

9/02

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Ecole National Polytechnique
Département de Génie Civil.



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Thème :

Dynamique Linéaire Et Non-linéaire Des Structures

Réalisé par :

Hamitouche Lotfi
Djermouni Adel.

Proposé et dirigé par :

Mr.M.Hamoutene

Année Universitaire: 2001/2002.

Dédicaces

Je tiens à dédicacer ce modeste travail à ma mère, mon père et à mes frères et ma soeur.

A tous mes amis : Amine, Yacine, Laid, Hannachi ...

A toute personne qui se respecte et qui respecte les autres.

Lotfi.

C'est avec un grand honneur, que je ~~dédie ce~~ modeste travail à :

Ma mère, mon père, et à ma petite ~~poupée de soeur~~ Naziha.

*A tous mes amis : soumana, marteau, el haraka, moustache, boukraa, elmaglat
El doc et basta.*

Sans oublier S.Amel .

A tous les Etudiants, et surtout ceux de Génie civil.

Adel.

Remerciments

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nous voulons tout d'abord remercier, Monsieur HAMMOUTENE notre promoteur pour son aide, ses conseils et la confiance qu'il nous a témoignée.

Nous tenons à remercier particulièrement Monsieur ZEGHLACHE, ainsi que tous les professeurs qui ont contribué à notre formation, spécialement ceux du département de Génie Civil.

Enfin, nos vifs remerciements à toutes les personnes ayant aidées de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

الهدف من دراستنا هاته هو تحليل رد الهياكل متعددة درجات الحرية مع الأخذ بعين الإعتبار التصرف اللاخطي.

التحليل الطيفي للأجوبة المتحصل عليها عن طريق الحل الرقمي للجمل الديناميكية الخطية و اللاخطية يمكننا من المقارنة بين هاتين الحالتين.

Résumé

Le but de notre étude est l'analyse de la réponse des structures à plusieurs degrés de liberté, soumises à des mouvements forts du sol, en tenant compte de l'influence du comportement inélastique.

L'analyse spectrale des réponses obtenues par la résolution numérique des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires procure une bonne comparaison entre les deux cas.

Abstract

The goal of our study is the analysis of the response of structures with several degrees of freedom subjected to strong movements of the ground by taking account of the influence of inelastic behavior.

Spectral analysis of the answers obtained by numerical resolution of linear and nonlinear dynamic systems gets a good comparison between the two cases.

Table des matières



<i>Table des figures</i>	1
<i>Introduction générale</i>	3
Chapitre 1 : Formulation des équations de mouvement	6
1.1- INTRODUCTION - OBJECTIFS	7
1.2- CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES D'UN PROBLEME DYNAMIQUE	7
1.3- DISCRETISATION DES SYSTEMES PAR ELEMENTS FINIS	8
1.4- PRINCIPES DE FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT	9
1.4.1- Principe d'Alembert	9
1.4.2- Principe des déplacements virtuels	9
1.4.3- Principe de Hamilton	10
1.4.4- Récapitulation	10
1.5- FORMULATION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT	11
1.5.1- Composants du modèle dynamique élémentaire	11
1.5.2- Méthodes de formulation	12
1.5.2.1- Cas d'un seul degré de liberté	12
1.5.2.1.1- Force de rappel	12
1.5.2.1.2- Force d'inertie	12
1.5.2.1.3- Force d'amortissement	12
1.5.2.1.4- Equation du mouvement	13
1.5.2.2- Cas de plusieurs degrés de liberté	13
1.5.2.2.1- Force de rappel	13
1.5.2.2.2- Force d'amortissement	14
1.5.2.2.3- Force d'inertie	15

Chapitre 2 : Etude statique linéaire



	21
2.1- INTRODUCTION - OBJECTIFS	22
2.2- EXEMPLE 1 (ETUDE D'UN PORTIQUE)	22
2.2.1- Présentation et modélisation de la structure	22
2.2.2- Détermination des matrices masse et rigidité dans le repère local	23
2.2.2.1- Matrice de rigidité	24
2.2.2.2- Matrice des masses	24
2.2.2.2.1- Cas des masses concentrées	24
2.2.2.2.2- Cas des masses cohérentes	26
2.2.3- Détermination des matrices masse et rigidité dans le repère global	26
2.2.4- Assemblage des matrices élémentaires	27
2.2.5- Influence de la numérotation des nœuds	28
2.2.5.1- Exemple	28
2.2.6- Résultats du programme	29
2.2.6.1- Résultats du programme (Matrices masses élémentaires en repère global)	29
2.2.6.1.1- Matrice masse de la barre N° (01)	29
2.2.6.1.2- Matrice masse de la barre N° (02)	29
2.2.6.1.3- Matrice masse de la barre N° (03)	29
2.2.6.2- Résultats du programme (Matrices de rigidité élémentaires en repère global)	29
2.2.6.2.1- Matrice de rigidité de la barre N° (01)	29
2.2.6.2.2- Matrice de rigidité de la barre N° (02)	29
2.2.6.2.3- Matrice de rigidité de la barre N° (03)	30
2.2.6.3- Résultats du programme (Assemblage des matrices élémentaires)	30
2.2.6.3.1- Matrice masse globale	30
2.2.6.3.2- Matrice de rigidité globale	30
2.3- EXEMPLE 2 (ETUDE D'UNE ARMATURE DE POUTRES ARTICULEE)	31
2.3.1- Présentation et modélisation de la structure	31
2.3.2- Equation de l'équilibre statique	31
2.3.3- Résolution théorique	32
2.3.4- Résolution numérique	34
2.3.4.1- Conditions aux limites (méthode de pénalité)	34
2.3.4.2- Résolution des systèmes linéaire	35

2.3.4.3- Résultats du programme	36
2.3.4.3.1- Matrice de rigidité élémentaire de la barre N° (01)	36
2.3.4.3.2- Matrice de rigidité élémentaire de la barre N° (02)	36
2.3.4.3.3- Matrice de rigidité élémentaire de la barre N° (03)	36
2.3.4.3.4- Matrice de rigidité globale	36
Chapitre 3 : réponse dynamique d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté	37
3.1- INTRODUCTION - OBJECTIFS	38
3.2- REPONSE DYNAMIQUE	38
3.2.1- Méthode ou schéma des différences centrées (explicite)	39
3.2.2.1- Remarques	40
3.2.2- Méthode ou schéma de NEWMARK classique (implicite)	40
3.2.2.1- Remarques	42
3.2.3- Méthode de superposition modale	42
3.2.3.1- Remarque	44
3.3- EXEMPLE D'APPLICATION	45
3.3.1- Présentation du problème	45
3.3.2- Résolution du problème	47
Chapitre 4 : Etude des systèmes non linéaires	49
4.1- INTRODUCTION - OBJECTIFS	50
4.2- MECANISMES PHYSIQUES DE DEFORMATION	50
4.2.1- Déformations élastiques	50
4.2.2- Déformations visqueuses	50
4.2.3- Déformations permanentes	50
4.2.4- Écrouissage	50
4.2.5- Restauration	51



4.3- MODELES DE COMPORTEMENT	51
4.3.1- La notion de modèle de comportement	51
4.3.2- Principaux modèles de comportement	51
4.4- PLASTICITE DES BARRES	53
4.4.1- Essai de traction	53
4.4.1.1- Essai 1 : $\sigma < \sigma_0$	54
4.4.1.2- Essai 2 : $\sigma = \sigma_0$	54
4.4.1.3- Essai 3 : $\sigma > \sigma_0$	54
4.4.2- Modélisation du comportement en traction - compression	56
4.4.2.1- Lois d'écoulement plastique	56
4.4.3- Résolution numérique d'un problème élasto-plastique	57
4.4.3.1 Algorithme de projection sur le critère de plasticité	57
4.5- RESOLUTION DES SYSTEMES NON-LINEAIRES	60
4.5.1- Cas statique non-linéaire	60
4.5.1.1- Méthode de substitution	60
4.5.1.2- Méthode NEWTON-RAPHSON modifiée	60
4.5.2- Cas dynamique non-linéaire	61
4.5.2.1- Méthode de substitution	61
4.5.2.2- Méthode NEWTON-RAPHSON modifiée	62
Chapitre 5 : Application numérique	64
5.1- PRESENTATION DU PROBLEME	65
5.2- RESULTATS ET INTERPRETATIONS	66
5.2.1- Cas de la structure rigide	66
5.2.2- Cas de la structure souple	68

Conclusion et perspectives

70

Références bibliographiques

72



Table des figures



Chapitre 1 : <i>formulation des équations de mouvement</i>	6
Figure 1.1 : Distinction fondamentale entre une charge statique et une charge dynamique	7
Figure 1.2 : Coordonnées typiques d'une représentation de poutre par éléments finis	8
Figure 1.3 : Système idéalisé à un degré de liberté	11
Figure 1.4 : Flexion simple d'une poutre	16
Figure 1.5 : Traction compression d'une barre	19
 Chapitre 2 : <i>Etude statique linéaire</i>	 21
Figure 2.1 : modélisation d'un portique	22
Figure 2.2 : Flexion composée d'une poutre	23
Figure 2.3 : Concentration de la masse aux nœuds d'une poutre	25
Figure 2.4 : Système de coordonnées	26
Figure 2.5 : Influence de la numérotation sur la matrice de rigidité	28
Figure 2.6 : Exemple simple d'une armature de poutres articulée	31
 Chapitre 3 : <i>Réponse dynamique d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté</i>	 37
Figure 3.1 : modélisation d'un portique	45
Figure 3.2 : Echantillon de l'excitation sismique (m/s^2)	46
Figure 3.3 : Histoire temporelle du nœud 2 ou 3 (déplacement horizontal $u(m)$)	47
Figure 3.4 : Histoire temporelle du nœud 2 ou 3 (déplacement vertical $v(m)$)	47
Figure 3.5 : Histoire temporelle du nœud 2 ou 3 (rotation $\theta(rad)$)	48

Chapitre 4 : Etude des systèmes non linéaires	50
Figure 4.1 Quelques modèles de comportement	52
Figure 4.2 : Essai de Traction	53
Figure 4.3 : Les essais de traction	53
Figure 4.4 : Modèles élasto-plastique avec écrouissage	55
Figure 4.5 : Incrément de charge	55
Figure 4.6 : Cas où l'incrément est purement élastique	56
Figure 4.7 : Incrément élasto-plastique	56
Figure 4.8 : Projection sur le critère de plasticité	57
Chapitre 5 : Application numérique	64
Figure 5.1 : Structure à étudier	65
Figure 5.2 : Echantillon de l'excitation sismique simulée (m/s^2)	65
Figure 5.3 : réponse en déplacement horizontal (u) de la structure rigide.	66
Figure 5.4 : réponse en déplacement horizontal (u) de la structure souple.	68



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction générale

Pour des raisons pratiques (résistance, esthétique...), on limite souvent le domaine de fonctionnement normal des structures à des déplacements faibles, de sorte que des calculs linéaires suffisent à prédire leur comportement, il ne doit pas être perdu de vue que les structures réelles ont un comportement en général non-linéaire.

Les calculs dynamiques non-linéaires sont aujourd'hui assez couramment utilisés dans les applications avancées liées aux problèmes de sécurité. Nous les trouvons aussi bien dans les domaines de l'énergie, en particulier nucléaire, que dans le domaine de la défense, ou encore un peu plus récemment dans le domaine du transport terrestre.

En particulier, les calculs non-linéaires sont indispensables pour évaluer le comportement au moment de la ruine de la structure, ce qui fait très souvent partie maintenant des justifications indispensables avant construction du prototype ou à fournir dans les dossiers de calcul (crash en automobile, aviation, chemins de fer, conception d'emballages tels que ceux utilisés pour les ensembles électroniques ou les combustibles nucléaires).

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées par les ingénieurs afin de résoudre les problèmes mécaniques auxquels il est confronté, cette méthode est très avantageuse du point de vue quelle est très maniable par les ordinateurs. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions.

Dans le contexte de notre travail on s'intéresse à prédire le comportement non-linéaire d'une structure soumise à une excitation sismique.

Ce projet a été réalisé au laboratoire Dynamique des Structures et Génie Parasismique, département Génie Civil de l'Ecole Nationale Polytechniques d'Alger.

Ce mémoire de thèse comprend cinq chapitres :

Dans le *CHAPITRE 1*, nous allons voir les notions générales de la dynamique des structures, la formulation des équations de mouvement pour un seul degré de liberté, enfin on généralise pour plusieurs degrés de liberté.

Dans le *CHAPITRE 2*, nous allons expliciter les grandes lignes de la méthode des éléments finis nécessaires pour la détermination des caractéristiques mécanique du système.

L'objectif du *CHAPITRE 3*, est l'étude complète d'une structure, en statique linéaire, illustrée par des exemples de calcul.

Nous nous sommes intéressé dans le *CHAPITRE 4*, à la résolution de l'équation de mouvement ainsi qu'à la détermination de la réponse dynamique linéaire d'une structure à plusieurs degrés de liberté soumise à une excitation sismique comme exemple d'application.

Dans le *CHAPITRE 5*, on s'intéresse à l'étude non linéaire des systèmes mécaniques.

L'application numérique ainsi que les résultats sont interprétés dans le dernier chapitre.

Chapitre 1 :

Formulation des équations de mouvement

1.1- Introduction - Objectifs

Le but de ce chapitre est d'introduire quelques notions fondamentales de la dynamique des structures : définition, comparaison entre problème statique et dynamique, notions d'éléments finis pour finir par une formulation des équations de mouvement...

Le terme dynamique peut se définir : comme variable dans le temps ; une charge dynamique est donc une charge dont l'intensité, la direction ou le point d'application varient avec le temps. De même, la réponse de la structure à une charge dynamique – c'est à dire les déplacements et les contraintes qui en résultent – est également variable dans le temps, donc dynamique elle aussi.

1.2- Caractéristiques essentielles d'un problème dynamique

Un problème de dynamique des structures se distingue du problème statique correspondant par deux caractéristiques importantes. La première est, par définition, la nature évolutive du problème dynamique dans le temps. Comme la charge et la réponse varient dans le temps, il est évident qu'un problème dynamique n'a pas qu'une seule solution. A chaque instant (t), on doit déterminer une succession de solutions qui constituent la réponse de notre structure.

Soit une barre simple soumise à une charge statique P (*fig.1.1.a*), le moment fléchissant, l'effort tranchant et la déformée dépendent de la charge donnée et se calculent en fonction de P à l'aide des principes de l'équilibre des forces. Mais si la charge $P(t)$ est appliquée dynamiquement (*fig.1.1.b*), les moments fléchissant et les efforts tranchant de la barre doivent équilibrer les forces extérieures et les forces d'inertie qui résultent des accélérations de la barre.

Ces forces d'inertie, qui s'opposent de la sorte aux accélérations de la structure, constituent la caractéristique distinctive la plus importante des problèmes de dynamique des structures. On peut dire que si les mouvements sont si lents que les forces d'inertie sont négligeables, le calcul pourra s'effectuer statiquement (quasi-statique). Si en revanche les forces d'inertie représentent une part sensible de la charge totale, il faut alors tenir compte du caractère dynamique du problème.

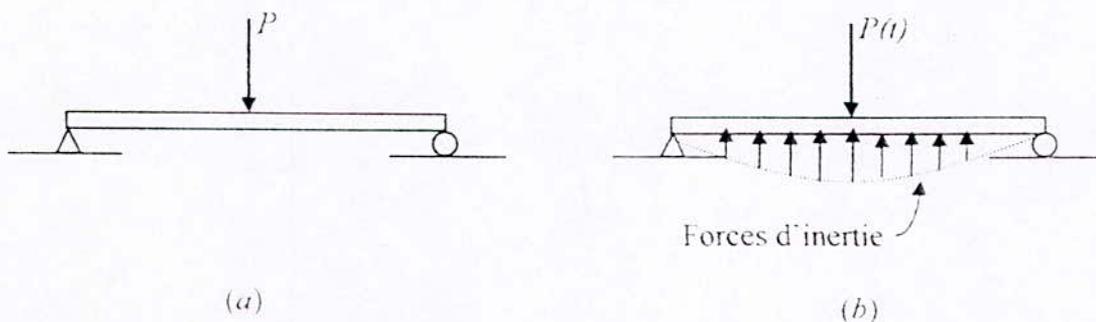


Figure 1.1 : Distinction fondamentale entre une charge statique et une charge dynamique :
(a) chargement statique ; (b) chargement dynamique.

1.3- Discrétisation des systèmes par éléments finis

La méthode des éléments finis procure une idéalisation pratique et sûre d'un système mécanique, très utilisés pour les calculs des structures vu sa souplesse pour des calculs par ordinateur.

L'idéalisation du type « éléments finis » est applicable à des structures de tous genre : structures en treillis, plaques ou coques...

La première étape de modélisation par éléments finis d'une structure quelconque, soit par exemple la poutre sur (fig.1.2), consiste à la diviser en un certain nombre de segments, ou éléments. Leur taille est arbitraire. Les extrémités des segments, sont également leurs points de jonction, sont appelés *points nodaux*. Les déplacements de ces points nodaux sont alors pris pour coordonnées généralisées de la structure.

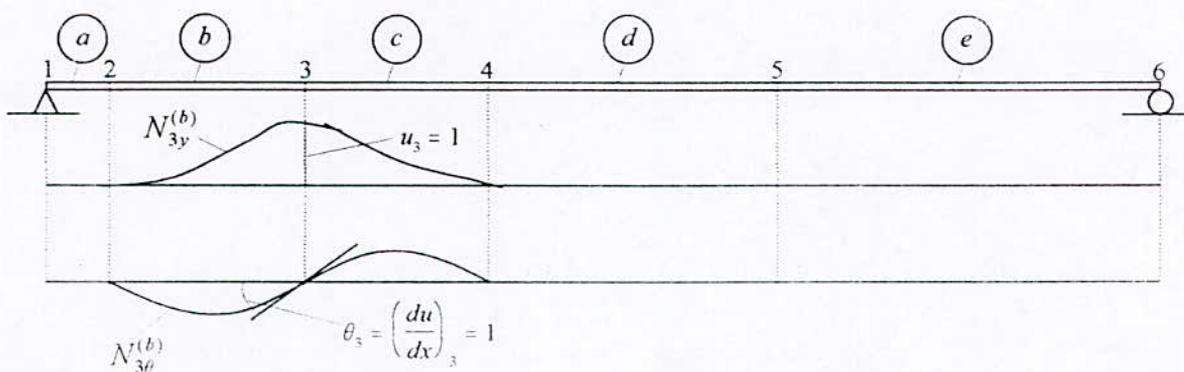


Figure 1.2 : Coordonnées typiques d'une représentation de poutre par éléments finis.

