

11/00

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

*Département : Génie Civil*

*Projet de fin d'étude*

**THEME**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**CALCUL DES CARACTERISTIQUES  
MECANIQUES D'UN MATERIAU  
COMPOSITE**

*Proposé par :*

**Mme .A. CHIKH**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

*Etudié par :*

**Mr. ZEMITH MED SABRI**



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

**Promotion 1999 – 2000**

*10 avenue Hassen Badi El Harrach Alger*

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**Département : Génie Civil**

**Projet de fin d'étude**

**THEME**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**CALCUL DES CARACTERISTIQUES  
MECANIQUES D'UN MATERIAU  
COMPOSITE**

*Proposé par :*

**Mme .A.CHIKH**

*Etudié par :*

**Mr. ZEMITH MED SABRI**



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

**Promotion 1999 – 2000**

*10 avenue Hassen Badi El Harrach Alger*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# Dédicace

A tous ceux qui me sont très chers .

Zemith med sabri

# REMERCIEMENTS



*Nous remercions Dieu de m'avoir donné la volonté et le courage afin*

*d'arriver à faire ce modeste travail.*

*Je tiens à exprimer vivement ma sincère gratitude à ma promotrice*

*Mme A. CHIKH pour sa confiance, ses encouragements et la sollicitude avec*

*laquelle elle m'a orienté tout au long de ce travail.*

*Toute ma gratitude va aussi à Mr. ZEGLACHE et Mr. HAMOUTEN pour*

*leur encouragements et précieuse aide tout au long de ce travail.*

*tous mes enseignants, qui ont contribué de près ou de loin à ma formation*

*durant mes années d'étude.*

*Sans oublier l'ensemble du personnel de la bibliothèque, qui n'ont guère*

*tardés à me soutenir.*

# SOMMAIRE



## Chapitre 1 INTRODUCTION GENERALE

- 1-1 Objectifs de l'étude . .....(1)  
1-2 Organisation du travail.....(2)

## CHAPITRE 2 SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

- 2-1 Introduction .....(3)  
2-2 Modèles expérimentaux.....(5)  
2-3 Modèles numériques .....(7)  
2-4 Conclusion .....(10)

## CHAPITRE 3 *Caractéristiques mécaniques d'un matériau composite*

- 3-1 Généralité .....(11)  
• tenseur contrainte  $T$ .....(11)  
• tenseur déformation  $E$ .....(15)  
3-2 comportement élastique.....(18)  
3-3 Les caractéristiques mécaniques et la mécanique des milieux continus.  
• Recherche d'un intervalle borné .....(22)  
• Modèle de HASKIN et ROSEN .....(26)  
• Conclusion .....(28)

## CHAPITRE 4 EXEMPLES DE CALCUL

- 4-1 Introduction.....(30)  
4-2 L'influence de la nature des constituants.....(30)  
4-3 Exemple du béton armé .....(56)  
4-4 L'influence de la forme géométrique des renforts .....(60)  
4-5 Conclusion .....(63)

- ## CHAPITRE 5
- CONCLUSION GENERALE.....(65)  
BIBLIOGRAPHIE.

## NOTATIONS



$E_{12}$  : module de young (d'élasticité) du béton .

$E_f$  : module d'élasticité propre au renfort (du granulat).

$E_m$  : module d'élasticité de la matrice (pâte de ciment) .

$G_{12}$  : module de coulomb (d'élasticité transversale ) du béton.

$G_f$  : module de coulomb propre au renfort (du granulat).

$G_m$  : module de coulomb de la matrice (pâte de ciment) .

$\nu_f$  : coefficient de Poisson propre au renfort.

$\nu_m$  : coefficient de Poisson de la matrice (pâte de ciment) .

$\nu_{12}$  : coefficient de Poisson du béton .

$R$  : résistance a la compression .

$\varphi_f$  : teneur en renfort (grains) .

$\varphi_m$  : teneur en ciment .

$\sigma$  : contrainte appliquée.

$\varepsilon$  : déformation.

$U$  : énergie potentielle.

$U_0$  : énergie potentielle minimale .

$\mu$  : coefficient de Poisson du composite .

$CC$  : Ciment Calcique.

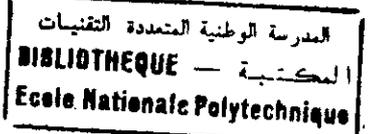
$CS$  : Ciment siliceux.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# ***CHAPITRE 1***

## ***INTRODUCTION GENERALE***

# INTRODUCTION GENERALE



Le béton constitue l'un des éléments essentiels de notre civilisation , sont utilisation est aujourd'hui universelle ,pour la construction des plus petits ouvrages , comme des plus grands .

Les caractéristiques du béton sont, l'objet de beaucoup de recherche , et investigations ,car moyennant un choix et un dosage convenable de ses composants ,le béton peut voir ses propriétés profondément modifiées , de façon a mieux répondre a nos besoins .

Pour cela l'objectif de ce travail est de présenter une méthode de calcul des caractéristiques mécaniques d'un matériaux , plus précisément le béton a partir de celles de ses constituants a fin d'obtenir la meilleur composition qui augmentera ça résistance au détriment peut être de son ouvrabilité .

Ce travail découle des tentatives de modélisation du béton qui permettent de mieux appréhender son comportement et d'améliorer ses performances sans recourir systématiquement a l'expérimentation .

Pour cela mon travail s'organise en cinq chapitres :

Chapitre II : Synthèse bibliographique ,une problématique est présentée pour trouver la formulation à chaque matériaux composite, ainsi que le point sur les connaissances actuelles du comportement du béton.

Chapitre III : caractéristique mécanique d'un matériau à partir d'une considération du cas le plus général au moyen de la mécanique des milieux continus, une formulation qui donne dans le cas des petites déformations, (élasticité linéaire), les caractéristiques mécanique du composite.

Chapitre IV : exemple de calcul :

Une application du modèle considéré pour la détermination :

- En premier les caractéristiques mécanique du béton, à partir des caractéristiques des granulats (renfort ) et patte de ciment (matrice).
- En deuxième des caractéristiques mécanique du béton armé, ayant prie l'acier comme deuxième renfort.
- En troisième : On montre l'influence de la géométrie du renfort sur les caractéristiques mécanique du composite.

Chapitre V : conclusion générale.

***CHAPITRE 2***  
***SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE***

## SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1- Introduction :

La mécanique des milieux continus, permet de définir en nature et en nombre les caractéristiques mécaniques indépendantes des matériaux composites, c'est-à-dire les caractéristiques nécessaires et suffisantes pour calculer le comportement du matériau quel que soit l'état de charge appliquée.

L'étude directe appliquée des phénomènes ne représente en fait que la première étape de la solution du problème général de la conception optimale des structures en matériaux composites.

Elle doit être en effet complétée par une étude qui permet de calculer les caractéristiques indépendantes à partir des caractéristiques des constituants et de leur distribution.

Le problème est très complexe, un certain nombre d'hypothèses ont été faites ; dont il faut vérifier la validité à savoir :

- Composants (matrice) et (renfort) ,continus, homogènes, isotropes, élastiques (absence d'inclusions gazeuses ou autres).

- Liaison matrice – renfort parfaite : pas de vide, ni d'effet de peau à l'interface.

Notre but n'est pas en effet de considérer la théorie comme une fin, mais comme un moyen qui conduit à des relations vérifiées expérimentalement avec des tolérances admissibles.

Nous passerons en revue un certain nombre de méthodes utilisées en précisant simplement le mode de raisonnement, mais en insistant sur les hypothèses et les conclusions que l'on interprétera par comparaison directe sur le plan formel en fonction des hypothèses, et sur le plan expérimental.

Les modèles visent à relier le comportement mécanique du béton à sa structure, et visent à représenter le mieux avec un minimum de paramètres, le comportement global du béton pour une gamme de sollicitations la plus large possible (compression –traction – chargement déchargement ).

Les observations expérimentales sur l'essai de compression simple, permettent de noter que la microfissuration est l'aspect fondamental de la dégradation, donc c'est autour de ce phénomène que vont se bâtir la plupart des modélisations.

A l'échelle du grain on ne s'intéresse qu'aux évolutions de la microfissuration à l'intérieur d'une cellule élémentaire dans laquelle on a créé ou non l'hétérogénéité (grain circulaire pour les modèles plans ).

A partir d'hypothèses locales sur le comportement du ou des matériaux on déduit une évolution des microfissures qui se traduit sur les bords de la cellule, par une évolution des déformations en fonction des sollicitations extérieures. Des assemblages de cellules recréent alors, un volume de matériau et permettant ainsi de retrouver le comportement global.

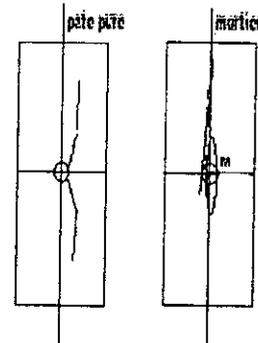
1- MODELES EXPERIMENTAUX :

En général les modèles étudiés sont plans et biphasiques, les granulats du béton étant représentés par des inclusions cylindriques à l'intérieur d'une matrice fragile figurant la pâte de ciment ou le mortier.

A- MODELE BIPHASIQUE PLAN DE LORRAIN CALVET :

.....[2.Jaques Baron et Raymond Sauterey ]

Il consiste en la caractérisation de la première rupture (amorçage), sur un modèle plan comportant une inclusion cylindrique en acier, lorsque celle ci est représentative d'un grain rigide, ou bien un trou libre lorsqu'il s'agit de la représentation d'un pore ou d'un défaut, la matrice est soit une pâte pure, soit un mortier de ciment.



fig( 2-1).

On note que deux types de liaisons ont été distinguées entre matrice et inclusion rigide, l'adhérence et la non adhérence (obtenue par l'interposition d'un film d'huile ).

Ces travaux furent utilisés par LORRAIN en 1974 pour déterminer les critères les mieux adaptés à la prévision des premières dégradations.

Les calculs sont essentiellement analytiques et utilisent pour la détermination du champ de contraintes et de déformations dans le modèle, la notion de variable complexe en élasticité linéaire et la méthode résolution de MUSKHELISHVILI.

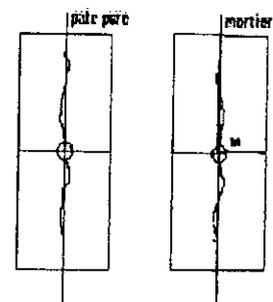
A partir des champs de contraintes et de déformations LORRAIN examine plusieurs critères dans les différents cas d'étude, il s'agit :

- du critère de traction maximale :

$\sigma_{max.} < \sigma_0$ . Ou  $\sigma_{max}$  est la contrainte maximale de traction,  $\sigma_0$  est la contrainte appliquée.

- du critère d'extension maximale  $\epsilon_{max.} < \epsilon_0$ , ou  $\epsilon_{max}$  est la déformation maximale,  $\epsilon_0$  est la déformation due a la contrainte appliquée.

- du critère de distorsion maximale :  $\gamma_{max.} < \gamma_0$ , ou  $\gamma_{max}$  contrainte de cisaillement maximum,  $\gamma_0$  contrainte de cisaillement appliquée .



fig(2-2).

Du critère de MOHR CAQUOT, sous la forme d'une combinaison du critère de traction maximale dans les sollicitations planes comportant une direction principale de traction et du critère de cisaillement maximum, dans les cas de compression biaxiale.

Les premières dégradations ayant lieu autour de la singularité (trou ou inclusion), c'est au niveau de ce contour que sont déterminées les fonctions entrant dans chacun des critères:

On remarque les figures que les fissures se développent différemment dans les deux types de matrice, et la présence de cônes adhérents à l'inclusion dans le cas de mortier.

L'influence de la non adhérence d'un grain qui entraîne l'existence de contraintes locales beaucoup plus importantes (presque le double) que dans le cas d'adhérence parfaite, ce qui justifie la nécessité de veiller à la propreté des granulats qui entrent dans constitution des bétons.

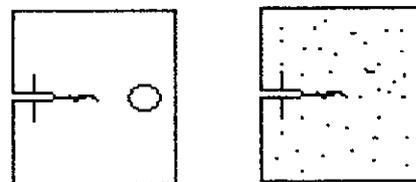
L'expérimentation dans ce genre de sollicitation (CALVET.H 1969), montre que l'apparition des microfissures s'opère sous l'effet d'extensions existant suivant la direction perpendiculaire au plan de la charge et non par cisaillement. LORRAIN en déduit que le critère adéquat est le critère d'extension maximale, sachant qu'on veut mettre en évidence l'hétérogénéité due aux grains en négligeant les hétérogénéité possibles des microfissures, leur présence probable doit permettre d'envisager un autre critère local pour expliquer le comportement expérimental.

### B- MODELE BIPHASIQUE DE ALLEVY 1978 :

Ce modèle a pour principe de créer une entaille permettant l'amorçage de la fissure faite avant l'essai.

Les paramètres étudiés sont :

- Dans un modèle à une inclusion l'influence du diamètre  $D$  et du rapport  $E_0 / E_1$  des modules d'élasticité.
- Dans un modèle à deux inclusions, (disposées symétriquement par rapport au trajet supposé de la fissure) leur distance  $L$ .



modèle de ALLEVY  
1978

Fig (2-3).

Ce modèle repose sur le principe de la mécanique de la rupture, car la résistance à la propagation de la fissure, est définie par le paramètre  $\gamma_f$  qui est l'énergie spécifique de rupture moyenne, c'est l'énergie consommée pour créer par fissuration, une unité de surface de discontinuité au sein du matériau.

Cette étude confirme l'importance des éléments fins (sable) dans la constitution d'un béton, et l'ensemble de l'étude met en évidence le rôle des grains pour bloquer la propagation des microfissures, Ces travaux montrent en définitive que par la connaissance des phénomènes locaux il est possible de relier qualitativement le comportement mécanique du béton à sa composition.

## 2-2 MODELES ESSENTIELLEMENT NUMERIQUES :

### A- MODELE NUMERIQUE BIPHASIQUE DE LINO (1973) :

... [J. Jaques Baron et Raymond Sauterey ]

Ce type de modèle a pour objectif de relier les évolutions des dégradations locales au comportement mécanique global du matériau.

Le principe est, qu'une cellule carrée plane de côté  $D$ , comprenant en son centre une inclusion circulaire de rayon  $r$ , est représentative de l'élément de volume « maille » des matériaux considérés comme une structure périodique infinie de période  $d$ .

On note les hypothèses :

- On est dans le cas de déformation plane.
- Les fissures se développent parallèlement à la direction de la contrainte intermédiaire

$$(\sigma_3 \text{ si } \sigma_1 < \sigma_2).$$

- La matrice et l'inclusion sont supposées avoir un comportement élastique linéaire.

Remarque : l'hypothèse est discutable puisqu'elle revient à considérer la non influence de la contrainte intermédiaire.

- à la liaison matrice inclusion est utilisée, un double critère de traction  $\max(\sigma_n < \sigma_{\max})$ , et un critère de coulomb  $(\sigma_t < \sigma_n \tan \theta)$ .  
note :  $\theta$  résistance au frottement à l'interface.

- pour traduire l'existence d'une microfissuration initiale, constatée dans les analyses microscopiques du matériau, la liaison matrice inclusion est libérée à la base des grains sur un angle  $2\alpha$ .

Remarque : Vue la symétrie de la cellule on ne calcule que la  $\frac{1}{2}$  section.

- sur l'axe de symétrie AD, tous les déplacements horizontaux sont bloqués  $U_h = 0$ .
- le déplacement d'ensemble du modèle est obtenu en bloquant le centre de l'inclusion 'O' suivant les deux directions.
- sur les cotés horizontaux AB et DC, on impose le parallélisme des déformations qui permet de respecter la périodicité du modèle.

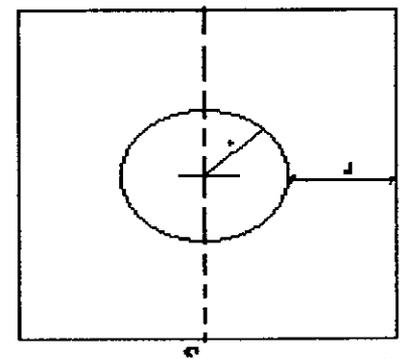


schéma de la cellule

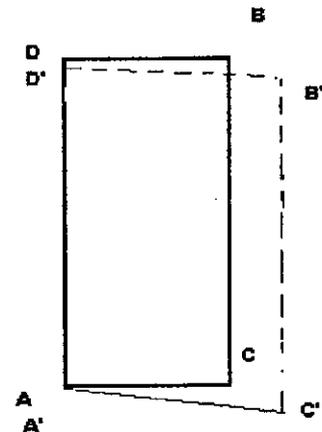
Fig (2-4).

