

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE - CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE DES PROBLEMES DE
L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLE
PAR LA METHODE DES ELEMENTS
FINIS ET LA METHODE DES
EQUATIONS INTEGRALES ET LEUR
COUPLAGE

Proposé par :

M.K.BERRAH

M. DEMIDEM

Etudié par :

SAHA OUAFI

BERBAS MOHAMED

Dirigé par :

M. DEMIDEM

M.K.BERRAH

PROMOTION : Juillet 1993

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE DES PROBLEMES DE L'ELASTICITE BIDIMENSIONNELLE PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS ET LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES ET LEUR COUPLAGE

Proposé par :

M.K.BERRAH

M. DEMIDEM

Etudié par :

SAHA OUAFI

BERBAS MOHAMED

Dirigé par :

M. DEMIDEM

M.K.BERRAH

PROMOTION : Juillet 1993



DEDICACES

C'est avec une joie immense que je dédie ce travail :

- *A ma mère*
- *A mon père*
- *A toute ma famille*

Ainsi qu'à tous mes frères croyants en "ALLAH", dieu unique et tout puissant

M. BERBAS

- *A ma mère*
- *A mon père*
- *A mon frère et mes soeurs*
- *A ma tante*
- *A mon ami Laid*
- *A tous ceux qui me sont chers*

O. SAHA

REMERCIEMENT

Louange

à dieu qui nous

a donné la force et

le courage d' entreprendre

et d 'achever ce travail .xxx

Nous remercions vivement nos deux

promoteurs : M .K. BERRAH et M. DEMIDEM

pour leurs aides , leurs conseils et leurs encouragements

durant toute l' année . Nous remercions aussi nos amis ,

particulièrement M.HADID et B.BAALI pour leurs aides

et disponibilités .Nos vifs remerciements au personnel

du centre de calcul ,de la bibliothèque et du périodique

de l' E.N.P .Que tous les professeurs

qui ont contribué à notre formation ,

trouvent -ici- l' expression

de notre gratitude .

A tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin .





ملخص

هذا المشروع يهدف إلى دراسة المسائل المتعلقة بالوساط المرنة ذات البعدين ، باستعمال طريقة العناصر المنتهية (M.E.F) و طريقة المعادلات التكاملية في الحدود (B.E.M) . ولهذا الغرض تم دراسة العديد من المسائل بهدف المقارنة بين الطريقتين ، وكذا وضع نموذج عددي يجمع تقنيات الطريقتين (BEM و MEF) .
وأخيرا ، تم الحصول على نتائج مهمة في الحالة الخاصة بتركيز الاجهادات .

RESUME

Le présent travail consiste à l'étude des problèmes de l'élasticité bidimensionnelle par la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode des éléments frontières (BEM) .

A cette effet , de nombreux exemples ont été traité a toutes fin de comparaison par ces méthodes , d'une part et d'autre part , un modèle numérique qui combine les techniques de la MEF et la BEM a été développé .

Enfin d'importants resultats ont été obtenus pour le cas particulier de concentration de contraintes .

ABSTRACT

The study of the finite element method and boundary element method in the two dimentional elasticity case is presented in this work .

For comparaison purposes , several examles have been tested with these methods and a numerical model wich combines the tow technics has been developed .

Also important results have been obtaned for the particular case of high stress concentration





SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

1ère PARTIE ELASTICITE

CHAPITRE I :	NOTION D'ELASTICITE	2
	I - 1 Introduction	3
	I - 2 Equations gouvernantes	3
	I - 3 Elasticité plane	8

2ème PARTIE METHODE DES ELEMENTS FINIS

CHAPITRE II :	PRESENTATION DE LA MEF	
	II - 1 Introduction	13
	II - 2 Historique	14
	II - 3 La MEF pour l'élasticité plane	16
	II - 3 - 1 Introduction	16
	II - 3 - 2 Différents types de formulation	16
	II - 3 - 3 Formulation déplacement	17
	II - 3 - 4 Formulation isoparamétrique	28

CHAPITRE III PRESENTATION DES PROGRAMMES MEFEP et MEFISO

	III - 1 Introduction	32
	III - 2 Structure du programme MEFEP	33
	III - 3 Structure du programme MEFISO	34



3ème PARTIE METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX

FRONTIERES

Introduction	41
Historique	42

CHAPITRE IV METHODE DES RESIDUS PONDERES

IV - 1 Introduction	45
IV - 2 Méthode des résidus pondérés	45
IV - 2 - 1 Méthode des moments	47
IV - 2 - 2 Méthode de collocation par point	47
IV - 2 - 3 Méthode de collocation par sous-domaine	48
IV - 2 - 4 Méthode de GALERKINE	49

CHAPITRE V PRESENTATION DE LA BEM

V - 1 Introduction	51
V - 2 Formulation de l'équation intégral	51
V - 3 Discritisation	64
V - 4 Ecriture matricielle	65
V - 5 Mouvement de corps rigide	70
V - 6 problème de coin	73

CHAPITRE VI PRESENTATION DU PROGRAMME ELLINBE

VI - 1 Introduction	76
VI - 2 Etapes de résolution	77
VI - 3 Structure du programme ELLINBE	77
VI - 4 Présentation du programme	79



4ème PARTIE COUPLAGE DE LA MEF ET LA BEM

CHAPITRE VII COMPARAISON ENTRE LA MEF ET LE BEM

VII - 1 Introduction	82
VII - 2 Comparaison	83

CHAPITRE VIII PRESENTATION DU COUPLAGE

VIII - 1 Introduction	87
VIII - 2 Historique	88
VIII - 3 Différents méthodes de combinaison	88
VIII - 4 Présentation du couplage	92
VIII - 4 - 1 Introduction	92
VIII - 4 - 2 Equation des éléments finis	93
VIII - 4 - 3 Equations des éléments frontières	94
VIII - 4 - 4 Combinaison	95
VIII - 5 symétrisation	95

CHAPITRE IX PRESENTATION DU PROGRAMME

IX - 1 Introduction	98
IX - 2 Démarches à suivre	98
IX - 3 Structure du programme	100
IX - 4 Présentation du programme COUPLAGE	102



**5^{ème} PARTIE : APPLICATIONS**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE X APPLICATIONS

X - I Applications :	
X - I - 1 Application 1	110
X - I - 2 Application 2	115
X - I - 3 Application 3	119
X - I - 4 Application 4	123
X - II COMPARAISONS	
X - II - 1 Comparaison 1	127
X - II - 2 Comparaison 2	129
X - II - 3 Comparaison 3	131
X - II - 4 Comparaison 4	132
X - III INTERPRETATION DES RESULTATS	133

CONCLUSION	135
------------	-----



INTRODUCTION :

Le calcul des structures et en particulier les milieux continus couvre une grande variété d'application dans les secteurs industriels de la construction ; Génie civil , mécanique , aéronautique , nucléaire , ... etc .

La résolution des problèmes de l'élasticité nécessite la formulation séparée d'équations aux dérivées partielles , ces dernières sont tellement compliquées que l'on ne saura les résoudre par les méthodes mathématiques actuelles .

Grâce à l'outil informatique et au développement des méthodes numériques , il est devenu possible de résoudre les problèmes de la mécanique des structures , ... etc . Les méthodes numériques d'analyse ont reçu une attention considérable ces dernières années et ce depuis l'apparition des ordinateurs et les capacités qu'ils offrent . Parmi ces méthodes , on a la méthode des éléments finis (apparu vers les années 60 c'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique) la méthode des éléments frontières (vers les années 70 dont la caractéristique principale est de réduire la dimension du problème d'une unité).

PRESENTATION DU TRAVAIL :

L'idée principale de notre travail est de développer un modèle numérique qui combine la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales aux frontières . Pour ce faire , on doit les étudier séparément . Nous avons classé notre travail en trois parties précédé d'un rappel sur l'élasticité linéaire .

Dans la première partie , on a traité la méthode des éléments finis puis on a élaboré deux programmes ; l'un utilise l'élément rectangulaire avec numérotation automatique des nœuds . L'autre programme utilise les éléments isoparamétriques quadrilatérale à degrés de liberté conçu pour l'analyse des problèmes à géométries complexes .

La deuxième partie concerne une étude théorique qui nous a mené à développer les équations intégrales de frontières , suivit par l'élaboration d'un programme qui utilise l'élément linéaire .

Dans la troisième partie , on s'est intéressé au couplage des deux précédentes méthodes . Au début on a entamé l'aspect théorique du couplage avec quelques types de combinaisons puis un programme pour le couplage de la méthode des éléments finis et la méthode des éléments frontières est présenté .

Enfin , on a procédé à une étude comparative concernant l'application de ces différents méthodes pour différents types d'éléments de structures . -

PREMIERE PARTIE



CHAPITRE I

NOTION D'ELASTICITE



NOTION D'ELASTICITE

I-1- INTRODUCTION :

un modèle élastique est caractérisé par la correspondance bi-univoque entre les déformations et les contraintes, cette correspondance implique le caractère réversible de la déformation, autrement dit, un corps élastique revient à son état initial une fois déchargé.

La théorie de l'élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces-déplacements.

Pour un solide soumis à un chargement donné, cette théorie a pour but l'étude des contraintes et déformations qui en résultent avec des hypothèses :

- Les déformations sont supposées petites.
- La loi de comportement reliant les contraintes et les déformations est linéaire.
- Le solide est élastique, homogène, isotrope ;

I-2- EQUATIONS GOUVERNANTES :

I-2-1- Equations d'équilibre :

L'état de contrainte en un point du corps est défini par le tenseur de contrainte $[\sigma]$ tel que :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (I-1)$$

Où :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

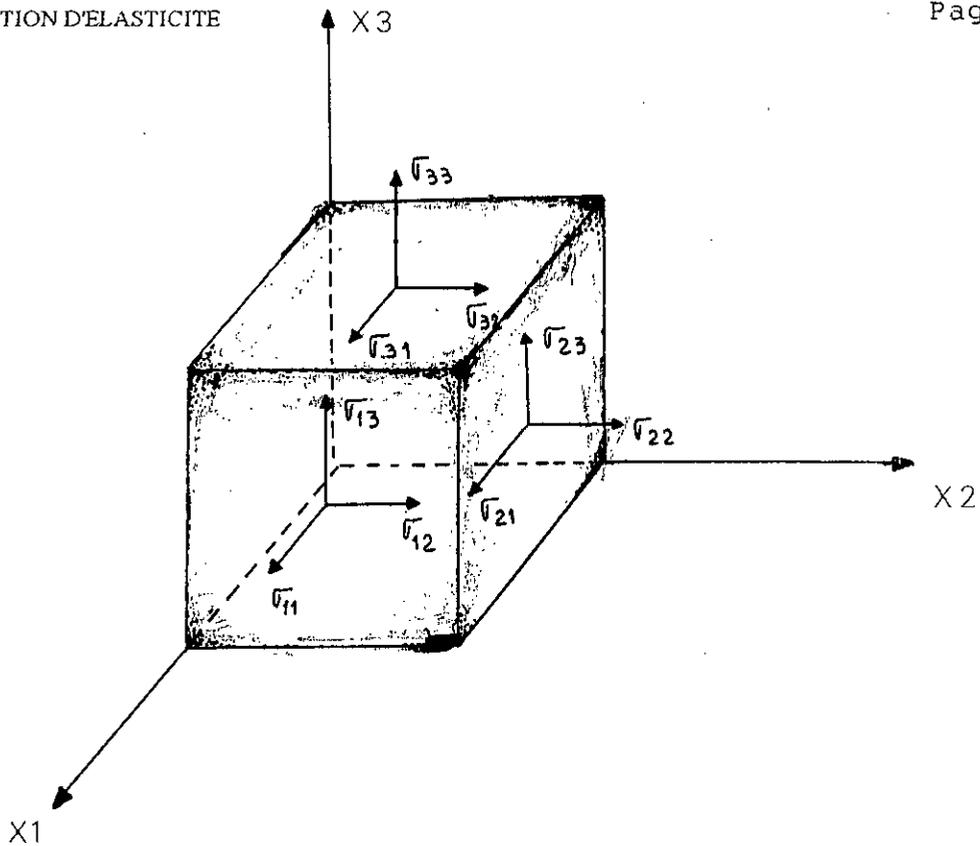


Fig-1 tenseur de contrainte [σ]

Les composantes de ce tenseur doivent satisfaire les équations d'équilibre , qui s'exprime comme suit :

$$\sigma_{jk,j} + b_k = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad k = 1, \dots, 3$$

$$j = 1, \dots, 3 \quad (1-2)$$

Dans les quelles :

b_k : représente les composantes des forces volumiques suivant les directions k sur la frontière , Les équations d'équilibre sont satisfaites par les équations suivantes :

$$P_i = \sigma_{ij} n_j = P_i \quad i = 1, \dots, 3$$

$$j = 1, \dots, 3 \quad (1-3)$$

Où n : sont les cosinus directeurs de la normale n par rapport à la direction x

P : forces surfaciques prescrites sur la frontière

I-2-2- EQUATIONS DEFORMATION - DEPLACEMENTS :

L'état de déformation $[\varepsilon]$ tel que :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (I-4)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$

Les relations déformations - déplacements pour la théorie linéaire sont :

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 3 \\ j = 1, \dots, 3 \end{matrix} \quad (I-5)$$

I-2-3- EQUATION DE COMPATIBILITE :

Il existe des relations qui expriment les restrictions sur la forme des déformations pour que le système d'équations soit intégrable .

Ces conditions d'intégrabilité sont appelées conditions de compatibilité de déformations , elles sont exprimées par les relations suivantes :

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial \delta_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \delta_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \delta_{23}}{\partial x_1} \right]$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \delta_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \delta_{13}}{\partial x_2} \right] \quad (I-6)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \delta_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \delta_{12}}{\partial x_3} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2}$$

(I-7)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1}$$

I-2-4- RELATION CONTRAINTES - DEFORMATIONS :

Les états de contraintes et de déformations sont reliés de la manière suivante :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

Matériau isotrope :

Un tel matériau est caractérisé par des propriétés élastiques inchangées dans toutes les directions .

Les constantes élastiques sont alors réduites à deux constantes indépendantes dites coefficients de LAME λ et μ , les relations contraintes -déformations s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{44} \\ \sigma_{55} \\ \sigma_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & \text{Sym} & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{44} \\ \varepsilon_{55} \\ \varepsilon_{66} \end{bmatrix} \quad (I-10)$$

Ou encore : $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon \delta + 2\mu \varepsilon$

Avec :

$$\lambda = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{(1 + \nu)}$$

Dans les quelles :

E : module de YOUNG

ν : coefficient de POISSON

G : module d'élasticité transversal .

I- 3-Elasticité plane :

Les problèmes de la théorie d'élasticité sont simplifiés dans une large mesure lorsque les tensions ou les déformations sont toutes parallèles à un plan .On a donc affaire à des problèmes bidimensionnels .

I- 3-1-Etat de contraintes planes :

considérons un cylindre de hauteur très petite par rapport aux dimensions dans le plan (x_1, x_2) (fig -2)

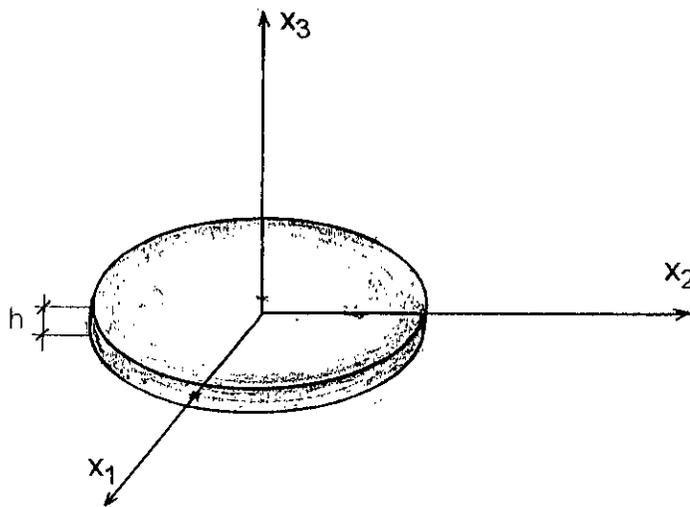


fig - 2 Etat de contrainte plane

Le cylindre est chargé latéralement et indépendamment de l'axe x_3 .Le chargement doit être parallèle au plan moyen et distribué symétriquement par rapport à celui - ci .

Le modèle de contrainte plane ainsi obtenu convient bien aux plaques minces sollicitées dans leur plan . les hypothèses de base de ce modèle sont :

$$\sigma_{33} = \sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$$

Pour un matériau isotrope , la loi de HOOKE donne :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \sigma_{11}/E - \nu \sigma_{22}/E \\ \varepsilon_{22} &= -\nu \sigma_{11}/E + \sigma_{22}/E \\ \varepsilon_{12} &= (1+\nu) \sigma_{12}/E\end{aligned}\quad (I-11)$$

Doù l'on tire les relations contraintes -déformations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix}\quad (I-12)$$

Les contraintes σ_{11} , σ_{22} , et σ_{12} sont indépendantes de x_3 , de même les déplacements seront des fonctions de x_1 et x_2 seulement :

$$U_1 = U_1(x_1, x_2)$$

$$U_2 = U_2(x_1, x_2)$$

Ces déplacements sont supposés être constants sur toute l'épaisseur du cylindre .

L'effet de POISSON donne naissance à un déplacement U qui peut être calculé à partir de la relation contraintes-déformations .

Pour ε_{33} :

$$\varepsilon_{33} = \partial U_3 / \partial x_3 = -\nu \sigma_{11}/E - \nu \sigma_{22}/E = -\nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})/E\quad (I-13)$$

I- 3- 2- Etat de déformation plane :

Considérons un cylindre élancé dont la dimension suivant la direction x est grande par rapport aux deux autres dans le plan $x_1 x_2$ (fig - 3)

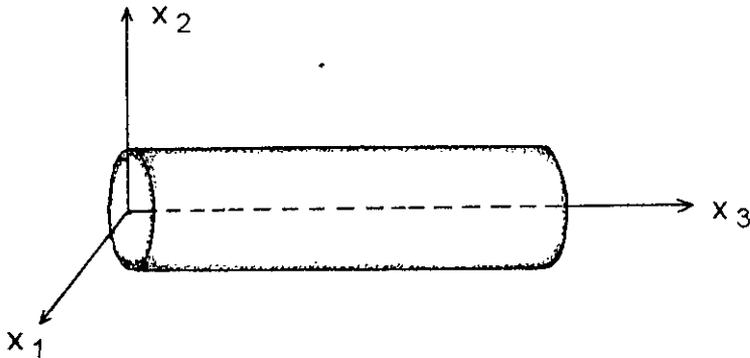


Fig - 3 Etat de déformation plane

Ce modèle est considéré comme étant un cas de déformation plane .

Les hypothèses de base se traduisent par les relations :

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$$

Les déplacements dans le plan (x_1, x_2) sont indépendants de x_3 i.e :

$$U_1 = U_1(x_1, x_2)$$

$$U_2 = U_2(x_1, x_2)$$

Il faut noter que la contrainte est telle que : $\sigma_{33} \neq 0$, elle peut être déterminée a partir de la loi de HOOKE :

$$\varepsilon_{33} = (1 + \nu) \sigma_{33} / E - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) / E = 0$$

$$\text{D'où : } \sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / E \quad (I-14)$$

De la même manière qu'en contrainte plane , on établit les relations contraintes-déformations en utilisant les équations suivantes :

$$\varepsilon_{11} = \sigma_{11} / E - \nu \sigma_{22} / E - \nu \sigma_{33} / E$$

$$\varepsilon_{22} = -\nu \sigma_{11} / E + \sigma_{22} / E - \nu \sigma_{33} / E$$

$$\varepsilon_{12} = (1 + \nu) \sigma_{12} / E$$

(1-15)

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

(1-16)

Remarque :

On peut passer aisement des formules relatives aux déformations planes , aux formules relatives aux contraintes planes , en remplaçant le module de YOUNG par $E = E / (1 - \nu^2)$ et le coefficient de POISSON par :

$$\nu = \nu / (1 + \nu)$$

DEUXIEME PARTIE

**METHODE DES
ELEMENTS FINIS**

CHAPITRE II



PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

II - 1 INTRODUCTION :

le calcul des structures est en particulier les milieux continus , couvre une grande variété d' application dans les secteurs industriels de la construction genie-civil , mécanique , aéronautique ,...etc .

Ce domaine a pour objet , la modélisation théorique au stade de la conception d' une structure ou d' un système mécanique , ce qui permet de faire la simulation du comportement et d'entraîner ainsi une procédure d'optimisation des forces et des dimensions , compte tenu des fonctions de la structure et du choix du matériau .

Parmi les étapes de conception d' une structure , on a deux étapes très importantes à s' avoir :

- la modélisation de la structure (modèle mathématique)
- la simulation du modèle de calcul (numérique)

Pour la modélisation , il existe plusieurs méthodes qui permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce a des équations aux dérivées partielles . Parmi ces méthodes on a : la méthode des éléments finis ; c'est une méthode très générale , qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique ; problèmes stationnaires , non stationnaires , linéaires , non linéaires , à une ou deux ou trois dimensions et même les milieux hétérogènes .

II - 2 HISTORIQUE :

A l'époque , du début du 19^{ème} siècle , grâce aux travaux de NAVIER (1819) sur les structures hyperstatiques , MAXWELL (1864) , GASTIGLIANO (1878) , MOHR sur les méthodes énergétiques constitués le point de départ logique de l'histoire de l'analyse des structures ,c'est à cette période que les notions d'analyses des structures composées d'assemblages de barres ont été mise au point et présentant la méthodologie précédant l'analyse matricielle des structures .

Au cours du 20^{ème} siècle , vers 1920 MANEY au ETATS-UNIS et OSTENFELD au DANEMARK dégagèrent les idées de base d' une approche nouvelle de l'analyse des poutres en treillis et des ossatures fondées sur le choix d' inconnues de déplacement .

Ce pendant , des limitations sévères sur la taille de certains problèmes peuvent apparaître à cause de système d'équations à résoudre prévalurent jusqu'à 1932 , date à laquelle HARDY CROSS introduisit la méthode de la distribution des moments , cette méthode a rendu envisageable la résolution de problèmes considérablement plus complexes .

Avec le développement de l' ordinateur , la résolution des systèmes d' équations ne posait plus de problèmes , cela a provoqué un retour aux méthodes classiques d'analyse . de là , naît ' la méthode matricielle ' , utilisée surtout pour les structures treillis :

- méthode des forces ARGYRIS , DENKE (1955)
- méthode des déplacements ARGYRIS , TURNER (1956)

Enfin , les deux publications importantes de ARGYRIS ,KELSEY et de TURNER ,CLOUTH , MARTIN , TOPP qui marient les notions d' analyse des structures en treillis et d' analyse des milieux continus et présentèrent les procédures qui en résultent sous forme matricielles , eurent une influence considérable sur le progrès de la méthode des éléments finis dans les années qui suivent .

Les travaux de COURANT (1940) ont présenté aussi un intérêt particulier en raison de leur orientation vers des phénomènes régis par les équations applicables dans d' autres domaines que celui des structures .

Les bases théoriques de la MEF reposent d' une part sur la formulation énergétique et la mécanique des structures et d' autre part sur les méthodes d'approximation : RITZ (1908) GALERKINE (1915) .

Dés 1960 , la méthode des éléments finis subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- Reformulation à partir de considération énergétiques et variationnelles sous la forme des résidus pondérés .
- Création d'éléments de haute précisions (élément à cotés curviligne et isoparamétriques) .
- Utilisation de la M.E.F dans la résolution de problèmes non linéaires et non stationnaires , dans le domaine des structures , aussi que dans d' autres domaines telles que la mécanique des fluides , thermique ...etc .
- Construction d' une base mathématique de la M.E.F à partir de l' analyse variationnelle .

II - 3 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR L' ELASTICITE PLANE

II 3 - 1 INTRODUCTION :

la connaissance de la répartition des contraintes et des déformations dans les milieux élastiques constitue une étape de base dans le plan de travail d' un ingénieur .

Il existe en général , deux grandes catégories de solutions à ce problème :

- Solution mathématique : régie par des équations différentielles constituant ainsi un système continu .*
- Solution discrète : consiste en la subdivision du milieu en sous-domaines élémentaires pour aboutir enfin à un système discret .*

Les méthodes de discrétisation se sont avérées très utiles pour la résolution de plusieurs types de problèmes surtout avec l' apparition de calculateurs digitaux .

