

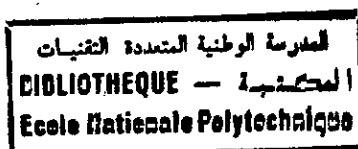
13/95

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET :

***ANALYSE DYNAMIQUE DU BARRAGE DE L'OUED
FODDA COMPTE TENU DE L'EFFET DE SITE***

Proposé et dirigé par :

M. M. HAMMOUTENE

Etudié par :

M. M. HASSAIM

M. J. SOUISSI

PROMOTION

1994 - 1995

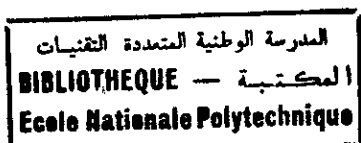
E.N.P 10 , Avenue Hacene Badi EL-HARRACH - Alger

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET :

***ANALYSE DYNAMIQUE DU BARRAGE DE L'OUED
FODDA COMPTE TENU DE L'EFFET DE SITE***

Proposé et dirigé par :

M. M. HAMMOUTENE

Etudié par :

M. M. HASSAIM

M. J. SOUISSI

PROMOTION

1994 - 1995

E.N.P 10 , Avenue Hacene Badi EL-HARRACH - Alger

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier M. HAMMOUTENE pour nous avoir soutenu tout au long de notre travail.

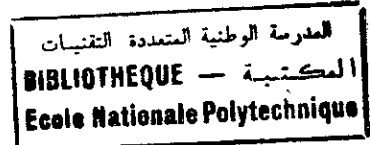
Nos remerciements vont aussi à nos parents, soeurs et frères qui se sont bien occupés de nous pendant notre travail.

On remercie également M. M. RILI pour son apport bibliographique très précieux, et M. S. CHEROUANA pour sa contribution.

Nous tenons aussi à vivement remercier M. K.BELKHEIR et S.E. MOUSSAOUI Ingénieurs post graduants à l'E.N.P , pour leurs aides.

On dit Merci à KRIMOU, KARIM et SALAH pour leurs compréhensions et serviabilité.

SOMMAIRE



INTRODUCTION

1

CHAPITRE I : GENERALITES

1- THEORIE DE L'ELASTICITE	3
1 - 1 INTRODUCTION	3
1 - 2 CONTRAINTES	3
1 - 3 DEFORMATIONS	5
1 - 4 EQUATION D'EQUILIBRE	6
1 - 5 LOI DE HOOKE	7
1 - 6 PROBLEMES DE CONTRAINTES PLANES	9
1 - 7 PROBLEMES DE DEFORMATION PLANES	10
2- INTRODUCTION AUX METHODES VARIATIONNELLES	10
2 - 1 CHAMP CINEMATIQUEMENT ET STATIQUEMENT ADMISSIBLES	10
2 - 2 THEOREME DE L'ENERGIE POTENTIELLE	12
2 - 3 FORMULATION MATRICIELLE	13

CHAPITRE II : METHODE DES ELEMENTS FINIS

1- INTRODUCTION	16
2- DIFFERENTS TYPES D'ELEMENTS	17
3- DIFFERENTES APPROCHES	18
4- FORMULATION DIRECTE DES CARACTERISTIQUES DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE	18
5- CONDITIONS DE CONVERGENCE DE LA METHODE	25
6- APPLICATION A UNE CONSOLE	27

CHAPITRE III : LES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE

1- INTRODUCTION	32
2- FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT PAR DIFFERENTS PRINCIPES.	32

2 - 1 PRINCIPE D'ALEMBERT	32
2 - 2 PRINCIPE DE HAMILTON	33
2 - 3 PRINCIPE DES DEPLACEMENTS VIRTUELS	33
3- EQUATION DU MOUVEMENT POUR UN OSCILLATEUR SIMPLE	34
4- SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE	35
4 - 1 EQUATION DU MOUVEMENT	35
4 - 2 LES PROBLEMES AUX VALEURS ET VECTEURS PROPRES	37
4 - 2 -1 NOTIONS DE VALEURS ET VECTEURS PROPRES	37
4 - 2 - 2 PROPRIETES DES VECTEURS MODAUX	37
4 - 2 -3 METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES	38
4 - 3 SOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT	39
4 - 3 -1 STRATEGIE DE RESOLUTION	39
4 - 3 -2 PRINCIPE DE LA METHODE DE SUPERPOSITION MODALE	39
4 - 3 - 3 EXPRESSION DE LA SOLUTION	41
4 - 3 -4 ETUDE NUMERIQUE DANS LE DOMAINE DES FREQUENCES	41
5- APPLICATION À UNE CONSOLE	45

CHAPITRE IV : LES BARRAGES POIDS

1- INTRODUCTION	49
2- BARRAGES POIDS	49
2 - 1 FORCES AGISSANTES SUR LE BARRAGE	49
2 - 1 - 1 CAS STATIQUE	49
2 - 1 -2 CAS DYNAMIQUE	50
2 - 2 STABILITE INTERNE	51
2 - 2 - 1 STABILITE AU RENVERSEMENT	51
2 - 2 -2 STABILITE AU GLISSEMENT	52
2 - 3 PRESENTATION DU BARRAGE DE L'OUED FODDA	53
3- CALCUL DES CONTRAINTES	55
3 - 1 METHODE DERIVEE DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX	55

3 - 2 METHODE DERIVEE DE LA THEORIE DE L'ELASTICITE	
3 - 3 APPLICATION AU BARRAGE DE L'OUED FODDA	62
4- ETUDE DES DEFORMATIONS	63
4 - 1 CALCUL DES DEFORMATIONS PAR LA RESISTANCE DES MATERIAUX	63
4 - 2 CALCUL DES DEFORMATIONS PAR LA THEORIE DE L'ELASTICITE	64
4 - 3 APPLICATION AU BARRAGE DE L'OUED FODDA	68
5- APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AU BARRAGE DE L'OUED FODDA	69

CHAPITRE V : INFLUENCE DES COUCHES SEDIMENTAIRES SUPERFICIELLES

1- INTRODUCTION	83
2- SIMULATION DES MOUVEMENTS AU ROCHER	83
3- EFFETS DES COUCHES SEDIMENTAIRES	84

CHAPITRE VI : PRESENTATION DES PROGRAMMES

1- INTRODUCTION	91
2- PROGRAMME DE CALCUL STATIQUE	92
3- PROGRAMME DE CALCUL DYNAMIQUE	94

CONCLUSION

ANNEXES

ANNEXE 1

ANNEXE2

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'Algérie comporte de grandes surfaces de plaines alluvionnaires extrêmement riches, et pourtant ces plaines sont encore à l'heure actuelle pauvres; c'est parce qu'ils leur manquent un élément de fertilité essentiel : l'eau.

En donnant de l'eau en quantité convenable, et au moment voulu, l'on est absolument certain de transformer ces régions et de faire de l'Algérie un pays riche et prospère.

Toute fois, pour obtenir ces résultats, il faut absolument que l'eau soit strictement garantie, et c'est là qu'intervient la nécessité de grands barrages réservoirs. Cependant, il existe des difficultés de construction des barrages. celles-ci sont essentiellement dues au terrain, alors que la grande majorité des barrages de grandes hauteurs construits dans le monde, sont fondés sur un excellent rocher résistant et peut fissuré, le plus souvent granitique. Les barrages d'Algérie ont dû être fondés sur des terrains beaucoup plus récents et moins consistants; ce qu'on a trouvé de mieux ce sont des calcaires résistants certes, mais extrêmement fissuré. Les difficultés de fondation et d'étanchement du sol sont énormes. Ces dernières sont accentuées lorsque les constructions se trouvent en zones sismiques.

A cet effet, il serait intéressant de connaître l'influence du sol de fondation sur le comportement du barrage, au vue de répondre aux exigences de sécurité de plus en plus sévères. Pour cela il est important, voir nécessaire de développer des outils de calcul capable d'évaluer de manière fiable et efficiente les déformations et les contraintes se développant sur le barrage.

Nous nous proposons dans cette étude de traiter par la méthode des éléments finis l'un des barrage les plus important d'Algérie, celui de l'Oued Fodda sous l'action sismique, compte tenu de la couche sédimentaire superficielle du sol. On prend alors en considération les phénomènes susceptibles d'altérer et de modifier la sollicitation sismique, donc par voie de conséquence, la réponse de la structure. Pour se faire, l'analyse statique, par cette méthode de calcul numérique s'est imposée.

Les trois grands volets de notre étude sont :

- Mise en oeuvre de la modélisation du barrage en utilisant la méthode des éléments finis.
- Détermination des caractéristiques dynamique du barrage.
- Evaluation de la réponse sismique pour différents accélogrammes.
- Etude de l'influence du sol sur la sollicitation sismique et donc la réponse.

Après un premier chapitre, qui n'a d'autre prétention que de faire un rappel de la théorie de l'élasticité et du calcul variationnel, on aborde la méthode des éléments finis dans le second chapitre. Une validation des résultats sera faite sur une console.

Dans le troisième chapitre nous ferons une analyse dynamique - détermination des pulsations et modes propres -. La réponse dynamique sera déterminée dans le domaine des fréquences. Une validation des résultats sera faite sur la même console.

Le quatrième chapitre présente un étude complète du barrage de l'Oued Fodda. Concernant l'étude statique, une comparaison sera faite avec les résultats obtenues par les méthodes classiques. le calcul de la réponse dynamique se fera pour deux accélérogramme - *El Asnam & El Centro* -

Pour le cinquième chapitre, on abordera l'influence des couches superficielles sur les sollicitations sismiques. Un réponse sera fait pour différentes hauteur de couche sédimentaires.

La présentation des programmes informatiques sera faite dans le chapitre 6

CHAPITRE I
GENERALITES

1- THEORIE DE L'ELASTICITE LINEAIRE:

1-1 Introduction:

Soit un solide Ω soumis à un chargement donné. La théorie de l'élasticité linéaire a pour objet, l'étude des contraintes et des déformations qui en résultent, en supposant que:

- Les déformations sont petites.
- Les lois de comportement reliant les contraintes aux déformations sont linéaires.

La méthode des éléments finis, pour l'analyse linéaire des problèmes statiques et dynamiques, fait appel aux équations générales de la théorie de l'élasticité linéaire.

Par conséquent, dans ce chapitre, nous donnerons les principes fondamentaux de la théorie de l'élasticité, puis nous aborderons le cas particulier de l'élasticité plane.

1-2 Contraintes:

Considérons un cube élémentaire ω dont les cotés sont parallèles aux axes x_i (Fig 1 - 1)

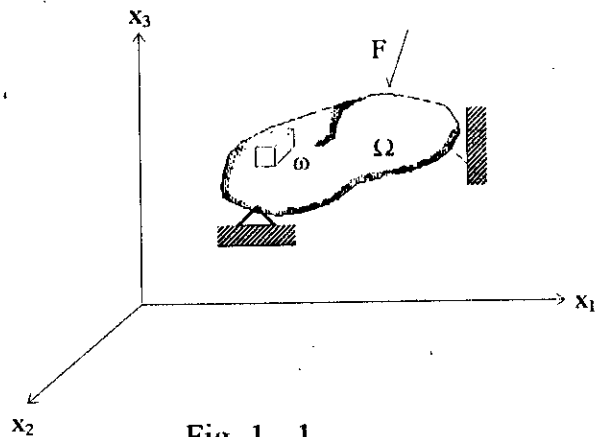


Fig 1 - 1

Chaque facette est soumise à une contrainte admettant trois composantes σ_{ij} . On désigne par σ_{ij} la composante orientée suivant x_j et agissant sur une facette perpendiculaire à x_i (Fig 1 - 2) du vecteur $t^{(i)}$.

Lorsque :

$i=j$: σ_{ij} est une contrainte normale

$i \neq j$: σ_{ij} est une contrainte tangentielle ou de cisaillement.

$$t^{(1)} (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$$

$$t^{(2)} (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$$

$$t^{(3)} (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})$$

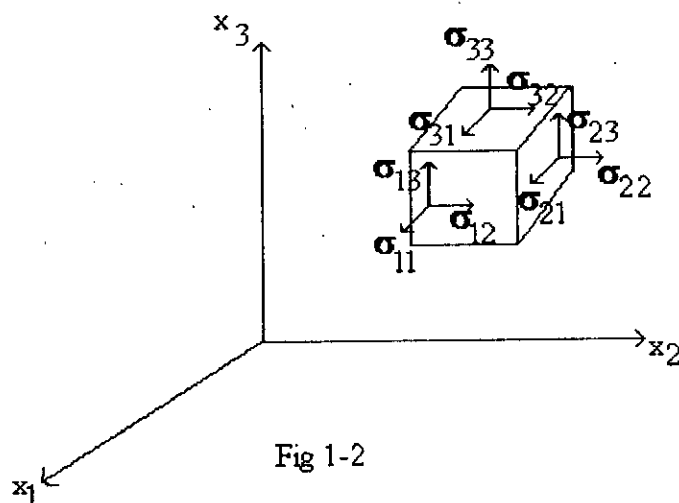


Fig 1-2

ou alors :

$$t_j^{(i)} = \sigma_{ij} \quad (1-1)$$

Le vecteur contrainte en un point sur un plan arbitraire de normale \underline{n} , peut être exprimé en fonction des trois vecteurs $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, $t^{(3)}$ (Fig 1 - 3) en utilisant le tétraèdre de Cauchy.

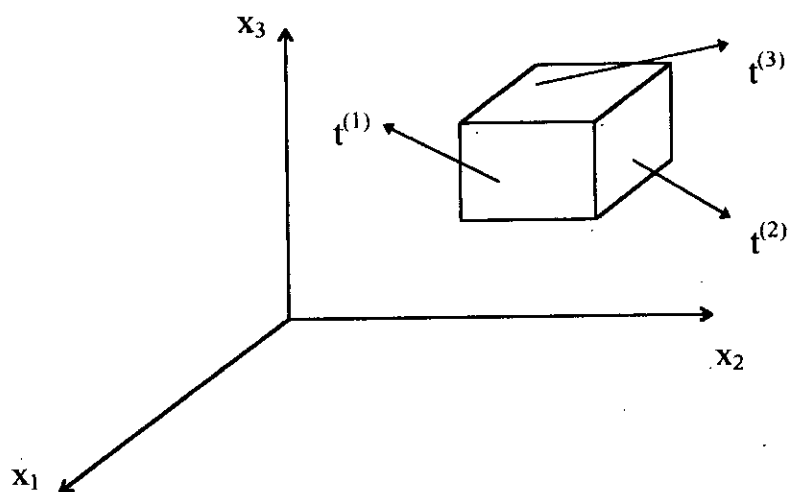


Fig 1 - 3

$$t^{(n)} = T \cdot \underline{n} \quad (1-2)$$

où T est appelé, tenseur de contrainte.

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

D'une manière générale, le tenseur de contraintes est symétrique.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1-3)$$

1-3 Déformations:

Soit $\hat{U} (u_1, u_2, u_3)$ le vecteur déplacement d'un point A du corps chargé
(Fig: 1 - 4).

Les composantes du tenseur de déformations ont pour expression générale:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-4)$$

lorsque :

$i=j$: ε_{ij} représente l'allongement unitaire suivant la direction x_i , et l'on a:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

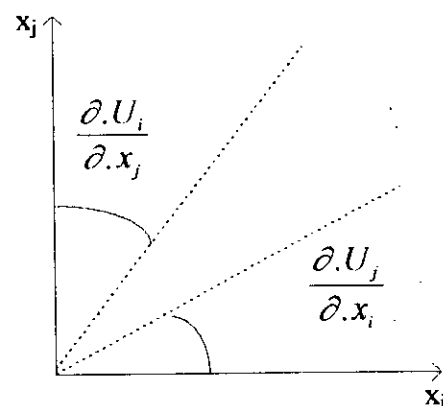
ε_{ii} est une déformation normale.

$i \neq j$: ε_{ij} représente alors la moitié de la distorsion subie par un angle droit de sommet A et dont les côtés sont parallèles à x_i et x_j (Fig 1 - 4).

ε_{ij} est une déformation de cisaillement.

Les déformations normales affectent le volume du corps, tandis que les déformations de cisaillement modifient sa forme (Fig 1 - 4).

Fig 1 - 4



D'une manière explicite on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_x}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial U_y}{\partial y} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz} \end{aligned} \quad (1-5)$$

Comme on peut le constater dans l'expression (1-4), le tenseur des déformations est symétrique.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (1-6)$$

Les six composantes ε_{ij} dépendent des trois fonctions (U_1, U_2, U_3) de déplacement. Elles ne sont donc pas indépendantes entre elles. Elles sont liées par les équations dites de compatibilité données par :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{ij,kl} - \varepsilon_{ij,kl} = 0$$

En raison de la symétrie des indices et de la présence d'identité, le nombre de ces équations se réduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial_x \partial_y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial_y \partial_z} \\ \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial_x \partial_z} \\ \frac{2\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} \right) \\ \frac{2\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_y} \right) \\ \frac{2\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z} \right) \end{aligned} \quad (1-7)$$

Les conditions de compatibilité assurent l'existence du champ de déplacement et non son unicité.

Les conditions de compatibilité assurent l'existence du champ de déplacement et non son unicité.

1-4 Equations d'équilibre:

Considérons l'équilibre d'un milieu R avec frontière ∂R . D'après la troisième loi de Newton on a:

$$\text{Pour } i \text{ donné } \int_R f_i dV + \int_{\partial R} S_i dA = 0$$

f_i : $i^{\text{ème}}$ composante de f

f : champ vectoriel des forces volumiques

S_i : $i^{\text{ème}}$ composante de S

S : champ vectoriel des forces surfaciques

$$\text{or } S_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$\text{d'où } \int_R f_i dV + \int_{\partial R} \sigma_{ij} n_j dA = 0$$

en utilisant le théorème de la divergence on obtient:

$$\int (\sigma_{ij,j} + f_i) dV = 0$$

R étant une région arbitraire:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-8)$$

Cette équation traduit l'équilibre en un point selon trois directions.

1-5 Loi de Hooke:

La relation la plus simple qui puisse exister entre contraintes et déformations est une relation linéaire donnée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-9)$$

Les tenseurs des contraintes et des déformations sont alors liés entre eux par les relations suivantes qui sont connues sous le nom de « loi de Hooke ».

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ - & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ - & - & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ - & - & - & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ - & - & - & - & C_{55} & C_{56} \\ - & - & - & - & - & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1-10)$$

Cette fonction d'énergie de déformation doit avoir la forme suivante:

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (1-11)$$

où le tenseur C_{ijkl} doit, en plus des propriétés de symétrie résultant de celle des tenseurs σ_{ij} et ε_{kl} , avoir la propriété $C_{ijkl} = C_{klij}$ réduisant ainsi le nombre de termes de 36 à 21.

a- Cas d'un plan de symétrie

On démontre dans ce cas:

$$C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0$$

b- Cas de symétrie orthotrope

On a alors:

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{36} = 0$$

c- Cas isotrope

Pour un matériau isotrope, les constantes élastiques sont indépendantes de l'orientation des axes de coordonnées ce qui implique l'existence de deux constantes indépendantes.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

λ et μ sont les deux coefficients de Lamé définis par les relations

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1-13)$$

E et ν sont les coefficients d'élasticité et de poisson du matériau considéré.

inversement, on a

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

Sous forme condensée, les équations (1-12) et (1-14) s'écrivent respectivement

$$\left. \begin{aligned} (\sigma) &= C \cdot (\varepsilon) \\ (\varepsilon) &= C^{-1} \cdot (\sigma) \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

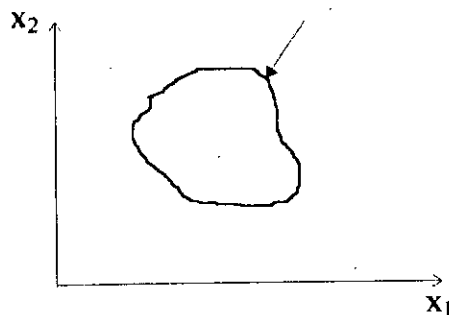
La loi de Hooke pour un matériau isotrope est:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1-16)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{pp} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (1-17)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu \sigma_{pp} \delta_{ij}}{E} + \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij}$$

1-6 Problèmes de contraintes planes:



Un cas de contraintes planes est caractérisé par $\sigma_{33} = 0$ (Fig 1 - 5)

Fig 1 - 5

Les équations de Hooke (1 - 12) et (1 - 14) deviennent respectivement

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-19)$$

et

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-20)$$

exemple: cas d'une plaque plane, poutre.

1-7 Problèmes de déformations planes:

Un cas de déformation plane est caractérisé par $\sigma_{zz} = 0$.

La loi de Hooke s'écrit pour ce cas là:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-21)$$

et

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1-22)$$

La contrainte σ_{zz} peut être obtenue à partir de la relation $\varepsilon_{zz} = 0$ comme suit:

$$\begin{cases} \varepsilon_{zz} = 0 \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

exemple : cas d'un barrage.

2- INTRODUCTION AUX METHODES VARIATIONNELLES:

Les méthodes variationnelles nous permettent, selon que l'on considère une variation des déformations ou des contraintes, d'exprimer la variation de l'énergie potentielle totale ou l'énergie complémentaire totale du système; et donc de déterminer un champ de déplacements ou un champ de contraintes d'un corps en équilibre. Ainsi pour une approche déplacement on aura à calculer le champ de déplacements, par contre pour une approche contrainte on devra chercher le champ de contraintes.

2-1 Champs cinématiquement et statiquement admissibles:

Soit un corps élastique. Supposons que celui-ci soit en équilibre sous l'action de charges volumiques F_i et de charges extérieures P réparties sur son contour S .

On impose comme conditions aux limites un champ de déplacements \underline{U} sur une partie de la surface $S^{(1)}$ entourant le volume et un vecteur contrainte \underline{T} sur l'autre partie $S^{(2)}$ de S .

On aura donc à résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \end{cases} \quad (1-23)$$

et à vérifier que :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} n_j = T_i & \text{sur } S^{(2)} \\ U_i = \bar{U}_i & \text{sur } S^{(1)} \end{cases} \quad (1-24)$$

En général, devant l'impossibilité de résoudre le système (1-23) on est amené à rechercher des solutions approchées du champ de déplacements ou du champ de contraintes tout en respectant l'équilibre du corps.

a) Champ de déplacements cinématiquement admissible.

C'est un champ de déplacements \underline{V} respectant la continuité du milieu et les conditions aux limites sur $S^{(1)}$.

Généralement, un tel champ ne représente pas la solution du problème car il conduit à $\bar{\varepsilon}_{ij}$, et à $\bar{\sigma}_{ij}$ qui ne vérifient pas les équations de l'équilibre indéfini et / ou les conditions aux limites sur $S^{(2)}$.

b) Champ de contraintes statiquement admissible:

C'est un champ de contraintes qui satisfait à l'équation de l'équilibre indéfini et aux conditions aux limites sur $S^{(2)}$.

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \\ \sigma_{ij} n_j = T_i & \text{sur } S^{(2)} \end{cases}$$

De même, un tel champ conduit en général à un champ de déformations donnant un champ de déplacements qui ne vérifie pas les conditions aux limites sur $S^{(1)}$.

Ainsi, l'équilibre de ce corps peut se traduire par au moins deux solutions, selon que l'on aborde ce problème par une approche déplacement ou une approche

contrainte. Suivant ce que l'on recherche, on aura à déterminer le champ de déplacements ou le champ de contraintes de ce corps en équilibre statique.

2-2 Théorème de l'énergie potentielle:

Donnons-nous un champ de déplacement cinématiquement admissible \underline{V} . On définit l'énergie potentielle de ce champ par:

$$E(\underline{V}) = W[\underline{\varepsilon}_{ij}(\underline{V})] - R(\underline{V}) \quad (1-25)$$

W : énergie de déformation induite par \underline{V} .

R : travail des tenseurs et des forces de volume dans le champ \underline{V} .

Théorème: Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles, le champ solution est celui qui minimise l'énergie potentielle.

Ceci exprime aussi bien l'extremum du potentiel total du système que l'équilibre du corps. En conséquence, l'état d'équilibre correspond au minimum du potentiel total du système.

Démonstration:

Supposons que \underline{u} soit le champ solution, alors : $\underline{V} = \underline{u} + \underline{du}$

à \underline{u} on associe ε_{ij} et σ_{ij}

à \underline{du} on associe $d\varepsilon_{ij}$ et $d\sigma_{ij}$

Exprimons l'énergie potentielle dû à \underline{u} . Compte tenu de la définition donnée on a:

$$E(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int P_i u_i dS - \int F_i u_i dV$$

De même pour $\underline{V} = \underline{u} + \underline{du}$

$$E(\underline{V}) = E(\underline{u} + \underline{du}) = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) (\varepsilon_{ij} + d\varepsilon_{ij}) dV - \int P_i (u_i + du_i) dS - \int F_i (u_i + du_i) dV$$

d'où,

$$E(\underline{V}) = E(\underline{u}) + \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}) dV - \int P_i du_i dS - \int F_i du_i dV + \frac{1}{2} \int d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV$$

Le théorème de Maxwell-Betti nous permet d'écrire $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}$

soit,

$$E(\underline{V}) = E(\underline{u} + d\underline{u}) = E(\underline{u}) + \int s_{ij} d\varepsilon_{ij} dV - \int P_i du_i dS - \int F_i du_i dV + \frac{1}{2} \int ds_{ij} d\varepsilon_{ij} dV.$$

En vertu du théorème des travaux virtuels on a:

$$\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV - \int P_i du_i dS - \int F_i du_i dV = 0$$

il reste que $E(\underline{u} + d\underline{u}) = E(\underline{V}) = E(\underline{u}) + \int \frac{1}{2} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV$

comme $\int \frac{1}{2} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV$ est définie positive, car c'est l'énergie de déformation dû à $d\underline{u}$, ainsi:

$$E(\underline{u} + d\underline{u}) > E(\underline{u}) \quad \forall d\underline{u}$$

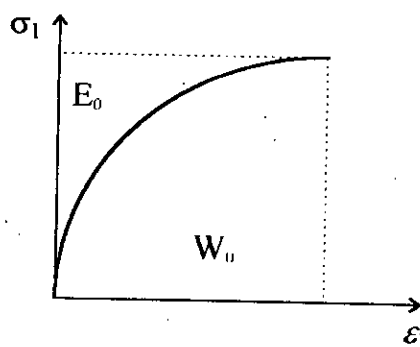
Le théorème est donc démontré.

Remarque: Pour la détermination du champ de contraintes, on peut énoncer le théorème suivant:

Parmi toutes les répartitions de contraintes possibles vérifiant simultanément les équations d'équilibre et les conditions aux limites, la répartition réelle est celle qui rend l'énergie complémentaire totale E_c minimale.

On définit l'énergie complémentaire par $E_c = \int_V E_{c_0} dV$

avec $\frac{\partial E_{c_0}}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$



$$W = \int_V W_0 dV \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

W: énergie de déformation totale.

2-3 Formulation matricielle:

Des problèmes « continus » peuvent être résolus comme des problèmes « discrets » avec un nombre fini de paramètres. Les méthodes variationnelles associées à une formulation matricielle nous permettent d'exprimer de manière fort simple les équations d'équilibre de ce type de problème.

Pour le calcul d'une structure par exemple on sera amené à:

- faire une discrétisation de la structure en plusieurs éléments (n. noeuds).
- exprimer les déformations (ϵ_{ij}) dans chaque élément.
- rechercher l'énergie de déformation pour chaque élément (n_e noeuds / éléments)

$$W = \int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

Ce qui nous donne $W = \frac{1}{2} U^T K^e U$ $U_i = 1 \text{ à } n_e$

K^e symétrique $n_e \times n_e$

K^e étant la matrice de rigidité de l'élément.

- rechercher l'énergie totale de déformation (assemblage).

$$W = \frac{1}{2} U^T K U$$

$K = n \times n$

$U_i = 1 \text{ à } n$

- concentrer les forces extérieures aux noeuds (F)
- exprimer le théorème de l'énergie potentielle

$$E(U) = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F$$

en notation matricielle on aura

$$E(U) = \frac{1}{2} K_{ij} U_i U_j - F_i U_i \quad (i = 1 \text{ à } n, j = 1 \text{ à } n)$$

la solution discrétisée la plus proche est la solution telle que $E(U)$ soit minimale.

$$\text{d'où } \frac{\partial E}{\partial U_i} = 0$$

$$\text{soit } \frac{\partial E}{\partial U_i} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{V_i} (K_{ij} U_i U_j + \frac{1}{2} K_{ji} U_j U_i) - \frac{\partial F_i U_i}{\partial V_i}$$

$$\text{donc } \frac{\partial E}{\partial U_i} = \frac{1}{2} (K_{ij} + K_{ji}) U_j - F_i = K_{ij} U_j - F_i = 0$$

On en déduit que $\mathbf{K.U} = \mathbf{F}$ (1-28)

La résolution de ce système linéaire des équations d'équilibre permet de déterminer le vecteur \mathbf{U} des déplacements inconnus.

L'approche présentée ici est aussi connue sous la dénomination de méthode des déplacements. C'est une méthode très appréciée qui nous introduit à la méthode des éléments finis.

CHAPITRE II

METHODE DES ELEMENTS
FINIS

1- INTRODUCTION

Dans son travail, l'ingénieur a souvent besoin de connaître la répartition des contraintes et des déformations au sein des structures qu'il envisage de réaliser.

La méthode des éléments finis est une idéalisation de la réalité. Elle consiste en la discrétisation (division) du milieu continu en « *éléments finis* » reliés entre eux uniquement par un nombre fini de points nodaux. Le problème devient donc discret et la connaissance des propriétés de chaque élément (relation contrainte-déformation), va nous permettre d'en déduire, grâce à des techniques d'assemblage, les propriétés de toute notre structure.

Les bases théoriques de la méthode des éléments finis reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autres part sur les méthodes d'approximations.

Après la deuxième guerre mondiale, l'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique, ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures et des méthodes numériques permettant de traiter des phénomènes physiques réputés difficiles. En 1956, J.Turner et W.Clough introduisent le concept éléments finis * . Après cette date, la méthode des éléments finis va connaître une utilisation accrue grâce à la disponibilité des outils informatiques de plus en plus performants.

La méthode des éléments finis est aisément applicable pour la résolution de problèmes tout à fait différents tel que les problèmes hydro-dynamiques, mécanique des fluides, thermiques, transfert de chaleur.....etc. De nos jours, plusieurs logiciels basés sur la méthode des éléments finis ont été développés afin de répondre à la demande industrielle dans les domaines de la construction-civils, aéronautique, aérospatiale, navale, nucléaire.....etc.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de décrire les formulations à faire, les procédés de calculs, les approximations nécessaires en analyse statique et dynamique, pour obtenir les solutions numériques des problèmes de l'élasticité linéaire; puis nous validerons les résultats, en application de notre programme informatique décrit dans le chapitre V- à une poutre console.

* H.J Turner, R.W Clough - "Stiffness and deflection analysis of complex structures". J.Aero - Sc, 23, 1956

2- DIFFERENTS TYPES D'ELEMENTS

Un élément fini est composé de deux noeuds et plus. Il peut être unidimensionnel, bidimensionnel ou même tridimensionnel.

Nous classerons dans le tableau qui suivra, les différents types d'éléments selon leurs dimensions, ainsi que le type de courbes qui en forment la frontière.

