

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Département de Génie Electrique

Thèse de Doctorat d'Etat en Electrotechnique
Option : Machines Electriques

Youcef OUAZIR
Magister en Electrotechnique
De l'Ecole Nationale Polytechnique

Thème :

***Contribution à la modélisation
électromagnétique des
machines à induction***

Soutenue publiquement le 02 Décembre 2006, devant le jury suivant :

N. BENAMROUCHE	Professeur	U. MMTO	Président
R. IBTIOUEN	Professeur	ENP	Rapporteur
O. TOUHAMI	Professeur	ENP	Rapporteur
N. TAKORABET	Maître de Conférences	ENSEM/INPL(Nancy)	Examineur
Y. AMARA	Maître de Conférences	UTBM (Belfort)	Examineur
S. MEKHTOUB	Maître de Conférences	ENP	Examineur
M. AKLIOUANTE	PDG, Complexe Electro-Industries Azazga		Invité
J. TOUSSAINT	Attaché Culturel, Ambassade de France à Alger		Invité

A mes parents, à toute ma famille et à mes amis (es).

Remerciements

Ce travail a été effectué au laboratoire d'électrotechnique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, sous la direction scientifique de Monsieur le Professeur Rachid Ibtiouen. Qu'il soit remercié pour la confiance qu'il m'a témoignée en m'accueillant dans son équipe et pour avoir accepté de diriger ce travail. Ses encouragements m'ont été d'un grand secours durant les périodes difficiles.

Je remercie Monsieur Omar Touhami, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'avoir accepté de co-diriger ce travail de thèse. Je tiens à exprimer ma haute reconnaissance pour sa disponibilité à chaque sollicitation et sa générosité scientifique.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Nacereddine Benamrouche, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de soutenance.

Que Monsieur Noureddine Takorabet, Maître de Conférences à l'ENSEM/INPL de Nancy, soit remercié à plus d'un titre. En plus de l'honneur qu'il me fait d'examiner la thèse, il a toujours été derrière le travail durant les stages que j'ai effectué au laboratoire GREEN de Nancy. Les riches discussions que j'ai pu avoir avec lui et les différentes idées proposées m'ont été d'un grand apport.

Que Messieurs Saïd Mekhtoub, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique et Yacine Amara, Maître de Conférences à l'Université de Technologie de Belfort Montbéliard, soient convaincus de mes sincères reconnaissances pour avoir accepté d'examiner et critiquer cette thèse.

Que Messieurs Akliouante Mohamed PDG du Complexe Electro-Industries d'Azazga et Jean Toussaint attaché Culturel à l'Ambassade de France à Alger, acceptent mes sympathiques sentiments pour être mes invités d'honneur à l'examen de cette thèse.

Que l'ensemble des deux équipes de l'accord programme CMEP-TASSILI (partie Algérienne représentée par le Professeur Rachid Ibtiouen et la partie Française représentée par le Professeur Bernard Laporte) accepte mes sincères reconnaissances pour m'avoir fait profiter de stages effectués au laboratoire GREEN de Nancy, sans lesquels ce travail n'aurait jamais pu aboutir.

Que les collègues de l'USTHB, sans citer les noms de peur d'en oublier certains, trouvent ici mes sincères sentiments de reconnaissance, en particulier l'équipe du labo 47 pour le plaisir de travailler avec eux et la sympathique ambiance qu'ils ont toujours manifesté.

Les enseignants chercheurs du laboratoire GREEN Nancy, sont remerciés pour leur chaleureux accueil à chaque stage que j'ai effectué et l'ambiance de travail dans laquelle ils m'ont toujours installée, en particulier Smail Mezani pour ses riches recommandations et orientations et Jean Paul Caron pour son aide dans les essais expérimentaux. Une pensée particulière va à l'ensemble des thésards de ce même laboratoire.

Introduction générale	1
 Chapitre I Modèles mathématiques des machines à induction 	
I.1 Introduction	3
I.2 Modèles électromécaniques des machines à induction	3
I.2.1 Modèles électromagnétiques	3
I.2.1.1 Les modèles électriques (externes)	3
a)- Le régime transitoire	3
b)- Le régime permanent	4
I.2.1.2 Modèles internes (magnétiques)	5
a)- Modèles internes en régime magnétodynamique	5
b)- Modèles internes dans l'approximation sinusoïdale	6
I.2.1.3- Modèles internes associés aux schémas équivalents	7
I.2.2 Modèles mécaniques	8
I.3 Outils mathématiques pour la modélisation	8
I.3.1 Mise en équations du problème magnétique	8
a)- Expression locale des équations de Maxwell	8
b)- Comportement des matériaux	9
c)- Conditions d'interface	9
I.3.2 Formulation magnétodynamique dans l'hypothèse quasi-stationnaire	10
a)- Hypothèse des états quasi-stationnaires	10
b)- Equations de la magnétodynamique	11
c)- Régime harmonique (Approximation sinusoïdale)	12
I.3.3 Formulation A-V du problème magnétodynamique	12
- Forme Lagrangienne des équations de la magnétodynamique	13
- Condition d'unicité	13
- Conditions de passage	13
- Régime harmonique (approximation sinusoïdale)	14
I.3.4 Modèle magnétodynamique appliqué aux machines à induction	14
- Stator	15
- Entrefer	15
- Rotor	15
I.4. Couplages magnétique-circuit-mouvement mécanique	16
I.4.1 Problème magnétodynamique et circuits électriques	16
I.4.1.1 Circuit du stator	17
I.4.1.2 Circuit du rotor	17
I.4.2 Problème magnétodynamique et équation mécanique	18
I.5 Techniques de prise en compte du mouvement du rotor	19
a)- Ligne de glissement	19
b)- Bande de roulement	19

c)- Méthode du double entrefer	20
d)- Méthodes hybrides	21
- Eléments finis-solution analytique	21
- Eléments finis – intégrales de frontières	21
e)- Couplage d'interface	21
I.6 Conclusion	23
 Chapitre II Modélisation électromagnétique des machines à induction en régime harmonique	
II.1. Introduction	24
II.2. Modélisation électromagnétique avec le couplage du premier harmonique d'espace	24
II.2.1. Domaine d'étude	24
II.2.2. Equations du champ magnétique	25
II.2.3. Equations des circuits électriques du stator et du rotor	26
II.2.3.1. Equations électriques du stator	26
II.2.3.2. Equations électriques de la cage du rotor	27
II.3. Formulation en éléments finis des équations avec couplage d'interface.	28
II.3.1 Principe de la méthode de couplage d'interface des champs statorique et rotorique. .	28
II.3.2 Technique de transformation de variables pour le couplage des équations du champ dans l'entrefer	30
II.3.3 Couplage des termes source de champ aux grandeurs électriques	31
II.3.4 Formulation en éléments finis des équations de circuit	32
II.3.5 Equations globales du problème magnétique-circuits électriques dans le cas du premier harmonique d'espace	32
II.4 Méthode du couplage d'interface avec prise en compte des harmoniques d'espace	33
II.4.1 Domaine d'étude et formulation du problème en éléments finis	33
II.4.2 Modèles du stator et du rotor	33
II.4.3 Equations de couplage d'interface et formulation en éléments finis	34
II.5 Modèle adopté pour la prise en compte de la saturation	37
II.6 Caractéristiques externes	38
II.6.1 Les pertes	38
• Pertes par effet Joule.	38
II.6.2. Les puissances	39
• Puissance active absorbée	39
• Puissance réactive	39
• Puissance électromagnétique	39
• Puissance mécanique	39
• Rendement	39

• Facteur de puissance	40
II.6.3. Couple électromagnétique	40
• Calcul par le bilan de puissances	40
• Calcul par le tenseur de Maxwell	40
II.7. Application à deux types de machines à induction (Rotor à cage et rotor massif)	40
II.7.1 Cas du premier harmonique d'espace	41
II.7.2 Considération des harmoniques d'espace	43
II.8. Conclusion	48

Chapitre III

Modélisation électromagnétique des machines à induction en régime transitoire

III.1. Introduction	49
III.2. Modèle magnétodynamique couplé aux circuits électriques en régime transitoire	49
III.2.1. Domaine d'étude	49
III.2.2 Equations du champ et des circuits	50
- Problème du stator	50
- Problème du rotor	51
III.3. Formulation en éléments finis des équations du champ et de circuits	51
III.3.1 Discrétisation spatiale des équations	51
a- Equations dans le domaine du stator	52
b- Equations dans le domaine du rotor	52
III.3.2 Discrétisation des équations dans le temps	53
a- Problème du stator	53
b- Problème du rotor	54
III.4 Prise en compte du mouvement et couplage du champ dans l'entrefer.	56
III.5 Couplage des problèmes statorique et rotorique	57
III.6 Equations globales du problème magnétique couplé aux circuits électriques	59
III.7 Application à l'étude du régime transitoire électrique	59
III.7.1 Simulation du régime transitoire électrique avec le premier harmonique d'espace. .	60
a)-Fonctionnement à vide	60
b)-Fonctionnement en charge	61
c)-Fonctionnement à rotor bloqué.	63
III.7.2 Simulation du régime transitoire électrique avec considération des harmoniques d'espace	64
a)-Fonctionnement à vide	64
b)-Fonctionnement en charge	65

c)-Fonctionnement à rotor bloqué.	66
III.7.2 Comparaisons et discussions	67
III.8 Modèle électromécanique de la machine à induction	72
III.8.1 Couplage de l'équation mécanique au modèle électrodynamique	72
III.9 Application à la simulation des régimes transitoires de démarrage des machines à induction.	74
a)- Résultats de simulation avec le premier harmonique d'espace.	75
b)- Résultats de simulation avec prise en compte des harmoniques d'espace.	77
c)- Comparaisons et discussions	79
III.10 Conclusion	82
 Chapitre IV Validation expérimentale	
IV.1. Introduction	83
VI. 2 Dispositif expérimental	83
VI. 2.1 Caractéristiques des machines utilisées pour la validation	83
a)- Moteur à rotor massif	83
a)- Moteur à rotor à cage à encoches fermées	84
IV.2.2 Bancs d'essais	84
IV.3 Validation du modèle de la magnétodynamique complexe	85
IV.3.1 Régime le premier harmonique d'espace	85
IV.3.2 Régime avec prise en compte des harmoniques d'espace	86
V. 3.3 Mesure du couple	88
V. 3.4 Comparaisons des résultats	88
IV.4 Régime transitoire électrique	91
IV.5 Régime transitoire électromécanique.	95
IV.6. Conclusion	97
Conclusion générale.	98
Références bibliographiques	100
Annexes	109
A. Formulation éléments finis des équations du champ.	109
B. Couplages des équations électromagnétiques et des circuits.	112
C. Notes sur la résolution éléments finis et traitement de la saturation.	117
D. Couplages des champs magnétiques dans l'entrefer	118
E. Caractéristiques de la machine étudiée	120

Introduction générale

Les machines à induction, comme tous les autres types de machines électriques, transforment l'énergie électrique en énergie mécanique et vice versa. Cette transformation fait intervenir des aspects électriques, électromagnétiques, thermiques, mécaniques et acoustiques. Pour chacun de ces phénomènes physiques, il existe autant de modèles mathématiques destinés à des applications données. Ces derniers modèles se retrouvent couplés par différentes grandeurs physiques. Ainsi, le fonctionnement des machines à induction n'est d'écrit correctement que par l'examen simultané de tous les phénomènes cités, ce qui n'est pas un problème facile à résoudre. En effet, le nombre important de ces derniers phénomènes physiques à considérer fait que l'on a toujours recours au couplage direct de certains et à la résolution d'autres séparément selon l'ordre de grandeur de la constante de temps du phénomène physique étudié. Parmi tous ces phénomènes physiques, il se trouve que ce sont l'analyse de l'interaction électromagnétique des circuits électriques et le mouvement mécanique qui déterminent les autres phénomènes tels que la thermique, les vibrations d'origine magnétique et l'acoustique.

Analyser le champ magnétique dans les machines à inductions revient à résoudre des problèmes magnétodynamiques associés aux circuits électriques du dispositif d'alimentation. Malgré les diverses approches numériques développées, le régime magnétodynamique reste une tâche difficile à cause de la diffusion lente du champ dans le rotor, provoquée par son mouvement relatif par rapport à celui du stator. La difficulté principale réside dans le couplage magnétique du stator avec le rotor. Ce problème est résolu généralement par le modèle magnétodynamique complexe ou par l'utilisation d'un modèle pas à pas dans le temps.

Malgré la prise en compte de la saturation dans le sens moyen, l'utilisation du modèle magnétodynamique complexe, couplé aux circuits électriques, s'avère très intéressant pour la réduction du temps de calcul. En supposant que toutes les grandeurs électromagnétiques sont sinusoïdales, la variable temps est éliminée. Dans ce modèle classique, le mouvement du rotor est simulé par la technique de transformation de glissement. Cela suppose que la diffusion du champ magnétique dans le rotor s'effectue à la seule fréquence du champ fondamental. Or le champ, créé par les courants d'alimentation, est entaché d'harmoniques d'espaces dues à la répartition spatiale non sinusoïdale des conducteurs et à l'effet de la denture. Les champs harmoniques résultants glisseront alors à des fréquences différentes de celle du fondamental.

Les machines à induction ont pour fonction principale la conversion électromécanique de l'énergie. Pour décrire de façon très fine et de manière générale leur fonctionnement dynamique, il est indispensable de considérer l'interaction entre le champ magnétique, les circuits électriques et le mouvement indéformable d'une partie de la structure mécanique mobile. Ceci constitue un couplage physique fort car les grandeurs électriques et magnétiques sont significativement modifiées en fonction de la dynamique du mouvement. L'analyse fine de cette interaction ne peut s'effectuer qu'avec un modèle pas à pas dans le temps où la saturation est prise en compte convenablement. L'handicap majeur de ce modèle réside dans le temps calcul prohibitif nécessaire à la résolution. Ce temps de calcul élevé n'est pas consommé dans la résolution du système algébrique seulement, car les matrices éléments finis sont creuses, mais aussi dans la technique de couplage des champs du stator et du rotor pour suivre la diffusion du champ et le mouvement. Ainsi, la prise en compte du mouvement du rotor peut conduire à des remaillages de l'entrefers pour chaque pas de temps ou à un système algébrique mal conditionné dont la résolution est très délicate.

Nos objectifs dans ce travail, effectué au Laboratoire de Recherche en Electrotechnique (LRE) de l'Ecole Nationale Polytechnique en collaboration avec le Groupe de Recherche en Electrotechnique et Electronique (GREEN) de l'ENSEM Nancy (INPL), consistent à essayer de contribuer modestement à la modélisation des machines à induction en utilisant une technique de couplage d'interface des champs du stator et du rotor. Ainsi, on effectue :

- La prise en compte des harmoniques d'espaces dans le modèle magnétodynamique complexe, chose qui ne peut être considérée correctement dans le modèle classique.
- L'analyse de l'interaction entre le champ magnétique, les circuits électriques et le mouvement mécanique du rotor avec un calcul pas à pas dans le temps. Ce qui permet d'étudier les régimes transitoires électriques et mécaniques des machines à induction.

Notre travail est structuré en quatre parties :

Dans un premier chapitre, nous présentons les différents modèles électrique, magnétique et mécanique utilisés dans le calcul des machines à inductions. Nous nous intéressons par la suite aux équations mathématiques permettant cette modélisation en mettant l'accent sur les équations du champ magnétique, celles des circuits électriques et celle du mouvement mécanique. Enfin nous présentons les problèmes liés au couplage du problème magnétique aux circuits électriques et le mouvement mécanique du rotor.

Nous présentons dans le deuxième chapitre une méthode de calcul électromagnétique des machines à induction en régime harmonique établi avec la prise en compte des harmoniques d'espace. Cette méthode consiste à coupler les champs du stator et du rotor dans une interface située dans l'entrefer. Nous commençons par le couplage avec le fondamental du champ rotorique ensuite nous introduisons les harmoniques d'espace au rotor.

Le troisième chapitre est consacré au calcul électromagnétique des machines à induction en régime transitoire en adoptant la technique de couplage d'interface, développée pour la magnétodynamique complexe, au calcul pas à pas dans le temps. Nous présentons dans ce chapitre la modélisation, par éléments finis, du couplage magnétodynamique-circuits électriques pour déterminer les régimes transitoires électriques. Par la suite nous introduisons l'équation mécanique pour calculer le régime transitoire mécanique.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la validation des calculs que nous avons effectué à l'aide des modèles développés. Deux bancs d'essais sont utilisés pour les relevés expérimentaux. Le premier comporte une machine à rotor massif réalisée au Laboratoire de Recherche en Electrotechnique (LRE) de l'Ecole Nationale Polytechnique. Le second, pour l'étude de la machine à cage, est localisé au Laboratoire GREEN (INPL Nancy). Les résultats des calculs issus des modèles développés sont ainsi comparés aux mesures obtenues.

Chapitre I

Modèles mathématiques des machines à induction

I.1 Introduction

Nous présentons, dans ce chapitre, les différents modèles électrique, magnétique et mécanique utilisés dans le calcul des machines à inductions. Nous nous intéressons par la suite aux équations mathématiques permettant cette modélisation, en mettant l'accent sur les équations du champ magnétique, sur celles des circuits électriques et sur celle du mouvement mécanique. Enfin nous présentons le couplage de la magnétodynamique aux circuits électriques et au mouvement mécanique du rotor.

I.2 Modèles électromécaniques des machines à induction

I.2.1 Modèles électromagnétiques

Les modèles électromagnétiques consistent à décrire, le comportement électromagnétique de la machine en régime transitoire ou en régime permanent. Ils se présentent généralement sous deux formes :

- Modèles électriques ou externes;
- Modèles magnétiques ou internes.

I.2.1.1 Les modèles électriques (externes)

Les modèles électriques, de type circuits, sont basés sur une représentation de la machine en termes de schémas électriques équivalents. Ils ne sont utilisables que dans la mesure où les circuits sont parfaitement identifiés. Dans ces conditions, ces modèles sont représentés par un simple circuit dans une installation globale dont la machine ne constitue qu'une partie. Ainsi on les retrouve surtout dans la modélisation des associations machines-convertisseurs statiques ou lors du dimensionnement d'un réseau d'alimentation. L'inconvénient de cette représentation réside dans le degré de finesse de la représentation des phénomènes internes à la machine qui est relativement bas. Malgré tout, ces derniers modèles peuvent décrire le fonctionnement de la machine à induction en régime transitoire ou en régime permanent avec la prise en compte, d'une façon globale, de phénomènes physiques particuliers tel que la variation de certains paramètres en fonction de la saturation [1] des circuits magnétiques et de la température.

a)- Régime transitoire

Pour le régime transitoire dans le repère (abc) (Fig. I.1), le modèle de machine à induction peut s'écrire, au niveau du stator, à l'aide de la formulation matricielle suivante :

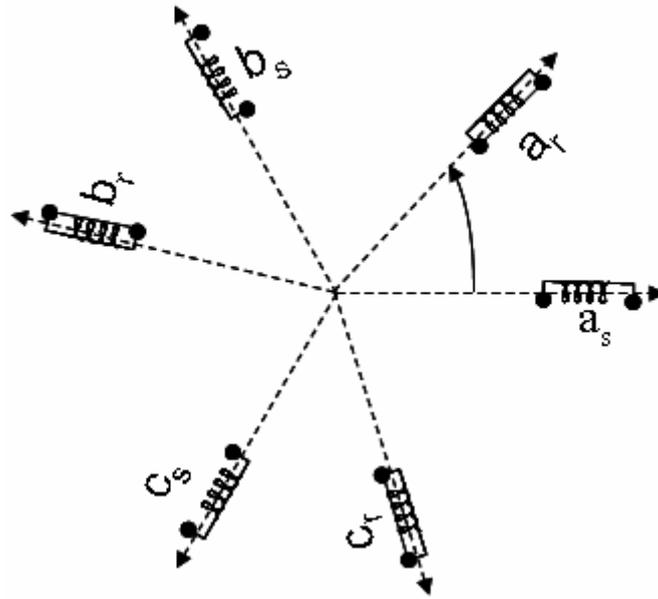


Fig. I.1. Modèle électrique dans le repère (abc).

$$\begin{cases} \mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi}_s \\ \boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{L}_s \mathbf{I}_s \end{cases} \quad (I.1)$$

Pour une machine triphasée équilibrée, dont le rotor est classique (simple cage), on peut représenter la cage par un système triphasé équilibré. L'équation (I.1), après avoir introduit le circuit du rotor, prend la forme suivante [2] :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_s \\ \boldsymbol{\varphi}_r \end{Bmatrix} \quad (I.2)$$

où :

\mathbf{V}_s : Vecteur des tensions aux bornes des phases 1, 2, 3 au stator;

\mathbf{I}_s : Vecteur des courants au niveau des phases 1, 2, 3 au stator;

\mathbf{I}_r : Vecteur des courants au niveau des phases 1, 2, 3 au rotor;

$\boldsymbol{\varphi}_s$: Flux des phases 1, 2, 3 au stator;

$\boldsymbol{\varphi}_r$: Flux des phases 1, 2, 3 au rotor;

$\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_r$: Matrices résistances statorique et rotorique respectivement.

Les différents flux par phase, au stator ou au rotor, sont ensuite exprimés en fonction des inductances de fuites, des principales inductances et des mutuelles inductances. Comme la position du rotor est variable en fonction du temps, à cause du mouvement, ces dernières inductances sont elles aussi variables en fonction de temps. Afin de résoudre ce système non linéaire, on procède généralement à un changement de repère d'où l'utilisation de la transformée de Park qui suppose que seul le fondamental des harmoniques d'espace existe [3], [4].

b)- Régime permanent

En régime permanent, où les grandeurs électriques sont à variation sinusoïdale par rapport au temps, le modèle électrique de la machine à induction, donné par l'équation (I.2) peut être représenté, en utilisant la notation complexe, par le circuit électrique couplé par phase donné sur la Fig. I.2. En

fonction des inductances de phases, et toujours sous l'hypothèse d'un seul harmonique d'espace, l'Equation (I. 2) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \underline{V}_s \\ \frac{R_r}{g} \underline{I}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + j l_s \omega_s & j M \omega_s \\ j M \omega_s & j l_r \omega_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{I}_s \\ -\underline{I}_r \end{Bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

avec:

l_s : Inductance cyclique de l'enroulement statorique;

l_r : Inductance cyclique de l'enroulement rotorique;

M : Mutuelle inductance cyclique des enroulements statorique et rotorique;

\underline{V}_s : Tension aux bornes d'une phase au stator;

\underline{I}_s : Courant d'une phase au stator;

\underline{I}_r : Courant d'une phase au rotor.

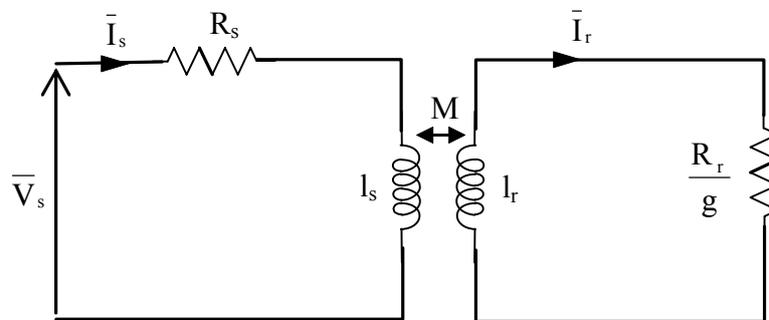


Fig. I. 2. Circuit couplé par phase du moteur à induction

Dans ce modèle électrique, la prise en compte des harmoniques d'espace peut être effectuée en modifiant le schéma équivalent [5], [6]. Toutefois, le calcul des paramètres du circuit est suivi d'hypothèses simplificatrices qui ne reflètent pas la réalité dans plusieurs cas. En plus, si le rotor n'est pas classique (cas d'un rotor massif ou d'un rotor à encoches profondes) sa représentation par un schéma électrique équivalent devient très délicate [7]. Pour s'affranchir de ce problème, on adopte alors des modèles de types internes.

I.2.1.2 Modèles internes (magnétiques)

Dans les modèles magnétiques, on s'intéresse généralement au fonctionnement interne de la machine. On résout les équations de l'électromagnétisme à l'intérieur de la machine en utilisant, le plus souvent, des méthodes numériques (méthode des éléments finis).

Dans le cas des machines à induction, on peut distinguer le modèle magnétodynamique temporel qui est utilisé pour le calcul des régimes transitoires et le modèle magnétodynamique complexe (régime harmonique établi) qui est utilisé pour le calcul des régimes permanents sinusoïdaux [8].

a)- Modèles internes dans le cas de la magnétodynamique

En régime dynamique, la modélisation par éléments finis des machines à induction est une tâche délicate puisqu'il s'agit, de résoudre un problème de champ évolutif en 3D tout en suivant le mouvement et la diffusion lente du champ dans le rotor. Malgré cela, elle reste la seule démarche indiscutable pour la détermination des performances et le suivi local de l'état magnétique de la machine. Afin de s'affranchir de la complexité du problème 3D, un modèle bidimensionnel permet

de décrire l'état magnétique de la machine moyennant certaines hypothèses simplificatrices [9]. La résolution de ce type de problème est généralement effectuée à l'aide de la technique pas à pas dans le temps (Fig. I. 3). Dans ce contexte plusieurs techniques, pour la prise en compte du mouvement et pour la résolution numérique des systèmes algébriques, ont été développées. L'avantage de ce type de modèles réside dans la prise en compte de la saturation et des harmoniques d'espaces d'une façon convenable. *La difficulté dans ce modèle réside toujours, dans la façon de coupler les champs du stator et du rotor en mouvement continu* [10] ainsi que *dans le temps de calcul inhérent nécessaire pour la résolution*.

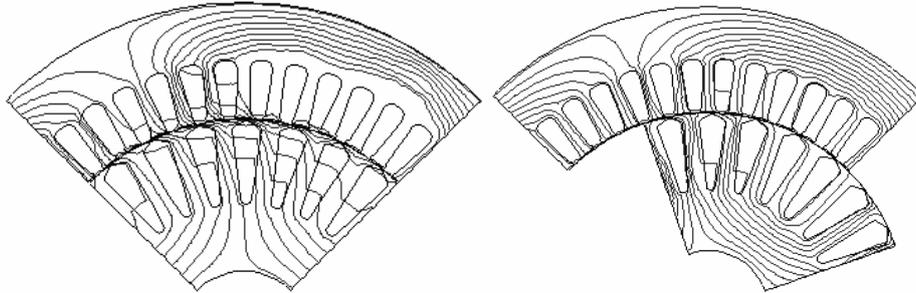


Fig. I. 3 Lignes de champ dans un moteur à induction à cage au démarrage et en régime permanent.

Une autre alternative très attractive, quand le régime transitoire n'est pas nécessaire, est le calcul dans l'approximation sinusoïdale.

b)- Modèles internes dans l'approximation sinusoïdale

Ces modèles sont développés principalement pour le calcul des machines à induction alimentées par des sources à variation sinusoïdale par rapport au temps et opérant à vitesse constante (régime permanent). L'hypothèse admise dans ce type de calcul est alors : *toutes les grandeurs électromagnétiques sont à variation sinusoïdale dans le temps*. La conséquence est évidemment l'élimination des harmoniques de temps dans le problème magnétique et l'autorisation de l'utilisation de la représentation complexe des différentes grandeurs électromagnétiques (tensions, courants et champs). L'avantage de cette approche est de ne pas nécessiter d'itérations dans le temps pour la résolution du problème. Ceci permet par conséquent un gain de temps considérable en comparaison avec le modèle pas à pas.

Dans ce modèle le calcul est effectué dans un seul repère lié au stator. Le mouvement du rotor est simulé par la technique de transformation du glissement qui consiste à multiplier la conductivité du rotor par le glissement du fondamental [8], [11]. Cette méthode impose une seule fréquence dans le rotor et ainsi tous les harmoniques d'espace sont forcés à tourner à la vitesse du fondamental. Cependant, l'inconvénient majeur de ce modèle réside dans le fait qu'on ne peut traiter *la saturation magnétique que dans un sens moyen*. En plus, ce modèle ne convient que pour *des machines où l'harmonique fondamentale est largement prépondérante*. Par contre, dans une machine présentant des harmoniques d'espace relativement importants qui tournent à des vitesses très différentes de celle du fondamental, tels que les harmoniques habituels des enroulements triphasés de rang 5, 7, ...etc., il faut penser à *développer d'autres méthodes qui permettent d'en tenir compte convenablement*.

Avec ce modèle et en utilisant la méthode des éléments finis, peu de travaux ont été développés pour la prise en compte des harmoniques d'espace. En régime linéaire et en utilisant la méthode du double entrefer, le couplage par le premier harmonique d'espace a fait l'objet des travaux cités au niveau des références [12], [13] et [14]. En utilisant le couplage d'interface, les auteurs de la référence [15] adoptent la méthode des multiplicateurs de Lagrange tandis que ceux des références [16] et [17] adoptent l'utilisation d'un élément spectral. Des analyses multi-harmoniques par la bande de roulement et par la méthode du double entrefer sont proposées respectivement par les auteurs [18] et [19].

I.2.1.3- Modèles internes associés aux schémas équivalents

Une autre approche pour la modélisation des machines à induction consiste à calculer les paramètres du schéma équivalent, issus du modèle circuits (Fig. I. 4), en exploitant les modèles numériques de calcul de champ en régime permanent [20], [21] ou en régime transitoire [22]. Cette méthode permet la prise en compte de la variation des paramètres électriques provoquée par les phénomènes internes que sont la saturation et l'effet de peau.

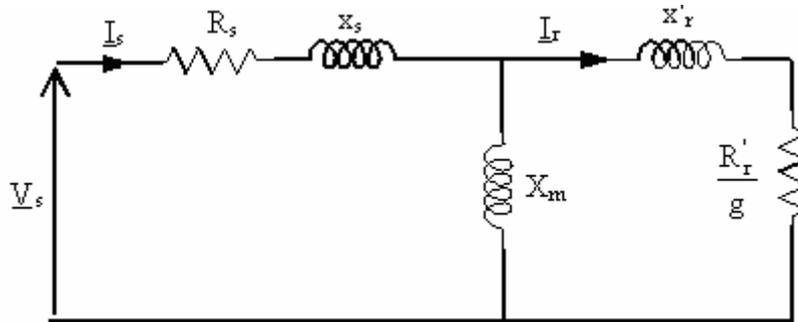


Fig. I. 4. Schéma équivalent par phase ramené au stator du moteur à induction.

La prise en compte des harmoniques d'espace, dans ces modèles, est effectuée en superposant les champs harmoniques. Ainsi les schémas équivalents partiels relatifs à chaque harmonique sont mis en série pour obtenir le schéma équivalent global du moteur (Fig. I. 5). La détermination des paramètres de ce schéma équivalent ne peut se faire qu'avec des méthodes analytiques de calcul de champ en adoptant certaines hypothèses simplificatrices [23], [24].

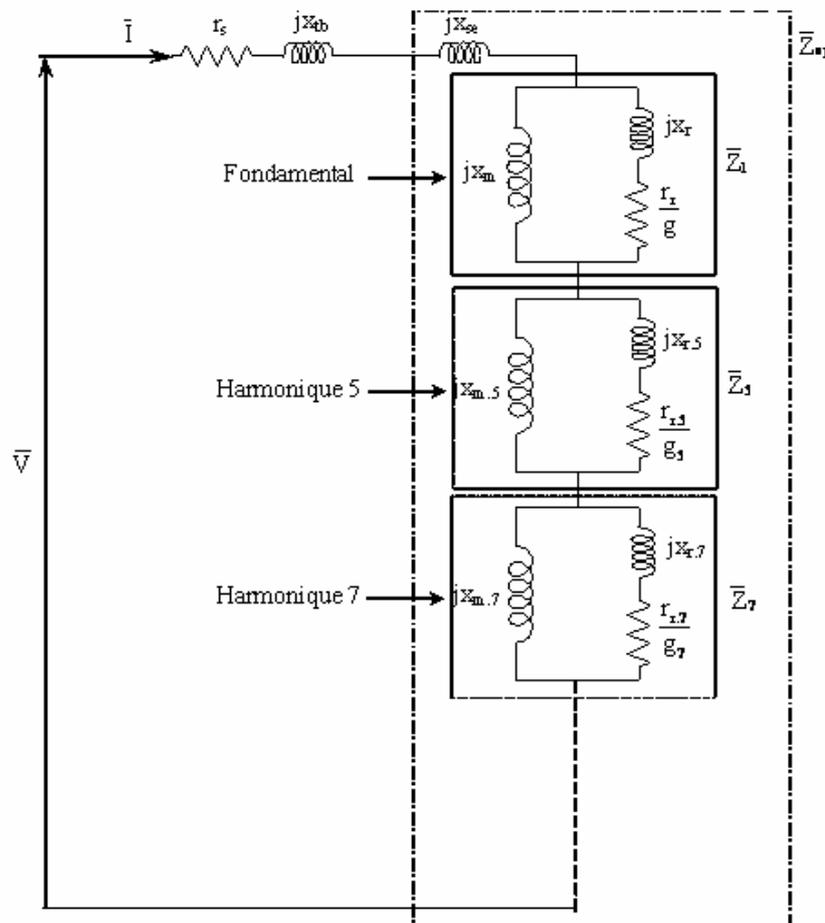


Fig. I. 5 Schéma équivalent par phase incluant les harmoniques d'espace

I.2.2 Modèles mécaniques

Les phénomènes considérés dans ces modèles sont généralement liés à l'interaction entre le champ magnétique dans la machine et sa structure mécanique. Ces phénomènes produisent le mouvement mécanique nécessaire pour la conversion de l'énergie et, dans certains cas peuvent conduire à des déformations et à des vibrations mécaniques de la structure [25], [26]. Les bruits acoustiques engendrés deviennent très gênants durant le fonctionnement de la machine [27].

Suivant le but recherché, les modèles mécaniques se retrouvent sous deux principales formes :

- forme locale ou interne;
- forme globale ou externe.

Le premier formalisme caractérise la mécanique interne de la machine. Il est donc utilisé lorsque la détermination de la tenue mécanique des diverses pièces est nécessaire ou lorsqu'on cherche à localiser une source de vibration acoustique [28]. Ce modèle peut être alors utile pour détecter ou prévoir une panne en mesurant ces vibrations et aider ainsi à la maintenance du matériel. On retrouve aussi ce modèle dans le calcul des effets d'excentricité statique ou dynamique de l'entrefer lors de vibrations du rotor, en mouvement, provoquées par des défauts d'origine mécanique [29], [30].

Dans le deuxième formalisme, la structure de la machine est considérée solide et indéformable. La description mécanique de la machine est donc globale. Elle consiste à modéliser le mouvement mécanique du rotor provoqué par le couple électromagnétique développé. Cette solution est adoptée pour d'écrire le comportement de la machine vis-à-vis de la charge [31], [32], [33]. On cherche alors les caractéristiques externes décrivant le fonctionnement électromécanique de la machine à induction (caractéristiques couple-vitesse, courants-vitesse, ...etc.).

I.3 Outils mathématiques pour la modélisation

L'étude des systèmes électromagnétiques nécessite des outils mathématiques pour modéliser les phénomènes physiques intervenant dans leurs fonctionnements. Ces phénomènes sont liés aux circuits magnétiques, électriques et à la conversion électromécanique. La formulation mathématique de ce type de problème est décrite par l'ensemble des équations de Maxwell couplées aux équations des circuits électriques et à l'équation mécanique du système étudié.

I.3.1 Mise en équation du problème magnétique

a)- Expression locale des équations de Maxwell

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques intervenants fait appel aux équations de Maxwell. Ces dernières définissent les propriétés macroscopiques locales associées aux grandeurs électriques et magnétiques vectorielles dépendantes du temps et de l'espace. Ces grandeurs sont généralement les six suivantes :

$\mathbf{H}(p,t)$: Champ magnétique [$A.m^{-1}$];

$\mathbf{E}(p,t)$: Champ électrique [$V.m^{-1}$];

$\mathbf{B}(p,t)$: Induction magnétique [T];

$\mathbf{D}(p,t)$: Induction électrique [$C.m^{-2}$];

$\mathbf{J}(p,t)$: Densité volumique du courant électrique de conduction [A/m^2];

$\rho(p,t)$: Densité volumique de charges électriques libres [C/m^3];

La variable t représente le temps absolu dans le sens de la transformation de Lorentz. Elle est réduite à celle de Galilée et p représente un point du domaine étudié.

Dans un référentiel fixe, lié au laboratoire, ces grandeurs sont reliées par les équations de Maxwell qui décrivent les lois générales de l'électromagnétisme [34] :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{I.4})$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.5})$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (\text{I.6})$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{D}) = \rho \quad (\text{I.7})$$

Les deux premières équations (I.4) et (I.5) expriment, respectivement, le couplage et l'évolution dans le temps du champ magnétique-induction électrique et du champ électrique-induction magnétique. La troisième équation (I.6) assure la conservation du flux magnétique. La loi de conservation de la charge électrique, donnée par (I.8), s'obtient directement par la combinaison des équations (I.4) et (I.7):

$$\mathbf{div}(\mathbf{J}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.8})$$

b)- Comportement des matériaux

Le comportement des grandeurs électriques et magnétiques, définies précédemment dans les équations de Maxwell, diffère d'un matériau à un autre. Il faut donc ajouter aux équations (I.4 à I.8) des relations particulières spécifiques aux milieux auxquels elles sont appliquées. Ces relations de constitution se résument à [35]:

- milieux diélectriques de permittivité relative ε_r :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (\text{I.9})$$

- milieux magnétiques de perméabilité relative μ_r :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (\text{I.10})$$

- milieux conducteurs de conductivité électrique σ :

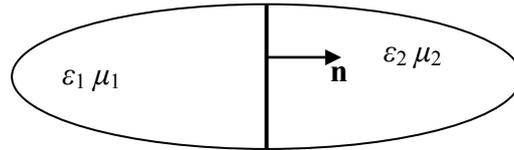
$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (\text{I.11})$$

Les coefficients μ_0 et ε_0 désignent, respectivement, la perméabilité magnétique du vide et la permittivité du vide. Le vecteur \mathbf{B}_r représente l'induction rémanente. Le vecteur \mathbf{v} représente la vitesse de déplacement des charges électriques dans le champ d'induction \mathbf{B} .

Dans tout ce qui suit, nous considérons que les matériaux sont isotropes, ceci rend les coefficients définis précédemment qui sont généralement des tenseurs, comme étant des fonctions scalaires.

c)- Conditions d'interface

Les conditions d'interfaces expriment la discontinuité des grandeurs électromagnétiques lors du passage d'un milieu à un autre (notés respectivement 1 et 2, de caractéristiques différentes).



Les équations de passages s'écrivent alors [34]:

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (\text{I.12})$$

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.14})$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}_s \quad (\text{I.15})$$

où ρ_s est la densité surfacique de charge ; \mathbf{K}_s est la densité surfacique de courant et \mathbf{n} la normale sortante du milieu 1 vers l'extérieur.

I.3.2 Formulation magnétodynamique dans l'hypothèse quasi stationnaire

a)- Hypothèse des états quasi stationnaires

Dans le cadre de l'étude des systèmes électrotechniques en général, et en particulier de celle des machines à induction, les fréquences des phénomènes électromagnétiques intervenant dans leurs fonctionnements sont relativement faibles. L'hypothèse admise, dans ces conditions, est de négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction. De plus, la densité volumique de charge est nulle ($\rho = 0$). Ainsi, l'équation (I.8) et le second terme de l'équation (I.4) deviennent :

$$\mathbf{div}(\mathbf{J}) = 0 \quad (\text{I.16})$$

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \approx \mathbf{J} \quad (\text{I.17})$$

que l'on peut écrire, en tenant compte de l'équation (I.11) sans le terme de mouvement, sous la forme:

$$\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \approx \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.18})$$

Si on se place dans l'approximation sinusoïdale du champ électrique, on peut réécrire cette dernière relation en notation complexe ainsi :

$$\sigma \underline{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon \underline{\mathbf{E}} \approx \sigma \underline{\mathbf{E}} \quad (\text{I.19})$$

L'approximation des états quasi stationnaires peut se traduire en module par :

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (\text{I.20})$$

Dans le cadre des machines à induction étudiées, cette condition sera respectée. On donne (Tab. I. 1) la valeur de cette condition pour les matériaux couramment utilisés dans les machines électriques [36].

Tab. I.1

Matériau	σ [$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$]	ε [F.m ⁻¹]	$\frac{\sigma}{\varepsilon}$ [rd.s ⁻¹]
Cuivre	$5,8 \cdot 10^7$	$8,8 \cdot 10^{-8}$	$6,6 \cdot 10^{18}$
Aluminium	$3,8 \cdot 10^7$	$8,8 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{19}$
Acier	1,107	$8,8 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{18}$

b)- Equations de la magnétodynamique

Dans l’hypothèse des états quasi stationnaires, nous avons schématisé une configuration magnétodynamique (Fig. I. 6), représentant un exemple type d’une machine à induction. L’inducteur est traversé par un courant variable dans le temps de densité volumique \mathbf{J}_s . Les équations de Maxwell, se réécrivent ainsi :

$$\text{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{J}_s + \mathbf{J} \tag{I.21}$$

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{I.22}$$

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \tag{I.23}$$

A ces équations, nous ajoutons les équations constitutives (I.24) et (I.25) et les conditions de passage données par les équations (I.13 à I.15).

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \tag{I.24}$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \tag{I.25}$$

Le vecteur \mathbf{J} représente la densité de courant induite dans les milieux conducteurs par la variation dans le temps du champ magnétique et par le mouvement.

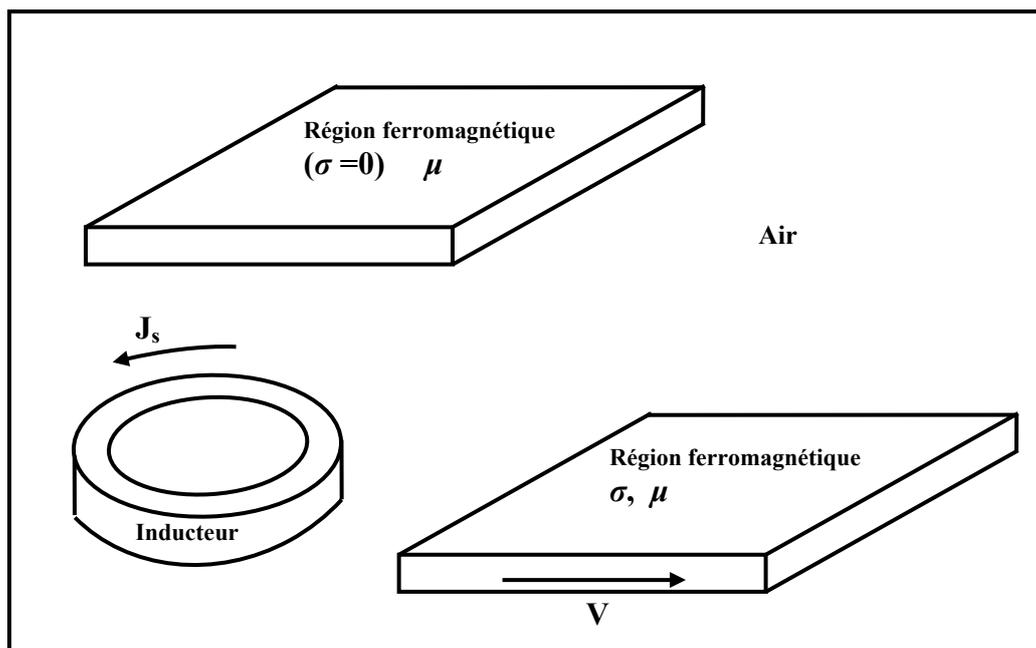


Fig. I. 6 Configuration d’un problème magnétodynamique composé d’un inducteur, d’une région ferromagnétique et d’une région conductrice en mouvement à la vitesse \mathbf{v} .

c)- Régime harmonique (Approximation sinusoïdale)

Dans le cas où les sources d'alimentation sont à variation purement sinusoïdale par rapport au temps (c§.I.2.1.2 b), la notation complexe peut être utilisée pour représenter la tension et le courant. Ils s'écrivent, dans ce cas, ainsi :

$$u(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(Ue^{j\omega t}) \quad (\text{I.26})$$

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}(Ie^{j(\omega t + \varphi)}) \quad (\text{I.27})$$

où U et I sont les valeurs efficaces de la tension et du courant.

