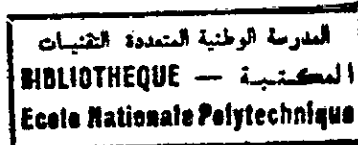


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique & Populaire  
وزارة الجامعات و البحث العلمي  
Ministère des Universités & de la Recherche Scientifique  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

14/94

## Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Civil



### Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie Civil

#### Thème :

**Analyse dynamique des structures  
par la méthode des éléments finis  
Applications aux barrages poids**

Proposé et Dirigé par :

M<sup>r</sup> :Omar. Belhadj

Etudié par :

M<sup>r</sup>:SENNOUN Toufik

M<sup>r</sup>:TADJADIT Abdelmadjid

Promotion : Juin 1994

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique & Populaire  
وزارة الجامعات و البحث العلمي  
Ministère des Universités & de la Recherche Scientifique  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

## Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

### Projet de Fin d'Etudes

Pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie Civil

#### Thème :

**Analyse dynamique des structures  
par la méthode des éléments finis  
Applications aux barrages poids**

Proposé et Dirigé par :

M<sup>r</sup> :Omar. Belhadj

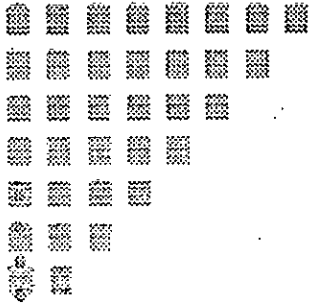
Etudié par :

M<sup>r</sup>:SENNOUN Toufik  
M<sup>r</sup>:TADJADIT Abdelmadjid

Promotion : Juin 1994

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

>> ربِّ أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت  
علي و علي والدي وأن أعمل صالحا ترضاه  
<< وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين



## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

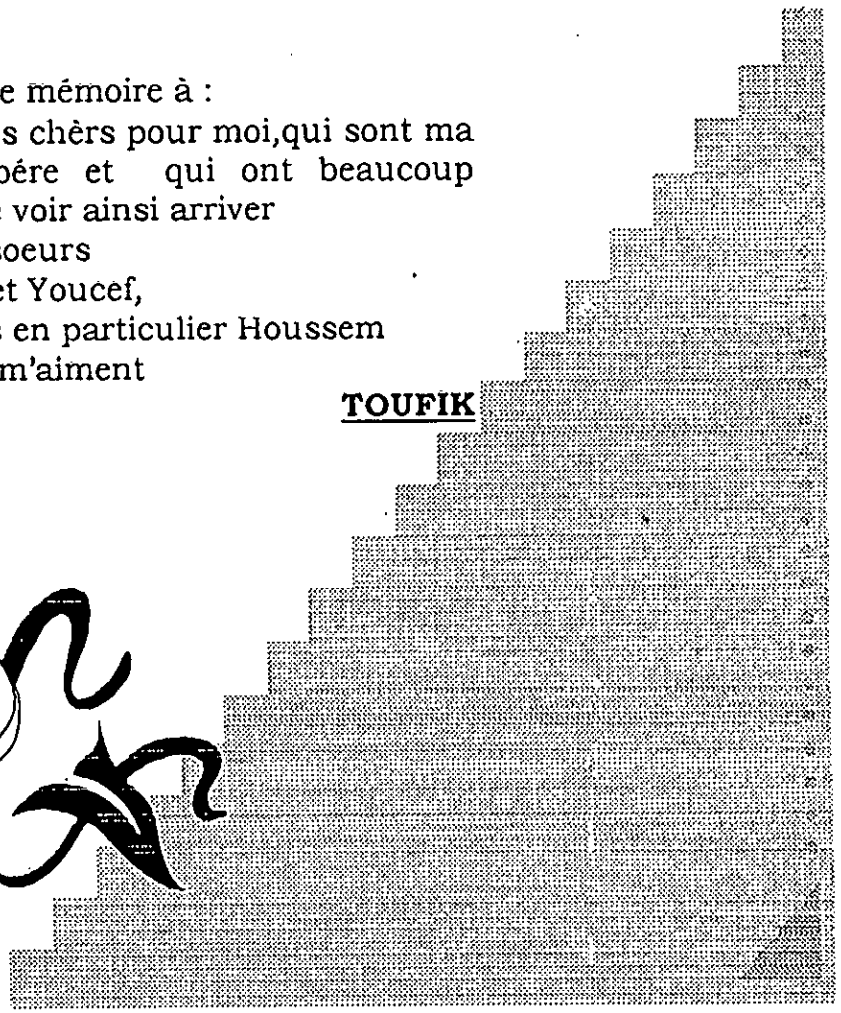
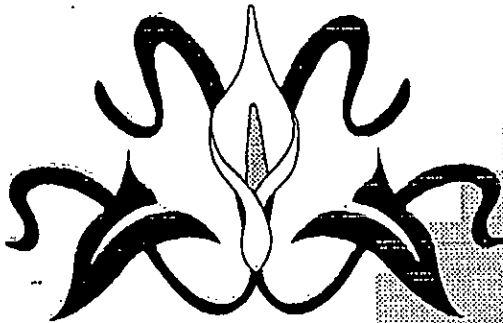
- Ma mère et mon père qui m'ont beaucoup soutenu et qui ont tant consenti de sacrifices à mon égard et qui ont tant voulu me voir arriver,
- A mes frères,
- A ma petite soeur,
- A tout ma famille grands et petits
- A tous mes amis (es).

MADJID

Je dédie ce modeste mémoire à :

- A deux êtres, très chers pour moi, qui sont ma mère et mon père et qui ont beaucoup souffert pour me voir ainsi arriver
- A mes frères et soeurs
- A Kamel, Islam et Youcef,
- A tous mes amis en particulier Houssem
- A tous ceux qui m'aiment

TOUFIK



## REMERCIEMENTS

Nous tenons par le biais de ce modeste travail à remercier notre promoteur Monsieur: **OMAR BELHADJ** pour ses conseils éclairés et les entrevues qu'il a daigné nous accorder. Nous remercions également tous les professeurs qui de loin ou de près ont contribué à notre formation.

Nous tenons aussi en particulier à remercier:

↳ BOUTAOUS ABDELMADJID

↳ LEMDANI AMINE

↳ NOUR ALI

↳ MAOUCHI HAMID

↳ ACHAIBOU AHCENE

↳ MEDDEB SMAÏL

Ainsi que tous le personnel de la *Bibliothèque de L'E.N.P*



# SOMMAIRE

I. CHAPITRE I.....	Erreur! Signet non défini.
I.1 EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DU SOLIDE.....	4
I.1.1 ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT :.....	4
I.1.2 ETAT DE DEFORMATION :.....	5
I.1.3 Lois constitutives : (Loi de HOOKE).....	10
I.1.4 Problèmes de l'élasticité plane :.....	12
II. CHAPITRE II.....	14
II.1 HISTORIQUE DE LA METHODE :.....	15
II.2 CLASSIFICATION DES TRAITEMENTS :.....	15
II.3 LES DIFFERENTES FORMULATIONS DE LA M.E.F :.....	16
II.4 LES CODES GENERAUX DANS UNE RESOLUTION PAR LA M.E.F :.....	16
II.5 FORMULATION DES CARACTERISTIQUES D'UN ELEMENT FINI :.....	17
II.5.1 l'élément de référence:.....	19
II.5.2 matrice jacobienne:.....	20
II.5.3 fonction de déplacement:.....	20
II.6 MATRICE D'INTERPOLATION DES DEFORMATIONS:.....	20
II.6.1 détermination de la matrice [B] pour l'élément isoparamétrique:.....	21
II.7 MATRICE D'INTERPOLATION DES CONTRAINTES :.....	25
II.8 PATCH TEST:.....	25
II.8.1 CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION:.....	26
II.9 CONVERGENCE :.....	28
III. CHAPITRE III.....	30
III.1 PRESENTATION GENERALE DE LA DYNAMIQUE DES STRUCTURES :.....	31
III.1.1 Objectif fondamental de la dynamique des structures :.....	31
III.1.2 Types de chargements :.....	31
III.1.3 Chargement dû à un tremblement de terre :.....	33
III.1.4 Réponses dynamiques :.....	36
III.2 METHODES DE DISCRETISATION EN ANALYSE DYNAMIQUE :.....	36
III.2.1 Degré de liberté (DDL) dynamique :.....	36
III.2.2 Concentration de la masse :.....	37
III.2.3 Coordonnées généralisées.....	38
III.2.4 Par éléments finis :.....	39
III.3 FORMULATION DES EQUATIONS DU MOUVEMENT :.....	41
III.3.1 Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe de d'Alembert.....	41
III.3.2 Principe des déplacements virtuels :.....	41
III.3.3 Principe de Hamilton :.....	41
III.3.4 Formulation par les équations de langage :.....	42
III.3.5 Formulation par la méthode des éléments finis :.....	42
III.4 EQUATION DU MOUVEMENT :.....	45

III.4.1 Le système masse - ressort - amortissement :	45
III.4.2 Méthode de formulation :	45
III.5 CHARGE DYNAMIQUE :	47
III.5.1 Problème statique :	47
III.5.2 Problème dynamique :	47
III.6 EFFET DES FORCES DE GRAVITE :	48
III.7 MOUVEMENT DE LA BASE :	49
III.8 AMORTISSEMENT :	50
<b>IV. CHAPITRE IV</b> .....	<b>51</b>
IV.1 LES METHODES DE RESOLUTION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE :	52
IV.1.1 Classification des méthodes d'Analyse dynamique :	52
IV.1.2 Méthode de superposition modale :	52
IV.1.3 Intégrations pas à pas :	54
IV.1.4 Les méthodes d'intégration directe :	54
<b>V. CHAPITRE V</b> .....	<b>62</b>
V.1 UN BREF HISTORIQUE :	63
V.2 PROFIL DES BARRAGES-POIDS :	63
V.3 SOL DE FONDATION :	64
V.4 FORCES AGISSANTES SUR LES BARRAGES POIDS :	64
V.4.1 POIDS PROPRE :	64
V.4.2 POUSSEE HYDROSTATIQUE DE L'EAU :	64
V.4.3 SOUS PRESSION :	64
V.4.4 INFLUENCE DES TREMBLEMENTS DE TERRES :	65
V.5 EFFET DE LA TEMPERATURE :	66
V.6 CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA METHODE DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX :	67
V.6.1 CONDITION DE MAURICE LEVY :	68
V.6.2 COMPRESSIONS PRINCIPALES SUIVANT LES PAREMENTS :	68
V.6.3 APPROXIMATIONS FAITES :	69
V.7 CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA METHODE DE L'ELASTICITE (METHODE DE PIGEAUD)	70
V.7.1 METHODE PIGEAUD :	70
V.7.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE ELASTIQUE.....	71
V.8 CALCUL DES CONTRAINTES EN UN POINT DU BARRAGE:	73
V.9 EQUILIBRE DU TETRAEDRE ELEMENTAIRE:	75
V.10 CONTRAINTES PRINCIPALES :	75
V.11 CISAILLEMENT EFFECTIF MAXIMUM.....	76
V.12 CONTRAINTES S'EXERCANT SUR LE PAREMENT AMONT:	77
V.13 CONTRAINTES S'EXERCANT SUR LE PAREMENT AVAL.....	79
V.14 CONDITION DE MAURICE LEVY.....	80
V.15 CONDITION DE STABILITE.....	80
V.15.1 PAREMENT AMONT.....	80
V.15.2 PAREMENT AVAL :	81
V.16 LES LIGNES CARACTERISTIQUES :	82



V.16.1 COURBES D'EGALE COMPRESSION MAXIMALE : ..... 82

V.16.2 COURBES D'EGALE CISAILLEMENT EFFECTIF MAXIMAL ..... 82

V.16.3 LIGNES DE GLISSEMENT EFFECTIF : ..... 84

**VI. CHAPITRE VI..... 85**

VI.1 ROLES DE QUELQUES SOUS-PROGRAMMES : ..... 87

VI.2 VALIDATION DU PROGRAMME EN STATIQUE : ..... 87

    VI.2.1 VALIDATION DES RESULTATS DES DEPLACEMENTS : ..... 87

    VI.2.2 RESULTAT THEORIQUE DU DEPLACEMENT : ..... 88

    VI.2.3 VALIDATION DES RESULTATS DE CONTRAINTES : ..... 89

VI.3 APPLICATION: (BARRAGE POIDS)..... 91

    VI.3.1 Présentation du barrage: ..... 91

    VI.3.2 Discrétisation de l'ouvrage en éléments finis: ..... 92

VI.4 VALIDATION DU PROGRAMME EN DYNAMIQUE: ..... 92

    VI.4.1 MODELE THEORIQUE: ..... 93

**CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS**

**ANNEXE..... 99**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## **Introduction :**

De nos jours, l'ingénieur se retrouve souvent confronté à réaliser des projets soumis à des contraintes financières et de sécurité les plus sévères . Celle-ci exigent non seulement un maximum de garantie de bon fonctionnement du projet fini, mais aussi dans beaucoup de cas, d'éviter l'essai sur des modèles avant d'être pratiquement sûr de leurs résistance aux conditions de travail .

Du besoin de prévoir donc le comportement de certaines réalisations durant leur conception, est née l'idée de la simulation numérique du comportement des systèmes physiques les plus complexes .

Celle-ci débute par la définition des hypothèses auxquelles satisfait le système, puis nécessite par la suite l'utilisation des sciences de l'ingénieur pour aboutir à des systèmes aux équations différentielles décrivant le modèle Mathématique .

Dans beaucoup de cas, la complexité et la grande taille de ces systèmes nécessitent l'utilisation de l'outil informatique via des méthodes numériques ayant connu un essor certain .

La méthode des éléments finis en est une des plus utilisée en calcul des structures, en mécanique des fluides et en transfert de chaleur .

L'analyse statique des structures ainsi descriptisées reste restreinte à certains cas seulement .

En effet, lors de présence d'excitations sismiques ou de mouvements alternatifs engendrant des excitations dues à l'inertie, une étude sérieuse passe nécessairement par une analyse dynamique de la structure .

Ce type d'analyse tient compte de deux aspects fondamentaux que sont :

### **Premièrement :**

Le spectre de fréquences propres de la structure permettant à l'ingénieur structuriste d'éviter durant la conception le phénomène de résonance .

### **Deuxièmement :**

L'analyse de la réponse structurale dans le temps donnant la variation des déformations et des contraintes, permettant ainsi de juger quant à la résistance de la structure .

L'analyse dynamique des structures constituera donc le thème de notre projet .

# **CHAPITRE I**

**EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DES SOLIDES**

## I.1 Equations de base de la mécanique du solide

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse linéaire des problèmes statiques et dynamiques nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire .

L'analyse de ces équations présente les relations entre contraintes déformations dans le cas général tridimensionnel, puis de ce cas dérive le cas particulier de l'élasticité plane et l'élasticité dans le cas unidimensionnel .

### I.1.1 ETAT DE CONTRAINTE EN UN POINT :

#### I.1.1.1 Tenseur contrainte :

A l'intérieur d'un solide soumis à des forces extérieures [ Volumiques et surfaciques ], se créent des forces intérieures de telle façon que chaque point matériel soit soumis à 09 composantes de contraintes :

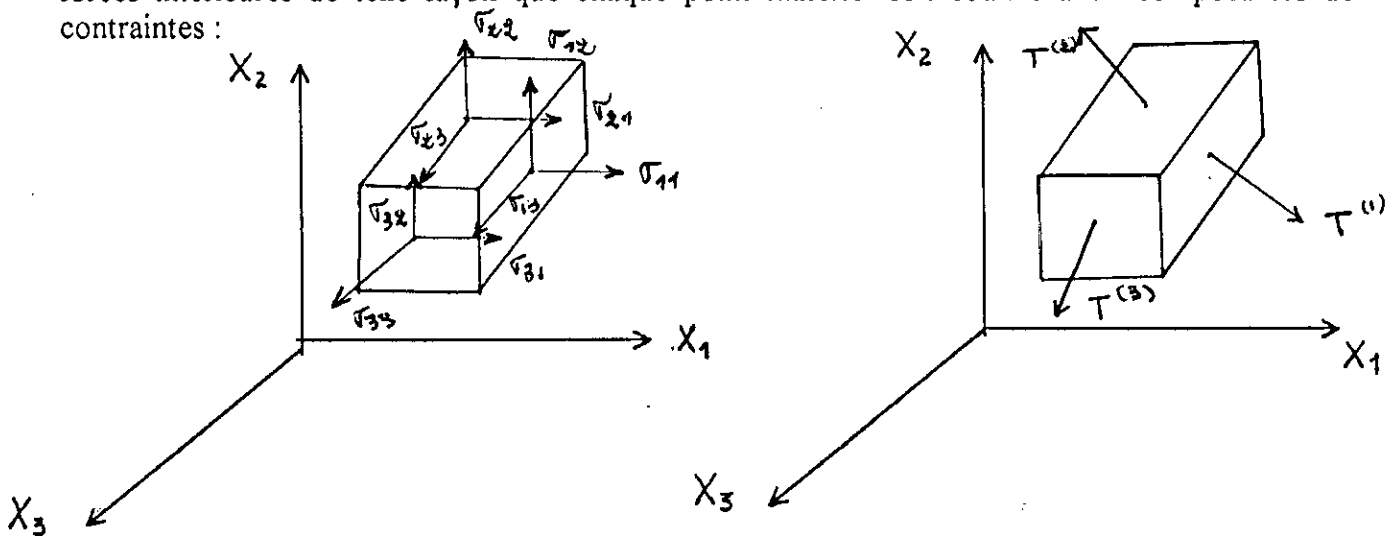


Fig (1-1)

Soit un parallélépipède infinitésimal découpé dans un milieu continu ( fig 1-1 ).

Les forces extérieures sont représentées sur 03 faces rectangulaires de l'élément, l'exposant indique la face sur laquelle s'exerce la force .

En général :

$$T^{(1)} = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}]$$

$$T^{(2)} = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}]$$

$$T^{(3)} = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}]$$

alors

$$T_j^{(i)} = \sigma_{ij} \quad (1-1)$$

D'où les 09 quantités  $\sigma_{ij}$  sont appelées contraintes, se sont des forces par unité de surface, le premier indice indique la direction de la normale a la face, tandis que le second indique la direction de la contrainte elle-même .

quand les 03 vecteurs contraintes  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  et  $T^{(3)}$  agissant en un point selon 03 plans perpendiculaires sont connus, il est possible de déterminer le vecteur contraintes s'exerçant en ce point selon un plan de normale extérieur  $\underline{n}$  arbitraire orientée en utilisant la formule de **Cauchy** :

$$T_i^{(n)} = T \cdot \underline{n} \quad (1-2)$$

Où  $\bar{T}$  est le tenseur contraintes relatif au point considéré :

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

Les termes diagonaux sont appelés contraintes normales tandis que les termes extradiagonaux sont appelés contraintes de cisaillement .

L'équilibre d'un élément de volume  $dv = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$  du solide exige :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1-4)$$

### I.1.1.2. Equation d'équilibre :

Appliquant la loi de **Newton** en un point P quelconque appartenant à un élément de masse  $dm$  :

$$df = 0$$

Où,  $df$  représente la somme de toutes les forces surfaciques et volumiques agissant sur l'élément . En intégrant cette équation sur un domaine arbitraire de volume  $V$  et de frontière surfacique  $R$  . parmi les forces surfaciques seules celles qui agissent sur  $R$  subsistent

( 3<sup>ème</sup> loi de Newton ) .

$$\oint_{dr} T_i^{(n)} dA + \int_R f_i \cdot dv = 0 \quad (1-5)$$

$$\text{or} \quad T_i^{(n)} = \sigma_{ij} \cdot n_j$$

$$\text{alors :} \quad \oint_{dr} \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot dA + \int_R f_i \cdot dv = 0 .$$

On utilisant le théorème de **Gauss** ( théorème de divergence ), on obtient:

$$\int_R (\sigma_{ij,j} + f_i) dV = 0 .$$

Comme le volume  $R$  est arbitraire, l'équation (1-5) n'est vraie que lorsque :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1-6)$$

## I.1.2. ETAT DE DEFORMATION :

### I.1.2.1. Tenseur déformation :

En élasticité, la définition de la déformation est basée sur la comparaison d'une configuration donnée à une configuration d'origine ( initiale ) .

Pour ce faire, on considère initialement deux points  $P$  et  $Q$  de la figure (1-2), distants d'une quantité  $\Delta y$  .

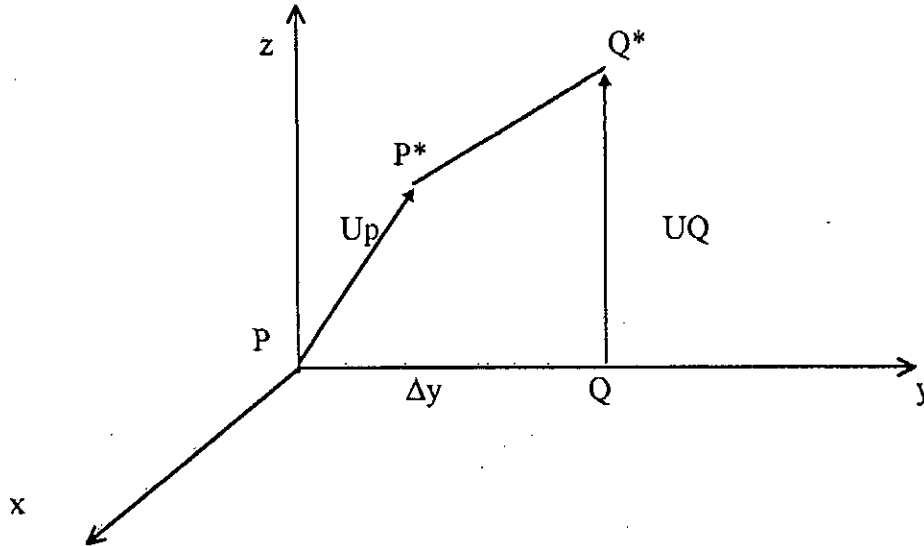


fig (1-2) Déformation d'un segment linéaire

Après déformation, P passe à P\* et Q à Q\*, on projette P\*Q\* sur l'axe des y :

$$(P^*Q^*)_y = \Delta y + (Uy)_Q - (Uy)_P$$

En exprimant  $(Uy)_Q$  comme une série de Taylor en terme de  $(Uy)_P$  :

$$(Uy)_Q = (Uy)_P + \frac{\partial (Uy)_P}{\partial y} \Delta y + \dots$$

En substituant ce développement de  $(Uy)_Q$  dans l'expression de  $(P^*Q^*)_y$

On obtient :

$$(P^*Q^*)_y = \Delta y + [(Uy)_P + \frac{\partial (Uy)_P}{\partial y} \Delta y + \dots] - (Uy)_P$$

$$= \Delta y + \frac{\partial (Uy)_P}{\partial y} \Delta y + \dots$$

L'élongation du segment PQ est :

$$(P^*Q^*)_y - \Delta y = \frac{\partial (Uy)_P}{\partial y} \Delta y + \dots$$

En divisant par  $\Delta y$  et en prenant la limite de chaque terme quand  $\Delta y$  tend vers zéro, on obtient :

$$\frac{\overline{(P^*Q^*)}_y - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial U_y}{\partial y} = \epsilon_{yy}$$

Dans le cas de petites déformations, on a :  $\overline{(P^*Q^*)} = (P^*Q^*)_y$ , ce qui permet de dire que  $\epsilon_{yy}$  représente l'allongement par unité de longueur au point P dans la direction de l'axe des y . De la même façon on définit:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

On considère à présent les segments PR et PQ de longueurs respectives  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , quand l'élément subit une déformation les points P, Q et R passent à P\*, Q\* et R\* respectivement .

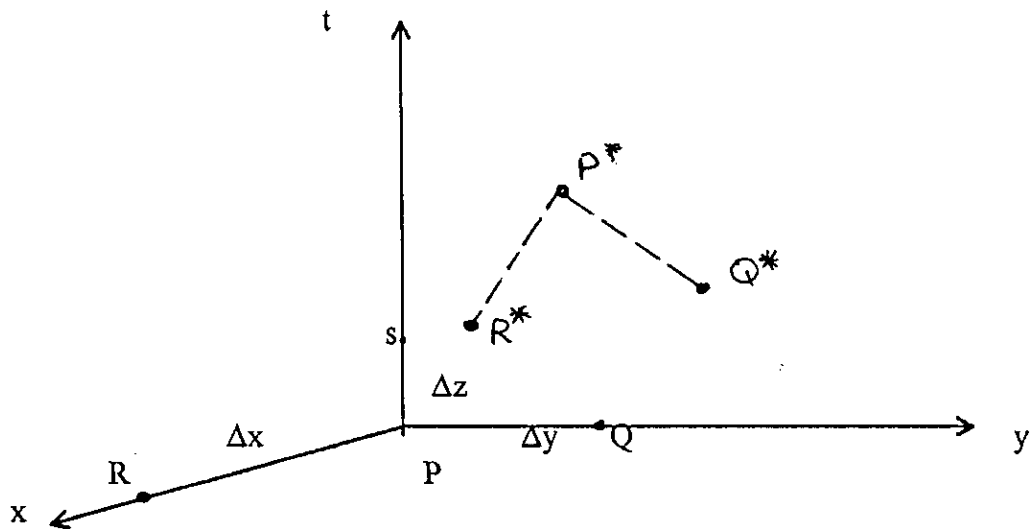


fig 1-3 déformation de segment linéaires

On projette les segments  $(P^*Q^*)$  et  $(P^*R^*)$  sur le plan (x,y) .

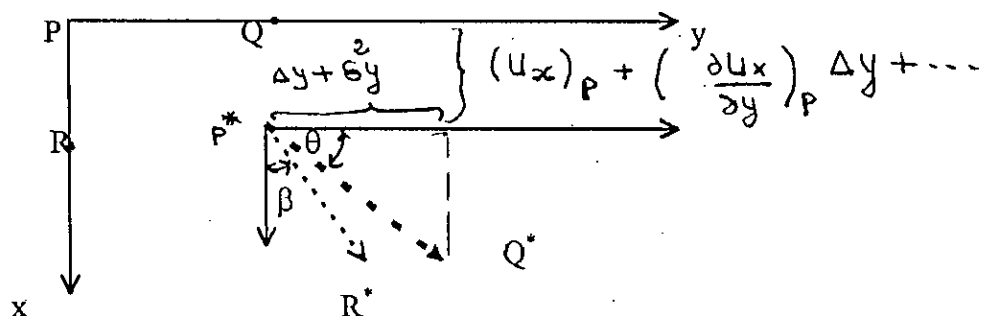


fig (1-4) Projection des segments déformés



En exprimant le déplacement du point Q dans la direction x en terme de  $(U_x)_p$  comme suit :

$$(U_x)_Q = (U_x)_p + \frac{(\partial U_x)_p}{\partial y} \Delta y + \dots$$

La composante de la projection de P\*Q\* selon y est :

$\Delta y + \delta y^2$ , ou  $\delta y^2$  est un incrément de second ordre pour les petites déformations .

L'angle  $\theta$  peut être exprimé comme suit:-

$$\tan \theta = \frac{(\partial U_x / \partial y)_p \Delta y + \dots}{\Delta y + \delta^2 y}$$

En fait tendre  $\Delta y$  vers 0, les termes d'ordre supérieur dans le numérateur s'annulent ainsi que l'incrément du second ordre  $\delta^2 y$  .

donc : 
$$\tan \theta = \theta = \frac{\partial U_x}{\partial y}$$

D'une façon analogue : 
$$\tan \beta = \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

La somme  $(\theta + \beta)$  peut être directement liée à la déformation de cisaillement comme suit:-

$$(\theta + \beta) = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} = 2 \epsilon_{xy} = \gamma_{xy}$$

Par ce que les déformations sont supposées petites, on peut dire que  $\gamma_{ij}$  représente la variation de l'angle droit initialement formée par 2 segments de droites infinitésimales dans la ième et la jème direction en un point .

Les composantes du tenseur déformation sont liées à celles du champs de déplacements par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (1-7)$$

d'une façon explicite :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{yz}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad ; \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xz}$$

**I.1.2.2 Equations de Compatibilité :**

Si le champs déplacements est connu, il est facile de trouver les 06 composantes du tenseur déformation en substituant les valeurs de  $U_i$  dans la formule suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (1-7)$$

Il n'est pas possible de se donner arbitrairement les 06 fonctions  $\epsilon_{ij}$  et d'en déduire les 03 fonctions déplacement . En effet, cela revient à intégrer un système de 06 équations aux dérivées partielles à 03 inconnues, pour que ce système soit intégrable, on impose certaines restrictions sur les termes du tenseur  $\epsilon_{ij}$  .

Ces conditions d'intégralité sont appelées les équations de compatibilité et sont données par :

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ki,lj} - \epsilon_{ij,kl} = 0 \quad (1-8)$$

En raison de la symétrie des indices et de la présence d'identité, le nombre de ces équations se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1-9 a)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (1-9 b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (1-9 c)$$

$$\frac{2\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}) \quad (1-9 d)$$

$$\frac{2\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}) \quad (1-9 e)$$

$$\frac{2\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}) \quad (1-9 f)$$

Les conditions de compatibilité sont des conditions nécessaires pour l'existence de solution unique en terme de déplacements .

### I.1.3 Lois constitutives : (Loi de HOOKE)

Le tenseur contrainte et le tenseur déformation sont liés entre eux par des relations appelées Lois constitutives . En général ces relations impliquent la température et le temps comme autres variables.

La relation la plus simple qui puisse exister entre contraintes et déformations est une relation linéaires de la forme :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (1-10)$$

L'équation (1-10) représente l'équation de Hooke généralisée .

$C_{ijkl}$  est un tenseur du 4<sup>ème</sup> ordre qui consiste en 81 termes qui sont indépendants de la position du point pour un matériau homogène .

L'équation (1-10) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{16} \\ C_{21} & & & \\ C_{31} & & & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ C_{61} & \dots & \dots & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xx} \\ \gamma_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

**Green** ( 1839 - 1841 ) a défini un matériau comme étant élastique s'il existait une fonction d'énergie de déformation  $W$  tel que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1-11)$$

avec :

$W$  : est une série en terme de déformations infinitésimales .

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \cdot \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{kl} \quad (1-12)$$

En raison de la symétrie élastique, on peut réduire le nombre de termes indépendants .

#### 1° ) Cas d'un plan de symétrie :

On démontre que dans ce cas :

$$C_{15} = C_{16} = C_{25} = C_{26} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = 0 .$$

Le nombre de termes indépendants est alors de 13 .

**2°) Cas de symétrie orthotrope :**

En plus des contraintes nulles du cas précédent on a :

$$C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{36} = 0 .$$

**3°) L'isotropie :**

Pour un matériau isotrope, les constantes élastiques sont indépendantes de l'orientation des axes de coordonnées ce qui impliquera l'existence de deux constantes indépendantes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de **Lamé** .

$$\lambda = \frac{\mathcal{D}E}{(1+\mathcal{D})(1-2\mathcal{D})} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\mathcal{D})}$$

$E$  : Module de **Young**

$\mathcal{D}$  : Coefficient de **poisson**

$G$  : Coefficient de glissement (cisaillement) .

$$\bar{D} = C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E - \mathcal{D}/E - \mathcal{D}/E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E - \mathcal{D}/E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\mathcal{D})}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(1+\mathcal{D})}{E} & 0 \\ \text{Symétrique} & & & & & E \\ & & & & & & \frac{2(1+\mathcal{D})}{E} \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

La loi de **Hooke** pour un matériau isotrope est :

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{pp} \cdot \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1-15)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \cdot \sigma_{pp} + \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} \quad (1-16)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_{pp} \cdot \delta_{ij} + \frac{(1+\mu)}{E} \cdot \sigma_{ij} \quad (1-17)$$

#### I.1.4. Problèmes de l'élasticité plane :

Quant les équations écrites précédemment ( dans le cas tridimensionnel), ne dépendent pas de l'une des trois dimensions, le problème se réduit donc à 2 dimension, ce cas est appelé " élasticité plane " .

Les problèmes d'élasticité plane sont classés en 2 grandes catégories:

- de contraintes planes .
- de déformations planes .

##### I.1.4.1. Contraintes planes :

Les problèmes de contraintes planes reposent sur les suppositions suivantes :

- Le solide est mince, c'est à dire : sa dimension suivant z est petite par rapport au deux autres x et y .
- Le solide n'est pas chargé sur les faces dont la normale est chargée suivant z .

On peut citer comme exemples de structures étudiées en contraintes planes :

- Poutres
- Voiles minces .

En tenant compte des hypothèses en contraintes planes, on a :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

On a alors pour un matériau isotrope les relations :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

et :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

#### I.1.4.2. déformations planes :

on arrive à la même simplification du problème lorsque l'on considère la situation inverse à celle d'un cas de contraintes planes, celle dans laquelle la dimension du corps dans la direction de l'axe z est très étendue.

on citera comme exemples étudiés en déformations planes :

- les talus
- les murs de soutènements
- les tunnels
- les barrages poids (ce cas est détaillé dans notre étude)

un cas de déformations planes est caractérisé par :

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0.$$

les relations contraintes - déformations pour un matériau isotrope en déformations planes sont :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

Notons dans ce cas que la contrainte  $\sigma_{zz}$ , bien que celle-ci n'est forcément nulle, elle peut être déterminée en fonction des autres composantes.

$$\epsilon_{zz} = 0$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{yy})) \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

# **CHAPITRE II**

FORMULATION DE LA METHODE  
DES  
ELEMENTS FINIS

## **II.1 Historique de la méthode :**

Il existe plusieurs méthodes décrivant le comportement des systèmes physiques dans la modélisation d'une structure, parmi elle, la méthode des éléments finis. Cette méthode s'applique à des problèmes stationnaires, non stationnaires, linéaires, non linéaires 1,2 ou 3 dimensions.

les travaux constituant le point de départ de l'histoire de l'analyse des structures furent ceux de **NAVIER**(1819), sur les structures hyperstatiques. Les méthodes énergétiques furent établies par **MAXWELL** (1864), et **CASTIGLIANO** (1878).

C'est à cette période que les notions d'analyse des structures formées d'assemblages de barres ont été mises au point.

Avec le développement de l'ordinateur, la résolution de systèmes d'équations ne posait plus de problèmes et la M.E.F connut un progrès considérable, si bien qu'elle fut étendue à des domaines autres que celui de la dynamique des structures.

A partir de 1960, la M.E.F connut un développement rapide et dans plusieurs directions, à savoir:

- Création d'éléments de haute précision.
- Élargissement aux problèmes non linéaires.

De nos jours elle représente la méthode la plus utilisée, du moins, en dynamique des structures, retenue particulièrement pour fiabilité en modélisation des systèmes dans divers secteurs de l'industrie.

Elle consiste à étudier le comportement statique et dynamique d'une structure en connaissant les déplacements aux différents noeuds en fonction du temps et cela en discriminant cette structure dans l'espace(système de coordonnées(x, y, z)en éléments finis de type déplacements).

## **II.2 Classification des traitements :**

On peut classer les traitements des problèmes de structure en traitement :

- Linéaire statiques
- Linéaire dynamiques
- Non Linéaire statiques
- Non Linéaire dynamiques

Quand on parle de <sup>non</sup>linéarité, on fait toujours allusion au changement des propriétés mécaniques du matériau (plasticité).

Ceci est vrai dans le cas de l'analyse non linéaire statique qui ne fait intervenir ni inertie (masse) ni amortissement.

Dans la dynamique, cependant, la non linéarité peut apparaître dans :

- La rigidité                      non linéarité géométrique
- non linéarité du matériau



- L'amortissement
- la masse (inertie)

Si on considère le système d'équations différentielles du mouvement d'une structure à N degrés de liberté :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (2-1)$$

Il est évident que si les coefficients des matrices M, C et K (masse, amortissement, et rigidité), varient au cours du temps, le système devient non linéaire et le concept de la superposition de modes ne peut pas être appliqué .

Dans notre travail, on a opté pour un traitement linéaire statique et dynamique .

Le traitement linéaire qui donne de très bons résultats en statique, ne nous donne pas toujours d'aussi bons résultats en dynamique car sous le chargement cyclique, le comportement des matériaux devient non linéaire .

La nature complexe de l'approche non linéaire a sévèrement restreint son champs d'utilisation qui jusqu'à présent n'a pas dépasser le cercle des travaux de recherche .

### **II.3 Les différentes formulations de la M.E.F :**

Il existe 03 formulations différentes de la méthode des éléments finis.

- Formulation " **contraintes** " : Considère les champs des contraintes comme inconnus, et se base sur la théorie de l'énergie potentielle .
- Formulation " **Déplacement** " : Considère le champs des déplacements comme inconnus primaires du problème, cette formulation est basée sur la stationnarité de l'énergie potentielle .
- Formalité " **mixte** " : considère les champs de déplacements et de contraintes comme inconnus, d'on le nom de " mixte " .

Dans notre travail, on a opter pour une formulation déplacements qui est pratiquement la plus utilisée dans la résolution par la M.E.F.

### **II.4 Les codes généraux dans une résolution par la M.E.F :**

En général 05 phases principales peuvent être mises en évidence lors du traitement d'un problème par la méthode des éléments finis .

1. Discrétisation du milieu en un certain nombre d'éléments finis.
2. Calcul des caractéristiques élémentaires ( matrice de rigidité, de masse, d'amortissement, forces équivalentes au niveau des noeuds ) .
3. Assemblage des caractéristiques élémentaires .
4. Résolution numérique du problème global (obtention des déplacements, vitesses, accélération) .
5. Calcul de restitution au niveau élémentaire ( calcul des contraintes et déformations dans les éléments ) .

## **II.5 Formulation des caractéristiques d'un élément fini :**

L'étude d'un milieu élastique plan par la méthode des éléments finis consiste à le subdiviser en un nombre fini d'éléments .

L'élément ,ou les éléments choisis pour une discrétisation donnée, doivent être de forme et de géométrie bien déterminées, de façon à ce qu'ils décrivent le mieux la géométrie du milieu et ces conditions aux limites .

Une grande variété d'éléments peuvent être utilisés pour la résolution des problèmes de l'élasticité plane . Ces éléments sont répertoriés dans la figure (2-1) ci-dessous .


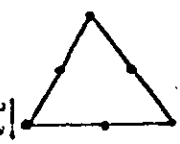
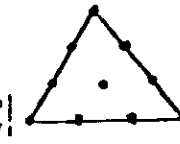
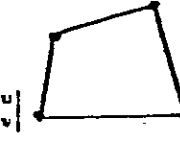

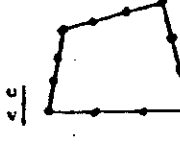
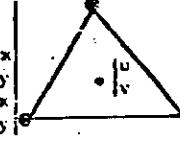




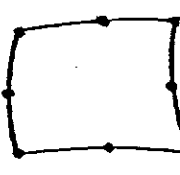

	TRIANGLES			QUADRILATERES		
CHAMP	LINEAIRE	QUADRATIQUE	CUBIQUE	LINEAIRE	QUADRATIQUE	CUBIQUE
ELEMENT DE BASE	 C.S.T. 6 d.d.l.	 L.S.T. 12 d.d.l.	 Q.S.T. 20 d.d.l. → 18	 Q4 8 d.d.l.	 Q8 (SERENDIP) 16 d.d.l.	 Q12 (SERENDIP) 24 d.d.l.
VARIANTES			 20 d.d.l. → 18	Q5 (modes internes) Q6 (modes incompatibles) QM (intégration sélective)	 Q6 (LAGRANGE) QM 6   intégration réduite	 Q12 (LAGRANGE) QM 12   intégration réduite
		 ISOPARAMETRIQUE	 ISOPARAMETRIQUE		 ISOPARAMETRIQUE	 ISOPARAMETRIQUE

Figure 2.1 : Classification des éléments bidimensionnels.