La M.E.F est l' une de ces méthodes de discrétisation , devenue à l' heure actuelle , un outil à domaine d'application très vaste .

II-3-2 DIFFERENTS TYPES DE FORMULATION :

Il existe trois formulations différentes de la méthode :

1- Formulation contraintes : *la formulation considère le champ de contraintes comme inconnue primaire du problème , elle se base sur la théorie de l'energie potentielle .*

2- Formulation déplacement : considère le champ de déplacements comme inconnue primaire du problème, basée sur la stationnarité de l'énergie potentielle.

3- Formulation mixte : cette formulation considère le champ de déplacements et de contraintes comme inconnue primaire du problème d'ou le nom mixte.

Dans ce qui suit, notre étude se basera sur la formulation déplacement que nous allons exposer ci-après.

II-3-3 FORMULATION DEPLACEMENT :

Description : cette formulation est pratiquement la plus utilisée dans la résolution par la M.E.F, elle suppose le champ de déplacement inconnu primaire du problème, à partir des quels seront déterminées les contraintes et les déformations en tout point du milieu, en utilisant les relations d'élasticité.

Elle se résume dans les étapes suivantes :

- Subdivision du milieu à étudier par des lignes (cas plan) ou par des plans (cas tri-dimensionnel) imaginaires, ce qui donne un certain nombre finis d'éléments.
- ces éléments sont supposés reliés entre eux par un nombre fini de points appelés "points nodaux" ou "noeuds" dont les déplacements seront les inconnus du problème.
- On choisit une fonction (ou plusieurs) appelée(s) "fonction(s) de forme", qui définira au mieux possible le champ de déplacement de ces noeuds.

- On détermine le système de forces concentrées aux noeuds , équivalent à l' ensemble des charges appliquées aux milieux .
- On évalue la matrice de rigidité $[K_e]$ de chaque élément fini , puis celle du milieu entier par assemblage des matrices élémentaires .
- On résoud le système d' équations pour déterminer les déplacements aux noeuds , puis les déformations et les contraintes .

II-3-3-1 EVALUATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

A / CHOIX DE LA FONCTION DEPLACEMENT :

Comme la formulation choisie est une formulation déplacement , on doit donc imposer un champ de déplacement qui rempli les conditions suivantes :

- 1) Les fonctions choisies doivent être continues au sein de l'élément , ainsi qu'au passage des frontières entre les éléments , lorsque les éléments adjacents sont de même type ou possèdent les mêmes fonctions de déformation sur les frontières .
- 2) Les équations force-déplacement découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement de corps rigide .
- 3) Les fonctions choisies doivent permettre la représentation des valeurs uniformes pour toutes les contraintes ou déformations .
- 4) Le nombre de termes indépendants dans le polynome doit être égale au nombre de composantes des déplacements qui sont à calculer .

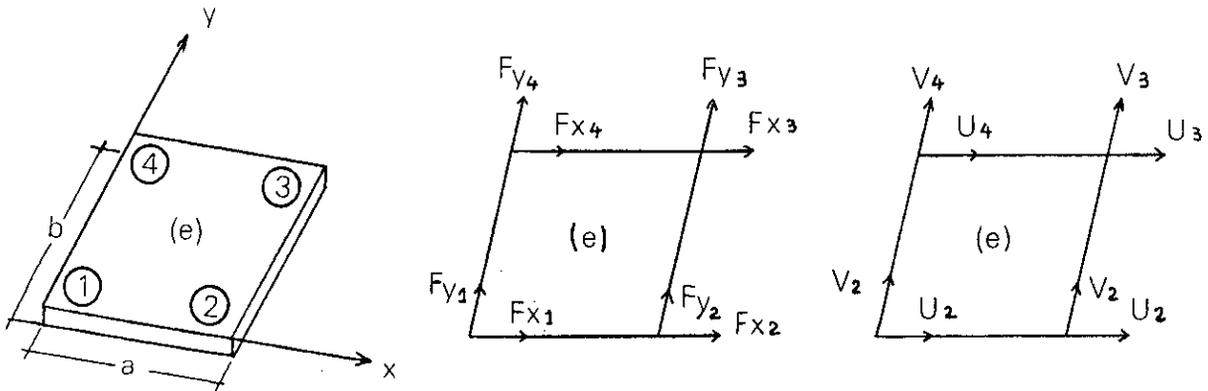
B / CALCUL DE LA RIGIDITE DE L'ELEMENT RECTANGULAIRE

L'élément , utilisé pour l'étude de l'élasticité plane , est l'élément rectangulaire à quatre noeuds avec deux degrés de libertés pour chaque noeud à s'avoir deux translations u et v .

L'élaboration de la matrice des raideurs de l'élément utilisé passe par sept étapes de base :

ETAPE 1:

Cette étape consiste en un choix du système de coordonnées convenable et la numérotation de l'élément de référence :



1-i Element rectangulaire 1-ii Forces nodales 1-iii Déplacements nodaux

Fig-1 :Elément rectangulaire

On note par : $\{a(x,y)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$

le vecteur déplacement en un point de coordonnées (x,y)

On note le vecteur déplacement nodaux comme suit :

$$\{a^e\} = \begin{Bmatrix} \{a_1\} \\ \{a_2\} \\ \{a_3\} \\ \{a_4\} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } \{a_i\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

ETAPE 2 :

Elle concerne le choix de la fonction de déplacement qui peut être représenté par deux polynomes en x et y :

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$$

Le nombre de d.d.l = 8 \Rightarrow on a choisi deux polynomes à quatre coefficients inconnus pour chacun .

$$\text{on a : } \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{a(x,y)\} = [f(x,y)] \{\alpha\}$$

ETAPE 3 :

On substitue (x,y) par les coordonnées des quatre noeuds de l'élément de référence , on obtient alors :

$$\{a^e\} = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ f(x_3, y_3) \\ f(x_4, y_4) \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\{a^e\} = [A]\{\alpha\} \Rightarrow \{\alpha\} = [A]^{-1} \{a^e\}$$

$$\{a(x, y)\} = [f(x, y)] [A]^{-1} \{a^e\}$$

soit :

$$\{a(x, y)\} = [N(x, y)] \{a^e\}$$

ETAPE 4 :

On exprime les déformations en fonction des déplacements :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Leftrightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [L] \{a(x, y)\}$$

on aura : $\{\varepsilon(x, y)\} = [L] [N] \{a^e\}$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B] \{a^e\}$$

[B] : est appelée matrice des déformations

ETAPE 5 :

Après avoir déterminé les déformations, on en déduit les contraintes par le biais de la loi de HOOKE généralisé :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D] \{\varepsilon(x, y)\}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

avec : $d_{11} = d_{22} = E(1 - \alpha\nu) / ((1 + \nu)(1 - \nu - \alpha\nu))$

$$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11} / (1 - \alpha\nu)$$

$$d_{33} = E / 2(1 + \nu)$$

on a : $\{\sigma(x, y)\} = [D] [B] \{a^e\}$

$$\{\sigma(x, y)\} = [H(x, y)] \{a^e\}$$

[H] : est appelée matrice des contraintes .

ETAPE 6 :

Cette étape permet de trouver une relation entre les forces nodales et les déplacements .

On appliquant le théorème des travaux virtuels on a :

travail des forces extérieures = travail interne total

$$\{a_*^e\}^T \{F^e\} = \int_v \{\epsilon_*^e\}^T \{\sigma\} dv$$

On a :

$$\{a_*^e\}^T \{F^e\} = \left[\int_v \{a_*^e\}^T [B]^T [D] [B] dv \right] \{a^e\}$$

$$\{F^e\} = \left[\int_v [B]^T [D] [B] dv \right] \{a^e\}$$

Elle est de type : $\{F^e\} = [K^e] \{a^e\}$

on a alors : $[K^e] = \left[\int [B]^T [D] [B] dv \right]$

$[K]$: est appelée matrice de rigidité ou des raideurs .

pour notre cas on a $dv = t \cdot dx \cdot dy$

$$[K^e] = t \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] dx \cdot dy .$$

0 0

ETAPE 7:

Lors de cette étape , on doit exprimer le vecteur élémentaire des forces nodales et ceci à partir des charges cohérentes qui s'appliquent à l'élément considéré .

D'après le théorème des travaux virtuels on a :

$$\{F^e\} = \int_V [N]^T \{Q\} dv$$

$\{Q\}$: chargement cohérent .

Pour démontrer ceci on a :

$$\delta(w^*_{int}) = \delta(w^*_{ext})$$

avec : $\delta(w^*_{ext}) = \delta(\{a^{e*}\} \{q^e\})$

Le travail effectué par les forces nodales $\{q^e\}$ directement appliqué aux noeuds , lors du déplacement virtuel $\delta\{a^*\}$.

$$(w^*_{int}) = \delta[\{\epsilon^*\}^T \alpha - \{a^*(x, y)\}^T . Q]$$

C'est le travail des forces internes ;

$$(\{a^{e*}\}^T \{q^e\}) = \int_V [\{\epsilon^*\}^T - \{a^*(x, y)\}^T . Q] dv$$

$$(\{a^*_e\}^T \{q^e\}) = \{a^*_e\}^T \left[\int_V [B^T . D . B] dv \right] \{a^e\} - \{a^*_e\}^* \int_V N^T . Q^T dv$$

$$\{q^e\} = [K^e] \{a^e\} - \int_V N^T . Q dv$$

$$\{q^e\} = [K^e] \{a^e\} - \{f^e\}$$

donc on aura finalement :

$$\{F^e\} = \int_V [N]^T \{Q\} dv$$

II-3-3-2 PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE :

La matrice de rigidité est :

- 1- symétrique en vertu du théorème MAXWELL-BETTI
- 2- singulière avant l'introduction des conditions au limites , ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément .
- 3- définie positive , ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle .

II-3-3-3 REGLES D'ASSEMBLAGE :

la phase d'assemblage consiste à construire les matrices [K] et [F] de la structure complète à partir des matrices caractéristiques des différents éléments $[K^e]$, $\{F^e\}$, préalablement calculer .

En utilisant l'approche énergétique on peut définir la méthode d'assemblage :

Soit Π^e l'énergie potentielle total de l'élément e:

$$\Pi^e = 1/2 \cdot \{u^e\}^T [k^e] \{u^e\} - \{u^e\}^T \{f^e\} \quad (II - 1)$$

Si les éléments ont la compatibilité requise , l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires , soit :

$$\Pi = \sum_{\text{élément}} \Pi^e = \sum_{\text{élément}} \{1/2 \{u^e\}^T [k^e] \{u^e\} - \{u^e\}^T \{f^e\}\} \quad (\text{II - 2})$$

La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle de type :

$$\{u^e\} = [\beta^e] \{u\} \quad (\text{II - 3})$$

avec $[\beta^e]$: matrice de localisation ou de connectivité géométrique dont les éléments sont des 0 ou des 1 .

Chaque relation (II - 3) permet de repérer ou de localiser les d.d.l de chaque élément dans l'ensemble des d.d.l de la structure .

En utilisant les relations (II - 1) et (II - 3) on peut écrire :

$$\Pi = \sum_{\text{élément}} 1/2 \{u\}^T [\beta^e]^T [k^e] \{\beta^e\} \{u\} - \{u\}^T [\beta^e] \{F^e\}$$

d'ou : $\Pi = 1/2 \{u\}^T [k] \{u\} - \{u\}^T \{F\}$

avec : $[k] = [\beta^e]^T [k^e] [\beta^e]$; matrice de rigidité de la structure complète .

$$\{F\} = \sum_{\text{élément}} [\beta^e] \{F^e\} ; \text{ vecteur des forces équivalentes .} \quad (\text{II - 4})$$

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous-matrices de rigidité nodale de chaque élément .

II-3-3-3-4 CONVERGENCE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

La convergence de la méthode des éléments finis vers la solution théorique s'effectue au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente .

Les conditions de convergence sont :

a / Element complet :

les fonctions de déplacement doivent être en mesure de représenter :

- déplacements de corps rigide .
- état de déformation constante .

b / Element compatible :

les déplacements au sein des éléments et à travers les limites , séparant les éléments , doivent être continus .

Physiquement , la compatibilité assure qu'il n'y aura pas apparition de vides où de recouvrements entre les éléments une fois l'assemblage est fait . La compatibilité est difficile à satisfaire lorsque les d.d.l des noeuds sont dépendants (flexion des poutres , plaques , coques..) . Il est avantageux d'avoir des d.d.l indépendants .

II-3-4 ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES

II-3-4-1 INTRODUCTION :

Dans le cas général , la forme de la structure est arbitraire , d'où on ne peut pas la modéliser par des éléments de formes régulières , donc on a recours à d'autres éléments qui peuvent mieux discrétiser le domaine , ces éléments sont appelés : éléments isoparamétriques , superparamétriques et subparamétriques .

Les éléments isoparamétriques sont ceux pour lesquels les fonctions de déplacement sont les mêmes que les fonctions de forme ceci n'est pas toujours nécessaire , il peut être plus avantageux d'utiliser les fonctions de forme et d'interpolation d'ordre différents . Si la fonction de forme est d'ordre supérieur à la fonction d'interpolation (déplacement) , l'élément est superparamétrique , dans le cas contraire il est subparamétrique .

Il est visible que pour les autres structures à géométries complexes et chargement simple , l'élément superparamétrique est plus avantageux . Le cas contraire est valable pour les éléments subparamétriques .

II-3-4-2 ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES QUADRILATERALS

A HUIT d.d.l. :

Les fonctions de déplacement sont :

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$$

$$v(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy$$

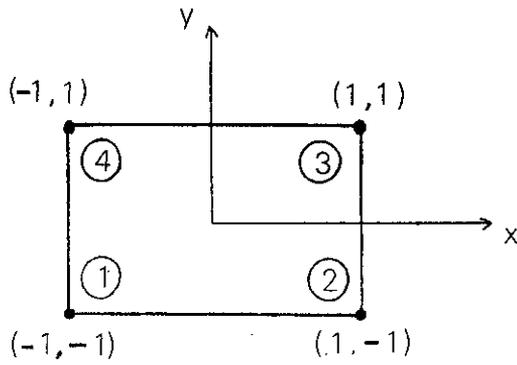


Fig 2-1 Elément de référence

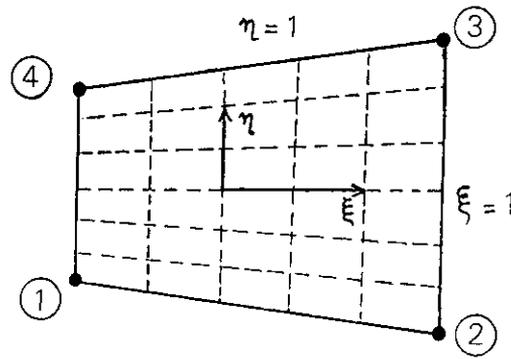


Fig 2-2 Elément déformé

Fig 2 : Elément isoparamétrique quadrilatérale

Les déplacements internes (u) en fonction du déplacement nodaux (u_i) :

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) u_i = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) v_i = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de forme sont :

$$N_1(x, y) = 1/4(1 - x)(1 - y)$$

$$N_2(x, y) = 1/4(1 + x)(1 - y)$$

$$N_3(x, y) = 1/4(1 + x)(1 + y)$$

$$N_4(x, y) = 1/4(1 - x)(1 + y)$$

la transformation du système de coordonnées se fait comme suit :

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i$$

avec : $N_i(\xi, \eta) = N_i(x, y)$

La fonction N_i prend la valeur (1) au point 'i' et (0) ailleurs .

En utilisant le principe des travaux virtuels , on obtient la matrice de rigidité :

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega$$

La matrice [D] est la matrice des propriétés physiques .

la matrice [B] est la matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux :

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [B] \{U\}$$

puisque N_i est défini en fonction de (ξ, η) on doit changer les dérivées ;

$$\partial / \partial x \text{ et } \partial / \partial y \text{ par } \partial / \partial \xi \text{ et } \partial / \partial \eta .$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \xi \\ \partial N_i / \partial \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial N_i / \partial x \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial N_i / \partial y \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x \\ \partial N_i / \partial y \end{bmatrix}$$

avec :

$$[J]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \partial N_1 / \partial \xi & \partial N_2 / \partial \xi & \partial N_3 / \partial \xi & \partial N_4 / \partial \xi \\ \partial N_1 / \partial \eta & \partial N_2 / \partial \eta & \partial N_3 / \partial \eta & \partial N_4 / \partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$= 1/4 \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 1-\eta & 1+\eta & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité [K] devient alors :

$$[K] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] [J] d\xi d\eta$$

CHAPITRE III

*PRESENTATION
DES PROGRAMMES
MEFEP ET MEFISO*



PRESENTATION DU PROGRAMME MEFEP ET MEFISO

INTRODUCTION :

La résolution d'un problème par la MEF et d'autres méthodes numériques nécessite la manipulation de matrices et vecteurs de tailles assez importantes et la résolution du système d'équations d'ordre élevé .Le recours à la programmation devient alors indispensable .

Mathématiquement , la MEF revient à poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations simultanées, écrit sous forme :

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

On a élaboré deux programmes ; l'un utilise des éléments rectangulaires avec numérotation automatique , qu'on a appelé : MEFEP .

L'autre utilise les éléments isoparamétriques, dans le cas général , qu'on a nommé :MEFISO

Notons que :

MEFEP designe :

(M)éthode des (E)léments (F)inis pour (E)lasticité (P)lane

MEFISO designe :

(M)éthode des (E)léments (F)inis pour éléments (ISO)paramétrique .

III-2 Structure du programme MEFEP

:

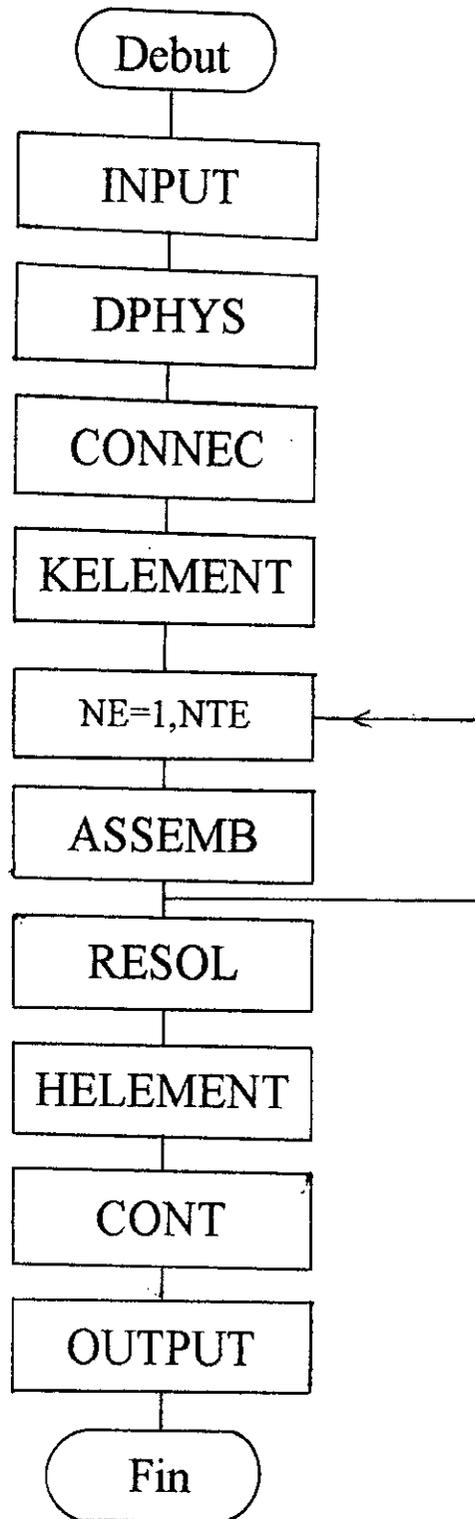


fig-1 structure globale du programme MEFEP

III- 2 - 1 ENTREE DES DONNEES :

Les données de la structure à modéliser sont stocker dans un fichier d'entré .
l'introduction et le control de ces données se font sur un format libre pour des raisons de commodité .

La lecture des données se fait par appel de la subroutine INPUT .

Ces données consiste en :

1- INFORMATION GENERALE :

- NALPHA : code d'étude := 0 pour contrainte plane
= 1 pour déformation plane
- E : module de YOUNG
- NU : coefficient de POISSON
- LxH : dimention du corps
- NEX : nombre d'élément selon x
- NEY : nombre d'élément selon y

2- CONDITIONS AUX LIMITES :

- NNR : nombre de noeuds restreints
- NNCH : nombre de noeuds chargés
- DPHYS : subroutine qui calcule la matrice d'élasticité [D] .
- CONNEC : subroutine génère la connectivité des noeuds
de chaque élément .

ASSEMBLAGE DES MATRICES :

- a/ KELEMENT : avant de faire l'assemblage , on doit calculer la matrice de rigidité élémentaire une fois pour toute , car tous les éléments sont identiques pour toute la structure , on utilise pour cela la subroutine : KELEMENT
- b/ ASSEMB : cette subroutine fait l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires, en les plaçant dans la matrice de rigidité globale par le biais de numérotation faite par la connection .

III - 2 - 3 PRISE EN CONSIDERATION DES C.A.L. :

La matrice de rigidité est singulière , pour palier à cela , on doit introduire les C.A.L .Il ya plusieurs techniques qui traite ce problème :

a/ -la technique d'élimination :

Cette technique elimine la ligne et la colonne correspond au degré de liberté restreint .

b/ -technique de terme unitaire sur la diagonale :

Elle consiste à annuler toutes les lignes et les colonnes correspondants au degré de liberté restreint sauf le terme diagonal , on le pose = 1 , et la force correspondant = 0 .

c/ -technique du terme diagonal dominant :

Dans notre programme , on a utilisé cette technique , car elle est facile à programmer et permet de modéliser des appuis élastiques .

Elle consiste à ajouter un terme très grand (α) au terme diagonal de la matrice de rigidité correspondant au d.d.l restreint et remplacer la force correspondante par le déplacement prescrit multiplier par ce même facteur (α)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i} & \dots & K_{2n} \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & K_{ii} + \alpha & \dots & K_{in} \\ K_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_i \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_{i\alpha} \\ F \end{bmatrix}$$

III - 2 - 4 RESOLUTION :

L'algorithme de résolution qu'on va adopter est l'algorithme L , U .

On va résoudre le système : $[K] \{X\} = \{F\}$

On décompose la matrice [K] en deux matrices triangulaires , l'une supérieure ,

l'autre inférieure telque : $[K] = [L].[U]$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & U_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & & \\ K_{n1} & \dots & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

avec $L_{jj}=1$, on détermine les termes de $[L]$ et $[U]$ par l'algorithme suivant :

pour $j < i$ on a :

$$K_{ij} = L_{i1} U_{1j} + \dots + L_{i,j-1} U_{j,j-1} + L_{ij} U_{jj}$$

$$\text{D'ou : } L_{ij} = \frac{K_{ij} - \sum_{q=1}^{j-1} L_{iq} U_{qj}}{U_{jj}}$$

Pour $j > i$, on a :

$$K_{ij} = L_{i1}U_{1j} + \dots + L_{i,i-1}U_{i-1,j} + 1U_{ii}$$

$$\text{D'ou } U_{ij} = K_{ij} - \sum_{q=1}^{j-1} L_{iq} U_{qj}$$

Après avoir formé L et U , on a le système qui devient :

$$[L].[U].\{X\} = \{F\} \text{ ou } [L].\{W\} = \{F\}$$

$$\text{avec : } [U].\{X\} = \{W\}$$

On résoud le système $[L].\{W\} = \{F\}$, et on obtient les termes de $[W]$ par substitution direct , puis on résoud le système $[U].\{X\} = \{W\}$, et on obtient $\{X\}$ par back-sibstitution .

III-2-5 CALCUL DES CONTRAINTES :

a/ Subroutine HELEMENT : Ce sous-programme est utilisé pour le calcul de la matrice de contraintes élémentaire $[H]$

b/ Subroutine CONT : une fois les déplacements sont déterminés , et la matrice $[H]$ est calculée , ce sous-programme permet de trouver les contraintes pour chaque élément .