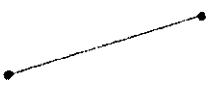
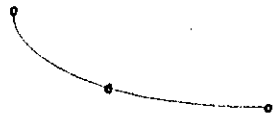
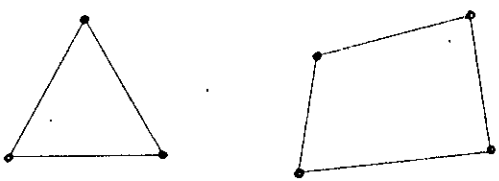

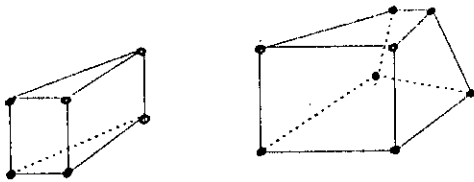
Une Dim		
Deux Dim		
Trois Dim		
	Eléments lineaires	Eléments quadratiques

Tableau 3 - 1

Dans toute notre étude, nous ne traiterons en détail, que l'élément le plus simple dans le cas bidimensionnel, l'élément triangulaire linéaire de base.

3- DIFFERENTES APPROCHES

Il y a différentes sortes de formulation d'éléments finis en mécanique des structures.

-Formulation contrainte:

Elle considère le champ de contrainte comme inconnu du problème. Le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle complémentaire.

- Formulation déplacement:

Dans celle-ci, le champ de déplacements est l'inconnu du problème. Elle se base sur la stationnarité de l'énergie potentielle totale. Cette formulation sera exposée tout au long de ce chapitre.

- Formulation mixte:

Les inconnus du problème dans cette formulation sont les champs de déplacement et de contrainte, d'où la nomination "mixte", elle est aussi appelée formulation à plusieurs champs. Le critère utilisé est généralement basé sur la fonctionnelle de Reissner.

4- FORMULATION DIRECTE DES CARACTERISTIQUES DE L'ELEMENT TRIANGULAIRE

On présente maintenant, les étapes de base pour le calcul de la matrice de rigidité de l'élément triangulaire. Pour ce faire nous ferons appel à quelques relations définies dans le chapitre I.

Etape I : Choix d'un système de coordonnées convenable et numérotations des noeuds.

On choisi un système de coordonnées, on divise le milieu continu par des lignes imaginaires en un certain nombre d'éléments finis, puis on numérote les noeuds de chaque élément dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (Fig 2 - 1).

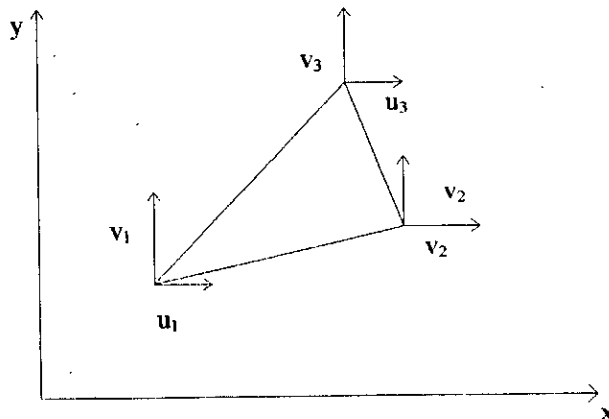


Fig 2 - 1

La numérotation doit commencer le long de la plus petite largeur de la structure, afin d'avoir une matrice de rigidité globale de la structure bandée (Fig 2 - 2 - a).

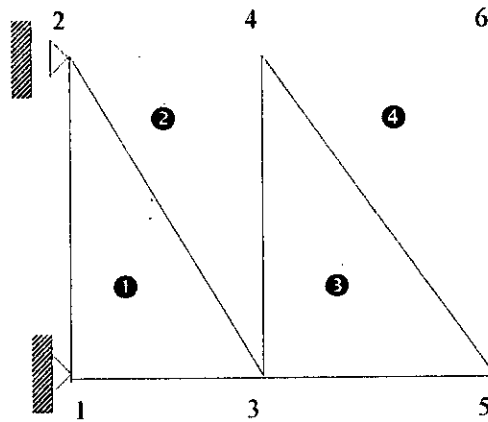


Fig 2 - 2 - a . Bonne numérotation

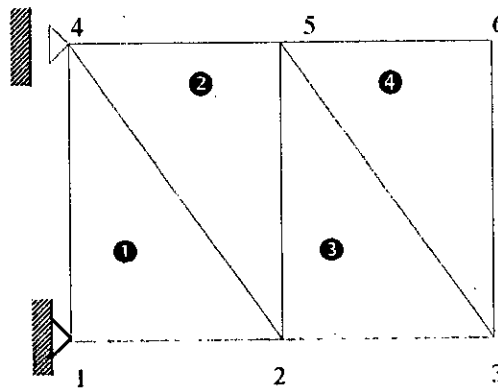


Fig 2 - 2 - b . Mauvaise numérotation

La largeur de la demi bande de la matrice globale est égale aux:
 (nombre de degrés de liberté par noeud) \times (la plus grande différence des numéros des noeuds d'un élément + 1).

Étape II : Choix d'une fonction de déplacement

Les déplacements d'un noeud ont deux composantes

$$\delta_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad i = 1, 3$$

On note par $\{\delta\}^e$ les déplacements nodaux c.à.d: $\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}$

Les déplacements à l'intérieur d'un élément doivent être *définis de façon unique* par six valeurs ($u_i, v_i \quad i=1,3$).

Les fonctions de déplacement choisies, doivent être aussi simples que possible et respecter un certain nombre de conditions que l'on verra plus loin.

L'utilisation du triangle de Pascal peut aider l'intuition dans le choix des polynômes pour les cas des problèmes plans (contraintes et déformations planes).

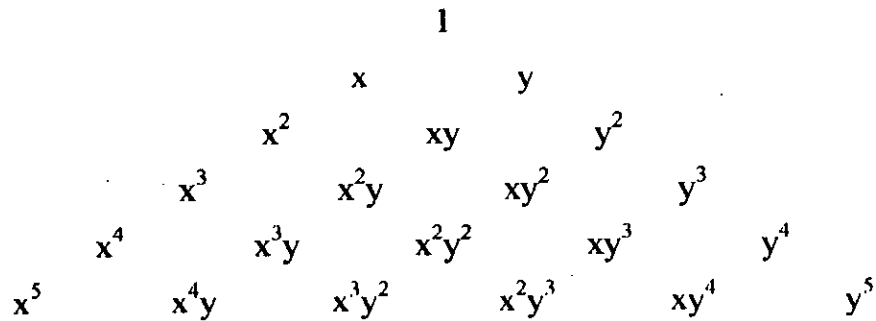
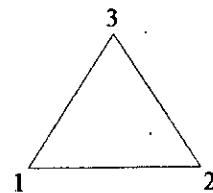
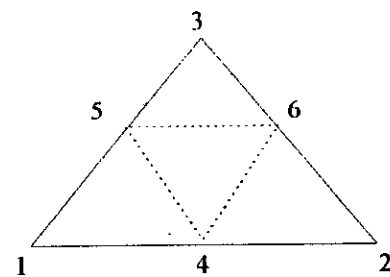


Fig. 2 - 3

Élément à 3 noeuds ($1, x, y$)

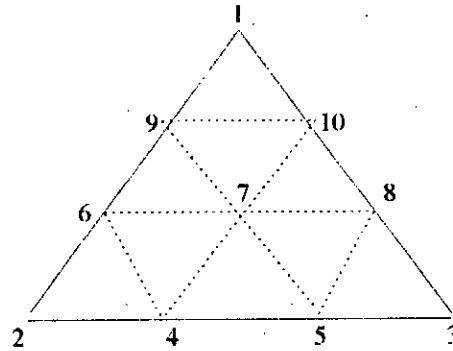


Élément à 6 noeuds ($1, x, y, x^2, xy, y^2$)



Élément à 10 noeuds :

$$(1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3)$$



On constate que la fonction de déplacement dépend essentiellement du nombre de noeuds de l'élément.

La représentation la plus simple est fournie par les deux polynômes du premier degré en x et en y suivants:

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \Leftrightarrow \{\delta(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \quad (2-1)$$

$$\Leftrightarrow \{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] \cdot \{\alpha\} \quad (2-2)$$

avec: $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

La fonction de déplacement choisie garantit la continuité des déplacements le long de l'interface entre des éléments adjacents, car les déplacements varient linéairement le long d'un côté du triangle. En imposant donc aux noeuds communs de deux éléments des déplacements identiques, on obtiendra par conséquent le même déplacement le long de toute la frontière séparant ces deux noeuds. On dit alors que l'élément est conforme.

Etape III : Exprimer les déplacements $\{\delta(x,y)\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{\delta\}^e$.

Les coordonnées des noeuds 1, 2, 3 satisfont l'équation (2-1), d'où:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} [f(x_1, y_1)] \\ [f(x_2, y_2)] \\ [f(x_3, y_3)] \end{Bmatrix} \{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta\}^e = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (2-3)$$

$$\text{avec: } [A] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$\{\delta\}^e = [A] \cdot \{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{\delta\}^e$$

en remplaçant dans l'équation (2-2)

$$\text{d'où } \{\delta(x,y)\} = [f(x,y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\}^e$$

avec:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_2 + x_3y_1 & 0 & x_1y_3 - x_2y_1 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - x_3y_2 & 0 & -x_1y_3 + x_3y_1 & 0 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } 2\Delta = (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1) \\ = 2 \times \text{aire de l'élément triangulaire.}$$

$$[f(x,y)] \cdot [A]^{-1} = [N] \text{ est appelée fonction de forme.}$$

Etape IV : Relier les déformations $\{\varepsilon(x,y)\}$ aux déplacements $\{\delta(x,y)\}$.

$$\text{Posons } \{\varepsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

En remplaçant les expressions de $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ données par l'équation dans la relation (2.1), on obtient:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [C] \cdot \{\alpha\} \quad (2-4)$$

Si l'on désire exprimer les déformations en un point quelconque de l'élément, en fonction des déplacements nodaux, on obtient: $\{\varepsilon(x,y)\} = [C] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\delta\}^e$ d'après (2-3) et (2-4).

$$\text{En posant } [B] = [C].[A]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{vmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B].\{\delta\}^e \quad (2-5)$$

Etape V : Relation contraintes - déformations:

Ayant déjà défini les relations contraintes-déformations dans le chapitre précédent, on peut écrire:

$$\{\sigma(x,y)\} = [D].\{\varepsilon(x,y)\} \quad (2-6)$$

aussi, d'après (2-5) et (2-6)

$$\{\sigma(x,y)\} = [D].[B].\{\delta\}^e \quad (2-7)$$

Les matrices [D], dans le cas de contraintes et déformations planes sont données par les expressions (1-19) et (1-21).

Cette étape nous permet de trouver les déplacements nodaux, les contraintes agissant dans l'élément.

Etape VI : Relier les charges nodales aux déplacements nodaux:

Soit $\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$ le vecteur force nodale statiquement équivalent F

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} f_{iu} \\ f_{iv} \end{Bmatrix}$$

prises avec leurs signes (Fig 2-4).

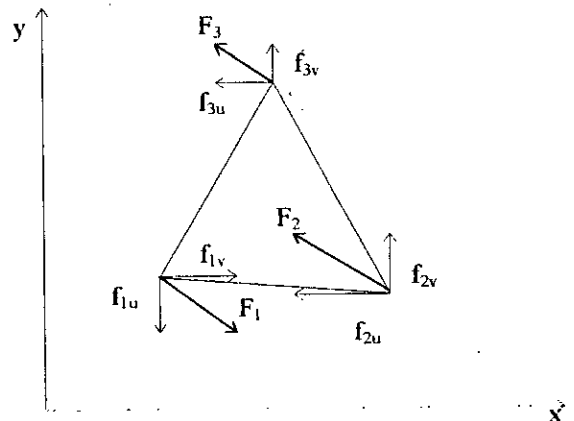


Fig 2-4

On impose un déplacement nodal $\{\delta^*\}^e$ arbitraire à l'élément.

Le principe des travaux virtuels stipule que le travail effectué par les diverses forces nodales est égal à celui des contraintes internes au cours de ce déplacement virtuel.

Soient W_{ext} : travail des forces extérieures statiquement équivalentes.

W_{int} : travail intérieur des contraintes par unité de volume.

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \{\delta_i^*\}^e \cdot \{f_1\}^e = \{\delta_1^*\}^e \cdot \{f_1\}^e + \{\delta_2^*\}^e \cdot \{f_2\}^e = \{\delta_3^*\}^e \cdot \{f_3\}^e \\ W_{\text{ext}} &= (\{\delta^*\}^e)^T \cdot \{F\}^e \end{aligned} \quad (2-8)$$

aussi:

$$W_{\text{int}} = \{\varepsilon(x,y)^*\}^T \cdot \{\sigma(x,y)\} \quad (2-9)$$

D'après les équations (2-5) et (2-7) respectivement, on aura:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon(x,y)^*\}^T &= (\{\delta^*\}^e)^T \cdot [B]^T \\ \{\sigma(x,y)\} &= [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (2-10)$$

En égalant le travail extérieur au travail intérieur total, obtenu par l'intégration sur le volume de l'élément, de l'expression (2-10), il vient :

$$\begin{aligned} (\{\delta^*\}^e)^T \cdot \{F\}^e &= \int_v (\{\delta^*\}^e)^T \cdot [B]^T [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\}^e \, dv \\ (\{\delta^*\}^e)^T \cdot \{F\}^e &= (\{\delta^*\}^e)^T \int_v [B]^T [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\}^e \, dv \end{aligned}$$

Comme cette relation est valable pour n'importe quel déplacement virtuel, cela entraîne l'égalité des matrices par lesquelles sont multipliés ces déplacements, on obtient donc :

$$\{F\}^e = \int_v [B]^T [D] \cdot [B] \cdot \{\delta\}^e \, dv$$

On sait que $\{F\}^e = [K] \cdot \{\delta\}^e$

Par identification :

$$[K]^e = \int_v [B]^T [D] \cdot [B] \, dv$$

$[K]^e$ est appelée matrice de rigidité de l'élément triangulaire.

5- CONDITIONS DE CONVERGENCE DE LA METHODE

Les conditions nécessaires de convergence de la méthode des éléments finis dans le cas d'un approche déplacement sont :

Critère 1: « Complétude »

La fonction de déplacement doit permettre la représentation d'un état de déformation constant, lorsqu'il s'agit effectivement d'un tel état, ou nul lorsqu'il s'agit d'un déplacement de corps rigide.

Critère 2 : « Compatibilité »

Physiquement, l'incompatibilité s'explique par l'apparition de vides entre éléments, ou la superposition de certains d'entre eux lorsqu'on charge l'ensemble.

Ainsi un éléments ne peut être compatible que lorsqu'il permet la définition d'un champ de déplacements continus à l'intérieur de l'élément et aux interfaces inter-éléments.

Si ces deux critères sont respectés, alors l'augmentation du nombre d'éléments permettra une convergence **monotone** de la solution numérique vers la solution exacte.

Si par contre le deuxième critère (condition de compatibilité) n'est pas assuré, alors la convergence vers la solution exacte ne pourra se faire que lorsque l'élément passe avec succès le patch test, on dira dans ce cas que la convergence est **non-monotone**.

Patch test :

Avant toute utilisation numérique des résultats obtenus ci-dessus, il faudra soumettre l'élément choisi au Patch test (appelé aussi test de rapiéçage).

L'élément ou le groupement d'éléments, doivent contenir au moins un noeud interne. On bloque quelques noeuds de l'élément afin d'éliminer tout déplacement de corps rigide, puis on impose aux noeuds externes de ce dernier des déplacements en accord avec un état de déformation constant.

On dira que le test est vérifié et que la convergence de la solution, pour ce type d'élément est assurée, lorsque les déplacements aux noeuds internes sont en accord avec cet état de déformation constant.

De toutes les étapes de calcul présentées précédemment, on récapitulera les phases logiques comme suit:

1) Pour chaque élément, établir dans son repère local:

-La forme du champ de déplacement.

-Les relations entre: déformations, contraintes, déplacements.

-La relation efforts- déplacements nodaux.

- 2) Ecrire la matrice de rigidité de chaque élément dans le repère global.
- 3) Assembler les matrices élémentaires en une globale.
- 4) Introduire les conditions aux limites et le chargement appliqué.
- 5) Résoudre le système: $\{f\}=[k].\{u\}$.
- 6) Calculer les contraintes dans chaque élément et vérifier les flèches admissibles.

6- APPLICATION A UNE CONSOLE

Considérons la console de section rectangulaire de la figure (2 - 5 - a) chargée uniformément et encastée à l'une de ses extrémités. On a choisi cet exemple car on peut obtenir une solution exacte en utilisant la théorie de l'élasticité.

Il est alors possible de comparer la solution obtenue à l'aide des éléments finis, lorsqu'on utilise différentes modélisations, avec la solution exacte.

On a fait trois discrétisations avec les solutions correspondantes, pour lesquelles la condition d'encastement est obtenue en annulant les déplacements horizontaux et verticaux de tous les noeuds de l'extrémité encastée de la console. Le cas pris en compte est celui de *contraintes planes*.

L'expression du vecteur force $\{ f \}$ de l'élément de référence est donnée par :

$$\{ f \}^e = \int_v [N] f_v dv + \int_s [N] f_s ds$$

Pour le chargement considéré de la figure (2 - 5 - b), seuls les noeuds supérieurs sont soumis à des forces f tel que :

a) noeud de rive :

$$f = q \times \frac{l}{2(n-1)}$$

b) noeud central :

$$f = q \times \frac{l}{n-1}$$

où n est le nombre de noeuds horizontaux.

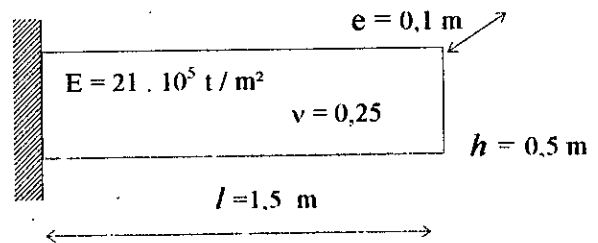


Fig 2 - 5 - a : Caractéristiques physiques et géométriques de la console.

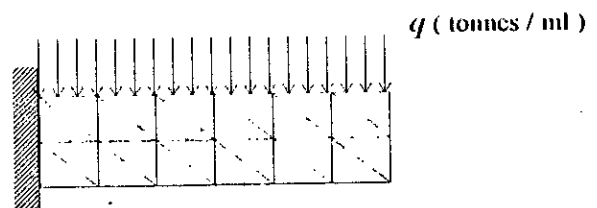


Fig 2 - 5 - b : Charge uniformément répartie sur la console

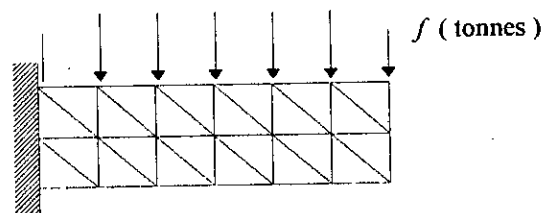


Fig 2 - 5 - c : Charges équivalentes concentrées aux noeuds

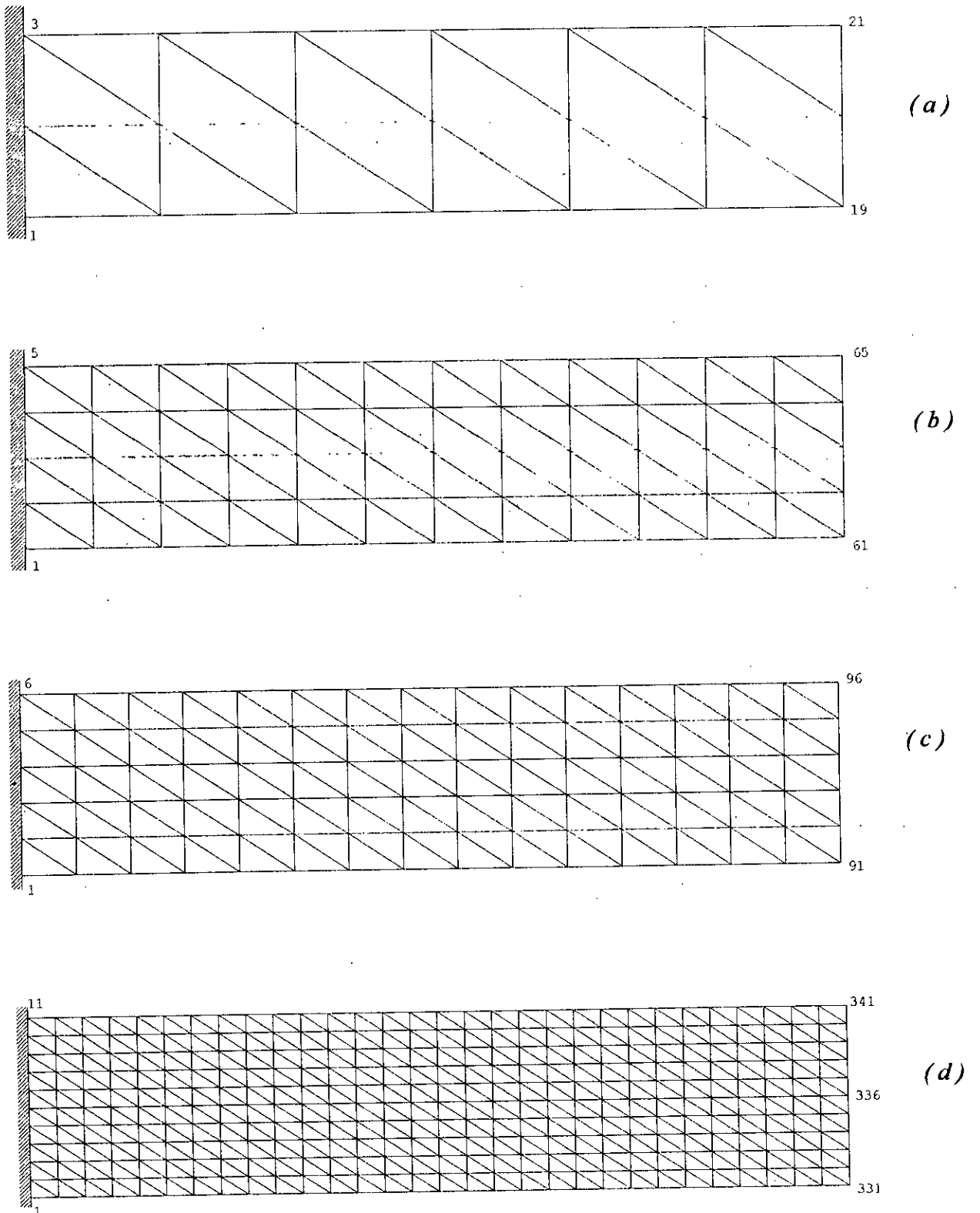


Fig 2 - 6 : Modélisations utilisées pour la console épaisse.

(a) 21 noeuds, 24 éléments ; (b) 65 noeuds, 96 éléments ;
 (c) 96 noeuds, 150 éléments ; (d) 341 noeuds, 600 éléments.

Nombre d'él ^{mts}	Nombre d.d.l	Flèche (mm)	Erreur relative (%)
24	48	- 0,1481	42,39
96	130	- 0,2147	16,49
150	192	- 0,2260	12,09
600	462	- 0,2521	1,94
Solution exacte (mm)		- 0,2571	

L'erreur relative est déterminée par :

$$E \% = \frac{(V - V_{\text{exact}})}{V_{\text{exact}}} \times 100$$

Remarque : La solution exacte du déplacement vertical de l'extrémité libre d'une console uniformément chargée, donnée par la théorie de l'élasticité est égale à :

$$V = \frac{ql^2}{E} \left(\frac{l^2}{8I} + \frac{6(1+\nu)}{5S} \right) \quad \text{où } S \text{ est la section de la console, } I \text{ son moment d'inertie.}$$

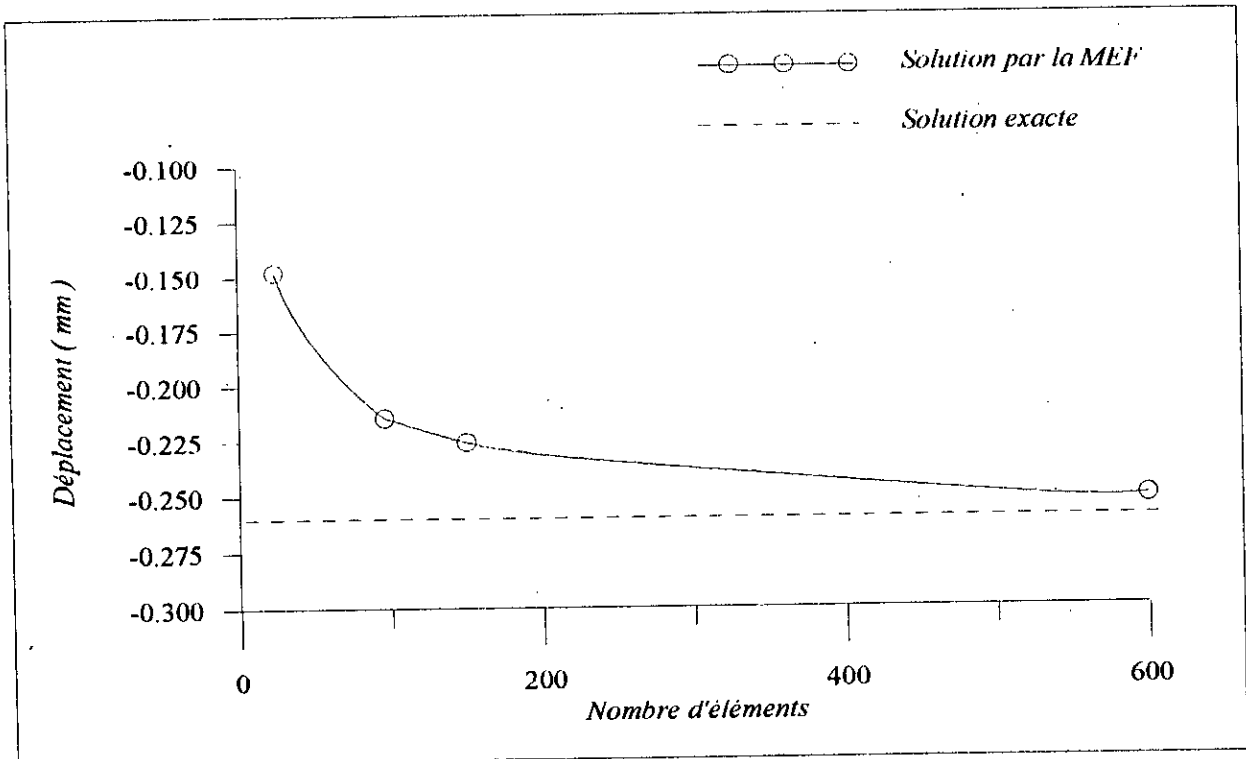


Fig 2 - 7 : Courbe de convergence du déplacement vertical de l'extrémité libre de la console.

La figure (2 - 7) donne une comparaison du déplacement de l'extrémité libre de la console, en utilisant la théorie de l'élasticité et la méthode des éléments finis, pour laquelle on a donné les résultats obtenus pour chacune des discrétisations. On voit que dans chaque cas la méthode des éléments finis entraîne une sous-estimation de la solution exacte qui diminue lorsque l'on affine la subdivision en éléments.

Cette sous estimation nous permet de déduire que l'élément considéré est *trop rigide*, et donc l'augmentation du nombre de degré de liberté va réduire cette « sur-rigidité » de l'ensemble. C'est pour cela qu'il est toujours recommandé pour n'importe quel problème d'utiliser plusieurs modélisations.

On constate que la suite des solutions obtenues par les discrétisations précédentes converge vers la solution exacte de façon monotone, cela confirme que l'élément triangulaire utilisé est un élément conforme.

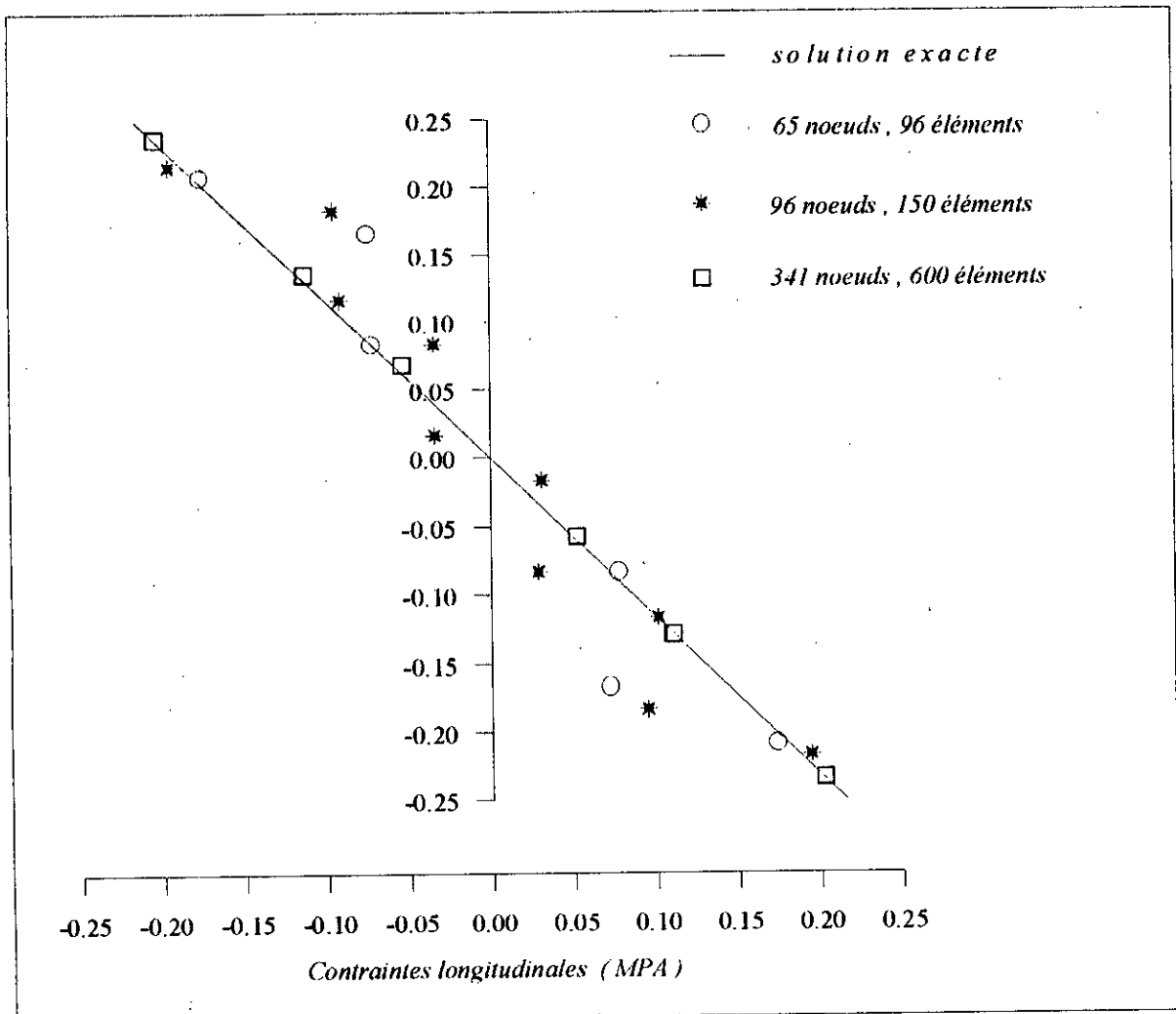


Fig 2 - 8 : Distribution des contraintes longitudinales de la console à son extrémité sur sa hauteur.