Figure (2-1)

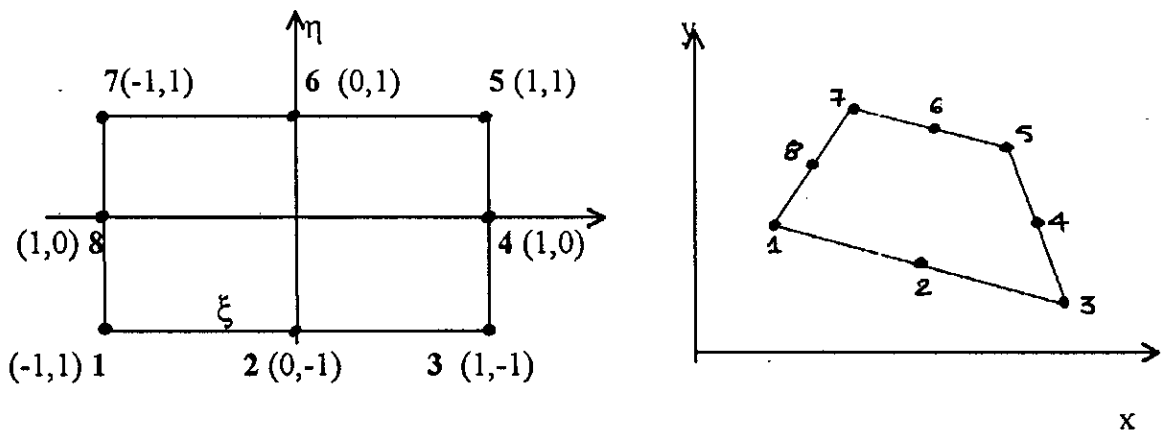
L'élément que nous avons jugé le mieux compatible dans notre étude, pouvant éventuellement être utilisé pour la discrétisation d'un grand nombre de structures est l'élément isoparamétrique quadrilatéral à huit noeuds, chaque noeud ayant deux degrés de liberté :  $U_i$  et  $v_i$  respectivement suivant les directions  $x$  et  $y$ .

### II.5.1. l'élément de référence:

Dans le but de simplifier la définition analytique des éléments de formes complexes, on utilise la notion d'élément de référence simple situé dans un espace de référence.

L'élément de référence peut être transformé en élément quelconque par une transformation géométrique bijective.

par exemple, dans le cas d'un élément quadrilatéral à huit noeuds :



$\xi = \langle \xi, \eta \rangle$  élément de référence       $x = \langle x, y \rangle$  élément réel

La transformation  $\tau$  définit les coordonnées  $x$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  du point correspondant de l'élément de référence:

$$\tau: \xi \longrightarrow x(\xi) = [N(\xi)] \{X_n\}$$

$\{x_n\}$  : sont les coordonnées des noeuds géométriques de l'élément réel.

La fonction  $N$  est appelée fonction de transformation géométrique.

Chaque transformation  $\tau$  doit être choisie de manière à vérifier les conditions suivantes:

- bijective en tout point  $\xi$  situé sur l'élément de référence correspondant, c'est à dire à tout point de l'élément de référence correspond un point de l'élément réel, et un seul, et inversement.
- les noeuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux noeuds géométriques de l'élément réel.
- Chaque portion de frontière de l'élément de référence correspondant à une portion de frontière de l'élément réel.

### II.5.2 matrice jacobienne:

L'existence de deux repères différents, l'un de référence, l'autre réel, nécessite une matrice jacobienne pour le passage d'un repère à un autre.

Toutes les expressions qui impliquent des dérivées en  $x, y, z$ , sont transformées en  $\xi, \eta, \zeta$ , grâce à la matrice jacobienne.

$$[\partial\xi] = [J]\{\partial x\}$$

La matrice jacobienne sera calculée par le produit de deux matrices, l'une contenant les dérivées en  $\xi$  des fonctions de transformation géométrique, et l'autre les coordonnées des  $n^\circ$  noeuds géométriques de l'élément.

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle N, \xi \rangle \\ \langle N, \eta \rangle \\ \langle N, \zeta \rangle \end{bmatrix} [\{x_n\} \{y_n\} \{z_n\}] \quad (2-2)$$

### II.5.3 fonction de déplacement:

Soit un élément fini défini par ses  $n^\circ$  noeuds et par ses frontières, Les déplacements en tout point intérieur à l'élément sont définis sous la forme d'un vecteur colonne  $\{f(x,y)\}$ , tel que :

$$\{F\} = \langle N \rangle \{\delta\}^e = \langle N_1, N_2, N_3, \dots, N_8 \rangle \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

Où les composantes  $\langle N \rangle$ , désignées sous le nom de fonctions d'interpolation, sont des fonctions des positions.

### II.6 matrice d'interpolation des déformations:

En prenant les équations donnant les relations entre les déplacements et les déformations en élasticité plane sous forme matricielle, on obtient:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

on notera la matrice définie dans (2-3) par [L], donc autrement on peut écrire:

$$\{\epsilon\} = [L] \cdot \{\delta\} \quad (2-4)$$

{ $\delta$ } vecteur déplacement au point donnée les fonctions d'interpolations nous permettent d'avoir une relation entre les déplacements aux noeuds  $\delta^*$  avec les points se trouvant dans le champs ayant pour frontière ces noeuds. Autrement dit, les déplacement nodaux étant connus, on peut déterminer ceux des points à l'intérieur du milieu grâce aux fonctions ( $N_i$ ) qui y définissent le champs de déplacement  $\delta$  en tout points. La relation écrite sous forme matricielle est :

$$\{\delta\} = [N] \cdot \{\delta^*\}$$

ou [N] : matrice d'interpolation des déplacements

$\delta^*$ : les déplacements nodaux.

en injectant l'expression de { $\delta$ } donnée par l'équation (2-6), on aura:

$$\{\epsilon\} = [L] \cdot [N] \cdot \{\delta^*\} \quad (2-5)$$

on pose:  $[B] = [L] \cdot [N]$

ainsi on a défini la matrice [B] qui représente la matrice d'interpolation des déformations.

$$\{\epsilon\} = [B] \cdot \{\delta^*\} \quad (2-6)$$

### II.6.1 détermination de la matrice [B] pour l'élément isoparamétrique:

les fonctions d'interpolation géométriques sont données par :

$$\begin{aligned} x &= [N]^T [x] \\ y &= [N]^T [y] \end{aligned} \quad (2-7)$$

Les fonctions d'interpolation des déplacements sont données par :

$$\begin{aligned} U &= [N]^T [U] \\ V &= [N]^T [V] \end{aligned} \quad (2-8)$$

Où :  $[N]^T = [N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8,]$  (2-9)

$$\text{et } [x] = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x8 \end{bmatrix} \quad [y] = \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y8 \end{bmatrix} \quad [U] = \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U8 \end{bmatrix} \quad [V] = \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V8 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

On peut écrire la formule de différenciation suivante :

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Les fonctions d'interpolations nous permettent d'avoir une relation entre les déplacements aux noeuds  $\delta^*$  avec les points se trouvant dans le champs ayant pour frontières ces noeuds. Autrement dit, les déplacements nodaux étant connus, on peut déterminer ceux des points à l'intérieur du milieu grâce aux fonctions de formes ( $N_i$ ) qui y définissent le champs de déplacement  $\delta$  en tout point. La relation écrite sous forme matricielle est :

$$\{\delta\} = [N]. \{\delta^*\}$$

où  $[N]$  : matrice d'interpolation des déplacements

$\delta^*$  : le déplacement nodal.

J : étant le Jacobien défini dans la relation précédente (2-2) .

On calcul le Jacobien en utilisant les relations d'interpolation géométriques données en (2-10) soit par exemple :

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} X_i \quad (2-12)$$

On obtient donc l'expression matricielle de J en utilisant l'équation (2-12) .

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & \dots & N_{8,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & \dots & N_{8,\eta} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$\text{Ou: } N_{i,\xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad N_{i,\eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (2-14)$$

L'expression (2-13) écrite sous forme condensée devient :

$$[J] = \begin{bmatrix} N^T, \xi \\ N^T, \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

Si la transformation géométrique est unique ( la transformation est bijective ), le Jacobien est non singulier, donc l'inverse de J existe (  $\det J \neq 0$  ) ainsi on pourra écrire :

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \partial/\partial \xi \\ \partial/\partial \eta \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

A partir des relations précédentes, on peut obtenir l'expression des dérivées des déplacements .

$$\begin{bmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \partial U/\partial \xi \\ \partial U/\partial \eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} N^T, \xi \\ N^T, \eta \end{bmatrix} \cdot [U] \quad (2-17)$$



$$\begin{bmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \partial V / \partial \xi \\ \partial V / \partial \eta \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} N^T, \xi \\ N^T, \eta \end{bmatrix} \cdot [V] \quad (2-18)$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^T, \xi & 0 \\ N^T, \eta \\ 0 & N^T, \xi \\ N^T, \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

d'où l'expression des déformations :

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

On peut obtenir à partir des deux expressions (2-20) et (2-19) la matrice [B] d'interpolation de déformations telle que l'on puisse écrire :

$$\langle \epsilon \rangle = [B] \langle \delta^* \rangle / \langle \delta \rangle = \langle U \ V \rangle$$

Par identification, la matrice [B] a pour expression :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T, \xi & 0 \\ N^T, \eta & N^T, \xi \\ 0 & N^T, \eta \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

## II.7 Matrice d'interpolation des contraintes :

Les relations entre contraintes et déformations pour " les contraintes planes " peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\langle \sigma \rangle = [D] \cdot \langle \varepsilon \rangle \quad (2-22)$$

En injectant l'expression de  $\langle \varepsilon \rangle$  donnée par l'équation (2-6), on aboutit à :

$$\langle \sigma \rangle = [D] \cdot [B] \cdot \langle \delta^* \rangle \quad (2-23)$$

Ou,  $[D] \cdot [B]$  matrice d'interpolation des contraintes, et  $[D]$  matrice d'élasticité du milieu qui est fonction des caractéristiques du matériau le constituant :

- En cas de " contraintes planes, " la matrice  $[D]$  est donnée par :

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \quad (2-24)$$

En " déformations planes " la matrice  $[D]$  est donnée par :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1/1-\nu & 0 \\ \nu/1-\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu/2(1-\nu) \end{bmatrix} \cdot \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2-25)$$

## II.8 PATCH TEST:

Le patch test est un moyen d'assurer, pour des problème d'élasticité, la convergence d'éléments de type déplacement dont les fonctions de forme enfreignent les conditions de continuité, il est applicable à tous les éléments finis, il est :

- une condition nécessaire pour assurer la convergence de toute approximation pour des éléments finis, et que correctement généralisé et interprété, il peut fournir une condition suffisante de CONVERGENCE.
- une évaluation du taux de convergence (asymptotique) de l'élément testé.
- un moyen de construire de nouveaux éléments finis qui sont précis tout en ne vérifiant pas les conditions de compatibilité (continuité) . Il est néanmoins utile car il fournit une façon de vérifier que la programmation est correcte.

Le test original a été introduit par "IRONS " d'une façon physique et a été interprété comme un moyen de vérifier si un ensemble d'éléments soumis à une contrainte constante reproduisait exactement le comportement du milieu et subissait des déformations correctes quand il devenait infiniment petit, s'il en est ainsi, alors on peut dire que le modèle à éléments finis représente bien le comportement du milieu réel et qu'à la limite quand la taille des éléments diminue, il reproduit exactement le comportement de la structure réelle.

Il est clair qu'un déplacement de type corps solide ne provoque aucune déformation et que si les lois constitutives correctes sont reproduites, aucun changement dans les contraintes ne doit en résulter, le "PATCH TEST" garantit ainsi qu'un corps solide en mouvement ne subit aucune déformation.

Autrement, on peut dire que pour qu'un élément quelconque puisse être soumis au "PATCH TEST"; il faut qu'il, contienne au moins un noeud à l'intérieur de ses frontières, on charge les noeuds des frontières et on applique à l'élément le nombre d'appuis nécessaires pour éviter tout mouvement de corps rigide, on détermine les solutions analytiques et numérique .

Si les deux solutions sont sensiblement égales, alors le test est vérifié et la convergence de la solution pour un problème utilisant ce type d'éléments sera assuré.

### II.8.1 CLASSIFICATION DES METHODES DE RESOLUTION:

Les méthodes de résolution en analyse statique peuvent se classer en :

Méthodes itératives : citons:

- Méthode de Gauss-Seidel
- Méthode de relaxation
- Minimisation de l'énergie potentielle.

Méthodes directe:

- Méthode d'élimination de Gauss.
- Méthode de factorisation de Cholevsky.

Les qualités requises pour une méthode utilisée sont :

Performances : rapidité et utilisation au mieux des ressources (mémoire centrale ...).

Fiabilité : détection des singularités.

En outre, la méthode utilisée ne doit pas être optimisée pour un type spécifique de problème, mais plutôt avoir les meilleures qualités de performance et de fiabilité pour une vaste gamme d'application.

La seule des méthodes itératives pouvant présenter un intérêt quelconque en analyse des structures est la minimisation de l'énergie potentielle totale par la méthode des gradients conjugués qui converge théoriquement en  $N$  itérations pour un système d'ordre  $N$ .

Les avantages de cette méthode tiennent d'une part à sa simplicité de mise en oeuvre et d'autre part qu'elle ne nécessite qu'un minimum de mémoire centrale, car la matrice de rigidité est assemblée sous forme explicite.

L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans ses performances moindres par rapport aux méthodes directes de résolution bien adaptées, et sa relative inaptitude à traiter des problèmes avec des cas de charges multiples.

les méthodes directes de résolution (élimination de Gauss, factorisation de Cholevsky) ont en commun une excellente fiabilité. Elles permettent la détection des singularités. Par résolution elles sont particulièrement bien adaptées à la résolution de problèmes avec des cas de charges multiples.

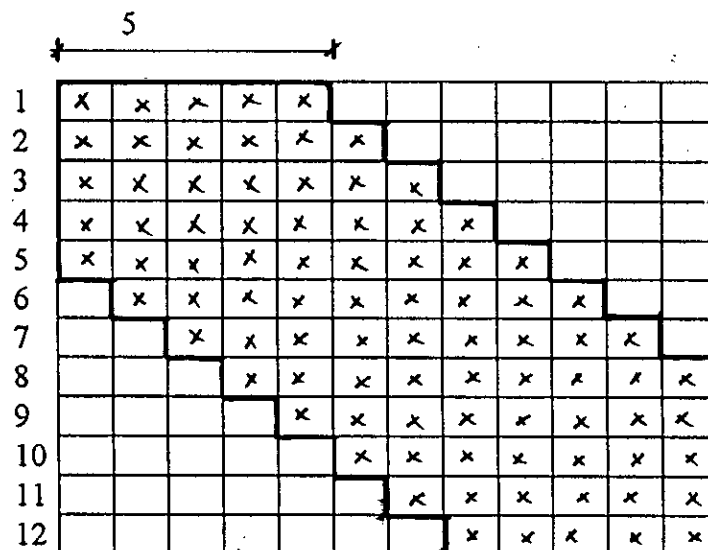
Enfin, leur implantation dans les logiciels peut être adaptée aux problèmes traitée prise en compte du peuplement faible des matrice de rigidité et cela en utilisant des techniques particulières de manipulation des grandes matrices.

Parmi ces techniques, citons :

- résolution sur matrices bandes;
- résolution par blocs;
- méthode frontale.
- 

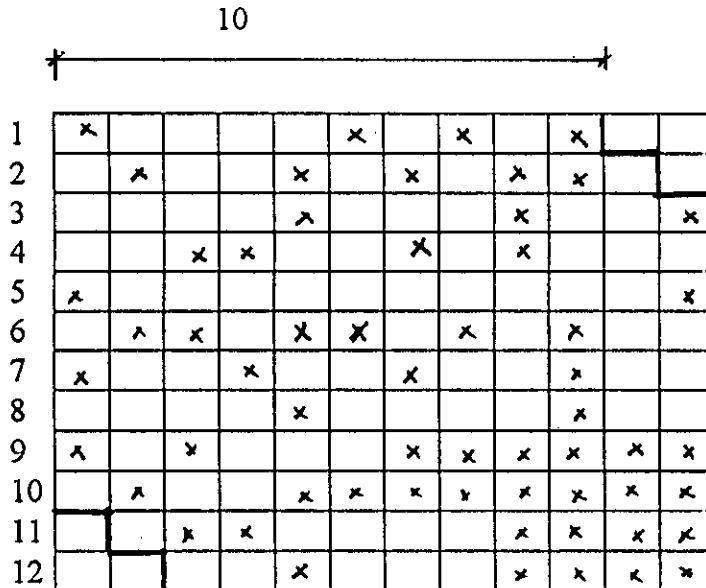
notre choix de résolution, s'est arrêté sur la méthode directe de factorisation de CHOLEVSKY sur matrice - bandée - symétrique et qui est développée en Annexe 2.

1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12



(a) Numérotation optimale

1	7	8	2
5	9	10	6
4	11	12	3



(b) Mauvaise numérotation

## II.9 CONVERGENCE :

Le procédé de discretisation par la M.E.F. rend le système continu (de nombre de d.d.l. infini) en un système discret (nombre de d.d.l. fini).

La M.E.F. reposant sur la donnée des fonctions de forme, la convergence reste une question primaire, afin de s'assurer que le résultat tend vers la solution exacte du problème (en général inconnu). Pour assurer la convergence, on doit choisir des fonction de déplacement remplissant certaines conditions :

- La fonction déplacement choisi doit être telle qu'elle ne permette pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements de ses noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps rigide.
- La forme de la fonction déplacement choisie, doit être de telle sorte que si ses déplacements nodaux sont compatibles avec un état de déformation constante, on puisse réellement obtenir ces déformations dans tout l'élément.

Si comme en figure (2-2), on définit une suite de solutions à partir d'une suite de maillages dans laquelle chaque maillage est obtenu par subdivision du maillage précédent . pour des éléments conformes , cette suite converge vers la solution exacte de façon monotone en énergie .

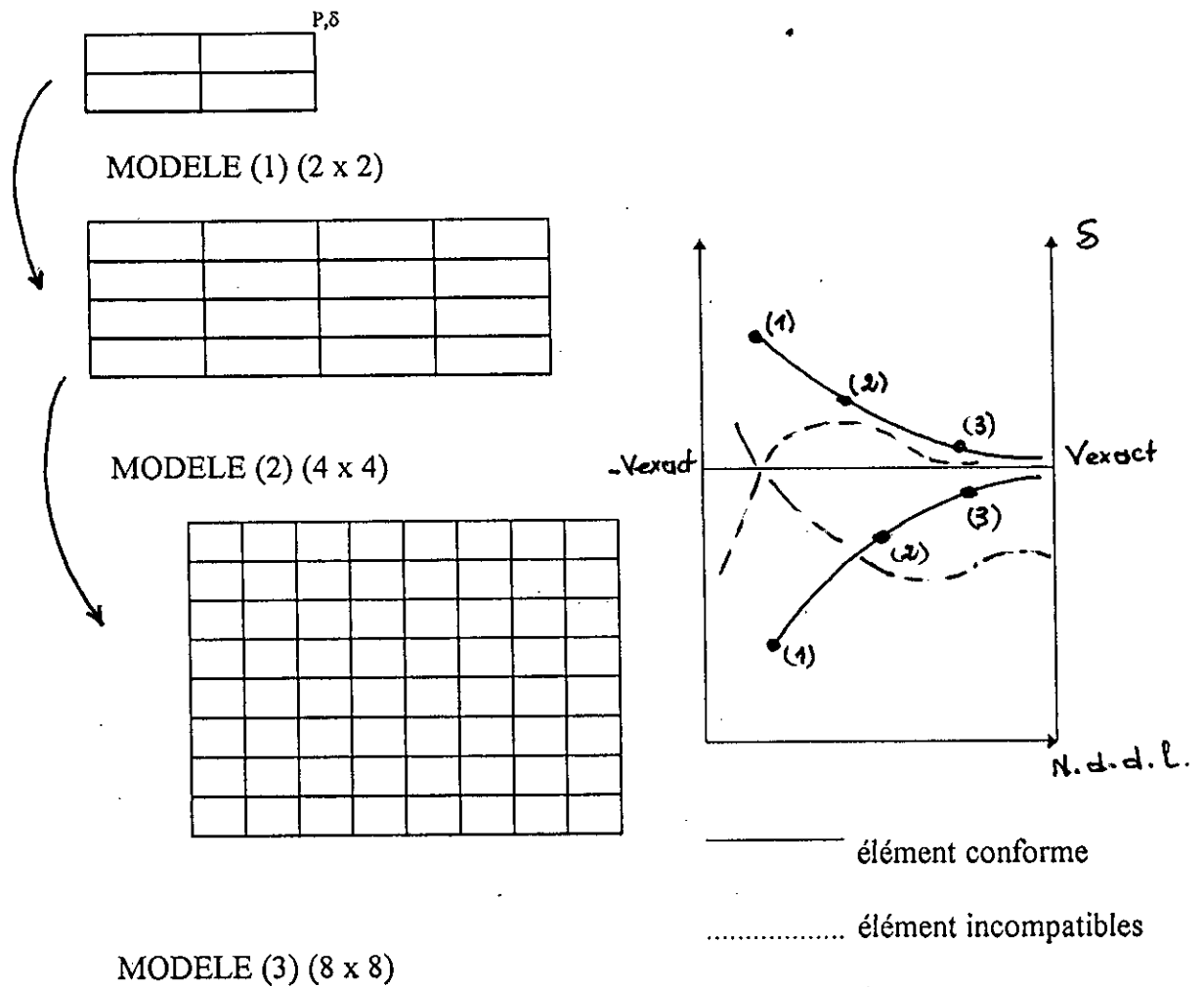


Fig 2.2 : Test de convergence.

En d'autres termes , l'énergie potentielle totale des modèles tend vers sa valeur exacte de minimum absolu , lorsque on augmente ainsi le nombre  $N$  de D.D.L. , ce qui est équivalent que les déplacements convergent " par le bas " les modèles conformes de type déplacement sont " **trop rigides** " par rapport à la structure réelle .

Notons que les éléments finis de type " contrainte " ( quand il sont conformes ) " convergent par le haut " ( fig . 2.2 ) . dans ce cas , les modèles conformes de type " contrainte " sont " **trop flexibles** " par rapport à la structure réelle .

# **CHAPITRE III**

LA DYNAMIQUE DES STRUCTURES

### III.1 Présentation générale de la dynamique des structures :

#### III.1.1 Objectif fondamental de la dynamiques des structures :

Dans cette partie, on va présenter des méthodes qui permettent d'étudier une structure donnée soumise à un chargement dynamique .

Une charge dynamique est une charge dont l'intensité, la direction ou le point d'application varie avec le temps . La réponse de la structure à une charge dynamique, c'est à dire les déplacements et les contraintes qui en résultent, est également variable dans le temps, donc dynamique elle aussi .

Si la variation de la charge en fonction du temps est complètement connue, on l'appelle " charge dynamique déterminée ", l'étude de la réponse peut se faire selon la méthode " déterministe ", si par contre la loi de variation de la charge en fonction du temps n'est pas connue, et si cette charge n'est définie que par ses caractéristiques, elle est dite " charge dynamique aléatoire " ( effet du vent, des séismes ... ) .

Il existe des méthodes d'analyse qui permettent d'évaluer les caractéristiques statistiques de la réponse de structure .

Si la fréquence d'excitation appliquée à la structure est inférieure ou <sup>égale</sup>  $1/3$  de la fréquence propre fondamentale de la structure, alors les effets de l'inertie peuvent être négligés, et le problème est quasi-statique, et donc le système  $K.U = R$  et suffisamment précis même si  $U$  et  $R$  varient " lentement " dans le temps .

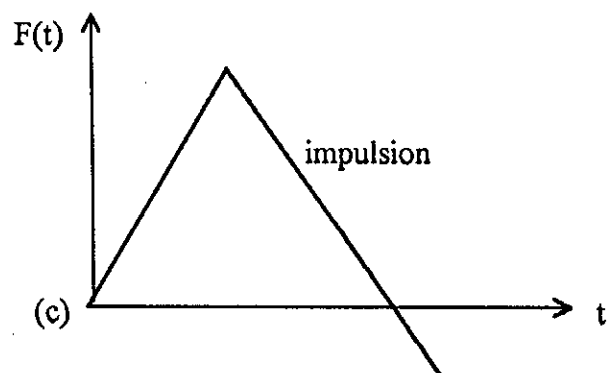
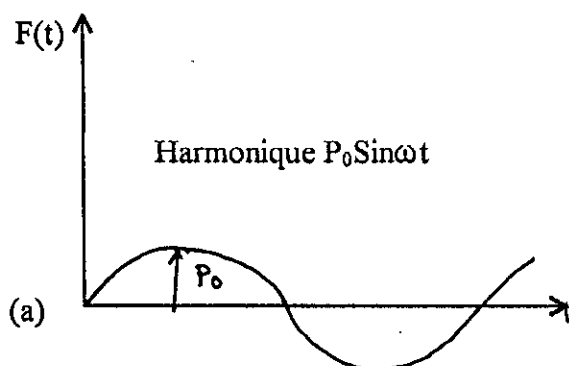
Si la fréquence devient plus importante que la valeur citée plus haut, ou si la structure vibre librement (  $R = 0$  ), l'inertie devient importante et ne peut plus être négligée, c'est la matrice masse qui représente l'inertie, elle représente également la distribution continue de masse dans la structure .

Les problèmes dynamiques peuvent être divisés en deux types de problèmes .

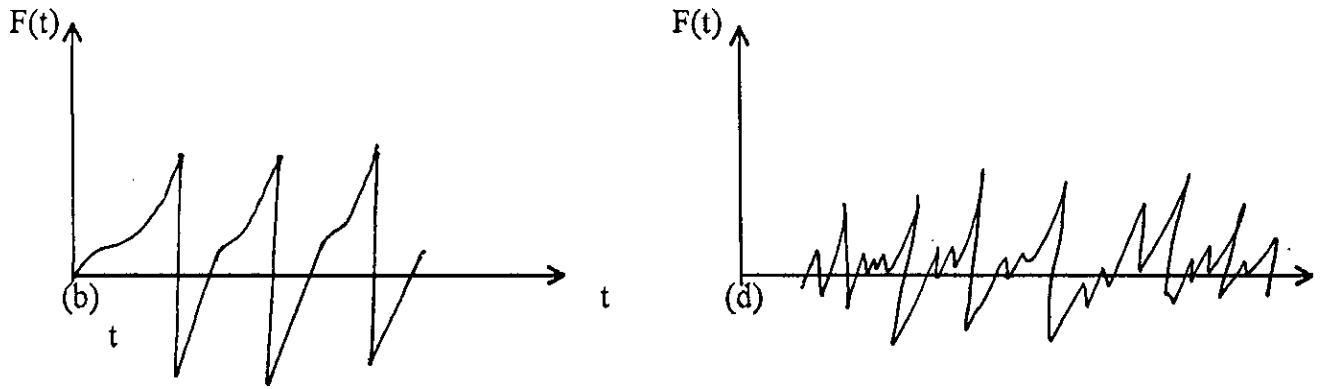
- Problèmes de propagation d'ondes .
- Problèmes de dynamique des structures .

On ne s'intéressera qu'à une partie du deuxième type de problème .

#### III.1.2 Types de chargements :







périodique quelconque

secousse sismique

(a) et (b) périodiques .

(c) et (d) non périodiques .

Les chargements (a) et (b) sont constitués de charges répétitives qui conservent la même évolution dans le temps sur un grand nombre de cycles, en particulier les charges qu'on peut rencontrer en Génie - Civil sont schématisées sur la figure ci-dessous .

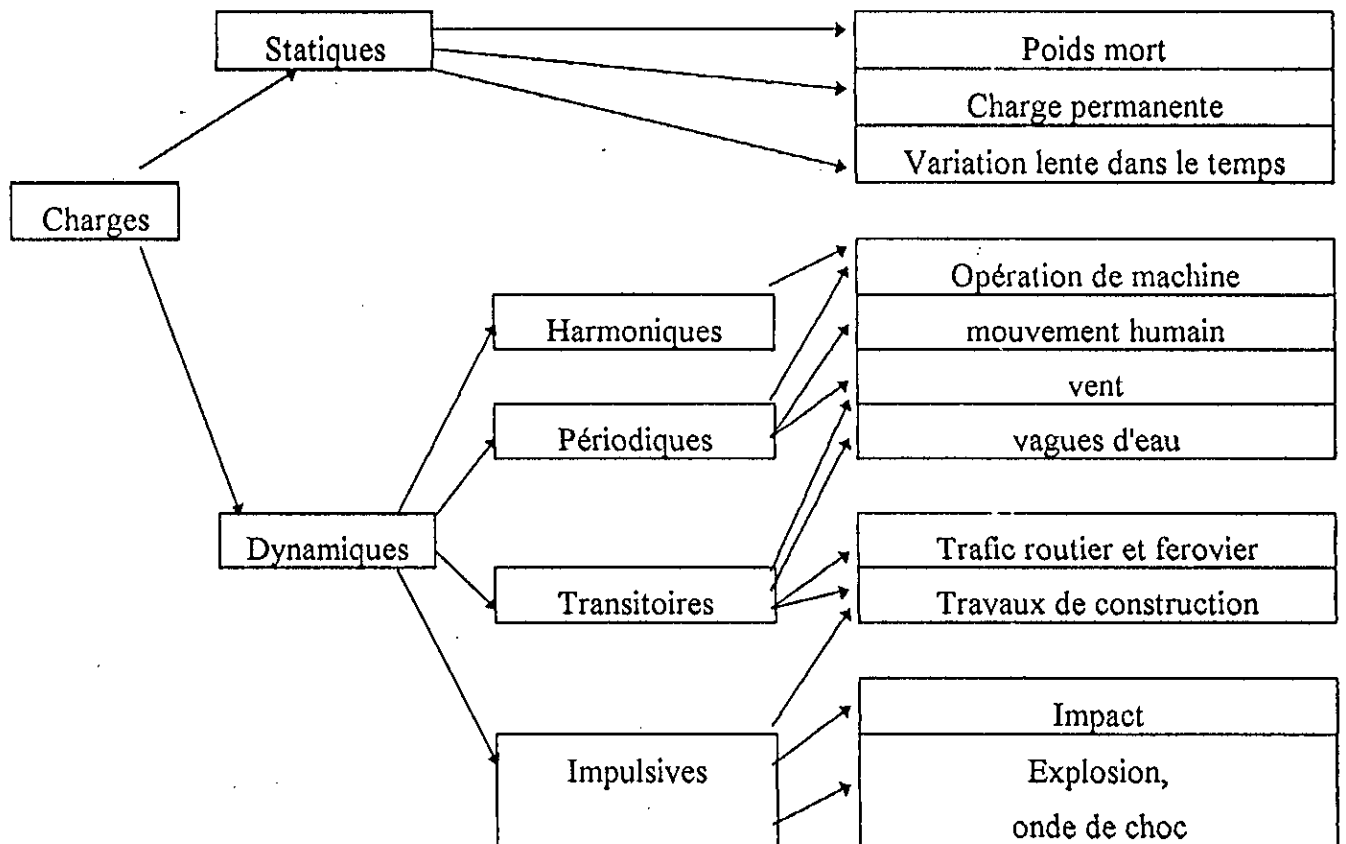


Figure (3-1) Types de chargements en Génie-Civil

### III.1.3 Chargement dû à un tremblement de terre :

Considérons la structure suivante soumise à un déplacement de la base .

L'équation du mouvement s'écrit :

$$[M]\{\ddot{V}^t\} + [C]\{\dot{V}\} + [K]\{V\} = \{0\} .$$

Le vecteur déplacement total s'écrit :

$$\{V^t\} = \{V\} + \{r\}.Vg. (*)$$

Le produit  $\{r\} U_g$  est appelé vecteur des déplacements pseudo-statiques .

Le vecteur  $\{r\}$  est un vecteur des coefficients d'influence qui représentent les déplacements résultants d'un déplacement unitaire du support .

Dans le cas du bâtiment figuré ci-contre on a :

$$\{r\} = \{1\} = (\text{vecteur unitaire}) \quad (3-1)$$

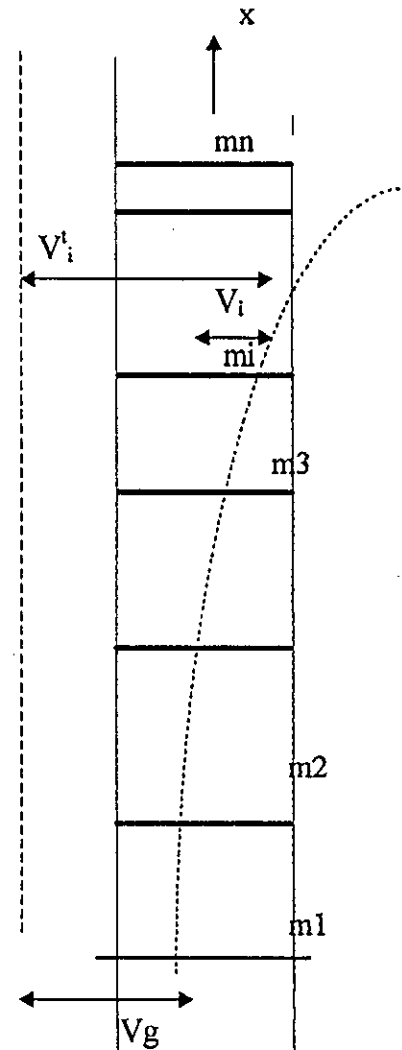


figure (3-1)

La relation (3-1) est valable pour la configuration structurale du bâtiment précédent . Celle-ci est une conséquence directe que du genre de mouvement à la base ainsi bien que du système structural . Le vecteur des déplacements statiques sera différent pour les systèmes structuraux suivants soumis aux déplacements à la base indiqués .

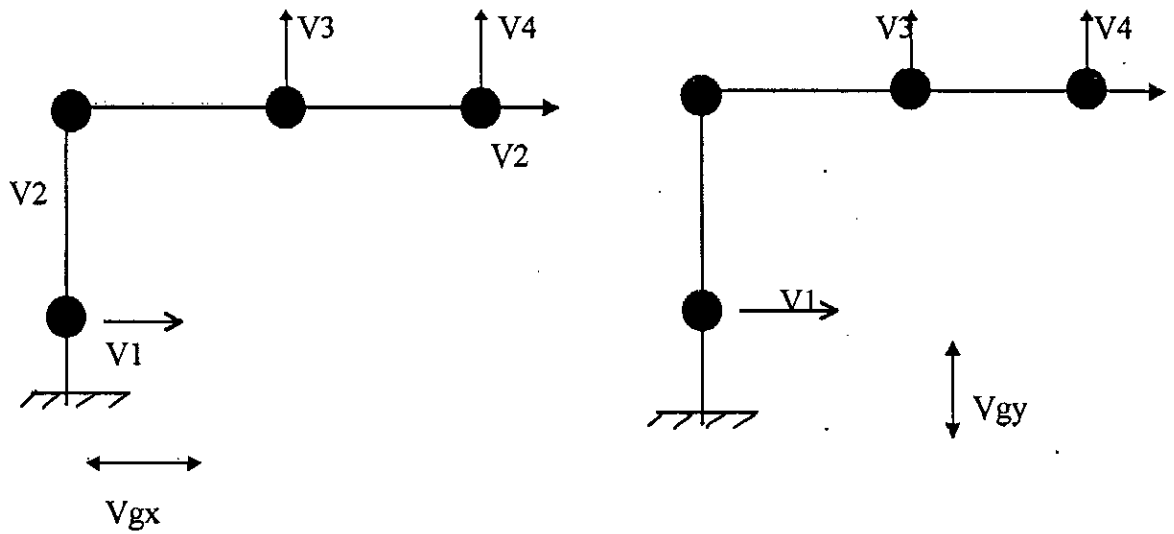


Figure 3 - 2

$$\{r\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{r\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3-2)

Pour un système à masse concentrée soumis à une rotation à la base tel qu'illustré à la figure (3-2), une rotation rigide à la base nous donne le vecteur de déplacement pseudo-statique suivant :

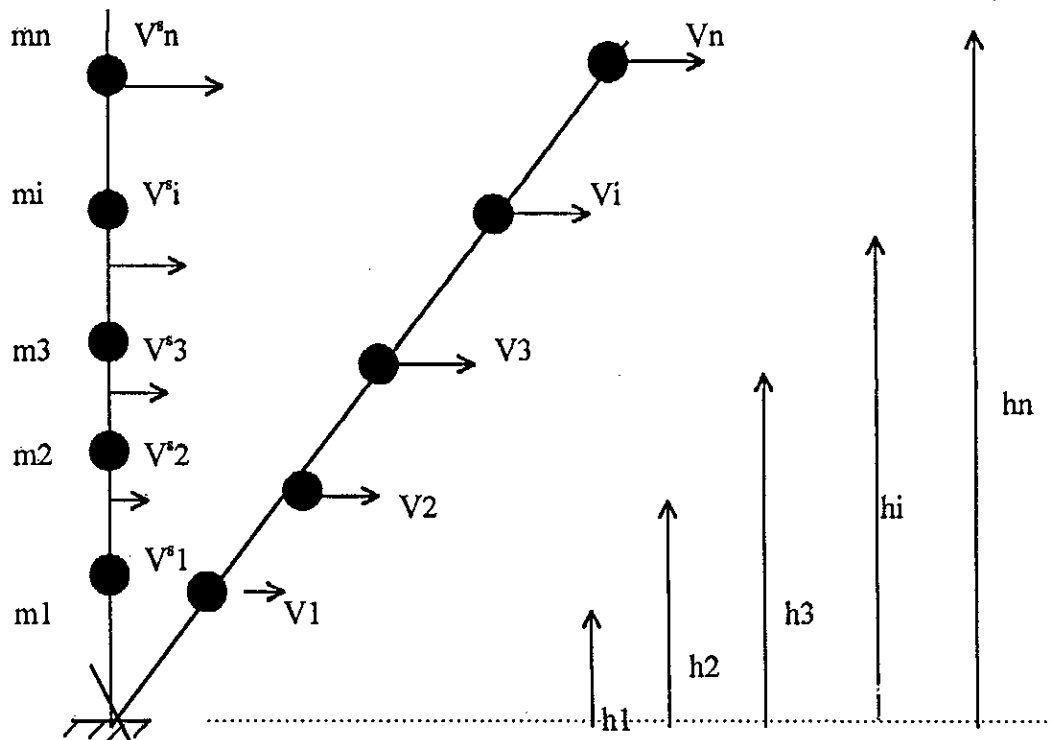


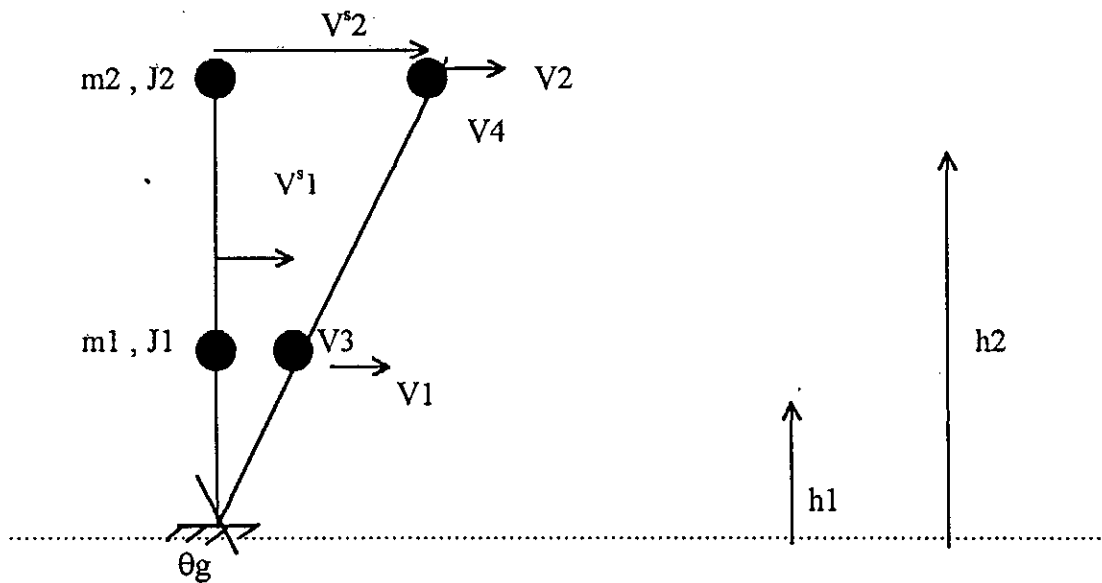
Figure 3 - 3

$$\{V_s\} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \theta_g \quad (3-3)$$

d'ou, pour  $\theta_g = 1$

$$\{r\}^t = [h_1, h_2, h_3, \dots, h_i, \dots, h_n] \quad (3-4)$$

Si les masses à la figure (III) ont aussi une inertie en rotation, il faudra en tenir compte dans l'équation du mouvement . Le vecteur de déplacement pseudo-statique correspondant à la structure avec 400L est donnée à l'équation (V) .



$$\{r\}^t = [h_1 \ h_2 \ 1 \ 1] \quad (3-5)$$

si nous remplaçons (\*) dans l'équation du mouvement on aura .

