace annulaire d'isolation thermique.

Les principaux paramètres techniques communs à ces conceptions sont :

- La parfaite étanchéité au gaz,
- La reprise des efforts dus aux contraintes provoquées par la charge de G.N.L. (pression, température, poids),
- La capacité de rétention des cuvettes destinées à contenir le G.N.L. accidentellement échappé du réservoir
- La stabilité des ancrages,
- Le maintien de l'intégrité de l'isolation thermique dont est pourvu l'espace annulaire,
- La possibilité de contrôler l'intégrité des cuves en service.

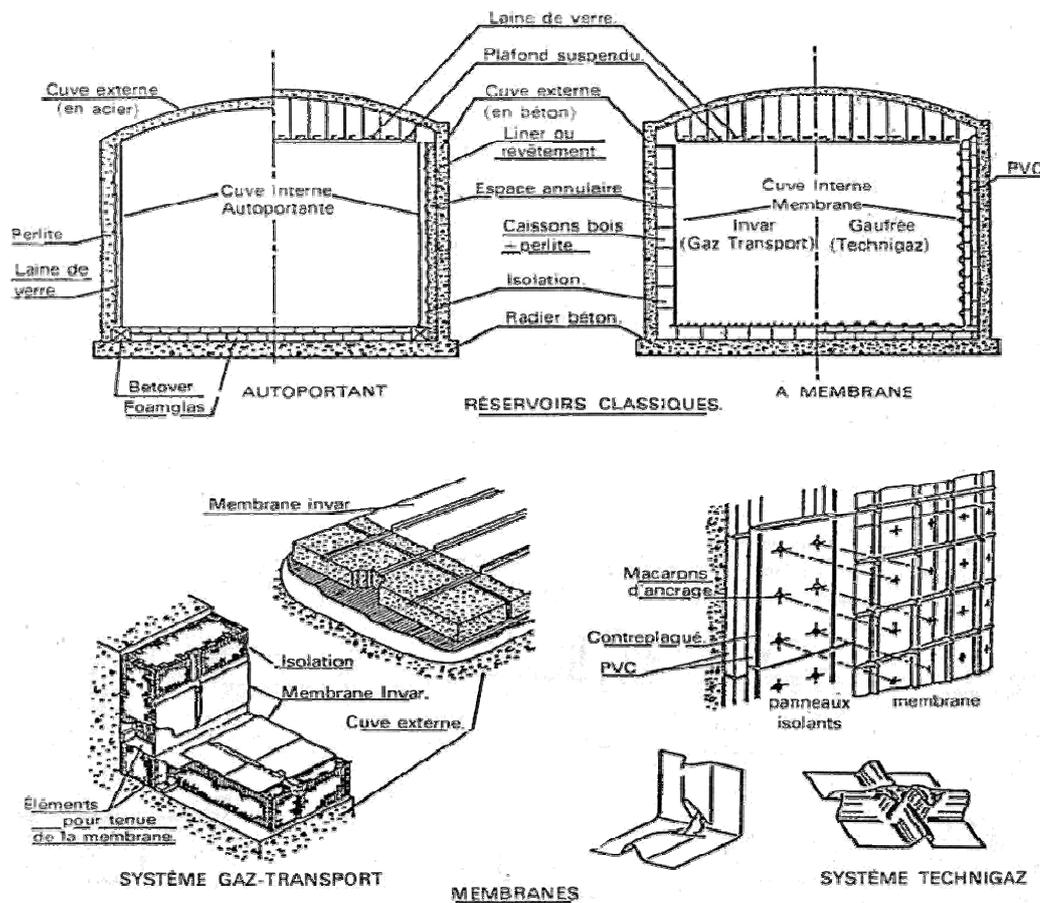


Fig. I-1 : Différentes techniques d'isolation et de rétention des réservoirs cryogéniques

5. La chaîne du GNL

La Chaîne GNL est composée de :

- l'usine de liquéfaction,
- des navires transporteurs de GNL,
- des terminaux méthaniers.

Car pour honorer un contrat d'importation de GNL il faut construire simultanément tous ces éléments en 3 ans.

5.1. La liquéfaction

La première usine de liquéfaction de GNL a été construite à Arzew par la CAMEL (50 % CONCH UK), pour un contrat d'exportation de 100 millions de m³ de Gaz Naturel par jour pendant 15 ans, à livrer à Canvey Island en Angleterre, soit environ 1,80 MT de GNL par an. Cette usine a été construite avec le procédé dit "à cascade".

Le procédé est simple :

- on sait que le propane est liquide à -42° C. On injecte du propane dans une boucle, on le comprime, il s'échauffe, on le refroidit avec de l'eau de mer gratuite, et puis à travers une vanne on le détend brusquement sans échange de chaleur, c'est la détente isentropique adiabatique de Joule / Thomson. On recueille le liquide à -42° C et le gaz de flash est réinjecté dans la boucle propane.

- ce propane réfrigéré échange ses frigories avec le gaz naturel traité et une boucle d'éthylène qui est ensuite comprimée, refroidie à l'eau de mer et détendue pour obtenir de l'éthylène à -102° C.

- l'éthylène réfrigéré échange ses frigories avec le gaz naturel traité et une boucle de méthane. On obtient ainsi après compression, refroidissement et détente du GNL à -162° C.

Bien sûr tout n'est pas si simple, car il faut démarrer chaque boucle à vide, il faut contrôler en permanence chaque processus indépendant, les coordonner pour obtenir une production constante.

Et puis, puisque le Gaz Naturel est un mixte de produits différents avec leurs caractéristiques propres qui vont de l'azote au butane. Il faut aussi que le Gaz Naturel soit propre pour être liquéfié, éliminer les sulfures, les hydrates qui bloqueraient les circuits, le CO₂ et l'eau qui doivent être éliminés. Si bien que dans une usine de liquéfaction, les unités de traitement classique (MEA ou MDEA), les utilités dont l'importante circulation d'eau de mer, la fabrication des produits purs à injecter dans les boucles, le coeur du procédé de liquéfaction n'occupe pas la place majeure.

Depuis toutes ces années de grands progrès ont été réalisés, d'abord par TECHNIP et AIR LIQUIDE avec la collaboration de GAZ DE FRANCE (procédé TEAL) avec la construction de l'usine de Skikda en Algérie.

L'idée était simple : il fallait améliorer l'échange thermique pour augmenter les rendements.

Si nous comparons les échanges du procédé à cascade avec celui du TEAL, nous arrivons au schéma suivant :

A l'aide d'échanges de mélanges de produits purs dont la température est la plus proche possible du Gaz Naturel à refroidir le long de tout le processus, on optimise la quantité d'énergie nécessaire à la liquéfaction.

Malheureusement la grande aventure TEAL s'est arrêtée à Skikda.

Depuis cette époque les ingénieurs Américains ont développé le procédé APCI très proche qui a conquis les marchés.

Le nouveau procédé PHILLIPS développé pour Trinidad, à propane en tête, et maintenant exclusivité de BECHTEL, a bénéficié des apports des techniques les plus récentes en matière d'automatisation intégrée, des dernières machines, des nouveaux développements d'échangeurs à plaques en Aluminium brasé et semble encore plus économique.

Les industriels proposent aujourd'hui des trains de liquéfaction de 4,6 MT/an unitaire avec seulement deux compresseurs.

Les projets d'usine sont nombreux, ainsi que les nouvelles constructions. Les contrats de GNL sont en renouvellement, de nouveaux contrats sont signés. Le marché s'anime en Europe, aux USA il frémit, et puis en Inde, en Corée et au Japon redémarrent les achats de GNL, de plus le GNL a trouvé un nouveau débouché avec la production d'électricité à l'aide de turbines à gaz à cycle combiné.

5.2. Les navires méthaniers

Bien que le méthane ait été liquéfié pour la première fois dans les années 1960, l'histoire du transport maritime des gaz commence en réalité avec le GPL dès les années 1930 au Royaume-Uni. Puis les ingénieurs, confrontés à un problème de volume, se penchèrent dès les années 1950 sur le principe de la réfrigération. Mais sur le plan technologique, le GNL pose plus de problèmes que le gaz de pétrole, essentiellement du fait que sa liquéfaction exige une température de réfrigération extrêmement basse (- 162 °C contre -45°C pour le GPL).

Donc, à cause des problèmes de technologie et surtout des considérations de sécurité encore mal maîtrisées à l'époque le transport maritime du GNL a commencé plus tardivement, dans les années 1960 [15].

En 1959, la Conch International Marine Limited transforme un navire pour le baptiser le « Méthane Pioneer » et parvient pour la première fois à importer 5000 m³ de gaz naturel en provenance d'Arzew en Algérie. Cette première mondiale, suivie de la livraison des premiers navires spécialisés, le « Méthane Princess » et le « Méthane Progress ».

Ce sont seulement les progrès technologiques qui ont permis de développer une telle activité industrielle puisqu'en presque 40 ans la capacité de transport a triplé, puisqu'elle est passée de 5000 m³ à 140 000 m³ alors qu'actuellement des navires de 200 000 m³ sont sérieusement envisagés.

Aujourd'hui, il n'y a plus que trois techniques sur le marché :

- les navires à sphères largement construits au Japon et un peu en Corée, qui nécessitaient un investissement considérable de la part des chantiers navals, étaient issus des brevets Norvégiens.

- les navires à membrane issus des brevets de GAZ TRANSPORT en membrane Invar et des brevets TECHNIGAZ en membrane gaufrée en acier inoxydable 18-10. GAZ TRANSPORT et TECHNIGAZ ont joint leurs efforts en une même société il y a quelques temps.

Aujourd'hui les 120 navires de la flotte mondiale se partagent à 50/50 entre les sphères et les membranes dont 80 % des navires à membranes sont construits en Corée. Les autoporteurs à cuve aluminium, trop onéreux ont été éliminés depuis longtemps.

- Enfin GAZ TRANSPORT & TECHNIGAZ ont tiré des avantages de leurs deux techniques pour en proposer une troisième : le CS1 qui sera développé sur le dernier navire de 75 000 m³ que GAZ DE FRANCE vient de commander aux Chantiers de l'Atlantique. Ce navire sera à propulsion électrique et génération par turbines à gaz.

- **Le navire méthanier à sphères :**

Comme tout navire méthanier, le produit transporté ayant une densité de 0,41 à 0,47 et les voyages de retour se faisant quasiment à vide, le navire ne peut conserver sa stabilité, que grâce à un ballastage variable d'eau de mer contenu dans une double coque. Son tirant d'eau est quasiment constant.

Les réservoirs cryogéniques sont des sphères en 9 % de Nickel isolées extérieurement par des panneaux de polyuréthane. Une barrière secondaire réduite à été acceptée par les sociétés de classification, compte tenu de la potentialité de fuites de GNL restreintes sur le fond de la coque interne.

Le poids de la partie classique du navire et son encombrement est bien supérieur à celui d'un navire à membrane, et la restriction dimensionnelle acceptée dans de nombreux ports en font un gros inconvénient pour le futur.

Les derniers grands navires sont à 4 sphères, une solution à anneau équatorial cylindrique permet d'augmenter légèrement la capacité à longueur constante.

- **Le navire méthanier à membrane Invar :**

Le métal Invar, très chargé en Nickel, a un coefficient de contraction thermique proche de zéro. GAZ TRANSPORT a ainsi développé un système de membrane plane très économique servant de barrière principale et de barrière secondaire. L'isolation étant constituée de deux couches de boîtes en contreplaqué remplies de perlite, c'est simple et efficace.

L'intérêt du système à membrane est principalement qu'il transmet tous les efforts internes à la coque du navire en acier classique à travers l'isolation. C'est comme une tapisserie, et dans une certaine limite son design ne subit pas d'effet d'échelle.

- **Le navire à membrane gaufrée en acier inoxydable :**

Cette technique développée par TECHNIGAZ a permis la construction des premiers grands navires méthaniers en France aux Chantiers de l'Atlantique.

A l'origine la technique MARK I était constituée de deux couches de panneaux balsa et d'une barrière secondaire insérée en contreplaqué spécial, la barrière primaire était en acier inoxydable, maillée d'ondes orthogonales agissant comme des soufflets de dilatation. Un gros effort de R&D a permis d'élaborer un produit ne répondant pas à des critères classiques de design, mais à une durée de vie en fatigue, compte tenu des sollicitations alternées de la coque du navire.

Des efforts de réduction des coûts ont conduit à inventer de nouveaux matériaux pour l'isolation et la barrière secondaire : c'est le système MARK III actuellement largement distribué. L'isolation est constituée de panneaux de mousse en polyuréthane renforcés pendant l'expansion de la mousse par de la laine de verre, la barrière secondaire est constituée d'une feuille triplex : une mince feuille d'aluminium collée entre deux tissus de verre. Ces structures sont entièrement collées.

- **Le nouveau système CS1 de GAZ TRANSPORT & TECHNIGAZ :**

Il allie les avantages d'une barrière primaire en Invar et les avantages de l'isolation et de la barrière secondaire de MARK III. Le premier navire de ce type est en construction aux Chantiers de l'Atlantique, et il sera bientôt en exploitation pour GAZ DE FRANCE.

5.3. Les terminaux méthaniers

La cargaison est aspirée par les pompes principales pour être refoulée dans le collecteur liquide puis vers la terre. Un résidu de GNL est gardé au fond des cuves afin de les maintenir en froid pendant le voyage sur lest. Le méthanier est relié à quai par cinq bras de chargement, quatre pour la phase liquide et un pour la phase gazeuse. Cette phase critique pendant laquelle le navire est soumis à des mouvements extérieurs (vent, courants...) est surveillée notamment par des microprocesseurs qui déclenchent, en cas de dépassement par le navire des limites admissibles, l'arrêt des pompes et la déconnexion d'urgence de la liaison bord-terre. Enfin, les installations du terminal doivent après réception du méthanier, assurer le stockage transitoire, la regazéification, l'odorisation et l'émission sous pression vers la station d'interconnexion.

- On transfère le GNL du navire aux stockages à l'aide des pompes du navire, cela génère aussi un transfert en sens inverse de gaz froid qui permet d'équilibrer les phases gaz du navire et du stockage.

- Le liquide est stocké dans les réservoirs, mais comme c'est un liquide en équilibre de phases, tout apport de chaleur extérieure le transforme en gaz.

- Ce gaz de vaporisation est repris par des compresseurs froids qui l'expédient aux utilisateurs lorsque la fonction vaporisation / expédition du terminal n'est pas en service.

- Ou, est re-mélangé au GNL à travers une réincorporation, avant d'être vaporisé.

- La vaporisation est effectuée à haute pression (80 bars) à travers des vaporiseurs à ruissellement d'eau de mer ou à travers des vaporiseurs à flamme à démarrage quasi instantané.

La pièce maîtresse des terminaux est constituée par les réservoirs :

On en distingue aujourd'hui de cinq types :

- le réservoir aérien métallique classique à toit suspendu construit en zone quasi désertique,

- le même avec une enceinte rapprochée en béton précontraint pour les faibles densités industrielles,

- le même avec une enceinte en béton précontraint plaquée contre la paroi, ainsi qu'une couverture en béton et une protection thermique du fond en forme de barrière secondaire réduite limitant les chocs thermiques en cas d'épandage interne. En cas d'accident interne l'envahissement de la perlite par le GNL crée un grand flash de gaz, mais il reste mécaniquement stable,

- le réservoir à membrane gaufrée TECHNIGAZ avec isolation en polyuréthane et enceinte complète en béton précontraint, de type Montoir. En cas d'accident interne il reste stable, le taux de vaporisation n'augmentant que de 10 %,

- le réservoir enterré à membrane TECHNIGAZ construit au Japon par NKK, ou IHI ou MHI ou KHI avec ou sans coupole béton, avec un taux de vaporisation nettement plus élevé que les

précédents. Ces réservoirs sont construits sur des terrains gagnés sur la mer, ce qui justifie leur coût élevé.

La capacité des réservoirs croît de jour en jour. Les Japonais et les Coréens construisent des réservoirs enterrés de 200 000 m³.

Le dernier record en autoporteur aérien est un 180 000 m³ en construction au Japon.

On s'accorde avec le marché actuel sur des réservoirs d'environ 150 000 m³ de capacité unitaire.

Les réservoirs métalliques simples autoporteurs ont une pression de service limitée inférieure à celle des navires méthaniers et nécessitent l'utilisation d'un compresseur pour le retour gaz entre le réservoir et le navire.

Aujourd'hui ces enceintes aux grandes qualités cryogéniques ne nécessitent plus de cuvettes de rétention en Europe. Le matériau est parfaitement adapté au feu et aux explosions.

6. Objet de l'étude

L'étude présentée dans ce mémoire de magistère traite du comportement thermique des réservoirs cryogéniques. Elle est composée de trois parties essentielles:

La première partie consacrée à la modélisation thermique d'un cryostat à Azote liquide explicitée par un système d'ailettes couplées repart du travail effectué par O. KHEMIS [1] dans sa thèse de doctorat intitulée « *optimisation des réservoirs de stockage des fluides cryogéniques, étude thermique et expérimentale* » et de celui de A.L. BENDAOU [2] dans son mémoire de magistère intitulé « *détermination analytique et numérique des champs de températures dans un cryostat à azote liquide* ». Le profil de température des vapeurs d'Azote issues du bain liquide adopté dans ces deux références est donné par une relation linéaire en fonction de la hauteur de la couche vapeur déduite par extrapolation des mesures expérimentales effectuées [1]. Elle constitue une approximation plus acceptable dans la partie surchauffée que pour la partie adjacente au bain; la difficulté de la mesurer expérimentalement peut expliquer cette simplification. Le travail présenté dans la première partie de notre travail consiste en une modélisation thermique de ce cryostat par cinq ailettes concentriques. Par conséquent, le modèle mathématique à résoudre est un système de cinq équations différentielles couplées thermiquement et par les conditions aux limites.

Pour améliorer l'hypothèse simplificatrice adoptée précédemment, la deuxième partie de ce travail utilise une formulation mathématique qui a pour but de décrire le comportement de la vapeur générée à la surface libre du bain liquide d'Azote par une équation différentielle additionnelle du premier degré. Un bilan thermique sur une couche élémentaire de vapeur d'Azote va nous permettre d'en déduire cette équation différentielle qu'il faut ajouter au système à résoudre. L'évaluation du débit de vapeurs « boil off » et des champs de températures des différentes ailettes nous amène à la résolution d'un système complexe dû au couplage thermique de plusieurs sous systèmes. Notre modèle mathématique dans ce cas, comprend six équations différentielles couplées. A chaque niveau liquide du bain d'Azote

correspond un débit de vapeur et des profils de température des différentes ailettes. La solution obtenue sera comparée aux résultats expérimentaux disponibles.

La troisième partie de ce travail est consacrée à l'étude des bacs de stockage de GNL. Une méthode de similarité avec la méthodologie de résolution adoptée pour le cryostat à Azote liquide nous permettra d'élaborer un modèle physique adéquat pour les réservoirs de stockage de GNL dans le but d'en évaluer les débits de Boil-off et les champs de températures en fonction du taux de remplissage des bacs.

CHAPITRE II :

Modélisation du Cryostat à Azote Liquide

1. Introduction

Ce chapitre se subdivise en deux parties. Dans la première partie nous allons élaborer un modèle physique pour décrire les échanges thermiques entre le milieu ambiant et les cryostats de fluides cryogéniques. Cette étude repart du travail expérimental réalisé sur un cryostat d'Azote liquide [1] pour lequel les distributions de températures du col, les températures et les débits des vapeurs issues du bain cryogénique ont été mesurées ; le profil de température des vapeurs d'Azote est supposé tendre vers une évolution linéaire en fonction de la hauteur. L'étude théorique du comportement thermique d'un cryostat à Azote liquide développée ici, s'appuie sur un modèle analytique qui constitue une approche formelle pour expliciter le problème physique par un système d'équations différentielles et leurs conditions aux limites. Sa validation repose sur la confrontation des prédictions obtenues avec les données expérimentales disponibles.

La deuxième partie constitue à la base une correction de l'hypothèse faite sur l'évolution de la température des vapeurs d'Azote. En fait, nous allons décrire le comportement de la vapeur générée à la surface libre du bain liquide d'Azote ; un bilan d'énergie sur une couche élémentaire de vapeurs permettra d'en déduire une équation différentielle qu'il faut adjoindre au système à résoudre. Par la suite, nous développerons au chapitre III la méthodologie de résolution adoptée pour traiter le comportement thermique des réservoirs de stockage de GNL et obtenir la répartition de températures des vapeurs et de l'enveloppe interne en vue d'évaluer le taux d'évaporation (Boil-off).

2. Partie 1 : Cryostat avec profil de température linéaire des vapeurs d'Azote

2.1. Présentation du modèle physique

Ce modèle est préconisé en premier lieu pour expliciter le comportement thermique des cryostats à Azote liquide. Le modèle consiste à considérer le cryostat schématisé en figure II-1, en un système de cinq ailettes couplées deux à deux ; il est composé d'une enveloppe extérieure qui isole le vase cryogénique d'Azote liquide du milieu ambiant, tous deux faits d'un même acier inoxydable et ancrés dans le couvercle iso-thermalisé à 300K. L'enveloppe extérieure étant deux fois plus longue que le vase. L'ailette cylindrique interne représente l'enveloppe latérale intérieure ancrée dans le couvercle du cryostat ; elle va du bain cryogénique au couvercle.

L'enveloppe latérale extérieure se compose de trois ailettes concentriques jointes bout à bout ; l'ailette extérieure du haut commence du couvercle du cryostat et se termine à la hauteur du bain cryogénique ; cette dernière est raccordée à l'ailette extérieure intermédiaire dont la longueur est égale à la hauteur du bain, elle aussi jointe bout à bout à l'ailette extérieure du bas qui s'achève au socle du cryostat. Celui-ci a la forme d'un disque circulaire concentrique ; il constitue la cinquième ailette dont la température ne varie que radialement en raison de la symétrie axiale. Cet assemblage est représenté par la figure II-1 ci-dessous.

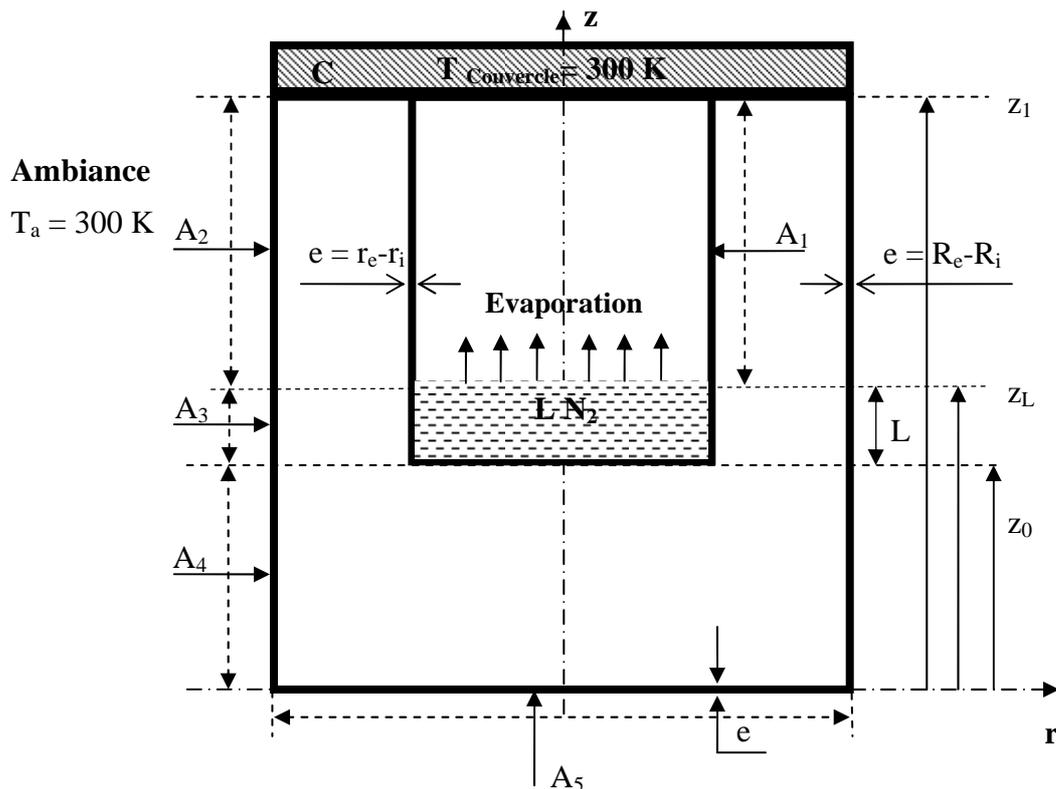


Fig. II-1 : Schéma physique du cryostat modélisé par cinq ailettes concentriques

2.2. Bilans thermiques et mise en équations

L'application des bilans thermiques relatifs à chacune des ailettes constituant le cryostat, se traduit par un modèle mathématique composé d'équations différentielles couplées du second ordre dont on cherchera la solution en fonction des paramètres thermiques et géométriques du problème.

2.2.1 Col du cryostat (Ailette A₁)

La figure (II-2) ci-dessous illustre le col du cryostat comme étant une ailette cylindrique de forme annulaire et d'épaisseur e . Elle est ancrée en sa partie haute dans le couvercle isothermalisé à 300 K et qui se termine au niveau de l'interface liquide-vapeur.

L'inventaire des flux de chaleur sur un élément infinitésimal de longueur dz faisant intervenir les trois modes de transferts thermiques (Conduction, convection et rayonnement) fait apparaître cinq flux qui sont représentés par la figure (II-2-b).

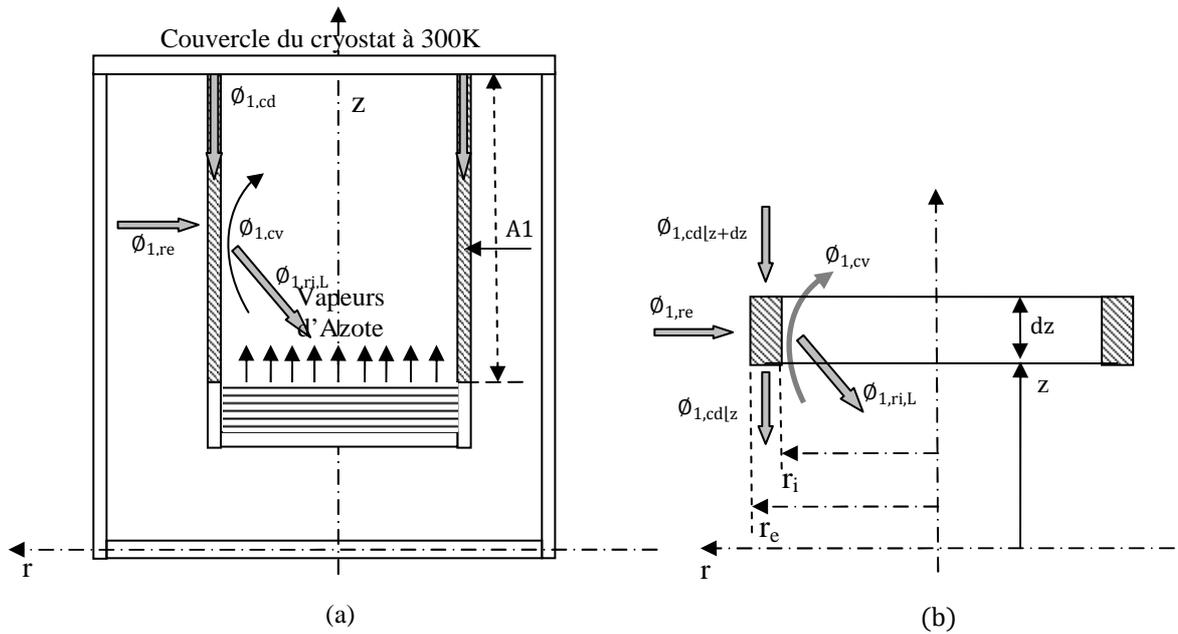


Fig. II-2 : Ailette interne A₁ (Col du cryostat)

Avec :

$\phi_{1,re}$: Flux de chaleur échangé par rayonnement net entre la face latérale interne de l'ailette extérieure haute et la face latérale externe du col.

$\phi_{1,ri,L}$: Flux de chaleur échangé par rayonnement net entre la face latérale interne du col et le bain liquide d'Azote.

$\phi_{1,cd}$: Flux de chaleur échangé par conduction issu du couvercle du cryostat transitant par le col et allant jusqu'au bain liquide d'Azote ; $\phi_{1,cd|z+dz}$ est le flux entrant par conduction à l'abscisse $z+dz$ tandis que $\phi_{1,cd|z}$ est celui sortant à l'abscisse z .

$\phi_{1,cv}$: Flux de chaleur échangé par convection entre la face latérale interne du col et les vapeurs d'Azote issue du bain liquide.

L'équation qui décrit le bilan thermique en régime permanent de l'ailette A₁ est la suivante :

$$\phi_{1,cd|z+dz} + \phi_{1,re} = \phi_{1,cv} + \phi_{1,ri,L} + \phi_{1,cd|z} \quad (\text{II - 1})$$

Expression des flux de chaleur (Ailette A₁):

a) Flux échangés par rayonnement:

Le mode de transfert par rayonnement [13] est ici prépondérant dans l'expression des bilans thermiques qui définissent le problème physique ; l'espace annulaire entre les deux enveloppes internes et externes du cryostat est sujette à un vide poussé ; de ce fait les infiltrations thermiques vers l'enveloppe interne sont exclusivement introduites par rayonnement. De plus, les vapeurs d'Azote générées par le bain liquide sont pratiquement transparentes au rayonnement ce qui conduit à évaluer les différents flux de chaleur en interaction rayonnées par les faces constituants le volume occupé par celles-ci. Pour les surfaces qui ne sont pas en regard, on prendra en considération seulement les flux qui rayonnent vers le bain liquide du fait qu'il subsiste un gradient de température important.

Ces flux mis en jeu s'expriment par les relations suivantes:

$$\triangleright \phi_{1,re} = \sigma \cdot F_{1-2} \cdot S_{1e,l}(z) \cdot [T_2^4(z) - T_1^4(z)]$$

En convection équivalente, il peut se mettre sous la forme suivante:

$$\phi_{1,re} = h_{1,re}(T_1, T_2) \cdot S_{1e,l}(z) \cdot [T_2(z) - T_1(z)] \quad (II -2)$$

Où ;

$h_{1,re}$: Coefficient de convection équivalente entre les deux ailettes A₁ et A₂

$$h_{1,re}(T_1, T_2) = \sigma \cdot F_{1-2} \cdot [T_2^2(z) + T_1^2(z)] \cdot [T_2(z) + T_1(z)]$$

σ : Constante de Stefan Boltzmann

F_{1-2} : Facteur de forme gris entre les deux ailettes A₁ et A₂

$S_{1e,l}$: Surface latérale externe de l'ailette A₁

$$S_{1e,l}(z) = 2\pi r_e dz$$

r_e : Rayon extérieur de l'enveloppe interne du cryostat

$T_2(z)$: Température de l'ailette extérieure haute du cryostat A₂

$T_1(z)$: Température de l'ailette du col du cryostat A₁

$$\triangleright \phi_{1,ri,L} = \sigma \cdot F_{1-L} \cdot S_{1i,l}(z) \cdot [T_1^4(z) - T_{Ln_2}^4]$$

$$\phi_{1,ri,L} = h_{1,ri,L}(T_1, T_{Ln_2}) \cdot S_{1i,l}(z) \cdot [T_1(z) - T_{Ln_2}] \quad (II -3)$$

Où ;

$h_{1,ri,L}$: Coefficient de convection équivalente entre l'ailette A₁ et la surface libre du bain liquide

$$h_{1,ri,L}(T_1, T_{Ln_2}) = \sigma \cdot F_{1-L} \cdot [T_1^2(z) + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_1(z) + T_{Ln_2}]$$

F_{1-L} : Facteur de forme gris entre l'ailette A₁ et la surface libre du bain liquide.

T_{Ln_2} : Température moyenne du bain liquide d'Azote.

b) Flux échangés par conduction :

Le flux de chaleur véhiculé par conduction thermique via l'ailette de forme annulaire A_1 depuis le couvercle maintenu à 300 K jusqu'à atteindre le bain liquide, s'obtient par l'application de la loi de Fourier.

- Le flux de chaleur sortant à l'abscisse z de l'élément de volume infinitésimale d'épaisseur dz par la section droite $S_{1,d}$ est :

$$\Phi_{1,cd|z} = \lambda_1(T_1) \cdot S_{1,d} \cdot \frac{dT_1(z)}{dz} \Big|_z \quad (\text{II -4})$$

Où :

$\lambda_1(T_1)$: Coefficient de conductivité thermique de l'ailette A_1

$S_{1,d}$: Section droite de l'ailette A_1

$$S_{1,d} = \pi(r_e^2 - r_i^2)$$

- Le flux de chaleur entrant à l'abscisse $z+dz$ à l'élément de volume infinitésimale d'épaisseur dz par la section droite $S_{1,d}$ est :

$$\Phi_{1,cd|z+dz} = \lambda_1(T_1) \cdot S_{1,d} \cdot \frac{dT_1(z)}{dz} \Big|_{z+dz} \quad (\text{II -5})$$

En utilisant le développement limité d'ordre 1 suivant :

$$f(x + h) \cong f(x) + hf'(x)$$

La relation (II-5) devient :

$$\Phi_{1,cd|z+dz} = \Phi_{1,cd|z} + dz \cdot \frac{d}{dz} \left[\lambda_1(T_1) \cdot S_{1,d} \cdot \frac{dT_1(z)}{dz} \right] \quad (\text{II -6})$$

c) Flux échangé par convection :

Les vapeurs issues bain liquide viennent refroidir le col du cryostat en partie par convection naturelle. Ce flux de chaleur s'exprime comme suit :

$$\Phi_{1,cv} = h_{1,cv}(T_1, T_V) \cdot S_{1i,l}(z) \cdot (T_1(z) - T_V(z)) \quad (\text{II-7})$$

Où :

$h_{1,cv}$: Coefficient de convection naturelle entre les vapeurs d'Azote et l'ailette interne A_1 .

$T_V(z)$: Température des vapeurs d'Azote générées du bain liquide.

Les relations précédentes réarrangées et simplifiées nous permettent d'écrire l'équation différentielle qui régit le profil de température de l'ailette A_1 :

$$\frac{d}{dz} \left[\lambda_1(T_1) \cdot \frac{dT_1(z)}{dz} \right] - 2 \cdot \frac{[(h_{1,re}(T_1, T_2)) \cdot r_e + (h_{1,ri,L}(T_1, T_{Ln2}) + h_{1,cv}(T_1, T_v)) \cdot r_i]}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot T_1(z) + 2 \cdot \frac{h_{1,re}(T_1, T_2) \cdot r_e}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot T_2(z) + 2 \cdot \frac{h_{1,cv}(T_1, T_v) \cdot r_i}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot T_v(z) + 2 \cdot \frac{h_{1,ri,L}(T_1, T_{Ln2}) \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a} \cdot r_i}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot T_a = 0 \quad (II-8)$$

2.2.2 Ailette extérieure du haut (Ailette A₂)

L’ailette extérieure du haut est une portion de l’enveloppe latérale externe qui sépare le milieu ambiant de l’enceinte interne. Cylindrique de forme annulaire, elle est ancrée dans le couvercle isothermalisé du cryostat et va jusqu’au niveau du bain liquide en regard (Fig.3-a).

