

12/94

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
الوزارة المنتدبة للجامعات و البحث العلمي
Ministère délégué aux universités et à la recherche scientifique

Ecole Nationale polytechnique

Département Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études

pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

Investigation dans la comportement
des interfaces par la méthode
des éléments finis

Proposé par :
Mr Messafer

Etudié par :
Merah S.
Sebai S.

Dirigé par :
Mr Messafer

Promotion Juin 94

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
الوزارة المنتدبة للجامعات و البحث العلمي
Ministère délégué aux universités et à la recherche scientifique

Ecole Nationale polytechnique

Département Génie Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études
pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat

Investigation dans la comportement
des interfaces par la méthode
des éléments finis

Proposé par :
Mr Messafer

Etudié par :
Merah S.
Sebai S.

Dirigé par :
Mr Messafer

Promotion Juin 94

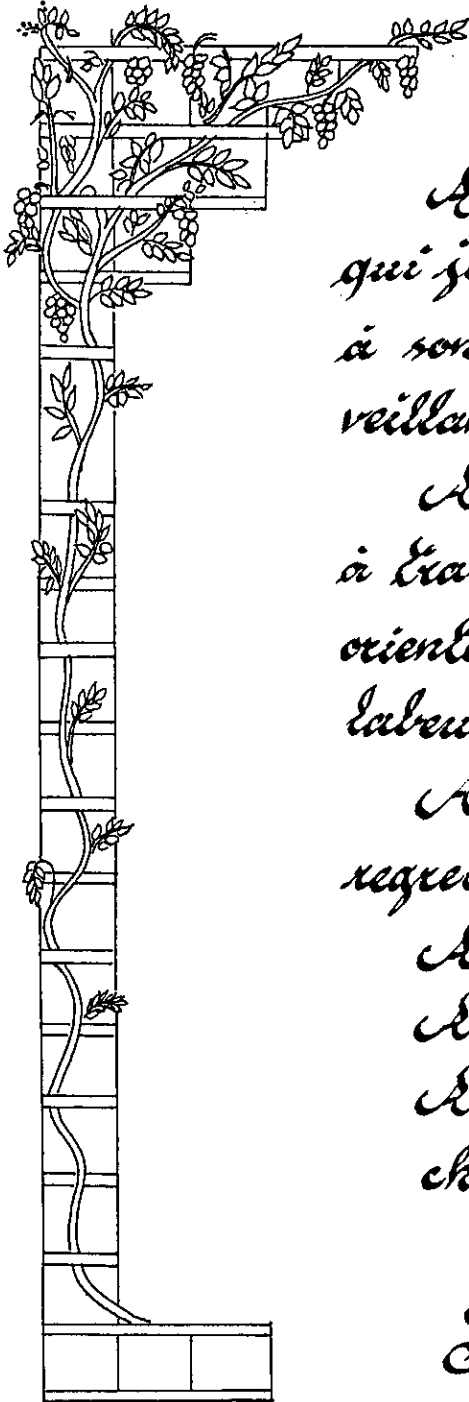


Remerciements

Nous remercions notre promoteur M^r Messafer T., pour la confiance qu'il nous a accordée, son aide et son soutien.

Nos vifs remerciements également à M^r Haderbache L., pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée.

Notre profonde gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation depuis notre premier contact avec la vie scolaire.



*À ma très chère Mère à
qui je dois tout à sa tendresse
à son amour et à sa bien
veillante*

*À mon très cher Père qui
à travers ses conseils a su nous
orienter vers un chemin du dur
labeur.*

*À la mémoire de la chère
regrettée Ma - Meriem*

À mes Soeurs et Freres

À ma Tante Fadou

*À tous ceux qui me sont
chers*

*Je dédie ce modeste
Extrait*

Soucié . S

Dedicaces

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A ma chère Mère que tous les superlatifs
de la langue de Voltaire ne sauraient
exprimer son amour, son dévouement,
ses sacrifices et sa patience.

A mon Cher Père pour tous ses
sacrifices, ses efforts et ses conseils,
qui il trouve ici l'expression de ma
profonde reconnaissance.

A mes Frères et Sœurs qui m'ont
beaucoup encouragé.

A mon Fiancé, à qui je serai
toujours reconnaissante pour son soutien.

A ma famille

A tous ceux qui me sont chers.

Je dedie ce modeste travail

M. Soucié.

الموضوع :
بحث في سلوك فاصل السطوح باستعمال طريقة العناصر المحدودة .

الملخص :
هذا المشروع يهدف الى انجاز برامج آلية بطريقة العناصر المحدودة من اجل دراسة و ايجاد الاجهادات و التشوهات و تقديم طريقة تأخذ بعين الاعتبار فاصل السطوح بين مختلف الطبقات المكونة للتربة و ذلك تحت حمولة سطحية ساكنة .

Sujet :
Investigation dans le comportement d'interfaces par la methode des éléments finis .

Résumé :
Le présent projet consiste en l'élaboration de programmes basés sur la methode des éléments finis en vu de la détermination de l'état de contraintes et de déformations et d'apporter une contribution à l'amélioration de la prise en compte des interfaces au sein d'un sol chargé statiquement à sa surface .

Subject :
Investigation in behaviour of the interfaces by finite element methode .

Abstract :
The present subject consists essentially in the developement of finite element computer programmes for evaluation of states of stress and strain within a soil loaded statically including problems of interfaces .

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I: Théorie de l'élasticité plane	5
I/Introduction	6
II/ Les équations différentielles d'équilibre	6
III/ Les équations déformations-déplacements	
IV/ Les équations constitutives du matériel	9
V/ Elasticité plane	9
1- Etat de déformation plane	10
2- Etat de contrainte plane	11
3- Equations d'équilibre	11
4- Equations de compatibilité	12
5- Résolution du problème	13
Chapitre II: Présentation générale de la méthode des éléments finis	16
I/Introduction	17
II/ Concept de base	17
III/ Historique	18
IV/ Etapes à suivre pour la méthode des éléments finis	19
V/ Différentes formulation de la M.E.F	21
VI/ Choix de la formulation variationnelle	24
VII/ Principe des travaux virtuels	24
VIII/ Discrétisation du travail virtuel par éléments finis	25
IX/ Principe de minimisation de l'énergie potentielle totale	27
Chapitre III: Notion de convergence de la méthode des éléments finis	31
I/Introduction	32
II/ Conditions de convergence	32
III/ Erreur de discrétisation et taux de convergence	33
IV/ Exemple de convergence monotone	34
V/ Exemple de convergence non monotone	34
Chapitre IV: Présentation de l'élément isoparamétrique à huit noeuds pour l'étude de l'élasticité plane	35
I/Introduction	36

II/ Principe	36
III/ Calcul d'élément isoparamétrique à huit noeuds	37
Chapitre V: Présentation du programme ISOFEM correspondant à l'élément isoparamétrique à huit noeuds	44
I/ Introduction	45
II/ Présentation du programme ISOFEM	45
III/ Structure du programme ISOFEM	45
Chapitre VI: Etude des interfaces dans un milieu linéaire	49
I/ Introduction	50
II/ Base de l'étude des interfaces	50
III/ Avantages de la M.E.F d'interface	52
IV/ Méthodes d'analyse de problèmes d'interface	52
1- Méthodes utilisant une relation limite en contraintes	54
2- Méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface	60
Chapitre VII: Présentation des programmes INTERFI et INTERFII	70
I/ Introduction	71
II/ Structure du programme INTERFI	71
III/ Structure du programme INTERFII	71
Chapitre VIII: Etude théorique des interfaces dans un milieu non-linéaire	77
I/ Introduction	78
II/ Formulation d'une loi de comportement	78
III/ Traitement numérique par éléments finis	82
IV/ Analyse non-linéaire des contraintes et déformations dans un sol par des méthodes expérimentales	83
Applications	88
Conclusion	
Annexes	118
Bibliographie	124

Introduction

L'usage croissant des structures hétérogènes dans les applications industrielles les plus variées soulève un certain nombre de problèmes qui ont nécessité de nombreuses études. De gros efforts sont menés actuellement pour tenter de les résoudre.

La mécanique des sols repose bien souvent sur des approximations en ce qui concerne le comportement du matériau. Ceci pour les deux seuls aspects qu'elle examine, à savoir, la capacité portante et le tassement.

L'apparition et le développement de méthodes numériques puissantes, telle que la méthode des éléments finis, qui permettent de modéliser tout le continuum.

L'utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols est particulièrement compliquée. D'une part, il est nécessaire parfois de prendre en compte des comportements du massif de sol très élaborés, avec, éventuellement des grandes déformations. D'autre part, ayant la plupart du temps affaire à des problèmes d'interaction sol-structure ou sol-sol, on doit modéliser correctement les surfaces de contact.

Le calcul des contraintes aux interfaces est un point essentiel dans l'analyse des structures ; le comportement, et notamment le mode de ruine de structures composites ou d'assemblages collés, est souvent régi par ces contraintes.

L'évaluation précise des contraintes d'interface implique le respect de toutes les conditions de continuité à l'interface. Ceci amène une difficulté toute particulière dans l'approche, quelles que soient les méthodes d'analyse.

En effet, les moyens bien connus du calcul des structures sont mal adaptés au calcul des contraintes dans les milieux hétérogènes, conservant à l'esprit une telle difficulté, la méthode analytique se limite à des cas précis.

La méthode des éléments finis, par ses multiples avantages, constitue une approche du problème de l'analyse d'une très grande variété des structures d'interface dont la solution, bien que très rapide, est relativement précise.

Nous présentons des types d'éléments destinés à résoudre les problèmes d'interface développés pour des structures dans le cas bidimensionnel en élasticité linéaire.

L'étude comprend deux parties principales :

La première partie est destinée à préciser la méthode (M.E.F) utilisée pour le traitement de notre étude, elle étudie aussi le comportement des structures continues homogènes. Un programme ISOFEM a été élaboré afin de préciser l'état de contrainte et de déformation d'un sol soumis à un chargement.

La deuxième partie est consacrée à l'étude théorique et numérique des surfaces de discontinuité, désignées par le terme d'"interfaces", par deux principales méthodes :

1- méthodes utilisant une relation limite en contraintes, en modélisant l'interface par des ressorts.

2- méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface assimilée à un matériau fictif.

Cette partie relate la mise au point d'algorithmes et deux programmes INTERFI et INTERFII de résolution par la méthode des éléments finis des problèmes d'interfaces dans un modèle linéaire.

INTERFI est élaboré afin de ^{evidence}mettre en évidence le problème de frottement-décollement d'interfaces.

INTERFII est destiné à définir une loi de comportement générale, construite par extension au domaine surfacique des lois applicables aux milieux continus.

On mentionne, enfin, que dans cette partie, nous avons aussi présenté une étude théorique des interfaces dans un modèle non linéaire.

Des applications numériques concernant les problèmes sans et avec interfaces, ont été présentées avec leurs interprétations, permettant d'évaluer clairement l'utilité des différents programmes.

Dans la conclusion, l'accent est mis sur l'intérêt et l'avantage présentés par les éléments d'interface développés sur les applications pratiques et sur les perspectives pour l'avenir.

Le présent travail se termine par une liste de références et des annexes.

Chapitre I

Théorie de l'élasticité plane

I/Introduction

Tous les matériaux possèdent à un certain degré la propriété d'être élastique, c'est à dire que si les forces extérieures qui provoquent la déformation d'un corps ne dépassent pas une certaine limite, la déformation disparaîtra au même temps que les forces qui lui donnent naissance. C'est le caractère réversible de la déformation.

La théorie de l'élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces-déplacements. Cependant, certaines hypothèses doivent être posées avant d'entamer l'exposé de cette théorie :

- le solide est élastique, homogène et isotrope,
- la loi de comportement reliant les contraintes aux déformations est linéaire,
- les déformations sont supposées petites.

La théorie de l'élasticité comprend trois (03) types d'équations, à savoir :

- les équations différentielles d'équilibre,
- les équations différentielles déformations unitaires/déplacements,
- les lois intrinsèques ou lois constitutives du matériau.

II/ Les équations différentielles d'équilibre

On considère un cube élémentaire $dx dy dz$. (cf. fig.I.1).

X, Y, Z sont les forces de volume.

Le cube étant en équilibre $\Rightarrow \sum X_i = 0$

$$\Rightarrow \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} + X = 0$$

par analogie :

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} + X = 0$$

$$\frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta\sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{yz}}{\delta z} + Y = 0$$

$$\frac{\delta\tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{yz}}{\delta y} + \frac{\delta\sigma_z}{\delta z} + Z = 0$$

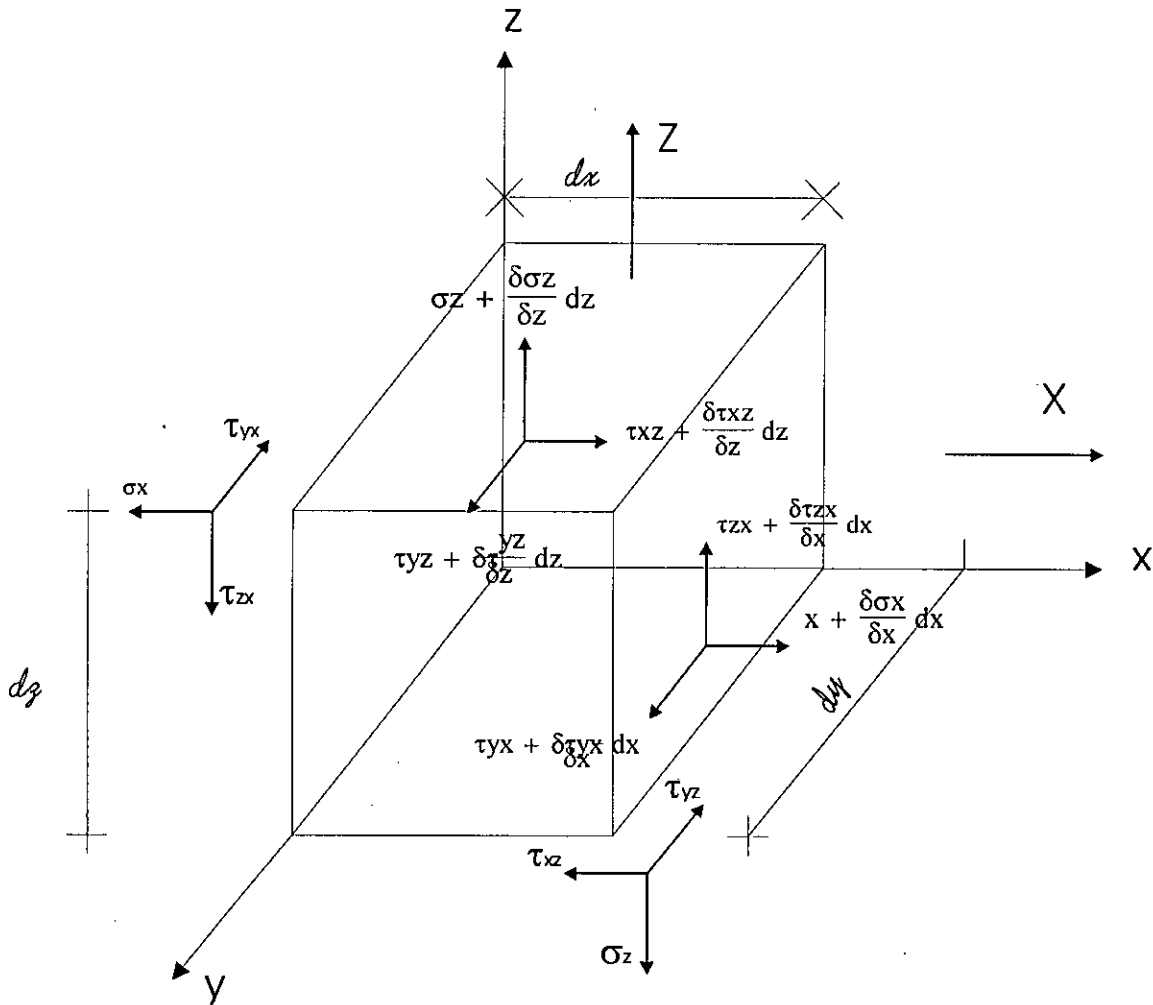


Figure I.1

III/ Les équations déformations-déplacements

On traite le problème en deux dimensions, puis, on généralisera à trois dimensions, (cf.fig.I.2)

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad \text{avec } AB = dx, A'B' = dx(1 + \frac{\delta u}{\delta x})$$

On aura donc : $\epsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}$

$$\epsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$$

où :

ϵ_x : déformation longitudinale

ϵ_y : déformation transversale

γ_{xy} : déformation angulaire (tangentielle)

En tridimensionnel, on a :

$$\epsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}, \epsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y}, \epsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{zx} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z}$$

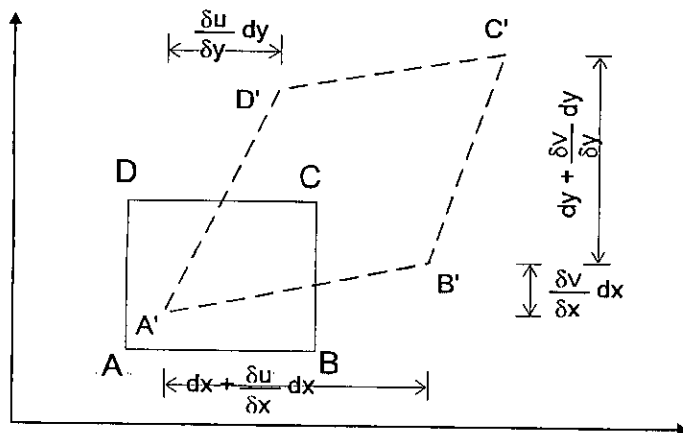


Figure I.2

IV/ Les équations constitutives du matériau

Elles caractérisent les propriétés mécaniques du matériau étant donné par :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\tag{1.1}$$

Les déformations angulaires causées par les contraintes tangentielles sont données par :

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G\end{aligned}\quad \text{avec } G = E/2(1+\nu)\tag{1.2}$$

Matriciellement

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

↑
[E]

La matrice [E] est souvent connue sous le nom de matrice de "rigidité du matériau" et son inverse $[E]^{-1} = [C]$ connue sous le nom de "matrice de flexibilité".

V/ Elasticité plane

Les problèmes de la théorie de l'élasticité sont simplifiés dans une large mesure lorsque les tensions ou les déformations sont toutes parallèles à un plan. On a donc affaire à des problèmes bidimensionnels.

1- Etat de déformation plane

Ce sont les problèmes concernant les structures où la dimension suivant Z est très négligeable devant les dimensions dans le plan.

Les hypothèses de base se traduisent par la relation :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

Les déplacements dans le plan (x, y) sont indépendants de Z.

c'est à dire :

$$U_x = U_x(x, y)$$

$$U_y = U_y(x, y)$$

On établit les relations contraintes-déformations en utilisant les équations suivantes.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{xy}$$

On obtient donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

↑
[D]

Il est à noter que la contrainte $\sigma_z \neq 0$ et peut être déterminée à partir de la loi de Hooke.

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] = 0$$

d'où :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

2- Etat de contrainte plane

Ce sont les problèmes concernant les structures où la dimension suivant une direction (Z) est très négligeable devant les dimensions dans le plan.

Les équations de base sont :

$$\sigma_z=0 \qquad \sigma_{yz}=0 \qquad \sigma_{xz}=0$$

Pour un matériau isotrope la loi de Hooke donne

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{E} (1+\nu) \sigma_{xy} \end{aligned}$$

d'où l'on tire les relations contraintes-déplacements suivantes :

Les contraintes σ_x , σ_y et σ_{xy} sont indépendantes de Z. De même les déplacements

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

seront des fonctions de x et y seulement.

$$U_x = U_x(x, y)$$

$$U_y = U_y(x, y)$$

Ces déplacements sont supposés être constants sur toute la dimension suivant Z. L'effet de Poisson donne naissance à un déplacement U qui peut être calculé à partir de la relation contrainte-déplacement.

$$\varepsilon_z = \frac{\delta u_z}{\delta z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

Remarque

L'état de déformation plane est obtenu à partir de l'état de contrainte plane en remplaçant dans la matrice [D] de cet état ν par $\nu/(1-\nu)$.

3/ Equations d'équilibre

En cas bidimensionnel, les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + X &= 0 \\ \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{yx}}{\delta x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

X, Y les composantes des forces de volume.

On dispose de deux équations à trois inconnues, σ_x , σ_y , σ_{xy}

Le degré d'hyperstaticité étant égal à un, on cherchera à résoudre le problème en posant une troisième équation prise de déformation.

4/ Equation de compatibilité

En élasticité bidimensionnelle, les équations de compatibilité en nombre de six (06), se réduisant en une seule qui s'écrit comme suit :

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} = 2 \frac{\delta^2 \varepsilon_{xy}}{\delta x \delta y} \quad (1.4)$$

Nous exprimerons cette équation en termes de contraintes en dérivant les équations d'équilibre, la première par rapport à x et la seconde par rapport à y, et en les additionnant terme à terme, on obtient :

$$-\left\{ \left(\frac{\delta^2 \sigma_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \sigma_y}{\delta y^2} \right) + \left(\frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta Y}{\delta y} \right) \right\} = 2 \frac{\delta^2 \tau_{xy}}{\delta x \delta y} \quad (1)$$

D'autre part, en substituant les expressions de ε_x , ε_y , ε_{xy} dans l'équation (1-4), on obtient :

$$\frac{\delta^2}{\delta y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\delta^2}{\delta x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\delta^2 \sigma_{xy}}{\delta x \delta y} \quad (2)$$

et à partir de (1) et (2), on obtient :

$$\left(\frac{\delta^2 \sigma_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \sigma_x}{\delta y^2} \right) + \left(\frac{\delta^2 \sigma_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \sigma_y}{\delta y^2} \right) = -(1 + \nu) \left(\frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta Y}{\delta y} \right)$$

c'est à dire :

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu)\left(\frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta Y}{\delta y}\right)$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu)\left(\frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta Y}{\delta y}\right)$$

Dans le cas où la seule force de volume est le poids.

L'équation précédente devient :

$$\boxed{\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0} \quad (1.5) \quad \text{Equation de Beltrami}$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien.

L'équation (I-5) est l'équation de compatibilité en termes de contraintes.

La troisième équation étant obtenue, le problème est alors théoriquement résolu.

Remarque

- les équations (I-1) traduisent l'équilibre de la variation (dérivée) des contraintes, mais n'impliquent en aucun cas l'équilibre des contraintes,

- dans le cas très pratique où les forces massiques sont constantes, l'équation différentielle de compatibilité (I-4) est valable aussi bien pour le cas de contraintes planes que celui des déformations planes.

5/ Résolution du problème

Il existe diverses techniques pour résoudre le problème formulé :

- les méthodes analytiques,
- les méthodes numériques tel que :
 - la méthode des éléments finis,
 - la méthode des différences finies,
 - la méthode des bandes finies,
 - la méthode des éléments frontières, etc.

a) Méthodes analytiques

Les équations d'équilibre sont identiquement satisfaites si les contraintes sont reliées à une fonction scalaire $\phi(x, y)$ appelée fonction d'Airy (1867) par les équations suivantes :

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{-\delta^2 \phi}{\delta x \delta y} \quad (I-6)$$

En remplaçant dans l'équation de Bellrami, on obtient :

$$\nabla^2 \left(\frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} \right) = 0$$

$$\boxed{\nabla^4 \phi = 0} \quad \text{Equation biharmonique}$$

avec

$$\nabla^4 \phi = \frac{\delta^4 \phi}{\delta y^4} + \frac{2\delta^4 \phi}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} = 0$$

S'il est possible de trouver une fonction ϕ satisfaisant l'équation biharmonique à l'intérieur du domaine d'étude, et tel que les contraintes et les déplacements sur la frontière vérifient les conditions aux limites, alors la fonction ϕ donne la solution au problème proposé.

Une procédure systématique a été proposée par Neou (1957), qui consiste à exprimer la fonction d'Airy en polynôme en x et y .

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} x^m y^n$$

à la remplacer dans l'équation biharmonique, appliquer les conditions aux limites, et déduire la fonction ϕ par la détermination des coefficients C_{mn} qui permettra par le biais des relations (I-6) de déterminer les contraintes.

b- Méthodes numériques

Parmi les méthodes numériques de résolution nous énonçons le principe de quelques unes.

Méthode des différences finies

Dans cette méthode, le domaine de variation des arguments est remplacé par un ensemble fini de points obtenus par quadrillage de la structure, en une série de droites parallèles aux axes de coordonnées.

Les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites sont remplacées par des combinaisons linéaires de valeurs prises par la fonction déplacement en certains noeuds. Cette méthode est surtout utilisée dans les problèmes d'écoulement en hydraulique.

Méthodes des bandes finies

Le principe de cette méthode repose sur la subdivision de la structure en sous domaines bidimensionnels (bandes), ou tridimensionnels (prismes ou couches) dont deux extrémités (cas de bandes) ou deux faces (cas de prisme, couche) opposées coïncident avec les côtes de la structure.

Cette méthode est applicable pour les structures avec deux extrémités opposées simplement appuyées, pour lesquelles un choix judicieux des fonctions de déplacement simplifie considérablement le système d'équation à résoudre. Et ceci, car elle utilise des fonctions qui a priori satisfont les conditions aux limites.

Méthode des éléments frontières

Cette méthode est la technique la plus puissante pour la résolution de problèmes présentant certaines difficultés qui surgissent quand le domaine à étudier est infini, et quand apparaissent des singularités en des points.

Méthode des éléments finis

C'est une méthode universelle et puissante, applicable pour des structures de formes diverses avec des conditions très variées.

Elle consiste à discrétiser la structure et la mettre sous forme d'un assemblage d'éléments finis connectés aux noeuds.

Il est à noter que la solution obtenue est approximative, elle est d'autant plus efficace que le nombre d'éléments augmente.

Chapitre II

*Présentation générale de
la méthode des éléments finis*

I/ Introduction

La méthode des éléments finis est une méthode d'analyse numérique, utilisée pour la solution de problèmes très complexes. Elle est extrêmement puissante dans l'analyse des structures continues, elle permet de décrire le comportement des systèmes physiques par des équations aux dérivées partielles.

A cause de sa grande flexibilité et diversité, cette méthode est adaptée d'une manière assez courante.

II/ Concept de base

Il consiste à subdiviser un milieu continu en éléments. Ces éléments sont liés par des lignes nodales et leurs coins sont alors des noeuds.

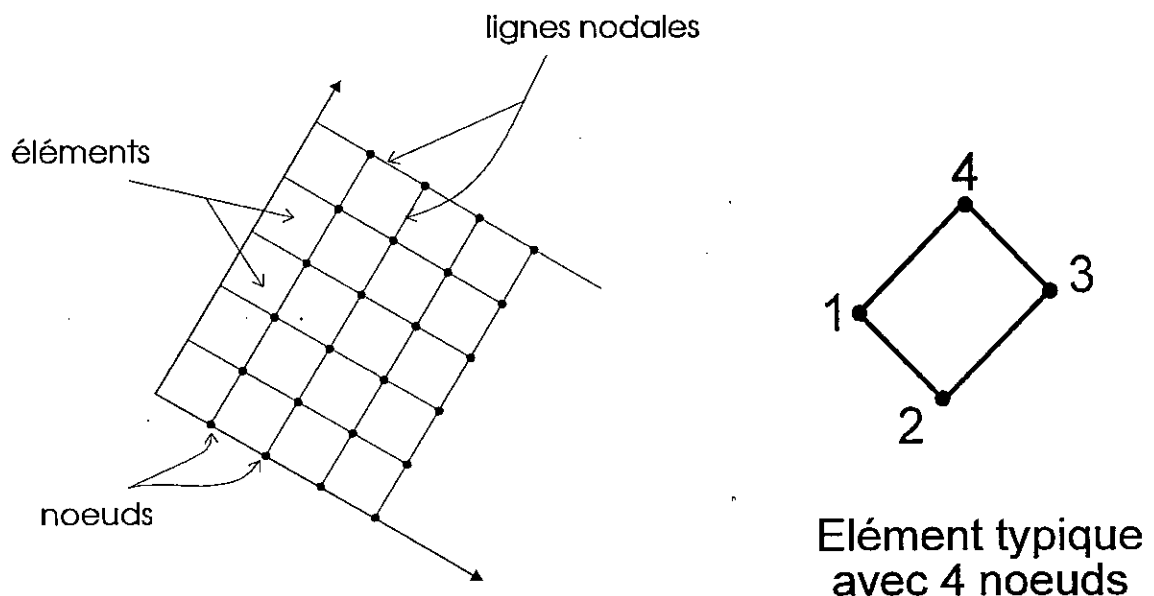


Figure II.1

Une approximation dite "interpolation", consiste en un champ de déplacement à l'intérieur de chaque élément, exprimée en fonction des inconnus aux noeuds définissant le comportement de l'élément donc le comportement global de la structure d'où le problème devient automatiquement dépendant du nombre de noeuds.

L'assemblage de tous les éléments nous donne une série d'équations simultanées à résoudre, en utilisant les calculateurs, la solution de ces équations nous permet d'évaluer les déplacements et efforts internes dans la structure.

III/ Historique

La méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle a été développée sur la base de fondements physiques, elle est formulée à partir des considérations énergétiques de la mécanique des structures, reposant sur les méthodes d'approximations.