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = -[M]\{r\}\ddot{U}_g^{(t)} = \{P_{eff}\} \quad (3-6)$$

### III.1.4 Réponses dynamiques :

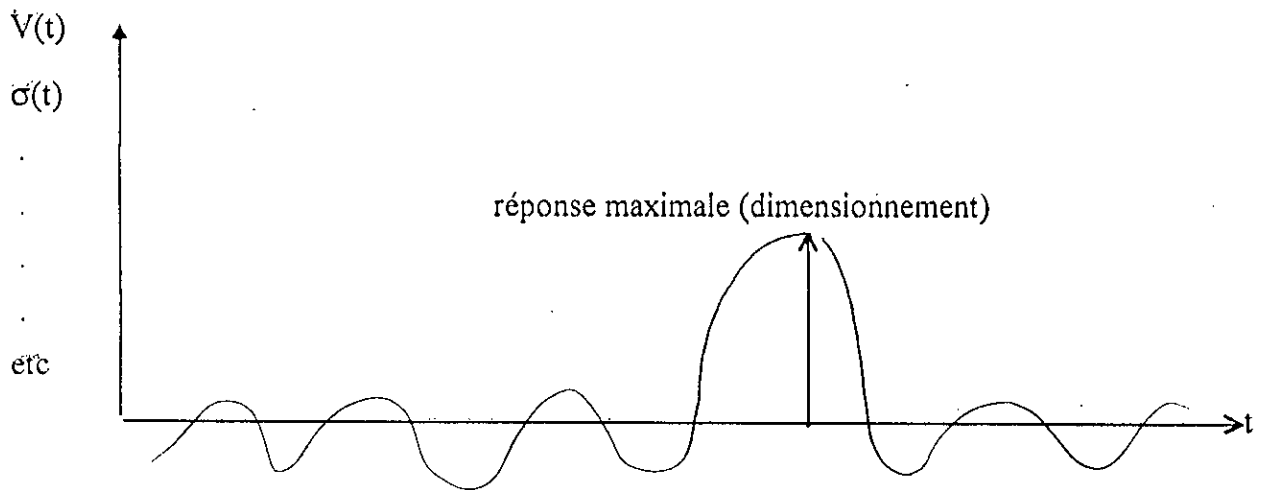


fig ( 3 - 4 )

La réponse varie avec le temps, en général pour un dimensionnement ou une vérification (système linéaire), on calcule la réponse dynamique maximale et on l'additionne à la réponse statique maximale .

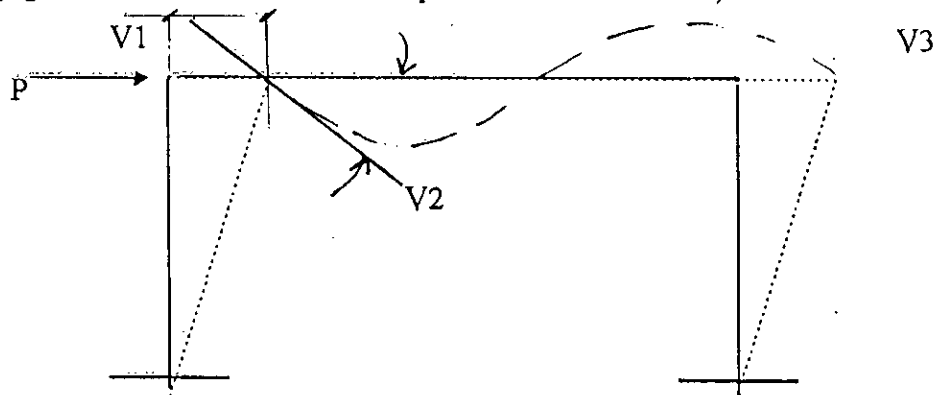
Dans le cas d'un système non linéaire, il faut combiner directement les forces statiques et dynamiques et calculer la réponse maximale .

### III.2 Méthodes de discretisation en analyse dynamique :

En analyse dynamique, les états de déplacement d'une structure dépendent des forces d'inerties, une idée consiste à remplacer à priori la structure réelle par une structure schématisée .

#### III.2.1 Degré de liberté (DDL) dynamique :

On néglige la déformation axiale de la poutre et des colonnes, on a donc 3 DDL statiques .

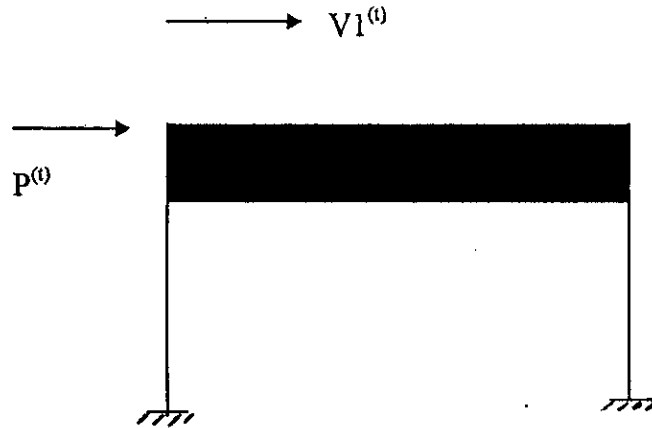


DDL Statique

Figure ( 3 - 5 )

On suppose que les colonnes n'ont pas de masse, on suppose de plus que toute la masse est concentrée au niveau du toit .

Si les forces d'inertie dues à la rotation sont négligeables, on a ici, un système à 1 DDL dynamique (Voir fig. ( 3 - 6 ) ).



DDL Dynamique

Figure ( 3 - 6 )

### III.2.2. Concentration de la masse :

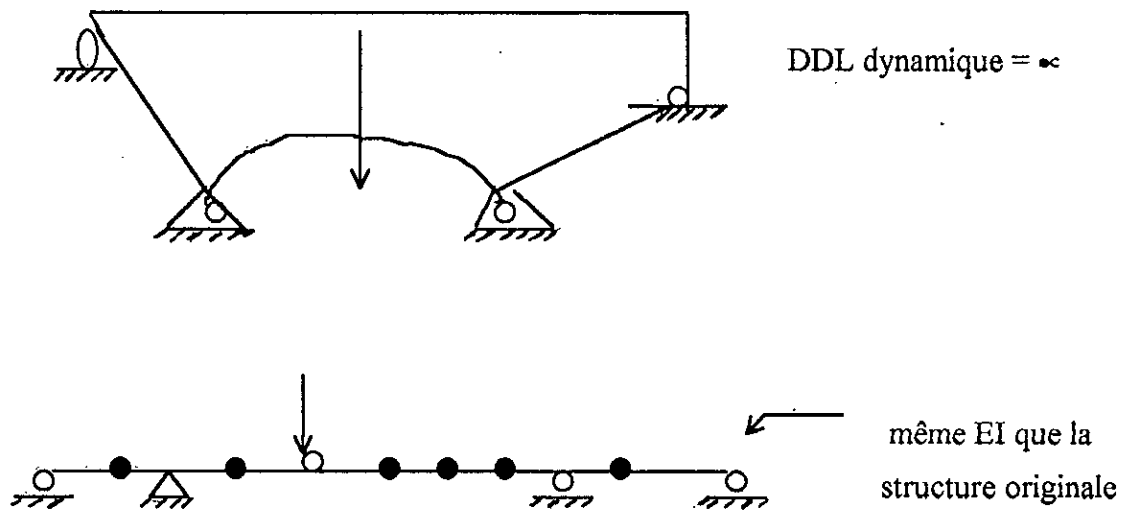


fig. ( 3 - 7 )

Dans le cas de la figure (3-7), on a un système discret a 7 degrés de liberté dynamique . En général on aura n DDL dynamiques, le problème est le déterminer n de façon à représenter convenablement les efforts des forces d'inertie . Dans l'exemple de la figure (3-7) on a négligé la déformation axiale et les rotations, dans le cas contraire on aurait eu 21 DDL dynamiques, si le problème était général en 3 D on aurait eu 42 DDL dynamiques .

### III.2.3 Coordonnées généralisées

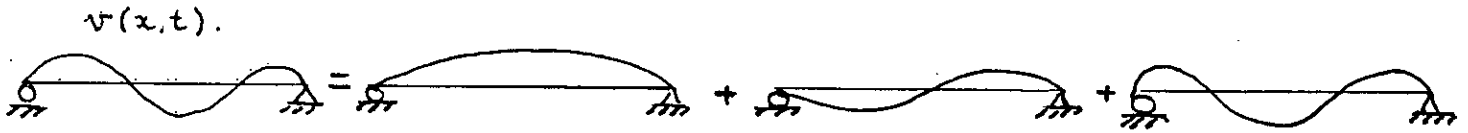


fig. ( 3 - 8 )

$$V(x,t) = b_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + b_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

La figure (3-8) représente la déformée d'une poutre simple en série trigonométrique .

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3-7)$$

$n$ : dépend de la précision recherchée .

De façon générale on peut choisir n'importe quelle famille de fonction de déplacements généralisés  $n(x)$ , compatible avec les conditions géométriques imposées par les appuis, on a donc :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^n Z_n(t) \psi_n(x)$$

**III.2.4 Par éléments finis :**

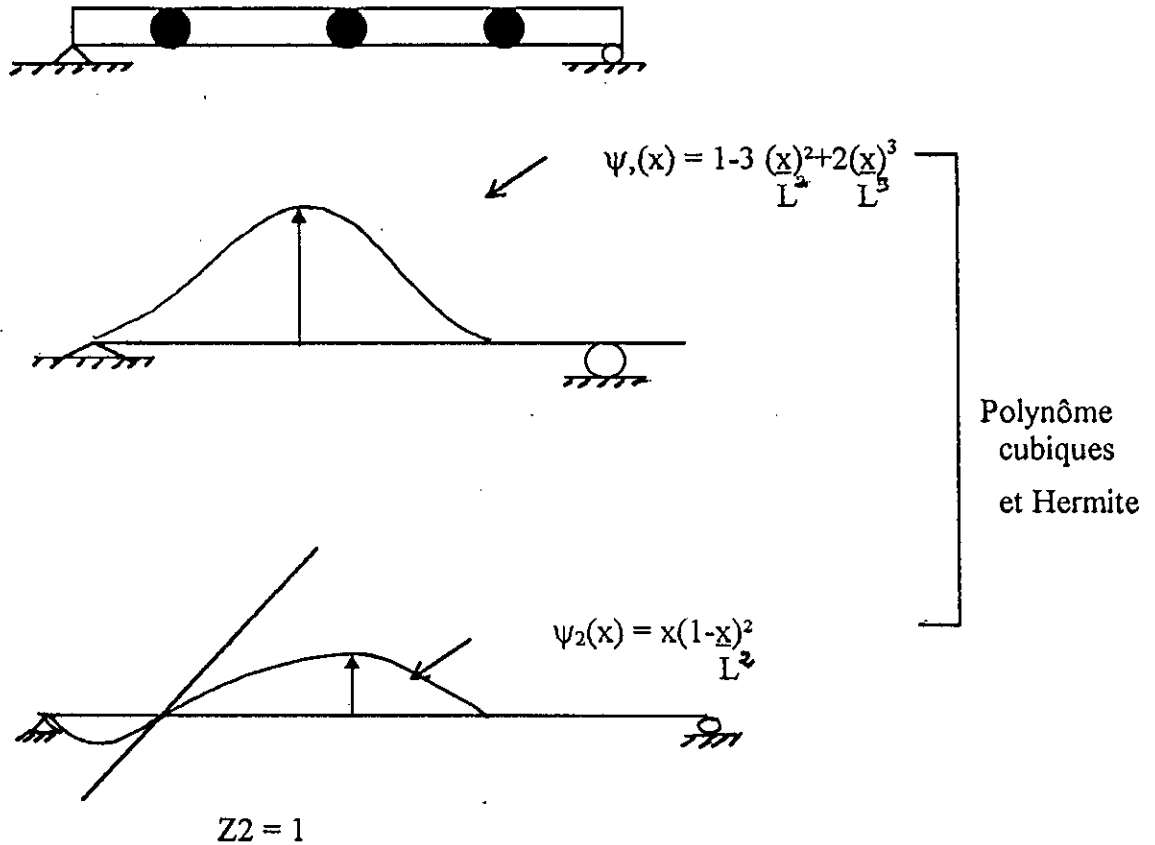


Figure ( 3 - 9 )

La méthode des éléments finis est un cas spécial de l'utilisation des coordonnées généralisées, il s'en suit que tout ce qui est vrai pour les coordonnées généralisées l'est pour les éléments finis, il y a 3 étapes principales dans la méthode .

1)- Diviser la poutre en un certain nombre d'éléments finis .

A l'intérieur de chaque élément l'équation :

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^N Z_n(t) \cdot \psi_n(x) . \tag{3 - 8}$$

$\psi(x)$  : Fonction de déplacement généralisé .

$Z_n(t)$  : coordonnée généralisée .

Dans ce cas on pourra écrire :

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^2 Z_n(t) \cdot \Psi_n(x) .$$



2)- Les déplacements des extrémités des éléments, appelées noeuds, constituent les coordonnées généralisées  $Z_n$  .

3)-  $n(x)$ , s'appelle ici polynôme d'interpolation, est obtenu en appliquant un déplacement unitaire à un DDL (ou coordonnée généralisée), tout en gardant les autres déplacements nuls toute fonction satisfaisant les conditions de continuité aux noeuds et à l'extérieur des noeuds peut servir de fonction d'interpolation pour une poutre, on utilise en général la déformée d'une poutre uniforme qui sont des polynômes cubiques d'**Hermite** .

Il y a 3 avantages principaux à utiliser la méthode des éléments finis.

1- on peut choisir à volonté le nombre de coordonnées généralisées en divisant la structure en un certain nombre d'éléments .

2- Les fonctions d'interpolation utilisées sont les mêmes pour tous les éléments .

3- Le couplage des équations résultantes est réduit, donc la matrice rigidité et masse bandées .  
C'est la méthode la plus utilisées de nos jours .

### III.3 Formulation des équations du mouvement :

Les expressions mathématiques qui définissent les déplacements dynamiques sont appelées équations du mouvement de la structure .

#### III.3.1 Ecriture directe de l'équilibre dynamique par le principe de d'Alembert .

Selon la 2ème loi de NEWTON, le taux d'accroissement de la quantité de mouvement d'une masse quelconque  $m$  est égale à la force qui lui est appliquée :

$$F(t) = \frac{d}{dt}(m \cdot \frac{dV}{dt})$$

$F(t)$  : vecteur force appliquée .

$U(t)$  : vecteur position de la masse  $m$  .

Si  $m = \text{constante}$   $F(t) = m \frac{d^2V(t)}{dt^2} = m\ddot{V}(t)$

$$F(t) - m\ddot{V} = 0$$

$m\ddot{V}(t)$  est appelée force d'inertie .

#### III.3.2 Principe des déplacements virtuels :

si un système qui est en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces est soumis à un déplacement virtuel, c'est à dire à un déplacement quelconque compatible avec les liaisons du système, alors le travail total effectué par les forces est nul .

#### III.3.3 Principe de Hamilton :

La somme de la variation du travail effectué par les forces non conservatrices, prises pendant un intervalle de temps quelconque  $t_1$  à  $t_2$  est identiquement nulle, donc on peut écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (3-9)$$

$T$  : énergie cinétique totale.

$V$  : énergie potentielle du système, comprenant à la fois énergie de déformation et le potentiel de toutes les forces conservatives extérieures .

$W_{nc}$  : Travail effectué par les forces non conservatives agissant sur le système c'est à dire l'amortissement et les charges extérieures arbitraires .

$\delta$  : Variation subie pendant l'intervalle de temps considéré .

### III.3.4 Formulation par les équations de LAGRANGE :

Les équations du mouvement s'établissent par cette formulation :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial \delta} \right\} + \left\{ \frac{\partial A}{\partial \dot{\delta}} \right\} = \{0\} \quad (3-10)$$

Où :  $L = T - V$  est la fonction de " LAGRANGE "

$T$  : énergie cinétique ;

$V$  : L'énergie potentielle;

$A$  : La fonction de dissipation due à l'amortissement;

$\delta$  : le vecteur déplacement;

$\dot{\delta}$  : le vecteur vitesse .

### III.3.5 Formulation par la méthode des éléments finis :

Dans les problèmes de dynamique, les déplacements, vitesses, accélérations, déformations, contraintes et charges sont fonction du temps .

Pour établir les équations du mouvement, en éléments finis, on procédera comme suit :-

**ETAPE 1** : Idéaliser le corps ou le milieu en un nombre  $n$  d'éléments finis.

**ETAPE 2** : Assumer un modèle déplacement de l'élément  $e$  comme :

$$\{\delta(x,y,t)\} = \begin{Bmatrix} U(x,y,t) \\ v(x,y,t) \end{Bmatrix} = [N(x,y)] \{\delta_e(t)\} \quad (3-11)$$

Ou :  $\{\delta\}$  : est le vecteur des déplacements :

$[N]$  : La matrice des fonctions de forme (déterminée en élastique)

$\delta_e$  : est le vecteur des déplacements nodaux dépendant du temps  $t$  .

En dérivant l'équation (3-11) par rapport au temps, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \{\dot{\delta}(x,y,t)\} \\ \dot{U}(x,y,t) \\ \dot{V}(x,y,t) \end{aligned} \right\} = N(x,y) \{\dot{\delta}_e(t)\} \quad (3-12)$$

**ETAPE 3** : Comme vu en statique, les expressions de  $[\epsilon]$  et  $[\sigma]$  sont :

$$[\epsilon] = [B]\{\delta_e\} \quad (3-13)$$

$$[\sigma] = [D][B]\{\delta_e\} \quad (3-14)$$

En utilisant les équations de LAGRANGE données précédemment par :

$$d\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}}\right\} - \left\{\frac{\partial L}{\partial \delta}\right\} + \left\{\frac{\partial A}{\partial \dot{\delta}}\right\} = \{0\} \quad (3-15)$$

L'énergie cinétique et potentielle d'un élément (e) sont donné par :

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_{V_e} \rho \{\delta\}^T \{\delta\} dv \quad (3-16)$$

$$V^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_{V_e} \{\epsilon\}^T \sigma dv - \iint_{S_e} \{\delta\} q ds - \iiint_{V_e} \{\delta\}^T b dv - \{\delta\}^T F \quad (3-17)$$

Où  $\rho$  : est la densité

F : Le vecteur forces nodales dynamiques .

En assumant l'existence de forces dissipatives proportionnelles aux vitesses, la fonction de dissipation de l'élément (e) est :

$$A^{(e)} = \frac{1}{2} \iiint_{V_e} \mu \cdot \dot{\delta}^T \cdot \dot{\delta} dv \quad (3-18)$$

On  $\mu$  est appelé coefficient d'amortissement qui est connu pour les fluides ( c'est la viscosité ), mais qui reste un paramètre très difficile à déterminer pour la plus part des matériaux. En utilisant les équations (3-11), (3-12), (3-13), (3-14), les expressions de T, V et A pour tous le milieu sont :

$$T = \sum_{i=1}^n T^{(e)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \sum_{i=1}^n \iiint_{V_e} \rho [N]^T [N] dv \{\delta\} \quad (3-19)$$

$$V = \sum_{i=1}^n A^{(e)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \sum_{i=1}^n \iiint_{V_e} [B][D][B] dv \{\delta\} - \delta^T \sum_{i=1}^n \iint_{S_e} [N]^T q ds$$

$$- \sum_{i=1}^n \iiint_{ve} [N]^T [N] dv \{ \delta \} \quad (3-20)$$

$$A = \sum_{i=1}^n A^{(e)} = \frac{1}{2} \{ \delta \}^T \sum_{i=1}^n \iiint_{ve} \mu [N]^T [N] dv \{ \delta \} \quad (3-21)$$

Les équations (3-19), (3-20), (3-21) écrites sous forme condensée nous donnent :

$$T = \frac{1}{2} \{ \delta \}^T [M] \{ \delta \} \quad (3-22)$$

$$V = \frac{1}{2} \{ \delta \}^T [C] \{ \delta \} - \{ \delta \}^T F(t) \quad (3-23)$$

$$A = \frac{1}{2} \{ \delta \}^T [C] \{ \delta \} \quad (3-24)$$

Ou [M], [K] et [C] sont respectivement la matrice masse, la matrice de rigidité et la matrice d'amortissement, et qui sont données par :

$$[M] = \sum_{i=1}^n \iiint_{ve} \rho [N]^T [N] dv \quad (3-25)$$

$$[C] = \sum_{i=1}^n \iiint_{ve} \mu [N]^T [N] dv \quad (3-26)$$

$$[K] = \sum_{i=1}^n \iiint_{ve} [B]^T [D] [B] dv \quad (3-27)$$

En dérivant les équations de lagrange avec les expressions de T, V et A données par (3-22), (3-23) et (3-24), on obtient :

$$[M] \ddot{\delta}(t) + [C] \dot{\delta}(t) + [K] \delta(t) = \{ F(t) \} \quad (3-28)$$

Etant donné que nous travaillons en élasticité linéaire, on peut superposer les états, c'est à dire on ne considérera dans ce qui suit que le chargement dynamique car le chargement statique a été développé précédemment, soit  $U(t)$  le déplacement dynamique,  $\dot{U}(t)$  et  $\ddot{U}(t)$  les vitesses et accélérations et  $R(t)$  le chargement dynamique, alors l'équation (19) devient :

$$[M] \ddot{U}(t) + [C] \dot{U}(t) + [K] U(t) = R(t)$$

### III.4 Equation du mouvement :

Les caractéristiques mécaniques essentielles de toute structure élastique linéaire soumise à des charges dynamiques sont :

- La masse
- Les propriétés élastiques
- Amortissement
- Nature d'excitation ou chargement extérieur.

#### III.4.1 Le système masse - ressort - amortissement :

Le système à ddl le plus élémentaire est constitué par une masse rigide, astreinte à un mouvement de translation, attachée à un ressort et à un amortisseur.

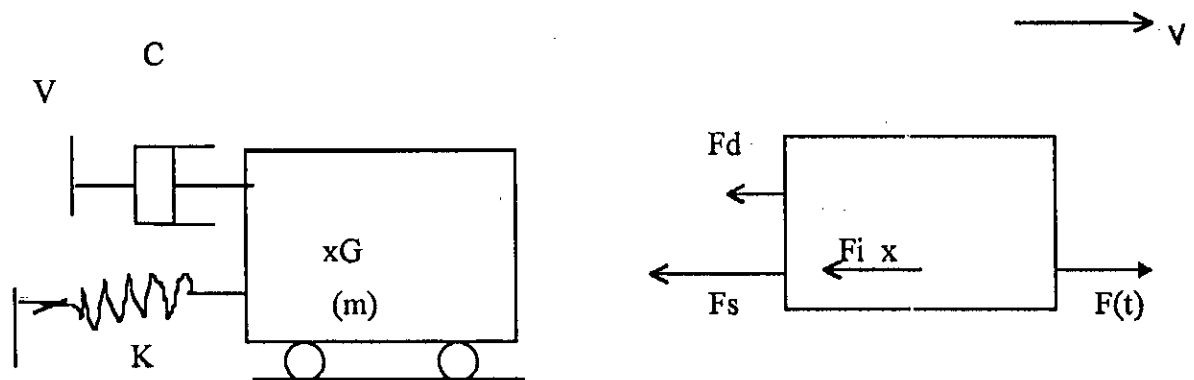


Figure (3-10)

Le mouvement du système est complètement défini par le déplacement  $V(t)$  de la masse rigide.

#### III.4.2 Méthode de formulation :

La méthode la plus simple consiste à exprimer directement l'équilibre de toutes les forces agissant sur la masse du système :

$$F_i + F_d + F_s = F(t) . \quad (3-29)$$

Les forces agissant sur le système sont :

$F_i$  : La force d'inertie =  $m\ddot{V}$

$F_d$  : La force d'amortissement =  $c\dot{V}$

$F_s$  : La force de rappel du ressort élastique =  $kV$

A noter que les forces sont fonction de  $\ddot{V}, \dot{V}$  ou  $V$ , la mise en équation du système par le principe de d'ALEMBERT est immédiate :

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = F(t)$$

### Principe des travaux virtuels :

le seul déplacement virtuel admissible est un déplacement  $\delta V$  de la masse, le travail virtuel effectué au cours de ce déplacement est :

$$F(t) \cdot \delta V - F_i \delta V - F_d \delta V - F_s \delta V = 0 \quad (\forall \delta V)$$

$$(F(t) - F_i - F_d - F_s) \delta V = 0$$

d'où :

$$m\ddot{V} - c\dot{V} - kV = F(t)$$

### Application du principe de HAMILTON :

Énergie cinétique du système  $T = \frac{1}{2} m \dot{V}^2$ .

Énergie de déformation élastique  $V = U_e = \frac{1}{2} k \cdot V^2$

Les forces non conservatrices sont  $F_d$  et  $F(t)$

La variation du travail effectué par ces forces peut s'exprimer .

$$\delta W_{nc} = F(t) \cdot V - c\dot{V} \cdot \delta V \quad (3-30)$$

en remplaçant ces équations dans :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} \cdot dt = 0$$

on aura :

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{V} \delta \dot{V} dt = m \dot{V} \cdot \delta \dot{V} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{V} \cdot \delta V \cdot dt$$

avec :  $\delta \dot{V} = \frac{d}{dt}(\delta V)$

Par hypothèse du principe de HAMILTON,  $\delta v$  s'annule aux bornes d'intégration  $t_1$  et  $t_2$ , donc

$$m\dot{V}\delta\bar{V}\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

d'où :

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(t) - m\ddot{V} - c\dot{V} - kV) \delta v dt = 0 .$$

comme  $\delta v$  est arbitraire, il est clair que l'équation qui précède ne peut en général être satisfaite que si l'expression entre parenthèses s'annule

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = F(t) .$$

### III.5 Charge dynamique :

#### III.5.1 Problème statique :

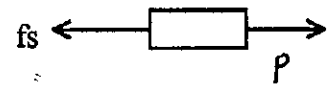
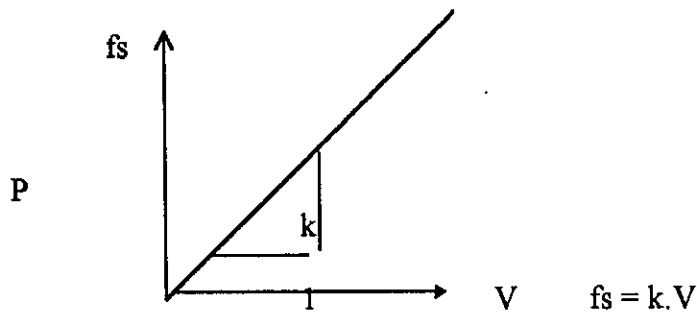


Figure (3-11)

équation d'équilibre :  $fs = P$

$$kV = P$$

#### III.5.2 Problème dynamique :

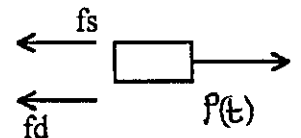
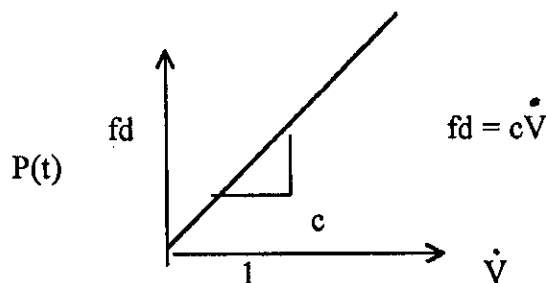


Figure (3-12)



équation du mouvement :

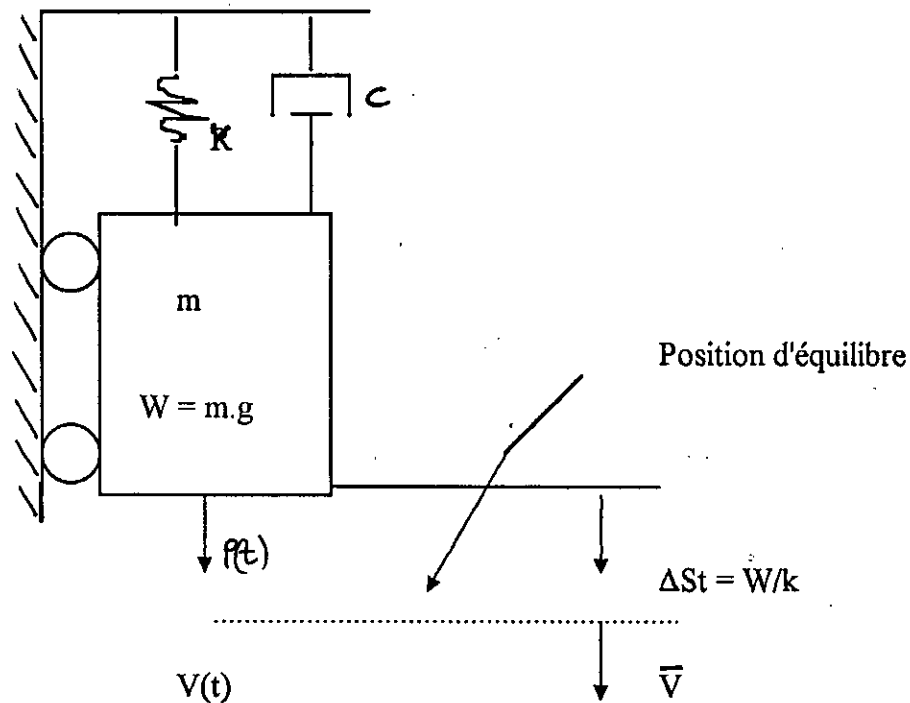
$$f_i + f_d + f_s = P(t)$$

mais  $f_i = m\ddot{V}$ ,  $f_d = c\dot{V}$ ,  $f_s = kV$

d'où :  $m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = P(t)$ .

Cette équation est différentielle du second ordre à coefficient constants .

### III.6 Effet des forces de gravite :



$$f_i + f_D + f_s = p(t) + w$$

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t) + w$$

$$v = \bar{v} + \Delta St, \dot{v} = \dot{\bar{v}}, \ddot{v} = \ddot{\bar{v}}$$

d'où  $m\ddot{v} + c\dot{v} + kv = p(t)$

Figure (3-13)

On peut négliger l'effet des forces de gravite, si on écrit l'équation de mouvement par rapport à la position d'équilibre . Les forces internes et déformations totales sont calculées en additionnant les résultats des analyses statiques et dynamique .

Cette méthode n'est cependant valable pour des problèmes non linéaires

### III.7 Mouvement de la base :

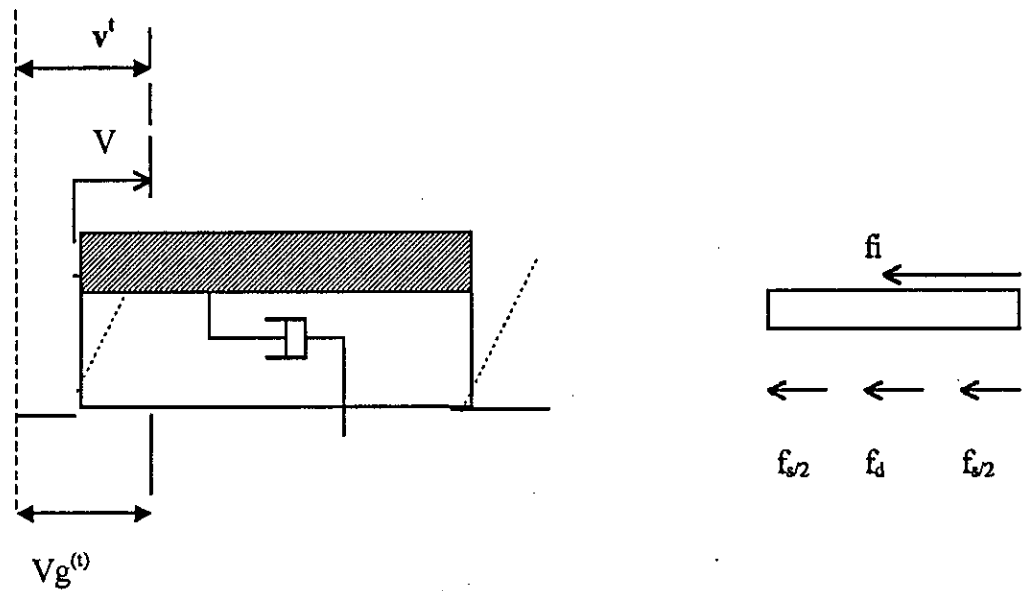


fig (3-14)

L'équation de mouvement s'écrit donc :

$$m\ddot{v}^t + c\dot{V} + kV = 0$$

on a  $v^t = V + V_g$  et  $\ddot{v}^t = \ddot{V} + \ddot{V}_g$

1<sup>ère</sup> forme :

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = -mV_g(t) = P_{eff}(t) \quad (3-32)$$

L'équation (3-32) est la forme d'utilisation la plus répandue à cause des raisons suivantes :

- a/ On connaît en général  $\ddot{V}_g(t)$  (p.ex. séisme)
- b/ Les contraintes dépendent des déplacements relatifs
- c/ Les dommages sont fonction des déplacements relatifs.

2<sup>ème</sup> forme :

$$m\ddot{v}^t + c\dot{v}^t + kv^t = c\dot{V}_g + kV_g = P_{eff}(t) \quad (3-33)$$

L'équation (3-33) est préférable si on connaît  $V_g(t)$  son utilisation implique cependant une conversion pour calculer les forces internes.

### **III.8 Amortissement :**

Les valeurs d'amortissement à introduire dans les calculs de tenue au séisme sont depuis longtemps un sujet d'étude, en particulier pour les centrales nucléaires . de nombreux documents, des conférences ont traité ce problème depuis plusieurs années .

Les phénomènes physiques intervenant dans cette dissipation d'énergie sont nombreux, frottements, chocs, viscosité, plasticité des matériaux, rayonnements, etc. ...

Leurs lois sont souvent mal connues, il n'est donc pas possible d'introduire l'amortissement dans les calculs sous une forme mathématique strictement représentative de la physique des phénomènes.

C'est pourquoi les modèles utilisés sont des modèles simples permettant de reproduire à l'échelle macroscopique les principaux effets sur les structures et dont les paramètres sont déduits de résultats expérimentaux .

Selon les phénomènes physiques mis en cause, on distingue plusieurs types d'amortissements, par

exemple :

- L'amortissement visqueux pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse .
- L'amortissement hysteretique pour lequel la force d'amortissement est proportionnelle au déplacement et de signe apposé à celui de la vitesse .
- L'amortissement de coulomb qui correspond à un amortissement est proportionnelle à la force de réaction normale à la direction du déplacement et de signe opposé à celui de la vitesse .

Les deux premiers types d'amortissements sont les plus couramment rencontrés .

Pour notre cas, on a pris l'amortissement nul en raison des caractéristiques des structures étudiées qui répondent bien à cette hypothèse.

# **CHAPITRE IV**

METHODE DE RESOLUTIONS

EN

ANALYSE DYNAMIQUE

## **IV.1 Les méthodes de Résolution des équations d'équilibre :**

### **IV.1.1 Classification des méthodes d'Analyse dynamique :**

Il y a deux stratégies fondamentales de résolution en dynamique, la méthode de superposition modale et la méthode de résolution directe .

Le choix entre ces deux stratégies dépend de la nature du problème ( linéaire ou non linéaire ) et du contenu fréquentiel de l'excitation.

La méthode de résolution directe est utilisée pour les problèmes non - linéaires ou si le contenu fréquentiel de l'excitation est susceptible d'exciter un grand nombre de modes de la structure, ce qui est le cas dans la propagation d'ondes . L'analyse directe d'une structure en régime transitoire implique l'intégration pas à pas des équations du mouvement :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{u\} = \{R(t)\} \quad (4-1)$$

La méthode de superposition modale convient aux structures linéaires dont les premiers modes sont susceptibles d'être excités .

### **IV.1.2 Méthode de superposition modale :**

La méthode modale, ou méthode de superposition des modes est basée sur le fait que pour certains types d'amortissements qui sont des modèles raisonnables pour les structures, L'ensemble des N équations du mouvement couplées d'un système à N degrés de liberté peut être changé en un ensemble de N équations découplées par une transformation aux coordonnées modales .

Chaque mode répond avec son propre mode de vibration  $\{\phi_n\}$ , sa fréquence propre  $W_n$  et son amortissement modal propre  $\xi_n$  . Cette méthode est utilisée pour calculer la réponse de tout système structurale linéaire à cause du principe de superposition, les étapes à suivre pour cette étude sont :

1. Ecrire les équations couplées du mouvement :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{u\} = \{P(t)\} \quad (4-1)$$

2. Calculer les fréquences et modes propre de vibration pour le problème de vibrations libres non amortie qui se réduit au problème de valeurs propres :

$$([K] - w^2 [M]) \{\hat{u}\} = \{0\} \quad (4-2)$$

On détermine donc la matrice modale  $[\phi]$  et le vecteur des fréquences  $\{\omega\}$  .

3. Calculer la masse et le chargement généralisés relatifs à chaque mode :

$$\bar{M}_n = \{\phi_n\}^t [M] \{\phi_n\} \quad (4-3)$$

$$\bar{P}_n(t) = \{\phi_n\}^t \{P(t)\} \quad (4-4)$$

4. Ecrire N équations indépendantes du mouvement :

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 Y_n = \frac{\bar{P}_n(t)}{M_n} \quad (4-5)$$

On arrive ainsi à passer d'un système couplé à N degrés de liberté vers N systèmes équivalents entre eux à une inconnues  $Y_i(t)$  et cela .

Elle n'a été possible que grâce à l'orthogonalité des modes .

5. Calculer la réponse modale au chargement imposé, chaque équation obtenue à l'étape 4 correspond a un mode de vibration et représente un système à un degrés de liberté et se résoudre par toute méthode convenant au type de chargement .

L'expression générale de la réponse ~~est~~ <sup>est</sup> donnée ~~par~~ <sup>pour</sup> le mode n, par l'intégrale de **Duhamel** .

$$Y_n(t) = \frac{1}{M_n W_n} \int_0^t P_n(\tau) \cdot e^{-\xi_n W_n(t-\delta)} \cdot \sin W_n(t-\delta) d\delta \quad (4-6)$$

$\xi_n$  : coef d'influence d'amortissement

6. Ajouter a l'expression de l'intégrale de **Duhamel** la réponse en vibration libre due aux conditions initiales .

$$Y_n^{(i)} = e^{-\xi_n W_n t} \left[ \frac{Y_n(0) + Y_n(0) \xi_n W_n}{W_n} \sin W_n t + Y_n(0) \cos W_n t \right] \quad (4-7)$$

7. Calculer la réponse dans le système des coordonnées géométriques originales connaissant les réponses modales  $Y_n(t)$  .

$$u(t) = [\phi] \{Y(t)\} \quad (4-8)$$

et peut s'écrire aussi :

$$u(t) = \{\phi_1\} Y_1(t) + \{\phi_2\} Y_2(t) + \dots + \{\phi_n\} Y_n(t) \quad (4-9)$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^n \{\phi_n\} Y_n(t) \quad (4-10)$$

L'étape 7 complète le calcul de la réponse par la méthode de superposition modale .