La figure (2 - 8) montre les courbes correspondantes à la variation des contraintes longitudinales.

Pour tracer ces courbes, les contraintes sont prises au centre de gravité des éléments. Ceci explique les disparités obtenues pour les contraintes de certains éléments avec la solution exacte. En effet cette solution est obtenue pour l'extrémité encastree de la console, alors que les centres de gravité de certains éléments de cette extrémité sont plus ou moins éloignés de celle-ci; et donc les contraintes calculées par la méthode des éléments finis ne sont pas toujours comparables avec celles de la solution exacte. On constate également que la solution *M.E.F* converge vers la solution exacte en augmentant le nombre d'élément. Cela est dû , en plus des raisons de convergences citées auparavant, à la diminution de la surface de l'élément et donc à un rapprochement des ces centres de gravité vers l'extrémité encastree.

CHAPITRE III

***LES ELEMENTS FINIS
EN DYNAMIQUE***

1- INTRODUCTION:

Les séismes sont des phénomènes imprévisibles, et les catastrophes sur le double plan (pertes humaines et dégâts matériels) qu'ils sont susceptibles de provoquer sont considérées comme une inéluctable fatalité. De ce fait le comportement des structures sans l'action dynamique, représente un chapitre de la théorie des structures qu'aucun ingénieur en génie civil ne doit ignorer. C'est pourquoi, nous exposerons la méthode des éléments finis, qui peut sans difficultés s'appliquer aux situations dépendant du temps.

Nous étudierons en premier, le cas d'un oscillateur simple, et ce pour deux raisons:

a) Le comportement de nombreuses structures, rencontrées dans la pratique, peut être exprimé par l'intermédiaire d'une seule coordonnée, avec un résultat final acceptable par la résolution du problème à un seul degré de liberté qui découle de cette modélisation.

b) Dans les structures linéaires de formes complexes, la réponse totale peut être exprimée comme la somme des réponses d'un ensemble de systèmes à un seul degré de liberté. La technique de calcul s'appliquant au cas d'un seul degré de liberté constitue la base d'une vaste majorité de techniques déterministes en dynamique des structures.

Nous illustrerons à la fin, l'application de notre programme informatique à une console.

2- FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT PAR DIFFERENTS PRINCIPES:

Toutes les structures élastiques linéaires, soumises à des charges de nature dynamique, ont les caractéristiques physiques essentielles suivantes:

- Masse (inertie)
- Propriétés élastiques (souplesse ou rigidité)
- Mécanisme de déperdition d'énergie ou d'amortissement
- Source extérieure de chargement

La formulation des équations du mouvement, regroupant ces caractéristiques s'obtient grâce à trois principes importants:

2-1 Principe d'Alembert:

La deuxième loi de Newton, stipule que le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque m est égal à la force qui lui est appliquée .

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right)$$

avec : $P(t)$ le vecteur force appliqué et $x(t)$ le vecteur position de la masse m si m ne varie pas dans le temps.

$$P(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x}(t)$$

Lorsque dans un système dynamique, il n'y a pas d'autre force volumique que les forces d'inertie, alors les équations du mouvement sont exprimées par:

$$P(t) - m \ddot{x}(t) = 0$$

Cette loi, selon laquelle une masse produit une force d'inertie proportionnelle et opposée à son accélération est connue sous le nom du principe d'Alembert.

2-2 Principe de HAMILTON:

Le principe de HAMILTON consiste à utiliser les grandeurs énergétiques scalaires sous forme variationnelle. Il exprime que la somme de la variation d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatives, prise pendant un intervalle de temps quelconque t_1, t_2 est identiquement nulle. Cette relation s'exprime mathématiquement par:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3 - 1)$$

où : T est l'énergie cinétique totale du système

V est l'énergie potentielle du système, comprenant à la fois l'énergie de déformation et le potentiel de toutes les forces conservatives extérieures.

W_{nc} est le travail effectué par les forces non conservatives agissant sur le système (amortissement + toutes les charges extérieures arbitraires).

δ est la variation subie durant l'intervalle considéré.

L'application de ce principe mène directement aux équations du mouvement de n'importe quel système donné. C'est l'avantage essentiel que présente ce principe.

Lorsque l'énergie cinétique s'annule, et tout ce qui subsiste dans l'équation (3 - 1) ne varie pas dans le temps, nous retrouvons le principe bien connu du minimum de l'énergie potentielle exposé dans le chapitre 1.

2-3 Principe des déplacements virtuels:

Le principe de déplacements virtuels peut s'exprimer comme suit: si on soumet un système, en équilibre, sous l'action de force, à un déplacement virtuel (le seul déplacement compatible avec les contraintes présentes), alors le travail total effectué par les forces est nul.

Si la structure est assez complexe, à plusieurs degrés de liberté, l'écriture directe de l'équilibre dynamique peut s'avérer fastidieuse.

L'application des principes énergétiques (HAMILTON et déplacements virtuels) se montre donc nécessaire et présente un avantage majeur, car les grandeurs énergétiques utilisées sont des scalaires et peuvent s'additionner algébriquement.

3- EQUATION DU MOUVEMENT POUR UN OSCILLATEUR SIMPLE:

Une structure complexe à plusieurs degrés de liberté, se ramène toujours, par une quelconque modélisation, à un assemblage d'oscillateurs simples. Cependant la connaissance des caractéristiques et l'étude d'un oscillateur simple s'avère nécessaire.

Un oscillateur simple est constitué par une masse, un ressort, et un amortisseur, reliés entre eux comme indiqué dans la figure (3 - 1) ci-dessous.

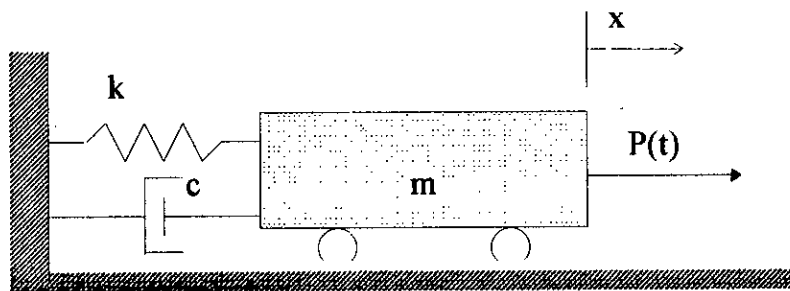
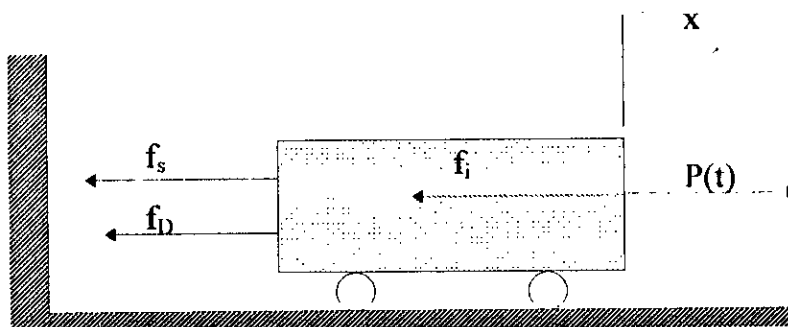


Fig 3 - 1

L'équilibre des forces s'écrit: (Fig 3 - 2)

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow f_l + f_D + f_s = P(t)$$



On note :

Fig 3 - 2

* f_s la force de rappel du ressort supposée proportionnelle au déplacement :

$$f_s = k.x$$

* f_D la force dû à l'amortisseur, supposée proportionnelle à la vitesse : $f_D = c \dot{x}$

* En vertu du principe d'Alembert, l'équation équilibre devient:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

C'est l'équation régissant le mouvement d'un oscillateur simple à un degré de liberté.

Nous illustrons en Annexe 2, les différents cas de chargement avec les différents cas d'amortissement, et nous définissons quelques paramètres importants qu'il est nécessaire de connaître.

4- SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE:

De nos jours, la plupart des structures que rencontre l'ingénieur en Génie Civil dans ses études, sont de nature assez complexes, et à plusieurs degrés de liberté. La réponse dynamique de ce type de structure à un chargement donné, ne peut s'exprimer en modélisant par un oscillateur simple.

Afin de mieux approcher le cas réel de vibration, on fait appel à des modèles à plusieurs degrés de liberté, tel que les oscillateurs multiples, les éléments finis

Comme en statique, nous nous intéresserons à l'élément triangulaire à six degrés de liberté.

4-1 Equation du Mouvement:

De la même façon que dans l'étude statique, nous proposons une formulation élémentaire, puis nous généralisons pour toute notre structure.

La formulation au niveau d'un élément consiste à exprimer l'équilibre de forces effectivement associées à chaque degré de liberté. Quatre types de forces sont en général appliquées à chaque nœud (ces dernières ont déjà été définies pour un oscillateur simple).

$$f_{li} + f_{Di} + f_{si} = P_i(t) \quad i=1,6$$

sous forme matricielle on pourra écrire:

$$\{F_l\}^e + \{F_D\}^e + \{F_s\}^e = \{P(t)\}^e$$

chaque vecteur force résistante s'exprime au moyen de coefficients.

$$\{F_s\}^e = [K]^e \cdot \{x\}^e$$

$[K]^e$ est la matrice de rigidité donnée dans le chapitre précédent.

Si on admet que l'amortissement ne dépend que de la vitesse (type visqueux) on aura alors:

$$\{F_D\}^e = [C]^e \cdot \{\dot{x}\}^e$$

où $[C]^e$ est la matrice d'amortissement élémentaire.

Concernant les forces d'inertie, elles peuvent s'exprimer au moyen des coefficients d'influence de masse m_{ij} , d'où:

Les règles pratiques d'assemblage exposées dans le chapitre précédent, sont les mêmes que celles utilisées pour les matrices masses et autres. Nous traiterons, à partir de ce point le cas global.

4-2 Les problèmes aux valeurs et vecteurs propres:

4-2-1 Notions de valeurs et vecteurs propres:

Reprenons l'équation du mouvement:

$$[K].\{x\} + [C].\{\dot{x}\} + [M].\{\ddot{x}\} = \{P(t)\} \quad (3-2)$$

Si la matrice $[C]$ est nulle, ce qui pour un problème dynamique signifie qu'il n'y a pas d'effets d'amortissement, et s'il n'y a pas de terme d'excitation $\{P(t)\}$ présent, l'équation précédente se réduit à:

$$[K].\{x\} + [M].\{\ddot{x}\} = 0 \quad (3-3)$$

La solution de cette équation est de la forme:

$$\{x\} = \{x_0\} \cos \omega t \quad (3-4)$$

En remplaçant cette expression dans (3-3), on aura $([K] - \omega^2[M])\{x_0\} = 0$ appelée, équation Modale. Ceci n'est possible que pour n valeurs de ω , pour lesquelles le déterminant de la matrice entre parenthèse est nul.

Alors, les valeurs de ω définissent les fréquences angulaires propres du système, et on reconnaît là un problème typique de valeur propre:

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0$$

On définit un mode propre $\{\phi_i\}$, comme étant un mode de déformation des structures libres non soumises à des excitations.

Un mode propre $\{\phi_i\}$ est aussi dit forme propre, il sera obtenu pour la fréquence ω_i en écrivant:

$$([K] - \omega_i^2[M])\{\phi_i\} = 0 \quad (3-5)$$

4-2-2 Propriétés des Vecteurs Modaux:

soit:

$$a) \omega_i^2 = \frac{\{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}}$$

$$b) \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_j\} = \{\phi_j\}^T [M] \{\phi_i\} = 0 \quad i \neq j$$

On dit que les modes propres sont orthogonaux par rapport à $[K]$ et $[M]$.

Ces deux propriétés peuvent être démontrées à partir de l'équation (3-5)

Soit $[\Phi]$, la matrice de $(n \times n)$ dont les colonnes sont constituées par les n vecteurs propres

$$\{U_i\} \quad i=1,n$$

$$[\Phi] = [\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}, \dots, \{\Phi_n\}]$$

Φ est dite Matrice Modale.

On peut encore écrire les propriétés d'orthogonalité en utilisant Φ , soit:

$$[\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi] = k$$

et

$$[\Phi]^T \cdot [M] \cdot [\Phi] = m$$

k et m sont respectivement les matrices, rigidité et masse, généralisées.

4-2-3 Méthode de résolution des problèmes aux valeurs propres:

Il existe deux types de méthode de résolution des problèmes aux valeurs propres. Les méthodes directes et les méthodes itératives.

Les méthodes directes sont très utilisées, lorsqu'il s'agit de la résolution de système à quatre degrés de liberté au plus. Par contre les méthodes itératives s'adaptent très bien aux systèmes plus complexes, de taille assez importante.

On cite quelque méthodes telles que:

- La méthode de Rayleigh.
- La méthode itérative inverse.
- La méthode itérative directe.
- La méthode itérative sur sous espaces.

Nous ne nous intéresserons qu'à la méthode itérative directe.

- Description de la méthode itérative:

L'équation (3 - 5) peut être écrite sous la forme:

$$[K]^{-1} [M] \{\Phi_i\} = \omega^2 \{\Phi_i\}$$

Posons : $[H] = [K]^{-1} \cdot [M]$

$[H]$ est appelée matrice de flexibilité.

La plus grande valeur propre peut être déterminée par un processus itératif simple; nous résumons les différentes étapes de calcul dans ce qui suit:

a) On donne aux composantes du vecteur $\{\Phi_i\}$ un ensemble de valeurs initiales supposées voisines des valeurs exactes, soit $\{\Phi_i\}_{g_1}$ ce vecteur. Puisque le vecteur propre représente une configuration modale quelconque du système, ses composantes sont définies à un facteur de proportionnalité près. On peut donc toujours supposer que l'une des inconnues (x_1 , par exemple) est égale à 1.

b) On calcule $\{\phi_i\}_{b_1}$.

c) Le produit $\{\phi_i\}_{b_1}$ est vecteur qui est peut être écrit sous la forme $\lambda_{b_2} \{\phi_i\}_{b_2}$, où λ_{b_2} est un facteur commun, tel que x_1 de $\{\phi_i\}_{b_2}$ soit encore égale à l'unité, les autres variables x_2, x_3, \dots, x_n prenant les valeurs correspondantes.

d) On compare $\{\phi_i\}_{b_2}$ et $\{\phi_i\}_{b_1}$, ou plus généralement $\{\phi_i\}_{b_r}$ et $\{\phi_i\}_{b_{(r+1)}}$. Si l'on n'observe plus de modification dans la mesure de la précision que l'on s'est fixée à l'avance, alors le dernier ensemble de valeurs calculées définit le vecteur propre et le facteur commun est la plus grande valeur propre; dans le cas contraire, on retourne en a).

Les autres valeurs propres et leurs vecteurs propres correspondants sont déterminés par un processus de « mutation » combiné au processus itératif. Le processus de « mutation » modifie [H] de manière à rendre nulle la plus grande valeur propre, la valeur λ qui lui est immédiatement inférieure devient ainsi à son tour la plus grande, et l'on peut reprendre le processus itératif.

4-3 Solution de l'équation du mouvement:

4-3-1 Stratégie de résolution:

Il existe deux stratégies fondamentales de résolution en dynamique : la méthode de superposition modale et la méthode directe. Le choix entre ces deux stratégies dépend de la nature du problème (linéaire ou non linéaire) et du contenu fréquentiel de l'excitation.

a) la méthode de résolution directe est utilisée pour les problèmes non linéaires ou si le contenu fréquentiel est susceptible d'exciter un grand nombre de mode de la structure. L'analyse directe d'une structure en régime transitoire implique l'intégration pas à pas de équation du mouvement.

b) La stratégie de résolution la plus couramment utilisée en dynamique est la méthode de superposition modale, qui convient aux structures linéaires dont les premiers modes propres sont susceptibles d'être excités. C'est à ce type de méthode que nous nous intéresserons dans ce chapitre.

4-3-2 Principe de la méthode de superposition modale:

Soit $\{x\}$ un vecteur déplacement quelconque. Ce vecteur est obtenu en superposant les amplitudes convenablement déterminées, de tous les modes de vibration (ou quelques uns). Pour chaque composante modale, les déplacements sont donnés par le vecteur modale $\{\phi_i\}$ multiplié par l'amplitude modale Y_n , d'où:

$$\{X\} = \{\phi_1\} \cdot Y_1 + \{\phi_2\} \cdot Y_2 + \dots + \{\phi_n\} \cdot Y_n = \sum_{i=1}^N \{\phi_i\} Y_i$$

$$\text{ou bien: } \{X\} = [\Phi] \{Y\} \quad (3-6)$$

Cette équation permet de passer du vecteur $\{Y\}$ des coordonnées généralisées au vecteur $\{X\}$ des coordonnées géométriques.

écrivons:

$$\{\phi_i\}^T [M] \{X\} = \{\phi_i\}^T [M] [\phi_i] \{Y\}$$

$$\{\phi_i\}^T [M] [\phi_i] \{Y\} = \{\phi_i\}^T [M] [\phi_1] Y_1 + \{\phi_i\}^T [M] [\phi_2] Y_2 + \dots + \{\phi_i\}^T [M] [\phi_i] Y_i + \dots \dots \dots + \{\phi_i\}^T [M] [\phi_n] Y_n$$

tous les termes de cette somme s'annulent, sauf celui qui correspond à ϕ_i et ce en raison des propriétés d'orthogonalité des modes de vibration par rapport à la matrice masse.

On aura:

$$\begin{aligned} \{\phi_i\}^T [M] \{X\} &= \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} Y_n \\ \Rightarrow Y_n &= \frac{\{\phi_i\}^T [M] \{X\}}{\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}} \end{aligned}$$

Cette égalité permet le passage des coordonnées géométriques aux coordonnées généralisées.

En utilisant l'équation (3-6), les dérivées premières et secondes par rapport au temps sont respectivement:

$$\{\dot{x}\} = [\Phi] \{\dot{Y}\}, \quad \{\ddot{x}\} = [\Phi] \{\ddot{Y}\}$$

En les remplaçant dans l'équation du mouvement on trouve:

$$[M] [\Phi] \{\ddot{Y}\} + [C] [\Phi] \{\dot{Y}\} + [K] [\Phi] \{Y\} = \{P(t)\}$$

Multiplions à gauche par la transposée du $i^{\text{ème}}$ vecteur modal $\{\phi_i\}^T$. l'expression précédente devient:

$$\{\phi_i\}^T [M] [\Phi] \{\ddot{Y}\} + \{\phi_i\}^T [C] [\Phi] \{\dot{Y}\} + \{\phi_i\}^T [K] [\Phi] \{Y\} = \{\phi_i\}^T \{P(t)\}$$

En vertu des propriétés d'orthogonalités vue précédemment, et si on suppose qu'une semblable condition d'orthogonalité s'applique à la matrice d'amortissement ($\{\phi_i\}^T [C] \{\phi_j\} = 0 \quad j \neq i$) l'équation précédente devient à son tour:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = P_i(t) \dots$$

$$\text{avec: } M_i = \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}, \quad C_i = \{\phi_i\}^T [C] \{\phi_i\}$$

$$C_i = 2 \xi_i \omega_i M_i$$

$$K_i = \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} = \omega_i^2 M_i$$

$$P_i(t) = \{\phi_i\}^T \{P(t)\}$$

finalement l'équation du mouvement dynamique dans les coordonnées généralisées est:

$$Y_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{P_i(t)}{M_i}$$

où : M_i , K_i , C_i , P_i sont les, Masse, rigidité, amortissement et chargement généralisés du $i^{\text{ème}}$ mode.

4-3-3 Expression de la solution

Il y a n équations découplées (indépendantes), correspondant chacune à un mode de vibration. L'expression générale de la réponse est donnée, pour chaque mode par l'intégrale de Duhamel :

$$Y_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_{D_i}} \int_0^t P_i(\tau) \cdot e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \cdot \sin \omega_{D_i} (t-\tau) d\tau$$

avec : $\omega_{D_i} = \omega_i \times \sqrt{1 - \xi_i^2}$ appelée pseudo-pulsation.

Lorsque le système est soumis à une excitation entièrement quelconque (de type impulsions), on aura alors recours à une intégration numérique de l'expression précédente afin de trouver la réponse à cette excitation. Celle-ci remplace l'intégrale de Duhamel en une sommation simple, la méthode des trapèzes, la méthode de Simpson ...

Dans la suite de notre travail nous n'exposerons que la méthode utilisant les transformées de Fourier.

4-3-4 Etude numérique dans le domaine des fréquences

a) Expression d'un chargement quelconque à partir des séries de Fourier

Il est possible d'exprimer un chargement périodique quelconque en série de Fourier au moyen de composantes harmoniques. La réponse correspondante à chaque terme de la série est alors simplement la réponse à un chargement harmonique ; en utilisant le principe de superposition, on déduit la réponse totale comme la somme des réponses dues à chaque terme de la série.

Il serait possible aussi, de généraliser l'application des séries de Fourier à la représentation des fonctions non périodiques. Pour cela prenons un chargement non périodique quelconque s'étalant sur un temps T_p . En allongeant cet intervalle de temps jusqu'à l'infini, notre chargement s'apparenterait à un chargement périodique de période T_p .

Il suffit alors de formuler l'expression de la série de Fourier de sorte qu'elle s'étende sur un intervalle de temps infini. Alors en utilisant une notation définie comme suit :

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi}$$

$$n\bar{\omega}_1 = n\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega}_n$$

$$C_n = \frac{1}{T_p} C(\bar{\omega}_n)$$

On obtient :

$$P(t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(\bar{\omega}_n) e^{(i\bar{\omega}_n t)} \quad (3-6)$$

$$C(\bar{\omega}_n) = T_p C_n = \int_{t=-T_p/2}^{t=T_p/2} p(t) \cdot e^{-(i\bar{\omega}_n t)} dt \quad (3-7)$$

où on a tenu compte du fait que les bornes d'intégration sont arbitraires tant quelles permettent de couvrir une période de chargement complète.

Si la période de chargement est étendue jusqu'à l'infini ($T_p \rightarrow \infty$) l'incrément de fréquence devient un infiniment petit ($\Delta\bar{\omega} \rightarrow d\bar{\omega}$) et les fréquences discrètes $\bar{\omega}_n$ deviennent une fonction continue $\bar{\omega}$. Ainsi, à la limite l'expression de la série de Fourier devient l'intégrale de Fourier suivante :

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} C(\bar{\omega}) e^{(i\bar{\omega}t)} d\bar{\omega} \quad (3-8)$$

$$C(\bar{\omega}) = \int_{t=-\infty}^{\infty} p(t) \cdot e^{-(i\bar{\omega}t)} dt \quad (3-9)$$

b) Réponse sur le domaine des fréquences

Dans le cas d'un accélerogramme, on le discrétise en intervalle de temps Δt (en générale $\Delta t = 0,02$ s) et on considère que l'accélerogramme est une "succession d'impulsion" de durée Δt .

Ainsi, le long de l'accélerogramme, les effets des impulsions successives viennent s'ajouter aux autres. Pour une impulsion survenant au temps τ pendant l'intervalle de temps $d\tau$, on considère que $P(\tau)$ est constant sur $d\tau$ ce qui donne (annexe 2).

$$d x(t) = \frac{P(\tau)}{m\omega} d\tau \sin \omega(t - \tau)$$

Donc pour avoir l'effet de toutes les impulsions, il suffit d'intégrer le long de l'axe des temps.

$$x(t) = \int_0^{T_d} d x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^{T_d} P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \quad (3-10)$$

$t > \tau$

Lorsque l'on a un système avec amortissement, alors la réponse est :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^{T_d} P(\tau) \cdot e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (3-11)$$

$t > \tau$

avec : $\omega_D = \omega \sqrt{|1-\xi^2|}$

Cette équation (3-11) est appelée *intégrale de convolution*.

Si $P(\tau) = 1$ on a alors la définition de la réponse impulsionnelle

$$d x(t) = h(t-\tau) = \frac{e^{-\xi\omega(t-\tau)}}{m\omega_D} \sin \omega_D(t-\tau)$$

On aura alors

$$x(t) = \int_0^{T_d} P(\tau) h(t-\tau) d\tau = p(t) \times h(t) \quad (3-12)$$

Cette équation correspond au produit de convolution.

Les *Transformées de Fourier* nous permettent d'exprimer le chargement $p(t)$ dans le domaine des fréquences ainsi que le facteur de réponse, ce qui nous donne respectivement $p(\bar{\omega})$ et $H(\bar{\omega})$. ($P(\bar{\omega}) = C(\bar{\omega})/2\pi$).

L'intérêt du passage du domaine des temps au domaine des fréquences est que dans ce dernier le produit de convolution devient un simple produit. Alors la réponse $x(\bar{\omega})$ dans le domaine des fréquences est donnée par :

$$x(\bar{\omega}) = p(\bar{\omega}) \cdot H(\bar{\omega})$$

et

$$x(t) = \text{TF}^{-1} [x(\bar{\omega})]$$

où TF^{-1} est la transformée de Fourier inverse permettant le passage du domaine des fréquences au domaine des temps tel que :

$$x(t) = \int_{\bar{\omega}=-\infty}^{\infty} p(\bar{\omega}) H(\bar{\omega}) e^{(i\bar{\omega}t)} d\bar{\omega} \quad (3-13)$$

$h(t)$ étant définie pour $p(\tau) = 1$ alors $H(\bar{\omega})$ l'est pour $p(\bar{\omega}) = 1$, ce qui nous donne pour l'équation du mouvement suivante :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = e^{(i\bar{\omega}t)} \quad (3-14)$$

dont la solution est de la forme $x(t) = H(\bar{\omega}) \cdot e^{(i\bar{\omega}t)}$

ce qui nous donne : $\dot{x}(t) = i\bar{\omega} \cdot x(t)$

$$\ddot{x}(t) = -\bar{\omega}^2 \cdot x(t)$$

L'équation (3-14) devient : $-\bar{\omega}^2 m \cdot x(t) + ic\bar{\omega}x(t) + kx(t) = e^{i\bar{\omega}t}$

$$\text{Soit : } x(t) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + ic\bar{\omega} + k} \cdot e^{i\bar{\omega}t} = H(\bar{\omega}) \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\text{Donc : } H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + ic\bar{\omega} + k} \quad (3-15)$$

Maintenant que nous avons donné le principe d'utilisation des *Transformées de Fourier*, il convient donc de rendre la méthode plus commode d'accès en la formulant de manière numérique.

La période du chargement est alors divisée en N incréments de temps égaux Δt , et la charge est définie pour les instants $t_m = m \cdot \Delta t$, ce qui est le cas d'un accélérogramme. On aura alors :

$$\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1 = n \Delta\bar{\omega}$$

$$C(\bar{\omega}_n) = 2\pi p(\bar{\omega}_n) = \Delta t \sum p(t_m) \cdot e^{-\left(2\pi i \frac{nm}{N}\right)}$$

ce qui nous donne :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} H(\bar{\omega}_n) C(\bar{\omega}_n) \cdot e^{(in\bar{\omega}_1 t)}$$

La réponse totale du système à un accélérogramme est donc déterminée par la superposition de chacune des réponses dues aux différentes impulsions.

5- APPLICATION A UNE CONSOLE

Soit la console étudiée dans le chapitre précédent, avec masse uniforme. Les vibrations propres de cette console ont été étudiées par la méthode des éléments finis, pour laquelle la représentation

des masses utilisées est la masse cohérente.

On a étudié la convergence de la première pulsation propre en fonction du nombre d'éléments du modèle.

Les résultats numériques sont récapitulés dans le tableau 3-1 où ils sont comparés à la solution exacte donnée par les Règles P.S.

$$\omega_1 = 3,51 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

où le module de young E doit être exprimé en N / m^2 et m la masse en Kg afin d'obtenir ω_1 en rad / s.

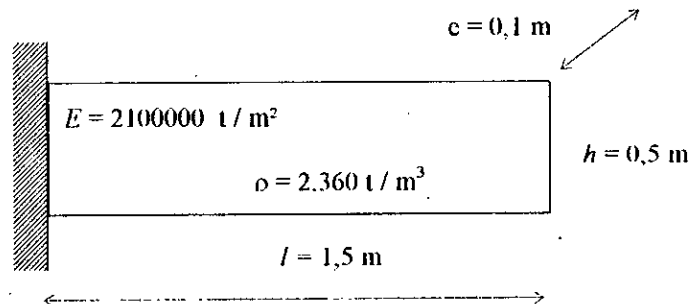


Fig 3 - 3 : Poutre encastree avec masse uniforme.

Nombre d'él ^{mts}	Nombre d.d.l	ω_1 (rad / s)	Erreur relative (%)
24	48	876,412	30,09
96	130	709,121	5,26
150	192	690,797	2,45
600	462	680,213	0,97
Solution exacte (rad / s)		673,69	

Tableau 3-1 : récapitulation des résultats de la première pulsation propre.