Les déplacements de chaque point de la structure complète peuvent alors s'exprimer en fonction de ces coordonnées généralisées par l'intermédiaire d'un certain ensemble de fonctions de déplacements choisies, en utilisant une expression de type :

$$u(x) = \sum_n Z_n N_n(x) \quad (1.1)$$

avec :

$u(x)$: fonction déformée

Z_n : coordonnées généralisés

$N_n(x)$: fonction d'interpolation.

1.4- Principes de formulation des équations de mouvement

L'objectif initial de l'étude dynamique des structures est la détermination de l'histoire dans le temps des déplacements d'une certaine structure soumise à un chargement donné et variable dans le temps.

Les expressions mathématiques qui définissent les déplacements dynamiques sont appelées *équation du mouvement de la structure* ; la résolution de ces équations donne les histoires des déplacements recherchés.

La formulation des équations du mouvement d'un système quelconque peut être présentée par les trois principes suivants :

1.4.1- Principe d'Alembert

Les équations du mouvement d'un système dynamique quelconque sont données par la deuxième loi de NEWTON : « Le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse est égal à la force qui lui appliquée ». On peut alors exprimer ce principe mathématiquement par l'équation :

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{du}{dt} \right) \quad (1.2)$$

$P(t)$: Le vecteur de la force appliquée

$u(t)$: Le vecteur position de la masse m .

Dans la plupart des problèmes de dynamique des structures on peut supposer que la masse ne varie pas avec le temps, d'où l'équation :

$$P(t) = m \frac{d^2 u}{dt^2} \equiv m \ddot{u}(t) \quad \Leftrightarrow \quad P(t) - m \ddot{u}(t) = 0 \quad (1.3)$$

Le terme $m \ddot{u}(t)$ est appelé *force d'inertie* qui s'oppose à l'accélération de la masse.

1.4.2- Principe des déplacements virtuels

Ce principe peut s'exprimer comme suit : si un système qui est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, est soumis à un déplacement virtuel, c'est-à-dire à un déplacement quelconque compatible avec les liaisons du système, alors le travail total effectué par les forces est nul. Par conséquent ceci est traduit par l'expression d'un équilibre.

1.4.3- Principe de Hamilton

Cette méthode consiste à utiliser les grandeurs énergétiques scalaires sous une forme variationnelle. Le principe de HAMILTON explique que la somme de la variation d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatives, prise pendant un intervalle de temps entre t_1 à t_2 est identiquement nulle.

On peut alors exprimer ce principe par l'équation :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1.4)$$

Avec :

T : Energie cinétique totale du système.

V : Energie potentielle du système, comprenant à la fois l'énergie de la déformation et le potentiel de toutes les forces conservatives extérieurs.

W_{nc} : Travail effectué par les forces non conservatives agissant sur le système, c'est-à-dire l'amortissement et toutes les autres charges extérieurs arbitraires.

δ : Variation subie pendant l'intervalle de temps considéré.

Le principe de HAMILTON peut être appliqué aux problèmes de la statique, d'où l'annulation de l'énergie cinétique ($T=0$) et on aura l'équation suivante :

$$\delta(V - W_{nc}) = 0 \quad (1.5)$$

D'où le principe du minimum de l'énergie potentielle souvent utilisé pour des analyses statiques.

1.4.4- Récapitulation

L'équation du mouvement d'un système dynamique pouvait se formuler par l'une des trois méthodes possibles présentées, qui diffèrent en principe de base mais ils ont le même objectif.

Principe de Hamilton

Permet d'éviter les problèmes de détermination des équations vectorielles de l'équilibre pour cela elle consiste à utilisé les grandeurs énergétiques sous forme variationnelle.

Principe des déplacements virtuelles

Il nous facilite l'expression des forces agissant sur une structure qui comprend plusieurs points massiques (corps finis), liés entre eux en fonction des degrés de liberté de déplacements.

Principe d'Alembert

Il consiste à écrire directement l'équilibre dynamique de toutes les forces agissant sur le système, en tenant compte des effets d'inertie.

En général, on peut dire que le choix de la méthode dépendra de la nature du système dynamique considéré.

1.5- Formulation des équations de mouvement

La détermination des équations de mouvement d'un système soumis à un chargement dynamique peut se faire à l'aide des différents principes déjà exposé précédemment.

1.5.1- Composants du modèle dynamique élémentaire

Les caractéristiques physiques essentielles de toute structure élastique linéaire soumise à des charges de nature dynamique sont : sa masse, ses propriétés élastiques (souplesse ou rigidité), son mécanisme de déperdition d'énergie, ou amortissement, et la source extérieure d'excitation ou chargement.

Dans le modèle le plus simple de système à un degré de liberté, chacune de ces caractéristiques est supposée condensée dans un élément physique unique: la (fig.1.3.a) montre un schéma d'un tel système.

Toute la masse m de ce modèle simple est localisée dans le bloc rigide. La résistance élastique au déplacement et représentée par le ressort sans masse de rigidité k , et le mécanisme de déperdition d'énergie par l'amortisseur c . Le mécanisme de chargement externe qui provoque la réponse dynamique du système est la charge $p(t)$ variable dans le temps. Dans ce cas le déplacement u est l'unique coordonnée définissant la position de cette masse.

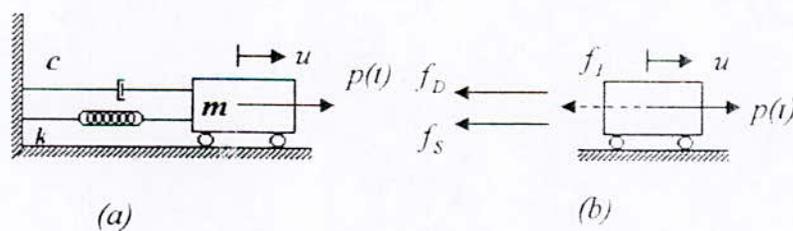


Figure 1.3 : Système idéalisé à un degré de liberté

(a) : Composants élémentaires.

(b) : Forces participant à l'équilibre.

1.5.2- Méthodes de formulation

Pour mieux éclaircir la formulation des équations de mouvement, on se propose d'étudier en premier lieu un système à un degré de liberté (masse, ressort et amortissement) puis une formulation généralisée pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté.

1.5.2.1- Cas d'un seul degré de liberté

L'équation du mouvement du système (*fig.1.3.a*) s'obtient par n'importe lequel des trois principes formulant les équations du mouvement. Dans ce cas élémentaire, la méthode la plus simple consiste à exprimer directement l'équilibre de toutes les forces agissantes sur la masse. Comme on le montre en (*fig.1.3.b*), les forces agissant suivant la direction du degré de liberté de déplacement le chargement appliqué $p(t)$ et trois forces engendrées par le mouvement : la force d'inertie f_I , la force d'amortissement f_D et la force de rappel du ressort élastique f_S . L'équation du mouvement exprime tout simplement l'équilibre de ces forces, et s'écrit :

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \quad (1.6)$$

Chacune des forces figurant au premier membre de cette équation est fonction du déplacement u ou de ses dérivées par rapport au temps ; le sens positif de ces forces a été délibérément choisi de manière à correspondre au sens des déplacements négatifs, car elles s'opposent aux chargements positifs appliqués à la masse.

1.5.2.1.1- Force de rappel

Elle est définie, par le produit de la rigidité du ressort et du déplacement, d'où l'équation :

$$f_S = ku \quad (1.7)$$

1.5.2.1.2- Force d'inertie

Via le principe d'Alembert, la force d'inertie est le produit de la masse et de l'accélération :

$$f_I = m\ddot{u} \quad (1.8)$$

1.5.2.1.3- Force d'amortissement

Enfin en supposant un mécanisme d'amortissement visqueux, la force d'amortissement est le produit de la constante d'amortissement c et de la vitesse :

$$f_D = c\dot{u} \quad (1.9)$$

1.5.2.1.4- Equation du mouvement

En reportant les trois équations précédentes dans (éq.1.6). On obtient l'équation du mouvement de ce système, à un degré de liberté comme suite :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{1.10}$$

1.5.2.2- Cas de plusieurs degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté de la structure est défini comme étant le nombre de paramètres indépendant qui peuvent définir entièrement la position du système quelque soit l'instant t du mouvement . il est aussi défini comme étant le nombre de déplacements indépendant du système considéré .

L'équation du mouvement du système s'exprime en écrivant l'équilibre des forces effectivement associées à chaque degré de liberté. En général on aura quatre (04) type de force à chaque nœud i : la force appliquée et les forces induites par le mouvement lui même , c'est à dire la force d'inertie f_{Ii} , la force d'amortissement f_{Di} et la force élastique f_{Si} .

Le système d'équations d'équilibre s'écrit donc :

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\ f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} &= p_2(t) \\ f_{I3} + f_{D3} + f_{S3} &= p_3(t) \\ \dots\dots\dots \\ f_{Ii} + f_{Di} + f_{Si} &= p_i(t) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ou bien sous la forme matricielle :

$$\{F_I\} + \{F_D\} + \{F_S\} = \{P(t)\} \tag{1.12}$$

1.5.2.2.1- Force de rappel

Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté la composante élastique de la force au point (i) s'exprime en fonction des déplacements de tous les points de la structure .

Donc :

$$\begin{aligned} f_{S1} &= k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + \dots\dots\dots + k_{1N}u_N \\ f_{S2} &= k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + \dots\dots\dots + k_{2N}u_N \\ \dots\dots\dots \\ f_{SN} &= k_{N1}u_1 + k_{N2}u_2 + k_{N3}u_3 + \dots\dots\dots + k_{NN}u_N \end{aligned} \tag{1.13}$$

où les coefficients (k_{ij}) sont appelés coefficients d'influence de rigidité :

$$k_{ij} = \begin{cases} \text{force correspondant à la coordonnée } (i) \\ \text{produite par un déplacement unité de la coordonnée } (j) \end{cases}$$

Ces expressions supposent que la structure à un comportement linéaire et que le principe de superposition s'applique .

L'expression des forces (f_{Si}) peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \\ \dots \\ f_{Si} \\ \dots \\ f_{SN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2i} & \dots & k_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Ni} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

soit, de (éq.1.14) :

$$\{f_{Si}\} = [K]\{u\} \quad (1.15)$$

$[K]$: Matrice de rigidité de la structure (pour l'ensemble des déplacements choisis)

$\{u\}$: Vecteur représentant le déplacement des nœuds appelé *vecteur des déplacements nodaux* de la structure .

1.5.2.2.2- Force d'amortissement

De la même manière précédente on exprimera les forces d'amortissement (f_{Di}) au moyen des coefficients d'influence d'amortissement et des taux d'accroissement (vitesse) via la relation matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \\ \dots \\ f_{Di} \\ \dots \\ f_{DN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{Ni} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dots \\ \dot{u}_i \\ \dots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

où les coefficients (c_{ij}) sont appelés coefficients d'influence d'amortissement :

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{force correspondant à la coordonnée } (i) \\ \text{produite par une vitesse unité suivant la coordonnée } (j) \end{cases}$$

soit, de (éq.1.16) :

$$\{f_D\} = [C]\{\dot{u}\} \quad (1.17)$$

$[C]$: Matrice d'amortissement de la structure (pour l'ensemble des déplacements choisis)
 $\{\dot{u}\}$: Vecteur vitesse .

1.5.2.2.3- Force d'inertie

On exprimera les forces d'amortissement f_{1i} au moyen des coefficients d'influence de masse, liant les accélérations de chaque degré de liberté à la résultante correspondante des forces d'inertie.

Ainsi :

$$\begin{Bmatrix} f_{I1} \\ f_{I2} \\ \dots \\ f_{Ii} \\ \dots \\ f_{IN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1i} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2i} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ii} & \dots & m_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{Ni} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \dots \\ \ddot{u}_i \\ \dots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \quad (1.18)$$

$m_{ij} = \begin{cases} \text{force correspondant à la coordonnée } (i) \\ \text{produite par une accélération unité de la coordonnée } (j) \end{cases}$

soit, de l'équation (éq.1.18) :

$$\{f_I\} = [M]\{\ddot{u}\} \quad (1.19)$$

$[M]$: Matrice masses de la structure (pour l'ensemble des déplacements choisis)
 $\{\ddot{u}\}$: Vecteur accélérations.

Finalement on peut exprimer l'équilibre dynamique globale de la structure sous la forme :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \quad (1.20)$$

La dimension des matrices représentées correspond nombre de degrés de liberté utilisé , pour décrire la déformée de la structure . Cette équation exprime donc les (n) équations d'équilibre relatives aux (n) degrés de liberté choisis pour définir la réponse.

Exemple 1

On se propose de calculer la matrice de rigidité ainsi que la matrice masse d'une poutre (barre de type Hermite), cas de la flexion simple.

Représentée sur (fig.1.4).

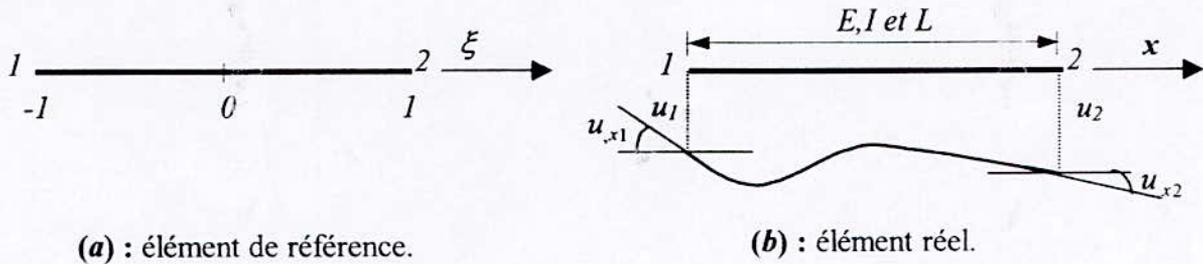


Figure 1.4 : Flexion simple d'une poutre.

On choisit, la base polynomiale : $\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \rangle$ (vu le nombre de degré de liberté).

De même la relation entre x et ξ est donnée par :

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2 \quad (x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les coordonnées de } 1 \text{ et } 2 \text{ de l'élément réel (fig.1.4))}$$

cette relation est obtenue pour :

$$\text{si } x = x_1 \Rightarrow \xi = \xi_1 = -1$$

$$\text{et si } x = x_2 \Rightarrow \xi = \xi_2 = 1$$

$$\text{avec : } L = x_2 - x_1; \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2}$$

On a : $u = \langle N \rangle \langle u_n \rangle$ (u est la déformée générale d'une poutre) ; $\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle$;

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \quad (u_{,x})_1 \quad u_2 \quad (u_{,x})_2 \rangle \text{ donc } \langle P_n \rangle = \left\langle P(x_1) \quad \left(\frac{\partial P(x)}{\partial x} \right)_{x=x_1} \quad P(x_2) \quad \left(\frac{\partial P(x)}{\partial x} \right)_{x=x_2} \right\rangle$$

$$\text{alors : } P(x_i) = P(\xi_i) \text{ et } \left(\frac{\partial P(x)}{\partial x} \right)_{x_i} = \left(\frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi_i} \cdot \frac{d\xi}{dx}$$

On peut obtenir :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} \langle P(\xi_1) \rangle \\ \left\langle \frac{2}{L} \left(\frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi_1} \right\rangle \\ \langle P(\xi_2) \rangle \\ \left\langle \frac{2}{L} \left(\frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi_2} \right\rangle \end{bmatrix} ; i, j = 1, 2, \dots, n_d \cdot \left\langle \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \right\rangle = \langle 0 \quad 1 \quad 2\xi \quad 3\xi^2 \rangle$$

$$\text{Avec : } \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \text{ d'où : } [P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{L}{2} & -4 & \frac{L}{6} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{L}{2} & 4 & \frac{L}{6} \end{bmatrix}, \text{ alors : } [P_n]^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & \frac{L}{2} & 2 & -\frac{L}{2} \\ -3 & -\frac{L}{2} & 3 & -\frac{L}{2} \\ 0 & -\frac{L}{2} & 0 & \frac{L}{2} \\ 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

On peut alors, déterminer les fonctions d'interpolations N sur l'élément de référence par :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \Rightarrow \langle N(\xi) \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$$

La relation entre les déplacements nodaux et les déformations est donnée par :

$$\varepsilon = \langle B \rangle \{u_n\}$$

Mais, pour le cas de la flexion simple on a : $\varepsilon = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle N \rangle \{u_n\}$. Alors :

$$\langle B \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle N \rangle = \frac{\partial^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \partial \xi^2} \langle N \rangle = \frac{4}{L^2} \left\langle \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} \right\rangle$$

On peut résumer les résultats précédents dans le tableau ci-dessous :

N_i	$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2}$
$\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)$	$\frac{3}{2}\xi$
$\frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi)$	$\frac{L}{4}(-1+3\xi)$
$\frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)$	$-\frac{3}{2}\xi$
$\frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi)$	$\frac{L}{4}(1+3\xi)$

Tableau.2.1 : Fonctions d'interpolations et dérivées

La matrice d'élasticité $[H]$ liant contraintes déformations, pour le cas de la flexion simple est :

$$[H] = EI$$

E : Module de Young

I : Moment d'inertie de la section.