- le coté vertical BC ,étant un axe de symétrie entre les cellules , il doit le rester après le chargement , ceci lui impose de rester parallèle à lui même dans la déformation .

Le calcul est introduit à un programme numérique utilisant la méthode des éléments finis.

Matrice et inclusion sont modélisées par une combinaison de triangles de six nœuds et de quadrilatères à huit nœuds, l'interface étant représentée par des joints élastoplastiques .

Le maillage de la  $\frac{1}{2}$  cellule comporte 196 nœuds et 73 éléments de joints , pour assurer la progressivité de la dégradation , la sollicitation est exercée de façon incrémentale .



1/2 cellule de LINO

On peut aussi bien cerner les phénomènes locaux (état de contrainte, propagation des dégradations ), que les conséquences sur le comportement global (limite d'élasticité ...).

Lino considère qu'il existe deux seuils, le premier est celui à partir duquel il y a propagation de microfissures autour de l'inclusion (1<sup>er</sup> phase ), le deuxième correspondant au début de développement de la fissuration dans la matrice (2eme phase ).

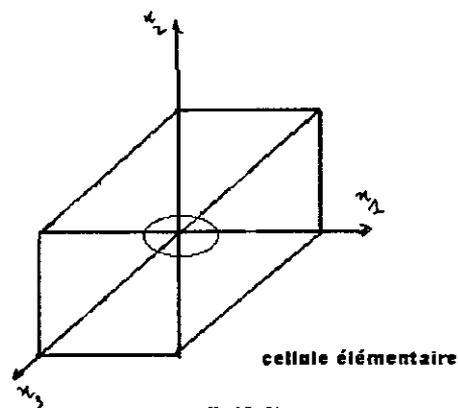
On remarque l'influence de la microfissuration initiale qui se traduit par un comportement dissymétrique du modèle dans le domaine de la traction.

**B - MODELE DE CELLULE MICROFISSUREE HOMOGENEISEE**  
**BAMBERGER MARIGO 1980 :**

L'élément de volume est représenté par une cellule cubique comportant, en son centre un ellipsoïde aplati d'orientation quelconque.

Les microfissures étant de dimensions et de directions différentes, pour conserver le caractère aléatoire de la microfissuration.

L'influence des microfissures sur la vitesse de propagation des ondes sonores (transversales et longitudinales), par l'utilisation de relations analytiques.



fig(2-6).

.....[2.Jaques Baron et Raymond Sauterey ]

On suppose que :

- L'équivalence entre cellule fictive et cellule réelle est exprimée en termes d'énergie de déformation.
- On utilise une technique d'homogénéisation, qui consiste transformer un élément de volume d'un matériau isotrope comportant une discontinuité ( Vides ou fissures ), en un matériau continu mais anisotrope et hétérogène.
- L'étude est faite en élasticité linéaire, le matériau est caractérisé par les deux coefficients ( E ,  $\nu$  ) .

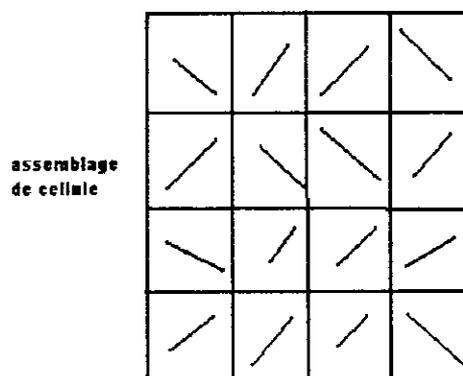
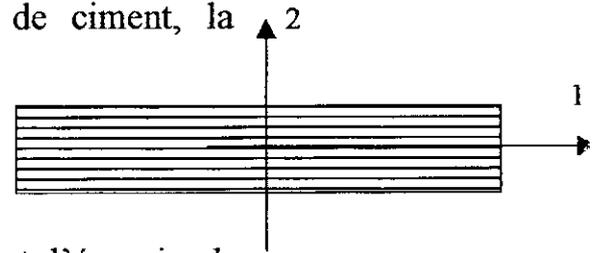


Fig (2-7)

Ce modèle donne des informations constitutives sur la dégradation, telles que la densité moyenne de fissuration et l'orientation moyenne des fissures.

D/ Modèle biphasique de HASKIN – ROSEN :

Ce modèle considère que le béton est composé de deux phases, la première appelée « la matrice », qui représente la pâte de ciment, la deuxième phase appelée renfort qui représente les granulats.



A partir d'un calcul des variations on minimisant l'énergie de déformation pour trouver des bornes, on calcul les caractéristiques mécaniques du matériaux composite, à partir des caractéristiques mécaniques de ces composantes. ....[ 1 -J.Pabiot ]

Ce modèle étant plus simple directe permettant de calculer les caractéristiques mécanique directement sans passer par une déduction , ce qui est le cas des autres modèles, d'ou l'avantage d'une utilisation rapide en bureau d'étude ou sur chantier.

Pour ces raisons c'est le modèle qui sera utilisé pour le calcul des caractéristiques mécaniques des matériaux composite.

on peut constater après avoir consulter tout ces modèles que les modèles construits a l'échelle du grain sont particulièrement utiles pour justifier et étudier l'influence des paramètres locaux sur le comportement du matériau.

Les modèles construits a l'échelle globale peuvent être très puissants mais nécessitent la formulation d'hypothèses simplificatrices et physiquement admissibles , si l'on veut les rendre a la fois facilement manipulables et performants .

***CHAPITRE 3***  
***CARACTERISTIQUES***  
***MECANIQUES DU MATERIAU***  
***COMPOSITE***

# CARACTERISTIQUES MECANQUES DU MATERIAUX

## 1. généralités :

les caractéristiques mécaniques d'un matériaux , sont des coefficient propres aux matériaux, ne changent pas, tirée de la physique de la relation linéaire, , qui lie la tenseur contrainte T au tenseur déformation E.

### 1- 1 : Tenseur contrainte T :

soit la tenseur  $N \approx ds \cdot n$  tq  $N \begin{vmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{vmatrix}$  sont ces coordonnées sur le repère  $(i_1, i_2, i_3)$ .

Soit le vecteur  $df = C \cdot ds$  : vecteur force de contact.

Ces coordonnées dans le repère orthonomé  $(i_1, i_2, i_3)$  voir figure , sont :

$$df \begin{vmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{vmatrix}$$

on dit que la passage du vecteur N à df s'appelle par définition, la transformation image.

Donc si  $N \longrightarrow df$  connus alors  $n \longrightarrow C$  connu.

On considère un cube élémentaire et on suppose que C ne dépend pas du point considéré de contrainte est homogène, c-à-dire ne varie pas avec le point considéré.

On note  $\sigma_{ij}$  i : indice de la facette étudiée

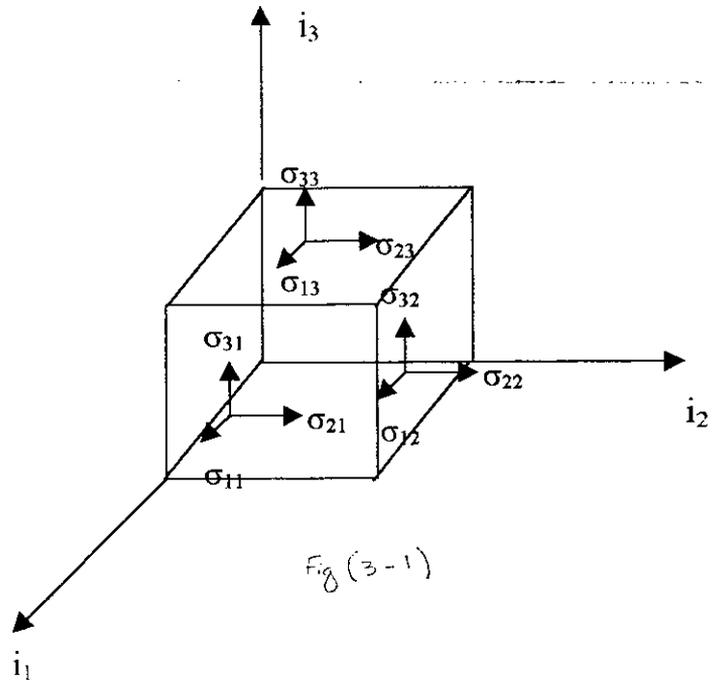
J : indice de projection.

On a pour chaque facette :

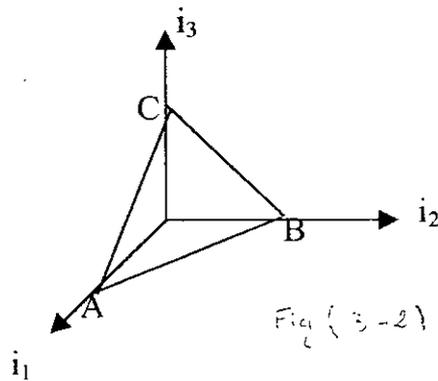
$$I_1 : C(i_1) \begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_{wx} \end{vmatrix}$$

$$I_2 : C(i_2) \begin{vmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zy} \end{vmatrix}$$

$$I_3 : C(i_3) \begin{vmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$



On considère un tétraèdre OABC, on écrit l'équilibre infiniment petit, les forces de volumes sont du 3<sup>ème</sup> ordre, les forces de contact sont du 2<sup>ème</sup> ordre, les forces de volumes sont négligées.



**n** : vecteur normal unitaire  
**c** : vecteur contraire  
 s'exerçant sur la face ABC  
**df** : (aire ABC), **c** : c'est le vecteur force de contact sur la face.

On doit calculer les valeurs de **df**,  $df \begin{vmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{vmatrix}$

$$\text{Et } N \begin{cases} ds_1 \\ ds_2 \\ ds_3 \end{cases} \quad \text{tel que : } \begin{cases} ds_1 : \text{aire de OBC} \\ ds_2 : \text{aire de OAC} \\ ds_3 : \text{aire de OAB} \end{cases}$$

On écrit l'équilibre de la résultante générale des forces de contact sur le tétraèdre.

$$Df + f_{dc}(\text{OBC}) + f_{dc}(\text{OAC}) + F_{dc}(\text{OAB}) = 0 \quad f_{dc} : \text{force de contact.}$$

$$Df + ds [\sigma_{xx} i_1 - \sigma_{yx} i_2 - \sigma_{zx} i_3] + ds_2 [-\sigma_{xy} i_1 - \sigma_{yy} i_2 - \sigma_{zy} i_3] + ds_3 [-\sigma_{xz} i_1 - \sigma_{yx} i_2 - \sigma_{zz} i_3] = 0$$

$$\text{Sur } i_1 \quad \text{on a } df_1 = \sigma_{xx} ds_1 + \sigma_{xy} ds_2 + \sigma_{xy} ds_3.$$

$$\text{Sur } i_2 \quad \text{on a } df_2 = \sigma_{yx} ds_1 + \sigma_{yy} ds_2 + \sigma_{yz} ds_3.$$

$$\text{Sur } i_3 \quad \text{on a } df_3 = \sigma_{zx} ds_1 + \sigma_{zy} ds_2 + \sigma_{zz} ds_3.$$

$$\text{Donc } df_i = \sigma_{ij} ds_j \quad \text{or } dF = TN$$

Si on divise (1) par ds on obtient .

$$C = T \dots\dots\dots(2).$$

T c'est le tenseur contrainte.

$$T = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

$\sigma_{ij}$  est un élément du tenseur contrainte  $[C]_{\sigma}$  d'ordre deux défini en un point M du milieu par rapport à un repère orthonormé. celui-ci s'écrit

$$[C]_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$[C]_{\sigma} = [C]_{\sigma}^S + [C]_{\sigma}^D$$

où  $[C]_{\sigma}^S$  est le tenseur contrainte sphérique responsable de la dilatation volumique et  $[C]_{\sigma}^D$  est le tenseur contrainte déviatorique responsable de la scission et de l'écart des contraintes normales par rapport à la contrainte moyenne.

$$[C]_{\sigma}^S = p[I] \quad \text{et} \quad [C]_{\sigma}^D = [C] - p[I]$$

avec  $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$  et  $[I]$  la matrice unité.

On peut conclure que l'état de contrainte en un point M est complètement déterminée par la connaissance du tenseur contrainte, c-à-dire les composants des vecteurs contraintes qui s'appliquent sur 3 axe orthogonaux des vecteurs de normale XYZ.

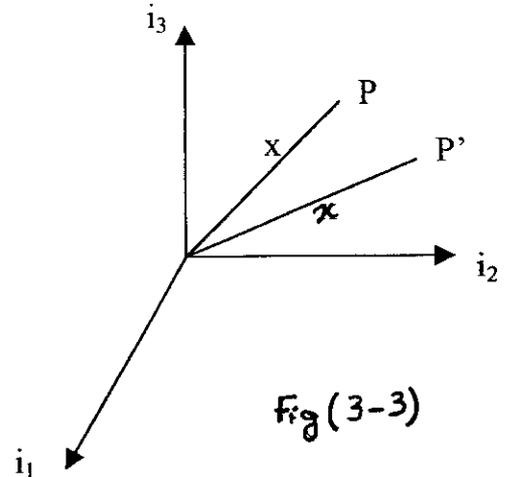
Il suffit alors pour déterminer la contrainte qui s'exerce sur un plan quelconque, de multiplier le tenseur exprimé dans le repère xyz, par les cosinus directeur.

1.2 tenseur de déformation E :

soit un point P de coordonnées

$$\begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = Y \\ X_3 = Z \end{cases}$$

et le point P' = x =

$$\begin{cases} X = x_1(x_1, x_2, x_3) \\ Y = x_2(x_1, x_2, x_3) \\ Z = x_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$


On dit que la transformation est homogène ou linéaire lorsque les fonctions  $x_1, x_2, x_3$  sont linéaires en  $X_1, X_2, X_3$ .

Donc  $x_1 = a x_1 + b x_2 + c x_3$   
 $x_2 = a x_1 + b x_2 + c x_3$   
 $x_3 = a x_1 + b x_2 + c x_3$

Cas des petites déformations

$$a = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \text{cte};$$

$$\text{D'ou } b = \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = \text{cte}$$

$$c = \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = \text{cte}$$

On peut écrire sous forme explicite :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} X_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} X_3 \\ x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} X_2 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} X_3 \\ x_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_1} X_1 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} X_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} X_3 \end{cases}$$

sous forme indicielle :

$$x_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} X_j$$

donc

$$f_{ij} = x_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

on appelle F tenseur transformation linéaire

$$x = FX$$

soit U vecteur déplacement de la particule p

$$U = PP' = \begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 \\ U_2 = x_2 - X_2 \\ U_3 = x_3 - X_3 \end{cases}$$

$$U = x - X = Fx - Ix = (F - I) x = Hx.$$

H : appelé tenseur déformation homogène ou linéaire on peut décomposer le tenseur en 2 tenseurs, symétrique et anti-symétrique.

$$H = H^s + H^a = E + \Omega \quad \text{tq : } E = \frac{1}{2} (H + H^t).$$

$$\Omega = \frac{1}{2} (H - H^t).$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial w} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial w} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial w} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) & 0 \end{vmatrix}$$

on peut faire une séparation au niveau du tenseur E en deux tenseurs, le 1er responsable de la variation de volume, le 2<sup>ème</sup> est responsable que de la variation de forme

on a  $E = (1/3 \text{ tr } E) I + E'$ .

$$E = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} \end{vmatrix} +$$

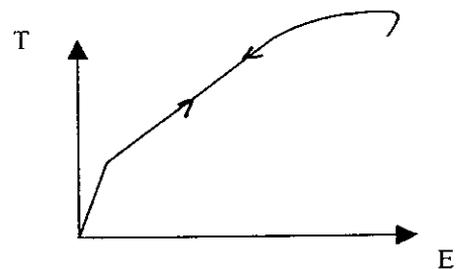
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}(2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \frac{1}{3}(-\varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}) & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \frac{1}{3}(-\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \end{vmatrix}$$

On rappelle que  $\frac{\Delta v}{v} = tr E$

Et par définition  $(1/3 tr(E)) I$  s'appelle tenseur déformation pur isotrope.  
Et  $E'$  s'appelle tenseur déviateur

2. comportement élastique :

le domaine élastique du comportement mécanique d'un matériau est le domaine pour lequel le matériau recouvre instamment sa forme original après suppression des forces ayant provoquées sa déformation.



Fig(3-4)

Le comportement élastique s'exprime par une relation biharmonique et instantanée entre le tenseur T contrainte,  
et E tenseur déformation pure.