Si, en plus, les matériaux ont des caractéristiques constitutives linéaires, toutes les grandeurs magnétiques auront alors des variations sinusoïdales dans le temps. L'équation de couplage définie par l'équation (I.22) se transforme, en remplaçant la dérivation par rapport au temps par une multiplication par $j\omega$, en :

$$\operatorname{rot}(\underline{\mathbf{E}}) = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \quad (\text{I.28})$$

où ω est la pulsation des grandeurs électromagnétiques. **Les grandeurs soulignées indiquent la valeur complexe.**

L'ensemble des équations (I.21), (I.23) à (I.25) (réécrites en notation complexe) et (I.28) définissent le modèle, appelé communément: *la magnétodynamique complexe ou le régime harmonique (approximation sinusoïdale)*. Cependant, dans les circuits magnétiques saturables et en particulier ceux des machines à induction, les grandeurs magnétiques ne sont pas nécessairement sinusoïdales dans le temps. Pour conserver l'utilisation de ce modèle en régime non linéaire, on remplace la courbe de magnétisation des circuits magnétiques par celle correspondant au régime de l'approximation sinusoïdale. Dans ce modèle, la variable temps est éliminée par suite de l'utilisation de la représentation complexe. Les grandeurs électromagnétiques sont alors calculées en valeur efficace.

I.3.3 Formulation A-V du problème magnétodynamique

D'après la loi de conservation du flux magnétique, définie par l'équation (I.23), l'induction magnétique $\underline{\mathbf{B}}$ dérive d'un potentiel vecteur $\underline{\mathbf{A}}$ tel que :

$$\underline{\mathbf{B}} = \operatorname{rot}(\underline{\mathbf{A}}) \quad (\text{I.29})$$

En tenant compte de (I.29), l'équation (I.22) se transforme en :

$$\underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} - \operatorname{grad}(V) \quad (\text{I.30})$$

où $\underline{\mathbf{A}}$ et V désignent respectivement le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique. La combinaison des équations (I.21), (I.24) et (I.25) en tenant compte des équations (I.29) et (I.30) conduit à la formulation en potentiel vecteur magnétique d'un système magnétodynamique :

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot}(\underline{\mathbf{A}})) + \sigma \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial t} + \operatorname{grad}(V) - \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot}(\underline{\mathbf{A}}) \right) = \underline{\mathbf{J}}_s \quad (\text{I.31})$$

où ν désigne la reluctivité magnétique (inverse de la perméabilité magnétique).

- Forme Lagrangienne des équations de la magnétodynamique :

Dans la formulation Eulérienne des équations de la magnétodynamique présentées précédemment, le repère utilisé est lié au laboratoire. L'effet du mouvement sur les parties conductrices du domaine est pris en compte, dans l'équation (I.25), par le terme de transport ($\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$). La résolution de tels problèmes est très délicate, voir impossible pour certaines structures à géométrie complexe [12]. Cependant, si le mouvement de certaines parties du système étudié est connu à l'avance, c'est le cas des machines à induction, une description Lagrangienne des équations de la magnétodynamique est possible. Dans cette formulation le repère est lié au milieu considéré; ce qui permet d'annuler le terme de mouvement. Les équations décrivant la répartition du potentiel vecteur dans le domaine étudié (I.31), se réécrivent alors sous la forme suivante :

$$\mathbf{rot}(v\mathbf{rot}(\mathbf{A})) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad}(V) \right) = \mathbf{J}, \quad (\text{I.32})$$

Par la suite on adoptera la formulation Lagrangienne pour la modélisation du problème électromagnétique.

- Condition d'unicité :

Associée aux conditions de limites du domaine, l'équation (I.32) n'admet pas une solution unique. Si \mathbf{A} est une solution, alors :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad}(u) \quad (\text{I.33})$$

est aussi une solution quelque soit u . Dans ce cas, V s'écrit dans (I.30), sous la forme :

$$V' = V + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{I.34})$$

Pour avoir une solution unique, il est nécessaire d'ajouter la jauge de Coulomb décrite par :

$$\mathbf{div}(\mathbf{A}) = 0 \quad (\text{I.35})$$

Cette jauge assure non seulement l'unicité de la solution mais conditionne la stabilité et la convergence des méthodes numériques de résolution [37].

- Conditions de passage :

En termes de potentiels vecteur magnétique et scalaire, les conditions de passage entre deux milieux 1 et 2, exprimées par (I.13) à (I.15), deviennent :

- continuité du potentiel vecteur magnétique et du potentiel scalaire électrique :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \\ V_1 = V_2 \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

- discontinuité de la reluctivité magnétique :

$$(v_1 \mathbf{rot}(\mathbf{A}_1) - v_2 \mathbf{rot}(\mathbf{A}_2)) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}_s \quad (\text{I.37})$$

- discontinuité de la conductivité électrique:

$$\left(-\sigma_1 \left(\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \mathbf{grad}(V_1) \right) + \sigma_2 \left(\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} + \mathbf{grad}(V_2) \right) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{I.38})$$

- *Régime harmonique (approximation sinusoïdale)* :

Dans l'approximation sinusoïdale où toutes les grandeurs électromagnétiques sont à variation sinusoïdale dans le temps, l'équation (I.32) devient :

$$\mathbf{rot}(v_{eq} \mathbf{rot}(\underline{\mathbf{A}})) + \sigma(j\omega \underline{\mathbf{A}} + \mathbf{grad}(V)) = \underline{\mathbf{J}}_s \quad (\text{I.39})$$

Equation à laquelle on ajoute les conditions de passage (I.36) à (I.37) exprimées en valeurs complexes.

I.3.4 Modèle magnétodynamique appliqué aux machines à induction

Au vu de la complexité de leurs constitutions, le calcul du champ électromagnétique dans les machines à induction est un problème tridimensionnel. Cependant lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux performances électriques et mécaniques, il est possible de travailler sur un modèle simplifié en 2D. Ce modèle consiste à supposer que la longueur de la machine est importante, de sorte que l'on peut considérer que le champ magnétique est situé dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la machine. Dans ces conditions les courants imposés dans l'inducteur et ceux induits dans les milieux conducteurs sont dirigés parallèlement à cet axe. On peut choisir alors un potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} n'ayant qu'une seule composante suivant la direction axiale. Ce dernier est de la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (\text{I.40})$$

La densité de courant, imposée au stator, est donc de la forme :

$$\mathbf{J}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_s(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (\text{I.41})$$

Le potentiel vecteur magnétique, sous la forme (I.40), vérifie implicitement la jauge de Coulomb. D'où l'induction et le champ magnétique dans le plan (x, y) qui s'écrivent ainsi :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} + \frac{\partial a}{\partial y} \\ - \frac{\partial a}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial y} \\ - \frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Grace à la représentation (I.40), on déduit l'équation aux dérivées partielles gouvernant la diffusion du champ électromagnétique dans les machines à induction :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial a}{\partial y} \right) = J_s - \sigma \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{grad}(V) \right) \quad (\text{I.42})$$

Que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{div}(\nu \mathbf{grad}(a)) = +\sigma \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \sigma \mathbf{grad}(V) \right) - J_s \quad (\text{I.43})$$

La constitution des machines à induction permet de distinguer trois régions différentes selon l'existence ou pas du second terme de l'équation (I.43), à savoir :

- Stator :

Le stator est constitué d'un empilage de tôles très fines isolées les unes des autres ce qui conduit à une conductivité nulle dans la direction axiale. Alors la seule densité de courant existante est celle imposée, dans le bobinage, par l'alimentation extérieure. En général les faisceaux des bobines placés dans les encoches sont finement subdivisés en conducteurs ce qui uniformise la répartition de la densité de courant sur la surface de l'encoche. Ainsi, le potentiel vecteur dans le stator vérifie l'équation suivante :

$$\mathbf{div}(\nu \mathbf{grad}(a)) + J_s = 0 \quad (\text{I.44})$$

La densité de courant J_s est imposée dans les enroulements du stator par les tensions d'alimentation. Sa détermination sera effectuée par la prise en compte du couplage des circuits électriques extérieurs.

- Entrefer :

Dans l'entrefer, le potentiel vecteur magnétique vérifie l'équation suivante :

$$\mathbf{div}(\nu \mathbf{grad}(a)) = 0 \quad (\text{I.45})$$

- Rotor :

Le rotor classique des machines à induction est constitué d'un assemblage de tôles isolées les unes des autres et d'une cage d'écureuil. Dans ce cas, la densité de courant induite dans les barres massives s'écrit ainsi :

$$\mathbf{J} = -\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}(V) \right) \quad (\text{I.46})$$

Les anneaux de court-circuit, se trouvant aux extrémités des barres, servent à la fermeture du circuit électrique de la cage. Ainsi, le potentiel scalaire électrique apparaissant dans l'équation (I.46) est considéré dû à un champ électrique de nature électrocinétique; il résulte de la différence de potentiel entre les barres, qui fait circuler le courant dans les couronnes de court-circuit. L'hypothèse d'un problème électromagnétique en 2D nous permet de supposer que le gradient du potentiel électrique V le long d'une barre est constant. On peut alors écrire la différence de potentiel électrique aux bornes d'une barre ainsi :

$$\mathbf{grad}(V) = \frac{u_b}{l} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{I.47})$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire à la section de la barre. Ainsi, le potentiel vecteur dans le rotor vérifie l'équation de diffusion suivante :

$$\mathbf{div}(\nu \mathbf{grad}(a)) - \sigma \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{u_b}{l} \right) = 0 \quad (\text{I.48})$$

Ecrite sous la forme (I.48), l'équation du champ dans le rotor peut être couplée au circuit électrique extérieur de la cage.

Dans le cas d'un rotor massif, les courants induits se referment avant d'atteindre les extrémités du rotor. Pour s'affranchir de ce problème et pour tenir compte de l'effet 3D, on modifie généralement la conductivité électrique de l'acier du rotor [38], [39]. Sachant que la conservation des courants est vérifiée ($\mathbf{div}(\mathbf{J}) = 0$), la jauge de Coulomb adoptée permet de découpler partiellement \mathbf{A} et V lorsque la conductivité du rotor massif est constante [14]. On considère alors que ce potentiel est de nature électrostatique; il s'ensuit alors de l'équation (I.47) que :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{I.49})$$

Ainsi dans les parties actives du rotor massif, le potentiel vecteur vérifie l'équation de diffusion suivante :

$$\mathbf{div}(\nu \mathbf{grad}(a)) - \sigma \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.50})$$

En conclusion on doit résoudre, pour chaque domaine, une équation aux dérivées partielles exprimée en terme de potentiel vecteur. Toutefois, en l'absence de densité de courant superficielle, les conditions de passage (I.36) à (I.37) entre les milieux (1) et (2) deviennent :

$$a_1 = a_2 \quad (\text{I.51})$$

$$\nu_1 \frac{\partial a_1}{\partial n} = \nu_2 \frac{\partial a_2}{\partial n} \quad (\text{I.52})$$

Dans le cas où l'un des domaines est animé d'un mouvement relatif de vitesse \mathbf{v} par rapport à l'autre, le potentiel vecteur conserve sa continuité car c'est un invariant relativiste du premier ordre. Alors, si le milieu (1) est lié à un référentiel fixe \mathbf{R}_1 et le milieu (2) à un référentiel \mathbf{R}_2 mobile à la vitesse \mathbf{v} par rapport au milieu (1), on peut écrire :

$$a_1(p, t) = a_2(p + \mathbf{v}t, t) \quad (\text{I.53})$$

$$\nu_1 \frac{\partial a_1(p, t)}{\partial n} = \nu_2 \frac{\partial a_2(p + \mathbf{v}t, t)}{\partial n} \quad (\text{I.54})$$

I.4. Couplages magnétique-circuit-mouvement mécanique

I.4.1 Problème magnétodynamique et circuits électriques

L'analyse d'un dispositif Electrotechnique, en particulier les machines à induction, est souvent conditionnée par les sources d'alimentation et le circuit qui le relie à elles. Cependant, le problème magnétique, exprimé en fonction du potentiel vecteur, est déterminé par les courants qui traversent l'inducteur (le bobinage du stator). Ces courants, eux-mêmes, sont conditionnés par la tension appliquée aux circuits extérieurs. Le couplage entre le problème magnétique et le problème électrique est donc direct. On doit alors résoudre simultanément les équations de la magnétodynamique et celles du circuit électrique [40], [41].

I.4.1.1 Circuit du stator

Dans le but de coupler le modèle externe, défini précédemment par l'équation (I.1), avec le modèle magnétodynamique, nous réécrivons cette dernière équation sous la forme suivante :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{l}_s \frac{d}{dt} \mathbf{I}_s + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi}_{sp} \tag{I.55}$$

où \mathbf{l}_s est la matrice inductance des têtes de bobines et $\boldsymbol{\varphi}_{sp}$ le vecteur flux principal des trois phases, considéré sur la longueur utile des conducteurs. Le flux principal d'une phase peut être alors relié au potentiel vecteur magnétique a par l'équation suivante [42], [43] :

$$\varphi_{sp}(t) = n_s \frac{l}{s} \iint_s a(t) ds \tag{I.56}$$

où n_s , l et s représentent respectivement le nombre de spires par phase, la longueur utile et la surface totale des conducteurs du stator. A l'aide de l'expression (I.56), l'équation du circuit du stator, couplée aux grandeurs magnétiques, suivante est obtenue :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{l}_s \frac{d}{dt} \mathbf{I}_s + \left\{ n_s \frac{l}{s} \iint_s \frac{\partial a}{\partial t} ds \right\} \tag{I.57}$$

Le couplage de l'équation du champ magnétique aux circuits électriques est réalisé en exprimant le second terme de l'équation (I.44), représentant la densité de courant imposée par la source d'alimentation en fonction des courants de phases. Si on suppose que cette densité de courant est uniforme sur la surface S_e d'une encoche comportant N_e conducteurs, on peut alors l'exprimer en fonction des courants de phases comme suit :

$$J_s = \frac{N_e}{S_e} \beta (\alpha_a i_a + \alpha_b i_b + \alpha_c i_c) \tag{I.58}$$

où β est un coefficient (égal à ± 1) donnant le sens des conducteurs; $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$ définissent l'appartenance des encoches aux phases.

I.4.1.2 Circuit du rotor

La cage du rotor est constituée de barres massives conductrices court-circuités à leurs extrémités par deux anneaux. Si R_b est la résistance d'une barre et R_e et l_e respectivement la résistance et l'inductance de fuite d'un anneaux de court-circuit, le schéma électrique équivalent de la cage peut être représenté comme sur la figure (I.7) [43], [44].

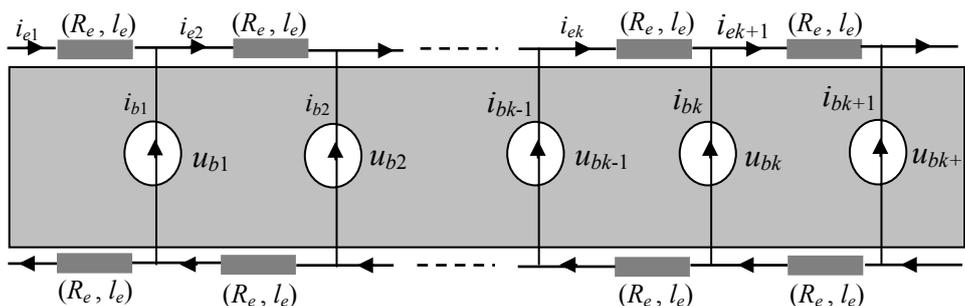


Fig. I. 7. Modèle du circuit de la cage du rotor.

La densité de courant induite dans une barre de section s_b , est donnée par :

$$J_b = -\sigma \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{u_b}{l} \right) \quad (\text{I.59})$$

Le courant total dans la barre est obtenu par l'intégration de (I.59) sur la surface s_b :

$$i_b = -\sigma \iint_{s_b} \left(\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{u_b}{l} \right) ds \quad (\text{I.60})$$

Enfin, l'utilisation des lois de Kirchhoff, permet d'exprimer les tensions et les courants, induits dans les barres de la cage, en fonction des paramètres de l'anneau de court-circuit comme suit :

$$\begin{cases} i_{bk} = i_{ek} - i_{ek-1} \\ 2(R_e i_{ek} + l_e \frac{\partial i_{ek}}{\partial t}) = u_{bk} - u_{bk-1} \end{cases} \quad (\text{I.61})$$

A l'aide des équations (I.60) et (I.61) nous pouvons aboutir au couplage de l'équation électrique de la cage à celle du champ en considérant comme inconnu le courant i_b ou la tension u_b de la barre.

I.4.2 Problème magnétodynamique et équation mécanique

Dans les convertisseurs électromécaniques, en particulier dans les machines tournantes, le mouvement du rotor est guidé et la trajectoire suivie est déterminée. Alors un seul degré de liberté suffit pour décrire le mouvement. Le guidage du rotor induit par ailleurs des contacts et des frottements qui apparaissent dans l'équation de mouvement. Dans ces conditions, un modèle mécanique externe, représenté par l'équation mécanique de la machine, suffit pour décrire l'interaction de la machine avec sa charge [45]. Cette équation s'écrit sous la forme suivante [46], [47] :

$$J_m \frac{\partial \Omega}{\partial t} + f \Omega + C_{ch} = C_{em} \quad (\text{I.62})$$

où : J_m représente le moment d'inertie de la machine, Ω la vitesse angulaire du rotor, f le coefficient de frottement et où C_{em} et C_{ch} sont respectivement le couple électromagnétique et le couple de charge. En fonction de la position du rotor, la vitesse de rotation du rotor s'écrit comme suit :

$$\Omega = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{I.63})$$

Le couplage de l'équation mécanique de la machine avec le modèle magnétodynamique s'obtient directement en exprimant le couple électromagnétique développé en fonction des grandeurs magnétiques locales. En utilisant le tenseur des contraintes de Maxwell, le couple électromagnétique est donné par l'expression suivante :

$$C_{em} = l \int_c (\mathbf{r} \wedge [\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \mathbf{n}]) dc \quad (\text{I.64})$$

où c est un contour situé dans l'entrefer. Ainsi l'équation (I.62), en considérant (I.64), s'écrit :

$$J_m \frac{\partial \Omega}{\partial t} + f \Omega - l \int_c (\mathbf{r} \wedge [\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \mathbf{n}]) dc = C_{ch} \quad (\text{I.65})$$

Dans notre travail ce sont les caractéristiques électromécaniques qui nous intéressent. Nous adoptons alors le modèle mécanique externe couplé au modèle magnétodynamique.

I.5 Technique de prise en compte du mouvement du rotor

Dans toutes les machines électriques il y a un mouvement relatif du rotor par rapport au stator. En adoptant l'approche Lagrangienne, les équations gouvernant la diffusion du champ électromagnétique dans le stator et dans le rotor sont résolues numériquement et de façon indépendante. La difficulté réside dans le couplage des champs des parties fixes et des parties en mouvement. Nous décrivons ci-dessous quelques techniques utilisées dans la modélisation par éléments finis de l'entrefer des machines à induction.

a)-Ligne de glissement (Fig. I.8)

Cette solution consiste à coupler dans l'entrefer les maillages du stator et du rotor par l'intermédiaire d'un contour fermé s'appuyant sur un cercle : c'est la ligne de glissement (en 2D), ou surface de glissement (en 3D) [48], [49]. Le maillage de ce contour doit être régulier. Le mouvement est réalisé en déplaçant le rotor d'un pas correspondant au pas du maillage. Par conséquent, la géométrie de la machine n'est maillée qu'une seule fois mais, le pas d'intégration dans le temps est imposé dès le départ. Cette technique est peu coûteuse en temps de calcul mais elle présente l'inconvénient de donner lieu à un déplacement discret du rotor.

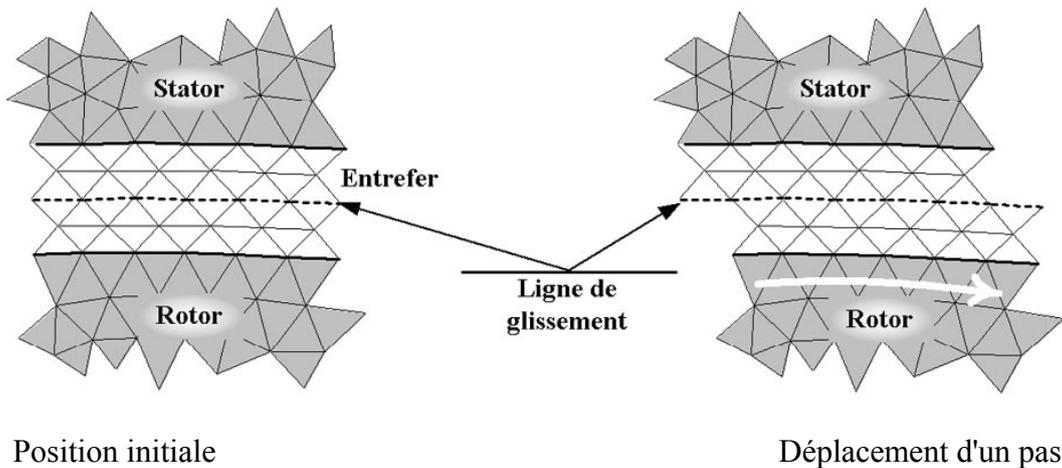


Fig. I. 8. Ligne de glissement.

b)- Bande de roulement (Fig. I.9)

Pour avoir accès à de nombreuses positions du rotor, contrairement à la technique de la ligne de glissement, celle de la bande de roulement utilise une bande d'éléments réguliers de l'entrefer pour relier le maillage du stator à celui du rotor [50], [51], [52]. Le pas du déplacement du rotor est donc quelconque mais la distorsion des éléments de la bande de roulement provoque des difficultés d'ordre numérique. Alors, dès que cette distorsion devient importante, il est nécessaire de remailler la bande de roulement à partir d'une nouvelle position ou de déplacer le rotor le long d'une ligne de glissement et d'optimiser la connexion des différents nœuds afin de garder un maillage satisfaisant [53], [54]. Cette solution permet d'atteindre toutes les positions du rotor sans être obligé de

remailler à chaque fois. La difficulté réside dans le choix d'un critère de qualité des triangles du maillage pour savoir quand on doit stopper la déformation. En effet, la forme des éléments intervient dans la qualité de la solution.

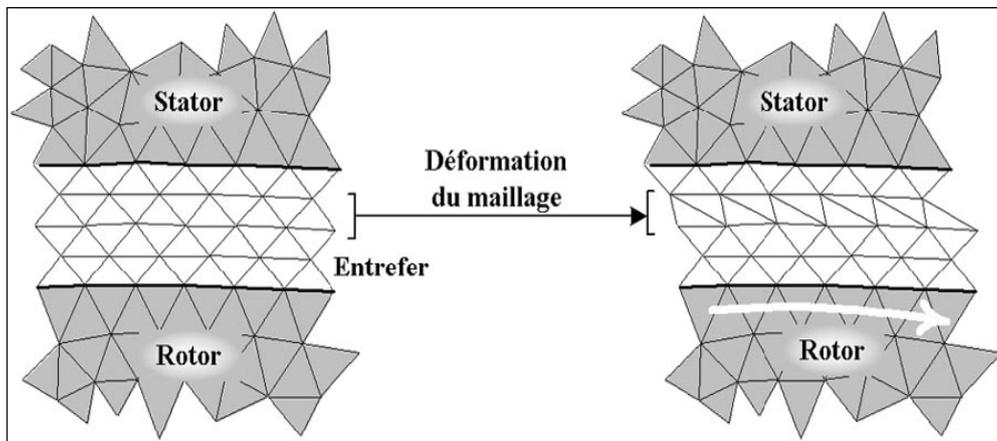


Fig. I. 9. Bande de roulement

c)- *Méthode du double entrefer* (Fig. I. 10)

La méthode du double entrefer, proposée par B. Laporte et développée au GREEN, utilise deux domaines de résolution séparés (le stator D_s et le rotor D_r). L'entrefer est commun aux deux domaines. Le principe de cette méthode consiste à utiliser de manière itérative la solution dans D_s sur Γ_s pour obtenir la solution dans D_r puis la solution dans D_r sur Γ_r pour obtenir la solution dans D_s (Fig. I.10). La méthode imaginée tronque les solutions sur les bords de l'entrefer en les remplaçant par leur harmonique d'espace principal pour servir de source au problème faisant face [55].

La méthode du double entrefer a été utilisée dans les calculs pas à pas dans le temps avec approximation du premier harmonique d'espace dans le cas linéaire [13], [14]. Ainsi, le suivi instantané du seul premier harmonique d'espace permet des pas de temps beaucoup plus importants que dans les méthodes habituelles qui introduisent l'effet de la denture. Dans le cas saturé, la méthode du double entrefer a été adaptée pour le calcul des machines asynchrones en régime harmonique pour la prise en compte des harmoniques d'espace [56], [57].

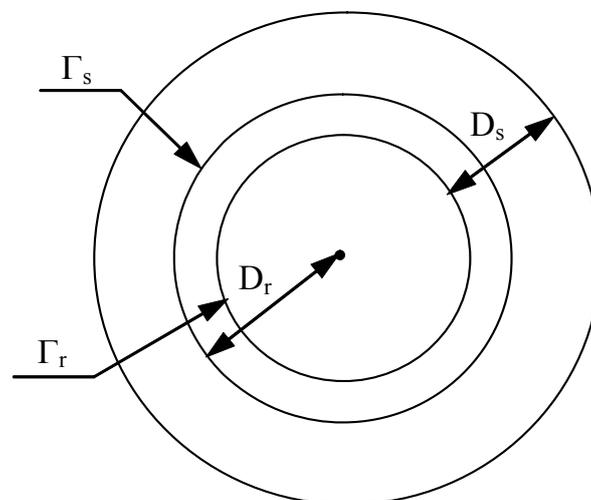


Fig. I. 10. Domaines de résolution par la méthode du double entrefer

d)- Méthodes hybrides

- Eléments finis-solution analytique

Dans cette technique, l'entrefer est considéré comme un élément fini particulier appelé Macro-Élément (ME). Celui-ci occupe la largeur uniforme de l'entrefer (PLUE) et permet de tenir compte automatiquement du mouvement du rotor [58], [59]. Une solution analytique dans la PLUE, représentée par une série de Fourier, est déterminée en résolvant l'équation de Laplace. La matrice de raideur du ME est assemblée avec les matrices issues des domaines du rotor et du stator. Cette méthode, adaptée pour la prise en compte de l'inclinaison des encoches dans le rotor [60], donne de très bons résultats. Toutefois, le temps de calcul nécessaire à la résolution est approximativement deux fois plus élevé que celui où l'entrefer est subdivisé en éléments finis classiques. Ceci est dû à l'augmentation de la largeur de bande de la matrice du système provoquée par la matrice de raideur du ME.

Une autre technique, consistant à coupler la solution analytique avec la résolution par éléments finis, a été proposée par les auteurs [61], [62], [63], [64]. Ce procédé ne peut être généralisé car il est pratiquement impossible de trouver une solution analytique de l'équation de Laplace pour des géométries complexes de l'entrefer.

- Eléments finis – Intégrales de frontières

Dans le cas des entrefers de géométries quelconques, le mouvement du rotor peut être pris en considération par le couplage de la méthode des éléments finis avec la méthode des équations intégrales de frontières [65], [66], [67], [68]. Dans cette méthode, les parties conductrices en mouvement où intervient la saturation, sont modélisées par les éléments finis alors que les parties linéaires (entrefer) sont modélisées par la méthode des intégrales de frontières. Les inconvénients dus à l'utilisation des méthodes intégrales sont liés principalement au calcul d'intégrales singulières nécessitant un traitement particulier et un système d'équations plein et asymétrique.

e)- Couplage d'interface

Afin de s'affranchir des difficultés de remaillage de l'entrefer liées à l'utilisation de la ligne de glissement ou de la bande de roulement, une méthode fort intéressante est utilisée pour coupler les champs du stator et ceux du rotor dans une interface située dans l'entrefer. Cette méthode utilise deux domaines (le stator Ω_s et le rotor Ω_r) avec des maillages séparés et une interface de couplage (Γ) dont le nombre de nœuds et leurs positions ne sont pas obligatoirement les mêmes de chaque côté de celle-ci (Fig. I.11) [69].

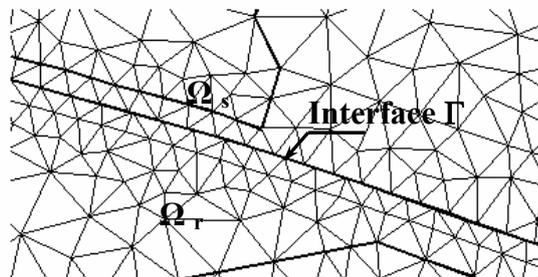


Fig. I. 11. Couplage d'interface.

Pour restaurer la continuité naturelle des grandeurs physiques sur l'interface de couplage, plusieurs techniques, basées sur la modification de la fonctionnelle à minimiser, ont été proposées :

- Une première méthode consiste à introduire les multiplicateurs de Lagrange λ et ainsi introduire la contrainte de couplage suivante :

$$a_r(R, \theta', t) - a_s(R, \theta, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{I.66})$$

Cette contrainte suffit pour restaurer la continuité du champ au niveau de l'interface de couplage, mais une nouvelle fonctionnelle doit être définie comme suit [70] :

$$\pi' = \pi_s + \pi_r + \int_{\Gamma} \lambda (a_s - a_r) d\Gamma \quad (\text{I.67})$$

où π_s et π_r sont des fonctionnelles classiques correspondantes aux problèmes du stator et du rotor si les conditions homogènes de Neumann sont appliquées sur les deux cotés de l'interface de couplage. La résolution de ce type de problème nous oblige à définir les multiplicateurs de Lagrange comme étant les dérivées normales du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ . Cette méthode, générale, peut être appliquée à n'importe quel type de formulation tant en 2D, [71], [72] qu'en 3D [73], [74].

- Une deuxième méthode, qui ne nécessite pas la discrétisation des dérivées normales du potentiel vecteur magnétique (multiplicateurs de Lagrange), utilise une formulation qui consiste à discrétiser l'équation (I.66) séparément du problème et de l'introduire comme contrainte par les multiplicateurs de Lagrange [75], [16], [76].

Dans ces deux dernières méthodes, la résolution du problème couplé conduit à la recherche du point stationnaire dont la forme explicite de la fonctionnelle modifiée π' est donnée par :

$$\pi'(\mathbf{A}_s, \mathbf{A}_r, \boldsymbol{\lambda}) = \pi(\mathbf{A}_s, \mathbf{A}_r) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{P}_s \mathbf{A}_s - \mathbf{P}_r \mathbf{A}_r) \quad (\text{I.68})$$

où \mathbf{A}_s et \mathbf{A}_r sont des vecteurs contenant les valeurs nodales du potentiel vecteur et où le terme $(\mathbf{P}_s \mathbf{A}_s - \mathbf{P}_r \mathbf{A}_r)$ représente la contrainte (I.66) sous sa forme discrétisée.

En plus de la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange, qui conduit à un calcul numérique assez complexe des intégrales de couplage [70], et la recherche du point stationnaire de (I.68), qui est très délicate, vu que la matrice du système à résoudre est singulière et mal conditionnée du fait que sa diagonale présente des zéros [77], [78], ces deux méthodes introduisent des nouvelles variables qui augmentent le nombre d'inconnues à déterminer.

Une troisième technique, consistant aussi à modifier la fonctionnelle à minimiser en utilisant deux maillage indépendants, est la technique de transformation de variables [79]. Celle-ci consiste d'abord à formuler séparément les deux problèmes en éléments finis en appliquant sur l'interface Γ les conditions homogènes de Newman. La contrainte de couplage (I.66), sous la forme discrétisée, est introduite ensuite dans le système global en utilisant une matrice de transformation des variables. Les travaux réalisés dans ce sens se distinguent par la façon de discrétiser la contrainte de couplage et la manière de l'introduire dans le système global. Dans le cas de la machine asynchrone monophasée, les auteurs [17] utilisent la TFD du potentiel vecteur du stator sur l'interface de couplage pour exprimer celui du côté du rotor. L'inconvénient de cette technique porte sur l'exigence d'un maillage équidistant sur l'interface Γ , due à l'utilisation de la TFD. Dans [80] (Mortar element method), la contrainte de couplage (I.66) est discrétisée en introduisant des fonctions d'interpolation sur les éléments de l'interface. La matrice, de transformation de variables obtenue, est ensuite appliquée après avoir assemblé les matrices éléments finis des deux domaines à coupler. La construction de la matrice de transformation est le point le plus délicat dans l'implémentation de cette méthode et, en présence du mouvement, elle doit être reconstruite pour chaque configuration du système [81].

De point de vue formulation, ces trois méthodes sont semblables avec toutefois un avantage pour la méthode de transformation de variables dans la réduction du nombre d'inconnues à considérer en éliminant les multiplicateurs de Lagrange et les variables d'un côté de l'interface de couplage. C'est cette approche que nous développons dans les chapitres suivants de notre étude.

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés les différents outils mathématiques utilisés pour la modélisation électromécanique des machines à induction.

Pour le calcul du champ électromagnétique, il se trouve que le modèle magnétodynamique est conditionné par l'alimentation du circuit électrique extérieur à la machine. Cependant, l'interaction mécanique de la machine vis-à-vis de sa charge peut être prise en compte par un modèle mécanique externe représenté par l'équation mécanique. Ainsi, on est amené à résoudre simultanément deux types d'équations :

- Equations aux dérivées partielles du champ électromagnétique;
- Equations différentielles des circuits électriques et du mouvement mécanique.

La résolution du problème couplé est souvent réalisée par la méthode des éléments finis. Les méthodes pas à pas dans le temps donnent de très bons résultats; mais, les temps de calculs, inhérents nécessaires à la résolution, ne permettent pas de les utiliser de façon répétitive. Les méthodes fréquentielles sont par conséquent plus attractives ; mais, elles s'appliquent uniquement dans l'approximation sinusoïdale. Dans ces deux types de calculs, les problèmes qui méritent de la réflexion sont liés au traitement de la saturation et à la prise en considération des harmoniques d'espace dans le régime harmonique ainsi qu'à la prise en compte du mouvement du rotor dans les calculs en pas à pas dans le temps.

L'objet du chapitre suivant porte sur une technique de couplage d'interface des champs du stator et du rotor pour un calcul électromagnétique des machines à induction en régime harmonique (approximation sinusoïdale) avec la prise en compte des harmoniques d'espace.

Chapitre II

Modélisation électromagnétique des machines à induction en régime harmonique

II.1. Introduction

L'utilisation du modèle magnétodynamique en régime harmonique s'avère très intéressante pour réduire le temps de calcul dans la modélisation par éléments finis des machines à induction. Dans ce modèle, le problème du mouvement du rotor est surmonté par la technique de transformation du glissement en supposant que le champ dans le rotor a la seule fréquence du fondamental. Or le champ créé par les courants du stator et transitant au rotor est entaché d'harmoniques d'espaces dus à la répartition non sinusoïdale des conducteurs et à l'effet de la denture. Les champs harmoniques au rotor glissent alors à des fréquences différentes de celle du fondamental.

Nous présentons, dans ce chapitre, une méthode de couplage d'interface permettant le calcul électromagnétique des machines à induction en régime harmonique établi, couplé aux circuits électriques.

Nous considérons, dans cette méthode de calcul, le cas où seul le fondamental des harmoniques d'espace est pris en compte au rotor et nous montrons par la suite comment introduire les champs harmoniques significatifs.

Cette méthode consiste à séparer les domaines fixe (stator) et mobile (rotor) dans le traitement par éléments finis. Le couplage des deux domaines est réalisé ensuite sur une interface artificielle située dans l'entrefer.

II.2. Modélisation électromagnétique avec couplage d'interface

II.2.1. Domaine d'étude

La machine à induction considérée est triphasée. Elle comporte p paires de pôles. Le stator est alimenté par une source de tension triphasée équilibrée à variation sinusoïdale dans le temps. Afin de réduire le domaine d'étude, nous adoptons la condition d'anti-périodicité. L'étude du champ magnétique est alors effectuée sur un pôle.

Deux domaines sont utilisés pour décrire la géométrie de la machine (Fig. II.1):

- Le domaine du stator Ω_s , qui est composé des éléments du stator et d'une partie de l'entrefer;
- Le domaine du rotor Ω_r , qui est composé des éléments du rotor et du reste de l'entrefer.

Une interface (Γ), commune à ces deux domaines est créée dans le milieu de l'entrefer à un rayon R .

Le domaine du stator est associé à un référentiel fixe de coordonnées (r, θ) . Celui du rotor est associé à un référentiel mobile, de coordonnées (r', θ') , tournant à la vitesse mécanique du rotor Ω . Les coordonnées des deux référentiels sont reliées par :

$$\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + \Omega t \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

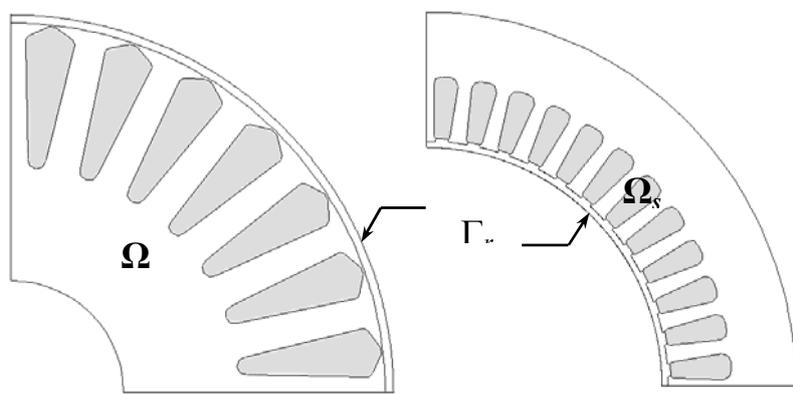


Fig. II.1. Définition des domaines du stator et du rotor sur un pôle.
(L'entrefer est agrandi).

II.2.2. Equations du champ magnétique

Dans un modèle de géométrie bidimensionnelle, où la longueur de la machine est supposée infinie le long de son axe de rotation, comme cela a été précisé, le potentiel vecteur magnétique présente une seule composante axiale. Ce qui ramène l'étude du champ électromagnétique dans le domaine considéré à un problème bidimensionnel (2D). Comme le stator est constitué de tôles feuilletées, toute circulation de courants induits suivant la direction axiale est éliminée. La conductivité électrique dans le fer statorique est donc considérée nulle. Enfin les phénomènes liés à l'hystérésis ne sont pas considérés dans cette étude.

Afin d'exploiter la technique de transformation du glissement pour simuler le mouvement du rotor, nous supposons que le fondamental des harmoniques d'espace est prépondérant devant les champs harmoniques d'ordre supérieur et que l'effet de la denture est négligeable. Dans ces conditions, la seule fréquence existante au rotor est celle du fondamental.

Dans le régime harmonique, où toutes les grandeurs électromagnétiques sont à variation sinusoïdale par rapport au temps, les potentiels vecteurs magnétiques, notés par a_s dans Ω_s et par a_r dans Ω_r , s'écrivent en notation complexe comme suit :

$$a_s(p, t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\underline{A}_s(r, \theta) \exp(-j\omega_s t)\} \quad (\text{II.2})$$

$$a_r(p', t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{\underline{A}_r(r', \theta') \exp(-jg\omega_s t)\} \quad (\text{II.3})$$

où ω_s représente la pulsation du champ magnétique imposée par l'alimentation du stator et où g représente le glissement du rotor. Il est exprimé, pour une machine à p paires de pôles, par :

$$g = 1 - p \frac{\Omega}{\omega_s} \quad (\text{II.4})$$

\underline{A}_s et \underline{A}_r représentent les valeurs complexes de a_s et de a_r respectivement.

Dans ces conditions et à partir des équations de Maxwell définies dans le chapitre précédent, la répartition du potentiel vecteur magnétique, dans les deux domaines considérés, est gouvernée par :

$$\nabla \cdot (\nu_s \nabla \underline{A}_s) + \underline{J}_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{II.5})$$

$$\nabla \cdot (\nu_r \nabla \underline{A}_r) - \sigma (j g \omega_s \underline{A}_r - \frac{\underline{U}_b}{l}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_r \quad (\text{II.6})$$

Au niveau de ces équations, \underline{J}_s représente la densité de courant complexe injectée dans les encoches du stator et imposée par les tensions d'alimentations ; ν_s et ν_r sont respectivement la reluctivité magnétique équivalente du fer statorique et celle du fer rotorique (cf. II.6) ; σ est la conductivité électrique des milieux conducteurs au rotor. Le terme \underline{U}_b représente la différence de potentiel induite aux bornes d'une barre de la cage du rotor et l représente la longueur axiale de la machine. Le problème magnétique, donné par les équations (II.5 et II.6), est complètement défini en associant les conditions aux limites sur les frontières extérieures du domaine, celles de passage sur l'interface de couplage Γ ainsi que les équations des circuits électriques.

II.2.3. Equations des circuits électriques du stator et du rotor

Les équations des circuits électriques doivent être couplées à celle du champ pour une analyse fine du comportement électromagnétique de la machine étudiée. Dans ce cas les sources de champ deviennent indirectement les tensions d'alimentations de la machine. Les impédances des têtes de bobines et des anneaux de court circuit de la cage sont introduites pour tenir compte de l'effet 3D dans l'analyse par éléments finis du problème magnétique en deux dimensions. Ces quantités sont généralement mesurées ou calculées analytiquement ou numériquement en 3D [5, 82].

II.2.3.1. Equations électriques du stator

L'équation du circuit des trois phases du stator donnée par l'équation (I.57), en notation complexe et sous forme matricielle, s'écrit :

$$\underline{\mathbf{V}}_s = \underline{\mathbf{Z}}_s \underline{\mathbf{I}}_s + \underline{\mathbf{E}}_s \quad (\text{II.7})$$

où :

$$\underline{\mathbf{Z}}_s = \mathbf{R}_s + j \omega_s \mathbf{L}_s \quad (\text{II.8})$$

est l'impédance du stator. $\underline{\mathbf{V}}_s$, $\underline{\mathbf{I}}_s$ et $\underline{\mathbf{E}}_s$ représentent respectivement les vecteurs tensions d'alimentation, courants et forces électromotrice dans le stator.

Les forces électromotrices des trois phases peuvent être reliées au potentiel vecteur magnétique $\underline{\mathbf{A}}_s$ via l'équation suivante :

$$\underline{\mathbf{E}}_s = \frac{j \omega_s n_s l}{s} \left\{ \iint_{s_+} \underline{\mathbf{A}}_s ds - \iint_{s_-} \underline{\mathbf{A}}_s ds \right\} \quad (\text{II.9})$$

où s représente la surface d'une encoche du stator; s_+ et s_- sont, respectivement, la section des conducteurs aller et retour du bobinage.

Avec les expressions (II.8) et (II.9), l'équation du circuit du stator couplée aux grandeurs magnétiques est obtenue (Annexe A) par :

$$\underline{V}_s = \underline{Z}_s \underline{I}_s + j \omega_s n_s \frac{l}{S} \left\{ \iint_{s_+} \underline{A}_s ds - \iint_{s_-} \underline{A}_s ds \right\} \quad (\text{II.10})$$

II.2.3.2. Equations électriques de la cage du rotor

L'impédance d'une portion des couronnes de court-circuit, de résistance R_e et d'inductance l_e , est donnée par :

$$\underline{Z}_e = \mathbf{R}_e + j g \omega_s \mathbf{I}_e \quad (\text{II.11})$$

Le schéma électrique équivalent de la cage du rotor peut être donné par celui de la Fig. II.2 où la région grise représente le domaine éléments finis s'étalant sur la longueur du rotor.

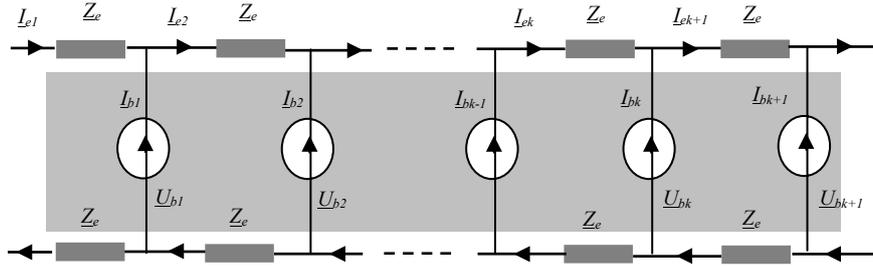


Fig. II. 2. Modèle du circuit de la cage du rotor en régime harmonique.