Alors les matrices élémentaires de rigidité et masse peuvent être obtenu par :

$$[k] = \int_{-1}^1 \{B\} [H] \langle B \rangle \frac{L}{2} d\xi ; [m] = \rho A \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \{N\} \langle N \rangle d\xi$$

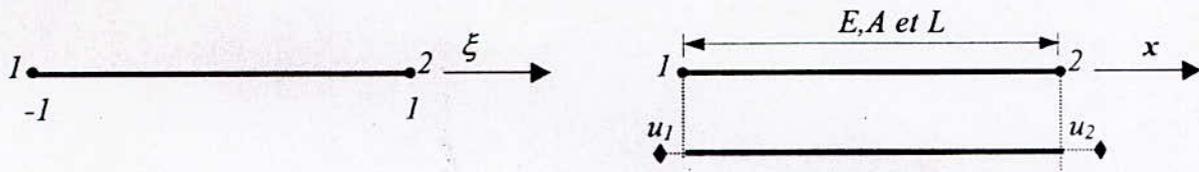
ρ : masse volumique

A : section de la barre.

Après calcul, on obtient :

$$[k] = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} ; [m] = \rho A \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Exemple 2



(a) : élément de référence.

(b) : élément réel.

Figure 1.5 : Traction compression d'une barre.

On choisit la base polynomiale : $\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \rangle$

De même la relation entre x et ξ est :

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \quad (x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les coordonnées de } 1 \text{ et } 2 \text{ de l'élément réel (fig. 1.5))}$$

cette relation est obtenue pour :

si $x = x_1 \Rightarrow \xi = \xi_1 = -1$

et si $x = x_2 \Rightarrow \xi = \xi_2 = 1$

avec : $L = x_2 - x_1$;

On a : $u = \langle N \rangle \{u_n\}$; $\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \rangle$;

$\{u_n\} = \{u_1 \quad u_2\}$ donc $\langle P_n \rangle = \langle P(x_1) \quad P(x_2) \rangle$

alors : $P(x_i) = P(\xi_i)$

On peut obtenir :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} \langle P(\xi_1) \rangle \\ \langle P(\xi_2) \rangle \end{bmatrix} ; i, j = 1, 2, \dots, n_d.$$

Avec : $\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, d'où : $[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, alors : $[P_n]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

On peut alors, déterminer les fonctions d'interpolations N sur l'élément de référence par :

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \Rightarrow \langle N(\xi) \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} = \frac{1}{2} \langle 1-\xi \quad 1+\xi \rangle$$

La relation entre les déplacements nodaux et les déformations est donnée par :

$$\varepsilon = \langle B \rangle \{u_n\}$$

Mais, pour le cas de la traction-compression on a : $\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{L} = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$. Alors :

$$\langle B \rangle = \frac{1}{L} \langle -1 \quad 1 \rangle$$

La matrice d'élasticité $[H]$ liant contraintes déformations, pour ce cas est :

$$[H] = EA$$

E : Module de Young

A : Section de la barre.

La matrice Jacobi est donnée par :

$$[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$$

Alors la matrice de rigidité ainsi que la matrice masse peuvent être obtenus par :

$$[k] = \int_{-1}^1 \{B\} [H] \langle B \rangle \det(J) d\xi ; [m] = \rho A \int_{-1}^1 \{N\} \langle N \rangle \det(J) d\xi$$

ρ : Masse volumique

Après calcul, on obtient :

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; [m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Chapitre 2 :

**Etude statique
linéaire**

2.1- Introduction - Objectifs

Le but de ce chapitre est de déterminer les différents processus ou étapes, pour faire une étude complète d'une structure dans le cas statique linéaire.

Pour cela on se propose d'étudier en premier lieu, un portique simple où on essaiera de déterminer ces caractéristiques (matrice masse et rigidité). Ensuite, on passe à un autre exemple où on va exposer : la résolution de l'équation de l'équilibre statique, méthodes de résolution...

Cette étude constituera une bonne base à une étude dynamique plus complexe.

2.2- Exemple 1 (étude d'un portique)

2.2.1- Présentation et modélisation de la structure

Après toutes études par éléments finis, une modélisation adéquate de la structure est obligatoire montrant : les nœuds, les éléments et les différents liaisons de structure (fig.2.1).

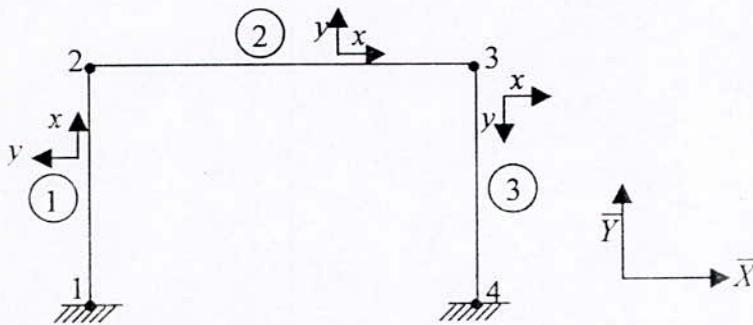


Figure 2.1 : modélisation d'un portique

Avec :

E_i : Module de Young de l'élément i

A_i : Section de l'élément i

F : Vecteur force appliqué

L_i : Longueur de l'élément i

$$\begin{cases} E_1 = A_1 = I_1 = L_1 = \rho_1 = 1 \\ E_2 = 4, L_2 = 2, I_2 = A_2 = \rho_2 = 1 \\ E_3 = A_3 = I_3 = L_3 = \rho_3 = 1 \end{cases}$$

2.2.2- Détermination des matrices masse et rigidité dans le repère local

Toute structure est composée par des éléments différents (voir, chapitre 1 : 1.2- Discrétisation des systèmes par éléments finis) où le type d'élément choisi, dépend de la nature de la structure (treillis, plaque, coques...) et du problème lui même (1D, 2D ou 3D...).

Dans notre cas, tous les éléments sont identiques, où chaque élément travail en flexion composée : traction-compression et flexion (**fig.2.2**).

La méthode des éléments finis nous permet de déterminer les matrices caractéristiques (masse, rigidité...) pour chaque élément réel, ainsi l'assemblage de ces matrices fourni les matrices globales de la structure. Le travail de détermination des matrices caractéristiques de chaque élément réel n'est pas facile (par programmation), pour cela on parlera d'élément de référence (voir, chapitre 2 : 2.2.2- éléments de référence), où il suffit, de déterminer les matrices caractéristiques pour seulement cette élément. Ainsi, en programmation on peut réaliser une bibliothèque d'éléments de références qui nous permet de mieux idéaliser des structures complexes.

Pour la détermination des matrices globales de la structure, on va étudier un élément de notre structure dans son repère local : le repère local est le repère (x, y) de la barre définie par la fibre neutre de la barre. L'axe (x) est orienté du nœud début au nœud fin et l'axe (y) directement perpendiculaire à l'axe (x) .

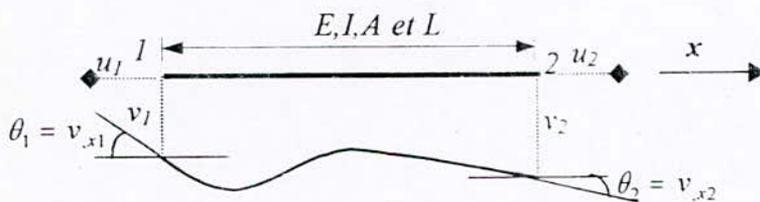


Figure 2.2 : Flexion composée d'une poutre.

Pour cet exemple les caractéristiques massique et élastique de chaque élément sont donnés par :

2.2.2.1- Matrice de rigidité

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

avec : $\langle u \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \rangle$

- E : est la module de Young
- I : est l'inertie de la poutre
- A : est la section de la poutre
- L : est la longueur de la poutre
- $\langle u \rangle$: vecteur des déplacements nœuds, dans le repère local

2.2.2.2- Matrice des masses

Pour une étude statique, en réalité on n'a pas besoin de calculer la matrice masse, cet exposé sur les matrices masses sera utile dans l'étude dynamique.

2.2.2.2.1- Cas des masses concentrées

A fin de simplifier la représentation des caractéristiques d'une structure on supposera qu'elle est constituée de masses concentrées aux points de définition des déplacements en translation .

On supposera que la structure est constituée d'un nombre fini de segments, la masse de chaque segment est concentrée aux nœuds , leurs répartition étant déterminée par les règles de la statique.

La masse de chaque nœud sera alors, la somme des contributions nodales de chacun des segment concourant ce nœud, on illustrera cette idée dans la figure (fig.2.3)

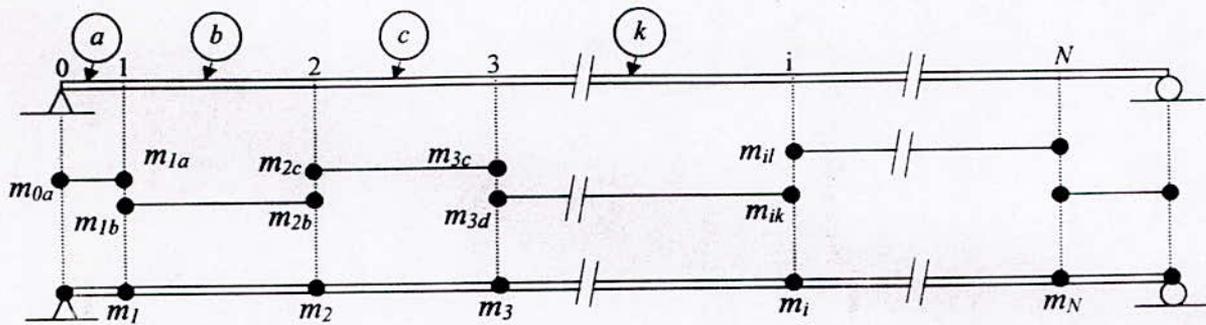


Figure 2.3 : Concentration de la masse aux nœuds d'une poutre.

Pour le système schématisé si dessus, dont on n'a considérer que les degrés de liberté de translation. La matrice masse s'écrira sous une forme diagonale :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_N \end{bmatrix}$$

Pour notre cas la matrice masse concentrée s'écrira sous la forme :

$$[m] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

- ρ : est la masse volumique
- A : est la section de la poutre
- L : est la longueur de la poutre

2.2.2.2.- Cas des masses cohérentes

Dans le cas général la matrice des masses cohérentes est donnée par la relation (voir, chapitre 2 : 2.4- Détermination des différentes caractéristiques d'un système) :

$$[m] = \int_{V''} \rho [N]^T [N] dV \tag{2.1}$$

$[N]$: fonctions d'interpolations.

d'où :

$$[m] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{156}{420} & \frac{22L}{420} & 0 & \frac{54}{420} & -\frac{13L}{420} \\ 0 & \frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} & 0 & \frac{13L}{420} & -\frac{3L^2}{420} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{54}{420} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{156}{420} & -\frac{22L}{420} \\ 0 & -\frac{13L}{420} & -\frac{3L^2}{420} & 0 & -\frac{22L}{420} & \frac{4L^2}{420} \end{bmatrix}$$

2.2.3- Détermination des matrices masse et rigidité dans le repère global

Le repère global est le repère (X, Y) de la structure. Il sert à définir les coordonnées des nœuds, les réaction d'appuis et les déplacements nodaux.

Dans les cas courant, les membres barres forment des angles entres eux (fig.2.4). Pour déterminer la matrice de rigidité de la structure complète, il est nécessaire d'écrire celle de chaque élément dans le système global de coordonnée adopté pour toute la structure et non celui de cet élément.

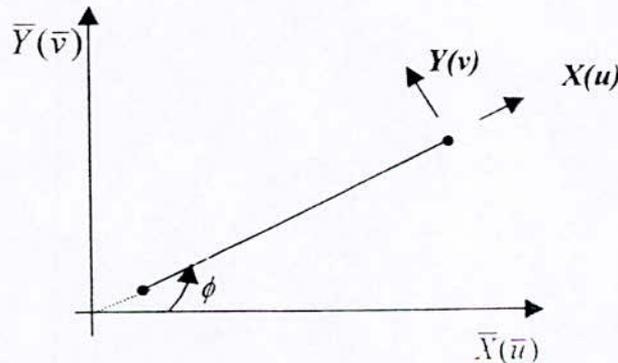


Figure 2.4 : Système de coordonnées.

Dans la (fig.2.4) les axes X, Y représentent le système local de l'élément barre et \bar{X}, \bar{Y} le système global, les déplacements respectifs étant u, v et \bar{u}, \bar{v} et les forces F_x, F_y et \bar{F}_x, \bar{F}_y .

On a pour un vecteur $\langle \bar{X} \rangle = \langle \bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \rangle$ écrit dans le repère globale et qui correspond à un vecteur $\langle X \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \rangle$ écrit dans le repère local, la formulation suivante :

$$\{X\} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{X}\} \Leftrightarrow \{X\} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{X}\} \Leftrightarrow \{X\} = [T]\{\bar{X}\}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \lambda = \cos(\theta) \\ \mu = \sin(\theta) \end{cases}$$

Donc le vecteur force appliqué à la structure vérifie l'équation :

$$\{F\} = [T]\{\bar{F}\} \text{ tel que } [T] \text{ est la matrice de changement de base ou de passage.}$$

Par le billé des propriétés matricielles d'une matrice orthogonale $[T]^{-1} = [T]^T$, nous avons :

$$\begin{aligned} \{F\} = [k]\{u\} &\Leftrightarrow [T]^T\{F\} = [T]^T[k]\{u\} \quad (\text{car } \{F\} = [T]\{\bar{F}\}) \Leftrightarrow \{\bar{F}\} = [T]^T[k]\{u\} \\ &\Leftrightarrow \{\bar{F}\} = [T]^T[k][T]\{\bar{u}\} \end{aligned}$$

$$\text{mais on a : } \{\bar{F}\} = [\bar{k}]\{\bar{u}\}$$

$$\text{alors } [\bar{k}] = [T]^T[k][T]$$

et de la même manière en utilisant l'équation dynamique du mouvement (éq.1.20), on trouve :

$$[\bar{m}] = [T]^T[m][T]$$

où $[\bar{k}]$ et $[\bar{m}]$ sont les matrices rigidité et masse exprimées dans le repère global de l'élément.

Donc on peut dire qu'en premier lieu, la matrice de rigidité est établie dans le repère local en suite, elle doit être transformée dans le système de coordonnées globale avant de commencer le processus d'assemblage.

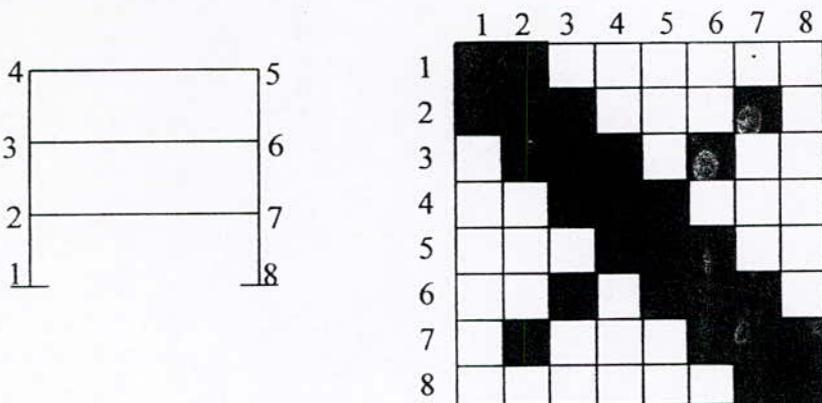
2.2.4- Assemblage des matrices élémentaires

Pour trouver les matrices rigidité et masse globale de la structure il faut assembler toutes les matrices constructives de chaque élément écrites dans le repère global, idem pour le vecteur de sollicitation élémentaire (f^e) donc : $[K] = \sum_{ele} [k^e] \quad ; [M] = \sum_{ele} [m^e] \quad ; \{F\} = \sum_{ele} \{f^e\}$

2.2.5- Influence de la numérotation des nœuds

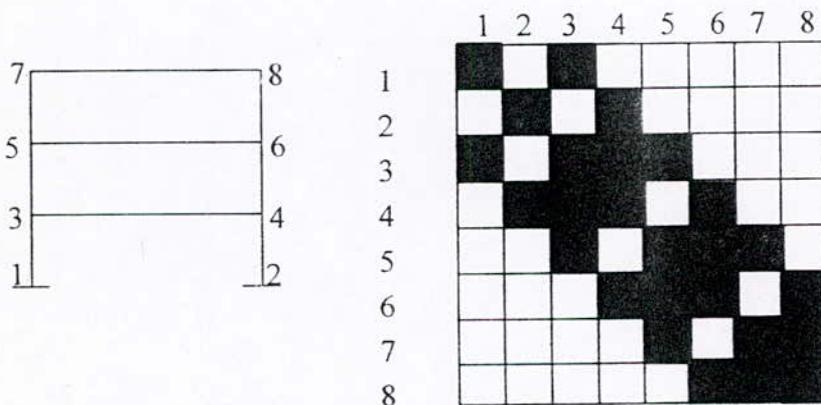
A fin de minimiser les calculs il est préférable de numérotter les nœuds de la structure de telle façon à obtenir une largeur de bande aussi petite que possible, pour cela on choisira une numérotation qui se fera de telle façon à ce que la différence maximale entre les numéros de deux nœuds de la même barre soit aussi petite que possible .

2.2.5.1- Exemple



Matrice de rigidité

a- Numérotation Aléatoire



Matrice de rigidité

b- Bonne Numérotation

Figure 2.5 : Influence de la numérotation sur la matrice de rigidité

2.2.6- Résultats du programme

Nous allons appliquer tous ce qui précède à notre programme (*MEF*), ainsi l'obtention de résultats numériques pour notre structure.