On souligne le travail de "Argyris et Kelsey" qui systématisent l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures. En fait, les idées de base de la méthode des éléments finis apparaissent dans "Courant, Hrennikoff et Mc Henry" (1940), consistant à résoudre des problèmes de milieux continus par la discrétisation en éléments, à l'aide de méthodes d'approximation adéquates. Mais, ce n'est qu'en 1956 lors d'une publication de "Turner, Clough, Martin et Topp" dans le journal *Aéronautique scientifique*, que la méthode a été formellement publiée.

Avant cette date, la méthode par différences finies était utilisée en même temps qu'une formulation générale de la "Méthode des forces" (Levy 1947 et Garvey 1951). Cette méthode qui nécessite le calcul des inconnus hyperstatiques était présentée en notation matricielle mais ne possédait la généralité et flexibilité connue par la méthode de déplacement (Levy 1953).

En fait, le développement parallèle des ordinateurs depuis les années 50, a permis aux théoriciens de se concentrer davantage sur la méthode des déplacements, étant donné qu'elle possédait d'énormes avantages, en ce qui a trait au calcul non linéaire des structures.

Durant les années 60, la méthode des éléments finis a connu un essor considérable par rapport aux éléments et leurs formulations théoriques. Durant ces années, les ingénieurs civils se sont fortement intéressés à la méthode, et ont continué le développement de leurs collègues en aéronautique.

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la M.E.F, en particulier : le livre de "Zienkiewicz", de "Gallagher", de "Rockey", ainsi que les ouvrages de "Absi et Imbert".

Les années 70 se sont consacrées aux applications de la méthode, au développement de programmes, et un très grand intérêt pour le domaine non-linéaire (statique et dynamique). Cet intérêt a été stimulé par l'industrie nucléaire.

La M.E.F. est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale navale et nucléaire, elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides, ainsi que pour des problèmes très complexes tels que l'étude du comportement ultime des structures, la fracture des matériaux et leurs comportements non linéaires. De plus, de grands efforts devront être déployés pour simplifier l'entrée des données et l'interprétation des résultats. Dans ce domaine, les mini et micro-ordinateurs ainsi que les écrans graphiques seront d'une très grande utilité.

IV/ Etapes à suivre pour la méthode des éléments finis

La méthode implique huit (08) étapes bien distinctes et qui sont :

Etape 1 : idéalisation et choix d'éléments

On subdivise la structure en un certain nombre d'éléments reliés aux noeuds. Pour les structures continues bidimensionnelles, on utilise des éléments triangulaires ou quadrilatères. Quant aux structures continues tridimensionnelles, des éléments, tels que les solides en forme de tétraèdres ou hexaèdres, sont utilisés.

Etape 2 : choix des fonctions d'interpolation pour les éléments

La variation des déplacements à l'intérieur de chaque élément est représentée par une fonction d'interpolation N_i .

Etape 3 : calcul des déformations et contraintes

A partir des déplacements, on peut par différentiation trouver les déformations unitaires. Quant aux contraintes, il suffit de connaître les propriétés du matériau afin d'écrire la relation contraintes-déformations.

Etape 4 : calcul de la matrice de rigidité de l'élément

Le nombre et le type d'éléments influent sur la précision ou le taux de convergence. Il existe quatre (04) méthodes pour le calcul des propriétés de l'élément.

1. La méthode directe

Retrace ses origines du calcul matriciel des éléments de poutre simple. Ses applications restent surtout dans le domaine structural. Elle s'applique pour les éléments directs dont il est difficile de l'appliquer à des éléments complexes ou à des phénomènes spéciaux, donc elle est à application limitée.

2. Approche variationnelle

Elle est inspirée du calcul variationnel où l'idée de base est de trouver pour un fonctionnel donné une valeur extrême. Pour les problèmes en mécanique des solides, les fonctionnels sont soit l'énergie potentielle ou bien l'énergie potentielle complémentaire.

Les méthodes variationnelles ou de l'énergie constituent en mécanique des structures une approche puissante utilisée pour formuler les équations des éléments.

3. La méthode des résidus pondérés

C'est une méthode mathématique, utilisée pour les cas où l'approche variationnelle échoue à cause du fait qu'il ne soit pas possible d'identifier clairement un fonctionnel à extrémiser. L'idée de base est de minimiser l'erreur suite à une approximation au problème. On cite que contrairement à la méthode directe, elle présente une application virtuellement illimitée. La méthode des résidus pondérés suppose le choix d'une fonction d'approximation (un polynôme, par exemple) qui doit être substituée dans l'équation différentielle. Sachant que généralement, la fonction choisie ne satisfasse l'équation différentielle du problème, on notera l'apparition d'un résidu "R", d'où on s'obligera de minimiser l'intégrale des résidus portant sur le domaine concerné afin d'aboutir à une solution meilleure, cette minimisation d'intégrale est symbolisée comme suit :

$$\int_{\nu} R dv = \text{minimum}$$

pour augmenter les chances de succès de cette méthode, on doit obtenir un minimum nul, ceci en associant une fonction pondération ϕ à la fonction résidu, d'où la forme générale symbolisée ci-dessus devient :

$$\boxed{\int_{\nu} R\phi dv = 0}$$

La méthode des résidus pondérés résumée par cette dernière équation, fournit un ensemble de type "Galekine" ou de "Ritz", selon les fonction de pondérations choisies, en utilisant la notion de fonctionnel.

La méthode des résidus pondérés équivaut dans certains cas à rendre stationnaire un fonctionnel d'où obtention d'une formulation intégrale à partir des conditions de stationnarité, et c'est utile lorsque le fonctionnel est plus simple à exprimer que les équations aux dérivées partielles.

4. L'approche de l'énergie balancée

C'est une technique utile pour les problèmes de génie mécanique avec applications aux problèmes de transfert de chaleur, fluides, etc.

Etape 5 : assemblage des éléments

Le modèle global constitué par éléments est représenté par un ensemble d'équations. La base de l'assemblage est effectuée sur le fait qu'à chaque noeud où les éléments sont reliés, la variation du déplacement est la même pour tous les éléments reliés à ce noeud.

Etape 6 : solution des équations

Généralement, les équations sont symétriques et bandées. Plusieurs méthodes existent pour la solution de ces équations.

Etape 7 : calculs supplémentaires

Dans le cas des structures, la solution des équations nous donne les déplacements qui servent par la suite à l'évaluation des déformations et contraintes.

Etape 8 : interprétation des résultats

Une évaluation détaillée des résultats d'ordinateur doit être effectuée, afin de juger le degré de précision et la fiabilité du modèle.

V/ Différentes formulation de la M.E.F.

Trois formulations sont développées pour traiter un problème en éléments finis :

- formulation en contraintes;
- formulation en déplacements;
- formulation mixte.

1- Formulation contrainte

Cette formulation considère le champ des contraintes comme inconnu primaire du problème, le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle complémentaire.

Elle consiste à définir un champ de contrainte, de façon à assurer l'équilibre de l'élément, puis poser les équations de compatibilité des déplacements et les résoudre pour obtenir les forces.

2- Formulation déplacement

Elle considère le champ des déplacements comme inconnu primaire du problème, et est basée sur la stationnarité de l'énergie potentielle, donc le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle totale.

Cette formulation est pratiquement la plus utilisée dans la résolution par la M.E.F. Elle consiste à définir un champ de déplacement en supposant qu'il satisfasse la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément, ce qui nous amène à poser les équations d'équilibre puis les résoudre, afin de déterminer les déplacements nodaux (uniques), les contraintes et les déformations en tout point du milieu en utilisant les relations d'élasticité.

Elle se résume dans les étapes suivantes :

- on subdivise le milieu à étudier par des lignes (cas plan), ou par des plans (pour le cas tridimensionnel) imaginaires, ce qui donne un certain nombre fini d'éléments,
- ces éléments sont supposés reliés entre eux par un nombre fini de points appelés "points nodaux" ou "noeuds", dont les déplacements seront les inconnus du problème,
- on choisit une fonction appelée "fonction de forme", qui définira au mieux possible le champ des déplacements de ces noeuds,
- on détermine le système de forces concentrées aux noeuds, équivalent à l'ensemble des charges appliquées au milieu $\{F\}$,
- on évalue la matrice de rigidité de chaque élément fini $[K_e]$, puis celle du milieu entier par assemblage des matrices élémentaires $[K]$,
- on résout le système d'équations $[K] \{u\} = \{F\}$, afin de déterminer les déplacements aux noeuds, puis les déformations et les contraintes.

3- Formulation mixte

Cette formulation considère le champ des déplacements sur la frontière de l'élément, et de contraintes internes en équilibre comme inconnus primaires du problème, d'où le nom mixte. Le critère variationnel utilisé est une variante de l'énergie complémentaire.

Dans ce qui suit, notre étude se basera sur la formulation déplacement vu que, c'est une méthode puissante qui présente en plus certaines facilités par rapport à d'autres (méthode des forces), et elle offre une aisance du point de vue programmation, on cite aussi, qu'il est plus facile d'approcher un champ de déplacements qu'un champ de contraintes.

Dans la méthode directe, on combine les trois systèmes d'équations d'élasticité : les équations d'équilibre, les équations déformation-déplacement et les équations intrinsèques du matériau, avec l'équation : forces-contraintes

$$\begin{aligned} \{F\} &= [K] \{\hat{u}\} = \text{équation d'équilibre} \\ \{\sigma\} &= [D] \{\varepsilon\} = \text{équation intrinsèque} \\ \{\varepsilon\} &= [L] \{\hat{u}\} = \text{équation déformation-déplacement} \\ \{F\} &= [A] \{\sigma\} = \text{équations forces-contraintes} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \{F\} &= [A] [D] [L] \{\hat{u}\} \\ [K] &= [A] [D] [L] \end{aligned}$$

avec :

- $\{F\}$: vecteur des forces nodales
- $\{\hat{u}\}$: vecteur des déplacements nodaux
- $[K]$: matrice de rigidité
- $\{\varepsilon\}$: vecteur déformation
- $\{\sigma\}$: vecteur contraintes
- $[D]$: matrice d'élasticité
- $[L]$: matrice opérateur différentiel
- $[A]$: matrice relation contraintes-forces

On met en évidence l'importance et l'aisance relative à la méthode variationnelle, dont notre étude se basera dessus.

La formulation déplacement étant retenue, les déplacements sont donc les inconnus de base, on approchera le champ de déplacement réel dans un élément par des fonctions d'interpolation (ou fonctions de forme), assurant la continuité des déplacements à l'interface de l'élément et aux noeuds.

Les fonctions de forme définissent maintenant l'état de déformation à l'intérieur de l'élément; en fonction des déplacements nodaux. Ces déformations jointes à d'éventuelles déformations initiales, et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, définissent l'état des contraintes en tout point de l'élément et par conséquent sur ses frontières.

Il n'est pas toujours facile, de faire en sorte que les fonctions de forme choisies satisfassent aux conditions de continuité des déplacements, qui découlent de leur présentation par un fot.

Du fait que l'on a opté pour la formulation déplacement, on doit noter la discontinuité du champ déplacement d'où incompatibilité des valeurs nodales des contraintes, car en concentrant au noeuds les forces nodales équivalentes les

conditions d'équilibre ne sont satisfaites que globalement, vu que l'on applique le théorème des travaux virtuels d'une manière globale sur toute la structure et non pas à chacun des éléments séparément.

L'approche de la formulation déplacement exposée succinctement dessus est variationnelle.

VI/ Choix de la formulation variationnelle

La méthode variationnelle ou de l'énergie consiste à minimiser l'énergie potentielle totale du système par rapport à un champ de déplacements de forme donnée. Si un tel champ est défini de manière convenable, alors la convergence vers la solution exacte est réalisable. On constate donc une certaine équivalence avec la méthode variationnelle de "Rayleigh-Ritz".

Un tel élargissement des bases sur lesquelles repose la M.E.F, permet d'étendre son domaine d'application à d'autres problèmes de milieux continus, dès qu'il soit possible de les formuler de manière variationnelle.

Pour sa part, la méthode directe présente des limites sévères quand il s'agit de traiter des structures présentant des complexités de chargement (charges réparties) et de géométrie.

On conçoit l'utilisation de la méthode des résidus pondérés, qui est une approche générale de la formulation des équations d'éléments, lorsque la méthode des éléments finis s'applique au delà de la mécanique des structures.

VII/ Principe des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels constitue un moyen de formulation des équations d'éléments finis. Il assure la vérification des conditions d'équilibre dans les limites imposées par la distribution supposée des déplacements; et constitue le fondement des principes variationnels. Ce principe présente un attrait considérable pour l'esprit pratique des ingénieurs, et permet parfois une interprétation concrète qui ne serait pas évidente dans une approche mathématique rigoureuse.

Le principe des travaux virtuels se base sur la conservation de l'énergie, c'est à dire que le travail dû aux charges externe est égal à l'énergie de déformation interne. Il apparait sous deux formes :

- déplacements virtuels : mène au principe de l'énergie potentielle stationnaire,
- forces virtuelles : mène au principe de l'énergie complémentaire stationnaire.

* Forme déplacement virtuel

Le principe de travail virtuel considère les quantités virtuelles comme de petites variations (ou différentielles) de quantités réelles, et que l'équilibre complet du milieu n'est réalisé, que si nous pouvons assurer l'égalité des travaux virtuels pour toute variation arbitraire des déplacements virtuels infinitésimale compatible, satisfaisant les conditions aux limites imposées au milieu, avec l'énergie virtuelle de déformation.

$$F_i \bar{U}_i = \int_V \sigma_k \bar{\epsilon}_k dv$$

Le phénomène établit donc, l'équilibre entre ce qui entre dans la structure, ce qui sort, et ce qu'elle conserve.

$$\underbrace{\int_V \bar{\epsilon}^T \sigma dv}_{\text{Energie interne}} = \underbrace{\int_V \bar{u}^T f^B dv + \int_S \bar{u}^{ST} f^S ds + \sum \bar{U}^{LT} F^L}_{\text{Travail des forces extérieures}} \quad (\text{II.1})$$

f^B, f^S, F^L sont respectivement : forces volumiques, forces surfaciques et forces concentrées.

\bar{u}^T : vecteur des déplacements virtuels.

$\bar{\epsilon}$: vecteur déformation correspondant au déplacement virtuel \bar{u} .

σ : vecteur des contraintes.

* Discrétisation du travail virtuel par éléments finis

La formulation en éléments finis transforme l'intégrale sur le volume exprimée par l'équation (II.1) en une somme d'intégrales sur des volumes élémentaires, afin de rendre le calcul plus efficace. L'équation (II.1) devient alors

$$\sum_e \int_{V^e} \bar{\epsilon}^T \sigma^e dv^e = \sum_e \int_{V^e} \bar{u}^T f^{B(e)} dv^e + \sum_e \int_{S^e} \bar{u}^{ST} f^{S(e)} dS^e + \sum_e \bar{u}^{LT} F^L \quad (\text{II.2})$$

e : représente le nombre d'éléments.

Si on utilise une approximation nodale de la fonction exacte $\hat{U}(x)$, on pourra écrire :
 $U(x) = N_1(x)\hat{U}_1 + N_2(x)\hat{U}_2 + \dots + N_i(x)\hat{U}_i \quad (\text{II.3})$

où $N_i(x)$: fonction d'interpolation sur l'élément,

$U(x)$: est la fonction approchée des déplacements,

donc : $U(x) = [N^e]^T \{\hat{u}\}$

Au niveau des noeuds, l'erreur d'approximation est nulle du fait que

$$\hat{U}(x_i) = U(x_i)$$

donc : $e = \hat{U}(x_i) - U(x_i) = 0$ en tous les noeuds "X_i"

Dans un cas bidimensionnel, les déformations s'écrivent en fonction des déplacements nodaux comme suit

$$\varepsilon_x = \sum \frac{\delta N_i}{\delta x} \hat{u}_i$$

$$\varepsilon_y = \sum \frac{\delta N_i}{\delta y} \hat{u}_i$$

$$\gamma_{xy} = \sum \left(\frac{\delta}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta y} \right) N_i \hat{u}_i$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$\{\varepsilon\} = [B^{(e)}] \{\hat{u}\}$$

où :

$B^{(e)}$: représente matrice de déformation-déplacement.

Si on exprime les contraintes des noeuds de chaque élément en fonction des déplacements nodaux, on aura :

$$\{\sigma\}^{(e)} = [D^{(e)}] \{\varepsilon\} = [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{\hat{u}\} \quad (II.4)$$

$[D^e]$: matrice d'élasticité élémentaire

L'équation (II.2) s'écrira :

$$\hat{u}^T \left[\sum_e \int_{V^{(e)}} [B^{eT}] [D^e] [B^e] dV^{(e)} \right] \hat{u} = \hat{u}^T \left[\sum_e \int_{V^{(e)}} N^{T(e)} f^{B(e)} dV^{(e)} + \sum_e \int_{S^{(e)}} N^{T(e)} f^{S(e)} dS^{(e)} + F^L \right] \quad (II.5)$$

Cette équation peut être simplifiée en attribuant au vecteur déplacement virtuel les composantes suivantes :

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{puis} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on obtient l'expression :

$$[K] \{\hat{u}\} = \{R\}$$

avec :

$\{\hat{u}\}$: vecteur déplacements nodaux de toute la structure.

$[K]$: matrice de rigidité globale.

$\{R\}$: résultante de toutes les charges extérieures.

$$\{R\} = \{R^B\} + \{R^S\} + \{R^L\}$$

$$K = \sum_{v^e} \int [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] d v^e$$

R^B : résultante de toutes les forces volumiques de la structure.

$$R^B = \sum_{v^{(e)}} \int N^{BT^{(e)}} f^{B^{(e)}} d v^{(e)}$$

R^S : résultante de toutes les forces surfaciques de la structure.

$$R^S = \sum_{s^{(e)}} \int N^{ST^{(e)}} f^{S^{(e)}} d s^{(e)}$$

R^L : résultante de toutes les forces concentrées appliquées à toute la structure.

$$R^L = \sum F^{(e)}$$

avec : $F^{(e)}$: vecteur force élémentaire.

VIII/ Principe de minimisation de l'énergie potentielle totale

Le principe de l'énergie potentielle minimale sert à dériver les équations d'équilibre formulées par des méthodes directes. Cette approche est choisie du fait qu'elle soit générale et fiable.

* Principe

Parmi toutes les configurations possibles pour déplacer un système tout en satisfaisant les conditions cinétiques et les conditions frontières, les champs de déplacements qui en plus satisfont les équations d'équilibre, rendent alors l'énergie potentielle totale stationnaire. Si cette valeur stationnaire est un minimum, l'équilibre est stable.

Ce principe est valable non seulement pour les systèmes linéaires, mais aussi pour les systèmes non linéaires à la condition qu'ils soient conservateurs, tout en conservant les conditions de frontières et continuité.

Remarque

- un fonctionnel est dit linéaire, si son expression est linéaire en U , $\delta u/\delta x$, ... par exemple,
- un fonctionnel est dit quadratique si son expression est quadratique en U , $\delta u/\delta x$, ... par exemple,

En un point de stationnarité, nous avons la condition de pente nulle qui rend ce point extremum.

$$\frac{d\pi(\Delta_0)}{d\Delta} = 0 \quad \text{où : } \Delta : \text{vecteur déplacement}$$

Δ_0 : extremum recherché

le signe de la dérivée seconde représentant la courbure exprime la nature de l'extremum, c'est à dire : pour une courbure positive, on a un minimum, et pour une courbure négative, on a un maximum.

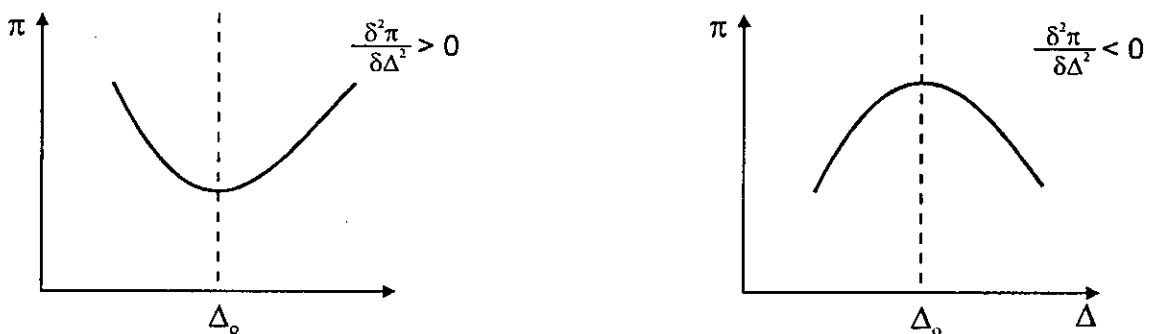


Figure II.2

La méthode des éléments finis étant basée sur l'approche variationnelle est considérée comme une minimisation de l'énergie potentielle totale.

Dans le cas de matériaux élastiques en équilibre stable, l'énergie potentielle est non seulement stationnaire, mais de plus minimale.

La méthode des éléments finis consiste donc dans la recherche d'un tel minimum sous la contrainte d'un type imposé de déplacements. Ceci fait intervenir la notion de convergence vers la solution exacte qui est celle qui assure l'équilibre avec la condition que les déplacements tendent vers les valeurs réelles, on note que, plus grand est le nombre de degrés de liberté, plus précise sera l'approximation de la solution exacte réalisant le complet équilibre du système.

La solution approchée par la M.E.F. selon la formulation déplacement conduit toujours à une valeur approchée de π supérieure à la valeur exacte. Ainsi donc nous obtenons toujours une borne supérieure de l'énergie potentielle totale (convergence par le haut).

Pour $\delta\pi=0$ à la condition que les déplacements soient admissibles pour que $\delta\pi$ soit égale à zéro, il faut que les coefficients de $\delta\Delta_1, \delta\Delta_2, \dots$ soient individuellement égaux à zéro.

Donc :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\delta\pi}{\delta \Delta_1} = 0 \\ \frac{\delta\pi}{\delta \Delta_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta\pi}{\delta \Delta_n} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ équations} \\ \\ \end{array} \quad (II.6)$$

Avec $\pi = \pi(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$: énergie potentielle totale.

D'après le principe de l'énergie potentielle minimale, les équations montrées en (II.6) sont les équations d'équilibre. La méthode d'approximation de Rayleigh-Ritz utilisée en élasticité suit précisément cette approche.

La méthode de R. Ritz est identique à la M.E.F, elle est limitée à des domaine de forme géométrique simple, tandis que la M.E.F. est applicable à des configurations complexes, réalistes, obtenues par l'assemblage d'éléments de forme simple.

En plus, dans la méthode de Ritz, les déplacements sont donnés par des expressions définies sur l'ensemble du domaine, on est conduit donc à un système où la notion de bande n'intervient pas. Dans la M.E.F, les déplacements sont représentés par morceaux, chaque paramètre nodal n'influence que sur les éléments qui lui sont adjacents et ainsi la matrice de rigidité est creuse ayant une structure bande.

La méthode des éléments finis connaît un grand succès venant de l'association entre paramètres inconnus et déplacements aux noeuds.

La méthode de Ritz conduit à des modèles approchés de structures qui sont plus rigides que ne l'est la structure réelle. Cette surestimation est compensée dans la M.E.F. par utilisation de l'intégration réduite en ignorant certains modes de déformation dans le calcul de l'énergie de déformation.

On a :

$$\pi^* < \pi_N^*$$

avec :

π^* : énergie potentielle totale correspondante à la solution exacte

π_N^* : énergie potentielle totale correspondante à la solution approchée

or,

$$\pi^* = -1/2 P\delta_{\text{exacte}}$$

$$\pi_N^* = -1/2 P\delta_{\text{approchée}}$$

d'où : $\delta_{\text{appr}} < \delta_{\text{exacte}}$

Chapitre III

*Notion de convergence de
la méthode des éléments finis*

I/ Introduction

La convergence de la méthode des éléments finis vers la solution théorique exacte s'effectue au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente. Certaines conditions simples doivent être vérifiées afin d'assurer la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Cette convergence peut se faire soit de manière monotone, soit de manière non monotone.

II/ Conditions de convergence

A) Convergence monotone

Les éléments finis de type déplacement convergent en énergie s'ils satisfont les conditions de complétude et de compatibilité.

1- Eléments complets

De tels éléments sont appelés conformes.

Les fonctions déplacement doivent être en mesure de représenter :

** Déplacement de corps rigides*

Il est impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements nodaux sont causés par un mouvement de corps solides.

** Etat de déformation constante*

Quand on prescrit aux déplacements nodaux des valeurs correspondants à un état de déformations constant, on doit trouver effectivement cet état de déformations à l'intérieur de l'élément.

2- Elément compatible

Les déplacements au sein des éléments et à travers les limites, séparant les éléments, doivent être continus. Pour les problèmes de flexion, les dérivées premières des déplacements doivent également être continues.

Physiquement, la compatibilité assure qu'il n'y aura pas apparition de vide ou de recouvrements entre les éléments, une fois l'assemblage est fait.

La compatibilité est difficile à satisfaire lorsque les d.d.l. des noeuds sont dépendants. Il est avantageux d'avoir des d.d.l. indépendants.

B) Convergence non monotone

Si pour certains éléments, les conditions de complétude et de compatibilité ne sont pas toutes satisfaites, alors de tels éléments sont appelés éléments non conformes. La convergence d'éléments non conformes consiste à garder la complétude en condition essentielle, et remplacer la compatibilité par un test de complétude collective appelé "patch test" ou "test de rapiécage".

III/ Erreur de discrétisation et taux de convergence

La solution obtenue par éléments finis de chaque problème approché pour une taille (h) des éléments est unique, et converge vers la solution exacte, lorsque (h) tend vers zéro.

Afin de définir l'ordre de convergence de la méthode des éléments finis, qui a un intérêt considérable pour la détermination de la solution exacte, celle-ci peut toujours être écrite au voisinage d'un noeud (i) sous la forme d'un développement polynomial : si ce développement est d'ordre P, alors l'erreur sur (u) sera d'ordre $O(h^{P+1})$ qui est P+1.

Dans le cas de problèmes d'élasticité plane, on a un développement linéaire, donc P=1, et le taux de convergence sera de l'ordre $O(h^2)$.

Par un raisonnement analogue, les déformations et les contraintes supposées correspondre aux dérivées des déplacements d'ordre m, l'erreur de convergence est de l'ordre P+1-m, donc de l'ordre de 1, dans le cas de l'élasticité plane. Dans le cas de nombreux problèmes, le calcul de l'ordre de convergence permet souvent d'obtenir par extrapolation une bonne valeur de la solution.

Par exemple, si les déplacements convergent à l'ordre 2 et si nous calculons deux solutions approchées U_1 et U_2 correspondant respectivement à des maillages de taille h et h/2, on pourra déduire la solution exacte U, par extrapolation de "Richardson", qui est utilisable dans le cas de convergence monotone et quasi asymptotique, représentée ainsi :

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O\left(\frac{h}{2}\right)^2} = 4$$

A travers cet exemple, on peut déduire que l'erreur commise sur les déplacements se réduit au quart pour une diminution de la taille de maillage de moitié.

IV/ Exemple de convergence monotone

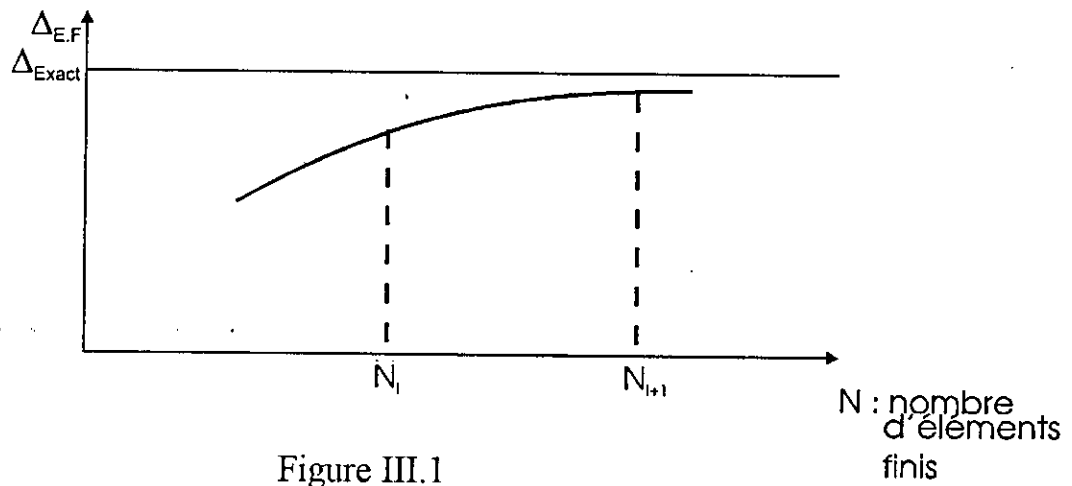


Figure III.1

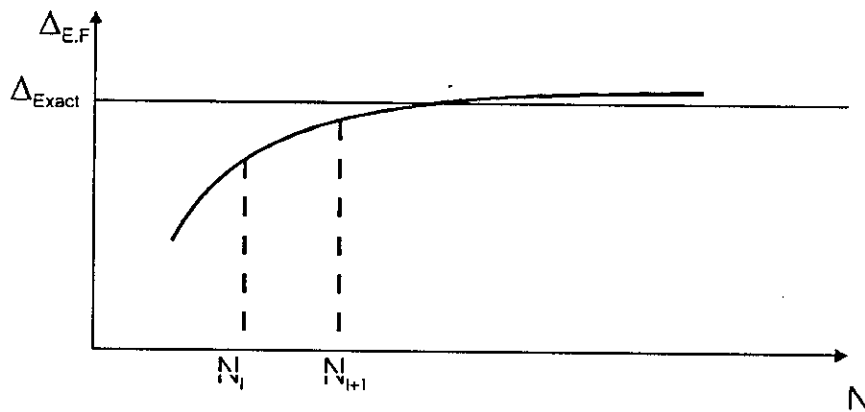


Figure III.2 : les hypothèses de la solution par la M.E.F. et celles de la solution exacte sont différents

V/ Exemple de convergence non monotone

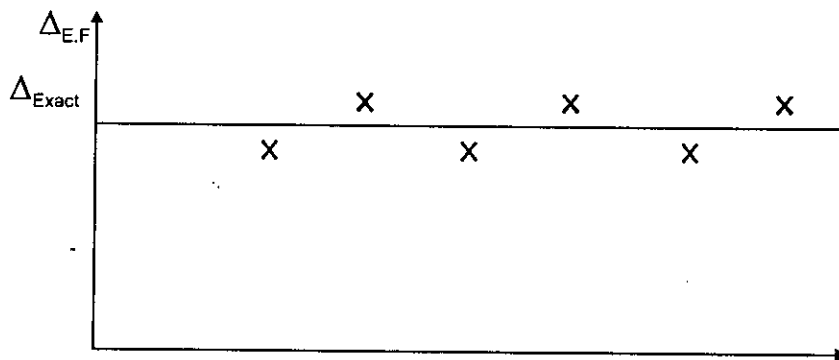


Figure III.3 : convergence en "dents de scie"

Chapitre IV

*Présentation de l'élément
isoparamétrique à huit noeuds
pour l'étude de l'élasticité plane*

I/ Introduction

La représentation par éléments isoparamétriques est très utile quand il s'agit de représenter des structures à géométrie complexe. Ces éléments sont capables de décrire les frontières courbes et les déplacements en tout point de la structure.