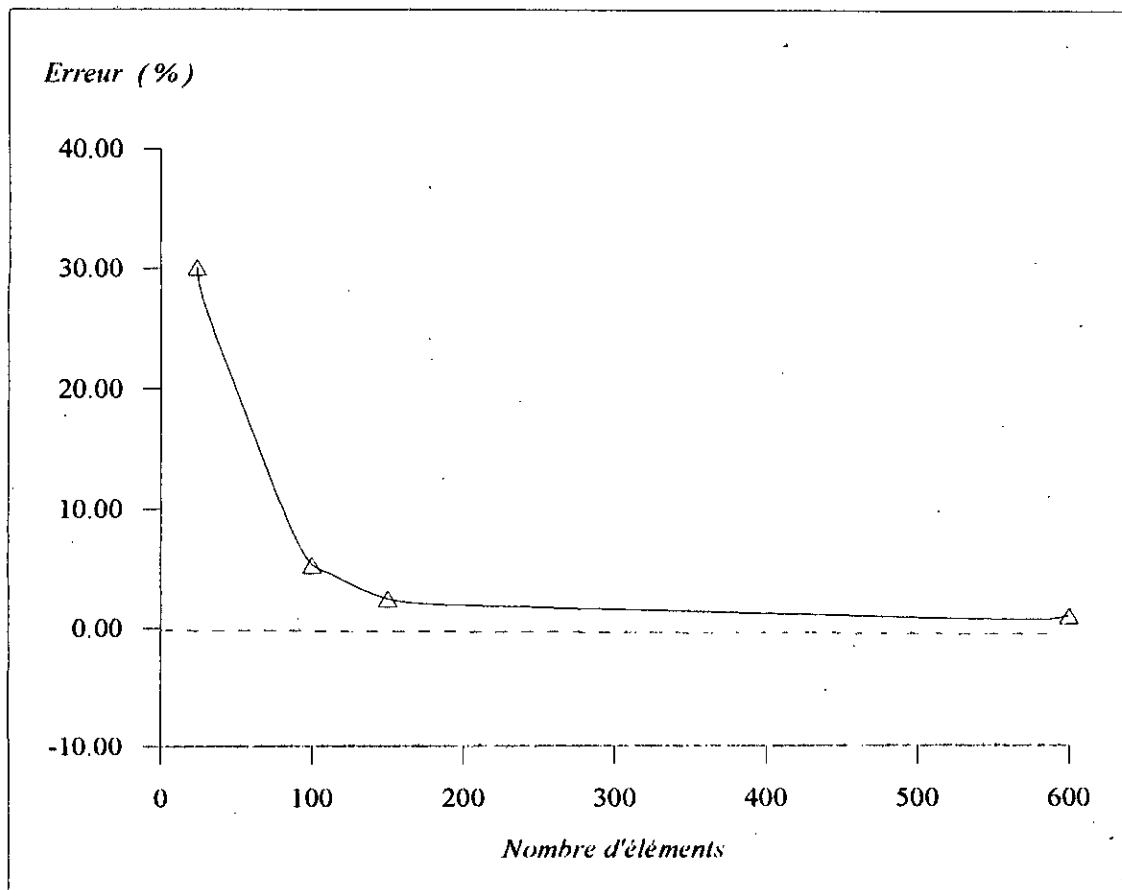
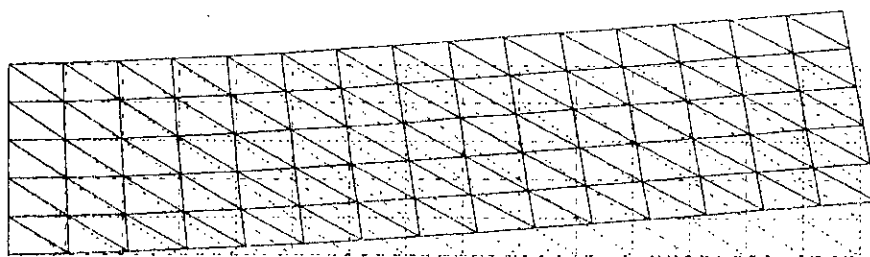


Fig 3 - 4 : Courbe de convergence de la première pulsation

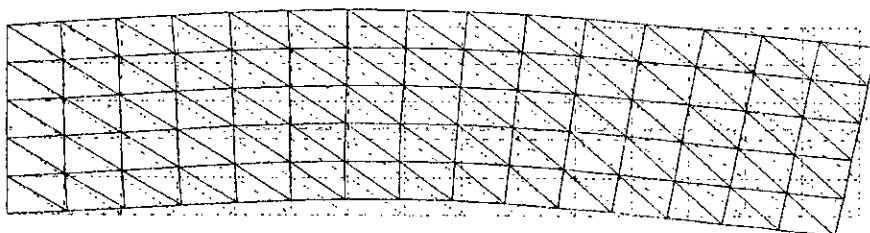
Au vu des résultats obtenus, on constate que pour l'élément conforme utilisé, la solution converge de façon monotone « par le haut » vers la solution exacte.

Comme pour le cas des déplacements de cette console en statique, afin d'obtenir une meilleure précision sur la valeur propre, il faut aussi modéliser la console avec un plus grand nombre d'éléments.

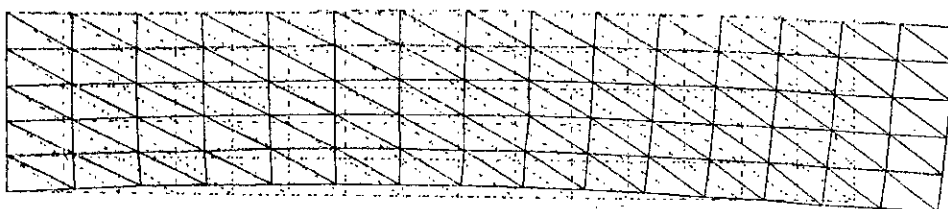
Nous représentons les déformées des huit premiers modes pour la modélisation à 196 noeuds et 150 éléments. Afin de mieux apprécier ces déformées modales, celles-ci ont été amplifiées.



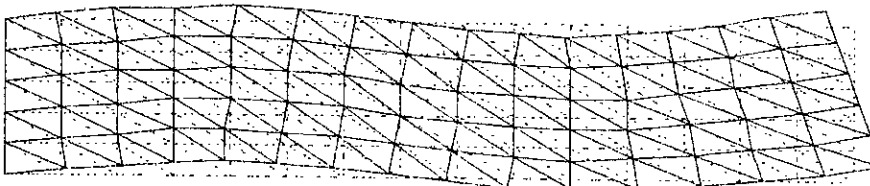
Mode 1 : $\omega = 690,80 \text{ rad / s}$



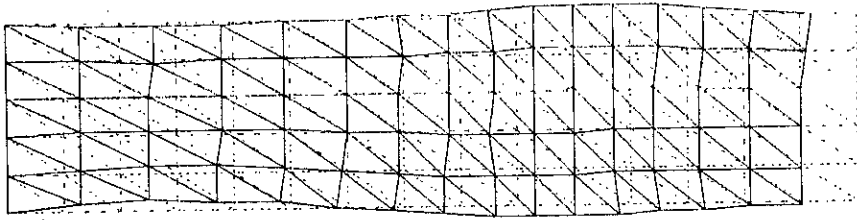
Mode 2 : $\omega = 3141,82 \text{ rad / s}$



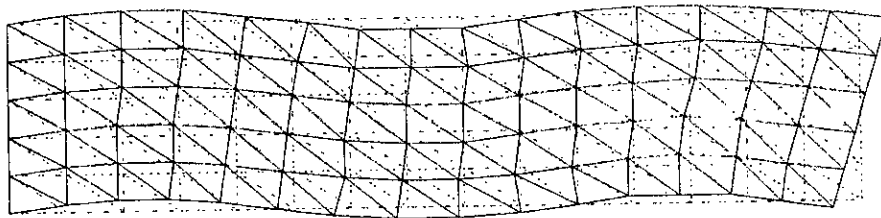
Mode 3 : $\omega = 3232,76 \text{ rad / s}$



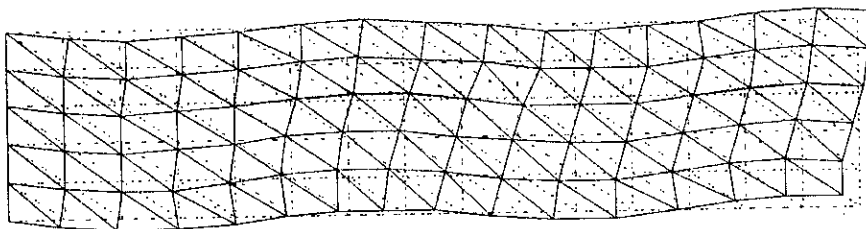
Mode 4 : $\omega = 6864,66 \text{ rad / s}$



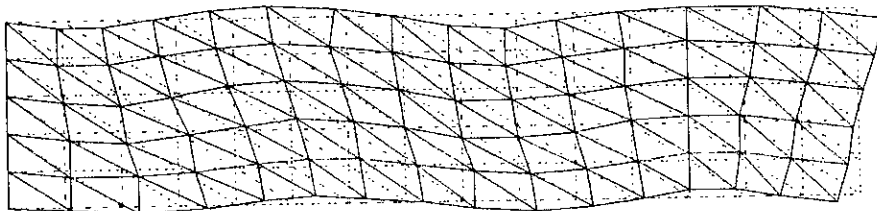
Mode 5 : $\omega = 9648,68 \text{ rad / s}$



Mode 6 : $\omega = 10677,9 \text{ rad / s}$



Mode 7 : $\omega = 13572,8 \text{ rad / s}$



Mode 8 : $\omega = 14945,7 \text{ rad / s}$

CHAPITRE IV

LES BARRAGES POIDS

1- INTRODUCTION

Actuellement, il existe deux méthodes classiques de calculs des barrages poids, l'une s'appuyant sur la théorie de la résistance des matériaux, la seconde sur celle de l'élasticité.

Cependant la méthode, plus récente, des éléments finis utilisée dans de nombreux domaines pourrait l'être aussi pour les barrages. Afin de nous prononcer sur son efficacité, nous nous proposons, dans ce chapitre de la mettre à l'épreuve en confrontant les résultats qu'elle nous fournira avec ceux obtenus par les méthodes classiques. Nous appliquerons ces diverses méthodes à l'un des barrages d'Algérie le plus anciennement projeté à savoir le barrage de l'OUED FODDA, dont nous étudierons également le comportement face aux impulsions dynamiques.

2- BARRAGES POIDS

Parmi les améliorations foncières qui ont autorisé les progrès récents de l'agriculture Algérienne, l'irrigation figure au tout premier rang. Par ailleurs l'économie moderne implique une utilisation croissante de l'eau. Pour satisfaire à ces besoins, il faut absolument que l'eau soit strictement garantie et c'est là qu'intervient la nécessité d'un grand barrage réservoir.

Des différents types de barrages existant, il y a les barrages en béton. Parmi ces derniers, on peut distinguer trois types selon leur forme et leur comportement mécanique.

- barrages voûtes
- barrages à contre forts
- barrages poids

Les barrages poids également appelés barrages gravités feront l'objet de notre étude. Massifs, ces barrages de section transversale triangulaire, résistent à la poussée de l'eau par leur poids.

2-1 Forces agissantes sur le barrage

Les actions auxquelles sont soumis les barrages varient selon leur mode d'application (statique ou dynamique) et selon leur nature (force de volume, force de surface).

2-1-1 Cas statique

Les sollicitations prédominantes sur les barrages poids sont :

- le poids propre
- la poussée de l'eau
 - a) poids propre du barrage :

L'action résultante du poids propre est favorable à la stabilité de l'ouvrage. Le poids propre du barrage dépend essentiellement de la qualité du béton utilisé.

b) poussée de l'eau

L'action de l'eau se manifeste d'abord par la pression qu'elle exerce directement sur le parement amont de l'ouvrage. A une profondeur z , la pression hydrostatique est $P_e = \gamma_w \cdot z$, γ_w étant le poids volumique de la hauteur de la retenue H et la pression est répartie suivant un diagramme triangulaire (Fig 4.1-a). Elle a pour valeur

$$P_e = \frac{1}{2} \gamma_w H^2$$

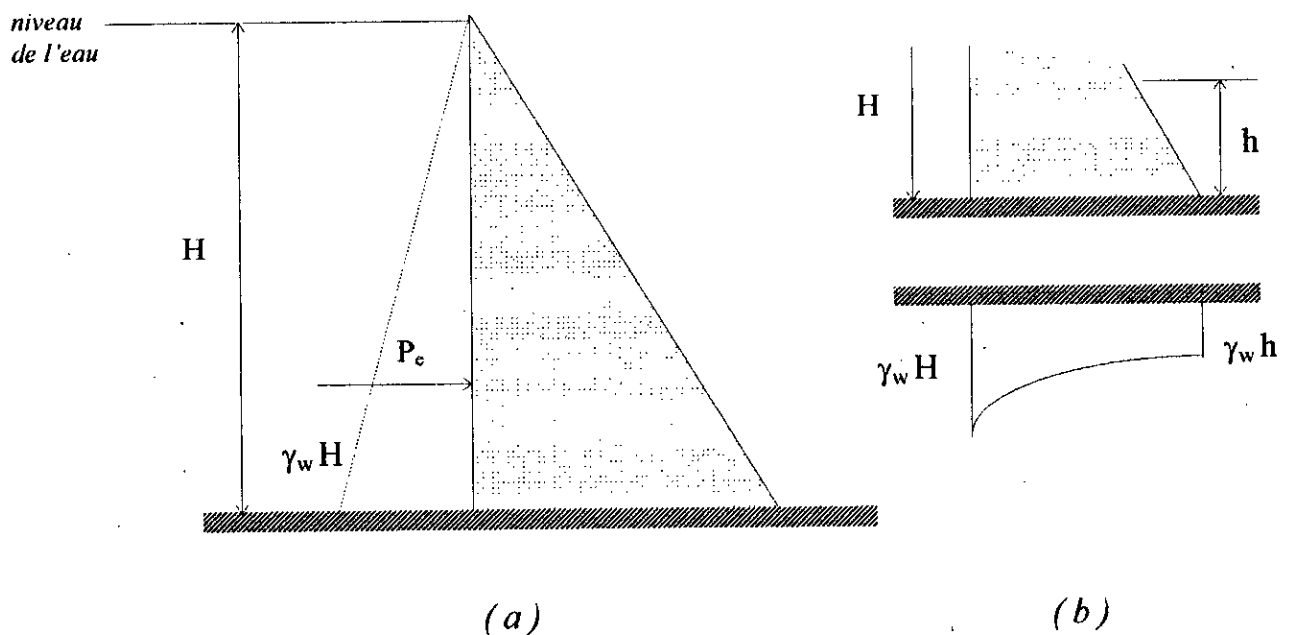


Fig 4 - 1 Poussée de l'eau

Lorsque l'eau est chargée de particules en suspension ou s'il y a risque d'envasement, on remédie à cela en remplaçant le poids volumique de l'eau par le poids volumique de l'eau chargée, ou en ajoutant à la poussée de l'eau une poussée des terres.

L'eau intervient aussi par l'intermédiaire de la force de sous pressions qui est une force de soulèvement (Fig 4.1-b). Celle-ci intervient lorsque l'eau pénètre le rocher de fondation, ceci pouvant être dû à la parasite, à la fissuration ou à la fracturation de la roche.

L'étanchéité et le drainage des fondations nous permettent d'atténuer les sous pressions.

2-1-2 Cas dynamique

Au cours des secousses telluriques, les structures subissent des vibrations, c'est à dire des accélérations variables qui se combinent à celle de la pesanteur; les caractéristiques des fondations, l'action de l'eau et le poids propre s'en trouvent modifiés. On parlera alors de l'interaction sol-structure, de l'interaction fluide-structure et de la force d'inertie du barrage. L'interaction sol-structure et l'interaction fluide-structure faisant l'objet de travaux de recherche poussée, nous nous intéresserons seulement à la force d'inertie.

-Force d'inertie du barrage

Lors d'un tremblement de terre, les secousses sont caractérisées par l'accélération imposée au sol (γ). On caractérise cette accélération par son rapport $a = \frac{\gamma}{g}$. Sous la secousse, la force d'inertie dont la direction sera horizontale est $\frac{P\gamma}{g} = aP$ (Fig 4 - 3)

P: poids propre du barrage

a: coefficient de sismicité

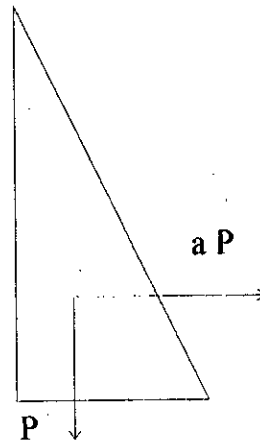


Fig 4 - 3 : force d'inertie dirigée vers l'aval

2-2 Stabilité externe des barrages poids

La sécurité du barrage résulte essentiellement des conditions relatives au renversement et au glissement.

Le barrage poids sera calculé par tranches verticales, d'épaisseur unité

2-2-1 Stabilité au renversement

On considère un profil triangulaire caractérisé par une hauteur H, un fruit aval m, et la retenue passant par le sommet O (Fig 4 - 4).

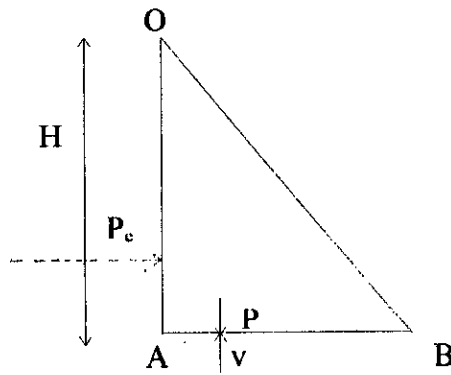


Fig 4 - 4

Le tableau des forces considérées ainsi que des bras de levier et moments résultants de ces forces est donné ci-dessous:

Forces	Bras	Moment
poids $p = \frac{\Delta m H^2}{2}$	$\frac{2}{3} m H$	$+\frac{\Delta m^2 H^3}{3}$
poussée $P_e = \frac{\delta \cdot H^2}{2}$	$\frac{H}{3}$	$-\frac{\delta H^3}{6}$
sous pression $V = \frac{\delta \cdot m H^2}{2}$	$\frac{2}{3} m H$	$-\frac{\delta \cdot m^2 H^3}{3}$

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

δ : poids spécifique de l'eau

Δ : poids spécifique du béton

hypothèse: sous pression triangulaire

La somme des moments / B nous donne:

$$\Delta m^2 \frac{H^3}{3} - \delta \cdot \frac{H^3}{6} \delta \cdot m^2 \frac{H^3}{2} \geq 0$$

résolue en m, on obtient

$$m \geq \sqrt{\frac{S}{2(\Delta - S)}} \quad (4-1)$$

2-2-2 Stabilité au glissement

Soit R la résultante des forces appliquées au profil

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{V}$$

La composante tangentielle est Q, la composante normale est P-V, et la résultante fait avec la verticale un angle β tel que :

$$\text{Tg}\beta = \frac{Q}{P-V}$$

Pour que le profil résiste au glissement il faut que la résultante R fasse avec la verticale un angle inférieur à l'angle de frottement, soit :

$$\text{Tg}\beta < f$$

Pour un angle de frottement égal à 0.75 on obtient:

$$\text{pour } v \neq 0 \quad m \geq \frac{4S}{3(\Delta - S)} \quad (4-2)$$

$$\text{pour } v = 0 \quad m \geq \frac{4S}{3\Delta} \quad (4-3)$$

2-3 Présentation du barrage de l'Oued Fodda

Achevé en 1939, le barrage de l'OUED FODDA est un bel ouvrage de 89 m de hauteur au dessus du thalweg barrant la rivière dans des gorges profondes en amont du village de *EL KARIMIA*. C'est l'un des barrages les plus anciennement projeté et l'un des barrages d'Algérie dont la construction s'est présentée dans les meilleures conditions. Il est en effet fondé sur un terrain très dur donnant toute sécurité de fondation mais cependant très suspect du point de vue de l'étanchéité car très fissuré. Un géologue suisse éminent, qui avait étudié le barrage pour le compte d'une des entreprises concurrentes, avait pronostiqué que ce barrage ne serait jamais rempli ce qui est arrivé à d'autres ouvrages fondés dans des conditions analogues, en Espagne et en Italie notamment. Pour parer à ce risque tout à fait sérieux, on a dû employer, pour la première fois à une pareille échelle en matière de grands barrages, la technique très spéciale des injections à haute pression de produits chimiques et ciments.

Voici les caractéristiques essentielles de ce barrage, qui par ailleurs, est classique :

Barrage en béton du type dit « à gravité », c'est à dire résistant à la poussée de l'eau, grâce à son poids sans prendre appui horizontalement sur les parois de la vallée. Haut de 100 m au total, il se présente comme un triangle en béton, large de 68m à la base.

Pour des raisons de simplification nous présenterons et utiliserons pour le barrage de l'OUED FODDA, un massif triangulaire avec les caractéristiques suivantes:

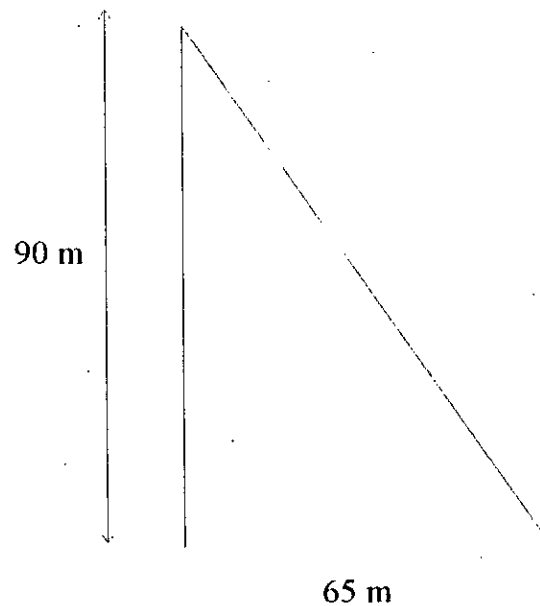


Fig 4 - 5 Représentation modélisée du barrage

masse volumique du béton : $\Delta = 2400 \text{ Kg/m}^3$

module de Young : $E = 2.4 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

coefficient de poisson $\nu = 0.3$

hauteur totale: $H = 90 \text{ m}$

largeur à la base : $b = 65 \text{ m}$

épaisseur unité

pente amont : $n = \text{tg}\beta = 0$

pente aval: $m = \text{tg}\alpha = 0.722$

masse volumique de l'eau : $\delta = 1100 \text{ kg/m}^3$

Nous pouvons, pour l'exemple de notre massif triangulaire, vérifier les conditions de renversement et glissement :

~ condition de renversement

$$m \geq \delta/2(\Delta - \delta) = 0.636$$

~ condition de glissement

$$m \geq 4S/3(\Delta - S) = 1.078$$

Nous en concluons, dans le cas de la sous pression triangulaire, que la condition de renversement est satisfaite. Par contre le barrage risque de périr par glissement.

C'est pour cela que des dispositions constructives ont été prises pour « rompre » les sous pression, notamment par un réseau de drains qui recouperont les éventuelles fissures horizontales.

3- CALCUL DES CONTRAINTES

Pour le calcul des contraintes dans un barrage poids, il existe la méthode de la résistance des matériaux et la méthode de l'élasticité.

Cependant on doit veiller à :

- l'application de la condition de non extension permettant de réduire à des normes acceptables tout effort de traction.

- l'application de la règle de MAURICE LEVY à savoir que la sollicitation élastique sur un plan horizontal doit rester supérieur à la pression hydrostatique de façon à refermer toute fissure.

(les contraintes prises en compte seront positives en compression)

3-1 Méthode dérivée de la résistance des matériaux

Soit un barrage triangulaire (Fig 4 - 6), à parement vertical, dont le parement aval présente un fruit $m = \text{tg}\alpha$, H sa hauteur, $l = mH$ sa base.

Le centre de gravité g est placé sur la médiane OG

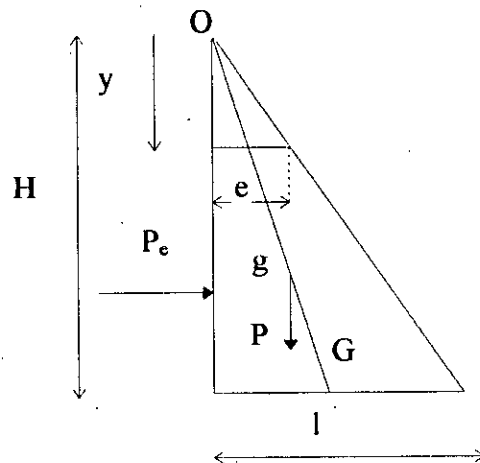


Fig 4 - 6

Assimilant chaque tranche du barrage à une poutre console verticale, encastree dans les fondations, cette méthode consiste à déterminer les contraintes dans les sections horizontales à partir des formules de la flexion composée :

$$\sigma_y = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} v$$

δ : surface de base considérée = $e \times l$

I : moment d'inertie de la surface = $\frac{e^3}{12}$

V : excentricité ; varie de $(-e/2)$ à $(e/2)$

N : effort normal

M : moment de flexion

Δ : masse volumique du béton

δ : masse volumique de l'eau

Pour le cas de notre barrage soumis à son poids P et à la poussée de l'eau P_e on a :

$$N = \Delta \cdot m \frac{y^2}{2}$$

$$M = -\Delta \cdot m^2 y^3 / 12 + \delta \cdot y^3 / 6$$

Ce qui nous donne :

$$\sigma_y = 0,5y\Delta + [2\delta / m^3 - \Delta / m]y \quad (4-4)$$

Les contraintes étant proportionnelles à la hauteur, c'est dans la partie basse que nous aurons les contraintes les plus élevées. On aura alors au pied du parement amont ($y = H$; $V = -e/2$)

$$\sigma_{ya} = H(\Delta - \delta / m^2) \quad (4-5)$$

et au pied du parement aval ($y = H$; $V = +e/2$)

$$\sigma_{yb} = H\delta / m^2 \quad (4-6)$$

Il faut savoir que la méthode est approximative puisque d'une part les sections varient rapidement et d'autre part la ligne moyenne est rarement verticale. Cependant dans la plupart des cas ces approximations paraissent justifiées.

Les contraintes normales admissibles dans le béton doivent vérifier certaines conditions :

- pour qu'il n'y ait pas d'extension (contraintes de traction nulle) il faudrait que $\sigma_{ya} \geq 0$ soit $m \geq (\delta / \Delta)^{1/2}$

- conserver au niveau du parement amont une contrainte normale suffisante pour qu'en cas d'infiltration ou de fissure le calcul précédent ne soit pas remis en cause. Pour cela il suffirait, en introduisant un coefficient correcteur r ($0 < r < 1$), de vérifier que $\sigma_{ya} \geq r \cdot \delta \cdot y$ soit $m \geq [\delta / (\Delta - r \cdot \delta)]^{1/2}$

Nous avons calculé les contraintes σ_{ya} , σ_{yb} sur les joints horizontaux qui ne sont pas nécessairement les contraintes maximales. Nous savons qu'il existe, dans un corps élastiquement déformé, deux directions privilégiées suivant lesquelles les contraintes sont maximales et minimales soit A et B. Nous aurons alors :

- sur le parement amont

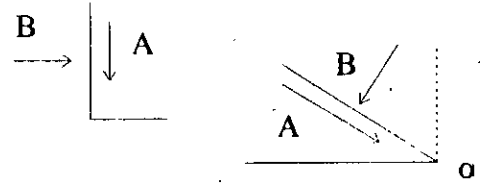
$$A = H(\Delta - \delta / m^2)$$

$$B = \delta H$$

- sur le parement aval

$$A = \delta H / \sin^2 \alpha$$

$$B = 0$$



	Contraintes
section quelconque	$\sigma_y = 0.5y\Delta + [2\delta / m^3 - \Delta / m]y$
parement amont	$\delta_{ya} = H(\Delta - \delta / m^2)$ $A = H(\Delta - \delta / m^2)$ $B = \delta H$
parement aval	$\sigma_{yb} = H\delta / m^2$ $A = \delta H / \sin^2 \alpha$ $B = 0$

3-2 Méthode dérivée de la théorie de l'élasticité. (Méthode de Pigeaud)

En appliquant la théorie de l'élasticité au triangle théorique on peut, mieux que par la résistance des matériaux, déterminer les contraintes pour des plans autres que les horizontaux.

1/ Une solution analytique, exacte et simple, découlant des équations de l'élasticité, existe pour un barrage à profit triangulaire. On trouve alors des expressions linéaires pour chacune des composantes du tenseur des contraintes en un point.

Cette solution vérifie les conditions aux limites sur le parement amont et sur le parement aval, mais elle est indépendante des conditions d'appui.

Pour le barrage triangulaire (Fig 4 - 7), On a :

Δ : masse volumique du béton .

δ : masse volumique de l'eau .

σ_x : contrainte normale suivant l'axe x .

σ_y : contrainte normale suivant l'axe y .

τ_{xy} : contrainte tangentielle .

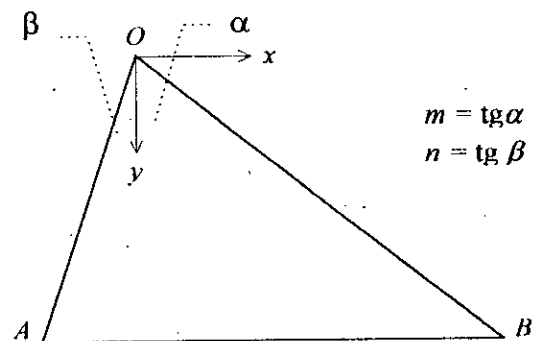


Fig 4 - 7

$$m = \text{tg } \alpha$$

$$n = \text{tg } \beta$$

Les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} peuvent s'exprimer linéairement en x et y par :

$$\sigma_x = a_1 x + b_1 y$$

$$\sigma_y = a_2 x + b_2 y$$

$$\tau_{xy} = c x + d y$$

Les coefficients a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , c et d dépendent des conditions aux limites. Leur détermination nécessite six équations.

Pour cela exprimons :

- Les équations d'équilibre élastique :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \Delta$$

soit: $a_1 + d = 0$

$$c + b_2 = 0$$

- Les équations d'équilibre élastique :

Sur le parement amont :

$$X = \delta y \cos \beta$$

$$Y = \delta y \sin \beta$$

soit : $X = \sigma_x \cos \beta + \tau_{xy} \sin \beta = \delta y \cos \beta$

$$Y = \tau_{xy} \cos \beta + \sigma_y \sin \beta = \delta y \sin \beta$$

d'où : $\sigma_x + n \tau_{xy} = \delta y$

$$\tau_{xy} + n \sigma_y = \delta n y$$

Sur le parement aval :

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

soit : $X = -\sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = 0$

$$Y = -\tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = 0$$

d'où : $\sigma_x - m \tau_{xy} = 0$

$$\tau_{xy} - m \sigma_y = 0$$

Ainsi nous aurons le système suivant à résoudre :

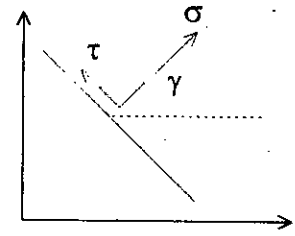
$$\sigma_x + n \tau_{xy} = \delta y$$

2 / Contraintes principales :

Les contraintes en un point M par rapport à une section d'angle γ sont données par :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\gamma + 2\tau_{xy} \cdot \sin 2\gamma$$

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot \sin 2\gamma + \tau_{xy} \cdot \cos 2\gamma$$



Les contraintes principales sont caractérisées par un angle ψ tel que la contrainte soit maximale ou minimale, pour cela nous aurons $\tau = 0$ et donc :

$$\operatorname{tg} 2\psi = 2(\tau_{xy}) / (\sigma_x - \sigma_y).$$

En évaluant $\cos 2\psi$ et $\sin 2\psi$ à partir de $\operatorname{tg} 2\psi$, les contraintes principales au point M s'écrivent :

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + 0,5 \cdot [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} \quad (4-10)$$

$$B = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - 0,5 \cdot [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2} \quad (4-11)$$

3 / Conditions de non extension et de Maurice Levy

La condition de non extension vise à l'élimination des contraintes de traction $\sigma_x > 0$.

La condition de Maurice Levy impose qu'en tout point du parement amont, σ_y soit supérieur à δ_y .

4 / Lignes caractéristiques

La méthode de calcul des contraintes nous permet d'obtenir différents lignes caractéristiques (égales compression, isostatiques ...). Cela nous permet de connaître la répartition des contraintes de notre barrage et de déceler ainsi les parties du barrage soumises aux contraintes les plus élevées.

a) - Courbes d'égale compression

Ces courbes joignent les contraintes maximales de même intensité, elles sont déduites par homothétie (Fig 4 - 9).