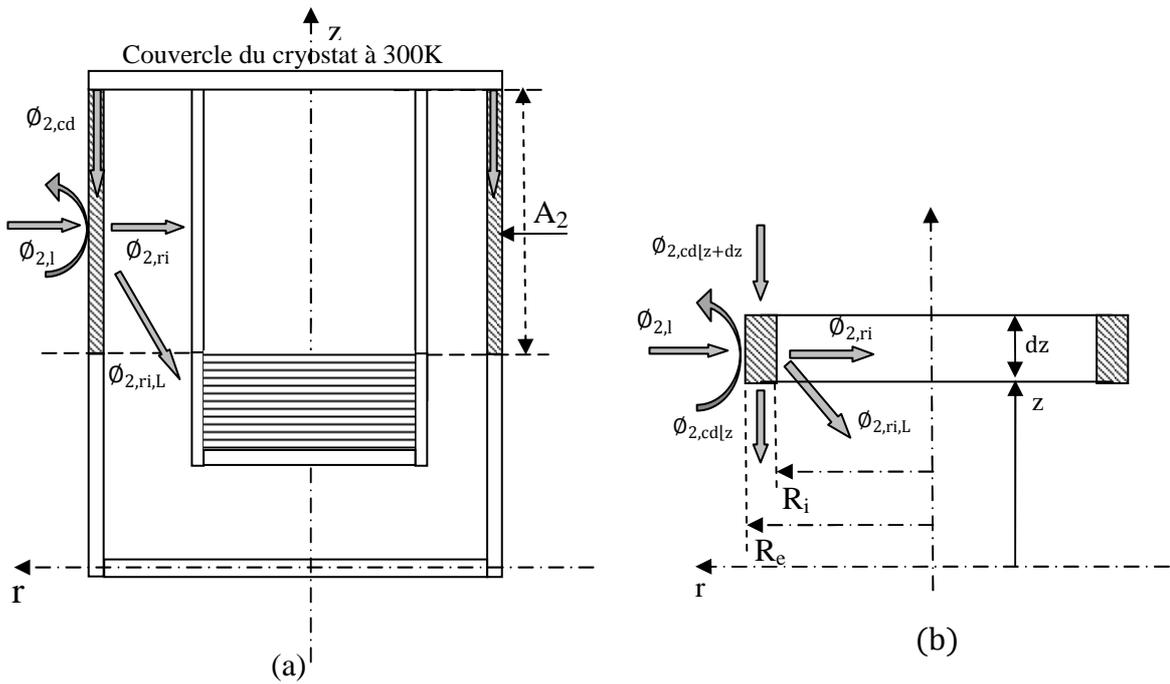


Fig. II-3 : Ailette extérieure du haut A₂

En régime permanent, l’inventaire des flux de chaleur sur un élément de volume infinitésimal de longueur dz (Fig.3-b) permet d’écrire la relation suivante :

$$\phi_{2,cd|z+dz} + \phi_{2,l} = \phi_{2,ri,L} + \phi_{2,ri} + \phi_{2,cd|z} \quad (II -9)$$

Avec :

- $\phi_{2,l}$: Flux de chaleur échangé par convection et rayonnement (flux d’échange global) entre l’air de l’ambiance externe et la surface latérale extérieure de l’ailette A₂. Il a pour expression :

$$\phi_{2,l} = h_{2,l}(T_a, T_2) \cdot S_{2e,l}(z) \cdot (T_a - T_2(z)) \quad (II-10)$$

Où ;

$h_{2,l}$: Coefficient d'échange global qui tient compte à la fois de la convection et du rayonnement de l'air ambiant avec l'ailette A_2 .

$$h_{2,l}(T_a, T_2) = h_{2,cv}(T_a, T_2) + h_{2,re}(T_a, T_2)$$

$$h_{2,re}(T_a, T_2) = \sigma \cdot F_{a-2} \cdot [T_a^2 + T_2^2(z)] \cdot [T_a + T_2(z)]$$

$h_{2,cv}$: Coefficient de convection entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_2 .

$h_{2,re}$: Coefficient de convection équivalente entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_2 .

F_{a-2} : Facteur de forme gris entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_2 .

$S_{2e,l}$: Surface latérale externe de l'ailette A_2 .

$$S_{2e,l}(z) = 2\pi R_e dz$$

R_e : Rayon extérieur de l'enveloppe externe du cryostat

T_a : Température de l'ambiance externe.

$T_2(z)$: Température de l'ailette extérieure du haut.

- $\Phi_{2,ri,L}$: Flux de chaleur échangé par rayonnement (convection équivalente) entre la face latérale intérieure de l'ailette A_2 et la face verticale externe du bain liquide. Il a pour expression :

$$\Phi_{2,ri,L} = h_{2,ri,L}(T_2, T_{Ln_2}) \cdot S_{2i,l}(z) \cdot (T_2(z) - T_{Ln_2}) \quad (II-11)$$

$h_{2,ri,L}$: Coefficient de convection équivalente entre la face latérale intérieure de l'ailette A_2 et la face verticale externe du bain liquide.

$$h_{2,ri,L}(T_2, T_{Ln_2}) = \sigma \cdot F_{2-L} \cdot [T_2^2(z) + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_2(z) + T_{Ln_2}]$$

F_{2-L} : Facteur de forme gris entre la face latérale intérieure de l'ailette A_2 et la face verticale externe du bain liquide.

- $\Phi_{2,ri}$: Flux de chaleur échangé par rayonnement (convection équivalente) entre la face latérale interne de l'ailette A_2 et la face latérale externe de l'ailette A_1 . Il a pour expression :

$$\Phi_{2,ri} = h_{2,ri}(T_2, T_1) \cdot S_{2i,l}(z) \cdot (T_2(z) - T_1(z)) \quad (II-12)$$

$h_{2,ri}$: Coefficient de convection équivalente entre la face latérale interne de l'ailette A_2 et la face latérale externe de l'ailette A_1 .

$$h_{2,ri}(T_2, T_1) = \sigma \cdot F_{2-1} \cdot [T_2^2(z) + T_1^2(z)] \cdot [T_2(z) + T_1(z)]$$

F_{2-1} : Facteur de forme gris entre la face latérale interne de l'ailette A_2 et la face latérale externe de l'ailette A_1 .

- $\Phi_{2,cd|z}$: Flux de chaleur sortant à l'abscisse z de l'élément de volume infinitésimal d'épaisseur dz par la section droite $S_{2,d}$. Son expression est :

$$\Phi_{2,cd|z} = \lambda_2(T_2) \cdot S_{2,d} \cdot \frac{dT_2(z)}{dz} \Big|_z \quad (\text{II -13})$$

Où :

$\lambda_2(T_2)$: Coefficient de conductivité thermique de l'ailette A_2 .

$S_{2,d}$: Section droite de l'ailette A_2 .

$$S_{2,d} = \pi(R_e^2 - R_i^2)$$

- $\Phi_{2,cd|z+dz}$: Flux de chaleur entrant à l'abscisse $z+dz$ à l'élément de volume infinitésimal d'épaisseur dz par la section droite $S_{2,d}$.

$$\Phi_{2,cd|z+dz} = \lambda_2(T_2) \cdot S_{2,d} \cdot \frac{dT_2(z)}{dz} \Big|_{z+dz} \quad (\text{II -14})$$

En utilisant le développement limité d'ordre 1 suivant :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x)$$

La relation (II -16) devient :

$$\Phi_{2,cd|z+dz} = \Phi_{2,cd|z} + dz \cdot \frac{d}{dz} \left[\lambda_2(T_2) \cdot S_{2,d} \cdot \frac{dT_2(z)}{dz} \right] \quad (\text{II -15})$$

Les relations précédentes réarrangées et simplifiées nous permettent d'écrire l'équation différentielle qui régit le profil de température de l'ailette A_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\lambda_2(T_2) \cdot \frac{dT_2(z)}{dz} \right] - 2 \cdot \frac{\left[h_{2,l}(T_a, T_2) \cdot R_e + \left(h_{2,ri,L}(T_2, T_{Ln2}) + h_{2,ri}(T_2, T_1) \right) \cdot R_i \right]}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot T_2(z) + \\ 2 \cdot \frac{h_{2,ri}(T_2, T_1) \cdot R_e}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot T_1(z) + 2 \cdot \frac{\left[h_{2,l}(T_a, T_2) \cdot R_e + h_{2,ri,L}(T_2, T_{Ln2}) \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a} \cdot R_i \right]}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot T_a = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-16})$$

2.2.3 Ailette extérieure intermédiaire (Ailette A_3)

L'ailette extérieure intermédiaire A_3 est cylindrique de forme annulaire dont sa longueur égale à la hauteur du bain liquide qui varie ici en fonction du taux de remplissage de ce dernier. Cette configuration est très importante pour la détermination de l'influence de la

hauteur du bain sur le débit d'évaporation et les profils de températures du cryostat. Elle constitue la transition entre l'ailette extérieure du haut et celle du bas.

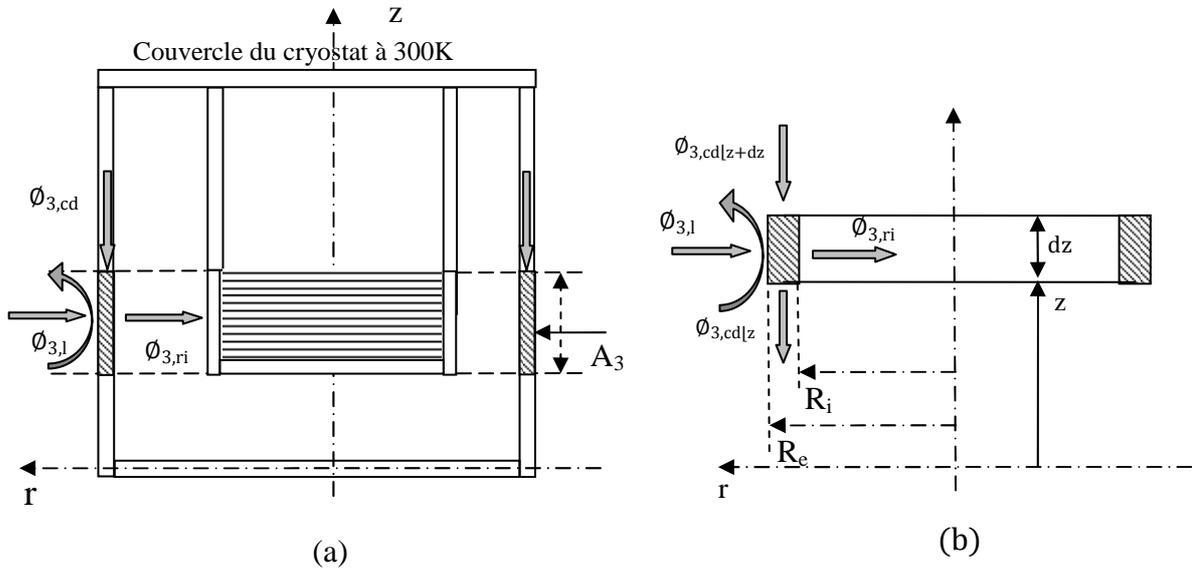


Fig. II-4 : Ailette latérale intermédiaire A_3

L'inventaire des flux de chaleur en régime permanent sur un élément de volume infinitésimal de longueur dz (Fig.4-b) permet d'écrire la relation suivante :

$$\phi_{3,cd|z+dz} + \phi_{3,l} = \phi_{3,ri} + \phi_{3,cd|z} \quad (\text{II -17})$$

Avec :

- $\phi_{3,l}$: Flux de chaleur échangé par convection et rayonnement (flux d'échange global) entre l'air de l'ambiance externe et la surface latérale extérieure de l'ailette A_3 . Son expression est la suivante :

$$\phi_{3,l} = h_{3,l}(T_a, T_3) \cdot S_{3e,l}(z) \cdot (T_a - T_3(z)) \quad (\text{II-18})$$

Où ;

$h_{3,l}$: Coefficient d'échange global qui tient compte à la fois de la convection et du rayonnement de l'air ambiant avec l'ailette A_3 .

$$h_{3,l}(T_a, T_3) = h_{3,cv}(T_a, T_3) + h_{3,re}(T_a, T_3)$$

$$h_{3,re}(T_a, T_3) = \sigma \cdot F_{a-3} \cdot [T_a^2 + T_3^2(z)] \cdot [T_a + T_3(z)]$$

$h_{3,cv}$: Coefficient de convection entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_3 .

$h_{3,re}$: Coefficient de convection équivalente entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_3 .

F_{a-3} : Facteur de forme gris entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_3 .

$S_{3e,l}$: Surface latérale externe de l'ailette A_3

$$S_{3e,l}(z) = 2\pi R_e dz$$

- $\Phi_{3,ri}$: Flux de chaleur échangé par rayonnement (convection équivalente) entre la face latérale interne de l'ailette A_3 et la face latérale externe du bain liquide. Il a pour expression :

$$\Phi_{3,ri} = h_{3,ri}(T_3, T_{Ln_2}) \cdot S_{3i,l}(z) \cdot (T_3(z) - T_{Ln_2}) \quad (\text{II-19})$$

$h_{3,ri}$: Coefficient de convection équivalente entre la face latérale interne de l'ailette A_3 et la face latérale externe du bain liquide.

$$h_{3,ri}(T_3, T_{Ln_2}) = \sigma \cdot F_{3-L} \cdot [T_3^2(z) + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_3(z) + T_{Ln_2}]$$

F_{3-L} : Facteur de forme gris entre la face latérale interne de l'ailette A_3 et la face latérale externe du bain liquide.

$S_{3i,l}$: Surface latérale interne de l'ailette A_3 .

$$S_{3i,l}(z) = 2\pi R_i dz$$

- $\Phi_{3,cd|z}$: Flux de chaleur sortant à l'abscisse z de l'élément de volume infinitésimal d'épaisseur dz par la section droite $S_{3,d}$. Son expression est :

$$\Phi_{3,cd|z} = \lambda_3(T_3) \cdot S_{3,d} \cdot \frac{dT_3(z)}{dz} \Big|_z \quad (\text{II -20})$$

Où :

$\lambda_3(T_3)$: Coefficient de conductivité thermique de l'ailette A_3 .

$S_{3,d}$: Section droite de l'ailette A_3 .

$$S_{3,d} = \pi(R_e^2 - R_i^2)$$

- $\Phi_{3,cd|z+dz}$: Flux de chaleur entrant à l'abscisse $z+dz$ à l'élément de volume infinitésimal d'épaisseur dz par la section droite $S_{3,d}$.

$$\Phi_{3,cd|z+dz} = \lambda_3(T_3) \cdot S_{3,d} \cdot \frac{dT_3(z)}{dz} \Big|_{z+dz}$$

$$\Phi_{3,cd|z+dz} = \Phi_{3,cd|z} + dz \cdot \frac{d}{dz} \left[\lambda_3(T_3) \cdot S_{3,d} \cdot \frac{dT_3(z)}{dz} \right] \quad (\text{II -21})$$

D'après les relations précédentes réarrangées et simplifiées, l'équation différentielle qui régit le profil de température de l'ailette A_3 est la suivante:

$$\frac{d}{dz} \left[\lambda_3(T_3) \cdot \frac{dT_3(z)}{dz} \right] - 2 \cdot \frac{[h_{3,l}(T_a, T_3) \cdot R_e + h_{3,ri}(T_3, T_{Ln_2}) \cdot R_i]}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot T_3(z) + 2 \cdot \frac{[h_{3,l}(T_a, T_3) \cdot R_e + h_{3,ri}(T_3, T_{Ln_2}) \cdot \frac{T_{Ln_2}}{T_a} \cdot R_i]}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot T_a = 0 \quad (\text{II -22})$$

2.2.4 Ailette extérieure du bas (Ailette A₄)

L’enveloppe latérale externe du cryostat se termine par une ailette cylindrique de forme annulaire A₄ jointe bout à bout à l’ailette intermédiaire et ancrée dans le socle du cryostat.

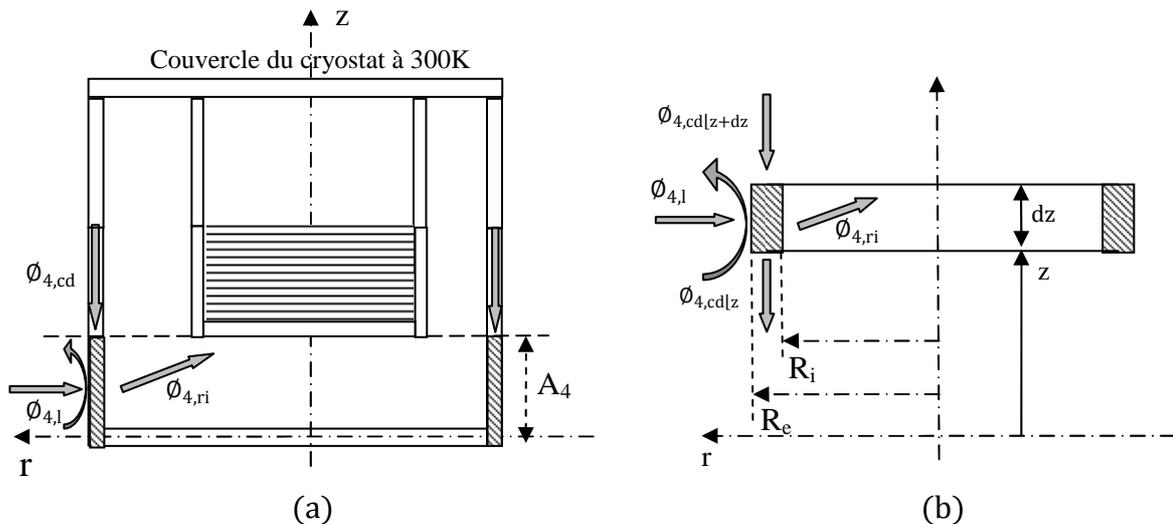


Fig. II-5 : Ailette externe du bas A₄

Nous allons procéder de la même manière que précédemment :

L’inventaire des flux de chaleur en régime permanent sur un élément de volume infinitésimal de longueur dz (Fig.II-5-b) permet d’écrire la relation suivante :

$$\phi_{4,cd|z+dz} + \phi_{4,l} = \phi_{4,ri} + \phi_{4,cd|z} \quad (\text{II -23})$$

Avec :

- $\phi_{4,l}$: Flux de chaleur échangé par convection et rayonnement (flux d’échange global) entre l’air de l’ambiance externe et la surface latérale extérieure de l’ailette A₄. Son expression est donnée par :

$$\phi_{4,l} = h_{4,l}(T_a, T_4) \cdot S_{4e,l}(z) \cdot (T_a - T_4(z)) \quad (\text{II-24})$$

Où ;

$h_{4,l}$: Coefficient d’échange global qui tient compte à la fois de la convection et du rayonnement de l’air ambiant avec l’ailette A₄.

$$h_{4,l}(T_a, T_4) = h_{4,cv}(T_a, T_4) + h_{4,re}(T_a, T_4)$$

$$h_{4,re}(T_a, T_4) = \sigma \cdot F_{a-4} \cdot [T_a^2 + T_4^2(z)] \cdot [T_a + T_4(z)]$$

$h_{4,cv}$: Coefficient de convection entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_4 .

$h_{4,re}$: Coefficient de convection équivalente entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_4 .

F_{a-4} : Facteur de forme gris entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_4 .

$S_{4e,l}$: Surface latérale externe de l'ailette A_4 .

$$S_{4e,l}(z) = 2\pi R_e dz$$

- $\Phi_{4,ri}$: Flux de chaleur échangé par rayonnement (convection équivalente) entre la face latérale interne de l'ailette A_4 et la face externe du bain liquide. Il a pour expression :

$$\Phi_{4,ri} = h_{4,ri}(T_4, T_{Ln_2}) \cdot S_{4i,l}(z) \cdot (T_4(z) - T_{Ln_2}) \quad (II-25)$$

$h_{4,ri}$: Coefficient de convection équivalente entre la face latérale interne de l'ailette A_4 et la face latérale externe du bain liquide.

$$h_{4,ri}(T_4, T_{Ln_2}) = \sigma \cdot F_{4-L} \cdot [T_4^2(z) + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_4(z) + T_{Ln_2}]$$

F_{4-L} : Facteur de forme gris entre la face latérale interne de l'ailette A_4 et la face externe du bain liquide.

$S_{4i,l}$: Surface latérale interne de l'ailette A_4 .

$$S_{4i,l}(z) = 2\pi R_i dz$$

- $\Phi_{4,cd|z}$: Flux de chaleur sortant à l'abscisse z de l'élément de volume infinitésimal d'épaisseur dz par la section droite $S_{4,d}$. Son expression est :

$$\Phi_{4,cd|z} = \lambda_4(T_4) \cdot S_{4,d} \cdot \frac{dT_4(z)}{dz} |z \quad (II-26)$$

Où :

$\lambda_4(T_4)$: Coefficient de conductivité thermique de l'ailette A_4 . [W/mK]

$S_{4,d}$: Section droite de l'ailette A_4 . [m²]

$$S_{4,d} = \pi(R_e^2 - R_i^2)$$

- $\Phi_{4,cd|z+dz}$: Flux de chaleur entrant à l'abscisse $z+dz$ à l'élément de volume infinitésimal d'épaisseur dz par la section droite $S_{4,d}$.

$$\begin{aligned} \Phi_{4,cd|z+dz} &= \lambda_4(T_4) \cdot S_{4,d} \cdot \frac{dT_4(z)}{dz} |_{z+dz} \\ \Phi_{4,cd|z+dz} &= \Phi_{4,cd|z} + dz \cdot \frac{d}{dz} \left[\lambda_4(T_4) \cdot S_{4,d} \cdot \frac{dT_4(z)}{dz} \right] \end{aligned} \quad (\text{II -27})$$

Finalement l'équation différentielle relative à la répartition de température de l'ailette A₄ se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\lambda_4(T_4) \cdot \frac{dT_4(z)}{dz} \right] - 2 \cdot \frac{[h_{4,l}(T_a, T_4) \cdot R_e + h_{4,ri}(T_4, T_{Ln2}) \cdot R_i]}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot T_4(z) + \\ 2 \cdot \frac{[h_{4,l}(T_a, T_4) \cdot R_e + h_{4,ri}(T_4, T_{Ln2}) \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a} \cdot R_i]}{(R_e^2 - R_i^2)} \cdot T_a = 0 \end{aligned} \quad (\text{II -28})$$

2.2.5 Socle du cryostat (Ailette A₅)

Le socle du cryostat est en forme de disque concentrique d'épaisseur « e ». Il est modélisé comme étant une ailette concentrique dont le flux de chaleur véhiculé par conduction est radial et ce en raison de la symétrie axiale du problème.

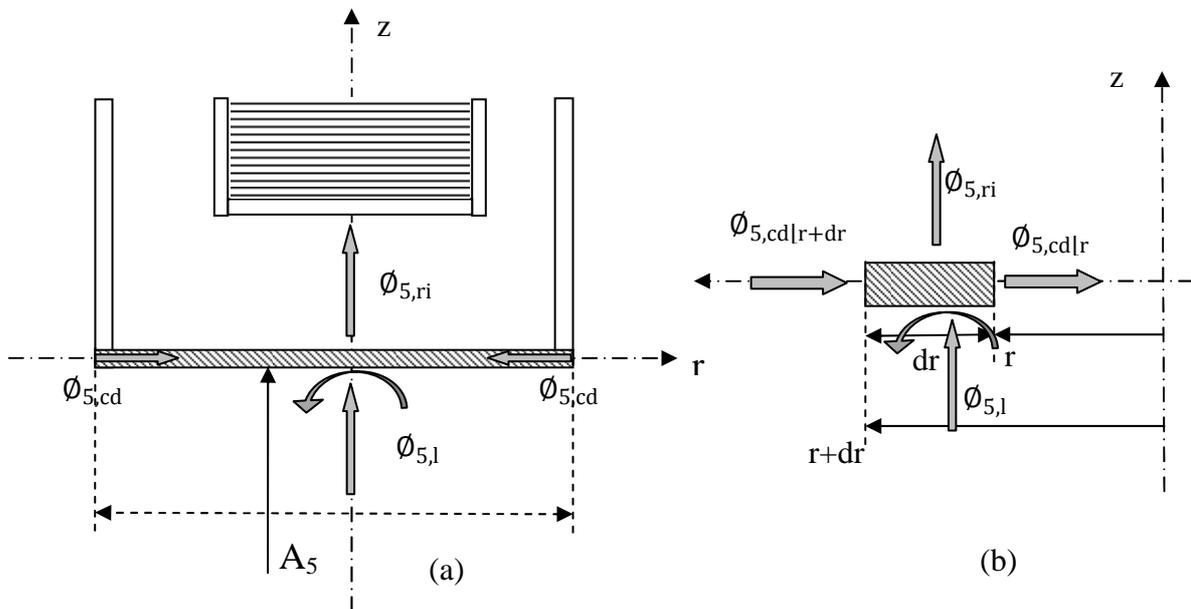


Fig. II-6 : Socle du cryostat Ailette A₅

En régime permanent, l'inventaire des flux de chaleur sur un élément de volume infinitésimal de longueur dr (Fig.5-b) est exprimé par la relation suivante :

$$\Phi_{5,cd|r+dr} + \Phi_{5,l} = \Phi_{5,ri} + \Phi_{5,cd|r} \quad (\text{II -29})$$

Avec :

- $\Phi_{5,l}$: Flux de chaleur échangé par convection et rayonnement (flux d'échange global) entre l'air de l'ambiance externe et la surface latérale extérieure du socle du cryostat. Son expression est la suivante :

$$\Phi_{5,l} = h_{5,l}(T_a, T_5) \cdot S_{5e,l}(r) \cdot (T_a - T_5(r)) \quad (\text{II-30})$$

Où ;

$h_{5,l}$: Coefficient d'échange global qui tient compte à la fois de la convection et du rayonnement de l'air extérieur avec l'ailette A_5 .

$$\begin{aligned} h_{5,l}(T_a, T_5) &= h_{5,cv}(T_a, T_5) + h_{5,re}(T_a, T_5) \\ h_{5,re}(T_a, T_5) &= \sigma \cdot F_{a-5} \cdot [T_a^2 + T_5^2(r)] \cdot [T_a + T_5(r)] \end{aligned}$$

$h_{5,cv}$: Coefficient de convection entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_5 .

$h_{5,re}$: Coefficient de convection équivalente entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_5 .

F_{a-5} : Facteur de forme gris entre l'air ambiant et la face externe de l'ailette A_5 .

$S_{5e,l}$: Surface latérale externe de l'ailette A_5 .

$$S_{5e,l}(r) = \pi \cdot dr \cdot (2r + dr) = 2\pi \cdot r \cdot dr \quad (\text{dr négligeable devant } 2r)$$

- $\Phi_{5,ri}$: Flux de chaleur échangé par rayonnement (convection équivalente) entre la face latérale interne du disque concentrique et la face externe du bain liquide. Il a pour expression :

$$\Phi_{5,ri} = h_{5,ri}(T_5, T_{Ln_2}) \cdot S_{5i,l}(z) \cdot (T_5(r) - T_{Ln_2}) \quad (\text{II-31})$$

$h_{5,ri}$: Coefficient de convection équivalente entre la face latérale interne du disque concentrique et la face latérale externe du bain liquide.

$$h_{5,ri}(T_5, T_{Ln_2}) = \sigma \cdot F_{5-L} \cdot [T_5^2(r) + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_5(r) + T_{Ln_2}]$$

F_{5-L} : Facteur de forme gris entre la face latérale interne du disque concentrique et la face externe du bain liquide.

$S_{5i,l}$: Surface latérale interne du disque.

$$S_{5i,l}(r) = S_{5e,l}(r) = 2\pi \cdot r \cdot dr$$

- $\Phi_{5,cd|z}$: Flux de chaleur sortant à l'abscisse r de l'élément de volume infinitésimal de longueur dr par la section droite $S_{5,d}$. Son expression est :

$$\Phi_{5,cd|r} = \lambda_5(T_5) \cdot S_{5,d}(r) \cdot \frac{dT_5(r)}{dr} \Big|_r \quad (\text{II -32})$$

Où :

$\lambda_5(T_5)$: Coefficient de conductivité thermique de l'ailette A_5 .

$S_{5,d}$: Section droite de l'ailette A_5 .

$$S_{5,d}(r) = 2\pi \cdot r \cdot e$$

e : Epaisseur de l'ailette A_5 .

- $\Phi_{5,cd|r+dr}$: Flux de chaleur entrant à l'abscisse $r+dr$ à l'élément de volume infinitésimal de longueur dr par la section droite $S_{5,d}$.

$$\Phi_{5,cd|r+dr} = \lambda_5(T_5) \cdot S_{5,d} \cdot \frac{dT_5(r)}{dr} \Big|_{r+dr}$$

En utilisant le développement limité d'ordre 1, cette relation devient :

$$\Phi_{5,cd|r+dr} = \Phi_{5,cd|r} + dr \cdot \frac{d}{dr} \left[\lambda_5(T_5) \cdot S_{5,d}(r) \cdot \frac{dT_5(r)}{dr} \Big|_r \right] \quad (\text{II -33})$$

Finalement, après réarrangement des relations précédentes, l'équation différentielle relative à la répartition de température de l'ailette A_5 est la suivante:

$$\left[\frac{d}{dr} \left(\lambda_5(T_5) \cdot \frac{dT_5(r)}{dr} \right) + \frac{\lambda_5(T_5)}{r} \cdot \frac{dT_5(r)}{dr} \right] - \frac{[h_{5,l}(T_a, T_5) + h_{5,ri}(T_5, T_{Ln2})]}{e} \cdot T_5(r) + \frac{[h_{5,l}(T_a, T_5) + h_{5,ri}(T_5, T_{Ln2})] \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a}}{e} \cdot T_a = 0 \quad (\text{II -34})$$

2.3. Profil de température des vapeurs d'Azote

Dans cette première approche le profil de température des vapeurs d'Azote qui viennent refroidir le col du cryostat (Ailette A_2) est supposé linéaire. Une corrélation est obtenue par interpolation linéaire des mesures effectuées par KHEMIS [1] pour un débit massique donné. Elle constitue une approximation plus acceptable dans la partie surchauffée que pour la partie adjacente au bain ; la difficulté de la mesurer expérimentalement est la seule justification de cette simplification.

Pour un débit massique \dot{m}_v , nous posons :

$$T_v(z) = a_v \cdot z + b_v \quad (\text{II -35})$$

Avec :

a_v et b_v sont des valeurs corrélées.

2.4. Méthode de résolution

L'écriture des bilans thermiques explicités précédemment relatifs aux cinq ailettes qui définissent le cryostat fait apparaître un système de cinq équations différentielles de second ordre couplées. Pour résoudre ce système nous optons pour une méthode de résolution analytique tout en considérant les hypothèses suivantes :

- Tous les coefficients de convection équivalente ont des valeurs moyennées.
- Les coefficients de conductivité thermique relatifs à chaque ailette sont supposés égaux et constants.

Afin d'obtenir la solution complète du système d'équations différentielles relatif à notre modèle, il nous faut définir dix conditions aux limites et ce pour déterminer les constantes d'intégration issues du développement mathématique. Les conditions aux limites en question seront explicitées dans le chapitre IV consacré à la résolution mathématique.

3. Partie 2 : Cryostat avec profil de température non linéaire des vapeurs d'Azote

En fait le profil de température des vapeurs d'Azote générées par le bain liquide en constante ébullition porte préjudice. Dans cette partie nous allons affiner notre modèle et ne plus considérer l'hypothèse faite sur l'évolution de la température des vapeurs supposée linéaire. Par conséquent, on va décrire le comportement de la vapeur générée à la surface libre du bain liquide; un bilan thermique sur une couche élémentaire de vapeurs permettra d'en déduire une équation différentielle qu'il faut ajouter au système à résoudre.

Cette deuxième approche permet non seulement de remédier à l'hypothèse simplificatrice portée sur l'évolution du profil de température des vapeurs mais aussi d'en estimer le débit d'évaporation pour n'importe quel taux de remplissage du cryostat.

3.1. Bilan thermique sur une couche de vapeurs

Les vapeurs générées à l'interface du bain liquide d'Azote en constante ébullition viennent refroidir le col du cryostat (Ailette interne A_1) seulement par convection thermique car la molécule d'Azote est pratiquement transparente au rayonnement. Par conséquent la partie tampon occupée par les vapeurs au dessus du liquide est le siège d'une stratification stable.

Le bilan thermique en régime permanent relatif à un élément de volume constitué d'une couche de vapeur d'épaisseur dz (Fig. II-7) traduit la variation du flux d'enthalpie emporté par les vapeurs ascendantes entre les deux abscisses z et $z+dz$ qui est égale au flux de chaleur latéral cédé par convection de l'ailette interne. Ce bilan s'écrit :

$$\Phi_{1,cv} = \dot{H}_{v|z+dz} - \dot{H}_{v|z} \quad (\text{II-36})$$

Avec :

- $\Phi_{1,cv}$: Flux cédé par convection de l'ailette interne par sa surface latérale intérieure à la couche de vapeur. Ce flux est le même que celui défini et donné par la relation (II-7).

- $\dot{H}_{v|z}$: Flux d'enthalpie entrant à l'abscisse z à l'élément de volume d'épaisseur dz par la surface latérale $S_{v,l}$. Il s'exprime par :

$$\dot{H}_{v|z} = [\dot{m}_v \cdot c_{pv}(T_v) \cdot T_v] | z \quad (\text{II-37})$$

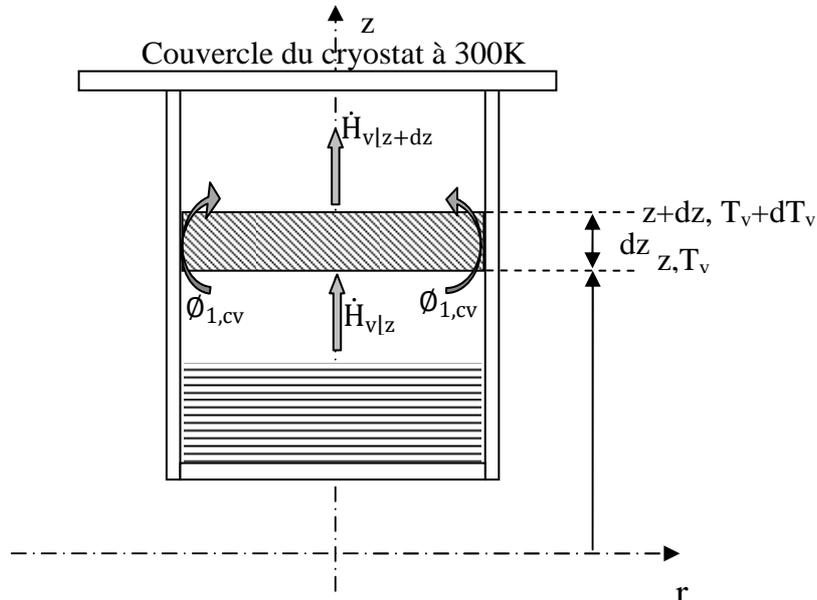


Fig. II-7 : Couche élémentaire de vapeurs d'Azote

- $\dot{H}_{v|z+dz}$: Flux d'enthalpie sortant à l'abscisse $z+dz$ de l'élément de volume d'épaisseur dz par la surface latérale $S_{v,l}$. Il s'exprime par :

$$\begin{aligned} \dot{H}_{v|z+dz} &= [\dot{m}_v \cdot c_{pv}(T_v) \cdot T_v] | z+dz \\ \dot{H}_{v|z+dz} &= \dot{H}_{v|z} + \dot{m}_v \cdot \frac{d}{dz} [c_{pv}(T_v) \cdot T_v(z)] \cdot dz \end{aligned} \quad (\text{II-38})$$

Où ;

\dot{m}_v : Le débit de vapeurs d'Azote issu du bain cryogénique.

c_{pv} : Chaleur spécifique à pression constante des vapeurs d'Azote.