8. Déterminer les forces élastiques lors de la réponse, à partir de l'équation suivante :

$$\{f_s(t)\} = [K] \{u(t)\} = [K] [\phi] \{Y(t)\} \quad (4-11)$$

#### **IV.1.3 Intégrations pas à pas :**

L'opération de base lors de la résolution pas à pas sur les équations différentielles de mouvement (4-1) est leur conversion en un ensemble d'équations algébriques .

On y parvient en introduisant une relation simple entre déplacements vitesses et accélérations, relation que l'on suppose valable pendant un court incrément de temps .

On peut ainsi exprimer les évolutions incrémentales de vitesses et de déplacement en fonction des évolutions de l'accélération, ou encore les évolutions de vitesse et d'accélération en fonction des déplacements incrementaux .

Dans l'un ou l'autre cas, seul un vecteur d'inconnues subsiste dans les équations incrementales de l'équilibre et ainsi la résolution d'équations se fera par n'importe quelle méthode standard .

La conversion fera passer l'équation (4-1) à la forme suivante :

$$\bar{K} \{u\} = \bar{R}(t) \quad (4-12)$$

tels que :  $\bar{K} = \text{fct} ([K], [M], [C])$

$$\bar{R}(t) = \text{fct} ([K], [M], [C]) .$$

L'équation (4-12) représente un système d'équations linéaires .

#### **IV.1.4 Les méthodes d'intégration directe :**

Dans ces méthodes, on intègre directement l'équation du mouvement

(4-1) par des procédures dites pas à pas, ces méthodes sont basés sur deux idées :

D'abord au lieu de satisfaire l'équation de mouvement à tout instant  $t$ , on le satisfait à un intervalle de temps  $\Delta t$ , ceci veut dire qu'on solutionne pour un équilibre statique incluant les forces d'inertie et d'amortissement à une série de temps discret .

En deuxième lieu, on suppose une variation pour les déplacements, vitesses et accélérations à l'intérieur de l'intervalle de temps  $\Delta t$  .

La précision des résultats, la stabilité de la solution et le coût de l'analyse dépendent de la supposition sur la variation des déplacements, vitesses et accélérations .

Plusieurs méthodes existant pour l'intégration directe des équations du mouvement dont :

- the Central difference method .
- the Houbolt method
- the Wilson  $\theta$  method
- the Newmark method

Nous développons ci-après ces différentes méthodes :

#### IV.1.4.1 Méthode des différences finies centrales :

" the Central difference method " est une des procédures effectives qui donnent une solution à beaucoup de problèmes, et dans laquelle on prend comme hypothèse :

$$\ddot{U}^t = \frac{1}{\Delta t^2} (u^{t-\Delta t} - 2 U^t + U^{t+\Delta t}) \quad (4-13)$$

$$\dot{U}^t = \frac{1}{2\Delta t} (U^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}) \quad (4-14)$$

On obtient les déplacements aux temps  $(t+ \Delta t)$ , on considérant l'équation de mouvement (4-1) aux temps  $t$ , c'est à dire :

$$[M] \{\ddot{U}\}^t + [C] \{\dot{U}\}^t + [K] \{u\}^t = \{P(t)\} \quad (4-15)$$

En injectant les expressions de  $\ddot{U}^t$  et  $\dot{U}^t$  en (4-13) et (4-14), respectivement dans (4-15), on obtient :

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right) U^{t+\Delta t} = R^t - \left( K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right) U^t - \left( \frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right) U^{t-\Delta t} \quad (4-16)$$

d'ou on tire  $U^{t+\Delta t}$  . on doit noter que la solution  $U^{t+\Delta t}$  est obtenu en considérant les conditions d'équilibre au temps  $t$ , c'est à dire  $U^{t+\Delta t}$  est calculé en utilisant (4-15), pour cette raison que cette procédure est appelée " méthode d'intégration explicite". Il est a noter que des schémas pareils ne demandent pas de factorisation de la matrice de rigidité dans la solution pas à pas, d'un autre coté,



" thé Houbolt ", " Wilson ", et " Newmark ", considérées dans les prochains paragraphes utilisent les conditions d'équilibre aux temps  $(t+\Delta t)$  à partir des vecteurs connus  $U^t$  et  $\dot{U}^t$  et  $\ddot{U}^t$ . Elles utilisent les développements limités.

La considération la plus importante en utilisant " thé central difference method " est que le pas utilisé  $\Delta t$  est plus petit qu'un pas critique tel que :

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\Pi} \quad (4-17)$$

Où  $T_n$  est la plus petite période d'un système à  $n$  degrés de liberté .

#### IV.1.4.2 the Houbolt Method :

Cette méthode implicite utilise l'expression du système à l'instant  $t+\Delta t$ , ainsi que les approximations par différences finies centrales

" the Houbolt Method " adapte l'hypothèse suivante :

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2U^{t+\Delta t} - 5U^t + 4U^{t-\Delta t} - U^{t-2\Delta t}) \quad (4-18)$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11U^{t+\Delta t} - 18U^t + 9U^{t-\Delta t} - 2U^{t-2\Delta t}) \quad (4-19)$$

La solution au temps  $(t+\Delta t)$  est a présent obtenu en considérant (4-1)

au temps  $(t+\Delta t)$  :

$$[M] \{U^{t+\Delta t}\} + [C] \{\dot{U}^{t+\Delta t}\} + [K] \{U^{t+\Delta t}\} = \{R^{t+\Delta t}\} \quad (4-20)$$

En injectant (4-18) et (4-19) dans (4-20), on obtient la solution de :

$$U^{t+\Delta t} \left( \frac{2M}{\Delta t^2} + \frac{11C}{6\Delta t} + K \right) = R^{t+\Delta t} + \left( \frac{5M}{\Delta t^2} + \frac{3C}{\Delta t} \right) U^t - \left( \frac{4M}{\Delta t^2} + \frac{3C}{2\Delta t} \right) U^{t-\Delta t} + \left( \frac{1M}{\Delta t^2} + \frac{1C}{3\Delta t} \right) U^{t-2\Delta t} \quad (4-21)$$

La solution de  $U^{t+\Delta t}$  nécessite la connaissance de  $U^t$ ,  $U^{t-\Delta t}$  et  $U^{t-2\Delta t}$ .

Une procédure spéciale de départ devra être utilisée .

La différence de base entre " the Houbolt Method " et de " Central diffèrent Method ", et l'apparition de la matrice  $[K]$  de rigidité comme un facteur de  $U^{t+\Delta t}$  car on a considéré l'équilibre au temps  $t+\Delta t$  et non pas au temps  $t$ , pour cette raison (considération de l'équilibre au temps de  $t$  et  $t+\Delta t$ ), " Houbolt Method " est schéma d'intégration implicite .

Pour cette méthode, il n'y a pas de limite critique, donc  $\Delta t$  pourrait être plus grand que celui considéré pour " the Central difference Method " .

#### IV.1.4.3 the Wilson $\theta$ Method :

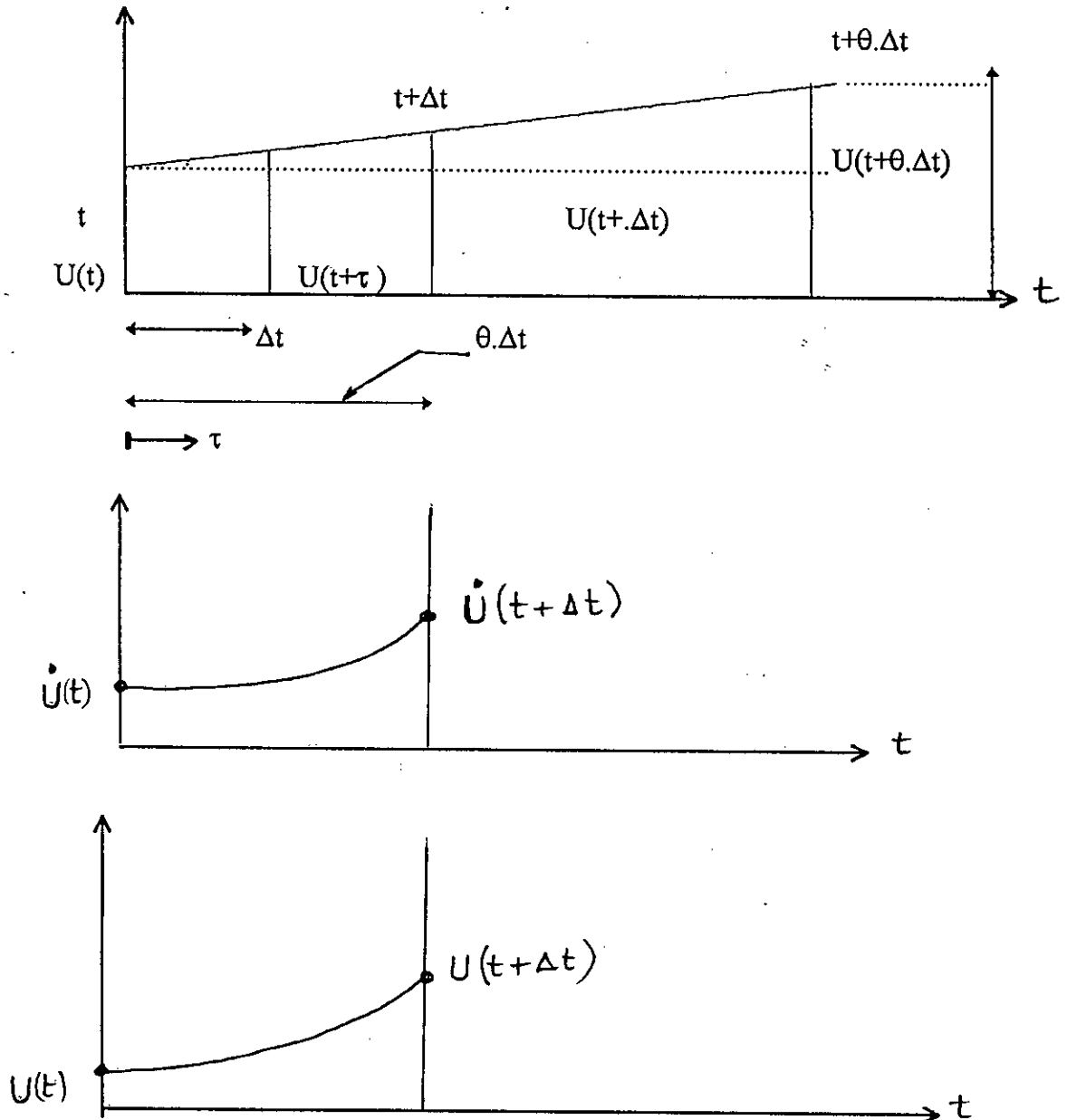
La méthode  $\theta$  de Wilson est une extension de la méthode d'accélération linéaire, donc laquelle on considère que l'accélération est linéaire du temps  $t$  au temps  $t+\Delta t$  .

Supposant que l'accélération varie linéairement dans l'intervalle

" étendue " allant du temps  $t$  au temps  $t+\theta.\Delta t$ , ou  $\theta \geq 1$  .

On montrera que pour des raisons de " stabilité inconditionnelle ", on doit prendre  $\theta \geq 1.37$ , et fréquemment en emploi  $\theta = 1.4$  .

Soit  $\tau$  l'incrément du temps, donc  $\theta \leq \tau \leq \theta.\Delta t$ , on a alors :



$$\text{Soit } \ddot{U}^{t+\tau} = \dot{U}^t + \frac{\tau}{\theta \cdot \Delta t} [\ddot{U}^{t+\theta \cdot \Delta t} - \dot{U}^t] \quad (4-22)$$

$$\text{d'ou } \dot{U}^{t+\tau} = \dot{U}^t + \dot{U}^t \cdot \tau + \frac{\tau^2}{2 \cdot \theta \cdot \Delta t} [\ddot{U}^{t+\theta \cdot \Delta t} - \dot{U}^t] \quad (4-23)$$

$$\text{et } U^{t+\tau} = U^t + \dot{U}^t \cdot \tau + \frac{1}{2} \dot{U}^t \cdot \tau^2 + \frac{\tau^3}{6 \cdot \theta \cdot \Delta t} [\ddot{U}^{t+\theta \cdot \Delta t} - \dot{U}^t] \quad (4-24)$$

Au temps  $t + \theta \cdot \Delta t$  on aura donc :

$$\dot{U}^{t+\theta \Delta t} = \dot{U}^t + \frac{\theta \cdot \Delta t}{2} [\ddot{U}^{t+\theta \Delta t} + \dot{U}^t] \quad (4-25)$$

$$U^{t+\theta \Delta t} = U^t + \theta \cdot \Delta t \cdot \dot{U}^t + \frac{\theta^2 \cdot \Delta t^2}{6} [\ddot{U}^{t+\theta \Delta t} + 2\dot{U}^t] \quad (4-26)$$

Des deux équations précédentes, on peut calculer  $\ddot{U}^{t+\theta \cdot \Delta t}$  et  $\dot{U}^{t+\theta \cdot \Delta t}$ , en terme de  $U^{t+\theta \Delta t}$ .

$$\ddot{U}^{t+\theta \cdot \Delta t} = \frac{6}{\theta^2 \cdot \Delta t^2} [U^{t+\theta \Delta t} - U^t] - \frac{6}{\theta \cdot \Delta t} \dot{U}^t - 2 \cdot \ddot{U}^t \quad (4-27)$$

$$\text{et } \dot{U}^{t+\theta \Delta t} = \frac{3}{\theta \cdot \Delta t} [U^{t+\theta \Delta t} - U^t] - 2 \dot{U}^t - \frac{\theta \cdot \Delta t}{2} \ddot{U}^t \quad (4-28)$$

Pour calculer les déplacements, la vitesse et l'accélération au temps  $t+\Delta t$ , on écrit l'équation d'équilibre dynamique au temps  $t+\theta \cdot \Delta t$ , puisque l'accélération varie linéairement en utilise une projection linéaire de la charge, on a donc :

$$M \ddot{U}^{t+\theta \cdot \Delta t} + C \cdot \dot{U}^{t+\theta \Delta t} + \bar{K} \cdot U^{t+\theta \Delta t} = \bar{R}^{t+\theta \Delta t} \quad (4-29)$$

L'équation précédente peut s'écrire :

$$\bar{K}(t+\theta \cdot \Delta t) \cdot U^{t+\theta \cdot \Delta t} = \bar{R}^{t+\theta \cdot \Delta t} \quad (4-30)$$

ou :

$$\bar{K}(t) = K(t) + \frac{6}{(\theta \cdot \Delta t)^2} M + \frac{3}{\theta \cdot \Delta t} C(t) \quad (4-31)$$

et :

$$\begin{aligned} \bar{R}(t+\theta.\Delta t) &= R(t) + \theta[R(t+\theta.\Delta t) - R(t)] + M\left[\frac{\theta}{6} U^t + \frac{\theta}{6} \dot{U}^t + 2 \ddot{U}^t\right] + \\ &\quad (\theta.\Delta t)^2 \theta.\Delta t \\ C(t)\left[\frac{3}{\theta.\Delta t} U(t) + 2\dot{U}^t + \frac{\theta.\Delta t}{2} \ddot{U}^t\right] \end{aligned} \quad (4-32)$$

On substituant  $U^{t+\theta.\Delta t}$  dans (4.27), on obtient  $\ddot{U}^{t+\theta.\Delta t}$  que l'on utilise (4.22 et 4.23 et 4.24), toutes évaluées pour  $\tau = \Delta t$  pour calculer  $\dot{U}^{t+\Delta t}$ ,  $\ddot{U}^{t+\Delta t}$  et  $U^{t+\Delta t}$ , on obtient :

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{\theta}{6} [U^{t+\theta.\Delta t} - U^t] - \frac{\theta}{6} \dot{U}^t + (\theta-3) \ddot{U}^t \right\} \quad (4-33)$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{U}^{t+\Delta t} + \ddot{U}^t] \quad (4-34)$$

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta t \dot{U}^t + \frac{\Delta t^2}{6} [\ddot{U}^{t+\Delta t} + 2 \ddot{U}^t] \quad (4-35)$$

Les valeurs calculés par les équations (4.33) et (4.34) et (4.35), constituent les conditions initiales pour le prochain intervalle de temps, et le processus est répété .

#### \* Commentaires :

- La méthode  $\theta$  de **Wilson** est inconditionnellement stable pour  $\theta \geq 1.3$ , on utilise en général  $\theta = 1.4$  .
- Cette méthode a tendance à surestimer la solution exacte au début de la réponse des problèmes aux valeurs initiales, quand on utilise  $\Delta t$  grand, cette méthode n'est pas appropriée pour des problèmes d'impact .
- Cette méthode est implicite .

#### IV.1.4.4 The Newmark Method :

Considérée comme une extension de la méthode de l'accélération linéaire . Les hypothèses, suivants sont utilisés :

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \ddot{U}^{t+\Delta t} + \frac{[\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t] \Delta t}{2} \quad (4-36)$$

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \Delta t + \frac{\ddot{U}^t \Delta t^2}{2} + \frac{[\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t] \Delta t^2}{6} \quad (4-37)$$

Après transformation, on obtient :

$$\bar{K} * U^{t+\Delta t} = \bar{R}^{t+\Delta t} \quad (4-38)$$

avec :

$$\bar{K} = K + a_0 M + a_1 C \quad (4-39)$$

et :

$$\bar{R}^{t+\Delta t} = R^{t+\Delta t} + M(a_0 U^t + a_2 \dot{U}^t + a_3 \ddot{U}^t) + C(a_1 U^t + a_4 \dot{U}^t + a_5 \ddot{U}^t) \quad (4-40)$$

Où :

$$a_1 = \frac{1}{B\Delta t^2}, \quad a_2 = \frac{\delta}{B\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{B\Delta t}$$

$$a_4 = \frac{1}{2B} - 1, \quad a_5 = \frac{\delta}{B} - 1, \quad a_6 = \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta}{B} - 2$$

$$a_7 = \Delta t(1-\delta), \quad a_8 = \delta\Delta t$$

avec  $\delta$  et  $B$  sont des paramètres déterminés pour obtenir une bonne stabilité ainsi qu'une bonne précision.

Les accélérations et vitesses aux temps  $t+\Delta t$  sont données par :

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = a_0 (U^{t+\Delta t} - U^t) + a_2 \dot{U}^t - a_3 \ddot{U}^t \quad (4-41)$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + a_6 \ddot{U}^t + a_7 \ddot{U}^{t+\Delta t} \quad (4-42)$$

$$\ddot{U}^t = \frac{1}{2\Delta t} (U^{t+\Delta t} - U^t + U^{t-\Delta t})$$

$$\dot{U}^t = \frac{1}{\Delta t} (U^{t+\Delta t} - U^{t-\Delta t})$$

**NB:** Si on néglige l'amortissement, notre système sera donné par :

$$[M] U_{t+\Delta t} = \Delta t^2 \cdot \bar{R}^t$$

avec :

$$\bar{R}^t = R^t - \left( K - \frac{2}{\Delta t} M \right) U^t - \left( \frac{1}{\Delta t^2} M \right) U_{t-\Delta t}$$

# **CHAPITRE V**

NOTION GENERALES  
SUR  
LES BARRAGES POIDS

## LES BARRAGES-POIDS

### V.1 UN BREF HISTORIQUE :

L'histoire des barrages-poids en maçonnerie et en béton est assez courte à raconter. Ce n'est que lorsque le besoin d'ouvrages de grande hauteur s'est fait sentir qu'ils ont été construits en Espagne aux XVI<sup>ème</sup> et au XVII<sup>ème</sup> siècles (Alicante, puantes). Leur profil était de forme trapézoïdale, voire rectangulaire. Le matériau utilisé était de la maçonnerie jointoyée à l'aide de mortier de chaux. Celui-ci a été peu à peu remplacé par du mortier de ciment, de bien meilleure qualité.

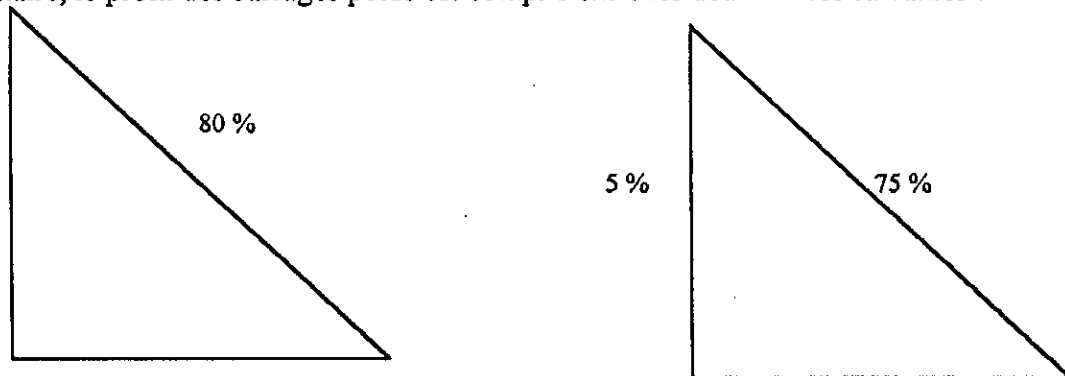
De très nombreux barrages-poids ont été construits durant la révolution industrielle en Europe, afin de répondre aux besoins croissants en eau des villes et de l'industrie. Leur profil se rapproche de plus en plus de la forme triangulaire aujourd'hui couramment employée. Entre les deux guerres, des ouvrages de plus hauts furent construits, et l'usage du béton comme matériau de construction s'est généralisé.

La technique de construction des barrages-poids a été récemment fortement modifiée par l'utilisation d'un matériau nouveau, le Béton Compacté au Rouleau (BCR). Béton très maigre mis en place comme un remblai et compacté par la suite au rouleau vibrant, le BCR a permis de réduire notablement les coûts du matériau (car faiblement dosé en ciment), et surtout de mise en place avec la quasi disparition des coffrages.

Le barrage-poids, comme son nom l'indique, ne peut compter que sur son propre poids pour résister aux efforts appliqués par la retenue, ce qui le rend très vulnérable à une surélévation exceptionnelle de celle-ci, lors de crues par exemple. Ce n'est qu'à la suite d'accidents répétés que les concepteurs ont affiné leur méthodes de dimensionnement et ont surtout pris conscience du danger que représentent les effets liés à la pression interstitielle. Ces méthodes de dimensionnement ont atteint leur forme contemporaine durant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle.

### V.2 PROFIL DES BARRAGES-POIDS :

La géométrie la plus couramment adoptée pour les barrages poids modernes est le profil triangulaire; le profil des barrages poids est compris entre les deux limites suivantes :



Pour les barrages-poids allant jusqu'à 100 m de hauteur on opte pour le chiffre 80 %. Au delà de 100 mètres, il serait plus prudent d'épaissir le profil.

Les barrages-poids sont plus sensibles à une surelevation du plan d'eau.

### **V.3 SOL DE FONDATION :**

Les barrages-poids; étant donné l'importance de leur poids ne conviennent que sur des sols rocheux de très bonne qualité, autrement dit de très bonne résistance mécanique et suffisamment étanche.

En effet, sur un sol douteux, susceptible à se tasser, ces énormes ouvrages ne peuvent suivre les déformations du sol; sans se fracturer dans tous les sens.

L'étude géologique, soit donc déterminer la nature du sol de fondation; avec une bonne précision, d'autant plus que les barrages poids sont difficiles à visiter et ont le grave défaut de masquer le sol sur de grandes étendues.

**Remarque :**

Une fondation rochese, ayant un module d'élasticité  $E$  de  $10^6 \text{ kg/m}^2$  est excellente; par contre avec un module  $E$  de  $2.10^8 \text{ kg/m}^2$ , elle est considérée comme médiocre.

### **V.4 FORCES AGISSANTES SUR LES BARRAGES POIDS :**

Lorsqu'on étudie la stabilité et la sécurité d'un barrage poids, on est d'abord amené à considérer les charges appliquées (ou susceptibles d'être appliquées) sur l'ouvrage.

#### **V.4.1. POIDS PROPRE :**

Le poids propre du béton dépend de sa compacité, du poids spécifique de la pierre utilisée et de la dimension maximum des agrégats.

#### **V.4.2 POUSSEE HYDROSTATIQUE DE L'EAU :**

Cette pression obéit a une répartition linéaire, en un point quelconque et a une profondeur  $z$ , la poussée unitaire est :

$$q = \gamma \cdot z$$

$\gamma$  : poids spécifique dépend de la propriété de l'eau

$$\text{eau propre} = \gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{eau chargée de vase} : \gamma = 1050 \text{ à } 1150 \text{ kg/m}^3$$

Eventuellement il y a lieu de tenir compte de la contre poussée de l'eau lorsqu'il existe un bassin aval.

#### **V.4.3 SOUS PRESSION :**

Quelque soit la qualité du rocher de fondation l'eau y pénètre progressivement, ce phénomène étant dû à la porosité, à la fissuration ou à la fracturation de la roche.

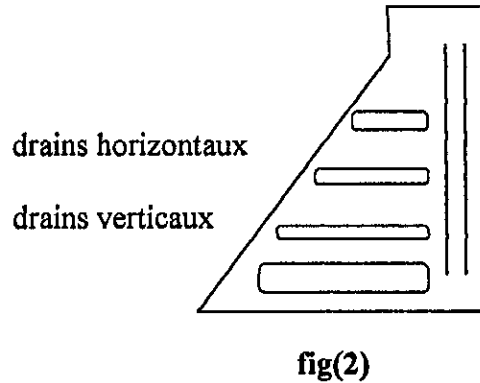
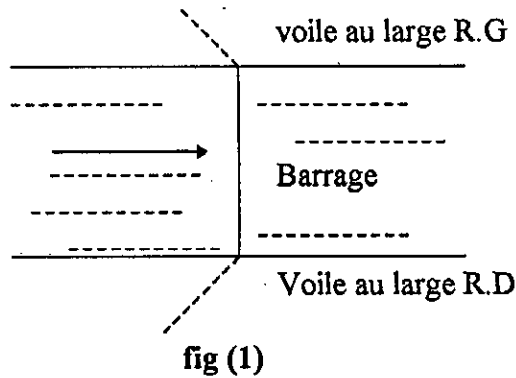
Ces interstices de la fondation sont occupés par de l'eau qui exerce une pression sur les parois; cette pression joue un rôle important pour les stabilité de l'ouvrage à la surface de contact béton - rocher.

La grandeur et la répartition de la sous - pression sont réduites par des formes constructive spéciales, des mesures d'étanchéité et de drainage



**Et archetié du parement amont :**

On soigne spécialement la granulométrie du béton de la face amont du barrage et on la surpasse pour la rendre moins perméable. On prolonge le parement amont dans le sol de fondation par un parafouille, lui même prolongé le barrage latéralement par un voile au large fig. (1)

**Plan vertical du barrage :**

On ménage dans le corps du barrage, en aval du parement amont à 2 ou 3 m en arrière. Un réseau de drains verticaux régulièrement espacés : leur rôles est de capter les eaux qui auraient pu s'infiltrer à travers la face amont du barrage. Le plan de drainage vertical est prolongé dans le sol de fondation où les infiltrations qui pourraient y cheminer, risquent de créer des sous pression tendant à soulever l'ouvrage.

**Drains horizontaux :**

Dans le cas où les eaux d'infiltrations réussiraient à franchir le parement amont, puis le réseau de drainage vertical, on installe des drains horizontaux traversant le corps du barrage fig. (2).

**V.4.4 INFLUENCE DES TREMBLEMENTS DE TERRES :**

Les tremblements de terre provoquent des accélérations qui engendrent dans les ouvrages des efforts supplémentaires consécutifs aux forces d'inertie, ces accélérations peuvent se développer dans toutes les directions, mais ce sont évidemment les horizontales qui sont les plus dangereuses pour les barrages.

**V.4.4.1 ACTION SUR LA MASSE DU BARRAGE :**

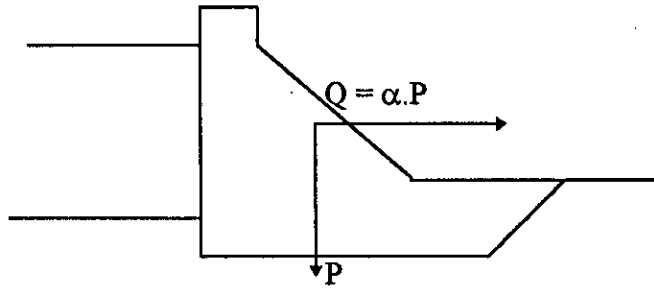
La masse du barrage se comporte comme une console verticale élastique encastrée dans le sol . Les secousses sismique risquent donc de la faire vibrer.

L'accélérations  $\alpha$  donnée par le tremblement de terre est :

$$\alpha = \alpha \cdot g$$

$\alpha$  : Coefficient de sismicité  
 $g$  : Accélérations terrestre.

Dans l'hypothèse d'une accélération du sol dirigée vers l'amont, la face d'inertie Q est donc dirigée vers l'aval et s'ajoute à la poussée de l'eau.



fig(3)

#### V.4.4.2 FORCE D'INERTIE DE L'EAU : (surpression hydrosismique)

Il vient de s'ajouter aussi une réaction due à l'eau de la retenue contre laquelle le barrage bute dans son déplacement vers l'amont selon **westergaard**, cette surpression hydrosismetique à une profondeur  $Z$  est définie par :

$$\Delta E = (7 \gamma_w \alpha (HZ)^{1/2})/8 g$$

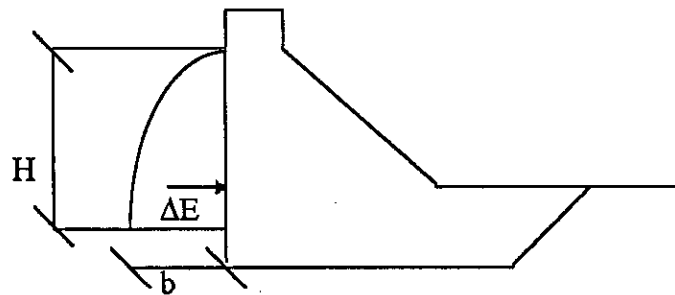
$Z$  : hauteur d'eau mesurée entre le niveau de l'eau et un point submergé donné.

$H$  : hauteur de l'eau de la retenue.

$\alpha$  : accélérations sismique / accélérations terrestre  $\alpha = a/g$

$\gamma_w$  : poids volumique de l'eau

$\Delta E$  : surpression hydrosismique.



Westergaard suppose qu'une certaine partie de l'eau se déplace avec le barrage alors que le reste du réservoir reste inactif. La masse unitaire de cette partie est exprimée par

$$b = \frac{7}{8} \sqrt{hg}$$

#### V.5 EFFET DE LA TEMPERATURE :

Durant sa prise, le ciment dégage de la chaleur, le refroidissement naturel d'un barrage massif est en revanche très lent. Il s'effectue essentiellement par les deux parements, par les faces latérales et par les faces supérieures. Il seige plus d'un an et si le massif est épais, plusieurs années, voir plusieurs siècle. Si le barrage était coulé d'un seul bloc, les contraintes de traction résultant d'un tel refroidissement alors que le béton est de moins en moins deformable; provoquerait à coup sûr une fissuration inadmissible.

On doit donc parer à cet inconvénient en découpant le barrage en plots, séparer par des joints de contractions distances d'environ 15 à 20 m.

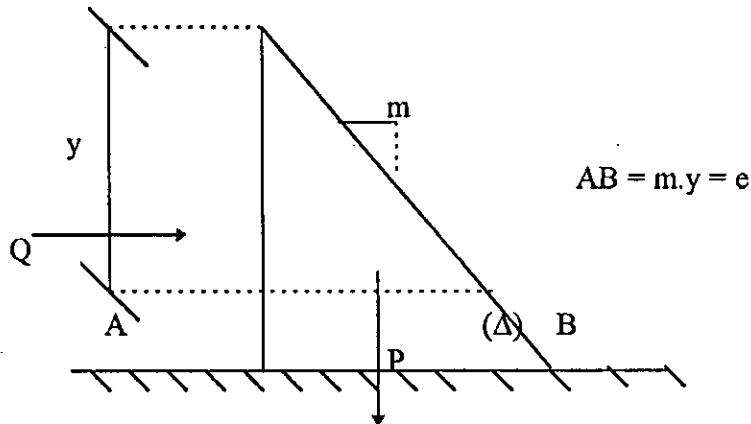
Afin d'assurer le refroidissement du béton pendant son durcissement, on utilise un procédé artificiel qui consiste à noyer dans le béton des tuyaux métalliques (serpentins) dans lesquels on fait circuler de l'eau froide.

Ce procédé permet aussi par les temps froids, d'accélérer la prise du béton, d'où décoffrage plus rapide, en y faisant circuler temporairement de l'eau tiède.

On a donc intérêt à utiliser un ciment qui dégage sa chaleur le plus tôt possible, pour qu'on puisse le refroidir.

Les ciments de laitier sont à priori les plus indiqués il est aussi nécessaire de fabriquer un béton qui ne se détériore pas au gel le long des parement.

## V.6 CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA METHODE DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX :



Dans le schéma du profil triangulaire à parement amont vertical, soit une section courante située à une distance  $y$  en dessous de la crête.

Le poids propre correspond à un effort normale sur  $AB$

$$P = (1/2) \Delta . y . e = (1/2) \Delta . m . y^2$$

et a un moment par rapport au centre de la section  $AB$

$$M = P.(e / 6) = (1 / 12) \Delta m^2 y^3$$

les contraintes de flexion composées sont :

$n = (N / S) \pm (Mv / I)$  \ I : moment d'inertie ( $e^3 / 12$ ) pour les points A et B, extrémités de la section tels que :  $v = \pm (e / 2)$ , il vient :

$$n = (P / e)(1 \pm 1)$$

Soit en A sur le parement amont :  $n_A = \Delta y$  en B sur le parement aval :  $n_B = 0$

La pression hydrostatique seule produit un moment  $M = - \delta (y^3 / 6)$

Les contraintes de flexion s'écrivent :  $\pm (6M / e^2)$ .

Soit en A sur le parement amont :  $n'_A = - (\delta y / m^2)$

en B sur le parement aval :  $n'_B = + (\delta y / m^2)$

en les ajoutant a celle dues au poids propre, on obtient les contraintes en charges :

EFFORT UNITAIRE	BARRAGE	
	PLEIN	VIDE
$\sigma_1$ (aval)	$\delta$ (y/ m <sup>2</sup> )	0
$\sigma_2$ (amont)	$y(\Delta - \delta / m^2)$	$\Delta y$

### Remarque :

Les contraintes étant proportionnelles à la hauteur, c'est dans la partie basse que nous aurons les contraintes les plus élevés.

A barrage vide, le point A est le plus sollicité; la contraintes a ne pas dépasser est donnée par S.R  
S : coefficient de securite ( $s = 0.1$  à  $0.125$ )

R : résistance minimale a l'écrasement du béton à 90 jours.

Il nous est possible alors d'obtenir la hauteur limite de l'ouvrage puisque les contraintes sont proportionnelles a la hauteur.

### V.6.1 CONDITION DE MAURICE LEVY :

Les bétons sont sensibles aux efforts de traction. Il est donc indispensable de veillerà ce qu'en tout point du barrage, la condition de non extension soit vérifiée, notamment au pied amont du barrage ou les risques sont les plus probables.

$$y (\Delta - \delta / m^2) \geq \delta y$$

Cette condition conduit à un fruit « m », donc a un profil plus epais que les conditions de stabilité au glissement.

Le respect de la règle de MAURICE LEVY s'avère trop onéreuse, du fait de l a grande valeur de m, cependant on y satisfait partiellement. En introduisant un coefficient correcteur r, compris entre 0 et 1

$$n_a = y (\Delta - \delta / m^2) \geq r \delta y$$

soit

$$m \geq (\delta / (\Delta - r \delta))^{1/2}$$

### V.6.2 COMPRESSIONS PRINCIPALES SUIVANT LES PAREMENTS :

L'inconvénient de la méthode de la RDM est son incapacité de fournir la possibilité de déterminer les valeurs des contraintes principales en un point M quelconque de la structure; Néanmoins, il nous est possible tout de même de le faire au niveau des pieds amont et aval.

Le champ de contraintes est défini par les formules suivantes :

$$n = (P+Q) / 2 + (P-Q) / 2 \cos \beta \quad \text{contrainte de traction / compression.}$$

$$\tau = ((P-Q) / 2) \sin 2\beta \quad \text{contrainte de cisaillement.}$$

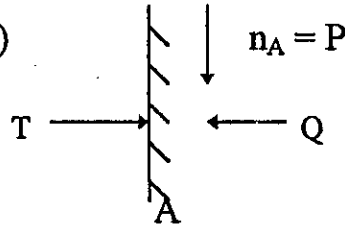
$\beta$  : angle formé par la normale à l'élément de surface avec la contrainte maximale.

**\*SUR LE PAREMENT AMONT : ( $\beta = 0$ )**

$$n_A = (P+Q) / 2 + (P-Q) / 2 \cos \beta = y (\Delta - \delta / m^2)$$

$$Q = T = \delta y \text{ et } P = y (\Delta - \delta / m^2)$$

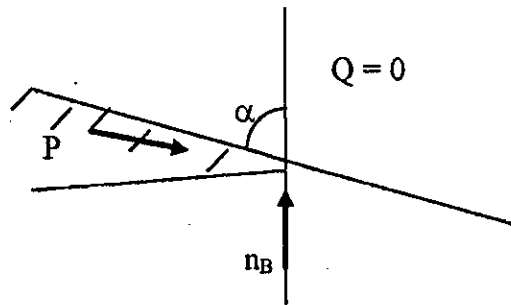
T : contrantes principale.

**\*SUR LE PAREMENT AVAL ( $\beta = 2\alpha$ )**

$$n_b = (P/2) + (P/2) \cos 2\alpha = P \cos^2 \alpha$$

$$Q = 0$$

$$P = n_b (1 + \text{tg}^2 \alpha) = \delta y / (m^2 \cos^2 \alpha) = \delta y / (\sin^2 \alpha)$$

**V.6.3 APPROXIMATIONS FAITES :**

La démarche des calculs précédents repose sur la supposition d'un profil triangulaire.

En réalité, au profil théorique, il faut additionner un couronnement, le poids de ce dernier intervient positivement jusqu'il confère un effet de stabilisation à l'ouvrage.

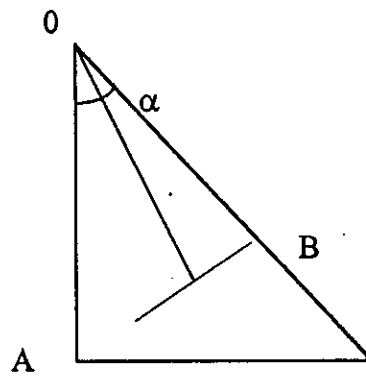
Le danger de la sous pression a été ignoré volontairement au cours des calculs. En effet, le profil, de l'ouvrage ne peut subir aucune transformation en vue de limiter le phénomène déstabilisateur de sous-pression; par contre les dispositions à prendre en compte sont les suivantes :

Application d'un voile d'étanchéité (voile d'injection) de façon à réduire le gradient hydraulique au dessous du gradient hydraulique admissible.

Elaboration d'un réseau de chaînage efficace.

Une des hypothèses les plus importantes de la RDM a savoir qu'une section reste plane après déformation (en phase élastique) ne peut être respectée vu les dimensions des barrages.

Les calculs par la RDM nécessitent que la base AB soit orthogonale à la bissectrice de l'angle  $\alpha$ . De plus on ne tient pas compte de la transmission des efforts d'interactions béton / rocher de fondation, mais malgré toutes ces restrictions, les calculs les plus précis conduisent à des résultats peu différents de ceux obtenus par la RDM.