En utilisant les lois de Kirchhoff, les tensions et les courants induits dans les barres de la cage sont exprimés comme suit (Annexe B):

$$-\frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \underline{U}_b = \underline{Z}_e \underline{I}_b \quad (\text{II.12})$$

où \underline{I}_b et \underline{U}_b sont respectivement les vecteurs courants et tensions induits dans les barres; \mathbf{M} est une matrice de connexion, donnée en Annexe B, de dimension $(n_b \times n_b)$ et où n_b est le nombre de barres.

La densité de courant de la $k^{\text{ième}}$ barre, de section s_b^k , donnée par l'équation (I.59) s'écrit, en notation complexe, comme suit :

$$\underline{J}_b^k = -\sigma (j g \omega_s \underline{A}_r - \frac{U_b^k}{l}) \quad (\text{II.13})$$

Le courant total, dans cette barre, est alors obtenu en intégrant l'équation (II.13) sur la surface de la barre :

$$\underline{I}_b^k = \iint_{s_b^k} \underline{J}_b^k ds_b^k = -j \sigma g \omega_s \iint_{s_b^k} \underline{A}_r ds_b^k + \frac{1}{R_b} U_b^k \quad (\text{II.14})$$

Si on considère l'ensemble de la cage, le vecteur \underline{I}_b représentant les courants de toutes les barres s'écrit comme suit :

$$\underline{I}_b = -j \sigma g \omega_s \left\{ \iint_{s_b} \underline{A}_r ds_b \right\} + \frac{1}{R_b} \underline{U}_b \quad (\text{II.15})$$

où s_b représente la section totale des barres.

Alors, l'équation électrique suivante du circuit de la cage du rotor est obtenue par la combinaison des équations (II.12) et (II.15) :

$$-j\sigma g\omega_s \left\{ \iint_{s_b} \underline{A}_r ds_b \right\} + \underline{\mathbf{Y}}_r \underline{\mathbf{U}}_b = 0 \quad (\text{II.16})$$

avec:

$$\underline{\mathbf{Y}}_r = \underline{\mathbf{R}}_b^{-1} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{Z}}_e^{-1} \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{M}}^T \quad (\text{II.17})$$

II.3. Formulation en éléments finis des équations avec le couplage d'interface

Dans le cas de la méthode des éléments finis, la résolution des équations (II.5 et II.6) passe par une première étape où l'équation aux dérivées partielles est réécrite sous sa forme intégrale. Cette étape peut être réalisée à l'aide de la méthode de Ritz qui consiste à chercher une fonctionnelle d'énergie du système étudié ou à l'aide de la méthode des résidus pondérés qui fait intervenir des fonctions de test [83]. La forme intégrale obtenue est discrétisée sur des éléments finis. Le potentiel vecteur magnétique inconnu est discrétisé aux nœuds du maillage et il est exprimé par des fonctions d'interpolations. Dans la première méthode, le système algébrique est obtenu par la minimisation de la fonctionnelle d'énergie. Dans la seconde et selon le concept de Galerkin, il suffit de prendre comme fonction test les fonctions d'approximation des inconnues. Notant que les deux méthodes conduisent au même système algébrique. Dans notre travail, les deux régions de la machine définies précédemment (Fig. II.1) sont subdivisées en éléments triangulaires de premier ordre où le potentiel vecteur, au niveau de chaque élément, est approché par une fonction bilinéaire (Annexe A).

II.3.1 Principe de la méthode de couplage d'interface des champs statorique et rotorique

Les deux modèles de champ magnétique relatifs au stator et au rotor définis précédemment doivent être couplés sur l'interface Γ en assurant les conditions de continuité, du champ magnétique, suivantes :

- La continuité de la composantes normale de l'induction, qui se traduit par :

$$\underline{A}_r(R, \theta') - \underline{A}_s(R, \theta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{II.18})$$

- La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique qui s'écrit ainsi :

$$\left. \frac{\partial \underline{A}_r(r, \theta')}{\partial n} - \frac{\partial \underline{A}_s(r, \theta)}{\partial n} \right|_{r=R} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{II.19})$$

La fonctionnelle d'énergie, associée au système d'équations (II.5 et II.6) gouvernant le champ magnétique dans le cas où les conditions homogènes de Neumann sont appliquées sur les interfaces (Γ_s et Γ_r), est de la forme suivante [84] :

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_r \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_r \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_r \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \underline{\mathbf{F}}_r \end{Bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

où $\underline{\mathbf{K}}$ et $\underline{\mathbf{R}}$ sont respectivement les matrices masses du stator et du rotor (Annexe A). $\underline{\mathbf{A}}_s$ et $\underline{\mathbf{A}}_r$ représentent respectivement les valeurs nodales du potentiel vecteur de tous les nœuds du stator et de tous ceux du rotor.

Plusieurs techniques de couplage d'interface, basées sur la modification de la fonctionnelle d'énergie, ont été exposées dans le chapitre I de notre travail. Ainsi, nous avons montré que l'introduction de la contrainte (Eq. II.18), pour modifier la fonctionnelle (Eq. II.20), suffit pour restaurer la continuité du champ magnétique entre les interfaces Γ_s et Γ_r [80].

Dans ce contexte, nous proposons une méthode alternative où la contrainte de couplage (II. 18) est introduite dans la fonctionnelle globale avec une technique de transformation de variables. Cette dernière permet de réduire le nombre d'inconnues à déterminer et elle aboutit à un système algébrique à diagonale pleine; ce qui facilite sa résolution. Dans cette méthode, l'équation de couplage est établie par la décomposition en série de Fourier du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ_s .

Le potentiel vecteur magnétique créé par les courants statoriques au niveau de l'entrefer est évidemment entaché d'harmonique d'espace dus à la distribution non sinusoïdale des conducteurs dans les encoches et à l'effet de la denture. Cependant, pour les enroulements triphasés équilibrés des machines à induction, le rang des harmoniques d'espace les plus significatifs est de la forme ($n = 1 \pm 6k ; k \geq 0$) [85].

Les symétries géométrique et magnétique du problème produisent dans l'entrefer de la machine un potentiel vecteur magnétique périodique à $2p$ paires de pôles. Sur l'interface Γ_s et par rapport au repère du stator, le développement en séries de Fourier, de $\underline{\mathbf{A}}_s(R, \theta)$ est de la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{A}}_s(R, \theta) = \sum_n \underline{\mathbf{C}}_n^s \exp(jnp\theta) \quad (\text{II.21})$$

où $\underline{\mathbf{C}}_n^s$ représentent les coefficients de Fourier d'ordre n . Ces derniers peuvent être calculés en fonction du vecteur des valeurs nodales $\underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma$ du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ_s à l'aide de l'expression suivante :

$$\underline{\mathbf{C}}_n^s = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \underline{\mathbf{A}}_s(R, \theta) \exp(jnp\theta) d\theta \equiv \underline{\mathbf{L}}_n^\Gamma \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \quad (\text{II.22})$$

où $\underline{\mathbf{L}}_n$ dépend des coordonnées des nœuds de l'interface Γ_s . La continuité du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ_s et le passage au repère rotorique par la transformation des coordonnées (II.1) permettent d'écrire l'expression suivante, sur l'interface Γ_r :

$$\underline{\mathbf{A}}_r(R, \theta') = \sum_n \underline{\mathbf{C}}_n^s \exp(jnp\theta') \quad (\text{II.23})$$

Ainsi, les valeurs nodales du potentiel vecteur sur l'interface Γ_r , notées par $\underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma$, sont obtenues en fonction de celles du stator en utilisant l'expression suivante :

$$\underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma = \sum_n \underline{\mathbf{G}}_n \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \quad (\text{II.24})$$

où $\underline{\mathbf{G}}_n$ est une matrice reliée aux coordonnées de tous les nœuds d'interface. Cette dernière équation permet de coupler le champ du rotor à celui du stator. Elle montre aussi que le champ transitant au rotor à travers l'interface Γ_r est aussi un champ harmonique. Cependant, si on ne s'intéresse qu'au fondamental, le potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ_r serait donné par

l'Equation (II.23) pour n égal à 1. Cela suppose que les autres harmoniques d'espaces sont négligeables. Dans ces conditions l'Equation (II.24) s'écrit ainsi :

$$\underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma = \underline{\mathbf{G}}_1 \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \quad (\text{II.25})$$

C'est l'équation à utiliser pour modifier la fonctionnelle (II.20) par la technique de transformation de variables.

II.3.2 Technique de transformation de variables pour le couplage des équations du champ dans l'entrefer

Sous les hypothèses exposées dans le paragraphe (II.2.2), où seul le fondamental est à considérer, le potentiel vecteur magnétique du rotor est couplé, sur l'interface (Γ), avec celui du stator par l'Equation (II.25). Celle-ci est introduite dans la fonctionnelle (II.20) à l'aide de la matrice de transformation de variables ($\underline{\mathbf{S}}$), définie par la matrice suivante :

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{G}}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Cette matrice permet de transformer les variables d'interface appartenant au rotor à celles appartenant au stator. En d'autres termes, elle permet d'exprimer, sur l'interface de couplage, les valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique du rotor en fonction de celles du stator. Ce qui permet de réduire la taille du système matriciel à résoudre.

Le traitement du couplage d'interface, dans le procédé éléments finis, consiste à séparer la contribution des nœuds d'interface avec celle des nœuds du reste des deux domaines Ω_s et Ω_r . On écrit, alors :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{A}}_s = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{s-\Gamma} & \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \end{bmatrix}^\Gamma \\ \underline{\mathbf{A}}_r = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{r-\Gamma} & \underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma \end{bmatrix}^\Gamma \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{ss} & \underline{\mathbf{K}}_{s\Gamma} \\ \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma s} & \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_{rr} & \underline{\mathbf{R}}_{r\Gamma} \\ \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma r} & \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

Les indices ($s-\Gamma$) et ($r-\Gamma$), dans l'expression (II.27), indiquent les valeurs nodales du potentiel vecteur du stator et du rotor sans celles sur l'interface de couplage (Γ). Cette transformation s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_r \end{Bmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}' \quad (\text{II.29})$$

où $\underline{\mathbf{A}}'$ représente le vecteur réduit des variables :

$$\underline{\mathbf{A}}' = \left\{ \underline{\mathbf{A}}_{s-\Gamma} \quad \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \quad \underline{\mathbf{A}}_{r-\Gamma} \right\}^T \quad (\text{III.30})$$

En tenant compte de l'Equation (II.29), et suivant le principe du couplage d'interface qui consiste à modifier la fonctionnelle du système, une nouvelle fonctionnelle est définie par :

$$\pi' = \underline{\mathbf{A}}'^T \underline{\mathbf{S}}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}}' - \underline{\mathbf{A}}'^T \underline{\mathbf{S}}^T \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \underline{\mathbf{F}}_r \end{Bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

La distribution du potentiel vecteur, dans les deux domaines, est alors obtenue par la minimisation de cette nouvelle fonctionnelle ; ce qui nous amène à résoudre le système algébrique suivant :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{ss} & \underline{\mathbf{K}}_{s\Gamma} & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma s} & \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} + \underline{\mathbf{G}}_1^T \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma\Gamma} \underline{\mathbf{G}}_1 & \underline{\mathbf{G}}_1^T \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma r} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_{r\Gamma} \underline{\mathbf{G}}_1 & \underline{\mathbf{R}}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{s-\Gamma} \\ \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \\ \underline{\mathbf{A}}_{r-\Gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{F}}_r \end{Bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Cette formulation réalise explicitement le couplage des deux domaines EF (éléments finis) et garantit les conditions de continuité du champ, à savoir la composante normale de l'induction magnétique et la composante tangentielle du champ magnétique dans l'entrefer [17], [77].

Afin de coupler les équations de circuits au problème magnétique défini par le système (II.32), nous devons coupler d'abord ce dernier aux grandeurs électriques.

II.3.3 Couplage des termes source de champ aux grandeurs électriques

Le couplage de l'équation du champ magnétique aux circuits électriques est réalisé en exprimant le second membre du système (II.32) qui présente la source du champ magnétique dans Ω_s et Ω_r , en fonction des grandeurs électriques des circuits à savoir les courants et les tensions.

- Stator

Le vecteur ($\underline{\mathbf{F}}_s$), relatif au domaine Ω_s , décrit la densité de courant dans le bobinage imposée par les tensions d'alimentation. En fonction des courants de phases du stator, elle peut être écrite sous la forme discrétisée suivante :

$$\underline{\mathbf{F}}_s = \underline{\mathbf{C}}_s \underline{\mathbf{I}}_s \quad (\text{II.33})$$

$\underline{\mathbf{C}}_s$ est une matrice de connexion de dimension $(3xn)$ donnée en annexe B.

- Rotor

Le vecteur ($\underline{\mathbf{F}}_r$), relatif au domaine Ω_r , est relié aux différences de potentiels induites aux bornes des barres du rotor. Sa forme discrétisée en éléments finis est donnée, pour tous les éléments des barres de la cage du rotor, par :

$$\underline{\mathbf{F}}_r = \underline{\mathbf{C}}_r \underline{\mathbf{U}}_b \quad (\text{II.34})$$

où $\underline{\mathbf{C}}_r$ est une matrice de connexion de dimension $(n_b \times xn)$ donnée en annexe B.

En considérant les équations (II.33) et (II.34), le système (II.32) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left[\underline{\mathbf{B}} \quad -\underline{\mathbf{C}}_s \quad -\underline{\mathbf{C}}_r \right] \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{A}}' \\ \underline{\mathbf{I}}_s \\ \underline{\mathbf{U}}_b \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{II.35})$$

où $\underline{\mathbf{B}}$ représente la matrice masse globale donnée par l'expression suivante :

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{ss} & \underline{\mathbf{K}}_{s\Gamma} & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma s} & \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} + \underline{\mathbf{G}}_1^T \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma\Gamma} \underline{\mathbf{G}}_1 & \underline{\mathbf{G}}_1^T \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma r} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_{r\Gamma} \underline{\mathbf{G}}_1 & \underline{\mathbf{R}}_{rr} \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Cette matrice symétrique est creuse et met en évidence les blocks de matrices relatives au couplage d'interface des deux domaines.

II.3.4. Formulation en éléments finis des équations de circuits

La formulation en éléments finis des équations de circuits (II.10) et (II.16), donnée en Annexe B, conduit aux équations matricielles suivantes [86] :

- pour le circuit du stator :

$$-\underline{\mathbf{C}}_s^T \underline{\mathbf{A}}' + \frac{1}{j\omega_s l} \underline{\mathbf{Z}}_s \underline{\mathbf{I}}_s = \frac{1}{j\omega_s l} \underline{\mathbf{V}}_s \quad (\text{II.37})$$

- pour le circuit de la cage du rotor :

$$-\underline{\mathbf{C}}_r^T \underline{\mathbf{A}}' + \underline{\mathbf{Y}}_r \underline{\mathbf{U}}_b = 0 \quad (\text{II.38})$$

II.3.5. Equations globales du problème magnétique-circuits électriques dans le cas du premier harmonique d'espace

La combinaison des équations (II.35), (II.37) et (II.38) donne le système algébrique global représentant le couplage des équations du champ aux équations de circuits. Dans l'ensemble du domaine considéré, les grandeurs électromagnétiques sont obtenues par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{B}} & -\underline{\mathbf{C}}_s & -\underline{\mathbf{C}}_r \\ -\underline{\mathbf{C}}_s^T & \frac{1}{j\omega_s l} \underline{\mathbf{Z}}_s & \mathbf{0} \\ -\underline{\mathbf{C}}_r^T & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{Y}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}' \\ \underline{\mathbf{I}}_s \\ \underline{\mathbf{U}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{j\omega_s l} \underline{\mathbf{V}}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Ce système algébrique, non linéaire, est symétrique. Il peut être résolu par la méthode de substitutions successives avec un facteur de relaxation.

II.4 Méthode du couplage d'interface avec prise en compte des harmoniques d'espace

Dans la partie précédente nous n'avons considéré que le fondamental du potentiel vecteur magnétique créé dans l'entrefer ; cela suppose que les harmoniques de rang supérieurs, provoqués par la géométrie de la machine, sont négligeables. Mais en réalité, ce n'est qu'une approximation car, en plus de l'effet de denture, la distribution spatiale des enroulements des machines à inductions ne peut guère être sinusoïdale. On s'intéresse, dans ce qui suit, à l'extension de la technique de couplage d'interface pour la prise en compte des harmoniques d'espaces.

II.4.1 Domaine d'étude et formulation du problème en éléments finis

La machine étant alimentée par des tensions sinusoïdales triphasées équilibrées, la source du champ magnétique ne présente qu'un seul harmonique de temps de pulsation ω_s . Le bobinage statorique, distribué dans les encoches, crée dans l'entrefer, en plus du champ fondamental à p paires de pôles, des champs harmoniques qui tournent à des vitesses différentes de celle du fondamental.

On reste dans le modèle bidimensionnel en régime harmonique où la notation complexe facilite le traitement du problème. Deux référentiels, l'un fixe lié au stator et l'autre mobile lié au rotor, sont alors définis. Le passage du repère fixe au repère mobile s'effectue directement par la transformation de coordonnées donnée par l'Expression (II.1). Les domaines du stator Ω_s et du rotor Ω_r présentent une interface commune $\Gamma = \Gamma_s = \Gamma_r$ sur laquelle sera effectué le couplage des champs harmoniques du rotor avec ceux du stator. Partant du fait que la distribution du potentiel vecteur magnétique dans l'entrefer est entachée d'harmoniques, en particulier ceux de rang 5, 7, 11 et 13, la transition de ces derniers à travers l'entrefer vers le rotor s'effectue à des fréquences différentes de celle du fondamental. Pour tenir compte convenablement de l'effet de ces harmoniques dans le domaine du rotor, on considère pour chaque harmonique d'espace de rang n , un domaine rotorique Ω_{rn} où le champ glisse par rapport au stator avec le glissement correspondant à cet harmonique. Autrement dit, chaque harmonique du potentiel vecteur magnétique statorique constituera une source de champ pour le domaine du rotor. Ainsi le potentiel vecteur magnétique global, créé dans le rotor, sera la superposition des potentiels vecteurs magnétiques harmoniques. Ce qui conduit à définir un seul problème au stator couplé à plusieurs problèmes au rotor (Fig. II.3). Dans ce contexte, deux maillages séparés seront utilisés, un au stator et un autre au rotor commun à tous les problèmes harmoniques. Cette modélisation assume donc la superposition des champs significatifs dans le rotor et ainsi le nombre de variables dans le problème rotorique est multiplié par le nombre d'harmoniques à considérer.

II.4.2 Modèles du stator et du rotor

Dans le domaine du stator, le problème magnétique reste le même que celui défini dans le cas du premier harmonique d'espace. En notation complexe, le potentiel vecteur magnétique a_s donné par l'Equation (II.2) est gouverné par l'Equation aux dérivées partielles (II.5). Sur l'interface Γ_s , ce potentiel vecteur est exprimé par son développement en séries de Fourier donné par l'expression (II.21).

Les harmoniques d'espace, issus du problème du stator, se diffusent vers le rotor à travers l'interface Γ_r à des vitesses de rotation différentes. Ainsi chaque harmonique d'espace de rang n induira dans le domaine du rotor des courants à la pulsation harmonique ω_{rn} .

Si on note par g le glissement du fondamental défini par l'équation (II.4), alors la pulsation harmonique ω_{rn} est donnée par l'expression suivante [87] :

$$\omega_{rn} = g_n \omega_s = [1 - n(1 - g)] \omega_s \quad (\text{II.40})$$

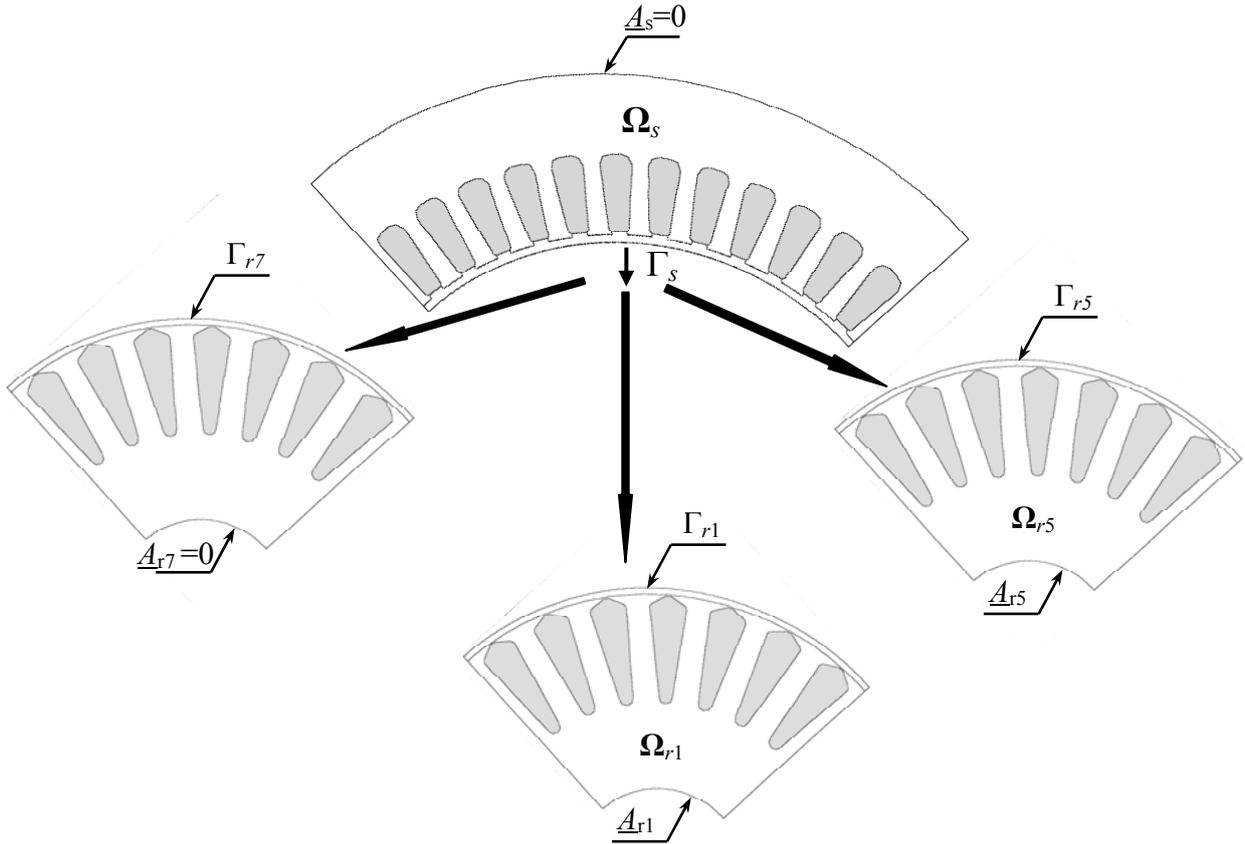


Fig. II. 3. Définition des domaines du stator et du rotor dans le cas des harmoniques 1, 5 et 7.

En utilisant le principe de superposition, le potentiel vecteur magnétique a_r , dans le domaine du rotor et par rapport au repère rotorique, peut être écrit sous la forme complexe suivante :

$$a_r(r', \theta', t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_n \underline{A}_{rn}(r', \theta') \exp(-j g_n \omega_s t) \right\} \quad (\text{II.41})$$

où \underline{A}_{rn} est la représentation complexe de l'harmonique d'espace n de a_r . La distribution de ce potentiel vecteur magnétique harmonique est déterminée à partir de l'équation suivante :

$$\nabla \cdot (\nu_r \nabla \underline{A}_{rn}) - \sigma (j g_n \omega_s \underline{A}_{rn} - \frac{U_{bn}}{l}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{rn} \quad (\text{II.42})$$

Dans cette dernière équation, σ représente la conductivité des milieux conducteurs et ν_r la reluctivité équivalente commune à tous les domaines harmoniques du rotor; Elle est déterminée après avoir calculé tous les harmoniques du potentiel vecteur magnétique.

II.4.3 Equations de couplage d'interface et formulation en éléments finis

Dans le modèle magnétodynamique du rotor défini précédemment, les champs harmoniques significatifs doivent être couplés avec ceux du stator. Pour se faire, écrivant le potentiel vecteur sur l'interface du rotor sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma = \sum_n \underline{\mathbf{A}}_{rn}^\Gamma \quad (\text{II.43})$$

où $\underline{\mathbf{A}}_{rm}^\Gamma$ représente les valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ_{rm} du domaine harmonique Ω_{rm} . En fonction des valeurs nodales sur l'interface du stator et en tenant compte des équations (II.24 et II.43), $\underline{\mathbf{A}}_{rm}^\Gamma$ est exprimé par la relation suivante :

$$\underline{\mathbf{A}}_{rm}^\Gamma = \underline{\mathbf{G}}_n \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \quad (\text{II.44})$$

Cette équation est introduite dans la formulation variationnelle du problème en utilisant la transformation de variables. En appliquant la méthode variationnelle, le problème du stator et celui du rotor donnés par les équations (II.5 et II.42), en considérant les harmoniques d'espace jusqu'à l'ordre m , permettent de définir la fonctionnelle d'énergie suivante [88] :

$$\pi = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{K}} & 0 & & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{R}}_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \underline{\mathbf{R}}_m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \underline{\mathbf{F}}_{r1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{F}}_{rm} \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

où $\underline{\mathbf{K}}$ et $\underline{\mathbf{R}}_n$, sont les matrices masses correspondantes au problème du stator et au problème du rotor d'ordre n ($|n|=1..m$) respectivement. Le traitement du couplage d'interface nécessite la séparation des variables d'interface de l'ensemble des variables des deux domaines Ω_s et Ω_r . Alors, les parties relatives au rotor des équations (II.27 et II.28) s'écrivent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbf{A}}_{rm} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{rm-\Gamma} & \underline{\mathbf{A}}_{rm}^\Gamma \end{bmatrix}^T \\ \underline{\mathbf{R}}_n = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{R}}_{rrm} & \underline{\mathbf{R}}_{r\Gamma n} \\ \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma rm} & \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma n} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{II.46})$$

Cette formulation variationnelle nécessite des variables indépendantes, mais l'équation de couplage (II.44) montre que les vecteurs ($\underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma$ et $\underline{\mathbf{A}}_{rm}^\Gamma$) ne sont pas indépendants. La technique de transformation de variables consiste à remplacer les valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique relatives à l'interface du rotor par celles de l'interface du stator. Cette technique, appliquée à la fonctionnelle globale (II.45) en utilisant la matrice de transformation $\underline{\mathbf{S}}$, transforme le vecteur de variables dépendantes en un autre de variables indépendantes, par utilisation de la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{S}} \underline{\mathbf{A}} \quad (\text{II.47})$$

où :

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{s-\Gamma} & \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma & \underline{\mathbf{A}}_{r1-\Gamma} & \cdots & \underline{\mathbf{A}}_{rm-\Gamma} \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.48})$$

est le vecteur réduit des valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique. La matrice $\underline{\mathbf{S}}$ est donnée par :

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{S}}_m \end{bmatrix} \quad (\text{II.49})$$

où la matrice identité \mathbf{I} est relative au problème du stator et où $\underline{\mathbf{S}}_n$ est la matrice de transformation relative au problème rotorique d'ordre n . Elles s'écrivent sous les formes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{S}}_n &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \underline{\mathbf{G}}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.50})$$

où $\underline{\mathbf{G}}_n$ représente la matrice de couplage relative à l'harmonique d'espace d'ordre n . A l'aide de l'expression (II.47), la nouvelle fonctionnelle réduite (π'), où toutes les variables sont indépendantes, est ainsi obtenue :

$$\pi' = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1-\Gamma} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm-\Gamma} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{S}}_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{S}}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1-\Gamma} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm-\Gamma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1-\Gamma} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm-\Gamma} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{S}}_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \underline{\mathbf{F}}_{r1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{F}}_{rm} \end{bmatrix} \quad (\text{II.51})$$

La minimisation de cette fonctionnelle donne l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{S}}_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{S}}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1-\Gamma} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm-\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{S}}_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \underline{\mathbf{F}}_{r1} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{F}}_{rm} \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

L'injection du système d'équations (II.50) dans celui (II.52) et le remplacement des matrices $\underline{\mathbf{K}}$ et $\underline{\mathbf{R}}_n$ par leurs sous-matrices relatives aux contributions séparées des nœuds de domaines et des nœuds d'interfaces, produit :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{ss} & \underline{\mathbf{K}}_{s\Gamma} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma s} & \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} + \sum_{n=1}^m \underline{\mathbf{G}}_n^T \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma n} \underline{\mathbf{G}}_n & \underline{\mathbf{G}}_1^T \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma r1} & \cdots & \cdots & \underline{\mathbf{G}}_m^T \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma rm} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_{r\Gamma1} \underline{\mathbf{G}}_1 & \underline{\mathbf{R}}_{rr1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_{r\Gamma m} \underline{\mathbf{G}}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}}_{rrm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_{s-\Gamma} \\ \underline{\mathbf{A}}_{\Gamma} \\ \underline{\mathbf{A}}_{r1-\Gamma} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{A}}_{rm-\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{F}}_{r1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{F}}_{rm} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

La matrice de ce système d'équations est symétrique, creuse, définie positive et elle met en évidence les termes de couplage relatifs aux différents domaines harmoniques du rotor.

Après avoir exprimé le second membre de ce système en fonction des grandeurs électriques à l'aide des équations (II.33 et II.34), la combinaison de (II.53) avec les équations des circuits électriques du stator (II.37) et de celles du rotor (II.38) donne le système global représentant le problème couplé magnétodynamique complexe-circuits électriques. Ce dernier aura la forme de l'expression (II.39) où le nombre d'inconnues au rotor est multiplié par le nombre d'harmoniques considéré. Une note sur la méthode de résolution et le traitement de la saturation, est donnée en annexe C.

II.5 Modèle adopté pour la prise en compte de la saturation

Afin de tenir compte de l'effet de saturation des circuits magnétiques dans une modélisation par éléments finis, la caractéristique de magnétisation est approximée par une fonction afin d'avoir les variations de la perméabilité en fonction de l'induction magnétique. Dans une résolution pas à pas dans le temps, cette fonction est exploitée directement pour tenir compte de la saturation. Ce n'est pas le cas dans les régimes harmoniques où toutes les grandeurs électromagnétiques sont supposées à variation sinusoïdale dans le temps. Toutefois, la réponse à une induction magnétique sinusoïdale n'est pas un champ magnétique sinusoïdal si les matériaux magnétiques ne sont pas linéaires; la réciproque est également vraie. La prise en compte de la saturation magnétique en régime harmonique consiste à remplacer la caractéristique de magnétisation statique par une caractéristique équivalente [89]. Ainsi, la définition d'une perméabilité ou d'une réductivité équivalente est nécessaire pour introduire la saturation dans le modèle élément finis. Cette dernière peut être définie de plusieurs manières [90] :

- En supposant que l'induction magnétique est sinusoïdale, la non linéarité apparaît sur le champ magnétique qui n'est pas sinusoïdale.
- En supposant que le champ magnétique est sinusoïdal, la non linéarité apparaît sur l'induction magnétique qui ne sera pas sinusoïdale.
- En supposant que la densité de l'énergie magnétique ou coénergie, calculée à partir de la perméabilité ou de la réductivité équivalente, soit égale à la densité de l'énergie magnétique ou coénergie réelle.

Dans notre modèle de calcul, les équations du champ magnétique sont directement couplées aux circuits électriques. Alors indirectement, la source du champ magnétique sera la tension d'alimentation de la machine. Cependant, comme la machine est alimentée par des tensions à variation sinusoïdale dans le temps, on a alors opté pour la première définition de la réductivité équivalente [91]. On suppose que l'induction magnétique dans le domaine d'étude est à variation sinusoïdale dans le temps et, on l'écrit sous la forme suivante :

$$b(\varphi) = \sqrt{2}B \sin(\varphi) \quad (\text{II.54})$$

où B représente la valeur efficace de l'induction magnétique avec $\varphi = \omega_s t$ dans le domaine du stator et $\varphi = g\omega_s t$ dans le rotor. L'effet de la saturation apparaît sur la forme d'onde du champ magnétique qui n'est plus sinusoïdale, mais périodique. Son développement en série de Fourier peut s'écrire, en supposant que tous les harmoniques ont la même phase que $b(\varphi)$, sous la forme suivante :

$$h(\varphi) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{+\infty} H_{2k+1} \sin(2k+1)\varphi \quad (\text{II.55})$$

où H_{2k+1} représentent les coefficients de la série de Fourier. Son fondamental est écrit ainsi :

$$H_1 = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(b(\varphi)) \sin \varphi d\varphi \quad (\text{II.56})$$

Le fondamentale du champ magnétique H_1 permet de définir la réductivité équivalente $\underline{\nu}$ à utiliser dans l'analyse du régime harmonique. Toutefois, si la courbe statique $b-h$ est interpolée comme ($h = f(b)$), la réductivité équivalente sera donnée par l'expression suivante :

$$\underline{\nu} = \frac{\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(B\sqrt{2} \sin(\varphi)) \sin(\varphi) d\varphi}{B\sqrt{2}} \quad (\text{II.57})$$

la loi définissant les milieux magnétiques, dans ce cas, s'écrit ainsi :

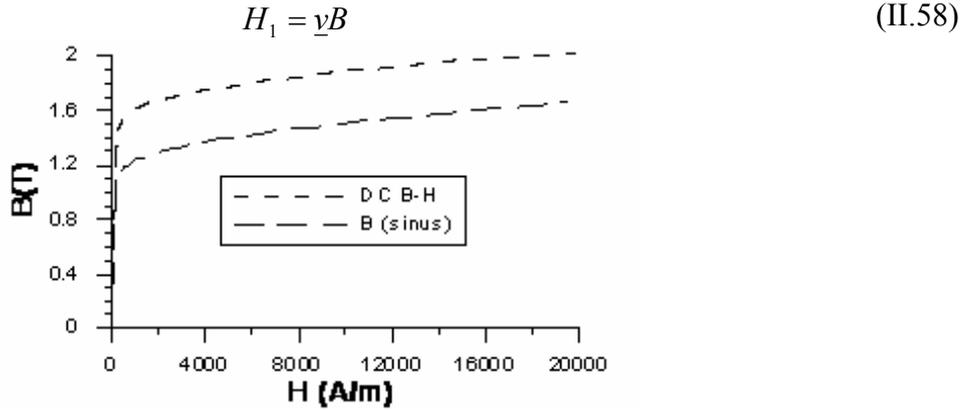


Fig. II. 4. Caractéristique de magnétisation équivalente.

Dans la prise en compte des harmoniques d'espaces la saturation est généralement considérée due au fondamental des harmonique d'espace seulement [17], [57], [76]. Dans notre cas la contribution de ces harmoniques d'espace dans la saturation lors de la détermination de la réductivité équivalente est introduite [92]. La procédure du traitement de la saturation est donnée en Annexe C

II.6. Caractéristiques externes

Nous avons déterminé, à l'aide de la méthode développée en tenant compte des harmoniques d'espace, la distribution du champ magnétique dans les machines à inductions où les circuits électriques sont directement couplés au problème magnétique. Nous déterminons, par la suite, les différentes grandeurs quadratiques que sont les pertes, les puissances et le couple, puis le facteur de puissance et le rendement.

II.6.1. Pertes

- *Pertes Joule*

Dans le bobinage statorique, les pertes Joule sont définies par :

$$p_{js} = 3R_s |I_s|^2 \quad (\text{II.59})$$

Les pertes Joule dans les barres de la cage (ou tout autre matériau conducteur) du rotor se calculent, pour l'harmonique de rang n , à l'aide de l'expression suivante :

$$p_{jrm} = l \iint_{\Omega_r} \frac{|J_n^r|^2}{\sigma_n} d\Omega_r \quad (\text{II.60})$$

La densité de courant \underline{J}'_n , dans les conducteurs, est exprimée en fonction du potentiel vecteur rotorique, sous la forme suivante :

$$\underline{J}'_n = jg_n \omega_s \sigma_n \underline{A}'_n \quad (\text{II.61})$$

Les pertes Joule totales au rotor sont la somme des pertes engendrées par chaque harmonique, soit :

$$P_{jr} = \sum_n P_{jrn} \quad (\text{II.62})$$

Parmi ces pertes, on retrouve les pertes normales dues au fondamental et les pertes "supplémentaires" qui sont la somme de toutes les pertes dues aux autres harmoniques d'espace.

II.6.2. Puissances

- *Puissance active absorbée*

A l'exception des pertes fer, la puissance absorbée est exprimée par :

$$P_a = \text{Re}(\underline{\mathbf{V}}_s \underline{\mathbf{I}}_s^*) \quad (\text{II.63})$$

avec $\underline{\mathbf{I}}_s^*$ qui représente le conjugué du courant $\underline{\mathbf{I}}_s$.

- *Puissance réactive*

Elle est exprimée par :

$$Q_a = \text{Im}(\underline{\mathbf{V}}_s \underline{\mathbf{I}}_s^*) \quad (\text{II.64})$$

- *Puissance électromagnétique*

La puissance électromagnétique transmise au rotor est exprimée par :

$$P_{em} = P_a - p_{js} \quad (\text{II.65})$$

On peut également déterminer la puissance électromagnétique pour chaque harmonique en utilisant l'expression suivante :

$$P_{emn} = \frac{P_{jrn}}{g_n} \quad (\text{II.66})$$

- *Puissance mécanique*

Elle est exprimée par :

$$P_m = P_{em} - p_{jr} \quad (\text{II.67})$$

Pour que le bilan de puissance soit complet, il faudrait rajouter les pertes mécaniques (p_{mec}).

- *Rendement*

Il est exprimé par :

$$\eta = \frac{P_m - p_{mec}}{P_a + p_{fer}} \quad (\text{II.68})$$

- *Facteur de puissance*

Il est exprimé par :

$$\cos(\varphi) = \frac{P_a + p_{fer}}{\sqrt{(P_a + p_{fer})^2 + Q_a^2}} \quad (\text{II.69})$$

II.6.3. Couple électromagnétique

Nous pouvons déterminer le couple électromagnétique soit en effectuant un bilan de puissance soit en utilisant le tenseur des contraintes de Maxwell.

- *Calcul par le bilan de puissance*

Pour chaque harmonique de rang n , nous déterminons le couple correspondant en utilisant l'expression suivante :

$$\Gamma_n = n \frac{P_{emn}}{\omega_s} \quad (\text{II.70})$$

Le couple total sera donc la somme des couples harmoniques.

- *Calcul par le tenseur de Maxwell*

Le couple se calcule par la relation suivante :

$$C_e = R^2 l \int_{2\pi} h_t b_n d\theta \quad (\text{II.71})$$

où R est le rayon dans l'entrefer, h_t est la composante tangentielle du champ sur R et b_n est la composante normale de l'induction sur R .

II.7. Application sur deux types de machines à induction (Rotor à cage et rotor massif)

La méthode développée est utilisée pour le calcul de deux types de machines à induction : une à rotor massif et l'autre à rotor à cage à encoches fermées (voir Tab. II. 1 pour les paramètres). Ces deux dernières machines fonctionnent évidemment à des niveaux de saturation élevés. Leurs bobinages sont à une seule couche réalisés avec des bobines concentriques.

Tab. II.1 Paramètres des moteurs étudiés.

Paramètres	Rotor à cage	Rotor massif	Unités
Puissance nominale	5.5	2.2	kW
Tension par phase	220	220	V
Nombre d'encoches au stator	48	36	-
Nombre d'encoches au rotor	28	-	-
Epaisseur de l'entrefer	0.4	0.4	mm
Longueur utile	160	110	mm

II.7.1 Cas du premier harmonique d'espace

En ne considérant que le fondamental des harmoniques d'espace dans le rotor, la Figure II.5 montre la distribution du potentiel vecteur magnétique dans l'entrefer pour les nœuds situés sur les interfaces Γ_s et Γ_r . La différence entre ces deux potentiels est due essentiellement à l'effet de la denture du stator.

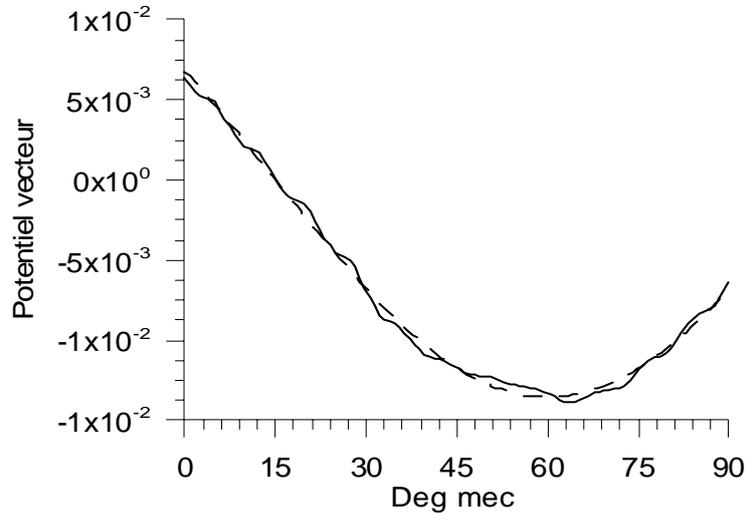


Fig. II. 5. Potentiel vecteur magnétique sur l'interface de couplage (Côté stator ligne continu, côté rotor ligne discontinu).

La Figure II.6 représente deux cartes de champ, relatives aux deux types de moteur après recomposition des deux domaines. Ces deux dernières figures montrent le couplage des lignes de champ au niveau de l'interface de couplage.

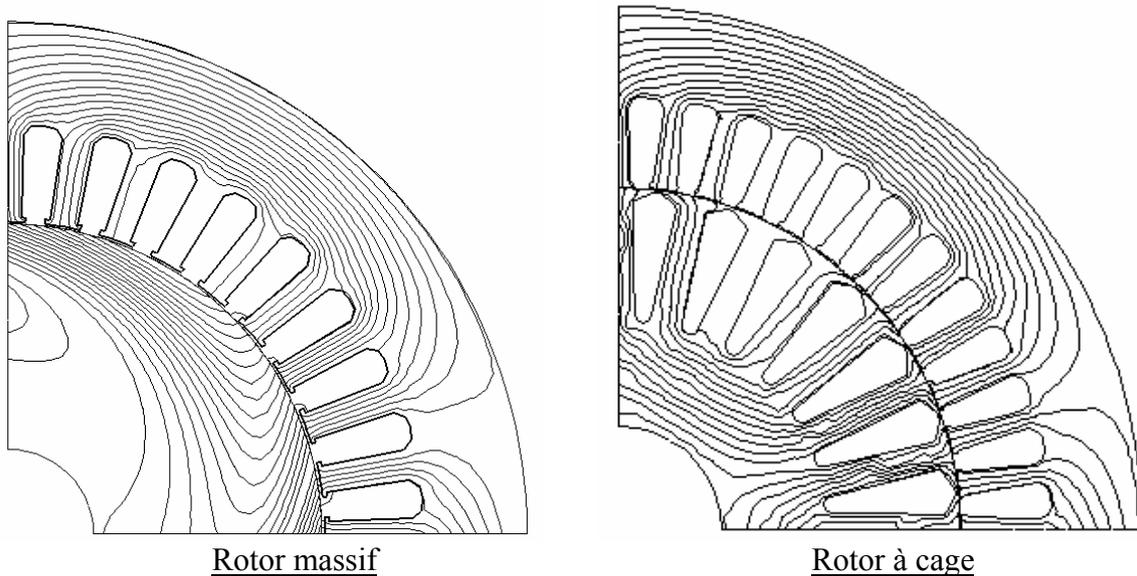
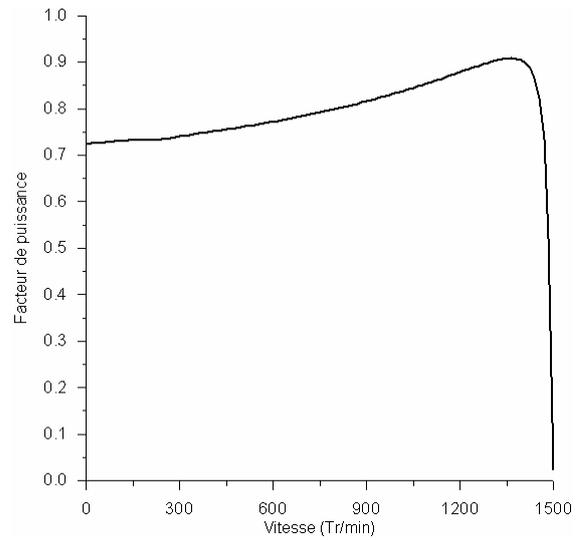
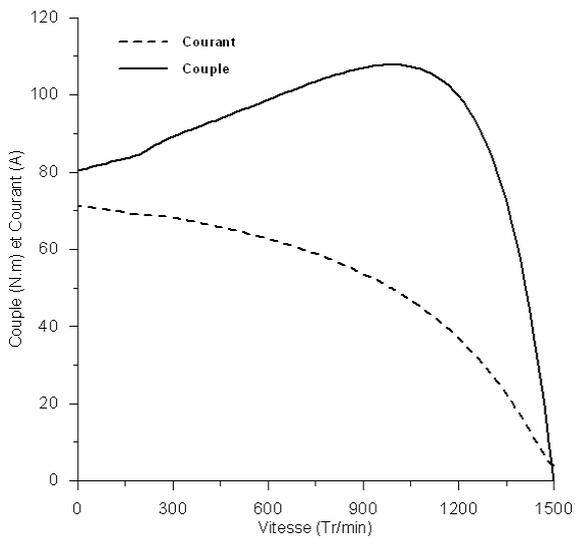
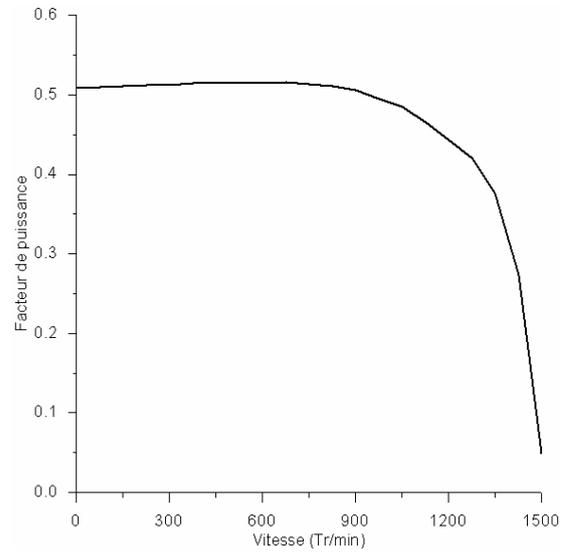
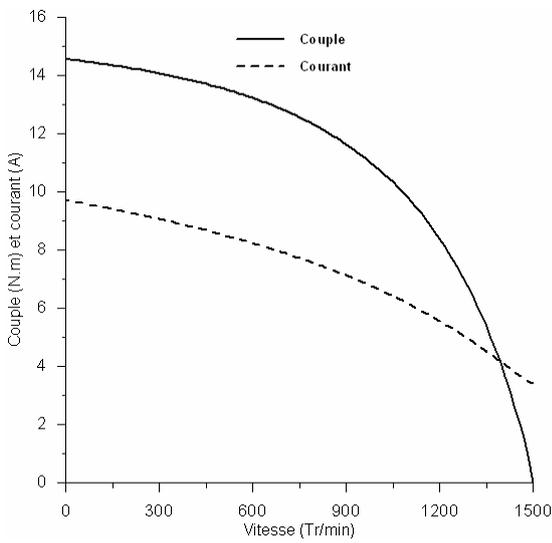


Fig. II.6. Cartes de champ pour le glissement nominal.