Après réarrangement et simplification des formules qui traduisent le bilan thermique relatif au profil de la température des vapeurs, on obtient une équation différentielle du premier ordre qui sera ajoutée au système d'équations différentielles précédent. Cette équation s'écrit :

$$\frac{d}{dz} [c_{pv}(T_v) \cdot T_v(z)] + 2 \cdot \pi \cdot r_i \frac{h_{1,cv}(T_1, T_v)}{\dot{m}_v} \cdot T_v(z) - 2 \cdot \pi \cdot r_i \frac{h_{1,cv}(T_1, T_v)}{\dot{m}_v} \cdot T_1(z) = 0 \quad \dots (\text{II-39})$$

3.2. Méthode de résolution

Comme nous l'avons suggérer dans la première partie, les coefficients de conductivité thermique, de convection et de rayonnement exprimé en convection équivalente auront des valeurs moyennées ainsi que les propriétés physiques des vapeurs. Par ailleurs, la solution obtenue, dans ce cas, permet de mieux appréhender l'interaction des échanges thermiques en présence, en particulier l'importance relative des taux de remplissage du cryostat sur le débit des vapeurs en provenance du bain liquide d'Azote.

Pour pouvoir obtenir les profils de températures des enveloppes interne et externe du cryostat ainsi que la répartition de température des vapeurs, il nous faut expliciter les conditions aux limites nécessaires à la résolution du nouveau système composé de six d'équations différentielles couplées. En effet, l'équation différentielle qui régit la température des vapeurs est d'ordre 1 et donc, nous avons besoin d'une seule condition aux limites qu'on ajoutera aux dix autres évoquées dans la première partie.

La résolution du modèle mathématique dans cette partie, sera faite via une méthode itérative qui s'appuie sur une résolution analytique. Cela consiste en fait d'estimer le débit des vapeurs en introduisant en premier lieu une valeur approximative inspirée de la première approche. Par la suite, on solutionnera le système composé de six équations différentielles pour la détermination des profils de températures et ainsi évaluer les valeurs moyennées des différents coefficients d'échange de chaleur via des corrélations adéquates. Enfin, nous calculerons de nouveau le débit de vapeurs et ainsi de suite jusqu'à convergence. Cette méthodologie mathématique sera détaillée dans le chapitre IV.

CHAPITRE III:

Modélisation du Réservoir de Stockage de GNL

1. Introduction

Le processus d'évaporation du Gaz Naturel Liquéfié est lié de façon physique aux flux de chaleur introduits par les infiltrations thermiques à travers les parois constituant les bacs de stockage vers le bain liquide. Prédire ce taux d'évaporation du GNL s'avère d'une importance avérée du fait qu'il cause une perte sensible en quantité et en qualité du produit commercialisable ainsi que l'incidence sécuritaire lors du stockage.

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter une approche globale adaptable pour les réservoirs de stockage de Gaz Naturel Liquéfié. Cette démarche est inspirée du modèle physique basé sur un système d'ailettes couplées développés dans le chapitre précédent pour les cryostats à Azote Liquide. La maîtrise du taux d'évaporation ou « Boil-off » dans les bacs de stockage passe nécessairement par l'inventaire des phénomènes de transfert thermiques en présence. Le couplage de ces derniers se traduit par un système d'équations différentielles dont la résolution mathématique s'avère d'une complexité attendue.

L'un des paramètres physiques les plus influents sur le Boil-off est l'isolation thermique. La dégradation de l'isolation entraîne l'augmentation du flux de chaleur s'infiltrant de l'environnement vers le GNL stocké. En pratique, les techniques les plus fiables de contrôle de l'efficacité du système d'isolation dans le complexe de Liquéfaction du GNL d'ARZEW, est le suivi des températures à l'aide de thermocouples placés à différents niveaux dans l'enveloppe verticale interne des réservoirs [3].

2. Présentation du modèle physique adopté

Le modèle physique associé aux bacs de stockage de GNL abordé dans cette étude, est essentiellement adopté de l'analyse illustrée pour les cryostats à Azote Liquide. Sans qu'il y ait pour autant une similitude géométrique et thermique complète, le bac de stockage de GNL est modélisé ici par un système d'ailettes couplées thermiquement.

Ce réservoir schématisé en Figure III-1 est un réservoir aérien de forme cylindrique à double parois ayant 36 mètres de hauteur et 46 mètres de diamètre. La paroi latérale cylindrique est composée de trois couches. La première enveloppe interne est en acier allié à 9% Ni dont l'épaisseur est de 10 mm. La deuxième couche est essentiellement de la perlite d'une épaisseur égale à 95 mm assurant ainsi l'isolation thermique. La troisième couche forme l'enveloppe externe en acier de construction ; son épaisseur est de 10 mm. Le réservoir est instrumenté de 12 thermocouples répartis verticalement le long de l'enveloppe interne (Liner) en vue de mesurer la température en exploitation. Ces valeurs seront comparées à celles obtenues par le modèle théorique adopté.

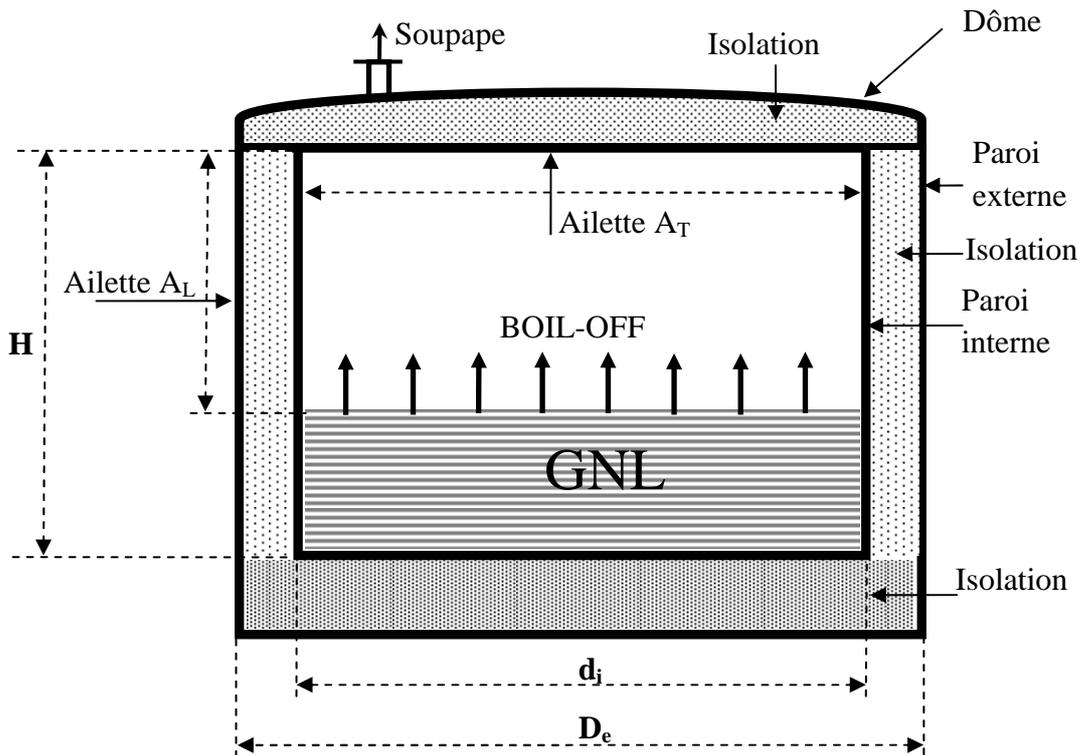


Fig. III-1 : Bac de stockage de GNL

En fait, nous allons adopter un modèle constitué de deux ailettes seulement qui formeront l'enveloppe interne du réservoir ; la première représente la paroi latérale interne (le liner) qui commence au niveau de la hauteur du bain liquide et se termine par un ancrage en sa partie haute dans la paroi interne du toit du bac de stockage en forme de disque concentrique qui constitue la deuxième ailette. Un bilan thermique sur une couche mince de vapeurs (Boil-off) de GNL générées à la surface libre du liquide en ébullition permettra de traduire l'évolution de la température de celles-ci couplées thermiquement avec les deux ailettes définies auparavant. Contrairement au modèle préconisé pour le cryostat à Azote liquide dont le couvercle est maintenu pour des raisons expérimentales [9] à une température constante 300 K, celui des bacs de stockage de GNL est sous forme de dôme et sa température n'est plus une constante. De plus, les deux enveloppes interne et externe du bac sont séparées avec de l'isolation poussée (Perlite, laine de verre...) donc il n'est pas opportun de modéliser l'enveloppe externe comme étant une ou un ensemble d'ailettes. En contre partie, on fera intervenir dans les bilans thermiques la résistance globale au flux de chaleurs entrants dus aux gradients de température existant entre l'environnement extérieur (Atmosphère), l'enveloppe interne du réservoir et le GNL.

3. Bilans thermiques et mise en équations

Le modèle physique pour la détermination des champs de température et du Boil-off dans les bacs de stockage de GNL sera traduit par des bilans thermiques effectués sur des éléments de volume infinitésimaux relatifs à chacune des ailettes constituant le modèle adopté [10].

3.1. Vapeurs de GNL

Le bilan thermique relatif à un élément de volume constitué d'une couche de vapeur d'épaisseur dz (Fig. III-2) traduit la variation du flux d'enthalpie emporté par les vapeurs ascendantes entre les deux abscisses z et $z+dz$ qui est égale au flux de chaleur latéral cédé par convection et rayonnement exprimé en convection équivalente de l'ailette interne A_L (le liner).

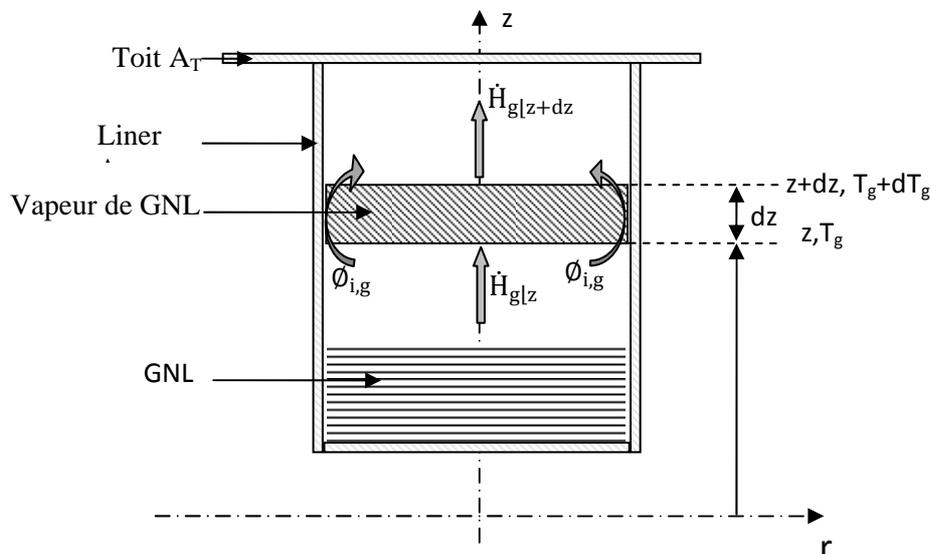


Fig. III-2 : Couche élémentaire de vapeurs de GNL

En régime permanent, ce bilan d'énergie s'écrit :

$$\phi_{i,g} = \dot{H}_{g|z+dz} - \dot{H}_{g|z} \tag{III -1}$$

Avec :

- $\phi_{i,g}$: Flux de chaleur échangé par convection et rayonnement (convection équivalente) entre le liner (Ailette A_L) et la couche de vapeur. Son expression est la suivante :

$$\phi_{i,g} = h_{i,g}(T_l, T_g) \cdot S_{il}(z) \cdot (T_l(z) - T_g(z)) \tag{III -2}$$

Où ;

$T_g(z)$: Température des vapeurs de GNL.

$T_l(z)$: Température de l'ailette A_L constituant le liner.

$h_{i,g}$: Coefficient d'échange global qui tient compte à la fois de la convection et du rayonnement du liner (Ailette A_L) vers la couche de vapeur.

$$h_{i,g}(T_l, T_g) = h_{l,cvi}(T_l, T_g) + h_{l,ri}(T_l, T_g)$$

$h_{l,cvi}$: Coefficient de convection entre la surface interne du liner et les vapeurs de GNL. Elle est donnée par la corrélation déterminée par Hashemi [11] valable uniquement pour les grands réservoirs de stockage.

$$h_{l,cvi} = 0,4 \cdot [T_l(z) - T_g(z)]^{1/3}, \quad [W/m^2K]$$

$h_{l,ri}$: Coefficient de convection équivalente entre la surface interne du liner et les vapeurs de GNL.

$$h_{l,ri}(T_l, T_g) = \sigma \cdot F_{1-g} \cdot [T_l^2(z) + T_g^2(z)] \cdot [T_l(z) + T_g(z)], \quad [W/m^2K]$$

F_{1-g} : Facteur de forme gris entre la surface interne du liner et les vapeurs.

S_{il} : Surface latérale interne du liner.

$$S_{il}(z) = 2\pi \cdot r_i \cdot dz$$

r_i : Rayon intérieur de l'ailette latérale interne (liner).

- $\dot{H}_{g|z}$: Flux d'enthalpie entrant à l'abscisse z à l'élément de volume d'épaisseur dz . Il s'exprime par :

$$\dot{H}_{g|z} = [\dot{m}_g \cdot c_{pg}(T_g) \cdot T_g] | z \quad (\text{III } -3)$$

- $\dot{H}_{g|z+dz}$: Flux d'enthalpie sortant à l'abscisse $z+dz$ de l'élément de volume d'épaisseur dz par la surface latérale $S_{v,l}$. Il s'exprime par :

$$\dot{H}_{g|z+dz} = [\dot{m}_g \cdot c_{pg}(T_g) \cdot T_g] | z+dz$$

$$\dot{H}_{g|z+dz} = \dot{H}_{g|z} + \dot{m}_g \cdot \frac{d}{dz} [c_{pg}(T_g) \cdot T_g(z)] \cdot dz \quad (\text{III } -4)$$

Où ;

\dot{m}_g : Débit des vapeurs de GNL.

c_{pg} : Chaleur spécifique des vapeurs à pression constante.

Après réarrangement et simplification des formules qui traduisent le bilan thermique relatif au profil de la température des vapeurs, on obtient une équation différentielle du premier ordre qui s'écrit :

$$\frac{d}{dz} [c_{pg}(T_g).T_g(z)] + 2. \pi. r_i \frac{h_{i,g}(T_l, T_g)}{\dot{m}_g}. T_g(z) - 2. \pi. r_i \frac{h_{i,g}(T_l, T_g)}{\dot{m}_g}. T_l(z) = 0 \quad (\text{III}-5)$$

Cette relation est une équation différentielle du premier ordre avec second membre pour la variable $T_g(z)$ qui représente la variation de température de la phase vapeur en fonction de la hauteur géométrique couplée avec la température $T_l(z)$ du liner (Ailette A_L).

3.2. Ailette latérale interne A_L (liner)

Pour déterminer le profil de température du liner (paroi verticale interne du réservoir), on modélise ce dernier comme étant une ailette cylindrique de forme annulaire. Cette ailette est ancrée en sa partie haute dans la paroi interne du toit et descend jusqu'au niveau de la surface libre du liquide (Fig. III-3).

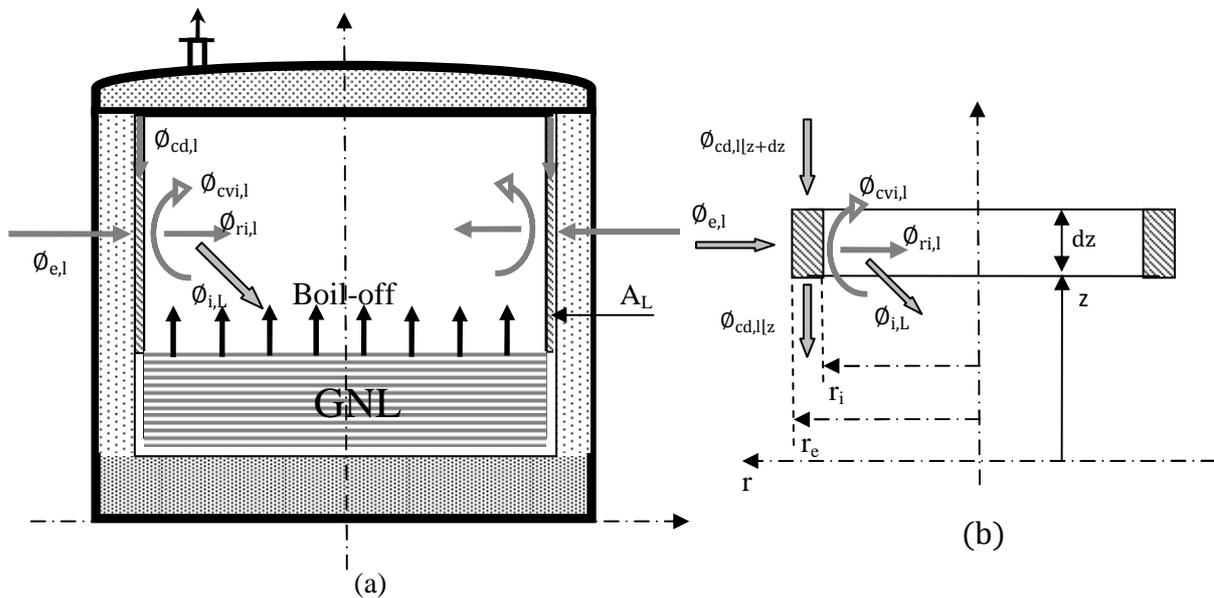


Fig. III-3: Ailette latérale interne (Liner) A_L

En régime permanent, le bilan thermique effectué sur l'élément de volume infinitésimal de longueur dz (Fig. III-3-b) fait apparaître les flux de chaleur suivants :

$\phi_{e,l}$: Flux de chaleur global entrant latéralement de l'ambiance externe (atmosphère) et à travers la couche d'isolation vers la surface verticale interne de l'ailette A_L .

$\Phi_{i,g}$: Flux de chaleur de convection équivalente cédé par la surface verticale interne de l'ailette A_L aux vapeurs ascendantes de GNL.

$\Phi_{i,L}$: Flux de chaleur radiatif exprimé en convection équivalente cédé par la surface verticale interne de l'ailette A_L au bain de GNL.

$\Phi_{cd,l}$: Flux de chaleur échangé par conduction issu du toit interne du bac transitant par le liner et allant jusqu'au bain liquide ; $\Phi_{cd,l|z+dz}$ est le flux entrant par conduction à l'abscisse $z+dz$ tandis que $\Phi_{cd,l|z}$ est celui sortant à l'abscisse z .

L'équation qui décrit le bilan thermique de l'ailette A_L s'écrit :

$$\Phi_{cd,l|z+dz} + \Phi_{e,l} = \Phi_{i,g} + \Phi_{i,L} + \Phi_{cd,l|z} \quad \text{(III -6)}$$

Expression de ces flux mis en jeu :

Ces flux mis en jeu s'expriment par les relations suivantes:

$$\Phi_{cd,l|z} = \lambda_1(T_1) \cdot S_{l,d} \cdot \frac{dT_1(z)}{dz} |z \quad \text{(III -7)}$$

Où :

$\lambda_1(T_1)$: Coefficient de conductivité thermique de l'ailette A_L

$S_{l,d}$: Section droite de l'ailette A_L .

$$S_{l,d} = \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2)$$

$$\Phi_{cd,l|z+dz} = \lambda_1(T_1(z)) \cdot S_{l,d} \cdot \frac{dT_1}{dz} |z+dz \quad \text{(III -8)}$$

En utilisant le développement limité d'ordre 1 suivant :

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x)$$

La relation (III-8) devient :

$$\Phi_{cd,l|z+dz} = \Phi_{cd,l|z} + dz \cdot \frac{d}{dz} \left[\lambda_1(T_1) \cdot S_{l,d} \cdot \frac{dT_1(z)}{dz} \right] \quad \text{(III -9)}$$

$$\Phi_{e,l} = U_{e,l}(T_a, T_1) \cdot S_{e,l}(z) \cdot (T_a - T_1(z)) \quad \text{(III-10)}$$

Où :

$U_{e,l}$: Coefficient de conductance globale qui tient compte des coefficients équivalents entre l'ambiance externe et l'ailette verticale interne A_L .

$$U_{e,l} = \frac{1}{\frac{r_e}{R_e \cdot h_{ex,l}} + \frac{r_e \cdot \ln(R_i/r_e)}{\lambda_p}}$$

$h_{ex,l}$: Coefficient de convection équivalente entre l'environnement et la surface verticale externe du réservoir de stockage.

λ_p : Conductivité thermique de l'isolation latérale (Perlite).

$S_{e,l}(z)$: Surface extérieure de l'ailette interne A_L .

$$S_{e,l}(z) = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot dz$$

$$\text{➤ } \phi_{i,g} = h_{i,g}(T_l, T_g) \cdot S_{i,l}(z) \cdot (T_l(z) - T_g(z)) \quad \text{(III-11)}$$

Où :

$h_{i,g}$: Coefficient de convection équivalente de l'ailette verticale interne A_L .

$S_{i,l}(z)$: Surface intérieure de l'ailette interne A_L .

$$S_{i,l}(z) = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot dz$$

$$\text{➤ } \phi_{i,L} = h_{i,L}(T_l, T_{GNL}) \cdot S_{i,l}(z) \cdot [T_l(z) - T_{GNL}]$$

Où :

$$h_{i,L}(T_l, T_{GNL}) = \sigma \cdot F_{i-L} \cdot [T_l^2(z) + T_{GNL}^2] \cdot [T_l(z) + T_{GNL}]$$

F_{i-L} est le facteur de forme gris entre la surface verticale interne du liner et la surface libre du GNL se comportant comme un corps noir.

Les relations précédentes réarrangées et simplifiées nous permettent d'écrire l'équation différentielle qui régit le profil de température de l'ailette A_l :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[\lambda_l(T_l) \cdot \frac{dT_l(z)}{dz} \right] - 2 \cdot \frac{[U_{e,l}(T_l, T_g) \cdot r_e + (h_{i,g}(T_l, T_g) + h_{i,L}(T_l, T_{GNL})) \cdot r_i]}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot T_l(z) + \\ 2 \cdot \frac{h_{i,g}(T_l, T_g) \cdot r_i}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot T_g(z) + 2 \cdot \frac{h_{i,L}(T_l, T_{GNL}) \cdot \frac{T_{GNL}}{T_a} \cdot r_i + U_{e,l}(T_l, T_g) \cdot r_e}{(r_e^2 - r_i^2)} \cdot T_a = 0 \end{aligned} \quad \text{(III-12)}$$

Cette équation différentielle est non homogène du deuxième ordre avec second membre pour la variable $T_l(z)$. Elle caractérise l'évolution de la température du liner en fonction de la hauteur z couplée avec la température $T_g(z)$ de la phase vapeur de GNL.

3.3. Ailette du toit interne du réservoir (Ailette A_T)

Le toit intérieur du réservoir de GNL est en forme de disque concentrique d'épaisseur « e ». Il est modélisé comme étant une ailette concentrique dont le flux de chaleur véhiculé par conduction est radial et ce en raison de la symétrie axiale du problème (Fig. III-4).

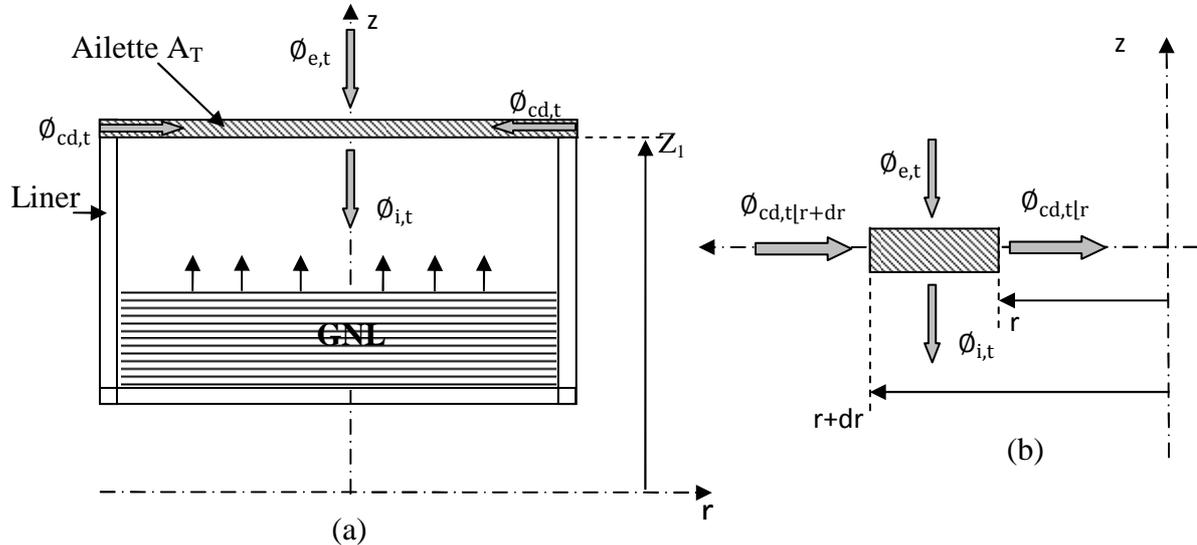


Fig. III-4 : Paroi interne du toit Ailette A_T

L'inventaire des flux de chaleur en régime permanent sur un élément de volume infinitésimal de longueur dr (Fig. III-4-b) est exprimé par la relation suivante :

$$\phi_{cd,t|r+dr} + \phi_{e,t} = \phi_{i,t} + \phi_{cd,t|r} \tag{III -13}$$

Les différents flux de chaleur sont définis comme suit :

- $\phi_{cd,t|r}$: Flux de chaleur sortant à l'abscisse r de l'élément de volume infinitésimal de longueur dr par la section droite S_{t,d}. Son expression est :

$$\phi_{cd,t|r} = \lambda_t(T_t) \cdot S_{t,d}(r) \cdot \frac{dT_t(r)}{dr} \tag{III -14}$$

Où :

T_t(r) : Température du toit intérieur (Ailette A_T) du bac.

λ_t(T_t) : Coefficient de conductivité thermique de l'ailette A_T.

S_{t,d} : Section droite de l'ailette A_T.

$$S_{t,d}(r) = 2\pi \cdot r \cdot e$$

e: Epaisseur de l'ailette A_T.

- $\phi_{cd,t|r+dr}$: Flux de chaleur entrant à l'abscisse r+dr à l'élément de volume infinitésimal de longueur dr par la section droite S_{t,d}.

$$\phi_{cd,t|r+dr} = \lambda_t(T_t) \cdot S_{t,d}(r) \cdot \frac{dT_t(r)}{dr} [r+dr]$$

En utilisant le développement limité d'ordre 1, cette relation devient :

$$\phi_{cd,t|r+dr} = \phi_{cd,t|r} + dr \cdot \frac{d}{dr} \left[\lambda_t(T_t) \cdot S_{t,d}(r) \cdot \frac{dT_t(r)}{dr} [r] \right] \quad (\text{III-15})$$

- $\phi_{e,t}$: Flux de chaleur global échangé entre l'environnement et la surface extérieure du toit interne du réservoir.

$$\phi_{e,t} = U_{e,t}(T_a, T_t) \cdot S_{e,t}(z) \cdot (T_a - T_t(z)) \quad (\text{III-16})$$

Où :

$U_{e,t}$: Coefficient de conductance globale qui tient compte des coefficients équivalents entre l'ambiance et la surface externe de l'ailette A_T .

$$U_{e,t} = \frac{1}{\frac{r_e^2}{R_{e,hex,t}^2} + \frac{e_t}{\lambda_p}}$$

$h_{ex,t}$: Coefficient de convection équivalente entre l'environnement et la surface externe de l'ailette A_T .

e_t : Epaisseur de l'isolation du toit (Perlite).

$S_{e,t}(z)$: Surface extérieure de l'ailette A_T .

$$S_{e,t}(z) = \pi \cdot dr \cdot (2r+dr) = 2\pi \cdot r \cdot dr \quad (\text{dr négligeable devant } 2r)$$

- $\phi_{i,t}$: Flux de chaleur radiatif équivalent en convection cédé par la surface interne du toit (Ailette A_T) à la surface libre du GNL.

$$\phi_{i,t} = h_{i,t}(T_t, T_{GNL}) \cdot S_{i,t}(z) \cdot (T_t(z) - T_{GNL}) \quad (\text{III-17})$$

Où :

$h_{i,t}$: Coefficient de convection équivalente de l'ailette A_T .

$$h_{i,t}(T_t, T_{GNL}) = \sigma \cdot F_{t-L} \cdot [T_t^2(z) + T_{GNL}^2] \cdot [T_t(z) + T_{GNL}]$$

F_{t-L} est le facteur de forme gris entre la surface interne du toit et la surface libre du GNL se comportant comme un corps noir.

$S_{i,t}(z)$: Surface intérieure de l'ailette interne A_L .

$$S_{i,t}(z) = 2\pi \cdot r \cdot dr$$

Finalement l'équation différentielle relative à la répartition de température de l'ailette A_T définie par la relation (III-13) se met sous la forme suivante:

$$\left[\frac{d}{dr} \left(\lambda_t(T_t) \cdot \frac{dT_t(r)}{dr} \right) + \frac{\lambda_t(T_t)}{r} \cdot \frac{dT_t(r)}{dr} \right] - \frac{[U_{e,t}(T_a, T_t) + h_{i,t}(T_t, T_{GNL})]}{e} \cdot T_t(r) + \frac{[U_{e,t}(T_a, T_t) + h_{i,t}(T_t, T_{GNL})] \cdot \frac{T_{GNL}}{T_a}}{e} \cdot T_a = 0 \quad (III - 18)$$

La relation (III-18) est une équation différentielle du deuxième ordre non homogène avec second membre pour la variable $T_t(z)$.

3.4. Méthodologie de résolution :

Le modèle mathématique qui traduit le comportement thermique du réservoir de GNL se caractérise par un système de trois équations différentielles ; ce système est défini par les relations (III-5), (III-12) et (III-18). La résolution mathématique qui sera abordée dans la deuxième partie du chapitre IV est semblable à celle évoquée pour le cryostat à Azote liquide (Partie 2) ; la méthode employée est itérative pour la détermination du débit de vapeurs (Boil-off) de GNL et s'articule sur une résolution analytique pour la détermination des profils de températures.

Un certain nombre d'hypothèses ont été faites pour résoudre ce problème, en particulier les coefficients d'échange équivalents, les propriétés physiques du fluide et des matériaux qui ont des valeurs moyennées.

Les conditions aux limites nécessaires pour résoudre le système différentiel seront explicitées dans le chapitre IV consacré à la résolution mathématique.

CHAPITRE IV:

Résolution Analytique

1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons exposer d'une façon détaillée la méthodologie de résolution adoptée pour les deux modèles à ailettes conçus pour les cryostats à Azote liquide et les bacs de stockage de GNL. Afin de résoudre des équations différentielles non linéaires par approximations successives, les coefficients d'échange de chaleur et les propriétés des fluides auront des valeurs moyennées pour finalement obtenir les débits de vapeurs et les profils de températures des deux modèles de rétention de fluides cryogéniques. Les résultats obtenus seront confrontés aux données expérimentales disponibles qui feront l'objet du chapitre V.

2. Cryostat à Azote liquide

Les bilans thermiques établis dans le chapitre II relatifs aux deux parties du modèle à ailettes adopté pour le cryostat sont explicités par un ensemble d'équations différentielles. Selon le profil de température des vapeurs d'Azote, on distinguera deux systèmes d'équations différentielles et leurs conditions aux limites dont on cherchera la solution analytique.

2.1. Cas du profil de température linéaire de la phase vapeur

Le système d'équations différentielles qui régit les profils de températures du cryostat est résolu en tenant compte des hypothèses évoquées précédemment.

Les relations (II-8), (II-16), (II-22), (II-28) et (II-34) simplifiées définissent le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{T}_1(z) - \alpha_1 \cdot T_1(z) + \beta_1 \cdot T_2(z) + \gamma_1 \cdot T_v(z) + \delta_1 T_a = 0 & (a) \\ \ddot{T}_2(z) - \alpha_2 \cdot T_2(z) + \beta_2 \cdot T_1(z) + \gamma_2 \cdot T_a = 0 & (b) \\ \ddot{T}_3(z) - \alpha_3 \cdot T_3(z) + \beta_3 \cdot T_a = 0 & (c) \\ \ddot{T}_4(z) - \alpha_4 \cdot T_4(z) + \beta_4 \cdot T_a = 0 & (d) \\ \ddot{T}_5(r) + \frac{1}{r} \dot{T}_5(r) - \alpha_5 \cdot T_5(r) + \beta_5 \cdot T_a = 0 & (e) \end{cases} \quad (IV-1)$$

Où les variables de substitution sont données par les relations:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \cdot \frac{[hm_{1,re} \cdot r_e + (hm_{1,ri,L} + hm_{1,cv}) \cdot r_i]}{\lambda_m \cdot (r_e^2 - r_i^2)}; \quad \beta_1 = 2 \cdot \frac{hm_{1,re} \cdot r_e}{(r_e^2 - r_i^2)}; \quad \gamma_1 = 2 \cdot \frac{hm_{1,cv} \cdot r_i}{(r_e^2 - r_i^2)}; \quad \delta_1 = 2 \cdot \frac{hm_{1,ri,L} \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a} \cdot r_i}{(r_e^2 - r_i^2)} \\ \alpha_2 &= 2 \cdot \frac{[hm_{2,l} \cdot R_e + (hm_{2,ri,L} + hm_{2,ri}) \cdot R_i]}{\lambda_m \cdot (R_e^2 - R_i^2)}; \quad \beta_2 = 2 \cdot \frac{hm_{2,ri} \cdot R_e}{(R_e^2 - R_i^2)}; \quad \gamma_2 = 2 \cdot \frac{[hm_{2,l} \cdot R_e + hm_{2,ri,L} \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a} \cdot R_i]}{(R_e^2 - R_i^2)}; \\ \alpha_3 &= 2 \cdot \frac{[hm_{3,l} \cdot R_e + hm_{3,ri} \cdot R_i]}{\lambda_m \cdot (R_e^2 - R_i^2)}; \quad \beta_3 = 2 \cdot \frac{[hm_{3,l} \cdot R_e + hm_{3,ri} \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a} \cdot R_i]}{\lambda_m \cdot (R_e^2 - R_i^2)}; \\ \alpha_4 &= 2 \cdot \frac{[hm_{4,l} \cdot R_e + hm_{4,ri} \cdot R_i]}{\lambda_m \cdot (R_e^2 - R_i^2)}; \quad \beta_4 = 2 \cdot \frac{[hm_{4,l} \cdot R_e + hm_{4,ri} \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a} \cdot R_i]}{\lambda_m \cdot (R_e^2 - R_i^2)}; \end{aligned}$$

$$\alpha_5 = \frac{[hm_{5,l} + hm_{5,ri}]}{\lambda_{m,e}} ; \quad \beta_5 = \frac{[hm_{5,l} + hm_{5,ri} \cdot \frac{T_{Ln2}}{T_a}]}{\lambda_{m,e}}$$

Avec \ddot{T} qui représente la deuxième dérivée des différentes températures par rapport à aux variables z ou r , h_m les coefficients moyens d'échange de chaleur convectifs et radiatifs remplacés par des échanges convectifs équivalents et $\lambda_{m,e}$ le coefficient moyen de conduction thermique supposé le même pour les deux enveloppes interne et externe du cryostat.

La relation (II-35) qui définit l'évolution de température de la phase vapeur dans cette première approche, est déduite par interpolation linéaire des valeurs de températures mesurées des vapeurs et de l'ailette interne (col du cryostat) dans le cas d'un débit massique $\dot{m}_v = 45,1$ mg/s pour une hauteur de remplissage égale à 0,15m.

Ces valeurs expérimentales sont données dans le tableau suivant:

Tableau IV-1 : Températures mesurées des vapeurs et du col du cryostat [7]

Hauteur [m]	0,04	0,06	0,0877	0,0897	0,1722	0,1737	0,2555	0,2587
Température des vapeurs [K]	84,2		142,9			202,1		268,4
Température du col [K]		86,5		148,9	205,2		276,9	

Les constantes qui définissent la relation (II-35) ont les valeurs suivantes :

$$a_v = 711,5 ; \quad b_v = -157,4.$$

La résolution complète du système (IV-1) composé de cinq équations différentielles du deuxième ordre couplées nécessite de définir dix conditions aux limites qui découlent des points de jonction des cinq ailettes assemblées (figure (IV-1)).