II/ Principe

* Consiste à définir un élément rectangulaire adimensionnel dit élément de référence, comportant le même nombre de noeuds que l'élément réel à frontières courbes.

* Deux interpolations identiques sont la base de la représentation de l'élément isoparamétrique : l'une pour sa géométrie, et l'autre pour son champ de déplacement.

Remarque

L'élément est dit subparamétrique, lorsque l'interpolation géométrique est de degré inférieur à celui de l'interpolation de déplacement ; et est dit superparamétrique, lorsqu'elle est de degré plus élevé.

Il est visible que pour les structures à géométries complexes et chargement simple, l'élément superparamétrique est plus avantageux. Le cas contraire est valable pour les éléments subparamétriques.

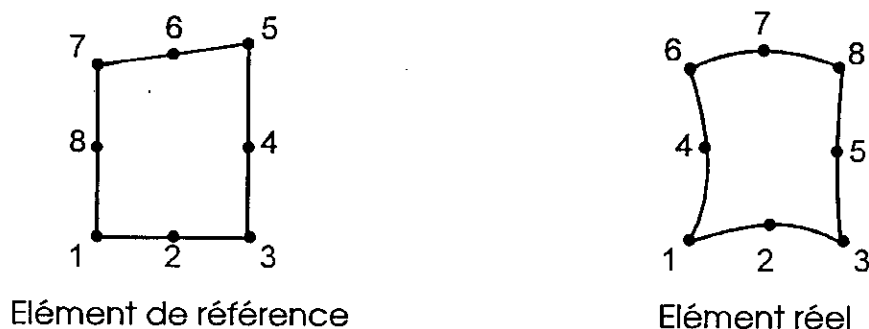


Figure IV.1

* La transformation géométrique τ : définit les coordonnées de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées (ξ, η) de l'élément de référence.

$$\tau : \varepsilon \longrightarrow \begin{aligned} X(\varepsilon) &= [N(\varepsilon)] \cdot \{x_n\} \\ Y(\varepsilon) &= [\bar{N}(\varepsilon)] \cdot \{y_n\} \\ \varepsilon &= (\xi, \eta) \end{aligned}$$

avec

$\{x_n\}, \{y_n\}$ sont les coordonnées géométriques de l'élément réel

$$\{x_n\}^T = \{x_1, x_2, \dots, x_B\}; \{y_n\}^T = \{y_1, y_2, \dots, y_B\}$$

\bar{N}_i : sont appelées fonctions de transformation géométrique

$$[\bar{N}] = [N_1, N_2, \dots, N_B]$$

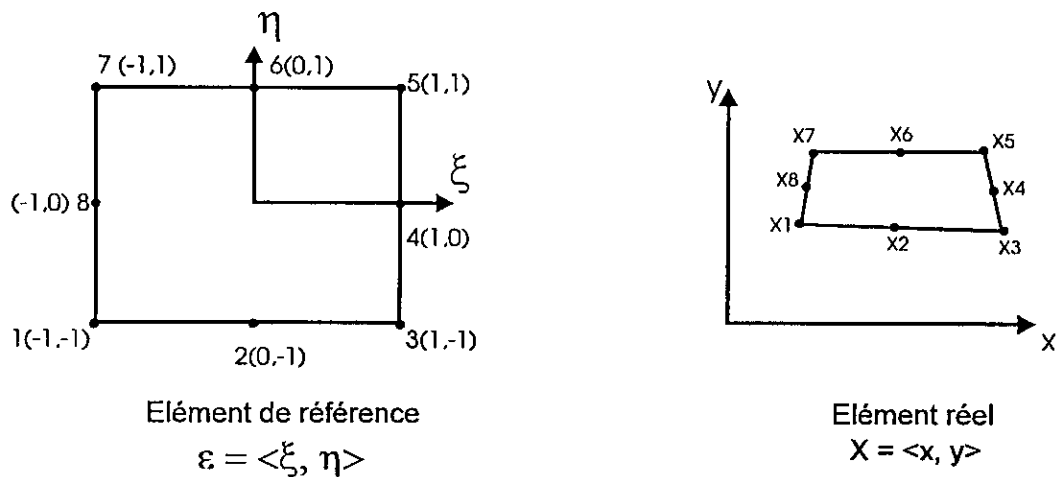


Figure IV.2

* La transformation de déplacement consiste à utiliser une approximation nodale de la fonction $U_{ex}(x)$ sur chaque élément réel

$$U(x) = \langle N(x) \rangle \{ \hat{u}_n \}$$

$$U(\varepsilon) = \langle N(\varepsilon) \rangle \{ \hat{u}_n \}$$

avec :

$\{ \hat{u}_n \}$: le vecteur valeurs de U_{ex} aux nœuds d'interpolation

$N(x)$: fonction d'interpolation sur l'élément réel, indépendante de sa géométrie

$U(x)$: la fonction approchée des déplacements

$$N_j(x_i) = 0 \text{ si } i \neq j, 1 \text{ si } i=j$$

III/ Calcul d'un élément isoparamétrique à huit nœuds (16 d.d.l)

1/ Construction des fonctions $N(\varepsilon)$ et $N(x)$

La fonction déplacement est approximée de la manière suivante :

$$u(\xi, \eta) = \langle P(\xi, \eta) \rangle \{ \alpha \} \quad (1)$$

$\{P\} = \{1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2\}$ est appelée base polynomiale
 $\alpha_i, i=1,8$ sont les paramètres de l'approximation

Exprimons en chaque noeud d'interpolation de coordonnées (ξ_i, η_i) , la fonction
 $u(\xi, \eta)$ sachant que $\hat{u}_i = u_{ox}(\xi_i, \eta_i)$

$$\{\hat{u}_n\} = [P_n] \{\alpha\}$$

$$\text{d'où } \{\alpha\} = [P_n]^{-1} \{\hat{u}_n\}$$

donc, l'équation (1) devient :

$$u(\xi, \eta) = \langle P(\xi, \eta) \rangle [P_n]^{-1} \{\hat{u}_n\}$$

$$\text{or, } u(\xi, \eta) = \langle N(\xi, \eta) \rangle \{\hat{u}_n\}$$

$$\text{alors, } \langle N(\xi, \eta) \rangle = \langle P(\xi, \eta) \rangle [P_n]^{-1}$$

$$\text{de même, } \langle \bar{N}(\xi, \eta) \rangle = \langle \bar{P}(\xi, \eta) \rangle [\bar{P}_n]^{-1}$$

Pour un élément isoparamétrique à huit noeuds, huit fonctions d'interpolation sont définies

$$\langle N \rangle = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8 \rangle$$

$$N_1 = (-1/4)(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2 = (1/2)(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_3 = (-1/4)(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$N_4 = (1/2)(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_5 = (-1/4)(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$N_6 = (-1/2)(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_7 = (-1/4)(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

$$N_8 = (1/2)(1-\xi)(1-\eta^2)$$

l'élément étant isoparamétrique, on a:

$$\langle \bar{N} \rangle \equiv \langle N \rangle$$

En résumé, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots & x_8 & y_8 \end{Bmatrix}^T$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & \dots & u_8 & v_8 \end{Bmatrix}^T$$

2- Construction de la matrice [B]

La matrice [B] est la matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} \\ \frac{\delta v}{\delta y} \\ \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_i}{\delta y} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} & \frac{\delta N_i}{\delta x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = [B]\{\hat{u}\}$$

donc
$$B = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_i}{\delta y} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} & \frac{\delta N_i}{\delta x} \end{bmatrix}$$

Puisque N_i est définie en fonction de (ξ, η) , on doit changer donc les dérivées $\delta/\delta x$ et $\delta/\delta y$ par $\delta/\delta \xi$ et $\delta/\delta \eta$. On obtient :

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \xi} & \frac{\delta y}{\delta \xi} \\ \frac{\delta x}{\delta \eta} & \frac{\delta y}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{bmatrix}$$

donc :

donc :
$$\begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta x} \\ \frac{\delta N_i}{\delta y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\delta N_i}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_i}{\delta \eta} \end{bmatrix}$$

où [J] est la matrice jacobienne de la transformation géométrique qui s'écrit sous la forme

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \xi} x_i \quad ; \quad J_{12} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \xi} y_i$$

$$J_{21} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \eta} x_i \quad ; \quad J_{22} = \sum_{i=1}^8 \frac{\delta N_i}{\delta \eta} y_i$$

matriciellement, on écrit

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta \xi} & \frac{\delta N_2}{\delta \xi} & \frac{\delta N_3}{\delta \xi} & \dots & \frac{\delta N_8}{\delta \xi} \\ \frac{\delta N_1}{\delta \eta} & \frac{\delta N_2}{\delta \eta} & \frac{\delta N_3}{\delta \eta} & \dots & \frac{\delta N_8}{\delta \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_7 & y_7 \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta) & -(1-\eta)\xi & \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta) & \frac{(1-\eta^2)}{2} & \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta) & -(1+\eta)\xi & \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta) & -\frac{(1-\eta^2)}{2} \\ \frac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4} & -\frac{(1-\xi^2)}{2} & -\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi-2\eta) & -(1+\xi)\eta & \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta) & \frac{1}{2}(1-\xi^2) & -\frac{1}{4}(1-\xi)(\xi-2\eta) & -(1-\xi)\eta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_7 & y_7 \\ x_8 & y_8 \end{bmatrix}$$

L'expression de la matrice inverse $[J]^{-1}$ étant de la forme :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

avec :

det : le déterminant de la matrice $[J]$.

Il est à remarquer que l'inverse de $[J]$ existe, cela prouve que la correspondance entre les coordonnées réelles et celles de l'élément de référence est une relation bijective.

Cependant, dans certains cas où l'on a une distorsion ou un débordement de l'élément (fig.IV-3), la relation n'est plus bijective.



Figure IV.3

La nouvelle expression de la matrice $[B]$ est :

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & 0 & N_{2,\xi} & 0 & N_{3,\xi} & 0 & \cdot & \cdot & N_{8,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & N_{2,\eta} & 0 & N_{3,\eta} & \cdot & \cdot & 0 & N_{8,\eta} \\ N_{1,\eta} & N_{1,\xi} & N_{2,\eta} & N_{2,\xi} & N_{3,\eta} & N_{3,\xi} & \cdot & \cdot & N_{8,\eta} & N_{8,\xi} \end{bmatrix} \cdot [J]^{-1}$$

avec :

$$\begin{aligned} N_{i,\xi} &= \delta N_i / \delta \xi \\ N_{i,\eta} &= \delta N_i / \delta \eta \end{aligned} \quad i=1, \dots, 8$$

3- Expression de la matrice de rigidité

En utilisant le principe des travaux virtuels, on obtient la matrice de rigidité d'un élément :

$$[K^e] = \int_v [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dv$$

pour un élément d'épaisseur constante H , on a :

$$[K^e] = H \iint [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot dx \cdot dy$$

En passant au repère normé :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det[J] \cdot W_i \cdot W_j \cdot d\xi \cdot d\eta$$

où : W_i, W_j sont les coefficients de pondération.

$[D]$: est la matrice des propriétés physiques, elle exprime les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ en fonction des déformations $\{\varepsilon(x, y)\}$. D'après la loi de Hooke, les contraintes sont liées aux déformations comme suit :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(x, y)\}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

avec :

$$d_{11} = d_{22} = E(1-\alpha\nu) / [(1+\nu)(1-\nu-\alpha\nu)]$$

$$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11} / (1-\alpha\nu)$$

$$d_{33} = E / [2(1+\nu)]$$

E : module de young

ν : coefficient de poisson

$\alpha=0$: état de contraintes planes

$\alpha=1$: état de déformations planes

Vu l'expression complète de $[K]$, il est pratiquement impossible de l'intégrer manuellement, c'est pour cela que l'on a recours à l'intégration numérique, en remplaçant les termes ξ et η qui expriment la matrice $[B]$ par les points de Gauss. L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les soumatrices de rigidité nodale de chaque élément.

4- Détermination du vecteur élémentaire des forces nodales

Comme précédemment cité, lors de l'établissement du principe des travaux virtuels dans le chapitre "présentation générale de la M.E.F", on a exprimé le vecteur élémentaire des forces nodales obtenues à partir des charges réparties appliquées à l'élément, comme suit :

$$R^{B(e)} = \int_{V^{(e)}} N^{TB(e)} f_b^{(e)} dv^{(e)}$$

matriciellement, on écrit :

$$\{R^e\} = \int_{V^{(e)}} [N]^T \{Q\} dv$$

avec

$\{Q\}$: chargement cohérent

$\{R^e\}$: vecteur élémentaire des forces nodales

Si le chargement est surfacique ou linéaire, on remplacera le terme dv par ds ou par dl .

* Propriétés de la matrice de rigidité

La matrice de rigidité est :

1- symétrique en vertu du théorème de "Maxwell-Betti"

2- singulière avant l'introduction des conditions aux limites, ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément

3- définie positive, ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle

* La phase d'assemblage consiste à construire les matrices $[K]$ et $\{R\}$ de la structure complète à partir des matrices caractéristiques de chaque élément $[K^e]$, $\{f^e\}$.

En utilisant l'approche énergétique exposée dans le paragraphe "discrétisation du travail virtuel par éléments finis", on peut définir la méthode d'assemblage.

5- Calcul des contraintes aux noeuds de l'élément réel

L'expression de la contrainte $\sigma(x, y)$ s'écrit :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\hat{u}\}$$

$$\{\sigma(x, y)\} = [H(x, y)] \cdot \{\hat{u}\}$$

avec :

$$[H] = [D] \cdot [B]$$

$[H]$ est appelée matrice des contraintes

$\{\hat{u}\}$ sont les déplacements nodaux de chaque élément.

Chapitre V

***Présentation du programme ISOFEM
correspondant à l'élément
isoparamétrique à huit noeuds***

I/ Introduction

La résolution d'un problème par la M.E.F. et d'autres méthodes numériques, nécessite la manipulation de matrices et vecteurs de tailles importantes et la résolution du système d'équations d'ordre élevé. Le retour à la programmation devient alors indispensable.

Mathématiquement, la M.E.F. revient à poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations simultanées, écrit sous forme :

$$[K] \{\hat{u}\} = \{F\}$$

II/ Présentation du programme ISOFEM

Ce programme constitue la première partie de notre travail. Il permet la modélisation d'un sol soumis à un chargement, par la M.E.F. Le sol est subdivisé en éléments isoparamétriques à huit noeuds avec deux degrés de liberté par noeud.

ISOFEM a été élaboré d'une manière structurée. Il est constitué de plusieurs sous-programmes où le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous-programme, mais par le biais de blocs communs (COMMON).

III/ Structure du programme ISOFEM

III.1/ Entrée des données

Les données de la structure à modéliser sont stockées dans un fichier d'entrée. L'introduction de ces données se fait sous un format libre, pour des raisons de commodité.

1- Information générale

- * KPROB : code d'étude
KPROB = 1 pour déformations planes
KPROB \neq 1 pour contraintes planes
- * E : module de Young
- * Nu : coefficient de Poisson
- * NTL : nombre total des éléments
- * NND : nombre total des noeuds
- * NMT : nombre de matériaux
- * NGauss : nombre de points de Gauss

- * $XYC(KN, I)$: coordonnées du noeud numéro KN selon les direction X et Y
 $I = 1$: direction X
 $I = 2$: direction Y
- * $KCON(IEL, I)$: connexion des noeuds
avec : $I = 1, \dots, 8$
 IEL : numéro d'élément
- * $KMAT$: nature du matériau

2- Conditions aux limites

- * NNF : nombre de noeuds restreints
- * $KFIX(INF, I)$: rigidité du noeud restreint numéro $NFIX(INF)$ selon les directions X et Y
 $I = 1$: direction X
 $I = 2$: direction Y
- * force ($2 * IND - 1$) : la charge appliquée au niveau du noeud numéro IND selon la direction X
- * force ($2 * IND$) : la charge appliquée au niveau du noeud numéro IND selon la direction Y

III.2- Evaluation des matrices de rigidité et leur assemblage

La matrice de rigidité $[K]$ est déterminée dans notre cas, par la méthode numérique dite "méthode d'intégration de Gauss". Elle consiste à choisir un certain nombre de points, puis réduire l'intégrale du produit $[B]^T[D][B]$ à une double somme sur les points de Gauss, de ce produit multiplié par les coefficients de pondération W_i et W_j .

Dans notre cas, nous avons utilisé quatre et neuf points de Gauss:

L'assemblage des matrices élémentaires s'effectue au fur et à mesure de leur formation, en utilisant le stockage en matrice bande symétrique.

Calcul de la largeur de bande

Le sous-programme H BAND stipule que, pour chaque élément, on cherche la différence entre le maximum et le minimum des numéros de ses noeuds, puis on calcule la maximum de ces différences pour toute la structure.

La largeur de la bande (diagonale comprise) est :

$$BW = (R + 1) NDJ$$

avec :

R : la plus grande différence entre les numéros d'un élément

NDJ : le nombre de degrés de liberté par noeuds (2)

III.3- Introduction des conditions aux limites

La structure n'étant soumise à aucune condition d'appuis, elle peut subir des déplacements de corps rigides correspondant à une énergie de déformation nulle, signifiant la singularité de la nature de rigidité.

Donc, afin d'avoir un système d'équations algébriques plausible à résoudre (système non singulier), des conditions d'appuis doivent être imposées.

Nous avons pris en compte des conditions aux limites, en utilisant la technique du terme diagonal dominant : la matrice $[K]$ étant assemblée sans tenir compte des conditions aux limites, on repère les degrés de liberté imposés (i), et on remplace le terme K_{ii} de la matrice globale par le terme $(K_{ii} + \alpha)$, où α est un nombre très grand, nous avons pris $\alpha = 10^{20}$. On remplace dans le vecteur forces nodales, le terme F_i par αu_i .

III.4- Méthode de stockage de la matrice de rigidité

Plusieurs méthodes existent (voir Annexe). Dans notre étude, nous avons utilisé le stockage en matrice bande symétrique.

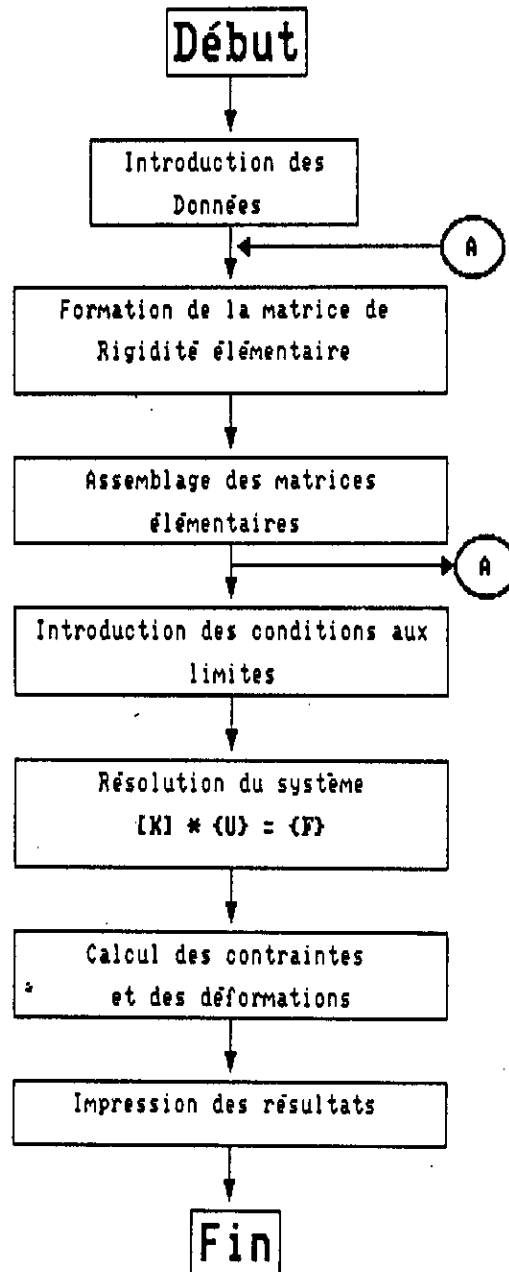
III.5- Méthodes de résolution

Plusieurs méthodes existent. Dans notre étude, nous avons utilisé la méthode de Cholesky, voir annexe.

III.6- Impression des résultats

Les résultats obtenus après calcul sont imprimés dans un fichier de sortie préalablement défini, et qui sont :

- les déplacements globaux des noeuds de la structure,
- les déformations et les déformations principales au niveau de chaque point de Gauss de tous les éléments de la structure,
- les contraintes et les contraintes principales au niveau de chaque point de Gauss de tous les éléments de la structure.



Structure du programme ISOFEM

Chapitre VI

*Etude des interfaces dans
un milieu linéaire*

I/ Introduction

L'étude des problèmes d'interfaces est un point essentiel dans l'analyse, le comportement, et le mode de ruine des structures composites ou d'assemblages collés.

L'évaluation précise des interfaces implique le respect et la simulation des conditions du contact. Qu'il s'agisse d'un problème de contact entre deux ou plusieurs couches différentes de sol, de fissures dans les masses rocheuses ou de contacts sol-structure, on ne peut se permettre de négliger le décollement et le frottement sur l'interface de contact.

II/ Bases de l'étude des interfaces

1- Définition et typologie des interfaces

Le terme "Interface" est relatif à la zone de contact entre deux structures. "La zone interfaciale" regroupe les surfaces de contact effectives et leur périphérie immédiate, les zones perturbées.

Sur le plan géométrique, l'interface est définie par une surface de contact de normale η en un point, et correspondant à la surface moyenne du volume des zones perturbées

Sur le plan mécanique, l'existence du contact se caractérise par certaines relations entre les composantes normales σ et tangentielles τ de la contrainte s'exerçant sur une facette portée par la surface moyenne. Associé à cet état de contrainte, apparaît un déplacement relatif des points m_1 et m_2 appartenant respectivement aux milieux M_1 et M_2 dans les directions t et η . M_1 et M_2 ont initialement les mêmes coordonnées.

La typologie adoptée pour établir une classification des interfaces, est basée sur l'importance des zones perturbées. Nous distinguons :

- les interfaces du premier type : pour lesquelles l'essentiel des déformations observées au cours des sollicitations est concentré au voisinage immédiat de la surface limite,
- les interfaces du deuxième type : pour lesquelles on assiste au développement de zones non élastiques importantes avec modification des propriétés mécaniques du matériau d'au moins une des structures en présence.

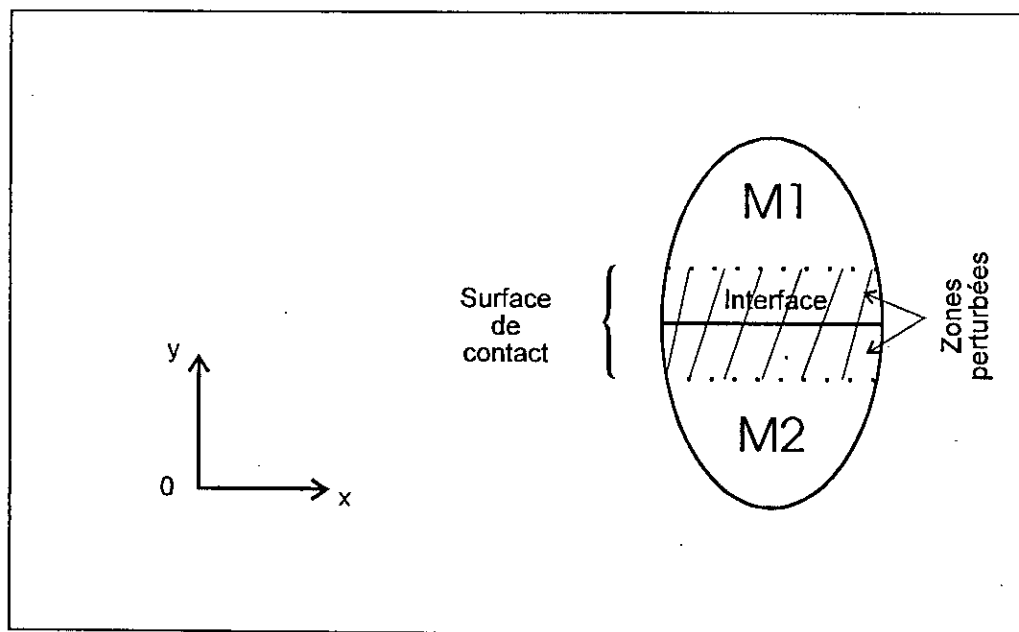


Figure VI.1 : définition de l'interface

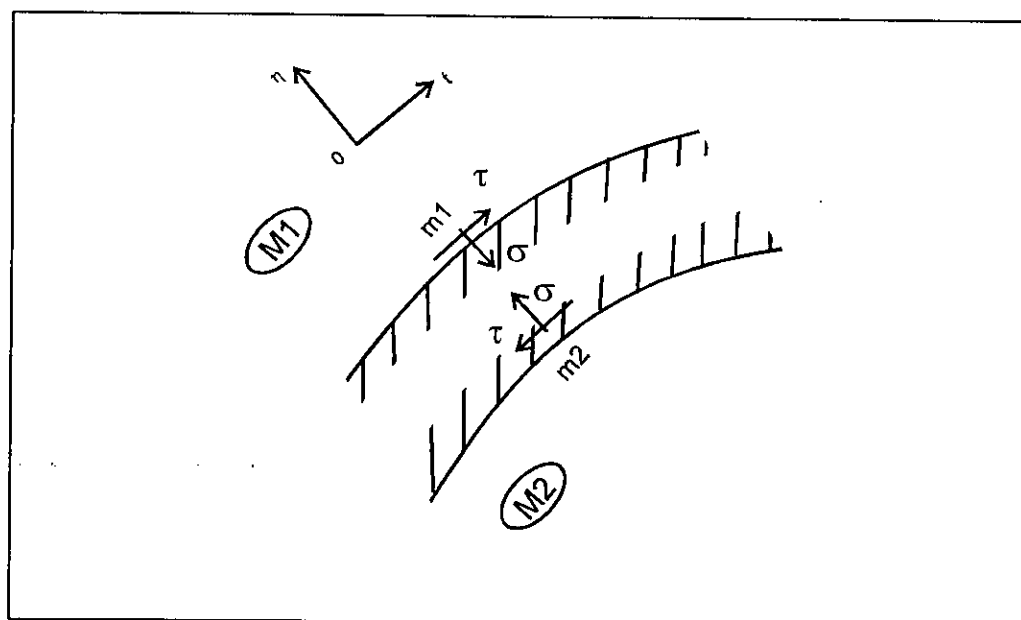


Figure VI.2 : état de contrainte à l'interface

2- Problème d'interface entre deux solides

Considérons deux matériaux M_1, M_2 de propriétés thermomécaniques différentes, soudés ou reliés par une zone de liaison.

Un tel problème de liaison entre deux matériaux différents amène beaucoup de difficultés dans le calcul des contraintes et des déplacements sur la surface de liaison de part et d'autre. Ce type de problème présente une diversité de cas nécessitant divers types d'approches pour pouvoir obtenir une solution convenable. La modélisation physique du problème, la schématisation géométrique de l'interface, et l'échelle physique par laquelle la zone interfaciale est considérée, jouent un rôle majeur dans l'étude des problèmes d'interface.

III/ Avantage de la M.E.F. d'interface

Il existe dans les applications industrielles des interfaces de formes géométriques très diverses. Quelques illustrations sont présentées dans la figure VI.3.