Sous la tension nominale (380V), la Figure II.7 représente, pour les deux types de moteurs testés, leurs caractéristiques couple-vitesse, courant statorique-vitesse et facteur de puissance-vitesse de rotation. Pour ce régime de fonctionnement, nous avons représenté (Fig. II.8), sous un pôle, les courants dans les anneaux et les barres rotoriques du moteur à cage à la vitesse nominale.

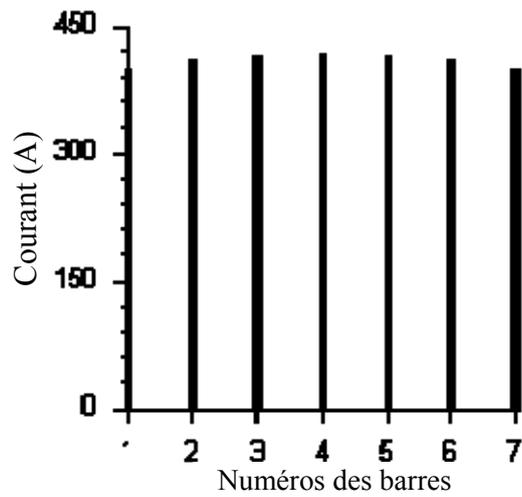
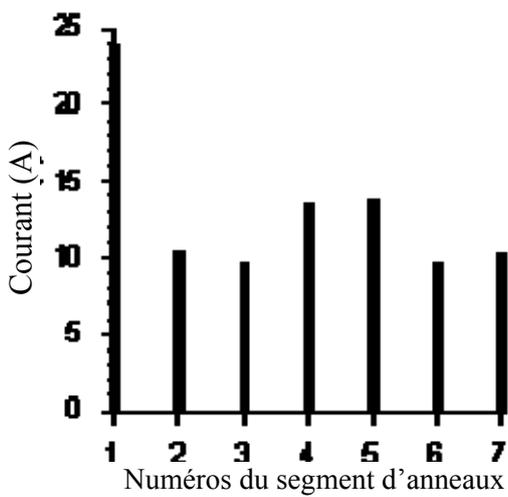


(a)- Rotor à cage.



(b)- Rotor massif

Fig. 7. Couple, courant et facteur de puissance en fonction de la vitesse.



(a)- Anneaux de court-circuit

(b) – Barres

Fig. 8. Courants dans la cage sur un pôle à vitesse nominale.

II.7.2 Considération des harmoniques d'espace

Dans les machines à induction, les bobinages les plus rencontrés dans la pratique sont à nombre entier d'encoches par pôle et par phase. La configuration du bobinage (à simple ou à double couches, bobines concentriques ou non, pas du bobinage, etc.) influe considérablement sur le spectre harmonique du potentiel vecteur créé dans l'entrefer de la machine. Ainsi, plusieurs harmoniques peuvent être nuls et d'autres peuvent être favorisés. Mais dans l'ensemble le nombre d'harmoniques d'espace significatifs, à considérer dans le calcul, est très réduit à cause du filtrage des encoches du stator. Nous présentons, sur la Figure II.9, les harmoniques d'espace du potentiel vecteur sur l'interface de couplage pour le cas de la machine à cage (Tab. II. 1). Le bobinage est réalisé avec des bobines concentriques à pas diamétral. On constate que les harmoniques prépondérants sont de rang (-5, 7, et -11). Les harmoniques de denture ($n=-23$ et $n=25$) sont aussi importants car ils ne dépendent pas de la configuration du type de bobinage.

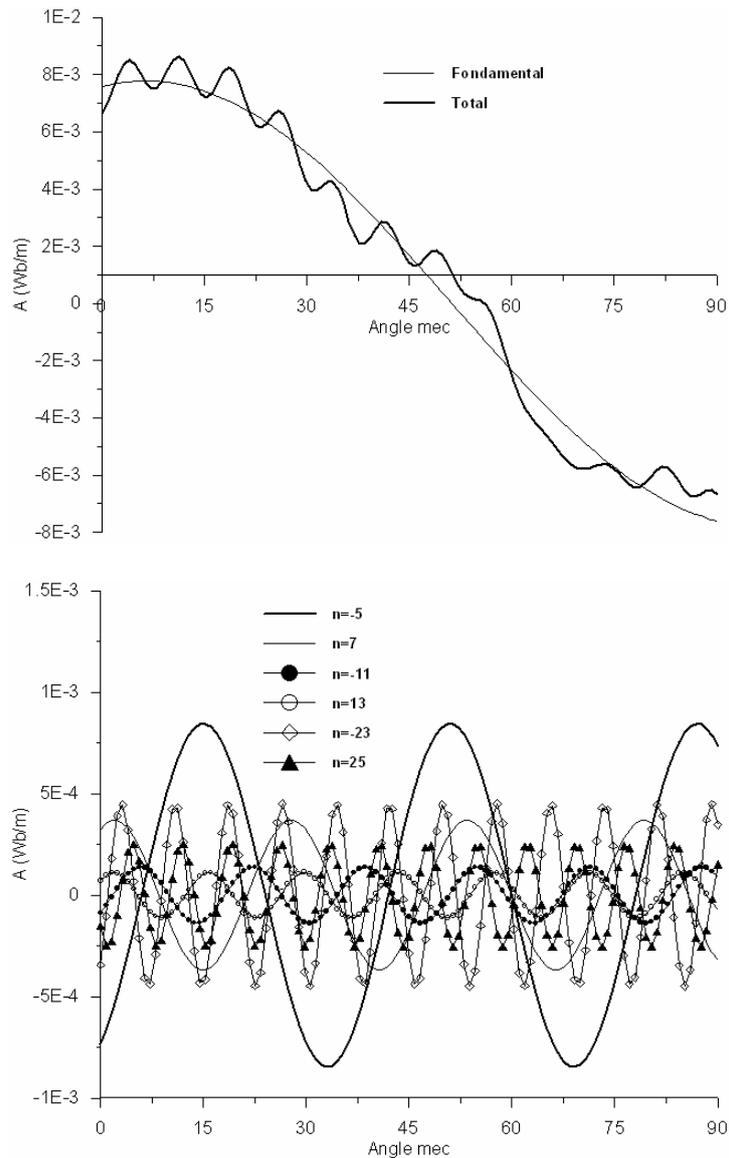


Fig. II.9. Harmoniques du potentiel vecteur sur l'interface de couplage.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'effet des harmoniques d'espace les plus significatifs sur les performances de la machine à cage. On représente sur les figures II.10 à II.13, respectivement, le courant de phase, le couple électromagnétique et les pertes par effet Joule dans le rotor.

Sur la caractéristique courant-vitesse (Fig. II.10) l'effet des harmoniques d'espace n'est pratiquement visible qu'aux alentours de (-300 tr/min), correspondant à la vitesse de rotation de l'harmonique 5. Cela est dû au fait qu'on a considéré un seul problème au stator. La caractéristique du couple électromagnétique (Fig. II.11) est fortement affectée par les harmoniques d'espace et en particulier par l'harmonique 5 qui tourne en sens inverse par rapport au fondamental. La comparaison avec le couple fondamental montre que l'effet des harmoniques d'espace est négligeable pour le fonctionnement normal de la machine. Cette influence tend à diminuer le couple lors du démarrage et à l'augmenter lors du freinage. L'ampleur des harmoniques du couple est quantifiée sur la figure II.12. La Figure II.13 représente la variation des pertes par effet Joule en fonction de la vitesse de rotation. Elle montre que les harmoniques d'espaces provoquent des pertes supplémentaires dans le rotor.

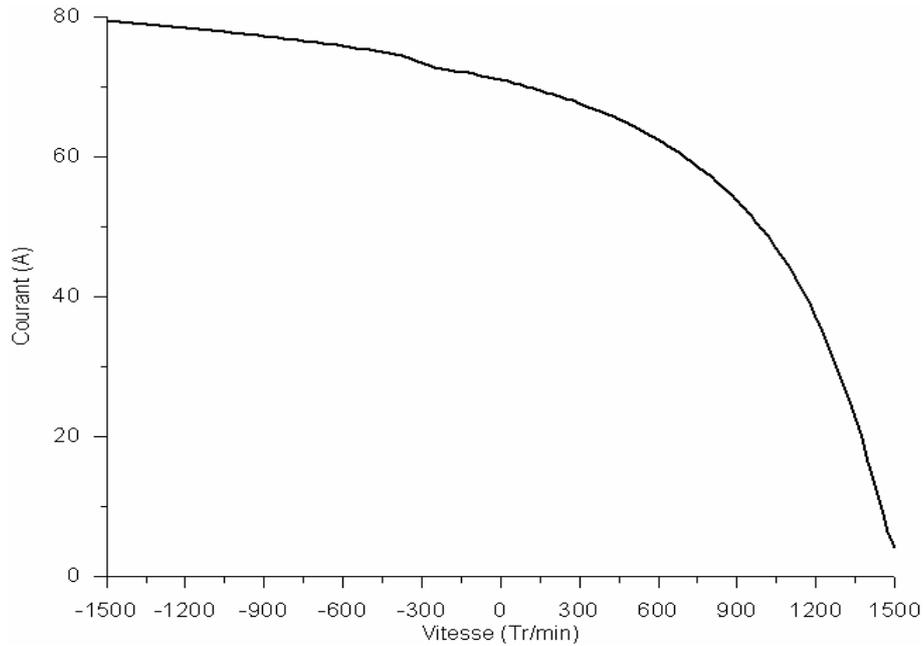


Fig. II.10. Courant de phase en fonction de la vitesse sous la tension nominale.

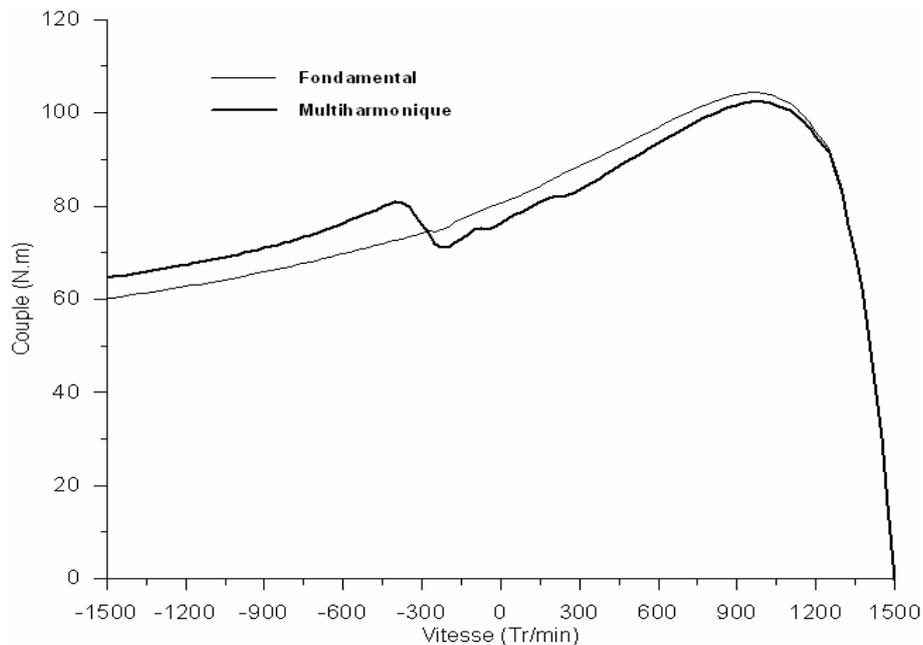


Fig. II.11. Couple développé avec prise en compte des harmoniques d'espace sous la tension nominale.

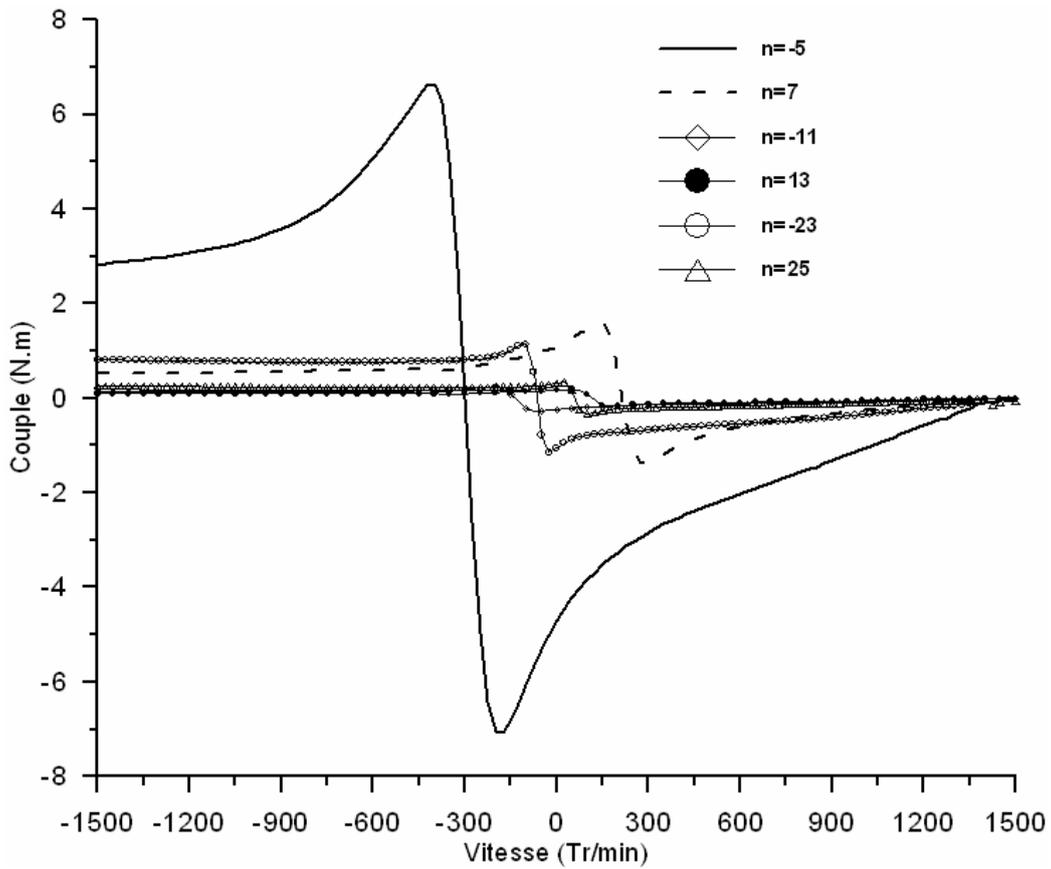


Fig. II.12. Harmoniques significatifs du couple sous la tension nominale.

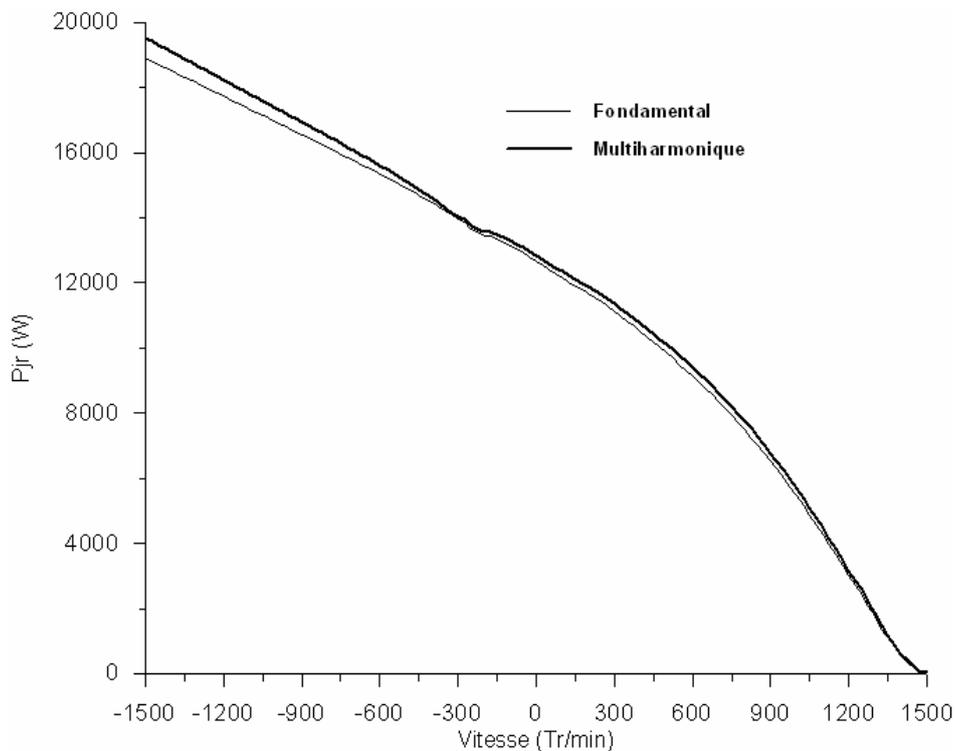


Fig. II.13. Pertes par effet Joule au rotor dues au fondamental et à tous les harmoniques sous la tension nominale.

Les figures (II.14 et II.15) représentent, respectivement, les cartes de champ à vide et à rotor bloqué après recombinaison des domaines. L'influence des champs harmoniques sur l'état magnétique de la machine est représentée sur les figures (II.16 et II.17) à rotor bloqué où l'effet des harmoniques est significatif. La Figure II.16, représentant les cartes de champ dues à l'ensemble des harmoniques

d'espace et du champ fondamental dans le rotor, montre clairement cette influence. La Figure II.17 représente les configurations correspondantes aux différents champs harmoniques. On constate que les lignes de champ harmoniques ont tendance à être refoulées vers la surface du rotor.

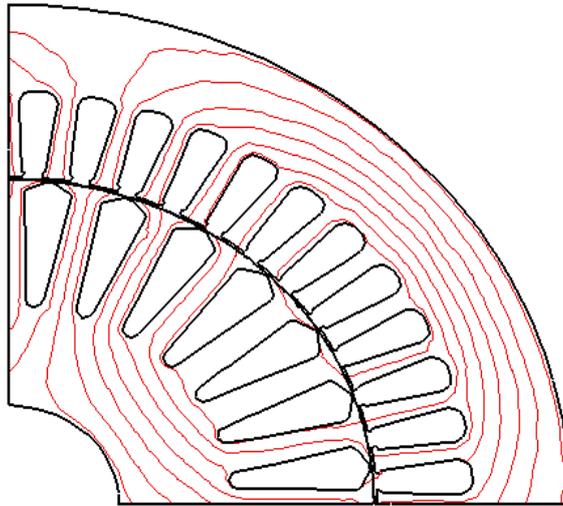


Fig. II.14. Carte de champ après recombinaison des domaines à vide

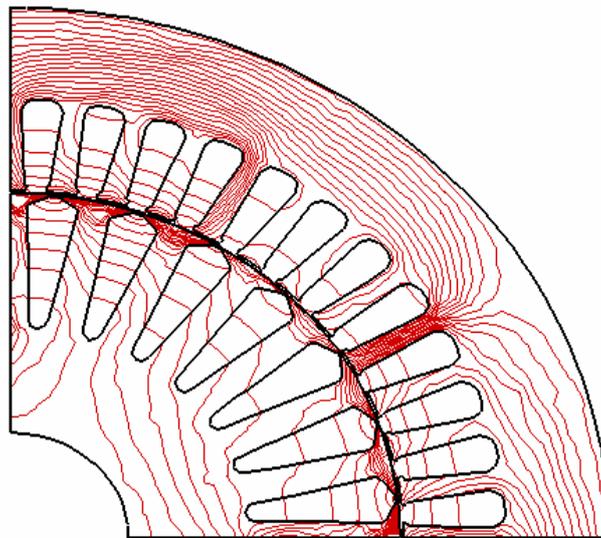


Fig. II.15 Carte de champ après recombinaison des domaines à $g = 1$.

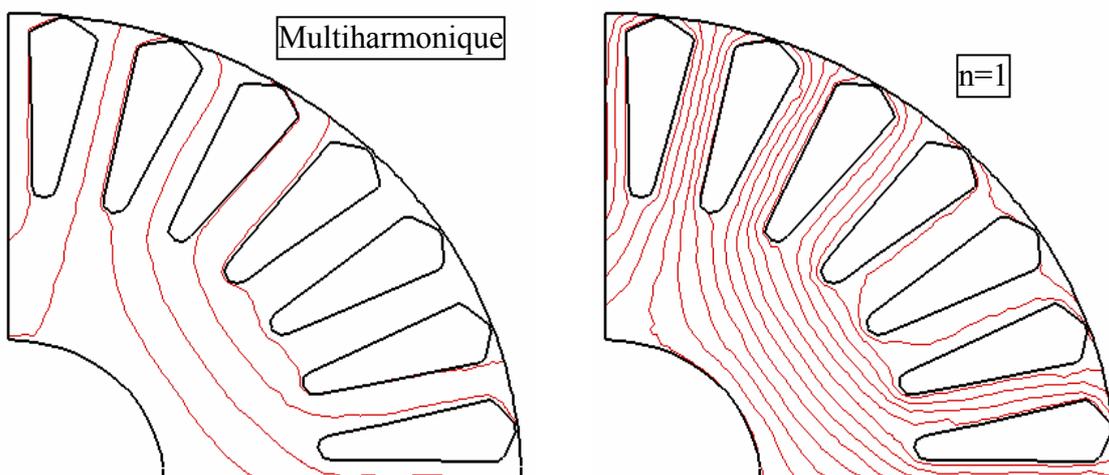


Fig. II.16 Cartes de champ dans le domaine du rotor.

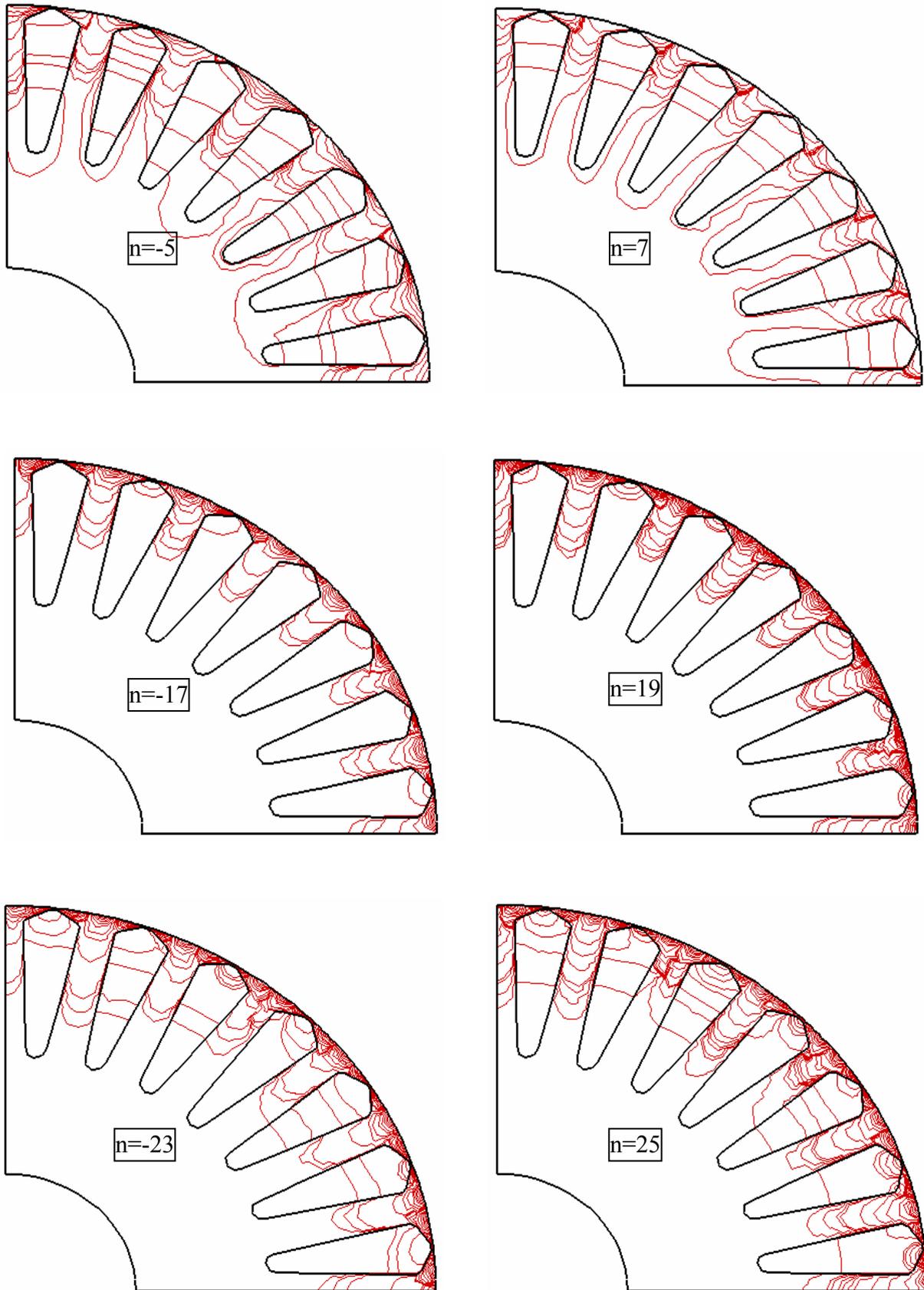


Fig. II.17 Cartes des champs harmoniques du rotor à $g = 1$.

II. 9. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une approche de la modélisation électromagnétique des machines à induction dans l'approximation sinusoïdale où le problème magnétique est directement couplé aux circuits électriques externes. Cette approche est basée sur le couplage des champs du stator et du rotor dans une interface située dans l'entrefer.

Dans une première étape, nous avons appliqué cette approche en supposant que le potentiel vecteur dans l'entrefer est à répartition spatiale sinusoïdale. Dans une deuxième étape nous avons étendu l'approche développée pour la prise en compte des champs harmoniques les plus significatifs. Dans ce calcul, la saturation magnétique est prise en compte par l'introduction d'une réductivité équivalente. A l'aide de cette méthode, les performances de deux types de machines à induction (rotor massif et à cage) sont calculées en régime harmonique.

Les résultats obtenus montrent que dans la zone de fonctionnement normal de la machine l'effet des harmoniques d'espace est faible. Alors, l'emploi de la technique classique de transformation de glissement peut être utilisée pour le calcul de ce type de machine même en forçant tous les harmoniques à tourner à la vitesse du fondamental. Mais, dès qu'il s'agit d'un fonctionnement à faible vitesse, comme lors d'un démarrage ou lors d'un freinage, la considération des harmoniques d'espaces devient indispensable.

La méthode de couplage d'interface développée, du fait de la simplicité de sa formulation mathématique et du fait qu'elle utilise des maillages séparés pour le domaine fixe (stator) et le domaine mobile (rotor), peut être facilement adaptée pour des calculs pas à pas dans le temps [93].

Dans le chapitre suivant nous allons reformuler l'approche du couplage d'interface pour le calcul des régimes transitoires des machines à induction.

Chapitre III

Modélisation électromagnétique des machines à induction en régime transitoire

III.1. Introduction

Malgré les diverses approches numériques développées, la modélisation du régime magnétodynamique dans les machines à induction reste une tâche difficile à cause de l'existence du mouvement relatif du rotor par rapport au stator qui rend leur couplage magnétique difficile [94]. Nous présentons dans ce chapitre le calcul électromagnétique des machines à induction en régime transitoire en utilisant la méthode de couplage d'interface développée dans le chapitre précédent. Dans une première étape nous nous intéressons au calcul du régime transitoire électrique à vitesse constante. Dans ce calcul le problème de la magnétodynamique est directement couplé aux circuits électriques de la machine. Dans une deuxième étape nous présentons le couplage de l'équation mécanique pour calculer les régimes transitoires mécaniques.

II.2. Modèle magnétodynamique couplé aux circuits électriques en régime transitoire

II.2.1. Domaine d'étude

Nous abordons cette étude dans l'hypothèse des états quasi-stationnaires (cf. §I.4.1) où le formalisme Lagrangien est adopté pour la représentation des équations de Maxwell. Nous restons dans les hypothèses du modèle magnétodynamique appliqué aux machines à induction défini dans le chapitre I (cf. § I. 6).

La machine à induction considérée est triphasée à p paires de pôles. Le stator est alimenté par une source de tension triphasée équilibrée dépendante du temps et de pulsation ω_s . Selon le concept du couplage d'interface, deux domaines avec des maillages séparés sont utilisés pour décrire la géométrie de la machine (Fig. III.1.) :

- Le domaine du stator Ω_s , composé des éléments du stator et d'une partie de l'entrefer;
- Le domaine du rotor Ω_r , composé des éléments du rotor et du reste de l'entrefer.

Une interface (Γ) commune à ces deux domaines est créée dans le milieu de l'entrefer à un rayon R . Le domaine du stator est associé à un référentiel fixe de coordonnées (r, θ) . Celui du rotor à un référentiel mobile, de coordonnées (r', θ') , tournant à la vitesse mécanique du rotor Ω . Le passage d'un référentiel à l'autre se fait directement à partir de l'Equation (II.1) reliant les coordonnées des deux repères.

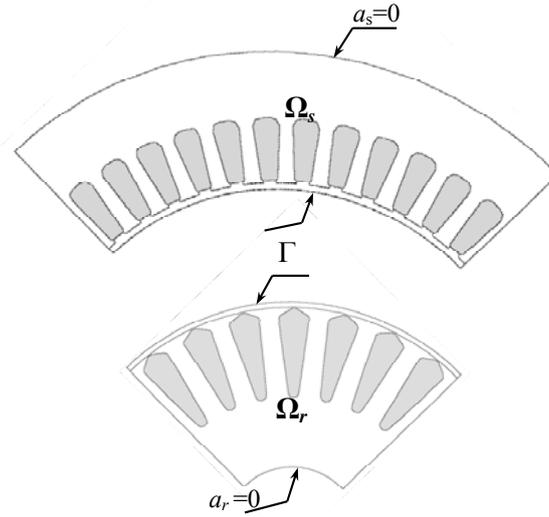


Fig. III.1. Définition des domaines du stator et du rotor sur un pôle.

III.2.2 Equations du champ et des circuits

Sous les hypothèses du modèle 2D où les courants, injectés dans le bobinage du stator ou induits dans le rotor, sont supposés dirigés suivant l'axe de la machine, le problème du champ magnétique dans le domaine d'étude est déterminé par un potentiel vecteur magnétique présentant une seule composante axiale. Noté a_s dans Ω_s et par a_r dans Ω_r , le potentiel vecteur magnétique, est gouverné par les équations aux dérivées partielles (I.44 et I.48).

- *Problème du stator :*

L'équation (I.44) définissant le problème magnétique du stator, est réécrite dans le domaine Ω_s sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_s \frac{\partial a_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_s \frac{\partial a_s}{\partial y} \right) + J_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{III.1})$$

Or, les courants injectés dans les encoches sont imposés par les tensions d'alimentation de la machine, donc à priori ces courants sont des inconnues à déterminer. Pour coupler l'équation du champ magnétique aux circuits électriques, le terme source du champ doit être exprimé en fonction des courants de phases. Etant donné que la densité de courant dans une encoche, de surface s_e , est supposée uniforme et si de plus, cette encoche porte n_e conducteurs, la densité volumique de courant peut être écrite alors en fonction la valeur instantanée des courants de phases comme suit :

$$J_s = \frac{n_e}{s_e} \beta (\alpha_a i_a + \alpha_b i_b + \alpha_c i_c) \quad (\text{III.2})$$

où β est un coefficient égal à (± 1) donnant le sens des conducteurs; $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$ qui définissent l'appartenance des encoches aux phases. En tenant compte de l'Equation (III.2), l'Equation (III.1) s'écrit en fonction des courants de phase comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_s \frac{\partial a_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_s \frac{\partial a_s}{\partial y} \right) + \frac{n_e}{s} \beta (\alpha_a i_a + \alpha_b i_b + \alpha_c i_c) = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{III.3})$$

A cette équation du champ, on associe l'équation du circuit électrique du stator donnée par (I.57) et réécrite sous la forme suivante :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \frac{d}{dt} \mathbf{I}_s + \left\{ l \frac{n_e}{s} \left(\iint_{s_+} \frac{\partial a_s}{\partial t} ds - \iint_{s_-} \frac{\partial a_s}{\partial t} ds \right) \right\} \quad (\text{III.4})$$

où s_+ et s_- représentent respectivement la section des conducteurs 'aller' et 'retour' de l'encoche considérée.

- *Problème du rotor :*

Dans le domaine du rotor (Ω_r), l'équation de diffusion du champ magnétique (I.48) est réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v_r \frac{\partial a_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_r \frac{\partial a_r}{\partial y} \right) - \sigma \left(\frac{\partial a_r}{\partial t} - \frac{u_b}{l} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_r \quad (\text{III.5})$$

Equation à laquelle on adjoint les équations du circuit électrique de la cage du rotor.

L'Equation (I.61) se réécrit, pour toutes les barres de la cage, sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{U}_b = \mathbf{R}_e \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_e \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_b \quad (\text{III.6})$$

où \mathbf{R}_e et \mathbf{I}_e sont des matrices diagonales représentant respectivement les résistances et les inductances des anneaux de court-circuit. \mathbf{M} , est une matrice de connexion de dimension $(n_b \times n_b)$ où n_b est le nombre considéré de barres. L'Equation (I.60), donnant le courant dans une barre, se réécrit pour l'ensemble des barres de la cage comme suit :

$$\mathbf{I}_b = - \left\{ \sigma \iint_{s_b} \frac{\partial a_r}{\partial t} ds_b \right\} + \left\{ \frac{1}{l} \iint_{s_b} \sigma ds_b \right\} \mathbf{U}_b \quad (\text{III.7})$$

Les deux équations (III.6) et (III.7) permettent de réaliser le couplage du circuit électrique de la cage avec l'équation de diffusion du champ dans le domaine du rotor.

Le problème magnétique, donné par les équations (III.3) et (III.5), est complètement défini en lui associant les conditions aux limites de type Dirichlet sur les frontières extérieures du domaine (Fig. III.1) ainsi que les conditions de passage à travers l'interface de couplage (Γ), à savoir :

$$a_r(R, \theta', t) = a_s(R, \theta, t) \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{III.8})$$

$$\left. \frac{\partial a_r(r, \theta', t)}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial a_s(r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=R} \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{III.9})$$

Ainsi les équations (III.3) à (III.5), (III.7), (III.9) et (III.10) définissent un problème complet de type magnétodynamique couplé au circuit électrique. Le potentiel vecteur magnétique dans les deux domaines considérés et les courants dans les circuits électriques peuvent être déterminés en ajoutant les conditions initiales.

III.3. Formulation en éléments finis des équations du champ et des circuits

La formulation développée précédemment nous amène à la résolution simultanée des équations de la magnétodynamique couplées aux équations des circuits électriques. La méthode utilisée pour résoudre ce type de problème est celle des éléments finis qui consiste d'abord à la discrétisation des équations dans l'espace et dans le temps [95].

III.3.1 Discrétisation spatiale des équations

L'application de la méthode de Galerkin au système d'équations (III.3) et (III.5), en adoptant des éléments triangulaire de premier ordre, permet d'avoir les formes discrétisées des équations du champ dans les deux domaines considérés sachant que ces équations sont obtenues en considérant les conditions homogènes de Neumann sur l'interface de couplage Γ .

a- Equations dans le domaine du stator

La forme discrétisée de l'Equation (III.3), dans le domaine du stator Ω_s , est représentée par l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{K}_s \mathbf{A}_s - \mathbf{C}_s \mathbf{I}_s = 0 \quad (\text{III.10})$$

où \mathbf{K} est la matrice masses du stator, où \mathbf{A}_s représente les valeurs nodales du potentiel vecteur de tous les nœuds du stator, où \mathbf{C}_s est une matrice de connexion donnée en annexe et où \mathbf{I}_s représente le vecteur des courants des trois phases du stator. L'Equation (III.10) mets en évidence le couplage de l'équation du champ à celle du circuit par le terme courant de phase. La résolution de cette équation ne peut donc se faire sans l'Equation (III.4) du circuit du stator. La forme discrétisée, du terme intégral de cette équation, donne :

$$\mathbf{D}_s \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_s + \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_s = \mathbf{V}_s \quad (\text{III.11})$$

Notant que la matrice \mathbf{D}_s est reliée à \mathbf{C}_s par :

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{I} \mathbf{C}_s^T \quad (\text{III.12})$$

Le système couplé au niveau du stator est donc obtenu par la combinaison des équations (III.10) et (III.11).

b- Equations dans le domaine du rotor

La discrétisation de l'Equation (III.5), dans le domaine du rotor Ω_r , conduit à l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{K}_r \mathbf{A}_r + \mathbf{T} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r - \mathbf{C}_r \mathbf{U}_b = 0 \quad (\text{III.13})$$

où \mathbf{K}_r est la matrice masses du rotor ; \mathbf{A}_r représente les valeurs nodales du potentiel vecteur de tous les nœuds du rotor ; \mathbf{C}_r est une matrice de connexion donnée en annexe et \mathbf{T} représente la matrice conductivité du rotor. L'Equation (III.13) mets en évidence le couplage de l'équation du champ à celle du circuit par le terme des différences de potentiels aux bornes des barres de la cage. La résolution de cette équation ne peut donc se faire sans les équations du circuit électrique de la cage. La forme discrétisée des termes intégral de l'Equation de circuit (III.7) s'écrit ainsi :

$$-\mathbf{D}_r \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r + \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{U}_b = \mathbf{I}_b \quad (\text{III.14})$$

Notant que la matrice \mathbf{D}_r est reliée à \mathbf{C}_r par :

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{I} \mathbf{C}_r^T \quad (\text{III.15})$$

\mathbf{R}_b est une matrice diagonale représentant les résistances des barres de la cage. Le système couplé au niveau du rotor est donc obtenu par la combinaison des équations (III.13), (III.6) et (III.14).

III.3.2 Discrétisation des équations dans le temps

Dans le cas général de régimes transitoires électromagnétiques, on doit résoudre un problème d'évolution que l'on traite par une procédure pas à pas dans le temps. Pour obtenir l'évolution dans le temps des grandeurs électromagnétique, représentées par le vecteur inconnu \mathbf{X} , on doit résoudre un système dont la forme générale est la suivante [96] :

$$\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{T} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} = \mathbf{P} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}^0 \quad (\text{III.16})$$

L'intégration d'une telle équation différentielle est effectuée généralement par des méthodes directes basées sur l'algorithme d'Euler [97], [98], [99]. Cet algorithme consiste à approximer la dérivée temporelle par l'expression suivante [45] :

$$\beta \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} \Big|^{t+\Delta t} + (1-\beta) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} \Big|^t = \frac{\mathbf{X}^{t+\Delta t} - \mathbf{X}^t}{\Delta t} \quad (\text{III.17})$$

Suivant la valeur de β , le schéma de discrétisation utilisé est dit :

- Explicite $\beta = 0$;
- Implicite $\beta = 1$;
- Semi implicite $0 < \beta < 1$. $\beta = 0.5$ correspond au schéma de Cranck-Nicholson.