2.1 *Hyperélasticité* :

on suppose qu'il existe une fonction potentielle élastique en fonction de l'énergie de déformation élastique qu'on désigne par  $W$ , qui est une fonction de  $E$ .

$$T = \frac{\partial W}{\partial E}$$

or

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

- *Etat limite* :

C'est l'état tel qu'on a à la fois :

$$\begin{aligned} T &= 0 \\ E &= 0 \\ W &= 0. \end{aligned}$$

Par convention la relation est linéaire entre  $T$  et  $E$ , donc l'expression du potentiel  $W$  s'écrit sous la forme

$$W = A + B_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \zeta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

dans le cas neutre on a :

$$E = 0 \longrightarrow W = 0 \implies A = 0.$$

$$E = 0 \implies T = 0.$$

$$\sigma_{ij} = (B_{ij} + \zeta_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \Rightarrow B_{ij} = 0$$

donc

$$W = \frac{1}{2} \zeta_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \dots \dots \dots (1)$$

fonction quadratique homogène qui s'écrit

$$W = \frac{1}{2} \text{tr TE} \dots \dots \dots (2).$$

Comme

$$T = \frac{\partial W}{\partial E} \Rightarrow \sigma_{ij} = \zeta_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$T = C.E$$

appelé aussi loi de Hooke.

Le tenseur C de 4<sup>ème</sup> ordre s'appelle tenseur de l'Hyperélasticité linéaire.

Notre tenseur C est constitué de 81 coefficient au début et on élimine les coefficients un à un suivant plusieurs étapes.

1- symétrie du tenseur C

$$T^t = T \implies \zeta_{ijkl} = \zeta_{jikl}$$

$$E^t = E \implies \zeta_{ijkl} = \zeta_{jilk}$$

2- conditions d'intégrabilité :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \Rightarrow \zeta_{klij} = \zeta_{ijkl}$$

3- lois symétriques :

- orthotropie : c'est la symétrie de la loi par rapport à 3 plans .
- orthotropie de révolution : un plan est isotrope pour une loi, lorsqu'on transforme E par une rotation arbitraire autour de la normale au plan, la réponse mécanique T est transformé par la même rotation.

2-2 Module de Yong et coefficient de poisson :

Généralement défini à partir d'un essai de traction simple ou de compression simple :

$$T = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_{11} = \sigma \quad \text{et autre } \sigma_{ij} = 0$$

La relation contrainte déformation dans le cas uni dimensionnelle, est une loi linéaire appelée loi de Hooke .

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} > 0$$

E : module de Yong.

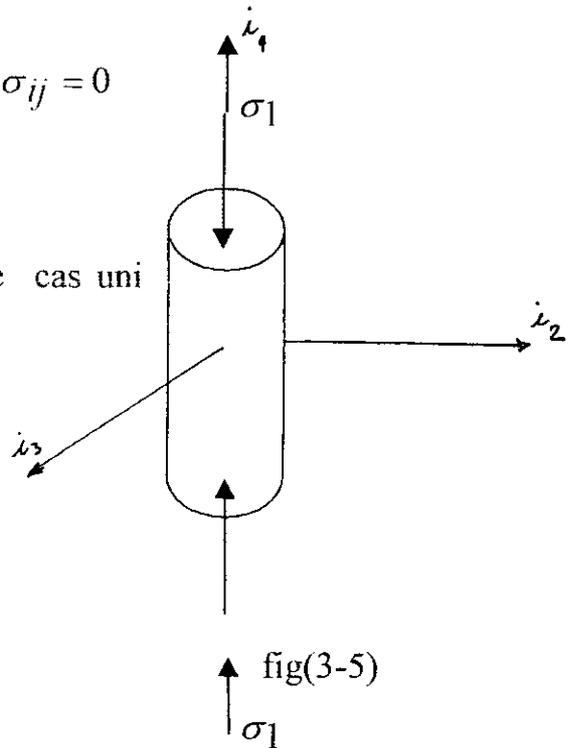
Pour ce qui est des déformations  $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} > 0$$

La relation entre  $\nu, E, \lambda$  et  $\mu$  :  $\lambda$  et  $\mu$  représente les coefficients de Lamé

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{coefficient de poisson}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{module de coulomb}$$



III Les caractéristiques indépendantes et la théorie de l'élasticité :

un certain nombre d'auteurs, ont tenté une approche plus précise des caractéristiques en utilisant les principes de la théorie de l'élasticité.

III.1 Recherche d'un intervalle borné :Principe :

Les calculs des limites des caractéristiques s'appuient sur les principes de variations de la théorie de l'élasticité qui admettent ; que les états de contraintes et de déformations réels sont ceux qui rendent minimale l'énergie de déformation.

On sait que l'énergie de déformation potentielle  $U$  d'un corps élastique de volume  $V$  est donnée d'un façon générale par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_i \varepsilon_i dv, \quad i=1, 2, \dots, 6. \dots\dots\dots [1-J.Pabiot]$$

Lorsque l'on applique à ce corps une contrainte moyenne longitudinale  $\sigma_1$  donnant lieu à une déformation globale  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}$  alors l'énergie potentielle du système sera :

$$U = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2}{E_1} V \quad \text{ou} \quad U = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^2 V$$

En fait on ne connaît pas la répartition des contraintes et des déformations à l'intérieur du volume  $V$ . Mais, d'après le principe de l'énergie minimale complémentaire, un état de contraintes virtuelles  $\sigma_0$  admissible.

c'est-à-dire qui satisfait les équations d'équilibre et les conditions aux limites, engendre une énergie  $U_0 \geq U$ .

Rappelons que dans ce cas pour un essai uniaxial, la courbe contrainte déformation et l'énergie de déformation par unité de volume est :

$$W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \quad \text{et dans le cas multiaxial } W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

et l'énergie complémentaire par unité de volume

$$\Omega(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma \quad \text{et dans le cas multiaxial } \Omega(\sigma_{ij}) = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}$$

on a  $W + \Omega = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$

Il y a deux façons de décrire le comportement réversible du matériau en contrainte totale :

- la première consiste à dire qu'il y a une correspondance unique contrainte déformation de la forme :

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl})$$

Cette forme implique que nous avons un matériau élastique de *Cauchy*.

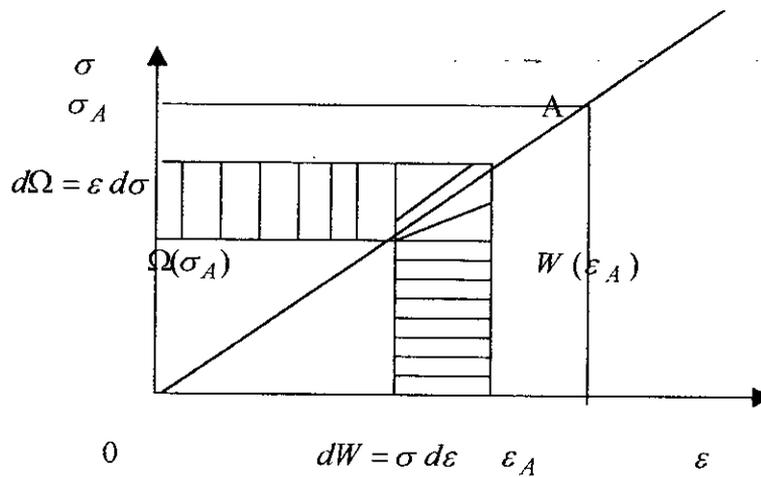
- La deuxième que les contraintes sont les gradients de l'énergie potentielle de déformation :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

ou bien que les déformations sont les gradients de l'énergie de déformation complémentaire.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

Dans ce cas le matériau est hyperélastique et est dit 'matériau élastique de Green'.



*Fig 3-6 courbe contrainte déformation  
(essai uniaxial pour un matériau isotrope élastique-linéaire.)*

pour les matériaux isotropes la relation (E-G) est tels que :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Rappelons que le passage d'un état physique a un autre , ce fait par un niveaux d'énergie minimale .

Notons que la distribution des composants est définie par la distribution scalaire par les teneur volumiques  $\varphi_{vf}$ ,  $\varphi_{vm}$ , ces grandeurs n'étant pas d'ailleurs indépendantes puisque l'en a :

$$\begin{cases} \varphi_{pf} + \varphi_{pm} = 1 \\ \varphi_{vf} + \varphi_{vm} = 1 \end{cases}$$

On peut choisir en particulier un  $\sigma_0$  constant dans chaque section et le long de l'élément considéré tel que :

$$\sigma_0 = \sigma_1$$

Alors

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_0^2}{E} dv = \frac{\sigma_0^2}{2} \int_V \frac{dv}{E}$$

Soit en faisant intervenir les volumes respectifs de chaque constituant :

$$U_0 = \frac{\sigma_0^2}{2} V \left( \frac{\varphi_{Vf}}{E_f} + \frac{\varphi_{Vm}}{E_m} \right)$$

L'inégalité énergétique permet de borner inférieurement le module :

$$\frac{1}{E_1} \leq \frac{\varphi_{Vf}}{E_f} + \frac{\varphi_{Vm}}{E_m}$$

La borne supérieure est obtenue en appliquant le principe de l'énergie minimale.

On admet un état de déformation  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$ .

Dans le calcul de l'énergie de déformation virtuelle  $U_0 \leq U$ , il est nécessaire de tenir compte des déformations transversales.

$U_0 \leq 1/2 E_1 \varepsilon_1$  nous conduit à :

$$E_1 \leq \frac{1-\nu_m-4\mu\nu_m+2\mu^2}{(1-2\nu_m)(1+\nu_m)} E_m \varphi_{Vm} + \frac{1-\nu_f-4\mu\nu_f+2\mu^2}{(1-2\nu_f)(1+\nu_f)} E_f \varphi_{Vf}$$

Où  $\mu$  est un coefficient de Poisson du composite qui a permis de calculer la déformation transversale virtuelle  $\mu\varepsilon_0$ . On peut éliminer  $\mu$  en minimisant le second terme de l'inégalité précédente, ce qui revient à minimiser l'énergie virtuelle :

$$\mu = \frac{\nu_f(1-2\nu_m)(1+\nu_m)\varphi_{Vf}E_f + \nu_m(1-2\nu_f)(1+\nu_f)\varphi_{Vm}E_m}{(1-2\nu_m)(1+\nu_m)\varphi_{Vf}E_f + (1-2\nu_f)(1+\nu_f)\varphi_{Vm}E_m}$$

On remarquera que la limite inférieure correspond à la valeur du module transversal précédent donc que cette limite est très basse. D'autre part si  $\mu = \nu_m = \nu_f = \nu$  la limite supérieure se réduit à :

$$E_1 \leq \varphi_{\nu_f} E_f + \varphi_{\nu_m} E_m$$

### HASKIN, ROSEN :

Ont utilisés le même calcul des variations en minimisant l'énergie de déformation pour trouver des bornes, mais ils ont raisonné non pas sur un volume global, mais sur un volume élémentaire théorique (motif ou maille) en considérant par exemple les renforts comme des inclusions cylindriques réparties suivant une configuration hexagonale, carrée ou aléatoire.

Pour des répartitions aléatoires on trouve des limites confondues pour les coefficients de Poisson et les modules de Coulomb :

$$\nu_{12} = \frac{\varphi_{\nu_f} E_f L_1 + \varphi_{\nu_m} E_m L_2 \nu_m}{\varphi_{\nu_f} E_f L_3 + \varphi_{\nu_m} E_m L_2}$$

Avec

$$\begin{cases} L_1 = 2 \nu_f (1 - \nu_m^2) \varphi_{\nu_f} + \varphi_{\nu_m} (1 + \nu_m) \nu_m \\ L_2 = \varphi_{\nu_f} (1 - \nu_f - 2 \nu_f^2) \\ L_3 = 2 (1 - \nu_m^2) \varphi_{\nu_f} + \varphi_{\nu_m} (1 + \nu_m) \end{cases}$$

$$G_{12} = G_m \frac{\eta (1 + \varphi_{\nu_f}) + \varphi_{\nu_m}}{\eta \varphi_{\nu_m} + 1 + \varphi_{\nu_f}}$$

Avec 
$$\eta = \frac{G_f}{G_m}$$

Tsai a appliqué le même raisonnement sur des modèles cylindriques à répartition aléatoire, mais en introduisant un facteur de continuité

$$\begin{cases} C=1 & \text{continuité du renfort} \\ C=0 & \text{continuité de la matrice} \end{cases}$$

Il a trouvé ainsi :

$$\begin{aligned} \rightarrow G_{12} &= (1-C)G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m)\varphi_{Vm}}{2G_m - (G_f - G_m)\varphi_{Vm}} + G_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m)\varphi_{Vm}}{(G_f + G_m) - (G_f - G_m)\varphi_{Vm}} \\ \rightarrow E_{22} &= 2 \left[ -\nu_f + (\nu_f - \nu_m)\varphi_{Vm} \right] \left[ (1-C) \frac{k_f(2k_m + G_m) - G_m(k_f - k_m)\varphi_{Vm}}{(2k_m + G_m) - 2(k_f - k_m)\varphi_{Vm}} \right. \\ &\quad \left. + C \frac{k_f(2k_m + G_f) - G_f(k_m - k_f)\varphi_{Vm}}{(2k_m + G_f) - 2(k_m - k_f)\varphi_{Vm}} \right] \\ \rightarrow \nu_{12} &= (1-C) \frac{k_f\nu_f(2k_m + G_m)(1 - \varphi_{Vm}) + k_m\nu_m(2k_f + G_m)\varphi_{Vm}}{k_f(2k_m + G_m) + G_f(k_m - k_f)\varphi_{Vm}} \end{aligned}$$

Avec

$$k_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)} \quad , \quad G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)} \quad 0 \leq C \leq 1$$

$$k_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)} \quad , \quad G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$$

Notons que les hypothèses communes restent nombreuses :

- Composants (matrice (pâte de ciment) et renfort (granulats))  
,continus, homogènes, isotropes, élastiques (absence d'inclusions gazeuses ou autres).
- Liaison matrice – renfort parfaite : pas de vide, ni d'effet de peau à l'interface.

Néanmoins on pourra remarquer que les hypothèses complémentaires sont devenues moins générales au fur et à mesure que la théorie a progressé ; cette restriction des généralités a porté essentiellement sur deux points :

- La configuration et la géométrie des renforts dans une section droite.
- La répartition des contraintes.

La théorie de l'élasticité, avec ses principes énergétiques, conserve dans un premier temps ces hypothèses générales, non pas pour calculer des valeurs exactes, mais des bornes.

Dans un deuxième temps elle va restreindre les hypothèses en tenant compte de la géométrie des renforts (cylindres à section circulaire, elliptique...) et de leur répartition dans une section droite (hexagonale, rectangulaire, carrée, aléatoire).

Enfin avec ces mêmes hypothèses restrictives, elle calcule la répartition des contraintes et des déplacements en appliquant les équations fondamentales de l'élasticité :

- Equilibres
- Compatibilités

- Conditions aux limites

La valeur moyenne des contraintes est obtenue par intégration des contraintes dans un volume d'un motif élémentaire caractéristique de la configuration choisie.

Ces méthodes conduisent à des relations de plus en plus complexes. En effet si les lois des mélanges sont très simples il n'en est pas de même du traitement d'autres méthodes qui ne peut être mené qu'avec un ordinateur.

On est amené en particulier à résoudre un système d'équations linéaires homogènes dont le nombre sera d'autant plus élevé que l'on recherchera une plus grande précision. (Il dépend du nombre de termes de la série et du nombre de point choisi pour les conditions aux limites).

***CHAPITRE 4***  
***EXEMPLES DE CALCUL***

## EXEMPLES DE CALCUL

### Introduction :

Il est intéressant maintenant de voir en utilisant la méthode de calcul développée par Rosén et Hashkin, comment il est possible d'améliorer les caractéristiques d'un matériaux en jouant sur la nature de ces constituants. Nous étudierons le coefficient du composite et les caractéristiques correspondantes de la matrice en fonction de la caractéristique relative du renfort. Le module longitudinal  $E_1$ , et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  sont définis simplement analytiquement par les lois des mélanges .

### 2-Influence de la nature des constituants :

Le calcul des caractéristiques du béton à partir des caractéristiques de ces constituants, sera fait en 2 étapes :

#### 1<sup>er</sup> étape :

A/ choisir six roches de résistance à la compression différentes :

- Quartz  $R = 290$  Mpa
- Bazalte  $R = 250$  Mpa
- Poryphyre  $R = 230$  Mpa .....[4. Lacroix -Thonier -Fuentes « traité de béton armé ».
- Granite  $R = 190$  Mpa
- Calcaire  $R = 90$  Mpa
- Grés  $R = 25$  Mpa

Et prendre deux types de ciments, qui comporte un écart en résistance égal à 10 Mpa.