III-3 Structure du programme MEFISO :

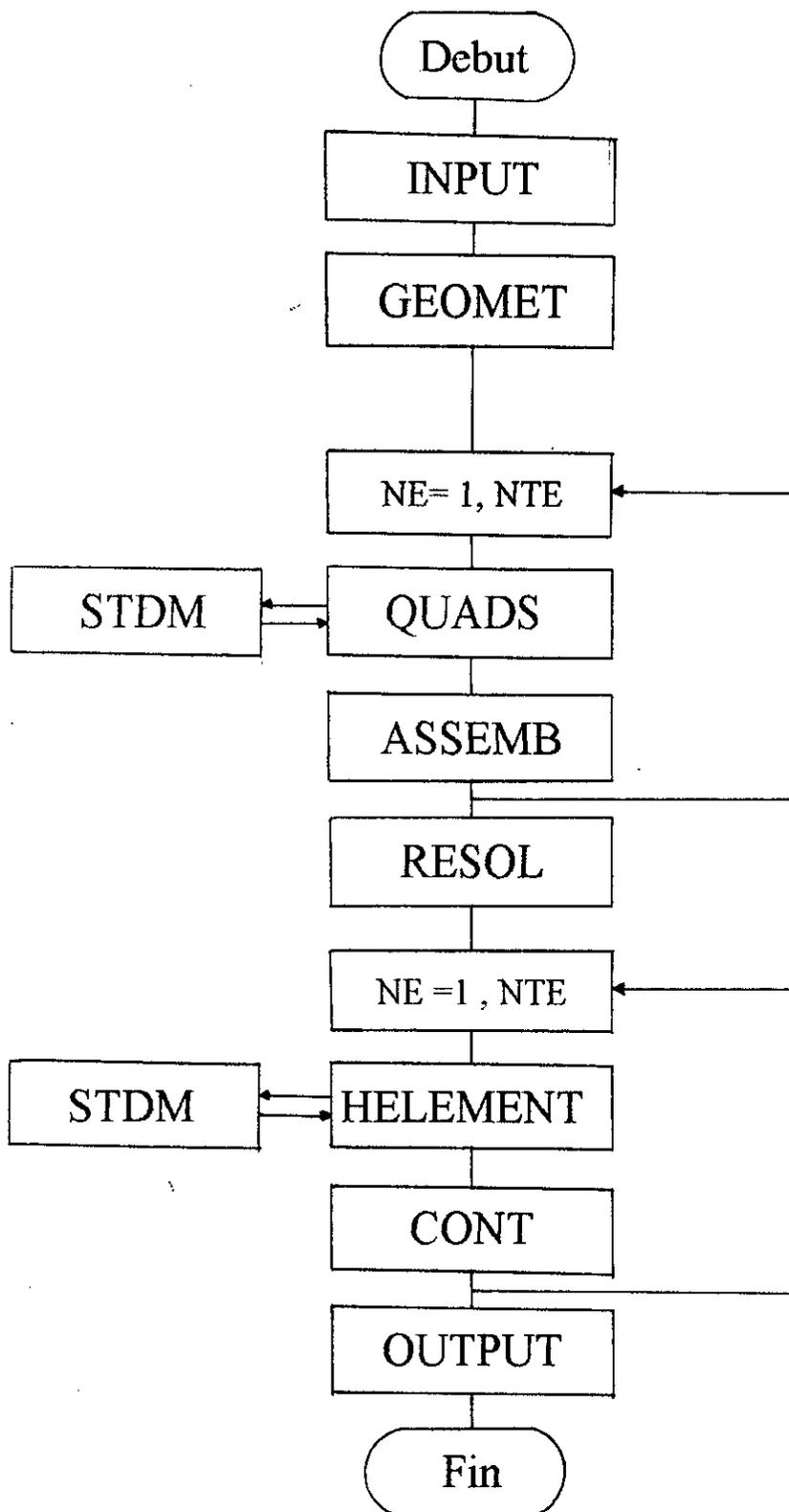


fig-2 structure globale du programme MEFISO

ON note que le programme MEFISO est pratiquement de même structure que le programme MEFEP , toute fois il ya des sous-programmes qui sont propres pour lui :

III - 3 - 1 GEOMET : Ce sous-programme permettra de lire les informations suivantes:

- Les coordonnées des noeuds
- les connectivités des éléments

III - 3 - 3 QUADS : Ce sous - programme calcule la matrice de rigidité élémentaire grace à l'intégration de GAUSS , et utilise le sous-programme STDM .

III - 3 - 3 STDM : Ce sous-programme calcule la matrice [B]

TROISIEME PARTIE

METHODE DES EQUATIONS
INTEGRALES AUX FRONTIERES

PRESENTATION DE LA METHODE
DES ELEMENTS DE FRONTIERES

INTRODUCTION :

La résolution des problèmes de l'élasticité, nécessite la formulation séparée d'équation décrivant différentes catégories de réponse de matériau idéal. Chacune de ces équations est une formulation mathématique ayant pour but l'approximation d'observation physiques et la réponse d'un matériau réel dans un domaine déterminé. Ces équations aux dérivées partielles sont tellement compliquées que l'on ne saura les résoudre même au niveau actuel du développement des méthodes mathématiques.

Grâce à l'outil informatique et au développement des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis, la méthode des différences finis et la méthode des éléments de frontières, il devient possible de résoudre les problèmes rencontrés en mécanique des sols, hydraulique, structure et bien d'autres domaines.

Les méthodes numériques d'analyse ont reçu une attention considérable ces dernières années, est ce depuis l'apparition de l'ordinateur et les capacités qu'ils offrent.

La méthode des équations intégrales aux frontières (BEM) fait partie de ces méthodes dont la caractéristique principale est l'étude du problème sur sa frontière.

Le principe de la formulation directe de la BEM consiste à:

- Etablir une formulation intégrale des équations différentielles régissant le comportement physique du problème étudié en utilisant la méthode des résidus pondérés .

- Discrétiser la frontière en éléments , formant ainsi le système d'équations algébriques $[H].\{U\} = [G].\{P\}$

- Imposer les conditions aux frontières de type DIRICHLET , NEWMANN ou ROBIN .

- Et enfin résoudre le système d'équations arrangé sous la forme :

$$[A].\{X\} = \{B\}$$

Une fois tous les inconnues sur la frontière sont déterminées , il devient alors possible de connaître le vecteur déplacement et le vecteur contrainte en tout point du domaine .

HISTORIQUE :

Les équations intégrales ont été étudiées par beaucoup de mathématiciens ; FREDHOLM (1905) , SMINOV (1929) , VOLTERA (1959) , MIKHLIN (1957 et 1967) et d' autres ..

L' application des équations intégrales pour formuler les solutions fondamentales pour la théorie de potentiel à été faite par FREDHOLM (1903) qui a démontré l'existence de solutions pour telles équations en se basant sur une procédure de discrétisation .

En 1929 KOLLOGG a exprimé l'équation intégrale pour un problème de champs potentiel en terme d'équations intégrales aux frontières .

BETTI et SOMIGLIANA se sont basés sur l'analogie qui existe entre les théories de potentiel et d'élasticité pour analyser des problèmes d'élastostatique par le biais d'équations intégrales aux frontières .

En 1963 , JAWSON et SYMM ont présenté une technique numérique pour la résolution des équations intégrales aux frontières ; ils ont pu déterminé des solutions pour des problèmes bidimensionnels de type NEWMANN et DIRICHLET ;

JAWSON et MAITI en 1968 se sont penchés sur l'étude des plaques en flexion , leur travail a été développé par STERN (1979 et 1983) , WEEN (1982) et KIM (1982) , alors que les problèmes des plaques polygonales simplement appuyées ont été résolu par MAITI et CHAKRABARTY (1974) .

Les problèmes de sols ont été traité par un grand nombre de chercheurs ;CROUCH (1979) a étudié les excavations souterraines , LACHA et WATSON (1977) ont traité les problèmes de mines et WARDLE (1977) a appliqué la BEM pour les multicouches .

En 1975 , WOOD a établi une approche par élément de frontière pour la prédiction des tassements de structures et l'analyse de l' interaction sol-structures .

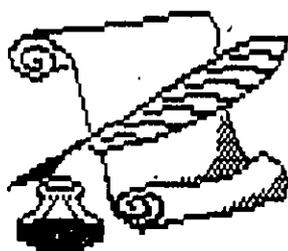
RIZZO (1967) a développé une approche par équations intégrales aux frontières qui traite des problèmes classiques d'élastostatiques .

CRUSE (1969) a étendu cette approche pour la résolution des problèmes tridimensionnels , puis , en 1973 , il appliqua la méthode pour l' analyse des contraintes en tridimensionnels .

Plusieurs algorithmes récemment développés sur la méthode des éléments de frontières sont décrit par CRUSE (1975), LACHAT (1975) , RIZZO (1979) , SHAW (1969) , WATSON (1976) , BREBBIA (1978) , et bien d' autres .

CHAPITRE IV

**METHODES DES
RESIDUS PONDERES**



METHODE DES RESIDUS PENDERES

IV-1-INTRODUCTION :

Dans le cas où il devient difficile de déterminer la solution analytique d'un problème par le biais d'une résolution mathématique du système d'équations différentielles régissant le comportement du système physique, on fait recourt à des techniques numériques basées sur des méthodes d'approximation.

IV-2-METHODE DES RESIDUS PONDERES :

Les méthodes des résidus pondérés permettent, en utilisant des fonctions de pondérations, de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles, à une formulation intégrales.

Soit à résoudre le problème aux limites gouverné par l'équation aux dérivées partielles :

$$L(U_0) = b \quad \text{dans } \Omega$$

avec les conditions aux limites associées :

$$\text{-essentielles : } S(U_0) = s \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\text{-naturelles : } G(U_0) = g \quad \text{sur } \Gamma_2$$

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$: étant la frontière du domaine

U_0 : représente la solution exacte du problème

Soit U l'approximation de U_0 qui s'écrit comme suit :

$$U = \sum \alpha_k \phi_k$$

ϕ_k : représente des fonctions d'approximation linéairement indépendantes.

On définit une fonction erreur ,appelée aussi résidu,par la relation suivante :

$$R = L(U) - b = L(\sum \alpha_k \phi_k) - b \quad \text{sur } \Omega$$

si la fonction U ne satisfait pas toutes les conditions aux frontières ,deux autres fonctions d'erreur sont à envisager :

1-Erreur sur les conditions essentielles (déplacement):

$$R_1 = S(U) - s \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

2-Erreur sur les conditions naturelles (traction) :

$$R_2 = G(U) - g \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Notre but est de minimiser l'erreur sur le domaine Ω et sa frontière Γ . On définit alors les fonctions de pondérations Ψ_i et Ψ_i appartenant à un espace linéairement indépendant . On écrit alors :

$$\int_{\Omega} R \Psi_i d\Omega + \int_{\Gamma} R' \Psi_i d\Omega = 0$$

R' : représente l'erreur sur la frontière

Cette dernière équation est équivalente à la satisfaction des équations différentielles et de leurs conditions aux frontières .

Selon la distribution de l'erreur , on définit des méthodes d'approximations différentes .

IV-2-1 METHODE DES MOMENTS:

la fonction Ψ_i de pondération du résidu est telle que :

$$\Psi_i = x^j \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{\Omega} (L(U) - b) \Psi_i d\Omega = \int_{\Gamma} (L(U) - b) x^j d\Omega = 0$$

On suppose que U satisfait toutes les conditions aux frontières :

$$R1 = S(U) - s = 0$$

$$R1 = G(U) - g = 0$$

IV-2-2- METHODE DE COLLOCATION PAR POINTS :

Dans cette méthode , on essaye de satisfaire les équations gouvernantes , en une série de points du domaine appelés points de collocation .

$$\text{On a : } U = \sum \alpha_k \phi_k$$

Le nombre de points de collocation est égale au nombre de paramètres α_k

Les fonctions de pondération Ψ_i dans ce cas sont des fonctions DELTA DIRAK dont les propriétés sont les suivantes :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} \Delta(x_i) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Delta(x_i) dx = f(x_i) = f_i$$

f étant la valeur de la fonction au point "i"

La distribution de l'erreur s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} (L(U) - b) \Delta_i d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Δ_i : représente la fonction DELTA DIRAK au point de collocation "i", ce qui revient à poser :

$$R = L(U) - b = 0 \quad \text{en } n \text{ points du domaine}$$

On détermine ainsi les différentes valeurs des paramètres α_k

IV-2-3 METHODE DE COLLOCATION PAR SOUS-DOMAINES :

Cette méthode est similaire à la méthode de collocation par point . la fonction de pondération du résidu est telle que :

$$\Psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_i \end{cases}$$

Ω_i : étant des sous domaines de Ω

On aura donc n équations de la forme :

$$\int_{\Omega_i} (L(U) - b) d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

L'intégrale de la fonction erreur est nulle sur les différentes régions Ω_i du domaine Ω

IV-2-4 METHODE DE GALERKINE :

Contrairement aux autres méthodes de résidus pondérés, dans cette méthode les fonctions de pondération du résidus sont les mêmes que celles d'approximation de la fonction U , autrement dit :

$$\psi_i = \phi_i$$

On écrira donc :

$$\int_{\Omega} (L(U) - b) \psi_i d\Omega = \int_{\Omega} (L(U) - b) \phi_i d\Omega = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Etant donné que :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$$

On peut définir une série de coefficients arbitraires telle que :

$$\delta U = \delta \alpha_1 \phi_1 + \delta \alpha_2 \phi_2 + \dots + \delta \alpha_n \phi_n$$

On écrit alors :

$$\int_{\Omega} (L(U) - b) \delta U d\Omega = 0$$

CHAPITRE V

**PRESENTATION
DE LA
M.E.I.F**



PRESENTATION DE LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES AUX FRONTIERES

V-1- INTRODUCTION :

La méthode des éléments de frontières est une méthode extrêmement puissante dans l'analyse des structures continues .

Des approximations simples des variables de la frontière, ainsi qu'une discrétisation de celle-ci , permettent de transformer les équations intégrales de frontières en équations algébriques , que l' on résoud par des méthodes numériques .

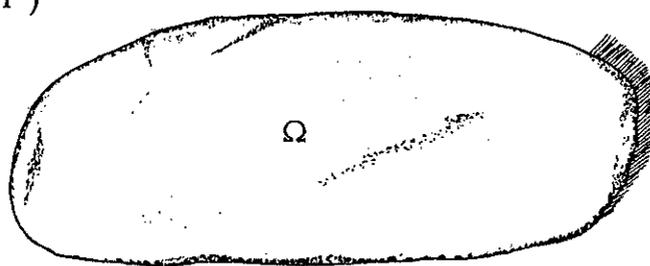
V-2 FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE :

V-2-1 IDENTITE DE SOMIGLIANA :

Pour illustrer comment la méthode des éléments de frontières peut être déduite d'une technique des résidus pondérés . On considère l'équation d'équilibre :

$$\sigma_{j k , j} + b_k = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$\Gamma \equiv (P = \bar{P})$$



$$\Gamma_1 (U = \bar{U})$$

Fig 1 - Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières :

- essentielles : $U = \bar{U}$ sur Γ_1
- naturelles : $P = \bar{P}$ sur Γ_2

L'énoncé des résidus pondéré peut être écrit :

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_k) U^*_k d\Omega = \int_{\Gamma_2} (P_k - \bar{P}_k) U^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P^*_k d\Gamma \tag{V-1}$$

où U^*_k et P^*_k représentent les déplacements et tractions correspondants au champ de pondération i.e :

$$P^*_k = n_j \sigma^*_{jk}$$

En intégrant par partie le terme de gauche de l'équation , on aura :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{jk} U^*_k n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} U^*_{k,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_k U^*_k d\Omega = \int_{\Gamma_2} P_k U^*_k d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P^*_k d\Gamma \tag{V-2}$$

Etant donné que : $P_k = \sigma_{jk} n_j$

$$\text{et } \epsilon_{j1}^* = 1/2 (\partial U^*_j / \partial x_1 + \partial U^*_1 / \partial x_j)$$

L'équation (V - 2) se réduit à :

$$\int_{\Omega} b_k U^*_k d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon^*_{jk} d\Omega = - \int_{\Gamma_1} P_k U^*_k d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P^*_k d\Gamma \tag{V-3}$$

Grâce au principe de réciprocité dû à la symétrie du tenseur d'élasticité C_{ijkl} , on a :

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega$$

En appliquant ce principe dans l'équation (V-3) on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega &= - \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Omega - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U_k^* d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} (\bar{U}_k U_k^*) P_k^* d\Omega \end{aligned}$$

(V - 4)

Une seconde intégration par partie du terme gauche de l'équation quatre donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* U_k d\Omega &= - \int_{\Gamma_1} P_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} U_k^* \bar{P}_k d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k P_k^* d\Omega \end{aligned}$$

(V - 5)

Les solutions fondamentales satisfont les équations d'équilibres , on a donc :

$$\sigma^*_{jk,j} + \Delta^i_1 = 0 \tag{V-6}$$

Δ^i_1 :représente la fonction DELTA DIRAK qui est en fait une impulsion unitaire appliquée au point source "i" suivant la direction 1 .

Cette impulsion produit l'état de contrainte σ^*_{jk} qui vérifie les équations d'équilibres (V - 6) .

Les propriétés de la fonction DELTA DIRAK sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta^i_1(x) &= 0 && \text{Si } x_i \neq x \\ \Delta^i_1(x) &= \infty && \text{Si } x_i = x \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta^i_1 d\Omega = f(x_i)$$

moyennant l'équation (V - 6) , l'équation (V - 5) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_k U^*_k d\Omega - \int_{\Omega} \Delta^i_1 U_k d\Omega &= - \int_{\Gamma_1} P_k U^*_k d\Omega - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U^*_k d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P^*_k d\Omega + \int_{\Gamma_2} U_k P^*_k d\Omega \end{aligned} \tag{V - 7}$$

La troisième propriété de la fonction DELTA DIRAK , nous permet d'écrire l'équation (V - 7) sous la forme suivante :

$$U^i_1 + \int_{\Gamma_2} U_k P^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k P^*_k d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{P}_k U^*_k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} P_k U^*_k d\Gamma + \int_{\Omega} b_k U^*_k d\Omega \tag{V - 8}$$

Où U^i_k : représente le déplacement au point source "i" suivant la direction 1 .

L'équation (V - 8) peut être écrite de manière plus explicite comme suit :

$$U^i_k + \int_{\Gamma} U_k P^*_{lk} d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k U^*_{lk} d\Gamma + \int_{\Omega} b_k U^*_{lk} d\Omega$$

(V - 9)

dans laquelle U^*_{lk} et P^*_{lk} représentent les déplacements et tractions suivant la direction k qui sont dûs à une source unitaire agissant suivant la direction l .

l'équation (V - 9) est appelée :

IDENTITE DE SOMIGLIANA .

Cette équation est valable pour un noeud particulier "i" où l'impulsion unitaire est appliquée .

V-2-2 DETERMINATION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE :

Imaginons un corps bidimensionnel de dimension infini sollicité par une force concentrée et unitaire appliquée au point "i" à l'intérieur du corps dans la direction du vecteur unitaire e_i , les forces volumiques seront négligées, ce corps sera régi par l'équation d'équilibre suivante :

$$\sigma_{ij,j}^* + \Delta^i e_i = 0 \quad (V-10)$$

Cette imagination n'est qu'un artifice de calcul qui nous permettra d'écrire, en utilisant une des propriétés de la fonction DIRAK :

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* U_k d\Omega = -U_{,k}^i e_k = -U_{,1}^i e_1 \quad (V-11)$$

Pour la détermination de la solution fondamentale U_k^* , considérant l'équation de NAVIER :

$$(\lambda + \mu) U_{j,j,i} + \mu U_{i,jj} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (V-12)$$

et écrivant les déplacements en fonction d'une représentation de GALERKINE :

$$U_j = G_{j,m} - 1/2(1-\nu) G_{m,j} \quad (V-13)$$

En dérivant l'expression précédente autant de fois , pour la substituer dans l'équation de NAVIER et en manipulant avec adresse les indices , on obtient après simplification :

$$G_{1,m} m_{jj} + \Delta^i / \mu e_1 = 0 \quad (V - 14)$$

Pour résoudre l'équation (III-14) , faisant le changement de variable suivant :

$$f_1 = \nabla^2 G_1 \quad (V - 15)$$

On aura alors :

$$\nabla^2 f_1 + 1/\mu \Delta^i e_1 = 0 \quad (V - 16)$$

En premier lieu , on résoudra l'équation homogène , puis on déterminera la constante d'intégration , on intégrant l'équation (V-16) dans un domaine de dimension infinie .

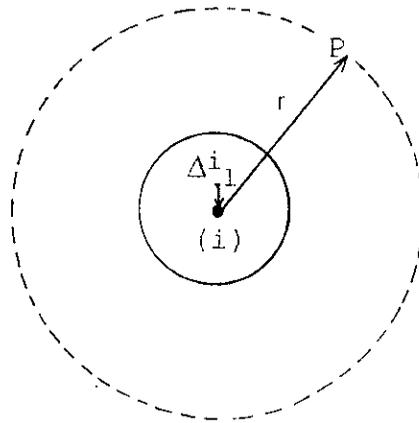


Fig-2: Corps infini sollicité par une force unitaire

r : Distance entre le point considéré et le point d'application de la force concentrée "i" .

En écrivant le LAPLACIEN $\nabla^2 f_1$ en coordonnées polaires , l'équation homogène aura pour solution :

$$f_1 = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (V - 17)$$

la détermination des constantes d'intégration C_1 et C_2 revient à intégrer l'équation (V - 16) on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 f_1 d\Omega = \int_{\Omega} -1/\mu \Delta^i e_1 d\Omega = -1/\mu e_1 \quad (V-18)$$

Cette intégrale présente une singularité , puisque :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_1 &= 0 && \text{pour } r \neq 0 \\ \nabla^2 f_1 &= -1/\mu \Delta^i e_1 && \text{pour } r = 0 \end{aligned}$$

(V - 19)

pour surmonter cette singularité , écrivons l'équation (V - 18) comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 f_1 d\Omega &= \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \nabla^2 f_1 d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^2 f_1 d\Omega = \\ &= -1/\mu e_1 \end{aligned} \quad (V - 20)$$

où Ω_ε : est un disque de rayon r_0 qui tend vers 0 :

$$\int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \nabla^2 f_1 d\Omega = 0$$

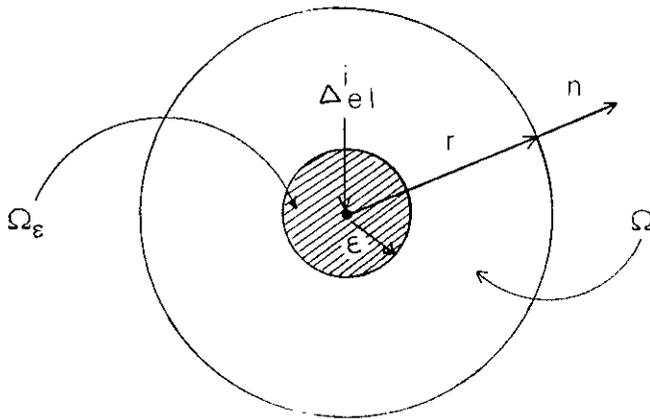


Fig - 3 : Disque de rayon infiniment petit

Et en appliquant la deuxième formule de GREEN pour l'équation (V - 18)

on a :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 f_1 \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \partial f_1 / \partial n \, d\Gamma = -1/\mu \, e_1 \quad (V-31)$$

Ceci nous conduit à écrire , sachant que r et n sont colinéaires :

$$\int_{\partial\Omega_e} \partial f_1 / \partial n \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega_e} \partial f / \partial r \, d\Gamma = -1/\mu \, e_1 \quad (V-22)$$

(dans ce cas dG est le contour du disque)

résolvant l'équation (V - 22) on obtient :

$$f_1 = 1/2\pi\mu \ln(1/r)e_1 + C_2 \quad (V-23)$$

Alors ,l'équation (V - 15) s'écrira :

$$\nabla^2 G_1 = 1/2\pi\mu \ln(1/r)e_1 + C_2 \quad (III-24)$$

Dont la solution est :

$$G_1 = 1/8\pi\mu \, r^2 \ln(1/r)e_1 + r_2/8\pi\mu \, e_1 + C_2/4 \, r^2 + C_3 \ln(1/r) + C_4 \quad (V-25)$$

pour simplifier les calculs , on prendra :

$$C_2 = 1/2\pi\mu \, e_1 \quad \text{et} \quad C_3 = C_4 = 0 \quad \text{d'où on aura :}$$

$$G_1 = 1/8\pi\mu \, r^2 \ln(1/r)e_1 \quad (V-26)$$

Sachant que :

$$G_1 = G_{1k} \, e_1 \quad \Rightarrow \quad G_{1k} = G \, \delta_{1k}$$

$$\text{Avec} \quad G = 1/8\pi\mu \, r^2 \ln(1/r)$$

Sachant que G_{lk} est la composante k du vecteur de GALERKINE en tout point , quand une force unitaire concentrée est appliquée au point "i" dans la direction l .Le déplacement en un point du domaine infini causée par cette force unitaire s'écrit :

$$U^*_k = U^*_{lk} e_l \quad (V - 27)$$

U^*_{lk} : représente le déplacement du point P dans la direction k .