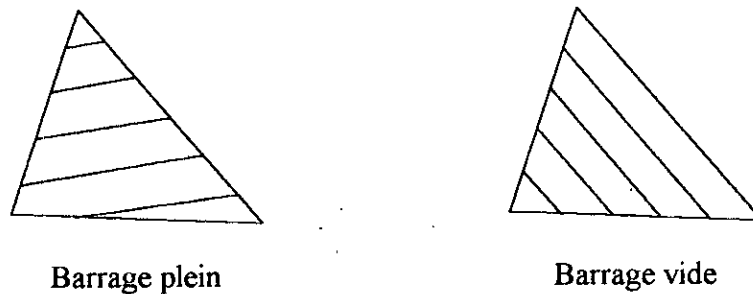


Fig 4 - 9 Courbes d'égaies compression

b) - Lignes isostatiques

Elles sont réalisées en traçant des lignes tangentes en chaque point à l'une des deux contraintes principales, et sont de deux espèces :

- Lignes isostatiques de première espèce pour des tangentes aux compressions max.
- Lignes isostatiques de deuxième espèce pour des tangentes aux compressions min.

L'équation différentielle dont les solutions donnent les courbes « Orthogonales » (isostatiques de 1^{ère} espèce et 2^{ème} espèce) est donnée par :

$$\tau_{xy} (dy/dx)^2 + (\sigma_x - \sigma_y) dy/dx = \tau_{xy}$$

Celle-ci nous donne les résultats suivants :

- Réservoir plein :

1 / Si la condition de Maurice Levy est satisfaite, alors le parement amont est une isostatique de première espèce, ainsi que pour le parement aval, les isostatiques de deuxième espèce sont perpendiculaires (Figure 4 - 10a).

2 / Si elle n'est pas satisfaite, le parement amont est une isostatique de deuxième espèce, le parement aval est une isostatique de première espèce, les lignes isostatiques de deuxième espèce partent du parement amont et coupent perpendiculairement le parement aval (figure 4 - 10b).

- Réservoir vide :

Le parement amont est une isostatique de première espèce ainsi que le parement aval. Les isostatiques de deuxième espèce les coupent perpendiculairement (Fig 4 - 10 c).

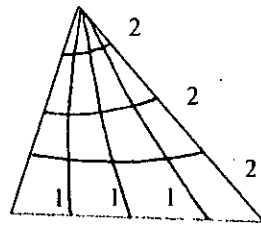


Fig 4 - 10 - a

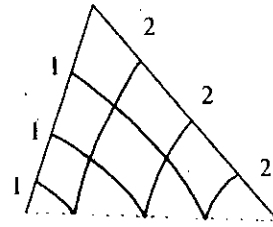


Fig 4 - 10 - b

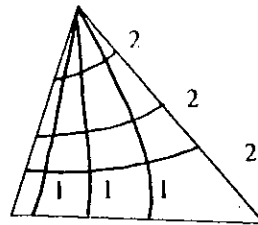


Fig 4 - 10 - c

3.3 Application au barrage de l'oued Fodda.

1 / D'après la formule des contraintes établie par la RDM (4 - 4) pour un profil triangulaire, σ_y s'exprime comme suit :

$$\sigma_y = 0,5 \cdot \Delta y + \left[\frac{2\delta}{m^3} - \frac{\Delta}{m} \right] V$$

Les caractéristiques de l'oued Fodda nous donnent :

$$\sigma_y = (12y + 25,17V) \quad (\text{KN} / \text{m}^2)$$

V varie de $-my/2$ à $+my/2$.

2 / L'expression de σ_y par la théorie de l'élasticité (4 - 8) est donnée par :

$$\sigma_y = \left(\frac{2\delta}{m^3} - \frac{\Delta}{m} \right) x + \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} \right) y$$

Pour l'oued Fodda on a :

$$\sigma_y = (25,17x + 0,29y) \quad (\text{KN} / \text{m}^2)$$

x varie de 0 à my .

4- ETUDE DES DEFORMATIONS

4-1 Calcul des déformations par résistance des matériaux

La charge due à la pression hydrostatique est :

$$q = \delta y$$

l'effort tranchant est :

$$T = \int q dy = \frac{\delta y^2}{2}$$

le moment :

$$M = \int T dy = \frac{\delta y^3}{6}$$

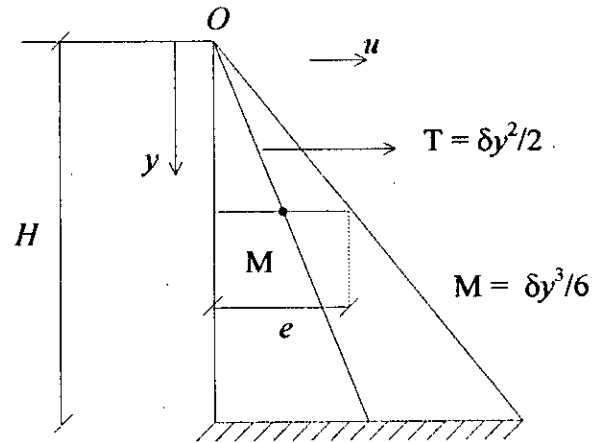


Fig 4 - 11

Soit ω la rotation de la fibre moyenne, comptée positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

$$\frac{d\omega}{dy} = \frac{M}{EI} \quad \text{avec} \quad I = \frac{e^3}{12} = \frac{m^3 y^3}{12}$$

$$E\omega = \int \frac{\delta y^3}{6} \cdot \frac{12}{m^3 y^3} dy = \frac{2\delta}{m^3} \int dy = \frac{2\delta}{m^3} y + c$$

$$\text{Pour } y = h \quad \omega = \omega_1 = 0 \quad c = \frac{-2\delta H}{m^3} = E\omega_0$$

le déplacement est donné par :

$$u = u_0 + \omega_0 y + \int_0^y \frac{M}{EI} (y-b) db - \int_0^y \frac{T}{GS} db$$

$$E(u - u_0) = \frac{-2\delta}{m^3} Hy + \frac{2\delta}{m^3} \int_0^y (y-b) db - \frac{\delta E}{2mG} \int b db$$

$$E(u - u_0) = \frac{-2\delta}{m^3} Hy + \frac{2\delta}{m^3} (y^2 - y^2/2) - \frac{\delta}{4m} \cdot \frac{E}{G} y^2$$

$$E(u - u_0) = \frac{2\delta}{m^3} \left(\frac{y^2}{2} - Hy \right) - \frac{\delta}{4m} \cdot \frac{E}{G} y^2$$

Pour $y = H$ $u = u_1 = 0$

$$E(u_1 - u_0) = \frac{-2\delta}{m^3} \cdot \frac{H^2}{2} + \frac{\delta}{4m} \cdot \frac{E}{G} H^2$$

et en retranchant membre à membre

$$EU = \frac{\delta}{m^3} \cdot (H - y)^2 + \frac{\delta}{4m} \cdot \frac{E}{G} (H^2 - y^2) \quad (4-12)$$

Enfin la flèche au sommet est donnée par

$$Ef = \left(\frac{\delta}{m^3} + \frac{\delta}{4m} \cdot \frac{E}{G} \right) \cdot H^2 \quad (4-13)$$

Remarque : On n'a pas tenu compte de l'effet du poids de l'ouvrage, appliqué une fois pour toutes. L'effet de la pression donnera les déplacements entre retenue vide et retenue pleine.

4-2 Calcul des déformations par la théorie de l'élasticité

Nous partons des formules de déformation :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \right. \\ (2) \quad & \left. \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \right. \\ (3) \quad & \left. \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \right. \end{aligned} \quad (4-14)$$

Où les contraintes σ_x , σ_y , τ_{xy} ont les valeurs :

$$\begin{cases} \sigma_x = \delta y \\ \sigma_y = -\left(\Delta - 2 \frac{\delta}{m^2} \right) \frac{x}{m} + \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} y \right) \\ \tau_{xy} = \frac{\delta}{m^2} x \end{cases} \quad (4-15)$$

Les premières équations aux dérivées partielles s'intègrent :

$$U = U(y) - \frac{1}{E} \int (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx$$

$$V = V(x) - \frac{1}{E} \int (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy$$

Dérivons et portons dans (3) :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dU}{dy} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{E} \cdot \int (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dx} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{E} \cdot \int (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy$$

$$(3) \quad E \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -2(1+\nu)\tau_{xy} + \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dx + \int \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dy$$

On vérifie que le deuxième membre est de la forme $F(x) + G(y)$, Or U est fonction de y seulement et V fonction de x seulement.

L'équation se scinde en deux et s'intègre facilement :

$$\begin{cases} EU = a + cy + \int G(y) dy \\ EV = b - cx + \int F(x) dx \end{cases}$$

On a d'ailleurs d'après les formules (4 - 15) :

$$F(x) = \int \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dx = \int \left[\delta - \nu \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} \right) \right] dx = \left[\delta - \nu \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} \right) \right] \cdot x$$

$$G(y) = \int \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) dy = \int \left[-\left(\Delta - 2 \frac{\delta}{m^2} \right) \right] \frac{dy}{m} = - \left[\Delta - 2 \frac{\delta}{m^2} \right] \cdot \frac{y}{m}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} EU = a + cy - \left(\Delta - 2 \frac{\delta}{m^2} \right) \cdot \frac{y^2}{2m} \\ EV = b - cx + \left[\delta \left(1 - \frac{2}{m^2} \right) - \nu \left(\Delta + \frac{\delta}{m^2} \right) \right] \cdot \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Il nous reste de calculer les intégrales :

$$\int (\sigma_x - \nu \sigma_y) dx = \nu \left(\Delta - 2 \frac{\delta}{m^2} \right) \frac{x^2}{2m} + \left[\delta - \nu \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} \right) \right] \cdot xy$$

$$\int (\sigma_y - \nu \sigma_x) dy = - \left(\Delta - 2 \frac{\delta}{m^2} \right) \frac{xy}{m} + \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} - \nu y \right) \cdot \frac{y^2}{2}$$

Finalement, nous avons les équations des déplacements U et V, comme une forme quadratique en x et y et avec trois constantes d'intégration arbitraire a, b, c.

$$\begin{cases} EU = a + cy - \nu \left(\Delta - \frac{2\delta}{m^2} \right) \cdot \frac{x^2}{2m} - \left[\delta - \nu \left(\Delta - \frac{2\delta}{m^2} \right) \right] \cdot xy - \left(\Delta - \frac{2\delta}{m^2} \right) \frac{y^2}{2m} \\ EV = b - cx + \left[\delta \left(1 - \frac{\delta}{m^2} \right) - \nu \left(\Delta + \frac{\delta}{m^2} \right) \right] \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\Delta - \frac{2\delta}{m^2} \right) \frac{xy}{m} - \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} - \nu \delta \right) \frac{y^2}{2} \end{cases} \quad (4 - 16)$$

Pour déterminer les constantes a, b, c nous supposons :

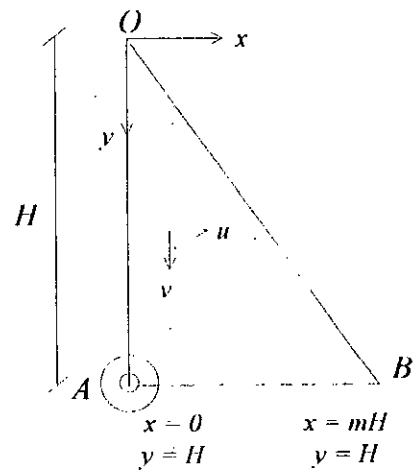
- Le pied du parement amont fixe :

$$U = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ } y = H$$

$$V = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ } y = H$$

- La ligne AB comme ligne de référence :

$$V = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ } y = H$$



Ce qui donne :

Fig 4 - 12

$$\begin{cases} a = \frac{-\Delta H^2}{2} \left(\frac{1}{m} - \nu m \right) - \delta H^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{2+\nu}{2m} - \frac{1}{m^3} \right) \\ b = \left(\Delta - \frac{\delta}{m^2} - \nu \delta \right) \frac{H^2}{2} \\ c = \Delta \left(\frac{1}{m} - \frac{\nu m}{2} \right) H + \delta \left(\frac{m}{2} - \frac{2+\nu}{m} - \frac{2}{m^3} \right) H \end{cases}$$

En faisant $\delta = 0$, on obtient la valeur des coefficients a' , b' , c' correspondante au cas de la réserve vide.

$$\begin{cases} a' = \frac{-\Delta H^2}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{\nu m}{2} \right) \\ b' = \frac{\Delta H^2}{2} \\ c' = \Delta H \left(\frac{1}{m} - \frac{\nu m}{2} \right) \end{cases}$$

Partant de l'état sans tension on obtient pour la réserve vide des déplacements U' , V' ; puis pour la réserve pleine des déplacements U , V . Les déplacements relatifs, correspondant au remplissage, sont $U-U'$, $V-V'$ ce sont les seuls qui aient un sens physique : U et V .

Pour déterminer U et V on remplace dans (4-16) :

- a par $(a - a')$
- b par $(b - b')$
- c par $(c - c')$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} EU = -\delta H^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{2+\nu}{2m} - \frac{1}{m^3} \right) + \delta \left(\frac{m}{2} - \frac{2+\nu}{2m} - \frac{2}{m^3} \right) \cdot Hy \\ + \frac{\nu\delta}{m^3} x^2 - \delta \left(1 - \frac{\nu}{m^2} \right) \cdot xy + \frac{\delta}{m^3} y^2 \end{aligned} \quad (4-17)$$

$$\begin{aligned} EV = \frac{-\delta H^2}{2} \left(\nu + \frac{1}{m^2} \right) - \delta \left(\frac{m}{2} - \frac{2+\nu}{2m} - \frac{2}{m^3} \right) \cdot Hx \\ + \delta \left(1 - \frac{2+\nu}{m^2} \right) \frac{x^2}{2} - \frac{2\delta}{m^3} xy + \delta \left(\nu + \frac{1}{m^2} \right) \frac{y^2}{2} \end{aligned} \quad (4-18)$$

Par le couronnement ($x = 0$; $y = 0$) les déplacements seront :

$$U_r = \frac{\delta H^2}{E} \cdot \left(\frac{2+\nu}{2m} - \frac{m}{2} + \frac{1}{m^3} \right) \quad (4-19)$$

$$V_f = -\frac{\delta}{E} \cdot \left(\nu + \frac{1}{m^3} \right) \frac{H^2}{2} \quad (4-20)$$

Remarque : Δ ne figure pas dans ces déplacements : ce sont en effet les déplacements relatifs résultant de l'action de la seule pression hydrostatique.

4-3 Application au barrage de l'oued Fodda

1 / Nous pouvons déterminer le déplacement horizontal d'un point du barrage en utilisant les formules établies par la RDM (4-12) et (4-13) :

$$EU = \frac{\delta}{m^3} \cdot (H-y)^2 + \frac{\delta}{4m} \cdot \frac{E}{G} (H^2 - y^2)$$

et la flèche au sommet est donnée par :

$$Ef = \left(\frac{\delta}{m^3} + \frac{\delta}{4m} \cdot \frac{E}{G} \right) \cdot H^2$$

Pour le barrage de l'oued Fodda on a :

$$U = \left(1,217 \cdot (90 - y)^2 + 0,4125 \cdot (8100 - y^2) \right) \cdot 10^{-6} \quad (m)$$

$$f = 0,0132 \quad m$$

2 / Les formules de déformations établies par la théorie de l'élasticité (4-17) et (4-18) pour un profil triangulaire sont :

$$EU = -\delta H^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{2+\nu}{2m} - \frac{1}{m^3} \right) + \delta \left(\frac{m}{2} - \frac{2+\nu}{2m} - \frac{2}{m^3} \right) \cdot Hy \\ + \frac{\nu\delta}{m^3} x^2 - \delta \left(1 - \frac{\nu}{m^2} \right) \cdot xy + \frac{\delta}{m^3} y^2$$

$$U_f = \frac{\delta H^2}{E} \cdot \left(\frac{2+\nu}{2m} - \frac{m}{2} + \frac{1}{m^3} \right)$$

En appliquant cela au barrage de l'oued Fodda on obtient :

$$\text{pour } x = 0 \quad U = (144 - 2,698 y + 0,01216 y^2) \cdot 10^{-4} \quad (m)$$

U représente la déformation du parement amont

$$\text{et} \quad U_f = 0,0144 \quad m = 1,44 \quad cm$$

5 - APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS AU BARRAGE DE L'OUED FODDA

Après application de nos programmes informatiques sur la console, nous nous proposons d'appliquer ces derniers au barrage de l'oued Fodda. Nous analyserons le barrage en statique puis en dynamique.

Dans le premier traitement nous considérons deux cas, selon que l'on fasse intervenir ou pas la masse du barrage, et ce afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux des méthodes classiques.

Dans le second traitement nous introduirons successivement comme chargements d'excitation, deux enregistrements accélérométriques d'intensité différentes:

- la réplique d'El-Asnam enregistré le 29 novembre 1980
- l'accélérogramme d'El-Centro du 18 mai 1940.

En ce qui concerne ces accélérogrammes, nous avons utilisé celui d'El-Centro car il nous a permis de valider notre subroutine de calcul de la réponse. Pour El-Asnam, la proximité de l'épicentre relativement à l'emplacement du barrage a été la principale raison de ce choix.

Il est à signaler que seule la force d'inertie du barrage sera prise en considération lors de l'analyse dynamique. Nous supposons que la rigidité de la structure ne varie pas au cours du temps.

Pour notre travail, le barrage est considéré sous une forme triangulaire. Ses caractéristiques et ses dimensions ont été données. Le cas pris en compte pour cette étude est celui de déformations planes. Ceci s'explique par la dominance d'une des dimensions du barrage relativement aux deux autres.

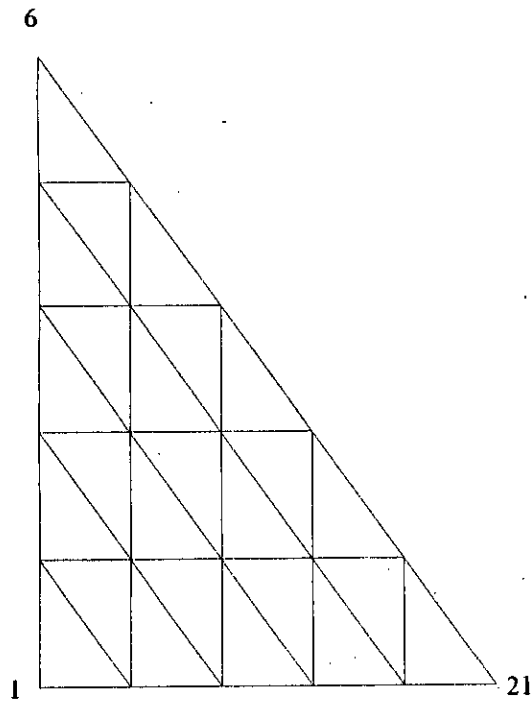
L'étude du barrage par la méthode des éléments finis se fera à l'aide de quatre modélisations.

La discussion sera basée sur les déplacements horizontaux compte tenu de leur importance pour le calcul des barrages, notamment en parasismique.

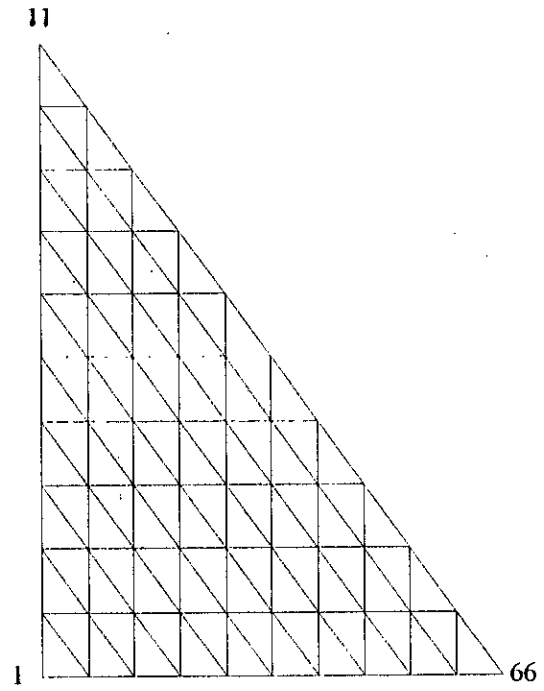
5-1 Etude statique du barrage de l'Oued Fodda

Nous allons procéder au travers de cette partie à une étude du barrage de l'Oued Fodda dans le cas statique. Celle-ci se fera en terme de déplacements et en terme de contraintes.

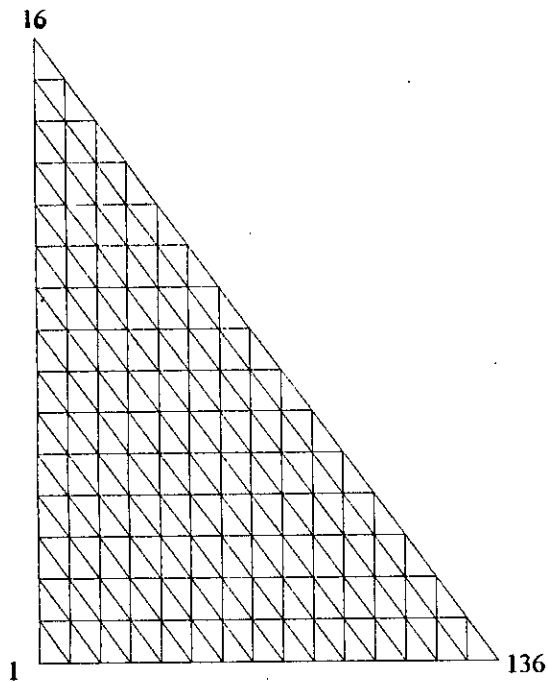
Nous donnons ci-après les différentes discrétisations utilisées pour l'études du barrage.



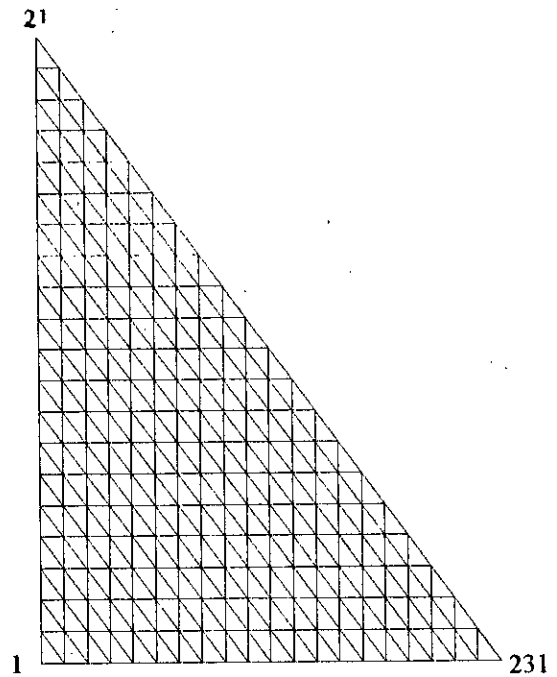
(a) 21 noeuds , 25 éléments



(c) 66 noeuds , 100 éléments



(d) 136 noeuds , 225 éléments



(d) 231 noeuds , 400 éléments

Fig 4 - 13 : Modélisation utilisées pour le barrage de Oued Fodda.

Nombre d'éléments	Déplacement horizontale (mm)	
	avec poids	sans poids
25	7,206	10,638
100	8,756	13,110
225	9,235	13,854
400	9,442	14,182
R.D.M		13,070
Elasticité		14,310

Tableau 4 - 1 : *Déplacements horizontaux de la crête du barrage*

Pour le cas du barrage poids considéré, les déplacements horizontaux sont obtenus à l'aide de différents procédés ; en utilisant la théorie de l'élasticité, la théorie de la résistance des matériaux et la méthode des éléments finis.

Les solutions des déplacements résultantes de la théorie de la résistance des matériaux et de la théorie de l'élasticité sont valables pour toute la masse du barrage. On remarque la masse volumique du barrage n'y figure pas : ce sont en effet les déplacements relatifs résultant de l'action de la seule pression hydrostatique.

La méthode des éléments finis nous permet de déterminer ces mêmes déplacements en considérant la masse du barrage ou en la négligeant. Ainsi les résultats peuvent être comparés. Ils sont représentés par la figure (4 - 14).

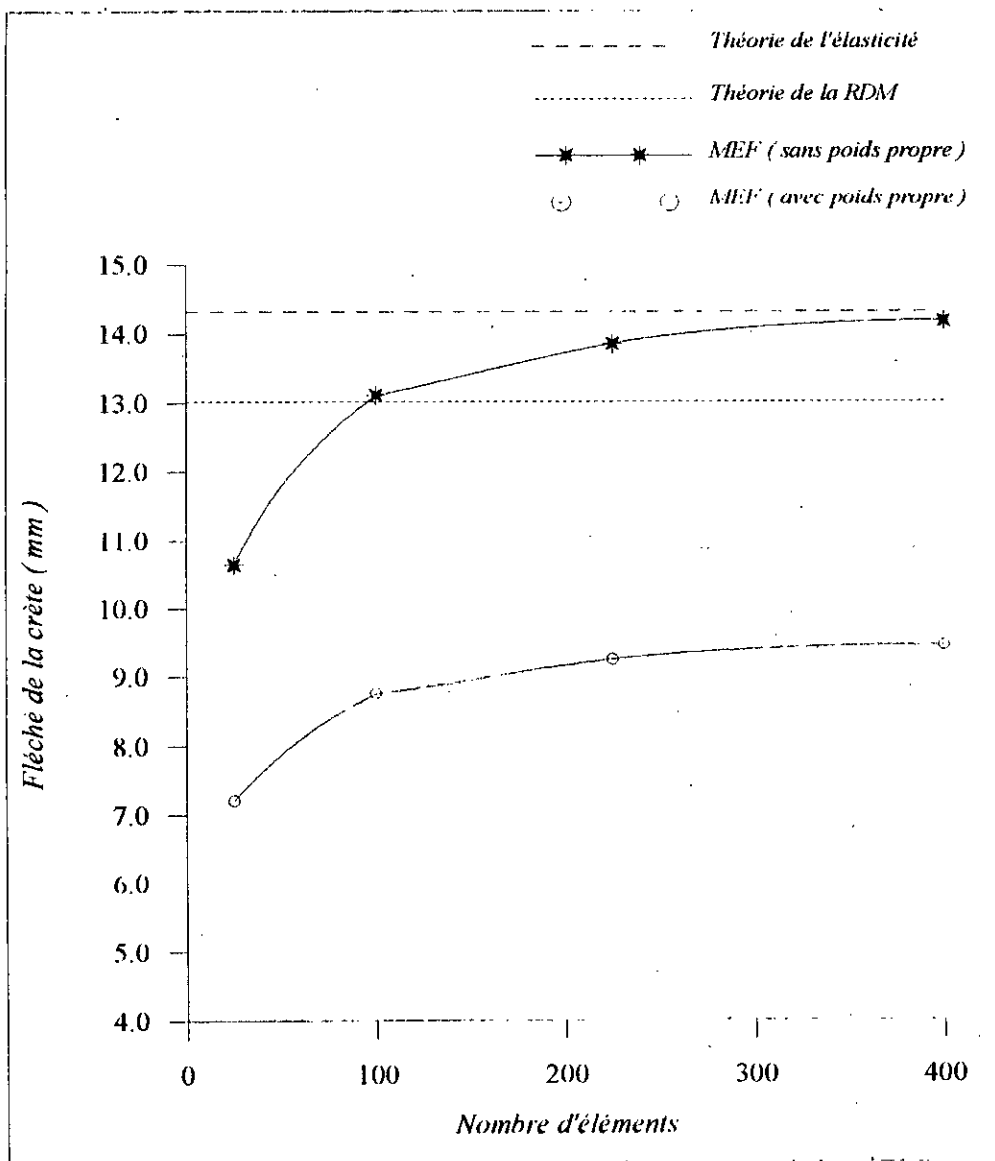


Fig 4 - 14 : courbes de convergence du déplacement horizontal de la crête.

Par la figure (4 - 14), on voit que la méthode des éléments finis atteint et dépasse assez rapidement la solution R.D.M. Par contre, dans chaque cas elle entraîne une sous estimation de la solution exacte qui diminue jusqu'à l'approcher lorsque l'on affine la subdivision. Comme cela a été dit pour le cas de la poutre, il est toujours recommandé, pour n'importe quel problème d'utiliser plusieurs modélisations afin de vérifier que la solution converge lorsque l'on augmente le nombre d'éléments.

Selon les deux cas représentés (avec et sans masse), les solutions convergent mais pour le cas d'un barrage poids, qui comme son nom l'indique résiste à la pression hydrostatique par son poids, il serait donc plus rigoureux de considérer le déplacement du barrage sous son poids propre et sous la pression hydrostatique, même si l'autre cas nous place dans la sécurité.

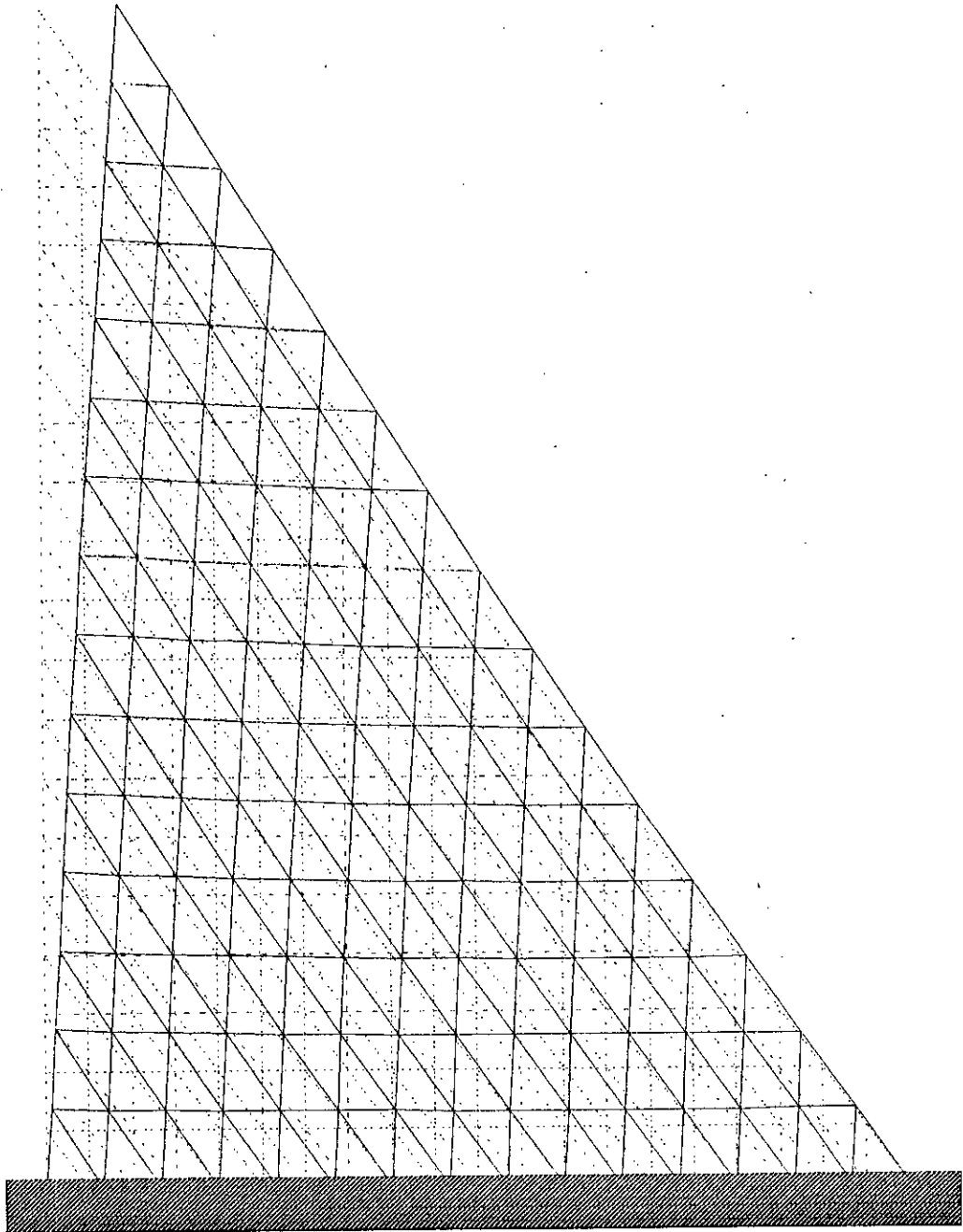


Fig 4 - 15 : Représentation de la déformée finale du barrage de l'Oued Fodda sous l'action de son poids propre et de l'eau.