- Ciment calcique :  $34,9$  Mpa  $\leq 35$  Mpa
- Ciment siliceux  $45,3$  Mpa

B/ calculer le module de Yong propre correspondant à chaque roche notée  $E_f$ ,

$E_m$ , selon les relations ..... [4. Lacroix –Thonier –Fuentes « traité de béton armé ».]

$$\text{Quartz } E_Q = 11000\sqrt[3]{r} = 11000\sqrt[3]{290} = 72672,687 \text{ Mpa.}$$

$$\text{basalte : } E_{\text{basalte}} = 11000\sqrt[3]{r} = 11000\sqrt[3]{250} = 69168,237 \text{ Mpa}$$

$$\text{porphyre } E_{\text{por}} = 11800\sqrt[3]{r} = 11800\sqrt[3]{230} = 72166,788 \text{ Mpa}$$

$$\text{granite } E_{\text{granite}} = 11000\sqrt[3]{r} = 11000\sqrt[3]{190} = 63127,361 \text{ Mpa}$$

$$\text{calcaire } E_{\text{cal}} = 15000\sqrt[3]{r} = 15000\sqrt[3]{90} = 671120,3 \text{ Mpa}$$

$$\text{grès } E_{\text{grès}} = 4600\sqrt[3]{r} = 13436,05 \text{ Mpa}$$

$$\text{ce qui donne } E_{\text{ciment}} = 11000\sqrt[3]{r} = 39162,768 \text{ Mpa}$$

$$\text{Calcique } E = 1100\sqrt[3]{r} = 35939,112 \text{ Mpa}$$

c/ calculer le module de Coulomb propre correspondant ( $C_f$ ,  $C_m$ ) :

la variation qui lie le module de Yong au module de coulomb est donnée :

$$G_1 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \nu : \text{ module de poisson } (\nu = 0.2).$$

Les modules de Coulomb deviennent :

$$\text{Quartz } G_f = \frac{72672,687}{2(1+0,2)} = 30280,286 \text{ Mpa}$$

$$\text{Basalte } G_f = \frac{69168,237}{2(1+0,2)} = 30069,495 \text{ Mpa}$$

$$\text{Porphyre } G_f = \frac{72166,788}{2(1+0,2)} = 30069,495 \text{ Mpa}$$

$$\text{Granite } G_f = \frac{63127,361}{2(1+0,2)} = 26303,067 \quad \text{Mpa}$$

$$\text{Calcaire } G_f = \frac{67120,3}{2(1+0,2)} = 27966,795 \quad \text{Mpa}$$

$$\text{Grès } G_f = \frac{5598,354}{2(1+0,2)} = 5598,354 \quad \text{Mpa}$$

Pour ce qui est de ciment :

$$\text{Siliceux } G_f = \frac{39162,768}{2(1+0,2)} = 16317,82 \quad \text{Mpa}$$

$$\text{Calciqye } G_m = \frac{35939,112}{2(1+0,2)} = 14974,63 \quad \text{Mpa}$$

D/ pour finir la 1<sup>er</sup> étape on calcul  $\eta$  rapport entre le module de Coulomb correspondant à chaque roches et le module de Coulomb de la matrice (pate de ciment) tel que :

$$\eta = \frac{G_f}{G_m}$$

pour ce qui est de :

$$\text{Quartz : } \eta = \frac{G_f}{G_m} = \frac{30280,286}{16317,82} = 1,855$$

$$\text{Basalte } \eta = \frac{G_f}{G_m} = \frac{28820,098}{16317,82} = 1,766$$

$$\text{Porphyre } \eta = \frac{G_f}{G_m} = \frac{30069,495}{16317,82} = 1,842$$

$$\text{Granite } \eta = \frac{G_f}{G_m} = \frac{26303,067}{16317,82} = 1,611$$

$$\text{Calcaire } \eta = \frac{G_f}{G_m} = \frac{27966,795}{16317,82} = 1,73$$

$$\text{Grès } \eta = \frac{G_f}{G_m} = \frac{5598,354}{16317,82} = 0,343$$

Tout ces résultats sont regroupés dans le tableau (1-4).

### 2<sup>ème</sup> étape :

A/ on varie la teneur de gravier dans le volume du béton de 20% à 90%

On a  $\varphi_f + \varphi_m = 100 \%$

Ces teneurs à prendre sont :

20% -40% -70% et 90%

B/ On calcul le module de Coulomb, de notre matériau composite qui est le béton, à l'aide des relations tirés des hypothèses de Haskin et Rosen pour une répartition aléatoire des granulats dans un volume donné, le calcul se fait en deux étapes :

1\* vérifier la valeur du module de Poisson :

- calculer les coefficients :  $L_1, L_2, L_3$  : tel que :

$$L_1 = 2\nu_f(1 - \nu_m^2) \varphi_f + \varphi_m (1 + \nu_m) \vartheta_m.$$

$$L_2 = \varphi_f (1 - \nu_f - 2\nu_m^2).$$

$$L_3 = 2(1 - \nu_m^2) \varphi_f + (1 + \nu_m) \varphi_m.$$

$$\nu_{12} = \frac{\varphi_f E_f L_1 + \varphi_m E_m L_2 \vartheta_m}{\varphi_f E_f L_3 + \varphi_m E_m L_2}$$

Prenant à titre d'exemple le calcaire :

$$E_{f \text{ calcaire}} = 67120,31 \quad \text{et} \quad G_{f \text{ calcaire}} = 27966,795$$

1- pour une teneur  $\varphi_f = 0,2 \Rightarrow \varphi_m = 0,8$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = 2(0.2) (1-0.2^2) (0.2) + (0.8) (1+0.8) 0.8 = 0.2688 \\ L_2 = 0.2 (1-0.2-2)(0.2)^2 = 0.144 \\ L_3 = 1.344 = 2(1-0.8^2)(0.2) + (1+0.2)(0.8) = 1.344. \end{array} \right.$$

$$v_{12} = \frac{(0.2)(67120.31)(0.2688) + (0.8)(35939,112)(0.144)(0.2)}{(0.2)(67120,31)(1.344) + (0.8)(35939,112)(0.144)} = 0.19999$$

la valeur du module de Poisson du béton fait à partir de gravier d'origine calcaire est voisinant de 0.2 ce qui est le cas pour toutes les autres roches, donc quelque soit la variation de la nature des roches le module de Poisson du béton reste égale à 0.2.

### 2- Calcul du module de Coulomb du béton :

la variation qui donne le module de Coulomb du béton ( $C_{12}$ ) en fonction des modules de Coulomb de ces composants et de leurs teneurs est :

$$G_{12} = G_{1m} \frac{\eta(1 + \varphi_{1f}) + \varphi_m}{\eta\varphi_{1m} + 1 + \varphi_{1f}}$$

$$\text{avec} \quad \eta = \frac{G_{1f}}{G_{1m}}$$

calculons  $G_{12}$  pour les roches suivantes :

le calcul sera pour un ciment calcaire ( $G_{1m} = 14975,413$  Mpa).

Quartz  $E_{\alpha} = 72672,687$  Mpa et  $G_{rQ} = 30280,286$  Mpa

$$\eta = \frac{G_{1f}}{G_{1m}} = \frac{30280,286}{14975,413} = 2,022$$

pour une teneur  $\varphi_f = 0,2 \Rightarrow \varphi_m = 0,8$

$$G_{12} = 14975,413 \left( \frac{(2,022)(1+0,2)+0,8}{(2,022)(0,8)+0,2+1} \right) = 34672,5512 \text{ Mpa}$$

$$G_{12} = 34672,5512 \text{ Mpa}$$

Pour une teneur  $\varphi_f = 0,4 \Rightarrow \varphi_m = 0,6$

$$G_{12} = 14975,413 \left( \frac{(2,022)(1+0,4)+0,6}{(2,022)(0,6)+0,4+1} \right) = 34672,5512 \text{ Mpa}$$

$$G_{12} = 33754,173 \text{ Mpa.}$$

Pour une teneur de  $\varphi_f = 0,7 \Rightarrow \varphi_m = 0,3$

$$G_{12} = (14975,413) \left( \frac{(2,022)(1+0,7)+0,3}{(2,022)(0,3)+0,7+1} \right) = 49063,35771$$

$$G_{12} = 49063,3577 \text{ Mpa.}$$

De la même manière, le calcul s'effectuera pour le reste des roches, ainsi le tableau 2 et 5 .

C/ Calcul du module de Yong :

La relation qui donne le module d'élasticité linéaire du béton en fonction du module d'élasticité de ces composantes .

On a :  $G_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}$  dans le cas générale

Ce qui est valable pour

$$G_{1m} = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad , G_{1f} = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$$

pour ce qui est du béton :

$$G_{12} = \frac{E_{12}}{2(1+\nu_{12})} \Rightarrow E_{12} = 2(1+\nu_{12}) \left[ C_{1m} \frac{\nu(1+\varphi_f) + \varphi_m}{\eta\varphi_m + 1 + \varphi_f} \right]$$

$$E_{12} = 2(1+\nu_{12}) \left[ \left( \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \right) \left( \frac{\eta(1+\varphi_f) + \varphi_m}{\eta\varphi_m + 1 + \varphi_f} \right) \right]$$

voilà la relation qui exprime le module de l'élasticité linéaire du matériau composite en fonction des modules d'élasticité linéaire correspondant à la matrice (pâte de ciment) et du gravier ainsi que leur teneur et coefficients de Poisson.

$$E_{12} = 2 \left[ 1 + \left( \frac{\varphi_f E_f L_1 + \varphi_m E_m L_2 \nu_m}{\varphi_f E_f L_3 + \varphi_m E_m L_2} \right) \right] \left[ \left( \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \right) \left( \frac{\eta(1+\varphi_f) + \varphi_m}{\eta\varphi_m + 1 + \varphi_f} \right) \right]$$

formule générale

- Calcul de  $E_{12}$  :

Pour un gravier de nature Quartz et pâte de ciment siliceux :

$$E_{fQ} = 72672,687 \text{ Mpa} \text{ et } G_{fQ} = 30280,286 \text{ Mpa}$$

$$E_m = 39162,768 \text{ Mpa} \text{ et } G_m = 16317,82 \text{ Mpa}$$

Pour une teneur de  $\varphi_f = 0.2$  et  $\varphi_m = 0.8$

$$L_1 = 0.2688$$

$$L_2 = 0.144 \quad \eta = 1.855$$

$$L_3 = 1.344$$

On sait que quelque soit les teneurs et types de roches, le coefficient de poisson du béton  $\nu_{12} = 0.2$

$$\text{Et } G_{12} = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \cdot \frac{\eta(1+\varphi_m) + \varphi_m}{\eta\varphi_m + 1 + \varphi_f} \quad (\text{calculée ultérieurement}).$$

Pour notre exemple (roche Quartz) ;  $G_{12} = 34131,96 \text{ Mpa}$

$$E_{12} = 2(1+0.2)(34131.96) = 81916,704 \text{ Mpa}$$

Pour un gravier d'origine calcaire :

$$E_f = 67120.3 \text{ Mpa} \Rightarrow G_f = 27966,795 \text{ Mpa}$$

$$E_m = 39162,768 \text{ Mpa} \Rightarrow G_m = 16317,82 \text{ Mpa}$$

Et  $G_{12} = 45295,325 \text{ Mpa}$  pour une teneur de  $\varphi_f = 0.9$  et  $\varphi_m = 0.1$

On obtient

$$E_{12} = 2(1+0.2) (45295,325) = 108708,78 \text{ Mpa}$$

Le même calcul sera exécuté pour le reste des roches et les résultats sont regroupés dans le tableau 2 et 5.

Les tableaux 3 et 6 répondront les valeurs des rapports ( $E_{12} / E_m$ ) module de Yong du béton sur le module de Yong de la matrice et le rapport ( $G_1 / G_2$ ) module de Coulomb du béton sur le module de Coulomb de la matrice de ciment, afin d'obtenir des valeurs sans unité qu'on pourra tirer avec des courbes qui représentent l'évolution des caractéristiques mécaniques du béton en fonction de leur teneur.

Tableau 1 :

Matériau	Ciment (siliceux)	Grès	Calcaire	Granite	Porphyre	Basalte	Quartz
R MPA	45.3	25	90	190	230	250	290
$E_f$ MPA	..... ::	13436.05	67120.30	63127.361	72166.788	69168.237	72672.687
$E_m$ MPA	39162.768	..... ::	..... ::	..... ::	..... ::	..... ::	..... ::
$G_f$ MPA	..... ::	5598.354	27966.795	26303.067	30069.495	28820.098	30280.286
$G_m$ MPA	16317.82	..... ::	..... ::	..... ::	..... ::	..... ::	..... ::
$\eta$ = $G_f/G_m$	..... ::	0.343	1.73	1.611	1.842	1.766	1.855
$\gamma_i$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Tableau 2 :

Matériau		Ciment (siliceux)	Grès	Calcaire	Granite	Porphyre	Basalte	Quartz
G <sub>12</sub> MPA	φ <sub>r</sub> =02	.....	4600.942	.31069.864	28877.46	33857.423	32199.79.	34131.96
	0.4	.....	3764.937	34537.459	31735.729	38154.602	36000.515	38522.114
	0.7	.....	2742.196	40576.422	36608.404	45805.054	42680.835	46342.994
	0.9	.....	2175.61	45295.325	40338.345	51935.595	47955.777	52625.699
E <sub>12</sub> MPA	0.2	.....	11041.181	74567.674	69305.904	81257.816	77279.513	81916.712
	0.4	.....	9038.249	82889.9	76165.75	91571.046	86401.238	92453.075
	0.7	.....	6581.272	97383.414	87860.17	109932.13	102434.005	111223.187
	0.9	.....	5221.464	108708.78	96812.029	124645.429	115093.864	126301.679

Tableau 3 :

Matériau		Ciment (siliceux)	Grès	Calcaire	Granite	Porphyre	Basalte	Quartz
$G_{12}/G_m$	$\phi_f = 0.2$	.....	0.2819	1.9295	1.7696	2.0748	1.9732	2.0916
	0.4	.....	0.2307	2.1165	1.9448	2.3382	2.2062	2.3607
	0.7	.....	0.168	2.48	2.2434	2.807	2.6155	2.84
	0.9	.....	1.3334	2.7758	2.472	3.1827	2.9388	3.225
$E_{12}/E_m$	0.2	.....	0.2819	1.9295	1.7696	2.0748	1.9732	2.0916
	0.4	.....	0.2307	2.1165	1.9448	2.3382	2.2062	2.3607
	0.7	.....	0.168	2.48	2.2434	2.807	2.6155	2.84
	0.9	.....	1.3334	2.7758	2.472	3.1827	2.9388	3.225

**Tableau 4 :**

Matériau	Ciment (calciqne)	Grès	Calcaire	Granite	Porphyre	Basalte	Quartz
$R_{MPA}$	45.3	25	90	190	230	250	290
$E_{fMPA}$	:: :: ::	13436.05	67120.30	63127.361	72166.788	69168.237	72672.687
$E_{mMPA}$	35939.112	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::
$G_{fMPA}$	:: :: ::	5598.354	27966.795	26303.067	30069.495	28820.098	30280.286
$G_{mMPA}$	14974.63	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::	:: :: ::
$\eta$ = $G_f/G_m$	:: :: ::	0.3738	1.867	1.756	2.008	1.924	2.022
$\gamma_i$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

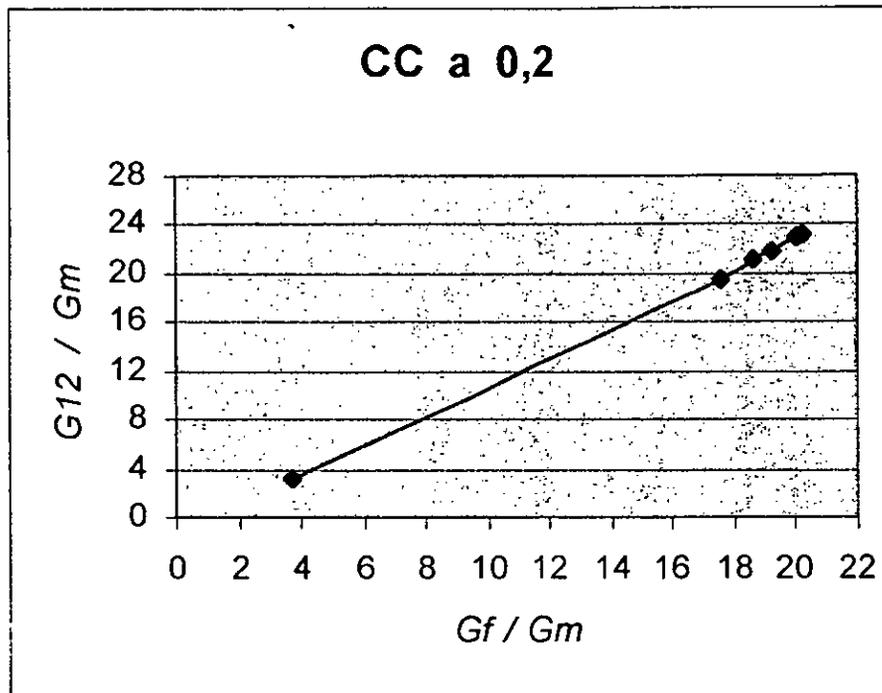
Tableau 5 :