En utilisant l'équation (V - 13) , on aura alors l'expression suivante :

$$U^*_{lk} = G_{lm,m} - 1/2(1-\nu)G_{lm,km} \quad (V - 28)$$

En dérivant l'équation (V - 22) , et en utilisant les propriétés (V - 17) , l'équation (V - 24) s'écrira :

$$U^*_{lk} = 1/8\pi\mu(1-\nu) \left[(3-4\nu) \ln(1/r) \delta_{kl} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad (V - 29)$$

Dans l'équation (V - 10) , on a besoin aussi de P^*_{lk} , on peut la déterminer , en utilisant la relation deformation-déplacement :

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i})$$

et la relation contrainte-déformation :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\text{on aura :} \quad \sigma^*_{kj} = S^*_{lkj} e_l \quad (V-30)$$

avec :

$$S^*_{lkj} = \left[2\pi\nu / (1-2\nu) \delta_{kj} U^*_{lm,m} + \mu (U^*_{lk,j} + U^*_{lj,k}) \right] \quad (V-31)$$

En dérivant l'équation (V - 25), en remplaçant dans (V - 31) et sachant que :

$$P^*_{lk} = S^*_{lkj} n_j$$

on obtient :

$$P^*_{lk} = 1/4\pi(1-\nu) \left\{ \partial r / \partial n \left[(1-2\nu) \delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k} \right] + (1-2\nu) (n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right\} \quad (V-32)$$

V-2-3 EQUATION INTEGRALE AU FRONTIERE :

L'IDENTITE DE SOMIGLIANA permet de donner les déplacements en n'importe quel point intérieur. Une

fois U_k et P_k sont connus en n'importe quel point de la frontière, par conséquent les valeurs aux points intérieurs ne seront connues que si celles de la frontière le sont. Cependant l'équation (V - 32) peut être prise sur la frontière pour obtenir une équation intégrale au frontière.

Par ailleurs, quand "i" est pris sur la frontière, l'intégrale aura une singularité, pour y remédier, on supprime un secteur de disque, dont le rayon est petit, au niveau du point "i" situé sur une frontière régulière (lisse).

Si on fait tendre ϵ vers zéro et après un calcul aux limite (voir BREBBIA), on obtient l'équation intégrale au frontière :

$$C_{ik}^i U_k^i + \int_{\Gamma} P_{ik}^* U_k d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}^* P_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ik}^* b_k d\Omega \quad (V - 33)$$

où les intégrales sont au sens des valeurs principales de CAUCHY et :

$$C_{ik}^i = 1/2 \delta_{ik}$$

quand "i" est sur une frontière régulière

V - 2 - 4 POINTS INTERNES :

V - 3 DISCRETISATION DE L'EQUATION

Une fois les inconnues sur la frontière du domaine sont déterminées, INTEGRALE - ELEMENT DE FRONTIERE : les inconnues dans le domaine sont déterminées à partir de l'identité de

SOMIGLIANA (V - 9) :

La résolution analytique de l'équation (V - 33) est difficile à mener, il a été montré qu'une telle résolution ne peut être adoptée que si les problèmes étudiés présentent une géométrie et des conditions aux limites très simple.

Les contraintes pour un points intérieur "i" sont obtenues après différentiation de l'équation (V - 32), soit :

On utilise une approche numérique pour la résolution de l'équation (V - 33) qui consiste à diviser la frontière en une série d'éléments sur les

quels les déplacements et les tractions sont supposés varier selon un choix approprié des fonctions d'interpolation.

L'équation (V - 33) est exprimée matriciellement :

$$D_{kij} = 1/r \left\{ (1-2\nu) \left[\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \right] + \left[(1-\nu) + \frac{2\nu r_{,i} r_{,j} r_{,k}}{r} \right] \right\} 1/4\pi(1-\nu)$$

$$S_{kij} = 2\mu/r^2 \left\{ (2\partial r/\partial n) \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + \left[(1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right] \right\} 1/(4\pi(1-\nu))$$

On suppose que la frontière est divisée en éléments et que les déplacements et P peuvent être approchés sur chaque élément.

Il ya plusieurs types d'éléments on a utilisé dans ce travail deux types d'éléments qui sont :

- 1- l'élément constant
- 2- l'élément linéaire.

1 - Elément constant :

Les noeuds se trouvent au milieu de chaque élément .

On suppose une variation constante du déplacement et de la traction sur un élément .

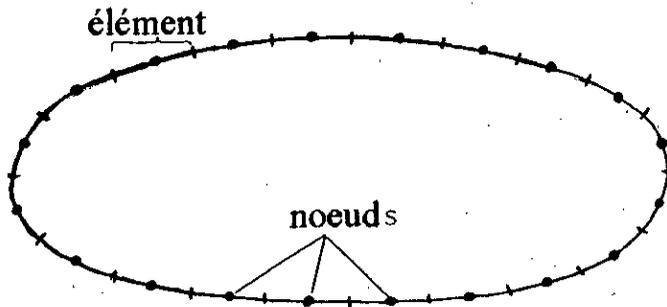


fig 4 : Elément constant

la fonction de forme correspondante est telle que : $\phi = 1$

d'ou $\left\{ \begin{array}{l} P=P_j \\ U=U_j \end{array} \right.$ en tout point de l'élément de frontière .

2 - Eléments linéaires :

Les noeuds se trouvent à l'intersection de deux éléments adjacents .

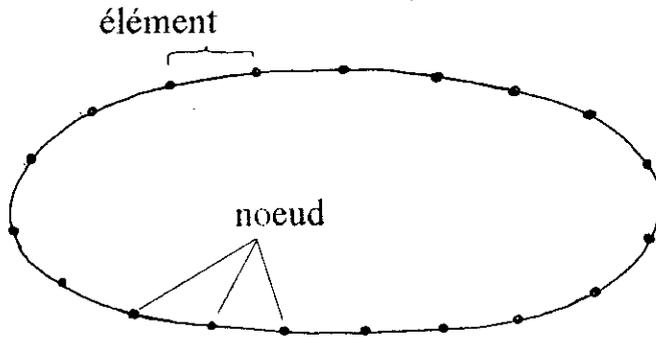


Fig - 5 Element linéaire

Les valeurs de U et P sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 = [\phi_1 , \phi_2] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \phi^T U^n \\ P = \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2 = [\phi_1 , \phi_2] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \phi^T P^n \end{array} \right.$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions d'interpolation .

la coordonnée adimensionnelle ξ est défini par :

$$\xi = x / (l/2)$$

$$\text{et } \phi_1 = 1/2(1-\xi) ; \phi_2 = 1/2(1+\xi)$$

On peut maintenant appliquer la quadrature de GAUSS, on obtient :

$$\begin{aligned}
 [C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{s=1}^{m \geq 4} |J| W_s [P^*]_s [\phi^T]_s \right) U_j &= \\
 &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{s=1}^{m=4} |J| W_s [U^*]_s [\phi^T]_s \right) P_j
 \end{aligned}
 \tag{V - 36}$$

Où m = nombre de point d'intégration .

W_s = coefficient de pondération correspondant .

$[P^*]_s$, $[\phi^T]$ et $[U^*]_s$; sont les valeurs des fonctions aux points d'intégration .

L'équation (V - 36) s'écrit comme suit :

$$[C^i] \{U^i\} + \sum_{j=1}^N [H_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\}
 \tag{V - 37}$$

$[H_{ij}]$ et $[G_{ij}]$ sont des matrices 2×2

Pour chaque noeud "i" l'équation (V - 36) donne $2 \times N$ équations .

posons : $[H_{ij}] = [H_{ij}]$ pour $i \neq j$

$[H_{ij}] = [H_{ij}] + [C^i]$ pour $i = j$

Où $[C^i]$ est une matrice 2×2 qui dépend de la géométrie de la frontière .

De là , l'équation (V - 37) peut être écrite comme suit :

$$\sum_{j=1}^N [H_{ij}] \{U_j\} = \sum_{j=1}^N [G_{ij}] \{P_j\}
 \tag{V - 38}$$

En appliquant l'équation (V - 37) pour chacun des N noeuds de la frontière , on obtient un système d'équations algébriques d'ordre $2N \times 2N$? qui peut être exprimé sous la forme :

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} \quad (V - 39)$$

Dans le cas où des déplacements sont connus , on peut déterminer des tractions et vice versa . Ceci montre que le système d'équations (V - 39) peut être arranger tel que les inconnues soient écrits dans le membre de gauche

$$[A] \{X\} = \{B\} \quad (V - 40)$$

V-5 MOUVEMENT DE CORPS RIGIDE :

V-5-1 Problème interne :

Les éléments de la diagonale de [H] sont très difficiles à calculer , un moyen de contourner le problème , consiste à considérer un déplacement unitaire de corps rigide .

Nous écrivons : $H.U = 0$

Pour déplacement unitaire : $H.I = 0$

$$H.I = \left[\sum_{j=1}^{i-1} H_{ij} + H_{ii} + \sum_{j=i+1}^N H_{ij} \right].I = 0$$

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^N H_{ij} \tag{V-41}$$

Ces éléments ne peuvent être calculer qu'une fois tous les éléments extra- diagonaux de la matrice H sont évalués .

V-5-2 Problème externe :

le problème d'une cavité dans un domaine est considéré comme un problème externe .

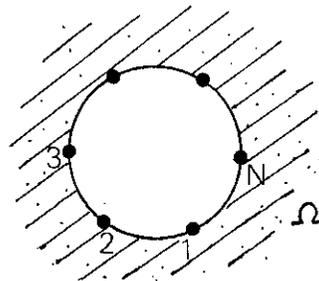
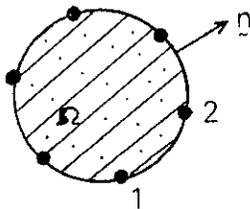


Fig-6-a Problème interne

Fig-6-b Problème externe

Fig -6 : Mouvement de corps rigide

On a :

$$C^i U_i + \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = \int_{\Gamma} U^* P d\Gamma$$

Considérons le mouvement de corps rigide , on aura :

$$C^i U_i + \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = 0 \quad (V - 42)$$

Dans le cas de domaine infini l'équation (V - 42) s'écrit :

$$C^i U_i + \int_{\Gamma_1} P^* U d\Gamma + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} P^* U d\Gamma = 0 \quad (V - 43)$$

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} U_j + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} P^* d\Gamma = 0 \quad (V - 44)$$

Pour un déplacement unitaire , on aura :

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} P^*_{ij} d\Gamma = 0 \quad (V - 45)$$

Après calcul , on aura :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} P^*_{ii} d\Gamma = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} P^*_{ij} d\Gamma = 0$$

$$\text{Ainsi} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} P^* d\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -I$$

Doù l'équation (V - 45) s'écrit :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij} + H_{ii} - I = 0$$

Doù :

$$H_{ii} = I - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N H_{ij}$$



V - 6 PROBLEME DE COIN :

Pour les problèmes d'élasticité, U a une valeur unique en un point quelconque, alors que la force surfacique P peut avoir plusieurs valeurs aux coins.

l'équation intégrale pour un problème d'élasticité est :

$$H.U = G.P$$

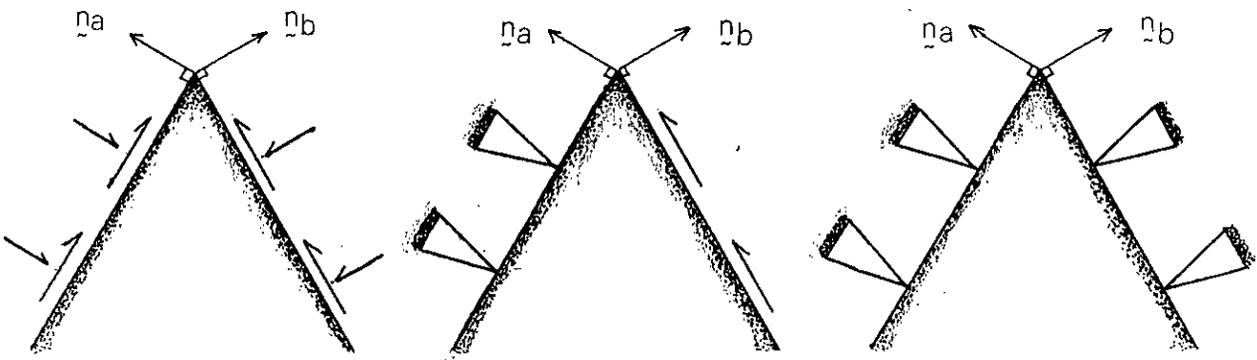
ou : $[H] : 2N \times 2N$ (pour un problème en 2D)

$[G] : 2N \times 2(N+C)$ (C : nombre de coins)

on a : $[H]_{2n \times 2n} U_{2n} = [G]_{2n \times 2(n+c)} P_{2(n+c)}$ (*)

pour un problème d'élasticité où les conditions aux frontières au niveau des coins sont de type NEWMANN (fig-7-1) ou de type ROBIN (fig-7-2) la résolution de l'équation (*) ne présente aucune difficulté.

par contre dans le cas de conditions aux frontières de type DIRICHLET (fig-7-3) i.e uniquement les déplacements qui sont prescrits aux coins, il est impossible de résoudre l'équation (*), et une approche alternative pour résoudre le problème doit être trouvée.



Fig(7-1)

Fig(7-2)

Fig(7-3)

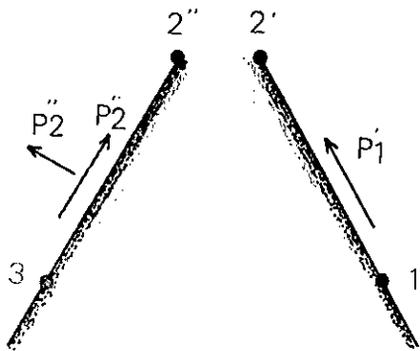
Fig 7 Conditions aux limites aux coins

il existe trois façons de procéder au traitement de ce type de noeuds :

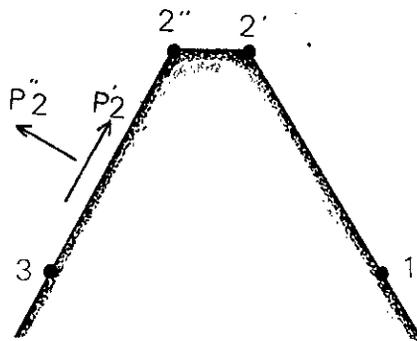
V-6-1-par explosion de noeud :

En explosant le noeud , la géometrie du problème est légèrement modifiée , deux composantes de tensions peuvent être imposées en chaque noeud , le problème peut alors être resolu par la procédure standard , la distance entre les deux noeuds , obtenu par explosion , doit être aussi plus petite de façon à ne pas aboutir à deux équations à coefficients très proches (fig-8 -1)

Notons qu'on explosant le noeud , un petit trou apparaîtra entre les deux nouveaux noeuds ainsi obtenu où l'on peut insérer un petit élément .(fig-8 - 2)



Fig(8 - 1) : Dédoublage
des noeuds



Fig(8 - 2) : insertion
d'un petit élément

V-6-2-par utilisation d'élément discontinu : (fig- 9)

la procédure consiste à déplacer , à l'intérieur de l'élément , les noeuds se rencontrant aux coins ou aux bords .

Elle a l'avantage d'être très simple , et de mieux représenter les cas de hautes concentration de contraintes .

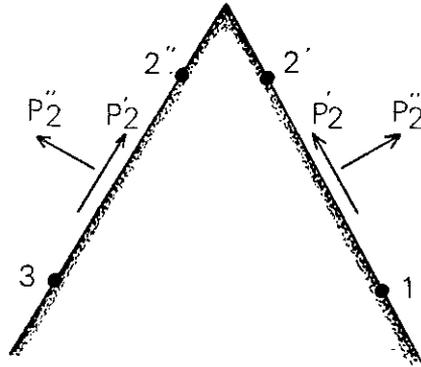


Fig 9 :Element discontinue

V-6-3- solution analytique :

Quand les tensions de part et d'autre d'un coin sont inconnues , le déplacement le long des deux éléments convergeant vers ce noeud est connu , les dérivées du déplacements le long de ces éléments peuvent être obtenues par dérivation des fonctions de forme .

CHAPITRE VI

*PRESENTATION
DU PROGRAMME
ELLINBE*



PRESENTATION DU PROGRAMME ELLINBE :

VI - 1 INTRODUCTION :

Les solutions analytiques des équations intégrales relatives aux problèmes de potentiels (équation de LAPLACE) et à celles de l'élasticité (équation de NAVIER) sont extrêmement rares et n'existent que pour quelques géométries et conditions aux limites excèsivement simples . pour être en mesure de traiter des cas un peu plus complexes et correspondants à ceux rencontrés dans la pratique , il a fallu attendre l'essor des techniques numériques et le développement des ordinateurs .

Dans ce qui suit , on va présenter notre programme ELLINBE qui résoud les problèmes d'élasticité bidimensionnelle , en utilisant des éléments linéaires .

Notons que ELLINBE designe :

Elastique problem using LINiar Boundary Element

VI - 2 ETAPES DE RESOLUTION :

Les grandes étapes pour la résolution d'un problème par la BEM sont représentées par la figure -1

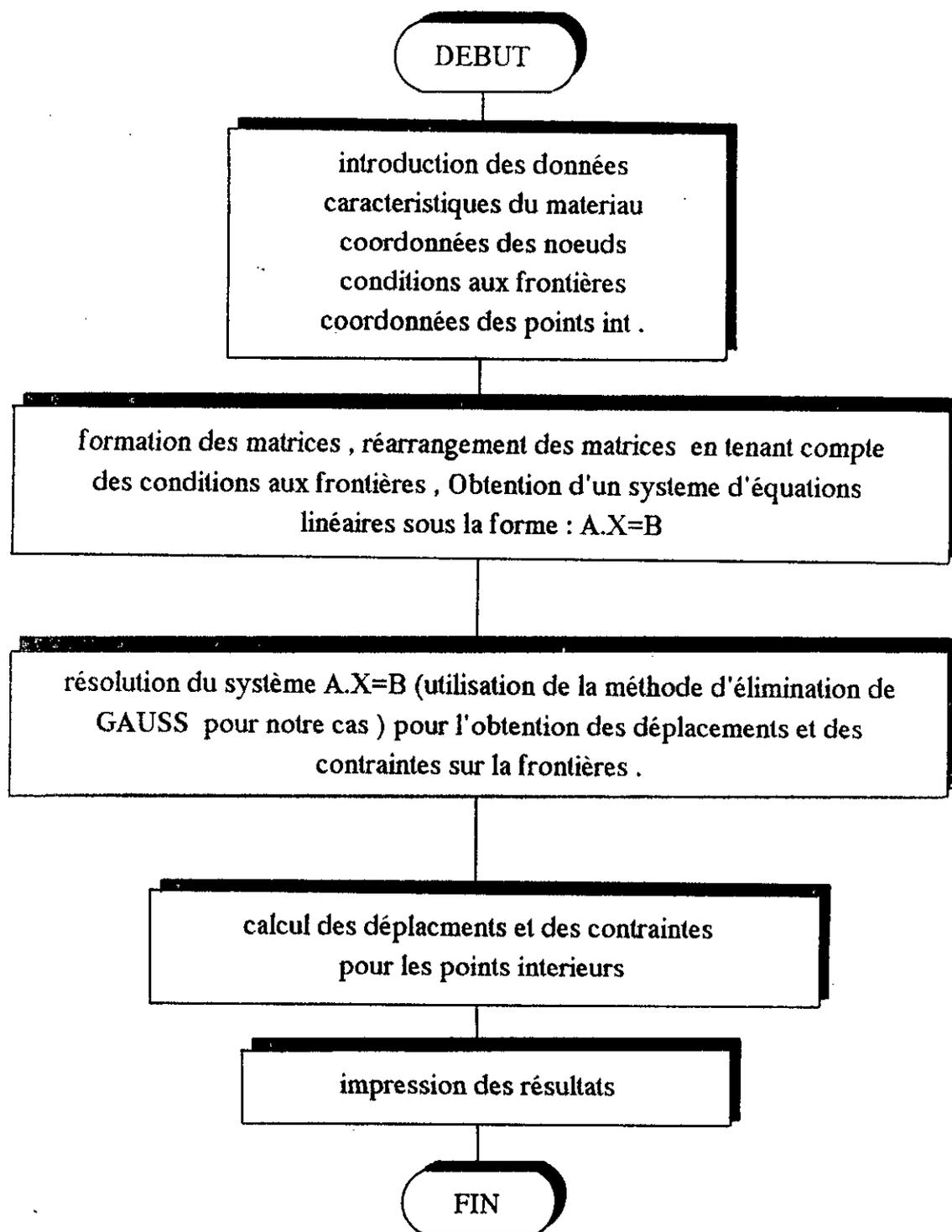


figure -1: étapes de résolution par BEM

VI-3 Structure du programme ELLINBE

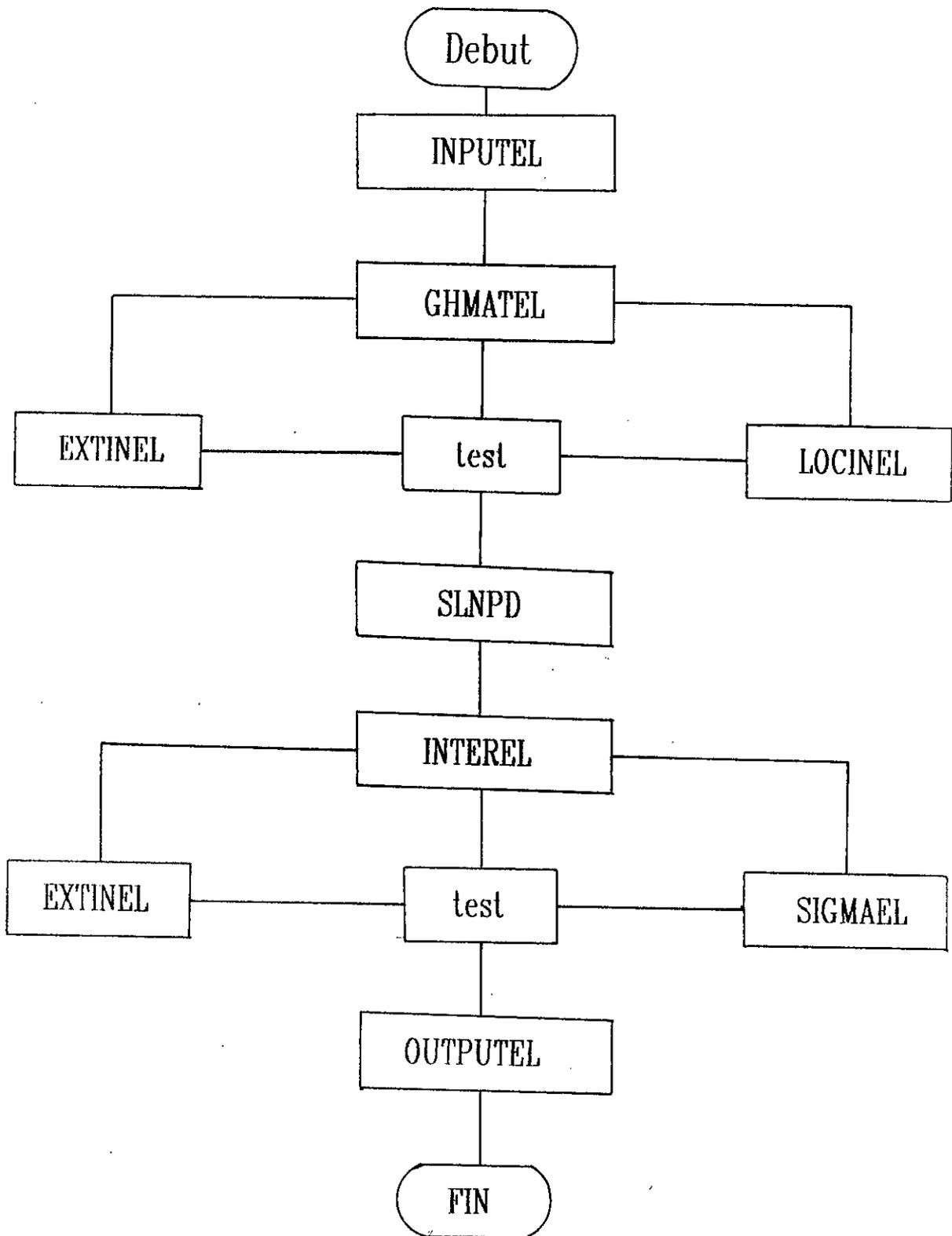


figure -2 : organigramme du programme ELLINBE

PRESENTATION DU PROGRAMME :

Ce programme est conçu pour l'étude des problèmes en contraintes planes ou en déformations planes , il est constitué par huit sous-programmes , qui ont en commun des blocs COMMON blanc et étiquetés , permettant le passage des paramètres entre eux avec une bonne rapidité lors de l'exécution .