On prend les données suivante : $E = A = L = I$ (pour simplifier les calculs)

2.2.6.1- Résultats du programme (Matrices masses élémentaires en repère global)

2.2.6.1.1- Matrice masse de la barre N° (01)

0.33333E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.16667E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.37143E+00	0.52381E-01	0.00000E+00	0.12857E+00	-0.30952E-01
0.00000E+00	0.52381E-01	0.95238E-02	0.00000E+00	0.30952E-01	-0.71429E-02
0.16667E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.33333E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.12857E+00	0.30952E-01	0.00000E+00	0.37143E+00	-0.52381E-01
0.00000E+00	-0.30952E-01	-0.71429E-02	0.00000E+00	-0.52381E-01	0.95238E-02

2.2.6.1.2- Matrice masse de la barre N° (02)

0.49834E+00	-0.26937E-01	-0.74078E-01	0.20876E+00	0.26937E-01	0.43773E-01
-0.26937E-01	0.49834E+00	0.74078E-01	0.26937E-01	0.20876E+00	-0.43773E-01
-0.74078E-01	0.74078E-01	0.26937E-01	-0.43773E-01	0.43773E-01	-0.20203E-01
0.20876E+00	0.26937E-01	-0.43773E-01	0.49834E+00	-0.26937E-01	0.74078E-01
0.26937E-01	0.20876E+00	0.43773E-01	-0.26937E-01	0.49834E+00	-0.74078E-01
0.43773E-01	-0.43773E-01	-0.20203E-01	0.74078E-01	-0.74078E-01	0.26937E-01

2.2.6.1.3- Matrice masse de la barre N° (03)

0.37143E+00	0.00000E+00	0.52381E-01	0.12857E+00	0.00000E+00	-0.30952E-01
0.00000E+00	0.33333E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.16667E+00	0.00000E+00
0.52381E-01	0.00000E+00	0.95238E-02	0.30952E-01	0.00000E+00	-0.71429E-02
0.12857E+00	0.00000E+00	0.30952E-01	0.37143E+00	0.00000E+00	-0.52381E-01
0.00000E+00	0.16667E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.33333E+00	0.00000E+00
-0.30952E-01	0.00000E+00	-0.71429E-02	-0.52381E-01	0.00000E+00	0.95238E-02

2.2.6.2- Résultats du programme (Matrices de rigidité élémentaires en repère global) :

2.2.6.2.1- Matrice de rigidité de la barre N° (01)

0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.12000E+02	0.60000E+01	0.00000E+00	-0.12000E+02	0.60000E+01
0.00000E+00	0.60000E+01	0.40000E+01	0.00000E+00	-0.60000E+01	0.20000E+01
-0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-0.12000E+02	-0.60000E+01	0.00000E+00	0.12000E+02	-0.60000E+01
0.00000E+00	0.60000E+01	0.20000E+01	0.00000E+00	-0.60000E+01	0.40000E+01

2.2.6.2.2- Matrice de rigidité de la barre N° (02)

0.98995E+01	-0.70711E+01	-0.84853E+01	-0.98995E+01	0.70711E+01	-0.84853E+01
-0.70711E+01	0.98995E+01	0.84853E+01	0.70711E+01	-0.98995E+01	0.84853E+01
-0.84853E+01	0.84853E+01	0.11314E+02	0.84853E+01	-0.84853E+01	0.56569E+01
-0.98995E+01	0.70711E+01	0.84853E+01	0.98995E+01	-0.70711E+01	0.84853E+01
0.70711E+01	-0.98995E+01	-0.84853E+01	-0.70711E+01	0.98995E+01	-0.84853E+01
-0.84853E+01	0.84853E+01	0.56569E+01	0.84853E+01	-0.84853E+01	0.11314E+02

2.2.6.2.3- Matrice de rigidité de la barre N° (03)

0.12000E+02	0.00000E+00	0.60000E+01	-0.12000E+02	0.00000E+00	0.60000E+01
0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.10000E+01	0.00000E+00
0.60000E+01	0.00000E+00	0.40000E+01	-0.60000E+01	0.00000E+00	0.20000E+01
-0.12000E+02	0.00000E+00	-0.60000E+01	0.12000E+02	0.00000E+00	-0.60000E+01
0.00000E+00	-0.10000E+01	0.00000E+00	0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00
0.60000E+01	0.00000E+00	0.20000E+01	-0.60000E+01	0.00000E+00	0.40000E+01

2.2.6.3- Résultats du programme (Assemblage des matrices élémentaires)

2.2.6.3.1- Matrice masse globale

0.33E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.17E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.37E+00	0.52E-01	0.00E+00	0.13E+00	-0.31E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.52E-01	0.95E-02	0.00E+00	0.31E-01	-0.71E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.17E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.83E+00	-0.27E-01	-0.74E-01	0.21E+00	0.27E-01	0.44E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.13E+00	0.31E-01	-0.27E-01	0.87E+00	0.22E-01	0.27E-01	0.21E+00	-0.44E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-0.31E-01	-0.71E-02	-0.74E-01	0.22E-01	0.36E-01	-0.44E-01	0.44E-01	-0.20E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.21E+00	0.27E-01	-0.44E-01	0.87E+00	-0.27E-01	0.13E+00	0.13E+00	0.00E+00	-0.31E-01	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.27E-01	0.21E+00	0.44E-01	-0.27E-01	0.83E+00	-0.74E-01	0.00E+00	0.17E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.44E-01	-0.44E-01	-0.20E-01	0.13E+00	-0.74E-01	0.36E-01	0.31E-01	0.00E+00	-0.71E-02	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.13E+00	0.00E+00	0.31E-01	0.37E+00	0.00E+00	-0.52E-01	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.17E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.33E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-0.31E-01	0.00E+00	-0.71E-02	-0.52E-01	0.00E+00	0.95E-02	0.00E+00

2.2.6.3.2- Matrice de rigidité globale

0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00	-0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00							
0.00E+00	0.12E+02	0.60E+01	0.00E+00	-0.12E+02	0.60E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.60E+01	0.40E+01	0.00E+00	-0.60E+01	0.20E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
-0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.11E+02	-0.71E+01	-0.85E+01	-0.99E+01	0.71E+01	-0.85E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	-0.12E+02	-0.60E+01	-0.71E+01	0.22E+02	0.25E+01	0.71E+01	-0.99E+01	0.85E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.60E+01	0.20E+01	-0.85E+01	0.25E+01	0.15E+02	0.85E+01	-0.85E+01	0.57E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-0.99E+01	0.71E+01	0.85E+01	0.22E+02	-0.71E+01	0.14E+02	-0.12E+02	0.00E+00	0.60E+01	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.71E+01	-0.99E+01	-0.85E+01	-0.71E+01	0.11E+02	-0.85E+01	0.00E+00	-0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-0.85E+01	0.85E+01	0.57E+01	0.14E+02	-0.85E+01	0.15E+02	-0.60E+01	0.00E+00	0.20E+01	0.00E+00
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-0.12E+02	0.00E+00	-0.60E+01	0.12E+02	0.00E+00	-0.60E+01	0.00E+00
0.00E+00	-0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00	0.10E+01	0.00E+00	0.00E+00						
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.60E+01	0.00E+00	0.20E+01	-0.60E+01	0.00E+00	0.40E+01	0.00E+00

2.3- Exemple 2 (étude d'une armatures de poutres articulée)

2.3.1- Présentation et modélisation de la structure

On peut montrer le système articulé, modélisé sur la (fig.2.6) (cet exemple est repris de l'ouvrage *Introduction aux éléments finis*(ROCKEY) page24)

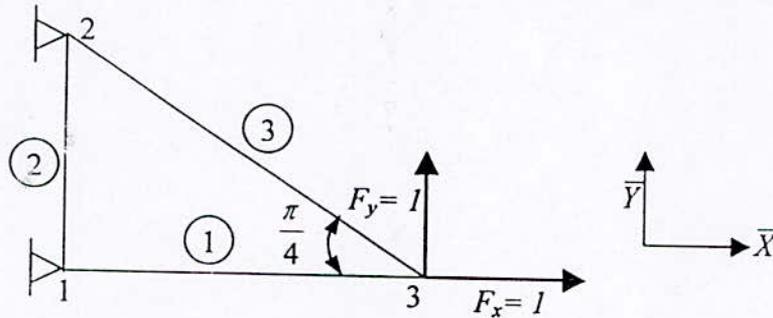


Figure 2.6 : Exemple simple d'une armature de poutres articulée.

Avec :

E_i : Module de Young de l'élément i

A_i : Section de l'élément i

F : Vecteur force appliqué

L_i : Longueur de l'élément i

$$\begin{cases} E_1 = A_1 = L_1 = \rho_1 = 1 \\ E_2 = L_2 = A_2 = \rho_2 = 1 \\ E_3 = A_3 = \rho_3 = 1, L_3 = \sqrt{2} \end{cases}$$

2.3.2- Equation de l'équilibre statique

L'équation de l'équilibre dynamique globale d'une structure (voir, chapitre 1 : formulation des équations de mouvement) est donnée par l'équation :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (1.20)$$

Dans le cas de la statique $\{\ddot{u}\} = \{\dot{u}\} = \{0\}$ et $\{F(t)\} = \{F\} = cste$ donc l'équation (éq.1.20) devient :

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (2.2)$$

L'équation (éq.2.2) est notée l'équation de l'équilibre statique.

2.3.3- Résolution théorique

Comme il existe (03) nœuds dans cette structure, avec chacun deux (02) degrés de liberté (déplacements suivant \bar{X} et \bar{Y}), les déplacements ainsi que les sollicitations – dans le repère globale – agissant sur la structure auront la forme suivante :

$$\{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{F}_{z1} \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{F}_{z2} \end{Bmatrix}, \{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 = 0 \\ \bar{v}_1 = 0 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 = 0 \\ \bar{v}_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

Avant d'assembler les matrices de rigidité des éléments constituant la structure, on doit d'abord déterminer leurs cosinus directeur (λ) et (μ) et se souvenant que l'angle de rotation (ϕ) est calculer dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On a alors :

Barre n°	L'angle (ϕ)	$\lambda = \cos(\phi)$	$\mu = \sin(\phi)$
01	0	1	0
02	$\pi / 2$	0	1
03	$3\pi / 4$	-0.707	0.707

Et comme la matrice de rigidité s'écrit sous la forme :

$$[\bar{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$[\bar{k}_1] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [\bar{k}_2] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}_3] = \frac{EA}{2L\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tel que :

$[\bar{k}]$: Matrice de rigidité dans le repère global pour un élément donnée

$[\bar{k}_i]$: Matrice de rigidité dans le repère globale de l'élément i

D'où la matrice de rigidité de la structure :

$$[\bar{K}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Avec l'équation : $[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{\bar{F}\}$

Et d'après les conditions aux limites ($\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{u}_3 = \bar{v}_3 = 0$) on aura :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x_2} \\ \bar{F}_{y_2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix}$$

En inversant le système on aurais alors :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x_2} \\ \bar{F}_{y_2} \end{Bmatrix}$$

Pour L , E , A et F unitaires on trouve :

$$\begin{cases} \bar{u}_2 = 2 \\ \bar{v}_2 = 4.82 \end{cases}$$

2.3.4- Résolution numérique

Le système sera résolu en résolvant l'équation de l'équilibre statique (éq.2.2). Premièrement l'introduction des conditions aux limites, ensuite la résolution du système linéaire par notre programme (MEF).

2.3.4.1- Conditions aux limites (méthode de pénalité)

Après assemblage de la matrice $[K]$ et du vecteur $\{F\}$ du système. L'introduction des conditions aux limites, consiste à mettre les valeurs des déplacements connus dans le vecteur $\{U\}$ tel que :

$$u_i = \bar{u}_i \quad (2.3)$$

Où u_i est la composante i du vecteur $\{U\}$ dont la valeur est connue ($= \bar{u}_i$).

La condition (éq.2.3) peut être introduite directement dans (éq.2.2) en modifiant $[K]$ et $\{F\}$.

Pour cela on présente la méthode de pénalité conservant les dimensions de $[K]$ et $\{F\}$.

Cette méthode consiste à représenter (éq.2.2) et (éq.2.3) par la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_i + R_i \\ \dots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

avec :

$$R_i = G(\bar{u}_i - u_i) \quad (2.5)$$

soit :

$$\bar{u}_i - u_i = \frac{R_i}{G} \quad (2.6)$$

Où u_i tend vers \bar{u}_i quand G est relativement grand.

La relation (éq.2.3) est représentée sous forme pénalisée et R_i représente la force externe appliquée permettant de satisfaire la condition (éq.2.3) et (éq.2.6). G est appelé *terme de pénalisation*. Les $n+1$ relations (éq.2.4) et (éq.2.5) permettent d'obtenir les n inconnues $\{u\}$ et l'inconnu R_i . Ces inconnues peuvent être obtenues de la façon suivante :

- Evaluation des n composantes $\{U\}$: en substituant (éq.2.5) dans (éq.2.4) :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} + G & \dots & k_{in} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_i + \bar{u}_i G \\ \dots \\ f_n \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

où G est relativement grand par rapport à k_{ii}

- Evaluation de la réaction R_i par (éq.2.5)

2.3.4.2- Résolution des systèmes linéaire

Après assemblage et l'introduction des conditions aux limites, la résolution de (éq.2.2) conduit :

$$\{U\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (2.8)$$

La résolution de (éq.2.2) est effectuée en deux étapes sans construire l'inverse de $[K]$:

- Triangularisation ou décomposition de $[K]$:

$$[K] = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ L & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & D & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & V \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$[L]$: Matrice triangulaire inférieure avec $L_{ii}=1$

$[D]$: Matrice diagonale

$[V]$: Matrice triangulaire supérieure avec $V_{ii}=1$

avec : $\det([K])=D_{11} D_{22} \dots D_{nn}$

- Obtention de $\{U\}$:

Le vecteur $\{U\}$ est obtenu par substitution en exploitant les caractéristiques des matrices triangulaires $[L]$ et $[V]$:

Substitution avant :

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ L & & & \end{bmatrix} \{Y\} = \{F\} \quad (2.10)$$

Substitution arrière :

$$[D][V]\{U\} = \{Y\} \quad (2.11)$$

$$\begin{bmatrix} & & & V \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1/D_{11} \\ \dots \\ Y_n/D_{nn} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3.4.3- Résultats du programme

Pour les données suivante : $E = A = L = F = \text{unité}$

on a :

----- ASSEMBLAGE (Détermination des matrice élémentaires)-----

2.3.4.3.1- Matrice de rigidité élémentaire de la barre N° (01)

0.10000E+01	0.00000E+00	-0.10000E+01	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
-0.10000E+01	0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

2.3.4.3.2- Matrice de rigidité élémentaire de la barre N° (02)

0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	0.10000E+01	0.00000E+00	-0.10000E+01
0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
0.00000E+00	-0.10000E+01	0.00000E+00	0.10000E+01

2.3.4.3.3- Matrice de rigidité élémentaire de la barre N° (03)

0.35355E+00	-0.35355E+00	-0.35355E+00	0.35355E+00
-0.35355E+00	0.35355E+00	0.35355E+00	-0.35355E+00
-0.35355E+00	0.35355E+00	0.35355E+00	-0.35355E+00
0.35355E+00	-0.35355E+00	-0.35355E+00	0.35355E+00

2.3.4.3.4- Matrice de rigidité globale

0.1000E+01	0.0000E+00	-.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
0.0000E+00	0.1000E+01	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	-.1000E+01
-.1000E+01	0.0000E+00	0.1354E+01	-.3536E+00	-.3536E+00	0.3536E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	-.3536E+00	0.3536E+00	0.3536E+00	-.3536E+00
0.0000E+00	0.0000E+00	-.3536E+00	0.3536E+00	0.3536E+00	-.3536E+00
0.0000E+00	-.1000E+01	0.3536E+00	-.3536E+00	-.3536E+00	0.1354E+01

----- RESULTATS (Détermination des déplacement nodaux)-----

NOEUDS	X	Y	U	V
1	0.000E+00	0.000E+00	0.0000E+00*	0.0000E+00*
2	0.100E+01	0.000E+00	0.2000E+01	0.4828E+01
3	0.000E+00	0.100E+01	0.0000E+00*	0.0000E+00*

* : degré de liberté imposé (conditions aux limites).

On remarque que ces résultats coïncident avec ceux calculés théoriquement.

Chapitre 3 :

**Réponse dynamique d'un
système linéaire à
plusieurs degrés de liberté**

3.1- Introduction - Objectifs

L'objectif de ce chapitre est d'exposer quelques méthodes permettant la détermination de la réponse d'un oscillateur linéaire à n degré de liberté.

Les méthodes utilisées pour trouver la réponse d'une structure soumise à une excitation dynamique sont très variées et principalement le choix de la méthode dépendra du type du problème traité. L'utilisation par exemple - pour notre cas - des méthodes modales s'avère très coûteuse sur le plan numérique, pour cela on s'est dirigé vers les méthodes dites *méthodes d'intégration directes*.

3.2- Réponse dynamique

On utilise des schémas d'intégration numérique pas à pas classiques. Ces schémas peuvent être explicites (méthode des différences centrées) ou implicites (méthodes de HOUBOLT, de WILSON, de NEWMARK, HILBER-HUGHES-TAYLOR ou HHT). On introduit un pas de temps Δt et l'on cherche à obtenir une solution numérique approchée aux instants $0, \Delta t, 2 \Delta t, 3 \Delta t, \dots, t, t \Delta t, \dots$

Ceci constitue une discrétisation en temps, appelée aussi *échantillonnage* en automatique. La méthode des différences centrées ou les schémas de NEWMARK fournissent des exemples simples de schéma.

Connaissant l'équation du mouvement d'un système non stationnaire (voir, chapitre 1 : formulation des équations de mouvement) :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\} \quad (1.20)$$

Avec les conditions initiales :

$$\{u(t=0)\} = \{u_0\} ; \{\dot{u}(t=0)\} = \{\dot{u}_0\}$$

$$\text{Où : } \{\dot{u}\} = \frac{d}{dt}\{u\} ; \{\ddot{u}\} = \frac{d^2}{dt^2}\{u\}$$

$[M]$: matrice masse ; $[K]$: matrice de rigidité ; $[C]$: matrice d'amortissement
 $\{P(t)\}$: vecteur des sollicitations ; $\{u(t)\}$: vecteur solution (déplacements nodaux).