**V.7 CALCUL DES CONTRAINTES PAR LA METHODE DE L'ELASTICITE (METHODE DE PIGEAUD) :**

Dans ce qui suit on va faire appel à la théorie d'élasticité (méthode de pigeaud) qui nous permettra de déterminer les efforts élastiques exerçant en chaque point du barrage.

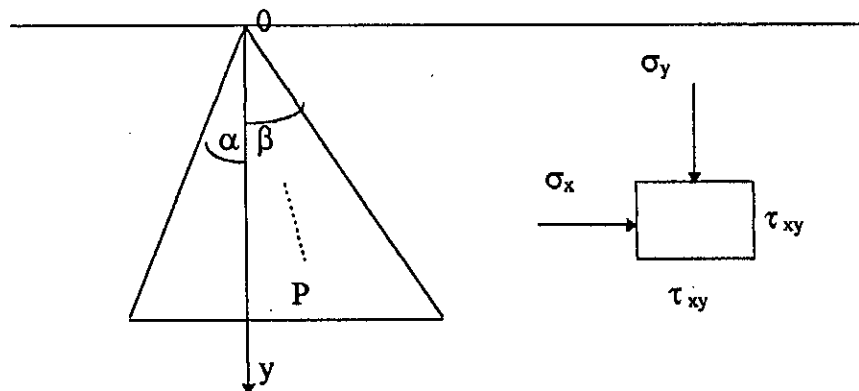
**V.7.1 METHODE PIGEAUD :**

Considérons un massif triangulaire de sommet 0 un point P du barrage est défini par ces coordonnées cartésiennes (x,y) ou par ces coordonnées polaires (ρ,w)

- m = tg β fruit aval du barrage
- n = tg α fruit amont du barrage

Au tour du point P, on découpe un cube élémentaire dont les cotés, parallèles a OX et OY sont de longueur unité. Les forces qui s'appliquent sur ce cube de volume unitaire sont:

- \* sur ses faces opposées parallèles a OY:  
Effort normal: ± σ<sub>x</sub>  
Effort tangentiel: ± τ<sub>xy</sub>
- \* sur ses faces opposées parallèles a OX:  
Effort normal: ± σ<sub>y</sub>  
Effort tangentiel: ± τ<sub>xy</sub>



**V.7.2 EQUATIONS D'EQUILIBRE ELASTIQUE**

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  font équilibre à la résultante des forces de volume dont les composantes sont X et Y; les équations caractérisant de cet équilibre sont:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y$$

Dans le cas d'un barrage poids  $X=0$  et  $Y=\Delta$ , on considère que le barrage est de composition homogène c'est à dire  $\Delta$  constant.

Ainsi l'équation d'équilibre élastique aura la forme suivante:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \Delta$$

Le barrage est de composition homogène ( $\Delta=cte$ ) ce qui nous amène à dire que les forces de volume dérivent d'un potentiel qui est le produit ( $Y\Delta$ ), on suppose que les déformations sont élastiques et suivent la loi de HOOKE. Par conséquent on pourra dire que le LAPLACIEN de  $\phi = (\sigma_x + \sigma_y)$  est nul; D'où:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation jointe aux deux précédentes, doit permettre de déterminer les trois inconnues  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$ . La résolution de ces équations peut être simplifiée en tenant compte de l'homothétie de centre 0, qui existe entre les forces de surface d'une part et les forces de volume d'autres part. En effet :

Sur le parement amont règne la pression hydrostatique  $\delta_y$  proportionnelle à Y, donc proportionnelle à la distance verticale du sommet 0 au point considéré sur le parement.

Sur le parement aval règne la pression atmosphérique considérée comme négligeable, donc nulle; de sorte que l'homothétie par rapport au sommet 0 est vérifiée.

Sur une assise horizontale au barrage d'aire

$$Y \text{ tang}(\beta) + y \text{ tang}(\beta) = (m + n)y$$

Le poids du béton est :

$$((m + n) y^2 \Delta) / 2$$

La pression unitaire qui en résulte est :  $(\Delta y) / 2$

De l'homothétie qui règne entre les forces de surface, d'une part et les forces de volume d'autre part, résulte une répartition homothétique des forces élastiques  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  dans le corps du barrage. Autrement dit, le long d'une même direction OP,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  varient proportionnellement à la distance

$$P = OP$$

On en déduit en particulier que :

$$\phi = \sigma_x + \sigma_y + \rho f(\omega)$$

Le LAPLACIEN de  $\phi$  est nul.

En coordonnées polaires

$$x = \rho \sin(\omega)$$

$$y = \rho \cos(\omega)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \phi}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\rho^2 \partial \omega^2} = 0 \quad (1)$$

En remplaçant  $\phi$  par sa valeur on trouve :

$$f(\omega) + \frac{\partial^2 [f(\omega)]}{\partial \omega^2} = 0 \quad (2)$$

(2) est une équation différentielle dont la solution générale est :

$$f(\omega) = A \sin(\omega) + B \cos(\omega)$$

A et B sont des constantes d'intégrations

$$\text{Or } \phi = \rho f(\omega) = \rho A \sin(\omega) + \rho B \cos(\omega)$$

$$\text{D'où } \phi = A_x + B_y$$

Par suite

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

En différentiant les équations générales, la première par rapport à x, la deuxième par rapport à y et en les soustrayant membre à membre on trouve :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0$$



En tenant compte des identités suivantes :

$$\begin{aligned} 2\sigma_x &= (\sigma_x + \sigma_y) + (\sigma_x - \sigma_y) = \phi + (\sigma_x - \sigma_y) \\ 2\sigma_y &= (\sigma_x + \sigma_y) - (\sigma_x - \sigma_y) = \phi - (\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned}$$

On aboutit à la relation

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x - \sigma_y)}{\partial y^2} = 0$$

Ce qui revient à dire que le Laplacien

$$\phi_1 = \sigma_x - \sigma_y = \rho f_1(\omega)$$

de la même manière on aura

$$\phi_1 = \rho f_1(\omega) = a_1 x + b_1 y$$

On en déduit que  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont des fonctions linéaires de  $x$  et  $y$ .

Reprenant enfin les équations générales en les différentiant à nouveau la première par rapport à  $y$ , la deuxième par rapport à  $x$  on obtient :

$$\frac{\partial^2(\tau_{xy})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\tau_{xy})}{\partial y^2} = 0$$

Ainsi le Laplacien de  $\tau_{xy}$  est nul, les mêmes raisonnements montrent que  $\tau_{xy}$  est une fonction linéaire de  $x$  et  $y$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 x + b_1 y \\ \sigma_y &= a_2 x + b_2 y \\ \tau_{xy} &= cx + dy \end{aligned}$$

Les coefficients  $a_1, b_1, a_2, b_2, c$  et  $d$  sont des constantes dépendant des conditions aux limites, c'est à dire des pressions sur les parements amont et aval.

En se reportant aux équations générales, en dérivant que nous venons d'explicitier, on aura :  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$

$$\begin{aligned} d &= a_1 \\ c &= \Delta - b_1 \end{aligned}$$

Il n'y a donc, en réalité que quatre coefficients  $a_1, a_2, b_1$ , et  $b_2$  à déterminer par les conditions aux limites.

## **V.8 CALCUL DES CONTRAINTES EN UN POINT DU BARRAGE:**

On sait que les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  en un point  $P$  du barrage valent:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 x + b_1 y \\ \sigma_y &= a_2 x + b_2 y \\ \tau_{xy} &= (\Delta - b_2) x - a_1 y \end{aligned}$$

Examinons les conditions aux limites

**\* BARRAGE PLEIN**

a/ sur le parement amont de fruit  $n$ , considérons un point de coordonnées  $x=ny$  et  $y$ . Les composantes de la poussée  $Q$  qui s'exerce sur le parement sont:

$$X = y \delta \cos \alpha$$

$$Y = y \delta \sin \alpha$$

La condition d'équilibre élastique s'écrit (équilibre du tétraèdre élémentaire):

$$X = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = y \delta \cos \alpha$$

$$Y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = y \delta \sin \alpha$$

Or  $\tan \alpha = n$

Ce qui donne:

$$\sigma_x + n \cdot \tau_{xy} = y \cdot \delta$$

$$\tau_{xy} + n \cdot \sigma_y = n \cdot y \cdot \delta$$

b/ sur le parement aval fruit  $m$ , considérons un point de coordonnées  $x=my$  et  $y$ , la poussée  $Q$  est nulle, par suite :  $X = 0$  et  $Y = 0$ , la condition d'équilibre s'écrit :

$$0 = -\sigma_x \cos \beta + \tau_{xy} \sin \beta$$

$$0 = -\tau_{xy} \cos \beta + \sigma_y \sin \beta$$

Or  $\tan \beta = m$ , Ce qui donne

$$\sigma_x - m \cdot \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xy} - m \cdot \sigma_y = 0$$

Ainsi nous avons un système de six équations à six inconnues

$$\sigma_x + n \cdot \tau_{xy} = y \cdot \delta$$

$$\tau_{xy} + n \cdot \sigma_y = n \cdot y \cdot \delta$$

$$\sigma_x - m \cdot \tau_{xy} = y \cdot \delta$$

$$\tau_{xy} + m \cdot \sigma_y = 0$$

$$d + a_1 = 0$$

$$c + b_2 = \Delta$$

Finalement  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ , et  $b_2$  ont pour valeur :

$$a_1 = \frac{\Delta \cdot m \cdot n (m - n)}{(m + n)^2} + \frac{\delta \cdot m (m \cdot n - m^2 - 2)}{(m + n)^9}$$

$$b_1 = \frac{2 \cdot \Delta \cdot m^2 \cdot n^2}{(m + n)^2} - \frac{\delta \cdot m^2 (2 \cdot m \cdot n^2 - 3 \cdot n - m)}{(m + n)^9}$$

$$a_2 = -\frac{\Delta \cdot (m - n)}{(m + n)^2} - \frac{\delta \cdot (3 \cdot m \cdot n + n^2 - 2)}{(m + n)^9}$$

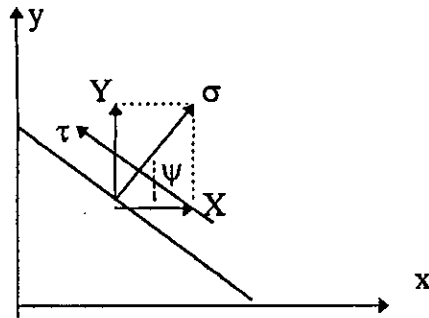
$$b_2 = \frac{\Delta \cdot (m^2 + n^2)}{(m + n)^2} - \frac{\delta \cdot (m - n - 2 \cdot m^2 \cdot n)}{(m + n)^9}$$

$$c = \Delta - b_2$$

$$d = -a_1$$

Connaissant les fruits  $m$  et  $n$  ainsi que  $\Delta$  et  $\delta$ , on pourra calculer les constantes ci-dessus, puis on calcule  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  en tout point  $P$  de coordonnées  $x$  et  $y$ .

### **V.9 EQUILIBRE DU TETRAEDRE ELEMENTAIRE:**



$$\begin{aligned}\sigma_x &= x \cdot \cos \psi + y \cdot \sin \psi \\ \tau &= -x \cdot \sin \psi + y \cdot \cos \psi\end{aligned}$$

Les composantes suivant  $ox$  et  $oy$  :

$$\begin{aligned}x &= \sigma_x \cdot \cos \psi + \tau_{xy} \cdot \sin \psi \\ y &= \tau_{xy} \cdot \cos \psi + \sigma_y \cdot \sin \psi\end{aligned}$$

En tenant compte de la transformation trigonométrique, on pourra écrire :

$$\begin{aligned}\sigma &= ((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + ((\sigma_x - \sigma_y) / 2) \cos 2\psi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\psi \\ \tau &= ((\sigma_y - \sigma_x) / 2) \cdot \sin 2\psi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\psi\end{aligned}$$

### **V.10 CONTRAINTES PRINCIPALES :**

$\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$  d'une part,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  d'autre part sont les composantes respectives, suivant l'axe des  $X$  et l'axe des  $Y$ , des efforts élastiques s'exerçant sur l'élément plan horizontal parallèle à  $ox$  et l'élément plan vertical parallèle  $oy$  passant par le point  $P$ .

Sur un élément plan de direction quelconque caractérisé par l'angle  $\psi$  dont les composantes seront, soit  $X$  et  $Y$  suivant  $OX$  et  $OY$ , soit  $\sigma$  suivant la normale à l'élément plan et  $\tau$  suivant sa propre direction.

On aura :

équilibre élastique ( tétraèdre élémentaire ).

$$\begin{aligned}x &= \sigma_x \cdot \cos \psi + \tau_{xy} \cdot \sin \psi \\ y &= \tau_{xy} \cdot \cos \psi + \sigma_y \cdot \sin \psi\end{aligned}$$

en tenant compte de la transformation trigonométrique on tire :

$$\begin{aligned}\sigma &= ((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + ((\sigma_x - \sigma_y) / 2) \cos 2\psi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\psi \\ \tau &= ((\sigma_y - \sigma_x) / 2) \cdot \sin 2\psi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\psi\end{aligned}$$

Cherchons l'angle pour lequel  $\sigma$  est maximal ou minimal, cela revient à chercher les contraintes principales et les directions principales.

Pour cela faisons  $\partial\sigma / \partial\psi = 0$  cela implique que :

$$0 = ((\sigma_x - \sigma_y) / 2) (-2\sin 2\psi) + 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\psi$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\psi = -2\tau_{xy} \cdot \cos 2\psi$$

d'où  $\tan 2\psi = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y)$

à laquelle correspond deux valeurs particulières  $\beta$  et  $(\beta + \Pi/2)$ , c'est à dire deux éléments plans rectangulaires entre eux. Leurs directions s'appellent directions principales.

Les efforts élastiques correspondant sont appelés contraintes principales. On a notamment :

$$\sigma = ((\sigma_x + \sigma_y) / 2) + ((\sigma_x - \sigma_y) / 2) \cos 2\beta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\beta$$

$$\tan 2\beta = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y)$$

En évaluant  $\cos 2\beta$  et  $\sin 2\beta$  à partir de  $\tan 2\beta$ , les contraintes principales s'écriront :

$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \right]^{1/2}}{2}$
$B = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \right]^{1/2}}{2}$

## **V.11 CISAILLEMENT EFFECTIF MAXIMUM**

En un point P, la composante tangentielle  $\tau$  a pour expression :

$$\tau = ((\sigma_y - \sigma_x) / 2) \cdot \sin 2\psi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\psi$$

cherchons  $\psi$  pour que  $\tau$  soit maximale :

pour cela on aura :  $\partial\tau / \partial\psi = 0$

soit

$$(\sigma_y - \sigma_x) \cdot \cos 2\psi - 2\tau_{xy} \cdot \sin 2\psi = 0$$

ce qui implique que :

$$\tan 2\psi = (\sigma_x - \sigma_y) / 2\tau_{xy}$$

donc la valeur de  $\alpha$  pour laquelle  $\tau$  est maximal est  $\alpha = \psi$  tel que :

$$\tan 2\psi = (\sigma_x - \sigma_y) / 2\tau_{xy}, \quad \text{or} \quad \tan 2\beta = 2\tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y)$$

ce qui implique que :

$$\tan 2\psi = 1 / \tan 2\beta$$

d'ou 
$$2\psi = 2\beta \pm \Pi/2$$

$$\psi = \beta \pm \Pi/4$$

la valeur de  $\tau_{max}$  est donnée par :

$$\tau_{max} = - ((A - B) / 2) . \sin 2\omega$$

avec  $\omega = \pm \Pi/4$

$$|\tau_m| = (A - B) / 2 = (((\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2)^{1/2}) / 2$$

En effet il existe des efforts qui font équilibre au cisaillement  $\tau$

- La force de frottement ( $\sigma \text{ tang } \phi$ )
- La cohésion du matériau C

La quantité  $|\tau| - |\sigma| \text{ tang } \phi$  est appelée cisaillement effectif :

$$\tau_{off} = |\tau| - |\sigma| \text{ tang } \phi$$

Remplaçons  $\tau$  et  $\sigma$  par leurs expressions, sachons que :

$$\sigma = \frac{(A+B)}{2} + \frac{(A-B)}{2} \text{ Cos } 2\omega$$

$$\tau_{off} = \frac{(A-B)}{2} \text{ Sin } 2\omega - \frac{(A+B)}{2} \text{ tang } \phi - \frac{(A-B)}{2} \text{ tang } \phi \text{ Cos } 2\omega$$

$$\tau_{off} = \frac{(A-B)}{2} \left\{ \frac{\text{Sin} 2\omega \text{ Cos } \phi - \text{Cos} 2\omega \text{ Sin } \phi}{\text{Cos } \phi} \right\} - \frac{(A+B)}{2} \text{ tang } \phi$$

Après la transformation trigonométrique on aura :

$$\tau_{off} = \frac{(A-B)}{2 \text{Cos } \phi} \text{ Sin } (2\omega - \phi) - \frac{(A+B)}{2} \text{ tang } \phi$$

Cherchons  $\omega$  pour laquelle  $\tau_{off}$  est maximum :

$$\tau_{off} / \delta\omega = 0 \quad \frac{2(A-B)}{2 \text{Cos } \phi} \text{ Cos } (2\omega - \phi) = 0$$

$$\text{D'ou } \text{Cos } (2\omega - \phi) = 0 \quad 2\omega = \phi + \pi/2 \quad \omega = (\phi/2 + \pi/4)$$

en remplaçant  $2\omega$  par  $\phi + \pi/2$  on aura :

$$\tau_{off_{max}} = \frac{1}{2 \text{Cos } \phi} [ (A-B) - (A+B) \text{ Sin } \phi ]$$

## **V.12 CONTRAINTES S'EXERCANT SUR LE PAREMENT AMONT:**

### **\* RETENUE PLEINE**

Soit un point M de coordonnées ( $x = y_n$  et  $y$ ) pris sur le parement amont.

D'après la condition d'équilibre on obtient:

$$\sigma_x + n \tau_{xy} = y \delta \quad (3)$$

$$n \sigma_y + \tau_{xy} = y \delta n \quad (4)$$

D'après (4) on aura :

$$\tau_{xy} = y \delta n - n \sigma_y$$

En reportant dans (3) on

$$\sigma_x = y \delta - (y \delta - \sigma_y) n^2$$

Or :

$$\sigma_y = y \delta - (y \delta - \sigma_y) n^2$$

en remplaçant az et bz par leurs valeurs on obtient :

$$\sigma_y = \frac{y}{(m+n)^2} [m(m+n)\Delta - (1 - 2.m.n - n^2)\delta]$$

Si le barrage est à parement amont vertical (n = 0) alors :

$$\sigma_y = (\Delta - \delta / m^2).y$$

Désignons par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les contraintes de compressions principales

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2}}{2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y - [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]^{1/2}}{2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

En remplaçant  $\sigma_x$  par sa valeur on obtient :

$$\sigma_1 = C + D = \delta_y$$

$$\sigma_2 = C - D = \sigma_y + (\sigma_y - y.\delta) n^2$$

Avec

$$C = (y.\delta + (\sigma_y - y.\delta) n^2 + \sigma_y)/2$$

$$D = 0.5 ((y.\delta - \sigma_y) + (y.\delta - \sigma_y) n^2)$$

Recherche de la contrainte maximale:

1) Si  $\sigma_y > y.\delta$  (condition de Maurice Levy satisfaite)

$$\sigma_1 < \sigma_y < \sigma_2$$

$\sigma_2$  : contrainte de compression maximale s'identifiant à A.

$\sigma_1$  : contrainte de compression maximale s'identifiant à B

2) Si  $\sigma_y < y.\delta$  (condition de Maurice Levy non satisfaite)

$$\sigma_2 < \sigma_y < \sigma_1$$

$\sigma_1$  : contrainte de compression maximale s'identifiant à A.

$\sigma_2$  : contrainte de compression maximale s'identifiant à B.

Remarque: Pour n = 0 on a

$$\sigma_1 = y.\delta \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma_y$$

**\* RETENUE VIDE**

Pour une retenue vide on a  $\delta = 0$  d'où

$$\begin{aligned}\sigma_x &= n^2 \sigma_y \\ \tau_{xy} &= -n \sigma_y \\ \sigma_y &= y.m.\Delta / (m+n)\end{aligned}$$

Dans ce cas la pression hydrostatique est nulle c'est à dire  $\sigma_1 = 0$ , par conséquent  $\sigma_2 = \sigma_y (1 + n^2)$  qui constitue une compression maximale.

Calcul de  $\tau_{\max}$

$$\text{On sait que : } \tau_{\max} = \frac{1}{2\cos\phi} [(A - B) - (A + B) \sin\phi]$$

$$\text{Avec } B = 0 \text{ (c'est à dire } \sigma_1 = 0) \quad \rightarrow \tau_{\max} = \frac{A(1 - \sin\phi)}{2\cos\phi}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y (1 + n^2)(1 - \sin\phi)}{2\cos\phi}$$

**Remarque:**

$$\text{Si } n = 0 \text{ alors } \sigma_2 = \sigma_y \text{ et } \tau_{\max} = \sigma_y (1 - \sin\phi) / 2\cos\phi$$

**V.13. CONTRAINTES S'EXERCANT SUR LE PAREMENT AVAL****\* RETENUE PLEINE**

Sur le parement aval règne la pression atmosphérique négligeable, cette compression est minimale elle s'identifiera donc à B.

Soit un point sur le parement aval de coordonnées ( $x=my$  et  $y$ ), les contraintes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  s'écrivent:

$$\begin{aligned}\sigma_x - \tau_{xy} . m &= 0 & \longleftrightarrow & \sigma_x = \tau_{xy} . m \\ \tau_{xy} - \sigma_y . m &= 0 & \longleftrightarrow & \tau_{xy} = \sigma_y . m \\ \sigma_2 = \sigma_y . m^2 & \text{ avec } \sigma_y = \frac{y}{(m+n)^2} (n\Delta (m+n) + (1 - mn) \delta)\end{aligned}$$

La contrainte de compression  $\sigma_2$  est donc A et s'écrit:

$$\sigma_2 = \sigma_y + m^2 . \sigma_y = (1 + m^2) \sigma_y$$

\* Dans le cas d'un barrage à parement amont vertical ( $n = 0$ )

$$\sigma_y = y . \delta / m^2$$

C'est un résultat déjà trouvé avec la méthode de R.D.M ( $\sigma_y = \sigma_1$ ).

Sachant que  $B = 0$ , le cisaillement effectif a pour valeur:

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{(1 + m^2)(1 - \sin\phi)y}{2 \sin\phi}$$

\* *RÉTENUE VIDE*

Il suffit de mettre  $\delta = 0$

## V.14 CONDITION DE MAURICE LEVY

Elle a en vue l'élimination du danger due aux sous pression qui résultent de l'introduction de l'eau dans les fissures susceptibles de se produire dans le parement amont.

Elle consiste à ne pas se contenter d'avoir  $\sigma_2 \geq 0$ , mais d'obtenir une contrainte  $\sigma_2$  sur le parement amont, supérieure à la pression hydrostatique:  $(y \delta)$  qui y règne, ce qui implique que  $\sigma_y > y \cdot \delta$  en effet:

Remplaçons  $\sigma_y$  par sa valeur:

$$\Delta (m + n)m - \delta (1 + m^2) \geq 0$$

Si  $n \neq 0$  alors:

$$\begin{aligned} \Delta m^2 - \delta (1 + m^2) &\geq 0 \\ m^2 (\Delta - \delta) &\geq \delta \quad \longleftrightarrow \quad m \geq (\delta / (\Delta - \delta))^{1/2} \end{aligned}$$

## V.15 CONDITION DE STABILITE

Les conditions de stabilité sont telles que les contraintes principales restent tout le temps positives (pas de traction) et inférieures au taux de travail limite (C) adopté par le projet.

### V.15.1 PAREMENT AMONT

\* *RESERVOIR PLEIN*

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= y \cdot \delta \quad \text{étant positive, portons notre attention sur:} \\ \sigma_2 &= \sigma_y + n^2 (\sigma_y - y \delta) \end{aligned}$$

La condition de non extension (M.Levy) est telle que:

$$\sigma_2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_y + n^2 (\sigma_y - y \delta) \geq 0 \quad (7)$$

Avec

$$\sigma_y = y[m(m + n)\Delta - (1 - 2mn - n^2)\delta]/(m + n)^2$$



(7) devient :

$$y \left\{ \frac{\Delta m(1+n^2)}{(m+n)} - \frac{\delta(1-mn)^2}{(m+n)^2} \right\} \geq 0$$

$$\Delta m(1+n^2)(m+n) - \delta(1-mn)^2$$

Cas où  $n = 0$

$$\Delta m^2 - \delta \geq 0 \rightarrow m \geq y \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}}$$

\* **RÉSERVOIR VIDE :**

$$\sigma = y \delta = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma_y (1+n^2)$$

avec

$$\sigma_y = \frac{y.m.\Delta}{(m+n)}$$

D'où

$$\sigma_2 = \frac{m.\Delta.(1+n^2)}{(m+n)} . y \quad \text{qui doit être inférieur à C}$$

### V.15.2 PAREMENT AVAL :

\* *RÉSÉROIR PLEIN*

$$\sigma_2 = (1+m^2) . \sigma_y \quad \text{avec} \quad \sigma_y = \frac{y}{(m+n)^2} [n.\Delta (m+n) + (1-m.n)\delta]$$

$$\sigma_2 = \frac{y(1+m^2)}{(m+n)^2} [n.\Delta (m+n) + (1-m.n)\delta]$$

$$\sigma_2 = y(1+m^2) \left[ \frac{n.\Delta}{(m+n)} + \frac{(1-m.n)\delta}{(m+n)^2} \right] < C$$

\* *RÉSÉROIR VIDE*

$$\sigma_2 = \frac{y n . \Delta}{(m+n)}$$

$$\sigma_2 = (1+m^2) . \sigma_y = \frac{m.\Delta(1+m^2)}{(m+n)} . y$$

Cette quantité est supérieure à zéro ce qui veut dire que la condition de Maurice Levy est vérifiée, par ailleurs  $\sigma_2$  doit demeurer inférieure à C

**Remarque :**

$$n = 0 \text{ -----} \rightarrow \sigma_2 = 0$$

## V.16 LES LIGNES CARACTERISTIQUES :

### V.16.1 COURBES D'EGALE COMPRESSION MAXIMALE :

Reprenons l'équation donnant la contrainte maximale A :

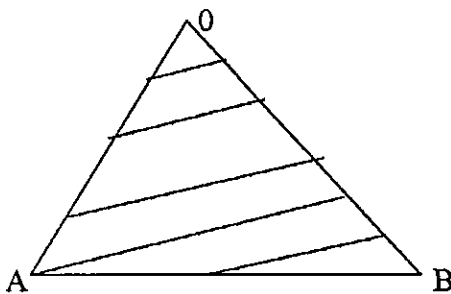
$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} [ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 ]^{1/2}$$

Afin de connaître la répartition des contraintes maximales dans le corps du barrage, on dresse des courbes d'égalité de compression maximale. Pour cela construisons une courbe A égale à une constante, c'est à dire que pour une même valeur de A, on aura une courbe reliant les points d'égalité de compression.

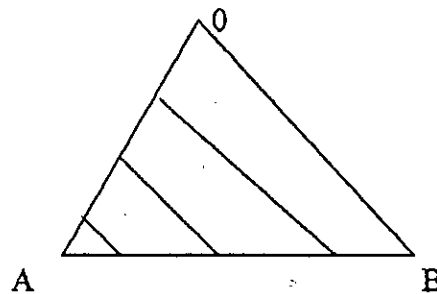
Ainsi que les autres courbes se déduisent par homothétie l'une de l'autre par rapport au sommet O.

Les courbes déduites sont des branches hyperboliques fig (4-2), elles nous informent sur les parties où on doit surdose le béton.

La contrainte maximale A doit rester inférieure au taux de travail



Barrage plein



Barrage vide

### V.16.2 COURBES D'EGALE CISAILLEMENT EFFECTIF MAXIMAL :

On peut également tracer les courbes d'égalité de cisaillement effectif en faisant :

$$\tau_m = \frac{1}{\cos 2\phi} [ (A - B) - (A + B) \sin \phi ] = C^{te}$$

#### *LIGNES ISOSTATIQUE :*

Les lignes isostatiques sont des lignes tangentes en chaque point à l'une des deux contraintes principales qui règnent en ce point.

L'intérêt de ces courbes est de montrer comment se propagent les compressions principales dans le corps du barrage.

Il existe deux sortes de lignes isostatiques

- Lignes tangentes aux compressions maximales qui s'appellent isostatique de première espèce.
- Lignes tangentes aux compressions minimales qui s'appellent isostatique de deuxième espèce.

La tangente d'une isostatique en un point fait un angle avec OX tel que :

$$\operatorname{tg}(2\beta) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad \text{or} \quad \operatorname{tg}(2\beta) = \frac{2 \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}^2(\beta)}$$

D'où

$$\frac{2 \cdot \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{2 \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}^2(\beta)}$$

Avec  $\operatorname{tg}(\beta) = dx / dy$

On obtient :

$$\tau_{xy} \cdot \frac{dx^2}{dy} + \frac{dx}{dy} (\sigma_x - \sigma_y) = \tau_{xy}$$

équation différentielle dont les solutions sont des courbes orthogonales (isostatique de première et de deuxième espèce)

On tire :

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \pm [((\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2)]^{1/2}}{2 \cdot \tau_{xy}}$$

Prenons les contraintes élastique s'exerçant sur les parements amont et aval on a :

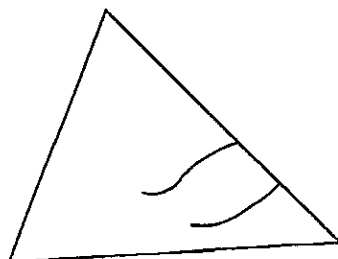
**\*RESERVOIR PLEIN :**

Condition de Maurice Levy satisfaite : Le parement amont est un isostatique de première espèce, ainsi que pour le parement aval les isostatiques de deuxième espèce en sont perpendiculaires.

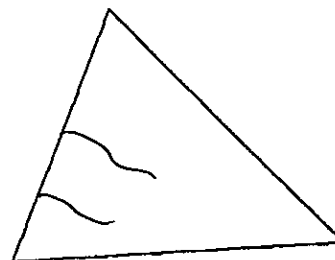
Condition de Maurice Levy non satisfaite : Les isostatiques de première espèce sont perpendiculaire au parement amont, le parement aval constitue toujours une isostatique de première espèce, les isostatiques de deuxième espèce partent suivant le parement amont pour couper perpendiculairement le parement aval.

**\*RESERVOIR VIDE :**

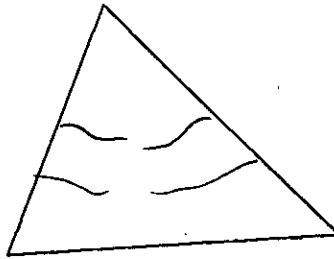
Le parement amont est une isostatique de première espèce ainsi que le parement aval, les isostatiques de deuxième espèce les coupent perpendiculairement.



Réservoir plein (C.dem/Levy satisfaite)



Recevoir vide



Réservoir plein (C. de Maurice Levy non satisfaite)

1. Isostatique de 1<sup>ère</sup> espèce
2. Isostatique de 2<sup>ème</sup> espèce

### V.16.3 LIGNES DE GLISSEMENT EFFECTIF :

Ce sont des lignes admettant comme tangente, en chaque point, la direction de l'élément plan sur lequel le glissement effectif est maximal.

Ces lignes coupent les isostatiques de première espèce sous l'angle constant  $\pm (\pi/4 - \phi/2)$  ce sont donc des trajectoires isogonales de ces courbes isostatiques.

Il passe en chaque point deux lignes de glissement :

- Une ligne presque verticale, rencontre le sol de fondation à l'intérieure du massif, c'est la moins dangereuse.
- L'autre ligne ne rencontre pas le sol de fondation à l'intérieure du massif, c'est évidemment la plus dangereuse.

Pour tracer les lignes de glissement il suffit, sur le graphique ayant servi au tracé des isostatiques, de déclarer tous les angles de la quantité  $-(\pi/4 - \phi/2)$  et comme précédemment de tracer, en partant du parement amont, une ligne polygonale ayant ses sommets sur les rayons intermédiaires OP déjà tracé.

# **CHAPITRE VI**

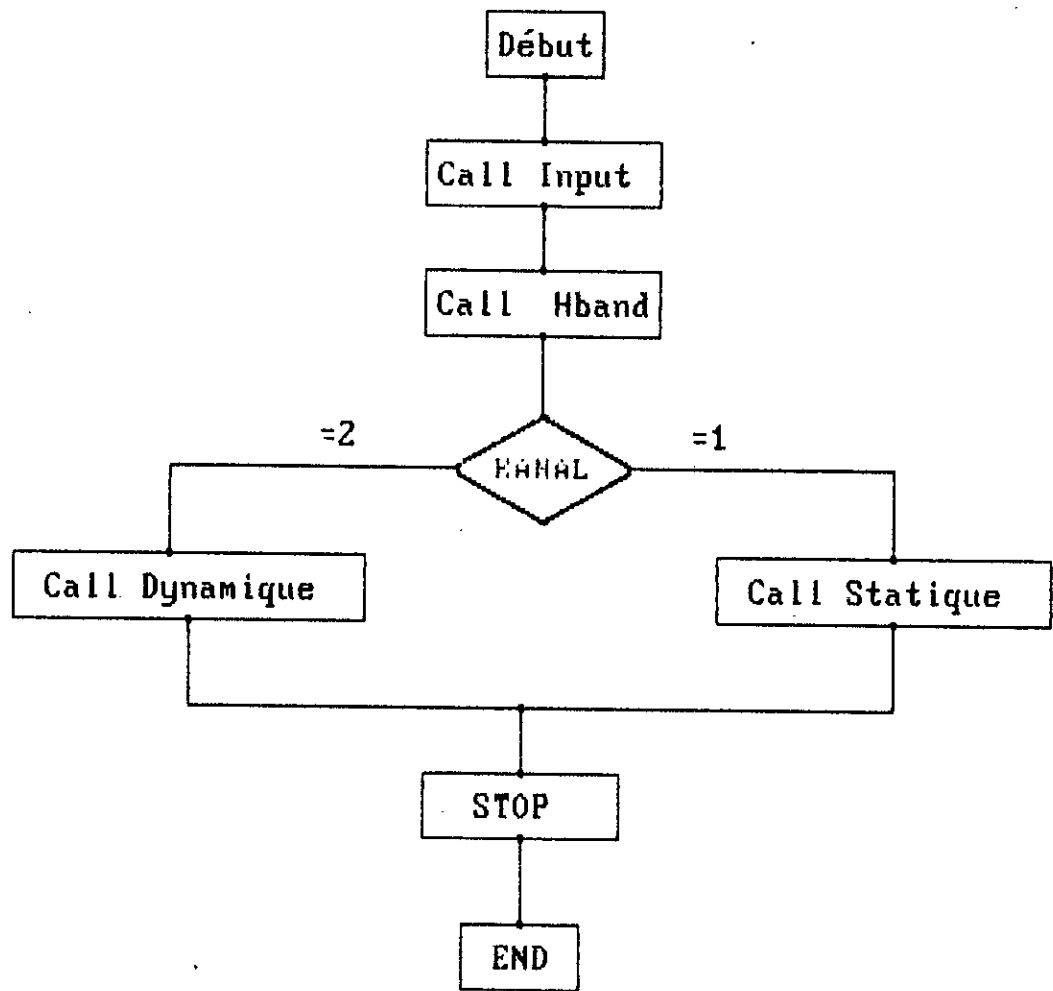
PRESENTATION & VALIDATION  
DU PROGRAMME AVEC APPLICATION

**PRESENTATION ET VALIDATION DU PROGRAMME**  
**AVEC EXEMPLE**

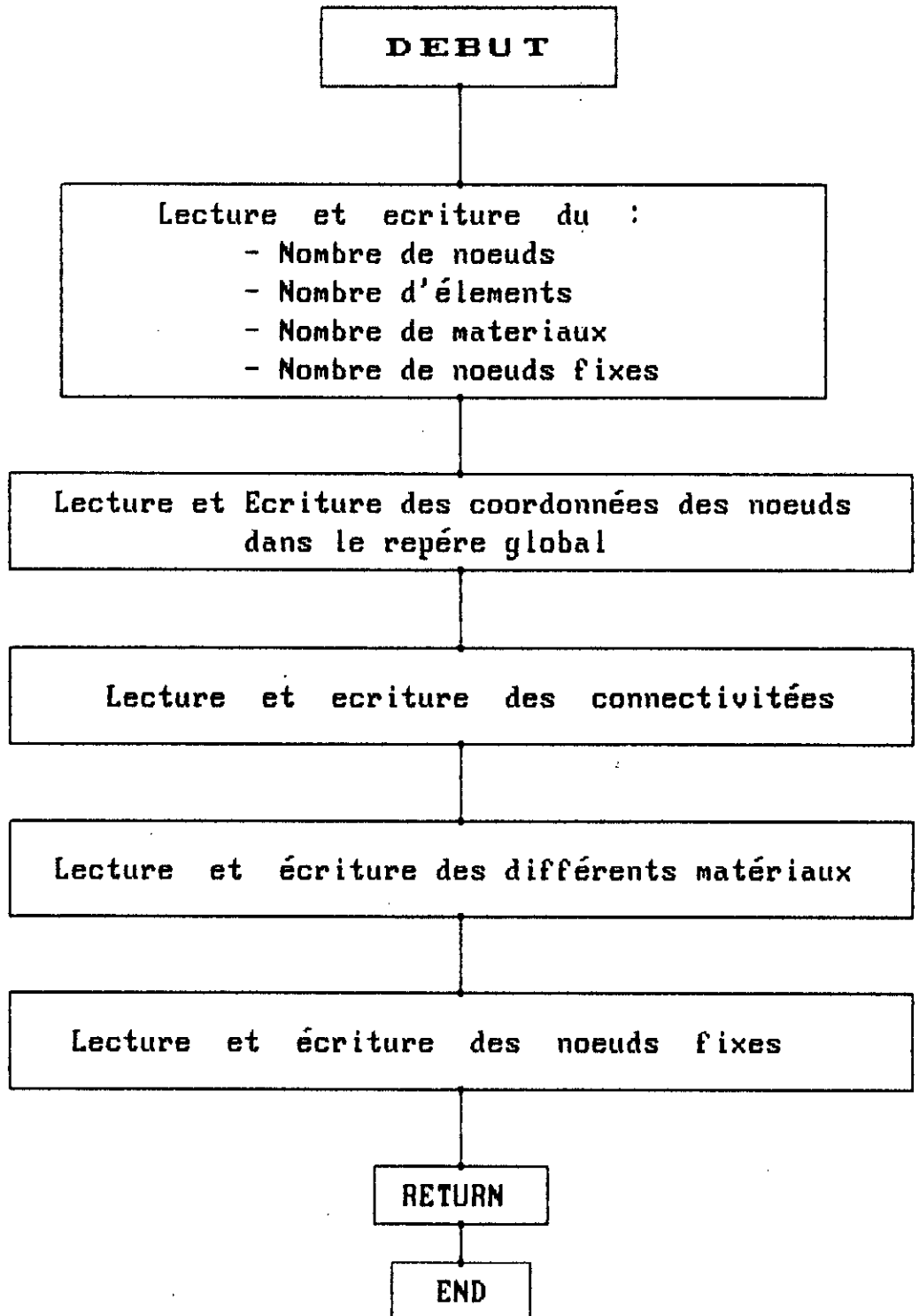
Le programme a été développé en utilisant le langage FORTRAN 77 et le TURBO PASCAL 5.5, et a été compilé et exécuté sur le VAX 11-785 - VAX /V4.1 du centre de calcul de l'E.N.P et l'U.S.T.H.B.