En utilisant l'Equation (III.17), le système d'équations (III.16) s'écrit entre les instants t et $t+\Delta t$ comme suit :

$$\left(\beta \mathbf{Q} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{T} \right) \mathbf{X}^{t+\Delta t} = \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{T} - (1-\beta) \mathbf{Q} \right) \mathbf{X}^t + \mathbf{P}^t \quad (\text{III.18})$$

Le schéma implicite est le plus simple à mettre en œuvre. En effet, pour calculer $\mathbf{X}^{t+\Delta t}$, ce schéma ne nécessite pas la connaissance de \mathbf{X}^t dans les parties conductrices, ce qui n'est pas le cas pour les autres schémas. Un second avantage de ce dernier schéma est qu'il est inconditionnellement stable [97], [100]. Son inconvénient réside dans le choix du pas de temps à adopter surtout pour le traitement des problèmes raides. Dans notre cas, nous adoptons le schéma d'Euler implicite pour discrétiser dans le temps les équations de diffusion du champ magnétique et des circuits électriques. Dans ces conditions, l'Equation (III.17) s'écrit, pour $\beta = 1$, ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}^{t+\Delta t} - \mathbf{X}^t}{\Delta t} \quad (\text{III.19})$$

Nous appliquons maintenant ce schéma de discrétisation aux équations, relatives au champ magnétique et aux circuits électriques, définies précédemment.

a- Problème du stator

Dans le domaine du stator, il s'agit juste de discrétiser l'Equation (III.11) du circuit électrique du stator. En considérant l'Equation (III.19), la dérivée du vecteur courant \mathbf{I}_s et celle du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A}_s s'écrivent ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{I}_s^{t+\Delta t} - \mathbf{I}_s^t}{\Delta t} \quad (\text{III.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_s = \frac{\mathbf{A}_s^{t+\Delta t} - \mathbf{A}_s^t}{\Delta t} \quad (\text{III.21})$$

L'Equation du champ (III.10) à l'instant $t+\Delta t$ s'écrit :

$$\mathbf{K}_s \mathbf{A}_s^{t+\Delta t} - \mathbf{C}_s \mathbf{I}_s^{t+\Delta t} = 0 \quad (\text{III.22})$$

En injectant les équations (III.20) et (III.21) dans l'Equation (III.11), nous obtenons la forme discrétisée de l'équation électrique du stator :

$$-\frac{\mathbf{C}_s}{\Delta t} \mathbf{A}_s^{t+\Delta t} - \frac{1}{l} \left(\mathbf{R}_s + \frac{\mathbf{I}_s}{\Delta t} \right) \mathbf{I}_s^{t+\Delta t} = -\frac{\mathbf{V}_s}{l} - \frac{\mathbf{C}_s}{\Delta t} \mathbf{A}_s^t - \frac{\mathbf{I}_s}{l \Delta t} \mathbf{I}_s^t \quad (\text{III.23})$$

qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$-\mathbf{C}_s \mathbf{A}_s^{t+\Delta t} - \mathbf{Z}_s \mathbf{I}_s^{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{se}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.24})$$

avec:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{se}^{t+\Delta t} = -\left(\frac{\Delta t}{l} \mathbf{V}_s^{t+\Delta t} + \mathbf{C}_s \mathbf{A}_s^t + \frac{\mathbf{I}_s}{l} \mathbf{I}_s^t \right) \\ \mathbf{Z}_s = \frac{\Delta t}{l} \left(\mathbf{R}_s + \frac{\mathbf{I}_s}{\Delta t} \right) \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

La combinaison des équations (III.22) et (III.24) permet d'avoir le problème couplé dans le domaine Ω_s .

b- Problème du rotor

Dans le domaine du rotor, il s'agit de discrétiser les équations de diffusion et de circuit électrique de la cage. En considérant l'Equation (III.19), la dérivée du courant \mathbf{I}_b et celle du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A}_r s'écrivent comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{I}_b^{t+\Delta t} - \mathbf{I}_b^t}{\Delta t} \quad (\text{III.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r = \frac{\mathbf{A}_r^{t+\Delta t} - \mathbf{A}_r^t}{\Delta t} \quad (\text{III.27})$$

En injectant l'Equation (III.27) dans l'Equation (III.13), la forme discrétisée de l'équation de diffusion dans le rotor obtenue est la suivante :

$$\left(\mathbf{K}_r + \frac{\mathbf{T}}{\Delta t} \right) \mathbf{A}_r^{t+\Delta t} - \mathbf{C}_r \mathbf{U}_b^{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{T}}{\Delta t} \mathbf{A}_r^t \quad (\text{III.28})$$

En posant que :

$$\mathbf{R}_r = \mathbf{K}_r + \frac{\mathbf{T}}{\Delta t} \quad (\text{III.29})$$

L'Equation (III.28) s'écrit alors:

$$\mathbf{R}_r \mathbf{A}_r^{t+\Delta t} = \mathbf{C}_r \mathbf{U}_b^{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{T}}{\Delta t} \mathbf{A}_r^t \quad (\text{III.30})$$

La forme discrétisée de l'Equation (III.6), en tenant compte de l'Equation (III.26), est donnée par :

$$-\frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{U}_b^{t+\Delta t} = \left(\mathbf{R}_e + \frac{l_e}{\Delta t} \right) \mathbf{I}_b^{t+\Delta t} - \frac{l_e}{\Delta t} \mathbf{I}_b^t \quad (\text{III.31})$$

La forme discrétisée de l'Equation (III. 14) est donnée, en tenant compte de l'Equation (III. 27), par :

$$-\frac{\mathbf{C}_r}{\Delta t} \mathbf{A}_r^{t+\Delta t} + \frac{1}{l} \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{U}_b^{t+\Delta t} = \frac{1}{l} \mathbf{I}_b^{t+\Delta t} \quad (\text{III.32})$$

La combinaison des Eqs. (III.31) et (III.32) permet d'éliminer la variable $\mathbf{I}_b^{t+\Delta t}$ et d'exprimer l'équation électrique du rotor en fonction uniquement de $\mathbf{U}_b^{t+\Delta t}$. A partir de l'Eq. (III.31), sachant que les matrices des paramètres des anneaux de court-circuit sont diagonales, on peut écrire :

$$\mathbf{I}_b^{t+\Delta t} = \left(-\frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{U}_b^{t+\Delta t} + \frac{l_e}{\Delta t} \mathbf{I}_b^t \right) \frac{1}{(R_e + \frac{l_e}{\Delta t})} \quad (\text{III.33})$$

En injectant l'Eq. (III.33) dans l'Eq. (III.32), on obtient l'expression suivante :

$$-\mathbf{C}_r \mathbf{A}_r^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{l} \left(\mathbf{R}_b^{-1} + \frac{1}{2(R_e + \frac{l_e}{\Delta t})} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \right) \mathbf{U}_b^{t+\Delta t} = -\mathbf{C}_r \mathbf{A}_r^t + \frac{l_e}{l(R_e + \frac{l_e}{\Delta t})} \mathbf{I}_b^t \quad (\text{III.34})$$

que nous réécrivons sous la forme compacte suivante :

$$-\mathbf{C}_r \mathbf{A}_r^{t+\Delta t} + \mathbf{Z}_r \mathbf{U}_b^{t+\Delta t} = -\mathbf{C}_r \mathbf{A}_r^t + \mathbf{Z}_e \mathbf{I}_b^t \quad (\text{III.35})$$

avec:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_r = \frac{\Delta t}{l} \left(\mathbf{R}_b^{-1} + \frac{1}{2(R_e + \frac{l_e}{\Delta t})} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \right) \\ \mathbf{Z}_e = \frac{l_e}{l(R_e + \frac{l_e}{\Delta t})} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

Ainsi le système couplé du domaine du rotor $\mathbf{\Omega}_r$, est obtenu directement par la combinaison des Eqs. (III.30) et (III.35).

III.4 Prise en compte du mouvement et du couplage du champ dans l'entrefer

Les deux modèles relatifs au stator et au rotor définis précédemment doivent être couplés sur l'interface $\Gamma = \Gamma_s = \Gamma_r$. Il a été déjà démontré que dans la technique de couplage d'interface, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange ou la technique de transformation de variables, qu'introduire une contrainte de couplage comme :

$$a_r(R, \theta', t) - a_s(R, \theta, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{III.37})$$

suffit pour restaurer les conditions de continuité du champ magnétique [101].

Dans la technique de transformation de variables, qui permet de réduire le nombre d'inconnues dans le domaine étudié, l'équation de couplage représentant la contrainte (III.37) est obtenue par une décomposition en série de Fourier du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ . Cette équation de couplage permet de tenir compte implicitement du mouvement du rotor.

La symétrie magnétique du problème engendre un potentiel vecteur magnétique périodique à $2p$ paires de pôles dans l'entrefer. Sur l'interface Γ_s et par rapport au repère du stator, le développement en séries de Fourier du potentiel issu du problème statorique $a_s(R, \theta, t)$ à l'instant t , est de la forme suivante :

$$a_s(R, \theta, t) = \sum_n \left(C_{cn}^s(t) \cos(np\theta) + C_{sn}^s(t) \sin(np\theta) \right) \quad (\text{III.38})$$

où $C_{cn}^s(t)$ et $C_{sn}^s(t)$ sont les coefficients de Fourier d'ordre n . Ils sont exprimés, à un instant t , en fonction des valeurs nodales \mathbf{A}_s^Γ sur l'interface Γ_s comme suit :

$$\begin{aligned} C_{cn}^s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} a_s(R, \theta, t) \cos(np\theta) d\theta \equiv \mathbf{L}_{cn}^\top \mathbf{A}_s^\Gamma \\ C_{sn}^s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} a_s(R, \theta, t) \sin(np\theta) d\theta \equiv \mathbf{L}_{sn}^\top \mathbf{A}_s^\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

où $\mathbf{L}_{c,sn}$ est un vecteur dépendant des coordonnées des nœuds sur l'interface Γ_s . La continuité du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ_s et le passage au repère rotorique par la transformation des coordonnées (II.1) permettent d'écrire, sur l'interface Γ_r :

$$a_r(R, \theta', t) = \sum_n \left(\mathbf{L}_{cn}^\top \cos(np\theta' + \Omega t) + \mathbf{L}_{sn}^\top \sin(np\theta' + \Omega t) \right) \mathbf{A}_s^\Gamma \quad (\text{III.40})$$

Cette équation montre que le potentiel sur l'interface du rotor obtenu, en fonction de celui sur l'interface du stator, est fonction de la vitesse de rotation du rotor. Donc le mouvement du rotor est implicitement contenu dans cette équation de couplage. Ainsi, les valeurs nodales, sur l'interface Γ_r , du potentiel vecteur du rotor sont obtenues en fonction de celles du stator en utilisant l'équation :

$$\mathbf{A}_r^\Gamma = \mathbf{G}^t \mathbf{A}_s^\Gamma \quad (\text{III.41})$$

où \mathbf{G}^t est une matrice fonction du temps et des coordonnées des nœuds et de la position du rotor, exprimée par :

$$\mathbf{G}^t = \sum_n \left(\mathbf{L}_{cn}^\top \cos(np\theta' + \Omega t) + \mathbf{L}_{sn}^\top \sin(np\theta' + \Omega t) \right) \quad (\text{III.42})$$

L'Equation de couplage (III.41) est introduite dans la résolution des équations du champ magnétique couplées aux équations des circuits par la technique de transformation de variables. En plus, cette équation nous permet de tenir compte directement du mouvement du rotor.

III. 5. Couplage des problèmes statorique et rotorique

Le traitement du couplage d'interface, comme on l'a déjà montré, nécessite la séparation des variables d'interface de l'ensemble des variables du reste du domaine. Alors, on écrit :

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s-\Gamma} \\ \mathbf{A}_s^\Gamma \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r^\Gamma \\ \mathbf{A}_{r-\Gamma} \end{bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

Les indices ($s-\Gamma$) et ($r-\Gamma$) dénotent les valeurs nodales du potentiel vecteur du stator et du rotor sans celles sur l'interface de couplage (Γ). Les matrices masses du stator et du rotor s'écrivent aussi sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{s\Gamma} \\ \mathbf{K}_{\Gamma s} & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{rr} & \mathbf{R}_{r\Gamma} \\ \mathbf{R}_{\Gamma r} & \mathbf{R}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{rr} & \mathbf{T}_{r\Gamma} \\ \mathbf{T}_{\Gamma r} & \mathbf{T}_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{III.44})$$

En tenant compte de cette séparation, les équations du champ (III.22) et (III.30), relatives aux domaines du stator et du rotor, sont réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \\ \mathbf{A}_r \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.45})$$

avec:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{T}}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \\ \mathbf{A}_r \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.46})$$

La résolution du système d'équations (III.45) nécessite des variables indépendantes, mais l'Equation de couplage (III.41) montre que les vecteurs (\mathbf{A}_s^Γ et \mathbf{A}_r^Γ) ne sont pas indépendants. La technique de transformations de variables, consistant à remplacer les valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique sur l'interface du rotor par celles de l'interface du stator, permet d'éliminer les variables dépendantes. Ainsi, une matrice de transformation \mathbf{S} est utilisée pour transformer le système d'équations (III.45) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \\ \mathbf{A}_r \end{bmatrix}^t = \mathbf{S}^t \mathbf{A}'^t \quad (\text{III.47})$$

où:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s-\Gamma} \\ \mathbf{A}_{s\Gamma} \\ \mathbf{A}_{r-\Gamma} \end{bmatrix}^t$$

est le vecteur réduit aux variables indépendantes, des valeurs nodales du potentiel vecteur magnétique du stator est du rotor sans celles sur l'interface du rotor Γ_r . La matrice \mathbf{S} est donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}' & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

A l'aide de l'Eq. (III.47), le système d'équations (III.45) s'écrit ainsi :

$$\mathbf{S}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} \mathbf{S} \mathbf{A}' = \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

En fonction des sub-matrices, relatives aux contributions séparées des nœuds d'interface avec ceux du domaine, le système d'équations (III.49) est exprimé par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{s\Gamma} & 0 \\ \mathbf{K}_{\Gamma s} & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{G} & \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{\Gamma r} \\ 0 & \mathbf{G} \mathbf{R}_{r\Gamma} & \mathbf{R}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s-\Gamma} \\ \mathbf{A}_{s\Gamma} \\ \mathbf{A}_{r-\Gamma} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_r \\ \mathbf{F}_{r-\Gamma} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.50})$$

Le second terme de l'Equation (III.50), en tenant compte de l'Eq. (III.46) après transformation, donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_r \\ \mathbf{F}_{r-\Gamma} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^T \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{G}^t & {}^T \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{\Gamma r} \\ 0 & \mathbf{T}_{r\Gamma} \mathbf{G}^t & \mathbf{T}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s \\ \mathbf{A}_{s\Gamma} \\ \mathbf{A}_{r-\Gamma} \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.51})$$

En injectant l'Eq. (III.51) dans l'Eq. (III.50), on obtient la forme compacte de l'équation globale du champ magnétique (III.52), exprimée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C}_s & -\mathbf{C}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{I}_s \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \mathbf{T}' \mathbf{A}'^t \quad (\text{III.52})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{s\Gamma} & 0 \\ \mathbf{K}_{\Gamma s} & \mathbf{K}_{\Gamma\Gamma} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{G} & \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{\Gamma r} \\ 0 & \mathbf{G} \mathbf{R}_{r\Gamma} & \mathbf{R}_{rr} \end{bmatrix} \\ \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^T \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{G}^t & {}^T \mathbf{G}^{t+\Delta t} \mathbf{T}_{\Gamma r} \\ 0 & \mathbf{T}_{r\Gamma} \mathbf{G}^t & \mathbf{T}_{rr} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{III.53})$$

III.6 Equations globales du problème magnétique couplé aux circuits électriques

L'association des équations (III.24) et (III.35) des circuits du stator et du rotor avec celle du champ (III.52) conduit au système global représentant le couplage du problème magnétique avec les circuits électriques. Le système algébrique final à résoudre est donné par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{C}_s & -\mathbf{C}_r \\ -\mathbf{C}_s^T & \mathbf{Z}_s & 0 \\ -\mathbf{C}_r^T & 0 & \mathbf{Z}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{I}_s \\ \mathbf{U}_b \end{bmatrix}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}' & 0 & 0 \\ -\mathbf{C}_s & -\frac{\mathbf{I}_s}{l} & 0 \\ -\mathbf{C}_r & 0 & \mathbf{Z}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_b \end{bmatrix}^t - \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.54})$$

Ce système d'équations est non linéaire car la matrice \mathbf{B} , issue du modèle éléments finis, dépend de la reluctivité magnétique des matériaux du stator et du rotor. Cet état magnétique change d'un instant à l'autre du fait que les grandeurs électromagnétiques changent dans le temps. Sous forme compacte, le système d'équations (III.54) s'écrit ainsi :

$$\mathbf{Q}\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^t - \mathbf{P}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.55})$$

où \mathbf{X} , \mathbf{P} représentent respectivement le vecteur des variables et le vecteur des sources d'excitation. La matrice \mathbf{Q} est réelle, symétrique et creuse. Cependant, elle dépend de la variable \mathbf{X} du fait que le système est non linéaire. Pour montrer cette dépendance, l'Equation (III.55) peut se mettre sous la forme suivante :

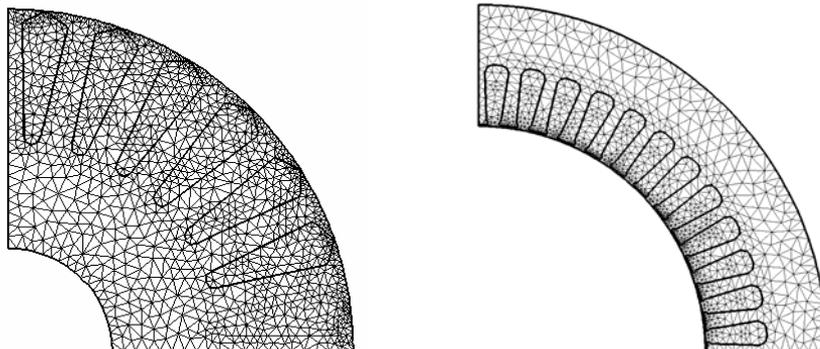
$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}^t)\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^t - \mathbf{P}^{t+\Delta t} \quad (\text{III.56})$$

La méthode utilisée pour la résolution de ce système et le traitement de la saturation sont donnés en annexe C.

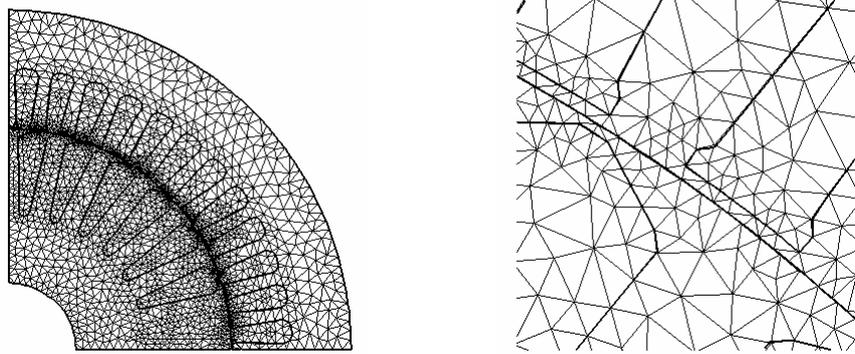
III.7 Application à l'étude du régime transitoire électrique

On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude du régime transitoire électrique où la vitesse de la machine est considérée constante. Cela peut avoir lieu lorsque la machine fonctionne en régime permanent, à une vitesse de rotation donnée Ω et où on coupe brusquement l'alimentation durant un intervalle de temps suffisant pour annuler les courants dans les phases sans changement de vitesse. La machine continue à tourner avec son inertie, ensuite on réalimente la machine.

Nous présentons quelques simulations obtenues avec le modèle développé. Ces simulations sont effectuées sur la machine à cage présentée au chapitre II. Sur les Figs. III.2 (a et b), nous avons représentés respectivement, les maillages séparés des domaines du stator et du rotor et le maillage global sur un pôle de la machine dans le calcul par éléments finis.



a)- Maillages séparés des domaines (Ω_r et Ω_s) sur un pôle.



b)- Maillage globale sur un pôle.

Fig. III.2 Maillages utilisés dans le calcul par éléments finis.

III.7.1 Simulation du régime transitoire électrique avec le premier harmonique d'espace

On présente, dans ce qui suit, des résultats de simulations reposant sur l'hypothèse que le premier harmonique d'espace est largement prépondérant dans l'entrefer de la machine. Cette hypothèse peut être justifiée par un choix judicieux du pas de bobinage qui rend les harmoniques de rang supérieur négligeable devant l'amplitude du fondamental. Dans ce calcul, la machine est alimentée par un réseau de tensions triphasées équilibrées.

a)- Fonctionnement à vide

A vide, sous la tension nominale de 380 V entre phases, nous avons présenté sur les Figs. III.3 à III.6, les courants de phases, le couple électromagnétique, les pertes par effet Joule rotoriques et la carte du champ en régime établi.

Le courant absorbé par la machine en régime permanent (Fig. III.3) a une forme d'onde qui n'est pas tout à fait sinusoïdale. Cela est dû essentiellement à l'effet de la saturation de la machine. Le couple électromagnétique et les pertes par effet Joule dans le rotor, à vide, sont pratiquement nuls en régime permanent (Figs. III.4 et III.5). La carte de champ (Fig. III. 6) à vide ($t = 0.16$ s), montre le couplage des lignes de champ au niveau de l'entrefer.

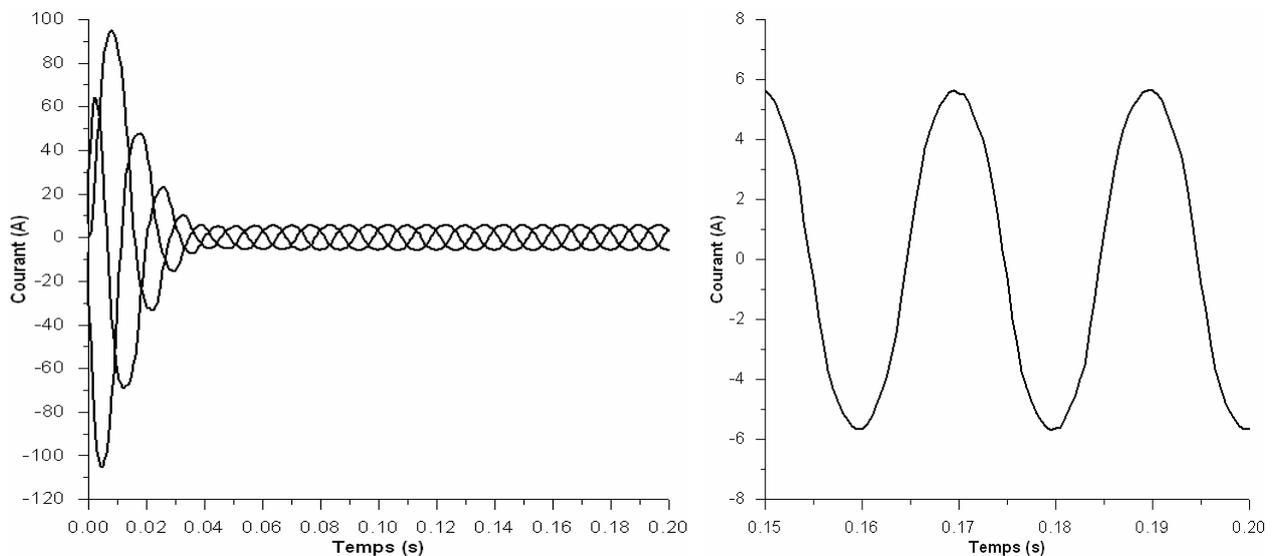


Fig. III.3 Courants des trois phases à 1500 tr/min.

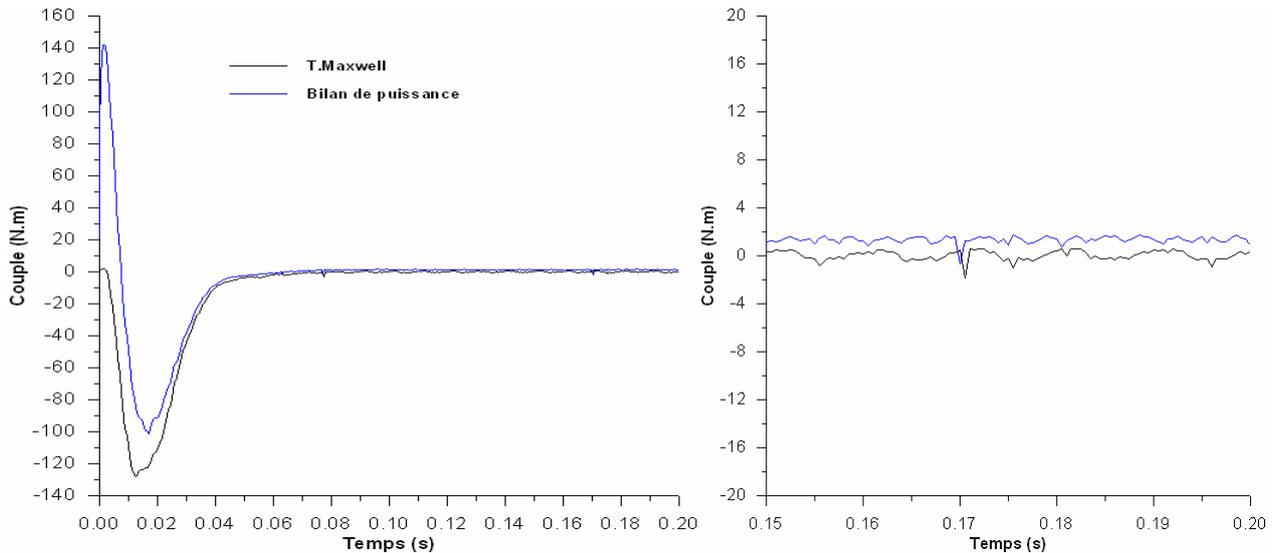


Fig. III.4 Couple électromagnétique à 1500 tr/min.

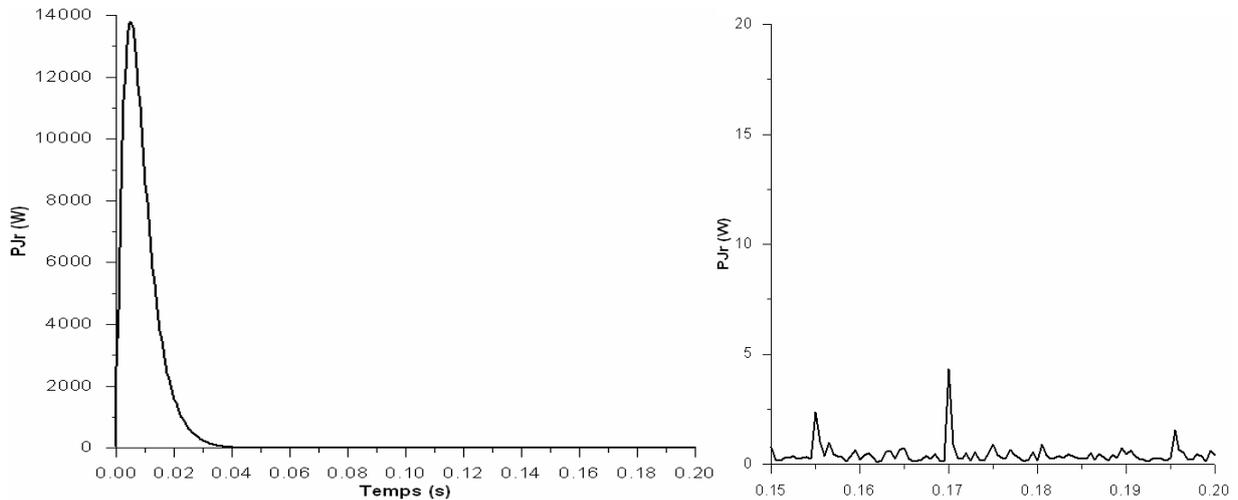


Fig. III.5 Pertes Joules au rotor à vide (1500 tr/min).

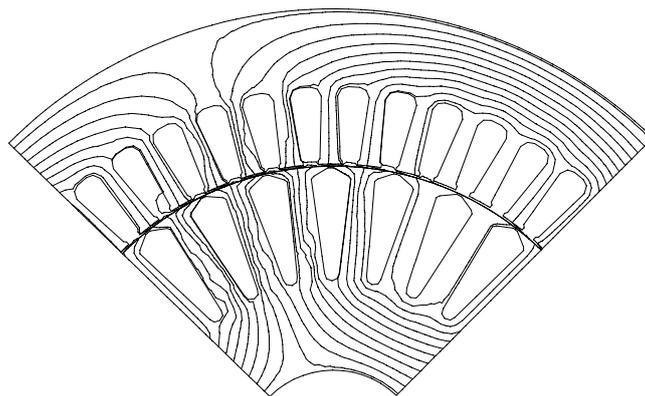


Fig. III.6. Carte du champ à vide à $t = 0.16$ s.

b)- Fonctionnement en charge

Sous la même tension (380 V), nous avons présenté sur les Figures III.7 à III. 10, les caractéristiques de la machine en régime nominal. L’effet de la saturation, sur le courant absorbé par la machine, est moins accentué en régime nominal (Fig. III.7). Pour le prototype étudié, le couple atteint environs 40 N.m et les pertes par effet Joule atteignent 237.5 W (Figs. III.8 et III.9).

La carte de champ (Fig. III.10) en régime nominal ($t = 0.157$ s) montre le couplage des lignes de champ au niveau de l'entrefer.

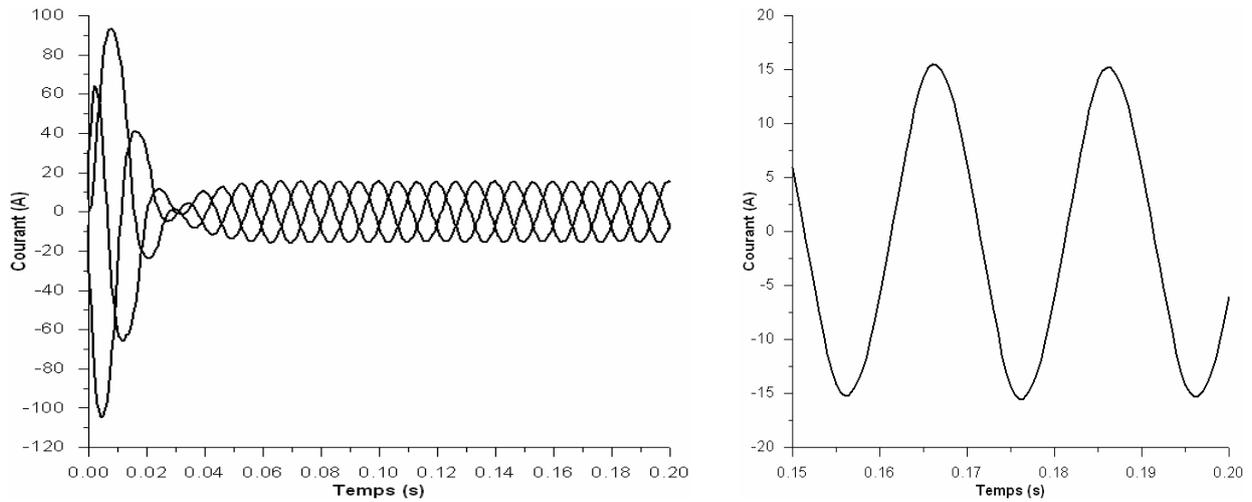


Fig. III. 7. Courants des trois phases à la vitesse nominale : 1438 tr/min.

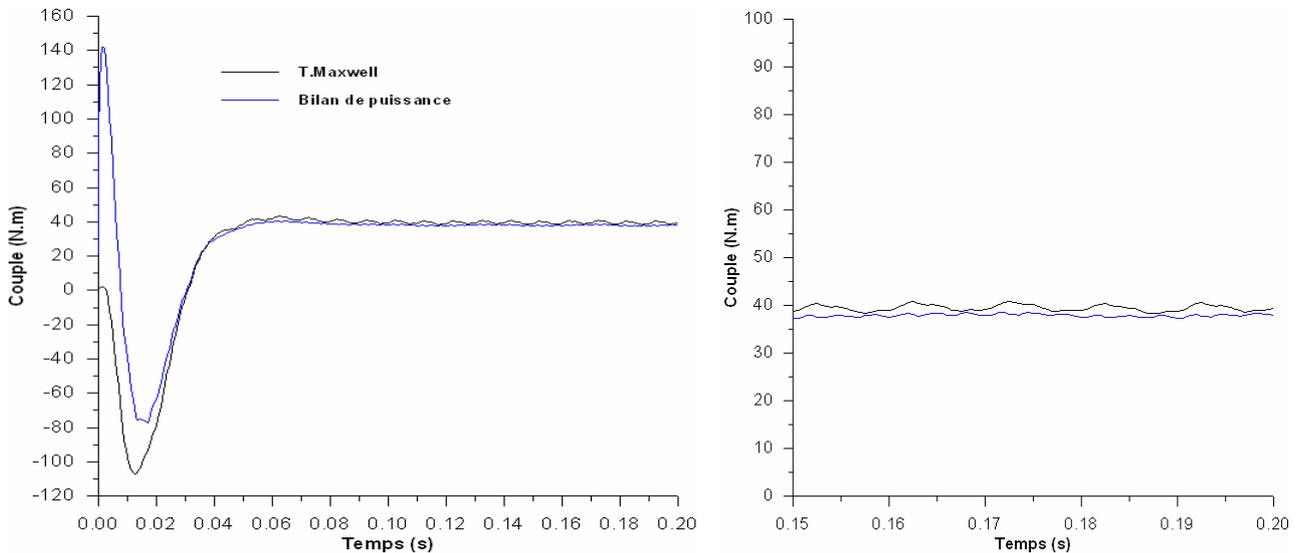


Fig. III. 8. Couple électromagnétique à vitesse nominale : 1438 tr/min.

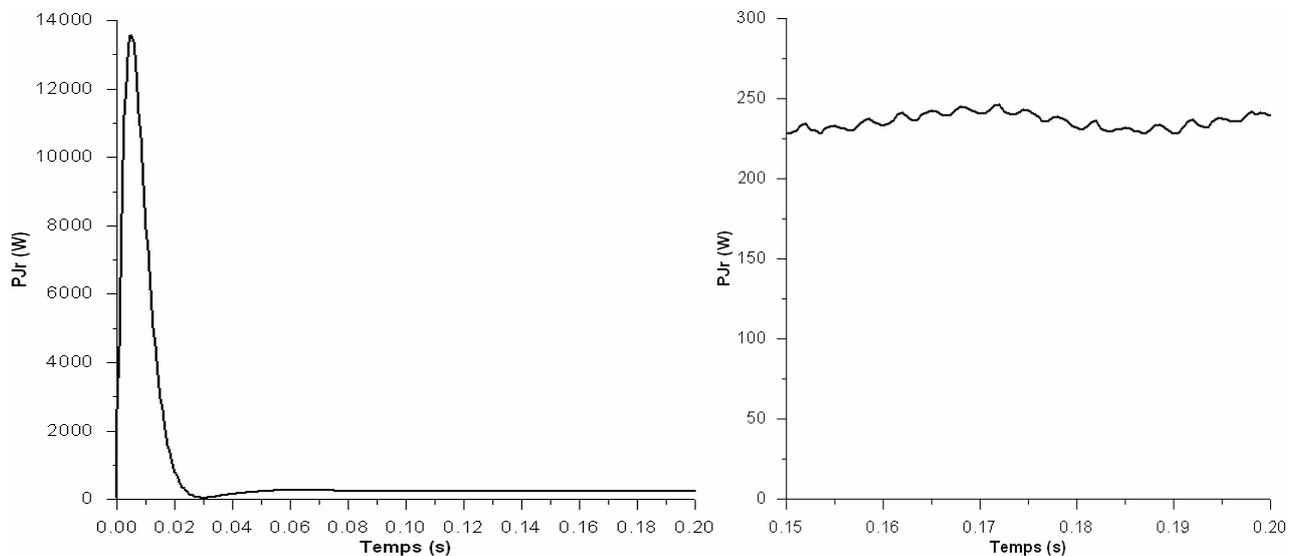


Fig. III. 9. Pertes par effet Joule au rotor en régime nominal.

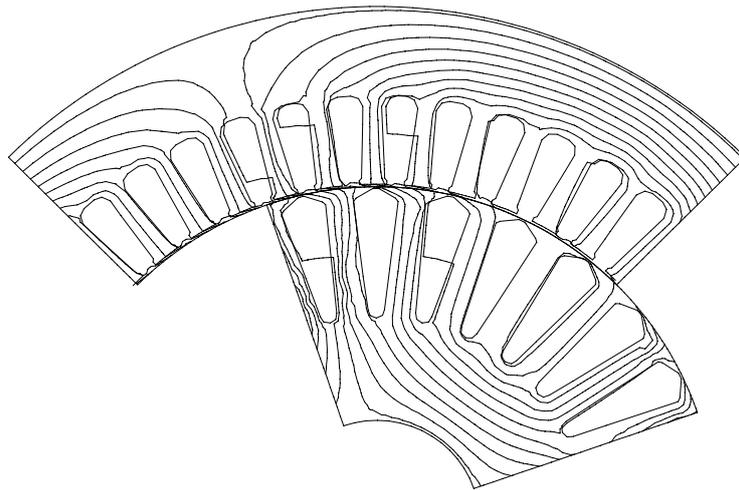


Fig. III. 10. Carte du champ en régime nominal à $t=0.157$ s.

c)- Fonctionnement à rotor bloqué

Sous la tension nominale de 380 V, le courant absorbé par la machine à rotor bloqué (Fig. III.11) est pratiquement sinusoïdal. La carte de champ (Fig. III. 13) à l’instant $t=0.1$ s montre le couplage des lignes de champ au niveau de l’entrefer.

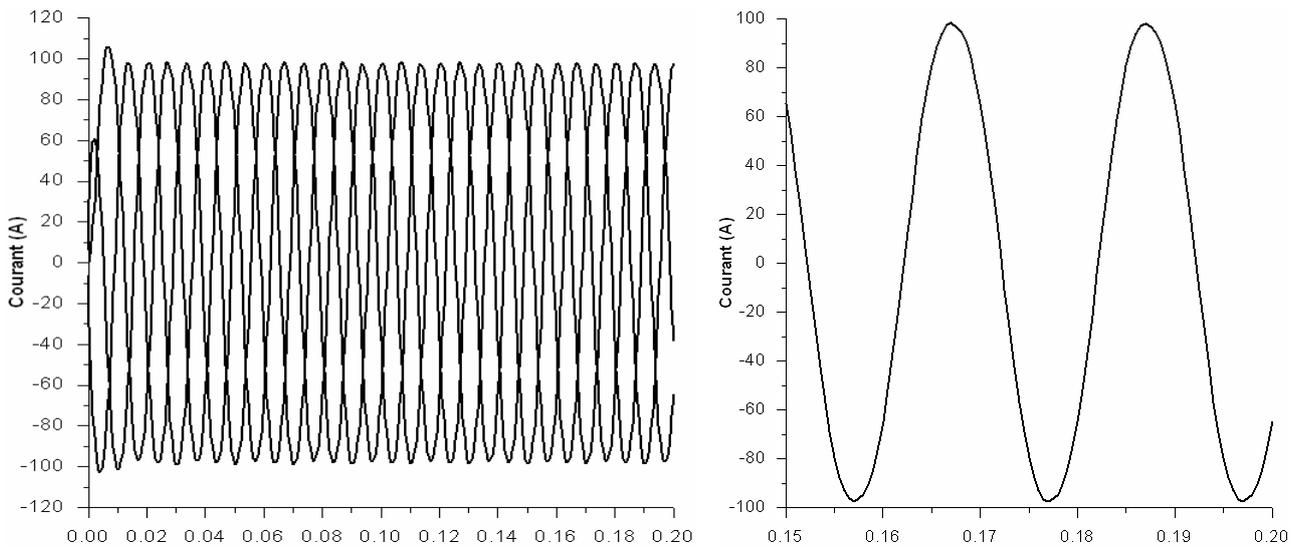


Fig. III.11. Courants des trois phases à rotor bloqué.

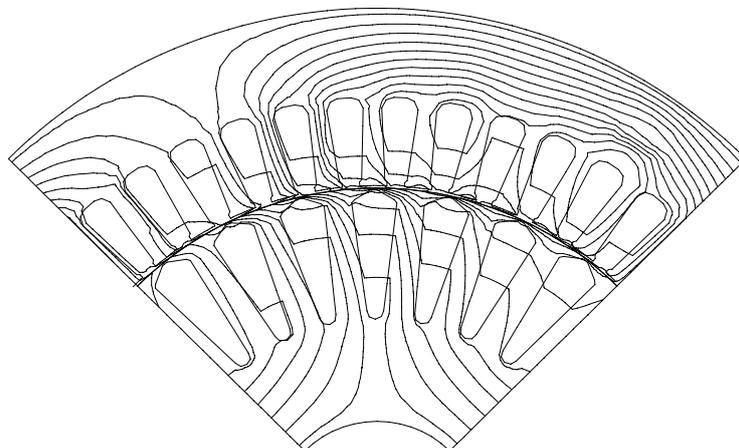


Fig. III.12. Carte du champ à rotor bloqué à $t=0.1$ s.

III.7.2 Simulation du régime transitoire électrique avec considération des harmoniques d'espace

On présente, dans ce paragraphe, les résultats de simulation dans le cas où les harmoniques d'espace sont considérées. Les calculs sont effectués sous tension nominale pour le même maillage que celui utilisé dans le cas du premier harmonique d'espace.

a)- Fonctionnement à vide

A vide, les Figures (III.13) à (III.16) représentent les courants de phases, le couple électromagnétique, les pertes par effet Joule au rotor et les cartes de champ correspondantes en régime établi.

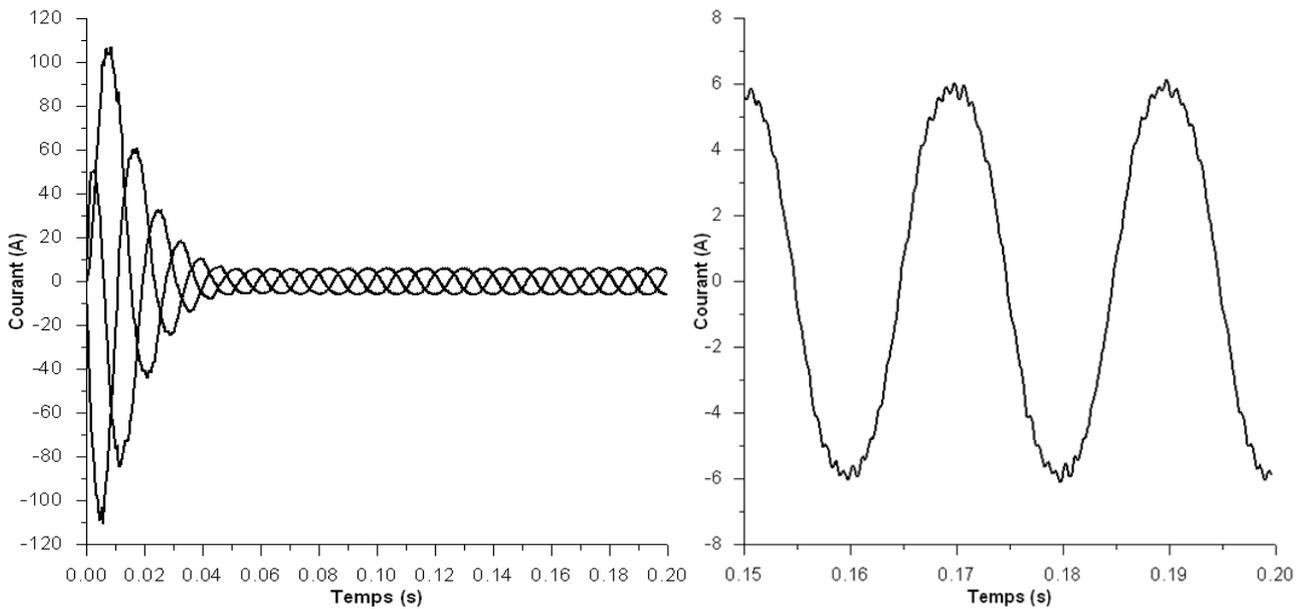


Fig. III.13. Courants des trois phases à vide à 1500 tr/min.

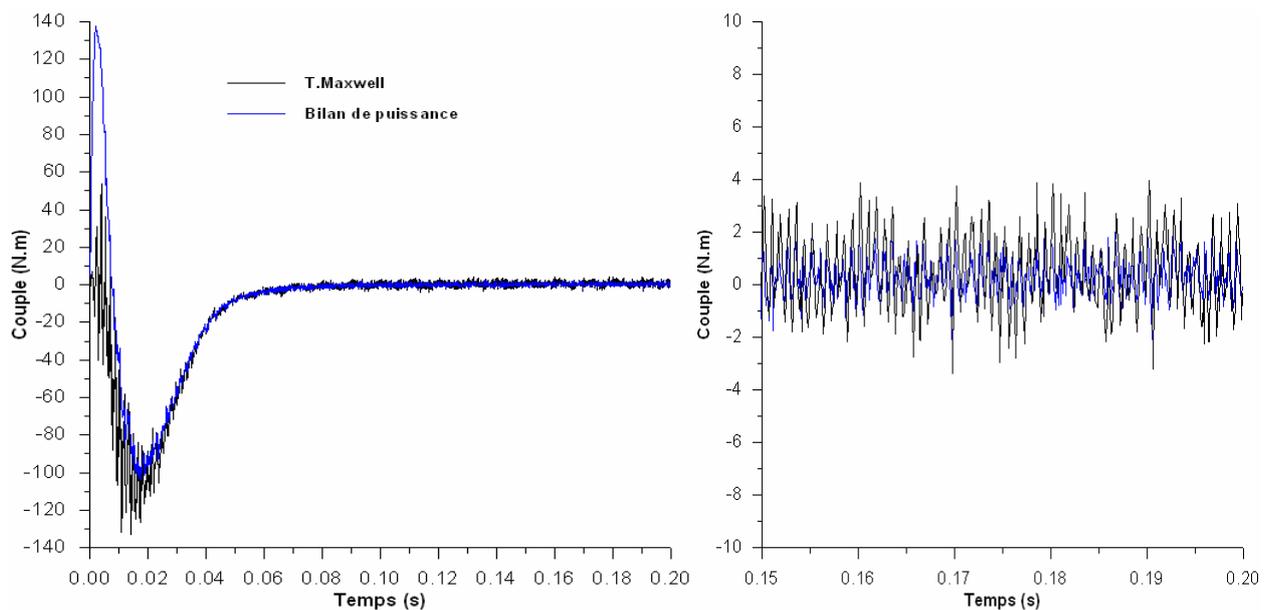


Fig. III.14. Couple électromagnétique à vide à 1500 tr/min.