- i. Le point $J_{1,c}$ représente l'ancrage de l'ailette A_1 dans le couvercle du cryostat isothermalisé à 300 K. Cette jonction est traduite par la condition :

$$T_1(z=z_1) = T_c = 300 \text{ K} \tag{IV-2-a}$$

- ii. Le point $J_{1,L}$ situé au niveau de la surface libre ($z=z_L$) du liquide indique que le bout de l'ailette A_1 est à la même température que celle du bain liquide. On écrit :

$$T_1(z=z_L) = T_{Ln2} = 77,4 \text{ K} \tag{IV-2-b}$$

- iii. Le point $J_{2,c}$ représente l'ancrage de l'ailette A_2 dans le couvercle du cryostat isothermalisé à 300 K. Cette jonction nous permet d'écrire :

$$T_2(z=z_1) = T_c = 300 \text{ K} \tag{IV-2-c}$$

- iv. Le point $J_{2,3}$ caractérise la liaison entre les deux ailettes A_2 et A_3 . Cette liaison est parfaite donc l'aspect thermique se traduit par les deux conditions de continuité de température et de flux conductif en ce point :

$$T_2(z=z_L) = T_3(z=z_L) \quad (\text{IV-2-d})$$

$$\Phi_{2,cd|z=z_L} = \Phi_{3,cd|z=z_L}$$

Du fait que ces ailettes ont la même section droite et le même coefficient de conductivité thermique, cette dernière relation se simplifie pour donner l'égalité entre les gradients de températures :

$$\left[\frac{dT_2(z)}{dz} \right]_{z=z_L} = \left[\frac{dT_3(z)}{dz} \right]_{z=z_L} \quad (\text{IV-2-e})$$

- v. Du point de jonction $J_{3,4}$ situé à l'abscisse $z = z_0$ des ailettes A_3 et A_4 nous formulons avec le même raisonnement les deux conditions de continuité thermique suivantes :

$$T_3(z=z_0) = T_4(z=z_0) \quad (\text{IV-2-f})$$

$$\left[\frac{dT_3(z)}{dz} \right]_{z=z_0} = \left[\frac{dT_4(z)}{dz} \right]_{z=z_0} \quad (\text{IV-2-g})$$

- vi. Le point $J_{4,5}$ de coordonnées ($z = 0$ et $r = (R_e + R_i)/2 = R_m$) caractérise la liaison de l'ailette extérieure du bas A_4 ancrée dans le socle du cryostat (ailette A_5). Les deux conditions de continuité, dans ce cas, s'écrivent :

- Condition de continuité en température :

$$T_4(z=0) = T_5(r = R_m) \quad (\text{IV-2-h})$$

- Condition de continuité de flux conductif:

$$\Phi_{4,cd|z=0} = \Phi_{5,cd|r=R_m}$$

$$\left[-\lambda_m \cdot S_{4,d} \cdot \frac{dT_4(z)}{dz} \right]_{z=0} = \left[\lambda_m \cdot S_{5,d}(r) \cdot \frac{dT_5}{dr} \right]_{r=R_m}$$

Après simplifications en prenant la même épaisseur pour les deux ailettes ($e = R_e - R_i$), cette condition se met sous la forme :

$$\left[\frac{dT_4(z)}{dz} \right]_{z=0} = - \left[\frac{dT_5}{dr} \right]_{r=R_m} \quad (\text{IV-2-i})$$

Le signe (−) indique que les deux flux conductifs exprimés par la relation (IV-2-i) divergent du point de jonction des deux ailettes A_4 et A_5 .

- vii. La dernière condition aux limites se traduit par le fait que l'écoulement de chaleur par conduction dans l'ailette A_5 (socle du cryostat) en forme de disque concentrique ne varie que radialement en raison de la symétrie axiale du problème. Donc, le disque présente forcément un point dit adiabatique qui n'est autre que son centre de gravité ; Le gradient de température en ce point ($r = 0$) est nul :

$$\left[\frac{dT_5(r)}{dr} \right]_{r=0} = 0 \tag{IV-2-j}$$

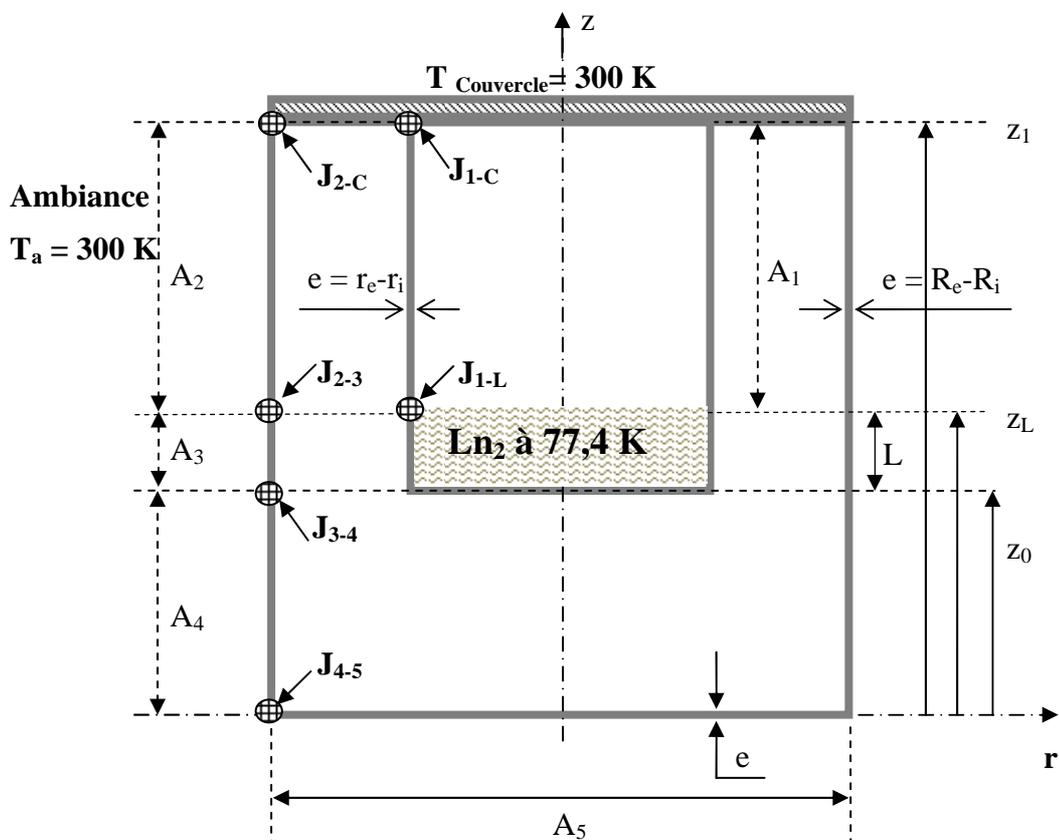


Fig. IV-1 : Points de jonction des différentes Ailettes

2.1.1. Résolution analytique

Le système (IV-1) est composé de cinq équations différentielles non homogènes du second ordre. Les équations (IV-1-a) et (IV-1-b) sont couplées thermiquement, donc résolues simultanément [16]. Les trois autres équations restantes sont linéairement indépendantes et donc résolues séparément.

Les relations (IV-1-a) et (IV-1-b) prennent la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} D^2-\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & D^2-\alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1(z) \\ T_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 \cdot T_v(z) - \delta_1 \cdot T_a \\ -\gamma_2 \cdot T_a \end{bmatrix} \quad (IV-3)$$

Où D^2 représente la deuxième dérivée par rapport à la variable z : $D \equiv \frac{d}{dz}$

Cette dernière formulation (IV-3) représente un système matriciel de deux équations différentielles linéaires dont on cherchera les solutions des variables $T_1(z)$ et $T_2(z)$ respectivement les températures des ailettes interne A_1 et externe du haut A_2 .

La méthode de résolution analytique qu'on développera ici est la résolution matricielle d'un système d'équations différentielles ordinaires qui utilise les propriétés des opérateurs différentiels linéaires commutatifs [4].

Pour ce faire, on utilise une méthode analogue à celle de Cramer afin de déterminer les exposants relatifs à des sommes exponentielles des solutions homogènes des variables considérées. Les solutions particulières seront déduites par la suite :

Le déterminant est défini par $\Delta = \begin{vmatrix} D^2-\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & D^2-\alpha_2 \end{vmatrix}$. (IV-4)

Pour que le système (IV-3) admette une solution unique dont la partie homogène est de forme exponentielle, il faut que Δ soit nul en remplaçant l'opérateur différentiel D par une variable réelle k dans la relation (IV-4). Un polynôme caractéristique pour les variables $T_1(z)$ et $T_2(z)$ est systématiquement obtenu.

Soit P le polynôme caractéristique du système (IV-3) ; on obtient après développement:

$$P = a.k^4 - b.k^2 + c = 0 \quad (IV-5)$$

Où les constantes de substitution sont :

$$a = 1; \quad b = (\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{et} \quad c = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2)$$

La relation (IV-5) est une équation polynomiale du 4^{ème} degré, sa résolution donne les quatre solutions (k_1, k_2, k_3, k_4) suivantes :

$$\begin{cases} k_{1,2} = \pm \left[\frac{b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \right]^{1/2} \\ k_{3,4} = \pm \left[\frac{b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \right]^{1/2} \end{cases} \quad (IV-7)$$

Le système matriciel (IV-3) et la relation (IV-4) nous permet d'écrire :

$$\Delta \cdot \begin{bmatrix} T_1(z) \\ T_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \quad (IV-8)$$

Avec Δ_1 et Δ_2 les déterminants partiels relatifs aux variables $T_1(z)$ et $T_2(z)$. Ils s'expriment comme suit :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\gamma_1 \cdot T_v(z) - \delta_1 \cdot T_a & \beta_1 \\ -\gamma_2 \cdot T_a & D^2 - \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 \cdot \gamma_1 \cdot T_v(z) + (\alpha_2 \cdot \delta_1 + \beta_1 \cdot \gamma_2) \cdot T_a \quad (IV-9)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} D^2 - \alpha_1 & -\gamma_1 \cdot T_v(z) - \delta_1 \cdot T_a \\ \beta_2 & -\gamma_2 \cdot T_a \end{vmatrix} = \beta_2 \cdot \gamma_1 \cdot T_v(z) + (\beta_2 \cdot \delta_1 + \alpha_1 \cdot \gamma_2) \cdot T_a \quad (IV-10)$$

a) Expression des solutions homogènes et particulières des températures $T_1(z)$ et $T_2(z)$

• Les solutions homogènes :

Les solutions homogènes des températures des deux ailettes prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} T_{1h}(z) = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot z} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot z} + C_3 \cdot e^{k_3 \cdot z} + C_4 \cdot e^{k_4 \cdot z} \\ T_{2h}(z) = D_1 \cdot e^{k_1 \cdot z} + D_2 \cdot e^{k_2 \cdot z} + D_3 \cdot e^{k_3 \cdot z} + D_4 \cdot e^{k_4 \cdot z} \end{cases} \quad (IV-11)$$

Il existe des relations entre les constantes intégrations C_i et D_i ($i = 1$ à 4) qu'on déterminera dans ce qui suit.

• Les solutions particulières :

Les solutions particulières du système (IV-3) sont aisément trouvées à l'aide des relations (IV-9-10) remplacées et développées dans le système équivalent (IV-8). Ces solutions $T_{1p}(z)$ et $T_{2p}(z)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} T_{1p}(z) = \frac{\Delta_1}{c} = \frac{\alpha_2 \cdot \gamma_1 \cdot (a_v \cdot z + b_v) + (\alpha_2 \cdot \delta_1 + \beta_1 \cdot \gamma_2) \cdot T_a}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2)} \\ T_{2p}(z) = \frac{\Delta_2}{c} = \frac{\beta_2 \cdot \gamma_1 \cdot (a_v \cdot z + b_v) + (\beta_2 \cdot \delta_1 + \alpha_1 \cdot \gamma_2) \cdot T_a}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2)} \end{cases} \quad (IV-12)$$

• Relations entre les constantes d'intégrations C_i et D_i ($i = 1$ à 4) :

En remplaçant les expressions des solutions homogènes et particulières des températures $T_1(z)$ et $T_2(z)$ dans l'une des équations différentielles (IV-1-a) ou (IV-1-b), après quelques réarrangements et simplifications on obtient des conditions entre les constantes intégrations C_i et D_i ($i = 1$ à 4) explicitées comme suit :

$$\begin{cases} D_1 = \frac{\alpha_1 - k_1^2}{\beta_1} \cdot C_1 = X_1 \cdot C_1 \\ D_2 = \frac{\alpha_1 - k_2^2}{\beta_1} \cdot C_2 = X_2 \cdot C_2 \\ D_3 = \frac{\alpha_1 - k_3^2}{\beta_1} \cdot C_3 = X_3 \cdot C_3 \\ D_4 = \frac{\alpha_1 - k_4^2}{\beta_1} \cdot C_4 = X_4 \cdot C_4 \end{cases} \quad (\text{IV-13})$$

Dans la relation (IV-7), on remarque que : $k_2 = -k_1$ et $k_4 = -k_3$ d'où ; $X_2 = X_1$ et $X_4 = X_3$
 Les conditions ci-dessus deviennent :

$$\begin{cases} D_1 = X_1 \cdot C_1 \\ D_2 = X_1 \cdot C_2 \\ D_3 = X_3 \cdot C_3 \\ D_4 = X_3 \cdot C_4 \end{cases} \quad (\text{IV-14})$$

Finalement la solution générale des températures $T_1(z)$ et $T_2(z)$ est:

$$\begin{cases} T_1(z) = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot z} + C_2 \cdot e^{-k_1 \cdot z} + C_3 \cdot e^{k_3 \cdot z} + C_4 \cdot e^{-k_3 \cdot z} + T_{1p}(z) \\ T_2(z) = C_1 \cdot X_1 \cdot e^{k_1 \cdot z} + C_2 \cdot X_1 \cdot e^{-k_1 \cdot z} + C_3 \cdot X_3 \cdot e^{k_3 \cdot z} + C_4 \cdot X_3 \cdot e^{-k_3 \cdot z} + T_{2p}(z) \end{cases} \quad (\text{IV-15})$$

b) Expression de la solution générale de l'équation différentielle (IV-1-c)

La relation (IV-1-c) régit le profil de température de l'ailette latérale intermédiaire A_3 . Elle représente une équation différentielle ordinaire du second ordre avec second membre de la variable différentielle $T_3(z)$ linéairement indépendante des autres; sa solution générale est composée d'une solution homogène et d'une solution particulière. Elle se met sous la forme :

$$T_3(z) = C_5 \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z} + C_6 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z} + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot T_a \quad (\text{IV-16})$$

Où C_5 et C_6 sont les constantes d'intégration.

c) Expression de la solution générale de l'équation différentielle (IV-1-d)

La relation (IV-1-d) qui régit le profil de température de l'ailette extérieure du bas A_4 est analogue à l'équation différentielle (IV-1-c) ; sa solution générale s'écrit donc:

$$T_4(z) = C_7 \cdot e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z} + C_8 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z} + \frac{\beta_4}{\alpha_4} \cdot T_a \quad (\text{IV-17})$$

Où C_7 et C_8 sont les constantes d'intégration respectives.

d) Expression de la solution générale de l'équation différentielle (IV-1-e)

Cette équation différentielle caractérise le champ de température de l'ailette A_5 qui représente la modélisation du socle du cryostat en forme de disque concentrique. La solution homogène de cette équation est analogue à la forme de la solution de l'équation différentielle de Bessel modifiée d'ordre zéro [5]. L'expression globale de la température $T_5(r)$ est donnée par :

$$T_5(r) = C_9 \cdot I_0[\sqrt{\alpha_5} \cdot r] + C_{10} \cdot K_0[\sqrt{\alpha_5} \cdot r] + \frac{\beta_5}{\alpha_5} \cdot T_a \quad (IV-18)$$

Avec :

I_0 : Fonction de Bessel modifiée du 1^{ier} type d'ordre zéro.

K_0 : Fonction de Bessel modifiée du 2^{eme} type d'ordre zéro.

C_9 et C_{10} sont les constantes d'intégration.

Remarque : Le profil de température du socle du cryostat donné par l'équation de Bessel se simplifie en appliquant la condition à la limite définie par la relation (IV-2-j) indépendante des autres ; elle stipule que le gradient de température est nul au centre du disque. Cette condition impose que la constante arbitraire C_{10} soit nulle. La relation (IV-18) se réduit à :

$$T_5(r) = C_9 \cdot I_0[\sqrt{\alpha_5} \cdot r] + \frac{\beta_5}{\alpha_5} \cdot T_a$$

En résumé, les champs de températures qui constituent les solutions analytiques du système d'équations différentielles (IV-1) sont récapitulées par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(z) = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot z} + C_2 \cdot e^{-k_1 \cdot z} + C_3 \cdot e^{k_3 \cdot z} + C_4 \cdot e^{-k_3 \cdot z} + T_{1p}(z) \quad (a) \\ T_2(z) = C_1 \cdot X_1 \cdot e^{k_1 \cdot z} + C_2 \cdot X_1 \cdot e^{-k_1 \cdot z} + C_3 \cdot X_3 \cdot e^{k_3 \cdot z} + C_4 \cdot X_3 \cdot e^{-k_3 \cdot z} + T_{2p}(z) \quad (b) \\ T_3(z) = C_5 \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z} + C_6 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z} + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot T_a \quad (c) \\ T_4(z) = C_7 \cdot e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z} + C_8 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z} + \frac{\beta_4}{\alpha_4} \cdot T_a \quad (d) \\ T_5(r) = C_9 \cdot I_0[\sqrt{\alpha_5} \cdot r] + \frac{\beta_5}{\alpha_5} \cdot T_a \quad (e) \end{array} \right. \quad (IV-19)$$

Et les conditions aux limites respectives nécessaires à la détermination des neuf constantes d'intégration sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(z=z_1) = T_c = 300 \text{ K} \\ T_1(z=z_L) = T_{Ln_2} = 77,4 \text{ K} \\ T_2(z=z_1) = T_c = 300 \text{ K} \\ T_2(z=z_L) = T_3(z=z_L) \\ \left[\frac{dT_2(z)}{dz} \right]_{z=z_L} = \left[\frac{dT_3(z)}{dz} \right]_{z=z_L} \\ T_3(z=z_0) = T_4(z=z_0) \\ \left[\frac{dT_3(z)}{dz} \right]_{z=z_0} = \left[\frac{dT_4(z)}{dz} \right]_{z=z_0} \\ T_4(z=0) = T_5(r=R_m) \\ \left[\frac{dT_4(z)}{dz} \right]_{z=0} = - \left[\frac{dT_5}{dr} \right]_{r=R_m} \end{array} \right. \quad \text{(IV-20)}$$

L'application des conditions (IV-20) au système de solutions (IV-19) pour la détermination des constantes d'intégration nous amène à résoudre un système composé de neuf équations linéaires du 1^{ier} degré à neuf inconnues C_i ($i = 1$ à 9) qui se présente comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdot e^{k_1 \cdot z_1} + C_2 \cdot e^{-k_1 \cdot z_1} + C_3 \cdot e^{k_3 \cdot z_1} + C_4 \cdot e^{-k_3 \cdot z_1} = T_c - T_{1p}(z_1) \\ C_1 \cdot e^{k_1 \cdot z_L} + C_2 \cdot e^{-k_1 \cdot z_L} + C_3 \cdot e^{k_3 \cdot z_L} + C_4 \cdot e^{-k_3 \cdot z_L} = T_{Ln_2} - T_{1p}(z_L) \\ C_1 \cdot X_1 \cdot e^{k_1 \cdot z_1} + C_2 \cdot X_1 \cdot e^{-k_1 \cdot z_1} + C_3 \cdot X_3 \cdot e^{k_3 \cdot z_1} + C_4 \cdot X_3 \cdot e^{-k_3 \cdot z_1} = T_c - T_{2p}(z_1) \\ C_1 \cdot X_1 \cdot e^{k_1 \cdot z_L} + C_2 \cdot X_1 \cdot e^{-k_1 \cdot z_L} + C_3 \cdot X_3 \cdot e^{k_3 \cdot z_L} + C_4 \cdot X_3 \cdot e^{-k_3 \cdot z_L} - C_5 \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} - C_6 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot T_a - T_{2p}(z_1) \\ C_1 \cdot X_1 \cdot k_1 \cdot e^{k_1 \cdot z_L} - C_2 \cdot X_1 \cdot k_1 \cdot e^{-k_1 \cdot z_L} + C_3 \cdot X_3 \cdot k_3 \cdot e^{k_3 \cdot z_L} - C_4 \cdot X_3 \cdot k_3 \cdot e^{-k_3 \cdot z_L} - C_5 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} + C_6 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} = - \frac{\beta_2 \cdot \gamma_1 \cdot a_v}{c} \\ C_5 \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} + C_6 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} - C_7 \cdot e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} - C_8 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} = \left[\frac{\beta_4}{\alpha_4} - \frac{\beta_3}{\alpha_3} \right] \cdot T_a \\ C_5 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} - C_6 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} - C_7 \cdot \sqrt{\alpha_4} \cdot e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} + C_8 \cdot \sqrt{\alpha_4} \cdot e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} = 0 \\ C_7 + C_8 - C_9 \cdot I_0[\sqrt{\alpha_5} \cdot R_m] = \left[\frac{\beta_5}{\alpha_5} - \frac{\beta_4}{\alpha_4} \right] \cdot T_a \\ C_7 \cdot \sqrt{\alpha_4} - C_8 \cdot \sqrt{\alpha_4} + C_9 \cdot \sqrt{\alpha_5} \cdot I_1[\sqrt{\alpha_5} \cdot R_m] = 0 \end{array} \right. \quad \dots \text{(IV-21)}$$

Où I_1 est la fonction de Bessel modifiée du 1^{ier} type d'ordre 1 qui représente la dérivée première de I_0 .

Les neuf constantes d'intégration du système d'équations (IV-21) ci-dessus sont déduites par l'application de la méthode matricielle de Cramer.

Les résultats obtenus par l'application de cette approche seront exposés dans le chapitre V. Ils seront comparés aux données expérimentales.

2.2. Cas du profil de température non linéaire de la phase vapeur

Le système d'équations différentielles qu'il faut résoudre dans ce cas est défini par l'introduction de l'équation différentielle qui régit le champ de température de la phase vapeur explicitée par la relation (II -39) dans le système d'équations (IV-1) à résoudre.

La méthodologie de résolution adoptée est analogue au premier cas. Néanmoins, nous aurons un système de six équations différentielles dont trois sont couplées thermiquement et à résoudre simultanément. Cette tâche est plus ardue que pour le premier cas.

Par ailleurs, cette deuxième approche nous permettra d'évaluer les débits de vapeurs issus du bain cryogénique en fonction du taux de remplissage et de la conductivité thermique des deux enveloppes interne et externe du cryostat.

Notre schéma de résolution s'appuie sur une méthode itérative pour la détermination des débits de vapeurs ; les champs de températures des différentes ailettes et de la phase vapeur seront obtenus par une résolution analytique.

2.2.1. Détermination analytique des champs de températures

En tenant compte des hypothèses faites sur les différents coefficients d'échange de chaleur, la relation (II-39) ajoutée au système d'équations différentielles (IV-1) nous permet de définir le nouveau système suivant composé de six équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{T}_v(z) + \alpha_v \cdot T_v(z) - \alpha_v \cdot T_1(z) = 0 & (a) \\ \ddot{T}_1(z) - \alpha_1 \cdot T_1(z) + \beta_1 \cdot T_2(z) + \gamma_1 \cdot T_v(z) + \delta_1 T_a = 0 & (b) \\ \ddot{T}_2(z) - \alpha_2 \cdot T_2(z) + \beta_2 \cdot T_1(z) + \gamma_2 \cdot T_a = 0 & (c) \\ \ddot{T}_3(z) - \alpha_3 \cdot T_3(z) + \beta_3 \cdot T_a = 0 & (d) \\ \ddot{T}_4(z) - \alpha_4 \cdot T_4(z) + \beta_4 \cdot T_a = 0 & (e) \\ \ddot{T}_5(r) + \frac{1}{r} \dot{T}_5(r) - \alpha_5 \cdot T_5(r) + \beta_5 \cdot T_a = 0 & (f) \end{cases} \quad (IV-22)$$

Où α_v est une constante de substitution définie par :

$$\alpha_v = 2 \cdot \pi \cdot r_i \frac{hm_{1,cv}}{c_{mpv} \cdot \dot{m}_v}$$

Pour résoudre complètement le système (IV-22), il nous faut définir onze conditions aux limites dont dix sont explicitées dans le 1^{er} cas par l'ensemble des relations (IV-2). La condition à la limite manquante est relative à l'équation différentielle du 1^{er} ordre qui régit le champ de température de la phase vapeur ajoutée au système à résoudre. Cette condition s'explique par le fait que la température de la phase vapeur est supposée égale à celle du bain cryogénique à l'interface liquide-vapeur du bain.

Les relations (IV-22-a/b/c) qui traduisent respectivement les champs de températures des vapeurs, de l'ailette interne A_1 et de l'ailette extérieure du haut A_2 sont couplées thermiquement, donc à résoudre simultanément. Comme pour le premier cas, la forme matricielle des trois équations énumérées s'écrit :

$$\begin{bmatrix} D + \alpha_v & -\alpha_v & 0 \\ \gamma_1 & D^2 - \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 & D^2 - \alpha_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_v(z) \\ T_1(z) \\ T_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta_1 T_a \\ -\gamma_2 \cdot T_a \end{bmatrix} \quad (IV-23)$$

Où D et D² représentent les opérateurs différentiels respectivement du 1^{er} et du 2^{ème} ordre.

La résolution du système (IV-23) consiste à trouver les solutions homogènes et les solutions particulières des températures T_v(z), T₁(z) et T₂(z) par la méthode matricielle de résolution des équations différentielles linéaires détaillée précédemment.

- **Polynôme caractéristique :** On pose D = ω, le déterminant de (IV-23) s'écrit :

$$P = \det \begin{vmatrix} \omega + \alpha_v & -\alpha_v & 0 \\ \gamma_1 & \omega^2 - \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \beta_2 & \omega^2 - \alpha_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \omega^5 + b_1 \cdot \omega^4 + c_1 \cdot \omega^3 + d_1 \cdot \omega^2 + e_1 \cdot \omega + f_1 \quad (IV-24)$$

Où les constantes de substitutions sont :

$$a_1 = 1 ; b_1 = \alpha_v ; c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2) ; d_1 = \alpha_v \cdot [\gamma_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)]$$

$$e_1 = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2) ; f_1 = \alpha_v \cdot [\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2 - \gamma_1 \cdot \alpha_2]$$

Pour P=0, les cinq racines de l'équation (IV-24) sont déterminées numériquement.

- **Solutions homogènes :**

Soit (ω₁, ω₂, ω₃, ω₄, ω₅) les racines de l'équation (IV-24), les solutions homogènes de notre système d'équations (IV-23) s'écrivent :

$$\begin{cases} T_{vh}(z) = E_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + E_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + E_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + E_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + E_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} & (a) \\ T_{1h}(z) = F_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + F_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + F_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + F_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + F_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} & (b) \\ T_{2h}(z) = G_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + G_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + G_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + G_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + G_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} & (c) \end{cases} \quad (IV-25)$$

Où E_i, F_i et G_i (i = 1 à 5) sont les constantes d'intégration liées entre elles.

- **Solutions particulières :**

Les solutions particulières associées au système (IV-23) sont retrouvées de la même manière que précédemment, par analogie avec la méthode de Cramer, soit:

$$T_{vp} = \frac{\det \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_v & 0 \\ -\delta_1 T_a & D^2 - \alpha_1 & \beta_1 \\ -\gamma_2 T_a & \beta_2 & D^2 - \alpha_2 \end{vmatrix}}{f_1} = \frac{(\alpha_2 \cdot \delta_1 + \gamma_2 \cdot \beta_1)}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2 - \gamma_1 \cdot \alpha_2)} \cdot T_a \quad (IV-26-a)$$

$$T_{1p} = \frac{\det \begin{vmatrix} D + \alpha_v & 0 & 0 \\ \gamma_1 & -\delta_1 T_a & \beta_1 \\ 0 & -\gamma_2 T_a & D^2 - \alpha_2 \end{vmatrix}}{f_1} = \frac{(\alpha_2 \cdot \delta_1 + \gamma_2 \cdot \beta_1)}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2 - \gamma_1 \cdot \alpha_2)} \cdot T_a = T_{vp} \quad (IV-26-b)$$

$$T_{2p} = \frac{\det \begin{vmatrix} D + \alpha_v & -\alpha_v & 0 \\ \gamma_1 & D^2 - \alpha_1 & -\delta_1 T_a \\ 0 & \beta_2 & -\gamma_2 T_a \end{vmatrix}}{f_1} = \frac{[\gamma_2 \cdot (\alpha_1 - \gamma_1) + \beta_2 \cdot \delta_1]}{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 - \beta_1 \cdot \beta_2 - \gamma_1 \cdot \alpha_2)} \cdot T_a \quad (IV-26-c)$$

• **Relations entre les constantes d'intégrations E_i , F_i et G_i ($i = 1$ à 5) :**

Pour déterminer les relations qui lient ces constantes arbitraires, il suffit de porter les solutions (IV-25) et (IV-26) superposées respectivement dans deux des trois équations différentielles du système (IV-23). Après développement, on obtient les conditions suivantes :

$$F_i = \frac{\alpha_v + \omega_i}{\alpha_v} \cdot E_i = \xi_i \cdot E_i \quad (IV-27-a)$$

$$G_i = \frac{1}{\alpha_v \cdot \beta_1} \cdot [(\alpha_v + \omega_i) \cdot (\alpha_1 - \omega_i^2) - \alpha_v \cdot \gamma_1] \cdot E_i = \eta_i \cdot E_i \quad (IV-27-b)$$

Avec ; ($i=1$ à 5)

Finalement, les solutions générales des profils de températures $T_v(z)$, $T_1(z)$ et $T_2(z)$ dans cette deuxième approche s'écrivent :

$$\begin{cases} T_v(z) = E_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + E_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + E_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + E_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + E_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} + T_{vp} \\ T_1(z) = E_1 \cdot \xi_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + E_2 \cdot \xi_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + E_3 \cdot \xi_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + E_4 \cdot \xi_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + E_5 \cdot \xi_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} + T_{1p} \\ T_2(z) = E_1 \cdot \eta_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + E_2 \cdot \eta_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + E_3 \cdot \eta_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + E_4 \cdot \eta_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + E_5 \cdot \eta_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} + T_{2p} \end{cases} \quad (IV-28)$$

En outre, les expressions des solutions des équations différentielles (IV-22-d/e/f) sont équivalentes à celles données dans le 1^{er} cas par les relations (IV-19-c/d/e).

En résumé, l'expression des solutions générales des champs de températures du système (IV-22) sont synthétisées comme suit :

$$\begin{cases} T_v(z) = E_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + E_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + E_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + E_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + E_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} + T_{vp} & (a) \\ T_1(z) = E_1 \cdot \xi_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + E_2 \cdot \xi_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + E_3 \cdot \xi_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + E_4 \cdot \xi_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + E_5 \cdot \xi_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} + T_{1p} & (b) \\ T_2(z) = E_1 \cdot \eta_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z} + E_2 \cdot \eta_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z} + E_3 \cdot \eta_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z} + E_4 \cdot \eta_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z} + E_5 \cdot \eta_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z} + T_{2p} & (c) \\ T_3(z) = E_6 \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z} + E_7 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z} + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot T_a & (d) \\ T_4(z) = E_8 \cdot e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z} + E_9 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z} + \frac{\beta_4}{\alpha_4} \cdot T_a & (e) \\ T_5(r) = E_{10} \cdot I_0[\sqrt{\alpha_5} \cdot r] + \frac{\beta_5}{\alpha_5} \cdot T_a & (f) \end{cases} \quad \dots (IV-29)$$

• **Détermination des constantes d'intégrations :**

Cet ensemble de solutions résumées par (IV-29) sont exprimées par dix constantes d'intégration qui sont déterminées par l'application des dix conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_v(z=z_L)=T_{Ln_2}=77,4 \text{ K} & \text{(a)} \\ T_1(z=z_1)=T_c=300 \text{ K} & \text{(b)} \\ T_1(z=z_L)=T_{Ln_2}=77,4 \text{ K} & \text{(c)} \\ T_2(z=z_1)=T_c=300 \text{ K} & \text{(d)} \\ T_2(z=z_L)=T_3(z=z_L) & \text{(e)} \\ \left[\frac{dT_2(z)}{dz} \right]_{z=z_L} = \left[\frac{dT_3(z)}{dz} \right]_{z=z_L} & \text{(f)} \\ T_3(z=z_0)=T_4(z=z_0) & \text{(g)} \\ \left[\frac{dT_3(z)}{dz} \right]_{z=z_0} = \left[\frac{dT_4(z)}{dz} \right]_{z=z_0} & \text{(h)} \\ T_4(z=0)=T_5(r=R_m) & \text{(i)} \\ \left[\frac{dT_4(z)}{dz} \right]_{z=0} = - \left[\frac{dT_5}{dr} \right]_{r=R_m} & \text{(j)} \end{array} \right. \quad \text{(IV-30)}$$

Des conditions aux limites explicitées par (IV-30), on déduit un système de dix équations du 1^{er} degré à dix inconnues. Les dix constantes d'intégrations (E_i ; $i = 1$ à 10) seront facilement obtenues par l'application de la méthode matricielle de Cramer. Le système d'équations en question s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z_L} + E_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z_L} + E_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z_L} + E_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z_L} + E_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z_L} = T_{Ln_2} - T_{vp} \\ E_1 \cdot \xi_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z_1} + E_2 \cdot \xi_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z_1} + E_3 \cdot \xi_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z_1} + E_4 \cdot \xi_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z_1} + E_5 \cdot \xi_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z_1} = T_c - T_{1p} \\ E_1 \cdot \xi_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z_L} + E_2 \cdot \xi_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z_L} + E_3 \cdot \xi_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z_L} + E_4 \cdot \xi_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z_L} + E_5 \cdot \xi_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z_L} = T_{Ln_2} - T_{1p} \\ E_1 \cdot \eta_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z_1} + E_2 \cdot \eta_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z_1} + E_3 \cdot \eta_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z_1} + E_4 \cdot \eta_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z_1} + E_5 \cdot \eta_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z_1} = T_c - T_{2p} \\ E_1 \cdot \eta_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z_L} + E_2 \cdot \eta_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z_L} + E_3 \cdot \eta_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z_L} + E_4 \cdot \eta_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z_L} + E_5 \cdot \eta_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z_L} - E_6 \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} - E_7 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot T_a - T_{2p} \\ E_1 \cdot \eta_1 \cdot \omega_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z_L} + E_2 \cdot \eta_2 \cdot \omega_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z_L} + E_3 \cdot \eta_3 \cdot \omega_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z_L} + E_4 \cdot \eta_4 \cdot \omega_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z_L} + E_5 \cdot \eta_5 \cdot \omega_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z_L} - E_6 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} + E_7 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} = 0 \\ E_6 \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} + E_7 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} - E_8 \cdot e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} - E_9 \cdot e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} = \left[\frac{\beta_4}{\alpha_4} - \frac{\beta_3}{\alpha_3} \right] \cdot T_a \\ E_6 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} - E_7 \cdot \sqrt{\alpha_3} \cdot e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0} - E_8 \cdot \sqrt{\alpha_4} \cdot e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} + E_9 \cdot \sqrt{\alpha_4} \cdot e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} = 0 \\ E_8 + E_9 - E_{10} \cdot I_0[\sqrt{\alpha_5} \cdot R_m] = \left[\frac{\beta_5}{\alpha_5} - \frac{\beta_4}{\alpha_4} \right] \cdot T_a \\ E_8 \cdot \sqrt{\alpha_4} - E_9 \cdot \sqrt{\alpha_4} + E_{10} \cdot \sqrt{\alpha_5} \cdot I_1[\sqrt{\alpha_5} \cdot R_m] = 0 \end{array} \right. \quad \dots \text{(IV-31)}$$

Avec I_1 : La fonction de Bessel modifiée du 1^{er} type d'ordre 1 qui représente la dérivée première de I_0 [5].