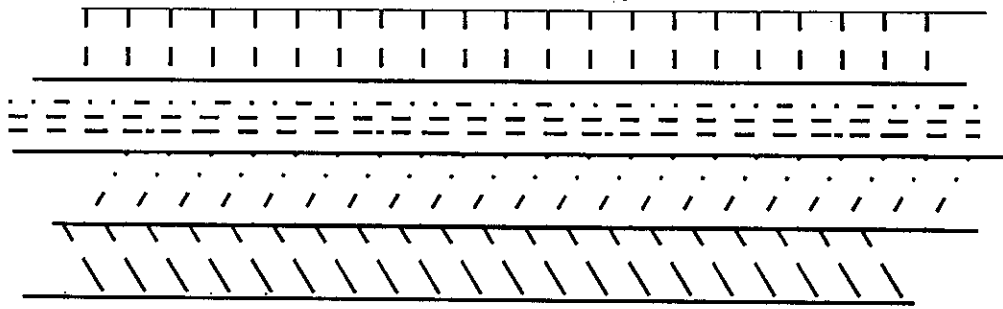
Dans son ensemble, ce groupe d'exemples peut donner une idée de la difficulté de l'étude analytique d'un problème d'interface. Nombreux sont les auteurs qui ont traité plusieurs exemples pratiques. Pour un problème donné, la détermination du système des contraintes et des déplacements consiste à définir des équations régissant la solution et prescrivant sous une forme ou une autre, la satisfaction de plusieurs conditions statiques et cinématiques, et à la continuité sur l'interface.

Une difficulté majeure à cet égard, mise à part la résolution des équations choisies réside dans leur aptitude à représenter fidèlement les conditions réelles, c'est à dire toutes les complexités pouvant intervenir dans la géométrie, le chargement, les conditions d'appuis et les propriétés intrinsèques des matériaux constituant la structure. Un tel problème serait difficilement traitable par les méthodes classiques, même après une simplification radicale des hypothèses.

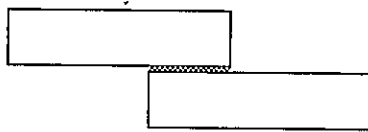
Ces divers facteurs mènent impérativement à la résolution par des méthodes numériques. Parmi celles-ci la méthode des éléments finis est la plus fructueuse, le concept de nos éléments d'interface est basé sur les conditions de continuité géométrique.

IV/ Méthodes d'analyse de problèmes d'interfaces

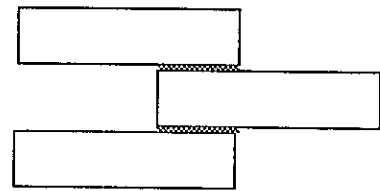
L'analyse numérique de problèmes comportant des interfaces s'est développée en Génie Civil. Les études proposées par différents auteurs sont issues de deux principales approches ci-dessous :



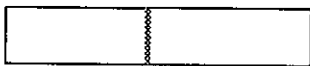
Matériau stratifié
(Les assemblages collés)



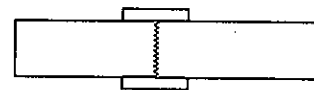
Simple recouvrement



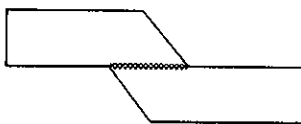
Double recouvrement



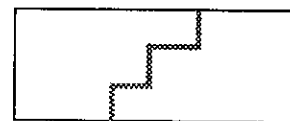
Assemblage en bout



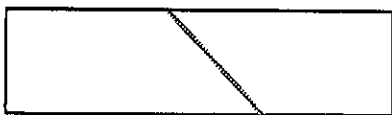
Double renforcement



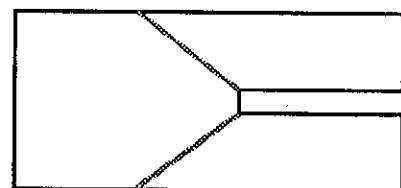
(Scarf)



Joint en escalier



Assemblage en biseau



Double biseau

Figure VI.3 : différentes formes géométriques des interfaces

- les méthodes basées sur le partitionnement de l'interface à partir d'une relation limite exprimée en terme de contrainte,
- les méthodes intégrant une "loi de comportement" de l'interface, c'est à dire assimilant cette dernière à un matériau particulier.

1- Méthodes utilisant une relation limite en contraintes

1.1- Définition

L'hypothèse de base est que l'interface ne peut se trouver que dans un nombre fini d'états : collé, décollé ou frottant.

En raison des difficultés d'interprétation des résultats d'essais, la seule donnée expérimentale demeure la relation traduisant la rupture de la liaison entre les deux milieux, qui peut être du type Coulomb :

$$\tau = \pm a + \sigma \operatorname{tg} \varphi$$

a et φ sont respectivement l'adhérence et l'angle de frottement.

σ et τ sont les composantes normales et tangentielles de la contrainte.

L'interface caractérisée par un certain nombre de points de contact, est partitionnée en fonction de l'état de la liaison en chacun de ces points.

$|\tau| < a + \sigma \operatorname{tg} \varphi$ exprime une liaison stable.

$\sigma = 0$ traduit un décollement

$|\tau| = a + \sigma \operatorname{tg} \varphi$ exprime le glissement

Ces conditions peuvent être traduites en termes de déplacement du point considéré comme appartenant au milieu 1, puis au milieu 2.

Au niveau de la modélisation, notre choix s'est orienté vers les éléments finis de contact issus de dédoublement des noeuds modélisés par ressorts.

1.2- Modélisation par ressorts des problèmes de contact

1.2.1- Position du problème

Différents états sont possibles le long d'une discontinuité entre deux domaines :

1- Etat collé : les deux domaines sont en contact, ainsi que les déplacements sont continus dans les deux directions, normale et tangentielle au plan de la discontinuité.

2- Etat de glissement : seuls les déplacements normaux sont en continuité.

3- Etat décollé : les déplacements sont discontinus dans les deux directions.

1.2.2- Loi de comportements de la discontinuité

* L'état de glissement est exprimé par le critère de frottement de Coulomb :

$$|\tau| - c + \sigma \operatorname{tg} \varphi = 0$$

où :

c : la cohésion

φ : l'angle de frottement de la discontinuité

σ et τ sont respectivement les contraintes normales et tangentielles de la discontinuité.

Si le critère de Coulomb est atteint, on n'autorise que des déplacements relatifs tangentiels, Δu , et les déplacements relatifs normaux sont nuls.

* Pour l'état de collement ou de glissement, on doit vérifier en chaque point :

$$\sigma - r_t \leq 0$$

où :

r_t est la résistance à la traction de la discontinuité.

* L'état de décollement est satisfait dès que :

$$\sigma = r_t$$

et on impose $\sigma = \tau = 0$

Si le critère de résistance à la traction est atteint. C'est à dire présence de décollement, on a déplacement Δu quelconque, alors que le déplacement relatif Δv a un signe imposé, indiquant que les domaines s'éloignent l'un par rapport à l'autre, le contact est donc dit unilatéral (Fremond, 1980).

1.3- Eléments de contact et ressorts

Lors de la modélisation par éléments finis d'une discontinuité dans un massif, R. Frank et al, en 1977, ont proposé le dédoublement des noeuds le long de la discontinuité entre deux milieux, et l'association de chaque noeud du milieu M_1 avec son double du milieu M_2 pour former un élément de contact. Donc la surface de discontinuité est représentée par l'ensemble des couples de noeuds dédoublés.

Selon l'état de contact de l'élément considéré, on impose deux, une ou aucune continuité de déplacement, c'est à dire :

- pour les éléments de contact liés, on a calculé des déplacements suivants les axes T et N,

- pour les éléments considérés en état de décollement : aucune continuité de déplacement,
- pour les éléments de glissement : seulement, la continuité des déplacements suivant l'axe N est imposé.

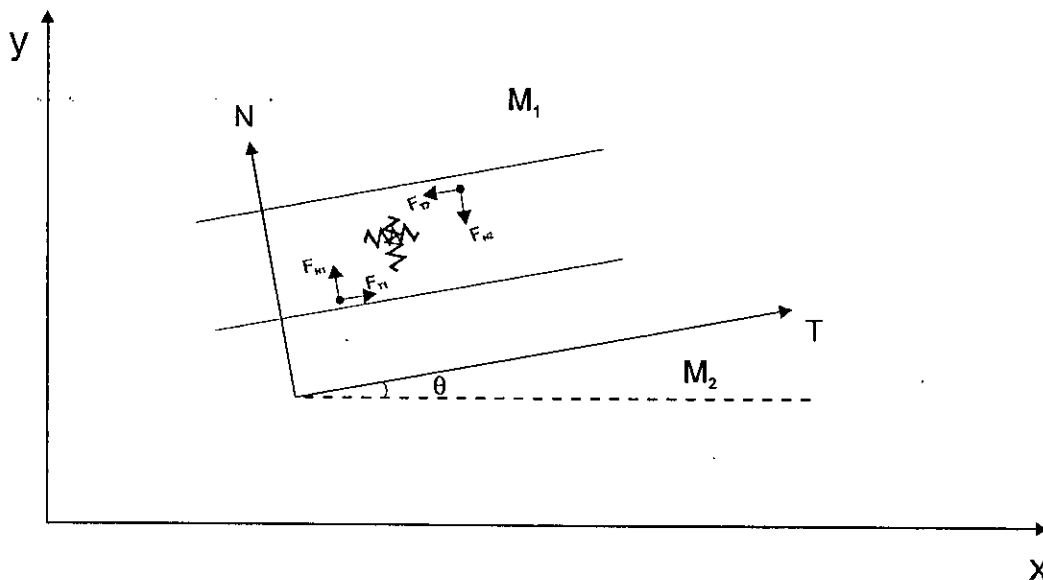


Fig VI.3 : Élément de contact et force de contact

La continuité des déplacements dans une direction souhaitée est imposée par l'introduction d'un ressort de grande rigidité K entre les deux points formant l'élément. La direction(s) suivant laquelle(es), on veut imposer la continuité des déplacements coïncide avec la direction d'action du (des) ressort(s).

Il s'agit d'une méthode de pénalisation pour imposer des déplacements égaux dans une direction. Les forces sur les ressorts sont exprimés ainsi.

$$\begin{bmatrix} -F_{T1} \\ -F_{N1} \\ -F_{T2} \\ -F_{N2} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} M & 0 & -M & 0 \\ 0 & N & 0 & -N \\ -M & 0 & M & 0 \\ 0 & -N & 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$M = 1$ ou 0 suivant que le ressort tangentiel existe ou non

$N = 1$ ou 0 suivant que le ressort normal existe ou non
 (U, V) et (F_T, F_N) étant les déplacements et les forces dans le repère local (T, N) ,
sont liés respectivement aux déplacements (u, v) et aux forces (f_t, f_n) dans le repère
global (X, Y) ainsi :

$$\begin{aligned} U &= u \cos\theta + v \sin\theta \\ V &= -u \sin\theta + v \cos\theta \\ F_T &= f_t \cos\theta + f_n \sin\theta \\ F_N &= -f_t \sin\theta + f_n \cos\theta \end{aligned}$$

Donc, la matrice de rigidité dans le repère global de l'élément de contact devient :

$$K = \begin{bmatrix} M \cos^2 \theta + N \sin^2 \theta & M \cos \theta \sin \theta - N \sin \theta \cos \theta & -M \cos^2 \theta - N \sin^2 \theta & -M \cos \theta \sin \theta + N \sin \theta \cos \theta \\ & M \sin^2 \theta + N \cos^2 \theta & -M \sin \theta \cos \theta + N \sin \theta \cos \theta & -M \sin^2 \theta - N \cos^2 \theta \\ & & M \cos^2 \theta + N \sin^2 \theta & M \cos \theta \sin \theta - N \cos \theta \sin \theta \\ & & & M \sin^2 \theta + N \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

sym

K est la rigidité de la pénalisation, on l'a pris en se référant au rapport de stage du
laboratoire LCPC (1980), égale à :

$$K = 10^5 E_{ryg} R_{max}$$

où E_{ryg} est le rapport des modules de Young des deux milieux M_1 et M_2 , il est pris
inférieur ou égal à 1 (≤ 1).

R_{max} la valeur du terme maximal de la matrice de rigidité des éléments de massif.

1.4- Critères et lois de contact

Les critères qui permettent selon les caractéristiques des éléments de contact et du
chargement de déterminer l'état final sont exprimés en fonction des forces (ou des
déplacements) et non des contraintes, du fait qu'on a utilisé la formulation
déplacement dans le modèle élément fini, et les contraintes sont dérivées à partir
des déplacements, et par conséquent, la continuité des contraintes normales et
tangentielles au contact n'est pas assez précise pour le traitement d'un tel
problème, alors que les forces de contact sont continues. On écrit :

i- Critère de résistance à la traction

$$F_N = F_{N2} \geq -r_t S$$

avec S l'aire de la surface d'influence de l'élément, elle dépend du type d'éléments
du massif utilisé

r_1 est la résistance unitaire à la traction

ii- Critère de frottement de Coulomb

$$|F_{T2}| \leq |CS + F_N \operatorname{tg} \varphi|$$

avec

φ angle de frottement

C la cohésion

iii- Le caractère unilatéral du contact impose que pour les joints décollés l'on ait :

$$V_1 - V_2 < e$$

avec : e l'ouverture initiale du contact

Ces critères en termes de forces et de déplacement sont représentés aux fig. VI.4 et VI.5.

A partir de ces critères, on aboutit au principe de la méthode qui consiste à étudier les cas suivants :

* si le critère i est violé, c'est à dire l'état de collement n'existe pas et les points sont alors décollés et l'on impose $M=N=0$

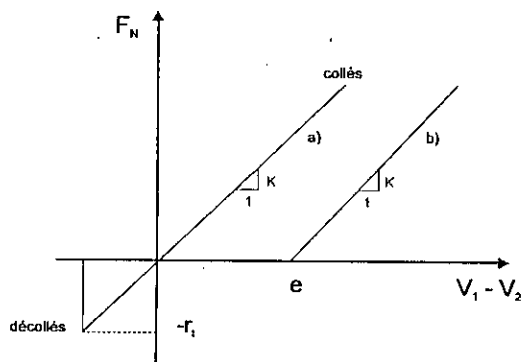


Fig. VI.4 : Comportement dans la direction normale
a) joint à ouverture initiale nulle
b) joint à ouverture initiale e
(déplacements relatifs verticaux en fonction des forces normales)

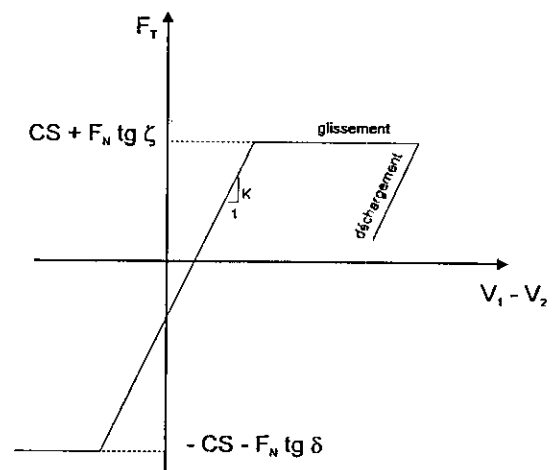


Fig. VI.5 : Comportement dans la direction tangentielle
(déplacements relatifs horizontaux en fonction des forces tangentielles)

* si le critère ii est violé, les points sont alors en glissement, et l'on met $M=0$ et $N=1$

* si le critère iii est violé, dans ce cas on établit ou rétablit les continuités et l'on met $M=N=1$

iiii- La loi de glissement (avec frottement) est applicable uniquement aux points qui glissent l'un par rapport à l'autre. Elle impose l'égalité entre la force de contact tangentielle et la force de frottement limite de Coulomb.

$$F_T = F_{T2} = SC + F_N \operatorname{tg} \varphi$$

Le frottement tend à ramener les points l'un vers l'autre, il empêche les points de glisser parfaitement. Ici, la loi de glissement ne provoque pas un changement de rigidité comme déjà vu aux critères énoncés précédemment. Son application n'apporte que des corrections de forces dans un état donné de glissement. On note de plus, si les déplacements relatifs changent de direction par rapport à F_{T2} , il y aura arrêt de glissement (cas de déchargement) et l'on rétablit $M=1$.

1.5- Formulation de la méthode

Selon l'état initial des éléments de contact : liés (type 1), en glissement (type 2), décollé (type 3), on met respectivement deux, un ou on ne met aucun des ressorts. Dans notre cas, on suppose initialement un état collé au massif considéré, c'est à dire, on prend deux ressorts ($M=N=1$). On détermine la rigidité initiale du système $\{R^0\}$, puis le champ des déplacements

A partir du chargement considéré et des déplacements calculés, on peut maintenant tester les éléments de contact pour voir si l'état initial est toujours vérifié et sinon quel est l'état actuel. On teste donc si :

- pour les points liés (type 1) les critères i et ii sont vérifiés,
- pour les points en glissement (type 2) le critère i est vérifié,
- pour les points décollés (type 3) le critère iii est vérifié.

On note les possibilités suivantes :

- les points liés (type 1) violent le critère i, et en conséquence se décollent (type 3). Dans ce cas, on enlève les deux ressorts. S'ils violent le critère ii seulement, les points glissent et en conséquence, on enlève le ressort tangential,
- les points glissants (type 2) violent le critère i se décollent donc, on enlève le ressort normal qui existait. Par contre, si les points commencent à glisser dans un sens inverse (voir iii), on note arrêt de glissement et on ajoute un ressort tangential,
- les points décollés (type 3) violent le critère iii et se recollent. Dans ce cas, on ajoute les deux ressorts.

Pour toutes ces possibilités énoncées, l'enlèvement ou l'addition d'un ou de deux ressorts conduit à un changement de rigidité. En conséquence, la rigidité du système change.

2- Méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface

2.1- Introduction

Si l'interface est assimilée à un "matériau fictif", nous définissons sa "loi de comportement" comme la relation entre les contraintes et les déplacements relatifs associés en un point de cette interface, dont on introduit de nouveaux éléments ayant des formes et des propriétés différentes à celles de l'élément fini. Ces éléments sont dits "éléments d'interface".

Nombreux sont les chercheurs qui, ces dernières années, ont mis au point des algorithmes de résolution, qui permettraient la solution du problème d'interface par les éléments d'interfaces. Citons les travaux de Goodman, R.L.Taylor et T.L.Brekke (1968), qui ont proposé, pour simuler le contact, un élément de massif spécial d'une longueur L et d'une épaisseur nulle ; Ghaboussi (1973) ; Zienkiewicz (1970).

2.2- Eléments d'interface

Une interface à épaisseur mesurable finie, peut être calculée par la M.E.F, la difficulté réside dans l'interface sans épaisseur.

Soit un massif composé de deux milieux l'un sur l'autre (Fig. VI.6.a), et soit A un point de l'interface, appartenant aux deux milieux. Si on applique une force au niveau du milieu supérieur, l'état déformé est observé sur la figure VI.6.b. Le point A possède deux valeurs du déplacement horizontal, l'une pour le milieu supérieur et l'autre pour le milieu inférieur. Or, la M.E.F. donne un déplacement horizontal unique du point A, donc cette méthode ne résout pas le problème. Cependant, on introduit un élément d'interface avec une petite épaisseur " t " ($t/2$ de part et d'autre des deux milieux, et les deux milieux auront un déplacement relatif.

Les éléments d'interfaces modélisent donc la fonction par des éléments possédant une épaisseur fictive, en utilisant des fonctions de forme assurant la continuité des déplacements au niveau de cette région.

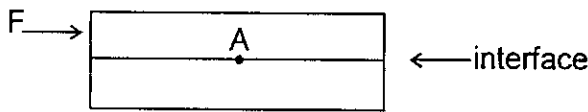


Figure VI.6.a : massif de deux milieux différents avant glissement

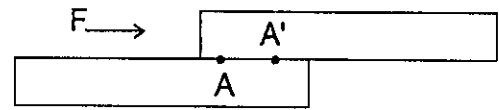


Figure VI.6.b : champ de déplacement relatif

2.3- Formulation des éléments d'interface

Différents types d'éléments finis ont été proposés pour la modélisation des joints et interfaces. Ils peuvent être classifiés dans les catégories suivantes :

- éléments finis standards pour de faibles épaisseurs,
- éléments quasi-continus possédant une faiblesse plane dans la direction de l'interface ou le plan de joint,
- liaison d'éléments (linkage éléments) dans laquelle seules les connections entre les noeuds opposés sont considérées,
- éléments joints en interfaces dans lesquels les déplacements relatifs entre les noeuds opposés sont les variables de déformations primaires. Ils peuvent avoir une épaisseur finie ou nulle.

2.4- Différents types d'éléments interfaces

1- *Elément de contact de Goodman*

R.E.Goodman et al (1968) ont proposé un élément de massif d'épaisseur nulle (fig. VI.7). Cet élément muni d'une rigidité normale (K_n) et d'une rigidité de cisaillements (K_t) a été montré comme généralement efficace pour la simulation des fissures des roches. Il a été complété, en outre, par R.E.Goodman et J.Dubois en 1972 par une loi de dilatance pour mieux représenter certains types de fractures fermées de roches.

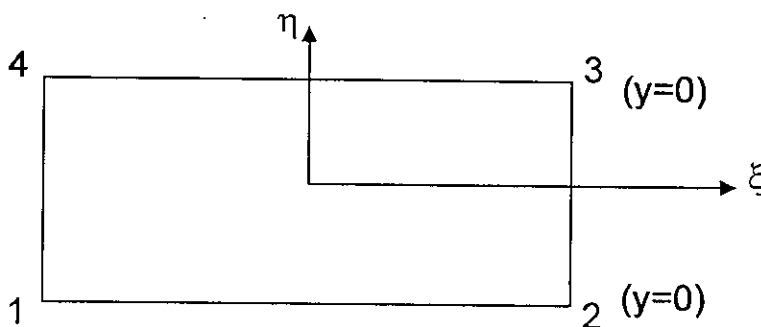


Figure VI.7 : élément de contact de Goodman et al (1968)

Notons enfin que R.E.Goodman et C.ST.John (1977) ont présenté une dernière version du modèle qui comprend, en plus, la notion de rigidité rotationnelle

qu'on peut évaluer en considérant le moment de rotation quand les noeuds 1 et 2 de la figure VI.7 sont fixés et que l'on applique une force sur le noeud 3 ou 4.

L'élément de Goodman est donc un élément à quatre noeuds, il est introduit pour étudier la jonction d'un problème à deux dimensions. O.Hungr et D.F.Coates (1978) qui, en se servant du modèle de R.E.Goodman et al (1968 - 1977), ont étudié la déformabilité des joints et leur relation avec les tassements des fondations sur du rocher fracturé.

2- Elément d'interface de Zenkiewics (1970)

O.C.Zenkiewics, B.Best, C.Dullage et K.G.Stagg (1970) ont proposé, pour les milieux stratifiés, l'utilisation d'éléments semblables à ceux de Goodman et al, qu'ils étendent au cas des massifs discrétisés en éléments courbes isoparamétriques.

L'élément d'interface de Zienkiewicz est un élément quadratique à six noeuds, qu'on introduit dans un problème à deux dimensions dont l'épaisseur est très petite non nulle.

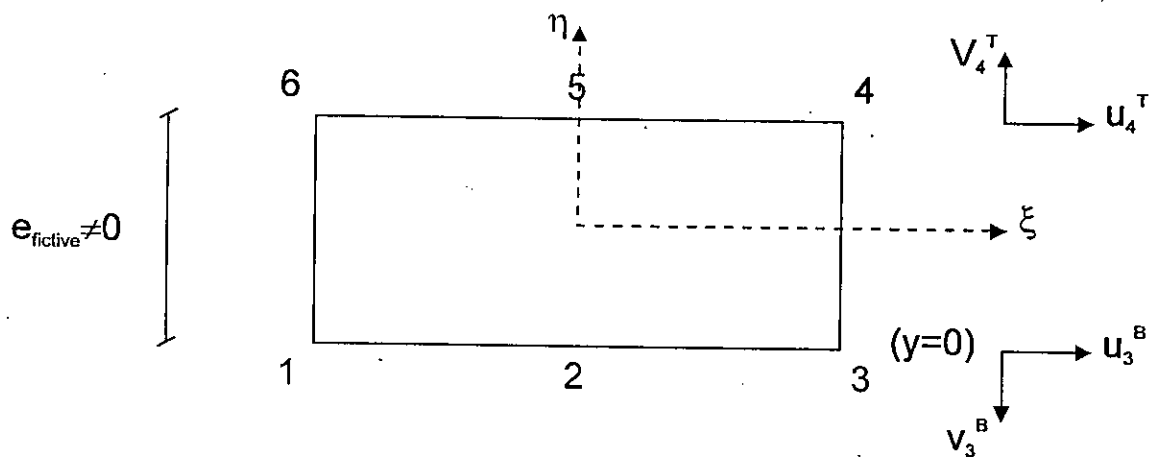


Figure VI.8 : élément d'interface de Zienkiewicz (1970)

3- Elément d'interface de J.Ghaboussi, E.L.Wilson et J.Isenberg (1973)

Cet élément d'interface est différent des deux autres éléments. Il permet de connecter deux éléments continus, ayant une épaisseur finie "t", en utilisant un élément de massif pour lequel les déplacements relatifs servant comme degrés de liberté pour la formulation de sa matrice de rigidité. Ainsi ces chercheurs ont donné la formulation explicite de la matrice de rigidité de l'élément de continuité pour les problèmes plan et à symétrie axiale. Leur élément permet la dilatance.

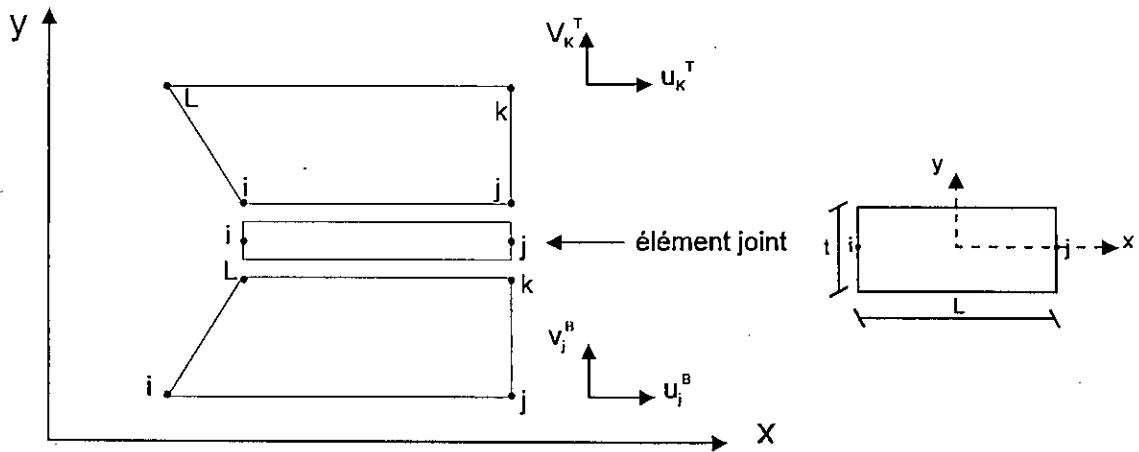


Figure VI.9 : élément joint de Ghaboussi

G.N.Pande et K.G.Sharma (1979), s'inspirant des travaux de Zenkiewics et al (1970) ont développé et programmé un élément isoparamétrique parabolique de contact à huit noeuds.

J.M.Dupeyrat (1976), puis R.Frank, P.Guellec et P.Humbert (1977), ont mis au point un algorithme qui procède par itération de rigidité et de forces sur des éléments de contact à deux noeuds pour régler le problème. Ils raisonnent et agissent directement sur les forces de contact (qui sont continues dans un modèle d'éléments finis de type "déplacements") et non sur les contraintes (qui ne sont pas continues et qui peuvent manquer de précision pour certains problèmes délicats d'interfaces).

Puisque le problème qu'on étudie est à deux dimensions et que l'élément fini choisi est quadratique à huit noeuds, donc l'élément d'interface à une dimension avec six noeuds de Zienkiewicz lui est parfaitement compatible.

2.5- traitement numérique par éléments finis :

Il s'agit d'un élément isoparamétrique à six noeuds sans épaisseur.

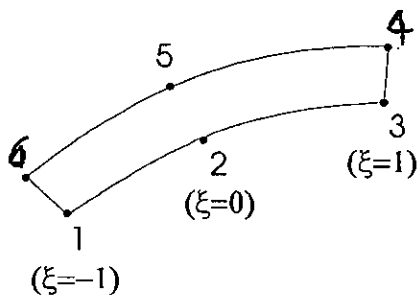


Figure VI.10 : élément fini d'interface

Le déplacement sur chacune des lèvres s'exprime à l'aide des trois fonctions de forme N_i définies sur la variation $[-1, 1]$ de la coordonnée intrinsèque ξ .

$$\begin{aligned} N_1 &= (\xi/2)(\xi-1) & , & & N_6 &= N_1 \\ N_2 &= 1-\xi^2 & , & & N_5 &= N_2 \\ N_3 &= (\xi/2)(\xi+1) & , & & N_4 &= N_3 \end{aligned}$$

Le déplacement relatif s'exprime en fonction des déplacements absolus en axes généraux par la matrice $N = [N_1, N_2, N_3]$, à titre d'exemple, pour la composante U.

$$U = U_i^{\text{"haut"}} - U_i^{\text{"bas"}} = [N]^T \begin{bmatrix} U_{i4} \\ U_{i5} \\ U_{i6} \end{bmatrix} - [N]^T \begin{bmatrix} U_{i1} \\ U_{i2} \\ U_{i3} \end{bmatrix}$$

on pose : $U_i^{\text{"haut"}} = U_T$
 $U_i^{\text{"bas"}} = U_B$

Le vecteur déplacement relatif $\{S\}$ est lié au vecteur des déplacements nodaux $\{U_n\}$ par :

$$\{S\} = [B_n] \{U_n\}$$

avec :

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}$$

$$[B_n] = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_3 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice permet le calcul de la matrice de rigidité de l'élément $[K_{e,n}]$

$$[K_{e,n}] = \int_{-1}^1 [B_n]^T [D] [B_n] J(\xi) d\xi$$

où la loi de comportement définissant l'interface peut s'exprimer matriciellement comme suit :

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt} \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{tt} & D_{tn} \\ D_{nt} & D_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dU \\ dV \end{Bmatrix}$$

soit : $\{d\sigma\} = [D] \{ds\}$

du et dv composantes du vecteur $\{ds\}$ déplacement relatif.