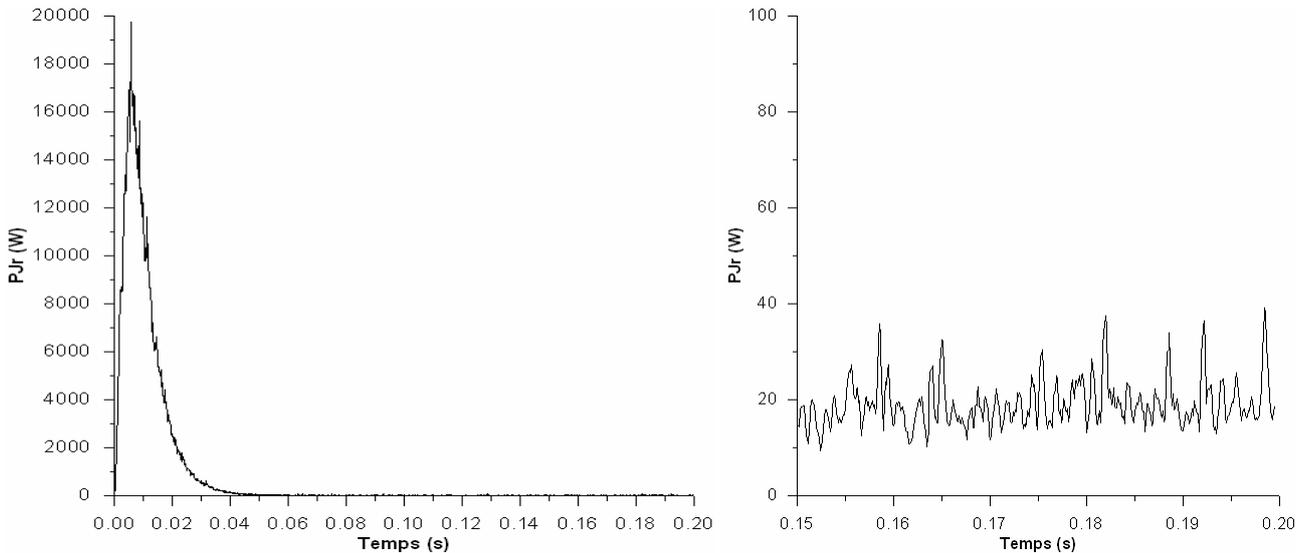


Fig. III.15. Pertes par effet Joules au rotor à vide à 1500 tr/min.

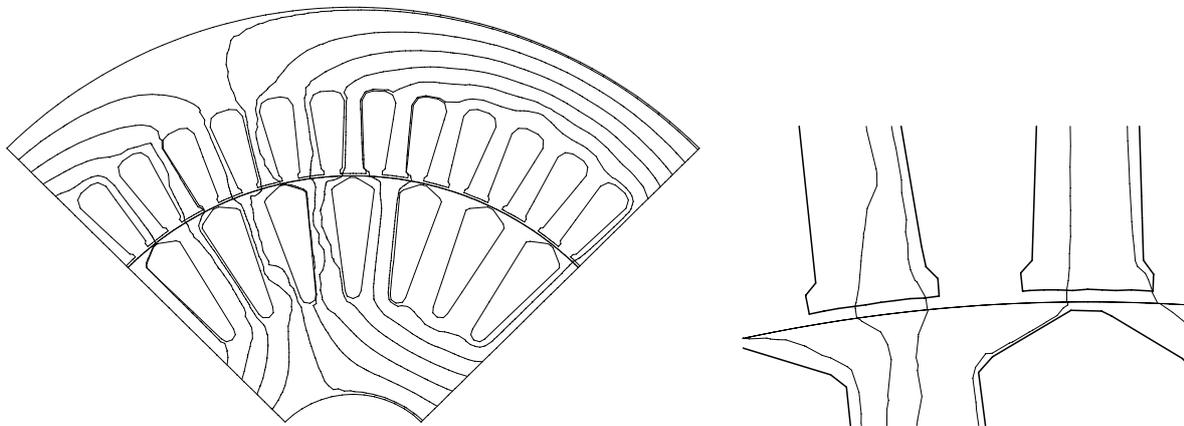


Fig. III.16. Carte du champ à vide à $t = 0.16$ s.

b)- Fonctionnement en charge

Sous la charge nominale, nous avons présenté sur les Figs. III.17 à III. 20 les courants de phases, le couple électromagnétique, les pertes par effet Joule au rotor et les cartes de champ en régime établi.

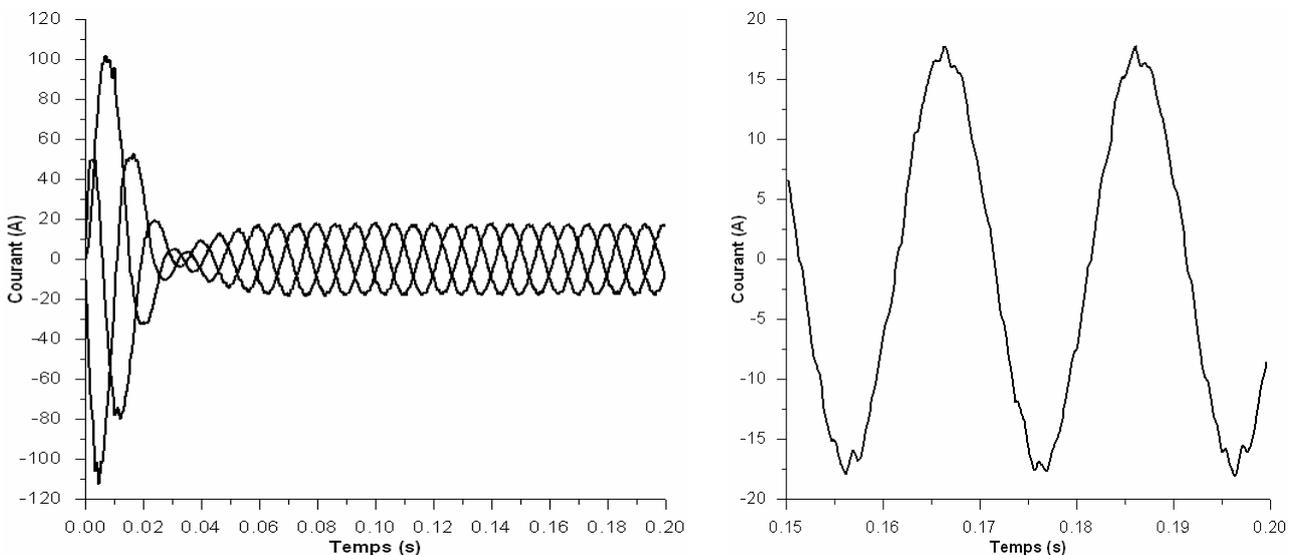


Fig. III.17. Courants des phases du stator en régime nominal (1438 tr/min).

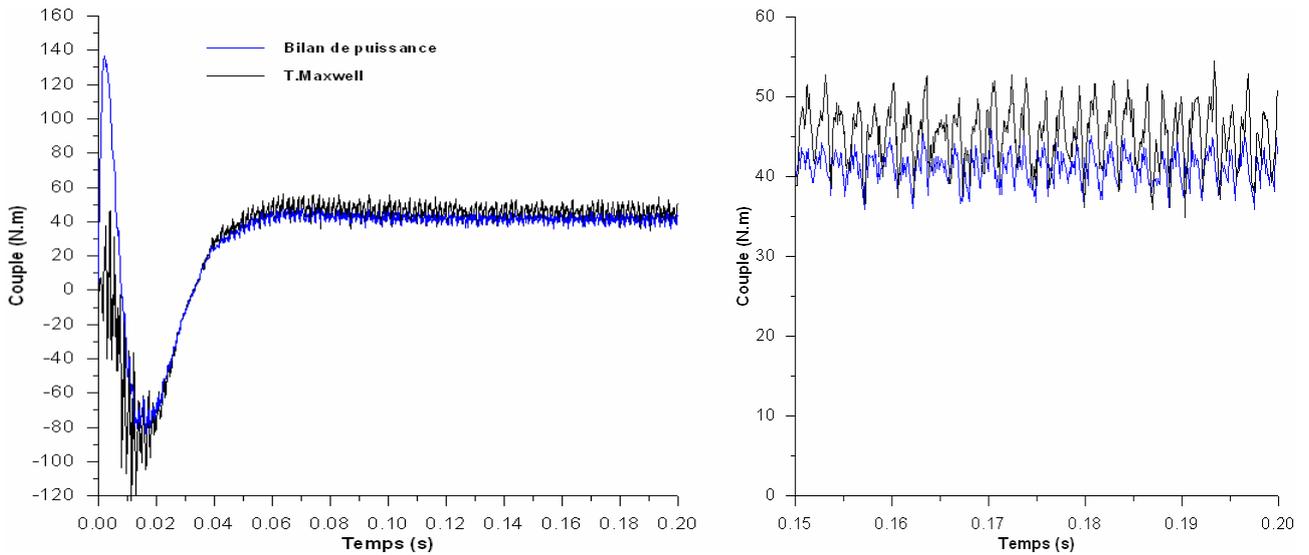


Fig. III.18. Couple instantané en régime nominal (1438 tr/min).

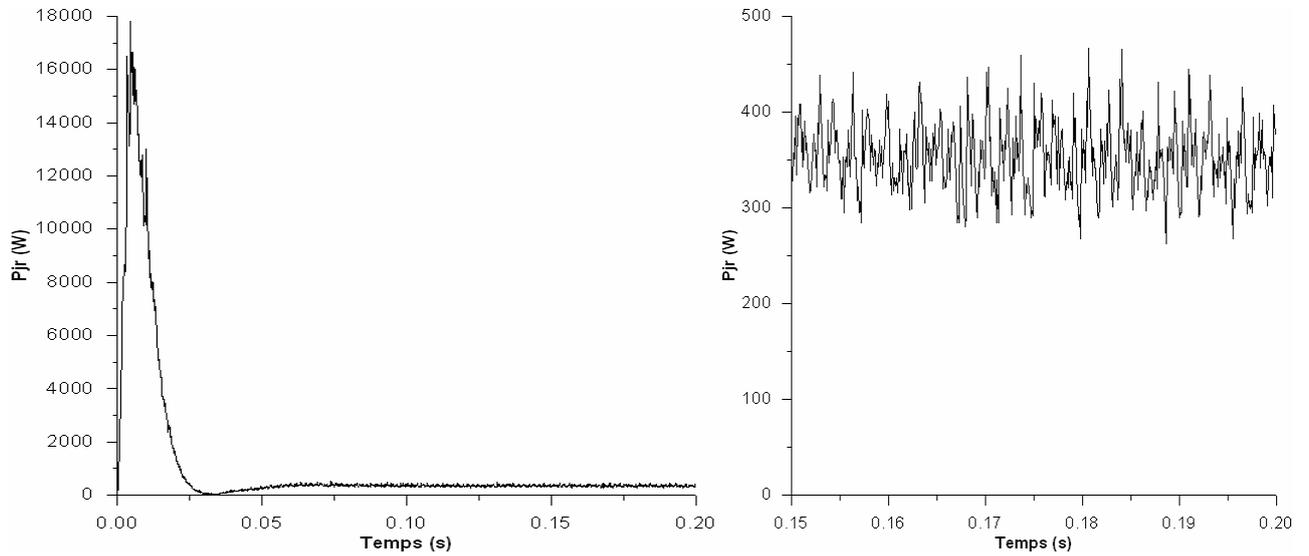


Fig. III.19. Pertes par effet Joule au rotor en régime nominal (1438 tr/min).

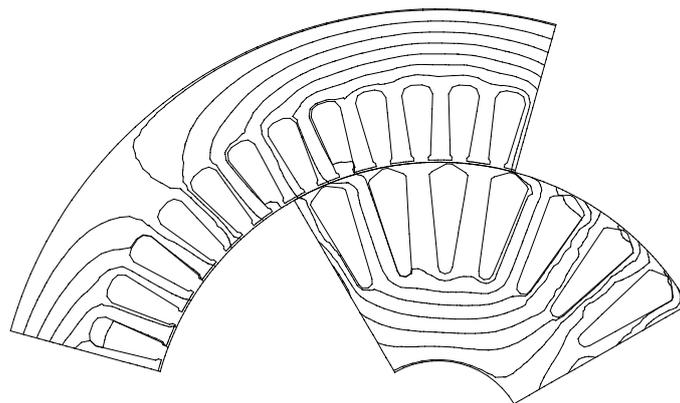


Fig. III. 20. Carte de champ en régime nominal à $t = 0.157$ s.

c)- Fonctionnement à rotor bloqué

Sur les Figures (III.21) et (III.22) à rotor bloqué, sont représentés les courants de phases et la carte de champ correspondante en régime établi.

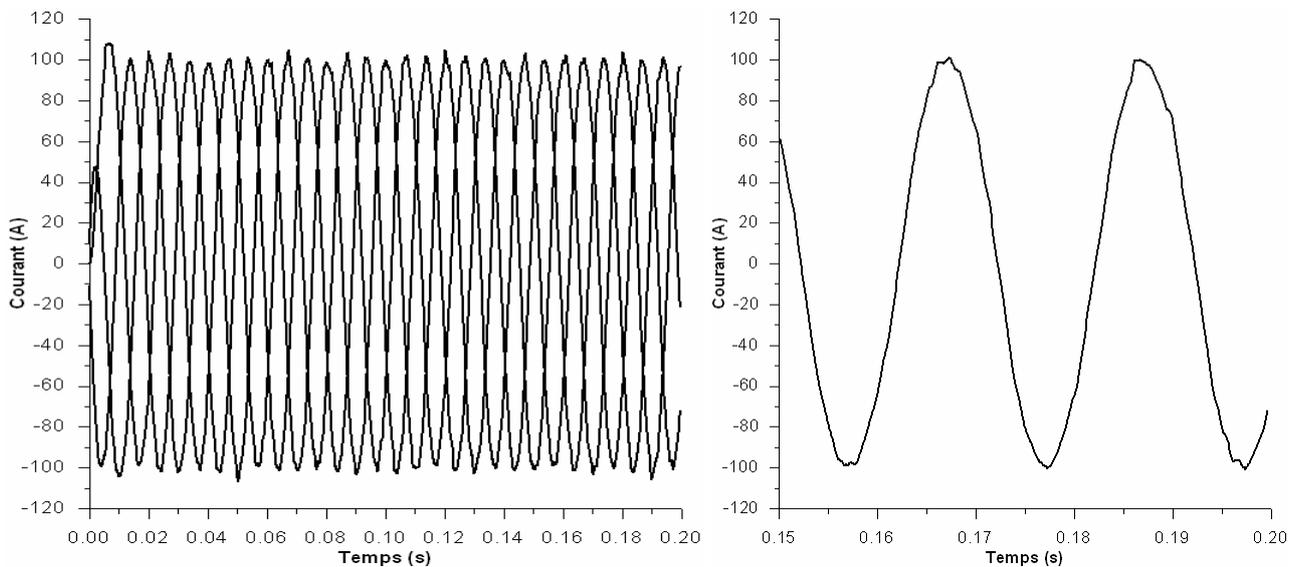


Fig. III.21. Courant de la phase (a) à rotor bloqué.

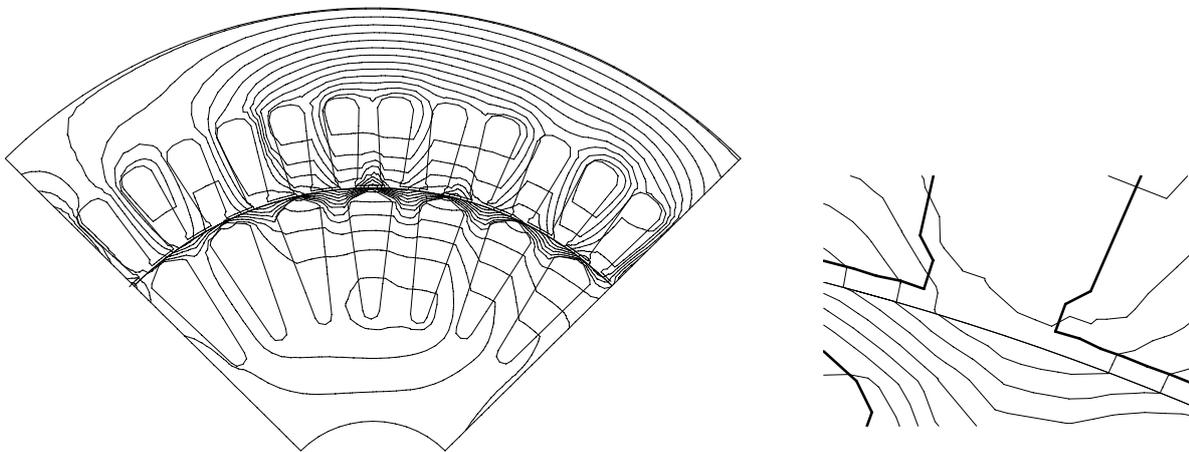


Fig. III.22. Carte du champ à rotor bloqué.

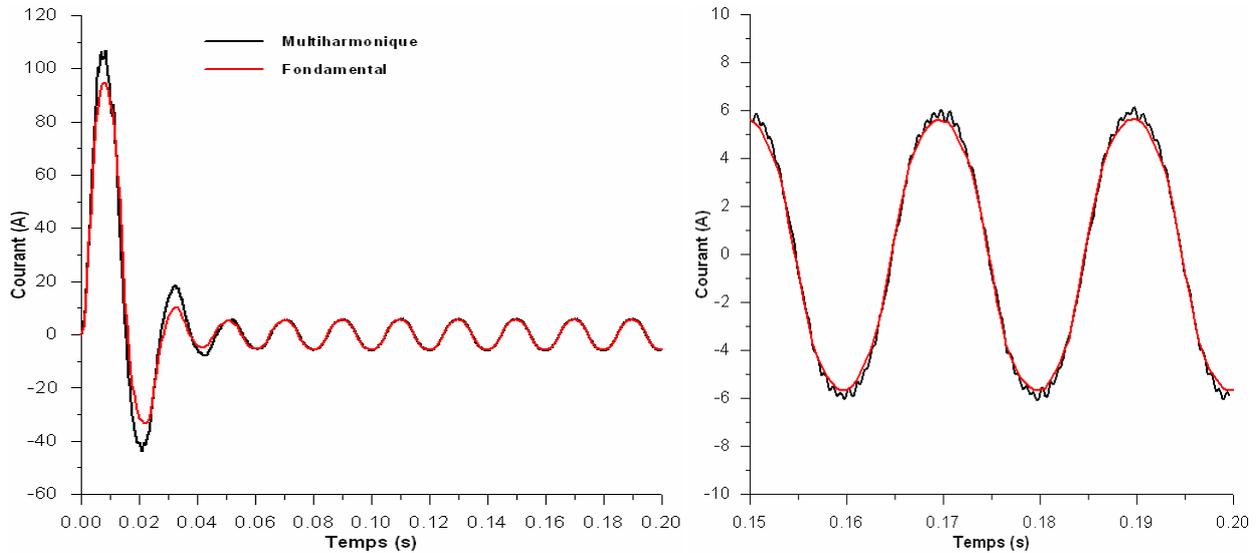
III.7.3 Comparaisons et discussions

En plus de l'effet de la saturation, la forme du courant absorbé par la machine, en régime permanent à vide ou en charge (Figs. III.23 a et c), est influencé par les harmoniques d'espace. Cette influence est moins accentuée à rotor bloqué (Fig. III.23 e). Il se trouve aussi que la valeur maximale du courant est légèrement modifiée pour tous les régimes de fonctionnement. Cet effet des harmoniques d'espace sur le courant est clairement apparent sur les spectres harmoniques représentés sur les Figs. III.23 b, d et f.

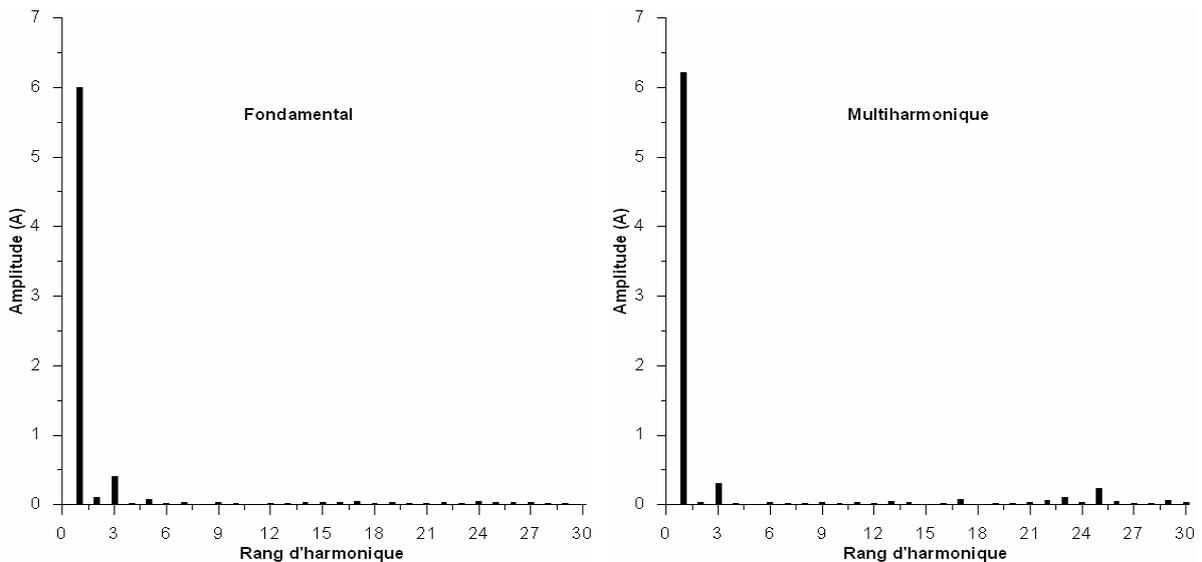
Le couple électromagnétique, calculé à partir du tenseur des contraintes de Maxwell, présente des ondulations plus accentuées par rapport au cas du premier harmonique d'espace et sa valeur moyenne est légèrement plus faible (Fig. III.24.c). Les spectres harmoniques du couple à vide et en charge, représentés sur les Figs. III.24.b et d, le confirment. Les pertes par effet Joule au rotor, que ce soit à vide ou en charge, sont plus élevées par rapport à celle obtenues dans le cas du premier harmonique d'espace (Figs. III.25 a et b).

Les résultats obtenus en considérant les harmoniques d'espaces montrent que les durées du régime transitoire électrique sont pratiquement les mêmes que celles obtenues pour le cas du premier harmonique d'espace. Dans le cas du prototype étudié, à vide le régime transitoire dure environs 0.06 s (trois périodes électriques), toutefois il est de 0.08 s en régime nominal donc légèrement supérieur. Par contre dans le fonctionnement à rotor bloqué, le régime transitoire est plus rapide. Il

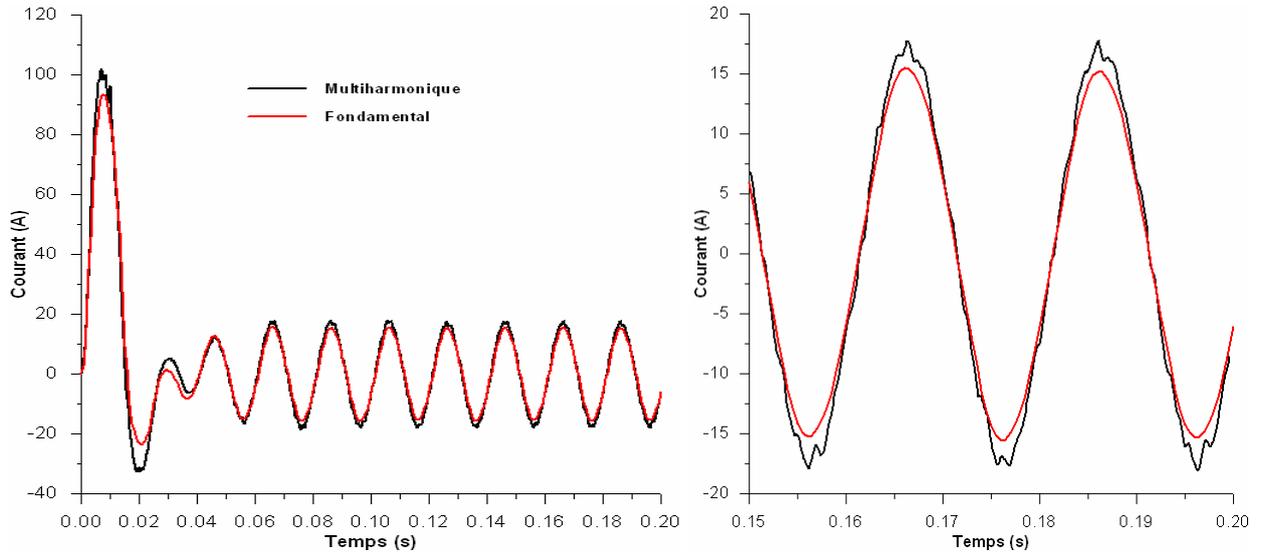
ture environ une période électrique. Ceci est évidemment du au fait qu'à rotor bloqué, la fréquence des grandeurs électromagnétiques dans les domaines du stator et du rotor est la même. Par contre à vide ou en charge, le glissement du rotor par rapport au stator conduit à une diffusion lente, donc à une durée transitoire relativement importante. Concernant le temps de calcul, pour le même maillage et par itération, il est d'environ 2 s pour le cas du mono-harmonique et 3.5 s pour le multi-harmonique. Notant que le pas d'intégration nécessaire pour avoir des résultats satisfaisants est de 0.1 ms pour le cas du multi-harmonique et de 0.5 ms pour le cas du mono-harmonique d'espace. Ainsi que le temps nécessaire pour simuler tout le régime transitoire est de 4 heures 30 minutes environ pour le multi-harmonique et 1 heure pour le cas du mono-harmonique d'espace. Les grandeurs caractéristiques de la machine, à savoir le courant, le couple électromagnétique, les puissances et les pertes, obtenues dans ce calcul sont comparables à celles obtenues en utilisant le modèle magnétodynamique complexe.



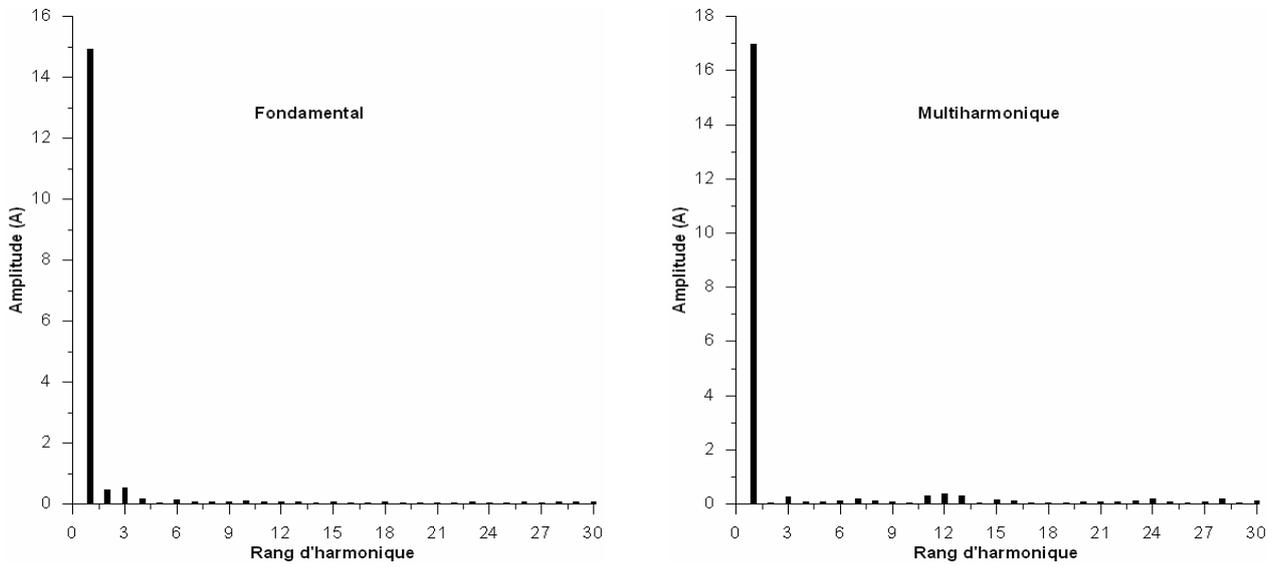
(a)- Courant absorbé à vide.



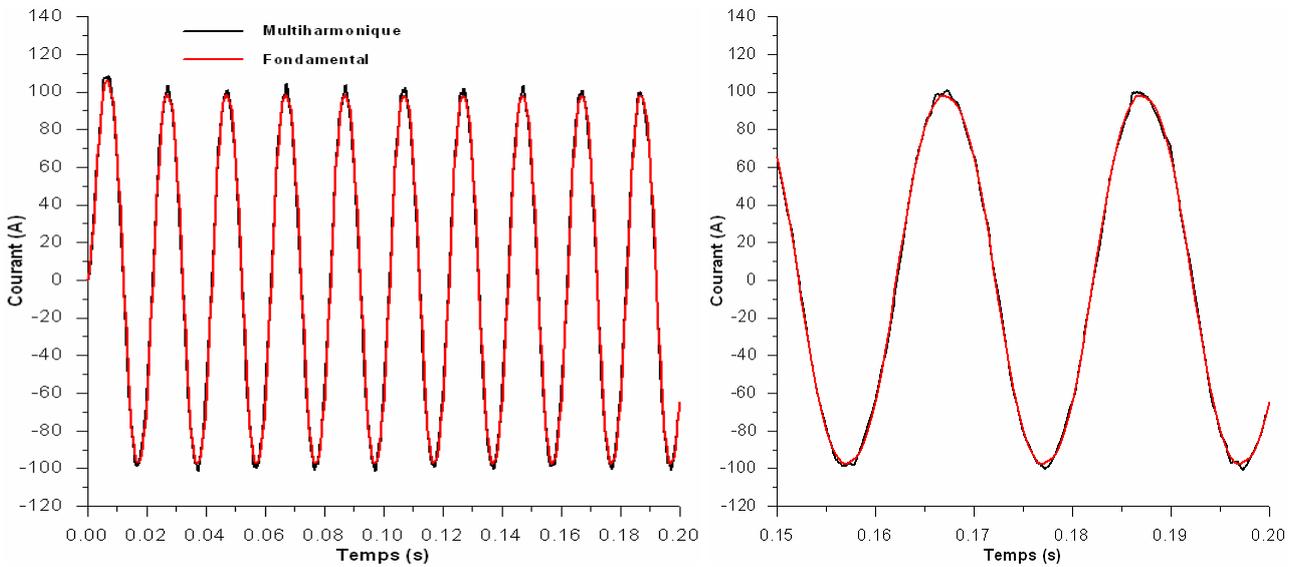
(b)- Spectre harmonique du courant absorbé à vide.



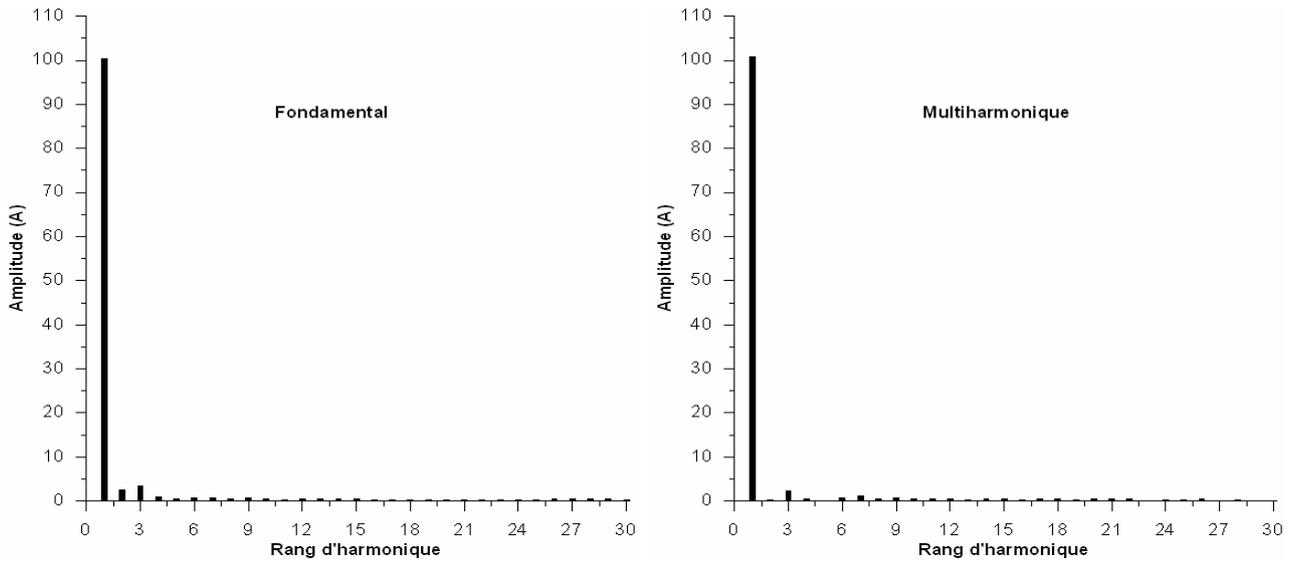
(c)- Courant absorbé à vitesse nominale.



(d)- Spectre harmonique du courant absorbé à vitesse nominale (1438 tr/min).

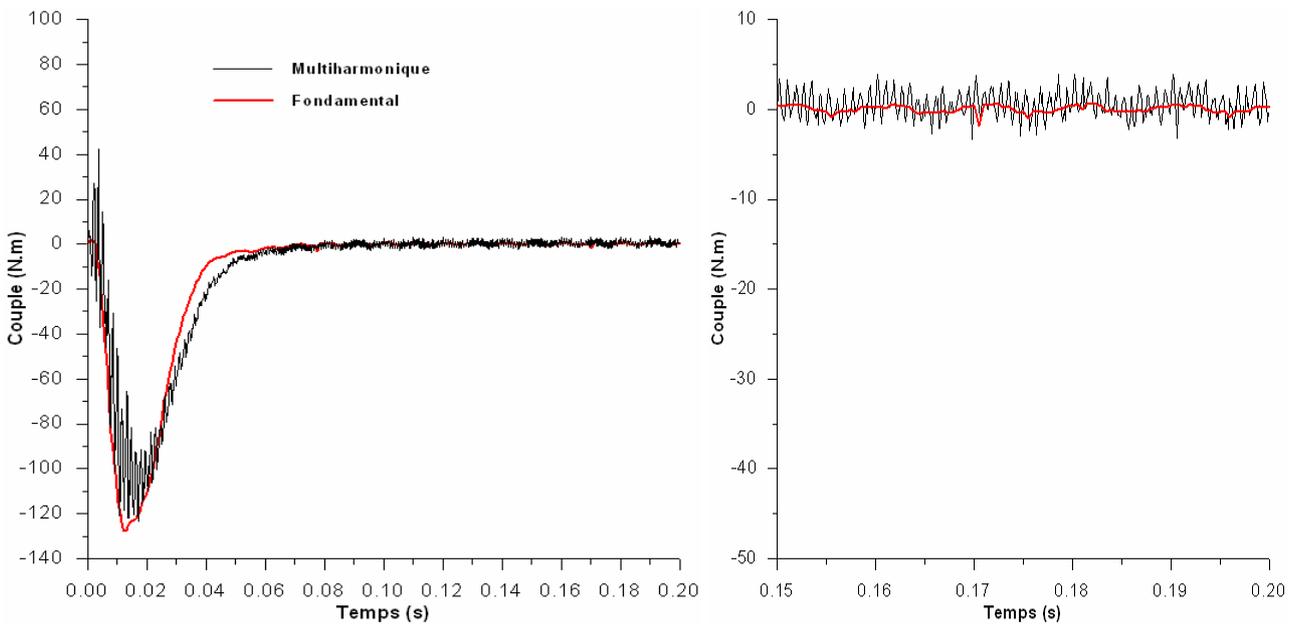


(e)- Courant absorbé à rotor bloqué.

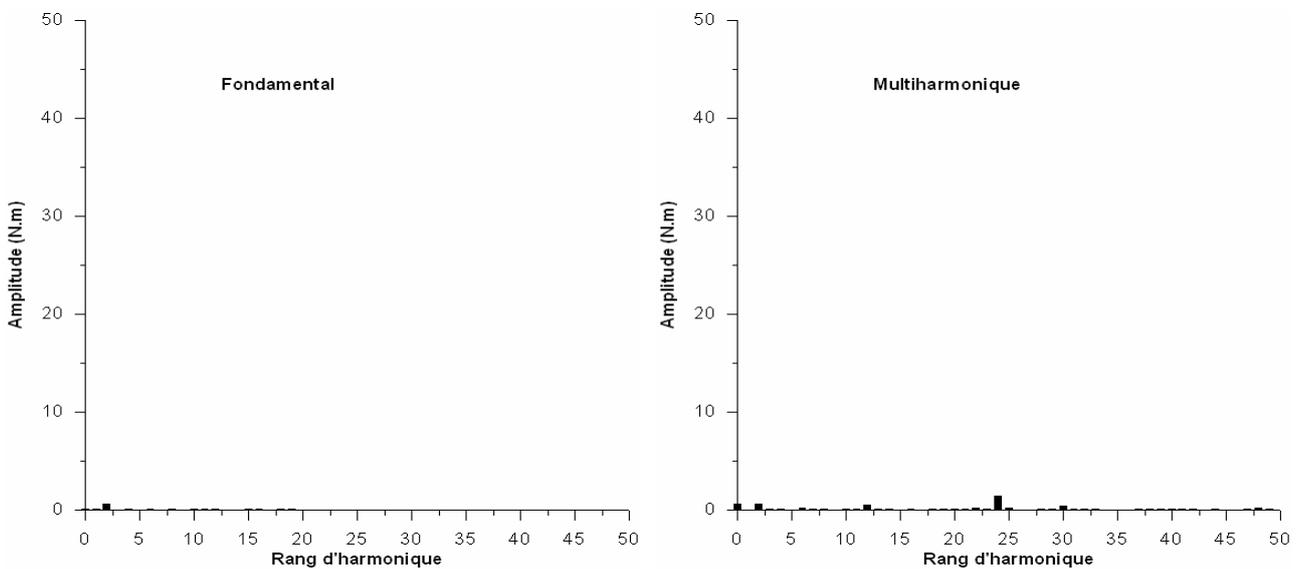


(f)- Spectre harmonique du courant absorbé à rotor bloqué.

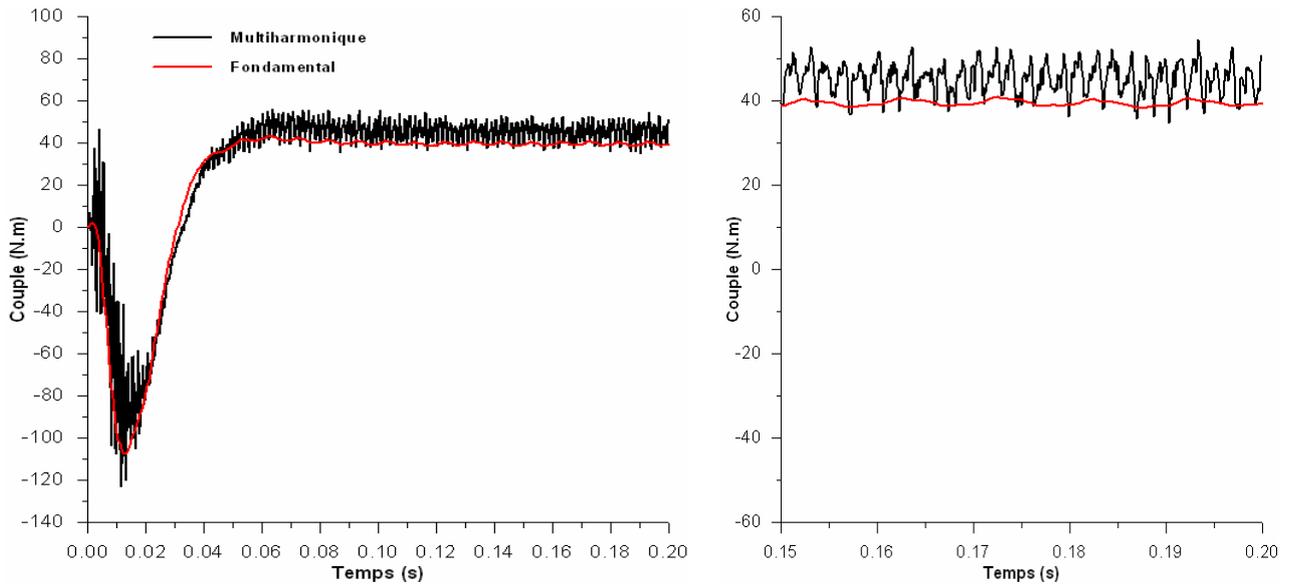
Figs. III. 23. Influence des harmoniques d'espace sur le courant de phase.



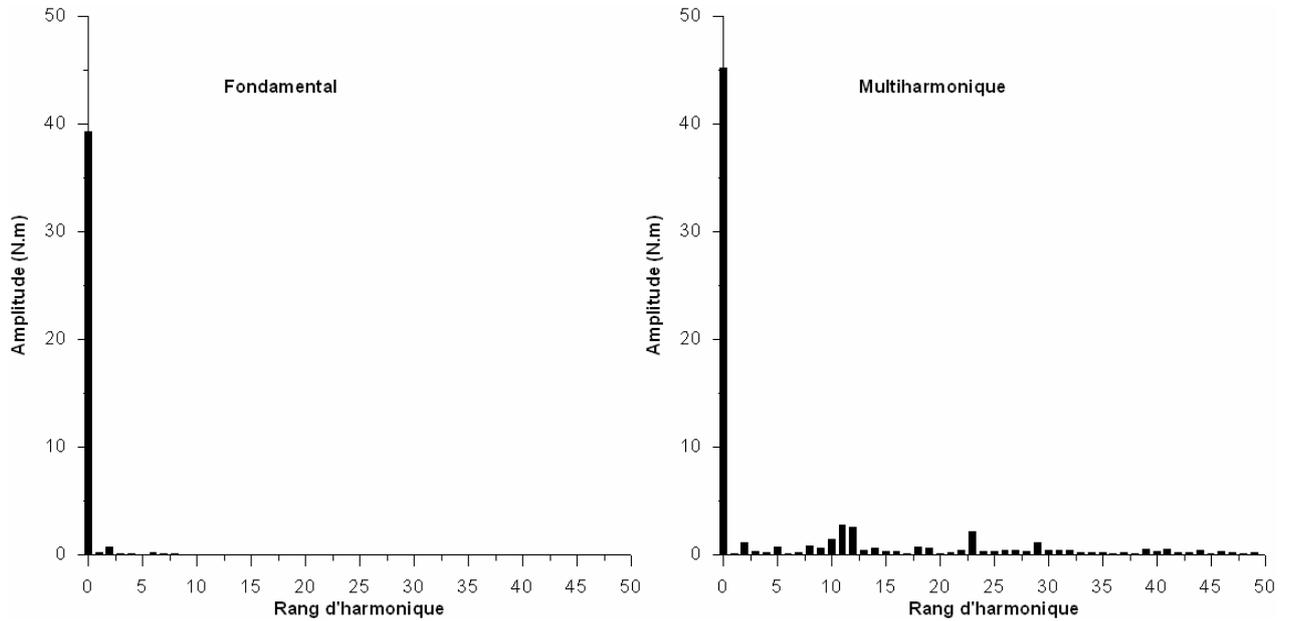
(a)- Couple développé à vide.



(b)- Spectre harmonique du couple à vide.