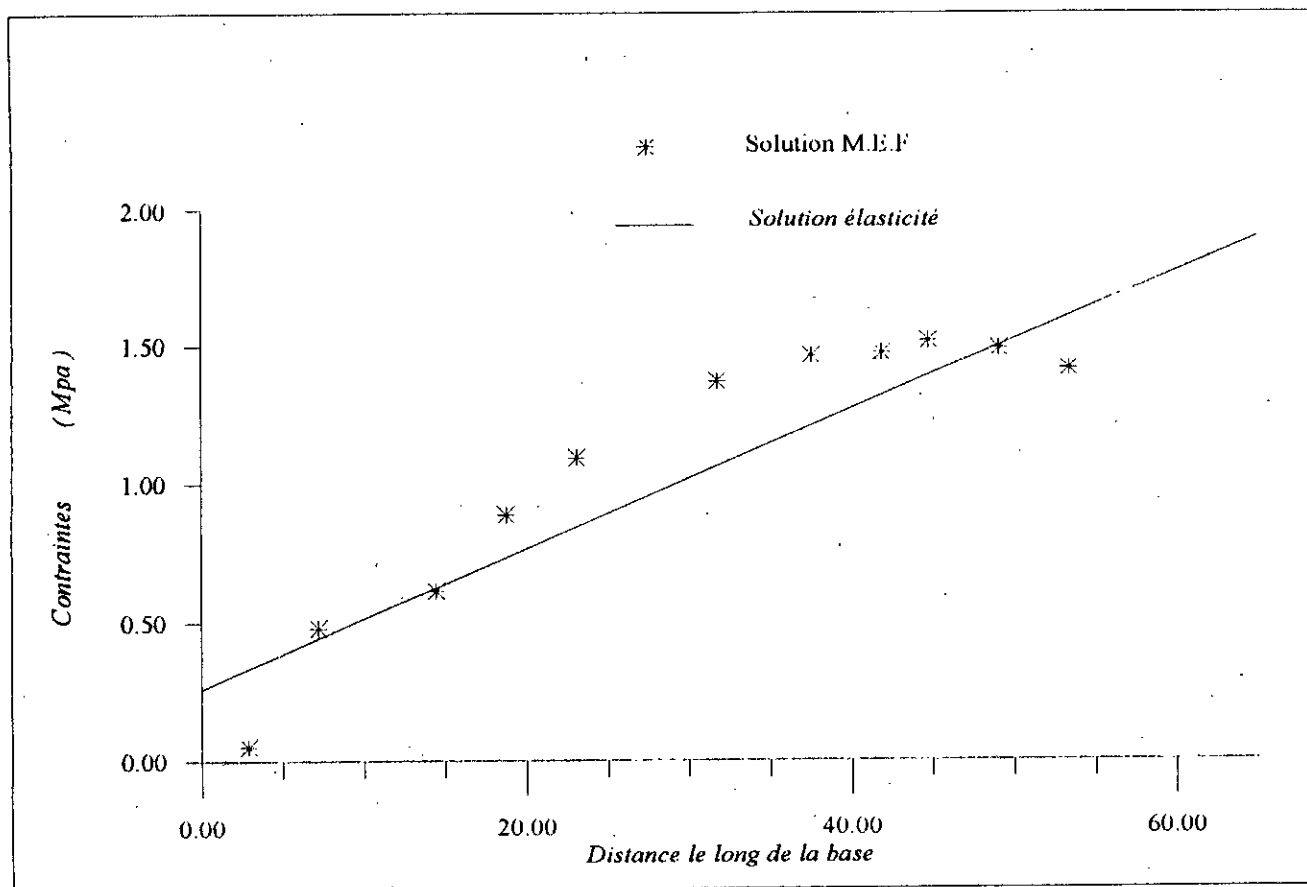


Fig 4 - 16 : Représentation des contraintes longitudinales à la base du barrage.

Les résultats présentés ci-dessus nous permettent d'évaluer la précision de la méthode des éléments finis lors des calculs des contraintes et cela pour un cas réelle. Les contraintes considérées sont celles obtenues à la base du barrage. En effet les contraintes longitudinales maximales se situent à la base.

A travers la figure (4 - 15), on voit que les contraintes obtenus par la méthode des éléments finis sont dispersées au-dessus et au-dessous de la solution exacte. Parfois la différence est assez élevé mais de manière générale l'ordre de grandeur est respecté, ainsi que la répartition.

Ceci pourrait s'expliquer par le fait que l'approche prise en compte pour l'étude de ce barrage par la méthode des éléments finis est une approche déplacement. En effet ce type d'approche favorise la précision des déplacements et non celle des contraintes.

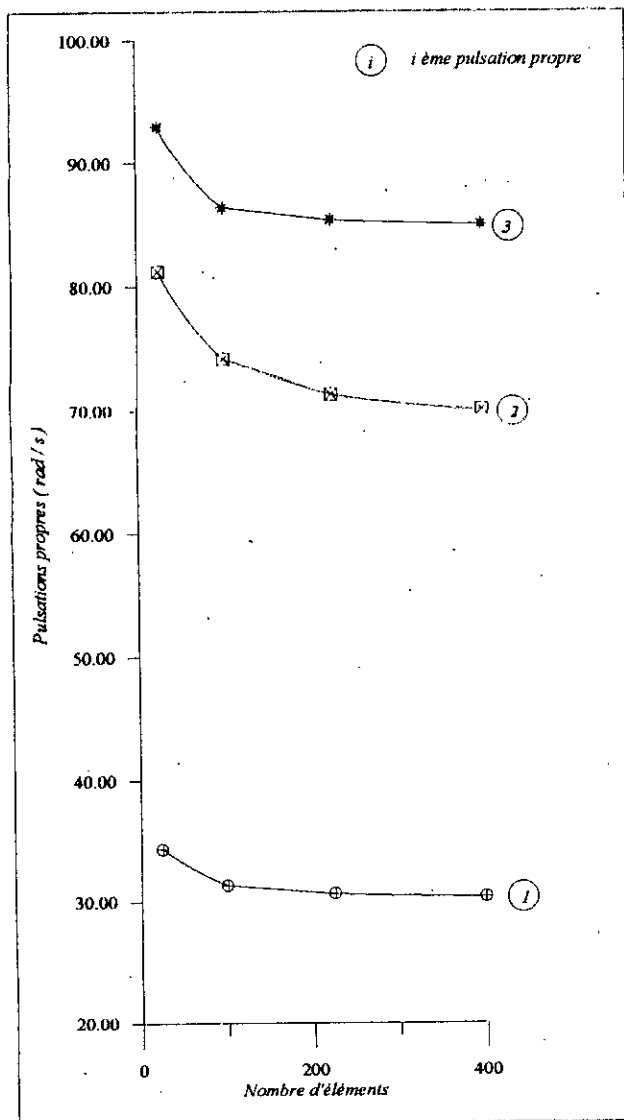
On peut dire que les contraintes obtenues par la méthode des éléments finis lors de l'étude de ce barrage ne sont pas très précises, et qu' il serait plus recommandé d'aborder ce problème par une approche contrainte qui nous donnera certainement de meilleurs résultats .

5-2 Etude dynamique du barrage de l'Oued Fodda

Le programme informatique *Dyn* établi, nous permet de déterminer les valeurs et vecteur propres. Ainsi, nous pouvons représenter les courbes de convergences des pulsations propres et les déformées des principaux modes de vibration du barrage.

Le cas considéré est celui de déformation plane en retenue vide, soit seule la force d'inertie du barrage intervient (pas d'interaction fluide-structure, sol-structure).

A ce même barrage nous appliquerons deux accélérogrammes, comme cité précédemment, afin d'obtenir les différentes réponses en déplacement correspondantes.

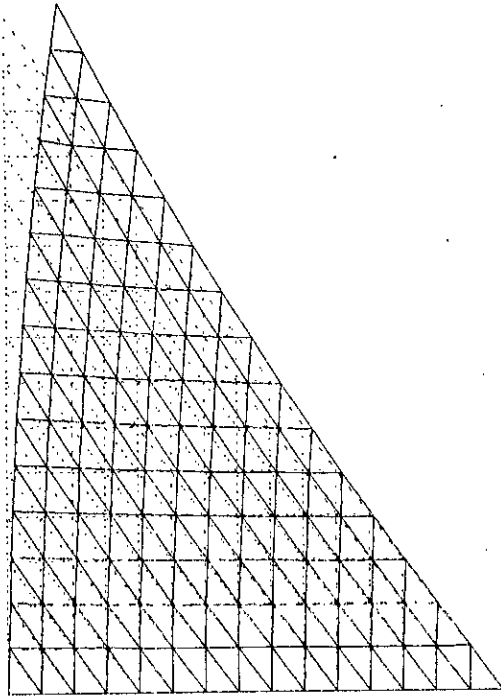


Mode Nr	ω_i (rad / s)
1	30,34
2	70,07
3	85,04

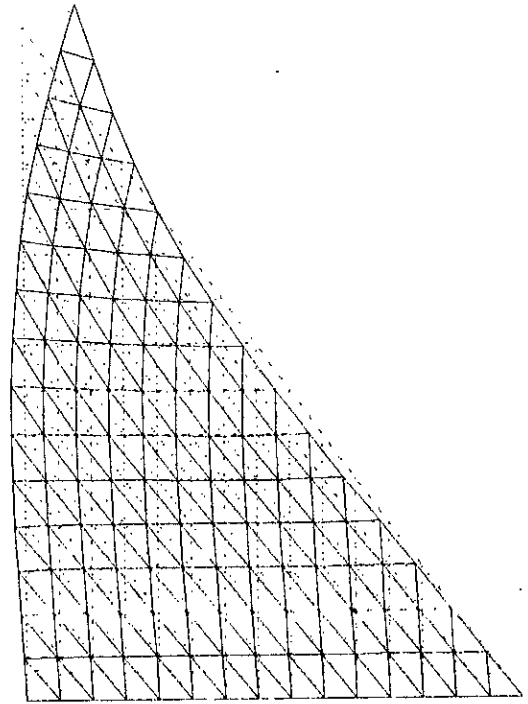
Tableau 4 - 2 : Valeurs des trois premières pulsations propres données par la troisième modélisation.

La figure (4 - 17) nous montre la convergence des trois premières pulsations propre. La plus petite des valeurs converge en premier. Ceci s'explique par le choix de la méthode de calcul qui est une méthode itérative et au fait que l'erreur relative augmente avec les valeurs.

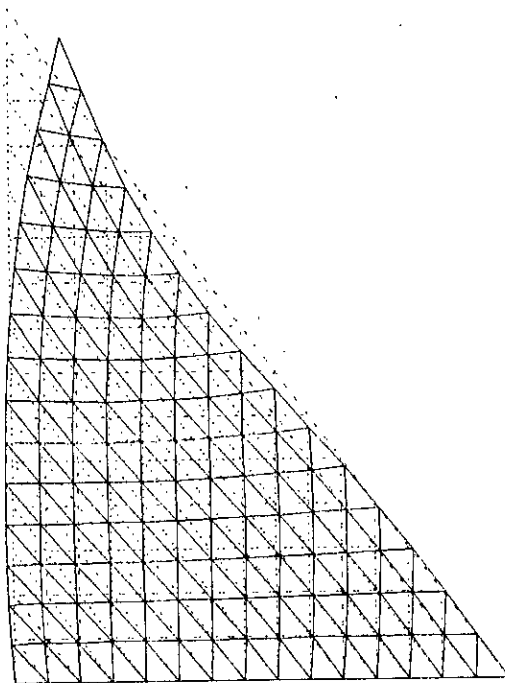
Fig 4.- 17 : Convergence des trois premières pulsations propres.



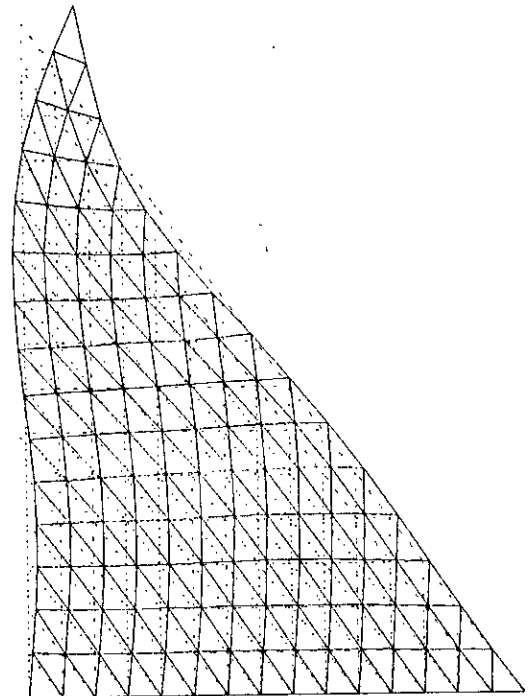
Mode 1 $\omega = 30,35 \text{ rad / s}$



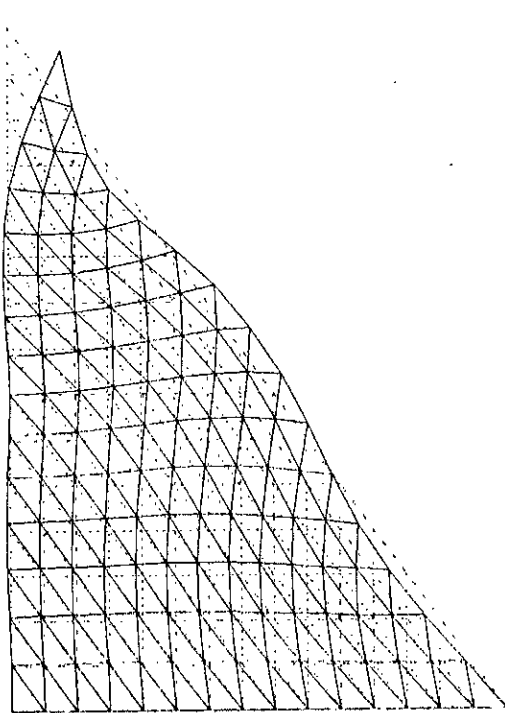
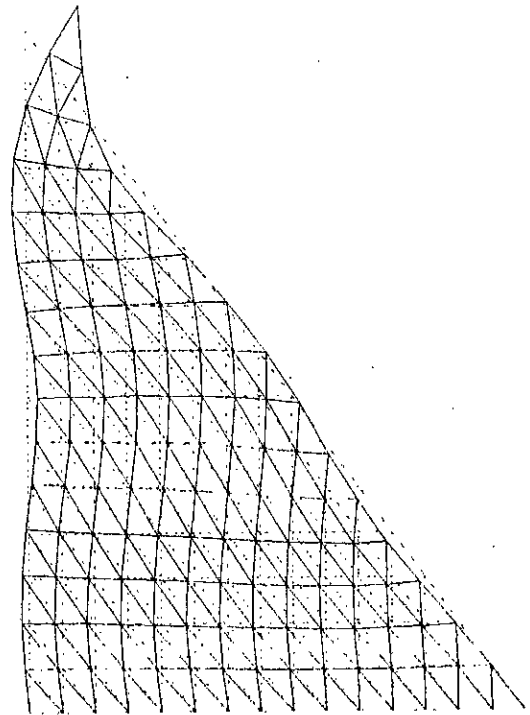
Mode 2 $\omega = 70,07 \text{ rad / s}$



Mode 3 : $\omega = 85,04 \text{ rad / s}$



Mode 4 : $\omega = 122,97 \text{ rad / s}$

Mode 5 : $\omega = 180,05 \text{ rad / s}$ Mode 6 : $\omega = 187,12 \text{ rad / s}$

Nous avons présenté les déformées des six premiers modes pour une modélisation (136 noeuds, 225 éléments). On peut différencier ces modes selon que leurs déformées suivent l'horizontale ou la verticale. On parlera de « mode horizontal » lorsque les déplacements horizontaux sont prépondérants par rapport aux déplacements verticaux, et de « mode vertical » lorsque les noeuds se déplacent suivant la verticale uniquement.

Il est à noter que pour le calcul des vecteurs propres qui nous donnent les déformées modales, nous avons fait de telle manière que l'amplitude maximale de chaque vecteur soit égale à l'unité. En effet la précision numérique sera meilleure si on fait correspondre le déplacement unité à la composante qui a la plus grande amplitude de déplacement. Pour cela, le vecteur est normalisé en divisant toutes les composantes par une composante de référence (la plus grande).

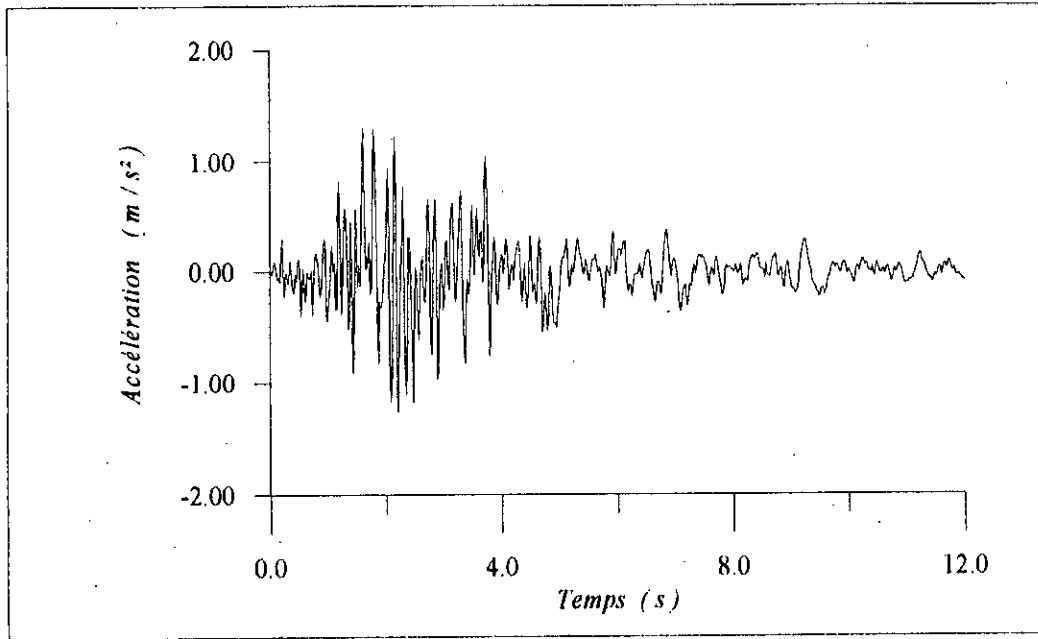


Fig 4 - 18 : Accélérogramme d'El Asnam.

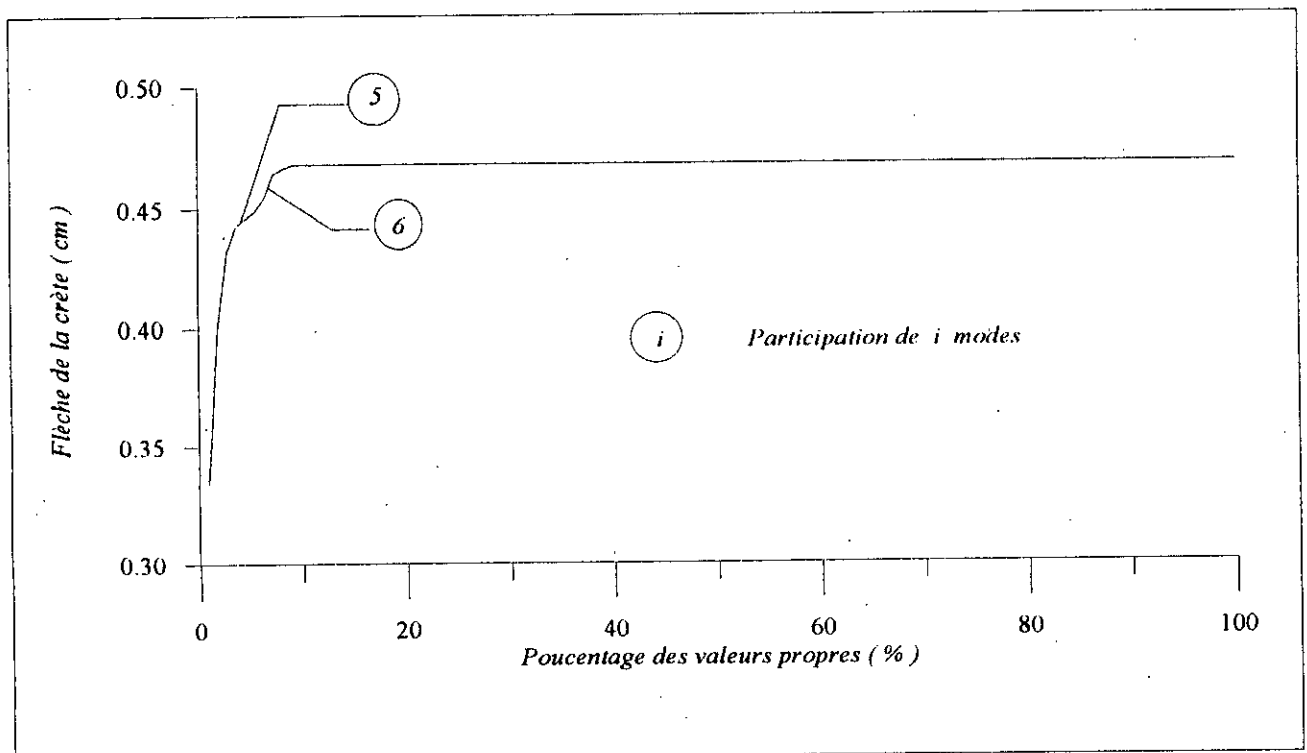


Fig 4 - 19 : Pourcentage de contribution des modes pour l'accélérogramme d'El-Asnam.

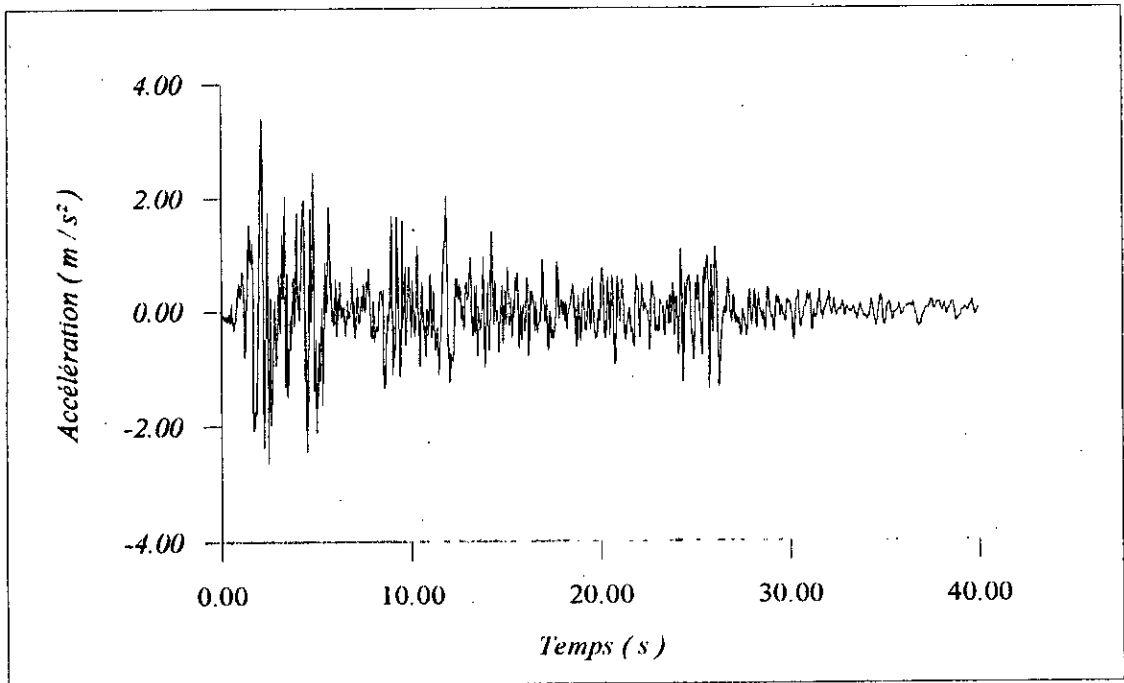


Fig 4 - 20 : Accélérogramme d'El Centro du 18 mai 1940

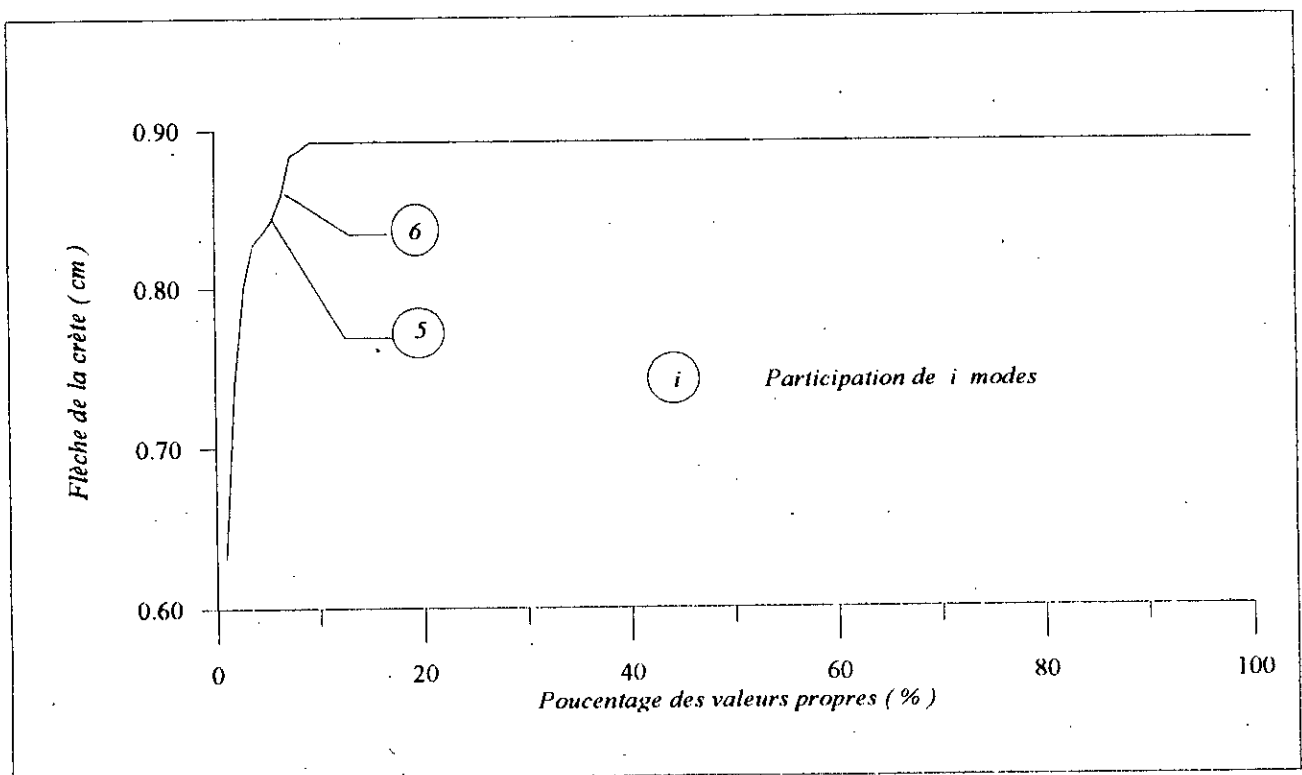


Fig 4 - 21 : Pourcentage de contribution des modes.
pour l'accélérogramme d'El-Centro

Nous avons appliqué au barrage de l'Oued Fodda les accélérogrammes d'El-Asnam et d'El-Centro. Nous avons obtenu les réponses de la flèche du barrage pour une modélisation (136 noeuds, 225 éléments). Pour cela, nous avons considéré différentes participation des modes et les résultats sont donnés par les figures (4 - 18) et (4 - 20).

Pour les quatre premiers modes, on voit que la flèche augmente considérablement avec le pourcentage de modes considérées. Cela est dû au fait que les premiers modes sont les plus prépondérants.

Par contre au niveau du pourcentage (%) de modes considérés, on remarque une faible diminution du déplacement. Ceci s'explique par le fait que le cinquième mode (5^e) est un mode pour lequel le déplacement vertical est le plus prépondérant.

À partir du sixième mode la variation du déplacement est relativement négligeable pour les deux accélérogrammes.

On signale que la courbe de variation des déplacements est propre à la structure et dépend de ses fréquences propres, de ses vecteurs propres et du chargement dynamique considéré.

Pour le calcul des réponses du barrage sous ces deux chargements, nous ne considérerons que les six premiers modes, soient ceux correspondants aux fréquences les plus faibles.

Nous représentons dans les figures (4 - 21) et (4 - 22) les convergences des déplacements horizontaux de la crête, et ce en fonction des différentes modélisations.

Ces courbes de convergences ont les mêmes allures; celles-ci, comme pour le cas statique, sont monotones.

Il est à noter que le barrage de l'Oued Fodda a été violemment secoué lors du séisme d'El Asnam, dont l'épicentre était à trente kilomètres de l'ouvrage, et qu'il n'a subi aucun dommage.