On cherche $\{u(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$, $\{\ddot{u}(t)\}$ à différents instants t vérifiant la relation (éq.1.20).

La solution numérique est obtenue en utilisant un schéma de discrétisation temporelle explicite ou implicite. Nous présentons les schémas de type NEWMARK, obtenus par les séries de TAYLOR dans le cas où l'accélération est supposée avec le pas de temps Δt :

$$\{u_{t+\Delta t}\} = \{u_t\} + \Delta t \{\dot{u}_t\} + \frac{\Delta t^2}{2} \left((1-b) \{\ddot{u}_t\} + b \{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} \right) \quad (3.1)$$

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{u}_t\} + \Delta t \left((1-a) \{\ddot{u}_t\} + a \{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} \right) \quad (3.2)$$

Où Δt représente le pas de temps.

NEWMARK, utilise les équations (éq.3.1), (éq.3.2) et (éq.1.20) itérativement, pour chaque pas de temps et pour chaque déplacement nodale de la structure.

Les différents schéma de la famille de NEWMARK correspondent à des valeurs particulières de a et b .

3.2.1- Méthode ou schéma des différences centrées (explicite)

Cette méthode est dite explicite car les déplacements et les vitesses sont calculées à l'instant $t + \Delta t$ au fonction des quantités connues aux instants $t, t - \Delta t$ avec Δt le pas de temps.

En choisissant $b=0$; $a = \frac{1}{2}$, on obtient le schéma des différences centrées. Les équations (éq.3.1) et (éq.3.2) conduisent à :

$$\{\ddot{u}(t)\} = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\{u_{t+\Delta t}\} - 2\{u_t\} + \{u_{t-\Delta t}\} \right) \quad (3.3)$$

$$\{\dot{u}(t)\} = \frac{1}{2\Delta t} \left(\{u_{t+\Delta t}\} - \{u_{t-\Delta t}\} \right) \quad (3.4)$$

L'équation (éq.1.20), à l'instant t , s'écrira :

$$[\bar{K}] \{u_{t+\Delta t}\} = \{R\} \quad (3.5)$$

Avec :

$$[\bar{K}] = \frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \quad (3.6)$$

$$\{R\} = \{P_t\} - [K] \{u_t\} + \frac{1}{\Delta t^2} [M] (2\{u_t\} - \{u_{t-\Delta t}\}) + \frac{1}{2\Delta t} [C] \{u_{t-\Delta t}\} \quad (3.7)$$

L'algorithme de résolution est le suivant :

- Calcul initiale à $t=0$
 - Initialiser $\{u_0\}$, $\{\dot{u}_0\}$ et $\{\ddot{u}_0\}$
 - Choisir un pas de temps Δt , $\Delta t < \Delta t_{cr} = \frac{T_{\min}}{\pi}$ (T_{\min} est la plus petite période du système)
 - Calculer $\{u_{-\Delta t}\} = \{u_0\} - \Delta t \{\dot{u}_0\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}_0\}$
- Pour chaque pas de temps $t + \Delta t$
 - Résoudre (éq.3.5)
 - Obtenir $\{\ddot{u}_t\}$ et $\{\dot{u}_t\}$ par (éq.3.3) et (éq.3.4) si nécessaire.

3.2.1.1- Remarques :

- Si les matrices $[M]$ et $[C]$ sont diagonales, cette méthode est très efficace pour les problèmes de grande taille.
- Les schéma est conditionnellement stable si : $\Delta t \leq \frac{T_{\min}}{\pi}$, où T_{\min} est la plus petite période du système.

3.2.2- Méthode ou schéma de NEWMARK classique (implicite)

Cette méthode est dite implicite car les déplacements, les vitesses et les accélérations sont calculées à l'instant $t + \Delta t$ au fonction des quantités connues aux instants t .

Dans ce cas, on part de l'accélération à l'instant t : $\ddot{u}(t) \equiv \ddot{u}_t$ et de celle inconnue à $t + \Delta t$ que nous noterons $\ddot{u}(t + \Delta t) \equiv \ddot{u}_{t+\Delta t}$. Les équations d'équilibre sont écrites à l'instant $t + \Delta t$, ce qui donne son caractère implicite au schéma et conduit à un schéma itératif dans le cas où $P_{t+\Delta t}$ dépend du déplacement inconnue $u_{t+\Delta t}$.

Les équations (éq.3.1) et (éq.3.2) fonctions des coefficients a et b permettent d'obtenir une famille de schémas dont les propriétés peuvent être adaptées.

Des équations (éq.3.1) et (éq.3.2) on peut obtenir :

$$\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} = \frac{2}{b\Delta t^2} (\{u_{t+\Delta t}\} - \{u_t\}) - \frac{2}{b\Delta t} \{\dot{u}_t\} - \frac{1-b}{b} \{\ddot{u}_t\} \quad (3.8)$$

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{u}_t\} + \Delta t \left((1-a)\{\ddot{u}_t\} + a\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} \right) \quad (3.9)$$

En injectons les équations (éq.3.8) et (éq.5.2) dans l'équations d'équilibre (éq.1.20) écrite à l'instant $t + \Delta t$, on trouve :

$$[\bar{K}]\{u_{t+\Delta t}\} = \{R\} \quad (3.10)$$

Avec :

$$[\bar{K}] = [K] + \frac{2}{b\Delta t^2}[M] + \frac{2a}{b\Delta t}[C] \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \{R\} = P(t + \Delta t) + [M] & \left(\frac{2}{b\Delta t^2} u_t + \frac{2}{b\Delta t} \dot{u}_t + \frac{1-b}{b} \ddot{u}_t \right) \\ & + [C] \left(\frac{2a}{b\Delta t} u_t + \dot{u}_t \left(\frac{2a}{b} - 1 \right) + \Delta t \ddot{u}_t \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les utilisations classiques du schéma de NEWMARK, sont :

Cas où : $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$

Ce qui correspond à une approximation linéaire de l'accélération sur Δt .
En reportant les valeurs des coefficients a , b dans les équations (éq.3.8), (éq.3.9) et (éq.3.12), on obtient une équation à résoudre à chaque pas de temps (éq.3.10) avec :

$$[\bar{K}] = \frac{\Delta t^2}{6}[K] + [M] + \frac{\Delta t}{2}[C] \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \{R\} = \frac{\Delta t^2}{6} P(t + \Delta t) + [M] & \left(u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{u}_t \right) \\ & + \Delta t [C] \left(\frac{1}{2} u_t + \frac{\Delta t}{3} \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{12} \ddot{u}_t \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tel que les vecteurs accélération et vitesse sont données par :

$$\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} = \frac{6}{\Delta t^2} (\{u_{t+\Delta t}\} - \{u_t\}) - \frac{6}{\Delta t} \{\dot{u}_t\} - 2\{\ddot{u}_t\} \quad (3.15)$$

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{u}_t\} + \frac{\Delta t}{2} (\{\ddot{u}_t\} + \{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}) \quad (3.16)$$

Cas où : $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$

Ce qui correspond à une approximation constante de l'accélération qui est égale à la valeur moyenne de l'accélération sur Δt . On garde les mêmes démarches que précédemment

Ce cas est souvent utilisé pour l'analyse dynamique des structures.

L'algorithme de résolution sera donner par :

- Calcul initiale à $t=0$
 - Initialiser $\{u_0\}$, $\{\dot{u}_0\}$ et $\{\ddot{u}_0\}$
 - Construire $[\bar{K}]$ (éq.3.11) et triangulariser si $[M]$; $[C]$; $[K]$ et Δt sont constants
- Pour chaque pas de temps $t + \Delta t$
 - Calculer le résidu $\{R\}$ (éq.3.12)
 - Calculer $[\bar{K}]$ (éq.3.11) et triangulariser si nécessaire
 - Résoudre (éq.3.10) est trouver $\{u_{t+\Delta t}\}$
 - Obtenir $\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\}$ et $\{\dot{u}_{t+\Delta t}\}$ par ces deux équations (éq.3.8) et (éq.3.9) :

3.2.2.1- Remarques :

- Le schéma de NEWMARK est inconditionnellement stable dans le cas :
 $a \geq \frac{1}{2}$ et $b \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2} \right)^2$.

3.2.3- Méthode de superposition modale

Les modes de vibration libre correspondent à n allures de déplacement indépendantes, dont les amplitudes peuvent servir de coordonnées généralisées pour représenter un déplacement quelconque.

Pour chaque composante modale $\{\bar{u}_i\}$ (i correspond au mode), les déplacements sont donnés par le vecteur modal $\{\phi_i\}$ multiplié par l'amplitude modale Y_i :

$$\{\bar{u}_i\} = \{\phi_i\} Y_i \quad (3.17)$$

Les déplacements nodaux sont de la forme :

$$\{u\} = \{\phi_1\} Y_1 + \{\phi_2\} Y_2 + \dots + \{\phi_n\} Y_n = \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} Y_i \quad (3.18)$$

Soit, en notation matricielle :

$$\{u\} = [\phi] \{Y\} \quad (3.19)$$

$\{Y\}$: vecteur des coordonnées généralisés.

En injectant l'équation (éq.3.19) dans l'équation (éq.1.20), on obtient :

$$[M][\phi]\{\ddot{Y}\} + [C][\phi]\{\dot{Y}\} + [K][\phi]\{Y\} = \{P(t)\} \quad (3.20)$$

Et en multipliant à gauche l'équation (éq.3.20) par la transposée du i ième vecteur modale $\{\phi_i^T\}$ elle devient :

$$\{\phi_i^T\}[M][\phi]\{\ddot{Y}\} + \{\phi_i^T\}[C][\phi]\{\dot{Y}\} + \{\phi_i^T\}[K][\phi]\{Y\} = \{\phi_i^T\}\{P(t)\} \quad (3.21)$$

Grâce aux propriétés d'orthogonalités des modes (on suppose que les conditions d'orthogonalités s'applique aussi à la matrice d'amortissement) il en résulte que :

$$\{\phi_i^T\}[M]\{\phi_i\}\ddot{Y}_i + \{\phi_i^T\}[C]\{\phi_i\}\dot{Y}_i + \{\phi_i^T\}[K]\{\phi_i\}Y_i = \{\phi_i^T\}\{P(t)\} \quad (3.22)$$

On pose alors :

$$M_i = \{\phi_i^T\}[M]\{\phi_i\}; C_i = \{\phi_i^T\}[C]\{\phi_i\}; K_i = \{\phi_i^T\}[K]\{\phi_i\}; P_i = \{\phi_i^T\}\{P(t)\} \quad (3.23)$$

On aura de (éq.3.22) :

$$M_i\ddot{Y}_i + C_i\dot{Y}_i + K_iY_i = P_i(t) \quad (3.24)$$

Les $M_i; C_i; K_i$ et $P_i(t)$ sont des constantes, calculées pour chaque mode i . donc la résolution de (éq.3.24) nous ramène à une équation de mouvement à un seul degré de liberté.

On peut cité les deux méthodes utilisées pour la résolution de cette dernière : l'intégrale de DUHAMEL (domaine des temps) et la transformée de FOURRIER (domaine des fréquences) d'où la solution Y_i pour chaque mode.

Finalement, pour déterminer les déplacements nodaux $\{u\}$ il suffit d'appliquer (éq.3.19), sachant que les Y_i sont les composantes du vecteur des coordonnées généralisés.

Pour trouver la matrice $[\phi]$ il faut trouver les pulsations de (éq.3.25) :

$$[[K] - [M]\omega^2]\{u\} = 0 \quad (3.25)$$

Sachant que $\{u\}$ ne peut être nul, alors la solution de (éq.3.25) sera donnée par :

$$\det([[K] - [M]\omega^2]) = 0 \quad (3.26)$$

Cette équation (éq.3.26) est dite l'équation aux fréquences du système. En développant ce déterminant on obtient une équation polynomiale de degré n en (ω^2) pour un système à n degrés de liberté. Les n solutions $(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ sont les carrés des fréquences des n modes de vibration possibles. Le mode correspondant à la fréquence la plus basse est dit le premier mode, le second mode correspond à la fréquence suivante, etc.

En mettant ces fréquences sous formes matricielle on forme le vecteur des fréquences ω .

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \dots \\ \omega_n \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Les vecteurs propres sont obtenus en remplaçant les pulsations propres ω_i dans l'équation (éq.3.13), se qui donne :

$$[[K] - [M]\omega_i^2]\{\phi\}_i = 0 \quad (3.28)$$

Ainsi chacune des i modes de vibrations peut être déterminée de la même manière. Alors, la matrice modale représente les n modes vibratoires est :

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \dots & \phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

3.2.3.1- Remarque

Cette méthode n'est utilisée que si :

- La matrice d'amortissement $[C]$ est nulle ou bien elle peut être définie comme une combinaison linéaire de $[M]$ et $[K]$: $[C] = c_1[M] + c_2[K]$
- Le système différentiel (éq.1.20) peut être découplé sous la forme de (éq.3.21).

3.3- Exemple d'application

Soit à déterminer la réponse dynamique d'une structure (**fig.3.1**) soumise à une excitation sismique représentée par un accélérogramme ($\ddot{u}_s = fct(t)$, \ddot{u}_s : accélération du sol). Pour cela la force extérieure définie par l'équation de mouvement (éq.1.20) va être déterminé autrement.

Dans ce cas, la force extérieur va s'écrire comme suit :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{d\}\ddot{u}_s \quad (3.30)$$

Avec :

$\{d\}$: Vecteur d'influence du chargements sismique : ses composantes valent 1 pour les degrés de liberté (ddl) de translation orientés dans la direction de l'excitation et 0 pour les ddl de rotation ou translations orientées normalement à la direction de l'excitation.

\ddot{u}_s : accélération du sol, déduite de l'accélérogramme utilisé.

3.3.1- Présentation du problème

Nous allons essayer d'étudier un portique (**fig.3.1**) (voir, chapitre 3 : 3.2- Exemple 1) soumis à un chargement sismique présenté par l'accélérogramme (**fig.3.2**).

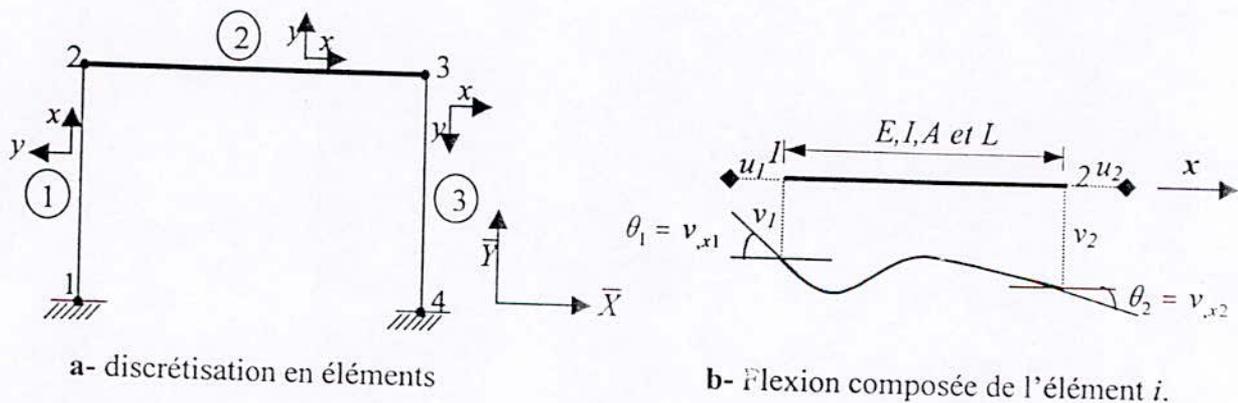


Figure 3.1 : modélisation d'un portique

Avec :

E_i : Module de Young de l'élément i

A_i : Section de l'élément i

F : Vecteur force appliqué

L_i : Longueur de l'élément i

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 3 \times 10^{10} \text{ Pa} , A_1 = 0.2 \times 0.2 \text{ m}^2 , I_1 = \frac{0.2 \times 0.2^3}{12} \text{ m}^4 , L_1 = 3 \text{ m} , \rho_1 = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ E_2 = 3 \times 10^{10} \text{ Pa} , A_2 = 0.2 \times 0.4 \text{ m}^2 , I_2 = \frac{0.2 \times 0.4^3}{3} \text{ m}^4 , L_2 = 4 \text{ m} , \rho_2 = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ E_3 = 3 \times 10^{10} \text{ Pa} , A_3 = 0.2 \times 0.2 \text{ m}^2 , I_3 = \frac{0.2 \times 0.2^3}{12} \text{ m}^4 , L_3 = 3 \text{ m} , \rho_3 = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$$

Le poids revenant au plancher (élément 2) est égale à 400t.

Dans ce cas, on va prendre la matrice de rigidité élémentaire $[K]$ (voir, chapitre 3 : 3.2.2.1- Matrice de rigidité), la matrice masse cohérente (voir, chapitre 3 : 3.2.2.2- Cas des masses cohérentes) et enfin une matrice d'amortissement nulle ($[C] = 0$).

La méthode utilisée pour la détermination de l'histoire temporelle de la structure est le schéma de NEWMARK classique (implicite) dans le cas où les constantes $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$ ce qui correspond à une approximation constante de l'accélération (voir, 3.2.2- Méthode ou schéma de NEWMARK classique (implicite)).