Les sous-programmes utilisés sont les suivants :

VI-4 -1- Sous-programme INPUTEL :

Cette subroutine permettra de lire toutes les informations nécessaires au déroulement du programme :

- titre du problème
- nombre d'éléments , nombre de points intérieurs , et les caractéristiques du matériau .
- coordonnées des noeuds de frontières qui seront lus dans le sens contraire des aiguilles d'une montre .
- conditions aux frontières
- coordonnées des points intérieurs , ou on veut avoir les informations .

dans cette subroutine , on va calculer les matrices G et H , ceci en faisant appel aux deux subroutines EXTINEL et LOCINEL

VI - 4 - 3 Sous-programme EXTINEL :

Dans cette subroutine , on calcule les matrices élémentaires H_{ij} et G_{ij} qui vont rattacher le point de collocation avec l'élément ou il ya intégration .

VI - 4 - 4 Sous-programme LOCINEL :

Dans cette subroutine , on calcul la matrice G_{ij} analytiquement . les termes H_{ij} sont calculés en considérant le mouvement du corps rigide .

après formation des matrices [G] et [H] ,le sous-programme GHMATEL,réarrange le système à résoudre sous la forme : $A.X = B$

VI -4 - 5 Sous - programme SLNPD :

dans cette subroutine , on utilise la méthode d'élimination de GAUSS pour la résolution du système :

$$A.X = B$$

Cette méthode est appliquée en deux étapes , a savoir la triangularisation du système , puis la résolution du système triangularisé obtenue .

si la matrice [A] contient un zéro sur sa diagonale , les lignes sont interchangées , le système est singulier si l'interchangement des lignes ne peut donner un coefficient non nul sur la diagonale .

VI - 4 - 6 Sous - programme INTEREL :

Il fait le réarrangement des resultats obtenus aux frontières , afin de calculer les contraintes et les déplacements à l'interieur de l'élément , et ceci en utilisant les deux sous-programmes EXTINEL et SIGMAEL .

VI - 4 - 7 Sous - programme SIGMAEL :

Cette subroutine calcule l'intégrale des coefficients S et D en utilisant la quadrature de GAUSS .

la procedure est la même que pour EXTINEL , sauf qu'au lieu de calculer U^* et P^* , on calcul S et D .

VI - 4 -8 Sous - programme OUTPUTEL :

il imprime les resultats à savoir ;

- les déplacements nodaux
- les contraintes nodales aux frontières et à l'interieur du domaine , sous un format bien lisible .

QUATRIEME PARTIE

COUPLAGE DE LA
M.E.F & B.E.M

CHAPITRE VII

*COMPARAISON ENTRE
LAMEF & BEM*



COMPARAISON

INTRODUCTION:

La MEF est une méthode de discrétisation puissante utilisée pour la résolution de plusieurs problèmes dont la solution analytique n'est pas facilement obtenue .

Le développement d'une autre méthode doit donc être justifié par les avantages qu'elle présente par rapport à la précédente .

La BEM , qui repose sur les équations intégrales de frontières , est une alternative puissante par rapport à la MEF , particulièrement quand une meilleure précision est exigée tel que le cas de concentration de contraintes ou lorsque le domaine sous l' étude est infini ou présente des singularités .

Notre but , dans ce chapitre , est de montrer que la MEF et la BEM présentent des avantages et des inconvénients au même temps , d' où la nécessité de présenter une nouvelle méthode qui évite , le maximum possible , les inconvénients des deux méthodes et qui profite en même temps de leurs avantages .

Afin de pouvoir choisir une méthode par rapport à une autre , l' ingénieur pourrait être aidé par son intuition et son sens physique de réalités , c' est à travers un cumul de connaissances , que les méthodes numérique peuvent être utilisées avec le maximum d' efficacité .

COMPARAISON ENTRE LA MEF ET LA BEM :

On fait la comparaison entre la MEF et la BEM dans les domaines suivantes :

1- Domaine d' application :

- La BEM se prête bien pour l' analyse des structures de grandes dimensions .
- La MEF s' applique plus facilement aux problèmes complexes de structures que la méthode des équations intégrales aux frontières , qui exige la connaissance de la solution de chaque problème particulier qui est très délicate à obtenir .
- La BEM a beaucoup d' avantages par rapport à la MEF dans le domaine linéaire .
- La BEM est mieux adaptée pour les domaines infinis et semi-infinis .

2- DISCRETISATION :

La MEF consiste à subdiviser le domaine , tout entier , en un réseau d' éléments . L' objectif de cette discretisation est d' évaluer les déplacements en un certain nombre de points du domaine , tandis que dans la BEM , seule la frontière est discrétisée et on obtient la solution en des points internes au domaine .

On peut dire que la détermination des inconnus physiques ; déplacements et états de contraintes en des points que l' on choisit à l' intérieur du domaine , constitue un des avantages de la BEM comparé aux autres méthodes numériques comme la MEF et la MDF .

3- DIMENSION DU PROBLEME :

Dans la BEM , la dimension du problème étudié est réduite d' une unité , autrement dit , pour un problème bi-dimensionnel , on aura une équation intégrale de frontière uni-dimensionnel , ceci vient du fait que les fonctions inconnues intervenant , se trouvent sur la frontière et non à l'intérieur du domaine .

En effet , le système d'équations obtenu avec une discretisation de la frontière uniquement et relativement petit , le coût de calcul augmente très peu avec la taille des problèmes .

La BEM est mieux adaptée du point vu coût et temps d'exécution .

4- PRECISION DES RESULTATS :

La BEM présente un avantage du point de vu précision par rapport à la MEF , car l'équation intégrale de frontière est en elle même un exposé de la solution exacte du problème étudié .

les erreurs ne peuvent provenir que de la manière avec laquelle la géométrie et les paramètres physiques du problème sont approximés sur la frontière (élément constant , linéaire , quadratique , ...etc) et des approximations numériques aux quelles on a recourt pour le calcul des intégrales , les erreurs sont réduites avec le choix approprié des fonctions de formes .

5- ENTREE DES DONNEES :

Dans la BEM , la réduction de la dimension du problème , engendre une réduction des données requises pour dérouler le problème .

Par contre , en élément fini , un très grand nombre de données est nécessaires pour dérouler un programme , donnant lieu à une perte considérable de temps et d'argent dans la préparation et le contrôle des données . Ce qui rend la BEM plus compétitives que les autres méthodes de résolution .

6- FORCES DE VOLUME :

La considération des forces de volume complique la BEM , en effet , on est amené à évaluer des intégrales sur le domaine . La discretisation du domaine en un nombre suffisant de cellules est alors nécessaire . De là , on perd l'avantage principal de la BEM , tandis que pour la MEF ce problème ne se présente pas .

7- RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS :

L'analyse par la BEM génère des matrices entièrement peuplées et non symétriques , la résolution des systèmes d'équations correspondants et par conséquent lente , comparée à la résolution par la méthode bande utilisée dans la MEF .

8- MATERIAU NON LINEAIRE :

Pour de tel matériau , la modélisation du domaine en cellule linéaire est équivalente à la discretisation du domaine entier , la BEM perd ainsi sa principale caractéristique qui consiste en la discretisation de la frontière uniquement .

CHAPITRE VIII



COMBINAISON DE LA M.E.F ET DE LA B.E.M

VIII-1 INTRODUCTION:

Dans le but de profiter des avantages de chacune des deux méthodes numériques les plus communes c.a.d (M.E.F et B.E.M), la combinaison des deux ,apparaît idéal , cependant la combinaison permet à l'utilisateur d'obtenir de bon résultats en utilisant les techniques appropriées dans chaque région du problème avec un nombre d'opérations réduit .

Pour ce but l'implantation d'une matrice de rigidité symétrique correspondante à la région des éléments frontières apparaît avantageuse .cette région peut être considérée comme un large élément fini avec un nombre variable de noeuds .

l'assemblage se fait dans un programme élément fini déjà existant .

Dans ce travail on discutera l'implantation d'une matrice de rigidité élément frontière équivalente dans un programme élément fini 2-D déjà existant .

Les éléments frontières sont linéaires , et les éléments finis sont des quadrilatères bilinéaires isoparamétriques pour assurer la continuité et permettre de modéliser les formes géométriques complexes .

VIII-2 HISTORIQUE :

Les premières contributions sur ce sujet étaient données par Mc DONALD et WEXLER (1972) ,SHAW et FABLY (1977) , BREBBIA et GEORGIU (1979) et ZIENKIEWICZ et AL (1977) ou ils ont présenté la formulation de base (matrice de rigidité élément frontière équivalente) .

dans plusieurs publications récentes , la symétrie de la matrice et la satisfaction d' équilibre des différents formulations étaient discutées .

HARTMANN (1981) , TULLBERG et BOLTEUS (1982) , MUSTOE et AL (1982) , HARTMANN et AL (1985) et GEORGIU (1981) , BANNERGEE et DAVIES (1979) , OTHSÜ (1985) , KAMATAND et BROWN (1985) , VALLABHAN (1984) , GEORGIU (1984) , ont présentés d' importantes contributions .

VIII-3 DIFFERENTS METHODES DE COMBINAISONS :

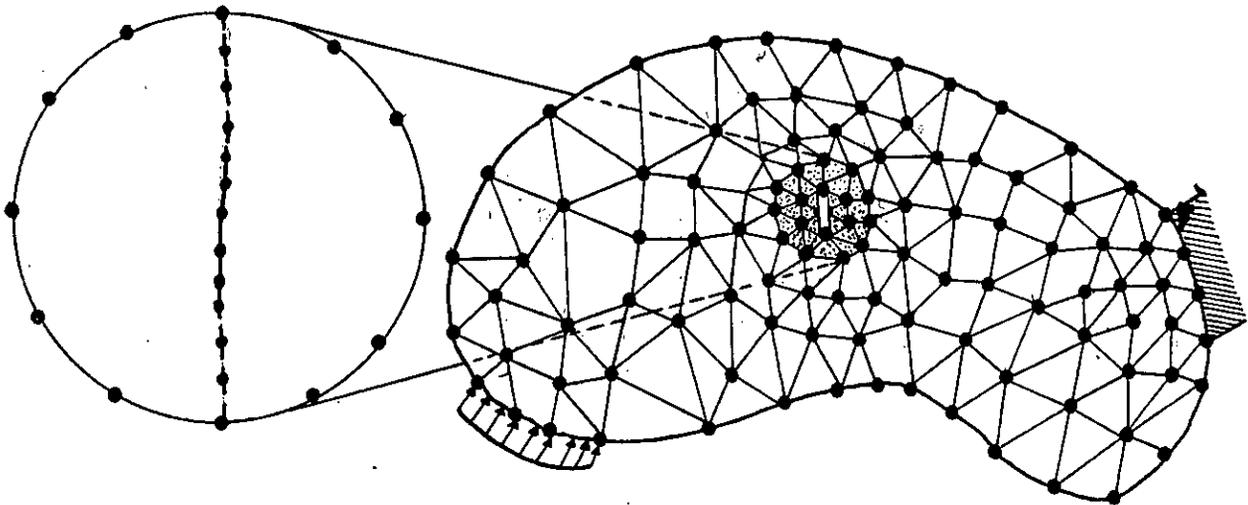
Il est souvent avantageux de combiner la M.E.F et la B.E.M dans plusieurs problèmes .

La B.E.M représente bien les domaines infinis , les problèmes à hautes concentration de contraintes , tandis que la M.E.F résout les problèmes de matériaux complexes dans le domaine proche (matériaux multicouches , anisotropes , non linéaires) .

Il ya plusieurs types de combinaisons dont on va citer quelque uns :

VIII-3-1- methode du sous domaine BEM :

Cette approche est empirique et consiste a résoudre le problème par la M.E.F et prendre une région particulière pour l' étudier par la B.E.M on ayant comme C.A.L les déplacements trouvés par la M.E.F cette approche n' est pas justifiable facilement du point de vu mathématiques mais elle donne de bons résultats car les déplacements donnés la M.E.F sont généralement " juste " ce qui n' est pas le cas si on utilise la formulation contrainte , on applique généralement cette méthode pour les problèmes à fissures :(voir figure N°1)



**Fig -1 :Combinaison de la solution élément fini
avec une région locale BEM**

VIII- 3-2 Methode de conversion du domaine élément fini en élément frontière :

cette approche a été proposé par BREBBIA et GEORGIU en 1979 et consiste a traiter la région E.F en une région élément frontière équivalente .
 considérons les deux régions : (voir figure N°2)

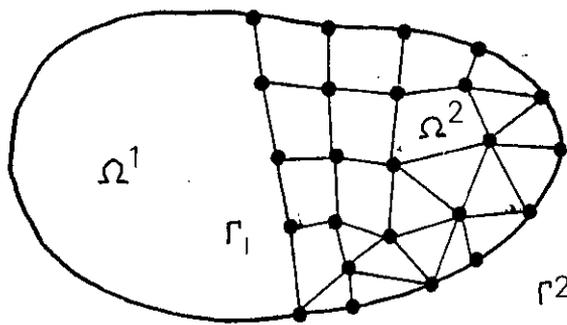


Fig- 2 Division du domaine en 2 regions :
 élément fini et élément frontière

Pour la région (1) l' équation gouvernante est :

$$[H^1 \quad H^1_I] \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^1_I \end{Bmatrix} = [G^1 \quad G^1_I] \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^1_I \end{Bmatrix} \quad \text{(VIII - 1)}$$

Pour la région (2) l'équation gouvernante est :

$$[K_2 \quad K^2_I] \begin{Bmatrix} U^2 \\ U^2_I \end{Bmatrix} = [M^2 \quad M^2_I] \begin{Bmatrix} P^2 \\ P^2_I \end{Bmatrix} \quad (\text{VIII} - 2)$$

en ayant : $P_I = P^1_I = -P^2_I$ condition d'équilibre à l'interface

et $U_I = U^1_I = U^2_I$ condition de compatibilité à l'interface

puis on réarrangeant les équations précédentes on aura :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H^1_I & -G^1_I & 0 \\ 0 & K^2_I & M^2_I & K^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I \\ P_I \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & M^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{VIII} - 3)$$

Cette équation doit être réarranger en accordance avec les conditions aux limites . Notons que cette approche ne nécessite pas l'inversion de la matrice [G]

VIII - 3 - 3 Methode de conversion du domaine élément frontière en élément fini :

A l'inverse de la méthode précédente , elle transforme la région élément frontière en un large élément fini :

considérons la même figure (Fig N° 2)

les matrices élément frontière ou la forme :

$$H.U=G.P \quad (\text{VIII} - 4)$$

pour la région (2) , les matrices élément fini :

$$K.U = F \quad (\text{VIII} - 5)$$

pour combiner les deux équations, transformons l'équation (VIII - 4) en:

$$G^{-1} . H . U = P \quad (\text{VIII} - 6)$$

transformons le vecteur force en vecteur traction nodale :

$$F = M.P \quad (\text{VIII} - 7)$$

multiplions l'équation (VIII - 6) par [M] cela donne :

$$(M.G^{-1} . H).U = M.P = F' \quad (\text{VIII} - 8)$$

cette forme est la même que celle des éléments finis c-a-d :

$$K' U = F' \quad \text{tel que} \quad K' = M.G^{-1} . H$$

Généralement la matrice K' n'est pas symétrique , on utilise souvent la procédure suivante pour la symétriser :

$$K'' = 1/2.(K' + K'^T)$$

VIII - 4 PRESENTATION DE LA B&FEM :(couplage):

VIII - 4 - 1 - INTRODUCTION:

l'idée de combiner les deux techniques numériques (F.E.M , B.E.M) est d' une importance prépondérante dans plusieurs problèmes pratiques comme ; interaction sols et structure , concentration de contraintes , fissures , multicouches, ..., car la B.E.M représente bien les régions infinies , les concentrations de contraintes , ... tandis que la M.E.F est plus facile à appliquer pour les domaines non linéaires ou anisotropes ...

L' utilisation des éléments frontières à fonction d'interpolation linéaire ou d' ordre plus élevé , permet la combinaison avec les éléments finis de même ordre .

VIII-4-2-EQUATION DES ELEMENTS FINIS :

On peut déduire les matrices éléments finis par la représentation RESIDUS PONDERES :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma_2} \delta U_i P_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta U_i B_i d\Omega$$

(VIII-8)

En subdivisant le domaine en série d'éléments dans lesquels les déplacements et les tractions sont connus aux noeuds :

$$\begin{aligned} U &= N.U^n & \delta U &= N. \delta U^n \\ \varepsilon &= B.U^n & \delta \varepsilon &= B. \delta U^n \\ \sigma &= D.B.U^n & P &= \Psi .P^n \end{aligned}$$

En remplaçant et en faisant l'assemblage on aboutit à :

$$K.U = M.P + D \quad \text{(VIII - 9)}$$

notons que la symétrie de la matrice [K] est due à la symétrie du terme gauche de l'équation (VIII - 8) c-a-d :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega$$

VIII - 4 - 3 EQUATION DES ELEMENTS FRONTIERES :

la formulation directe de la B.E.M conduit à des équations de la forme :

$$C_{ij}U_j + \int_{\Gamma} P^*_{ij}U_j d\Omega = \int_{\Gamma} U^*_{ij}P_j d\Omega + \int_{\Omega} U^*_{ij}b_j d\Omega \quad (\text{VIII - 10})$$

en discrétisant le domaine et en faisant l' assemblage on obtient :

$$H.U = G.P + B \quad (\text{VIII - 11})$$

Transformons maintenant la région élément frontière en un élément fini équivalent , pour cela multiplions l' équation (VIII - 11) par la matrice [G] :

$$G^{-1}.(H.U - B) = P \quad (\text{VIII - 12})$$

Puis multiplions l' équation (VIII -12) par la matrice de distribution M on obtient :

$$(M.G^{-1}.H).U = M.P + (M.G^{-1}.B) \quad (\text{VIII - 13})$$

On peut maintenant définir : $K' = M.G^{-1}.H$

$$D' = M.G^{-1}.B \quad (\text{VIII - 14})$$

$$F' = M .P$$

L'équation (VIII - 13) est de la forme :

$$K'.U = F' + D' \quad (\text{VIII - 15})$$

(comme celle des éléments finis)

VIII-4-4 COMBINAISON:

Une fois la matrice de rigidité équivalente de la region élément frontière obtenue et celle de la region élément fini on fait l'assemblage comme si on avait deux éléments finis à assembler .

Cette opération est faite en respectant les conditions d'équilibre et de compatibilité à l'interface des deux regions :

i) La compatibilité :

les déplacements à l' interface des deux régions doivent être égales ;

$$U^1_I = U^2_I$$

ii) L' équilibre :

les tractions à l' interface des deux régions doivent être nulles ;

$$P^1_I + P^2_I = 0$$

VIII-4-5- LA SYMETRISATION:

L'inconvénient principal qui apparaît de cette formulation et le fait que la matrice $[K']$ n' est pas symétrique . contrairement aux éléments finis , l' asymétrie est du à l' approximation de la discrétisation et le procédé de collocation , c-a-d solution fondamentale , donc il n' ya pas de raison pour que la matrice $[K']$ soit symétrique , la symétrisation est faite en utilisant le principe de minimisation de l' erreur (moindre carré).

Definissons une erreur dans les termes extradiagonaux de la matrice $[K']$

L' erreur dans chaque coefficient k_{ij} peut être écrite comme différence entre k'_{ij} et k'_{ji} :

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 [(k_{ij} - k'_{ij}) + (k_{ji} - k'_{ji})]$$

La minimisation du carré de l' erreur par rapport à k_{ij} s' écrit :

$$(\partial \varepsilon_{ij} / \partial k_{ij})^2 = (2 k_{ij} - k'_{ij} - k'_{ji})^2 = 0$$

Donc les coefficients de la matrice symétrique sont :

$$k_{ij} = 1/2.(k'_{ij} + k'_{ji})$$

Finalement la matrice de rigidité équivalente est symétrisée est :

$$k^2 = 1/2(k' + k'^T)$$

L'équation (VIII - 15) s'écrit alors :

$$K^2.U = F^2 + D^2 \quad \text{(VIII - 16)}$$

Cette dernière peut être assemblée avec les matrices éléments finis :

$$K^1.U = F^1 + D^1 \quad \text{(VIII - 17)}$$

CHAPITRE IX

*PRESENTATION
DU PROGRAMME
COUPLAGE*



PRESENTATION DU PROGRAMME COUPLAGE

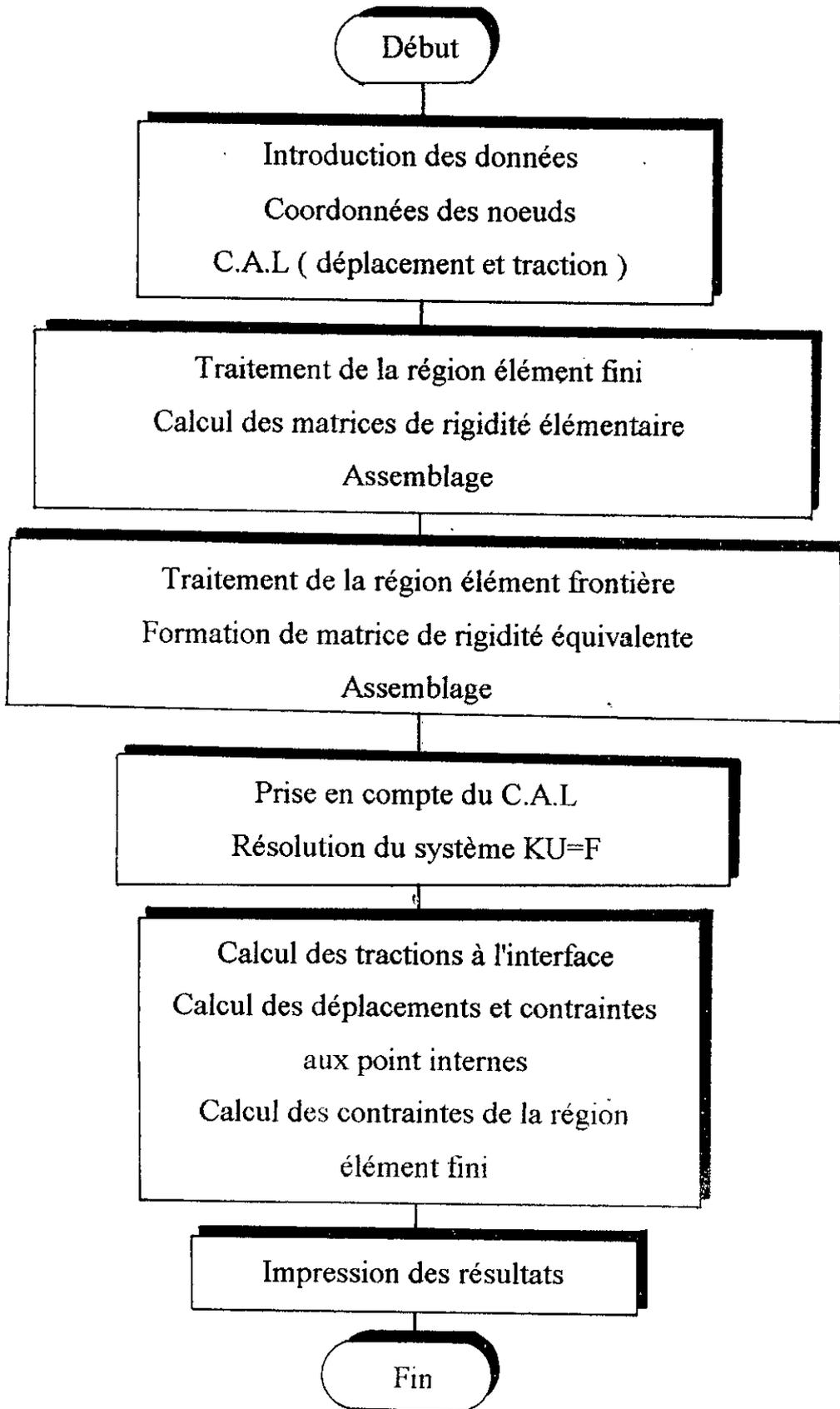
IX-1 INTRODUCTION:

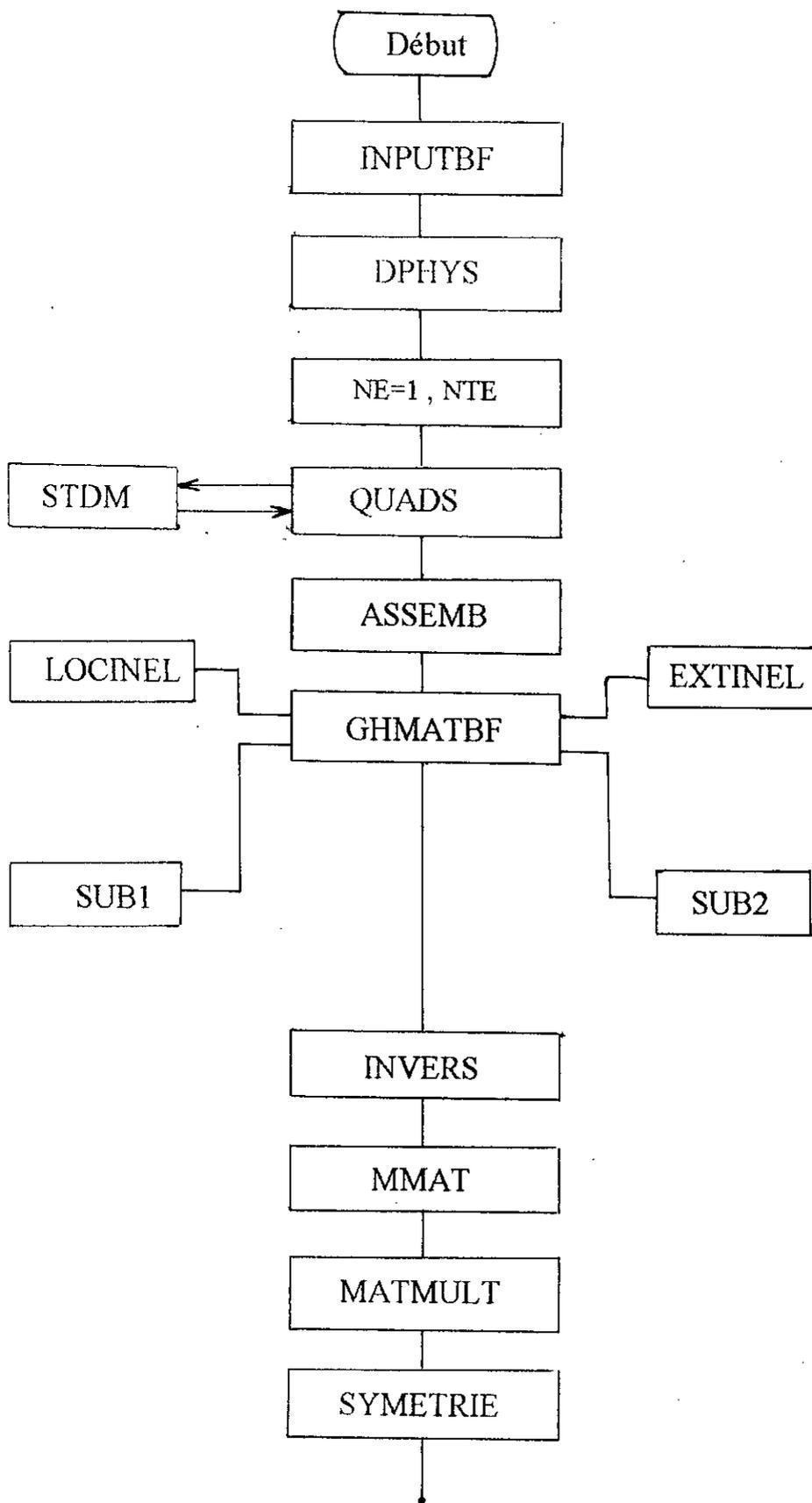
Le traitement d'un problème d'élasticité par le couplage de la MEF et la BEM nécessite des techniques numériques assez importantes, qu'on ne peut satisfaire que par le recours à la programmation.

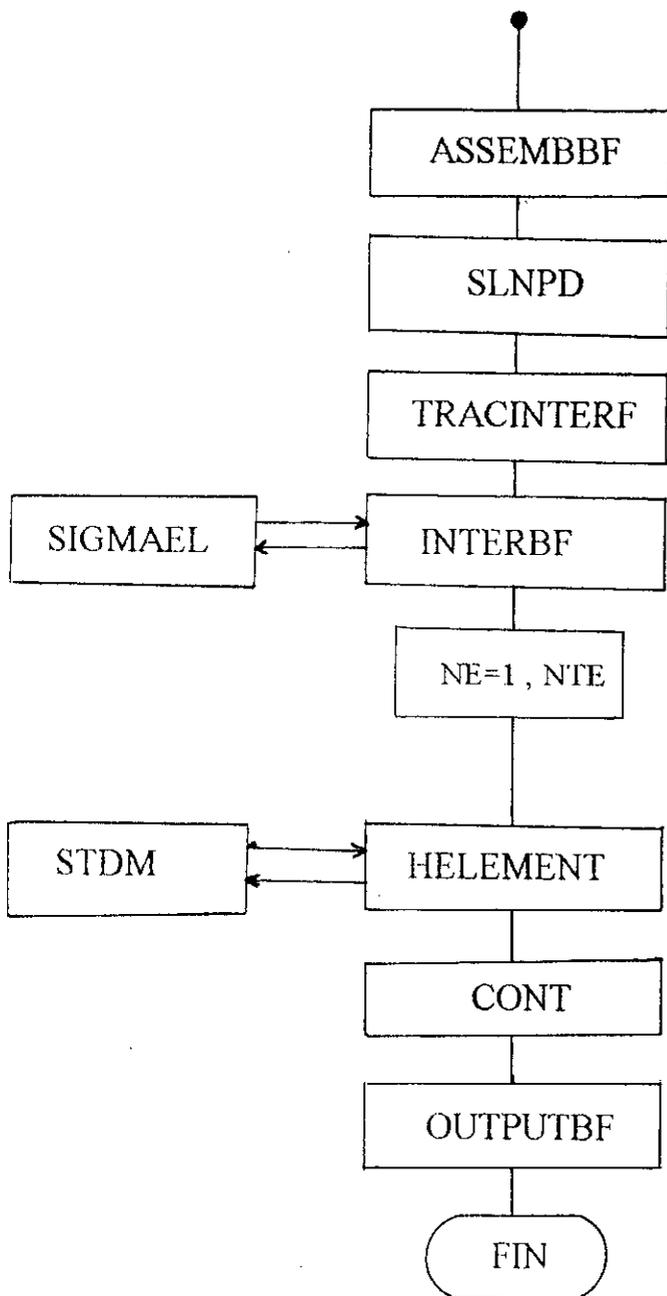
Pour cela, on a élaboré un programme appelé COUPLAGE, qui traite ce problème. Dans ce programme, des sous-programmes BEM sont implantés dans un programme MEF avec un traitement spécial. Toutefois les conditions de compatibilité à l'interface sont satisfaites.

IX-2 DEMARCHES A SUIVRE POUR LA RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ELASTICITE PAR COUPLAGE:

Les principales étapes pour la résolution par couplage sont représentées par le schéma suivant :



IX-3 STRUCTURE DU PROGRAMME :



IX-4 PRESENTATION DU PROGRAMME :

Le programme est constitué par vingt deux sous-programmes et comporte des blocs COMMON à blanc et étiquetés .

Il comporte plusieurs sous-routines appartenants aux programmes qui l'on précédé .

Dans ce qui suit , on va détailler les sous-routines du programme .

1/ Sous-programme INPUTBF :

Cette sous-routine permet de lire toute les informations sous un format libre dans un fichier pré-difini . Les données sont :

- Titre du problème
- Nombre de noeuds et d'éléments des deux régions et de l'interface .
- Nombre de points internes .
- Code d'étude : 0 pour contrainte plane
1 pour déformation plane.
- Propriétés physiques E , NU .
- Coordonnées des noeuds et points internes .
- Connectivités des éléments .
- Code des noeuds interface .
- C.A.L (déplacement et traction)

2/ Sous-programme DPHYS :

Il permet d'obtenir la matrice des propriétés physiques :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

Tel que :

$$d_1 = \frac{E(1-\text{code.v})}{(1+\nu)(1-\text{code.v})}$$

$$d_2 = \frac{\nu.d_1}{(1-\text{code.v})}$$

$$d_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

et pour obtenir les propriétés physiques équivalentes de la région élément frontière , tel que :

$$GE = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad XNU = \frac{\nu}{(1+\nu-\text{code.v})}$$

3/ Sous-programme QUADS :

Ce sous-programme calcule la matrice de rigidité élémentaire grâce à l'intégration numérique de GAUSS (quatre point), en introduisant chaque point de GAUSS dans le sous-programme STDM pour obtenir la matrice [B] en ce point .

En faisant la multiplication :

$$[B]^T . [D] . [B] WGT_{IJ}$$

et en faisant la somme on obtient les termes de la matrice de rigidité élémentaire. Notons que WGT sont les facteurs de pondération pour chaque point de GAUSS

4/ Sous-programme STDM :

Ce sous-programme calcule le déterminant du jacobien et la matrice [B] en passant par les étapes suivantes :

- 1- Calcul des coordonnées locales .
- 2- Calcul du jacobien .
- 3- Calcul du déterminant , et fait un message d'erreur s'il est nul .
- 4- Calcul de l'inverse du jacobien .
- 5- Calcul de la matrice [B] .

5/ Subroutine ASSEMB :

Cette subroutine fait l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire , en les déplaçant dans la matrice de rigidité globale , en faisant la localisation de ces termes depuis le tableau de connection .

6/ Subroutine GHMATBF :

Cette subroutine forme les matrices [H] et [G] en utilisant les quatre sous-routines : LOCINEL , EXTINEL , SUB1 et SUB2 .

Elle calcule les termes diagonaux de la matrice [H] en considérant le mouvement de corps rigide .

7/ Subroutine EXTINEL :

Elle calcule numériquement , par intergration de GAUSS (quatre points) , les sous - matrices H_w et G_w .

H_w et G_w sont des matrices (2×4) qui seront placées dans les matrices [H] et [G] comme termes extradiagonaux .

8/ Subroutine LOCINEL :

Elle calcule analytiquement $G(i, i+1)$ et $G(i, i-1)$ les termes de la bande diagonale de [G] lorsqu'il ya une singularité ($\ln 1/r$) .

9/ Sous-programmes SUB1 :

Ils calculent analytiquement les termes de la bande diagonale de la matrice [H] : $H(i, i+1)$.

10/ Sous-programme SUB 2 :

pareil à SUB 1 sauf qu'il calcul les termes $H(i, i-1)$

11/ Subroutine INVERS :

Cette subroutine calcule l'inverse d'une matrice sur elle-même , en adoptant l'algorithme suivant : Shipley - Coulman

1^{er} étape : $K=1$

$$A_{kk} = 1/A_{kk}$$

2^{eme} étape : $I=1$

$$A_{ik} = A_{ik} \cdot A_{kk} \text{ avec } i \neq k$$

3^{eme} étape : $J=1, N$

$$A_{ij} = A_{ij} - A_{ik} \cdot A_{kj} \text{ avec } j \neq k$$

refaire les étapes 2 et 3 pour $I=2, N$

4^{eme} étape : $I=1, N$

$$A_{ki} = - A_{ik} \cdot A_{kj} \text{ avec } I \neq K$$

on refait les calculs par ces quatre étapes pour $K=2$ jusqu'à N

12/ Sous-programme MMAT :

Ce sous-programme forme la matrice $[M]$ qui fait le transfert des tractions nodales en forces nodales équivalentes .

Formule de passage :

$$F_{ix} = L/3 Q_{ix} + L/6 Q_{jx}$$

$$F_{iy} = L/3 Q_{iy} + L/6 Q_{jy}$$

13/ Sous-programme MATMULT :

Ce sous-programme fait la multiplication des matrices $[M] \cdot [G]^{-1} \cdot [H]$ pour obtenir la matrice de rigidité équivalente de la région élément frontière .

14/ Sous-programme SYMETRIE :

La matrice de rigidité obtenu n'étant pas symétrique , on doit la symétriser par la formule suivante :

$$K' = (K + K^T) / 2$$

15/ Subroutine ASSEMBBF :

Cette subroutine fait l'assemblage de la matrice de rigidité équivalente de la région élément frontière avec la matrice de rigidité élément fini .

16/ Subroutine SLNPD :

Dans cette subroutine , on utilise la méthode d'élimination de GAUSS pour la résolution du système :

$$A \cdot X = B$$

Cette méthode est appliquée en deux étapes , a savoir la triangularisation du système , puis la résolution du système triangularisé obtenue .

si la matrice $[A]$ contient un zéro sur sa diagonale , les lignes sont interchangées , le système est singulier si l'interchangement des lignes ne peut donner un coefficient non nul sur la diagonale .

17/ Sous programme TRACINTERF :

Ce sous-programme calcule en premier lieu , les forces à l'interface des deux régions , puis détermine les tractions à cette dernière .

18 / Sous - programme INTERBF :

Il fait le réarrangement des résultats obtenus aux frontières , afin de calculer les contraintes et les déplacements à l'intérieur de l'élément , et ceci en utilisant les deux sous-programmes EXTINEL et SIGMAEL .

19 / Sous - programme SIGMAEL :

Cette subroutine calcule l'intégrale des coefficients S et D en utilisant la quadrature de GAUSS .

la procedure est la même que pour EXTINEL , sauf qu'au lieu de calculer U^* et P^* , on calcul S et D .

20 / Sous-programme HELEMENT :

Ce sous-programme est utilisé pour le calcul de la matrice de contraintes élémentaire [H]

21 / Sous-programme CONT :

Une fois les déplacements sont déterminés , et la matrice [H] est calculée , ce sous-programme permet de trouver les contraintes pour chaque élément .

22 / Sous-programme OUTPUTBF :

Il imprime les résultats sous un format bien lisible , pour les deux régions (déplacement , contraintes)

CHAPITRE X

APPLICATIONS



CINQUIEME PARTIE

APPLICATIONS



APPLICATION : 1

ETUDE d'UNE POUTRE EN FLEXION PAR LA MEF , BEM ET LE COUPLAGE

MEF :

Programme : MEFEP

Type d'élément : Elément rectangulaire bilinéaire à 8 d . d . l

Discrétisation : N = 14 , 26 , 39 , 65 , 125

(N : nombre de noeuds)

BEM :

Programme : ELLINBE

Type d'élément : Elément linéaire à 4 d . d . l

Discrétisation : N = 10 , 20 , 32 , 40 , 56 , 64 , 72

COUPLAGE :

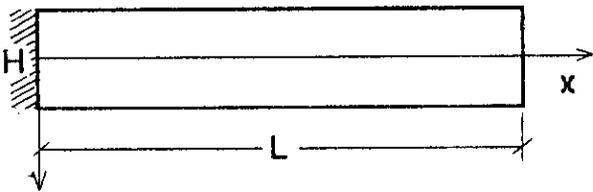
Programme : COUPLAGE

Type d'élément : isoparamétrique et linéaire .

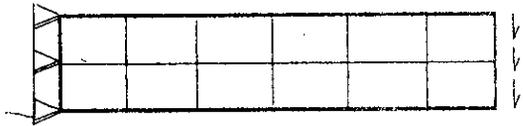
Discrétisation : N = 14 , 23 , 40 , 70 , 100



POUTRE ENCASTREE EN FLEXION [DISCRETISATION]



$L = 12 \text{ m}$
 $H = 2 \text{ m}$
 $P = 1 \text{ MN}$
 $\nu = 0.3$
 $E = 1340 \text{ MPa}$



exemple de discrétisation

(12 éléments)

MEF



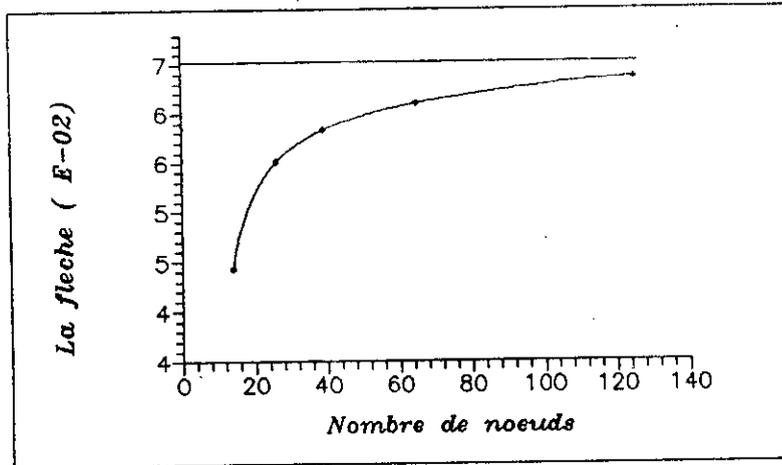
BEM

(20 éléments)

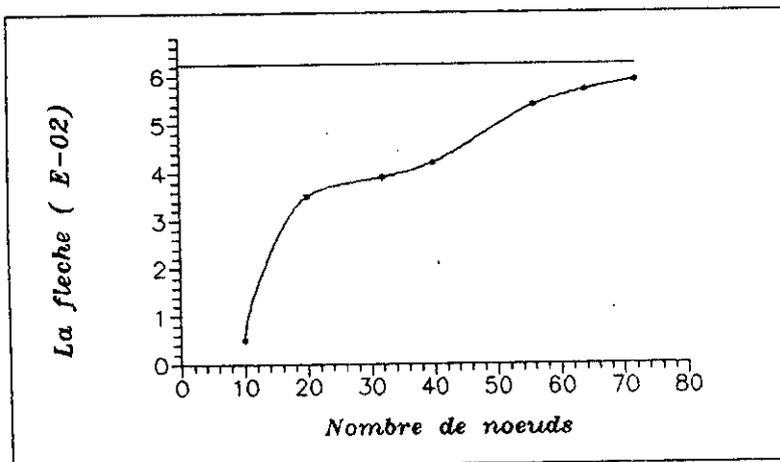


COUPLAGE

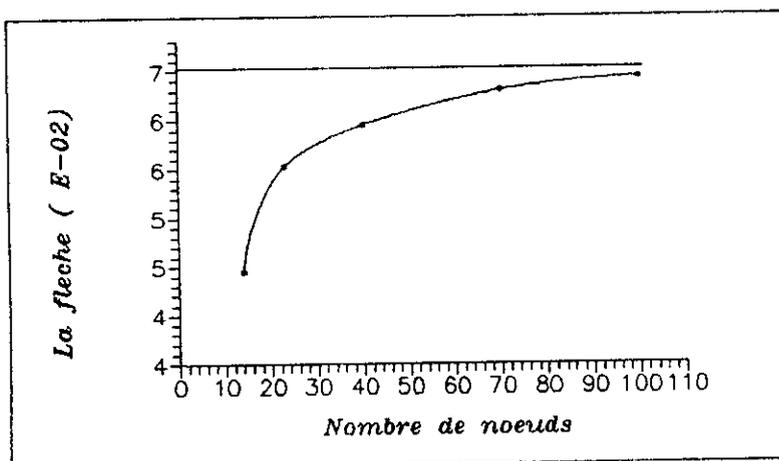
COURBES DE CONVERGENCE DE LA FLECHE en foction du nombre de noeuds



Par M.E.F.

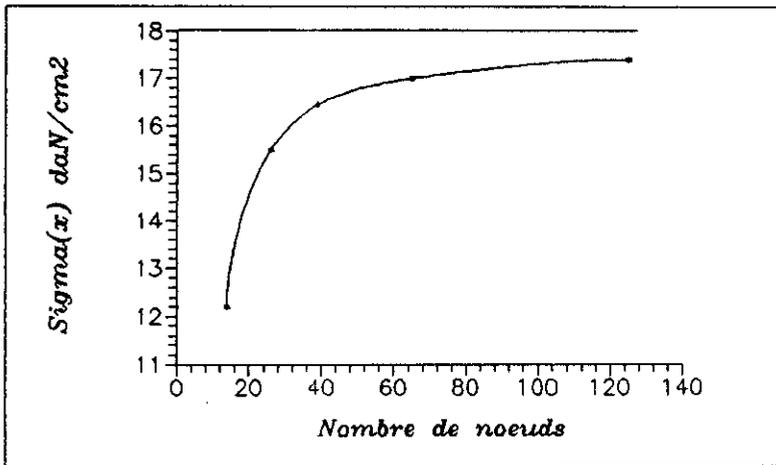


Par B.E.M.

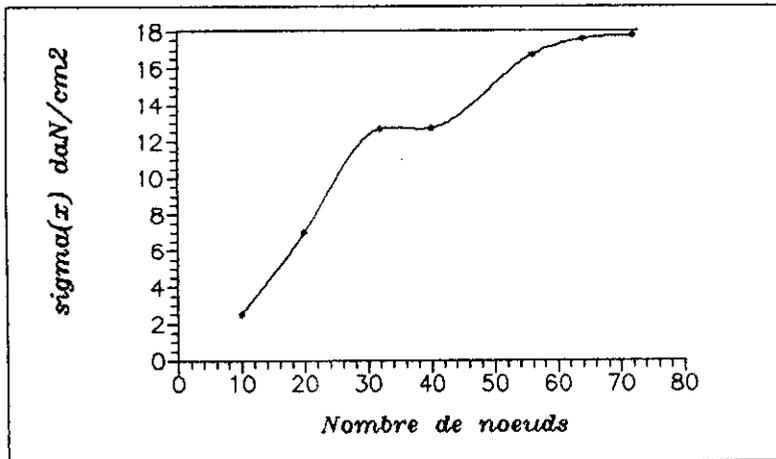


Par COUPLAGE

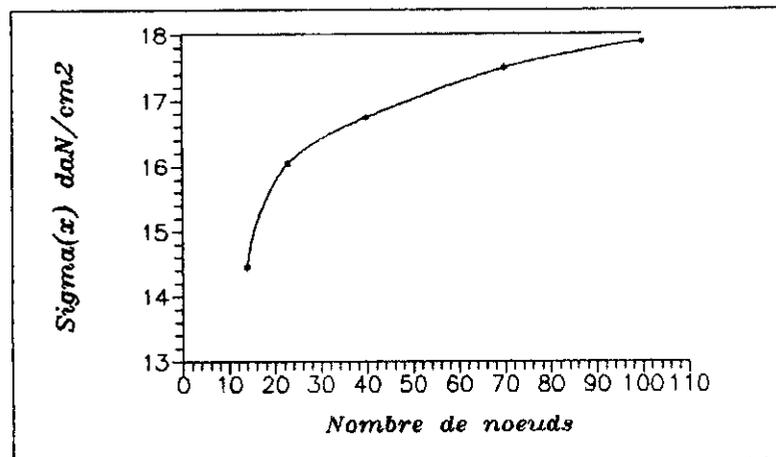
COURBES DE CONVERGENCE DES CONTRAINTES EN FONCTION
DE NOMBRE DE NOEUDS



Par M.E.F.