Les termes D_{tn} et D_{nt} de la matrice de comportement $[D]$ traduisent un couplage éventuel entre le cisaillement et la traction/compression du plan de l'interface.

2.6- Concept de l'élément d'interface de Zienkiewics

L'élément d'interface de Zienkiewics à six noeuds, proposé en 1970, est indiqué sur la figure VI.11.

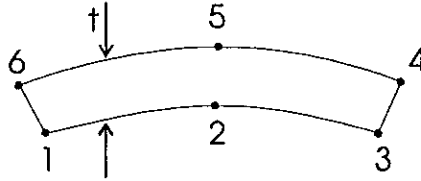


Figure VI.11 : élément d'interface de Zienkiewics

Le matériau de l'interface étant linéaire et élastique, il est possible d'obtenir des valeurs équivalentes aux rigidités tangentielles et normales.

$$D_{nn} = E/t$$

$$D_{tt} = E/(2(1+\nu)t)$$

$$D_{tn} = D_{nt} = 0$$

E module d'élasticité

ν coefficient de poisson

t épaisseur de l'élément d'interface choisie.

$$\text{avec } 2 \leq D_{nn} / D_{tt} \leq 3 \longrightarrow 0 \leq \nu \leq 0,5$$

Les fonctions de formes sont les mêmes que celles données dans le paragraphe "traitement numérique par éléments finis".

Les déplacements nodaux correspondants sont :

$$U_T = \sum N_i^T U_{ii}^T = N_6 U_{t6} + N_5 U_{t5} + N_4 U_{t4}$$

$$U_B = \sum N_i^B U_{ii}^B = N_1 U_{t1} + N_2 U_{t2} + N_3 U_{t3}$$

avec

U_T déplacement horizontal correspondant à la partie supérieure, et donc les noeuds 6, 5 et 4 de la figure VI.12.

U_B déplacement horizontal correspondant à la partie inférieure, et donc les noeuds 1, 2 et 3.

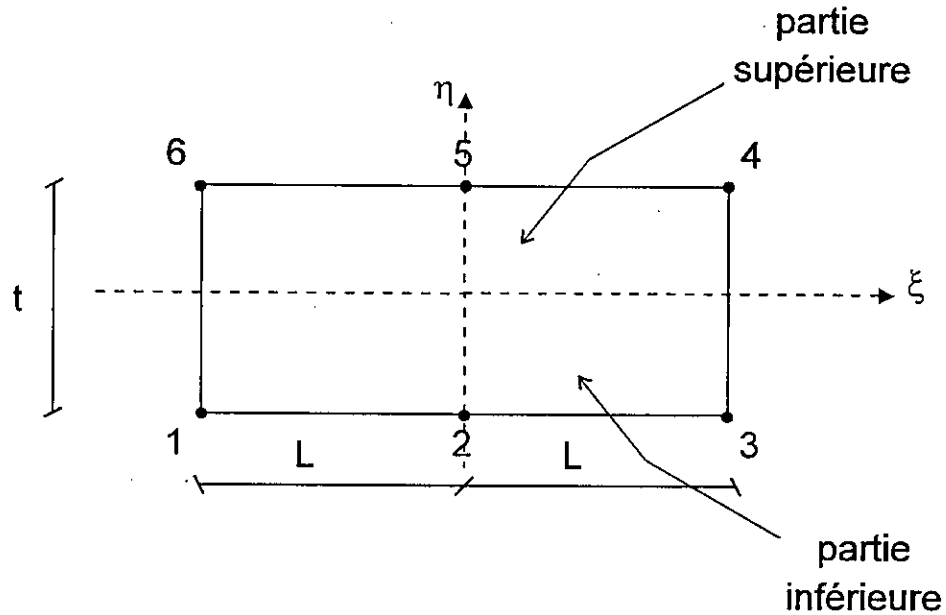


Figure .VI.12

U_{ti}^T : coordonnées nodales de la partie supérieure

U_{ti}^B : coordonnées nodales de la partie inférieure

De même pour les déplacements verticaux

$$V_T = \sum N_i^T V_{ti}^T = N_6 V_{t6} + N_5 V_{t5} + N_4 V_{t4}$$

$$V_B = \sum N_i^B V_{ti}^B = N_1 V_{t1} + N_2 U_{t2} + N_3 V_{t3}$$

Le vecteur déplacement relatif sera donc :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_T - U_B \\ V_T - V_B \end{Bmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [B_n] \begin{Bmatrix} U_{ti} \\ V_{ti} \end{Bmatrix}$$

La matrice [B] est identique à celle donnée dans le paragraphe "2.5".

U, V sont respectivement les déplacements relatifs dans les directions tangentielle et normales.

L'énergie de déformation est telle que :

Soit F le vecteur force par unité de longueur de l'élément interface

$$F = \begin{Bmatrix} F_t \\ F_n \end{Bmatrix}$$

et W l'énergie de déformation dans tout l'élément, telle que :

$$W = L \int_{-1}^{+1} \{S\}^T \{F\} d\xi$$

où $2L$ représente la longueur de l'élément

et $x = \xi.L$ d'où $dx = L d\xi$

Le vecteur $\{F\}$ est relié au vecteur déplacement relatif $\{S\}$ comme suit :

$$F = \begin{Bmatrix} F_t \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix}$$

où :

K_t , K_n représentent respectivement les rigidités tangentielles et normales de l'interface :

$$S = \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [B_n] \begin{Bmatrix} U_n \\ V_n \end{Bmatrix}$$

L'énergie de déformation sera donc :

$$W = L \int_{-1}^{+1} \{U_{tn}\}^T [B_n]^T \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} [B_n] \{U_n\} d\xi$$

avec

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} U_{ti} \\ V_{ti} \end{Bmatrix}$$

L'équilibre exige une énergie de déformation minimale, donc $\delta W / \delta U_{tn} = 0$ par substitution des limites d'intégration, on aura :

$$[K_e] \{U_{t,n}\} = \{F\}$$

La matrice de rigidité élémentaire :

$$K^e = L \int_{-1}^{+1} [B_n]^T \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix} [B_n] d\xi$$

Remarque

Dans le cas où l'élément d'interface se présente dans une position faisant un angle θ (cf. fig. VI.13), par rapport à l'axe x , on fait intervenir la matrice de transformation $[T]$ avant l'assemblage, d'où :

$$K^e = [T]^T [K^e] [T]$$

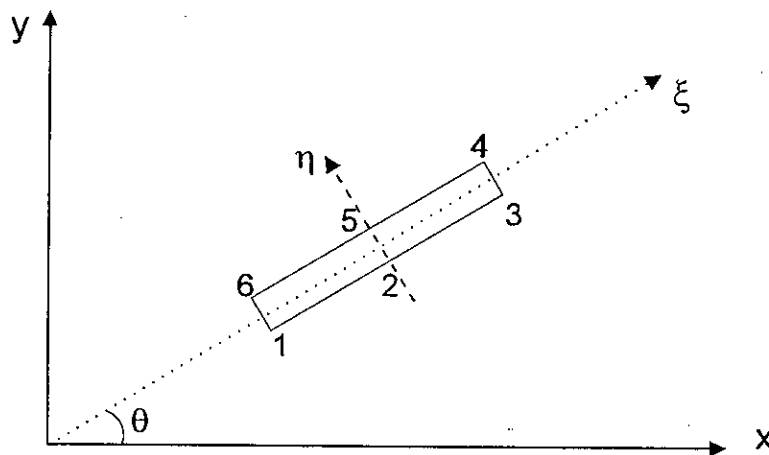


Figure VI.13

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

L'intégration numérique pour l'élément d'interface se fait suivant la direction de ξ seulement, car l'élément est une dimension avec une épaisseur fictive.

$$I = \int_{-1}^{+1} L \cdot f(\xi) d\xi = L \cdot \sum_{i=1}^m W_i \cdot f(\xi_i)$$

avec :

m le nombre de points de Gauss. Dans notre étude, on a pris deux points de Gauss

W_i poids des points de Gauss

ξ_i coordonnées des points de Gauss dans le repère local

Remarques

L'évaluation des forces de volumes pour l'élément interface n'est pas utile puisqu'elles sont négligeables (épaisseur fictive).

On ne parle pas de contraintes et de déformations dans une interface, mais de l'influence de cette dernière sur toute la structure à analyser.

Chapitre VII

*Présentation des programmes
INTERFI et INTERFII*

I- Introduction

Nous avons construit un programme de calcul par éléments finis qui répond aux démarches spécifiques liées à la résolution d'un problème d'interface (contact).

Les techniques classiques permettant la localisation des paramètres, le calcul des fonctions de forme, le calcul des matrices de rigidité élémentaires, l'expression de la matrice rigidité globale et vecteur sollicitations global, le stockage de la matrice liée au système d'équations linéaires obtenues, et la résolution de ce système d'équations linéaires ont fait l'objet de plusieurs adaptations, dont l'utilisation d'éléments d'interface à six noeuds.

II- Structure du programme INTERFI

Le programme INTERFI fait l'étude d'interface par les méthodes basées sur le partitionnement de l'interface à partir d'une relation limite exprimée en termes de contrainte en utilisant la modélisation par ressorts.

L'organigramme (VII-1) fait la présentation globale des différentes démarches suivies dans le programme alors que l'organigramme (VII-2) comprend les tests permettant de :

- déceler l'élément d'interface,
- vérifier les différents critères et lois de contact exposées dans le chapitre VI.

III- Structure du programme INTERFII

L'organigramme (VII-3) représente d'une manière générale la structure du programme INTERFII qui fait l'étude d'interface par les méthodes intégrant une loi de comportement d'interface.

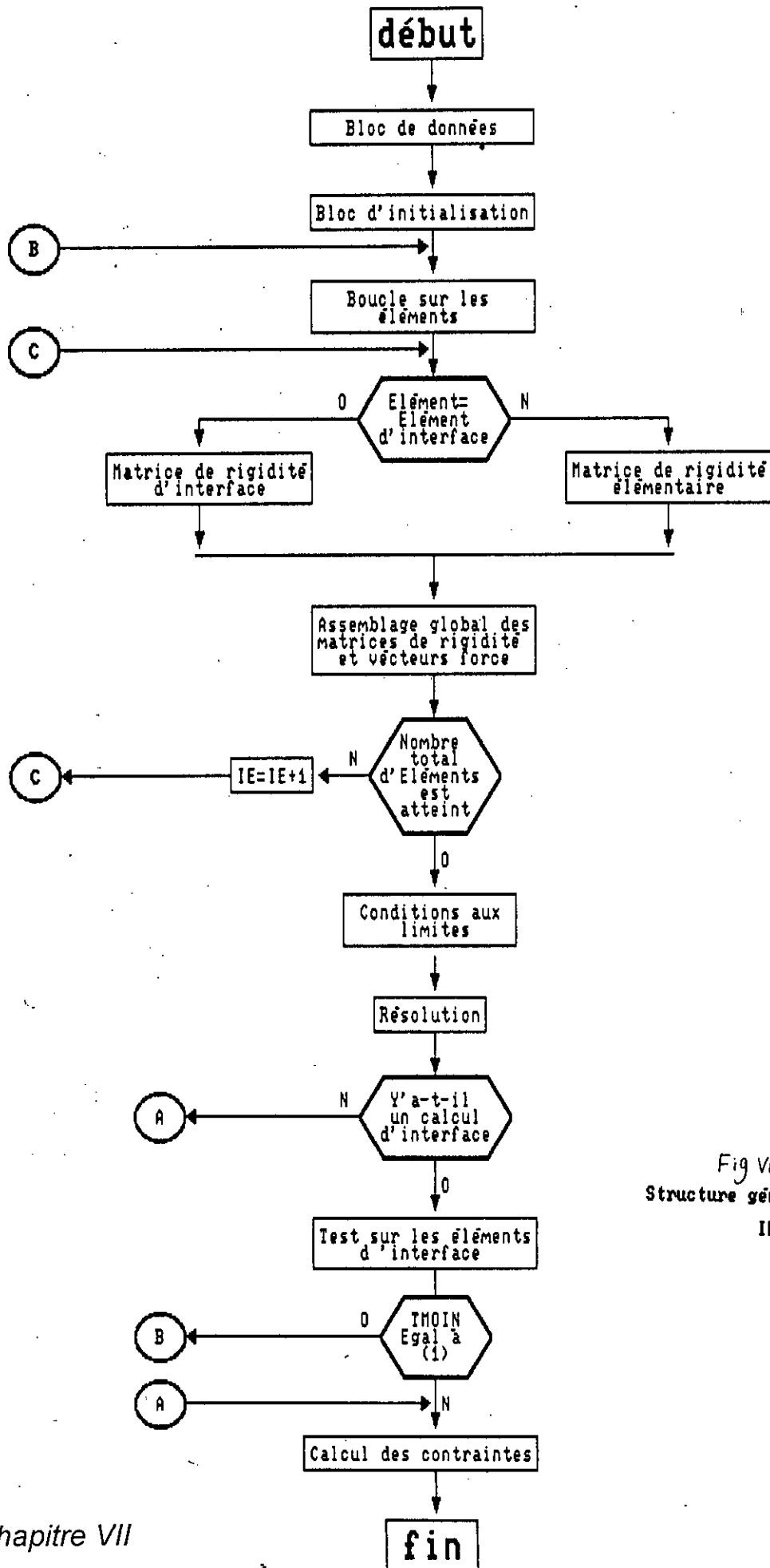


Fig VII. 1
Structure générale du programme
INTERFI

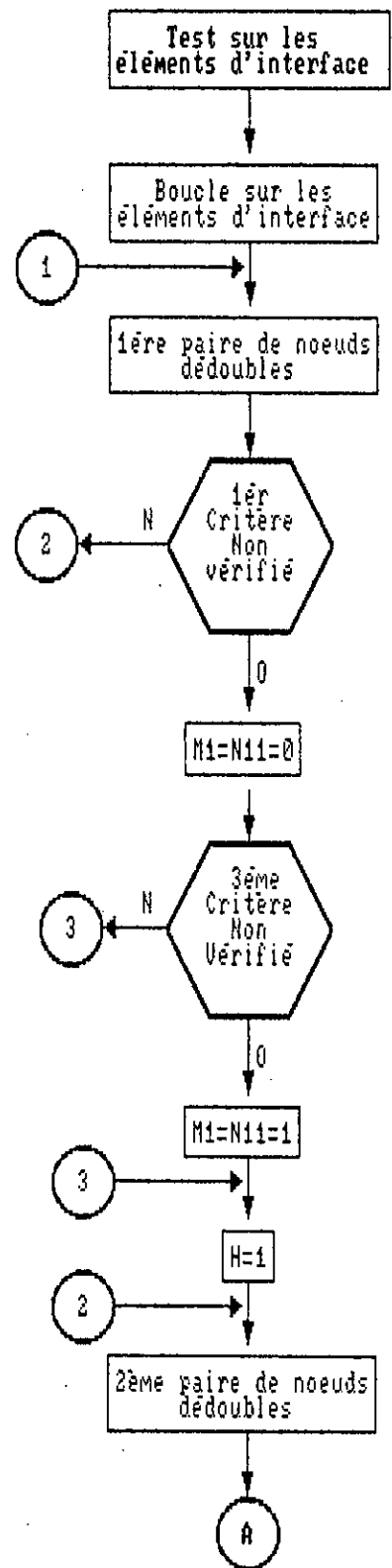
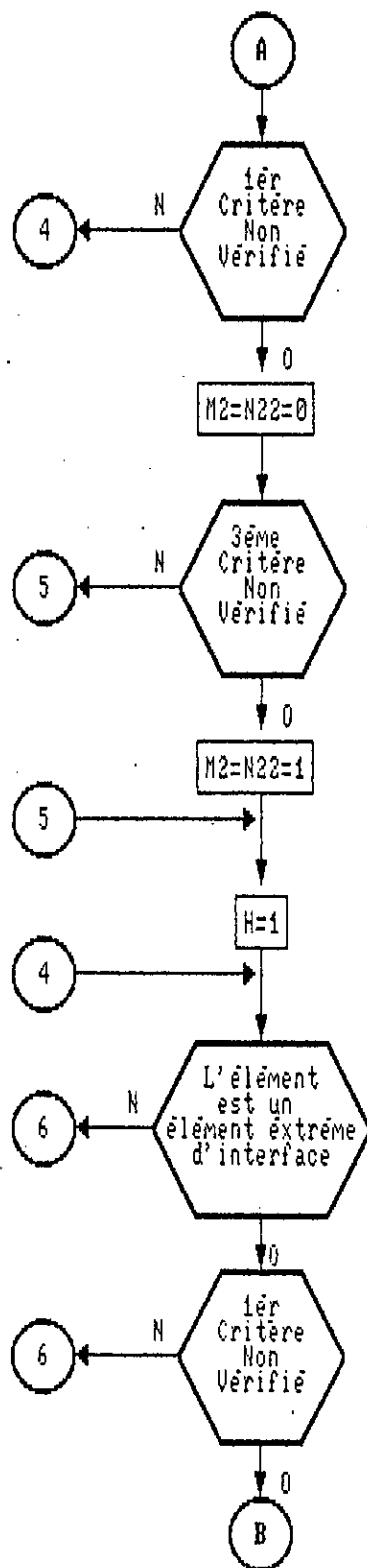
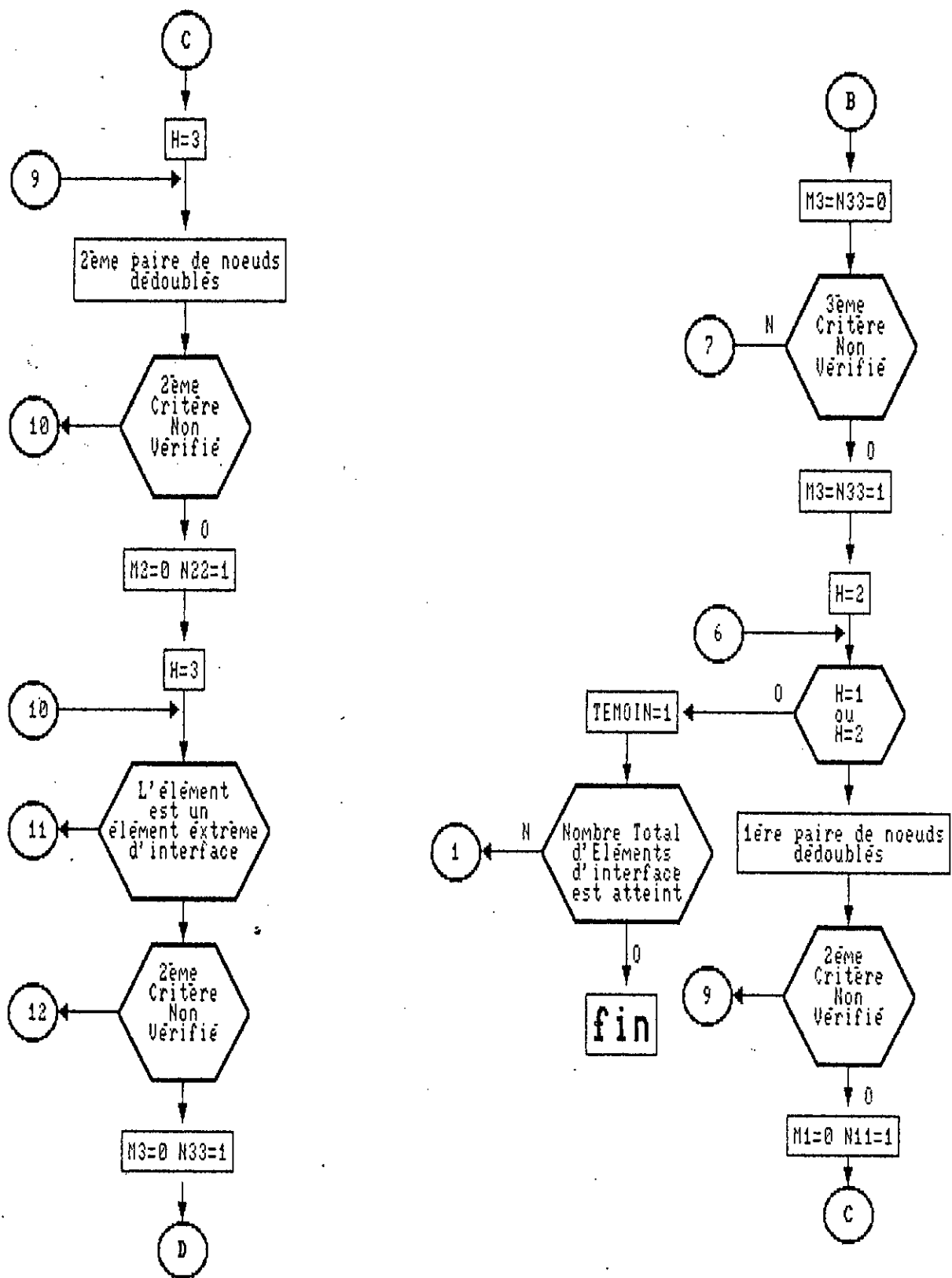


Fig VII-2
 Diagramme décrivant le
 Test sur les Eléments
 d'Interface



FigVII.2 Diagramme décrivant le Test sur les Eléments d'Interface

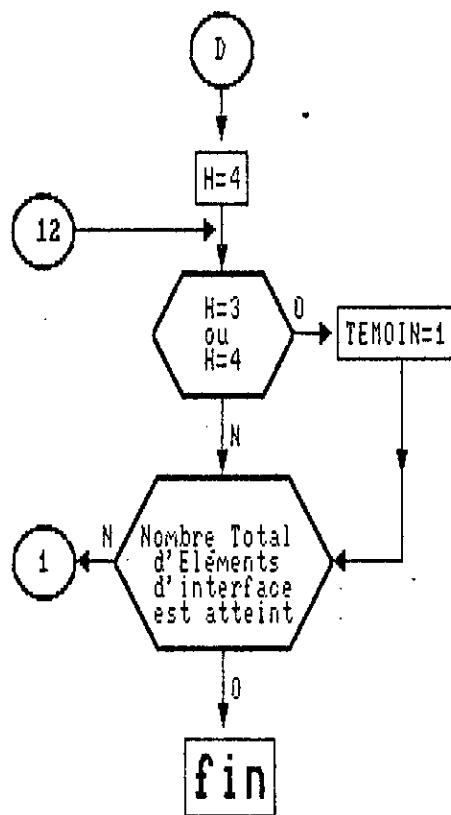
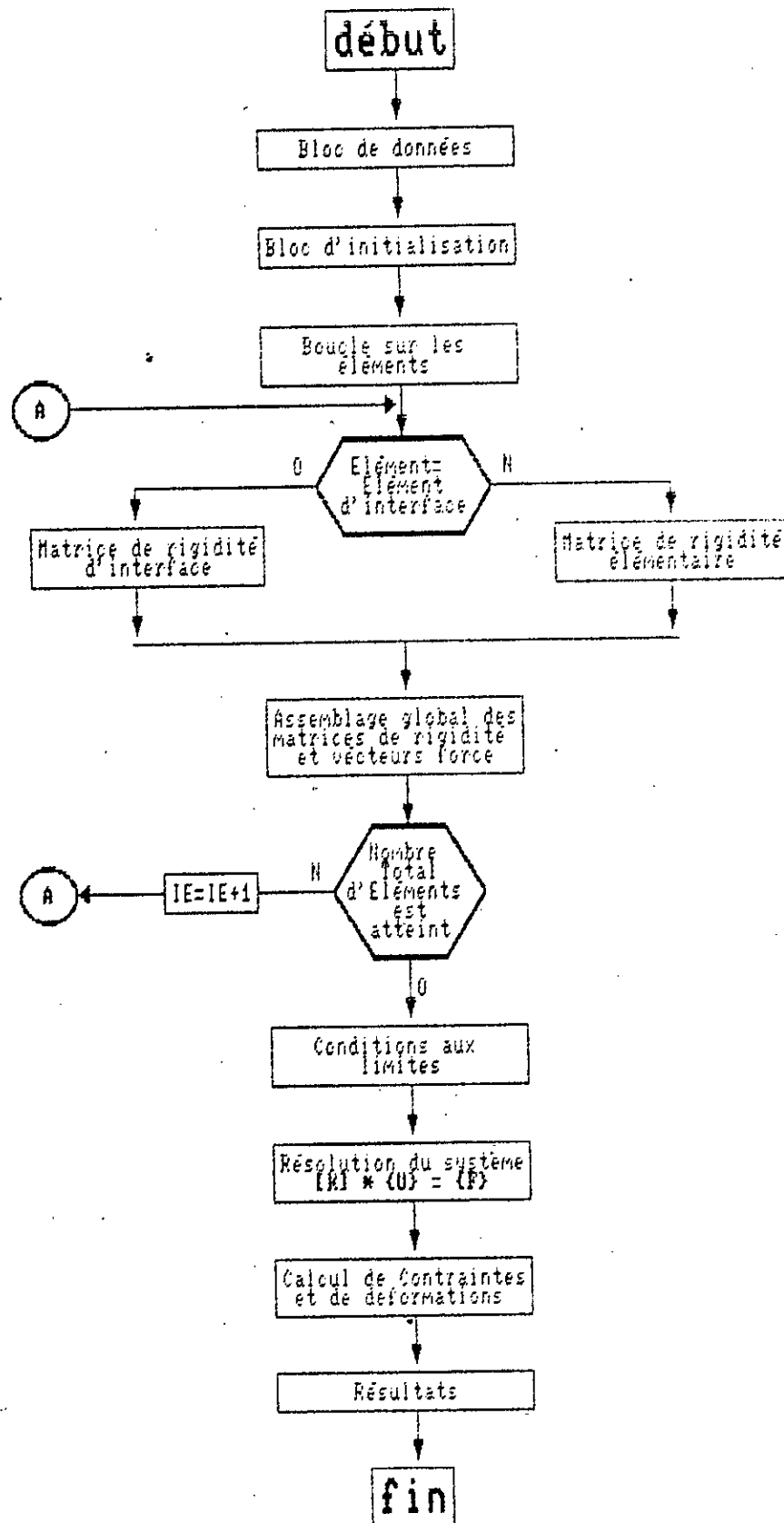


Fig VII.2: Diagramme décrivant le
Test sur les Eléments
d'Interface



FigVII.3 Structure générale du programme INTERF II

Chapitre VIII

*Etude théorique des interfaces
dans un milieu non linéaire*

I/ Introduction

L'analyse en éléments finis de problèmes résolvant les sols renforcés nécessite l'utilisation de techniques spéciales.

Dans la mesure où il y a de nombreux éléments renforcés, la meilleure approche est d'introduire les effets de renforcement dans la loi constitutive du matériau à travers une adaptation d'un type de méthode d'homogénéisation.

Vu la grande variété des différents types de renforcement, il est nécessaire que la formulation de l'élément d'interface doit être générale et flexible, incluant, pour l'instant, la possibilité de modelage souple et dilatant d'un comportement.

Nombreux sont les chercheurs qui, ces dernières années, se sont intéressés à la résolution des problèmes d'interfaces dans des massifs ne suivant pas la loi linéaire. Citons les travaux de :

- J.M.Jeynouard, R.Duhau et M.Lemaire (1979), qui ont mis au point une méthode de calcul par sous-structures qui concerne l'interaction entre une structure élastique linéaire et un sol dont une partie est élastoplastique. Cette méthode est mise en oeuvre par un processus incrémental et itératif,
- R.Frank, A.Guenot et P.Humbert (1980), ont essayé une approche spéciale du problème dans le cas où la géométrie et la densité des discontinuités sont telles que toute méthode de schématisation directe se révèle laborieuse et coûteuse. Ils ont proposé alors une modélisation du massif par un milieu continu élastoplastique à critère de plasticité et déformations orientés.

Il est à noter que les problèmes de frottement et de décollement sur des interfaces sont très souvent liés à la modélisation de milieux dont la matrice est élastoplastique. L'utilisation d'éléments de contact tels que ceux décrits ci-dessus n'a pas un grand intérêt, si les massifs situés de part et d'autre de ces contacts ne peuvent être modélisés en élastoplasticité.