Les organigrammes du programme principal et des soubroutine essentielles sont présentés ci-après :

Organigramme du programme principal

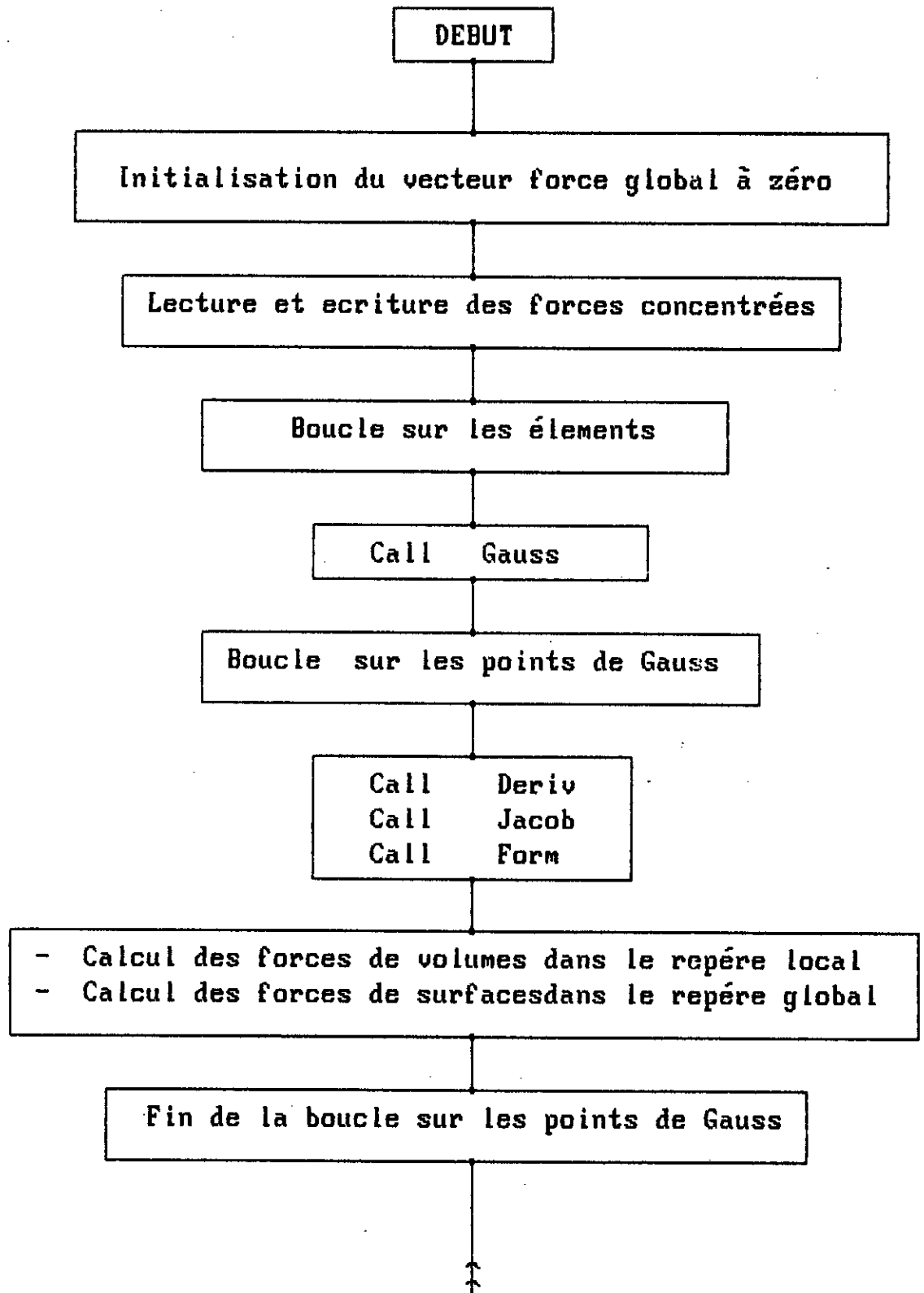


**ORGANIGRAMME DU SOUS-PROGRAMME " INPUT "**

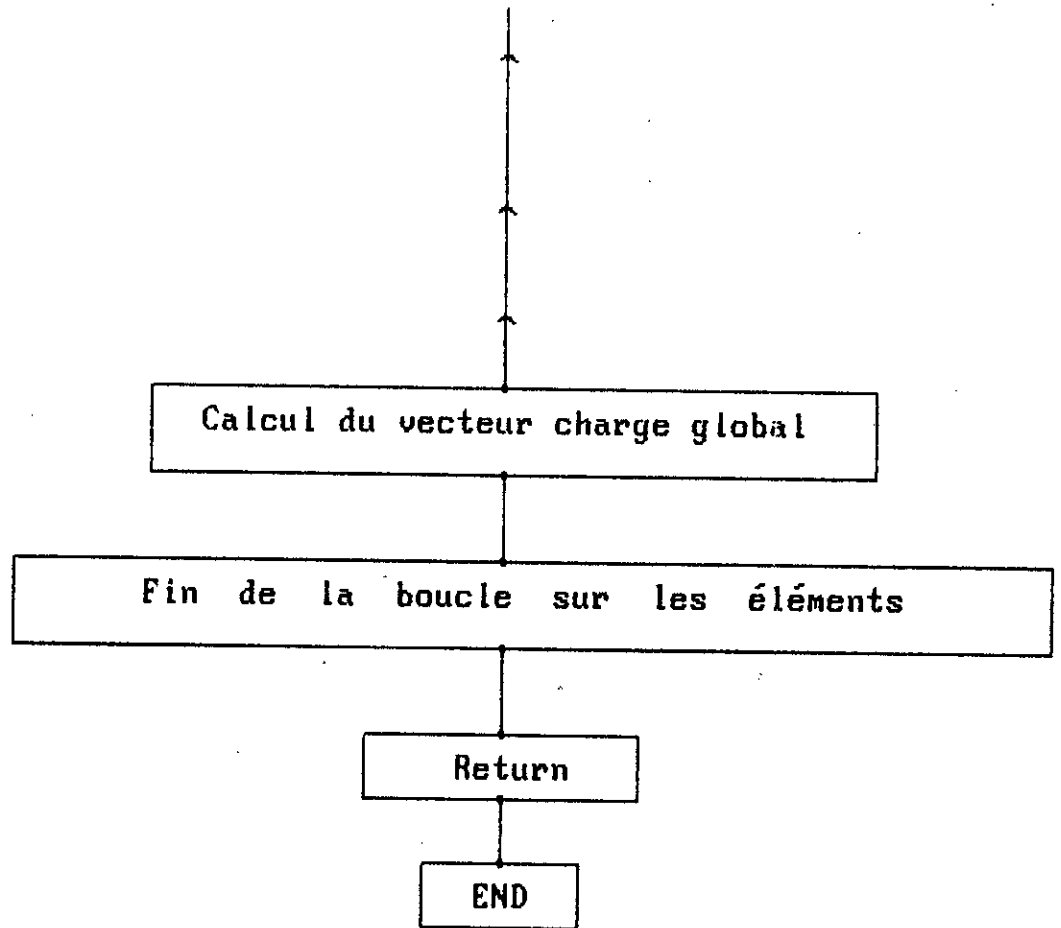




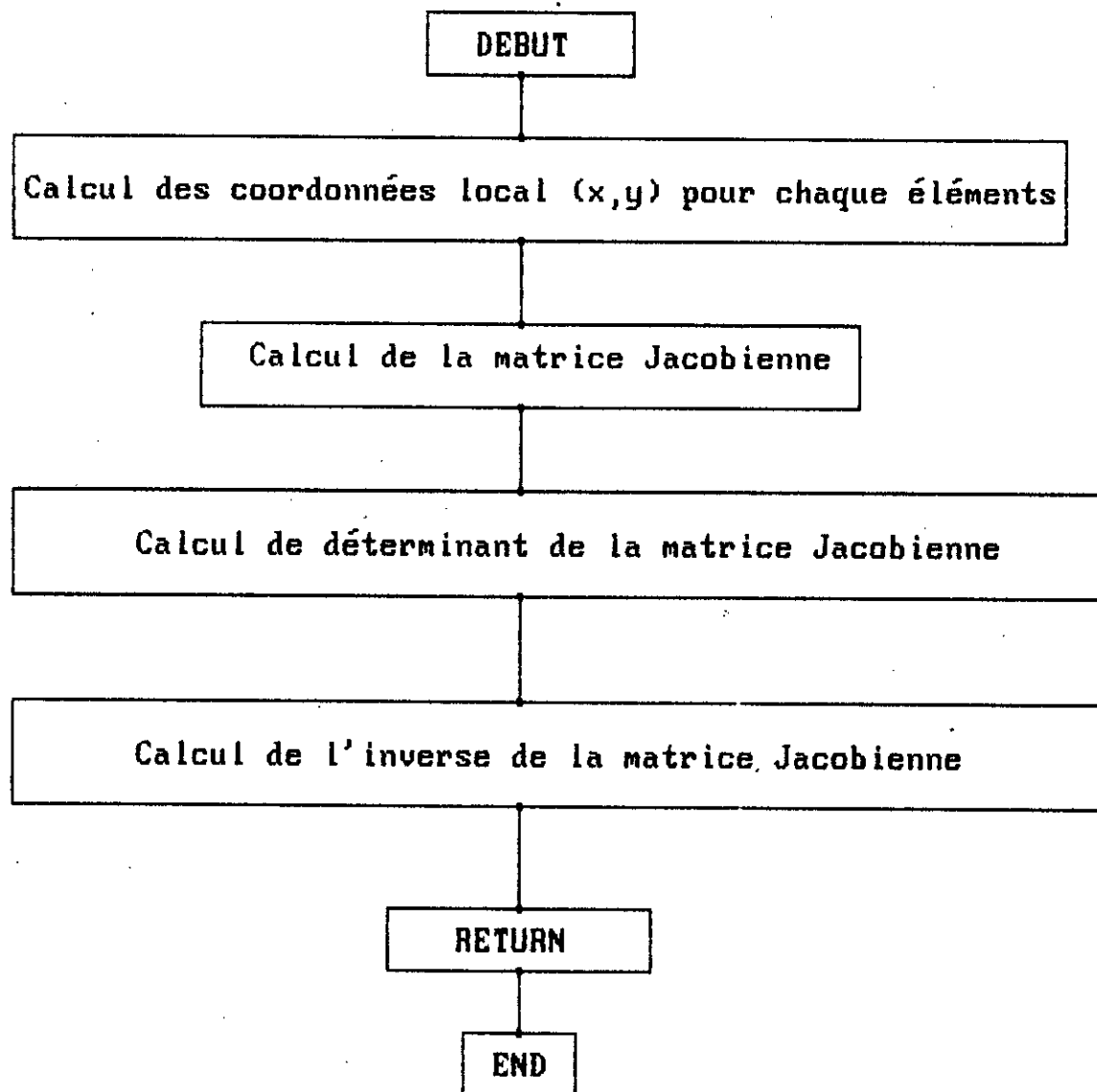
**ORGANIGRAMME DU SOUS-PROGRAMME " CHARGE "**



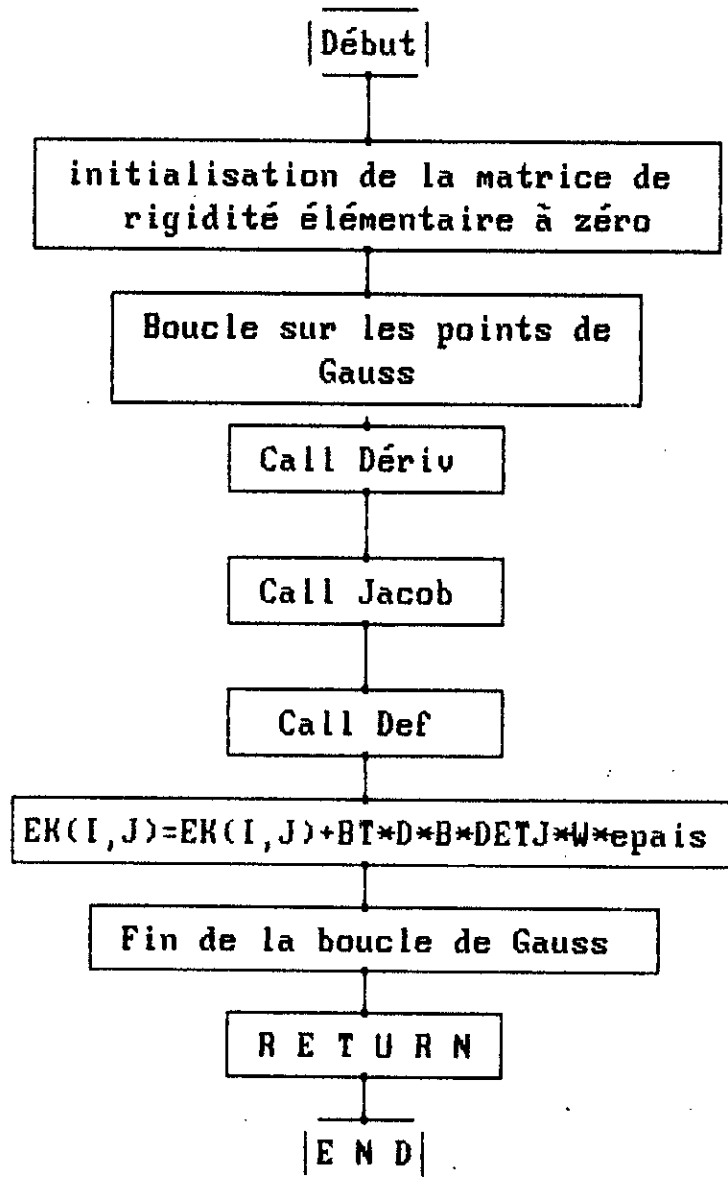
SUITE :



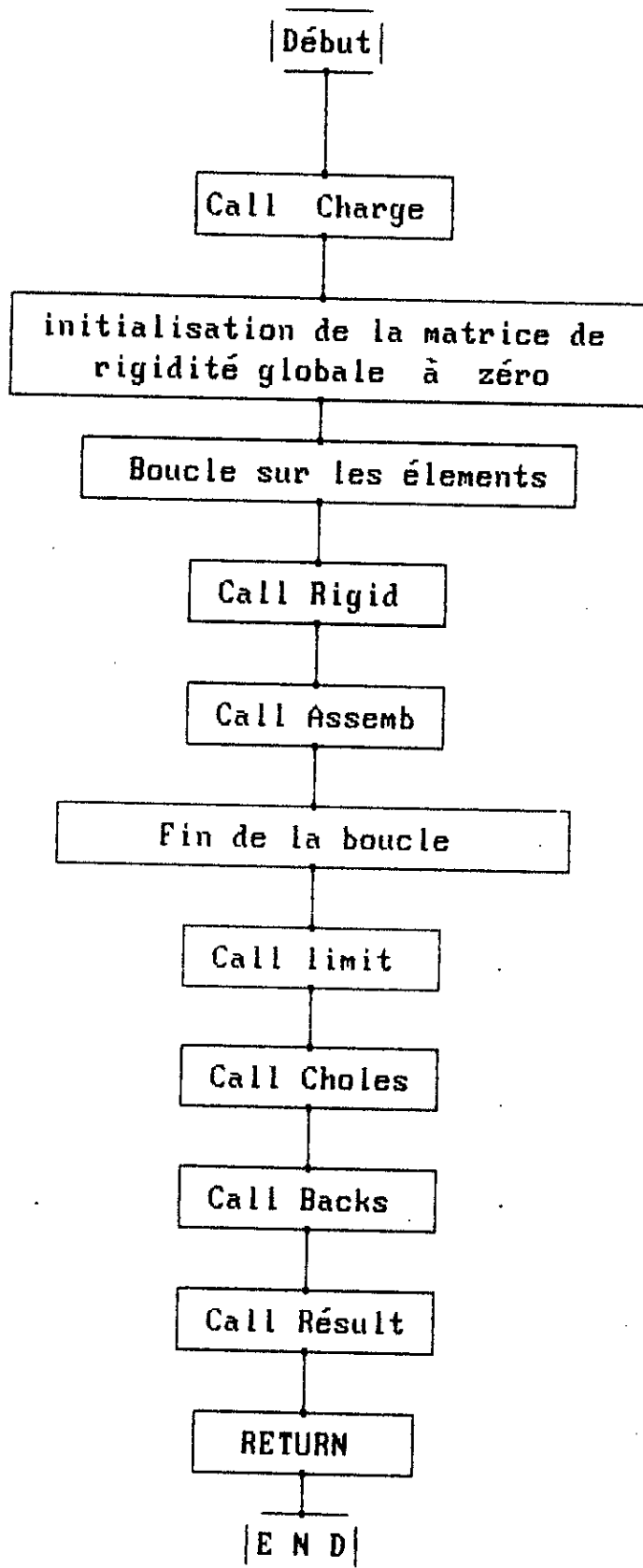
ORGANIGRAMME DU SOUS-PROGRAMME " JACOB "



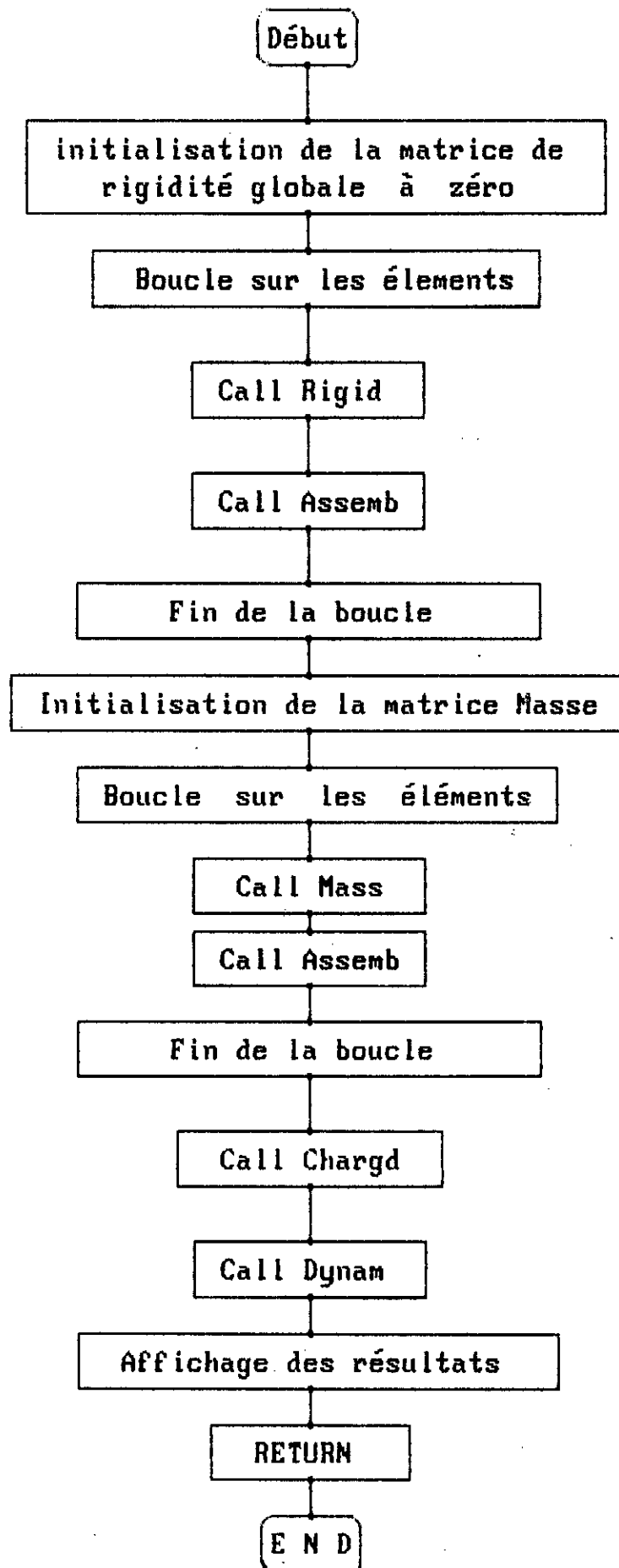
Organigramme du sous-programme " Rigid "



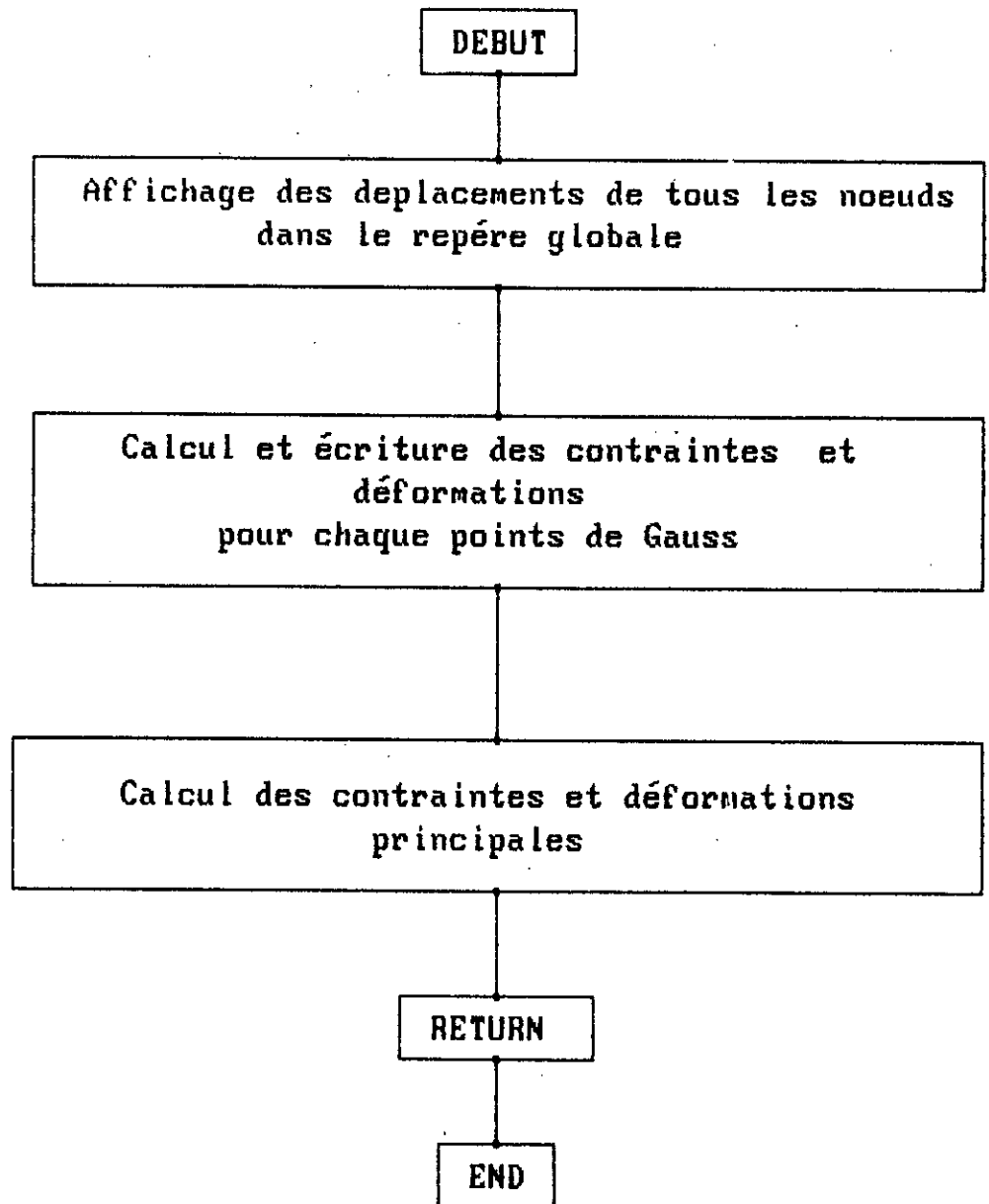
Organigramme du sous-programme " Statique "



Organigramme du sous-programme " Dynamique "



Organigramme du sous-programme " RESULT "



## **VI.1 ROLES DE QUELQUES SOUS-PROGRAMMES :**

**Subroutine HBAND** : permet de calculer la largeur de la bande.

**Subroutine Assemb** : permet d'assembler les matrices de rigidité et masses élémentaires.

**Subroutine Form** : permet de calculer les fonctions d'interpolations pour un élément isoparamétrique à huit nœuds.

**Subroutine Deriv** : calcul les dérivées des fonctions de forme.

**Subroutine DEF** : permet de calculer la matrice d'interpolation des déformations dans le repère global

**Subroutine Gauss** : permet l'intégration numérique sur (2 x 2) et (3 x 3) point de gauss.

**Subroutine Limit** : permet l'introduction des conditions aux limites; après assemblages.

**Subroutine Choles** : permet la décomposition de la matrice bande symétrique en une matrice triangulaire supérieure en utilisant la méthode de Choleskey.

**Subroutine Backs** : Calcul par « substitution arrière » les déplacements inconnus en utilisant la matrice de rigidité décomposée par la méthode de Choleskey

**Subroutine Elasticité** : permet le calcul de la matrice d'élasticité pour le cas de déformation et contraintes planes.

**Subroutine Matvec** : calcule le produit d'une matrice stockée par 1/2 bande (2\*NND,MBAND) par un vecteur (2\*NND)

**Subroutine Charged** : permet de construire le vecteur charge dynamique.

**Subroutine dynam** : permet la résolution du système d'équation différentiel  $MU + kU = F(t)$ . Par la méthode des différences finis centrales.

Dans ce chapitre, nous essayons à travers des exemples ayant des résultats connus dans la littérature, d'en faire une comparaison avec les résultats que donne notre programme en statique, puis en dynamique.

On a choisi (03) exemples, les deux premiers auront pour but de mettre en évidence successivement la validité des résultats des déplacements et des contraintes obtenus en statique.

Le troisième exemple sera consacré à la validation des résultats en dynamique.

## **VI.2 VALIDATION DU PROGRAMME EN STATIQUE :**

### **EXEMPLE 1**

#### **VI.2.1 VALIDATION DES RESULTATS DES DEPLACEMENTS :**

On prend une console de dimension :

$L \times B \times H = 5 \times 0.3 \times 0.5$  (m) chargée à son extrémité.

Sa flèche théorique notée  $f_{th}$  est donnée par

$$f_{theo} = \frac{PL^3}{3EI}$$

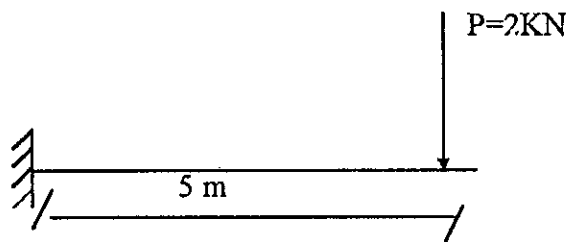


On est en présence d'un problème de contraintes planes.

On fait dérouler cet exemple pour une succession de discrétisations prises comme suit :

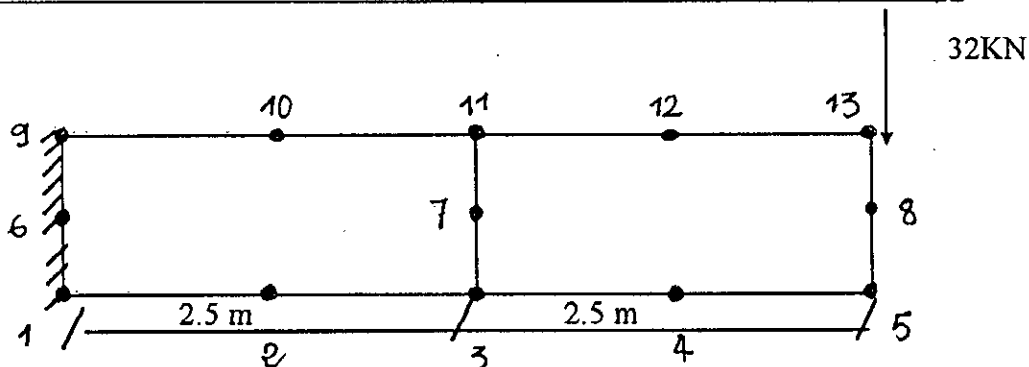
- 2 éléments
- 4 éléments
- 8 éléments
- 16 éléments
- 32 éléments

### VI.2.1.1 MODELE THEORIQUE :



**Fig (5-1)**

### VI.2.1.2 MODELE DE CALCUL (discrétisation a deux éléments) :



**Fig (5-2)**

### VI.2.2 RESULTAT THEORIQUE DU DEPLACEMENT :

$P = 2\text{KN}$  ,  $L = 5\text{m}$  ,  $E = 25 \cdot 10^8$  ,  $H = 0.5\text{m}$  ,  $B = 0.3\text{m}$  (épaisseur)

Les détails des résultats pour les différents maillages est résumé dans le tableau ci-dessous :

Nombre éléments	Nombre de noeuds	Flèche calculée	Flèche donnée au noeud N° :
2	13	1.0319	05
4	23	1.0523	09
8	37	1.06265	09
16	69	1.06600	17

L'analyse de ces résultats nous montre la conformité avec les résultats théoriques. Mettons à présent l'accent sur la convergence.

On prend  $f_{\text{exacte}} = -1.08$  (la flèche ne pouvant être connue avec exactitude), et on évalue le rapport de la flèche calculée par le programme pour différents mèches par la flèche exacte; puis en trace à partir de tableau ci-dessous le graphe de convergence (voir fig(5-3))

Nombre éléments	Nombre de noeuds	Nombre de degré de liberté	$f_{\text{calculé}} / f_{\text{exacte}}$
2	13	26	0.95
4	26	46	0.97
8	37	74	0.98
16	69	138	0.99
32	133	266	0.99

Le graphe ainsi tracé, nous montre que notre solution converge d'une façon correcte.

### VI.2.3 VALIDATION DES RESULTATS DE CONTRAINTES :

Dans la théorie de la R.D.M., la contrainte suivant une direction  $x$ , est donnée par :

$$\sigma_x = \frac{M_x v}{I}$$

$M_x$  : moment dans la section où on calcule la contrainte

$v$  : distance entre l'axe neutre et le point du calcul de la contrainte.

$I$  : le moment d'inertie.

Le programme nous donne les contraintes aux différents points de Gauss; cherchons pour ces mêmes points les contraintes théoriques :

$$x = \frac{2.5}{2} - \frac{1.25}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 0.5283 \text{ m}$$

$$y = \frac{0.25}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = 0.1443 \text{ m}$$

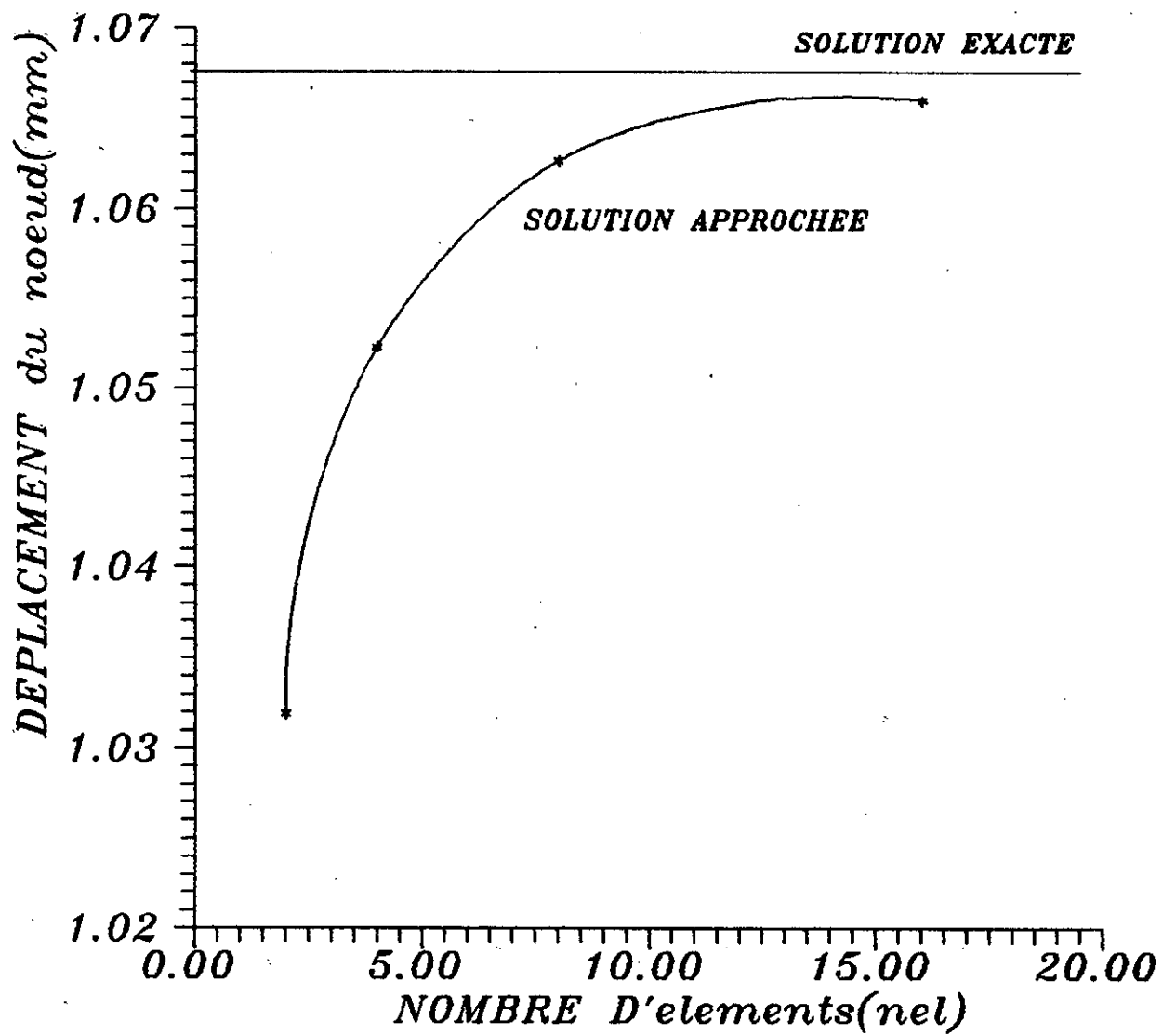
$$M_{1x} = P x - P L$$

$$M_{1x} = 2 \times 0.5283 - 2 \times 5 \quad (*)$$

$$\Rightarrow M_{1x} = -8.9434 \text{ KN} \cdot \text{m}.$$

$$I = \frac{0.3 \times 0.5^3}{12} = 0.003125 \text{ m}^4$$

(\*) : (moment dans la section passant par le point de Gauss  $N^{\circ}=1$ )



**CONVERGENCE DE LA SOLUTION  
APPROCHEE VERS LA SOLUTION  
EXACTE**

$$\text{d'ou } \sigma_{1x} = \frac{-8.9434 \times 0.1443}{0.003125} = -412.97 \text{ KN} / \text{m}^2$$

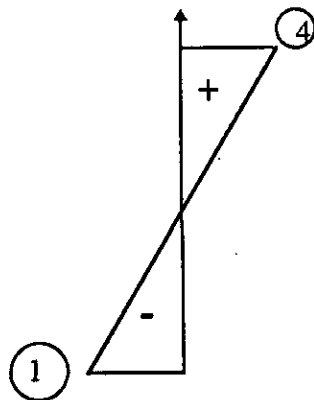
La contrainte donnée par le programme au même point est :

$$\sigma_{1x} = -413.08$$

Traçons maintenant le diagramme des contraintes pour la section passant par le point de gauss (1) et (4); les valeurs des ces contraintes sont :

$$\sigma_{1x} = -413.08 \text{ KN} / \text{m}^2$$

$$\sigma_{4x} = 413.0778 \text{ KN} / \text{m}^2$$



Le graphe obtenue est conforme avec celui de la théorie.

### EXEMPLE 2 :

Notre objectif a travers cet exemple est de montrer la convergence de la solution approchée vers la solution exacte, on constate aussi que notre programme tient compte du cisaillement, pour cela considérons une plaque de dimensions :

$$L \times B \times H = 20 \times 10 \times 1 \text{ (m)}$$

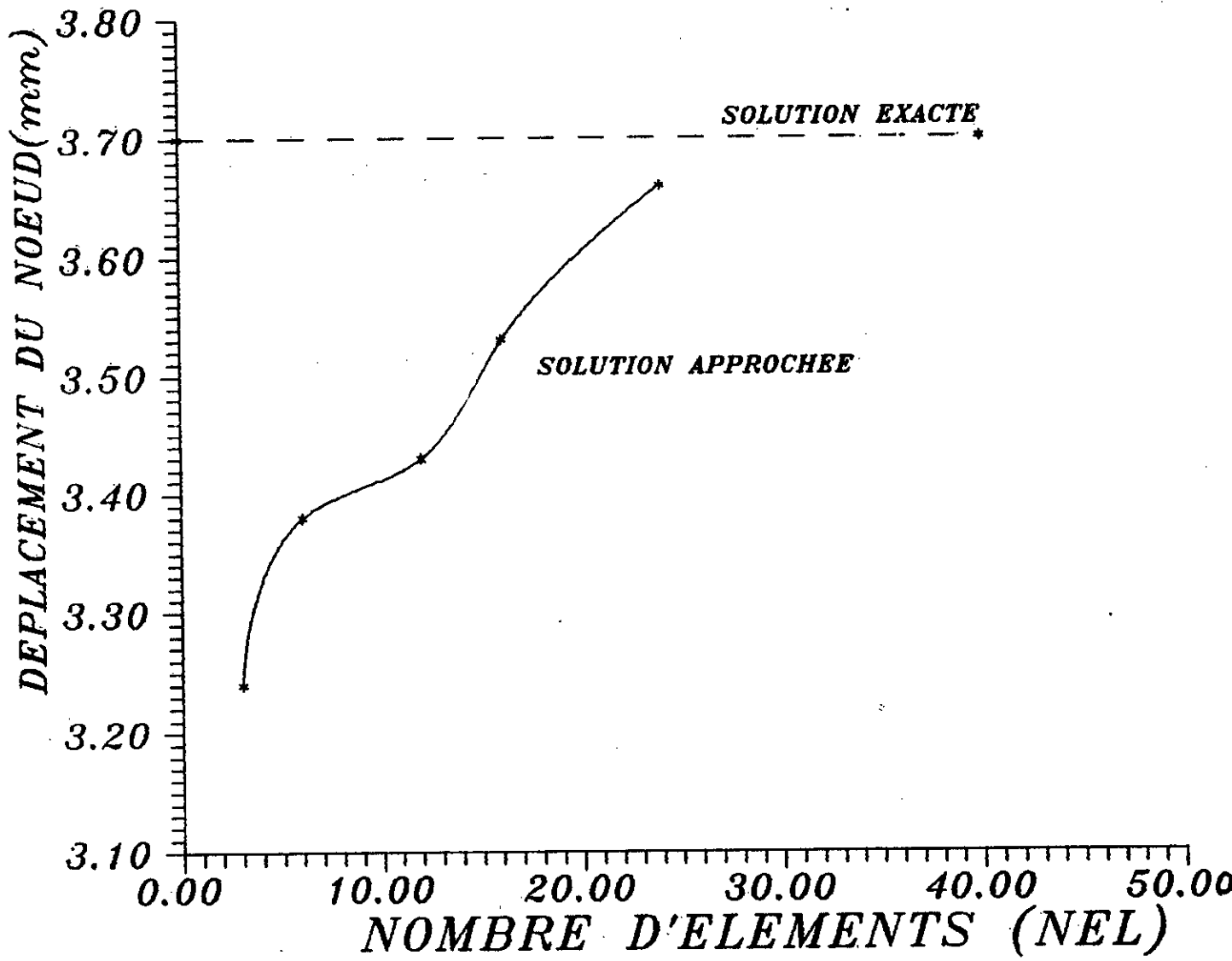
encastrée à une extrémité et soumise à une charge distribuée uniformément suivant y à l'autre extrémité (de résultante P (P=10<sup>4</sup> KN)).