2.2.2. Détermination du débit d'évaporation \dot{m}_v

Le débit de vapeurs est obtenu par l'inventaire des flux de chaleur reçus par le bain liquide d'Azote à 77,4 K issus de l'enveloppe externe du cryostat. Ces flux seront déterminés par des coefficients moyens d'échange radiatifs exprimés en convection équivalente puisque

l'espace annulaire entre les deux enveloppes est sujet à vide poussé et un flux moyen de conduction venant du couvercle transitant à travers le col du cryostat. (Figure IV-1)

Le bilan thermique des flux de chaleur reçus par le bain liquide s'écrit :

$$\phi_g = \dot{m}_v \cdot h_{cf} \Rightarrow \dot{m}_v = \frac{\phi_g}{h_{cf}} \quad (IV-32)$$

Avec ;

ϕ_g : Flux global reçu par le bain liquide.

h_{cf} : Chaleur latente d'évaporation de l'Azote à pression atmosphérique.

Expression du flux global de chaleur arrivant au bain ϕ_g :

La figure ci-dessous représente l'inventaire des flux reçus par le bain cryogénique dont leur somme est symbolisée par ϕ_g :

$$\phi_g = \phi_{1,cd|z=z_L} + \phi_{ri,C} + \phi_{1,ri,L} + \phi_{2,ri,L} + \phi_{3,ri} + \phi_{4,ri} + \phi_{5,ri} \quad (IV-32)$$

Les expressions de ces flux sont déjà établies dans le chapitre II sauf qu'ici les coefficients d'échange ponctuels sont remplacés par des coefficients moyens établis en fonction des températures moyennes des différentes ailettes modélisées. En effet, les relations qui vont suivre explicitent ces flux de chaleur inventoriés à coefficients moyennés :

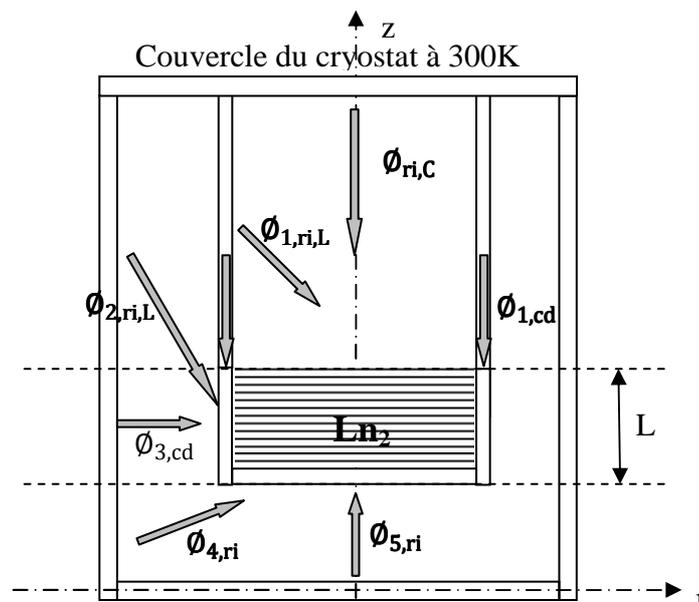


Fig. IV-2 : Bilan thermique du bain cryogénique

- $\Phi_{1,cd|z=z_L}$: Flux de chaleur moyen de conduction entrant vers le liquide à travers le col du cryostat à l'abscisse ($z = z_L$).

$$\Phi_{1,cd|z=z_L} = \lambda_m \cdot \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot \frac{dT_1(z)}{dz} \Big|_{z=z_L} \quad (\text{IV-33-a})$$

Où ;

$$\left[\frac{dT_1(z)}{dz} \Big|_{z=z_L} \right] = [E_1 \cdot \xi_1 \cdot \omega_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot z_L} + E_2 \cdot \xi_2 \cdot \omega_2 \cdot e^{\omega_2 \cdot z_L} + E_3 \cdot \xi_3 \cdot \omega_3 \cdot e^{\omega_3 \cdot z_L} + E_4 \cdot \xi_4 \cdot \omega_4 \cdot e^{\omega_4 \cdot z_L} + E_5 \cdot \xi_5 \cdot \omega_5 \cdot e^{\omega_5 \cdot z_L}]$$

- $\Phi_{ri,C}$: Flux de chaleur moyen radiatif net exprimé en convection équivalente échangé entre le couvercle du cryostat et le bain liquide.

$$\Phi_{ri,C} = hm_{ri,C} \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot (T_C - T_{Ln_2}) \quad (\text{IV-33-b})$$

$$hm_{ri,C} = \sigma \cdot F_{C-L} \cdot [T_a^2 + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_a + T_{Ln_2}]$$

Où F_{C-L} est le facteur de forme gris entre la paroi interne du couvercle prise comme une surface grise et la surface libre du liquide se comportant comme un corps noir. On obtient :

$$F_{C-L} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon_c}{\varepsilon_c} + \frac{1}{f_{c-1}}}$$

f_{c-1} : Facteur de forme géométrique relatif aux deux surfaces.

ε_c : Emissivité de la surface interne du couvercle.

σ : Constante de Stefan-Boltzmann qui vaut $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

- $\Phi_{1,ri,L}$: Flux de chaleur moyen radiatif net exprimé en convection équivalente échangé entre la surface interne de l'ailette interne A_1 (col du cryostat) et le bain liquide.

$$\Phi_{1,ri,L} = hm_{1,ri,L} \cdot \pi \cdot r_i \cdot (z_1 - z_L) (T_{1m} - T_{Ln_2}) \quad (\text{IV-33-c})$$

$$hm_{1,ri,L} = \sigma \cdot F_{1-L} \cdot [T_{1m}^2 + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_{1m} + T_{Ln_2}]$$

Où F_{1-L} est le facteur de forme gris entre la paroi interne de l'ailette interne A_1 prise comme une surface grise d'émissivité ε et la surface libre du liquide se comportant comme un corps noir. On obtient :

$$F_{1-L} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{f_{1-1}}}$$

f_{c-1} : Facteur de forme géométrique relatif aux deux surfaces.

$z_1 - z_L$: Longueur de l'ailette interne qui varie en fonction de la hauteur du bain.

- $\Phi_{2,ri,L}$: Flux de chaleur moyen radiatif net exprimé en convection équivalente échangé entre la surface interne de l'ailette extérieure du haut (A_2) et la surface externe verticale du bain liquide supposée à la température moyenne T_{Ln_2} .

$$\Phi_{2,ri,L} = hm_{1,ri,L} \cdot \pi \cdot R_i \cdot (z_1 - z_L) \cdot (T_{2m} - T_{Ln_2}) \quad (IV-33-d)$$

$$hm_{2,ri,L} = \sigma \cdot F_{2-L} \cdot [T_{2m}^2 + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_{2m} + T_{Ln_2}]$$

Où F_{2-L} est le facteur de forme gris entre les surfaces grises de même émissivité ε . On obtient :

$$F_{2-L} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \left[1 + \frac{R_i \cdot (z_1 - z_L)}{r_{e,L}} \right] + \frac{1}{f_{2-1}}}$$

Avec :

ε : Emissivité thermique des enveloppes interne et externe du cryostat.

L : Hauteur du bain cryogénique.

T_{2m} : Température moyenne de l'ailette extérieure du haut A_2 .

f_{2-1} : Facteur de forme géométrique relatif aux deux surfaces.

- $\Phi_{3,ri}$: Flux de chaleur moyen radiatif net exprimé en convection équivalente échangé entre la surface interne de l'ailette extérieure intermédiaire (A_3) et la surface externe verticale du bain liquide.

$$\Phi_{3,ri} = hm_{3,ri} \cdot \pi \cdot R_i \cdot L \cdot (T_{3m} - T_{Ln_2}) \quad (IV-33-e)$$

$$hm_{3,ri} = \sigma \cdot F_{3-L} \cdot [T_{3m}^2 + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_{3m} + T_{Ln_2}]$$

Où F_{3-L} est le facteur de forme gris entre les surfaces grises de même émissivité ε . On obtient :

$$F_{3-L} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \left[1 + \frac{R_i}{r_e} \right] + \frac{1}{f_{2-1}}}$$

Et ;

L : Longueur de l'ailette A_3 équivalente à la hauteur du bain cryogénique.

T_{3m} : Température moyenne de l'ailette A_3 .

f_{3-1} : Facteur de forme géométrique relatif aux deux surfaces.

- $\Phi_{4,ri}$: Flux de chaleur moyen radiatif net exprimé en convection équivalente échangé entre la surface interne de l'ailette extérieure basse (A_4) et la surface externe verticale du bain liquide.

$$\Phi_{4,ri} = hm_{4,ri} \cdot \pi \cdot R_i \cdot z_0 \cdot (T_{4m} - T_{Ln_2}) \quad (IV-33-f)$$

$$hm_{4,ri} = \sigma \cdot F_{4-L} \cdot [T_{4m}^2 + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_{4m} + T_{Ln_2}]$$

Avec : F_{4-L} le facteur de forme gris entre les surfaces grises de même émissivité ε . On obtient :

$$F_{4-L} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \left[1 + \frac{2 \cdot R_i \cdot z_0}{r_e \cdot (r_e + 2 \cdot L)} \right] + \frac{1}{f_{4-1}}}$$

Et ;

z_0 : Longueur de l'ailette A_4 .

T_{4m} : Température moyenne de l'ailette A_4 .

f_{4-1} : Facteur de forme géométrique relatif aux deux surfaces.

- $\Phi_{5,ri}$: Flux de chaleur moyen radiatif net exprimé en convection équivalente échangé entre la surface interne du socle du cryostat (ailette A_5) et la surface externe verticale du bain liquide.

$$\Phi_{5,ri} = hm_{5,ri} \cdot \pi \cdot R_i^2 \cdot (T_{5m} - T_{Ln_2}) \quad (IV-33-g)$$

$$hm_{5,ri} = \sigma \cdot F_{5-L} \cdot [T_{5m}^2 + T_{Ln_2}^2] \cdot [T_{5m} + T_{Ln_2}]$$

Avec : F_{5-L} le facteur de forme gris entre les surfaces grises de même émissivité ε . On obtient :

$$F_{5-L} = \frac{1}{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \left[1 + \frac{R_i^2}{r_e \cdot (r_e + 2 \cdot L)} \right] + \frac{1}{f_{5-1}}}$$

Et ;

T_{5m} : Température moyenne de l'ailette A_5 .

f_{5-1} : Facteur de forme géométrique relatif aux deux surfaces.

Remarque : Les expressions des facteurs géométriques mis en jeu seront présentées en annexe B.

Les expressions des températures moyennes des ailettes (A_1 , A_2 , A_3 , A_4 et A_5) sont données ci-dessous :

- $T_{1m} = \frac{1}{(z_1 - z_L)} \int_{z_L}^{z_1} T_1(z).dz$

$$T_{1m} = \frac{1}{(z_1 - z_L)} \left[\frac{E_1 \cdot \xi_1}{\omega_1} \cdot (e^{\omega_1 \cdot z_1} - e^{\omega_1 \cdot z_L}) + \frac{E_2 \cdot \xi_2}{\omega_2} \cdot (e^{\omega_2 \cdot z_1} - e^{\omega_2 \cdot z_L}) + \frac{E_3 \cdot \xi_3}{\omega_3} \cdot (e^{\omega_3 \cdot z_1} - e^{\omega_3 \cdot z_L}) + \frac{E_4 \cdot \xi_4}{\omega_4} \cdot (e^{\omega_4 \cdot z_1} - e^{\omega_4 \cdot z_L}) + \frac{E_5 \cdot \xi_5}{\omega_5} \cdot (e^{\omega_5 \cdot z_1} - e^{\omega_5 \cdot z_L}) \right] + T_{1p} \quad (IV-34-a)$$

- $T_{2m} = \frac{1}{(z_1 - z_L)} \int_{z_L}^{z_1} T_2(z).dz$

$$T_{2m} = \frac{1}{(z_1 - z_L)} \left[\frac{E_1 \cdot \eta_1}{\omega_1} \cdot (e^{\omega_1 \cdot z_1} - e^{\omega_1 \cdot z_L}) + \frac{E_2 \cdot \eta_2}{\omega_2} \cdot (e^{\omega_2 \cdot z_1} - e^{\omega_2 \cdot z_L}) + \frac{E_3 \cdot \eta_3}{\omega_3} \cdot (e^{\omega_3 \cdot z_1} - e^{\omega_3 \cdot z_L}) + \frac{E_4 \cdot \eta_4}{\omega_4} \cdot (e^{\omega_4 \cdot z_1} - e^{\omega_4 \cdot z_L}) + \frac{E_5 \cdot \eta_5}{\omega_5} \cdot (e^{\omega_5 \cdot z_1} - e^{\omega_5 \cdot z_L}) \right] + T_{2p} \quad (IV-34-b)$$

- $T_{3m} = \frac{1}{(z_L - z_0)} \int_{z_0}^{z_1} T_3(z).dz$

$$T_{3m} = \frac{1}{(z_L - z_0) \cdot \sqrt{\alpha_3}} \cdot \left[E_6 \cdot (e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} - e^{\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0}) - E_7 \cdot (e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_L} - e^{-\sqrt{\alpha_3} \cdot z_0}) \right] + \frac{\beta_3}{\alpha_3} \quad (IV-34-c)$$

- $T_{4m} = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} T_4(z).dz$

$$T_{4m} = \frac{1}{z_0 \cdot \sqrt{\alpha_4}} \cdot \left[E_8 \cdot (e^{\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} - 1) - E_9 \cdot (e^{-\sqrt{\alpha_4} \cdot z_0} - 1) \right] + \frac{\beta_4}{\alpha_4} \quad (IV-34-d)$$

- $T_{5m} = \frac{T_5(r=0) + T_5(r=R_m)}{2} \quad (IV-34-e)$

2.2.3. Résumé de la méthode de résolution

La résolution du modèle mathématique utilisé dans cette partie, se fait par la méthode itérative ; elle démarre avec un débit supposé, calcule les paramètres du modèle et recalcule le débit, et ainsi de suite. Un code de calcul est élaboré à cet effet sur le logiciel MATLAB ; il tient compte de tous les paramètres géométriques et thermiques du modèle de résolution mathématique adopté. Ainsi, pour lancer le calcul itératif, on introduit en premier lieu une valeur approximative du débit de vapeurs inspirée de la première approche. Ensuite, le programme permet de déterminer les valeurs moyennées des différents coefficients d'échange et les constantes d'intégration dont découlent les champs de températures définies par les relations respectives exposées dans ce chapitre. Finalement, le code calcule de nouveau le débit des vapeurs par les valeurs des flux corrigées à chaque étape jusqu'à convergence. L'application de cette méthode et les résultats obtenus feront l'objet du dernier chapitre.

3. Réservoir de stockage de gaz naturel liquéfié

La méthodologie de résolution adoptée est analogue à celle préconisée dans la deuxième approche pour le cryostat à Azote liquide. Le modèle mathématique qui traduit le comportement thermique du réservoir de GNL se caractérise par un système de trois équations différentielles couplées; ce système est défini par les relations (III-5), (III-12) et (III-18) exposées dans le chapitre III. Les formules (III-5) et (III-12) relatives à l'évolution des profils de températures dans la phase vapeur et l'ailette verticale interne forment un système de deux équations différentielles couplées thermiquement à résoudre avec la méthode matricielle des équations différentielles linéaires. Par contre, la relation (III-18) qui régit le champ de température du toit interne du réservoir est linéairement indépendante des deux autres et fait l'objet d'une résolution séparée ; sa solution est donnée par analogie avec la forme de l'équation différentielle qui définit le profil de température du socle du cryostat résolue par les équations Bessel explicitée précédemment.

3.1. Résolution analytique

Pour solutionner le problème analytiquement, on considère que les coefficients d'échange équivalents, les propriétés physiques du fluide et des matériaux ont des valeurs moyennées. Les formules (III-5), (III-12) et (III-18) qui définissent respectivement les champs de température de la phase vapeur, de l'ailette interne verticale A_L et du toit intérieur du réservoir (ailette A_T) sont réécrites comme suit :

$$\begin{cases} \dot{T}_g(z) + \alpha_g \cdot T_g(z) - \alpha_g \cdot T_1(z) = 0 & (a) \\ \ddot{T}_1(z) - \alpha_1 \cdot T_1(z) + \beta_1 \cdot T_g(z) + \gamma_1 \cdot T_a = 0 & (b) \\ \ddot{T}_t(r) + \frac{1}{r} \dot{T}_t(r) - \alpha_t \cdot T_t(r) + \beta_t \cdot T_a = 0 & (f) \end{cases} \quad (IV-35)$$

Les constantes de substitution sont définies par :

$$\alpha_g = 2 \cdot \pi \cdot r_i \frac{hm_{i,g}}{c_{m,g,p} \cdot \dot{m}_g} ; \quad \alpha_1 = 2 \cdot \frac{[Um_{e,l} \cdot r_e + (hm_{i,g} + hm_{i,L}) \cdot r_i]}{\lambda_{ml} \cdot (r_e^2 - r_i^2)} ; \quad \beta_1 = 2 \cdot \frac{hm_{i,g} \cdot r_i}{\lambda_{ml} \cdot (r_e^2 - r_i^2)} ;$$

$$\gamma_1 = 2 \cdot \frac{Um_{e,l} \cdot r_e + hm_{i,L} \cdot \frac{T_{GNL}}{T_a} \cdot r_i}{\lambda_{ml} \cdot (r_e^2 - r_i^2)} ; \quad \alpha_t = \frac{[Um_{g,t} + hm_{i,t}]}{\lambda_{ml} \cdot e} ; \quad \beta_t = \frac{[Um_{e,t} + hm_{i,t} \cdot \frac{T_{GNL}}{T_a}]}{\lambda_{ml} \cdot e}$$

Les coefficients d'échange de chaleur, les propriétés physiques des matériaux et du fluide ont des valeurs moyennées explicités par les coefficients ($hm_{i,l}$, $hm_{i,t}$, $Um_{g,l}$, $Um_{g,t}$, $c_{m,p,g}$, λ_{ml}).

a) Résolution des équations différentielles (IV-35-a/b)

Les relations (IV-35-a/b) sont équivalentes à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} D + \alpha_g & -\alpha_g \\ \beta_1 & D^2 - \alpha_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_g(z) \\ T_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma_1 \cdot T_a \end{bmatrix} \quad (IV-36)$$

Où D et D^2 représentent les opérateurs différentiels respectivement du 1^{er} et du 2^{ème} ordre.

La résolution du système (IV-36) consiste à trouver les solutions homogènes et particulières des températures $T_g(z)$ et $T_l(z)$ respectivement de la phase vapeur et de l'ailette verticale interne A_L par la méthode matricielle de résolution des équations différentielles linéaires analogue à celle de Cramer.

- **Polynôme caractéristique :** On posant $D = \Omega$, le déterminant de (IV-36) s'écrit :

$$P = \det \begin{vmatrix} \Omega + \alpha_g & -\alpha_g \\ \beta_l & \Omega^2 - \alpha_l \end{vmatrix} = a_2 \cdot \Omega^3 + b_2 \cdot \Omega^2 + c_2 \cdot \Omega + d_2 \quad (IV-37)$$

Où : $a_2 = 1$; $b_2 = \alpha_g$; $c_2 = -\alpha_l$; $d_2 = \alpha_g \cdot (\beta_l - \alpha_l)$

- **Solutions homogènes:**

La relation (IV-37) admet trois solutions réelles $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, d'où on déduit les solutions homogènes du système matriciel (IV-36) écrites sous la forme :

$$\begin{cases} T_{gh}(z) = M_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z} + M_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z} + M_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z} \\ T_{lh}(z) = N_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z} + N_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z} + N_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z} \end{cases} \quad (IV-38)$$

Les constantes intégrations M_i et N_i ($i = 1$ à 3) sont liées par des conditions de couplage qu'on déterminera plus loin.

- **Solutions particulières :**

Les solutions particulières associées au système (IV-37) sont retrouvées de la même manière que pour le modèle cryostat, par analogie avec la méthode de Cramer, soit:

$$T_{gp} = \frac{\det \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_g \\ \beta_l & D^2 - \alpha_l \end{vmatrix}}{d_2} = \frac{\gamma_l}{(\alpha_l - \beta_l)} \cdot T_a \quad (IV-39-a)$$

$$T_{lp} = \frac{\det \begin{vmatrix} D + \alpha_g & 0 \\ -\gamma_l \cdot T_a & -\gamma_l \cdot T_a \end{vmatrix}}{d_2} = \frac{\gamma_l}{(\alpha_l - \beta_l)} \cdot T_a \quad (IV-39-b)$$

- **Détermination des relations entre les constantes d'intégrations M_i et N_i ($i = 1$ à 3)**

Pour ce faire, on injecte dans l'une des équations différentielles (IV-35-a/b) les solutions homogènes et particulières respectives des températures $T_l(z)$ et $T_g(z)$ explicitées par les relations (IV-38-39). On obtient ainsi les conditions suivantes :

$$N_i = \frac{\alpha_g + \Omega_i}{\alpha_g} \cdot M_i = \psi_i \cdot M_i \quad (IV-40)$$

Avec: ($i = 1, 2, 3$); $\psi_i = \frac{\alpha_g + \Omega_i}{\alpha_g} \cdot M_i$

Finalement, les solutions générales des équations différentielles qui déterminent les profils de températures des deux ailettes de notre modèle sont obtenues par superposition des solutions homogènes et particulières ; elles sont définies par les relations (IV-38) et (IV-39) et les conditions de compatibilités (IV-40). On écrit :

$$\begin{cases} T_g(z) = M_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z} + M_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z} + M_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z} + T_{gp} \\ T_l(z) = M_1 \cdot \psi_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z} + M_2 \cdot \psi_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z} + M_3 \cdot \psi_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z} + T_{lp} \end{cases} \quad (IV-38)$$

b) Solution de l'équation différentielle (IV-35-c)

La solution de cette équation différentielle qui régit la répartition de température du toit intérieur du réservoir (aillette A_T) est donnée par les équations de Bessel. Elle est équivalente à celle explicitée dans la première approche pour le cryostat à Azote liquide par la relation (IV-18). On écrit :

$$T_t(r) = M_4 \cdot I_0[\sqrt{\alpha_t} \cdot r] + M_5 \cdot K_0[\sqrt{\alpha_t} \cdot r] + \frac{\beta_t}{\alpha_t} \cdot T_a \quad (IV-39)$$

c) Expression des conditions aux limites :

Les solutions générales des champs de températures relatives à notre modèle de réservoir de GNL sont exprimées via cinq constantes d'intégration M_i ($i = 1$ à 5). Leur détermination nécessite d'explicitier les cinq conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} T_g(z=z_L) = T_{GNL} = 111,5 \text{ K} & (a) \\ T_l(z=z_L) = T_{GNL} = 111,5 \text{ K} & (b) \\ T_l(z=z_1) = T_t(r=r_m) & (c) \\ \left[\frac{dT_l}{dz} \right]_{z=z_1} = \left[\frac{dT_t}{dr} \right]_{r=r_m} & (d) \\ \left[\frac{dT_t}{dr} \right]_{r=0} = 0 & (e) \end{cases} \quad (IV-40)$$

Où r_m est le rayon moyen du disque concentrique formant le toit interne du réservoir.

La condition (IV-40-e) est applicable indépendamment des autres car elle nous permet de déduire directement de la relation (IV-39) que la constante M_5 est forcément nulle. De ce fait, la relation (IV-39) devient :

$$T_t(r) = M_4 \cdot I_0[\sqrt{\alpha_t} \cdot r] + \frac{\beta_t}{\alpha_t} \cdot T_a \quad (IV-41)$$

Les quatre constantes d'intégrations restantes sont les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z_L} + \mathbf{M}_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z_L} + \mathbf{M}_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z_L} = T_{\text{GNL}} - T_{\text{gp}} \\ \mathbf{M}_1 \cdot \psi_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z_L} + \mathbf{M}_2 \cdot \psi_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z_L} + \mathbf{M}_3 \cdot \psi_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z_L} = T_{\text{GNL}} - T_{\text{lp}} \\ \mathbf{M}_1 \cdot \psi_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z_1} + \mathbf{M}_2 \cdot \psi_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z_1} + \mathbf{M}_3 \cdot \psi_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z_1} - \mathbf{M}_4 \cdot I_0[\sqrt{\alpha_t} \cdot r_m] = \frac{\beta_t}{\alpha_t} \cdot T_a - T_{\text{lp}} \\ \mathbf{M}_1 \cdot \psi_1 \cdot \Omega_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z_1} + \mathbf{M}_2 \cdot \psi_2 \cdot \Omega_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z_1} + \mathbf{M}_3 \cdot \psi_3 \cdot \Omega_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z_1} - \mathbf{M}_4 \cdot \sqrt{\alpha_t} \cdot I_1[\sqrt{\alpha_t} \cdot r_m] = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-42})$$

Avec I_1 la fonction de Bessel modifiée du 1^{ier} type d'ordre 1 qui représente la dérivée première de I_0 [5].

3.2. Détermination du débit de Boil-off \dot{m}_g

L'inventaire des flux de chaleur qui arrivent vers le bain liquide de GNL se traduit par un bilan thermique pour l'évaluation du débit de Boil-off en fonction du taux de remplissage du réservoir et des coefficients d'échange de chaleur [6] (Figure IV-2).

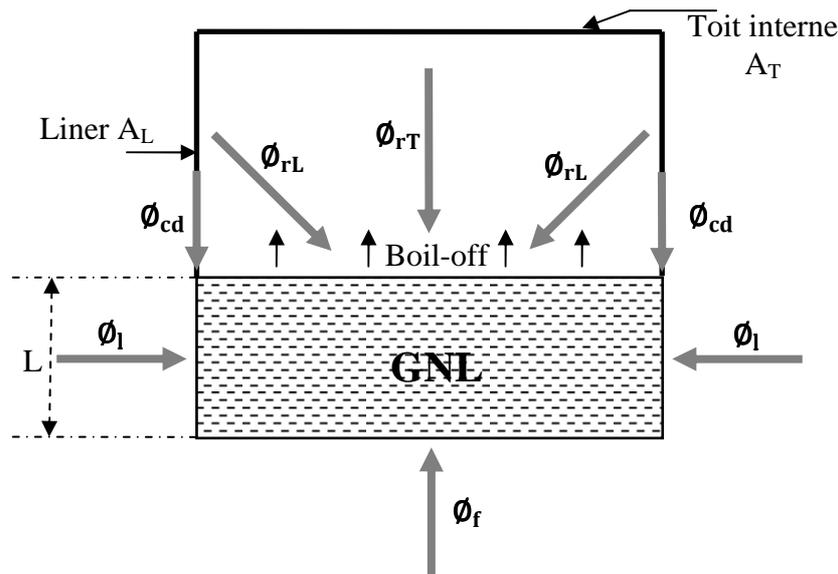


Fig. IV-3 : Bilan thermique du GNL

Ce bilan thermique s'écrit :

$$\phi_{\text{cd}} + \phi_l + \phi_f + \phi_{\text{rT}} + \phi_{\text{rL}} = \dot{m}_g \cdot h_{\text{fg}} \quad (\text{IV-43})$$

Où h_{fg} est la chaleur latente d'évaporation du GNL à pression atmosphérique.

• Expression des flux de chaleur mis en jeu :

- Φ_{cd} : Flux de conduction thermique véhiculé par l'ailette verticale interne (liner) entrant vers le liquide à l'abscisse ($z = z_L$) :

$$\Phi_{cd} = \lambda_{ml} \cdot \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot \left. \frac{dT_l(z)}{dz} \right|_{z=z_L} \quad (IV-44)$$

Avec : $\left[\frac{dT_l(z)}{dz} \right]_{z=z_L} = M_1 \cdot \psi_1 \cdot e^{\Omega_1 \cdot z_L} + M_2 \cdot \psi_2 \cdot e^{\Omega_2 \cdot z_L} + M_3 \cdot \psi_3 \cdot e^{\Omega_3 \cdot z_L}$

λ_{ml} est la conductivité thermique moyenne de l'enveloppe interne.

- Φ_1 : Flux de chaleur équivalent échangé entre l'environnement et la surface verticale interne du bain liquide.

$$\Phi_1 = Um_{g,l} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot L \cdot (T_a - T_{GNL}) \quad (IV-45)$$

Où $Um_{g,l}$ est la conductance thermique latérale qui tient compte des coefficients moyens d'échange externes en convection équivalente et de la conductance thermique à travers l'isolation. Elle s'exprime par :

$$Um_{g,l} = \frac{1}{\frac{r_e}{h_{ex,l} \cdot Re} + \frac{r_e \cdot \ln(R_e/R_i)}{\lambda_{ml}} + \frac{r_e \cdot \ln(R_i/r_e)}{\lambda_p}} \quad (IV-46)$$

Avec:

λ_p : La conductivité thermique de l'isolation (perlite).

$h_{ex,l}$: Le coefficient moyen de convection et de rayonnement exprimé en convection équivalente de l'environnement avec la surface latérale externe du réservoir.

- Φ_f : Flux de chaleur global transitant de la surface du sol vers le fond en forme de disque concentrique de l'enveloppe interne du bac de stockage de GNL.

$$\Phi_f = Um_{g,f} \cdot \pi \cdot r_e^2 \cdot (T_S - T_{GNL}) \quad (IV-47)$$

Où $Um_{g,f}$ est la conductance moyenne globale à travers le fond externe du réservoir et de la couche d'isolation.

$$Um_{g,f} = \frac{1}{\frac{e_f}{\lambda_{ml}} + \frac{e_p}{\lambda_p}} \quad (IV-48)$$

Avec:

T_S : Température du sol en contact avec le réservoir.

e_f : Epaisseur du fond extérieur du réservoir.

e_p : Epaisseur de l'isolation du bas du réservoir.

- Φ_{rT} : Flux de chaleur moyen échangé par rayonnement net entre le toit intérieur du réservoir de GNL et la surface libre du bain liquide. Il prend la forme suivante :

$$\Phi_{rT} = \sigma \cdot F_{t-L} \cdot \pi \cdot r_i^2 \cdot [T_{mt}^4 - T_{GNL}^4] \quad (IV-49)$$

Avec :

F_{t-L} : Facteur de forme gris entre la surface interne du toit et la surface libre du GNL se comportant comme un corps noir ($\epsilon_{gnl}=1$).

$$F_{t-L} = \frac{1}{\frac{1-\epsilon_t}{\epsilon_t} + \frac{1}{f_{t-L}}} \quad (IV-50)$$

ϵ_t : Emissivité thermique moyenne du toit interne (Ailette A_T).

f_{t-L} : Facteur de forme géométrique des deux surfaces d'échange.

T_{mt} : Température moyenne du toit.

$$T_{mt} = \int_0^{r_m} T_t(r)$$

$$r_m = \frac{r_e + r_i}{2} : \text{Rayon moyen du toit en forme de disque concentrique.}$$

- Φ_{rL} : Flux de chaleur moyen échangé par rayonnement net entre l'ailette verticale interne du réservoir et la surface libre du bain liquide, soit :

$$\Phi_{rL} = \sigma \cdot F_{l-L} \cdot \pi \cdot r_i \cdot (z_1 - z_L) [T_{mt}^4 - T_{GNL}^4] \quad (IV-51)$$

Où :

F_{l-L} : Facteur de forme gris entre la surface interne de l'ailette verticale et la surface libre du GNL.

$$F_{l-L} = \frac{1}{\frac{1-\epsilon_l}{\epsilon_l} + \frac{1}{f_{l-L}}} \quad (IV-52)$$

$(z_1 - z_L)$: Longueur l'ailette verticale interne.

ϵ_l : Emissivité thermique moyenne du liner (Ailette A_L).

f_{l-L} : Facteur de forme géométrique des deux surfaces d'échange.

T_{ml} : Température moyenne de l'ailette verticale interne.

$$T_{ml} = \int_{z_L}^{z_1} T_l(z)$$

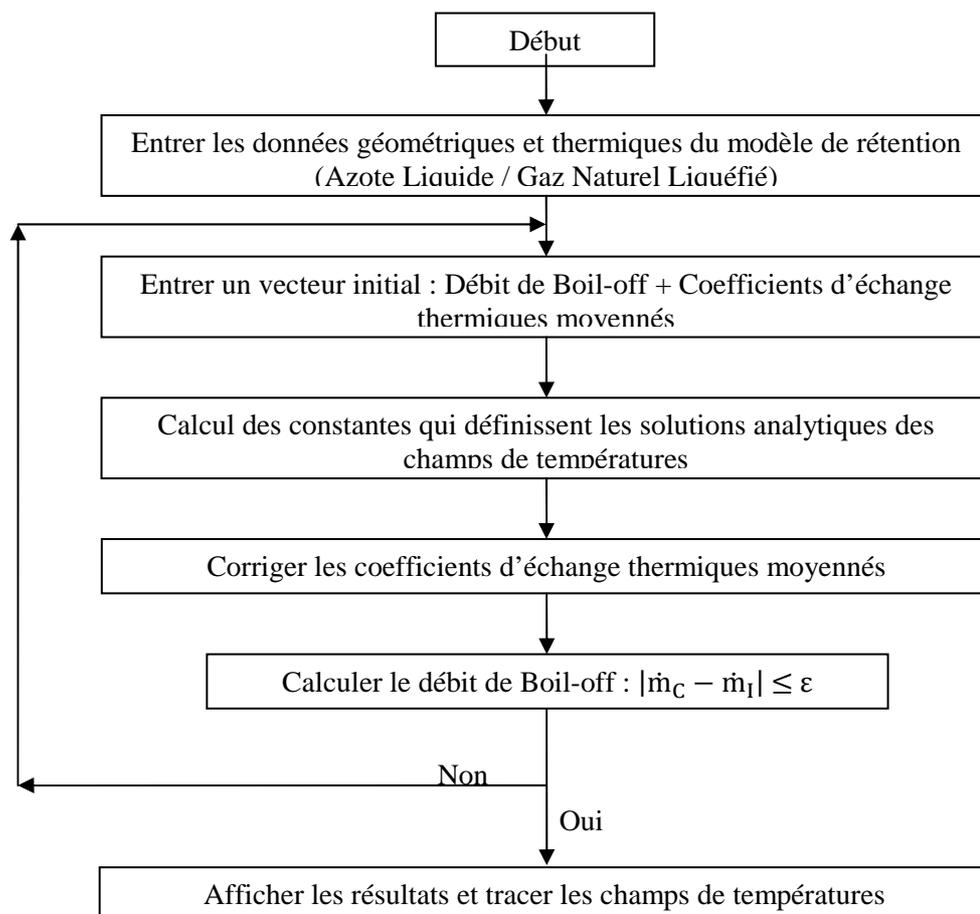
Remarque : Les facteurs de formes géométriques et les corrélations de convection naturelle utilisés dans l'évaluation des différents coefficients de transfert thermique seront donnés en annexes.

3. 3. Méthode de résolution

La méthodologie de résolution adoptée ici comporte les mêmes étapes que celles présentées dans la deuxième approche pour le cryostat à Azote liquide ; la méthode de calcul est itérative pour l'évaluation du Boil-off et s'appuie sur une résolution analytique pour l'obtention des champs de températures. Une application est élaborée sur le logiciel MATLAB ; elle prend en considération l'ensemble des paramètres géométriques et thermiques du modèle du réservoir de stockage aérien exposé dans ce travail. Les résultats obtenus sont présentés et discutés dans le chapitre V.