II/ Formulation d'une loi de comportement

La loi rhéologique d'un matériau est la relation liant la «réponse» de ce matériau (par exemple la déformation subie), à une «solicitation» (l'application d'un état de contrainte par exemple). Si on admet le principe du déterminisme, il existe une fonctionnelle F liant la réponse $r(t)$ à l'instant t à toute l'histoire de la sollicitation $S(t)$ de l'origine des temps t_0 au temps t :

$$r(t) = F.S(t)$$

La fonctionnelle F étant dans le cas général impossible à expliciter, il faut faire appel à la procédure de «linéarisation», qui aboutit à une formulation de type incrémental. Si on applique une «petite» sollicitation $d\sigma$ pendant un incrément de temps dt à un échantillon ayant subi une certaine histoire, la «petite» réponse $d\varepsilon$ déterminée unique est liée à $d\sigma$ et à dt par une fonction R .

$$R(d\sigma, d\varepsilon, dt) = 0$$

La fonction R dépend des états de contrainte ancien et actuel. Si cette fonction relie des quantités infiniment petites, il est possible d'en donner un développement limité au premier ordre et d'écrire :

$$d\varepsilon = M.d\sigma + M'.dt \quad (\text{VIII.1})$$

La réponse à une sollicitation infiniment rapide ($dt=0$), se traduit par la seule partie élastoplastique de la loi. Par la suite, nous ne considérons pas la partie visqueuse M' et nous écrivons (VIII.1) sous la forme :

$$d\sigma = C.d\varepsilon$$

Cette loi devient, dans le cas des interfaces, sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} d\tau_n \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix}$$

$$\text{Soit } \{d\sigma\} = [C] \{dS\} \quad (\text{VIII.2})$$

$\{d\sigma\}$ et $\{dS\}$ désignent respectivement les vecteurs à deux composantes de la contrainte interfaciale et du déplacement relatif.

Les deux formulations de la matrice $[C]$ présentées ci-dessous sont désignées respectivement par «formulation élastoplastique» et «formulation incrémentale générale». Les deux lois associées à ces matrices possèdent un caractère incrémental, la première admettant également les relations issues de la théorie classique de la plasticité.

II.1- Formulation élastoplastique

II.1.1- Rappel de mécanique des milieux continus

La théorie de la plasticité est fondée sur la décomposition de l'incrément de déformation $\{d\varepsilon\}$ en une partie élastique $\{d\varepsilon\}^e$ et une partie non réversible ou plastique $\{d\varepsilon\}^p$.

L'apparition de cette déformation plastique est liée à la notion de critère de plasticité qui s'écrit :

$$F(\{\sigma\}, K) = 0$$

La fonction F de l'état de contrainte $\{\sigma\}$ et de l'ensemble des paramètres d'érouissage K est la fonction de charge et la surface d'équation $F(\{\sigma\}, K) = 0$, dans l'espace des contraintes, est la surface de charge qui évolue dans l'érouissage.

II.1.2- Expression générale de la matrice de comportement

Le vecteur déplacement relatif se décompose en :

$$\begin{aligned} \{ds\} &= \{ds\}^e + \{ds\}^p & \text{(VIII.3)} \\ \{ds\}^e &= [C_e]^{-1} \{d\sigma\} \end{aligned}$$

Il se vérifie expérimentalement que le couplage entre déplacements normal et tangentiel est associé à des déplacements relatifs irréversibles.

La matrice élastique a pour expression

$$[C_e] = \begin{bmatrix} K_t & 0 \\ 0 & K_n \end{bmatrix}$$

$$\{ds\}^p = d\lambda \left\{ \frac{\delta G}{\delta \{\sigma\}} \right\}$$

avec $d\lambda$ scalaire positif

G est le potentiel plastique

L'expression VIII.3 devient :

$$\{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + d\lambda \left\{ \frac{\delta G}{\delta \{\sigma\}} \right\} \quad \text{(VIII.4)}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\left\{ \frac{\delta F}{\delta \{\sigma\}} \right\}^T [C_e]$ sachant qu'au cours des déplacements plastiques, on a $F(\{\sigma\}, K) = 0$ on aboutit à :

$$\{d\sigma\}^T \{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\}^T \{d\sigma\} + 1/(A+B) \{d\sigma\}^T \{ds\} \left\{ \frac{\delta G}{\delta \{\sigma\}} \right\} \quad \text{(VIII.5)}$$

avec $A = (-1/d\lambda) \cdot (\delta F/\delta K) \cdot dK$

$$B = \left\{ \frac{\delta F}{\delta \{\sigma\}} \right\}^T [C_e] \left\{ \frac{\delta G}{\delta \{\sigma\}} \right\}$$

$\{d\sigma\}^T \{ds\} = \left\{ \frac{\delta F}{\delta \{\sigma\}} \right\}^T \{d\sigma\} + d\lambda \cdot B$, cette quantité est un scalaire.

$$\{d\sigma\} = [[C_e] - [C_p]] \{ds\} \quad (\text{VIII.6})$$

Il reste à expliciter le terme de $[C_p]$

$$[C_p] = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} K_t^2 \frac{\delta F}{\delta \tau_{nt}} \cdot \frac{\delta G}{\delta \tau_{nt}} & K_t \cdot K_n \cdot \frac{\delta F}{\delta \sigma_n} \cdot \frac{\delta G}{\delta \tau_{nt}} \\ K_t \cdot K_n \cdot \frac{\delta F}{\delta \tau_{nt}} \cdot \frac{\delta G}{\delta \sigma_n} & K_n^2 \frac{\delta F}{\delta \sigma_n} \cdot \frac{\delta G}{\delta \sigma_n} \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } H = A + K_t \cdot \frac{\delta F}{\delta \tau_{nt}} \cdot \frac{\delta G}{\delta \tau_{nt}} + K_n \cdot \frac{\delta F}{\delta \sigma_n} \cdot \frac{\delta G}{\delta \sigma_n}$$

II.2- Formulation incrémentale générale

Soient quatre fonctions f , g , h , et k telles que :

$$\tau_{nt} = f(u, \sigma_n) \quad \sigma_n \text{ constante} \quad (\text{VIII.7})$$

$$V = g(u, \sigma_n) \quad \sigma_n \text{ constante} \quad (\text{VIII.8})$$

$$\sigma_n = h(v, \tau_{nt}) \quad \tau_{nt} \text{ constante} \quad (\text{VIII.9})$$

$$\sigma_n = k(v, \tau_{nt}) \quad \tau_{nt} \text{ constante} \quad (\text{VIII.10})$$

Les fonctions f et g sont obtenues par une série d'essais de cisaillement dans le plan de l'interface, sous contrainte normale constante. De même, h et k sont tirées d'essais de traction-compression à contrainte tangentielle constante.

Appliquons un vecteur sollicitation $\begin{Bmatrix} d\tau_{nt} \\ 0 \end{Bmatrix}$

on aboutit à

$$dV = \frac{\delta g}{\delta u} \cdot du = \frac{\delta g}{\delta u} \cdot \frac{1}{\delta f / \delta u} \cdot d\tau_{nt} \quad (\text{VIII.11})$$

De même, en appliquant un incrément $\begin{Bmatrix} 0 \\ d\sigma_n \end{Bmatrix}$, on obtient à partir de (VIII.9) et

(VIII.10) :

$$du = ((\delta k / \delta v) / (\delta h / \delta v)) d\sigma_n \quad (\text{VIII.12})$$

$$dv = (1/(\delta h/\delta v)) \cdot d\sigma_n \quad (\text{VIII.13})$$

Par superposition des sollicitations incrémentales, le vecteur $[d\tau_{nt}, d\sigma_n]^T$ produit un incrément de déplacement relatif :

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 / \frac{\delta F}{\delta u} & \frac{\delta k}{\delta v} / \frac{\delta h}{\delta v} \\ \frac{\delta g}{\delta u} / \frac{\delta F}{\delta u} & 1 / \frac{\delta h}{\delta v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tau_{nt} \\ d\sigma_n \end{Bmatrix}$$

La forme de la matrice de comportement $[C]$ apparaît :

$$\begin{Bmatrix} d\tau_{nt} \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad C = \frac{1}{1 - \frac{\delta k}{\delta v} \cdot \frac{\delta g}{\delta u}} \begin{bmatrix} \frac{\delta F}{\delta u} & -\frac{\delta F}{\delta u} \frac{\delta k}{\delta v} \\ -\frac{\delta g}{\delta u} \cdot \frac{\delta h}{\delta v} & \frac{\delta k}{\delta v} \end{bmatrix}$$

III- Traitement numérique par éléments finis

III.1- L'élément d'interface

L'élément d'interface est isoparamétrique à six noeuds, sans épaisseur. Les fonctions de forme sont les mêmes que celles décrites dans le cas linéaire (paragraphe 2.5).

Le vecteur déplacement relatif $\{S\}$ est lié au vecteur des déplacements nodaux $\{U_{e,n}\}$ par :

$$\{S\} = [B_n] \{U_{e,n}\}$$

La matrice $[B_n]$ est la même que celle décrite au paragraphe 2.5 concernant les interfaces dans le cas linéaire.

La matrice de rigidité élémentaire est :

$$[K_{en}] = \int_{-1}^{+1} [B_n][C][B_n] \cdot J(\xi) \cdot d\xi$$

où $[C]$ est la matrice décrivant la loi de comportement.

III.2- Processus itératif et incrémental

Compte tenu du caractère des lois de comportement, il est indispensable de faire appel à une technique de résolution de problèmes non linéaires, on cite

essentiellement la méthode des «contraintes initiales» basée sur la redistribution de l'écart entre la charge appliquée et la charge réellement équilibrée par l'état de déformation (de déplacement relatif) trouvé.

L'application de la charge doit être incrémentale, car il n'est possible d'appliquer une linéarisation que sur des évolutions suffisamment petites à partir d'un état de contrainte connu.

La recherche du point d'équilibre est itérative, puisque la rigidité varie même pour de petits incréments de charge.

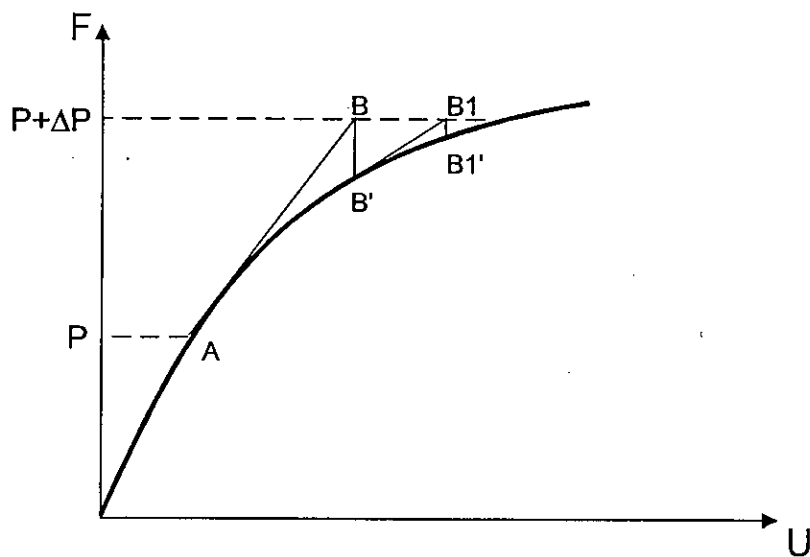


Figure VIII.1 : processus itératif et incrémental

Partant de la rigidité tangente au point A , chaque étape du processus $B'B_1, B_1'B_2, \dots$ est obtenue par la même rigidité ou une rigidité tangente recalculée au point B' pour accélérer la convergence.

IV-Analyse non linéaire des contraintes et déformations dans le sol par des méthodes expérimentales

Le comportement contrainte-déformation de n'importe quel type de sol dépend de différents facteurs tels que : la densité, la quantité d'eau présente, les conditions de drainage, le type de déformation (déformation plane, triaxiale), la durée de chargement... et il est possible d'en tenir compte, en sélectionnant a priori les échantillons du sol et reproduisant les conditions nécessaires dans les tests de manière à obtenir des déformations représentatives de celles pouvant se produire in situ sous les mêmes conditions de chargement.

IV.1- Non linéarité et valeur du module tangent (E)

Kondner a montré que la courbe contrainte-déformation des deux matériaux, sable et argile, peut être approximée, avec un degré de précision élevé, par une hyperbole de la forme :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \varepsilon / (a + b\varepsilon) \quad (\text{VIII.14})$$

σ_1, σ_3 : contraintes principales majeure et mineure.

ε : déformation axiale

a, b : constantes déterminées expérimentalement. Elles représentent physiquement l'inverse du module tangent initial et l'inverse de la valeur asymptotique de la courbe contrainte-déformation (cf. fig VIII.2).

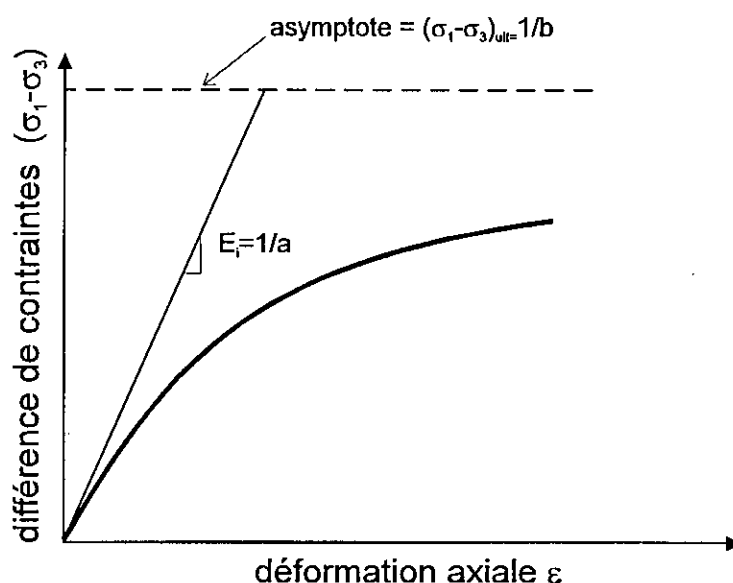


Figure VIII.2 : courbe hyperbolique contrainte-déformation

La valeur asymptotique peut être reliée à l'effort de compression par la relation.

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (\text{VIII.15})$$

où :

$(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ la différence des contraintes à la rupture

$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ la valeur asymptotique de la différence des contraintes

R_f rapport de rupture ($R_f < 1$)

R_f est généralement compris entre 0,75 et 1, et est essentiellement indépendant de la précision de confinement.

Par substitution des valeurs de a et b, l'équation (VIII.14) devient :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon}{\left[\frac{1}{E_t} + \frac{\Sigma R_r}{(\sigma_1 - \sigma_3)_r} \right]} \quad (\text{VIII.16})$$

La représentation hyperbolique développée par Kondner et al a été un moyen très utile pour représenter la non linéarité du comportement contrainte-déformation dans le sol.

La relation contrainte-déformation exprimée par l'équation (VIII.16) peut être très convenablement utilisée dans une analyse d'incrémentations en contraintes, car il est possible d'approximer la valeur du module tangent correspondant à n'importe quel point de la courbe contrainte-déformation. Si la contrainte principale mineure est constante, le module tangent E_t s'écrit comme suit :

$$E_t = (\delta(\sigma_1 - \sigma_3)) / \delta\varepsilon \quad (\text{VIII.17})$$

et par différenciation de l'équation (VIII.16), le module tangent devient :

$$E_t = \frac{1 / E_i}{\left[\frac{1}{E_i} + \frac{R_r \cdot \varepsilon}{(\sigma_1 - \sigma_3)_r} \right]^2} \quad (\text{VIII.18})$$

En éliminant la déformation de cette dernière équation, elle devient :

$$E_t = \left[1 - \frac{R_r (1 - \sin \varphi)(\sigma_1 - \sigma_3)}{2C \cos \varphi + 2 \sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 K P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (\text{VIII.19})$$

Cette expression de E_t est très utilisée, notamment dans les analyses d'incrémentations en contraintes et constitue une part importante dans la relation contrainte-déformation, elle peut être utilisée en contraintes effectives comme en contraintes totales.

Il est à noter que la relation contrainte-déformation a été développée sur la base des résultats obtenus des tests triaxiaux standards.

L'utilité de l'équation (VIII.19) repose sur sa simplicité vis à vis de deux facteurs :

- 1- le module tangent, exprimé en termes de contraintes seulement, peut être utilisé à résoudre les problèmes faisant intervenir les conditions de contraintes initiales, sans aucune complication.

2- les paramètres intervenant dans cette relation peuvent être aisément déterminés à partir des tests en laboratoire.

IV.2- Procédures de l'analyse non linéaire

Le comportement non linéaire contrainte-déformation peut être approximé dans une analyse, en éléments finis, en assignant différentes valeurs aux éléments en lesquels le sol est subdivisé.

La valeur du module assigné est sélectionnée sur la base des contraintes ou déplacements dans chaque élément, car le module et les contraintes sont dépendants les uns des autres.

Deux techniques pour approximer l'analyse des contraintes non linéaires sont montrées dans la figure VIII.3. :

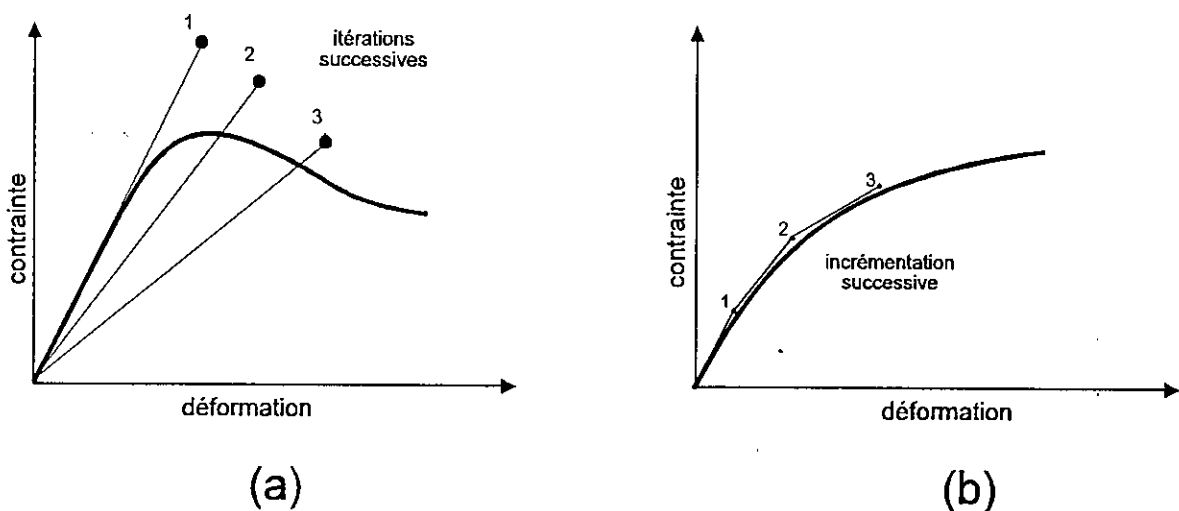


Figure VIII.3 : Techniques d'approximation du comportement non linéaire contrainte-déformation

- Par la procédure itérative montrée dans la figure VIII.3.a, le même changement dans le chargement extérieur est analysé répétitivement. Après chaque test, les valeurs des contraintes et des déformations au sein de chaque élément sont examinées pour déterminer si elles satisfont à la relation appropriée non linéaire entre contraintes et déformations.

Si les valeurs des contraintes et des déformations ne se correspondent pas, une nouvelle valeur de module est choisie pour l'analyse suivante.

Cette procédure a été appliquée dans une analyse de comportement chargement-tassement d'une fondation sur le sable par Girijavallabhan et Reese.

- Par la procédure incrémentale montrée dans la fig. VIII.3.b, le changement dans le chargement est analysé par une série d'incrément. Au début de chaque nouvelle incrémentation de charge, une valeur appropriée du module est sélectionnée en se basant sur les valeurs de contraintes-déformations dans l'élément. Ainsi, la relation contrainte-déformation est approximée par une série de droites. Cette procédure a été appliquée aux analyses des remblais par Clough et Woodward.

Ces deux méthodes présentent des avantages et des inconvénients :

L'avantage principal de la procédure itérative est qu'il est possible de représenter la relation contrainte-déformation dans laquelle la contrainte décroît avec l'augmentation de la déformation au-delà d'une valeur maximale.

Cette possibilité peut être très importante car les ruptures progressives qui se produisent dans le sol sont associées à ce type de comportement contrainte-déformation.

L'inconvénient de cette procédure est qu'il est très difficile de tenir compte des contraintes initiales non nulles, qui jouent un rôle très important dans plusieurs problèmes de la mécanique des sols.

L'avantage principal de la procédure incrémentale réside dans le fait que les contraintes initiales peuvent être facilement introduites, outre la précision qu'elle peut apporter dans le calcul des contraintes et des déformations pour de faibles chargements.

Cette procédure présente l'inconvénient de ne pas pouvoir simuler la relation contrainte-déformation lorsque la contrainte décroît au-delà d'un certain maximum, car il devient impératif d'utiliser une valeur négative du module tangent (E_t), et cela ne peut être fait dans une analyse en éléments finis.

Applications

Application 1

Etude d'une poutre encastree soumise à la flexion par la méthode des éléments finis

* Programme : ISOFEM

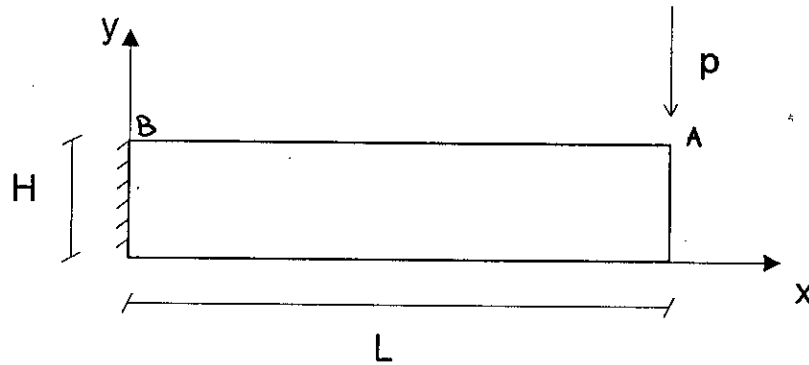
* Type d'élément : élément isoparamétrique à 16 d.d.l
(N: nombre de noeuds)

* La solution théorique selon "théorie des poutres" est :

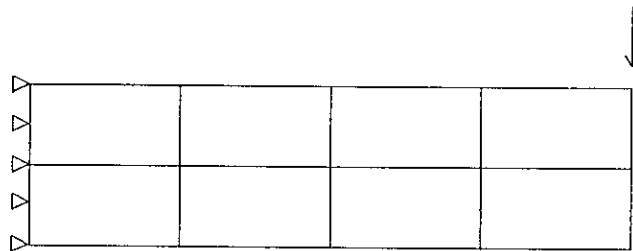
- la flèche : $v_{ex} = (PL^3)/(3EI)$

- la contrainte : $\sigma_{x_{ex}} = (PLH)/(2I)$

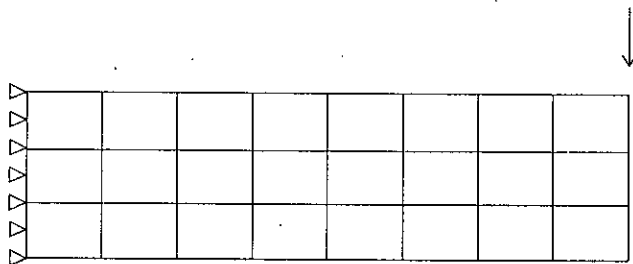
Poutre encastrée en flexion (discrétisation)



$L = 12 \text{ m}$
 $H = 2 \text{ m}$
 $P = 1 \text{ MN}$
 $\nu = 0,3$
 $E = 1340 \text{ MPa}$

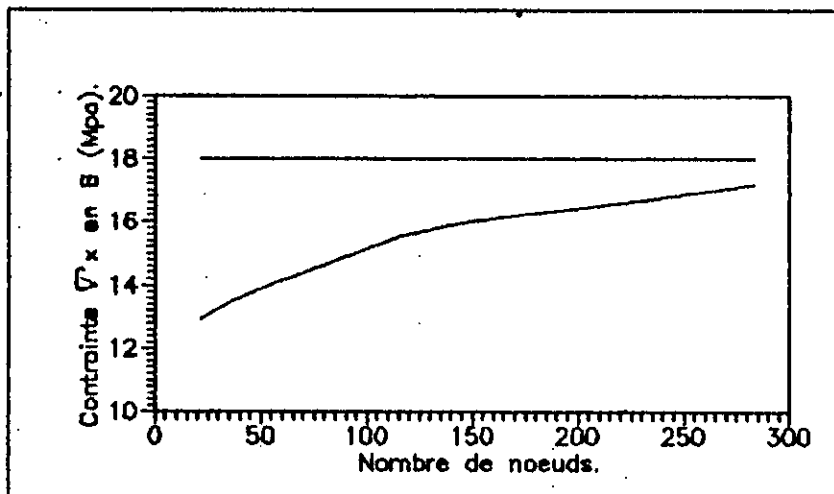
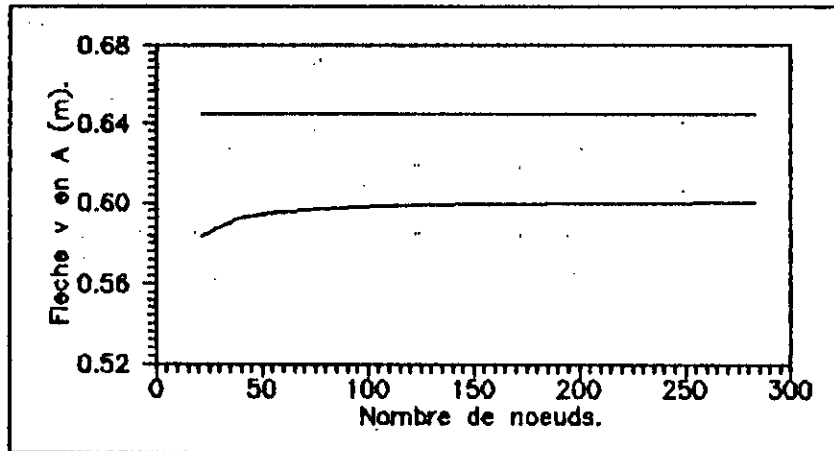


exemple de discrétisation (8 éléments)

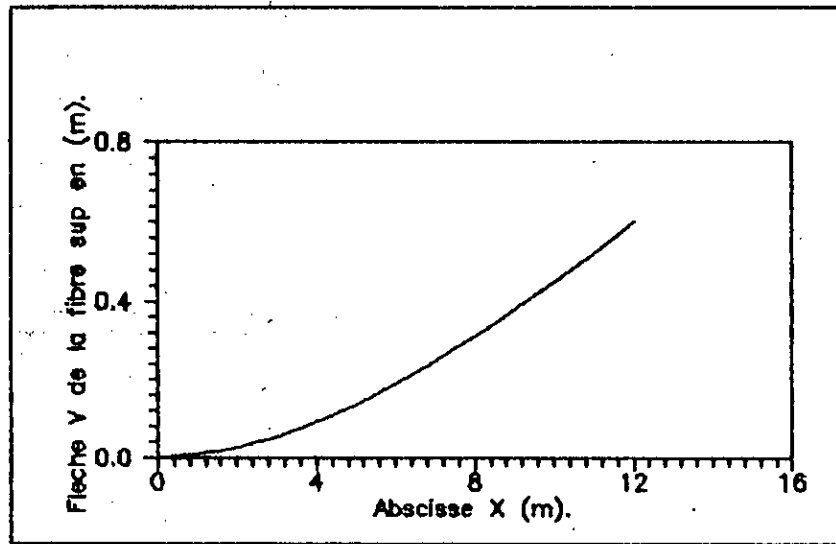


exemple de discrétisation (30 éléments)

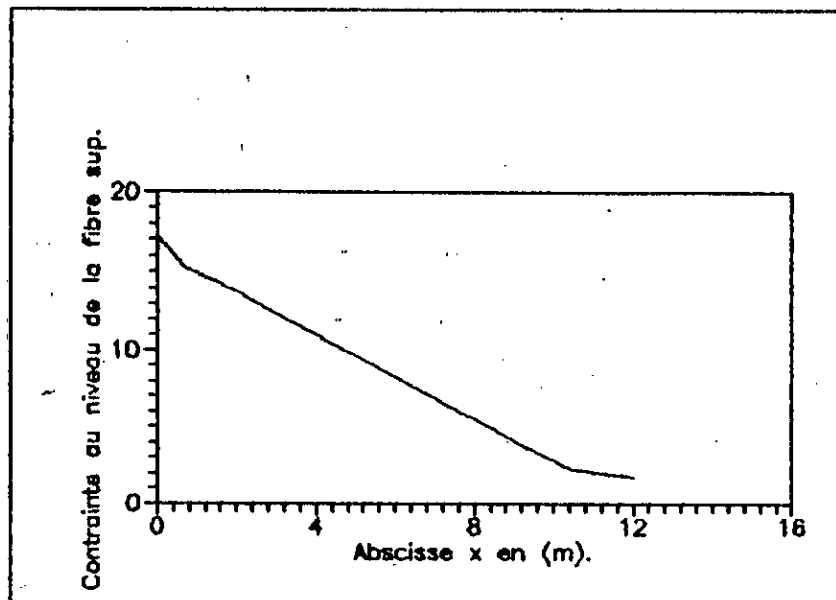
COURBES DE CONVERGENCE DES CONTRAINTES $\sigma(x)$ ET DE LA FLECHE v EN FONCTION DE NOMBRE DE NOEUDS.



VARIATION DE LA DEFORMEE DE LA FIBRE SUPERIEURE EN FONCTION DE X.



COURBE DE LA VARIATION DES CONTRAINTES SIGMA(x) AU NIVEAU DE LA FIBRE SUPERIEURE LE LONG DE X.



Application 2

Etude d'une poutre encastree soumise à la traction par la M.E.F.