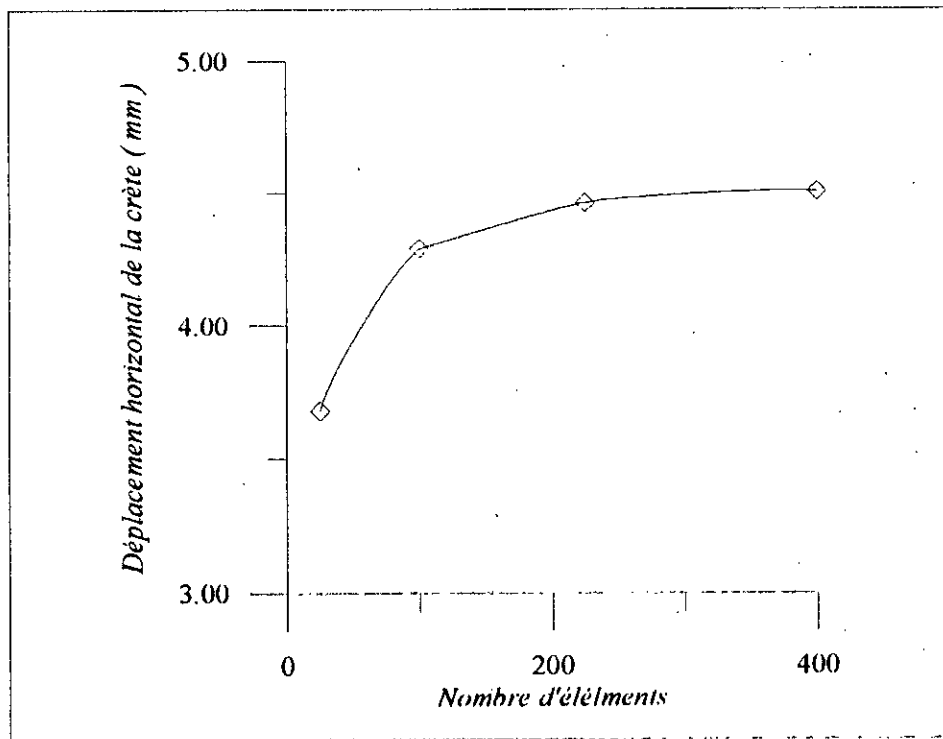


Fig 4 - 21 : Courbe de convergence du déplacement horizontale de la crête du barrage sous l'accélérogramme d'El Asnam.

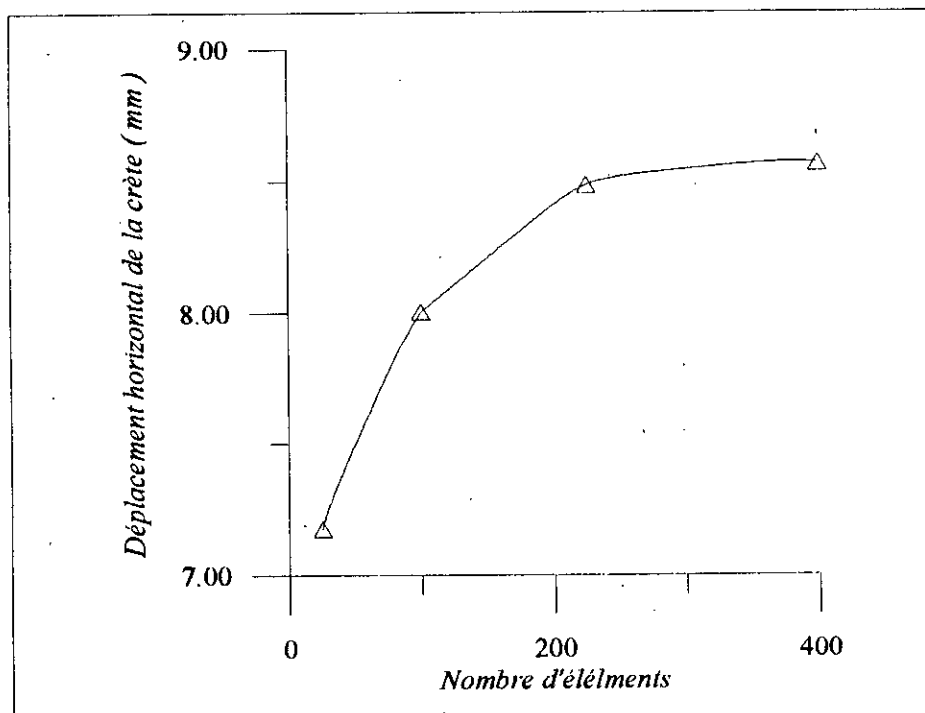


Fig 4 - 22 : Courbe de convergence du déplacement horizontale de la crête du barrage sous l'accélérogramme d'El Centro

CHAPITRE V

**INFLUENCE DES COUCHES
SEDIMENTAIRES
SUPERFICIELLES**

1- INTRODUCTION

Dans ce paragraphe, nous prenons en considération les phénomènes susceptibles d'altérer et de modifier la sollicitation sismique, donc par voie de conséquence la réponse de la structure. Les modifications locales peuvent provenir de phénomènes très divers reliés à la configuration très particulière du site considéré. En effet, nous analysons dans ce paragraphe, les effets de site d'origine structurale, c'est - à - dire dans notre cas, les effets reliés à la structure géométrique du sol et du sous - sol au site de construction (interfaces entre les différentes formations géologiques); Structures qui modifient parfois considérablement la propagation des ondes sismiques.

Comme la bande de fréquences intéressante en génie parasismique s'étale de 0.1 Hz (structures de grandes tailles telles que barrages, grands immeubles, ponts, etc..) à 25 Hz (petits équipements, canalisations, etc..) et que les vitesses sismiques dans les sols et les roches superficielles varient de 100 m/s à quelques km/s, les longueurs d'ondes sismiques correspondantes s'étagent donc entre une dizaine de mètres et plusieurs dizaines de kilomètres. Ce sont donc les structures géologiques ayant ces dimensions latérales et verticales situées dans cette gamme qui vont influencer sur l'aléa sismique.

Il n'est pas encore possible d'étudier ces influences de manière statistique, par suite du trop petit nombre de données comparé au nombre de paramètres, et de toutes façons, il est nécessaire de comprendre la nature physique des phénomènes entrant en jeu. C'est pourquoi, nous nous intéressons dans ce qui suit, à l'effet des remplissages sédimentaires. Pour des considérations de temps impartit à cette étude, il nous est simplement possible d'analyser très brièvement l'influence de la variation de l'épaisseur de cette couche sédimentaire sur la sollicitation sismique, et donc sur la réponse dynamique de la structure implantée au site considéré (ici un barrage).

Nous menons notre étude en comparant les sollicitation et les réponses du barrage pour trois catégories de sites : rocheux, dépôt sédimentaire peu profond (50 m) et dépôt sédimentaire profond (250 m). La sollicitation au rocher est obtenue en simulant, en ne prenant en compte que les ondes de cisaillement, des accélérations sismiques à partir d'un spectre de source en ω^2 (Brune, 1970), par suite, les mouvements forts sur les deux types de sol sédimentaire sont estimés en prenant en compte, de manière analytique, leurs effets sur la propagation des ondes sismiques (considérées ici avec une incidence verticale).

2- SIMULATION DES MOUVEMENTS AU ROCHER.

La simulation des accélérations sur le rocher, sont estimés en utilisant la procédure développée par Boore (1983), qui corrige le spectre de source de la radiation de l'atténuation géométrique et de l'atténuation inélastique. Le modèle de spectre utilisé est celui établi par Brune et dont l'expression est donnée par :

$$S(f, f_c) = \frac{4\pi^2 f^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad (5-1)$$

où f_c représente la fréquence coin donnée par la relation

$$f_c = 4,9 \cdot 10^6 \beta (\Delta t / M_0)^{1/3} \quad (5 - 2)$$

pour une valeur $\Delta\sigma = 100$ bars de la chute de contrainte, $\beta = 3650$ m/s de la vitesse de propagation des ondes S et $M_0 = 0.3 \cdot 10^{27}$ dyne.cm du moment sismique, ce qui équivaut à une valeur $M_s = 7$ de la magnitude. La fréquence maximale f_m est prise égale à 15 Hz et la densité volume du milieu $\rho = 2900$ g/cm³.

Du point de vue numérique, les valeurs des accélérations sismiques sont obtenues en générant une série temporelle transitoire dont le contenu spectral est égal au moins en moyenne à une amplitude spectrale spécifique. Ce but peut être atteint de différentes manières ; nous choisissons pour notre part, de générer un bruit modulé par une enveloppe temporelle dont l'expression est donnée par :

$$f_c - 4,9 \cdot 10^6 \beta \omega(t) = at^b e^{-ct} \quad (5 - 3)$$

Cette modulation impose que le pic d'accélération ait lieu à une fraction $\varepsilon = 0.2$ de la durée spécifiée T_w de l'accélérogramme prise ici comme étant égale au double de la durée de rupture $T_R = 2 f_c$, ce qui donne une durée de 16.1 s. Les coefficients 'a' et 'c' sont respectivement égaux à $(\varepsilon/\varepsilon T_w)^b$ et $b/(\varepsilon T_w)$, avec $b = [-\varepsilon \text{Log}\eta / (1 + \varepsilon (\text{Log}\varepsilon - 1))]$ où $\eta = 0.05$ représente la fraction de l'amplitude maximale au temps T_w .

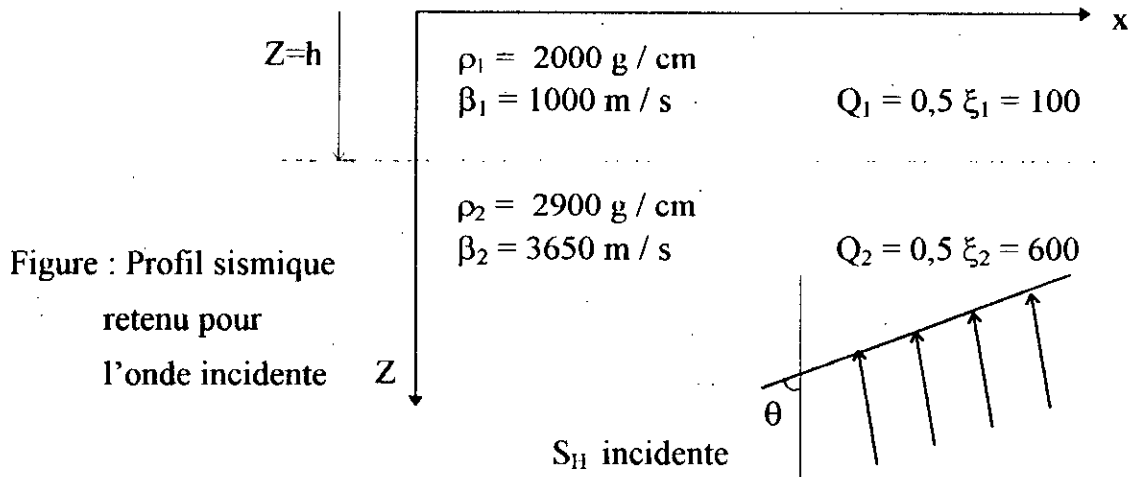
Le spectre de Fourier du bruit modulé est par la suite égalé au celui obtenu à partir du spectre de source. La figure (1 - a) illustre la forme de l'accélérogramme obtenu pour une distance hypocentrale de 10 km (champ proche), le PGA de cet accélérogramme est 477 cm/s² est a lieu au temps $t = 3$ s. Le spectre de Fourier de cet accélérogramme est illustré sur la figure (2 - a). On voit sur ce spectre que les plus fortes amplitudes sont celles associées aux ondes constitutives dont les fréquences sont comprises entre les valeurs 1 Hz et 5 Hz, mais les amplitudes spectrales restent quand même relativement élevées jusqu'aux environs de la valeur $f = 15$ Hz de la fréquence, ce qui correspond à la fréquence maximale f_m que nous avons imposé dans ce travail.

2- EFFET DES COUCHES SEDIMENTAIRES SUPERFICIELLES.

C'est un fait reconnu depuis très longtemps que les dommages causés par les séismes sont systématiquement plus importants sur les zones à sol meuble (alluvions et sédiments peu consolidés) que sur les affleurements rocheux. Les observations macrosismiques dans le cas de certains séismes (tel que celui de San Francisco en 1906) ont attribué à la seule couverture sédimentaire des modulations locales d'intensité atteignant parfois trois degrés sur l'échelle Mercalli modifiée.

L'explication immédiate et la plus simple de cette amplification est reliée au phénomène de résonance verticale qui s'instaure dans les milieux à stratification horizontale dont la rigidité croît avec la profondeur. En passant sur le rappel des principes de calcul, nous présentons dans ce qui suit les effets d'une stratification plane.

Nous considérons dans notre cas, les amplifications subies par une onde sismique incidente verticale (ce qui est en général le cas pour les ondes sismiques provenant des sources profondes et qui ont subit les effets des réfractions des différentes interfaces). Nous prenons en compte, une structure géologique constituée d'un demi - espace élastique surmonté par un dépôt sédimentaire d'épaisseur h . Les caractéristiques physiques du demi - espace élastique sont données par la masse volumique $\rho_2 = 2900 \text{ g/cm}^3$, la vitesse de propagation des ondes sismiques de cisaillement $\beta_2 = 3650 \text{ m/s}$ et un facteur de qualité $Q_2 = 1/(2\xi) = 600$ (ξ étant le facteur d'amortissement du matériau constituant le milieu considéré). Les valeurs correspondantes associées à la couche sédimentaire sont $\rho_1 = 2000 \text{ g/cm}^3$, $\beta_1 = 1000 \text{ m/s}$ et qualité $Q_1 = 100$. La figure ci-dessous illustre le profil sismique retenu pour l'évaluation des effets de propagation sur les ondes sismiques ; nous considérons deux valeurs de la hauteur : $h = 50 \text{ m}$ et $h = 250 \text{ m}$.



Pour une onde incidente d'amplitude unitaire, on montre que l'amplification subie par celle ci est égale à :

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1 \beta_1^2}{\rho_2 \beta_2^2} - 1 \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi \cdot f \cdot h}{\beta_1} \right)}} \quad (5 - 4)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation associée au mouvement de fréquence f . La valeur minimale de cette amplification est égale à 1 et est obtenue pour les valeurs $f = n\beta_1 / (2h)$, alors

que les valeurs maximales ont lieu à des valeurs $f = (2n + 1)\beta_1 / (4h)$ et sa valeur est égale au contraste d'impédance $\rho_2\beta_2 / \rho_1\beta_1$. Cette amplification correspond à une résonance provenant du piégeage partiel des ondes dans la couche superficielle comme cela apparaît sur la figure 4 représentant les fonctions de transfert de la couche plane pour une hauteur $h = 50$ m (Fig 5 - 3. a) et $h = 250$ m (Fig 5 - 3. b).

Les spectres d'accélération à la surface libre de la couche sédimentaire sont présentés sur la figure (Fig 5 - 2. b) pour le cas $h = 50$ m et (Fig 5 - 2. c) pour le cas $h = 250$ m. On voit que les amplitudes spectrales ont été modifiées de manière conséquente pour les mouvements sur site sédimentaire, dans le sens où, on atteint des grandeurs de l'ordre de 600 cm/s pour les fréquences localisées autour de la fréquence fondamentale $f = \beta_1 / (4h) = 5$ Hz du sol de hauteur $h = 50$ m alors qu'elles ne sont que de l'ordre de 200 cm/s pour l'accélérogramme original. Par contre, ces amplifications sont plus importantes pour une épaisseur de sédiment égale à 250 m, elles atteignent des valeurs comprises entre 400 cm/sec et 500 cm/sec, avec un pic ayant une valeur égale à 800 cm/sec pour la fréquence associée au deuxième mode de vibration du sol. On voit ainsi que l'amplification introduite par la présence du sol sédimentaire croît avec la profondeur.

Les accélérogrammes obtenus pour les deux types de sol sont représentés par les (Fig 5 - 1.b et Fig 5 - 1.c). On remarque que ceux - ci sont caractérisés par des amplitudes temporelles relativement plus importantes et qui ont pour valeurs 1206 cm/s² pour $h = 50$ m et 1056 cm/s² pour $h = 250$ m. On voit ici, que malgré des valeurs relativement plus importantes des amplifications spectrales à certaines fréquences, produites par le sol de 250 m d'épaisseur, on a en moyenne des amplifications qui intéressent des bandes fréquentielles plus larges dans le cas du sol de profondeur $h = 50$ m. Les effets de ces deux accélérogrammes sur la structure sont illustrés sur la figure 5, sur laquelle on voit que le mode fondamentale du barrage est caractérisée par une réponse relativement plus importante sur dépôt sédimentaire que sur rocher. En effet, les déplacements enregistrés au niveau de la crête sont égaux à 1.2 cm pour la structure implantée sur rocher, 1.99 cm sur sol meuble ($h = 50$ m) et 1.96 cm dans le cas $h = 250$ m. Les mêmes constatations peuvent être déduites pour les deux autres modes (11.7 Hz et 13.7 Hz), mais avec des différences notablement moins accrues. Les amplitudes pour les modes supérieures $f > 25$ Hz restent inchangés, car sortant de la bande fréquentielle d'intérêt de la sollicitation.

Le modèle simple considéré ici, peut être étendu à des stratifications plus complexes (nombre de couches plus élevé) et à des comportements mécaniques plus réalistes de sol. Le résultat obtenu avec le modèle retenu dans ce travail, montre que le résultat principal est l'existence d'un pic de résonance fondamentale et de quelques harmoniques moins prononcées. Il s'agit donc d'éviter de concevoir, en fonction du type de sol, des ouvrages dont les périodes propres d'oscillation ne correspondent pas à celles du sol de fondation, ce qui donnerait une vulnérabilité moins accrue de la fondation.

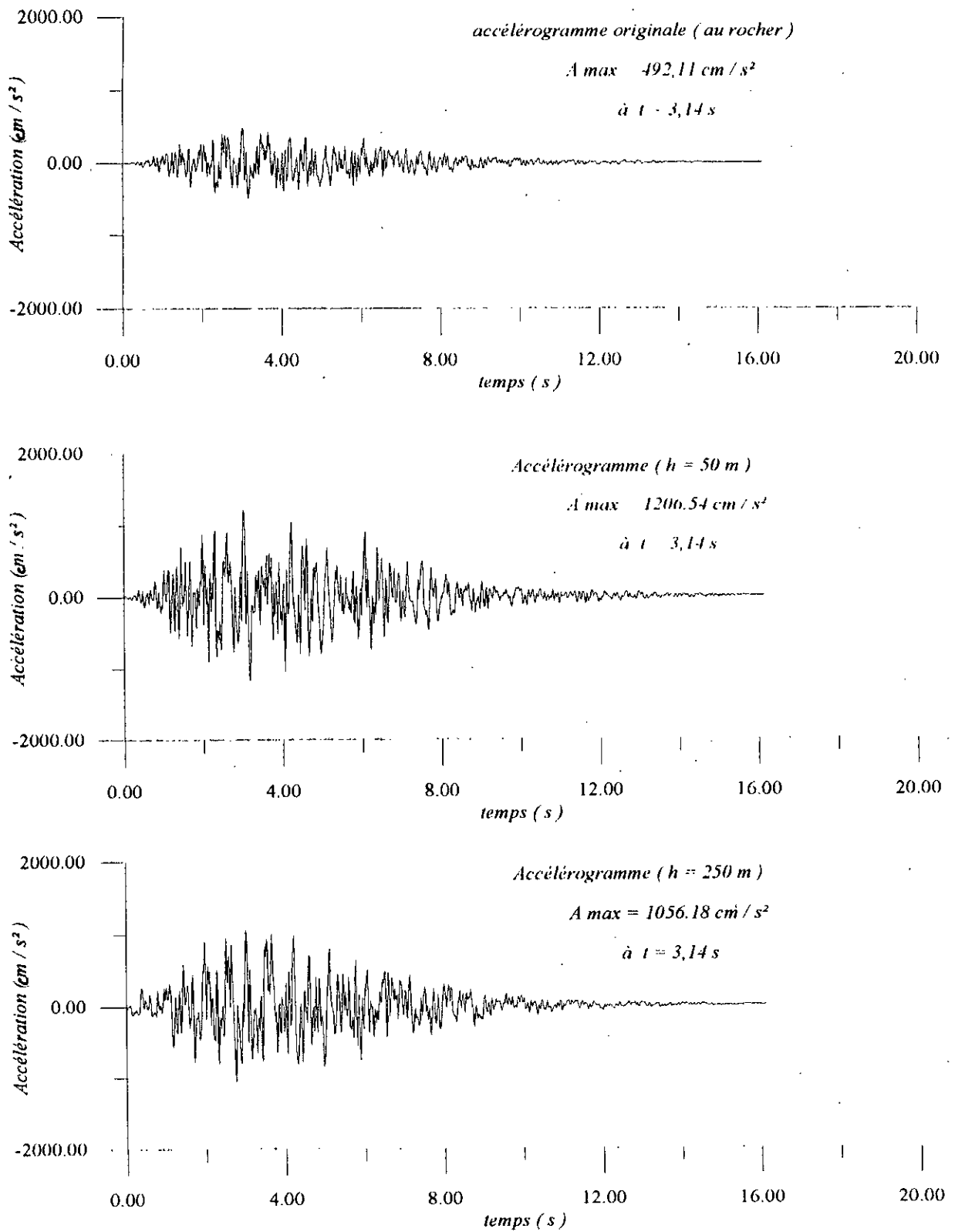


Fig 5 - 1: Représentation des trois accélérogrammes

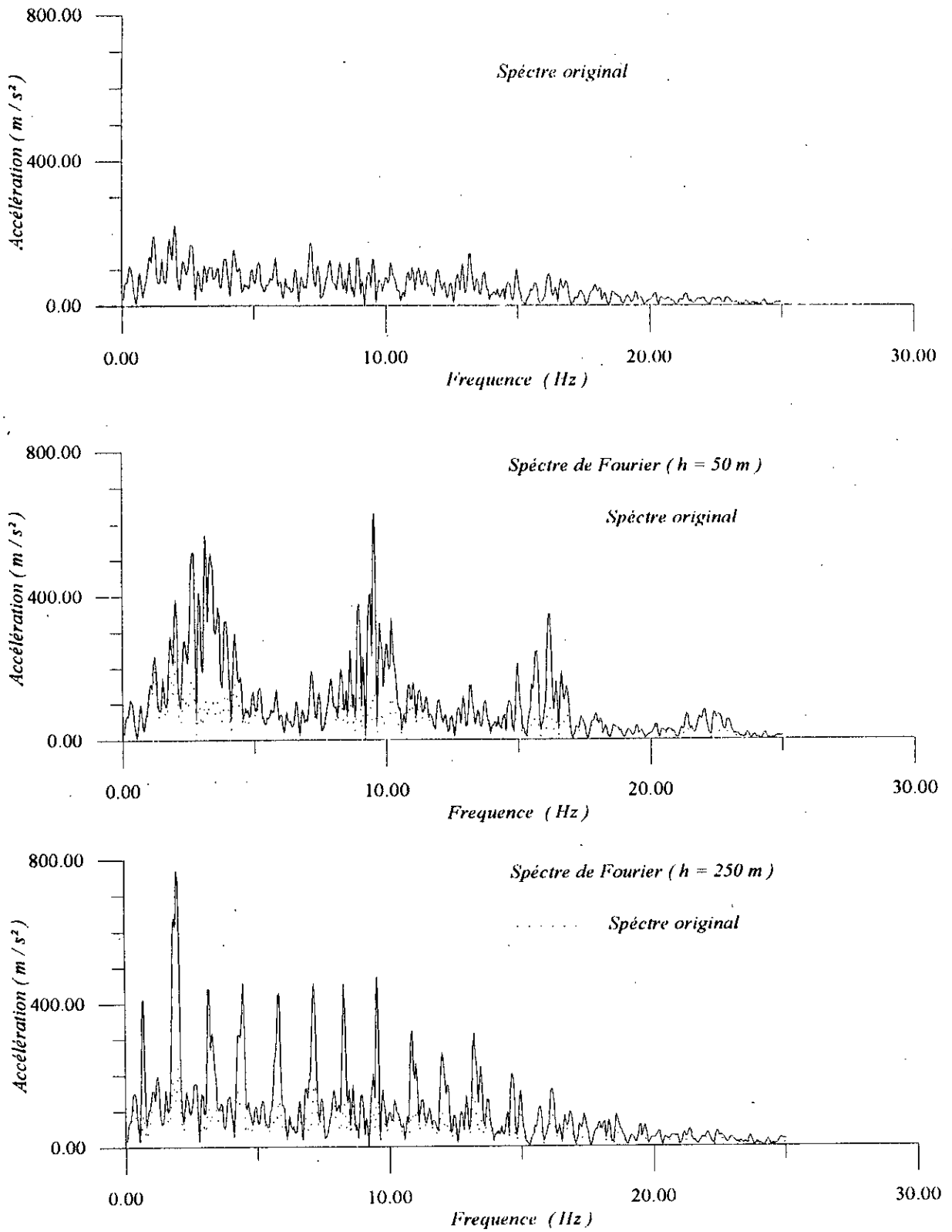


Fig 5 - 2 : Représentation des spectre de Fourier

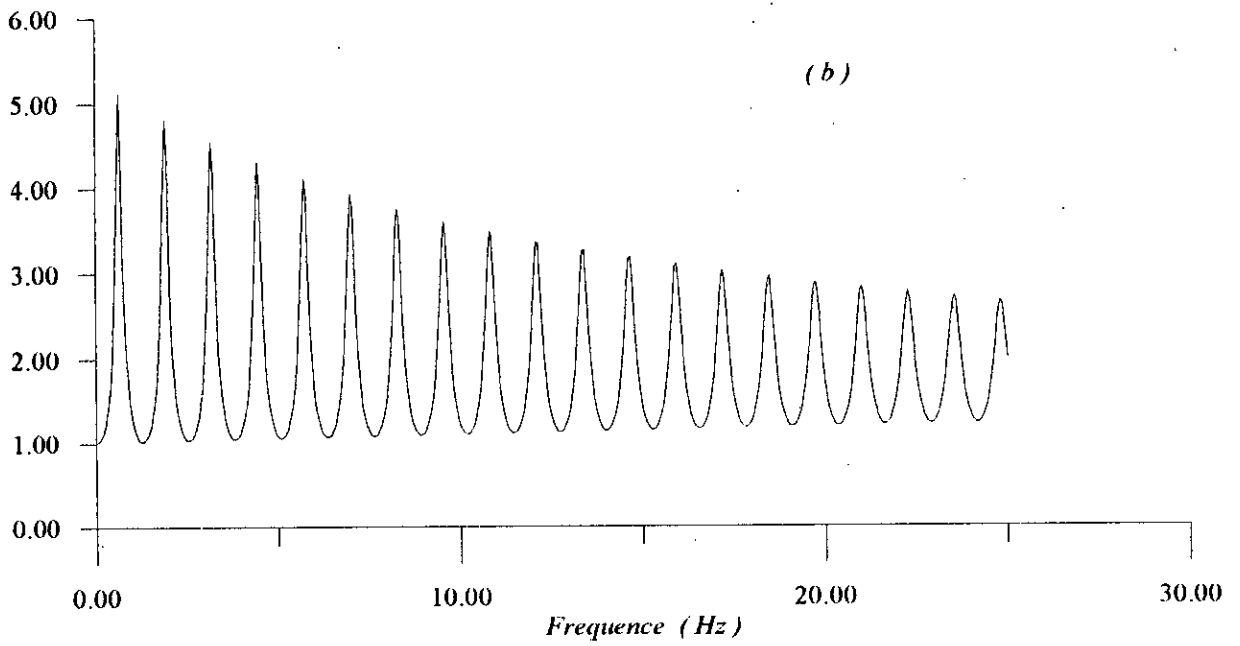
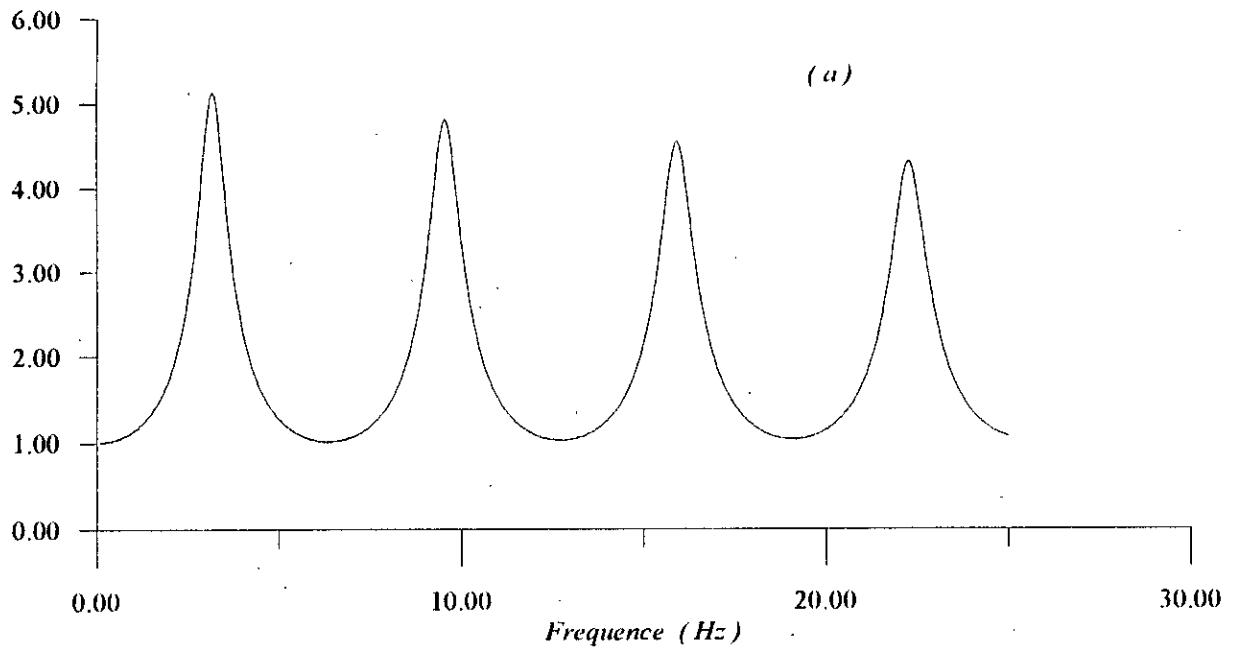


Fig 5 - 3 : Représentation des Fonctions transfert
(a) $h = 50$ mètres
(b) $h = 250$ mètres

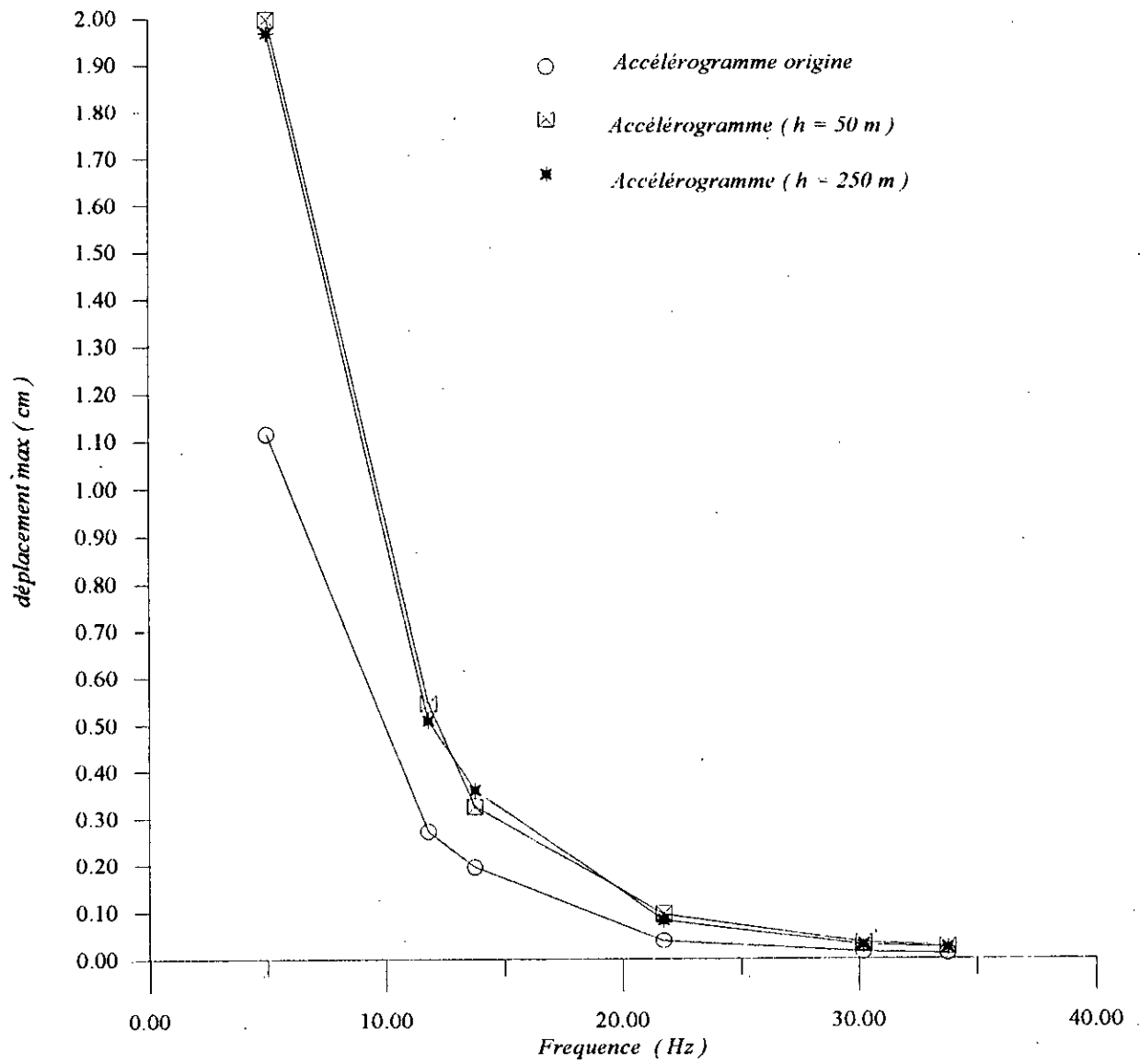


Fig 5 - 4 : Représentation du déplacement Max (flèche) pour les différents accélérogrammes

CHAPITRE VI

***PRESENTATION DES
PROGRAMMES
INFORMATIQUES***

Introduction :

Dans ce chapitre nous nous proposons de présenter les étapes caractéristiques des programmes informatiques. Nous avons établi deux programmes différents (Stat & Dyn) liés entre eux juste par quelques fichiers paramètres. Cette indépendance s'est montrée très utile et même parfois nécessaire lorsque la structure était subdivisée en un grand nombre d'éléments.