En est en présence à d'un problème en déformation plane, le calcul théorique par la R.D.M nous donne un déplacement de l'extrémité égale à :

$$f = f_m + f_t$$

$f_m$  : déplacement dû au moment fléchissant

$f_t$  : déplacement dû à l'effort tranchant.



**MISE EN EVIDENCE DE LA CONVERGENCE**

avec

$$f_m = \frac{PL^3}{3EI}, f_t = \frac{PL}{GA}$$

Pour une section rectangulaire  $G = \frac{E}{2.6}$

Or :

$$f_m = \frac{10^4 \times 20^3}{3 \times 10^7 \times \frac{1 \times 10^3}{12}} = 0.032 \text{ dcm} = 3.2 \text{ mm}$$

$$f_t = \frac{10^4 \times 20}{\frac{10^7}{2.6} \times 1 \times 10} = 0.0052 \text{ dcm} = 0.52 \text{ mm}$$

$$f_{theo} = 3.72 \text{ mm}$$

Le programme déroulé pour cet exemple nous donne :

Nombre d'élément	Nombre de noeuds	flèche (mm) calculée	N°= du noeud
3	18	3.24	7
6	29	3.38	7
12	51	3.43	9
16	65	3.53	9
24	93	3.66	13

Les graphes de convergence pour les deux exemples précédent présentés ci après montrent bien cette convergence

### **VI.3 Application: (barrage poids)**

Nous avons pris comme exemple, le barrage de Hammam Grouz, supposé <sup>encastré</sup> à sa base

#### **VI.3.1 Présentation du barrage:**

Hauteur du barrage:	49.6 m
Hauteur du niveau d'eau:	44.5 m
Largeur de la crête:	8 m
Empattement:	50.4 m
Fruit amont:	0.1
Fruit aval:	0.67

**Caractéristique du béton:**

- Masse volumique:  $\rho = 2360 \text{ kg/m}^3$
- Module de Young:  $E = 2.8 \cdot 10^{10}$
- Coefficient de poisson:  $\nu = 0.25$

**Masse volumique eau:**

$\rho = 1100 \text{ kg/m}^3$  (eau boueuse).

**VI.3.2 Discrétisation de l'ouvrage en éléments finis:**

Nombre d'éléments: 20 éléments.  
 Nombre de noeuds total: 79  
 Nombre de degrés de liberté: 158

**VI.3.2.1 Analyse statique**

L'analyse des résultats s'est effectuée pour les deux cas de chargement suivants:

- A) Retenue vide
- B) Retenue pleine

**\*) Déplacements:**

Pour ces deux cas de chargement, nous avons constaté que les déplacements maximums horizontaux sont ceux de la crête de barrage

- A)  $U_x = -3,1569 \text{ mm}$  vers l'amont
- B)  $U_x = 5,6909 \text{ mm}$  vers l'aval.

Les déplacements obtenus par le programme "TouMaj" traduisent bien le comportement normal d'un barrage poids stable.

**\*\*\*) Contraintes:**

Pour le cas de la retenue vide, les contraintes maximales de compression sont constaté au pied amont du barrage, par contre, pour le cas d'une retenue pleine c'est au pied aval qu'elles le sont.

Les contraintes de compression pour les deux cas de chargement sont:

- A-  $\sigma_y = -10,4 \text{ kg/cm}^2$
- B-  $\sigma_y = -5,28 \text{ kg/cm}^2$

**VI.4 VALIDATION DU PROGRAMME EN DYNAMIQUE:**

Pour valider le programme en dynamique, on traite le cas d'une console encastrée au sol.

Ce problème est traité comme celui d'un oscillateur simple composé d'une tige au bout de laquelle se trouve une masse concentrée. On applique a cet oscillateur une excitation d'appuis sinusoïdale dont l'amplitude, la phase et la fréquence d'excitation sont connues.

La repense d'un tel oscillateur sous sollicitations libres non amorties est un mouvement oscillatoire périodique (sinusoïdal).

Dans notre programme, on a introduit une technique qui nous permet d'appliquer le chargement dans la direction voulue, on jouant sur le vecteur influence  $\{r\}$  défini dans le chapitre III et ainsi le chargement dynamique sera donné par :

$$P(t) = - [M] \cdot \{r\} \cdot a(t)$$

$[M]$  : matrice masse.

$\{r\}$  : vecteur influence.

$a(t)$  : accélération du support.

Dans notre cas  $r = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \dots 1]^T$

#### VI.4.1 MODELE THEORIQUE:

##### VI.4.1.1 MODELE UTILISE:

##### CARACTERISTIQUE DU MODELE:

Nombre d'éléments :	3
Nombre de noeuds :	18
Nombre de degrés de liberté :	$2 \times 18 = 36$
Masse volumique :	élément(1) $\rho = 0$
	élément(2) $\rho = 0$
	élément(3) $\rho \neq 0$

##### VI.4.1.2 Dimensions géométrique:

Longueur  $L = 1,5 \text{ m}$

Largeur  $l = 0,2 \text{ m}$

Le signal ainsi que la réponse de l'oscillateur sont données respectivement par les graphes (1) et (2).

##### VI.4.1.3 ANALYSE DU RESULTAT:

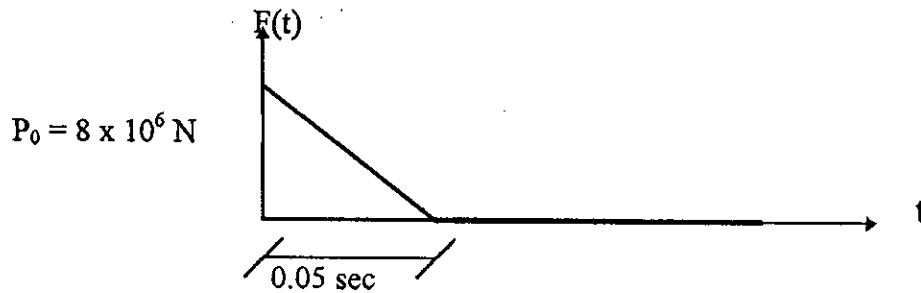
L'analyse du graphe (2) nous montre que la réponse obtenue est périodique donc conforme à ce que prédit la théorie.

On remarque que la réponse n'est pas vraiment sinusoïdal vu les irrégularités de quelques points, on peut expliquer ça par le fait qu'on a pas concentré toute la masse en un noeud comme c'est le cas du pendule simple, qui présente un mode de vibration, ce qui ramène à dire que le modèle choisi comporte un nombre de modes supérieur à 1 mais avec prédominance du premier mode.



## VI.5 APPLICATION AU BARRAGE POIDS DE -HAMMAM-GROUZ-

### VI.5.1 CHARGEMENT APPLIQUE:



Le modèle de discrétisation adopté, est le même que celui utilisée précédemment pour l'étude statique donc on a pris :

- nombre d'éléments: 20
- nombre de noeuds : 79

- $t_1 = 0,05 \text{ sec}$  (durée de chargement)
- $t = 0,1 \text{ sec}$  (durée totale)
- $t = t - t_1 = 0,95 \text{ sec}$  (vibrations libres)
- $\rho = 2360 \text{ kg/m}^3$
- $E = 28 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$
- $\Delta t = 0,01 \text{ sec}$  (pas de discrétisation du temps)

### VI.5.2 Analyse des résultats:

à travers cet exemple on remarque que le déplacement maximal est obtenu à  $t = 0,03 \text{ sec}$   
 $V(t=0,03) = V_{\text{max}} = 0,75 \text{ mm}$ .

Donc le déplacement maximal est obtenu dans la première phase ( $t < t_1 = 0,05 \text{ sec}$ ).

Si on évalue le rapport de la durée de chargement à celui de la période de vibration du barrage on aura:

$$t_1/T = 0,05/0,096 = 0,52.$$

Ce qui est conforme à ce que prédit la théorie ( $t_1/t > 0,4$ )

En utilisant le graphe donnant le coefficient d'amplification dynamique en fonction du rapport ( $t_1/T$ ) (voir Dynamique des structures Tome 1, R.W.CLOUGH:96)

On aura  $t_1/T = 0,52$

$$D = 1,2$$

Donc on peut dire a priori que les forces de rappels qui sont équivalentes aux forces d'inerties dans notre cas (régime non amorti) seront amplifiées c'est à dire plus grande que le chargement Initial ( $P_0 = 8,10^6 \text{ N}$ ).

Par contre si on avait trouvé les coefficient d'application dynamique inférieur à l'unité ( $D < 1$ ), on aurait une partie de la charge appliquée qui serait absorbée par l'inertie de la structure, mais cela ne pourrait avoir lieu que dans le cas de charges de courtes durée c'est à dire dans le cas où  $t_1/T < 0,4$ .

A noter aussi que dans de tels cas (charges de courtes durées), l'amortissement n'aura pas le temps suffisant pour se manifester, ce qui favorise bien notre cas (système non amorti).

Présentation du fichier de résultat :

1) RETENUE VIDE :

TYPE DE PROBLEME : DEFORMATION PLANE

NND	NEL	NNF	NMT	NGAUS
79	20	09	01	02

MATERIAUX	YOUNG	POISS	GAMA	EPAIS
1	2000000000	0.25	2360	1.00

NOEUDS	FORCE-X	FORCE-Y
79	0.00	0.00

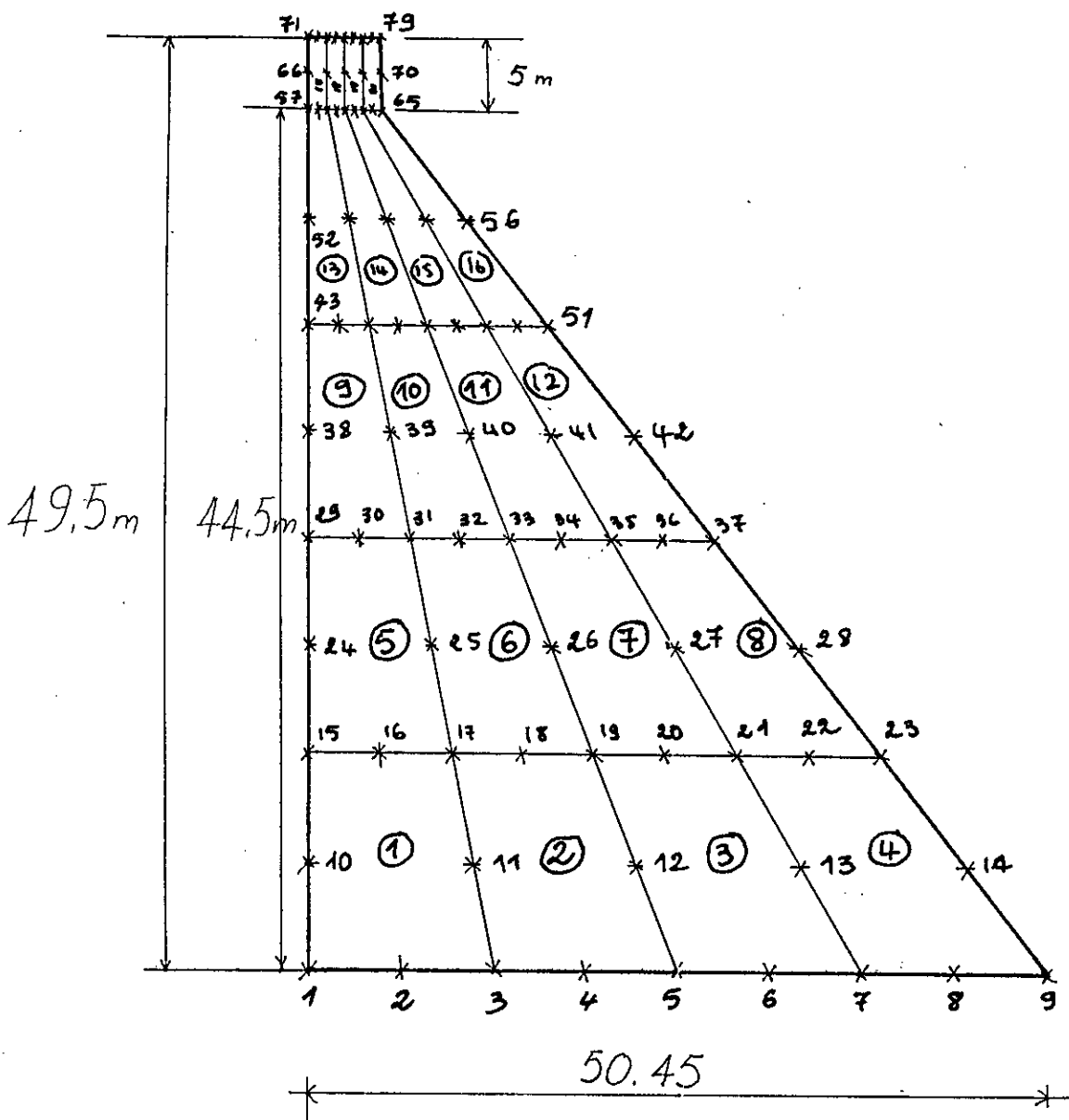
<u>NOEUDS</u>	<u>DEPLACEMENTS-X (mm)</u>	<u>DEPLACEMENTS-Y (mm)</u>
1	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000
10	-0.1043	-0.1098
11	-0.1356	-0.1411
12	-0.0895	-0.1071
13	-0.1303	-0.0632
14	-0.1011	-0.1026
15	-1.4593	-0.3471
16	-1.0675	-0.3114
17	-0.7770	-0.2836
18	-0.4556	-0.2518
19	-0.2143	-0.2178
20	-0.4107	-0.1020
21	-0.5670	-0.1411
22	-1.0061	-0.9675
23	-0.9417	-0.5438
24	-1.0490	-0.4718
25	-1.2580	-0.4069
26	-0.7745	-0.3323

-SUITE-

<u>NOEUDS</u>	<u>DEPLACEMENTS-X (mm)</u>	<u>DEPLACEMENTS-Y (mm)</u>
27	-1.1157	-0.2350
28	-1.3525	-0.1150
29	-2.1780	-0.5683
30	-1.9984	-0.5445
31	-1.7976	-0.5138
32	-1.6194	-0.4798
33	-1.8472	-0.4798
34	-1.8013	-0.4408
35	-1.6968	-0.3948
36	-1.7390	-0.2422
37	-1.7324	-0.2794
38	-2.5511	-0.2103
39	-2.3320	-0.6489
40	-2.0931	-0.6010
41	-2.0931	-0.5399
42	-1.9550	-0.4499
43	-1.9553	-0.3326
44	-2.9233	-0.6927
45	-2.8375	-0.6801
46	-2.7549	-0.6649
47	-2.7319	-0.6476
48	-2.7132	-0.6237
49	-2.6760	-0.5408
50	-2.6453	-0.5112
51	-2.6795	-0.4627
52	-3.0010	-0.7132
53	-2.9031	-0.7075
54	-2.9238	-0.6866
55	-2.8769	-0.6543
56	-2.9325	-0.5949
57	-3.1439	-0.7133
58	-3.1176	-0.7172
59	-3.0717	-0.7199
60	-3.0048	-0.7191
61	-3.1400	-0.7190
62	-3.0068	-0.7152
63	-3.0003	-0.7112
64	-3.0019	-0.7132
65	-2.9895	-0.7096

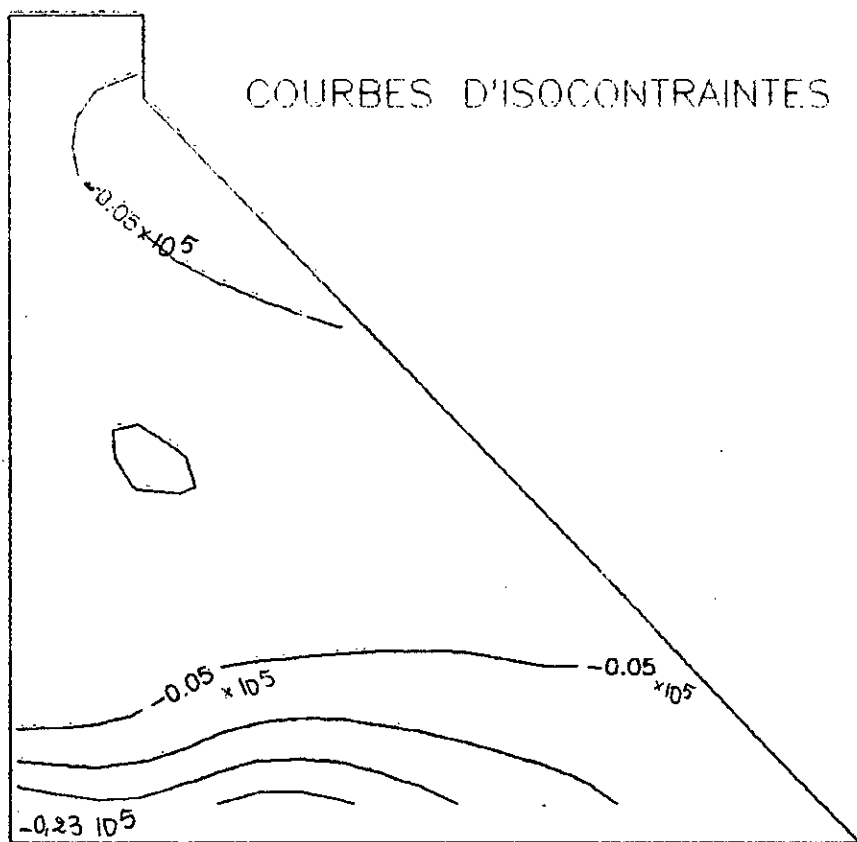
-SUITE-

<u>NOEUDS</u>	<u>DEPLACEMENTS-X (mm)</u>	<u>DEPLACEMENTS-Y (mm)</u>
66	-3.1469	-0.719070
67	-3.0267	-0.723779
68	-3.0088	-0.723827
69	-2.9906	-0.724568
70	-2.9706	-7.248208
71	-3.1554	-0.722944
72	-3.1256	-0.721005
73	-3.1135	-0.722521
74	-3.0997	-0.726253
75	-3.1461	-0.726796
76	-3.1123	-0.730127
77	-3.1452	-0.732303
78	-3.1464	-0.728551
79	-3.1569	-0.729575



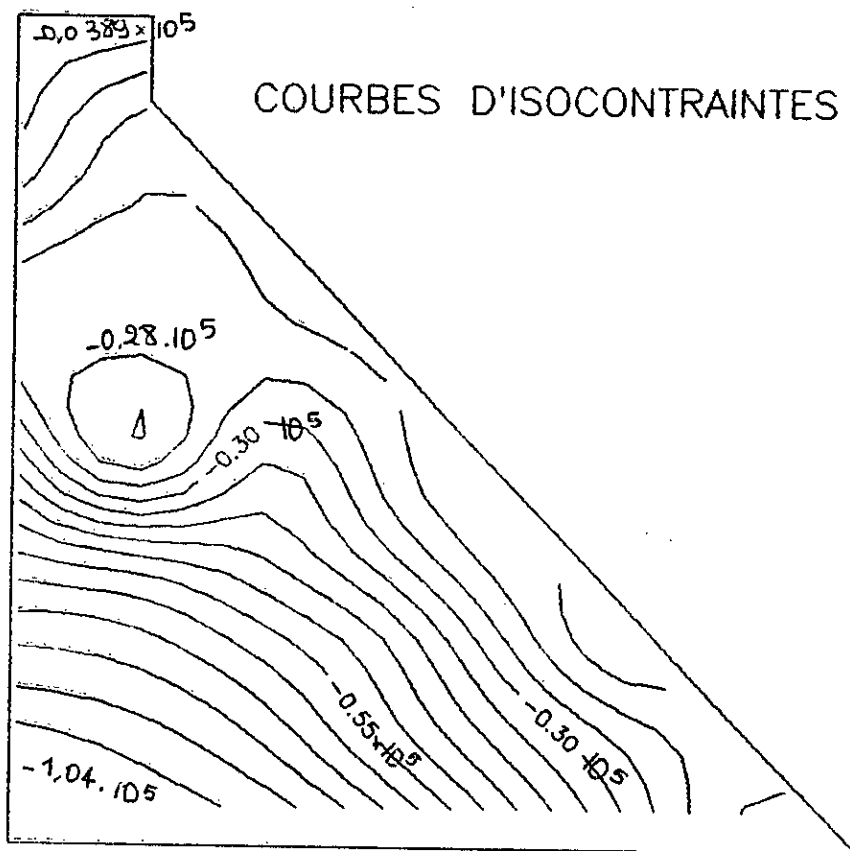
NOMBRE D'ELEMENTS	(NEL) : 28
NOMBRE DE NOEUDS	(NND) : 79
NOMBRE DE DEGRE DE LIBERTE	(2*NND) : 158

MAILLAGE UTILISE POUR  
LE BARRAGE DE "HAMMAM-GROUZ"



SIG-X (Kg/M<sup>2</sup>)

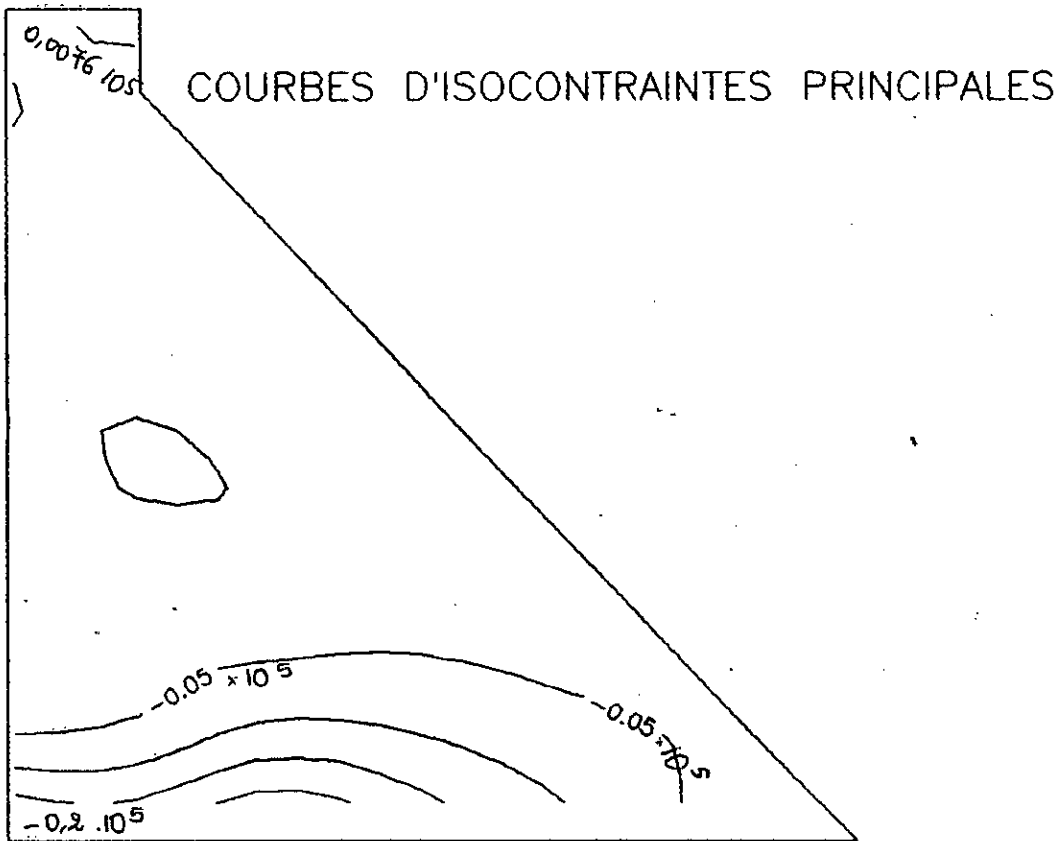
RETENUE UIDE



COURBES D'ISOCONTRAINTES

SIG-Y (Kg/m<sup>2</sup>)

RÉTÈNUE UIDE

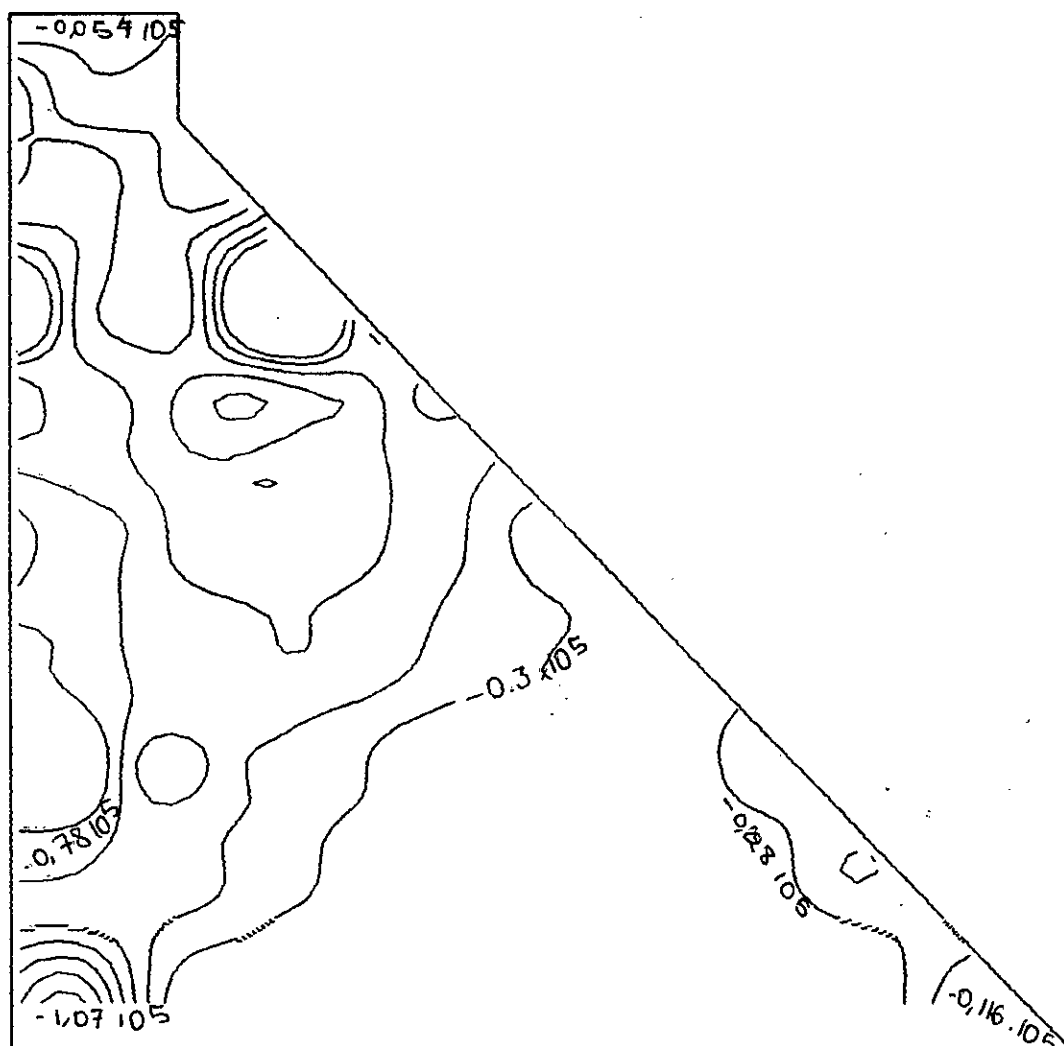


**SIGMA-1 (Kg/M<sup>2</sup>)**

**RETENUE UIDE**



# COURBES D'ISOCONTRAINTES PRINCIPALES



**SIGMA-2 (Kg/m<sup>2</sup>)**

**RETENUE UIDE**

1) RETENUE PLEINE : (cas statique)

<u>NOEUDS</u>	<u>DEPLACEMENTS-X (mm)</u>	<u>DEPLACEMENTS-Y (mm)</u>
1	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000
7	0.0000	0.0000
8	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000
10	0.5614	1.3613
11	0.2850	-0.6175
12	0.3158	-0.8988
13	0.2518	-0.7439
14	0.2487	-0.2514
15	0.0452	2.0000
16	0.0931	-0.0138
17	0.1486	-0.0239
18	0.0452	-1.4238
19	0.0931	-1.6522
20	0.2083	-1.7000
21	0.4266	-1.5444
22	0.5024	-1.2391
23	0.4471	-0.7068
24	0.3536	1.6964
25	0.2831	-0.9299
26	0.4057	-2.1115
28	0.5522	-2.2002
29	0.9382	-1.5780
30	0.9500	1.5020
31	0.9295	0.2740
32	0.9354	-0.9250
33	0.9155	-1.6636
34	0.9040	-2.2164
35	0.9041	-2.5044
36	0.8601	-2.7417
37	0.7676	-2.7084
38	1.6067	-2.427
39	1.6938	1.2666
40	1.6671	-0.6410

-SUITE-

<u>NOEUDS</u>	<u>DEPLACEMENTS-X (mm)</u>	<u>DEPLACEMENTS-Y (mm)</u>
41	1.5950	-2.8229
42	1.4524	-2.8229
43	2.6932	-3.8419
44	2.6512	1.6585
45	2.5951	0.4686
46	2.6512	-0.4832
47	2.5156	-1.1176
48	2.6571	-1.6355
49	2.6941	-2.8931
50	2.5886	-2.4831
51	2.5893	-3.8884
52	2.6182	0.7558
53	3.7671	-0.1755
54	3.6754	-1.1229
55	3.6889	-1.8454
56	3.6429	-2.4321
57	4.7286	0.7857
58	4.5675	0.3888
59	4.4858	-0.8166
60	4.4995	-0.2552
61	4.6868	-0.5865
62	4.5873	-0.7866
63	4.5657	-0.7866
64	4.6868	-1.8487
65	4.6442	-1.2868
66	5.8442	-1.4999
68	5.2866	0.6249
69	5.1421	1.1991
70	5.1857	-0.5581
71	5.1665	-1.8944
72	5.8924	-1.6236
73	5.8934	0.6792
74	5.7578	0.2652
75	5.6243	-0.8247
76	5.7242	-0.2887
77	5.8246	-1.1369
78	5.9317	-1.3994
79	5.9689	-1.7828

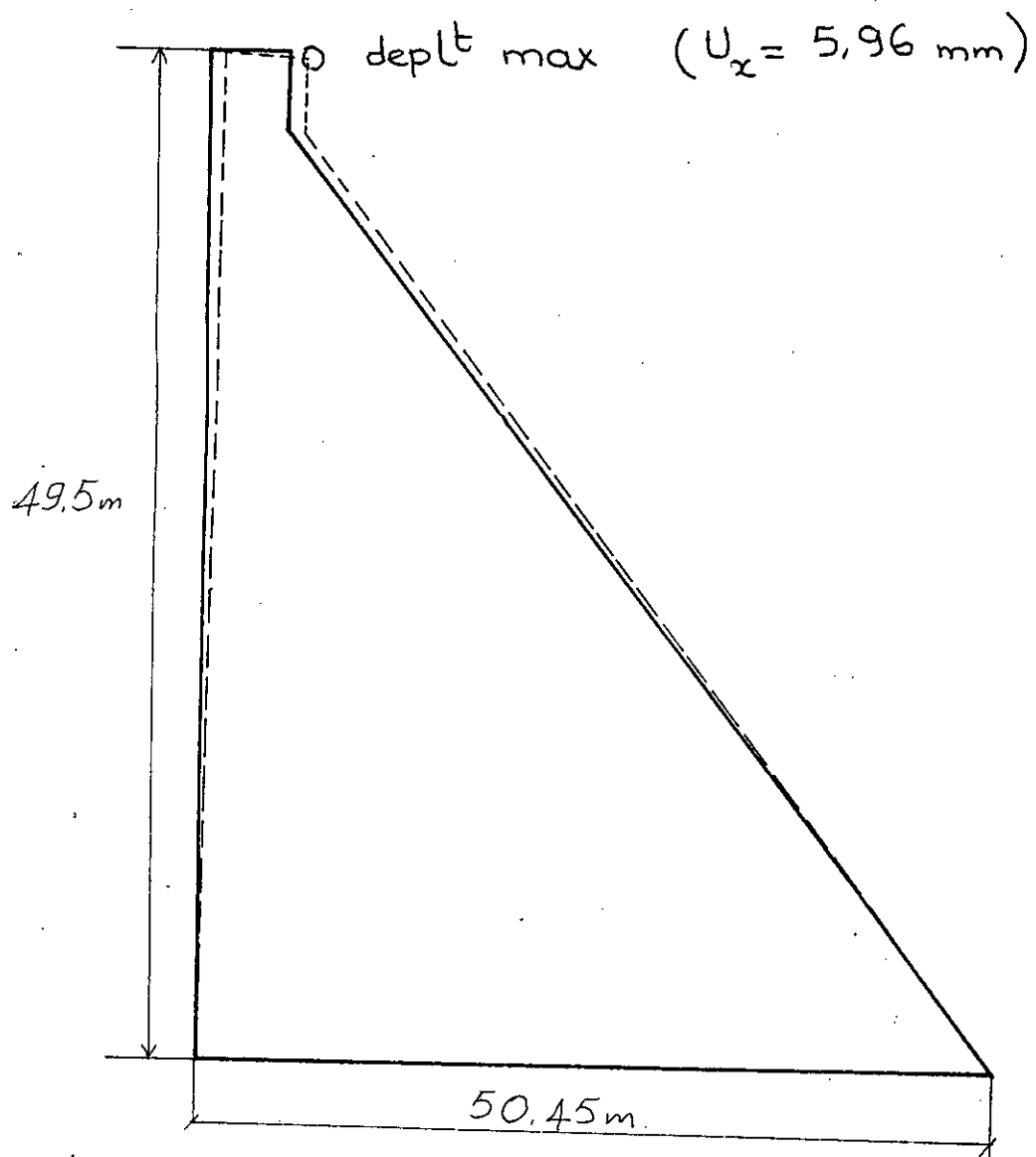
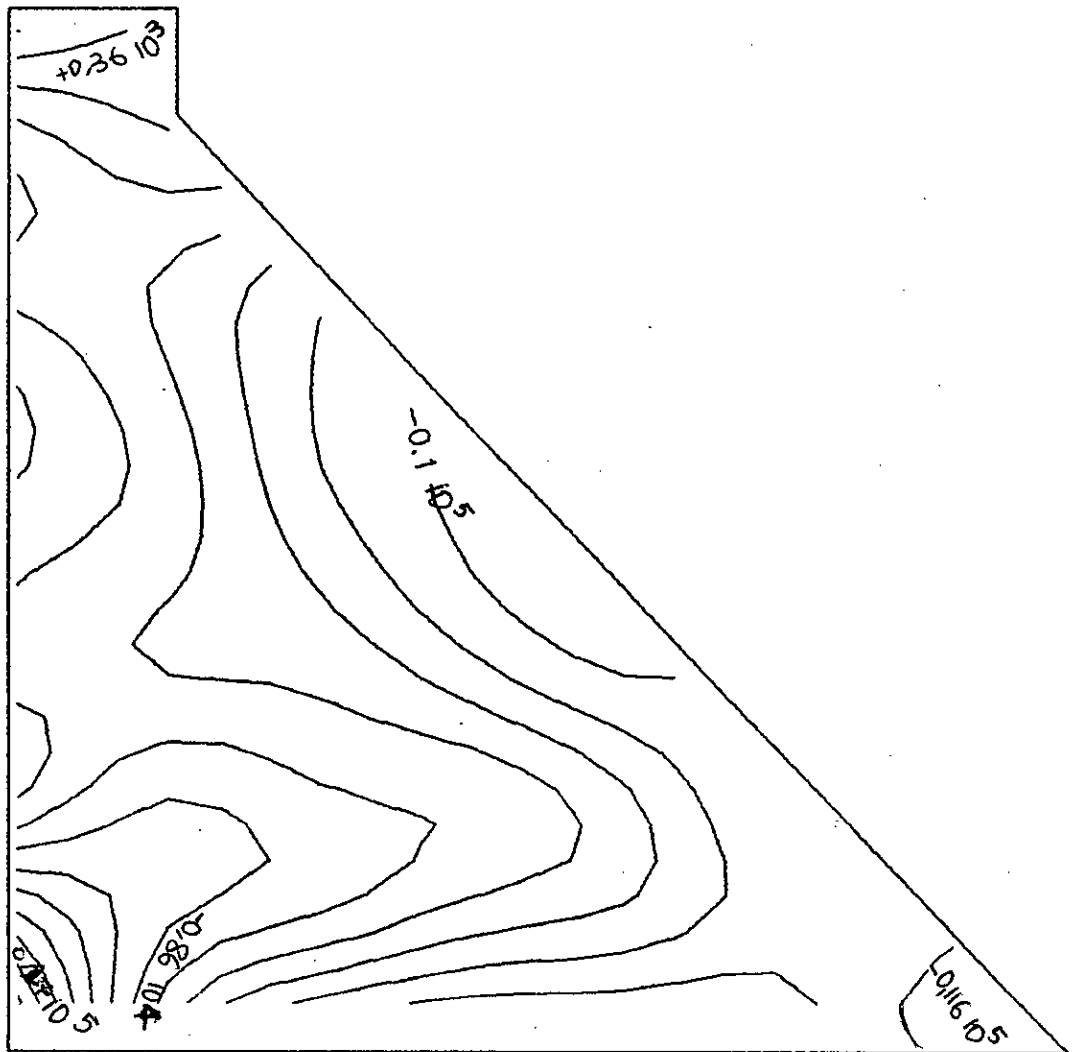


ILLUSTRATION DE LA DEFORMEE  
DU BARRAGE DE HAMMAM-GROUZ  
EN CALCUL STATIQUE

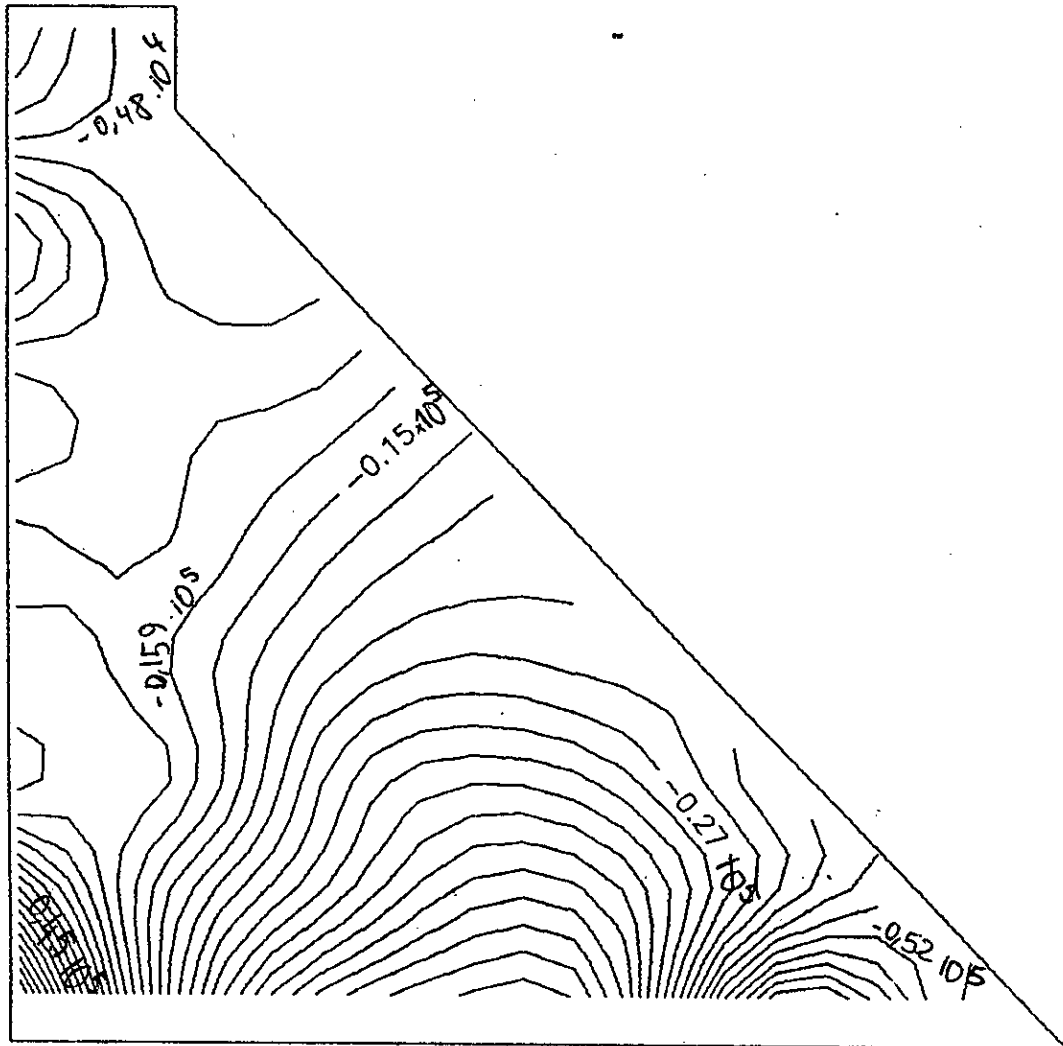
# COURBES D'ISOCONTRAINTES



SIG-X (Kg/M<sup>2</sup>)