* Programme : ISOFEM

* Type d'élément : élément isoparamétrique à 16 d.d.l
(N: nombre de noeuds)

* La solution analytique selon "théorie des poutres" est :

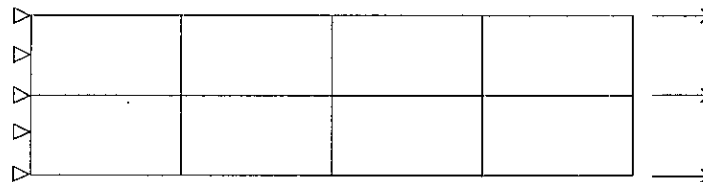
- le déplacement : $U_{cx} = 3FL / EA$

- la contrainte : $\sigma_{cx} = (3F)/A$

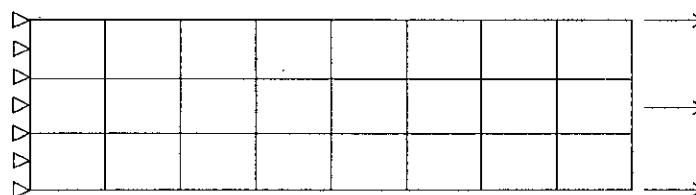
Poutre encastrée en traction (discrétisation)



$L = 12 \text{ m}$
 $H = 2 \text{ m}$
 $F = 1 \text{ MN}$
 $E = 1340 \text{ MPa}$
 $\nu = 0,3$

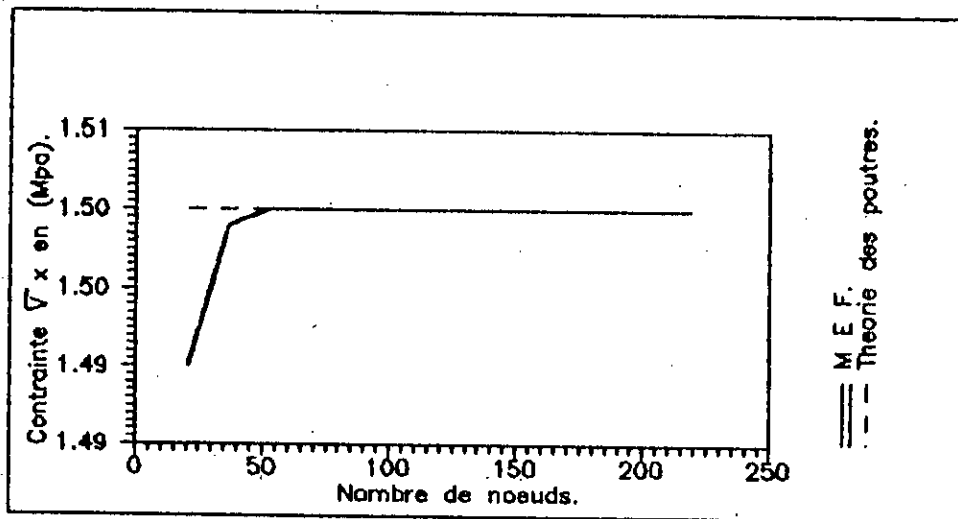
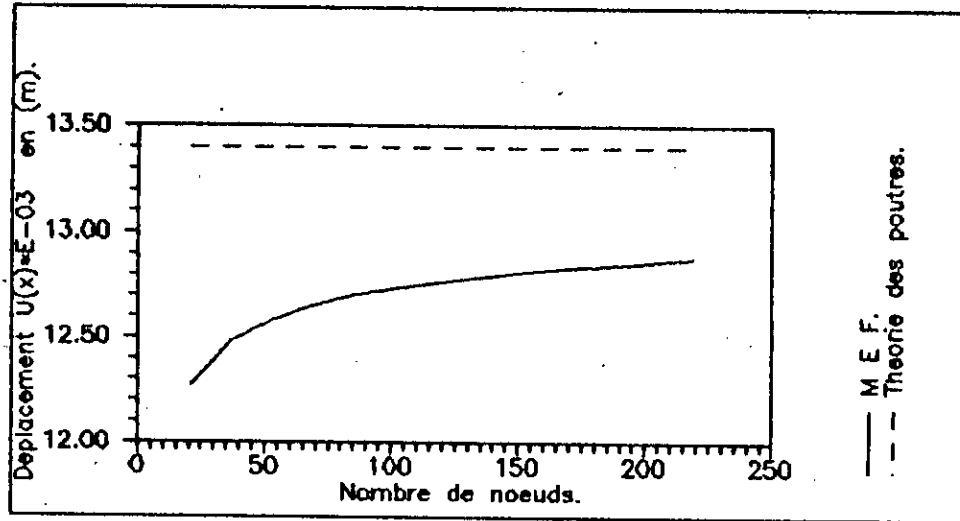


exemple de discrétisation (8 éléments)

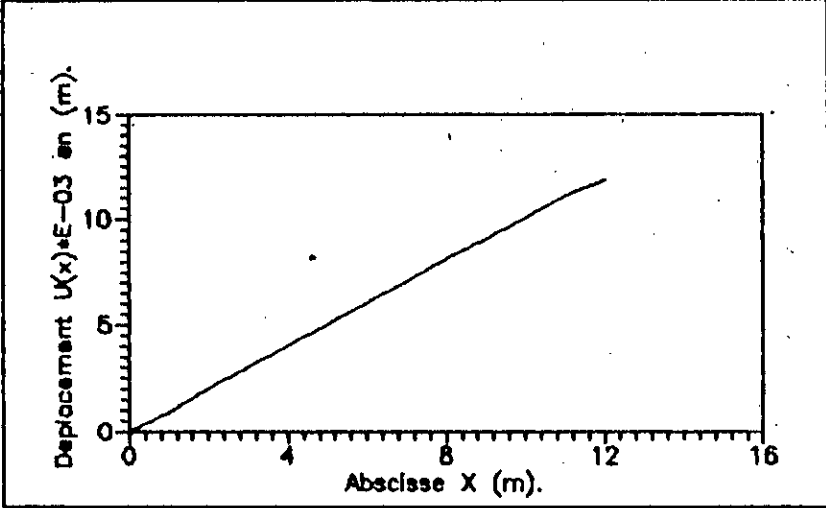


exemple de discrétisation (30 éléments)

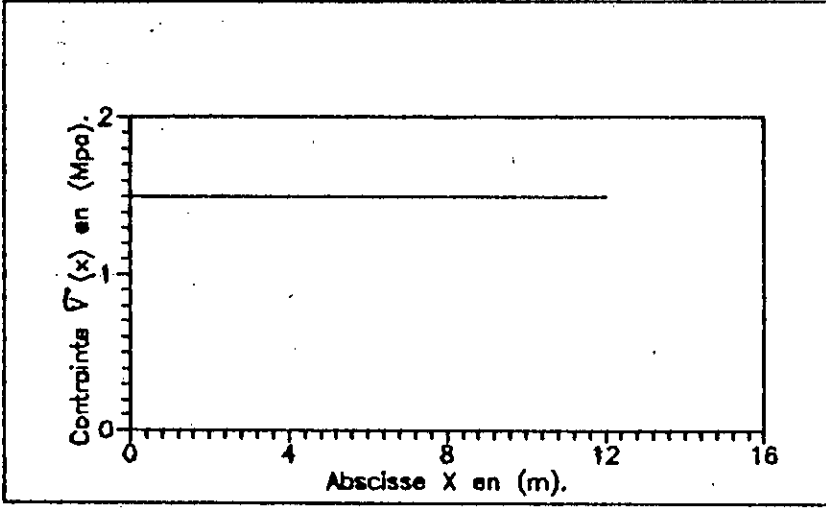
COURBES DE CONVERGENCE DES CONTRAINTES $\sigma(x)$ ET DES
DEPLACEMENTS $U(x)$ EN FONCTION DE NOMBRE DE NOEUDS.



COURBE DE LA DEFORMEE DE L'AXE NEUTRE EN FONCTION DE x .



COURBE DE LA VARIATION DES CONTRAINES SIGMA(x) LE LONG DE L'AXE x .



Applications au sol

Application 3

Etude d'un échantillon de sol soumis à son poids propre

* Programme : ISOFEM

* Type d'élément : élément isoparamétrique à 16 d.d.l

* La solution théorique selon "théorie des sols" est :

$$\sigma_y = \gamma.z$$

γ étant la densité du sol.

z la profondeur du point considéré à partir de la surface libre du sol.

Sol soumis à son propre poids (discrétisation)

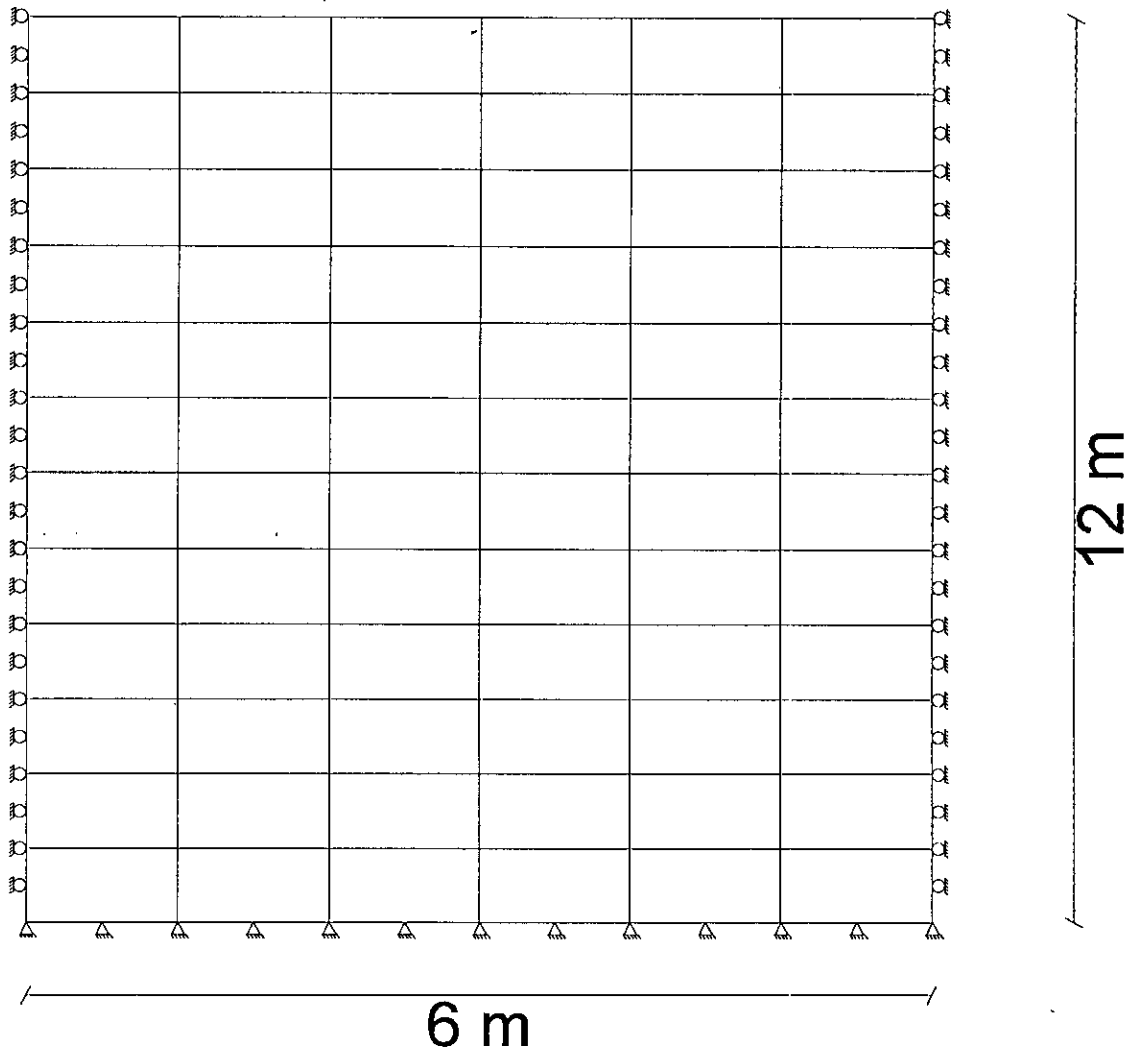
$$L = 6 \text{ m}$$

$$H = 12 \text{ m}$$

$$\gamma = 1,7 \text{ t/m}^3$$

$$\nu = 0,3$$

$$E = 50 \text{ MPa}$$



Discrétisation par éléments isoparamétriques à huit noeuds

densité : $\gamma = 1,7 \text{ t/m}^3$

nombre d'éléments : 72

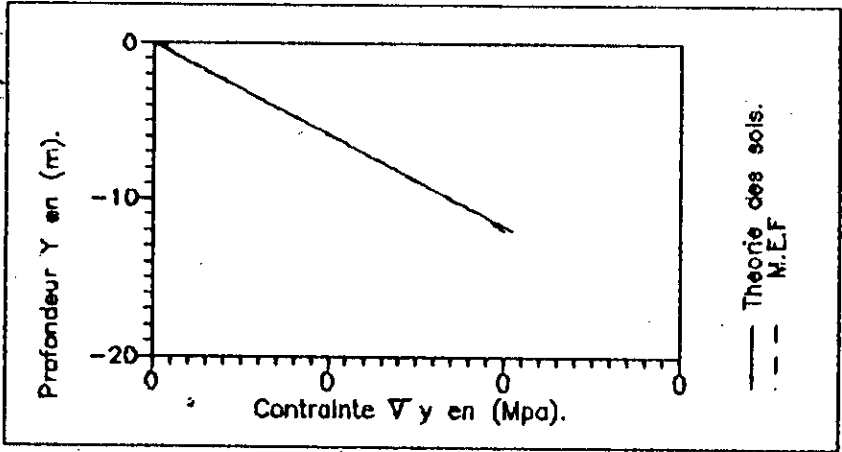
L'étude porte sur un sol de dimension (6 x 12 m) se trouvant dans un état de déformations planes.

Le sol est soumis à son propre poids, sa densité est de $\gamma = 1,7 \text{ t/m}^3$.

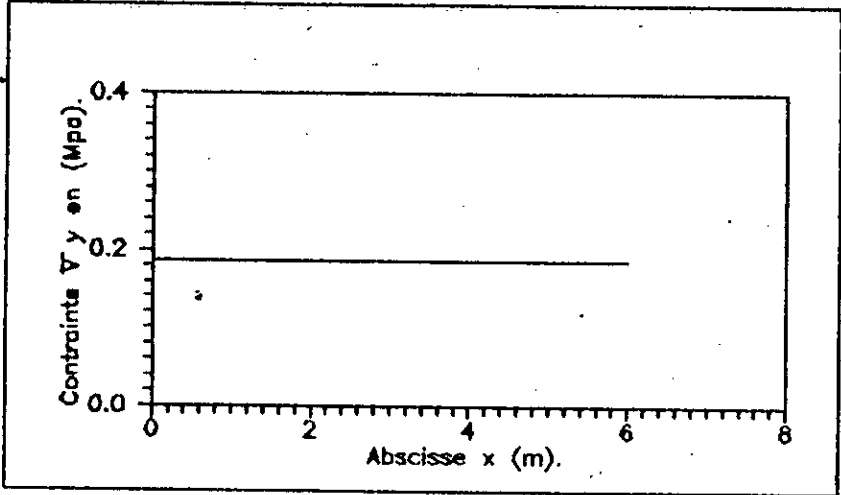
Les résultats obtenus par notre programme nous ont permis de tracer les courbes

- variation de la contrainte σ_y en fonction de la profondeur y ,
- variation de la contrainte σ_y en fonction de l'abscisse x .

VARIATION DE LA CONTRAINTE σ_y EN FONCTION DE LA PROFONDEUR Y.



COURBE DE LA VARIATION DE LA CONTRAINTE σ_y EN FONCTION DE L'ABSCISSE X à LA PROFONDEUR Y=11m



Application 4

Etude d'un sol soumis à une charge
concentrée dans le plan (oxz),
le long de l'axe y

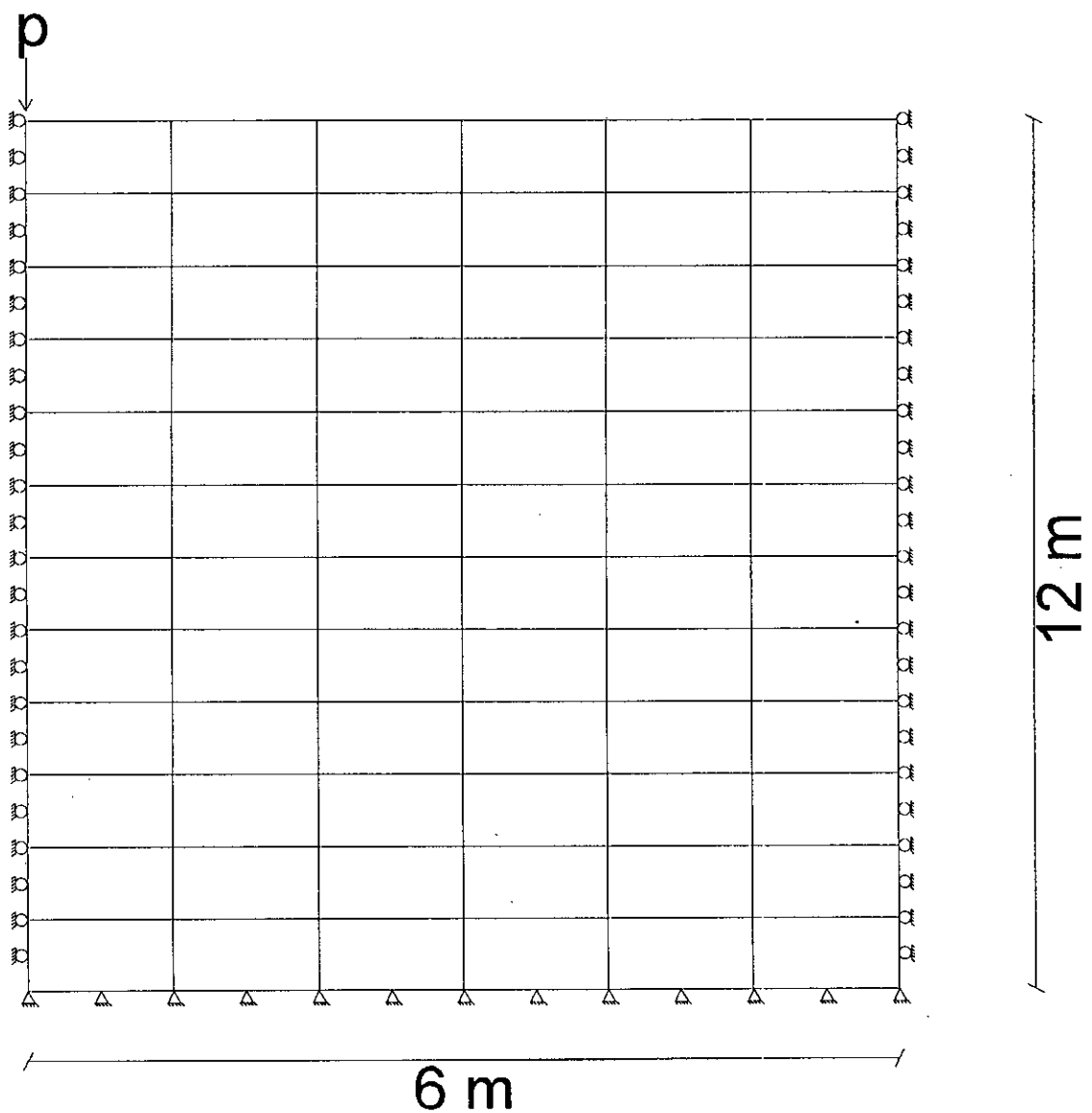
* Programme : ISOFEM

* Type d'élément : élément isoparamétrique à 16 d.d.l

* Discrétisation : $N = 253$ noeuds

Sol soumis à une charge concentrée (discrétisation)

$L = 12 \text{ m}$
 $H = 12 \text{ m}$
 $P = 1 \text{ MN}$
 $\nu = 0,3$
 $E = 50 \text{ MPa}$



Discrétisation par éléments isoparamétriques à huit noeuds

Dans cet exemple, on étudie un sol semi-infini de dimensions (12 x 12) m², se trouvant dans un état de déformations planes.

Ce sol est soumis à une charge concentrée le long de l'axe y dans le plan (oxz).

Par raison de symétrie de la structure et du chargement, nous avons considéré la moitié du sol.

Les résultats obtenus par notre programme nous ont permis de tracer les courbes :

- variation de la contrainte verticale σ_y en fonction de la profondeur y, pour l'abscisse $x=0,3\text{m}$
- variation du déplacement vertical v en fonction de l'abscisse x à différentes profondeurs y.

Interprétation des courbes

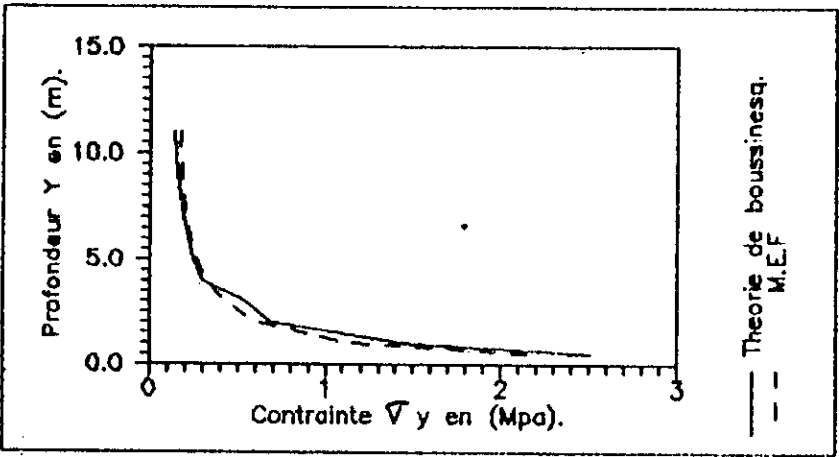
- variation de la contrainte verticale σ_y en fonction de la profondeur y, pour l'abscisse $x=0,3$: plus on s'éloigne de la surface libre du sol, on ressent moins l'effet de la charge concentrée, et les contraintes diminuent.

On note que les courbes tracées à partir de la M.E.F. s'approchent des courbes données par la théorie de Boussinesq.

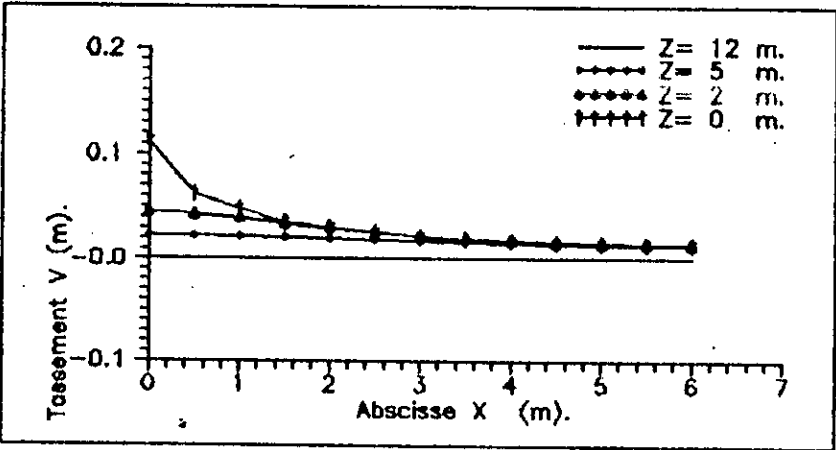
- variation du déplacement vertical v en fonction de l'abscisse pour différentes profondeurs : plus on s'éloigne de la charge, on constate que le déplacement vertical diminue.

Les courbes de variation des déplacements v s'aplatissent le long de l'axe des abscisses x à mesure que l'on s'enfonce dans le sol, nous pouvons alors déduire la profondeur à partir de laquelle le tassement instantané devient négligeable.

COURBE DE LA VARIATION DE LA CONTRAINTE σ_y EN FONCTION DE LA PROFONDEUR Y ($r=0.3$).



COURBES DES VARIATIONS DU TASSEMENT V EN FONCTION DE L'ABSCISSE X A DIFFERENTES PROFONDEURS.

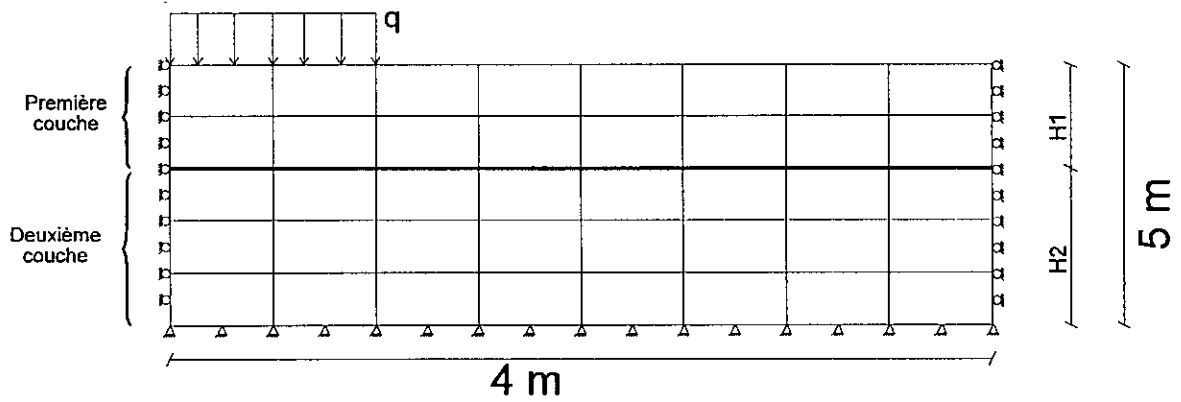


Application 5

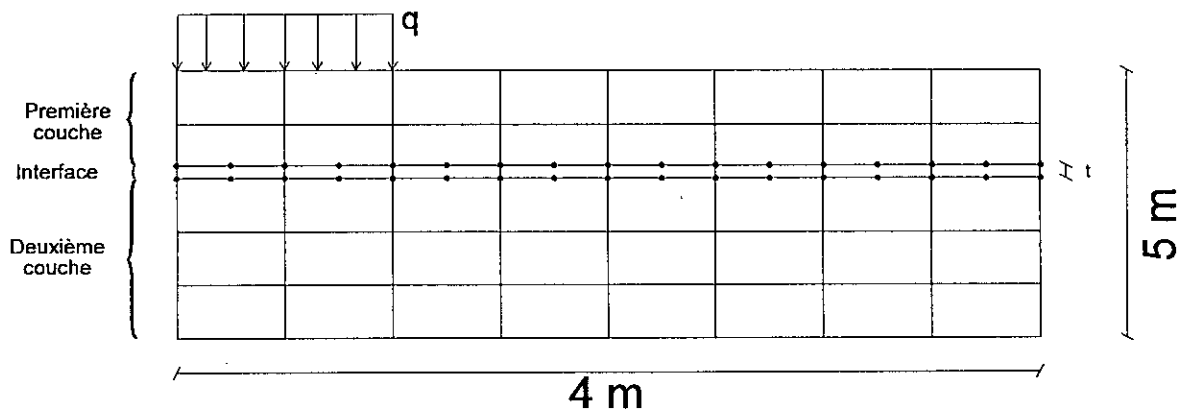
Etude d'un sol bicouche avec une analyse d'interfaces soumis à un chargement partiellement réparti

- * Programmes utilisés : ISOFEM, INTERFI, INTERFII
- * Type d'éléments :- isoparamétriques à 8 noeuds pour les éléments finis
- à six noeuds pour les éléments d'interface.
- * Discrétisation : N = 147 noeuds (sans interfaces)
N = 164 noeuds (avec interfaces)
- * Caractéristiques de la structure :
- * première couche (supérieure) :
E = 50 MPa
D = 0,3
H1 = 2 m
 - * seconde couche (inférieure) :
E = 55 MPa
D = 0,3
H2 = 3 m
 - * Interface : résistance à la traction $r_t = 1$ MPa
E = 100 MPa
D = 0,3
t = 10 mm
 - * L = 4 m
 - * H = 5 m
 - * q = 1 MN/ml

Sol bicouche soumis à un chargement partiellement réparti



a) sans interfaces



b) avec interfaces

Discrétisation par éléments isoparamétriques à huit noeuds pour éléments fins et à six noeuds pour éléments d'interfaces

L'exemple du sol chargé partiellement va nous permettre de voir le comportement de l'interface à partir de l'allure des courbes comparatives des déplacements et des contraintes avec et sans étude d'interface.

Pour ce qui est :

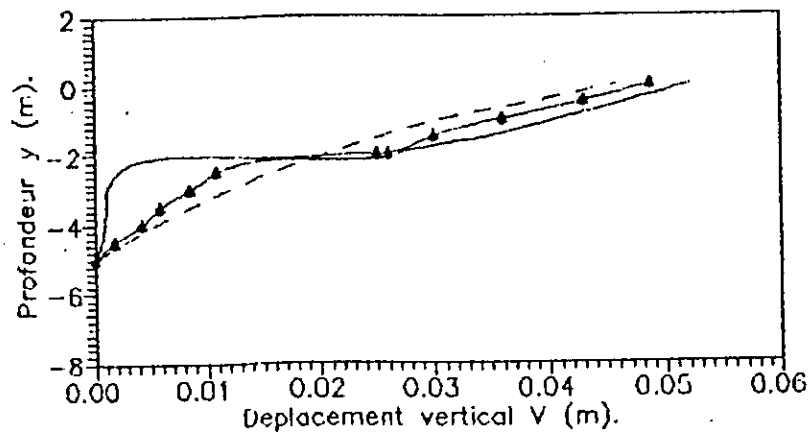
- des déplacements verticaux, ils s'avèrent être plus importants sur toute l'épaisseur de la couche supérieure jusqu'à la zone interfaciale, alors que ceux dans la couche inférieure sont pratiquement négligeables.