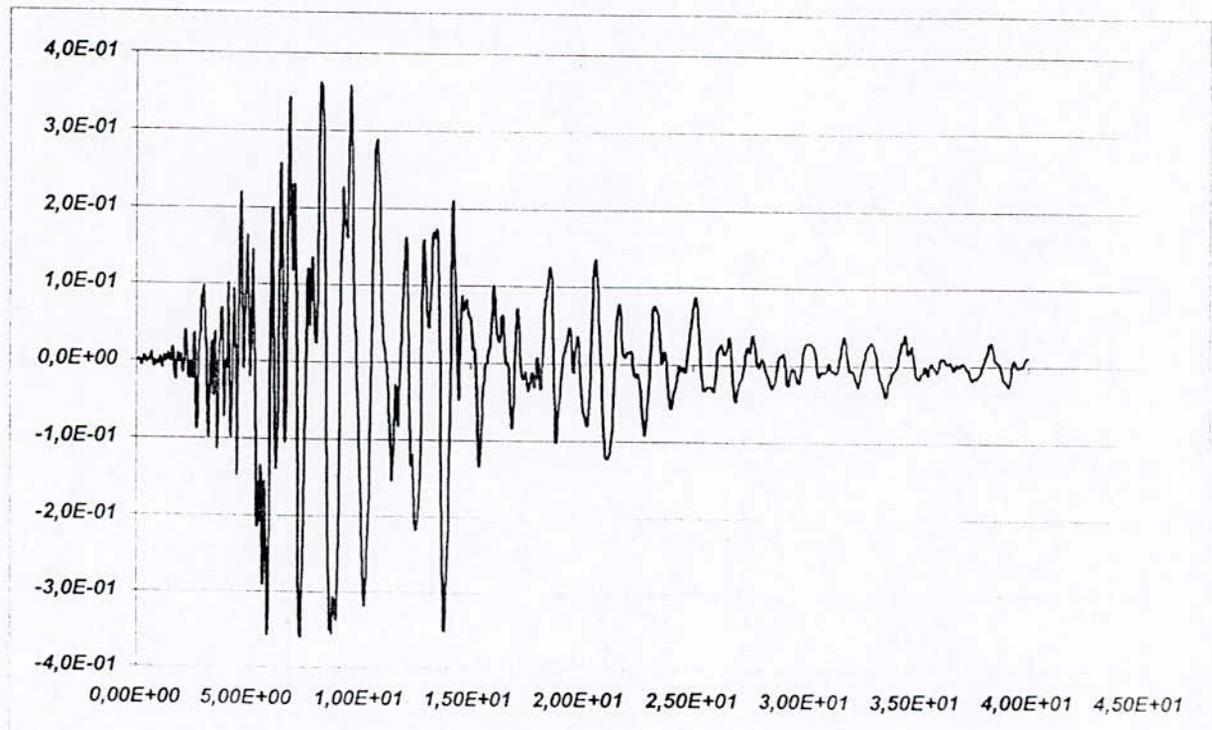


Figure 3.2 : Echantillon de l'excitation sismique wide band simulée (m/s^2).

3.3.2- Résolution du problème

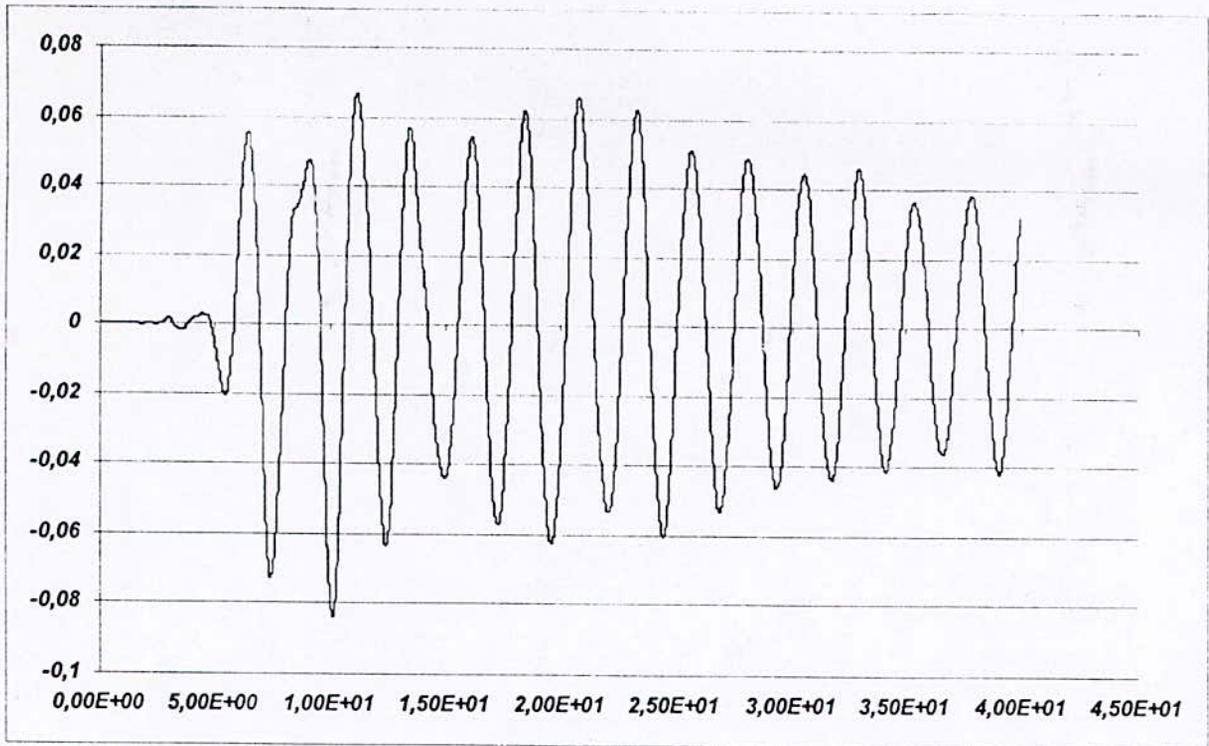


Figure 3.3 : Histoire temporelle du nœud 2 ou 3 (déplacement horizontal $u(m)$)

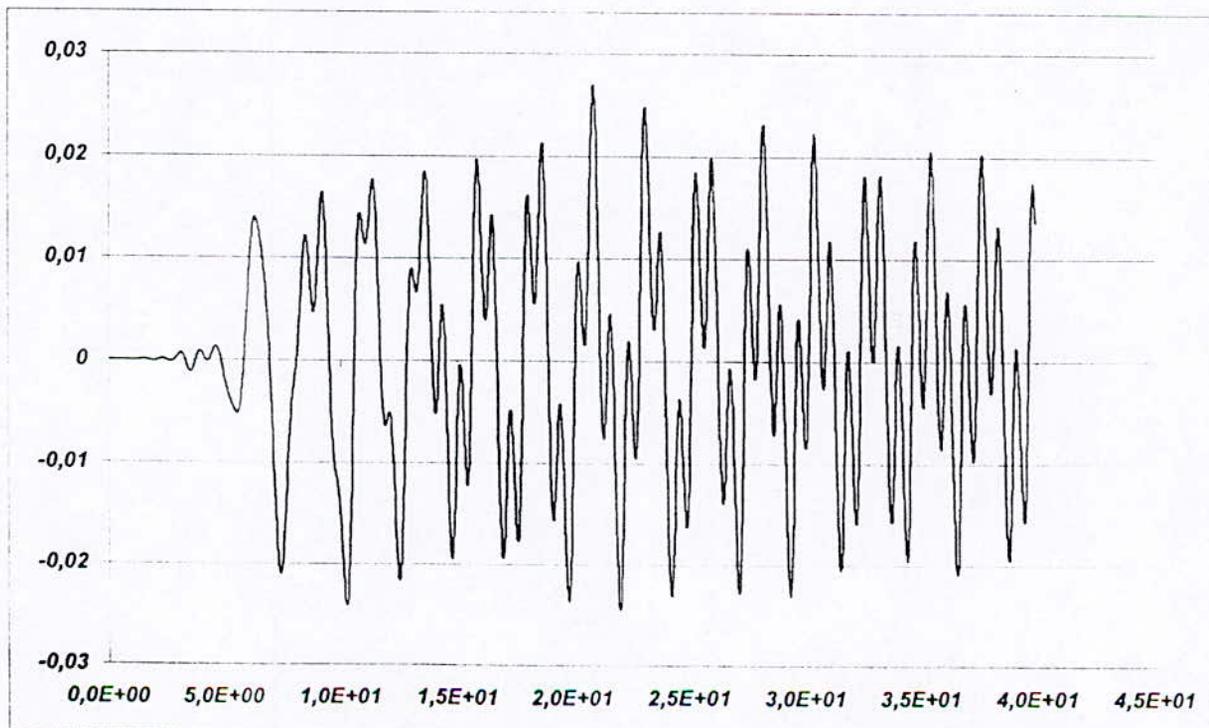


Figure 3.4 : Histoire temporelle du nœud 2 ou 3 (déplacement vertical $v(m)$)

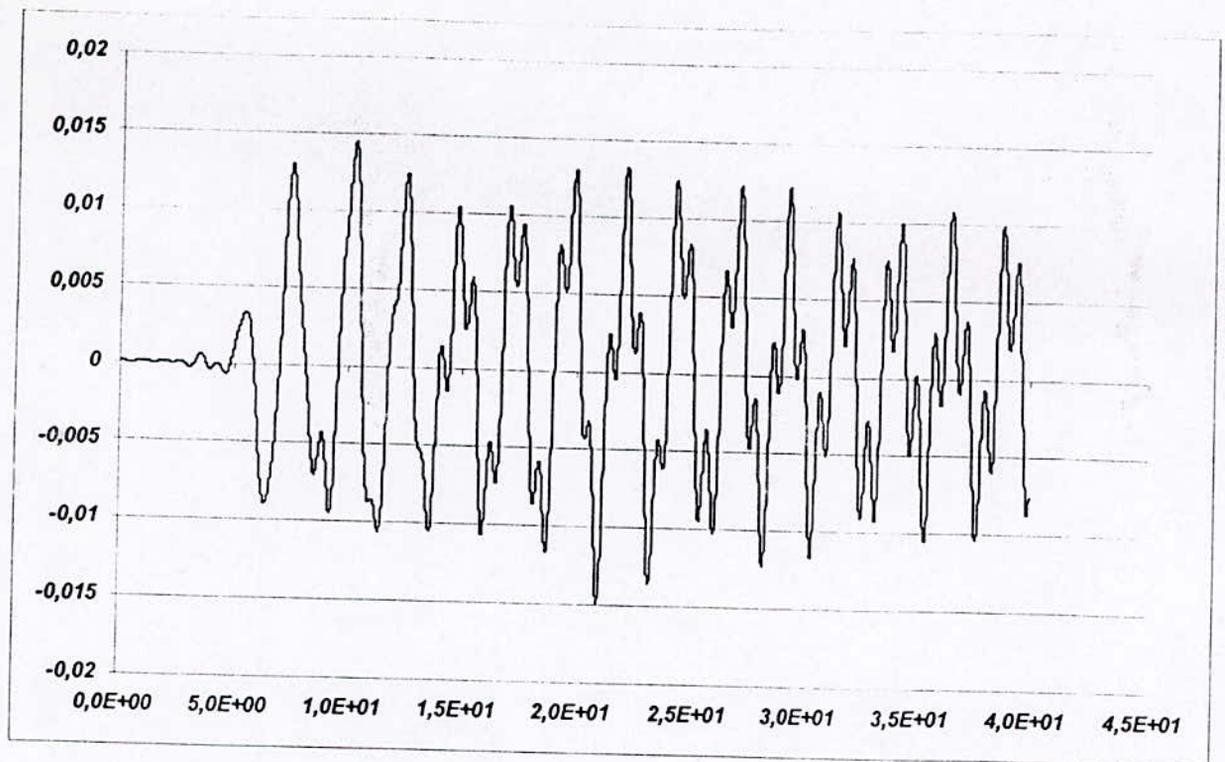


Figure 3.5 : Histoire temporelle du nœud 2 ou 3 (rotation $\theta(\text{rad})$)

NB : Pour les deux nœuds (1 et 4) les déplacements nodaux sont nuls tout au long du chargement pour cause d'encastrement.

Chapitre 4 :

**Etude des systèmes
non linéaires**

4.1- Introduction - Objectifs

Dans une structure, la relation entre les variables cinématiques (déplacements) et les variables mécaniques (forces) peut devenir non linéaire pour deux raisons :

- La première est que le matériau n'obéit pas à la loi linéaire de HOOKE (non linéarité matérielle).
- La deuxième est que les déplacements changent sensiblement le mode d'action des forces, la loi de Hooke n'est pas applicable à la structure entière (non linéarité géométrique).

Nous nous intéresserons dans ce chapitre, à l'étude des systèmes non-linéaires où le matériau n'obéit pas à la loi linéaire de HOOKE. Dans cette optique, nous commencerons par présenter le modèle de comportement élasto-plastique classique dans le cadre des petites transformations.

Enfin, les méthodes de résolutions de ces systèmes, tenant compte de la non-linéarité matérielle.

4.2- Mécanismes physiques de déformation

4.2.1- Déformations élastiques

Elles correspondent à des variations des espaces inter - atomiques et à des mouvements réversibles de dislocations (défaut dans la structure du réseau cristallin. Le nombre de dislocations augmente lorsque l'on charge le matériau). Ces déformations sont essentiellement instantanément réversibles. La configuration initiale est retrouvée après décharge.

4.2.2- Déformations visqueuses

Elles correspondent à la poursuite de la déformation alors que la charge est constante, il n'y a plus équilibre. Le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les lois de comportement d'un matériau visqueux. Lors de ce phénomène, favorisé par l'activation thermique, on parle d'écoulement de fluage.

4.2.3- Déformations permanentes

Elles correspondent à des mouvements irréversibles des dislocations. Ces déplacements se font par glissement dans les plans cristallographiques (plan de plus grande densité d'atomes). En pratique, ces déplacements ne modifient pas la structure cristalline, le volume reste inchangé, on parle d'incompressibilité plastique.

4.2.4- Écrouissage

Ce phénomène aussi appelé consolidation correspond à une augmentation du nombre de point de blocage du mouvement des dislocations. Il vient contrecarrer l'augmentation du nombre de dislocations, et modifie le seuil au-delà duquel les déformations ne sont plus réversibles.

4.2.5- Restauration

Ce phénomène aussi appelé recouvrance correspond à une recristallisation par regroupement de dislocations de signe opposé. Il se produit dans le temps et est favorisé par l'activation thermique.

4.3- Modèles de comportement

4.3.1- La notion de modèle de comportement

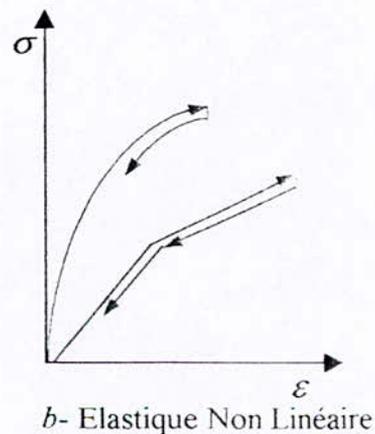
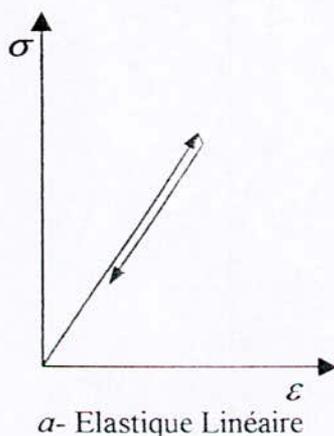
La notion de milieu continu apparaît avec le choix d'un modèle de la cinématique des corps réels. Ce modèle fait apparaître déplacements et déformations. L'analyse des équations du mouvement d'un tel milieu met en évidence la notion de contrainte.

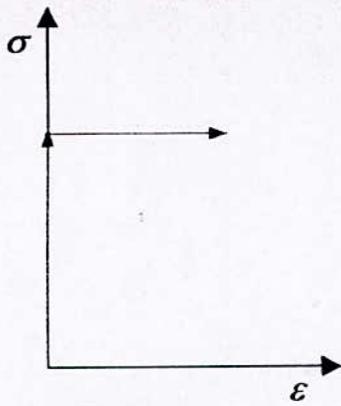
Il est clair que, suivant la nature du matériau, les efforts appliqués ne produisent pas les mêmes effets : acier, verre ou caoutchouc n'ont pas le même comportement physique. La Rhéologie est la branche de la physique qui étudie plus particulièrement l'écoulement et les déformations des corps sous l'action des contraintes qui leur sont appliquées. Ces lois physiques qui lient déformation, vitesse de déformation et contrainte sont modélisées, à la suite d'expérimentations faites en laboratoire, par des modèles de comportement appelés aussi lois de comportement ou relations de comportement ou équations constitutives (du terme anglo-saxon "constitutive relations"). Elles se traduisent par la définition d'un "opérateur de comportement" en tout point. Physiquement, les matériaux sont discontinus, mais pour peu qu'on les considère à une échelle suffisamment grande par rapport aux discontinuités, on peut les considérer comme continus.

Ceci conduit à s'intéresser au comportement homogénéisé du matériau, c'est-à-dire à un comportement global ou macroscopique synthétisant (et/ou masquant) des phénomènes physiques microscopiques souvent très complexes.

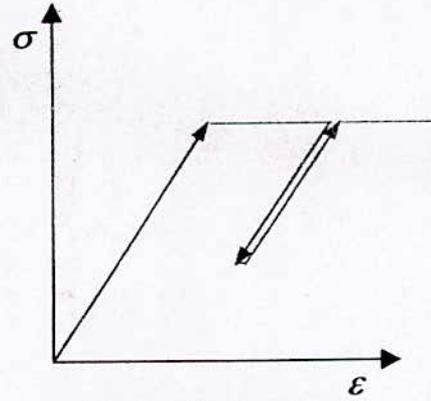
4.3.2- Principaux modèles de comportement

Nous présentons quelques lois de comportements de matériaux :

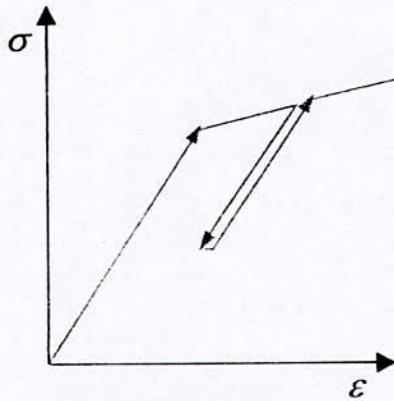




c- Rigide
parfaitement plastique



d- Elasto-plastique
sans écrouissage



e- Elasto-plastique
avec écrouissage

Figure 4.1 : Quelques modèles de comportement

4.4- Plasticité des barres

Dans ce paragraphe, nous introduisons les principales notions d'élasto-plasticité à partir de l'analyse de la réponse d'une éprouvette soumise à un essai de traction – compression. La modélisation de cet essai nous permet de présenter différentes schématisations couramment utilisées pour traiter des problèmes d'évolution élasto-plastiques.