	Matériau	Ciment (calcique)	Grès	Calcaire	Granite	Porphyre	Basalte	Quartz
G <sub>12</sub> MPA	φ <sub>r</sub> =02	.....	4662.904	31567.509	29352.093	34389.3409	32708.7911	34672.551
	0.4	.....	3871.711	35663.711	32786.64	39378.478	37160.145	33754.173
	0.7	.....	2889.973	42986.526	38804.937	48499.859	45191.81	49063.3577
	0.9	.....	1994.853	48882.585	43547.822	56039.645	51728.522	56778.056
E <sub>12</sub> MPA	0.2	.....	11190.971	75762.022	70445.023	82534.4183	78501.098	83214.122
	0.4	.....	9292.106	85592.907	78687.936	94508.348	89184.34	95410.015
	0.7	.....	6935.935	103167.667	93131.85	116399.662	108460.361	117752.058
	0.9	.....	4787.648	117318.208	104514.772	134495.148	124148.453	136267.336

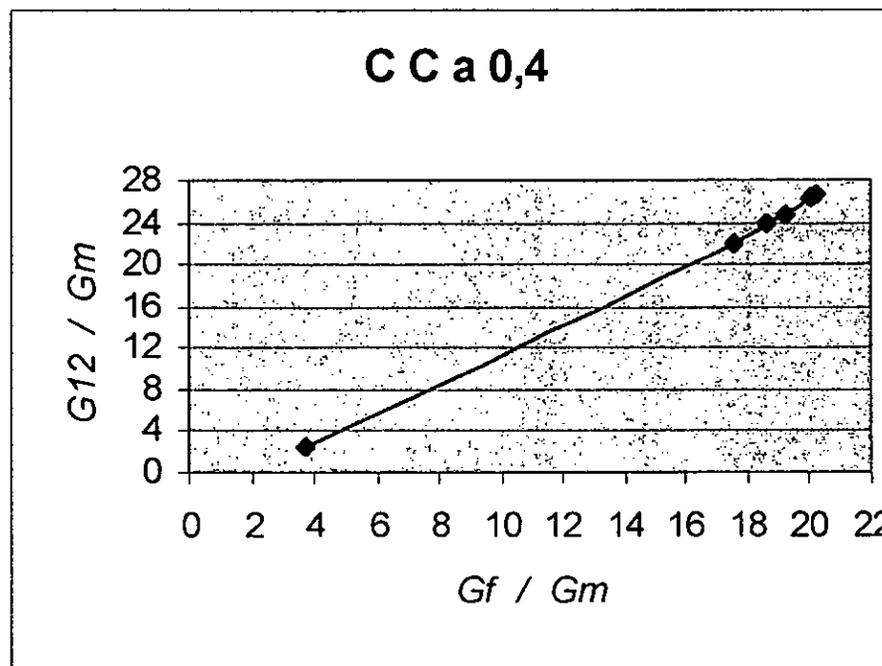
Tableau 6 :

Matériau		Ciment (calciq)	Grès	Calcaire	Granite	Porphyre	Basalte	Quartz
G <sub>12</sub> / G <sub>m</sub>	φ <sub>r</sub> =02	.....	0.3113	2.108	1.9601	2.2965	2.1842	2.3154
	0.4	.....	0.2585	2.3816	2.1894	2.6296	2.4815	2.6547
	0.7	.....	0.1929	2.8706	2.5913	3.2388	3.0178	3.2764
	0.9	.....	0.1332	3.2643	2.9018	3.7423	3.4544	3.7916
E <sub>12</sub> / E <sub>m</sub>	0.2	.....	0.3113	2.108	1.9601	2.2965	2.1842	2.3154
	0.4	.....	0.2585	2.3816	2.1894	2.6296	2.4815	2.6547
	0.7	.....	0.1929	2.8706	2.5913	3.2388	3.0178	3.2764
	0.9	.....	0.1332	3.2643	2.9018	3.7423	3.4544	3.7916

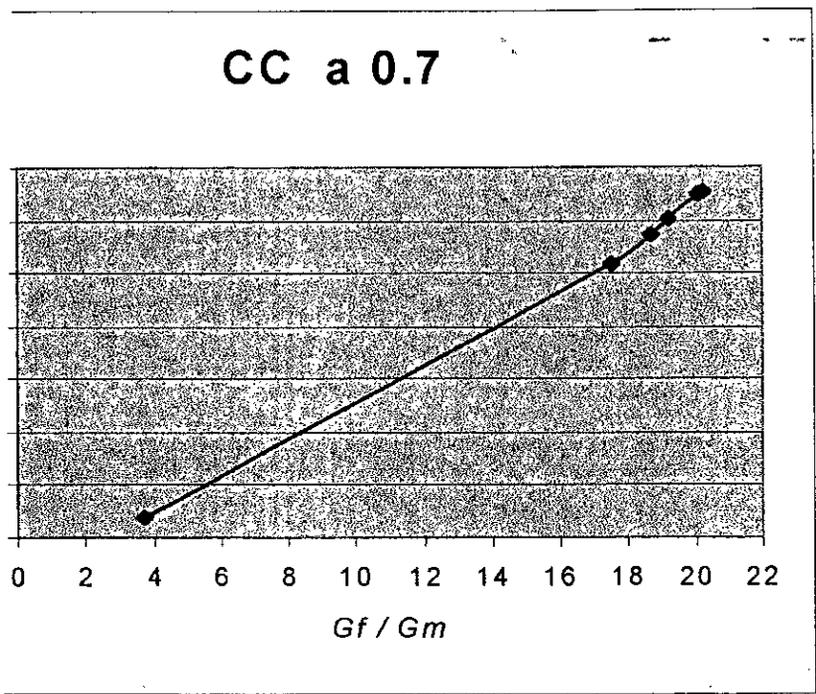
Les courbes :



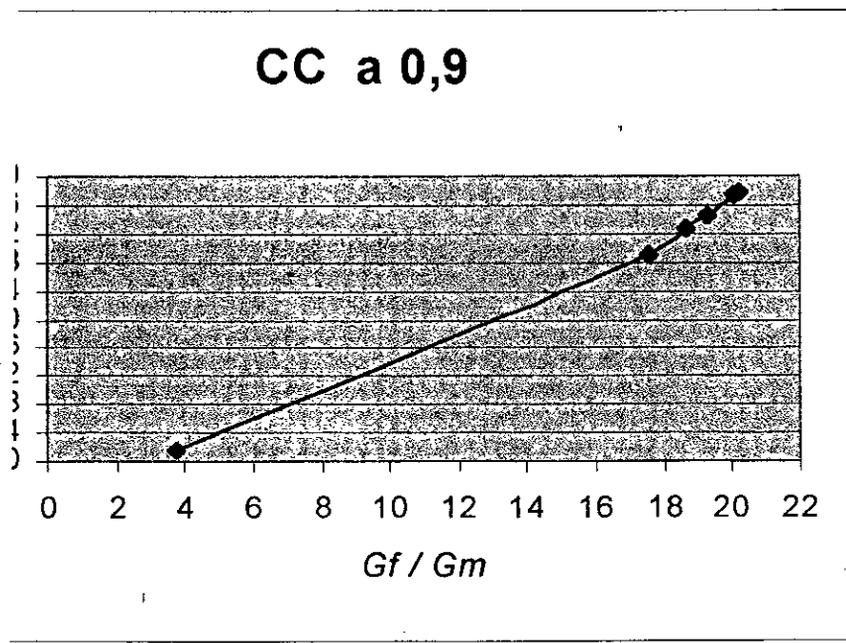
Fig(4-1). Courbe représentant  $G_{\text{beton}}=f(G_f/G_m)$  pour  $\varphi = 0.2$



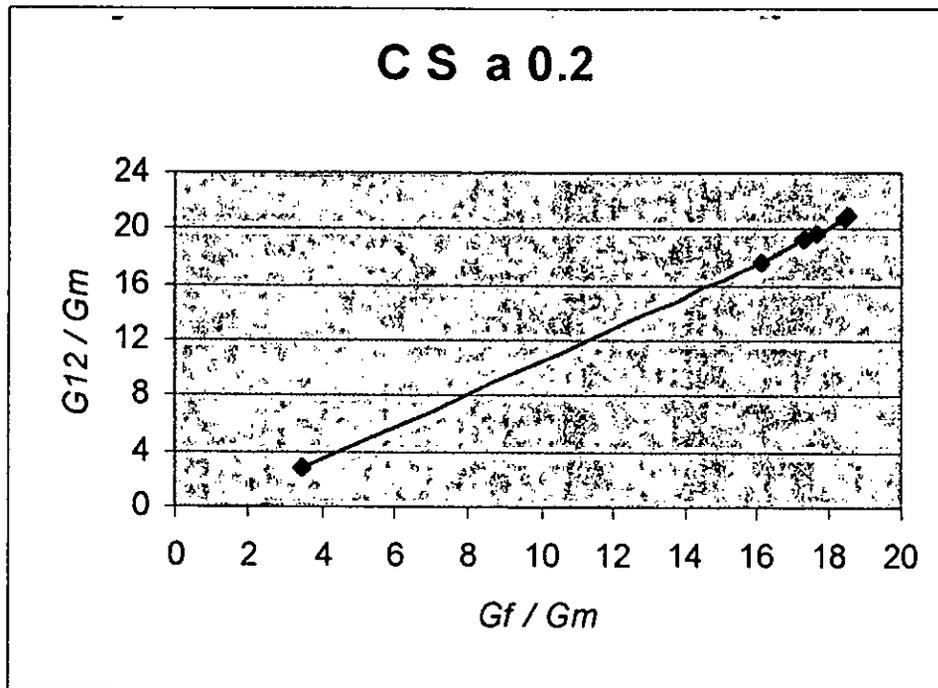
Fig(4-2). Courbe représentant  $G_{\text{beton}}=f(G_f/G_m)$  pour  $\varphi = 0.4$



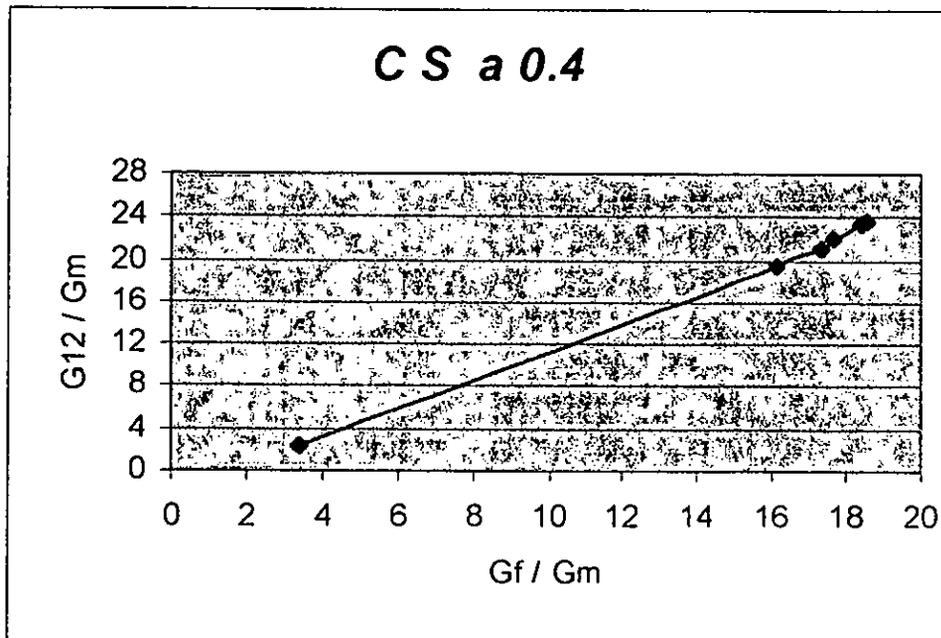
3). Courbe représentant  $G_{beton} = f(G_f / G_m)$  pour  $\varphi = 0.7$



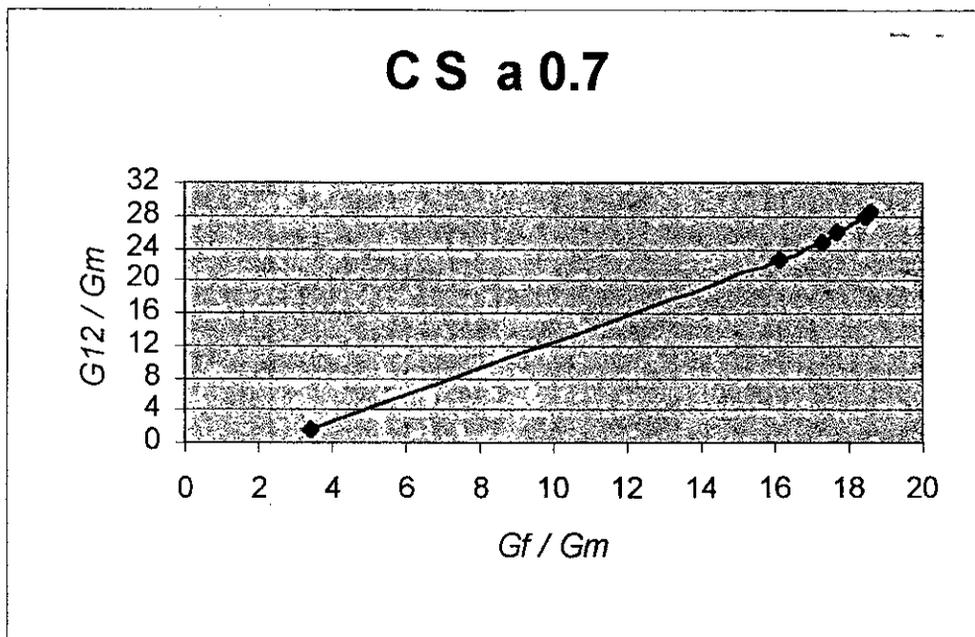
4-4). Courbe représentant  $G_{beton} = f(G_f / G_m)$  pour  $\varphi = 0.9$



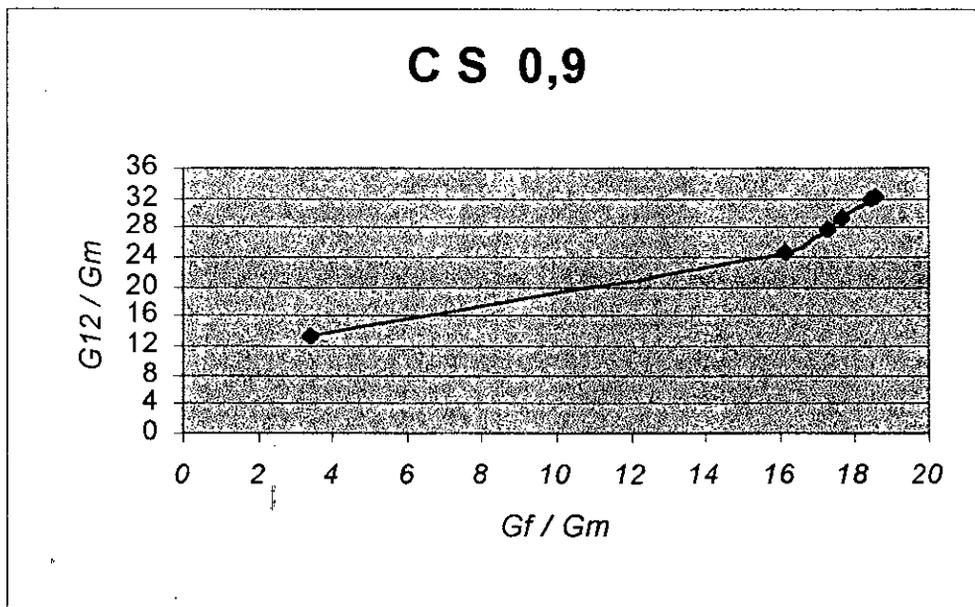
Fig(4-5). Courbe représentant  $G_{\text{beton}} = f(G_f/G_m)$  pour  $\varphi = 0.2$