Comme vous avez dû le constater, nous sommes parvenus à exécuter nos programmes pour des modélisations allant jusqu'à 682 degrés de liberté et 600 éléments.

Cette limite n'a pas été dépassée, et ce pour des raisons de satisfaction (très bonne précision des résultats).

Nous nous sommes penchés sur l'aspect représentation, car de nos jours le concept ~ éléments finis ~ est devenu très courant dans tous les domaines scientifiques, et surtout en Génie Civil. Plusieurs logiciels sont donc apparus, leur développement a été motivé par la facilité d'utilisation, la diversité des domaines d'application ainsi que l'exploitation des résultats par des illustrations graphiques.

L'utilisation du *Fortran Lahey* et sa *library* s'est donc avérée très efficace, et même indispensable pour les représentations graphiques.

Il est intéressant d'attirer l'attention du lecteur sur l'importance des fichiers paramètres dans la programmation. En effet ces derniers nous offrent un gain de temps considérable, par le fait de leur éditions, lectures et écritures aisées. Concernant leurs lectures, les fichiers paramètres ne contiennent assez souvent que des chiffres, dont les paramètres correspondant s'oublies après une longue durée de non-utilisation. Afin de remédier à ce problème d'ordre pratique, l'utilisation d'une subroutine de lecture appelée « *LITPAS* » dont nous estimons nécessaire de donner son organigramme, a été très utile.

PROGRAMME -SUBROUTINE *LITPAS*-

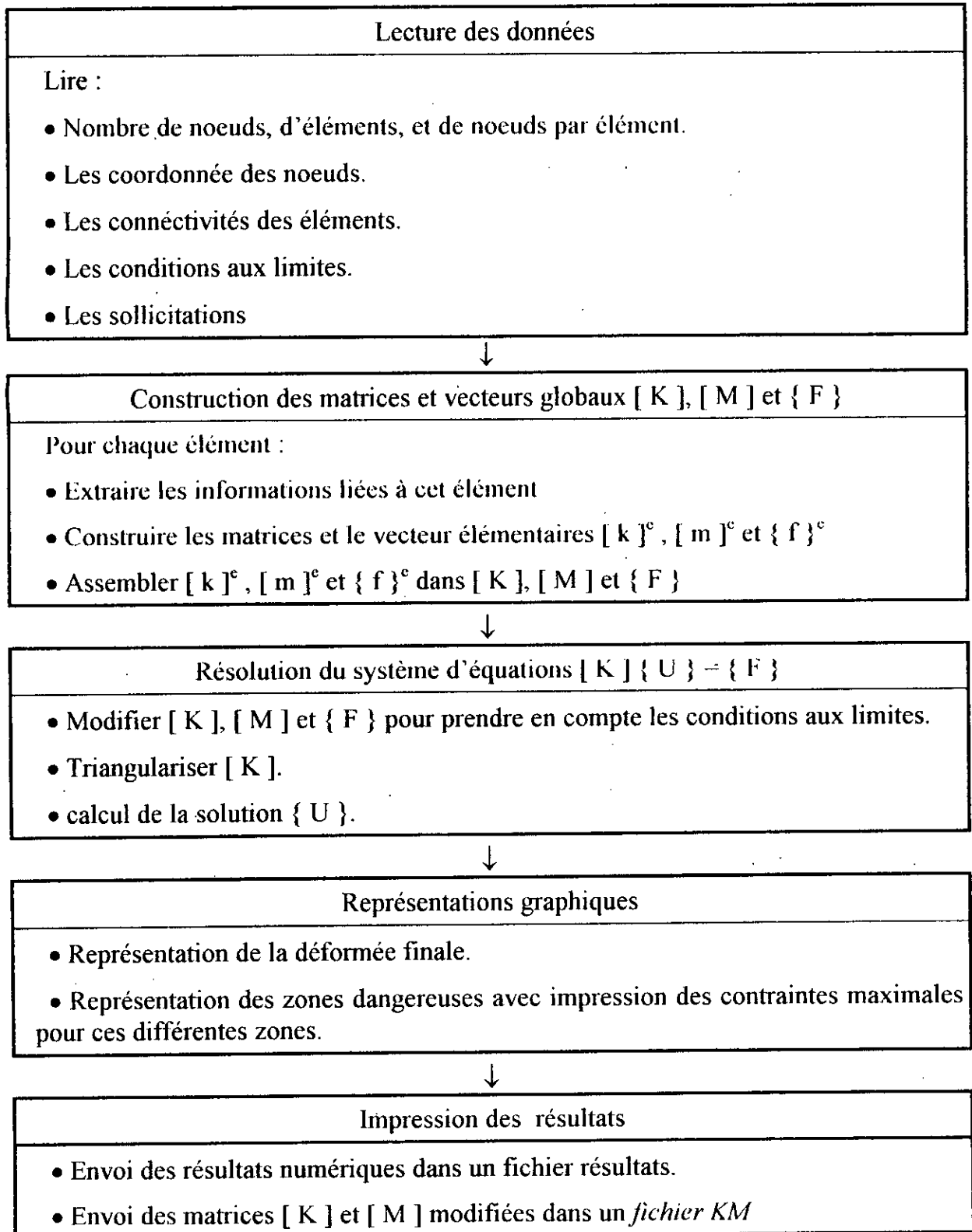
```

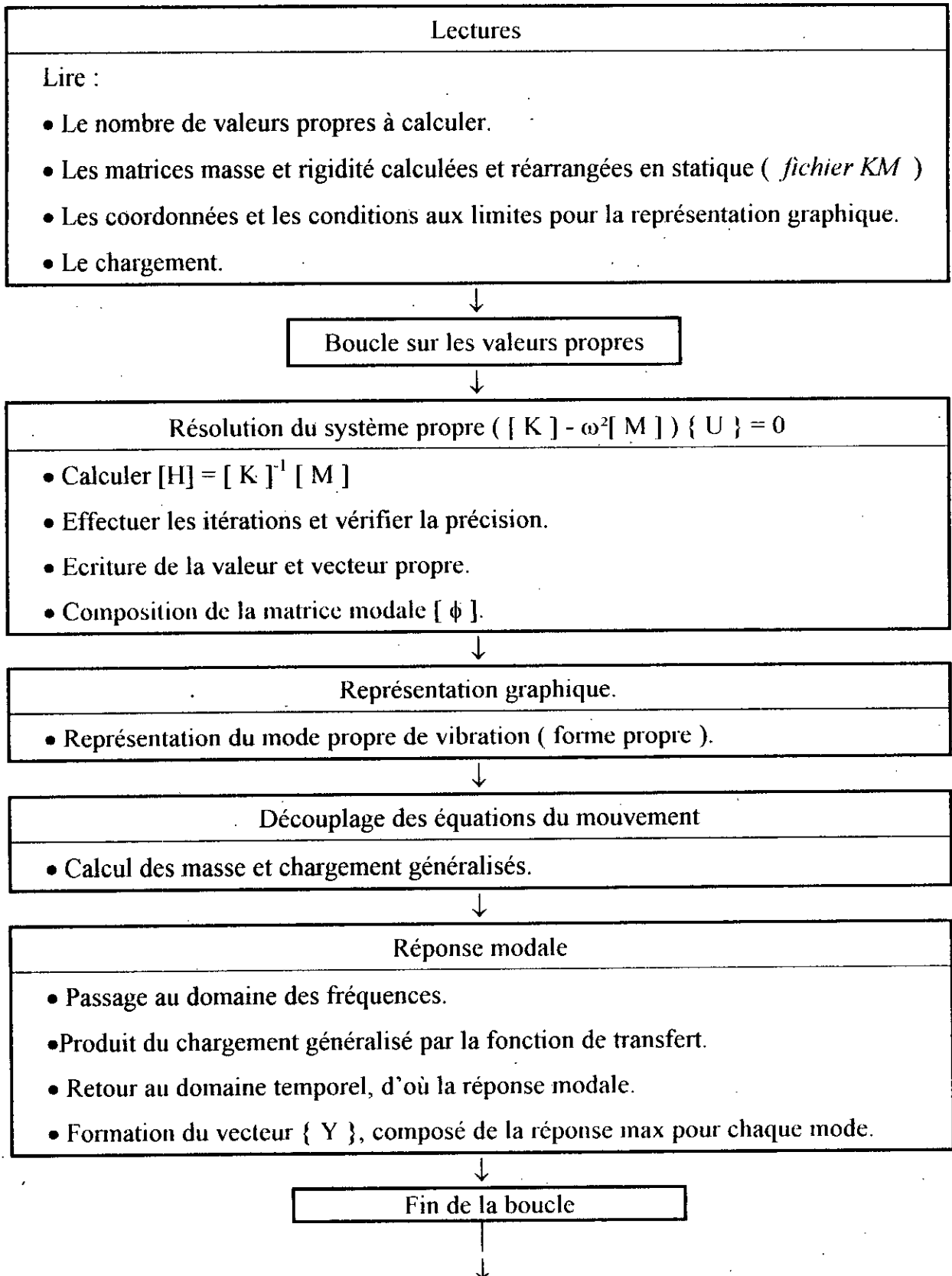
subroutine litpas(nu)
  implicit none
  character*1 symb
  integer nu

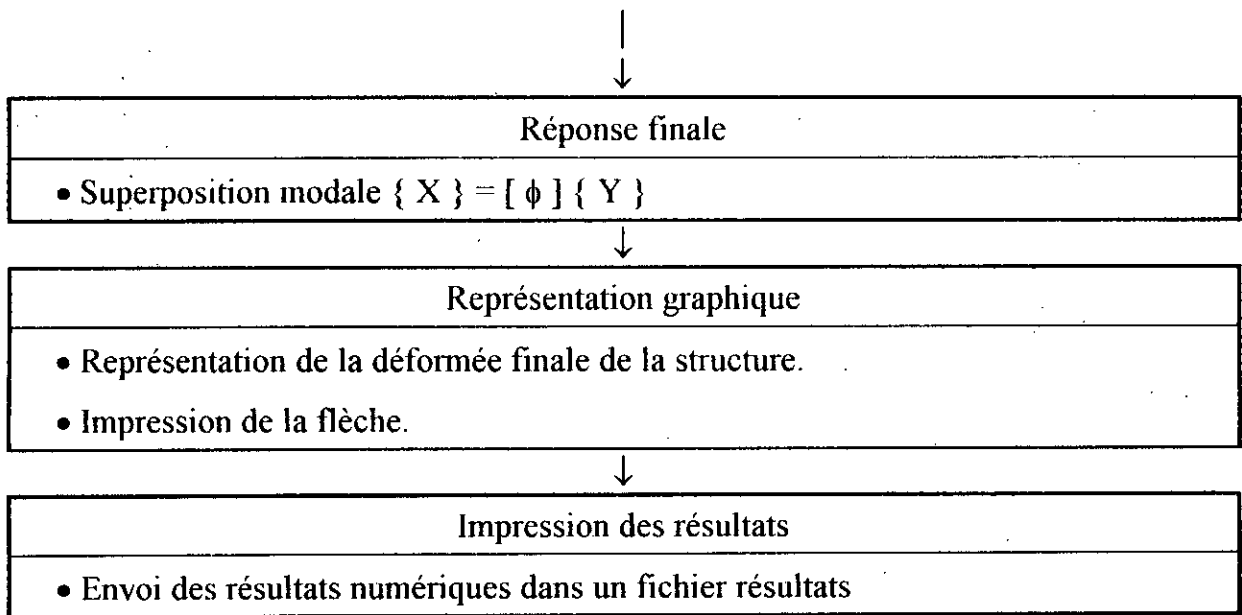
12  read(nu,('(a1)'),err=13,end=11) symb
    if (symb.eq.'[') go to 12
    return

13  print*, ' litpas, erreur dans unit,',nu
11  print*, 'sub litpas : anomalie car lecture jusque fin fichier'
    stop
end

```

Description du programme de calcul statique : *Stat*

Description du programme de calcul dynamique : *dyn*



CONCLUSION

CONCLUSION

Par cette présente étude, nous avons abordé une des méthodes de calcul numérique, la méthode des éléments finis. L'élément fini utilisé pour la modélisation de notre structure est l'élément triangulaire. Celui-ci s'est avéré très pratique par sa formulation fort simple pour cette méthode et son adaptation aux frontières irrégulières.

La méthode des éléments finis nous permet de considérer les propriétés d'hétérogénéité des matériaux constitutifs, d'irrégularité géométrique et de conditions de chargements quelconques.

Les résultats obtenus pour cet élément en calcul statique nous permettent de lui reprocher son imprécision pour des faibles discrétisations. En effet, la comparaison des déformations et des contraintes calculées pour la console et pour le barrage résultants du calcul numérique avec ceux obtenus par les solutions exactes (théorie de l'élasticité et théorie de la résistance des matériaux) nous montre que la convergence n'est satisfaisante que pour d'importantes discrétisations. Toutefois, il est à signaler une imprécision plus importante concernant les contraintes, ceci s'explique par l'adoption d'une approche déplacements lors de leur calcul. On conclut que le type d'élément utilisé n'est pas très précis, par contre la convergence des résultats est assuré.

Concernant le calcul des caractéristiques dynamiques de la structure, en l'occurrence de l'Oued Fodda, la précision obtenue n'est satisfaisants que pour de lourdes discrétisations. Le calcul des réponses dynamiques de ce barrage pour différentes prises en compte des modes propres de la structure, montre que seul les premiers modes du barrage, correspondants aux plus petites fréquences propres de la structure, ont une influence prépondérante sur le calcul de cette réponse. Ceci s'est vérifié pour les deux cas de chargements, soit pour l'accélérogramme d'El Asnam et d'El Centro.

Il est très important de signaler, que la remarque concernant ces réponses est propre à la structure et dépend de ses fréquences propres, de ses vecteurs propres et du chargement dynamique considéré.

La considération de l'effet de site sur les sollicitations sismiques ont donné des résultats très intéressants. Comme précédemment il est très important de signaler qu'il n'est pas possible de généraliser les résultats obtenus, cela est dû au nombre de cas étudié assez limité et à la considération pas très réaliste du phénomène.

Au vu des résultats, il apparaît assez clairement que l'influence du sol est importante sur la sollicitation sismique. En effet une couche de sol sédimentaire amplifie de manière considérable la sollicitation initiale considérée sur rocher; cette amplification est proportionnelle à la hauteur de la couche. Cependant l'amplification de la sollicitation ne restitue pas les mêmes amplifications pour les réponses.

Il est intéressant de remarquer qu'il est très important de concevoir, en fonction du sol considéré, des ouvrages dont les périodes d'oscillation correspondent à celle du sol de fondation. Sur site, ceci se traduirait par une certaine homogénéité de la structure avec le sol (mêmes oscillations); ce qui nous donne une fragilité moins accrue de l'interface sol-structure.

ANNEXES

Annexe 1: Calcul de la réponse pour un oscillateur simple:

1/ Oscillations libres

En l'absence de forces extérieurs, la masse oscille librement. Nous sommes donc dans le cas d'oscillations libres. L'équation du mouvement s'écrit:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (A1-1)$$

De plus lorsque $c=0$ le système est dit non amorti.

Sa période est $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ et sa pulsation est $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Par contre lorsque $c \neq 0$ le système est amorti.

La forme de la solution dépend de la valeur du coefficient c .

Posons:
$$\xi = \frac{c}{2m\omega}$$

ξ est appelée coefficient d'amortissement.

Ce dernier se mesure, pour un oscillateur simple, en lui soumettant une excitation harmonique qui le met en vibration forcée. Pendant un cycle, il est ainsi possible de calculer l'énergie dissipée dans l'amortisseur et d'en déduire la valeur du coefficient d'amortissement. Ce procédé est expliqué avec plus de détails dans la référence [6] citée en bibliographie.

On distingue trois cas:

a) Amortissement critique: $\xi = 1$

La solution de l'équation (A1-1) est de la forme:

$$x(t) = [x_0 (1 + \omega t) + \dot{x}_0 t] e^{-\omega t}$$

avec : x_0 , \dot{x}_0 le déplacement et la vitesse de l'oscillateur à $t = 0$.

b) Amortissement sur-critique: $\xi > 1$

L'oscillateur est dit sur-amorti,

et la solution est de la forme :

$$x(t) = (Ae^{\omega_D t} + Be^{-\omega_D t}) e^{-\xi\omega t}$$

avec $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$ appelée pseudo-pulsation.

$T = \frac{2\pi}{\omega_D}$ est la pseudo-période.

Dans les deux cas précédents a), b) le mouvement ne présente pas d'oscillations. En écartant la masse de x_0 , elle revient à sa position d'équilibre avec un amortissement.

c) Amortissement sous-critique: $\xi < 1$

Comme pour le cas précédent, l'oscillateur est dit sous-amorti

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

La solution de l'équation du mouvement (A1-1) s'exprime par:

$$x(t) = \left(\frac{x + x_0 \xi \omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + x_0 \cos \omega t \right) e^{-\xi \omega t}$$

Dans ce cas, la masse effectue des oscillations amorties autour de sa position d'équilibre, avec des amplitudes diminuant progressivement jusqu'à s'annuler.

Le coefficient d'amortissement varie entre 2% et 20% selon le type de matériaux. Pour le béton armé, la valeur usuelle utilisée est de l'ordre de 7%.

L'ingénieur en Génie Civil doit concevoir des structures qui ne sont ni trop rigides, pour éviter les cassures brutales, ni trop flexible, pour éviter les flèches excessives.

2/ Oscillations forcées

On distingue trois cas de chargement.

a) Chargement harmonique:

$P(t) = P_0 \sin \alpha t$ avec α : pulsation de l'excitation.

La solution est de la forme:

$$x(t) = (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) e^{-\xi \omega t} + \frac{P_0}{k} \lambda \sin(\alpha t - \theta)$$

où:

$$\beta = \frac{\alpha}{\omega}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

λ est le coefficient d'amplification dynamique.

A et B sont déterminés selon les conditions initiales ($t = 0$). Le mouvement de l'oscillateur n'est autre que la somme des deux mouvements:

~ transitoire - amortie et disparaît rapidement -

~ permanent - avec une pulsation α -

Remarque: Lorsque $\beta = 1$ l'oscillateur entre en résonance.

b) Chargement périodique et chargement par impulsions:

Nous regroupant ces deux cas de chargement car la solution de l'équation du mouvement est de la même forme. Elle est donné par l'intégrale de Duhamel.

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

Annexe 2 : Réponse à un chargement par impulsion

Nous allons montrer dans cette annexe comment on retrouve l'intégrale de Duhamel. Pour cela considérons une impulsion $P(t)$ appliquée entre $0 < t < t_1$.

Une charge impulsive consiste en une pulsation unique, elle est généralement de courte durée. L'amortissement présente alors beaucoup moins d'importance pour la réponse maximum que dans le cas de charges périodiques. La réponse maximum à une charge impulsive sera atteinte dans un laps de temps très court, avant que les forces d'amortissement n'aient le temps d'absorber une énergie conséquente. Pour cette raison, nous ne considérons dans ce paragraphe que la réponse non amortie.

Pour l'impulsion $P(t)$ un système à un degré de liberté de masse m et de rigidité k , on a :

$$t : 0 \rightarrow t_1 .$$

$$x(t) : 0 \rightarrow x(t_1) .$$

$$\dot{x}(t) : 0 \rightarrow \dot{x}(t_1) = \Delta \dot{x} .$$

La quantité de mouvement de cet oscillateur est donnée par :

$$m \dot{x} = m \int \ddot{x} dt = \int F dt$$

$$\text{soit : } m \Delta \dot{x} = \int_0^{t_1} [P(t) - kx(t)] \cdot dt$$

Lorsque t_1 tend vers 0 ($t_1 \rightarrow 0$) alors $x(t)$ tend vers 0, ce qui donne $k \cdot x(t)$ presque nul ($k \cdot x(t) \rightarrow 0$).

Il reste alors :

$$m \Delta \dot{x} = \int_0^{t_1} P(t) \cdot dt$$

$$\Delta \dot{x} = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} P(t) \cdot dt = \dot{x}(t_1) \quad (\text{vitesse au temps } t = t_1)$$

Comme le mouvement qui résulte de l'application de $p(t)$ pour $t > t_1$ est un mouvement en oscillation libre avec pour conditions initiales $x(t_1)$, $\dot{x}(t_1)$.

On a pour $\bar{t} = t - t_1$

$$x(\bar{t}) = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + x(t_1) \cos \omega \bar{t}$$

comme : $\lim_{t_1 \rightarrow 0} x(t_1) = 0$

alors : $x(\bar{t}) = \frac{\dot{x}}{\omega}(t_1) \sin \omega \bar{t}$

soit : $x(\bar{t}) = \frac{1}{m\omega} \left[\int_0^{t_1} P(t) dt \right] \sin \omega \bar{t}$ (A.2 - 1)

La procédure exposée et qui donne une réponse approchée à une impulsion de courte durée, peut être généralisée au cas d'une excitation dynamique quelconque. Considérons un chargement dynamique quelconque qui pendant la fraction de temps $d\tau$ fait subir à la structure une impulsion $P(\tau) \cdot d\tau$. On peut utiliser l'équation (A2-1) pour calculer la réponse. Bien qu'approchée pour une durée courte mais finie, la méthode devient exacte lorsque $d\tau$ devient infiniment petit. Ainsi pour $t > \tau$ la réponse produite par le chargement $P(t)$ est :

$$dx(t) = \frac{P(\tau) \cdot d\tau}{m\omega} \sin \omega(t - \tau)$$
 (A.2 - 2)

La fonction complète peut alors être considérée comme une succession d'impulsions, chacune produisant une réponse du type exprimé dans l'équation précédente. En intégrant de 0 à t on obtient à l'instant t :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$$
 (A.2 - 3)

Cette expression est généralement connue sous le nom d'intégrale de Duhamel pour les systèmes sans amortissement.

REFERENCES

- [1] - E.ABSI - « *Méthode de calcul numérique en élasticité* ». Eyrolles, Paris, 1978.
- [2] - P.Y.BARD - Cours de sismologie de l'ingénieur à l'ENP, 1990.
- [3] - D.M.BOORE - « *Stochastic Simulation of High Frequency Ground Motions Based on Seismological Models of the Radiated Spectra* ». Bull.Seism.Soc.America, Vol 73, N°6, pp-1865-1894, 1983.
- [4] - J.N.BRUNE - « *Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes* ». J.Geophys.Res., 75, pp,4997-5009, 1970.
- [5] - J.L.BATOZ, G.DHATT.- « *Modélisation des structures par élément finis* ». HERMES, Paris, 1990.
- [6] - N.S.BOCHEFFA, M.BOURBERBACHENE.- « *Analyse dynamique des plaques minces et épaisses par la méthode des éléments finis* ». Projet de fin d'étude, ENP, 1992.
- [7] - M.BOUMAH RAT, A.GOURDIN.- « *Méthodes Numérique Appliquées* ». OPU, Alger, 1991.
- [8] - D.BOURGIN.- « *Cours de calcul des barrages* ». F.Boisseau, Toulouse, 1955.
- [9] - A.CAPRA, V.DAVIDOVICI.- « *Calcul Dynamique des Structures en Zone Sismique* », Eyrolles, Paris, 1982.
- [10] - R.W.CLOUGH, J.PENZIEN.- « *Dynamique Des Structures* ». Pluralis, Paris, 1980.
- [11] - G.DHATT, G.TOUZOT.- « *Une présentation de la méthode des éléments finis* » ,Maloine S.A Editeur, Paris, 1981.
- [12] - M.HAMMOUTENE.- Cours de mécanique des milieux continus dispensé à l'ENP
- [13] - J.F.IMBERT.- « *ANALYSE des STRUCTURES par ELEMENTS FINIS* ». CEPADUES EDITIONS, Toulouse, 1979.
- [14] - R.MARTIN.- « *Les Grands Barrages et les Irrigations en ALGERIE* ». Editions de CHANTIERS, 1939.

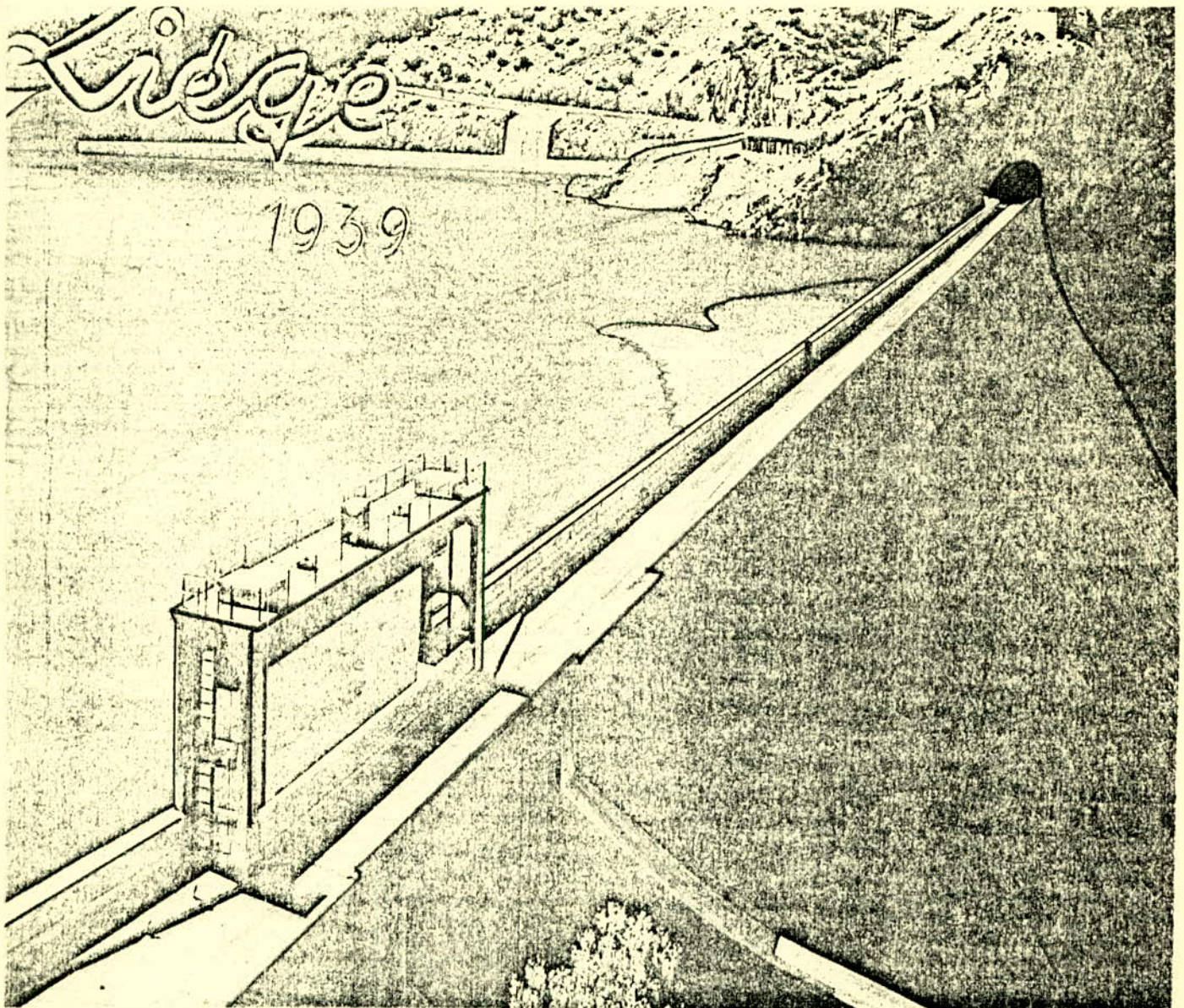
[15] - A. PECKER.- « *DYNAMIQUE DES SOLS* ». Presses Ponts et chaussées, Paris, 1984.

[16] - K. C. ROCKEY.- « *Introduction à la méthode des éléments finis* ». Eyrolles, Paris, 1979.

[17] - S. TIMOSHENKO.- « *Théorie de l' Elasticité* ». BERANGER, Paris, 1948.

[18] - T. Y. YANG.- « *Finite Element Structural Analysis* ». Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.

[19] - O. C. ZIENKIEWICZ.- « *La méthode des éléments finis* ». Mc Graw Hill, Paris, 1973.



RESUME

La prise en compte des risques sismiques dans la conception d'un nombre grandissant d'ouvrages important a contribué au développement rapide des méthodes numérique de calcul.

A ce titre nous nous proposons dans cette étude de traiter par la M.E.F le barrage de l'Oued Fodda sous l'action sismique, compte tenu de la couche sédimentaire superficielle.

ABSTRACT

Consideration of earth quake risks in the design of a greater number of important buildings has contributed in developping rapidly numerical computing methods.

In the following study we attempt treat by the use of the F.E.M , the dam of l'Oued Fodda under earth quake action, tacking into account the sedimentary.