Nous appliquons ensuite ces modèles au calcul numérique des structures treillis composées d'un assemblage de barres.

4.4.1- Essai de traction

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique (quasi-statique, petites déformations, température constante).

Considérons une éprouvette de traction (cylindre homogène droit de section S_0 , de longueur l_0). Cette éprouvette est soumise à un effort de traction F (fig.4.5).

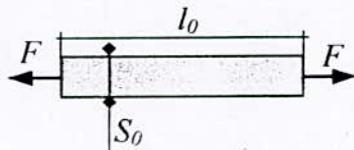


Figure 4.2 : Essai de traction

Pour des petites déformations de l'éprouvette, l'état de contrainte peut être supposé uniforme et uniaxial (la diminution de section est négligée).

Nous posons : $\varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l_0}$ et $\sigma = \sigma_{xx} = \frac{F}{S_0}$

Considérons les graphes (σ, ε) (fig.4.6) obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation appliqué lors du chargement, nous obtenons les allures suivantes :

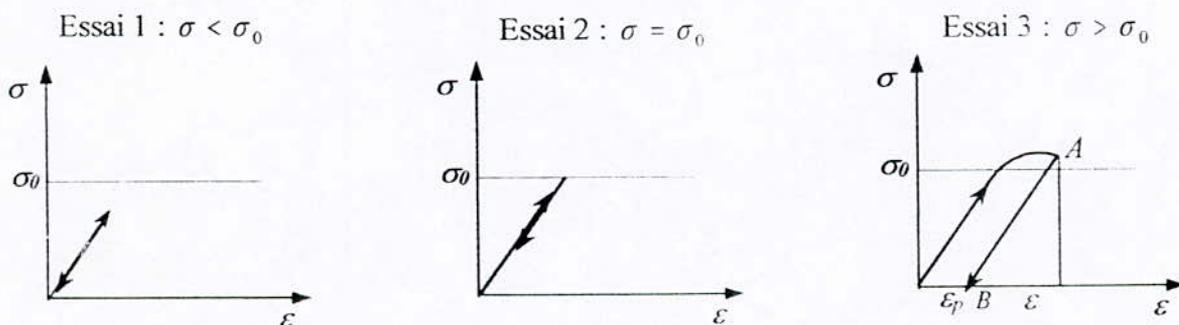


Figure4.3 : Les essais de traction

4.4.1.1- Essai 1 $\sigma < \sigma_0$

On est dans le domaine élastique, le comportement du matériau est réversible. Nous considérerons par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire c'est-à-dire $\sigma = E\varepsilon_e$, avec E module d'Young du matériau.

4.4.1.2- Essai 2 $\sigma = \sigma_0$

Cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité σ_0 , seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle. Elle correspond à un pourcentage de déformation permanente.

4.4.1.3- Essai 3 $\sigma > \sigma_0$

La décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B (charge nulle) il ne reste que la déformation plastique ou déformation permanente ε_p .

4.4.2.1- Critère de plasticité

Ce qui précède nous permet de définir pour l'essai de traction - compression :

- Les conditions de plastification (seuil de plasticité σ_s) ;
- L'évolution du seuil en fonction des paramètres d'écroutissage.

Le critère de plasticité est la fonction , $f(\sigma, E)$ telle que :

- Si $f(\sigma, E) < 0$ l'état actuel, (σ, E) est intérieur au domaine d'élasticité.
- Si $f(\sigma, E) = 0$ l'état actuel se situe sur la frontière du domaine.

Pour l'essai de traction - compression le domaine d'élasticité est défini par :

$$\{\sigma \in \mathbb{R} ; f(\sigma, E) = |\sigma| - \sigma_s(E) \leq 0\} \quad (4.1)$$

Il nous reste à définir l'évolution du seuil de plasticité $\sigma_s(E)$.

Représentons la courbe d'écroutissage monotone en traction par un modèle bi-linéaire (fig.4.12). Ce modèle est caractérisé par :

σ_0 : Limite d'élasticité initiale

E : Module d'élasticité

E_T : Module tangent.

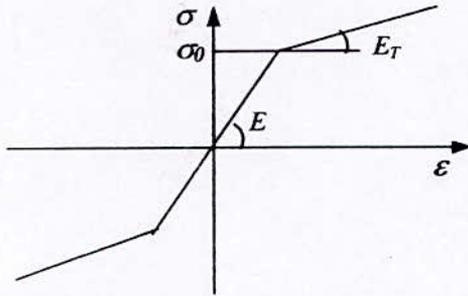


Figure 4.4 : Modèle élasto-plastique avec écroutissage (EPE)

Soit un incrément de charge $d\sigma$ pris à partir d'un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité (fig.4.5).

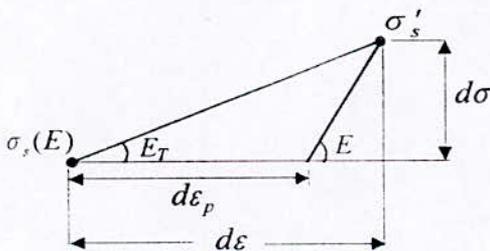


Figure.4.5 : Incrément de charge plastique

Nous avons : $d\sigma = E_T d\sigma$ or $d\varepsilon = d\varepsilon_p + \frac{1}{E} d\sigma \Rightarrow d\sigma \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = E_T d\varepsilon_p$

D'où : $d\sigma = H d\varepsilon_p$ avec $H = E_T / \left(1 - \frac{E_T}{E}\right)$

H : Module d'écroutissage.

Donc on peut définir le nouveau seuil de plasticité :

$$\sigma'_s = \sigma_s(E) + d\sigma = \sigma_s(E) + H d\varepsilon_p \quad (4.2)$$

4.4.2.2- Lois d'écoulement plastique

Précisons maintenant, comment s'effectuent les déformations pour un incrément de charge $d\sigma$ pris à partir d'un état actuel quelconque (σ, E) .

Si $f(\sigma + d\sigma, E) \leq 0$ l'incrément est purement élastique :

Cette condition recouvre les deux possibilités représentées sur (fig.4.14) (en traction)

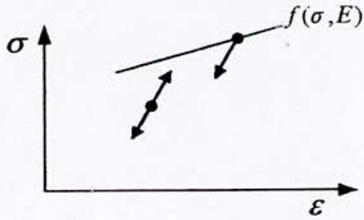


Figure 4.6 : Cas où l'incrément est purement élastique.

Ces deux états sont :

- L'état actuel est à l'intérieur du domaine d'élasticité et la charge ou la décharge est élastique.
- L'état actuel est sur la frontière du domaine d'élasticité et il y a décharge élastique.

Dans ces cas :

$$\begin{cases} d\epsilon = d\epsilon_e = \frac{1}{E} d\sigma \\ \sigma_s(E) \text{ inchangé} \end{cases}$$

Si $f(\sigma + d\sigma, E) > 0$ incrément élasto-plastique (fig.4.7) :

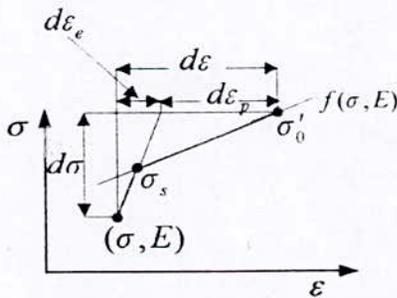


Figure4.7 : incrément élasto-plastique.

Alors nous avons dans ce cas :

$$\begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon_p + d\varepsilon_e \\ d\varepsilon_e = \frac{1}{E} d\sigma \\ d\varepsilon_p = \frac{1}{H} (\sigma + d\sigma - \sigma_s(E)) \end{cases}$$

Le nouvel état de contrainte $\sigma' = \sigma + d\sigma$ est situé sur la frontière du domaine d'élasticité. C'est la valeur du critère pour l'incrément de charge suivant.

Nous remarquons que si $H = 0$, cas des matériaux supposés parfaitement plastiques, la déformation plastique est infinie. Il y a écoulement libre du matériau.

4.4.3- Résolution numérique d'un problème élasto-plastique

Les méthodes de résolution numérique d'un problème élasto-plastique sont des méthodes itératives basées sur la minimisation d'un résidu d'équilibre (NEWTON-RAPHSON, Méthode de substitution..., exposées un peu plus loin). Nous allons présenter un algorithme qui calcule le vecteur des forces intérieures utilisé pour déterminer le résidu d'équilibre. Cet algorithme est nommé *algorithme de projection sur le critère de plasticité*.

4.4.3.1- Algorithme de projection sur le critère de plasticité

Soit un état actuel (σ, E) , le problème posé consiste à calculer pour chaque élément le nouvel état correspondant à un accroissement de déformation $\{\Delta\varepsilon\}$.

La (fig.4.8) représente le principe de projection sur la frontière du domaine d'élasticité pour un accroissement de déformation $d\varepsilon$ donné. Nous avons représenté le cas le plus général d'un élément en cours de plastification.

L'accroissement de contrainte élastique est défini par $d\sigma_e = E d\varepsilon_e$.

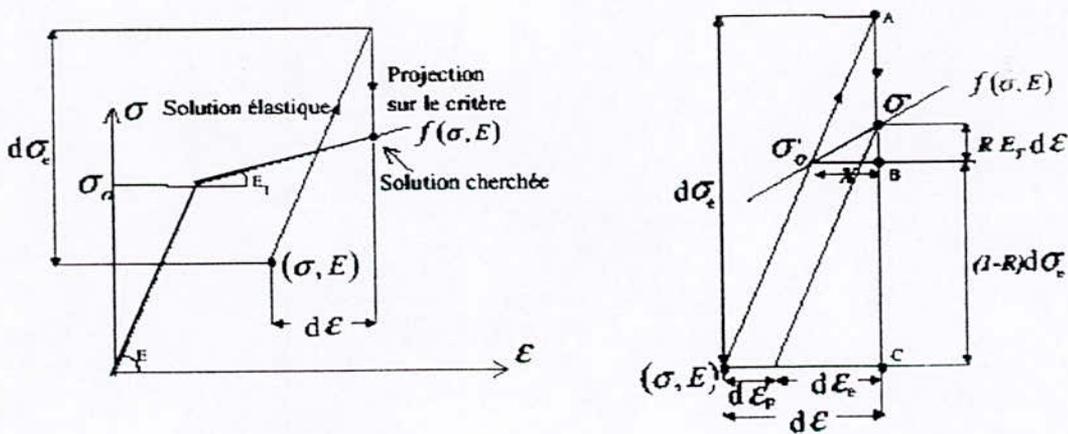


Figure 4.8 : Projection sur le critère de plasticité.

$$\text{Posons : } R = \frac{AB}{AC} = \frac{\sigma + d\sigma_e - \sigma'_0}{d\sigma_e} = 1 + \frac{\sigma - \sigma'_0}{d\sigma_e}$$

$$\Rightarrow X = Rd\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} BC = (1-R)d\sigma_e \\ B\sigma = RE_T d\varepsilon \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \sigma' = \sigma + (1-R)Ed\varepsilon + RE_T d\varepsilon$$

Soit :

$$d\sigma = (1-R)Ed\varepsilon + RE_T d\varepsilon \quad (4.3)$$

Or :

$$d\varepsilon_e = \frac{1}{E}d\sigma \Rightarrow d\varepsilon_e = \left(1 - R + R\frac{E_T}{E}\right)d\varepsilon \quad (4.4)$$

$$d\varepsilon_p = d\varepsilon - d\varepsilon_e \Rightarrow d\varepsilon_p = R\left(1 - \frac{E_T}{E}\right)d\varepsilon \quad (4.5)$$

Le modèle d'écrouissage nous permet de déterminer la valeur de σ'_0 . Dès lors, les expressions ci-dessus permettent de déterminer les incréments de contrainte, de déformations plastique et élastique. On peut maintenant présenter l'algorithme de projection sur le critère de plasticité.

Algorithme de projection :

- Pour chaque élément

Calcul de l'incrément de déformation $\varepsilon = \frac{u_j - u_i}{l}$

L'incrément de contrainte élastique $d\sigma_e = E(\varepsilon - \varepsilon_0) = Ed\varepsilon$

Si ($|\sigma| > |\sigma'_0|$) // l'élément plastique

Si ($\sigma > 0$ et $d\sigma_e < 0$) ou ($\sigma < 0$ et $d\sigma_e > 0$)

$R=0$ // décharge plastique

Sinon

$R=1$ // poursuite de plastification

fsi

Sinon // élément élastique

Si ($\sigma + d\sigma_e < \sigma'_0$) $R=0$ // l'élément reste élastique

Sinon $R = 1 + \frac{\sigma - \sigma'_0}{d\sigma_e}$ // l'élément est en cours de plastification

fsi

fsi

calculer (éq.4.5) et $d\varepsilon_e = d\varepsilon - d\varepsilon_p$

calculer (éq.4.3) et $\sigma = \sigma + d\sigma$ puis $\{d\phi\} = \begin{Bmatrix} -Ad\sigma \\ Ad\sigma \end{Bmatrix}$ // A : l'aire de la barre

calculer σ'_0 , $\varepsilon_0 = \varepsilon$

- fin

4.5- Résolution des systèmes non-linéaires

Dans ce paragraphe, nous allons exposer quelques méthodes de résolution des systèmes non-linéaires dans les deux cas, statique et dynamique.

4.5.1- Cas statique non-linéaire

4.5.1.1- Méthode de substitution

Cette méthode consiste à construire une suite de solution $\{u^0\}, \{u^1\} \dots \{u^i\}$; $\{u^i\}$ étant calculée à partir de $\{u^{i-1}\}$ en résolvant le système linéaire :

$$[K(u^{i-1})]\{u^i\} = \{P\} ; i=1,2,\dots \quad (4.6)$$

$\{P\}$: Le vecteur force appliquée à la structure

$[K]$: Matrice raideur de la structure élastique

En remplaçant le vecteur déplacement $\{u^i\}$: $\{u^i\} = \{u^{i-1}\} + \{\Delta u^i\}$ dans (éq.4.6) nous trouvons :

$$[K(u^{i-1})]\{\Delta u^i\} = \{P\} - [K(u^{i-1})]\{u^{i-1}\} \quad (4.7)$$

En introduisant le résidu $\{R^i\}$:

$$\{R^i\} = \{R(u^{i-1})\} = \{P\} - [K(u^{i-1})]\{u^{i-1}\} = \{P\} - \{F_{int}^{i-1}\} \quad (4.8)$$

$\{F_{int}^{i-1}\}$: Le vecteur des forces internes, calculé pour chaque élément à partir de l'algorithme de projection sur le critère de plasticité.

Il suffit alors, de résoudre le système linéaire en $\{\Delta u^i\}$ suivant :

$$[K(u^{i-1})]\{\Delta u^i\} = \{R^i\} \quad (4.9)$$

4.5.1.2- Méthode NEWTON-RAPHSON modifiée

Reformulant la matrice de raideur $[K(u^{i-1})]$ (éq.4.9) sous la forme :

$$[K(u^{i-1})] = [K_l] + [K_{nl}(u^{i-1})] \quad (5.10)$$

$[K_l]$: Matrice de raideur linéaire

$[K_{nl}(u^{i-1})]$: Matrice de raideur fonction de u .

La méthode consiste à négliger la matrice $[K_{nl}(u^{i-1})]$, donc il suffit seulement de calculer $\{R^i\}$ pour chaque itération i puis évaluer $\{\Delta U^i\}$:

$$[K_l]\{\Delta U^i\} = \{R^i\} \quad (5.11)$$

Cette méthode est souvent utilisée dans le cas de non-linéarités faibles à cause du terme $[K_{nl}(u^{i-1})]$ qui est en fait négligé. La convergence de cette méthode n'est pas rapide. A titre d'information la méthode NEWTON-RAPHSON est la plus utilisée surtout dans le cas des systèmes fortement non-linéaires.

4.5.2- Cas dynamique non-linéaire

4.5.2.1- Méthode de substitution

Dans le cas dynamique, les schémas de NEWMARK sont les plus utilisés. On a :

$$\{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} = \frac{2}{b\Delta t^2}(\{u_{t+\Delta t}\} - \{u_t\}) - \frac{2}{b\Delta t}\{\dot{u}_t\} - \frac{1-b}{b}\{\ddot{u}_t\} \quad (5.12)$$

$$\{\dot{u}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{u}_t\} + \Delta t((1-a)\{\dot{u}_t\} + a\{\dot{u}_{t+\Delta t}\}) \quad (4.13)$$

La résolution de l'équation de mouvement équivaut à résoudre l'équation :

$$[\bar{K}]\{u_{t+\Delta t}\} = \{R\} \quad (5.14)$$

Avec :

$$[\bar{K}] = [K(u)] + \frac{2}{b\Delta t^2}[M] + \frac{2a}{b\Delta t}[C] \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \{R\} = P(t + \Delta t) + [M] & \left(\frac{2}{b\Delta t^2} u_t + \frac{2}{b\Delta t} \dot{u}_t + \frac{1-b}{b} \ddot{u}_t \right) \\ & + [C] \left(\frac{2a}{b\Delta t} u_t + \left(\frac{2a}{b} - 1 \right) + \Delta t \left(\frac{a}{b} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pour obtenir $\{u_{t+\Delta t}\}$ amélioré dans le cas non-linéaire, nous utilisons :

$$\{u_{t+\Delta t}^i\} = \{u_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \{\Delta u_{t+\Delta t}^i\} \quad (5.17)$$

Injectant (éq.4.17) dans (éq.4.14), l'équation trouvée sera :

$$[\bar{K}(u_{t+\Delta t}^{i-1})]\{\Delta u_{t+\Delta t}^i\} = \{R\} - [\bar{K}(u_{t+\Delta t}^{i-1})]\{u_{t+\Delta t}^{i-1}\} = \{R^{i-1}\} \quad (5.18)$$

Où $\{R\}$ étant défini dans (éq.4.16). Avec :

$$\{\bar{K}(u_{t+\Delta t}^{i-1})\} = [K(u_{t+\Delta t}^{i-1})] + \frac{2}{b\Delta t^2}[M] + \frac{2a}{b\Delta t}[C] \quad (5.19)$$

et

$$[\bar{K}(u_{t+\Delta t}^{i-1})]\{u_{t+\Delta t}^{i-1}\} = \{F_{int}\} + \frac{2}{b\Delta t^2}[M]\{u_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \frac{2a}{b\Delta t}[C]\{u_{t+\Delta t}^{i-1}\} \quad (5.20)$$

4.5.2.2- Méthode NEWTON-RAPHSON modifiée

C'est la même démarche que dans la méthode précédente, il suffit simplement de changer le terme $\{\bar{K}(u_{t+\Delta t}^{i-1})\}$ de (éq.4.19) comme suit : $\{\bar{K}(u_{t+\Delta t}^{i-1})\} = [\bar{K}]$, on trouve alors :

$$\{\bar{K}(u_{t+\Delta t}^{i-1})\} = [K_t] + \frac{2}{b\Delta t^2}[M] + \frac{2a}{b\Delta t}[C] = [\bar{K}] \quad (5.21)$$

Même remarque que dans le cas statique pour cette méthode où elle est limitée que pour de faibles non-linéarités.