4. Organigramme de calcul des deux modèles de rétention cryogénique

L'organigramme ci-dessous résume le code de calcul élaboré sur MATLAB relatif aux deux modèles de rétention des deux fluides cryogéniques qui font l'objet de ce travail.



Organigramme de calcul du débit de Boil-off et des champs de températures des deux modèles de rétention cryogéniques

CHAPITRE V:

Résultats et Interprétations

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats obtenus par l'application de la résolution théorique détaillée dans le chapitre précédent relative aux deux modèles physiques adoptés respectivement pour le cryostat à Azote liquide résolue via deux approches et les réservoirs de stockage de GNL. La méthodologie de résolution analytique des systèmes d'équations différentielles a permis le tracé des courbes qui régissent les profils de températures et les débits de vapeurs ainsi que l'influence des paramètres géométriques et thermiques sur les modèles de rétention relatifs aux approches adoptées. La validation de ces modèles repose sur la confrontation des résultats obtenus avec les résultats expérimentaux disponibles.

2. Présentation des résultats relatifs au modèle cryostat à Azote liquide

Nous présenterons les résultats des deux approches dont la différence principale est l'équation qui régit le profil de température de la phase vapeur ; la première approche stipule que le profil est linéaire tandis que dans la deuxième, le champ de température est obtenu sous la forme d'une somme de termes exponentiels.

2.1. Résultats de la première approche

Comme nous l'avons souligné au paragraphe (IV.2.1), le profil de température des vapeurs provient de l'interpolation linéaire des valeurs de températures mesurées dans la vapeur et sur le col du cryostat par KHEMIS [8] dans le cas d'un débit massique $\dot{m}_v = 45,1$ mg/s et pour une hauteur de remplissage de 0,15m.

Les tableaux suivants résument les principales caractéristiques géométriques et thermiques du modèle ; elles sont nécessaires à la détermination des constantes de substitution définies par le système d'équation différentielles (IV-1) et des constantes d'intégration des équations (IV-21) qui permettront l'écriture des solutions des champs de températures présentées dans les formules (IV-19).

Tableau V-1 : Caractéristiques géométriques du cryostat [8]

Symbole	Signification	Valeur numérique	Unité
r_e	Rayons extérieur de l'enveloppe interne du cryostat	0,076	m
r_i	Rayons intérieur de l'enveloppe interne du cryostat	0,075	m
R_e	Rayons extérieur de l'enveloppe externe du cryostat	0,16	m
R_i	Rayons intérieur de l'enveloppe externe du cryostat	0,15	m
e	Epaisseur des deux enveloppes externe et interne du cryostat	0,001	m
L	Hauteur du bain liquide d'Azote	0,15	m
z_1	Hauteur au niveau du couvercle à partir du socle du cryostat	0,60	m

z_L	Hauteur au niveau de l'interface liquide-vapeur à partir du socle du cryostat	0,33	m
z_0	Hauteur au niveau de la base de l'enveloppe interne à partir du socle du cryostat	0,18	m

Tableau V-2 : Caractéristiques thermiques du cryostat

Symbole	Signification	Valeur	Unité
T_C	Température du couvercle du cryostat	300	K
T_a	Température de l'environnement extérieur	300	K
$T_v(z)$	Température des vapeurs d'Azote en fonction de la hauteur	$711,5.z-157,4$	K
T_{Ln2}	Température du bain cryogénique	77,4	K
λ_m	Conductivité thermique moyenne des deux enveloppes du cryostat	15	W/m.K
$hm_{1,cv}$	Coefficient moyen de convection entre l'ailette interne A_1 et les vapeurs d'Azote	3	W/m ² .K
$hm_{1,re}$	Coefficient moyen de convection équivalente entre les ailettes externe haute A_2 et interne A_1 égal à $hm_{2,ri}$	0,10	W/m ² .K
$hm_{1,re,L}$	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'ailette interne et les vapeurs d'Azote	0,01	W/m ² .K
$hm_{2,ri,L}$	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'ailette A_2 et le bain cryogénique	0,011	W/m ² .K
hm_1	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'environnement et l'enveloppe latérale externe composée des trois ailettes ($A_1+A_2+A_3$)	5	W/m ² .K
$hm_{3,ri}$	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'ailette externe intermédiaire A_3 et le bain cryogénique	0,080	W/m ² .K
$hm_{4,ri}$	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'ailette extérieure basse A_4 et le bain cryogénique	0,053	W/m ² .K
$hm_{5,ri}$	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'ailette du socle du cryostat A_5 et le bain cryogénique	0,070	W/m ² .K
$hm_{5,l}$	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'environnement et l'ailette du socle du cryostat A_5	5,8	W/m ² .K

Dans cette première approche on obtient ainsi les profils analytiques de températures des différentes ailettes du modèle de cryostat. Soit :

➤ **Profil de température de l'ailette interne A_1 (Col du cryostat) :**

$$T_1(z) = [0,003.e^{16,002.z} - 11552,622.e^{-16,002.z} + 17,463.e^{12,401.z} - 486500,975.e^{-12,401.z}].10^{-3} + 688,69.z - 142,74$$

(V-1-a)

➤ Profil de température de l'ailette extérieure du haut A₂ :

$$T_2(z) = [-0,006.e^{16,002.z} + 234169,079.e^{-16,002.z} + 0,853.e^{12,401.z} - 23764,181.e^{-12,401.z}].10^{-3} + 13,42.z + 291,38 \quad (V-1-b)$$

➤ Profil de température de l'ailette extérieure intermédiaire A₃ :

$$T_3(z) = [0,262.e^{15,963.z} + 13346,183.e^{-15,963.z}].10^{-3} + 296,52 \quad (V-1-c)$$

➤ Profil de température de l'ailette extérieure du bas A₄ :

$$T_4(z) = [-36,646.e^{15,916.z} + 1907,738.e^{-15,916.z}].10^{-3} + 297,81 \quad (V-1-d)$$

➤ Profil de température du socle du cryostat A₅ :

$$T_5(r) = [668,569.I_0[17,132.r]].10^{-3} + 297,35 \quad (V-1-e)$$

Avec I₀ la fonction de Bessel modifiée du 1^{ier} type d'ordre zéro.

2.1.1. Analyse et interprétations

Les champs de températures regroupés dans l'ensemble des formules (V-1) sont représentés par les figures suivantes :

a) Répartition de la température de l'ailette interne A₁:

La figure (V-1) montre que la température de l'ailette intérieure est à peine incurvée en son milieu par la température des vapeurs issues du bain d'Azote liquide dont le profil a été supposé linéaire.

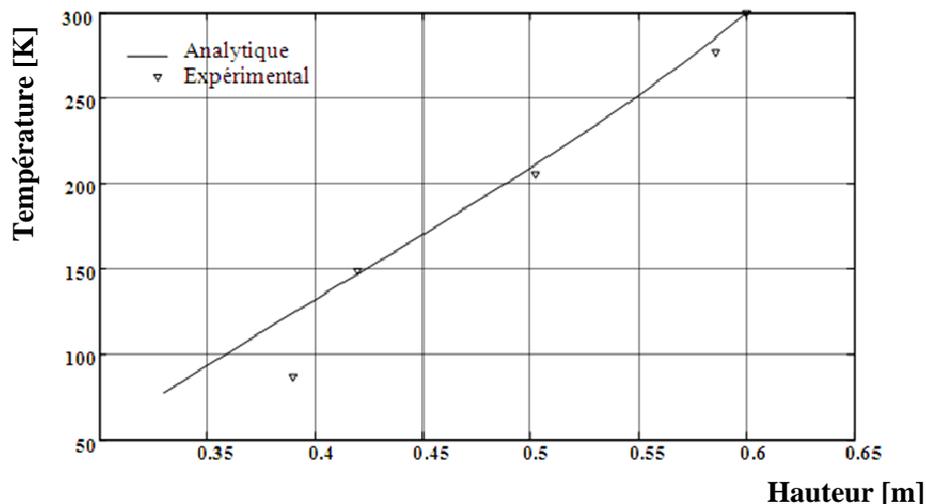


Fig. V-1 : Variation du champ de température de l'ailette interne A₁ en fonction de la hauteur du col

La comparaison de ce profil obtenu avec les valeurs expérimentales représentées sur la même figure présente une concordance satisfaisante sauf pour une seule valeur qui paraît relativement éloignée. Ceci conforte l'idée que la température n'est linéaire près de la surface du bain où le gradient de température devrait en fait être nul pour une vapeur saturée d'un composant pur.

b) Répartition de la température de l'enveloppe latérale extérieure composée des trois ailettes ($A_2 + A_3 + A_4$) assemblées:

La figure (V-2) donne les températures des ailettes 2, 3 et 4 assemblées.

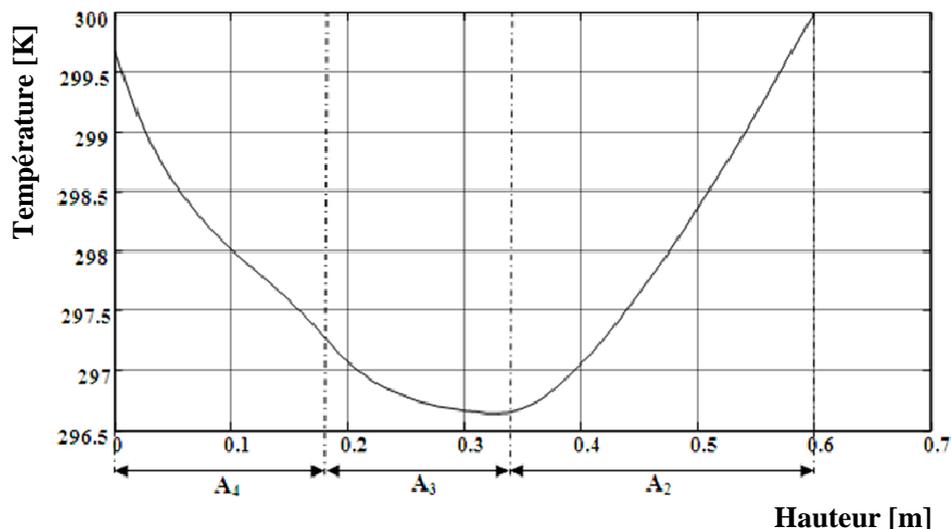


Fig. V-2 : Variation des profils de températures de l'enveloppe latérale externe du cryostat ($A_2 + A_3 + A_4$) en fonction de la hauteur

La répartition de la température dans l'ailette extérieure haute est presque linéaire sauf en sa partie basse où elle rejoint l'ailette extérieure intermédiaire. La valeur minimale atteinte par la température de l'enveloppe latérale externe se situe à la partie haute de l'ailette extérieure intermédiaire ; Elle est due à l'effet d'inertie thermique et de la position géométrique du bain cryogénique qui tire la température de l'enveloppe vers le bas. Cette température minimale se situe aux points où les deux flux de conduction issus des deux extrémités de l'enveloppe extérieure s'annulent. L'ensemble de ces points constituent un anneau dit adiabatique par rapport au flux de conduction thermique venant des deux extrémités de l'enveloppe.

c) Répartition de la température du socle du cryostat (Ailette A_5) :

La figure (V-3) représente l'évolution de la température du disque circulaire (socle du cryostat) en fonction de son rayon. L'écoulement de la chaleur dans ce disque est supposé unidimensionnel puisque l'épaisseur est beaucoup plus faible devant les autres dimensions, et radial en raison de la symétrie axiale du problème dont les isothermes sont de forme circulaires. Les flux de chaleur de conduction viennent radialement à partir de l'anneau de jonction avec la base de l'ailette extérieure du bas et s'annulent au centre du disque concentrique. Ce dernier est théoriquement appelé point adiabatique du disque dont la température est tirée vers la valeur la plus basse par l'inertie thermique du bain cryogénique.

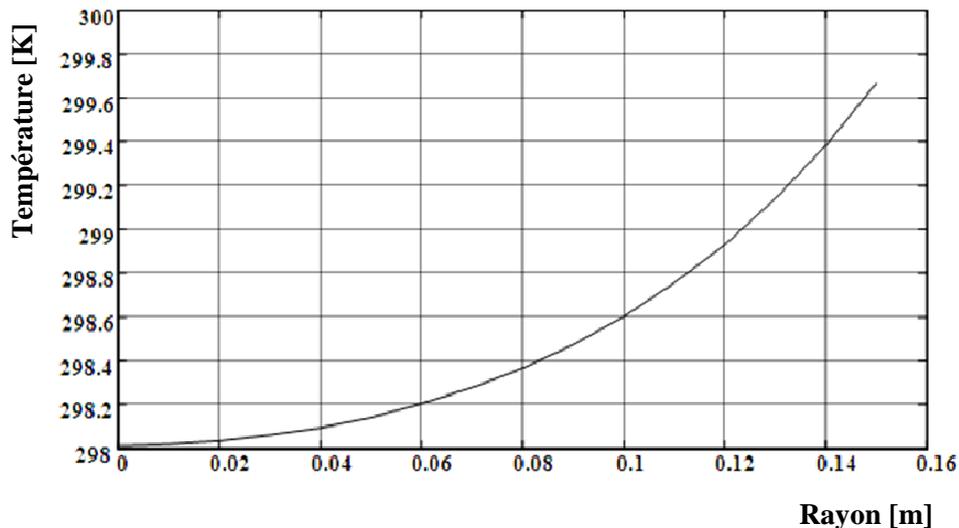


Fig. V-3 : Variation du profil de température du socle du cryostat (A_5) en fonction du rayon

2.2. Résultats de la deuxième approche

Les résultats obtenus dans cette deuxième approche reposent principalement sur l'équation qui régit le champ de température de la phase vapeur qui n'est plus linéaire par hypothèse mais qui est déterminé par les échanges thermiques entre la vapeur et le col du cryostat.

Le code de calcul élaboré sur MATLAB nous permet de déterminer le débit des vapeurs en fonction du niveau de remplissage tout en faisant varier la conductivité thermique moyenne des deux enveloppes interne et externe du cryostat. Nous tracerons ainsi les figures respectives des champs de températures de la phase vapeur et des ailettes constituant le modèle cryostat adopté. Les résultats obtenus sont régis par l'ensemble des formules (IV-29), (IV-32) et (IV-33) exposées dans le chapitre IV. Les caractéristiques géométriques du cryostat sont données dans le tableau (V-1) à l'exception de la hauteur du bain liquide « L » associée ici à différentes valeurs. Les coefficients d'échange de chaleur, les constantes de substitution et d'intégration ainsi que les autres paramètres de la procédure de résolution analytique détaillée dans le chapitre IV ne sont pas exposés dans cette démarche car ils présentent plusieurs valeurs en fonction des deux variantes à savoir le taux de remplissage et la conductivité thermique des enveloppes du cryostat.

Le tableau suivant résume les valeurs des débits de vapeurs d'Azote obtenus en fonction du niveau de remplissage du liquide L et de la conductivité thermique moyenne λ_m des enveloppes du cryostat d'émissivité $\varepsilon=0,3$. La chaleur latente d'évaporation de l'Azote liquide à pression atmosphérique est prise égale à 199,1 kJ/kg et la chaleur spécifique moyenne $c_{mpv}= 1040$ J/kg.K.

Tableau V-3 : Débits des vapeurs en fonction du niveau liquide et de la conductivité thermique du cryostat en mg/s.

Niveau du liquide L [m] \ λ_m [W/m.K]	0,075	0,15	0,225	0,30	0,375
15	38,33	46,65	58,60	84,23	196,63
30	54,83	69,44	90,29	140,58	368,86
45	71,95	91,11	123,49	200,0	543,63
60	89,43	114,55	158,06	261,17	719,30

Ces valeurs relatives aux débits des vapeurs issues du bain cryogénique seront explicitées et interprétées plus loin.

Les figures représentatives des différents champs de températures du modèle sont mises en exergue en faisant varier à chaque fois les deux paramètres définis dans le tableau V-3.

2.2.1. Champs de températures de la phase vapeur

Les figures (V-4-a/b/c/d) ci-dessous illustrent les profils de températures de la phase vapeur pour différentes hauteurs de remplissage tout en faisant varier la conductivité thermique moyenne des deux enveloppes du cryostat.

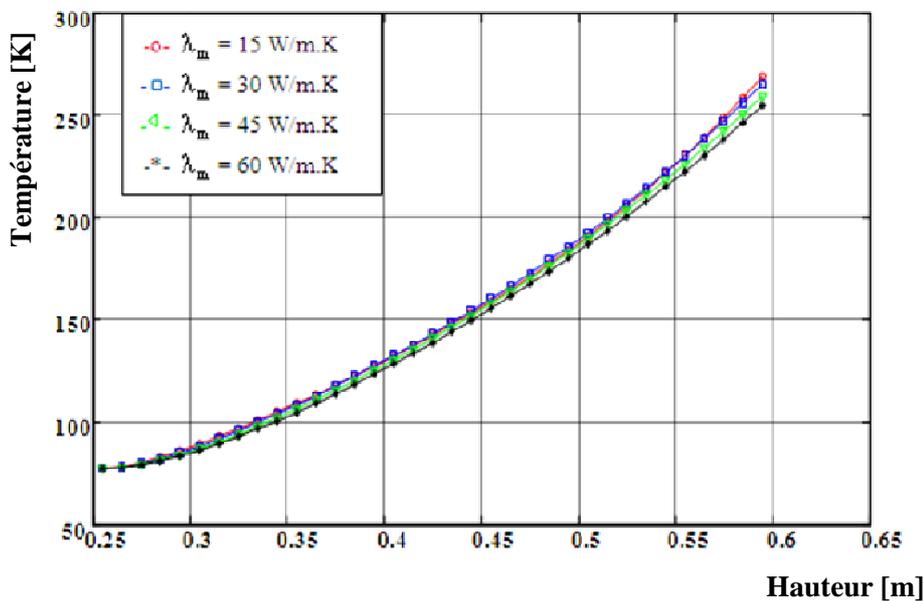


Fig. (V-4-a) : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide **L = 0,075 m**

On remarque qu'en effet les champs de températures ont des allures exponentielles et n'obéissent pas à une loi linéaire comme c'est le cas de l'hypothèse prise dans la première approche. La figure (V-4-b) est tracée pour une hauteur liquide de 0,15 m qui correspond à un débit de vapeurs égal à 46,65 mg/s quand la conductivité thermique est de 15 W/m.K (voir

tableau V-3). Dans cette même figure sont représentées les mesures expérimentales des températures de la phase vapeur de la référence [1] obtenues pour la même hauteur de remplissage et dont le débit mesuré est égal à 45,1 mg/s. L'erreur relative maxi commise sur la température est de 15,2 % et qui correspond à une erreur de 3,4% sur le débit de vapeurs. De ce fait, on remarque une bonne concordance entre les résultats obtenus par le modèle théorique et les valeurs expérimentales relativement aux résultats de la première approche.

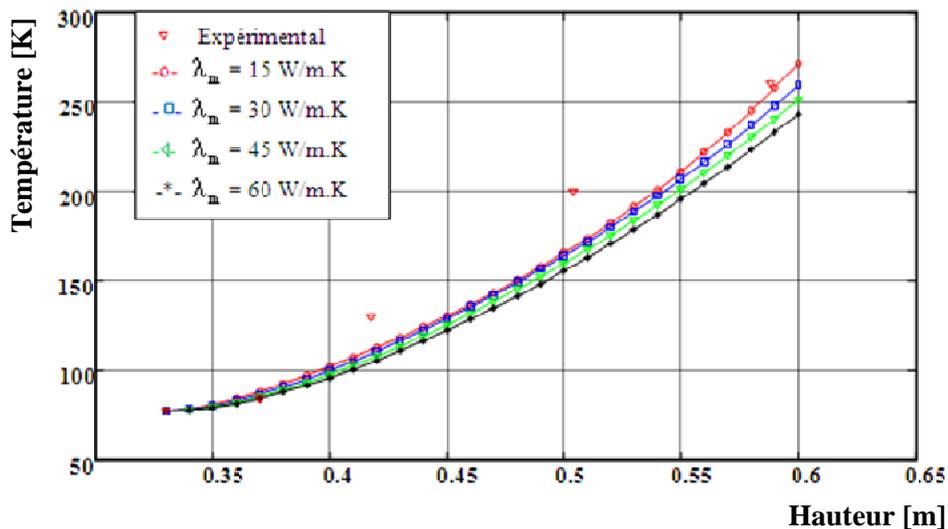


Fig. (V-4-b) : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide $L = 0,15$ m

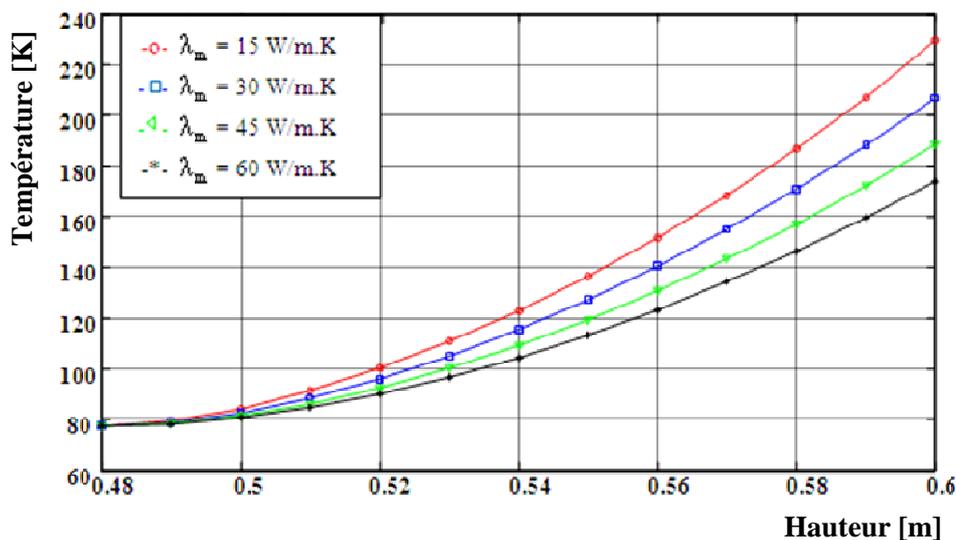


Fig. (V-4-c) : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide $L = 0,30$ m

Par ailleurs, le profil de température des vapeurs est sensiblement affecté par la variation de la conductivité thermique du col du cryostat surtout pour des taux de remplissage relativement élevés (Fig. (V-4-c/d) ; l'écart maximal de température est obtenu au point le plus haut de l'enceinte interne pour le niveau liquide le plus élevé ($L=0,375$ m) qui vaut environ 47K et qui correspond à une différence de débit de 522,67 mg/s donné par le tableau (V-3). De plus, l'effet de la conductivité thermique est inversement proportionnel aux champs de

températures des vapeurs ; une conductivité thermique plus élevée correspond à un profil de température moins accentué et donc un gradient de température plus important vis-à-vis du col du cryostat qui sera donc de plus en plus refroidi par les vapeurs ascendantes du bain cryogénique. En effet, la conductivité thermique s'avère un facteur prépondérant dans le choix du matériau constituant le col du cryostat.

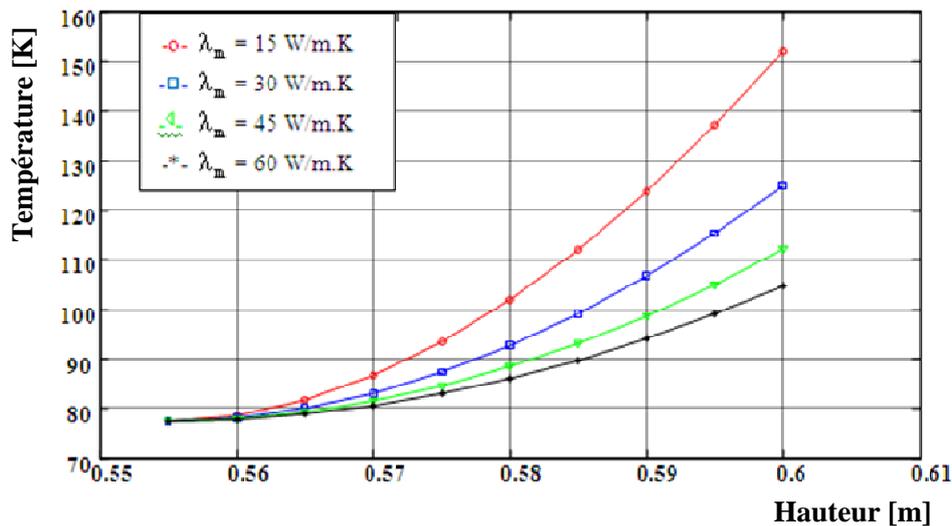


Fig. (V-4-d) : Variation de la température des vapeurs pour une hauteur liquide $L = 0,375$ m

2.2.2. Champs de températures de l'ailette interne A_1 (col du cryostat)

Les distributions de températures du col (Ailette interne A_1) sont représentées par les figures (V-5-a/b/c/d) pour différents niveaux du bain liquide et conductivités thermiques du cryostat.

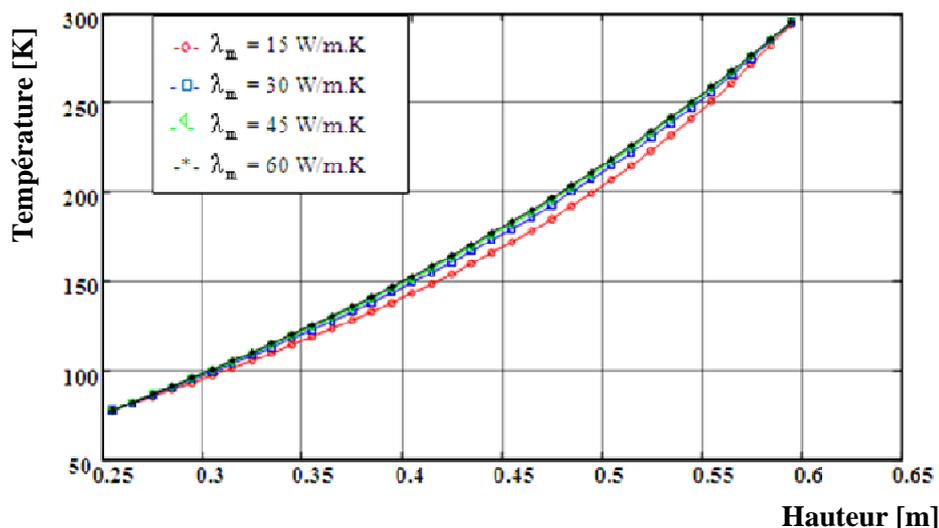


Fig. (V-5-a) : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0,075$ m

La validation de ces résultats est confirmée par la figure (V-5-b) pour une conductivité thermique de 15 W/m.K ; les valeurs de températures mesurées à différents niveaux du col du cryostat sont en bon accord avec le profil obtenu par notre modèle théorique ; l'erreur relative maxi est de 12,1%. Par ailleurs, les champs de températures en question restent relativement insensibles à la variation de la conductivité thermique ; l'écart de température maximal dans ce cas se manifeste à mi hauteur du col pour le niveau le plus petit du bain liquide (L=0,075 m) qui est d'environ 10 K.

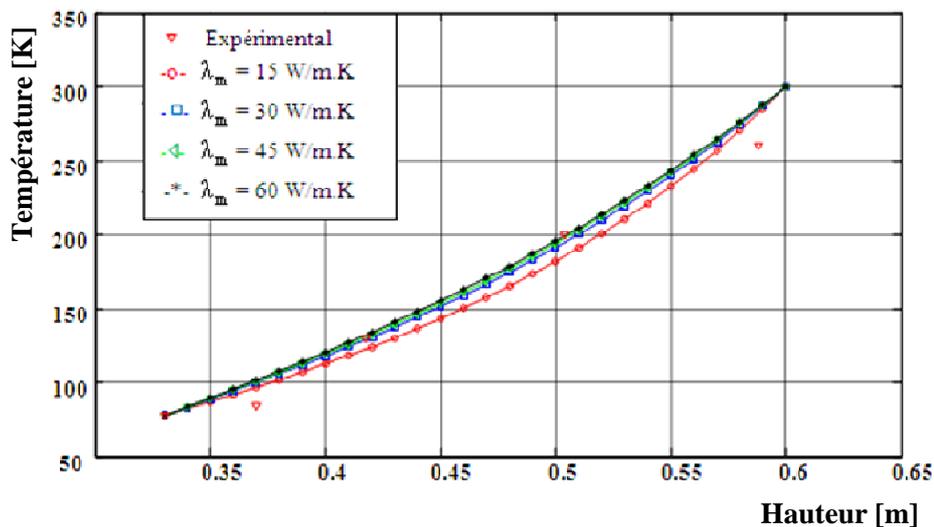


Fig. (V-5-b) : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0,15$ m

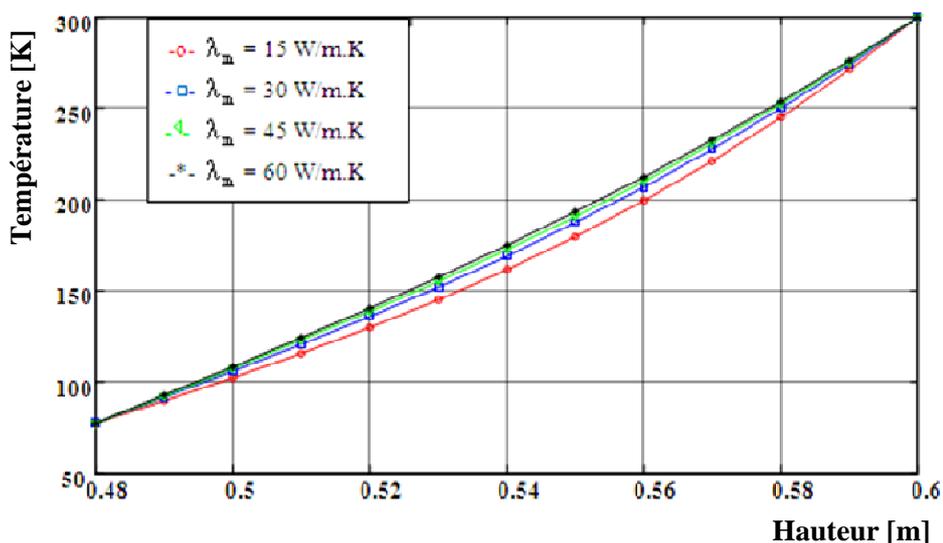


Fig. (V-5-c) : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0,30$ m

Néanmoins, l'allure de ces graphiques semble se linéariser progressivement tout en allant vers des hauteurs liquides et des conductivités thermiques plus élevées ; ceci s'explique par le fait que les champs de températures sont bridés par les deux conditions imposées aux extrémités

du col à savoir, la température du couvercle à 300 K en haut et celle du bain liquide à 77,4 K en bas.

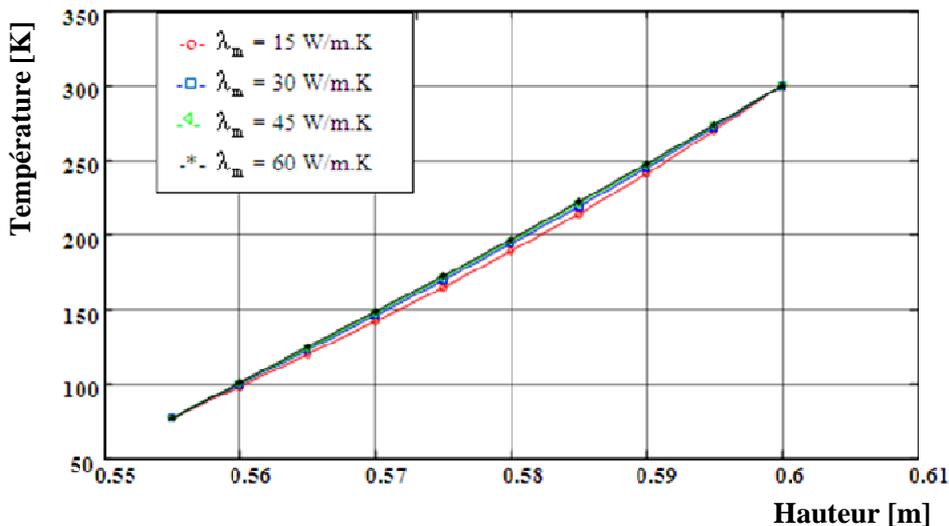


Fig. (V-5-d) : Variation de la température du col du cryostat pour une hauteur liquide $L = 0,375$ m

2.2.3. Champs de températures des ailettes ($A_2+A_3+A_4$) assemblées constituant l'enveloppe latérale extérieure du cryostat

Les champs de températures de l'enveloppe extérieure latérale composée des ailettes ($A_2+A_3+A_4$) assemblées font l'objet des figures (V-6-a/b/c/d).

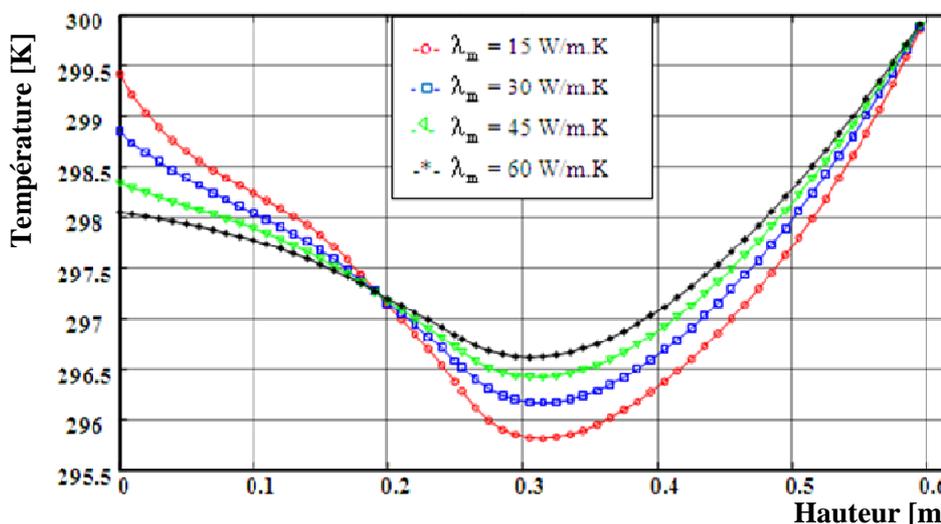


Fig. (V-6-a) : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe ($A_2+ A_3+ A_4$) pour une hauteur liquide $L = 0,075$ m

La répartition de la température dans l'ailette extérieure haute est presque linéaire ; sa pente est de moins en moins accentuée quand la conductivité thermique augmente. La valeur minimale atteinte par la température de l'ailette extérieure intermédiaire est nettement

influencée par la conduction car une conductivité thermique élevée tire la température vers le haut, ce qui augmente les entrées de chaleur vers le réservoir cryogénique. Inversement, une conductivité thermique moins élevée permet à la température du bain cryogénique de tirer la température minimale vers le bas ; dans ce cas, les entrées de chaleur vers le bain cryogénique sont réduites. Ces minima de la température se situent aux points où les deux flux de conduction issus des deux extrémités de l'enveloppe extérieure s'annulent ; l'ensemble des points où le gradient de température est nul forment un anneau caractéristique dit adiabatique.