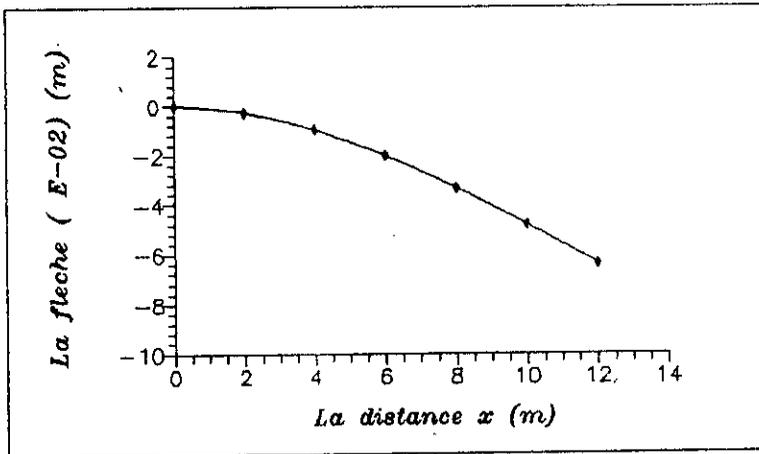


Par B.E.M.

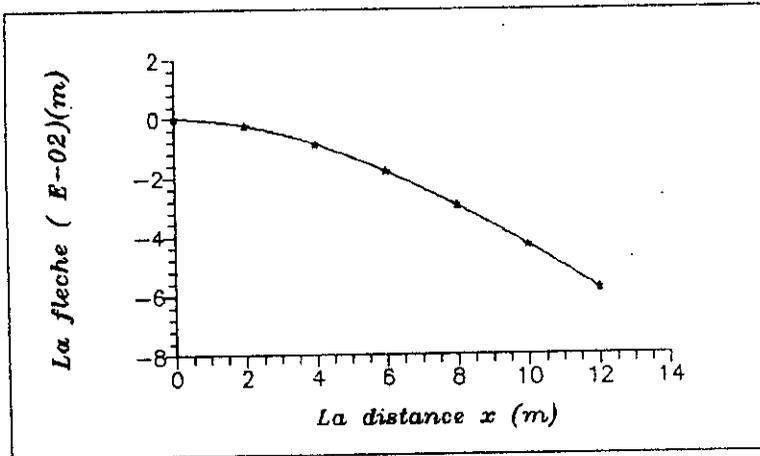


Par COUPLAGE

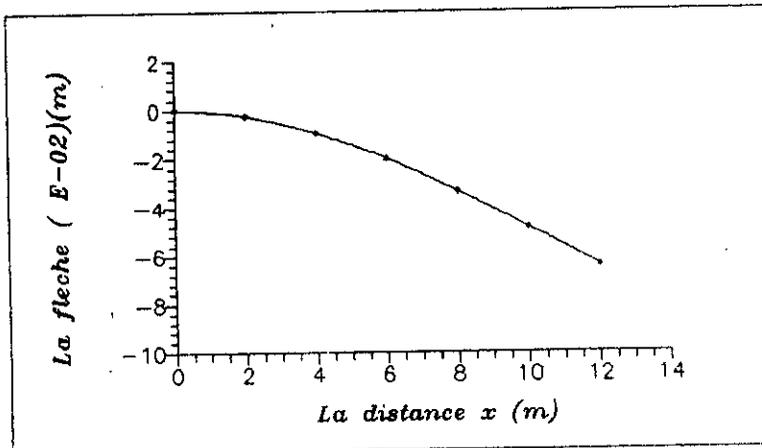
COURBES DE LA DEFORMEE DE L'AXE NEUTRE en foction de (x)



Par M.E.F



Par B.E.M



Par COUPLAGE



APPLICATION : 2

ETUDE d'UNE POUTRE EN TRACTION PAR LA MEF , BEM ET LE COUPLAGE

MEF :

Programme : MEFEP

Type d'élément : Elément rectangulaire bilinéaire à 8 d . d . l

Discrétisation : N = 14 , 21 , 39 , 65 , 117

(N : nombre de noeuds)

BEM :

Programme : ELLINBE

Type d'élément : Elément linéaire à 4 d . d . l

Discrétisation : N = 10 , 20 , 32 , 40 , 56 , 64

COUPLAGE :

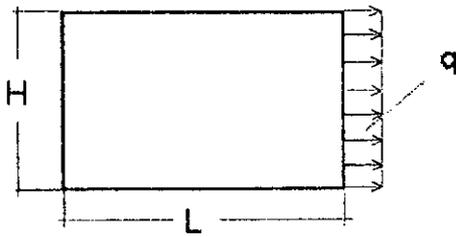
Programme : COUPLAGE

Type d'élément : isoparamétrique et linéaire .

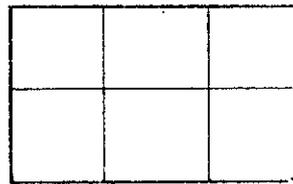
Discrétisation : N = 14 , 23 , 40 , 70 , 100



POUTRE ENCASTREE EN TRACTION (DISCRETISATION)



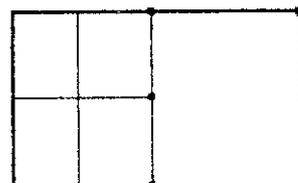
$L = 60 \text{ cm}$
 $H = 40 \text{ cm}$
 $q = 1 \text{ daN/cm}$
 $E = 1340 \text{ MPA}$
 $\nu = 0.3$



MEF
 (6 éléments)



BEM

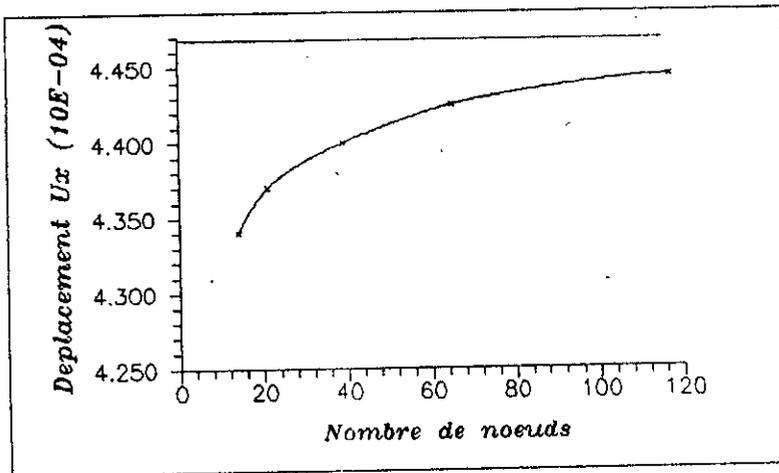


COUPLAGE

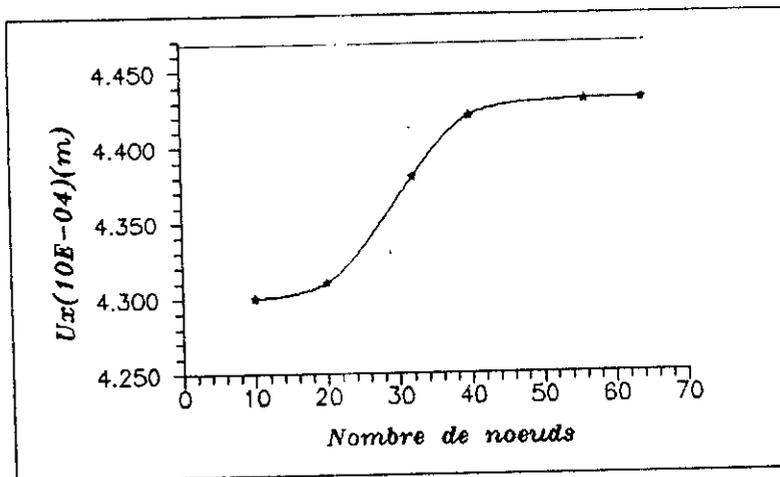
53

COURBES DE CONVERGENCE DES DEPLACEMENTS

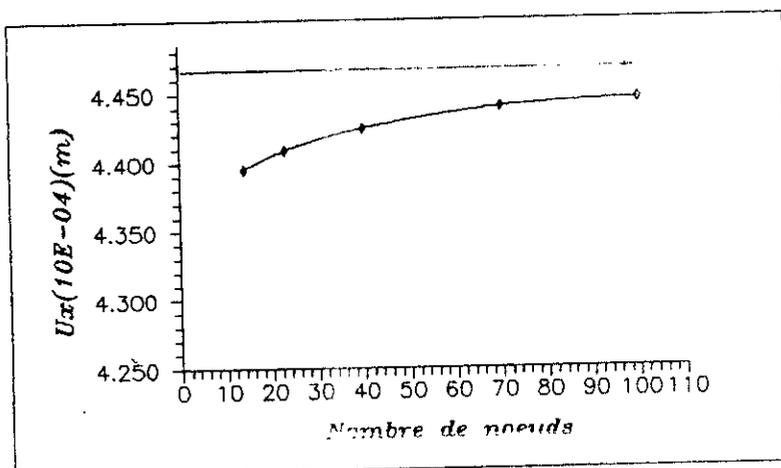
EN FONCTION DU NOMBRE DE NOEUDS



Par M.E.F

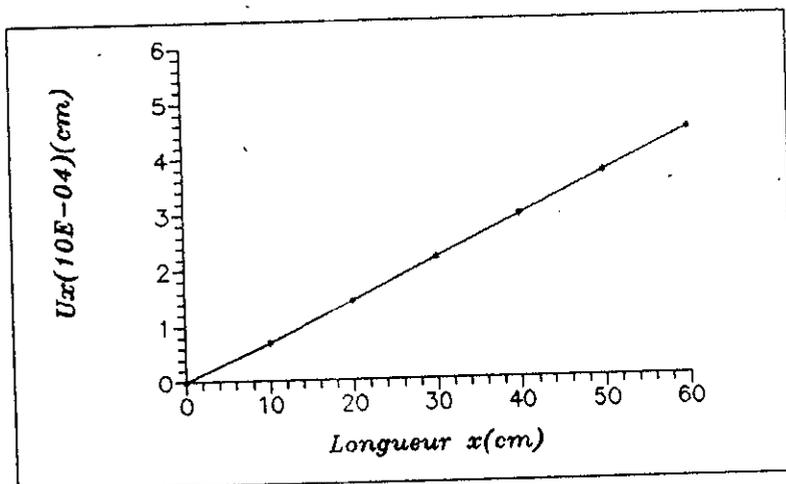


Par B.E.M

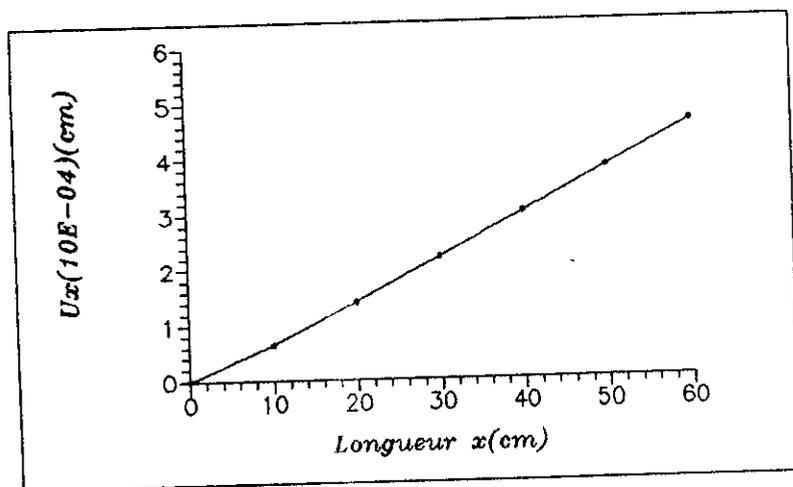


Par COUPLAGE

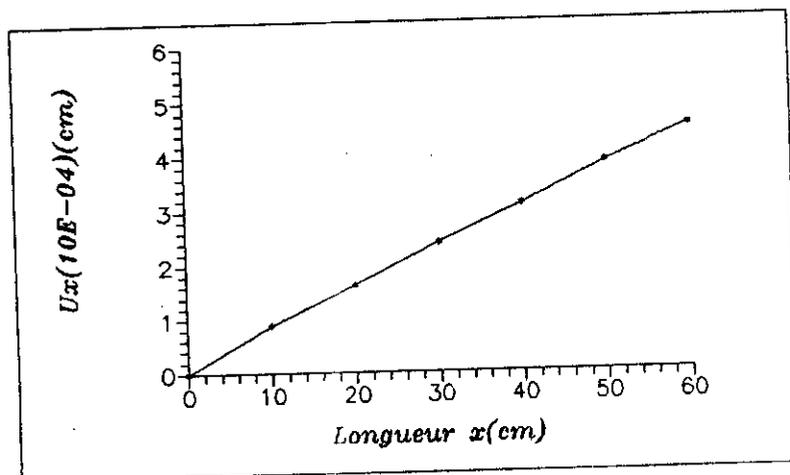
COURBES DES DEPLACEMENTS



Par M.E.F



Par B.E.M



Par COUPLAGE

APPLICATION : 3

ETUDE d'UNE PLAQUE PERCEE A OUVERTURE CIRCULAIRE SUJETE A UN CHARGEMENT UNIAXIAL DANS SON PLAN , MOYEN PAR LA MEF , BEM ET LE COUPLAGE

MEF :

Programme : MEFISO

Type d'élément : Elément isoparamétrique quadrilatéral
à 8 d . d . l

Discrétisation : N = 11 , 38 , 52 , 76

(N : nombre de noeuds)

BEM :

Programme : ELLINBE

Type d'élément : Elément linéaire à 4 d . d . l

Discrétisation : N = 8 , 16 , 24 , 32 , 64

COUPLAGE :

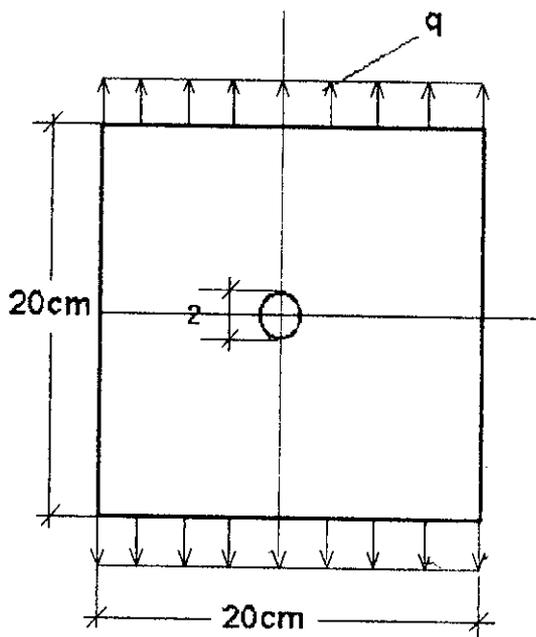
Programme : COUPLAGE

Type d'élément : isoparamétrique et linéaire .

Discrétisation : N = 18 , 37 , 56 , 86



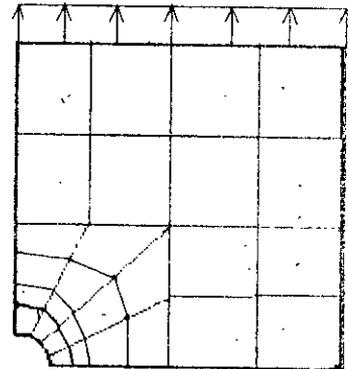
PLAQUE PERCEE A OUVERTURE CIRCULAIRE [DISCRETISATION]



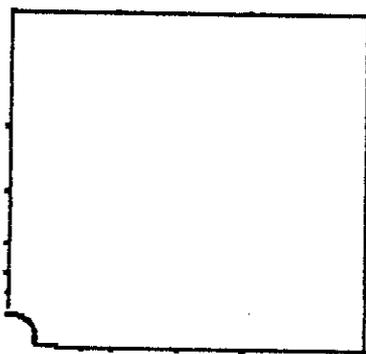
$$q = 1 \text{ kg/cm}$$

$$E = 2.10E06 \text{ kg/cm}^2$$

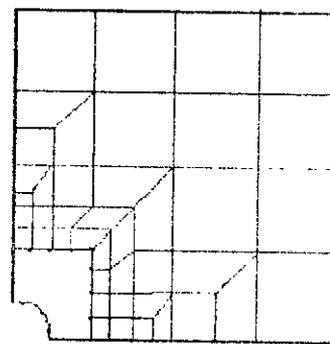
$$\nu = 0.3$$



MEF

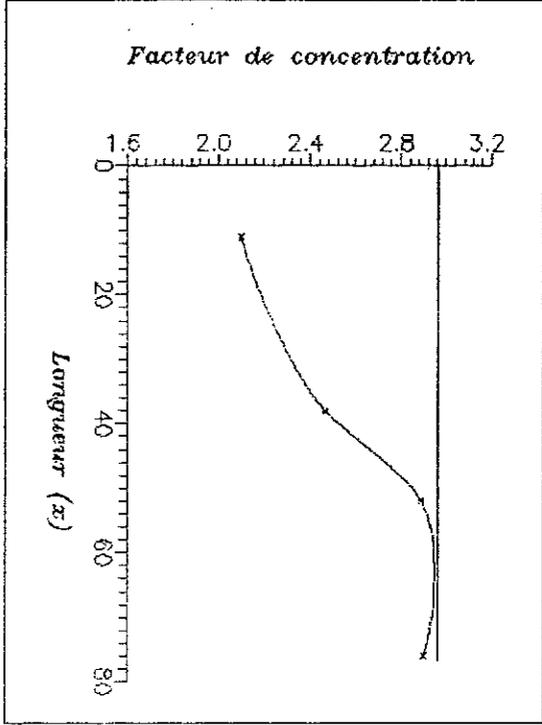


BEM

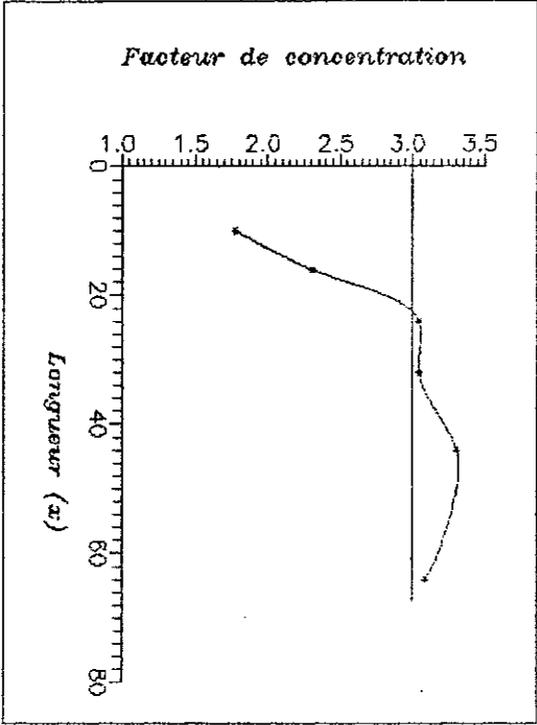


BFEM

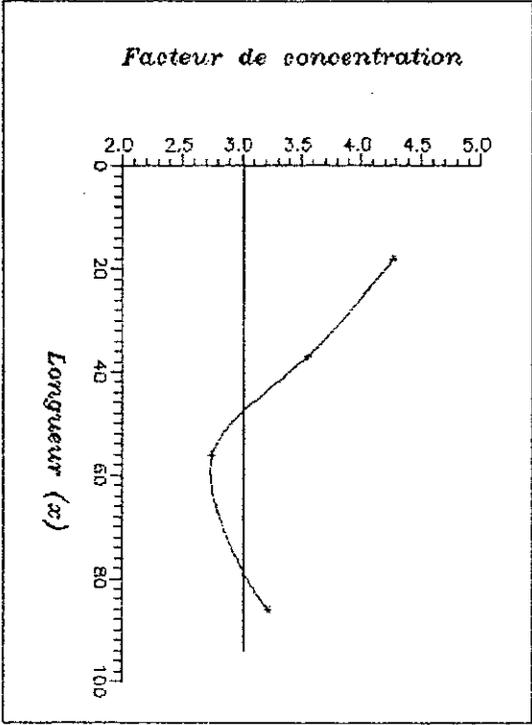
COURBES DE CONVERGENCE DU FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE



PAR MEF

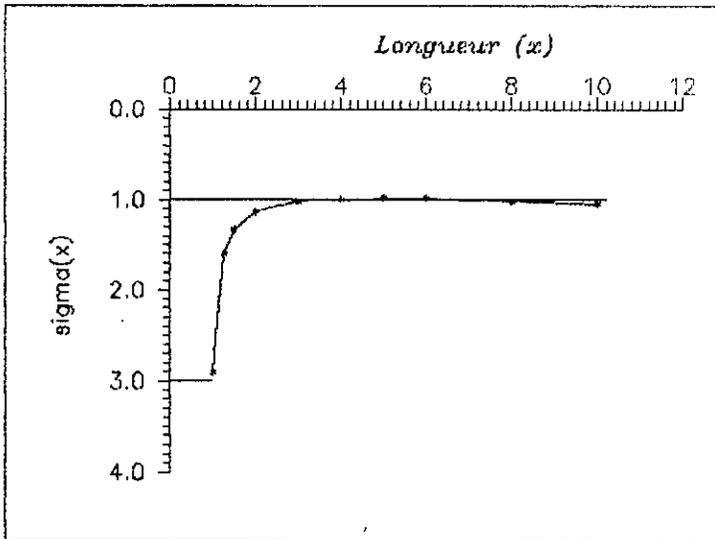


PAR BEM

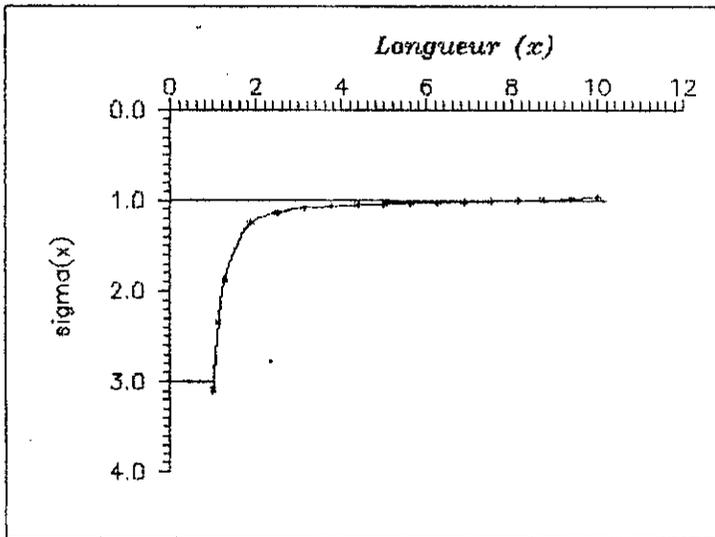


PAR COUPLAGE

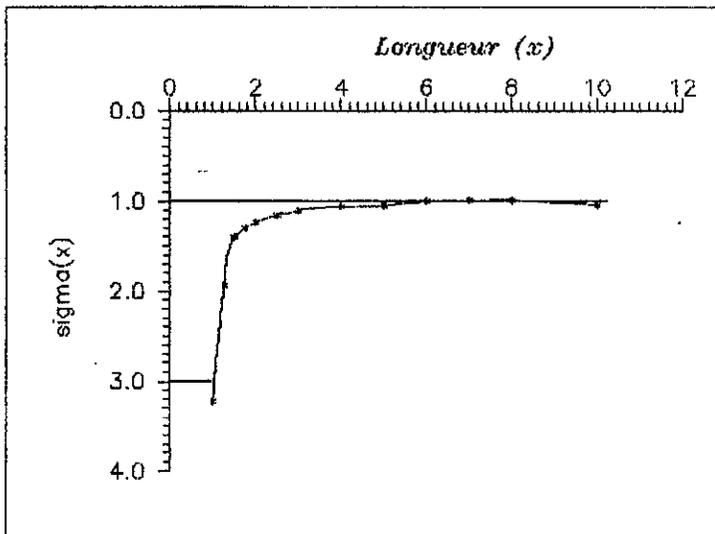
COURBE DE LA VARIATION DES CONTRAINTES
 $\sigma(y)$ LE LONG DE L'AXE x



PAR MEF



PAR BEM



PAR COUPLAGE

APPLICATION : 4

ETUDE d'UNE PLAQUE PERCEE A OUVERTURE CARREE SUJETE A UN CHARGEMENT UNIAXIAL DANS SON PLAN MOYEN , PAR LA MEF , BEM ET LE COUPLAGE

MEF :

Programme : MEFISO

Type d'élément : Elément isoparamétrique quadrilatéral

à 8 d . d . l

Discrétisation : N = 11 , 24 , 45 , 69

(N : nombre de noeuds)

BEM :

Programme : ELLINBE

Type d'élément : Elément linéaire à 4 d . d . l

Discrétisation : N = 10 , 20 , 24 , 32 , 64

COUPLAGE :

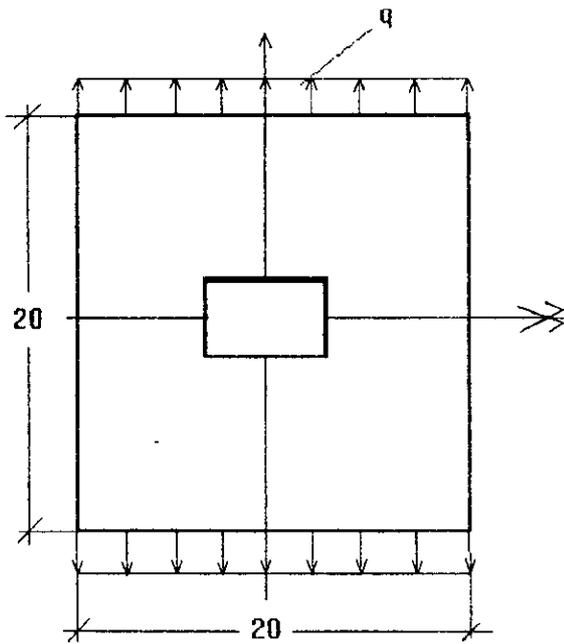
Programme : COUPLAGE

Type d'élément : isoparamétrique et linéaire .