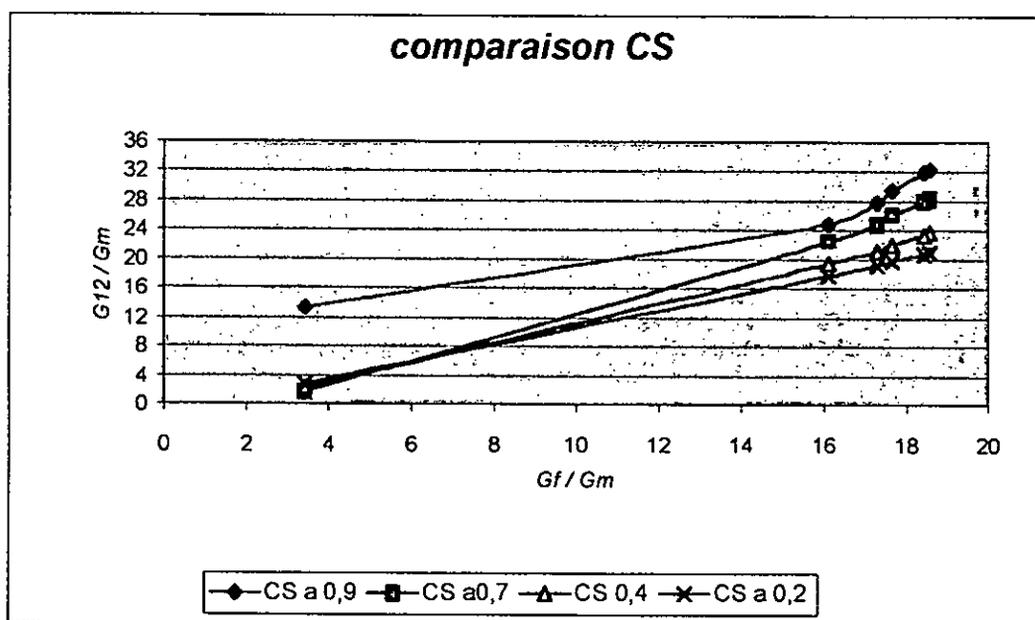
Fig(4-6). Courbe représentant  $G_{\text{beton}} = f(G_f/G_m)$  pour  $\varphi = 0.4$



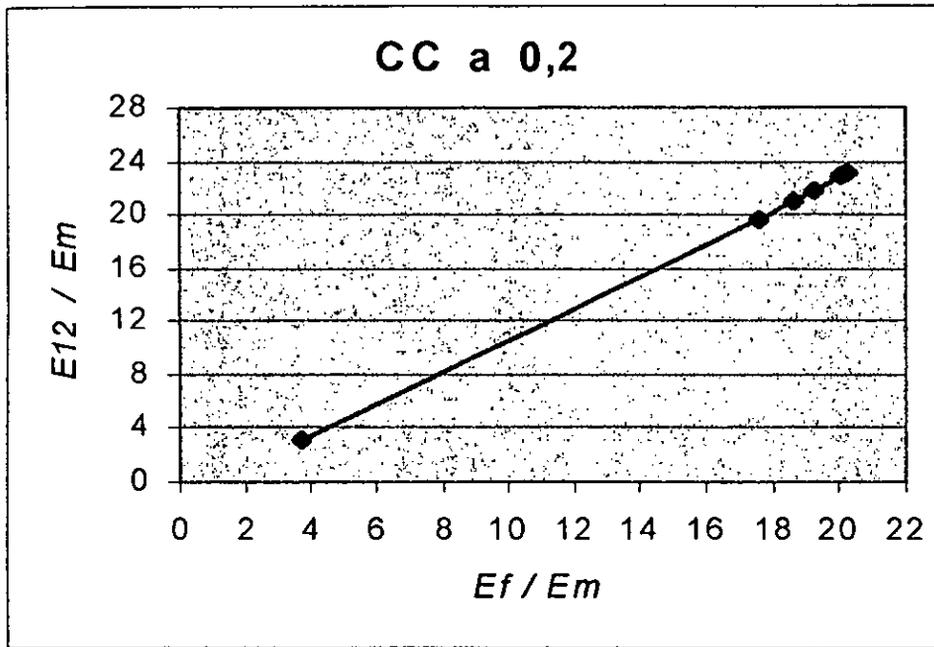
Fig(4-7). Courbe représentant  $G_{\text{beton}}=f(G_f/G_m)$  pour  $\varphi = 0.7$



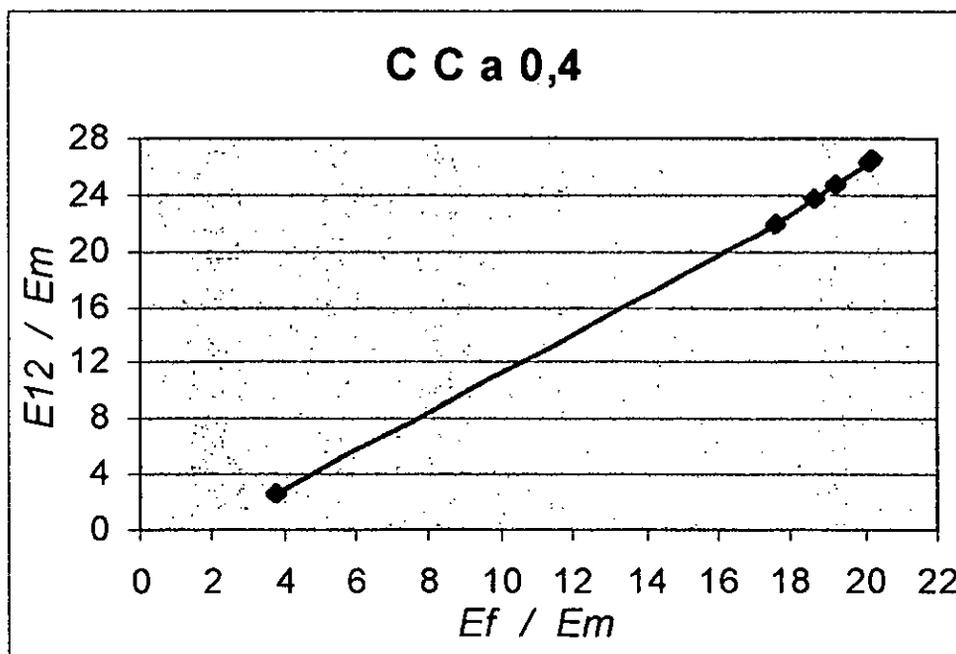
Fig(4-8). Courbe représentant  $G_{\text{beton}}=f(G_f/G_m)$  pour  $\varphi = 0.9$



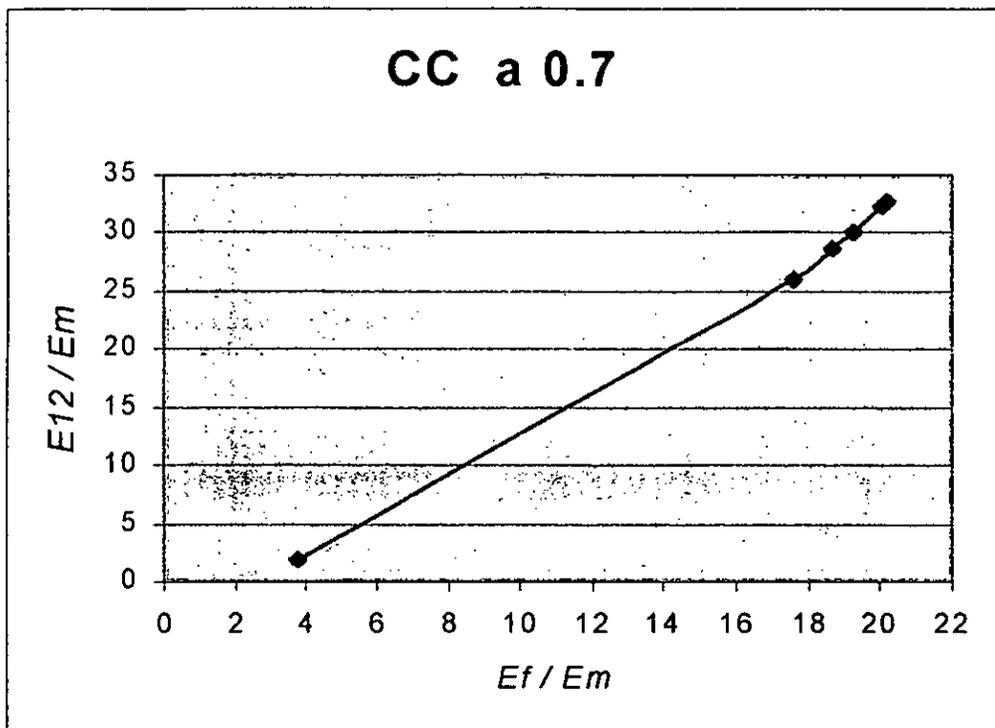
Fig(4-9). Courbe représentant  $G_{\text{beton}}=f(G_f/G_m)$  pour différentes valeurs de  $\phi$



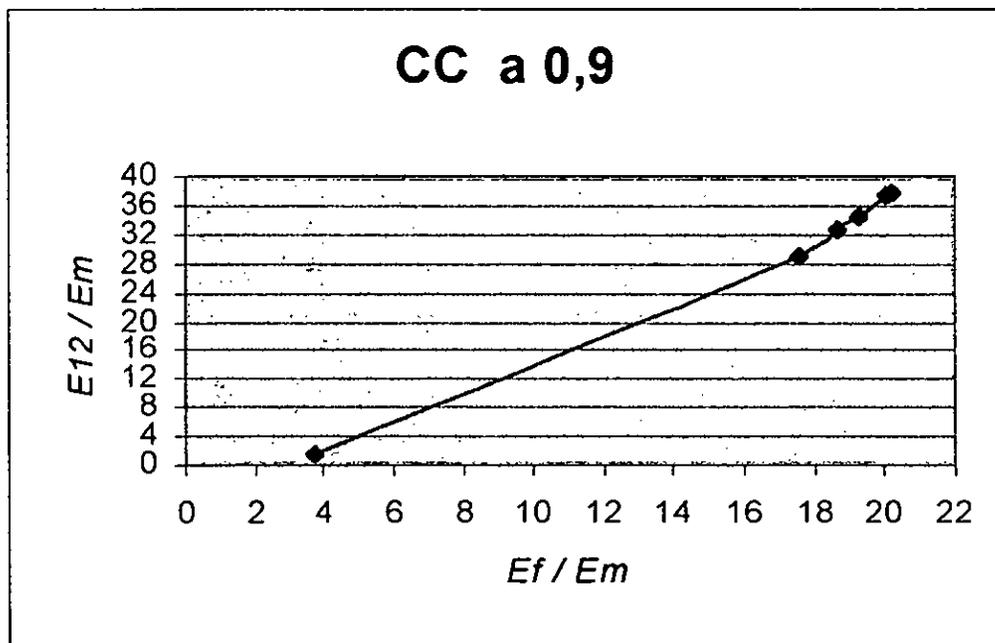
Fig(4-10). Courbe représentant  $E_{cton}=f(E_f/E_m)$  pour  $\varphi = 0.2$



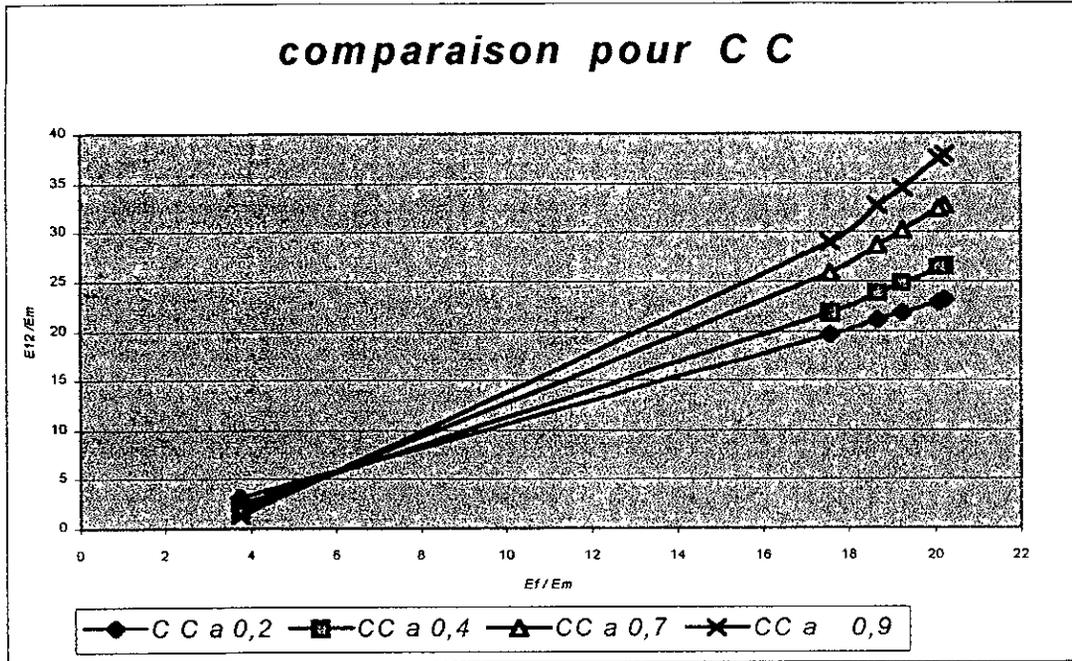
Fig(4-11). Courbe représentant  $E_{beton}=f(E_f/E_m)$  pour  $\varphi = 0.4$



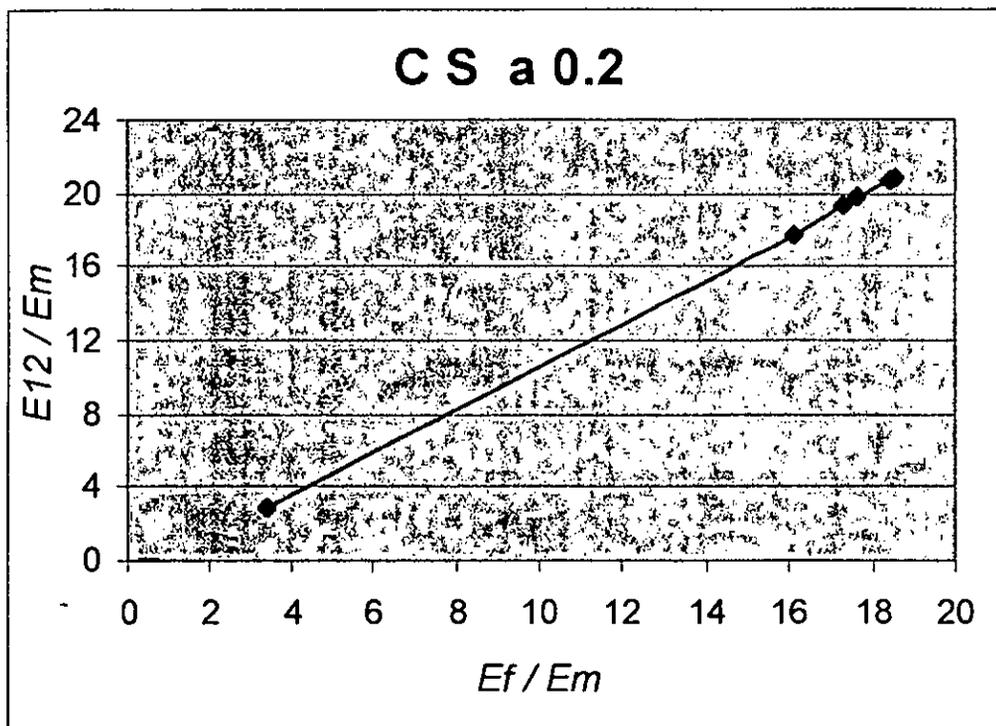
Fig(4-11). Courbe représentant  $E_{beton} = f(E_f/E_m)$  pour  $\varphi = 0.7$