RETENUE PLEINE

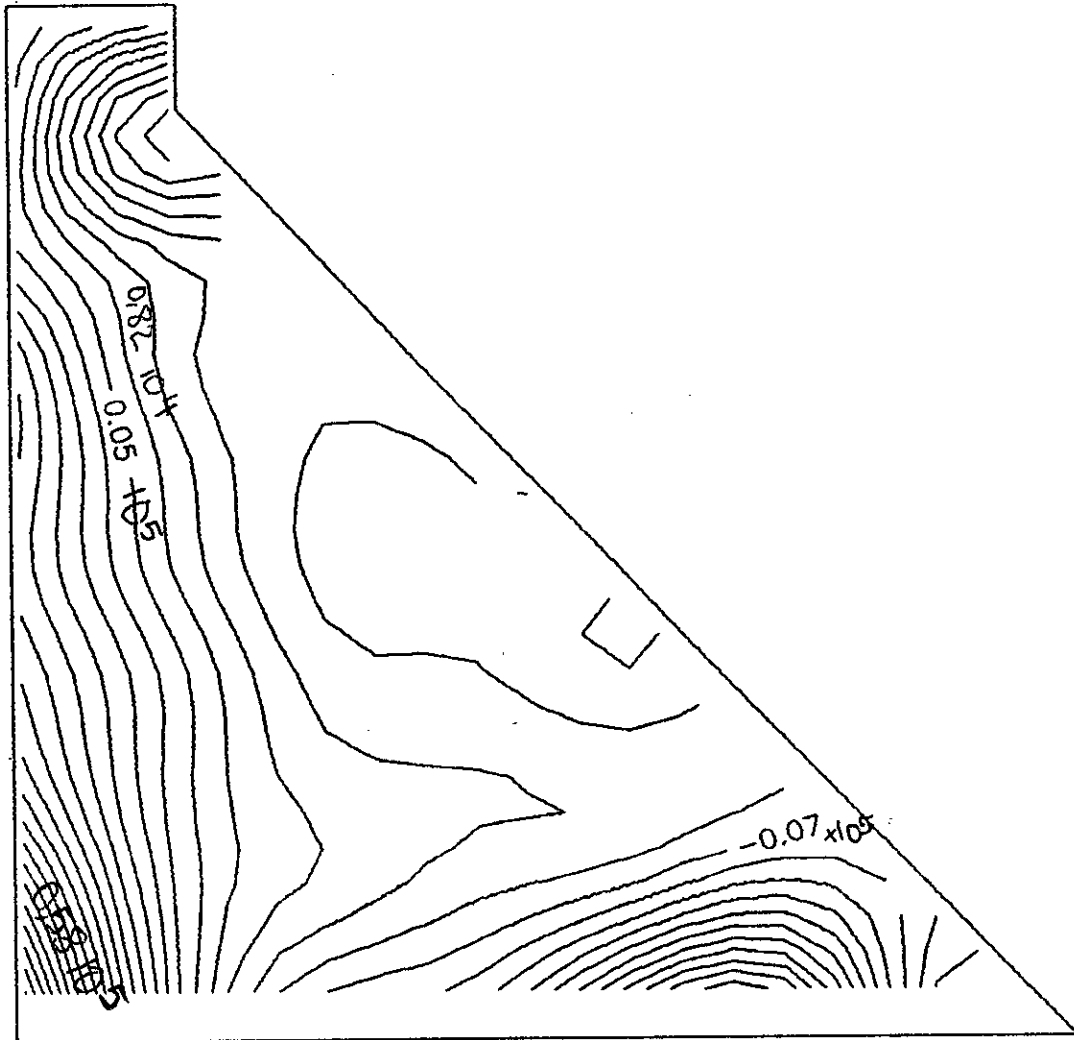
# COURBES D'ISOCONTRAINTES



SIG- $\nu$  (Kg/M<sup>2</sup>)

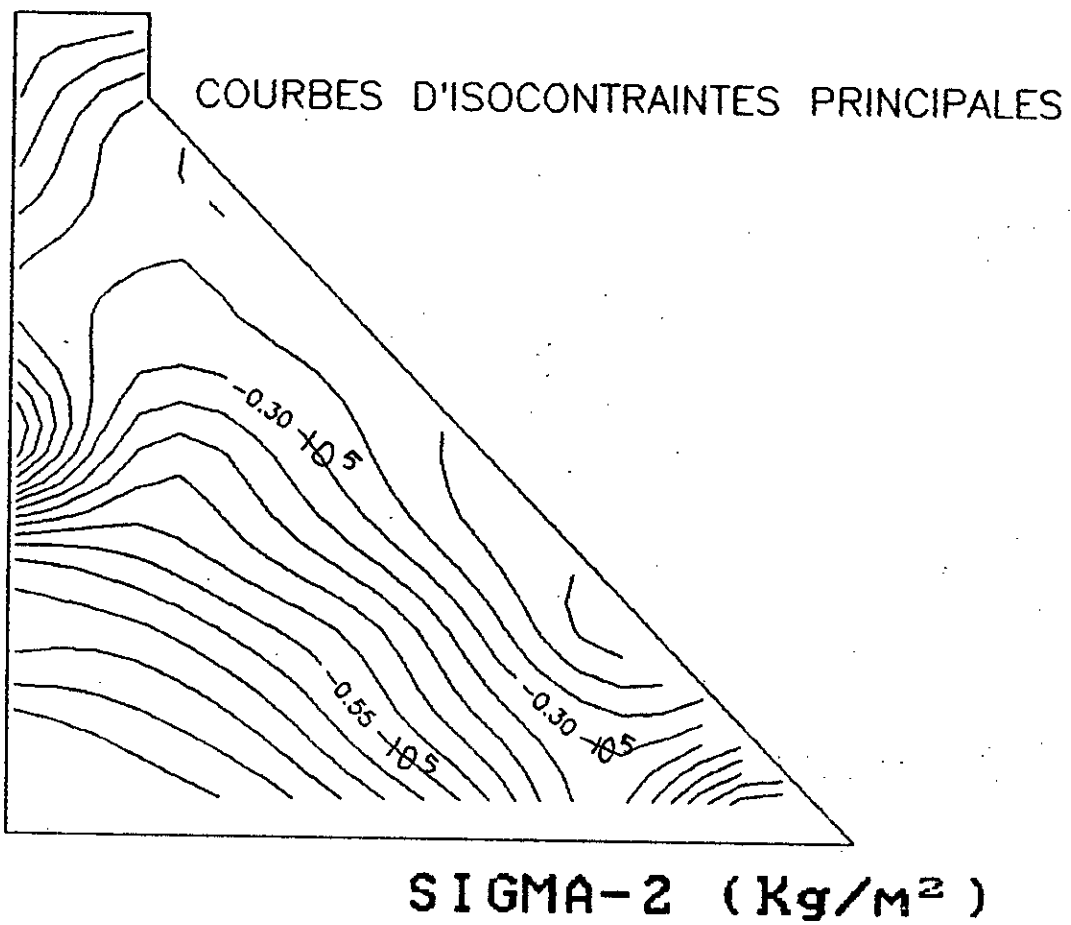
RETENUE PLEINE

COURBES D'ISOCONTRAINTES PRINCIPALES



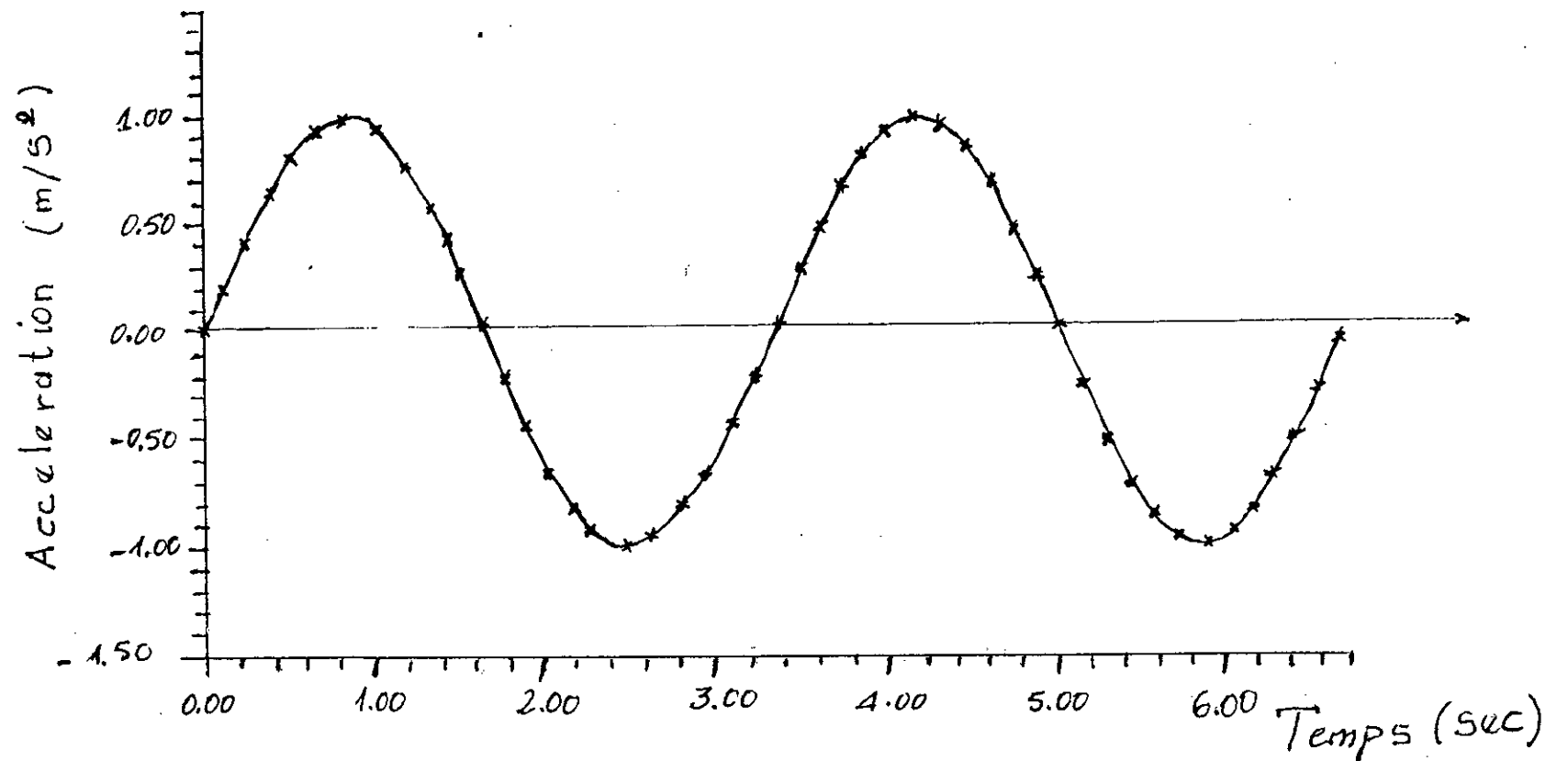
SIGMA-1 (Kg/M<sup>2</sup>)

RETENUE PLEINE



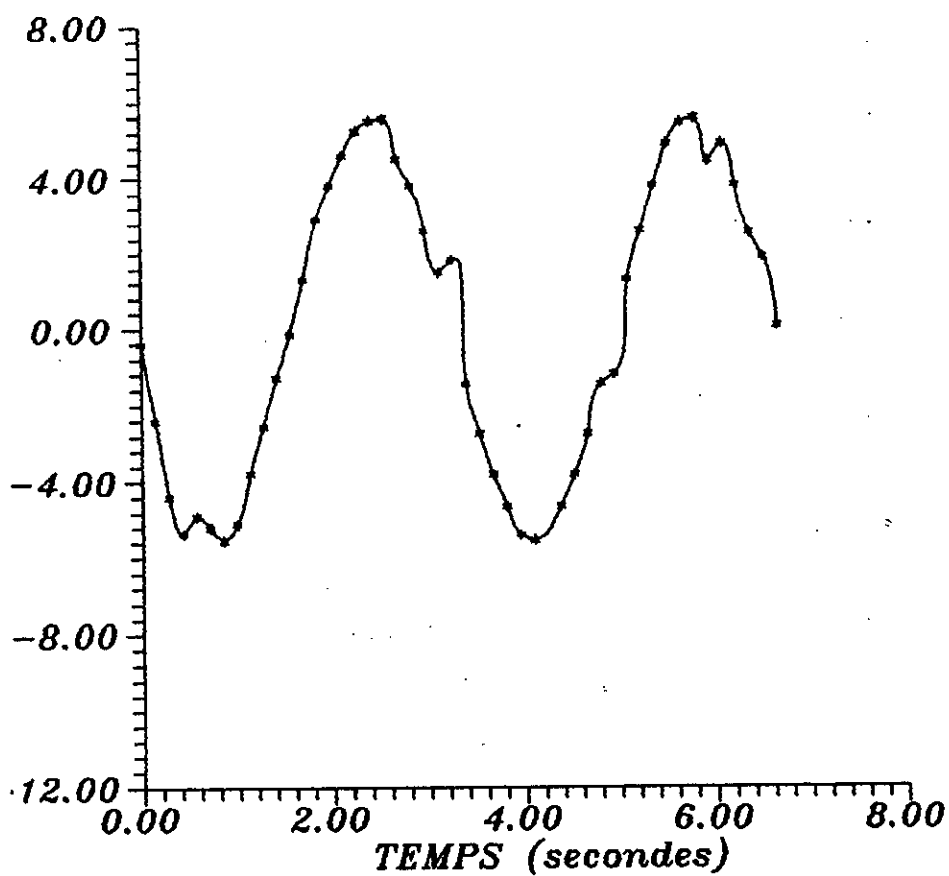
**RETENUE PLEINE**



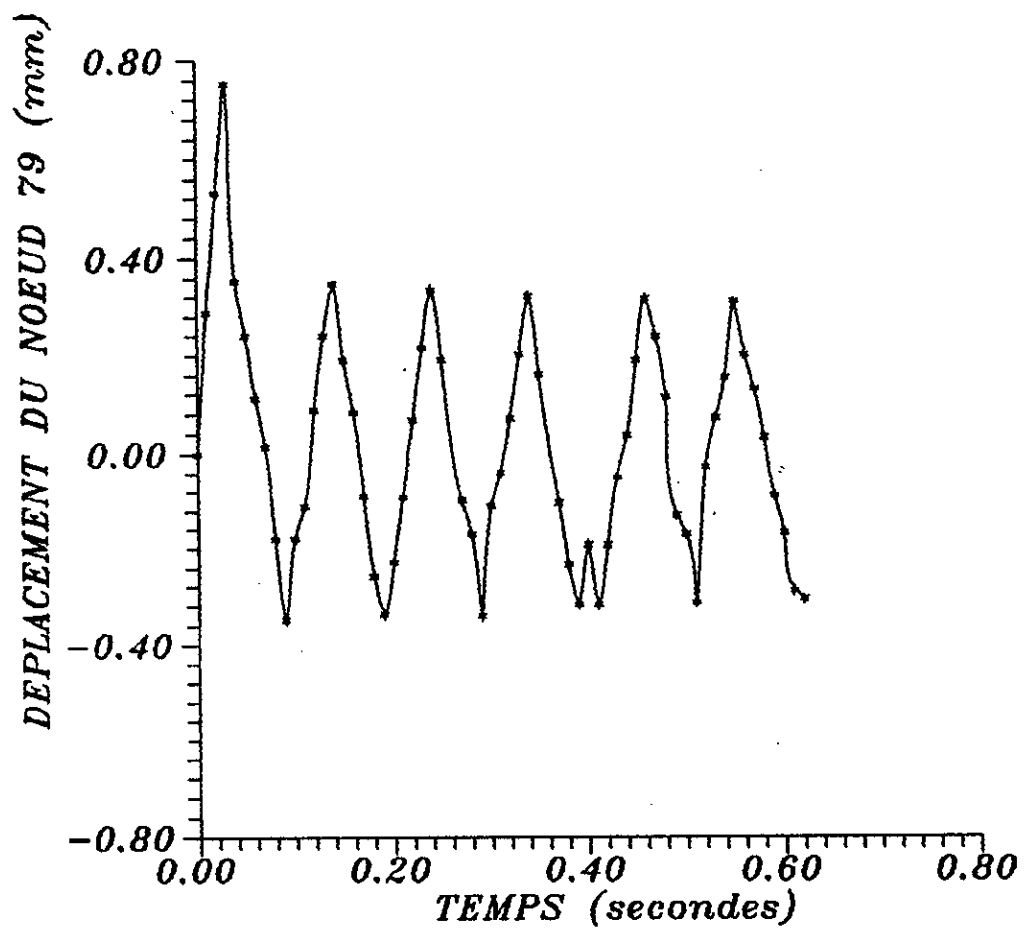


signal sinusoidal

graphe 1



**REPONSE DE L'OSCILLATEUR SIMPLE  
EN REGIME NON AMORTI  
GRAPHE 2**



REPONSE AU CHARGEMENT DYNAMIQUE  
 EN REGIME NON AMORTI POUR UNE CHARGE  
 PAR EXPLOSION

**CONCLUSION**

**&**

**RECOMMENDATION**

## **CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS**

Le travail que nous avons mené, nous a permis de nous familiariser avec la méthode des éléments finis "la MEF".

Cela nous a permis de découvrir un Outil d'analyse puisant a large domaine d'application par le biais duquel on peut prendre le comportement d'une structure donnée, sous un chargement donné. La MEF met donc à la disposition de l'ingénieur un moyen efficace d'analyse et de prédimensionnement de l'ouvrage qu'il souhaite réaliser.

Le caractère pluridisciplinaire de cette méthode n'a fait qu'étendre nos connaissances dans plusieurs disciplines que sont entre autres: la mécanique, l'analyse numérique, les barrages poids, ainsi que l'informatique.

Le programme développé s'adapte à une grande gamme de problèmes en contraintes et déformations planes; en statique et en dynamique.

Nous finissons donc ce mémoire par des recommandations qui consisteront .- nous l'espérons - une base de continuité à ce travail.

### **Recommandations:**

L'expérience acquise durant l'élaboration de ce mémoire nous permet de proposer une suite à ce travail.

Les perspectives qui se dessinent sont donc:

#### **1) Etendre le traitement linéaire à un traitement non linéaire:**

Comme déjà signalé dans ce mémoire, les méthodes d'analyse dynamique linéaires élastiques peuvent être convenablement et économiquement utilisées pour la production des conceptions sécuritaires, ce pendant, elles ne peuvent pas fournir des informations directes sur le comportement non linéaire de la structure.

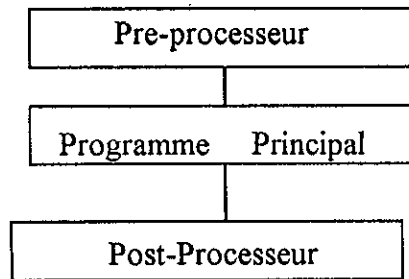
Une étude non linéaire s'avère donc nécessaire pour identifier cet effet de non linéarité, elle est effectuée par une suite d'études de systèmes linéaires successifs.

L'histoire de la réponse est divisée en courts incréments de temps égaux entre eux, et la réponse dans chaque incrément est calculée pour un système linéaire ayant les caractéristiques du début de l'intervalle. A la fin de ce dernier, les caractéristiques sont modifiées conformément à l'état de déformation et de contraintes à cet instant, ( variation de la rigidité globale due aux changements des propriétés géométriques et mécaniques des éléments de la structure et aussi de l'amortissement).

Cela nécessite d'introduire à chaque pas de temps la nouvelle matrice [D] correspondante.

#### **2) Développement du post-processeur:**

Dans un logiciel, il y a mise en évidence de 03 parties principales ( voir organigramme ci-dessous) indissociables l'une de l'autre.



Dans notre mémoire, on s'est réservé les 02 première parties, l'idéal à présent serait de s'intéresser a la troisième partie. C'est à dire le post-processeur:

une fois le programme déroulé, un nombre impressionnant de résultats sont obtenus.

Le depouillage manuel de ces derniers représente un travail laborieux, l'idéale serait le développement d'un post-processeur qui, une fois les calculs terminés, traiterait les résultats et afficherait ceux sélectionnés préalablement par l'utilisateur.

***3) Etendre les possibilités de traitement du programme à d'autres problèmes ( éléments coques).***

# **ANNEXES**

# I. ANNEXE 1

## I.1 Méthode de stockage :

Les matrices provenant de l'application des méthodes reposent sur les éléments finis présentent habituellement des propriétés particulières.

La matrice de raideur est souvent symétrique ( $K_{ij} = K_{ji}$ ), ce qui est dans notre cas .

Pour ce type de problèmes, il n'est pas nécessaire de garder en mémoire toute la matrice . Il suffit de stocké la moitié supérieure (ou inférieure cela réduit l'encombrement de moitié environ . Nous pouvons réduire encore en ne gardent que la " bande " contenant tous les éléments non nuls .

Dans les méthodes des éléments finis, la largeur maximale de cette bande peut être rendue très petite par rapport au nombre des inconnues, de l'ordre de 10 à 20  $\mu$ , ce qui réduit l'encombrement de  $n(n+1)/2$  à  $(0.1 - 0.2)n^2$  dans le cas symétrique . Dans notre cas le stockage s'est fait par demi-bande, on a introduit une subroutine qui permet de calculer la demi-bande en procédant comme suit :

- On calcul la largeur de la demi-bande de chaque ligne I MBAND (I)
- On calcul la largeur maximale de la demi-bande pour toute les lignes I Mband(e) = MAX. MBAND (I) .

En fin pour le stockage dans la matrice globale, on prend la largeur maximale de la demi-bande de tous les éléments (e) .

$$MBAND = \text{MAX } MBAND(e)$$

La largeur de la demi-bande est donnée par :

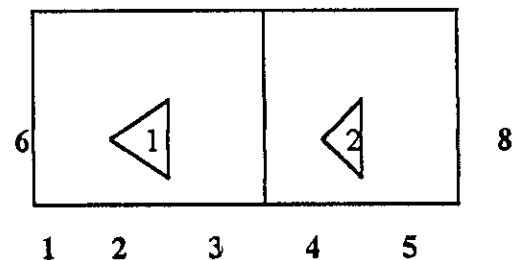
$$Mband, Mband = [((Connectivité \text{ max.}) - (Connectivité \text{ min } ) + 1) \times 2$$

exemple :

9    10    11    12    13

élément 1 :

$$Mband1 = [(11-1)+1] \times 2 = 22$$



élément 2 :

$$Mband2 = ((13-3)+1) \times 2 = 22$$

$$\text{donc } Mband = \text{Max.}[Mband1, Mband2] = 22 .$$

Après avoir déterminé la largeur de la demi-bande, on procède au stockage d'une matrice ( $2 \times NND$ ,  $2 \times NND$ ) dans une autre matrice ( $2 \times NND$ , Mband) avec :

**NND** : Nombre de noeuds total .

**Mband** : Largeur de la demi-bande (y compris la diagonale) .

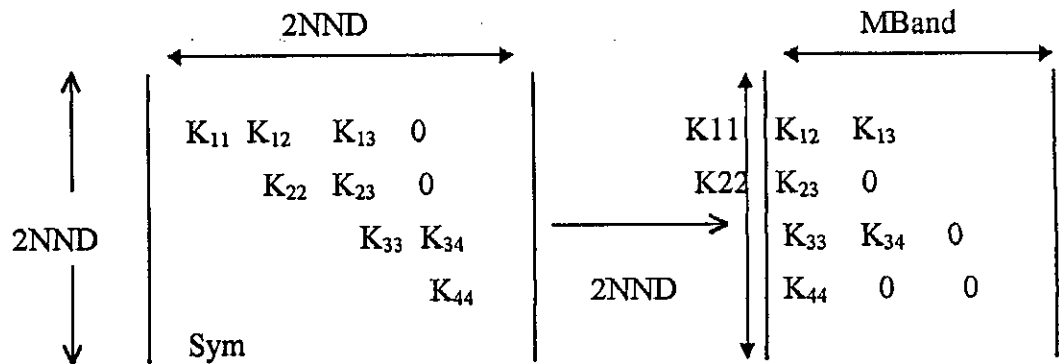
En ajoutant sur les indices I et J ses éléments de la matrice initiale, chaque élément  $K_{ij}$ , occupant la position (I,J), occupera après réarrangement dans la matrice bande la position (I,J) tel que :



$$i = I$$

$$j = J - I + 1.$$

**exemple :**



Pour cet exemple, on remarque que l'élément  $K_{24}$  est nul, mais il est pris en compte dans le stockage, Cela par ce que la largeur de la demi-bande est constante ( $MBAND = 3$ ).

## I.2 Génération Automatique de maillage :

En raison de l'efficacité de la génération Automatique de maillage, nous avons élaboré un programme qui nous permet à chaque fois un nouveau maillage, pour lequel l'analyse peut être refaite et ainsi satisfaire les exigences de précision imposées.

Pour un grand nombre d'élément, l'introduction des données à la main, devient très laborieuse et risque d'engendrer des erreurs d'on le maillage automatique qui nous facilite cette tâche; car il nous permet de préparer nos fichiers de données, dans lesquelles on a besoins :

- Des numéros des noeuds
- Des coordonnées de tous les noeuds
- Des connectivités de chaque élément

Il est à noter que notre programme appelé "MMTRAPEZ" fait le maillage de différentes formes de structures (rectangle, trapèze, carre ...) et même la combinaison entre ces dernières.

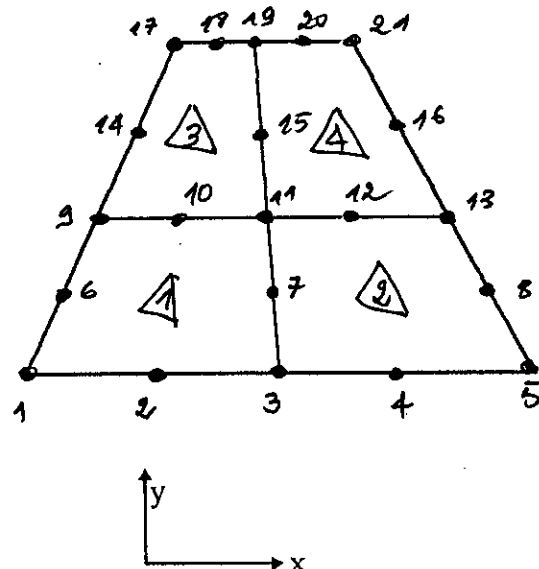
### Exemple de maillage "MMTRAPEZ"

#### A) Données d'entrée:

on fait entre les coordonnées des points (1), (17), (21) et (5) respectivement, ensuite on fait entrer le nombre de noeuds dans la direction x et puis dans la direction y.

#### B) Résultats de sortie:

- coordonnées de tous les noeuds.
- connectivités des éléments.



## **II. ANNEXE 2**

### **II.1 Méthode de factorisation de cholevsky :**

La matrice de cholevsky est une méthode directe de résolution des systèmes linéaires .

Le principe de la méthode est basée sur le théorème suivant :

#### **II.1.1 Théorème :**

Si  $[A]$  est une matrice symétrique, définie positive, il existe une matrice unique, triangulaire inférieure  $[B]$  tel que :  $[A] = [B] [B]^t$

Alors, la décomposition n'est possible que si  $[A]$  est symétrique, définie positive, si elle ne l'est pas on finis par obtenir  $B_{jj}$  imaginaire et cette propriété peut être utilisée pour détecter des erreurs dans la matrice  $[A]$  (ex: rigidité), on note que :

$$\det(A) = (\det(B))^2, \text{ obligatoirement positif.}$$

La résolution du système linéaire  $[K]\{U\} = \{f\}$ , s'écrit en utilisant la décomposition de cholevsky :  $[B][B]^t\{U\} = \{F\}$  .

Ce système se résout en 02 étapes :

#### **1<sup>er</sup> étape :**

$$[B]\{F'\} = \{F\} \quad \text{système triangulaire inférieur}$$

#### **2<sup>ème</sup> étape :**

$$[B]^t\{U_n\} = \{F'\} \quad \text{système triangulaire supérieur .}$$

## **III. ANNEXE 3**

### III.1 Intégrations numérique de Gauss :

#### III.1.1 Formalité de base :

La méthode de Gauss est une méthode d'intégration numérique très utilisée, dans laquelle les  $r$  coefficients et les  $r$  abscisses  $\xi_i$  des expressions intégrales pures dans les paragraphes précédentes sont déterminés de manière à l'intégrer exactement des polynômes d'ordre

$$m \leq 2r - 1 .$$

Remplaçons l'intégrale d'une fonction polynomiale  $y(\xi)$  par une combinaison linéaire de ses valeurs aux points d'intégration  $\xi_i$ .

$$\int_{-1}^{+1} y(\xi) d\xi = W_1 y(\xi_1) + W_2 y(\xi_2) + \dots + W_i y(\xi_i) + \dots + W_r y(\xi_r) = \sum_{i=1}^r W_i y(\xi_i) \quad (1)$$

Déterminons les  $2r$  coefficients de manière à ce que soit vérifiée exactement pour le polynôme suivant :

$$y(\xi) = a_1 + a_2 \xi + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1}$$

Portons cette expression dans (1) :

$$\begin{aligned} a_1 \int_{-1}^{+1} \xi^0 d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi^1 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi &= a_1 (W_1 + W_2 + \dots + W_r) + a_2 (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 \\ &+ \dots + a_{2r} \xi_i^{2r-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

Pour que (2) soit identiquement vérifiée pour tout  $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ , il faut :

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 0, 2, 4, \dots, 2r-2$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha = 1, 3, 5, \dots, 2r-1$$

Ce système de  $2r$  équation est linéaire en  $W_i$ , non linéaire en  $\xi$ , il détermine des  $2r$  paramètres de (1) sous les conditions .

$$\left. \begin{array}{l} W_i > 0 \\ -1 < \xi_i < 1 \quad i \end{array} \right| = 1, 2, \dots, r .$$

### III.1.2 Intégration numérique à 2 dimensions :

Elles constituent à utiliser dans chaque direction  $\xi$  et  $n$  une intégration numérique à une dimension, si nous utilisons  $r_1$  points dans le sens  $\xi$ ,  $r_2$  points dans le sens  $n$ , la méthode de Gauss intègre

exactement le produit d'un polynôme en  $\xi$  d'ordre  $2r_1-1$  et d'un polynôme en  $n$  d'ordre  $2r_2-1$  .

Finalement on aura :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} y(\xi, n) d\xi dn = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j y(\xi_i, n_j)$$

### III.1.3 choix du nombre de points d'intégration :

Ce choix de peut du type d'élément utilisé et de la matrice élémentaire que l'on construit ( $[K]$  ou  $[M]$ ), en pratique, on choisit le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul, l'expérience à montré que l'intégration réduite peut donner de meilleurs résultats que l'intégration exacte; par contre il existe pour chaque type d'éléments un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la matrice  $[K]$  est singulière malgré l'introduction des conditions aux limites .

Dans notre cas, c'est à dire pour un élément quadrilatéral isoparamétrique à 8 noeuds, il faut un minimum de  $2 \times 2$  points .

D'après Zienkiewicz, pour les éléments isoparamétriques le nombre de points d'intégration doit permettre l'intégration exacte de  $\det(J)$ , c'est à dire du volume de l'élément réel .

En fait à chaque point d'intégration d'un élément, sont associés plusieurs relations entre les variables modales de l'élément, pour que la matrice globale  $[K]$  ne soit pas singulière, il faut que le nombre de relation correspondantes soit au moins égal au nombre d'inconnus du problème compte tenu des conditions aux limites .

## IV. ANNEXE 4

Nous allons présenter quelques valeurs informatives des caractéristiques de quelque matériaux fréquemment rencontrés .

Type de matériau		Densité (kg / cm <sup>3</sup> )
1) sable ameubli		1.85
2) sable dense		2.10
3) Argile molle		1.75
4) Argile compacte		2.07
5) terrain en poussière		1.75
6) Gravier		2.15
Matériau		module d'young E(daN / cm <sup>2</sup> )
1) Argile molle		150
2) Argile dure		150 - 200
3) Argile rigide		250 - 2500
4) sable en poussière		70 - 700
5) sable ameubli		150 - 500
6) sable dense		500 - 1200
7) sable dense avec gravier		900 - 1200
8) béton		300 - 10 <sup>3</sup>
9) acier		2100 - 10 <sup>3</sup>
Matériau		Coefficient de poisson $\nu$
1) Argile		0.35
2) Argile saturée		0.50
3) béton		0.2
4) acier		0.3
Auteurs	matériaux	Coefficient d'amortissement $\mu$
Weisman et HART	Gravier 1	0.032 - 0.072
BARKAN	Gravier et sable sec et saturé	0.050 - 0.060
Whitman	Sable sec	0.030
HALL et Richart	Sable sec et saturé	0.010 - 0.030
HARDIN	Sable sec	0.010 - 0.030

# LEXIQUE

## A

Aleatoire(arbitraire)	عشوائي	Arbitray
Amortissement	تباطؤ	Damping
Assemblage	تجميع	Collection

## B

Bande (stockage)	شريط	Band
Barrage	سد	Dam
Barre	قضيب	Bar
Base	قاعدة	Base

## C

Champ de( déplacement, contrainte, libre)	حقل	Field(stress,free)
Charge dynamique	شحنة ديناميكية	Dynamic load
Charge statique	شحنة ساكنة	Static load
conditions aux limites	الشروط عند الحدود	Boudray conditions
Conditions initiales	الشروط الابتدائية	Initial conditions
Contrainte(plane)	ضغط (مستوي)	Plane Stress

## D

Dangereux(euse)	خطير	Dangerous
Déformation(plane)	تشوه (مستوي)	Strain(plane)
Degré de liberté	درجة التحرر	Node freedom

Densité	كثافة	Density
Deplacement	إزاحة	Displacement
determinant	محدد	Determinant
Deterministe	تحديدية	Determinist
Diagonale	قطر	Diagonal
Données d'entrée	معطيات الدخول	Input data
Données desortié	معطيات الخروج	Output data

## **E**

Elastique	متمدد	Elastic
Élément (quadrilaeral)	عنصر رباعي الأضلاع	Quadialateral element
Equation differentielle	معادلة تفاضلية	Différential éuation
Element fini	عنصر منتهي	Finite element
Equilibre	توازن	Equilibrium
Excitation	تنبيه	Excitation

## **F**

Fixe	ثابت	Fixed
Flexion	إنحناء	Flexion
Force	قوة	Force
Fonction de forme	دالة شكلية	Chape function
Fonction d'interpolation	دالة إستقطاب	Interpolation function
Frontière	الحدود	Boundary

## **G**

	Global	إجمالي	Global
<b>H</b>			
	Harmonique	□جيبية	Harmonic
	Homogène	متجانس	Homogeneous
<b>I</b>			
	Interpolation	إستقطاب	Interpolation
	Isoparametrique	متماثل الوسيط	Isoparametric
	Isotrope	متساوي الخواص الفيزيائية	Isotropic
<b>L</b>			
	Lineaire	خطي	Linear
	Local	محلي	Local
<b>M</b>			
	Masse	كتلة	Mass
	Matrice(Masse)	مصفوفة(كتلة مادية)	Mass matrix
	Matrice(rigidité)	مصفوفة(القساوة)	Stiffness matrix
<b>N</b>			
	Noeud	عقدة	Node
	Non linéaire	غير خطي	Non linear



## P

Onde	موجة	Wave
Périodique	دورية	Periodic
Plaque	صفحة	Plate
Point nodal	نقطة عقودية	Nodal point
Poutre	عارضة	Beam
pseudo-statique	شبه ساكن	Pseudo-static

## S

Sol	سطح	Ground
Structure	هيكل	Structure
Symétrique	متناظرة	symmetrical
Système	جسملة	System

## T

Taille matrice	حجم المصفوفة	Size of matrix
Temps	زمن	Time
Tremblement de terre	هزة أرضية	Earthquake

## U

Uniforme	منتظم	Uniform
----------	-------	---------

## V

Valeur propre	قيمة ذاتية	Eigen value
Vecteur propre	شعاع ذاتي	Eigen vector
Vibration (libre, forcée)	إهتزاز (حر مقيد)	Vibration (free, forced)
Vitesse (lineaire, angulaire)	السرعة (الخطية الزاوية)	Velocity (linear, angular)

# **BIBLIOGRAPHIE**

## **1- La méthode des éléments finis**

Formulation de base et problèmes linéaires

O.C            Zeinkiewicz

R.L            TAYLOR

## **2- Modélisation des structures par éléments finis**

vol 1-2    Jean Louis Batoz

Gouri Dhatt

## **3- Présentation de la méthode des élément finis**

G.Dhatt -

G.Touzot

## **4- Dynamique des structures**

R.W. Glough

J. Penzien

## **5- Finite élément procédures in engineering analysis**

J.BATHE

## **6- Utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse dynamique -sismique des structures**

A. Negoïta

## **7- Généralités sur l'analyse dynamique non linéaire ( séminaire    C.G.S. mai 93 )**

Dr Bourahla

**8- Résistance des barrages**

J. PERET

**9- <sup>Vème</sup> séminaire maghrébin du génie parasismique**

vol 1-2 Février 93 .

**10- Earthquake Engineering (Journal)**

vol 14 (1986)

**11- Cours de mécanique des milieux continus**

D<sup>r</sup> Berrah (ENP)

**12- Earthquake input mechanisms for time-domain  
Analysis of dam-foundation systems**

P. Leger and M. Boughoufalah

# ERRATA

page n°	N° TITRE	LIGNE	MOT	A remplacer par	précisions
15	II - 2	6	linearité	non linearité	
43	III - 3 - 5	2	$\{S(x, y, t)\}$	$\{\dot{S}(x, y, t)\} =$ $\{\dot{U}(x, y, t)\} =$ $\{\dot{V}(x, y, t)\} =$ $N(x, y) \{\dot{S}_e(t)\}$	
60	IV - 1.4 - 4	2	$\bar{K} = U^{t+\Delta t} = \bar{R}^{t+\Delta t}$	$\bar{K} \cdot U^{t+\Delta t} = \bar{R}^{t+\Delta t}$	
64	V. 3	4	tracer	tasser	
64	V. 4.3	10	rochese	rocheuse	
68	V. 6.1	1	veille	veiller	
64	V. 4.3	7	trainage	drainage	
69	V. 6.3	4, 12	calculs	calculs	
69	V. 6.3	9	chainage	drainage	
94	VI. 5. 1. 2	schema	$F(t) \cdot (N)$	$a(t) \cdot (m/s^2)$ $a_0(t=0) = 2.184$	le graphe donne la variation de l'accélération de la tige
88	V. 2 - 1.2	schema	32 (KN)	2 (KN)	
conclusion	conclusion	4	prendre	comprendre	
5	III. 1-3	Annex 3	Zienkionicz	Zeinkiwicz	