Discrétisation : N = 16 , 33 , 50 , 71



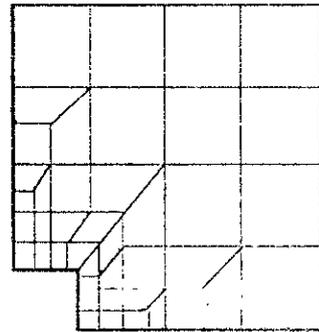
PLAQUE A OUVERTURE CARREE (DISCRETISATION)



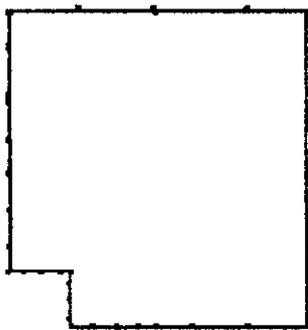
$$E = 2.10E06 \text{ kg / cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

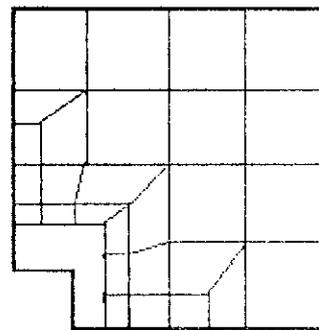
$$q = 1 \text{ kg / cm}$$



MEF

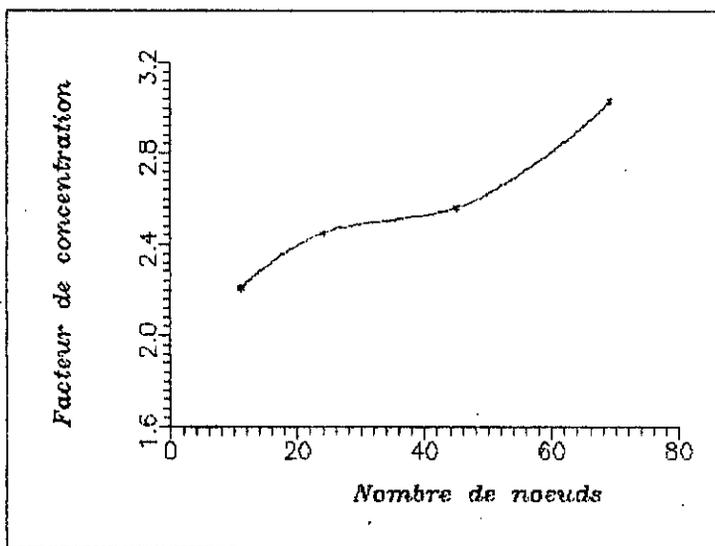


BEM

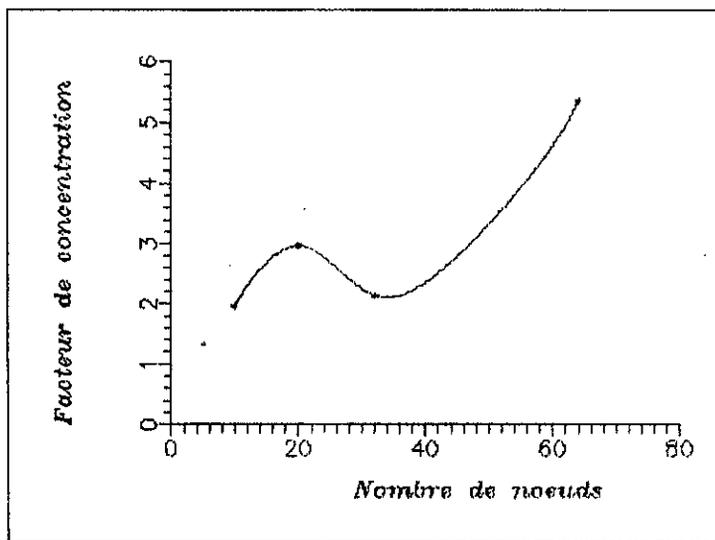


BFEM

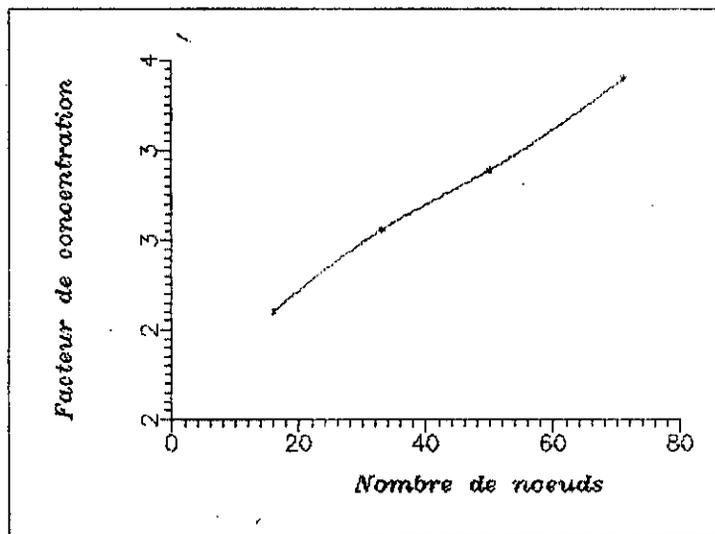
COURBE DE CONVERGENCE DU FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE



PAR MEF



PAR BEM



PAR COUPLAGE



**COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS POUR LE
CAS DE LA POUTRE EN FLEXION**

TABLEAU 1 : Deformation de l'axe neutre :

X	ELASTICITE (10^{-2})	MEF (10^{-2})	BEM (10^{-2})	BFEM (10^{-2})
2	0,254	0,258	0,236	0,249
4	0,955	0,957	0,866	0,951
6	2,015	2,00	1,805	1,985
8	3,343	3,31	2,978	3,336
10	4,851	4,79	4,309	4,819
12	6,448	6,36	5,789	6,391

TABLEAU 2 : Pourcentage d'erreur de la flèche :

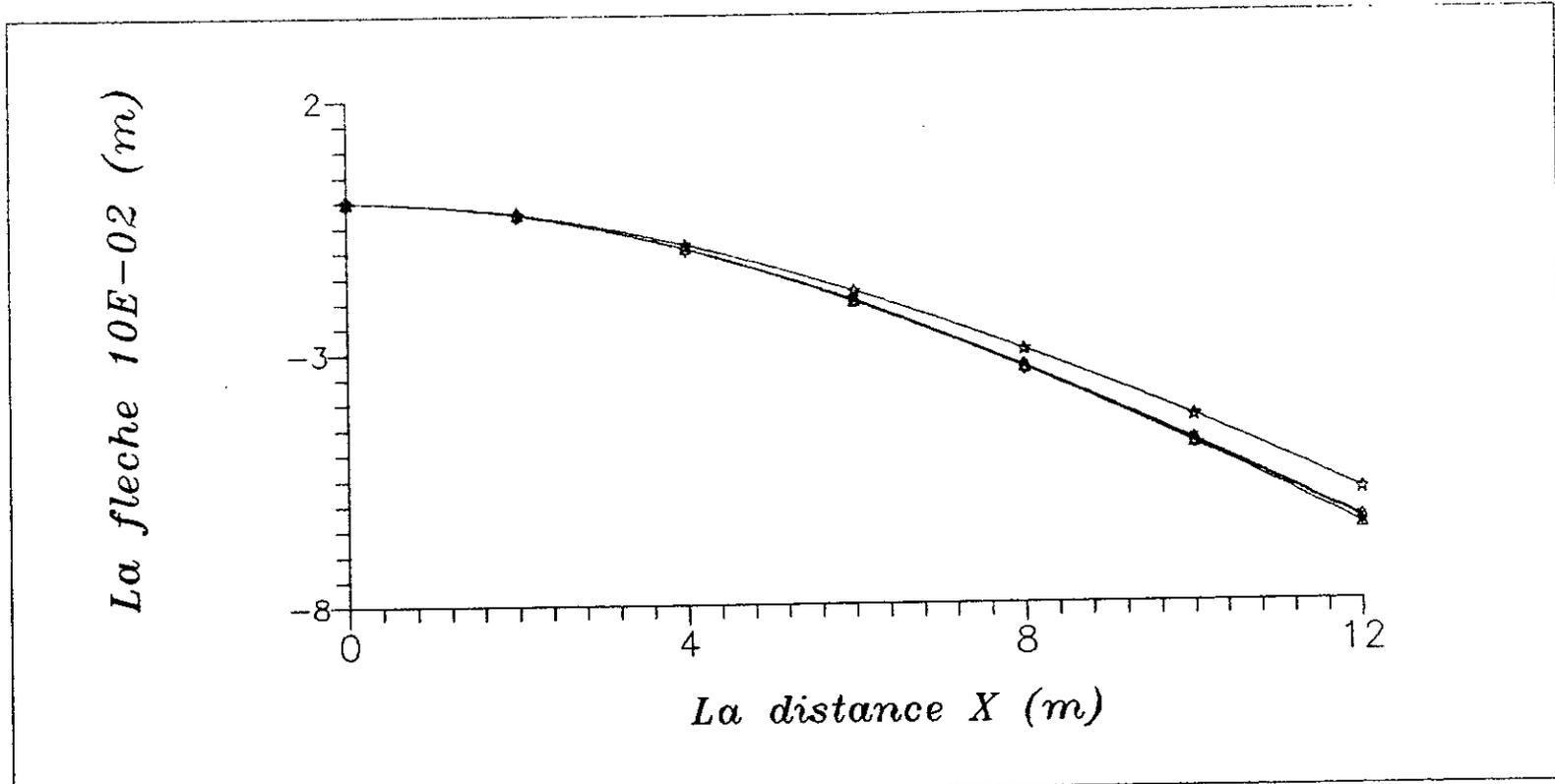
	ELASTICITE	MEF	BEM	BFEM
Nbre de noeuds	/	125	72	100
Flèche	$6,448 \cdot 10^{-2}$	$6,36 \cdot 10^{-2}$	$5,78 \cdot 10^{-2}$	$6,39 \cdot 10^{-2}$
DELTA %	/	1,36	10,22	0,88

Soit la poutre traitée dans l'application (1) (poutre en flexion).

Les déplacements calculés par les différents méthodes sont comparés dans le tableau 1 .

Dans le tableau 2 , on a calculer le pourcentage d'erreur .





△ △ △	ELASTICITE
× × ×	M.E.F
☆ ☆ ☆	B.E.M
◇ ◇ ◇	COUPLAGE

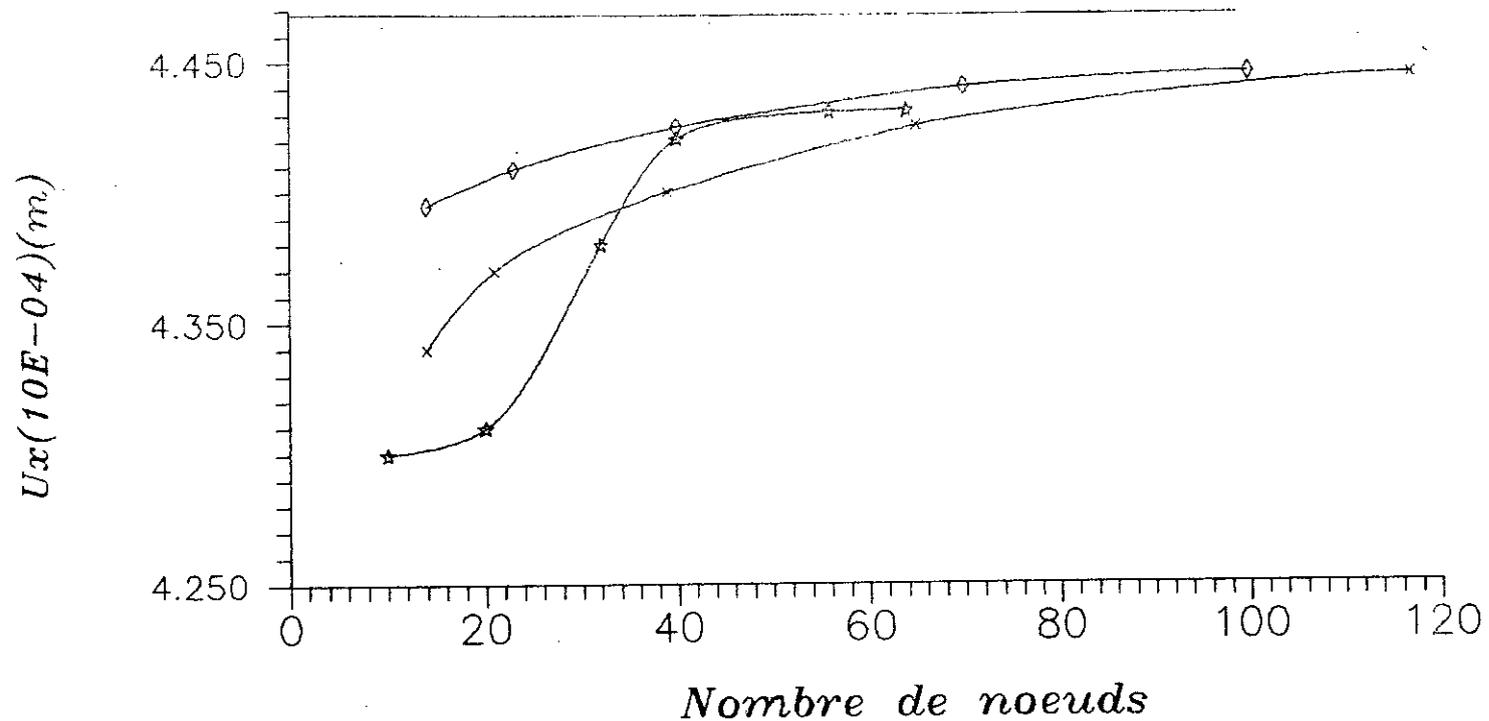
GRAPHIQUE COMPARATIF DES COURBES DE LA DEFORMATION DE L'AXE NEUTRE PAR LES DIFFERENTS MODELES (ELASTICITE, M.E.F et COUPLAGE)

COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS POUR LE
CAS DE LA POUTRE EN TRACTION

Soit la poutre en traction traitée dans l'application 2 , les erreurs sont comparées dans le tableau (3) :

TABLEAU 3 :

	ELASTICITE	MEF	BEM	BFEM
Nbre de noeuds	/	117	64	100
Déplac. Ux	$4,478.10^{-4}$	$4,431.10^{-4}$	$4,444.10^{-4}$	$4,445.10^{-4}$
DELTA %	/	0,76	1,05	0,74



—	ELASTICITE
x x x	M.E.F
☆ ☆ ☆	B.E.M
◇ ◇ ◇	COUPLAGE

GRAPHE COMPARATIF DES COURBES DE CONVERGENCE DU DEPLACEMENT
 U_x EN FONCTION DU NOMBRE DE NOEUDS PAR LES DIFFERENTS
 METHODES (MEF , BEM et COUPLAGE)

COMPARAISON DES RESULTAS OBTENUS POUR LE
CAS DE LA PLAQUE A OUVERTURE CIRCULAIRE

Soit la plaque percée à ouverture circulaire traitée dans l'application (3) , le tableau (4) montre le pourcentage d'erreur du facteur de concentration de contraintes .

	ELASTICITE	MEF	BEM	BFEM
Nbre de noeuds	—	7 6	6 4	8 6
Facteur de concentration	3	2.9	3.09	3.22
DELTA %	—	3.3 33	3.036	7.3 33



COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS POUR LE
CAS DE LA PLAQUE A OUVERTURE CARREE

Soit la plaque percée à ouverture carrée traitée dans l'application (4) . Le tableau (5) montre le pourcentage d'erreur du facteur de concentration de contrainte .

	MEF	BEM	BFEM
Nbre de noeuds	69	64	71
Facteur de concentration	3.03	5.377	3.44



INTERPRETATION DES RESULTATS

Les applications qu'on a traité dans notre travail nous ont permis de voir le degré de puissance de chaque méthode.

L'interprétation va être comme suit :

* Pour le premier exemple , (la poutre en flexion) on a obtenue des courbes de convergence , où on a remarqué qu'une méthode converge plus rapidement qu'une autre pour différentes discétisations , le taux de convergence varie d'une variable à une autre , cela s'explique par le fait qu'une variable est obtenue par différentiation de l'autre.

Pour ce qui est de la courbe de déformé l'allure est la même pour toutes les méthodes on constate que le couplage converge plus rapidement.

* Pour le deuxième exemple , (la poutre en traction) on a les mêmes constatation sauf que la convergence est obtenue pour un nombre moindre de noeuds. L'allure de la déformée est pratiquement la même.

* Pour le troisième exemple , la plaque percée à ouverture circulaire ,(problème de concentration de contrainte) la discétisation a été faite sur le quart de la plaque , à cause de la double symétrie de la géométrie et la symétrie du chargement . les résultats obtenues on été comparés , on a remarqué que le facteur de concentration de contrainte converge toujours vers la valeur théorique qui est égale à trois.

La courbe de variation des contraintes est très proche de la courbe théorique , son allure est d'avoir une augmentation brusque (exponentielle) de la contrainte au niveau du trou , et à une valeur presque constante égale à la contrainte appliquée ailleurs.

* Pour le quatrième exemple ,(la plaque à ouverture carrée) la même partie à été prise en compte (pour les même raisons) les résultats obtenues montre que le facteur de concentration augmente indéfiniment théoriquement jusqu'à l'infinie , où en pratique cela représente une déformation plastique.

CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -

CONCLUSION

Notre travail a consisté en l'étude des techniques numériques (MEF , BEM , COUPLAGE) pour l'analyse des problèmes d'élasticité bi-dimensionnel .

Dans le but de développer la technique du couplage , il a été nécessaire d'étudier séparément la MEF et la BEM.

En ce qui concerne la MEF , l'étude théorique nous a permis d'élaborer deux programmes ; MEFEP et MEFISO .

Le premier (MEFEP) est plus puissant pour les structures rectangulaires à maillage uniforme.

Le deuxième a été conçu pour une large utilisation (structures à géométries complexes).

La MEF engendre des matrices de tailles importantes , qui pose dès fois des problèmes de capacité mémoire , cela nous a mené à utiliser une autre méthode , qui est la méthode des éléments frontières .

L'étude de cette méthode nous a mené à élaborer le programme ELLINBE qui utilise les éléments linéaires .

Noton que la MEF et la BEM ont tous les deux des avantages et des inconvénients ; une procédure a été formulée pour profiter de leurs avantages , en effet , la BEM est à utiliser pour les régions infinies ou à facteur de concentration élevé et la MEF pour les domaines finis et (ou) ayant un comportement non-linéaire .

CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -CONCLUSION -

Enfin , on peut conclure par :

- * Pour l'analyse des problèmes présentant une complexité de la géométrie et des propriétés physiques le couplage est conseillé.
- * L'utilisation des éléments finis pour la représentation de la région de concentration de contraintes encombre le schéma du maillage , d'où il est plus important d'utiliser le couplage.
- * L'augmentation du nombre d'élément pour la BEM est beaucoup plus facile que pour la MEF ou le Couplage .
- * Pour des structures à géométrie courbe il est plus avantageux d'utiliser des éléments quadratiques car ils représentent mieux la courbure et le temps d'exécution diminue .



BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.G. BATHE " Numerical method in finite element analysis "
Prentice - hall , new jersey
- [2] M . K . BERRAH , Note de cours de MMC 4^{ème} année génie - civil
E . N . P
- [3] C . A . BREBBIA and ANDJ . DOMINGUEZ " Boundary element an
introductory course " M . C . GRAHILL BOOK COMPANY (1989)
- [4] C . A . BREBBIA " The boundary element method for engineers , "
PENTECH PRESS , LONDON
- [5] C . A . BREBBIA J . C . F TELLES " Boundary element technics "
L . C . WROBEL (1989)
- [6] M . DEMIDEM , Note de cours de calcul automatique des structures
4^{ème} année Génie - civil E . N . P
- [7] G . DATT et G . TOUZOU "Une présentation de la methode des
éléments finis " MALOINE S . A EDITEUR , PARIS (1979)
- [8] DJAALALI , BOUDAA " Analyse des problèmes de l'élasticité plane
par la méthode des équations intégrales aux frontières "
thèse d'ingénieur à l'E . N . P (1992)
- [9] M . HADID et BENAZZOUZ " Investigation numérique du
comportement des plaques par la méthode des éléments finis et la
méthode des équations intégrales aux frontières "
thèse d'ingénieur à l' E . N . P (1992)





- [10] D . W . KELLY , G . G . W . MUSTOE and O . C . ZIENKIEWICZ
" Coupling Boundary element methods with other numerical methods "
Department of civil engineering , University of WALES SWANSEA ,
UK .
- [11] LOUNAS . A et MEBROUKI . AEK " Etude comparative entre MEF
et MEIF dans le cas de concentration de contraintes "
thèse d'ingénieur à l' E.N.T.P (1991)
- [12] L . U . O . GANGMING " A new Boundary element method coupled
with FEM packages " Communications in applied numerical
methods , vol 5 , 365 - 371 (1989)
- [13] MERAGHNI " Analyse des plaques minces pliées par la méthode
des éléments finis " thèse d'ingénieur à l' E . N . P (1989)
- [14] T . MESSAFER " Coupling of finite element and Boundary element
technics " thèse de magistère obtenue au ' Department of civil
engineering (1988) *Birmingham*
- [15] F . A . de PAULA J . C . F . TELLES and W . J . MANSUR
" Combination of Boundary elements and finite elements to solve
two-dimensional elasticity problems " (163 - 176)
- [16] K . C . ROKEY , H . R . EVANS , D . W . GRIFFITHS et D . A .
NETHERCOT " Introduction à la méthode des éléments finis "
EYROLLES , PARIS (1979)
- [17] S . P . TIMOSHENKO " Théorie de l'élasticité "
Librairie POLYTECHNIQUE CH . BERANGER (1948)
- [18] S . P . TIMOSHENKO et COODIER . J . N
" Théorie de l'élasticité " , MC GRAW - HILL TOKYO ;
- [19] T . Y . YANG " Finite element structural analysis " PRENTICE -
HALL , ENGLEWOOD CLIFFS , NEW JERSEY (1986)





-
- [20] O. C. ZIENKIEWICZ " The finite element method in engineering science " MC GRAW - HILL , LONDON
- [21] O. C. ZIENKIEWICZ , D . W . KELLY and BETTESS
" The coupling of the finite element method and Boundary solution procedures " INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING vol 11 (355 - 375) (1977)