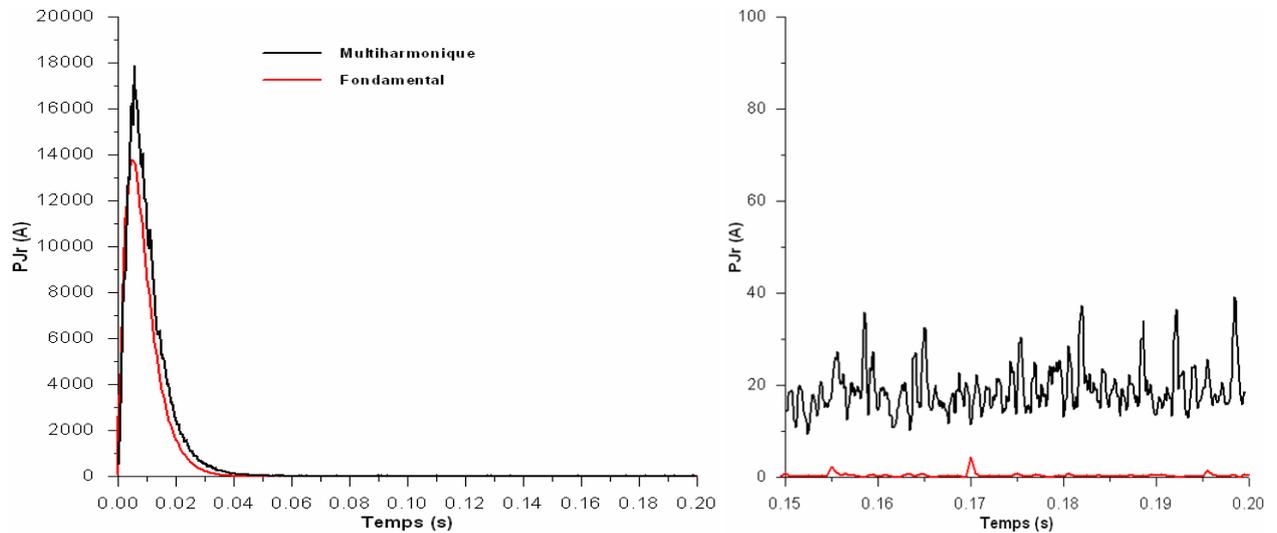


(c)- Couple développé à vitesse nominale.

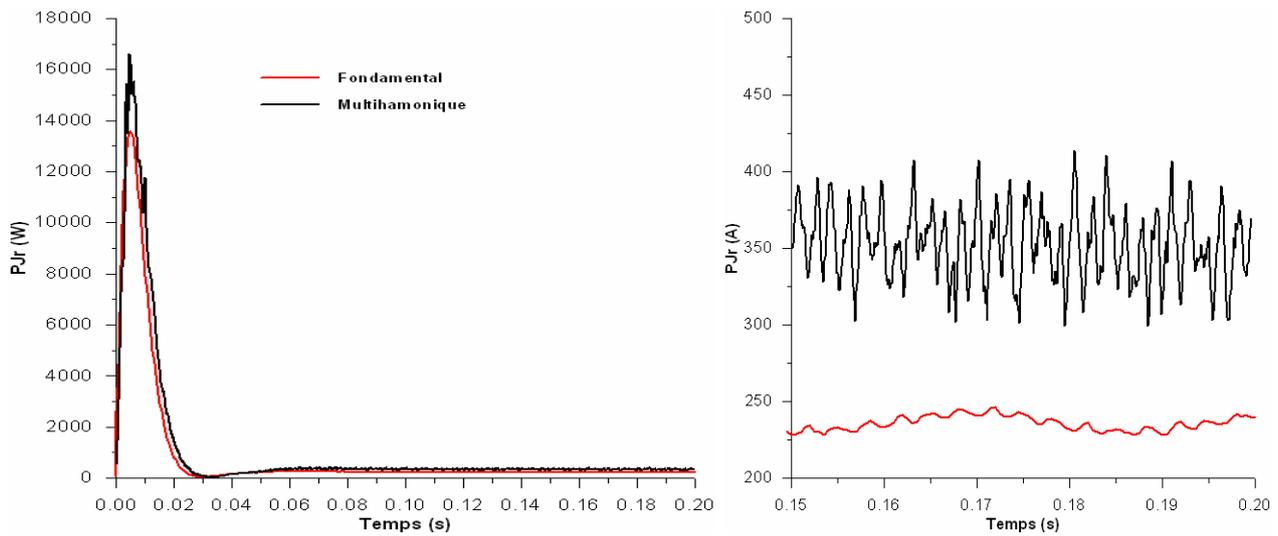


(d)- Spectre harmonique du couple développé à vitesse nominale (1438 tr/min).

Figs. III.24. Influence des harmoniques d'espace sur le couple.



(a)- à vide.



(b)- à vitesse nominale 1438 tr/min.

Figs. III. 25. Influence des harmoniques d’espace sur les pertes Joule rotoriques.

III.8 Modèle électromécanique de la machine à induction

Pour d’écrire de façon très fine le fonctionnement dynamique des machines à induction, il est indispensable de considérer l’interaction entre le champ magnétique, les circuits électriques et le mouvement indéformable d’une partie de la structure mécanique mobile [102]. Ceci constitue un couplage physique fort car les grandeurs électriques et magnétiques sont significativement modifiées [29]. La première interaction, champ magnétique avec les circuits électriques, a été présentée dans la partie précédente en tenant compte du mouvement du rotor. Compte tenu du fait que les constantes de temps mécaniques sont très grandes par rapport aux constantes de temps issues des circuits électriques couplés au champ magnétique, on peut alors représenter l’interaction magnéto-mécanique avec un couplage numérique faible. Dans ces conditions, il est possible de scinder le calcul en deux étapes [103], [104] :

- En supposant qu’à un instant donné t , la position du rotor est connue, on résout le problème couplé circuits électriques-champ magnétique. Les courants dans les différents circuits et la répartition du potentiel vecteur dans le domaine étudié sont obtenus.
- On calcule ensuite, en fonction du potentiel vecteur magnétique, le couple électromagnétique exercé sur le rotor en mouvement et on détermine à l’aide de l’équation mécanique la vitesse et la position pour le calcul suivant.

III.8.1 Couplage de l’équation mécanique au modèle électrodynamique

Les phénomènes couplés que l’on cherche à modéliser ici proviennent donc de l’interaction entre le champ électromagnétique et la partie mécanique en mouvement sur laquelle sont exercés les efforts d’origine électromagnétique. Ces deux problèmes, dans les machines à induction et lorsqu’on cherche seulement l’interaction de la machine avec sa charge, sont couplés par le couple électromagnétique produisant le mouvement du rotor. L’étude de ce couplage nécessite donc, des méthodes précises pour le calcul du couple et pour la prise en compte du mouvement [29]. Dans ce calcul, la partie tournante est généralement considérée comme solide indéformable. Mathématiquement, ce problème est représenté par, le système d’équations (III.54) issu du problème magnétodynamique couplé aux circuits électriques, et les équations du mouvement mécanique et de la position du rotor données respectivement par les Eqs. (I.62) et (I.63). Si on adopte la même forme de discrétisation dans le temps que celle adoptée pour les équations du champ et les équations électriques, c’est à dire le schéma explicite d’Euler, nous pouvons écrire, pour la vitesse du rotor :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega = \frac{\Omega^{t+\Delta t} - \Omega^t}{\Delta t} \quad (\text{III.57})$$

La vitesse de rotation du rotor à l'instant $t + \Delta t$ est déterminée par l'intégration de l'équation mécanique de mouvement du rotor donnée par l'Eq. (I.62), que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = F(\Omega, t) \quad (\text{III.58})$$

Avec :

$$F(\Omega, \mathbf{A}_{r,s}^\Gamma, t) = C_{em} + C_{ch} + C_{fr} \quad (\text{III.59})$$

Nous rappelons que C_{em} , C_{ch} et C_{fr} représentent respectivement le couple électromagnétique, le couple imposé par la charge et le couple de frottement.

Le couple électromagnétique développé par la machine est déterminé à l'aide du tenseur de Maxwell. En fonction du potentiel vecteur, il est exprimé par l'équation suivante :

$$C_{em} = \frac{RL}{\mu_0} \int_c \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \partial \theta \quad (\text{III.60})$$

où c est un contour situé dans l'interface de couplage des deux domaines statorique et rotorique.

Cette dernière équation peut se mettre, en fonction des coordonnées des nœuds sur l'interface de couplage et des valeurs nodales du potentiel vecteur et en exploitant l'approximation du potentiel vecteur magnétique au niveau d'un élément, sous la forme matricielle suivante :

$$C_{em} = \mathbf{A}_{r,s}^{\Gamma T} \mathbf{W} \mathbf{A}_{r,s}^\Gamma \quad (\text{III.61})$$

L'Equation (III.59) devient :

$$F(\Omega, \mathbf{A}_{r,s}^\Gamma, t) = C_{ch} + C_{fr} + \mathbf{A}_r^{\Gamma T} \mathbf{W} \mathbf{A}_r^\Gamma \quad (\text{III.62})$$

Cette équation met en évidence le couplage magnéto-mécanique dans la machine.

En injectant l'Eq. (III.57) dans l'Eq. (III.58) en tenant compte de l'Eq. (III.62), on obtient la forme discrétisée dans le temps de l'équation mécanique suivante :

$$\Omega^{t+\Delta t} = \Omega^t + \Delta t F(\Omega, \mathbf{A}_{r,s}^\Gamma, t) \quad (\text{III.63})$$

La détermination de la vitesse est donc conditionnée par la valeur du couple électromagnétique développé par la machine au même instant $t + \Delta t$. Cette dernière est déterminée par la résolution du problème magnétique. La précision de la résolution de l'équation mécanique dépend essentiellement des méthodes de calcul du couple et d'intégration numérique de l'équation mécanique. Pour le calcul du couple électromagnétique, on a opté pour la méthode du tenseur de Maxwell très utilisée pour la détermination des efforts électromagnétiques globaux qui convient aux méthodes de couplage d'interface [104]. En ce qui concerne la méthode numérique d'intégration de l'équation mécanique qui détermine la vitesse, il faut utiliser des algorithmes de prédiction-correction qui permettent une adaptation du pas de calcul, ou les méthodes de type Runge-Kutta implicites qui paraissent particulièrement bien adaptées à ce types de problèmes [106].

En considérant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 [107], l'Equation (III.63) s'écrit ainsi :

$$\Omega^{t+\Delta t} = \Omega^t + \frac{\Delta t}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (\text{III.64})$$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} K_1 = F(\Omega^t, \mathbf{A}_{r,s}^\Gamma, t) \\ K_2 = F(\Omega^t + \frac{\Delta t}{2} K_1, t + \frac{\Delta t}{2}) \\ K_3 = F(\Omega^t + \frac{\Delta t}{2} K_2, t + \frac{\Delta t}{2}) \\ K_4 = F(\Omega^t + hK_3, t + \Delta t) \end{cases} \quad (\text{III.65})$$

Avec la vitesse déterminée, on estime la nouvelle position du rotor à partir de l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \frac{\theta^{t+\Delta t} - \theta^t}{\Delta t} = \Omega^{t+\Delta t} \quad (\text{III.66})$$

Ainsi la position du rotor à l'instant $t + \Delta t$, est déterminée par l'expression suivante :

$$\theta^{t+\Delta t} = \Omega^{t+\Delta t} \Delta t + \theta^t \quad (\text{III.67})$$

Cette résolution pas à pas dans le temps suppose, évidemment, que le couple électromagnétique est constant entre les instants (t) et ($t + \Delta t$). En résumé, la procédure de résolution du problème électromécanique se fait selon les étapes suivantes :

- Résolution du problème magnétodynamique couplé fortement aux circuits électriques définissant l'alimentation de la machine pour obtenir le potentiel vecteur dans le domaine éléments finis et les courants dans les circuits;
- Calcul du couple électromagnétique développé en fonction du potentiel vecteur;
- Résolution de l'équation mécanique qui permet d'avoir la vitesse de rotation du rotor ;
- Estimation de la nouvelle position du rotor pour le calcul suivant.

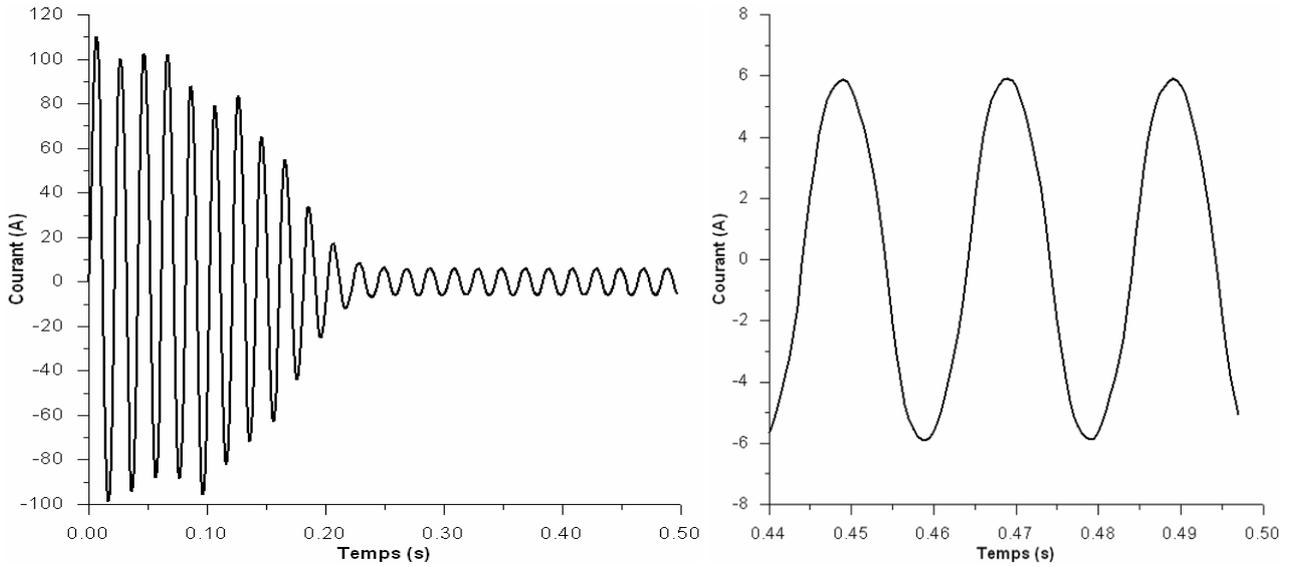
III.9 Application à la simulation des régimes transitoires de démarrage des machines à induction

Dans le paragraphe précédent, on a considéré la vitesse de rotation du rotor constante, cela suppose que la machine est en régime mécanique établi. L'interaction du champ magnétique avec les circuits électriques, en présence du mouvement, est déterminée. On présente, dans ce qui suit, les résultats de simulations obtenus avec le modèle magnétodynamique couplé aux circuits et à la mécanique du mouvement du rotor lors du démarrage direct de la machine sur le réseau. Les résultats qui suivent sont calculés sous tension nominale dans le cas du premier harmonique d'espace et dans le cas de la prise en compte des harmoniques d'espace les plus significatifs dans le rotor. Notant que les calculs électromagnétiques sont effectués avec le même maillage que celui présenté précédemment.

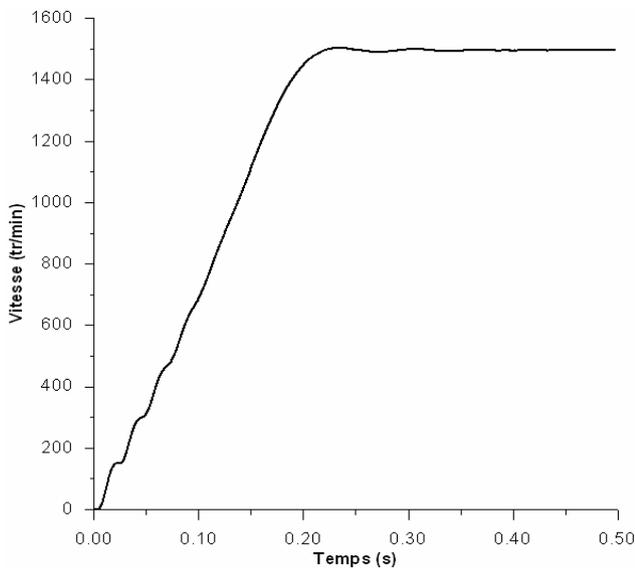
Sous la tension nominale de 380 V entre phases et lors d'un démarrage à vide et à pleine charge, nous présentons respectivement :

- sur les Figs. III.26 et III.27, les caractéristiques électromécaniques de la machine dans le cas ou seul le premier harmonique d'espace est considéré dans le rotor;
- sur les Figs. III.28 et III.29, les caractéristiques électromécaniques de la machine dans le cas de la prise en compte des harmoniques d'espace dans le rotor.

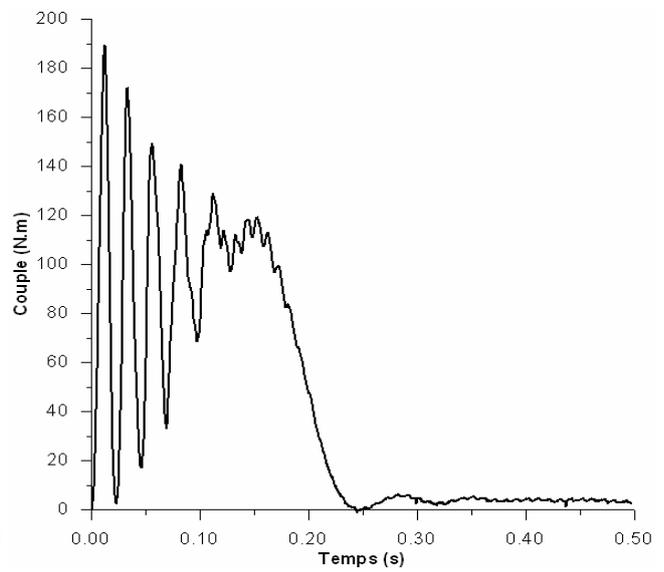
a)- Résultats de simulation avec le premier harmonique d'espace



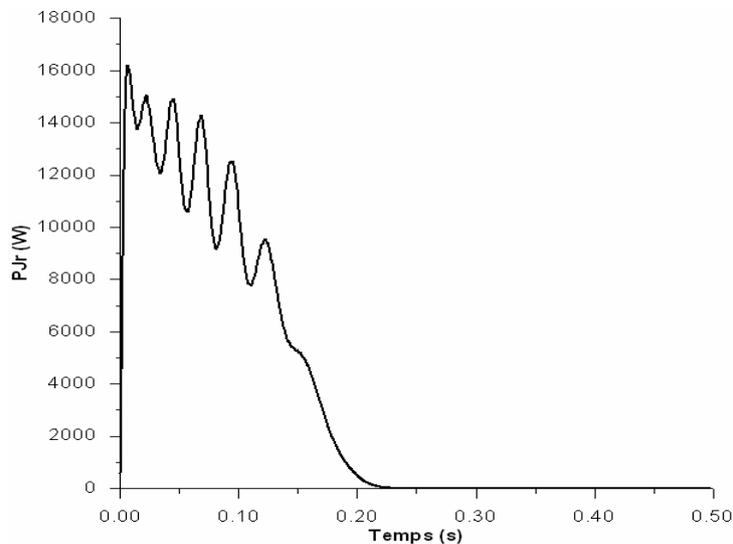
(a)- Courant absorbé à vide.



(b)- Vitesse

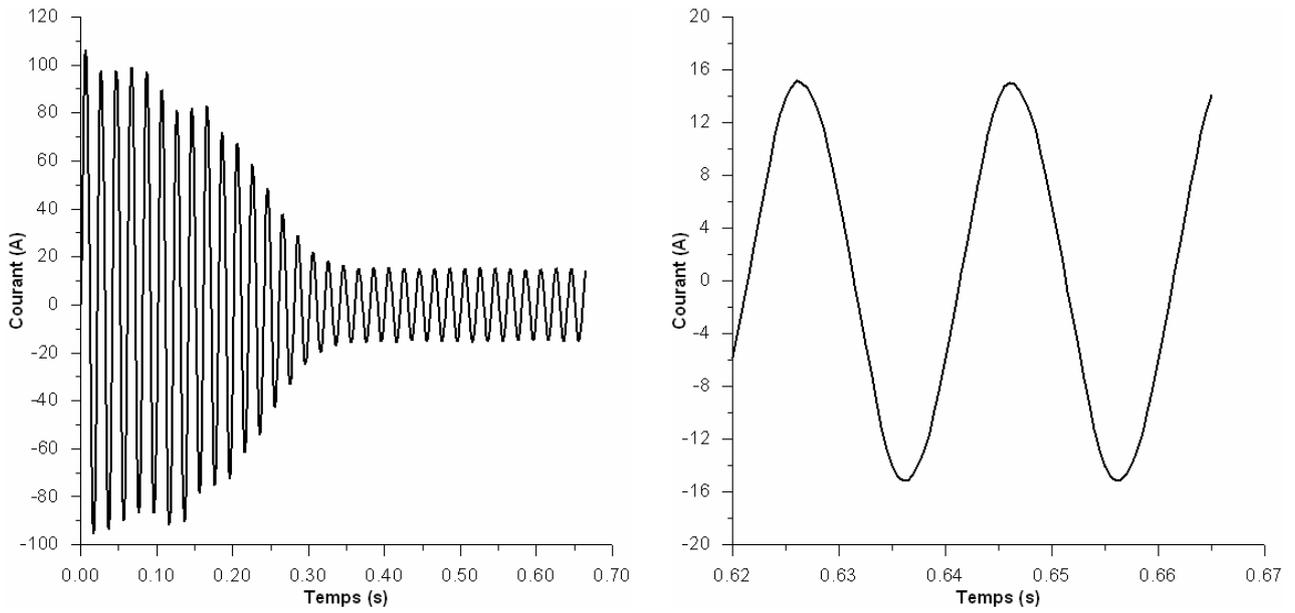


(c)- couple développé

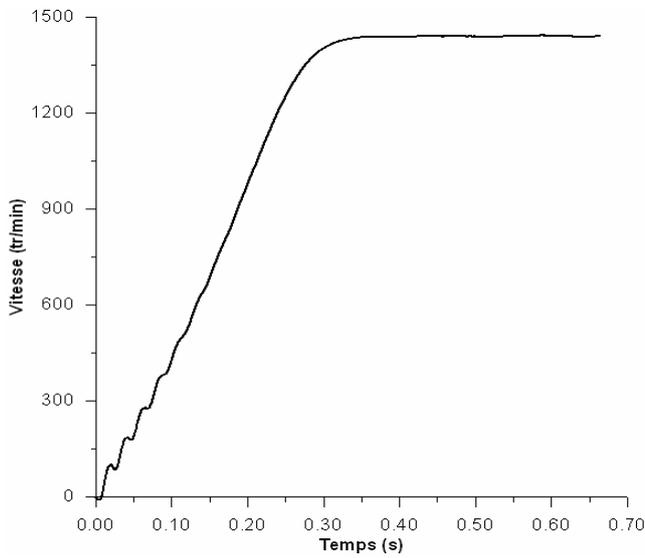


(d)- Pertes par effet Joule au rotor

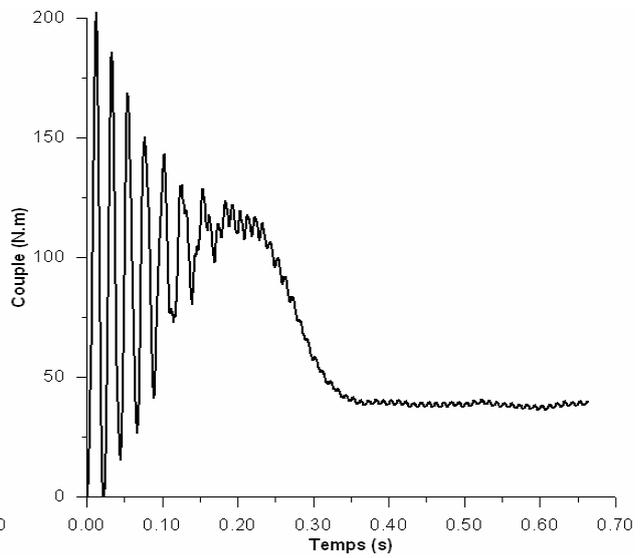
Figs. III. 26. Caractéristiques de démarrage à vide (1^{er} harmonique d'espace).



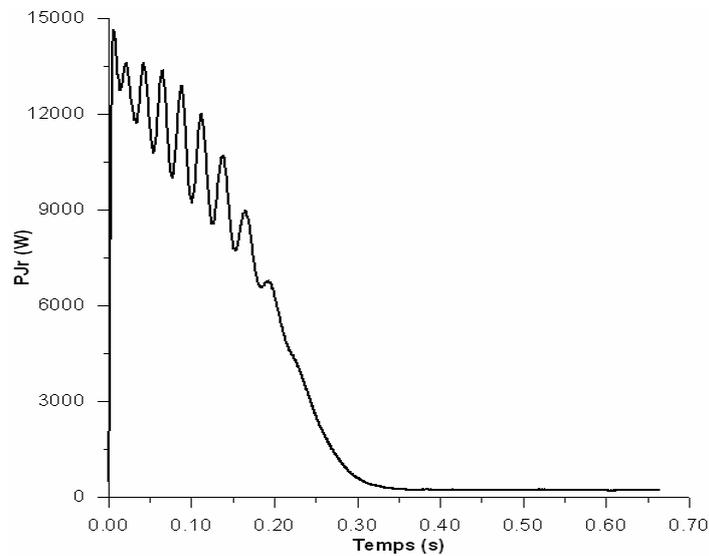
(a)- Courant absorbé.



(b)- Vitesse



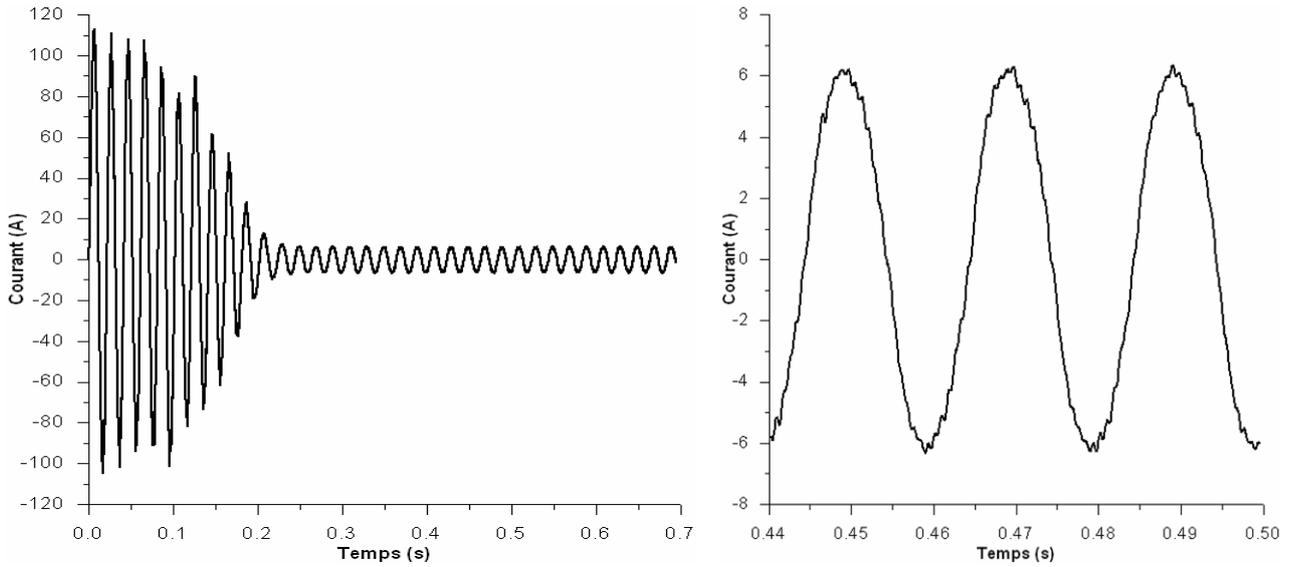
(c)- couple développé



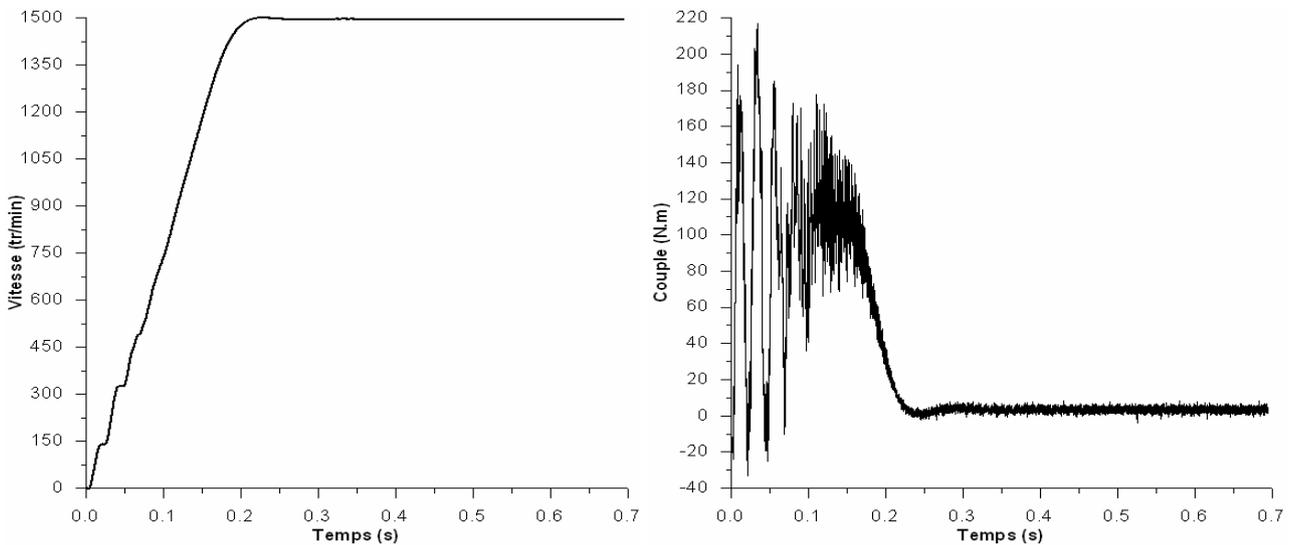
(d)- Pertes par effet Joule au rotor

Figs. III. 27. Caractéristiques de démarrage sous la charge nominale (1^{er} harmonique d'espace).

b)- Résultats de simulation avec prise en compte des harmoniques d'espace

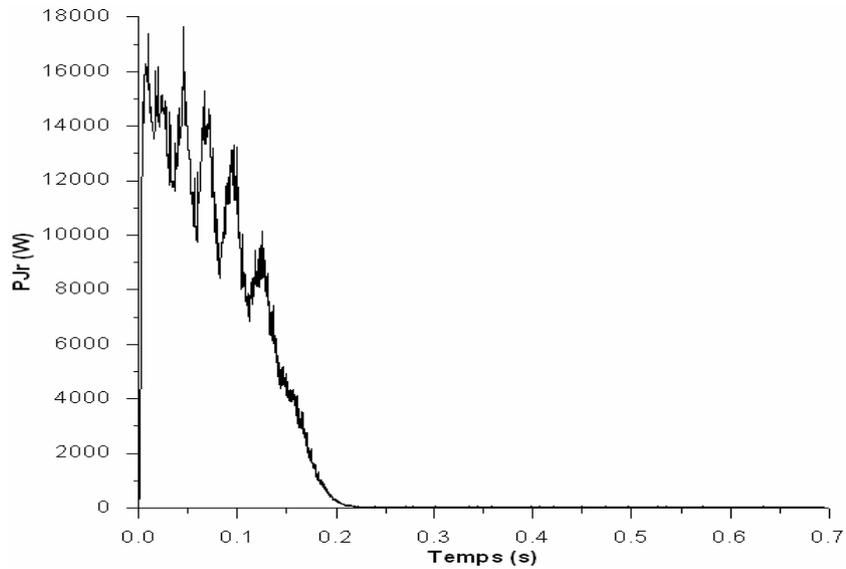


(a)- courant



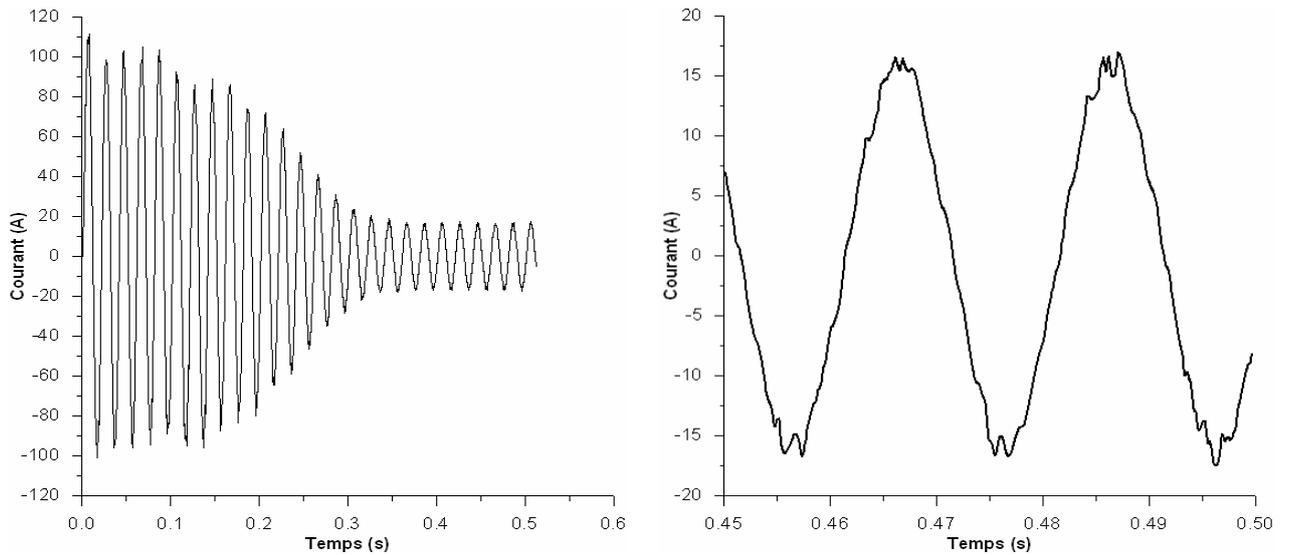
(b)- vitesse

(c)- couple

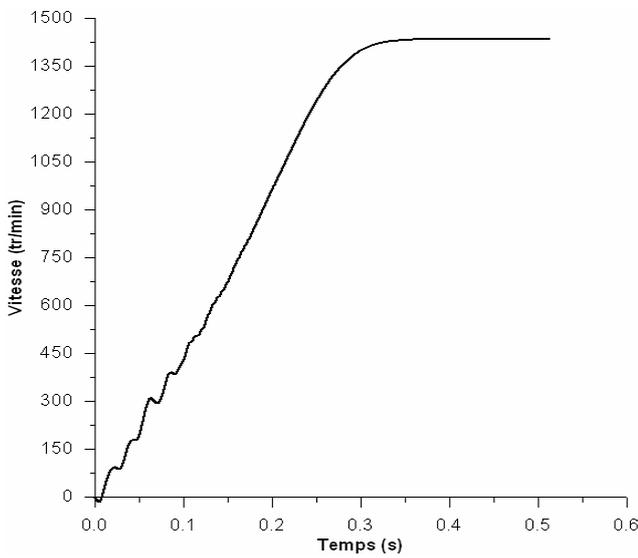


(d)- Pertes par effet Joule au rotor.

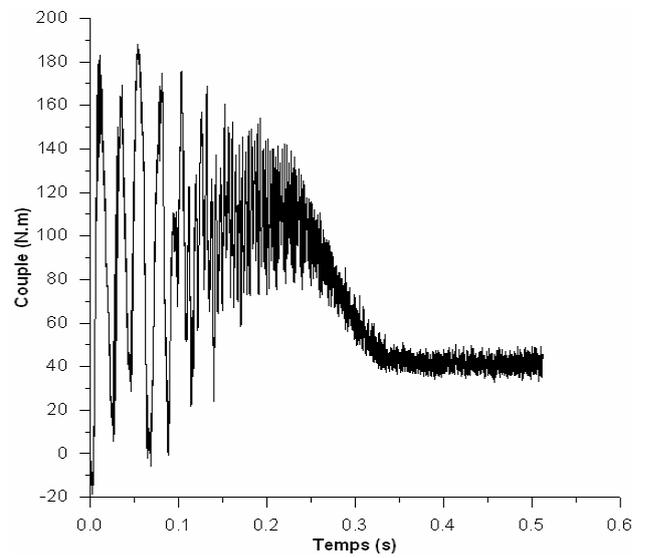
Fig. III. 28. Caractéristiques de démarrage à vide.



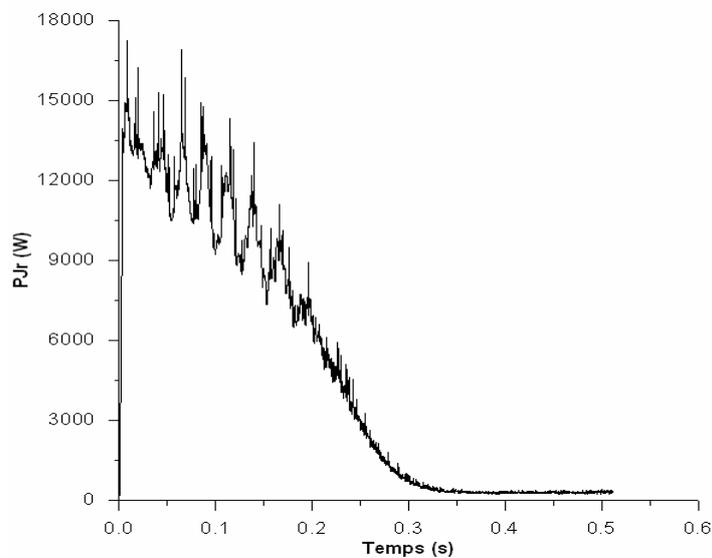
(a)- Courant de la phase *a*



(b)- Vitesse

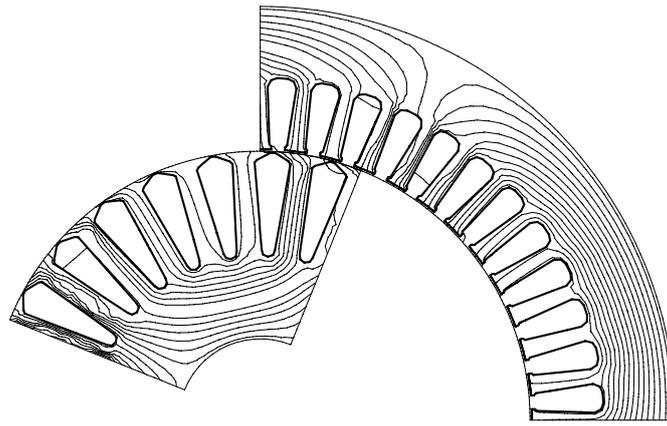


(c)- Couple



(d)- Pertes par effet Joule au rotor

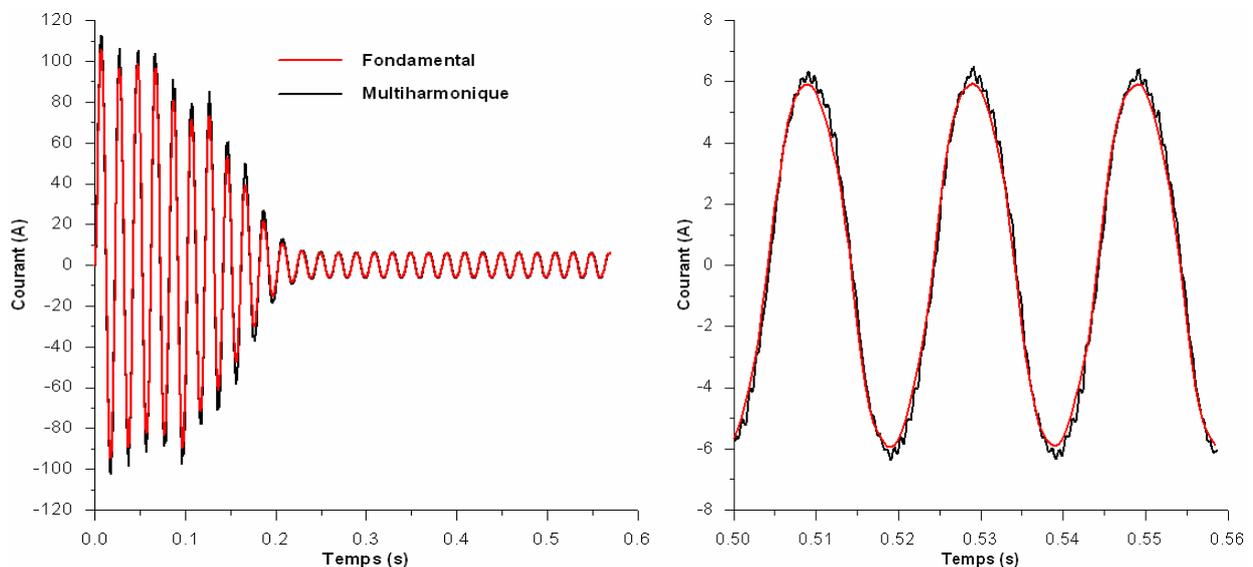
Fig. III. 29 Caractéristiques de démarrage sous charge nominale.

Fig. III. 30. Carte de champ en régime nominal à $t = 0.58$ s.

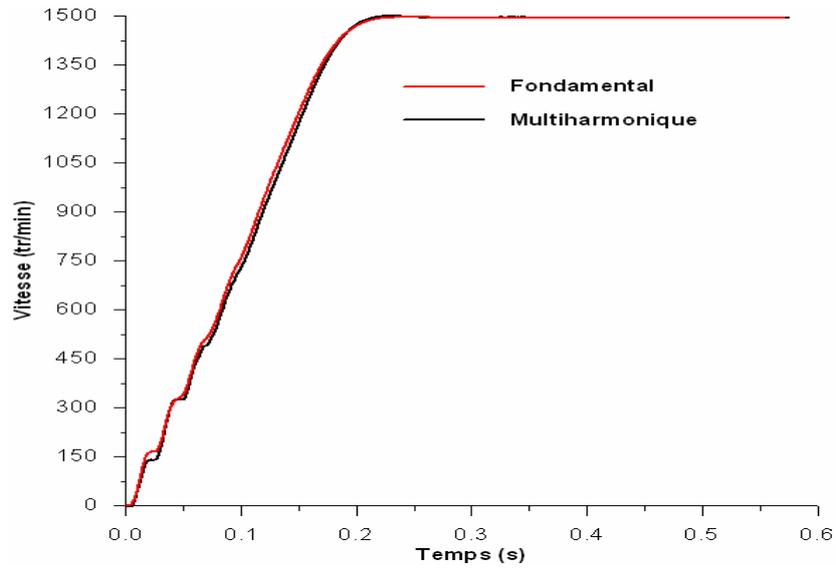
c)- Comparaisons et discussions

Les résultats de simulations obtenus avec et sans la prise en compte des harmoniques d'espace sont comparés sur les Figs III.31 et III.32 pour des démarrages à vide et en charge. Le premier constat que nous pouvons faire est la durée du régime transitoire, qui est pratiquement la même pour les deux cas. Pour le prototype étudié, à vide il est de 0.25 s, et en charge il est de 0.35 s. Les pas de calcul utilisés sont de 0.5 ms pour le cas du premier harmonique d'espace et de 0.05 ms pour le cas où les harmoniques d'espaces sont considérés.

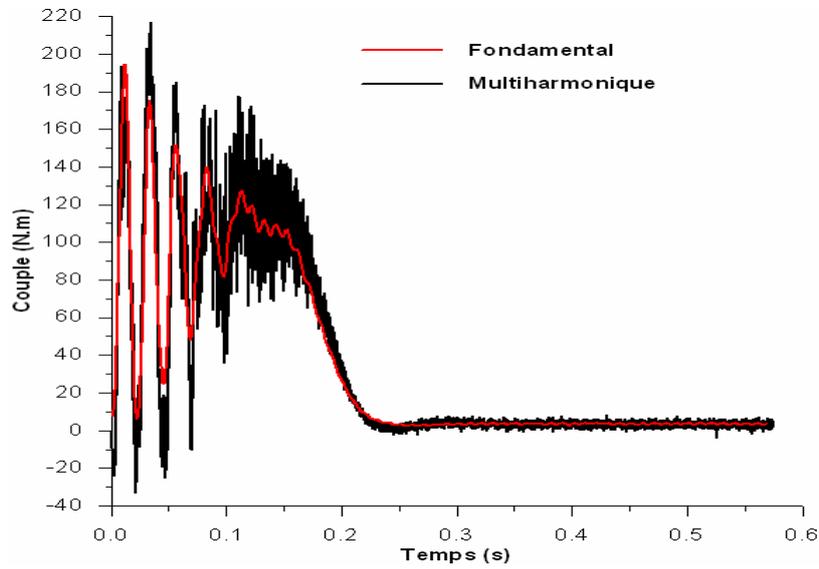
A vide les allures des courants calculés, avec ou sans la présence des harmoniques d'espace sont confondues. Par contre lors d'un démarrage en charge l'amplitude du courant est légèrement augmentée en régime permanent par la prise en compte des harmoniques d'espace. La montée en vitesse, à vide, est plus rapide dans le cas du premier harmonique d'espace, mais en régime permanent elle se stabilise à la même valeur. Lors du démarrage en charge, les vitesses avec ou sans prise en compte des harmoniques d'espace, sont confondues avec toutefois une légère différence en régime établi. En comparant les couples instantanés, que ce soit à vide ou en charge, celui obtenu dans le cas de la considération des harmoniques d'espace est très ondulé par rapport à celui obtenu avec juste le premier harmonique d'espace. Cependant, le couple moyen est légèrement faible. Notant que pour les pertes par effet Joule au rotor, la présence des harmoniques d'espace provoque des pertes supplémentaires qui atteignent 75 W en charge et 27 W à vide. Concernant le temps de calcul, il est beaucoup plus faible dans le cas du premier harmonique d'espace par rapport au cas où les harmoniques d'espace sont considérés.