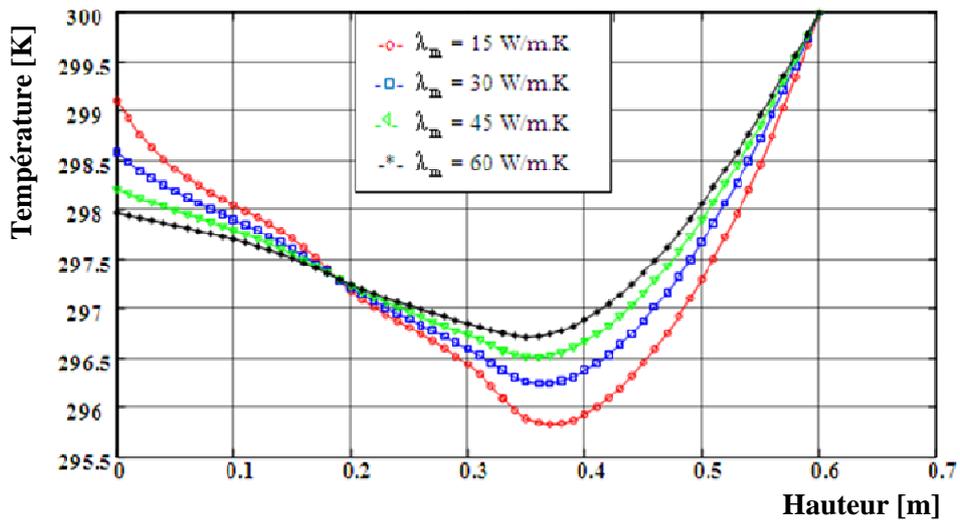


Fig. (V-6-b) : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe ($A_2 + A_3 + A_4$) pour une hauteur liquide $L = 0,15$ m

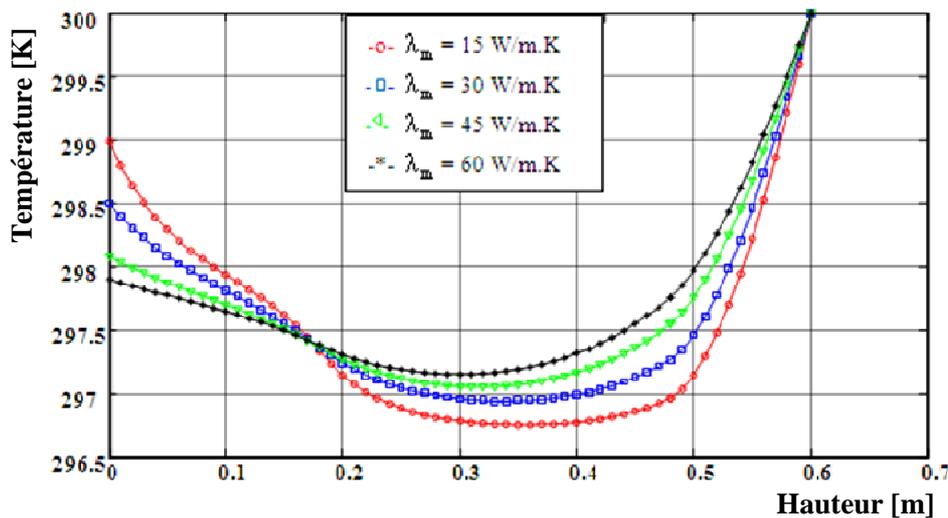


Fig. (V-6-c) : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe ($A_2 + A_3 + A_4$) pour une hauteur liquide $L = 0,30$ m

La température de toute l'ailette extérieure (en trois parties) diminue du point de jonction de celle-ci avec le disque (socle du cryostat) jusqu'à sa valeur minimale puis remonte pour atteindre celle du couvercle. On remarque que pour chaque taux de remplissage du bain liquide, les profils de températures relatifs aux conductivités thermiques choisies passent tous par un point commun où les gradients des pentes s'annulent. Ces points d'inflexion

représentent l'inversion des effets de la conductivité thermique sur la température dans l'ailette latérale extérieure ; cette inversion est le résultat du double flux de conduction de chaleur à partir de la jonction avec le socle du cryostat : une partie remonte l'ailette extérieure jusqu'au niveau du bain liquide en regard et l'autre, entre radialement vers le disque circulaire. Par conséquent, la partie latérale basse du cryostat est plus refroidie quand la conductivité thermique augmente.

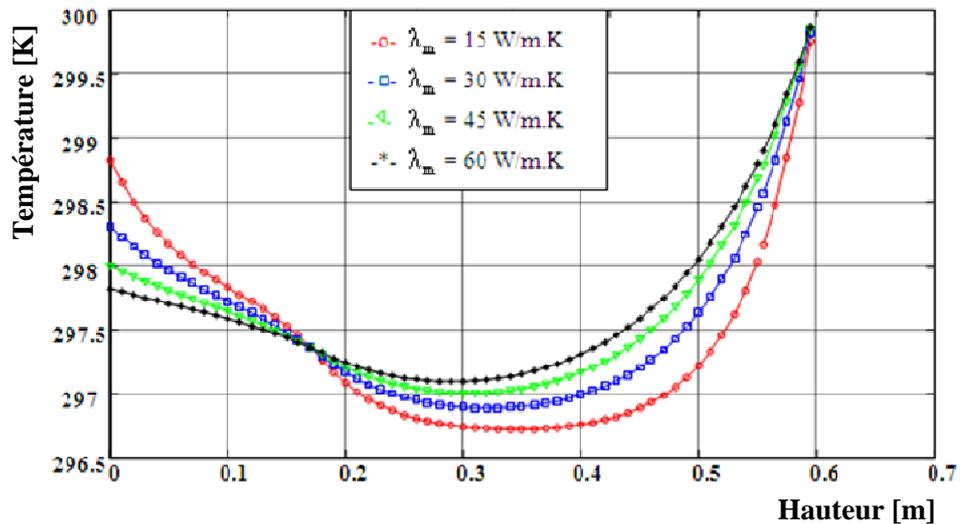


Fig. (V-6-d) : Variation de la température de l'enveloppe latérale externe ($A_2 + A_3 + A_4$) pour une hauteur liquide $L = 0,375$ m

2.2.4. Champs de températures du socle du cryostat (Ailette A_5)

Les figures (V-7-a/b/c/d) représentent l'évolution de la température du disque circulaire en fonction de son rayon pour différents niveaux liquides.

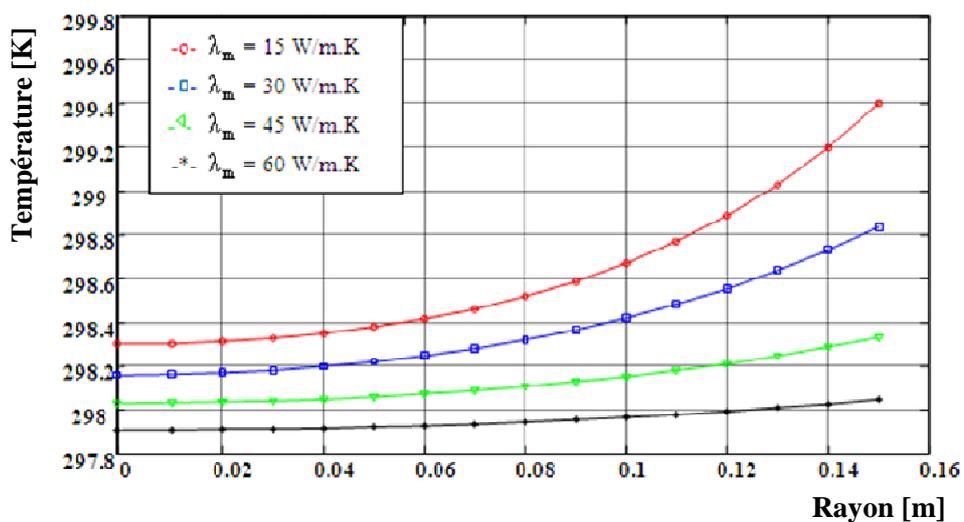


Fig. (V-7-a) : Variation de la température du socle du cryostat (Ailette A_5) pour une hauteur liquide $L = 0,075$ m

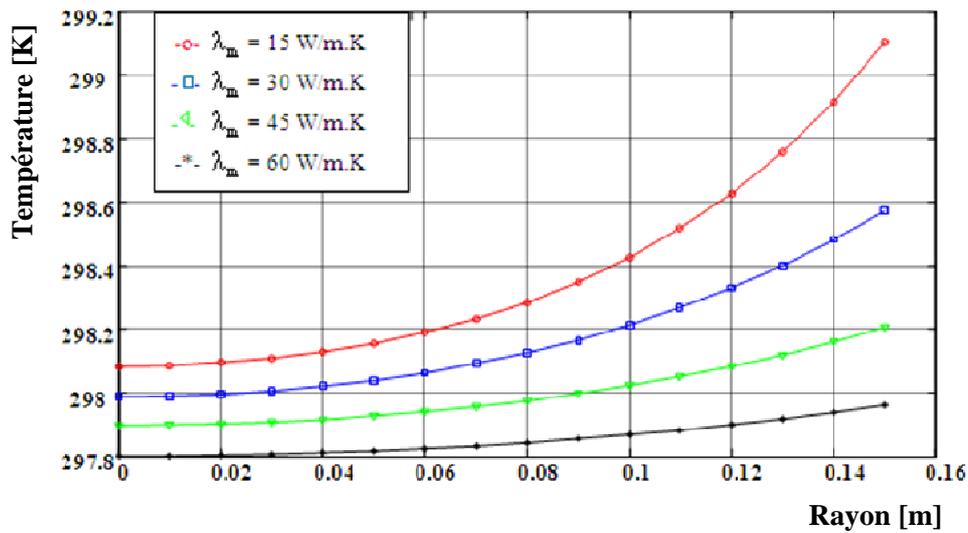


Fig. (V-7-b) : Variation de la température du socle du cryostat (Ailette A₅) pour une hauteur liquide **L = 0, 15 m**

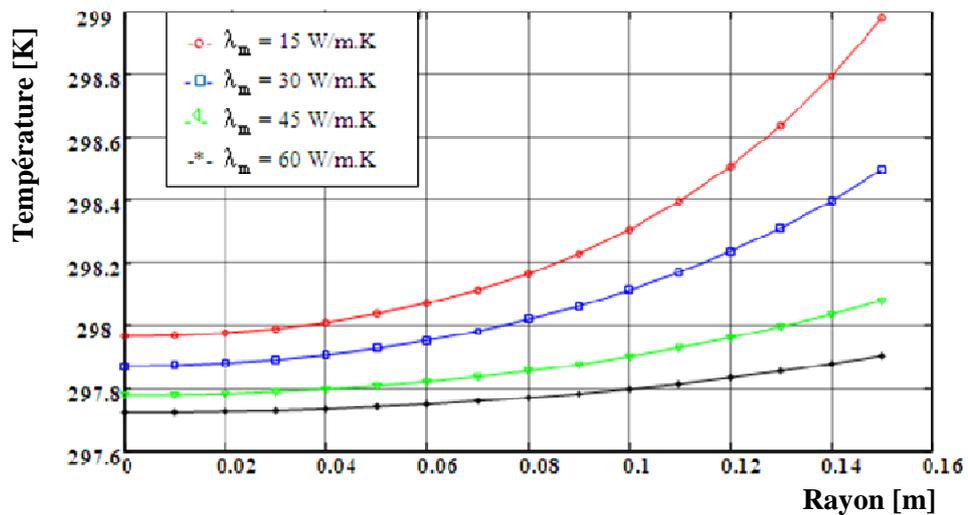


Fig. (V-7-c) : Variation de la température du socle du cryostat (Ailette A₅) pour une hauteur liquide **L = 0, 30 m**

Ces profils de températures sont semblables à ceux présentés dans la première approche (Fig. V-3) sauf qu'ici, on fait apparaître l'influence de la conductivité et le taux de remplissage sur le comportement thermique du socle du cryostat. En effet, les flux radiatifs exprimés en convection équivalente introduits par cette ailette vers le bain liquide varient dans le sens inverse de la conductivité thermique du disque, de plus, les valeurs de températures aux points de jonction avec l'ailette extérieure du bas diminuent avec l'augmentation du niveau du liquide.

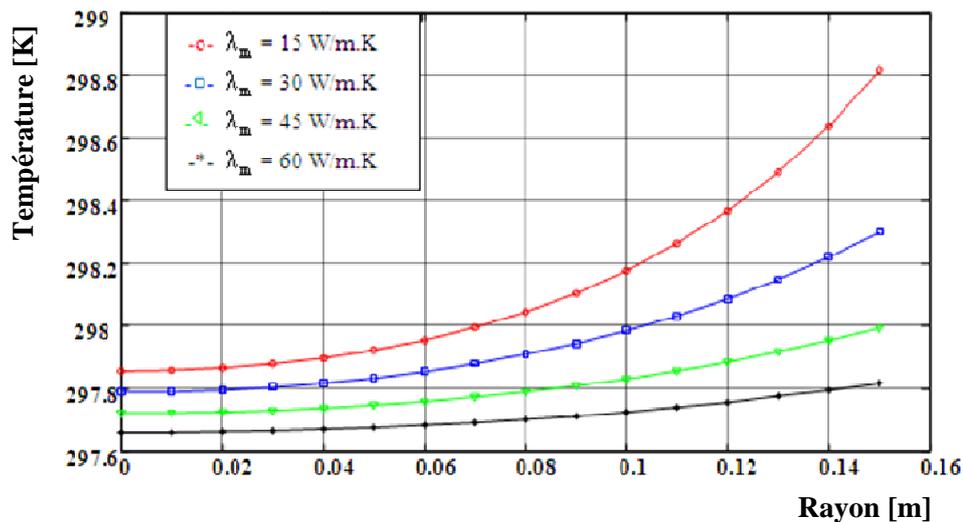


Fig. (V-7-d) : Variation de la température du socle du cryostat (Ailette A₅) pour une hauteur liquide $L = 0,375$ m

2.2.5. Influence du taux de remplissage et de la conductivité thermique sur le débit des vapeurs issues du bain cryogénique d'Azote liquide

Les figures (V-8-a/b) ci-dessous montrent l'influence remarquable des deux paramètres de ce modèle de résolution théorique à savoir, la conductivité thermique et le niveau du liquide sur le débit massique des vapeurs générées à la surface libre du bain cryogénique. Les résultats numériques sont déjà exposés dans le tableau V-3.

- Pour chaque niveau liquide donné, la variation du débit massique est quasiment linéaire en fonction de la conductivité thermique. De plus, la pente de ces courbes linéaires est de plus en plus accentuée pour des niveaux liquides plus élevés (Fig. V-8-a) ; l'écart entre ces courbes linéaires augmente d'une façon exponentielle sous l'effet de la conductivité thermique qui est une partie prenante du flux de chaleur global reçu par le bain liquide.
- La variation du débit massique en fonction du taux de remplissage pour différentes conductivités thermiques est illustrée par la figure (V-8-b). L'allure représentée indique que le débit des vapeurs augmente d'une façon exponentielle avec l'accroissement du niveau liquide ; ces courbes sont relativement amplifiées pour les valeurs de conductivités thermiques plus élevées. Ceci s'explique par le fait que les effets dus à l'augmentation du débit sont combinés par les deux paramètres du modèle; d'une part, l'augmentation de la surface mouillée d'échange de chaleur par convection équivalente au niveau bain et d'autre part, le flux conductif entrant à travers le col vers le liquide qui représente jusqu'à 70% du flux total reçu quand la conductivité est maximale.

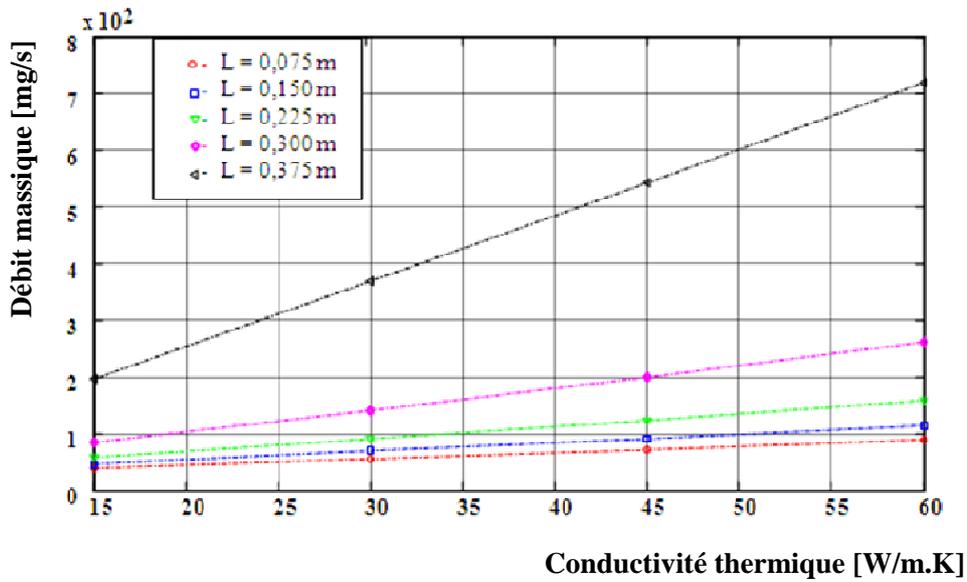


Fig. (V-8-a) : Débit massique en fonction de la conductivité thermique pour différentes hauteurs du bain cryogénique

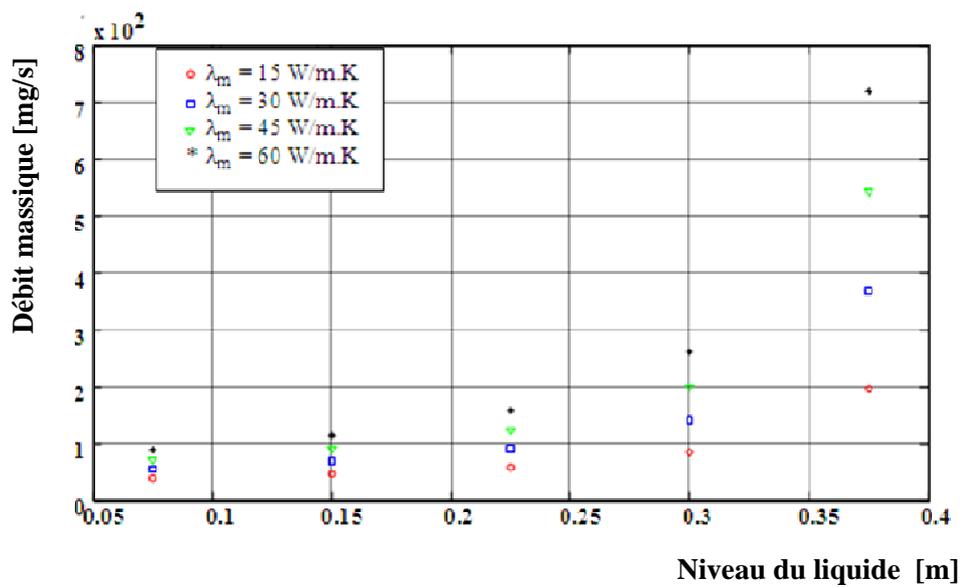


Fig. (V-8-b) : Débit massique en fonction du niveau du liquide pour différentes conductivités thermiques

3. Présentation des résultats relatifs au modèle du bac de stockage de GNL

Cette partie est consacrée aux résultats obtenus pour le modèle physique relatif au réservoir aérien de stockage de GNL décrit dans le chapitre III et dont la méthodologie de résolution théorique qui lui a été associée est explicitée dans la dernière tranche du chapitre IV. Dans ce qui suit, nous allons présenter les paramètres géométriques et thermiques essentiels pour l'application de la démarche adoptée. Les figures relatives aux champs de températures de l'enveloppe interne composée des deux ailettes modélisées respectivement du « liner » (ailette A_L) et du toit interne du réservoir (ailette A_T) ainsi que la répartition de la température de la phase vapeur, seront présentées et comparées aux prédictions expérimentales des températures mesurées sur site à GL1K de Skikda du bac 81 TK 102 à différents niveaux du liner appartenant à la référence [3]. L'influence du taux de remplissage du bac de stockage, de l'émissivité thermique de l'enveloppe interne, de la température extérieure et de la dégradation de l'isolation sur le taux de Boil-off sont toutes des interrogations aux quelles nous avons pu répondre au moyen des graphiques qui montrent d'une façon satisfaisante leur importance relative.

Le code de calcul élaboré sur MATLAB nous a permis d'employer une méthode itérative pour l'obtention du débit de Boil-off donnée par le bilan thermique (IV-43) et dont nous avons pu introduire tous les paramètres du modèle mathématique pour la détermination des solutions analytiques définies par les relations (IV-38-39).

Le bac de stockage de GNL considéré est un réservoir cylindrique aérien dans sa configuration réelle ; ses caractéristiques géométriques et thermiques sont résumées dans les tableaux ci-dessous :

Tableau V-4 : Caractéristiques géométriques du bac de GNL [3]

Symbole	Signification	Valeur numérique	Unité
r_e	Rayons extérieur de l'enveloppe interne	22,04	m
r_i	Rayons intérieur de l'enveloppe interne	22,02	m
R_e	Rayons extérieur de l'enveloppe externe	23,00	m
R_i	Rayons intérieur de l'enveloppe externe	22,99	m
e	Epaisseur des deux enveloppes	0,010	m
e_l	Epaisseur de l'isolation latérale (Perlite)	0,950	m
e_t	Epaisseur de l'isolation du toit (Perlite)	0,950	m
e_f	Epaisseur de l'isolation du bas (Perlite)	0,950	m
L	Hauteur du bain liquide de GNL	variable	m
z_0	Hauteur au niveau de la base de l'enveloppe interne à partir du bas du réservoir	0,96	m
z_L	Hauteur au niveau de l'interface liquide-vapeur à partir du bas du réservoir	$z_0 + L$	m
z_1	Hauteur au niveau du toit interne à partir du bas du réservoir	35,99	m

Tableau V-5 : Caractéristiques thermiques du bac de GNL

Symbole	Signification	Valeur	Unité
T_a	Température de l'environnement extérieur	300	K
T_{GNL}	Température du bain cryogénique	111,5	K
λ_{ml}	Conductivité thermique moyenne de l'enveloppe interne du réservoir	30	W/m.K
λ_p	Conductivité thermique l'isolation latérale, du toit et du fond du réservoir (Perlite)	0,02	W/m.K
h_{fg}	Chaleur latente d'évaporation à pression atmosphérique du GNL	510	kJ/kg
$c_{mg,p}$	Chaleur spécifique moyenne à pression constante des vapeurs de GNL	2,182	kJ/kg.K
ε_t	Emissivité thermique moyenne du toit intérieur (Ailette A_T) du réservoir de GNL	0,3	
ε_l	Emissivité thermique moyenne du liner (Ailette verticale interne A_L) du réservoir de GNL	0,3	
hm_{ext}	Coefficient moyen de convection équivalente entre l'environnement et et l'enveloppe externe	8	W/m ² .K

Remarque : Les coefficients moyennés de convection équivalente de l'enveloppe interne avec le GNL sont en fonction de plusieurs facteurs à savoir, le taux de remplissage du bac de stockage, les facteurs de forme géométriques et les températures moyennes des deux ailettes et de la phase vapeur.

3.1. Distributions de températures de la phase vapeur (Boil-off) pour différents taux de remplissage du réservoir

Les figures (V-9-a/b/c) montrent la répartition de la température de la phase vapeur respectivement des niveaux liquides de 3,85m, 14,05m et 28,85m.

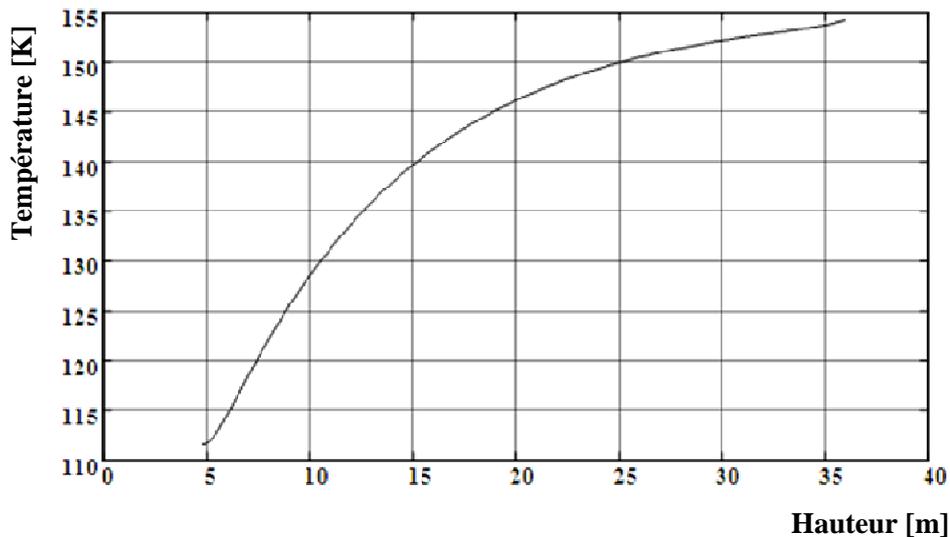


Fig. (V-9-a) : Variation de la température des vapeurs de GNL pour un niveau liquide $L = 3,85$ m

On remarque que la courbure de ces graphiques tend à se linéariser au fur et à mesure que la hauteur du liquide augmente. De plus, les vapeurs de GNL sont de moins en moins chauffées pour des hauteurs liquides plus élevées. Ceci s'explique par le fait que l'augmentation de la surface mouillée due à une contenance liquide plus grande entraîne l'accroissement du Boil-off ayant ainsi une inertie thermique plus importante.

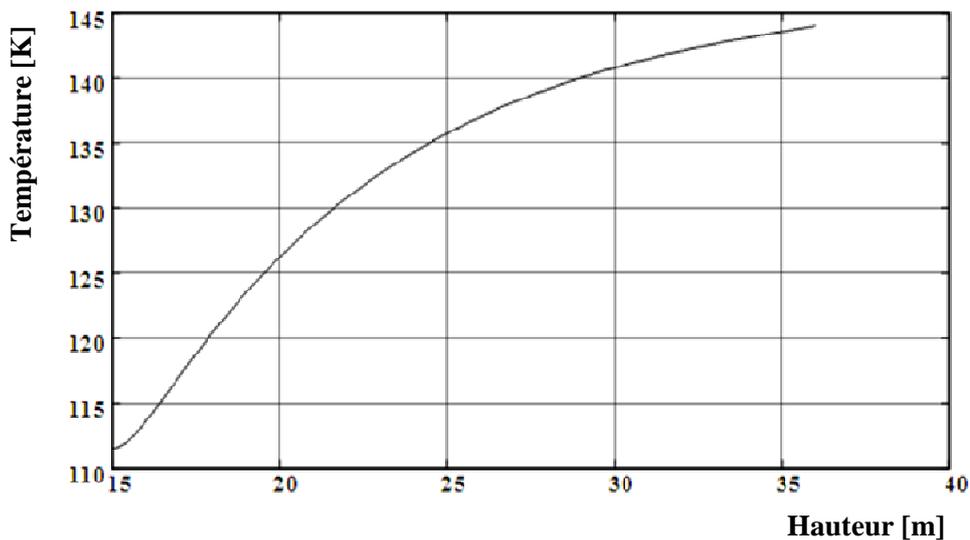


Fig. (V-9-b) : Variation de la température des vapeurs de GNL pour un niveau liquide $L = 14,05$ m

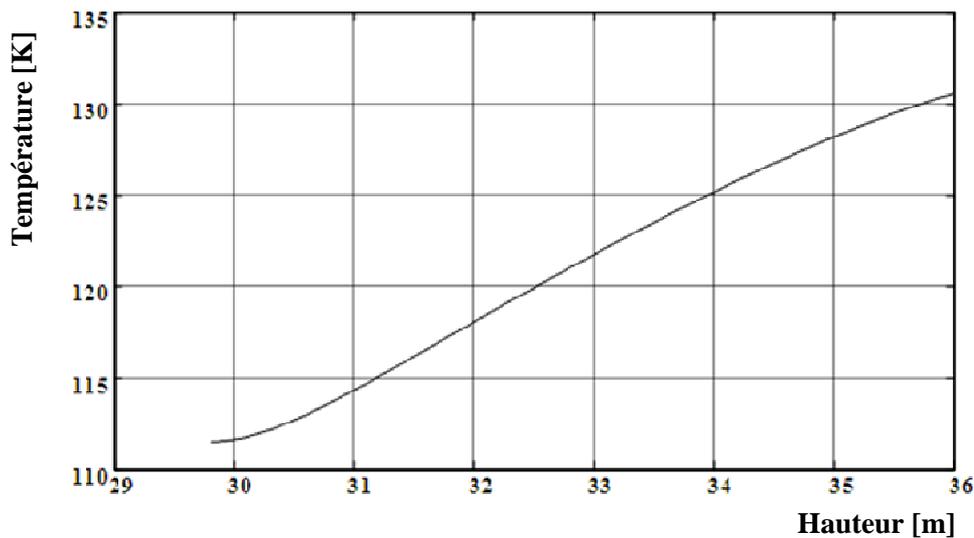


Fig. (V-9-c) : Variation de la température des vapeurs de GNL pour un niveau liquide $L = 28,85$ m

3.2. Distributions de températures de l'ailette verticale interne A_L (liner) pour différents taux de remplissage du réservoir

Les champs de température de l'ailette verticale de l'enveloppe interne du réservoir (le liner) sont représentés par les figures (V-10-a/b/c). La validation de notre modèle adopté pour traduire le comportement thermique des bacs de stockage de GNL est ainsi confortée après confrontation de ces profils de température avec les mesures expérimentales obtenues sur site [3] respectivement pour des niveaux liquides de 3,85m, 14,05m et 28,85m. Ces graphes nous indiquent bien que les résultats générés par notre modèle de résolution analytique, concordent de façon très satisfaisante avec ceux obtenus par la voie expérimentale ; l'erreur relative maximale commise sur la température est de 3,6% relevée pour une hauteur de remplissage de 28,85 m (Voir Fig. V-10-c). Par ailleurs, les profils de température du liner sont comparables à ceux de la phase vapeur dès lors que leur allure s'accroît tout en allant vers des niveaux liquides élevés : c'est une conséquence du refroidissement précoce du liner vertical du réservoir par l'inertie thermique des vapeurs froides générées à la surface libre du bain liquide de GNL dans un réservoir plus rempli.

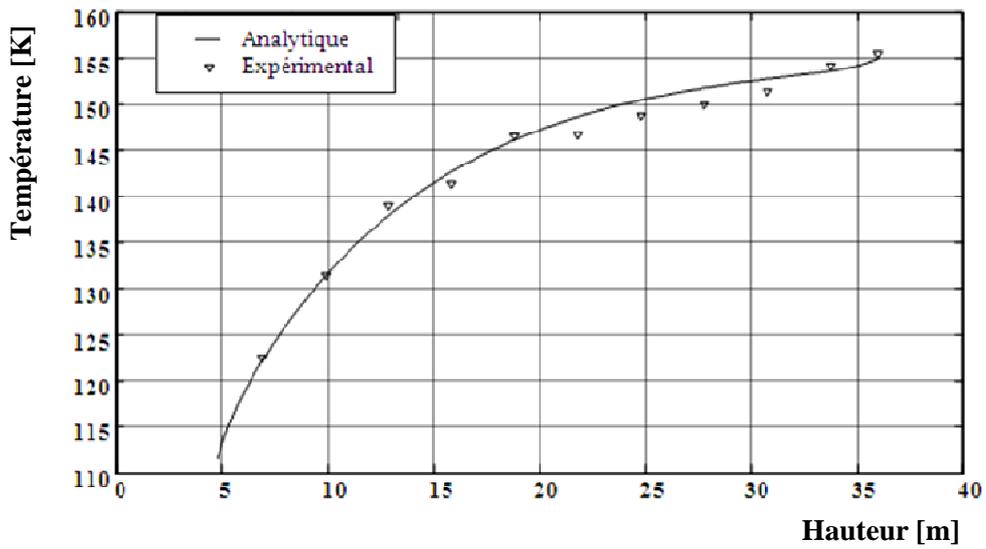


Fig. (V-10-a) : Variation de la température de l'ailette verticale interne (Liner) pour un niveau liquide $L = 3,85$ m

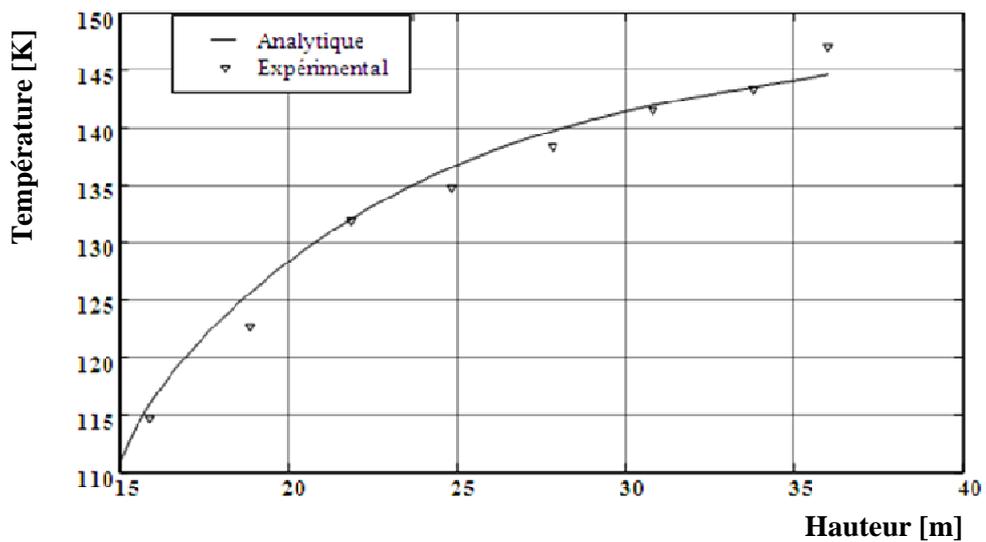


Fig. (V-10-b) : Variation de la température de l'ailette verticale interne (Liner) pour un niveau liquide $L = 14,05$ m

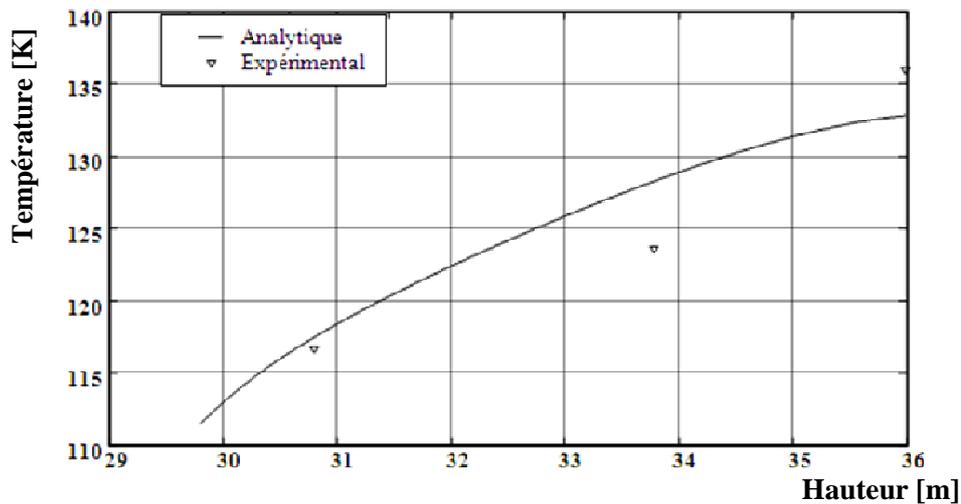


Fig. (V-10-c) : Variation de la température de l’ailette verticale interne (Liner) pour un niveau liquide $L = 28,85$ m

3.3. Distributions de la température de l’ailette du toit interne (A_T) pour différents taux de remplissage du réservoir

Les figures (V-11-a/b/c) ci-dessous montrent la distribution de température du toit interne du réservoir en forme de disque concentrique. L’allure de ces graphiques est de forme exponentielle ; elle provient de la solution analytique de l’équation de Bessel modifiée donnée par la relation (IV-41). On remarque que la température minimale est atteinte au centre de ce disque ; elle diminue quand le niveau du liquide dans le réservoir augmente. Par conséquent, le toit interne présente des gradients de température plus importants pour des niveaux liquide plus bas ; l’écart maximal de température entre le bord et le centre du disque est de 10 K obtenu pour une hauteur liquide égale à 3,85 m. En effet, le bain liquide de GNL tire d’avantage par son inertie thermique la température du toit intérieur vers le bas en allant à des taux de remplissage plus importants.