- des contraintes, les contraintes développées au niveau de l'interface sont plus marquées et particulièrement celles de la modélisation par ressorts. Ce qui explique les déplacements importants produits à ce niveau.

Il est à noter que toutes les perturbations dans les déplacements et contraintes reviennent au fait de la grande rigidité de la zone interfaciale.

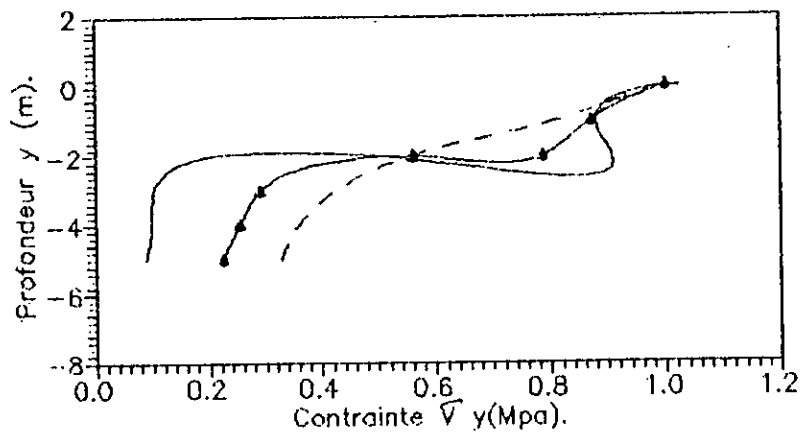
COURBES DE LA VARIATION DU DEPLACEMENT VERTICAL EN FONCTION DE LA PROFONDEUR.

— — SANS INTERFACE.
— AVEC INTERFACE MODELISEE PAR RESSORTS.
▲▲▲▲ AVEC INTERFACE UTILISANT LA LOI DE COMPORTEMENT.



COURBE DE LA VARIATION DE LA CONTRAINTE $\bar{\sigma}_y$
EN FONCTION DE LA PROFONDEUR.

— SANS INTERFACE.
- - - AVEC INTERFACE MODELISEE PAR RESSORTS.
●●●●● AVEC INTERFACE UTILISANT LA LOI DE COMPORTEMENT.

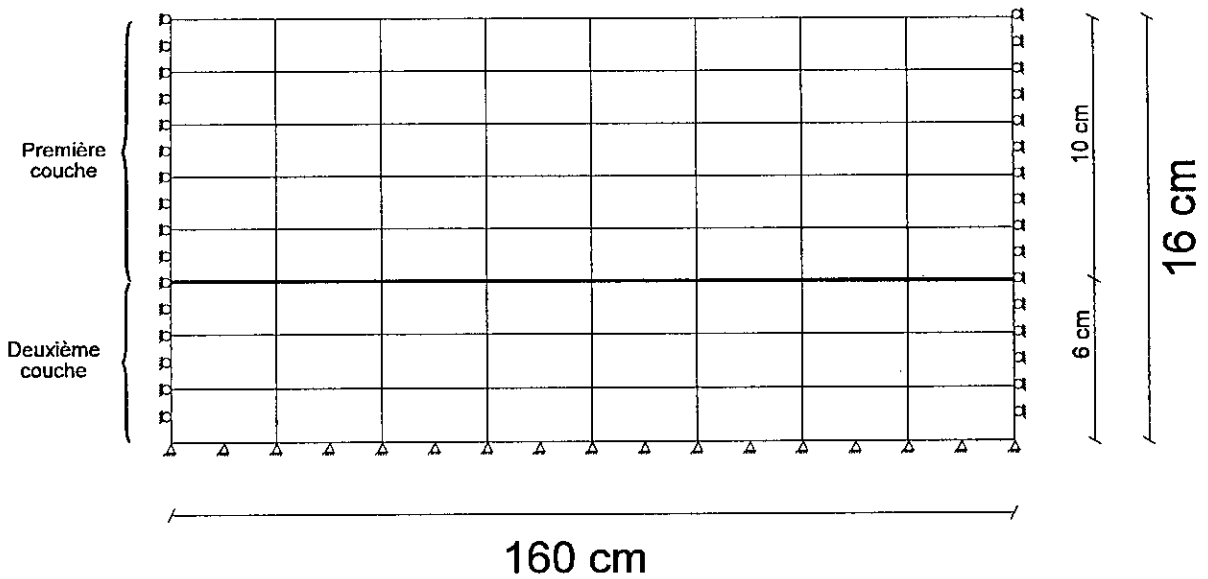


Application 6

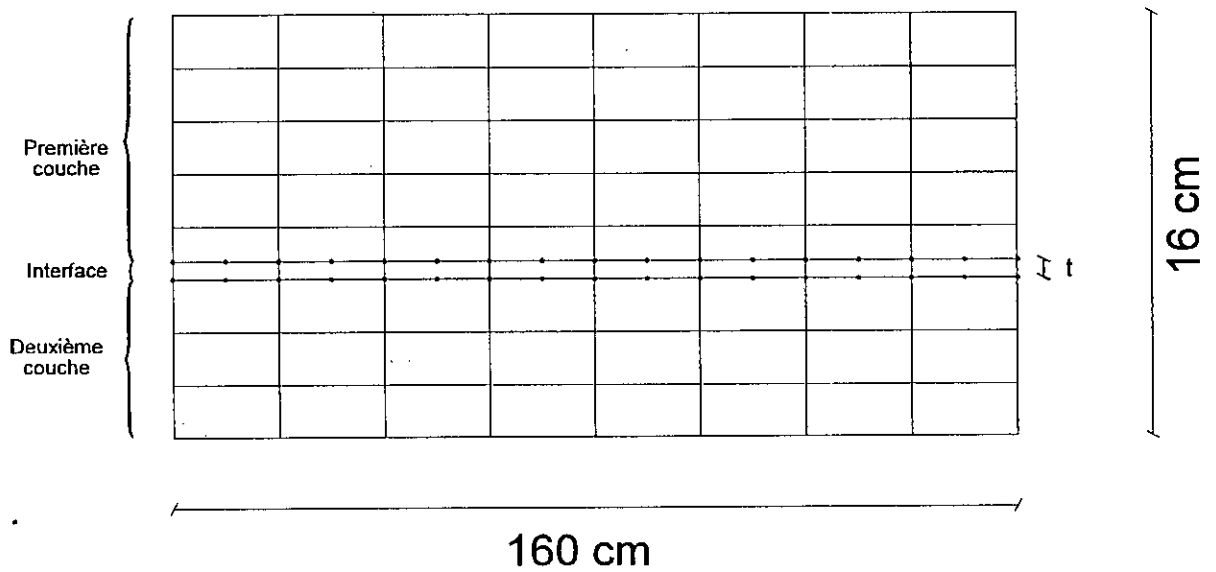
Etude d'une chaussée fissurée sous une charge verticale

- * Programmes utilisés : ISOFEM, INTERFI, INTERFII
- * Type d'éléments :- isoparamétriques à 8 noeuds pour les éléments finis
- à six noeuds pour les éléments d'interface.
- * Discrétisation : N = 225 noeuds (sans interfaces)
N = 242 noeuds (avec interfaces)
- * Caractéristiques de la structure :
- * première couche (supérieure) :
E = 6000 MPa
D = 0,3
H1 = 10 cm
 - * seconde couche (inférieure) :
E = 1500 MPa
D = 0,3
H2 = 6 cm
 - * Interface :
E = 100 MPa
D = 0,3
t = 3 mm
- * L = 160cm
- * H = 16 cm
- * q = 0,6 MPa

Chaussée bicouche soumise à un chargement vertical



a) sans interfaces



b) avec interfaces

Discrétisation par éléments isoparamétriques à huit noeuds

Présentation du problème

Les structures routières fissurées au terme de plusieurs années de mise en oeuvre, sont remises en état, généralement, par la mise n place d'une couche de béton bitumineux. On constate malheureusement, une remontée de la fissure sous-jacente au travers de la couche de renforcement, après un certain délai.

Actuellement, afin de conférer à la structure une meilleure adaptation aux déformations, de nouveaux produits apparaissent, dont la fonction est de désolidariser la couche de roulement ancienne et la couche de renforcement. Parmi ces produits, les mélanges de bitume et de poudrette de caoutchouc constituent une membrane très déformable dont on attend, après sa mise en place sur la couche fissurée, une économie en matériau de rechargement.

Dans ce cadre, nous avons proposé une étude comparative d'une chaussée secondaire sous l'action du trafic sans et avec interface, notamment nous avons cherché à préciser l'influence d'une membrane de bitume caoutchouc sur cette chaussée.

Modélisation numérique

Nous étudions l'interface dans les deux cas

- sans couche de bitume-caoutchouc,
- avec couche de bitume-caoutchouc.

En première approximation, il est possible de relier de module de cisaillement K_t aux caractéristiques mécaniques du matériau interfacial, en supposant une contrainte de cisaillement τ uniforme.

$$K_t = \mu/t = E/(2(1+\nu)).1/t$$

avec $\mu = E/(2(1+\nu))$ module de cisaillement

La valeur de $K_t = 13$ MPa/mm pour une interface sans bitume-caoutchouc correspond à un matériau de caractéristiques $E = 100$ MPa, $\nu = 0,3$ et $t = 3$ mm.

$K_t = 1000$ MPa/mm pour une interface considérée comme une couche de bitume-caoutchouc correspond à $E = 7800$ MPa, $\nu = 0,3$ et $t = 3$ mm.

La structure est modélisée à l'aide d'éléments isoparamétriques rectangulaires à huit noeuds et des éléments d'interface à six noeuds.

Résultats et interprétations

On représente l'évolution de la composante σ_y de la contrainte dans les deux cas: en ignorant puis en prenant en considération l'interface par les deux approches. Celle-ci est étudiée dans les deux cas selon l'existence ou non de bitume-caoutchouc à l'interface.

Pour la première approche concernant la méthode utilisant une relation limite en contrainte d'interface modélisée par ressorts, on constate une concentration de la contrainte de compression σ_y au niveau de la face supérieure de la zone interfaciale. Ceci est dû à la grande rigidité des ressorts au niveau de cette zone qui est donc en contact.

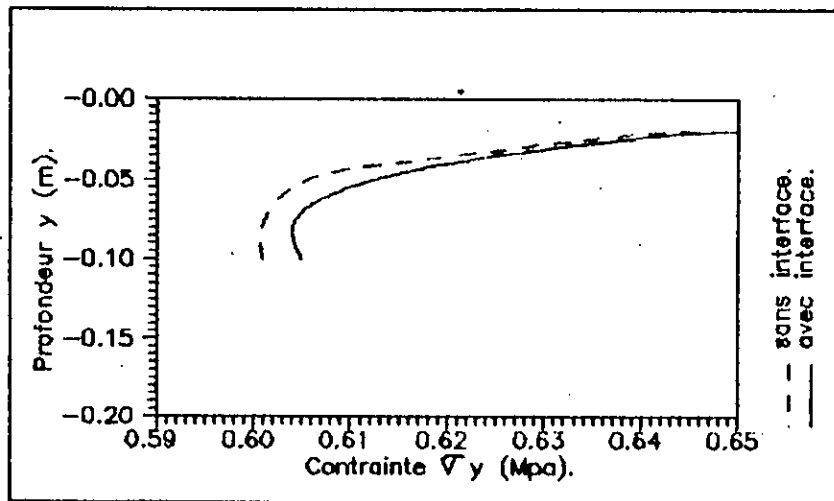
Tandis que pour la seconde concernant la méthode utilisant une loi de comportement d'interface, il apparaît une augmentation de contrainte mais pas aussi forte que celle de la première méthode. Ceci est dû d'une part à la loi de comportement qui ne pose pas une rigidité aussi élevée que celle de la première et, d'autre part, à la grande rigidité de la couche de renforcement qui supporte, en une grande partie, l'effort.

Pour le déplacement vertical, on n'a pas représenté son allure fonction de la profondeur, du fait qu'il est négligeable vu la grande rigidité de la couche supérieure de renforcement.

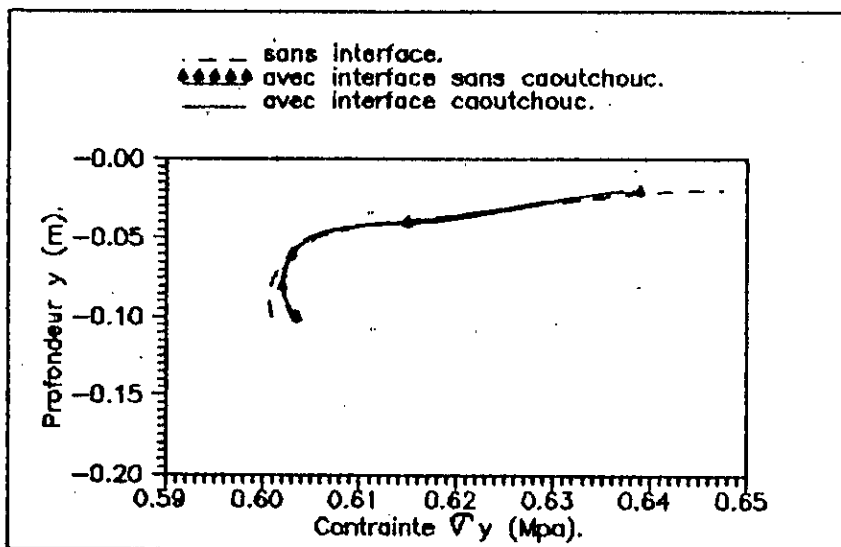
La présence de la couche de bitume-caoutchouc n'apporte pas de différence notable pour la répartition des contraintes à la partie supérieure de la couche de renforcement. Or, dans le cadre de cette même étude proposée, les résultats obtenus par le laboratoire régional des ponts et chaussées de Clermont-Ferrand, ont montré l'influence de cette couche de liaison pour une épaisseur de 4 cm de la couche de renforcement, donc ont montré l'intérêt de l'utilisation de ce matériau dans la recherche d'économie de renforcement.

On pourrait donc conclure à l'inefficacité de la couche de liaison pour le comportement de la structure, si on ne considérait pas en détail la région proche de la tête de fissure existante, donc afin de décrire correctement cette zone à forte concentration de contrainte, il est fait appel à un macro-élément par équations intégrales.

COURBES DE VARIATION DE LA CONTRAINTE ∇y EN FONCTION DE LA PROFONDEUR y EN UTILISANT UNE RELATION LIMITE EN CONTRAINTE DE L'INTERFACE MODELISEE PAR RESSORTS.



COURBES DE VARIATION DE LA CONTRAINTE $\bar{\sigma}_y$ EN FONCTION DE LA PROFONDEUR EN UTILISANT UNE LOI DE COMPORTEMENT DE L'INTERFACE.



Conclusion

L'objectif de ce travail a été de construire et mettre en oeuvre des éléments finis spéciaux capables de répondre convenablement à l'étude des déplacements et des contraintes aux interfaces dans les structures stratifiées.

En effet, on a été conduit à développer à partir d'une formulation variationnelle du type déplacement, des éléments d'interface susceptibles de respecter les conditions de continuité aux interfaces.

Deux procédures, une première utilisant une relation limite en contraintes, une autre utilisant une loi de comportement de l'interface, ont été mises au point pour l'analyse de notre étude.

Bien que ces deux procédures nous permettent de visualiser à partir des exemples traités dans ce travail l'influence de l'interface sur le comportement de la structure du sol mis en question. Elles sont approximatives et ne représentent pas très correctement les conditions réelles de la structure, vu que l'on ait imposé la rigidité pour la première procédure et une loi de comportement pour la seconde.

L'utilisation de la méthode des éléments finis présente une grande souplesse d'adaptation aux problèmes pratiques, en tenant compte de la complexité de la topologie de la structure ainsi que celle du comportement du matériau. Du point de vue pratique, l'utilisation d'éléments isoparamétriques à six et huit noeuds est coûteuse en temps. Ces éléments ont une convergence rapide, ce qui permet d'éviter l'utilisation de maillages très raffinés.

Il est à noter, en outre, que notre étude a porté sur l'analyse des interfaces dans un cas supposé linéaire, il serait impératif dans le cas où les déplacements au niveau d'interfaces deviennent très importantes de recourir à un modèle non élastique pour une étude plus exacte.

Annexes

ANNEXE A

Différentes méthodes de stockage

Afin de réduire la taille des matrices calculées, plusieurs méthodes de stockage ont été élaborées, parmi elles on citera :

1- Matrice pleine non symétrique

La matrice pleine non symétrique est de dimension $(n \times n)$, elle occupe donc n^2 nombres réels dans la mémoire de l'ordinateur.

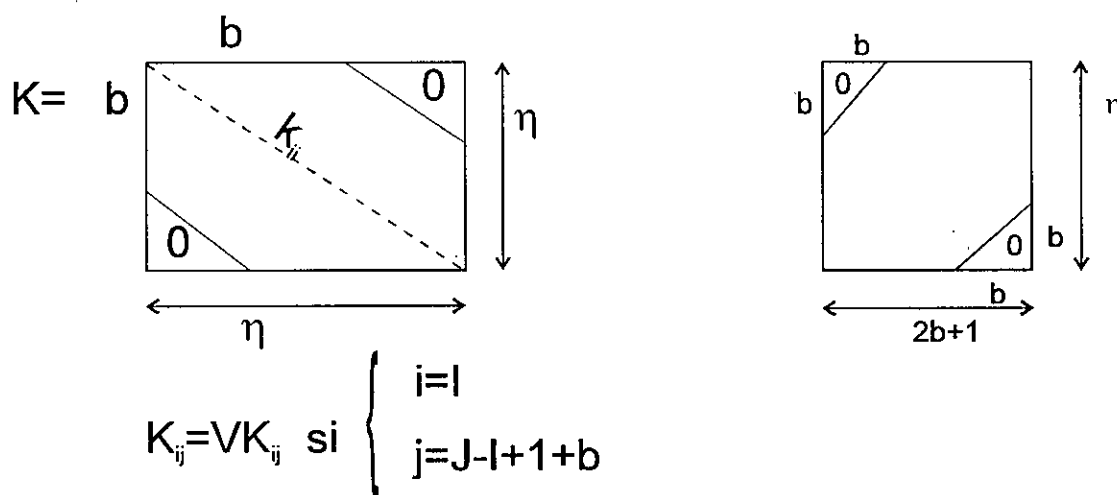
2- Matrice pleine symétrique

Vu la symétrie de la matrice, il suffit donc de stocker un triangle supérieur ou inférieur de la matrice dans un table VK, elle occupe $(n(n+1)/2)$ termes réels dans le mémoire de l'ordinateur.

3- Matrice bande non symétrique

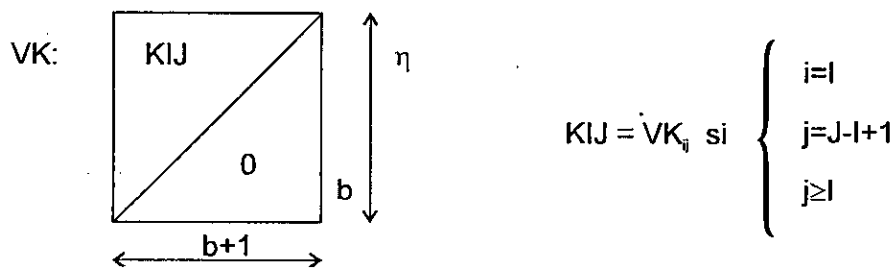
Dans une structure, une numérotation judicieuse des noeuds rend les coefficients de la matrice de rigidité globale très proche de la diagonale principale.

Nous stockons dans ce cas, la matrice redressée dans une table rectangulaire VK de dimensions $(n(2B+1))$, incluant $b(b+1)$ valeurs nulles inutiles.



4- Matrice bande symétrique

Nous stockons la matrice "redressée" dans une table rectangulaire VK de dimension $n(b+1)$

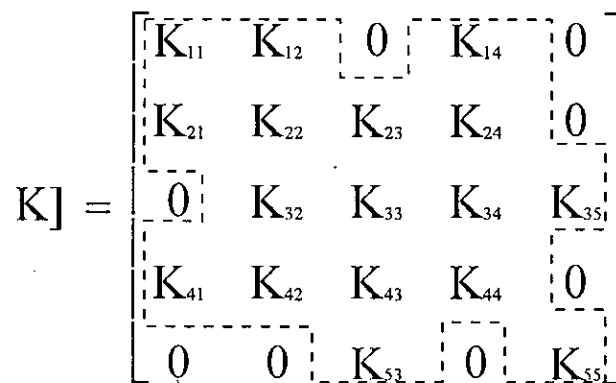


Il faut stocker $n(b+1)$ valeurs réelles incluant $(b(b+1))/2$ valeurs nulles inutiles.

On peut prendre avantage du fait que les matrices bandées peuvent être solutionnées par la “méthode de Cholesky” et, par conséquent, on a besoin d’assembler uniquement les termes à l’intérieur de la bande compte tenu de la symétrie.

5- Matrice à ligne de ciel

Le stockage ligne de ciel ou skyline est une des techniques de stockage les plus performantes. Elle consiste à stocker les termes non nuls de $[K]$ par lignes et colonnes de longueurs variables dans des tables de stockage.



6- Matrice à ligne de ciel symétrique

Elle consiste à ranger dans un tableau A à une dimension les termes $K(i, j)$ de la matrice K compris entre la diagonale et les lignes de ciel de la matrice. Ces lignes de ciel $m_j, j=1, 2, \dots, n$ représentées sur la matrice K sont définies comme étant les premiers termes non nuls de chaque colonne de K . Ainsi :

$$K(i, j) = 0 \quad \forall i < m_j \quad j=1, 2, \dots, n$$

Les différences $j-m_j, j=1, 2, \dots, n$ définissent les hauteurs de colonnes de la matrice K .

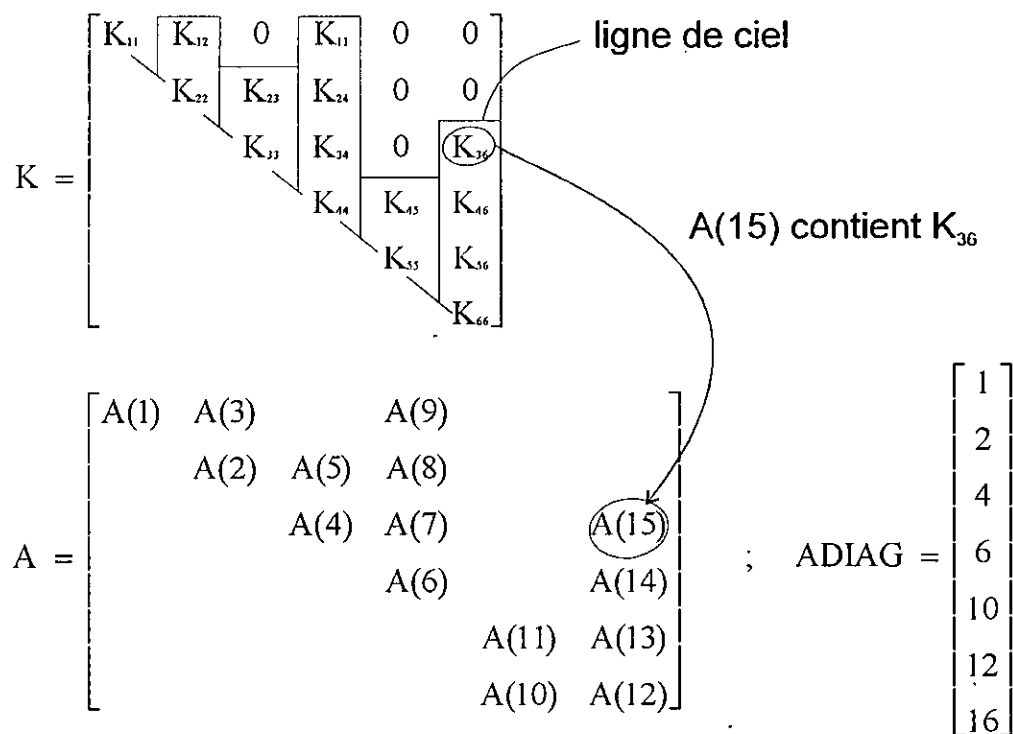


Figure A.1 : technique de stockage en ligne de ciel

Cette méthode nécessite, en plus du vecteur $\{A\}$, un autre vecteur ADIAG, dont les éléments indiquent les adresses des termes diagonaux de $[K]$ dans le vecteur $\{A\}$.

Ainsi, un élément $K(i, j)$ de $[K]$ correspond à l'élément $A(i, j)$ dans $\{A\}$ comme suit :

$$K(i, j) = A(ADIAG(j) + j - i)$$

Les éléments de ADIAG sont reliés aux lignes de ciel par :

$$ADIAG(j+1) = ADIAG(j) + j - m_j + 1$$

m_j lignes de ciel, définies comme étant les premiers termes non nuls de chaque colonne de $[K]$.

7- Matrice à ligne de ciel segmentée sur disque

Cette méthode est utilisée lorsque la matrice $[K]$ est très volumineuse ou lorsque l'ordinateur utilisé possède une mémoire de capacité réduite. Cette méthode consiste à décomposer les tables de stockage en blocs rangés sur disque et conserver en mémoire en un instant donné un ou deux blocs de chaque table.

Annexe B

Méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires

Les méthodes de résolution des systèmes linéaires peuvent être classées comme suit :

1- Méthodes itératives

Elles conduisent à la solution par une succession d'amélioration d'une solution approchée. Parmi ces méthodes, on distingue :

- la méthode de Gauss Seidel,
- la méthode de relaxation,
- minimisation de l'énergie potentielle totale.

2- Méthodes directes

Elles conduisent à la solution en un nombre d'opérations connu a priori. Parmi ces méthodes, on distingue :

- la méthode d'élimination de Gauss,
- la méthode de factorisation de Cholesky.

Ces méthodes directes de résolution sont fiables et permettent la détection des singularités.

Dans notre étude, notre choix s'est dirigé vers la méthode directe de factorisation de Cholesky, qui suit les trois étapes suivantes :

1- Factorisation

Soit $[K]$ matrice symétrique, définie positive, $[K]$ peut être factorisée sous forme :

$$[K]=[L]^T[L]$$

où $[L]$ matrice triangulaire supérieure

$[L]^T$ transposée de la matrice triangulaire supérieure

$$L_{ii} = K_{ii} \sum_{l=1}^{i-1} L_{il}^2$$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left[K_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} L_{lj} \right]$$

pour $j=i+1 \dots n$

2- Résolution du système triangulaire

$$[L]^T \{y\} = \{b\}$$

3- Résolution du système triangulaire

$$[L]\{z\} = \{y\}$$

Références bibliographiques

Bathe K.J. et Wilson E.L., 1976, "Numerical methodes in the finite element analyses", Prentice-hall.

Caperaa S., 1985, "Modélisation des interfaces et des singularités dans les structures par couplages entre les éléments finis et les équations intégrales de frontières", Docteur Ingénieur, Maître-assistant à l'Université de Limoges.

Cescotto S. et CMRLIER R., 1993, "Frictional contact finite elements based on mixed variational principles", international journal for numerical methods in engineering, Université de Liège.

Duncan J.M. et Chin-Yung Chang, SM5, 1970, "non linear analysis of stress and strain in soils", Journal of the soil mechanics and foundations division.

Desai, C.S. et Zaman, M.M., Dept of civil Eng. and Eng. Mech, Univ. of Arizona, USA, "Thin Layer element for interfaces and joints"

Gatina, J.C., 1991, "Contacts des corps élastiques effets tangentiels et normaux, formulation et résolution des problèmes inverse et direct", Institut National des Sciences Appliquées.

Gens, A.; Carol, J. et Alonso E.E., 1988, "An interface element formulation for the analysis of soil reinforcement interaction", Civil Engineering School, Technical University of Catalunya Jordigirona Salgarda.

Gens, A.; Carol, J. et Alonso E.E., 1990, "A constitutive model for rock joints formulation and numerical implementation".

Gexirun (Ke Hsu-Jun), 1981, Institute of rock and soil mechanics, Academica Sinica, Wuhan, China, "Non linear analysis of a joint element and its applications in rock engineering".
Journal of the soil mechanics and foundations division.

Noune Abdelkader, 1993, "Eléments finis d'interface et de contact frottant", Laboratoire de mécanique et matériau de l'Université de Lyon, mémoire D.E.A.

Rapport de recherche LCPC N°116, 1982, "Utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols", Laboratoire central des ponts et chaussées.

Rene-Tinawi, 1981, "Introduction aux éléments finis"

Rockey K.C., 1979, "Introduction à la méthode des éléments finis"

Sarhan Abdulrahman-Bajbouj, 1990, "Eléments finis d'interface pour le calcul des structures hétérogènes", Thèse de Doctorat à l'Université de Claude Bernard, Lyon.

Schellekens J.C.T et Deborst R., 1993, "On the numerical integration of interface elements", University of technology Netherlands.

Touzot, 1990, "Présentation de la méthode des éléments finis"

Zienkiewicz O.C. et Taylor R.L., 1991, "La méthode des éléments finis, formulation de base et problèmes linéaires"

فَقُلْ لِلَّهِ الشُّكْرُ
وَلِلَّذِينَ آمَنُوا
وَلِلَّذِينَ هَدَى
اللَّهُ لِرَبِّهِمْ
الْحَمْدَ فِي الْحَيَاةِ
الدُّنْيَا وَالْآخِرَةِ
وَلِيَوْمَ يُنْفَخُ
الصُّرُورُ

ب