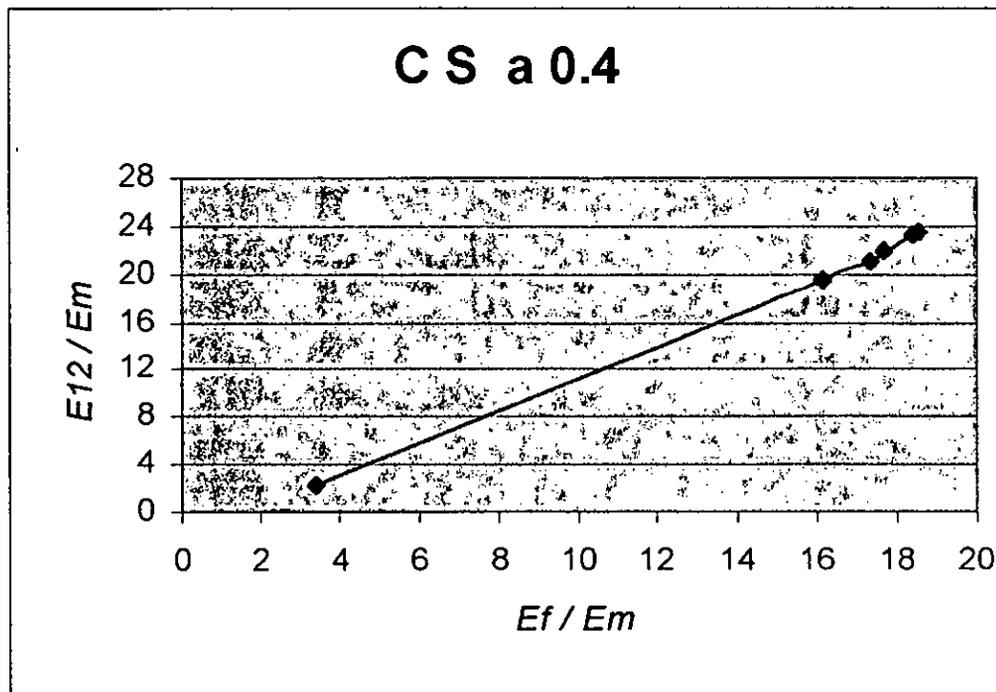
Fig(4-12). Courbe représentant  $E_{beton} = f(E_f/E_m)$  pour  $\varphi = 0.9$



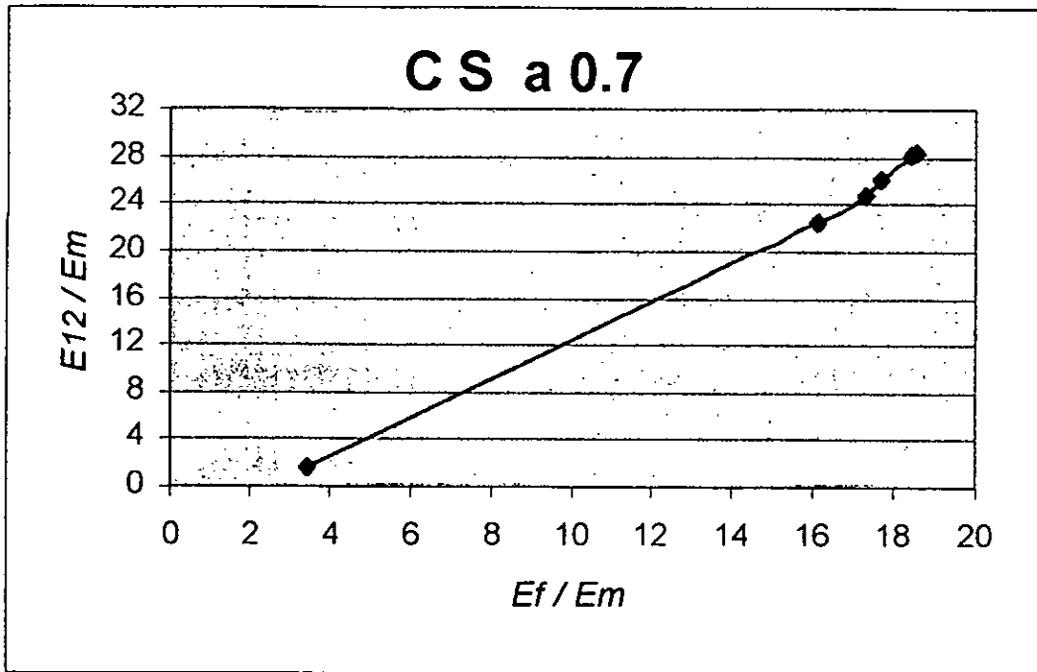
Fig(4-13). Courbe représentant  $E_{\text{beton}}=f(E_f/E_m)$  pour différentes valeurs de  $\phi$ .



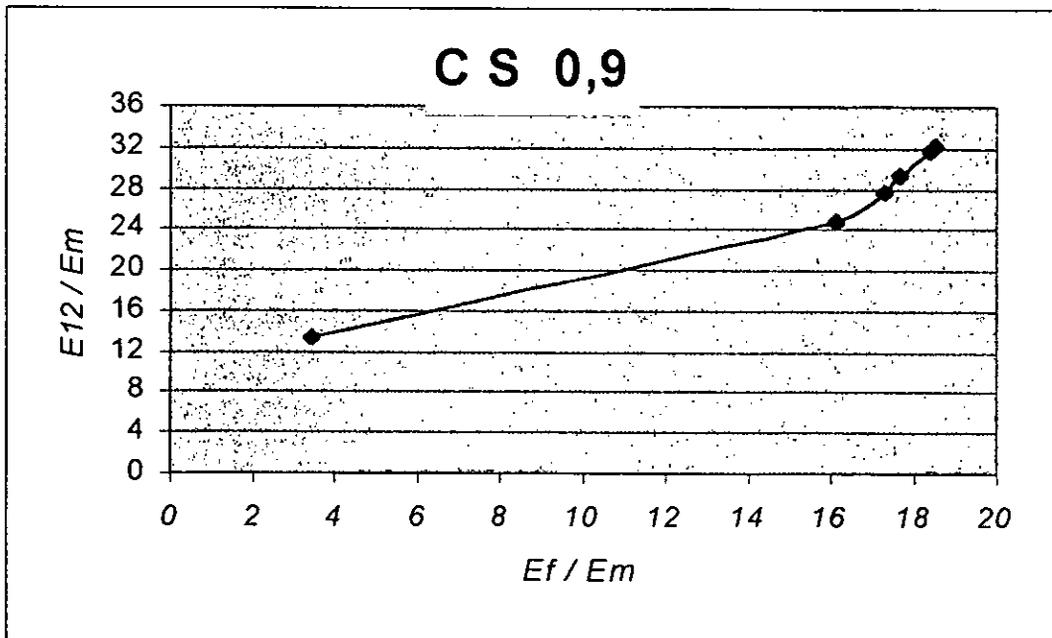
Fig(4-14). Courbe représentant  $E_{\text{beton}} = f(E_f / E_m)$  pour  $\varphi = 0.2$



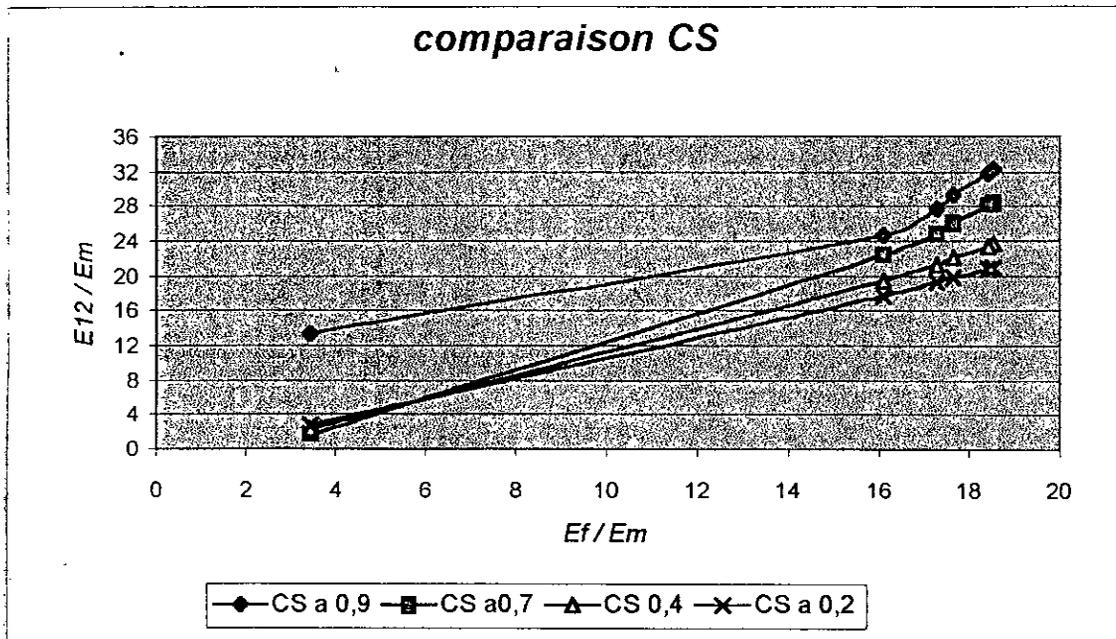
Fig(4-14). Courbe représentant  $E_{\text{beton}} = f(E_f / E_m)$  pour  $\varphi = 0.4$



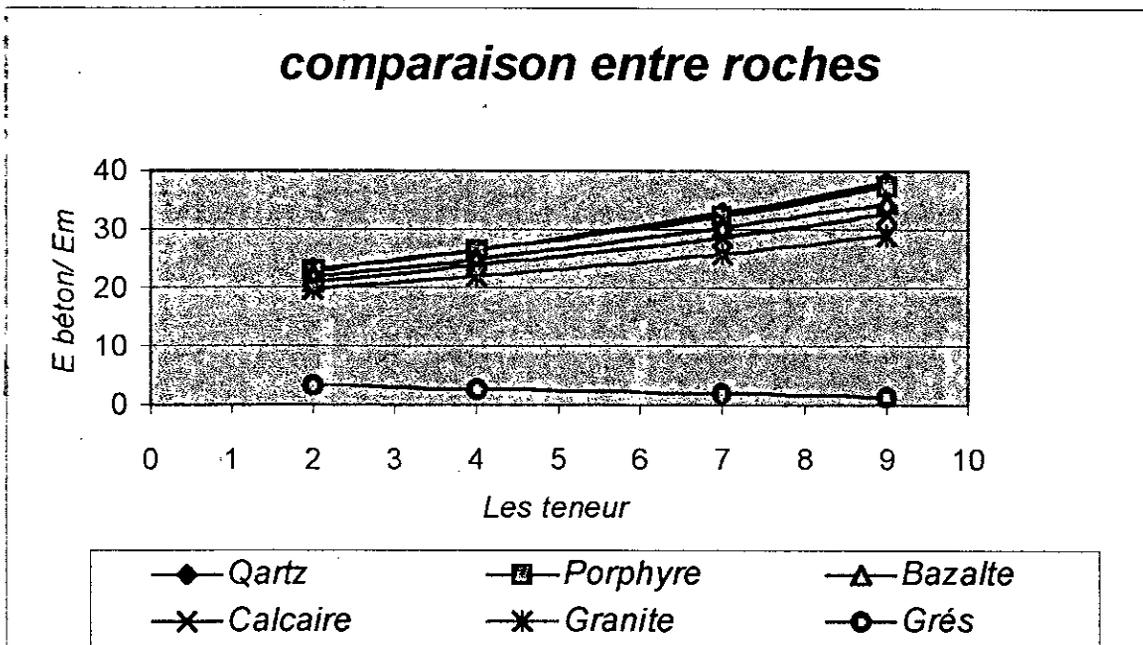
Fig(4-15). Courbe représentant  $E_{\text{beton}} = f(E_f / E_m)$  pour  $\varphi = 0.7$



Fig(4-16). Courbe représentant  $E_{\text{beton}} = f(E_f / E_m)$  pour  $\varphi = 0.9$



Fig(4-17). Courbe représentant  $E_{\text{béton}} = f(E_f / E_m)$  pour les différentes valeurs de  $\rho$



Fig(4-18). Courbe représentant  $E_{\text{béton}} = f(E_f / E_m)$  pour les différents types de roches.

Les courbes représentent l'évolution des caractéristiques mécaniques du béton en fonction de la teneur, pour deux types de ciments (calciques - siliceux), et six types de roches, où on constate :

- Que les caractéristiques mécaniques tendent vers des valeurs élevées pour des teneurs en renforts croissantes.

Par exemple : le module de young d'un béton à ciment calcique (Quartz) a une teneur de 90% est égal a  $136267.336 \text{ MPA}$ .

le module de young d'un béton à ciment calcique (Quartz) a une teneur de 40% est égal a  $95410.015 \text{ MPA}$ .

Ce qui conforte l'hypothèse , « la résistance du béton augmente avec sa compacité au détriment de sa maniabilité ».

- En choisissant des renforts de grandes résistances , on obtient un béton de caractéristiques mécaniques supérieures .

## 2. Exemple du béton armé :

On aura pour cette exemple à calculer les caractéristiques mécaniques du béton armé, car après avoir déduit le module d'élasticité linéaire, de notre matériau composé de béton ( $E_b, G_b, \nu_b$ ), et d'acier ( $E_s, G_s, \nu_s$ ), qui sera le nouveau renfort, le matériau biphasique, 1er phase étant le béton et la 2ème phase étant les acier.

### 2.1 Calcul du module de Coulomb :

d'après les relations données par Haskin et Rosen pour une répartition aléatoire.

$$G_{ba} = G_b \frac{\eta(1 + \varphi_f) + \varphi_m}{\eta + \varphi_m + 1 + \varphi_f}$$

$$\text{soit} \quad \eta = \frac{G_f}{G_m}$$

le béton représente la matrice donc :

prenons pour le cas le plus général un module d'élasticité bilinéaire  $E_b =$

32160 Mpa pour une résistance à la compression  $f_{c28} = 25\text{Mpa}$  ...[3.Pierre Charon :

« REGLES BAEL 83 ».Editions Eyrolles 1986.]

$$G_b = \frac{E_b}{2(1 + \nu_b)} = \frac{32160}{2(1 + .02)} = 13400\text{Mpa}$$

$$G_b = G_m = 13400 \text{ Mpa.}$$

Les aciers représentent le renfort :

Le module d'élasticité linéaire de l'acier ( $E_s$ ) selon BAEL 83 à pour valeur

$E_s = 200.000 \text{ Mpa}$ , pour ce qui est du coefficient de poisson  $\nu_s = 0.29$ .

$$G_s = G_f = \frac{200000}{251 + 0.29} = 77519,379 \text{ Mpa}$$

donc :

$$G_{ba} = (13400) \frac{(5.785)(1 + 0.2) + 0.8}{5.785 \cdot 0.8 + 1 + 0.2} = 17800,754 \text{ Mpa.}$$

on a

$$\eta = \frac{G_f}{G_m} = \frac{77519.379}{13400} = 5.785.$$

on choisie une teneur d'acier  $Q_f = 0.2 \implies Q_m = 0.8$

donc le module d'élasticité transversale du béton armé est  $G_{ba} = 17800,754 \text{ Mpa}$ .

## 2.2 calcul du coefficient de Poisson :

le coefficient du poisson du béton armé  $\nu_{ba}$ , s'écrit en fonction des termes et coefficients de poisson de ces composants:

$$\nu_{ba} = \frac{\varphi_f E_f L_1 + \varphi_m E_m L_2 \nu_m}{\varphi_f E_f L_3 + \varphi_m E_m L_2}$$

tel que :

$$L_1 = 2\nu_f (1 - \nu_m^2) \varphi_f + \varphi_m (1 + \nu_m) \varphi_m$$

$$L_2 = \varphi_f (1 - \nu_f - 2\nu_f^2).$$

$$L_3 = 2(1 - \nu_m^2) \varphi_{\nu f} + (1 + \nu_m) \varphi_m.$$

on a :

$$\varphi_f = 0.2; \quad E_f = 200000 \text{ Mpa}; \quad \nu_f = 0.29$$

$$\varphi_m = 0.8; \quad E_m = 32160 \text{ Mpa}, \quad \nu_m = 0.2$$

calcul de :

$$L_1 = 2(0.29)(1-0.2^2)(0.2) + (0.8)(1+0.2)(0.2) = 0.3033.$$

$$L_2 = (0.2)(1-0.29-2(0.29)^2) = 0.1083.$$

$$L_3 = 2(1-0.2^2 - (0.2)^2) + (1+0.2)(0.8) = 1.0368.$$

Donc :

$$v_{ba} = \frac{(0.2)(200000)(0.3033) + (0.8)(32160)(0.1083)(0.2)}{(0.2)(200000)(1.0368) + (0.8)(32160)(0.1083)}$$

$$v_{ba} = 0.286709079$$

on prend  $v_{ba} = 0.28$

2.3 calcul du modul d'élasticité linéaire  $E_{ab}$  :

d'après la loi qui lie le module de Yong au module de coulomb :

$$E_{ab} = 2(1 + v_{ba})G_{ab}$$

on a :

$$E_{ab} = 2(1 + 0.28)(17800754) = 4556993$$

$$E_{ba} = 4556993 \text{ Mpa}$$

L'application au cas du béton armé, vérifiant mieux les hypothèses du modèle est une autre application du modèle, la présence des armatures dans le béton augmente le nombre de phases, l'hypothèse des matériaux biphasique est justifiée par le fait que l'on peut considérer que le béton comme un matériau fictif homogène, et la deuxième hypothèse du renfort unidirectionnel et évidente

pour l'acier, un inconvénient majeur de ce type de modélisation et que la disposition des nappes d'acier n'est pas prise en compte ce qui revient à dire que ce modèle convient mieux à des pièces comprimés.