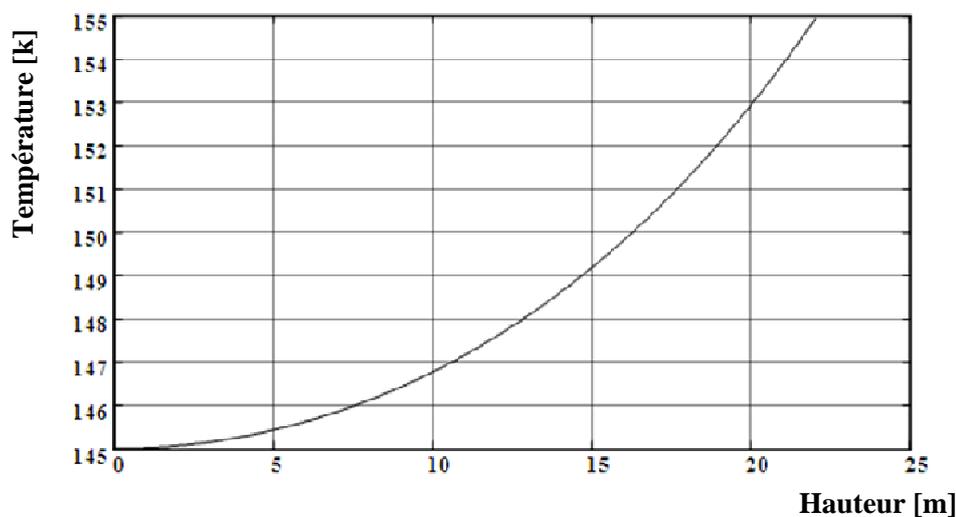


Fig. (V-11-a) : Variation de la température du toit interne (Ailette A_T) pour un niveau liquide $L = 3,85$ m

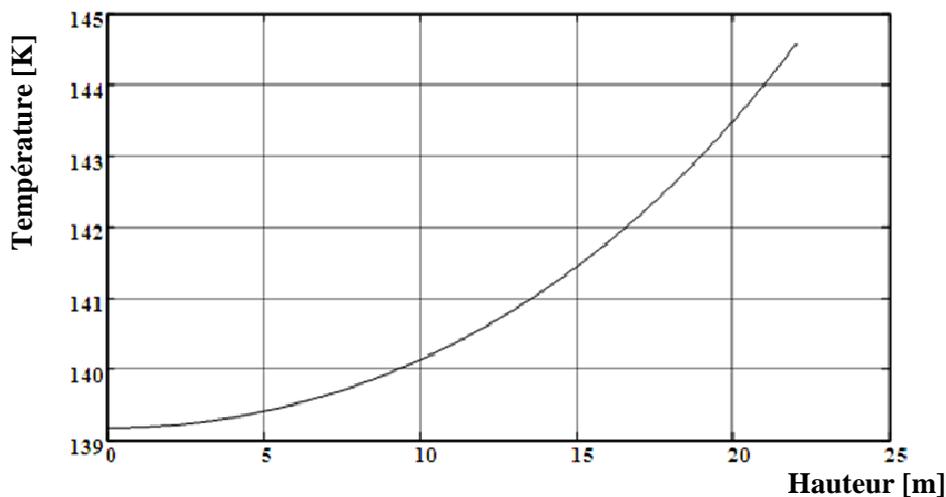


Fig. (V-11-b) : Variation de la température du toit interne (Ailette A_T) pour un niveau liquide $L = 14,05$ m

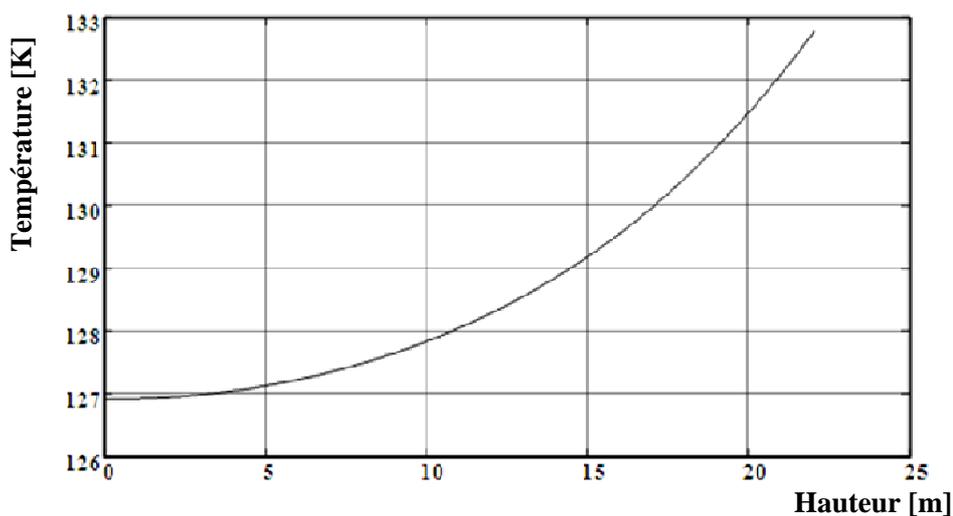


Fig. (V-11-c) : Variation de la température du toit interne (Ailette A_T) pour un niveau liquide $L = 28,85$ m

3.4. Débit de Boil-off en fonction du taux de remplissage du réservoir de GNL

La figure (V-12) ci-dessous illustre l'évolution du débit de Boil-off en fonction du niveau de remplissage du bac de stockage de GNL. On aperçoit que l'augmentation de la contenance en liquide dans le réservoir entraîne d'une façon systématique l'accroissement du débit de Boil-off ; c'est la conséquence de l'augmentation de la surface latérale mouillée de l'enveloppe interne du bac qui reçoit un flux de chaleur plus important. Néanmoins en allant vers des niveaux liquides plus élevés, le débit de Boil-off subit un ralentissement ; cela s'explique par le fait que la partie non mouillée de l'enveloppe interne est de plus en plus refroidie par les vapeurs issues du bain cryogénique et donc, le flux de chaleur radiatif échangé entre les parois intérieures de cette enveloppe et le GNL est moins important.

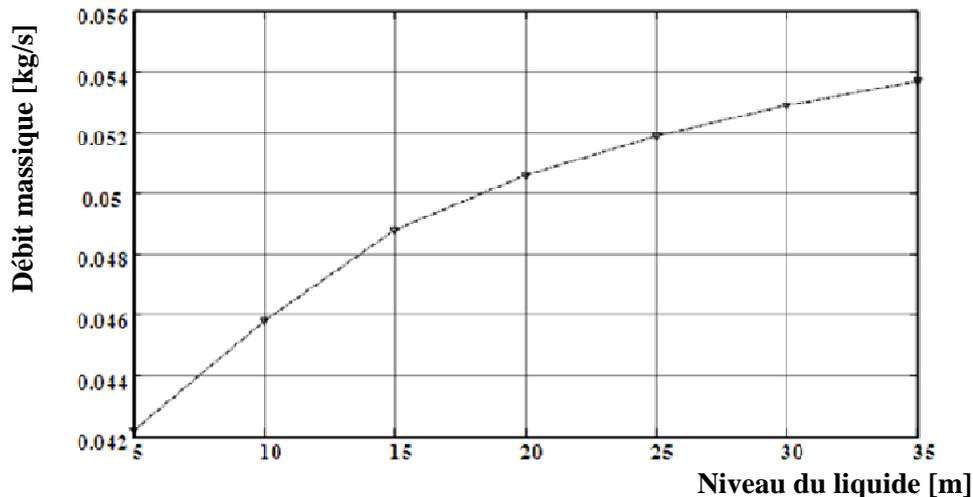


Fig. (V-12) : Variation du débit de Boil-off en fonction du taux de remplissage du bac de stockage de GNL

3.5. Influence de l'émissivité thermique de l'enveloppe interne sur le débit de Boil-off

En faisant varier l'émissivité thermique de l'enveloppe interne du bac pour des niveaux liquides de 5 m, 15 m et 30 m, nous avons obtenu les courbes caractéristiques relatives aux débits de Boil-off représentées par la figure (V-13) ci-après. Ces figures montrent que le Boil-off est sensiblement affecté par l'augmentation de l'émissivité thermique de l'enveloppe interne du réservoir de stockage surtout pour des hauteurs liquide importantes ; en effet, le flux de chaleur radiatif venant de l'enveloppe interne non mouillée vers le liquide est relativement proportionnel à l'augmentation de l'émissivité thermique et le rapprochement des deux surfaces en regard respectivement de la paroi intérieure du toit interne du bac et de la surface libre du bain de GNL.

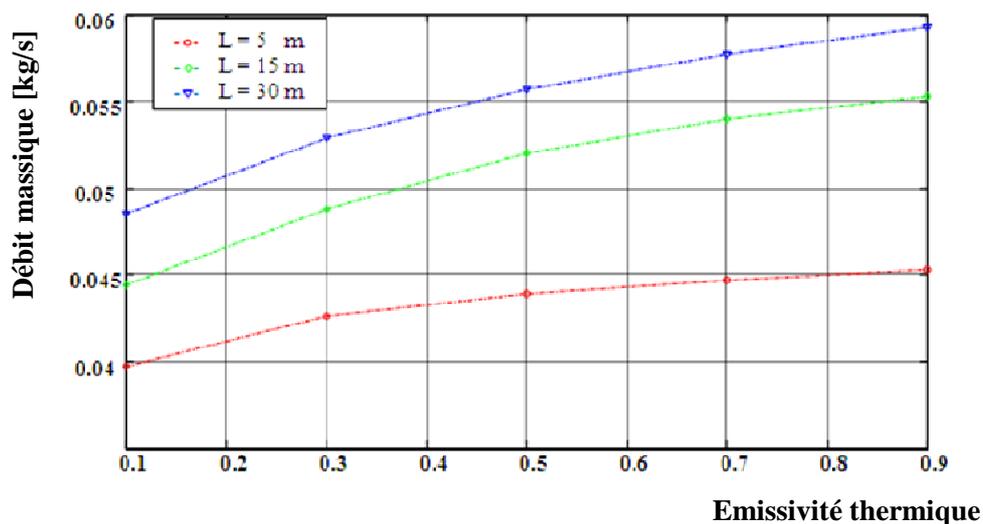


Fig. (V-13) : Variation du débit de Boil-off en fonction de l'émissivité thermique de l'enveloppe interne du réservoir de stockage de GNL

3.6. Influence de la température de l'environnement extérieur sur le débit de Boil-off

La figure (V-14) ci-dessous illustre l'influence de la température de l'environnement extérieur sur le débit de Boil-off généré à la surface libre du bain liquide de GNL. L'importance relative de la variation de température des conditions climatiques extérieures sur le Boil-off se traduit par des allures linéaires. On remarque que la pente de ces graphiques n'est pas influencée par l'augmentation de la contenance en liquide dans le réservoir ; par conséquent, les infiltrations thermiques vers le liquide en fonction de la température de l'environnement extérieur varient avec les mêmes proportions quelque soit le taux de remplissage du bac.

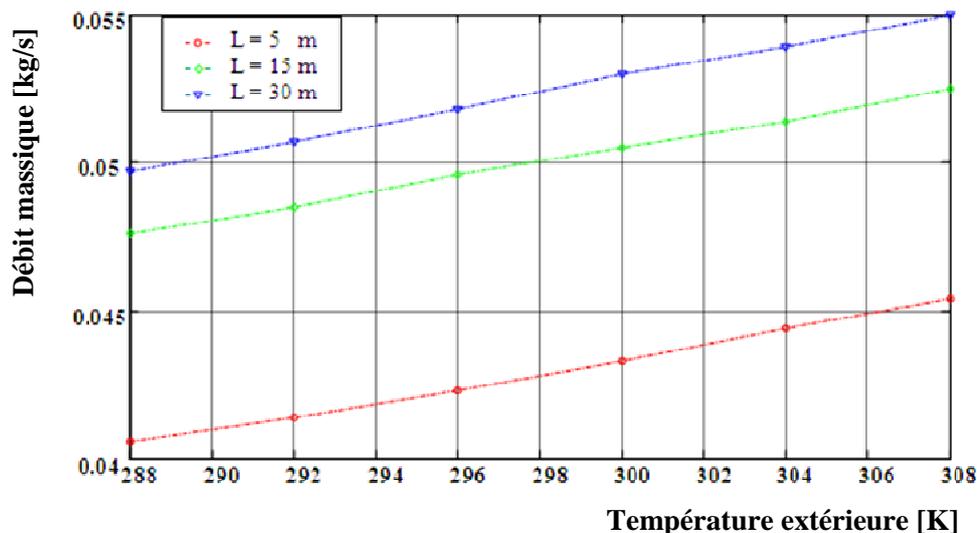


Fig. (V-14) : Influence de la température extérieure sur le débit de Boil-off pour différents taux de remplissage du bac de GNL

3.7. Influence de la dégradation de l'isolation du réservoir sur le débit de Boil-off

La dégradation de l'isolation thermique du réservoir de stockage de GNL est l'un des paramètres les plus influents sur le taux d'évaporation du liquide ; ceci en général est causé par le phénomène de givrage ; la vapeur d'eau contenue dans l'air humide de l'environnement extérieur s'infiltré au fur et à mesure dans la couche d'isolation et subie donc un changement de phase. De ce fait, la conductivité thermique de l'isolation constituée par la perlite augmente en fonction de l'accumulation du taux de givre ; le débit de Boil-off est représenté en fonction du facteur de dégradation de l'isolation thermique pour des niveaux liquide de 5 m, 15 m et 30 m par la figure (V-15) ci-dessous. On constate que le taux d'évaporation du GNL augmente d'une façon linéaire avec l'accroissement de la conductivité thermique de l'isolation représentée par le facteur de dégradation F . De plus, les pentes de ces graphiques s'accroissent tout en allant vers des hauteurs liquides plus importantes ; cela est dû par le fait que le flux de chaleur entrant latéralement vers le liquide est sensiblement affecté par l'augmentation de la surface mouillée de l'enveloppe interne du réservoir. En effet, le bac de stockage de GNL doit avoir une bonne étanchéité pour limiter les infiltrations d'humidité de l'air extérieur vers la couche d'isolation thermique qui font augmenter sa conductivité par le phénomène du givre et par conséquent le débit de Boil-off.

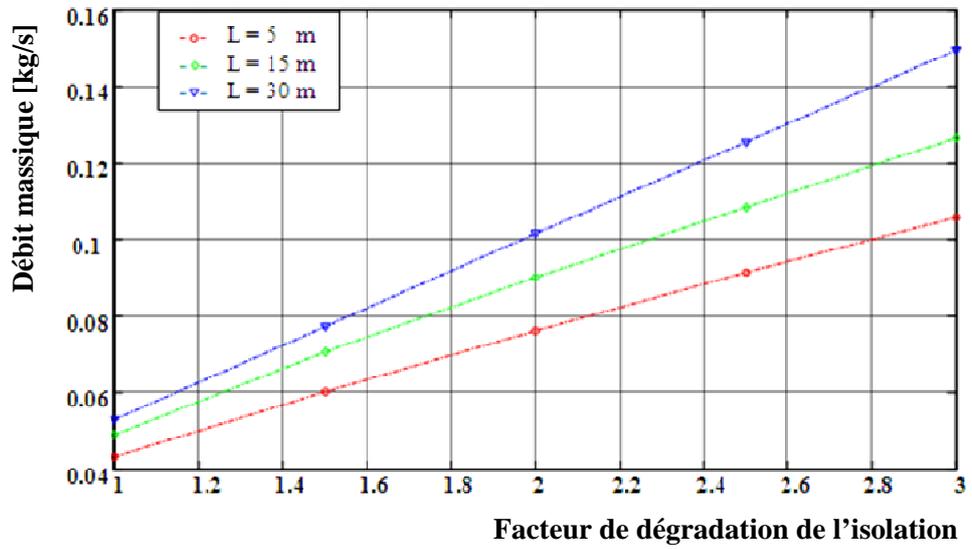


Fig. (V-15) : Influence de la dégradation de l'isolation sur le débit de Boil-off pour différents taux de remplissage du bac de GNL

CONCLUSION GENERALE

Ce mémoire de magistère traite du comportement thermique des réservoirs cryogéniques à savoir le cryostat à Azote liquide et les réservoirs de stockage de GNL dans le but de déterminer le taux de boil off. Cette étude est subdivisée en trois parties principales:

Partie I

La première partie est consacrée à la modélisation thermique d'un cryostat à Azote liquide qui est composé par un système de cinq ailettes couplées. Le profil de température des vapeurs d'Azote issue du bain liquide est supposé obéir à une relation linéaire en fonction de la hauteur de la couche vapeur déduite par extrapolation des mesures expérimentales effectuées par KHEMIS [1]. Le modèle mathématique correspondant est un système de cinq équations différentielles couplées et par les conditions aux limites ; il est résolu par une méthode analytique qui utilise les propriétés des opérateurs différentiels linéaires, analogue à la méthode de résolution matricielle de Cramer.

Les profils de température des différentes ailettes sont donnés par des sommes de termes exponentiels. Le col du cryostat présente un champ de température presque linéaire car il est sensiblement influencé par le transfert de chaleur par convection avec les vapeurs issues du bain liquide dont le profil de température est supposé linéaire. La température de l'enveloppe latérale extérieure du cryostat présente un écart de température allant jusqu'à 3,4 K par rapport à la température de l'environnement extérieur ; cet écart maximal de température est atteint au niveau de l'ailette extérieure intermédiaire dès lors que le bain cryogénique situé en regard tire la température de l'enveloppe vers le bas. Le champ de température du socle du cryostat est défini par les équations de Bessel ; la température minimale est obtenue au centre du disque. Elle est due à l'effet de l'inertie thermique et de la position géométrique du bain liquide d'Azote qui tend à refroidir le disque graduellement tout en se rapprochant du centre. Les résultats obtenus par cette approche sont satisfaisants comparativement aux résultats expérimentaux.

Partie II

Dans la deuxième partie de ce travail, la formulation mathématique suggérée consiste à relaxer l'hypothèse de linéarité des vapeurs et d'en décrire le comportement par un bilan d'énergie effectué sur une couche élémentaire parallèle à la surface libre du bain liquide d'Azote. Ce bilan d'énergie donne lieu à une équation différentielle à adjoindre au système à résoudre. Dans ce cas, le modèle mathématique comporte globalement six équations différentielles dont on cherchera la solution. La méthodologie de résolution préconisée pour résoudre ce système est analytique dans la détermination des champs de températures et itérative dans la détermination du boil-off. A chaque niveau liquide du bain d'Azote correspond un débit de vapeur et des profils de température des différentes ailettes. Les solutions obtenues donnent des résultats plus satisfaisants par confrontation aux résultats expérimentaux disponibles.

Les débits de vapeurs générées par le liquide cryogénique et les champs de température sont obtenus respectivement pour différents taux de remplissage et conductivités thermiques des enveloppes du cryostat. En premier lieu, on remarque qu'en effet les champs de températures de la phase vapeur ont des allures exponentielles et n'obéissent pas à une loi linéaire comme

supposés dans l'hypothèse prise dans la première approche. Les champs de température obtenus pour le col du cryostat (ailette intérieure) s'accroissent progressivement tout en allant vers des hauteurs liquides et des conductivités thermiques plus élevées ; ceci s'explique par les conditions aux limites imposées aux deux extrémités du col à savoir, la température du couvercle à 300 K en haut et celle du bain liquide à 77,4 K en bas. Les profils de température de l'enveloppe latérale extérieure du cryostat sont riches d'interprétations thermiques. Les distributions de température s'avèrent sensiblement affectées par les deux paramètres du modèle qui sont le taux de remplissage et l'effet de la conductivité thermique ; l'inertie thermique du bain cryogénique tire la température de l'enveloppe extérieure vers le bas. Cette dernière est caractérisée par des points d'inflexion qui représentent l'inversion des effets de la conductivité thermique. Les champs de température du socle du cryostat sont obtenus par les solutions analytiques des équations de Bessel ; les figures respectives montrent que les entrées de chaleur par convection équivalente vers le bain liquide sont relativement réduites quand la conductivité thermique est plus importante.

L'influence du taux de remplissage et de la conductivité thermique sur le débit massique des vapeurs issues du bain cryogénique est mise en exergue :

- Pour chaque niveau liquide donné, la variation du débit massique est quasiment linéaire en fonction de la conductivité thermique ; pour des niveaux liquides élevés le débit des vapeurs est plus important.
- La variation du débit massique en fonction du taux de remplissage pour différentes conductivités thermiques montre que le débit des vapeurs augmente d'une façon exponentielle.

Ces résultats s'expliquent par le fait que les effets responsables de l'augmentation du débit sont combinés; d'une part, il y a l'augmentation de la surface mouillée d'échange de chaleur par convection équivalente du bain liquide et d'autre part, il y a le flux conductif entrant à travers le col vers le liquide qui représente à lui seul jusqu'à 70% du flux total reçu par le liquide quand la conductivité est maximale.

En résumé, la modélisation physique et thermique des cryostats à Azote liquide développée dans cette partie du mémoire a permis de mieux appréhender les phénomènes de transfert de chaleur en présence par la résolution analytique employée et les résultats obtenus.

Pour réduire au maximum les entrées de chaleur de l'environnement extérieur vers le liquide, le choix des matériaux constitutifs du cryostat doit non seulement répondre aux contraintes liées à la rétention du fluide cryogénique mais aussi à l'aspect thermique. La conductivité thermique des enveloppes a une influence remarquable sur le débit d'évaporation surtout pour des taux de remplissage élevés ; le col du cryostat et la partie haute de l'enveloppe externe à partir des points d'inflexion doivent avoir une conductivité thermique la plus petite possible ; par contre, la partie basse restante de l'enveloppe extérieure et le socle du cryostat devraient avoir des valeurs de conductivité plus élevées. Ainsi le gradient de température entre les deux enveloppes d'une part et le flux conductif entrant par le col vers le liquide d'autre part, seront réduits.

Partie III

La troisième partie de ce travail consiste à développer une approche globale adaptable aux réservoirs de stockage de Gaz Naturel Liquéfié dans le but d'en quantifier les taux de boil-off. Cette démarche est inspirée du modèle physique basé sur un système d'ailettes couplées développés dans les deux premières parties pour les cryostats à Azote Liquide. Le modèle préconisé est constitué de deux ailettes qui formeront l'enveloppe interne du réservoir ; la première représente la paroi latérale interne (le liner) jointe en sa partie haute à la deuxième ailette en forme de disque qui représente le toit interne du bac. Un bilan d'énergie sur une couche mince de vapeurs (Boil-off) de GNL a permis d'obtenir l'équation différentielle qui en gouverne la température en couplage avec les deux autres équations différentielles représentant les deux ailettes de l'enveloppe interne. Le système en résultant se compose de trois équations différentielles couplées dont la solution analytique a été obtenue.

Les résultats exposés sous forme de figures relatives aux champs de températures de la phase vapeur et des deux ailettes sont comparés aux valeurs expérimentales données par la référence [3] ; les résultats générés par notre modèle de résolution analytique concordent d'une façon très satisfaisante avec ceux obtenus par la voie expérimentale.

Les profils de température de la phase vapeur et du liner du réservoir sont semblables ; on remarque que la courbure des figures respectives tend à se linéariser au fur et à mesure que la hauteur du liquide augmente :

- Les vapeurs de GNL sont de moins en moins chauffées pour des hauteurs liquides plus élevées. Ceci s'explique par le fait que l'augmentation de la surface mouillée due à une contenance liquide plus grande entraîne l'accroissement du Boil-off ayant ainsi une inertie thermique plus importante.
- Les profils de température du liner se linéarisent avec des niveaux liquides élevés : c'est une conséquence du refroidissement précoce du liner vertical du réservoir par l'inertie thermique des vapeurs froides générées à la surface libre du bain liquide de GNL dans un réservoir plus rempli.

Le taux de remplissage du bac de stockage, l'émissivité thermique de l'enveloppe interne, la température extérieure et la dégradation de l'isolation sont des paramètres qui ont une influence déterminante sur le taux de Boil-off :

- L'augmentation de la contenance en liquide dans le réservoir entraîne d'une façon systématique l'accroissement du débit de Boil-off ; c'est la conséquence de l'augmentation de la surface latérale mouillée de l'enveloppe interne du bac qui reçoit un flux de chaleur plus important. Néanmoins en allant vers des niveaux liquides plus élevés, le débit de Boil-off subit un ralentissement ; cela s'explique par le fait que la partie non mouillée de l'enveloppe interne est de plus en plus refroidie par les vapeurs issues du bain cryogénique et donc, le flux de chaleur radiatif échangé entre les parois intérieures de cette enveloppe et le GNL est moins important.

- Le débit de Boil-off est sensiblement accru par l'augmentation de l'émissivité thermique de l'enveloppe interne du réservoir surtout en allant vers des hauteurs liquide plus importantes ; en effet, le flux de chaleur radiatif venant de l'enveloppe interne non mouillée vers le liquide est relativement proportionnel à l'augmentation de l'émissivité thermique et le rapprochement des deux surfaces en regard respectivement de la paroi intérieure du toit interne du bac et de la surface libre du bain de GNL.
- L'importance relative de la variation de la température extérieure sur le Boil-off se traduit par des allures linéaires. On remarque que la pente de ces graphiques n'est pas influencée par l'augmentation de la contenance en liquide dans le réservoir ; par conséquent, les infiltrations thermiques vers le liquide en fonction de la température de l'environnement extérieur varient dans les mêmes proportions quelque soit le taux de remplissage du bac.
- Le taux d'évaporation du GNL augmente d'une façon linéaire avec l'accroissement de la conductivité thermique à cause de la dégradation l'isolation. Le taux de Boil-off est plus accru en allant vers des hauteurs liquides plus importantes ; cela est dû à l'augmentation de la surface mouillée de l'enveloppe interne du réservoir. En effet, le bac de stockage de GNL doit avoir une bonne étanchéité pour limiter les infiltrations d'humidité de l'air extérieur vers la couche d'isolation thermique ; le phénomène du givre serait la cause principale de la dégradation de l'isolation et par conséquent de l'augmentation du débit de Boil-off.

ANNEXES

ANNEXE A

COEFFICIENTS DE CONVECTION NATURELLE

L'évaluation des coefficients moyens de convection naturelle entre les parois des deux modèles de réservoirs et l'environnement extérieur est effectuée en utilisant l'expression semi empirique de Nusselt [12] :

$$Nu = 0,683 \cdot Gr^{0,25} \cdot Pr^{0,25} \cdot \left[\frac{Pr}{0,861 + Pr} \right]^{0,25} \quad (A-1)$$

Avec :

$$h_{cv} = \frac{Nu_x \cdot k_f}{\Delta x} \quad (A-2)$$

Où :

Nu : Nombre de Nusselt,
Pr : Nombre de Prandtl,
 Δx : Longueur de contact paroi-fluide,

Le nombre de Grashoff est donné par :

$$Où \quad Gr_x = \frac{g \cdot \beta \cdot [T_a - T_p(x)] \cdot x^3}{\nu^2} \quad (A-3)$$

Avec :

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (\text{Pour un gaz parfait}) \quad (A-4)$$

La corrélation du coefficient de viscosité cinématique de l'air atmosphérique est [12]:

$$\nu \cdot 10^6 = 0,1286 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 + 0,018614 \cdot T - 1,2639 \quad (A-5)$$

La conductivité thermique de l'air atmosphérique est aussi corrélée comme suit [12]:

$$k_f \cdot 10^3 = -0,3 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 0,969 \cdot T^{-1} \cdot T - 0,65 \cdot 10^{-1} \quad (A-6)$$

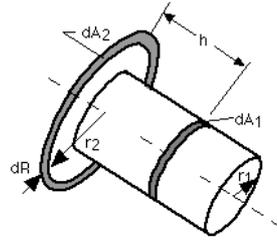
g : Constante de gravitation terrestre 9,81 m/s²,
β : Coefficient d'expansion volumétrique isobare,
ν : Viscosité cinématique,
k_f : Conductivité thermique de l'air à la température du film,

ANNEXE B

FACTEURS DE FORME GEOMETRIQUES

Les facteurs de forme géométriques relatifs aux deux modèles de rétention en forme de cylindres concentriques sont donnés par les expressions ci-dessous selon la configuration appropriée, voir HAWELL [13].

❖ Configuration 1

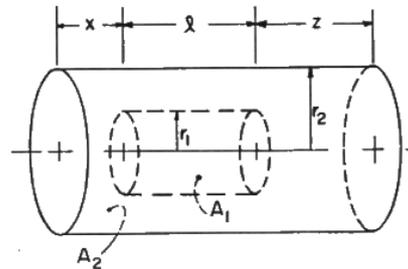


$$df_{1-2} = \frac{2.H.R.dR}{\pi(Z^2-4.R^2)} \left\{ (R^2 - 1)^{1/2} + 2 \cdot \frac{(R^2-H^2-1)}{(Z^2-4.R^2)} \cdot \tan^{-1} \left[\left(\frac{(Z+2.R)}{(Z-2.R)} \left(\frac{R-1}{R+1} \right) \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (\text{B-1})$$

Avec :

$$H = \frac{h}{r_1}, \quad R = \frac{r_2}{r_1}, \quad Z = 1 + R^2 + H^2 \quad (\text{B-2})$$

❖ Configuration 2



$$F_{1-2} = 1 + \frac{X}{L} F_X + \frac{Z}{L} F_Z - \left(\frac{L+X}{L} \right) \cdot F_{L+X} - \frac{L+Z}{L} \cdot F_{L+Z} \quad (\text{B-3})$$

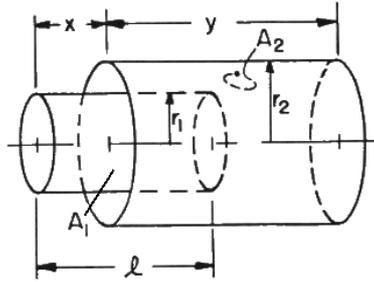
Où :

$$X = \frac{x}{r_2}, \quad Z = \frac{z}{r_2}, \quad L = \frac{1}{r_2}, \quad R = \frac{r_1}{r_2}, \quad c_\tau = \tau^2 + R^2 - 1, \quad B_\tau = \tau^2 - R^2 + 1 \quad (\text{B-4})$$

Et :

$$F_\tau = \frac{B_\tau}{8.R.\tau} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \cos^{-1} \frac{c_\tau}{B_\tau} - \frac{1}{2.\tau} \left[\frac{(c_\tau+2)^2}{R^2} - 4 \right]^{1/2} \cdot \cos^{-1} \frac{c_\tau.R}{B_\tau} - \frac{c_\tau}{2.\tau.R} \sin^{-1} R \right\} \quad (\text{B-5})$$

❖ Configuration 3



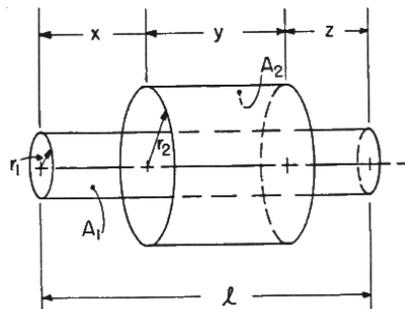
$$F_{1-2} = \frac{X}{L} F_X + \frac{L-X}{L} (1 - F_{L-X}) + \left(\frac{Y+X-L}{L} \right) \cdot F_{Y+X-L} - \frac{X+Y}{L} \cdot F_{X+Y} \quad (\text{B-6})$$

Avec :

$$X = \frac{x}{r_2}, Y = \frac{y}{r_2}, L = \frac{l}{r_2}, R = \frac{r_1}{r_2}, c_\tau = \tau^2 + R^2 - 1, B_\tau = \tau^2 - R^2 + 1 \quad (\text{B-7})$$

Et F_τ donné par la relation (B-5).

❖ Configuration 4



$$F_{1-2} = \frac{Y}{L} + \frac{X}{L} F_X + \frac{Z}{L} F_Z - \frac{X+Y}{L} \cdot F_{X+Y} - \frac{Y+Z}{L} \cdot F_{Y+Z} \quad (\text{B-8})$$

Avec :

$$X = \frac{x}{r_2}, Y = \frac{y}{r_2}, Z = \frac{z}{r_2}, L = \frac{l}{r_2}, R = \frac{r_1}{r_2}, c_\tau = \tau^2 + R^2 - 1, B_\tau = \tau^2 - R^2 + 1 \quad (\text{B-9})$$

Et F_τ donné par la relation (B-5).

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] O. KHEMIS, “ Optimisation des réservoirs de stockage de fluides cryogéniques : étude théorique et expérimentale ”, thèse de doctorat d’Etat, ENP, Alger, Octobre 2004.
- [2] L.A. BENDAOU, “ Détermination analytique et numérique des champs de températures dans un cryostat à azote liquide ”, mémoire de magistère, ENP, Alger, Septembre 2005.
- [3] S. AIT FERHAT, “ Etude thermique par analyse système de l’ensemble réservoir-GNL en infiltration avec l’environnement ”, mémoire de magistère, INH, UMB, Boumerdes, 2004.
- [4] Francis B. Hildebrand, “Advanced Calculus for Applications ”, second edition, pp.15-23, Prentice Hall Inc., 1976.
- [5] Theodore Von Karman, and Maurice Biot, “Mathematical Methods in Engineering”, McGraw-Hill Book Company Inc. 1940, pp. 47-54.
- [6] D.T. NEIL et al., “Boil off rates and wall temperatures in above ground LNG storage tanks” Advances in Cryogenic Heat Transfer, Chemical Engineering Symposium Series No. 87, Vol. 64, pp. 111-119.
- [7] O. KHEMIS, R. BESSAÏH, M. AIT ALI, M.X. FRANCOIS, “Mesure des transferts thermiques couplés dans un réservoir cryogénique avec deux configurations”, EJMEE, vol 48, N°4, p231-234, 2003.
- [8] O. KHEMIS, R. BESSAÏH, M. AIT ALI, M.X. FRANCOIS, “Measurement of heat transfers in a cryogenic tank with several configurations” , Applied Thermal Engineering journal, 2004 .
- [9] O. KHEMIS, M. BOUMAZA, M. AIT ALI, M.X. FRANCOIS, “Experimental analysis of heat transfers in a cryogenic tank without a lateral insulation”, Applied Thermal Engineering journal, Vol 23, Issue 16, pp. 2107-2117, 2003.
- [10] HASHEMI, J.L.LOTT, C.M.SLIEPCEVICH and J.R.WEKLER, “Liquefied Natural Gas Technology”, Encyclopedia del petrolio e del gas natural, Vol. 5, casa editrice Carlo Colombo, Rome-Italy, 1967.
- [11] D.T.NEILL, H.T. HASHEMI, C.M. SLIEPCEVICH, “Boil-off rates and wall temperatures in aboveground LNG storage tanks”, Advances in cryogenic heat transfer, Chemical engineering progress symposium series, No. 87, pp. 111-119, 1968.
- [12] J.P. HOLMAN, Heat transfer, 4th Edition, Mc Graw Hill Book Company, 1976.
- [13] R. SIEGEL and J. R. HOWELL, Thermal radiation heat transfer, Mc Grow-Hill Kogakusha, 1972.
- [14] R.R. CONTE, Eléments de cryogénie, Masson et c^{ie}, 1970.

[15] A.ROJEY, B.DURAND, C.JAFFRET, S.JULLIAN, M. VALAIS, Le gaz naturel production, traitement et transport, Edition Technip I.F.P, 1994.

[16] B. RANDE, Equations différentielles linéaires, Techniques de l'ingénieur, AF103.

[17] M. DAMOU, Mécanique des fluides, office des publications universitaires, 1996.