L'algorithme de calcul de la méthode de NEWMARK est représenté ci-dessous :

- Pour chaque pas de temps $t + \Delta t$
 - Calcul initiale pour $i=0$
 - $\{U'_{t+\Delta t}\} = \{U_t\}$
 - Calculer (éq.4.16)
 - Pour chaque itération $i=i+1$
 - Calcul des termes de (éq.4.21)
 - Résoudre (éq.4.18) et obtenir $\{\Delta U'_{t+\Delta t}\}$
 - // Mettre le vecteur déplacement à jour:
 - (éq.4.17)
- Si ($\|\{R^i\}\| > \varepsilon$) répéter pour une autre itération
 - // Le schéma itératif est stoppé lorsque le déséquilibre est suffisamment faible compte tenu d'une tolérance ε fournie par l'utilisateur de la méthode.
- Sinon $t = t + \Delta t$ sortir de la boucle.
- fsi
- // Mettre les vecteurs vitesse et accélération à jour:
 - Calculer (éq.4.12) et (éq.4.13)
- finpour

Chapitre 5:

Application numérique

5.1- Présentation du problème

Nous nous proposons d'étudier la réponse dynamique d'un portique représenté par la (fig.6.1) en tenant compte de la non linéarité de la structure. Nous étalons notre investigation sur deux (02) types de structure (une structure souple , et une autre rigide) pour mieux comparer l'effet de rigidité.

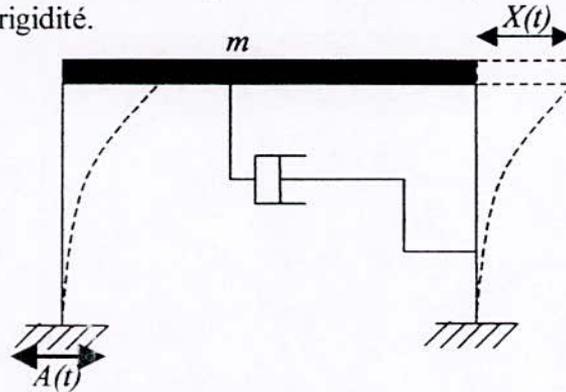


Figure 5.1 : structure à étudier .

Caractéristiques des structures :

	ξ	T	f	ω	$K_x = \omega^2$	$K_t = 0.003K_x$
Structure 01	0.05	0.3	3.33	20.93	438.13	1.31
Structure 02	0.05	0.8	1.25	7.85	61.62	0.18

Chargement dynamique appliqué :

Le chargement dynamique appliqué à notre structure est donné par un accélérogramme simulé numériquement (fig.6.2) pour permettre le calcul par l'outil informatique, le pas de temps utilisé est de l'ordre de : 0.02 seconde.

5.2- résultats et interprétations

5.2.1 – Cas de la structure rigide

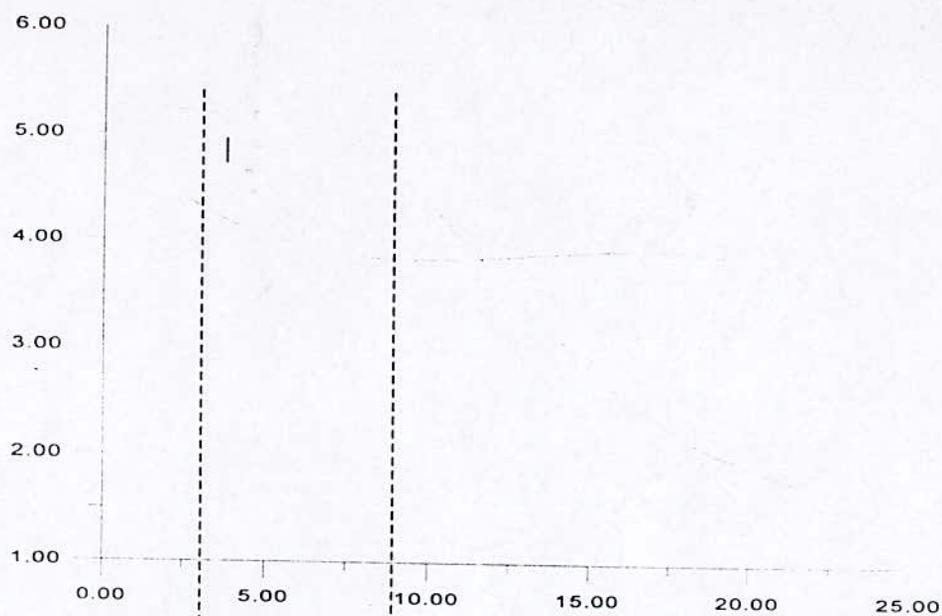


Figure 6.3.1 Spectre De Déplacement De La Structure Rigide

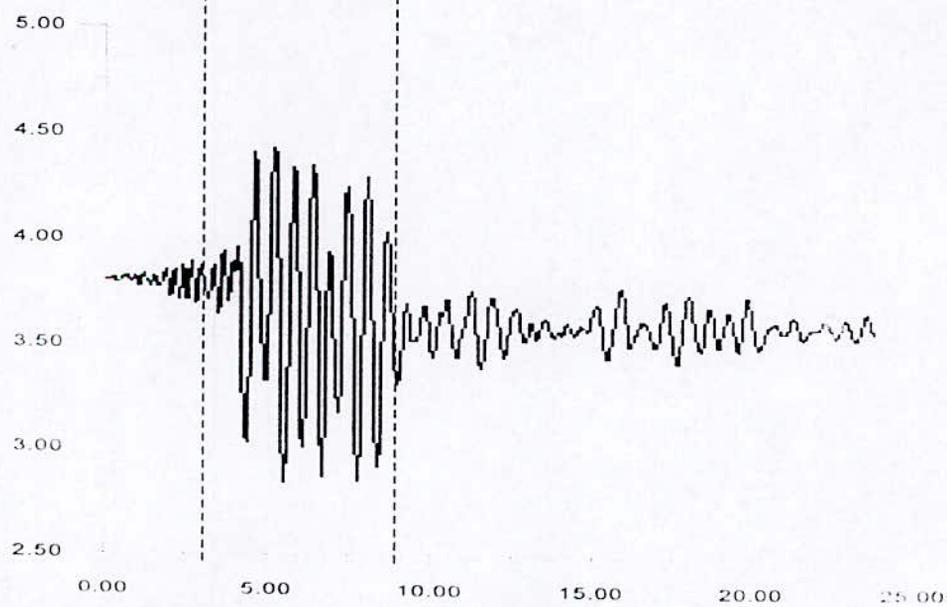


Figure 6.3.2 Réponse En Déplacement De La Structure Rigide

On remarque tout d'abord que le mouvement de la structure est relativement à Hautes Fréquences, la bande fréquentielle du mouvement se situe dans l'intervalle [3.5 Hz , 5.0 Hz]

D'autre part, en ce qui concerne l'accélérogramme de 1989 il s'étale sur la bande fréquentielle allant de (1.0Hz) à (5.5 Hz).

Les deux (02) courbes se croisent approximativement au point correspondant à la fréquence (3.7Hz) au temps ($t = 11.50 \text{ Sec}$)

Nous constatons que les deux courbes sont relativement rapprochées dans les deux (02) intervalles de temps suivants : [0 , 3s] et autour de 11.50 secondes ; le rapprochement de ces deux fréquences a pour effet d'amplifier la réponse de la structure comme on peut le voir sur la figure (**fig.6.3**), ceci met assez clairement en évidence le phénomène de résonance mobile qui traduit le fait que la fréquence de vibration de l'excitation « traque » celle de la réponse, du fait qu'elles varient de manière monotone dans le même sens de croissance.

Le cas illustré ici montre que durant l'intervalle de temps associé à la durée du séisme, cette structure entre en résonance à deux reprises, ce qui peut avoir des conséquences fâcheuses en ce qui concerne la « bonne tenue » de la structure pendant ce laps de temps.

5.2.2 – Cas de la structure souple

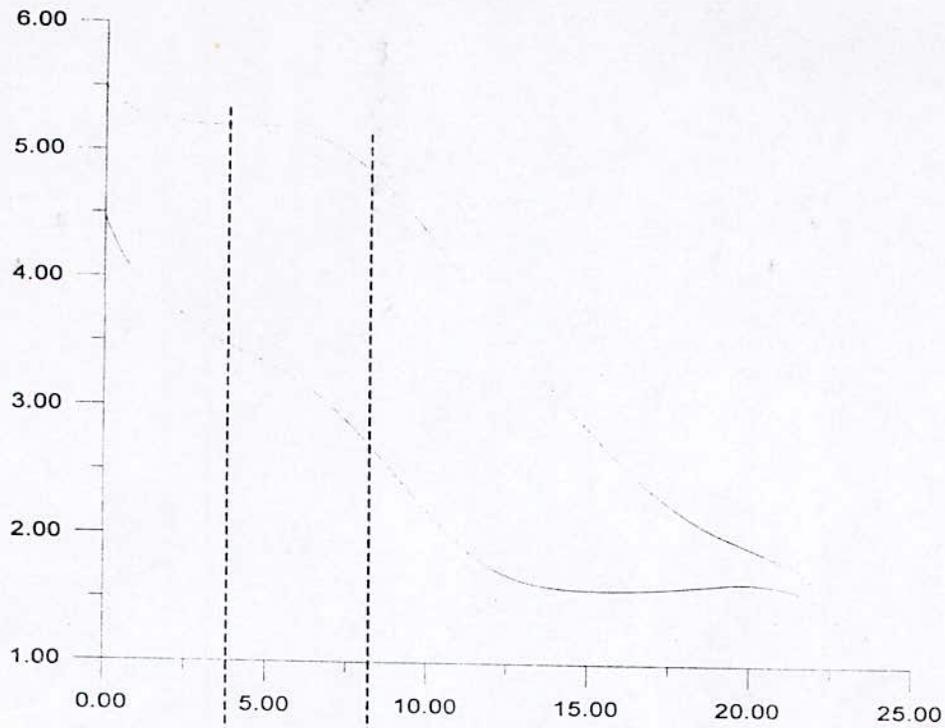


Figure 6.4.1 Spectre De Déplacement De La Structure Souple

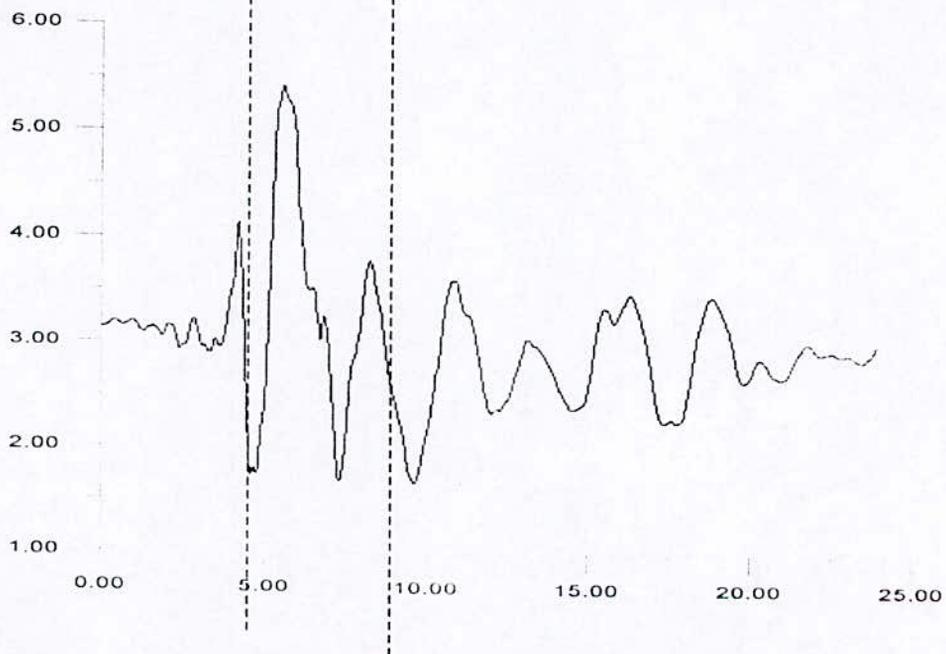


Figure 6.4.2 Réponse En Déplacement De La Structure Souple

En ce qui concerne la structure souple, celle-ci vibre librement avec une fréquence comprise dans l'intervalle [1Hz , 4.5Hz] avec une variation de valeur qui se traduit par la courbe présentée sur la figure (fig.6.4), on remarque que la fréquence propre de la réponse reste relativement éloignée de celle de l'excitation.

Les deux (02) courbes se rapproches l'un de l'autre à la fin du séisme, la résonance qui en déduit est relativement faible compte tenu des faibles amplitudes spectrales en fin de signal

Les deux (02) cas traités montrent relativement bien que :

- Pour un signal à assez large bande, une structure rigide a tendance à entrer en résonance à des temps relativement plus petits que ceux associés à la structure souple
- Pour une structure rigide, les résonances tendent à se localiser en début de signal, par contre pour une structure souple ceux-ci se produiraient plutôt en fin de signal.
- On voit aussi que pour une structure souple, il serait dangereux de décaler les points de résonance vers le début du signal (phase des mouvements forts) car l'énergie libérée serait amplifiée et la structure aurait un risque plus important de se dégrader.
- A l'inverse, une structure rigide fondée sur un sol rigide serait sujette à des résonances presque sur toute la durée du signal, mais l'ampleur des dégâts serait relativement plus faible que pour une structure souple fondée sur un sol souple.

Conclusion générale

On voit à travers la petite étude que nous venons de mener, que le phénomène de résonance mobile est intimement lié au contenu fréquentiel du séisme, et à celui de la structure durant le tremblement de terre.

Le souci du projecteur est celui d'éviter les résonances durant les phases de mouvements forts du sol, une bonne connaissance pour une dimension optimale de la structure sans sollicitations sismiques.

Il est nécessaire de pousser l'investigation à des structures plus complexes afin d'étudier l'incidence des rotulations de la structure sur le phénomène de résonance mobile, le programme développé dans la présente étude permettrait de traiter ces cas de figure, le temps imparti pour ce travail ne nous ayant pas permis de pousser les investigations jusqu'à ce stade.

**Références
bibliographiques**

- [1] BATHE. K. J., WILSON. E.L., "Numerical methods in finite element analysis", Prentice Hall, 1976
- [2] Batoz. J. L, Dhatt. G., "Modélisation des structures par éléments finis : solides élastiques", volume 1. HERMES, Paris,1990.
- [3] Batoz. J. L, Dhatt. G., "Modélisation des structures par éléments finis : poutres et plaques", volume 2. HERMES, Paris,1990.
- [4] Capra. A., Davidovici. V. , "Calcul dynamique des structures en zone sismique" collection U.T.I, Edition Eyrolles.
- [5] Charney. F. A., " Nonlinear Dynamic Time History Analysis of Single Degree of Freedom Systems ", Advanced Structural Concepts, Inc, 1999.
- [6] Clough. R.W., Penzien. J., " Dynamics of Structures ", McGraw Hill, 1975.
- [7] Coffignal. G, "Mécanique non-linéaire et éléments finis", LMSP, ENSAM, Paris, 2001 (site web : <http://www.paris.ensam.fr/lmsp>).
- [8] Conte. J. P., "Finite element response sensitivity analysis in earthquake engineering" *University of California, Los Angeles, U.S.A*
- [9] Dhatt. G, Touzot. G., "Présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A, 2eme édition, 1984
- [10] Dysli. M., "Modélisation en contrainte-déformation", E.P.F de Lausanne, 1997.
- [11] Imbert . J. F., "Analyse des structures par éléments finis", 1979
- [12] Krysl. P., Lall. S., and Marsden. J. E., "Dimensional Model Reduction in Non-linear Finite Element Dynamics of Solids and Structures". Submitted to International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000.
- [13] Oudin. H., "Lois de comportement", notes de cours de plasticité, E.C de Nantes, 2002.
- [14] Règles Parasismiques Algériennes (RPA)1999.
- [15] Rockey., "Introduction aux éléments finis"
- [16] Taylor. R.L., 1999. "FEAP", User Manual (téléchargeable de <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/>).
- [17] West. M, Kane. C, Marsden. J. E, and Ortiz. M., "Variational integrators,the Newmark scheme, and dissipative systems", California Institute of Technology Pasadena,USA
- [18] Zienkiewics. O. C., Taylor. R. L., "The finite element Method : Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity", volume 2. McGraw-Hill Book Company, 4th edition, 1989.