Notons que le pourcentage de renforts (acier) choisie dans cette exemple qui est de 20% est élevée ,car dans le cas générale ,la teneur des armatures est d'ordre du 1 % ., donc pour une teneur de 1% en appliquant les lois de mélange la variation du module de Young du composite est négligeable .

### Influence de la forme des renforts :

D'après les formulations donnée par TSAI - [j.pabiot LCA] qui met en évidence une certaine étroite relation entre la résistance et la géométrie du renfort , notons que cette influence est valable dans le cas des petites déformations .

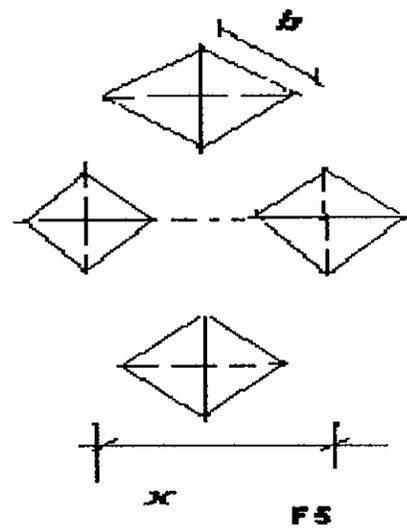
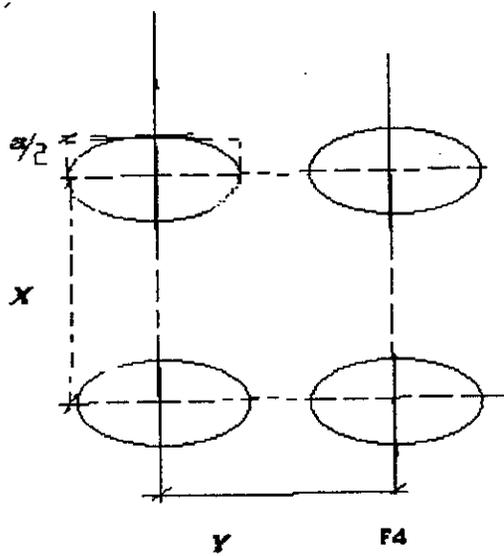
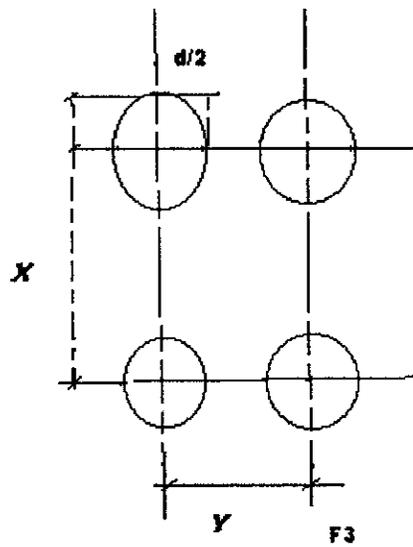
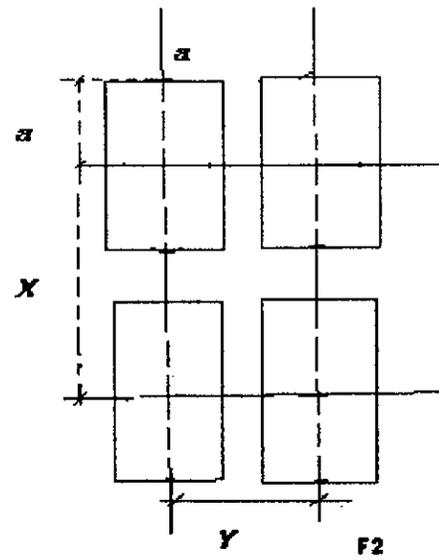
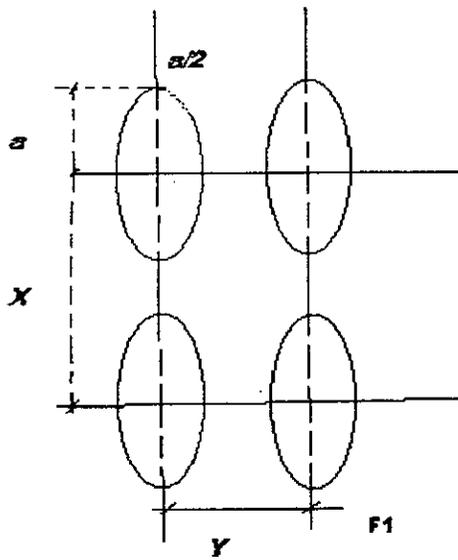
Etudions tout d'abord l'influence de la géométrie des grains sur le module de Coulomb et le module de Young pour une composants de nature donnée (Quartz – ciment ), un pourcentage de renfort donné (0.4et 0.7) .

Le Tableau ci-dessous nous montre l'évolution des caractéristiques en fonction de la géométrie des renforts.

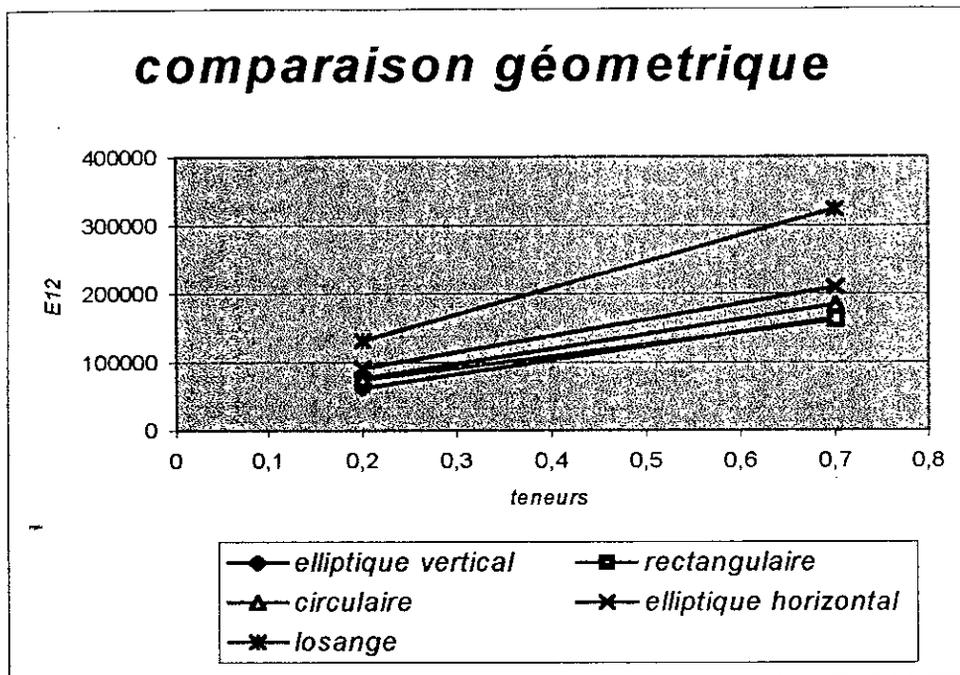
Géométrie	caractéristiques							
	$\phi_f = 0.7$				$\phi_f = 0.4$			
	x	y	G12 MPA	E12 MPA	x	Y	G12 MPA	E12 MPA
F1	2.08a	1.08a	61200	164400	2.54a	1.54a	26000	62400
F2	1.2a	1.2a	66800	160320	1.58a	1.58a	30900	74160
F3	1.06d	1.06d	76600	183840	1.4d	1.4d	31600	75840
F4	1.08a	2.08a	87200	209280	1.54a	2.54a	38000	91200
F5	3.38b	3.38b	135000	324000	4.24b	4.24b	54800	131520

Formes géométriques

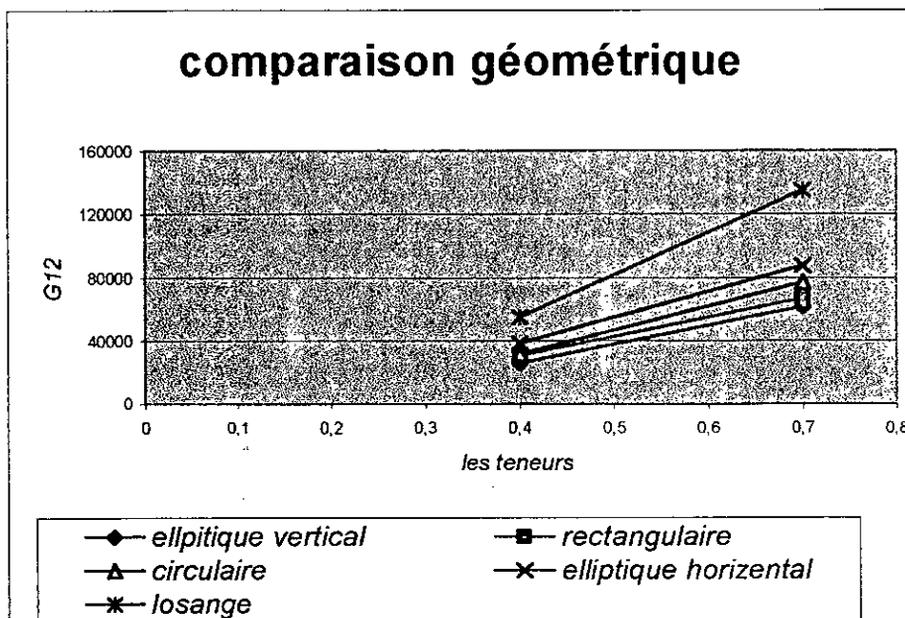
Fig(4-19).



Courbes :



Fig(4-20). Courbe représentant  $E_{\text{beton}}=f(E/E_m)$  pour les différentes géométries .



Fig(4-21). Courbe représentant  $G_{\text{beton}}=f(G/G_m)$  pour les différentes géométrie .

On remarque l'augmentation importante du module de cisaillement ainsi que le module de Young en fonction de forme (géométrie) du renfort, d'où l'intérêt de la section carrée (forme losange) qui même sans distribution uniforme permettraient l'augmenter les modules (E,G).

Les calculs montrent que les modules (E et G) suivent la même progression. Le coefficient de Poisson n'est pratiquement pas affectés, puisque comme on l'a vu ils sont voisins de leur valeur optimale quelle que soit la géométrie.

Les courbes ci-dessous, mettent en évidence une comparaison entre les différentes formes géométriques, et confirme l'augmentation des modules (E,G), dans le cas des formes de types losange (ce qui correspond au granulats de type concassé).

Donc sans modification apparente du prix de revient, l'utilisation de grains à section carrée de forme losange conduit à une augmentation importante de la rigidité et de la résistance en cisaillement et du module transversal qui sont les points faibles des composites unidirectionnels actuels.

## ***CONCLUSION GENERALE***

La présente étude a mis l'accent sur l'importance de la connaissance des matériaux en particulier le béton élément important dans la construction en génie civil.

Notamment, elle nous a permis de nous initier aux nouvelles sciences qui s'y rapportent avec les nouvelles approches, et techniques de calcul.

Notre étude qui une approche analytique de modélisation du béton comporte des imprécisions car des simplifications ont été nécessaires.

Elle possède au moins l'avantage de faire apparaître clairement la dépendance, d'un phénomène par rapport à différents variables.

Les tentatives d'augmentation du module de Young et de Coulomb, en utilisant les lois de mélanges de Rosen et Haskin ont donné de bons résultats.

En utilisant des renforts de type granulats de nature minéralogique différente on a constaté que les caractéristiques mécaniques tendent vers des valeurs élevées pour des teneurs en renforts croissantes.

Ceci confirme que « la résistance du béton augmente avec sa compacité au détriment de sa maniabilité ».

De plus, comme attendu en choisissant des renforts de grandes résistances, on obtient un béton de caractéristiques mécaniques supérieures.

On a aussi constaté dans le cas des petites déformations, que la géométrie du renfort a une influence sur le module de Young et de Coulomb, car pour un grain à section carrée de forme losange, on aboutit à une augmentation

***CHAPITRE 5***  
**CONCLUSION GENERALE**

importante de la rigidité , de la résistance en cisaillement et du module transversal .

L'application au cas du béton armé , est une autre application du modèle , la présence des armatures dans le béton augmente le nombre de phases , mais l'inconvénient majeur de ce type de modélisation est que la disposition des nappes d'acier n'est pas prise en compte ce qui revient à dire que ce modèle convient mieux à des pièces comprimés.

Le comportement du béton a été supposé élastique et isotrope, biphasique (pâte de ciment – granulat), la zone d'interface n'a pas été prise en compte, en réalité le béton devrait être modélisée au moins, par un modèle triphasique, prenant en compte la zone de transition (pâte granulat).

De même, l'apparition de fissures ou de microfissures, ainsi que la possibilité de consolidation, sont des modifications structurelles qui serait nécessaires de considérer dans une étude ultérieure.

Il serait intéressant de prendre en compte l'évolution dans le temps qui est la représentation des phénomènes de fluage ,fatigue ... .

Des travaux ultérieurs tenant compte de ces phénomènes et considérant un comportement élastoplastique parfait avec rupture fragile seraient intéressant.

Finalement nous dirons que Ce sont des études théoriques visant a modéliser le comportement du béton qui se développe de plus en plus , qui tendent à prendre de l'essor et s'affiner .

Elle permettent une meilleure connaissance du matériau, donc des calculs prédictifs économiques minimisant l'expérimentation et améliorant la sécurité et les performances.

## *Renvoies bibliographique*

1. J.Pabiot : « Calcul des caractéristiques mécaniques indépendantes des composites à partir des caractéristiques des composants ».Publication du Laboratoire CEMP –ENSAM 1970.
- 2.Jaques Baron et Raymond Sauterey : « Le Béton Hydraulique ».Presse de L'école nationale des Ponts et Chaussées 1982.
- 3.Pierre Charon : « REGLES BAEL 83 ».Editions Eyrolles 1986.
4. Lacroix –Thonier –Fuentes « traité de béton armé ».

## ***BIBLIOGRAPHIE***

1. Robert le Roy et Laurent Granger : « Calcul des déformation instantanée et de fluage propre du béton a partir de celles de la pâte de ciment ».Bulletin de liaison laboratoire des Ponts et Chaussées 1995.
2. J.Pabiot : « Calcul des caractéristiques mécaniques indépendantes des composites à partir des caractéristiques des composants ».Publication du Laboratoire CEMP –ENSAM 1970
3. André Lecomte : « Influence de la nature du ciment sur les propriétés mécaniques de mortiers calcaires ». Annales de l'Institut Technique du Bâtiment Et Des Travaux Publics 1995
4. Jaques Baron et Raymond Sauterey : « Le Béton Hydraulique ».Presse de L'école nationale des Ponts et Chaussées 1982
5. Dominique François: « Elastoplasticité ». Hermes 1992.
6. Duriez et Arrambide : « Traité de matériaux de construction ». Dunod Paris 1950 .
7. S. Timoshenko : « Théorie de l'élasticité » , Librairie Polytechnique .ch Beranger 1948
8. Pierre Charon : « REGLES BAEL 83 ».Editions Eyrolles 1986.
9. François de Larrard et Albert Belloc : « L'influence du granulats sur la Résistance à la compression ».Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées 1999.
10. Jean Salonçon « Mécanique des milieux continus » Ecole polytechnique Ellypses 1988.
11. Paul Germain et Patrick Muller « Introduction à la mécanique des milieux continus » Masson 1995.
12. Lacroix –Thonier –Fuentes « traité de béton armé ».

**Résumé :**

Ce travail a pour but de définir les caractéristiques mécaniques du béton à partir des caractéristiques de ses constituants, une revue des principaux modèles de comportement est présentée. Des exemples de calculs sont rapportés.

**Mots clés :**

Béton-comportement-module de Young-module de Coulomb-caractéristiques mécaniques.

**: الخلاصة**

تهدف هذه الدراسة إلى معالجة الخواص الميكانيكية للخرسانة . من خلال الخواص الميكانيكية لمكوناته .

كلمات مفتاحية:

خرسانة-السلوك-عامل يونغ-عامل كولومب-خصائص ميكانيكية.

**Abstract :**

This studies aims to define the mechanic characteristics of concrete from the characteristics of their composants.

Keys words : concrete-factor of Young-factor of Coulomb-behavior-characteristics.