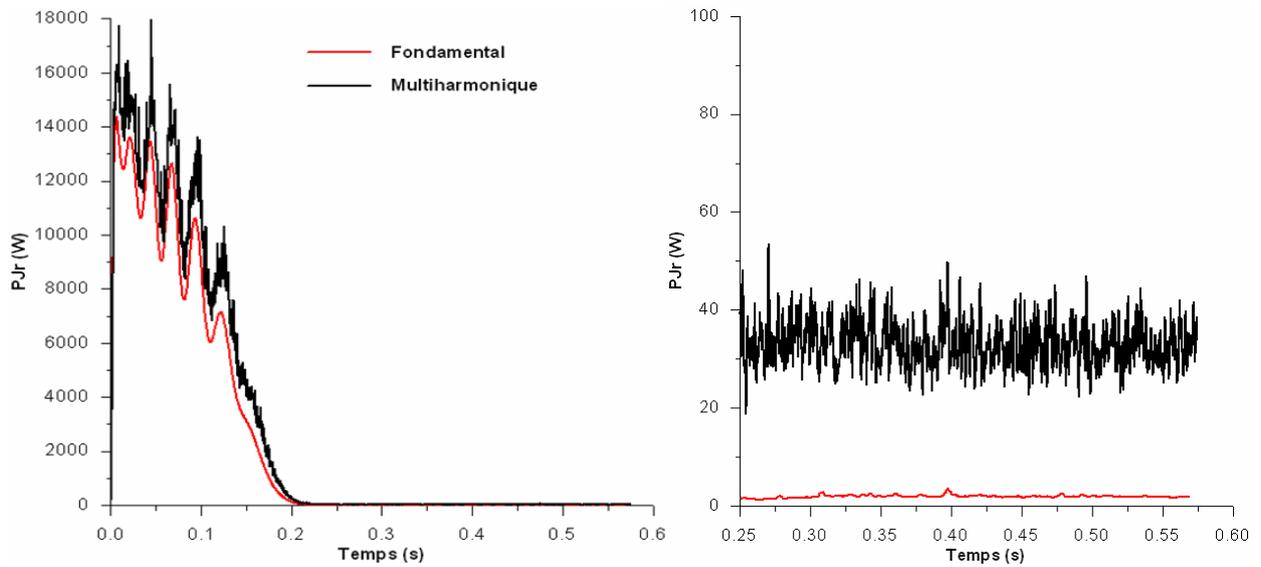
(a)- Courant absorbé.



(b)- Montée en vitesse.

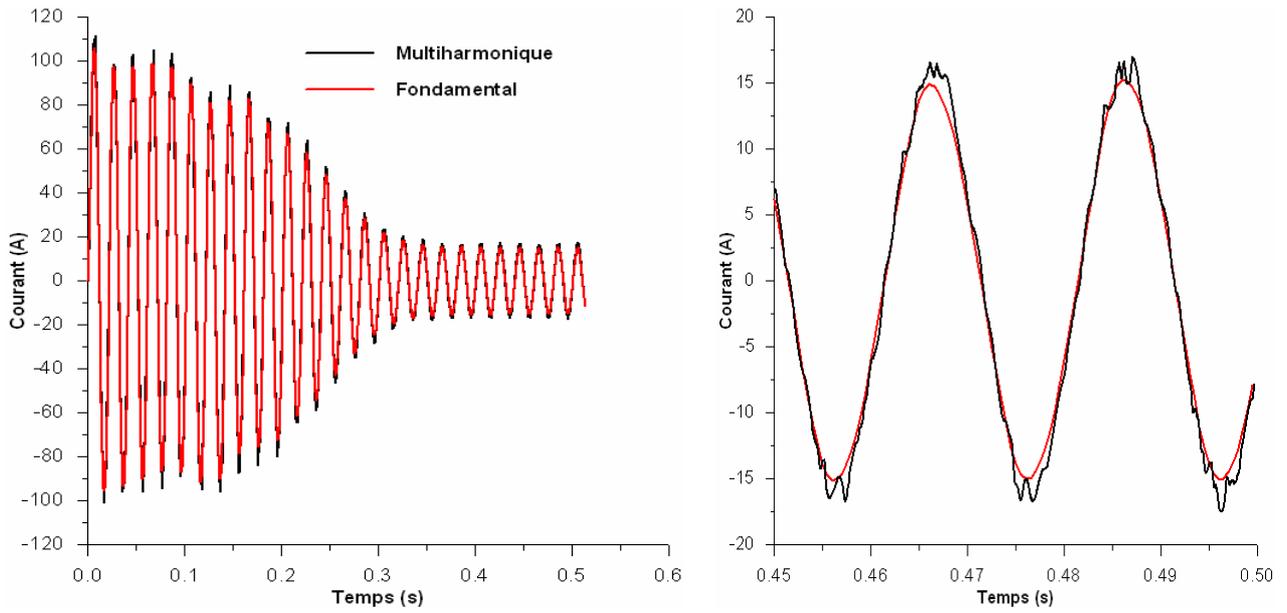


(c)- Couple développé.

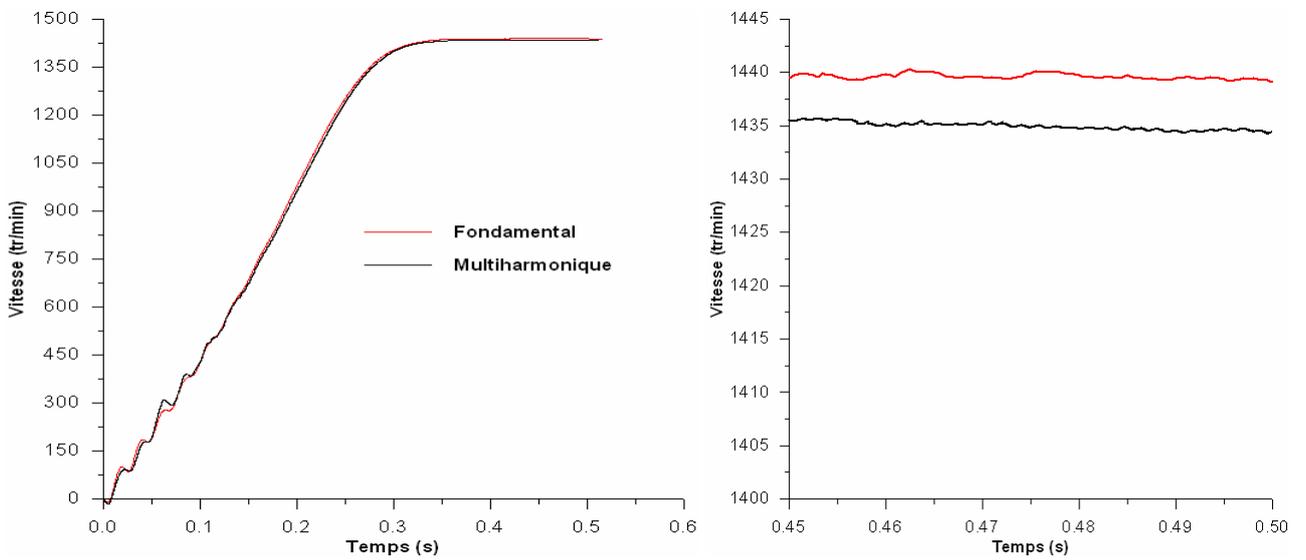


(d)- Pertes par effet Joule au rotor.

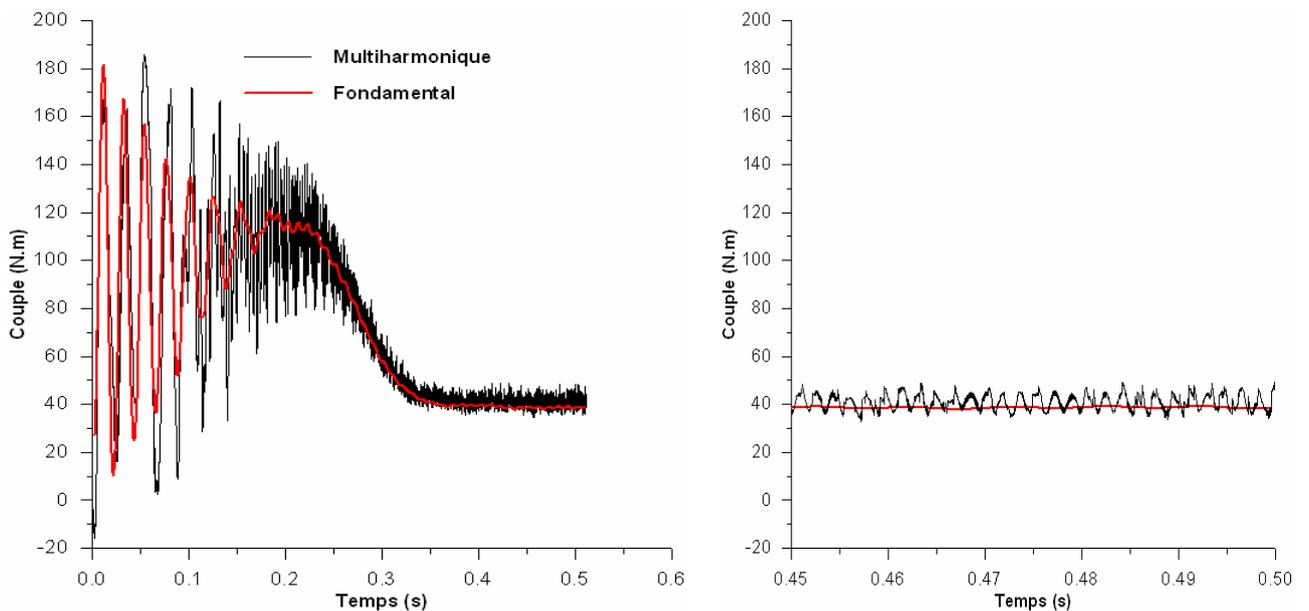
Figs. III. 31. Effet des harmoniques d'espaces lors d'un démarrage à vide.



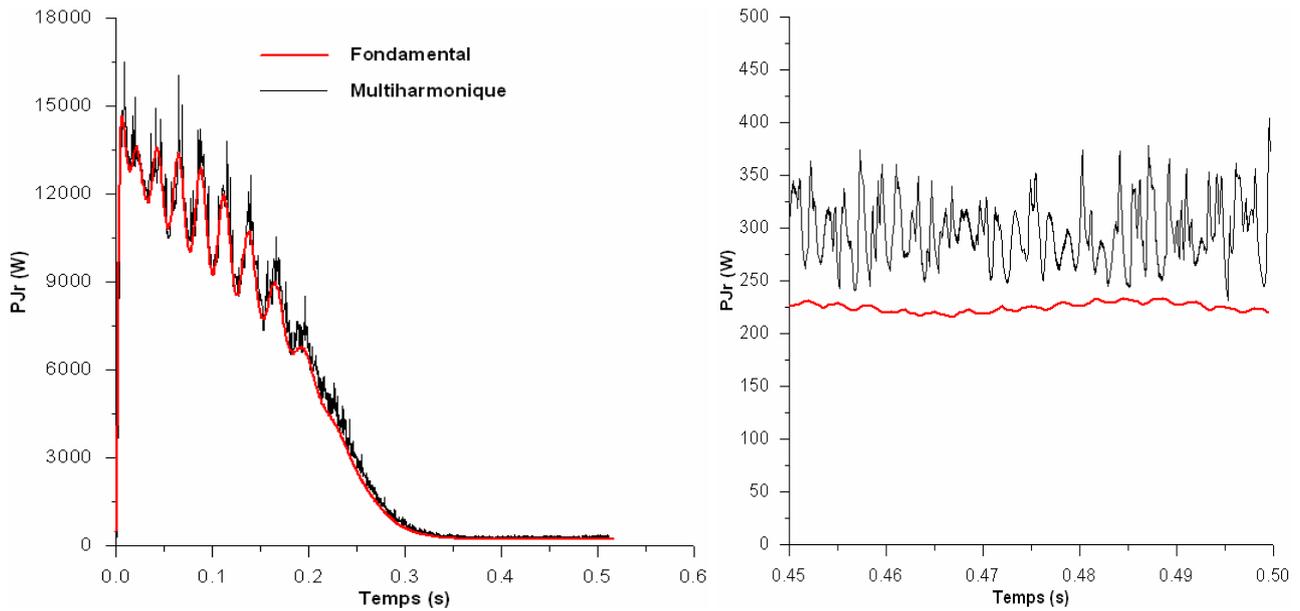
(a)- Courant absorbé.



(b)- Montée en vitesse.



(c)- Couple développé.



(d)- Pertes par effet Joule au rotor.

Figs. III. 32. Effet des harmoniques d'espaces lors d'un démarrage en charge.

III.10 Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une approche pour la modélisation électromagnétique des machines à induction en régime transitoire où le problème magnétodynamique est fortement couplé aux circuits électriques externes. La prise en compte du mouvement du rotor, dans cette approche, est réalisée à l'aide de la technique de couplage d'interface développée au chapitre II.

Dans une première étape, nous avons appliqué cette approche pour calculer le régime transitoire électrique des machines à induction. Dans une deuxième étape nous avons étendu l'approche développée à la prise en compte de l'interaction du problème électromagnétique avec la mécanique de mouvement du rotor pour calculer le régime transitoire lors d'un démarrage direct sur le réseau.

Les résultats obtenus lors du calcul des performances de la machine à induction à cage en régime transitoire dans le cas du couplage avec le premier harmonique d'espace sont comparables avec celles obtenues dans le cas de la prise en compte des harmoniques d'espace. L'avantage du couplage avec le premier harmonique d'espace, réside dans le temps de calcul très réduit par rapport au temps de calcul nécessaire à la prise en compte des harmoniques d'espace. Il faut noter aussi que les harmoniques d'espaces affectent les caractéristiques de la machine de point de vue qualitative et quantitative.

Du fait de la simplicité de sa formulation mathématique et du fait qu'elle utilise des maillages séparés pour les domaines fixe (stator) et mobile (rotor), cette méthode de couplage d'interface permet de prendre en compte le mouvement du rotor que ce soit à vitesse constante ou en régime transitoire. Le temps de calcul prohibitif lors de la prise en compte de mouvement, est fortement réduit par le couplage avec le premier harmonique d'espace qui tolère des pas d'intégration relativement important.

Dans le chapitre suivant nous allons confrontés nos résultats avec les résultats expérimentaux.

Chapitre IV

Validation expérimentale

IV.1. Introduction

Nous présentons, dans ce chapitre, des essais expérimentaux afin de valider nos modèles de calculs des machines à induction développés précédemment. Deux bancs d'essais sont utilisés pour effectuer ces essais. Un pour le moteur à rotor massif, au niveau du Laboratoire de Recherche en Electrotechnique de l'ENP et, un autre pour le moteur à cage au niveau du Laboratoire lié au GREEN à Nancy. Notant que les essais, en régime harmonique établi pour le cas du premier harmonique d'espace, sont effectués sur les deux types de moteur. Le reste des essais, à savoir la prise en compte des harmoniques d'espace dans le régime harmonique établi et le régime transitoire ont été réalisés sur la machine à cage.

Pour valider la méthode développée, pour la prise en compte des harmoniques d'espace dans le modèle magnétodynamique complexe et afin de mettre en évidence l'influence de ces derniers harmoniques sur la caractéristique couple-vitesse, la machine à cage au Laboratoire du GREEN a été dotée d'un bobinage qui permet de réaliser, selon le mode de connexion des bobines élémentaires, plusieurs configurations de bobinage afin de favoriser ou de réduire l'harmonique d'espace envisagé.

VI. 2 Dispositif expérimental

IV. 2.1 Caractéristiques des machines utilisées pour la validation

Les caractéristiques géométriques des deux machines sont données en annexe.

a)- Moteur à rotor massif

La première machine étudiée, présente un stator fabriqué par l'Entreprise « ELECTRO-INDUSTRIES » sise à Fréha dans la Wilaya de Tizi-Ouzou. Ce stator, tétra-polaire classique, possède 36 encoches. Le rotor à cage a été remplacé par un rotor massif (en acier de type XC18) réalisé à l'ENP (Fig. IV. 1).



Fig. IV.1. Rotor massif utilisé.

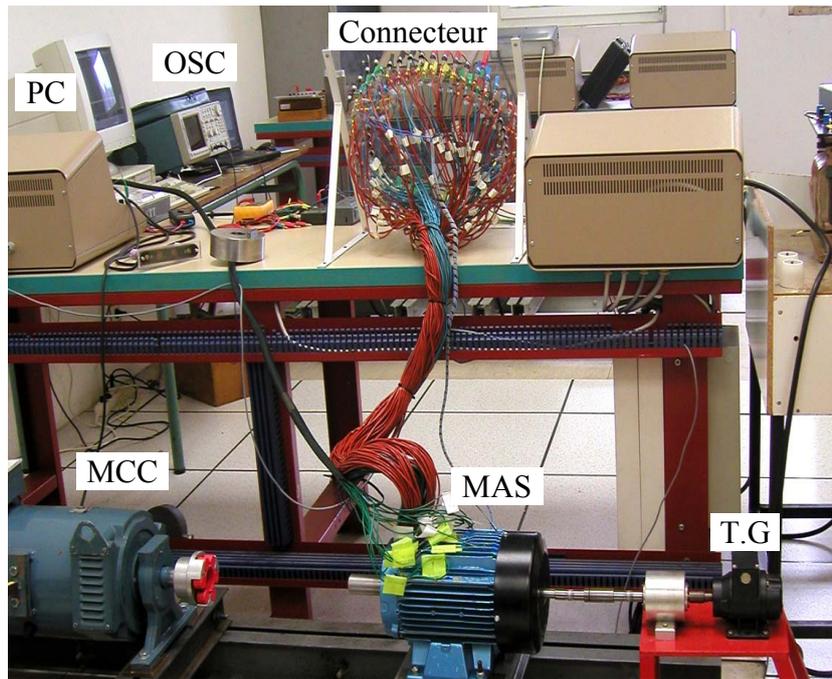
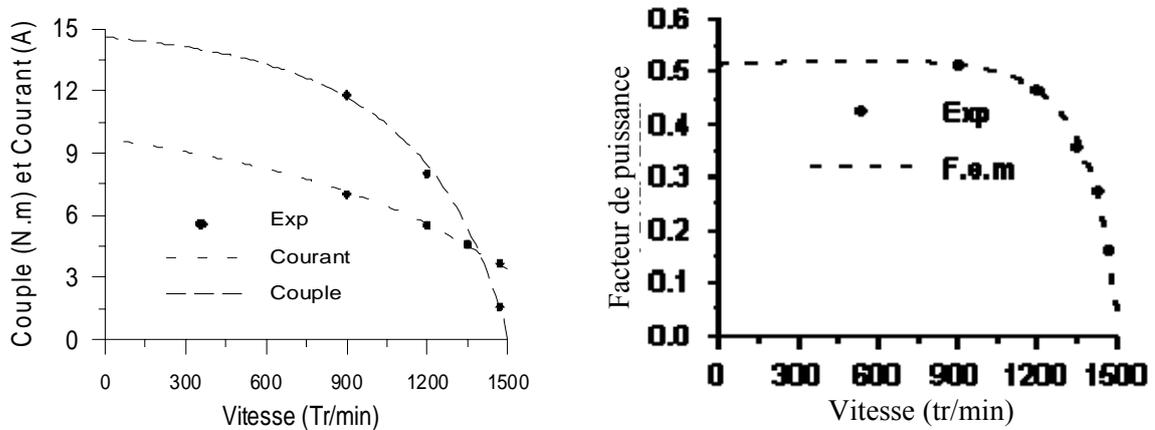


Fig. IV. 4. Banc d’essai de la machine à induction à cage.

IV.3 Validation du modèle magnétodynamique complexe

IV.3.1 Régime harmonique avec le premier harmonique d’espace

On compare, dans ce paragraphe, les résultats obtenus avec le modèle magnétodynamique complexe dans le cas où seul le fondamental des harmoniques d’espace est considéré au rotor. Sous tension d’alimentation nominale et sachant que ces deux machines fonctionnent à un niveau de saturation élevé, on présente respectivement, sur les Figs. IV. 5 et IV. 6, les performances des deux machines étudiées en régime permanent, à savoir le couple, le courant de phase et le facteur de puissance en fonction de la vitesse de rotation. Les résultats calculés et les relevés expérimentaux, au niveau de la zone de fonctionnement stable accessible aux mesures, montrent une bonne corrélation pour les deux types de machines.



a)- Courant de phase et couple développé

b)- Facteur de puissance

Fig. IV. 5. Caractéristiques de la machine à rotor massif sous tension nominale.

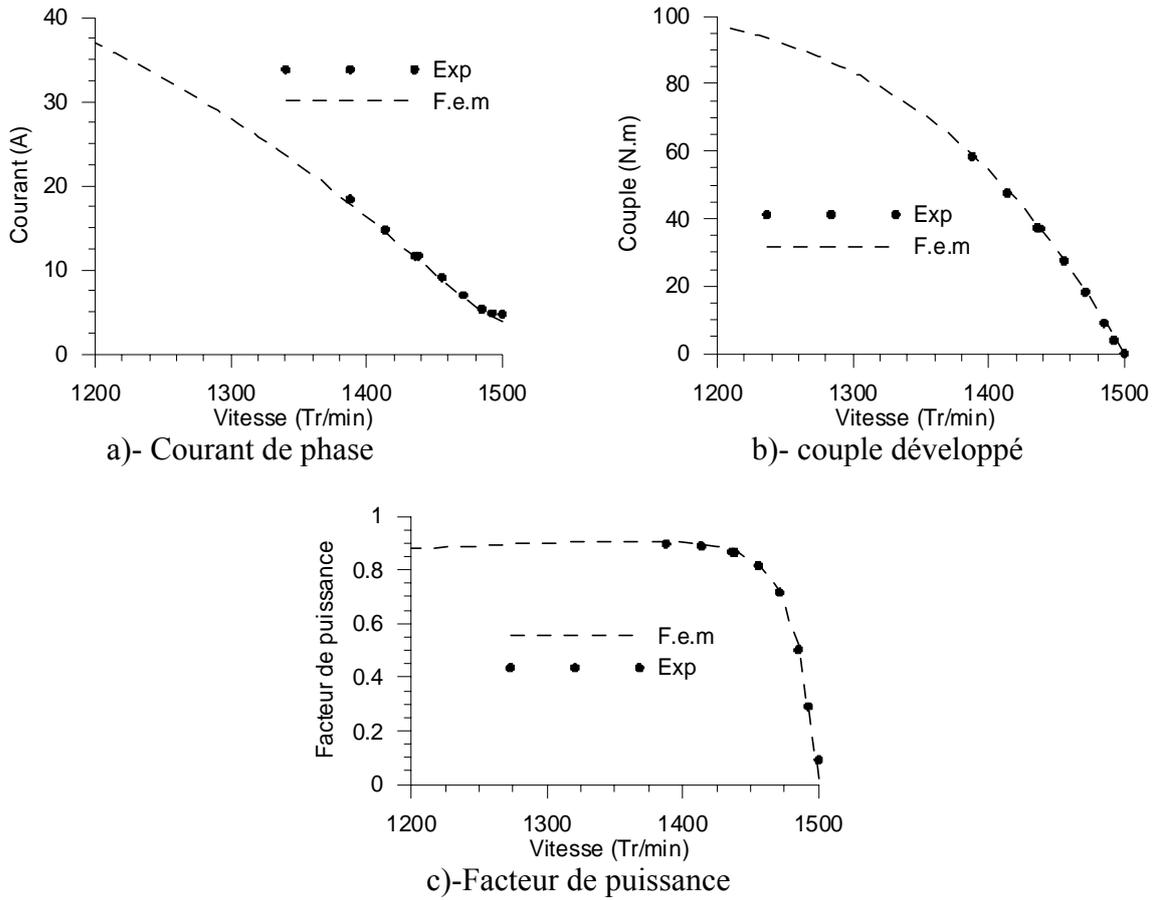


Fig. IV.6. Caractéristiques de la machine à cage sous la tension nominale.

IV.3.2. Régime harmonique avec prise en compte des harmoniques d’espace

Pour valider les résultats obtenus en présence des harmoniques d’espace, on commence par présenter quelques configurations du bobinage et les harmoniques du potentiel vecteur correspondant dans l’entrefer de la machine au niveau de l’interface de couplage.

Le bobinage de la machine étudiée comporte donc 48 bobines élémentaires dont les sorties (au nombre de 96) sont reliées à un connecteur. Chaque phase contient 16 bobines élémentaires, donc 4 bobines par pôle et par phase numérotées comme c’est indiqué par la Fig. IV.7 (pour la phase a par exemple).

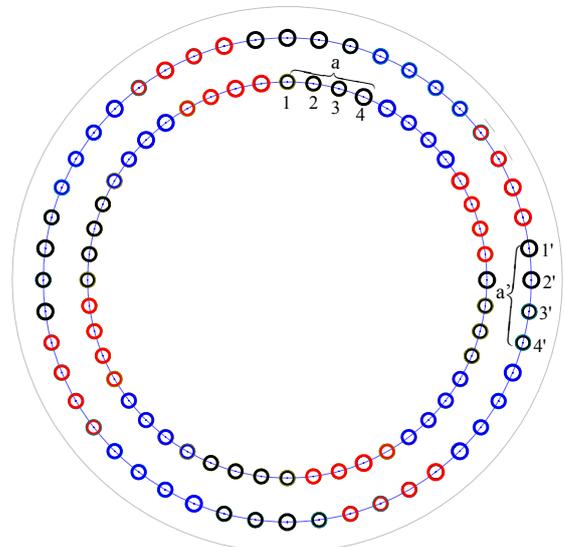
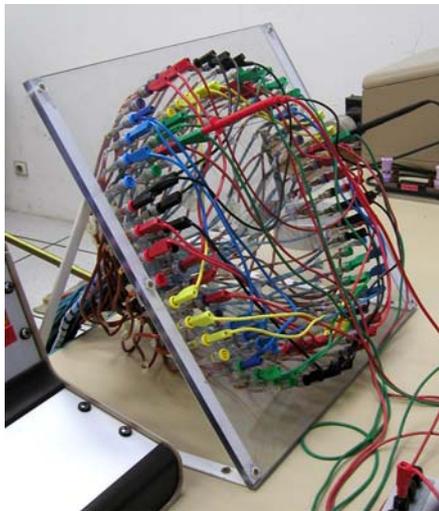


Fig. IV. 7. Sorties des bobines statoriques élémentaires.

Au niveau des calculs effectués par éléments finis en utilisant la technique de couplage d'interface, on peut accéder facilement au potentiel vecteur des nœuds situés dans l'interface de couplage. Ainsi, on peut déterminer les harmoniques d'espaces du potentiel vecteur correspondant à chaque mode de connexion des bobines. Nous présentons ci-dessous le potentiel vecteur obtenu sur l'interface de couplage pour quelques configurations de bobinage. La Figure IV. 8, dans le cas où toutes les bobines sont alimentées, montre que les harmoniques 11 et 13 sont fortement réduits par le raccourcissement du pas de bobinage à 11/12.

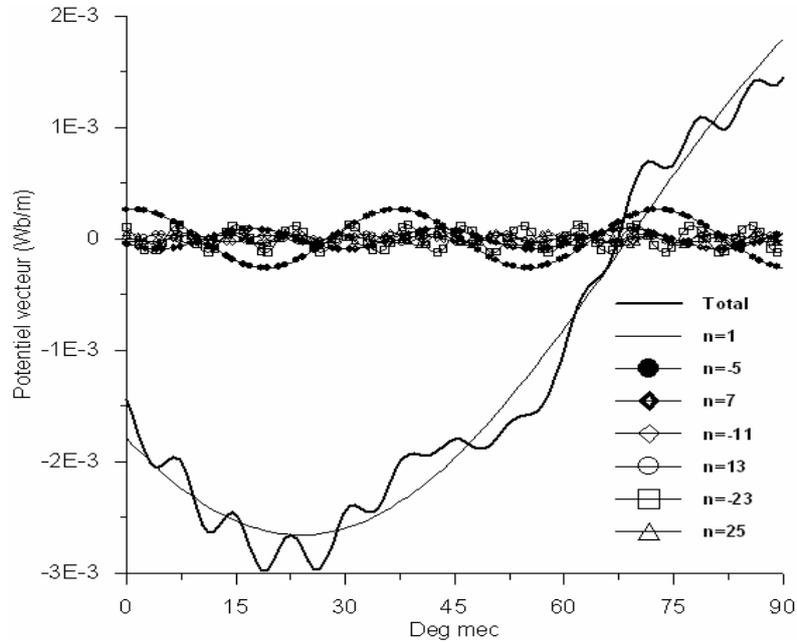
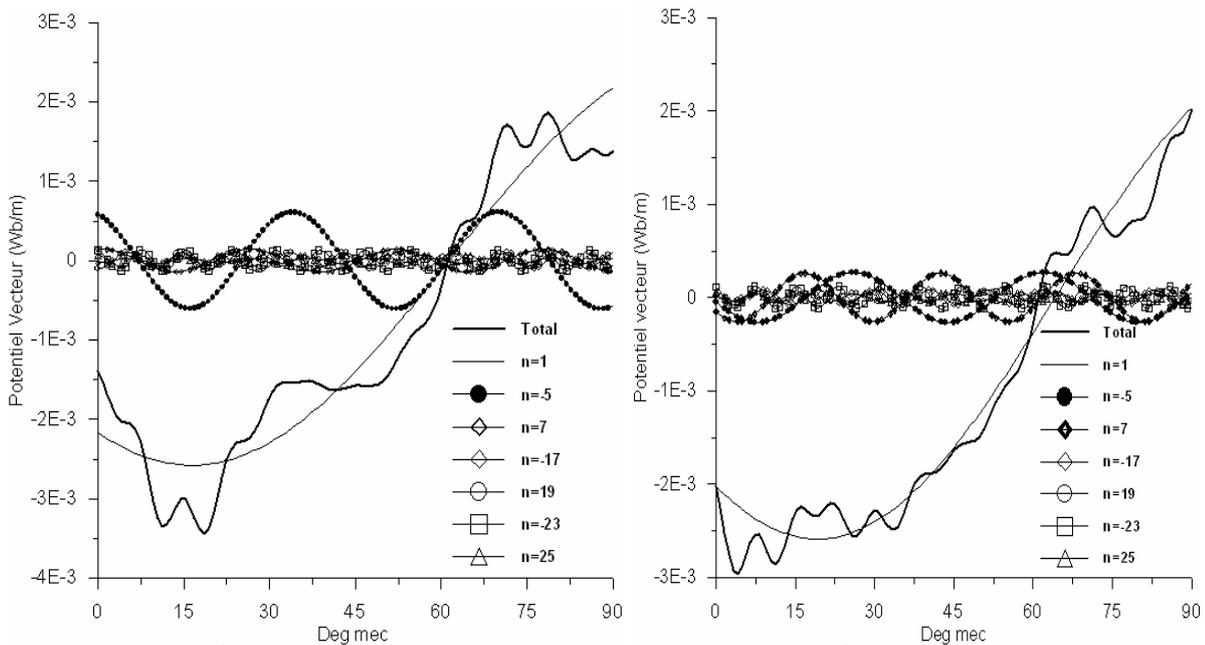


Fig. IV.8. Potentiel vecteur sur l'interface de couplage (toutes les bobines)

Si on déconnecte la 1^{ère} ou 2^{ème} bobine, le potentiel vecteur sur l'interface de couplage, représenté sur les Figs. IV. 9 (a) et (b), montre qu'on favorise fortement l'harmonique 5 dans le premier cas et les harmoniques 5 et 7 dans le deuxième cas.



a)- 1^{ère} bobine déconnectée

b)- 2^{ème} bobine déconnectée

Fig. IV. 9. Potentiel vecteur sur l'interface de couplage (cas d'une bobine déconnectée)

Une autre configuration peut conduire à deux autres possibilités, c'est le cas où deux bobines par pôle et par phase sont déconnectées. Si on déconnecte deux bobines successives (1 et 2) ou (2 et 3) on obtient le potentiel vecteur représenté par les Figs. IV. 10 (a) et (b) respectivement. On constate, dans ce cas, une forte présence des harmoniques 5 et 7.

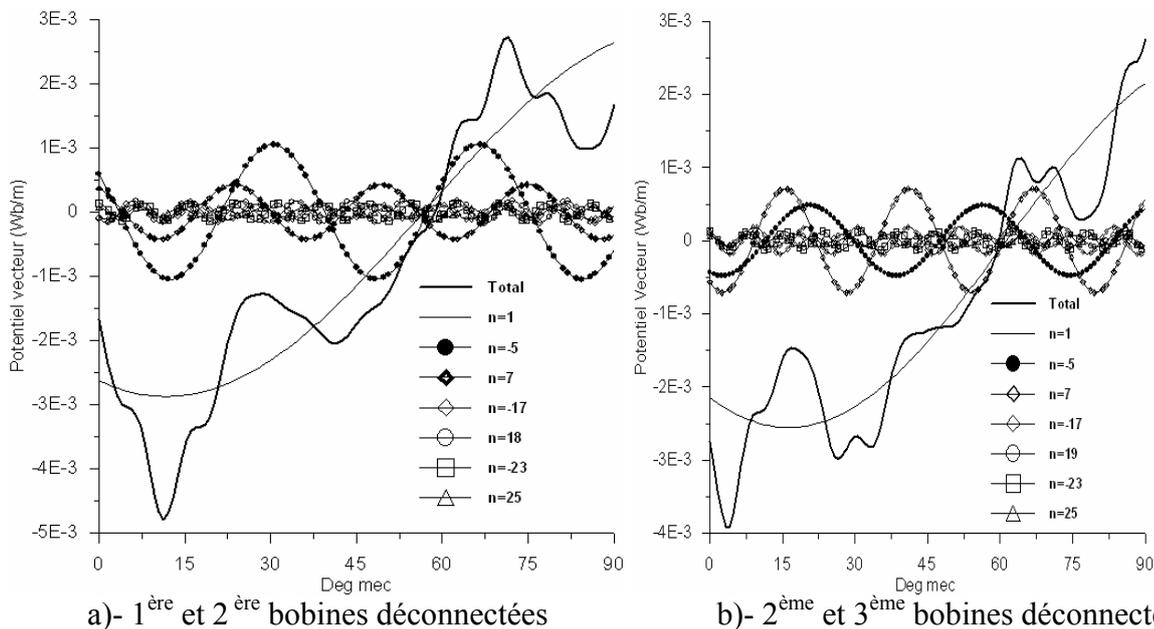


Fig. IV. 10. Potentiel vecteur sur l'interface de couplage (cas de deux bobines déconnectées)

IV. 3.3. Mesure du couple

La mesure du couple, pour les moteurs à induction en régime dynamique, peut être effectuée en utilisant des sondes piézo-électriques entre le stator et le bâti [108]. Dans notre cas, nous avons opté pour une méthode indirecte, fréquemment utilisée [109], qui consiste à déterminer l'accélération angulaire de la partie tournante à partir d'un enregistrement de la vitesse à l'aide d'une génératrice tachymétrique. La connaissance des paramètres mécaniques (moment d'inertie des parties tournantes, coefficients de frottement) est nécessaire pour déduire le couple à l'aide de l'équation mécanique de la machine. A l'aide de cette méthode de mesure, il est difficile de déterminer le couple sans lui ajouter une inertie additionnelle, car son démarrage à vide est trop rapide. Dans le cas du moteur étudié, pour pouvoir déterminer correctement le couple à partir de la vitesse et de l'équation mécanique un volant d'inertie de 0.107 kg.m^2 , soit 7.64 fois l'inertie du moteur seul, est accouplé au rotor afin d'aboutir à des résultats satisfaisants.

La caractéristique couple-vitesse, sur toute la gamme de vitesse comprise entre -1500 et 1500 tr/min, est obtenue en fonctionnement frein (-1500 tr/min à 0) et en fonctionnement moteur (0 à 1500 tr/min). Ce fonctionnement est obtenu par une simple inversion du sens de rotation par permutation de deux phases au stator.

IV. 3.4. Comparaison des résultats

On présente, dans ce paragraphe, une comparaison des caractéristiques couple-vitesse obtenues à l'aide du modèle magnétodynamique complexe que l'on a développé et celles obtenues expérimentalement pour les configurations des bobinages illustrées précédemment. Sachant que les équations de circuits sont directement couplées à l'équation du champ, alors les résistances et les inductances de fuite des têtes de bobines, pour les différentes configurations de bobinages, qui sont nécessaires pour la résolution des équations de circuit, sont données en annexe C. Afin de rester dans les limites thermiques admissibles pour le courant statorique, le moteur est alimenté par une tension sinusoïdale de 70 V de valeur efficace entre phase et neutre.

On présente (Fig. IV. 11), pour la configuration du bobinage où la 1^{ère} bobine est déconnectée, la vitesse mesurée et la caractéristique couple-vitesse correspondante. L'harmonique 5 crée effectivement un couple asynchrone important autour de -300 tr/min (vitesse synchrone de l'harmonique 5). Par rapport au couple fondamental, on constate que les harmoniques d'espace diminuent le couple dans le fonctionnement moteur et l'augmentent dans le fonctionnement frein. L'allure de variation du couple calculé, à l'aide du modèle développé, suit dans l'ensemble celle du couple mesuré. Ainsi on constate une bonne concordance au voisinage des zones stables des harmoniques 1 et 5. La concordance de ces résultats est moins bonne pour des vitesses inférieures à (-300 tr/min).

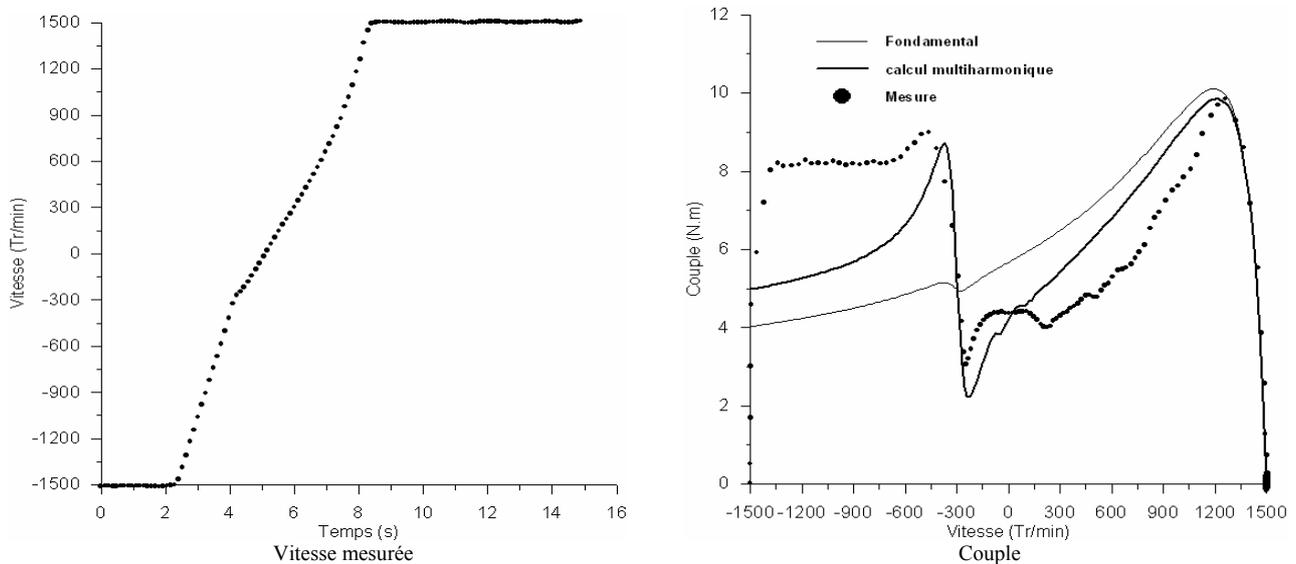


Fig. IV.11. Vitesse mesurée-temps et caractéristique couple-vitesse (1^{ère} bobine déconnectée).

On présente (Fig. IV. 12), pour la 2^{ème} configuration du bobinage (2^{ème} bobine déconnectée), la vitesse mesurée et la caractéristique couple-vitesse correspondante. En plus de la présence de l'harmonique 5, qui est moins fort par rapport au cas précédent, il y a la présence de l'harmonique 7 que ce soit pour les résultats calculés et ceux issus des mesures. Les résultats calculés et ceux mesurés concordent assez bien dans la zone de fonctionnement en moteur. Dans l'intervalle de vitesse (-1500 tr/min à 200 tr/min) une importante différence est enregistrée entre le couple calculé et mesuré.

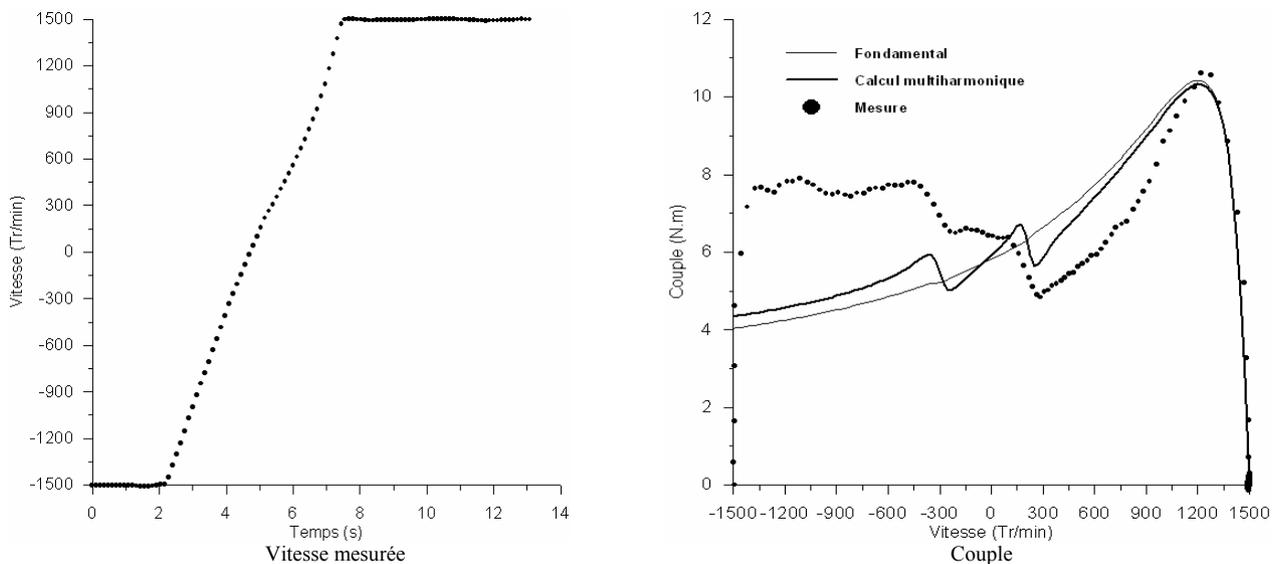


Fig. IV.12 . Vitesse mesurée-temps et caractéristique couple-vitesse (2^{ème} bobine déconnectée).

Pour la troisième configuration du bobinage (1^{ère} et 2^{ème} bobines déconnectées), on a représenté (Fig.IV.13) la vitesse mesurée et la caractéristique couple-vitesse correspondante. On constate que les calculs effectués concordent avec les mesures sur la zone stable de l'harmonique 5. L'importance de l'amplitude de ce couple harmonique, au voisinage de -300 tr/min, rend le couple développé négatif; donc résistant la machine peut donc être callée à cette vitesse de rotation. C'est ce que confirment les résultats expérimentaux, qui montrent clairement le phénomène de calage de la machine à la vitesse de (-270 tr/min), point stable sur la caractéristique couple-vitesse.

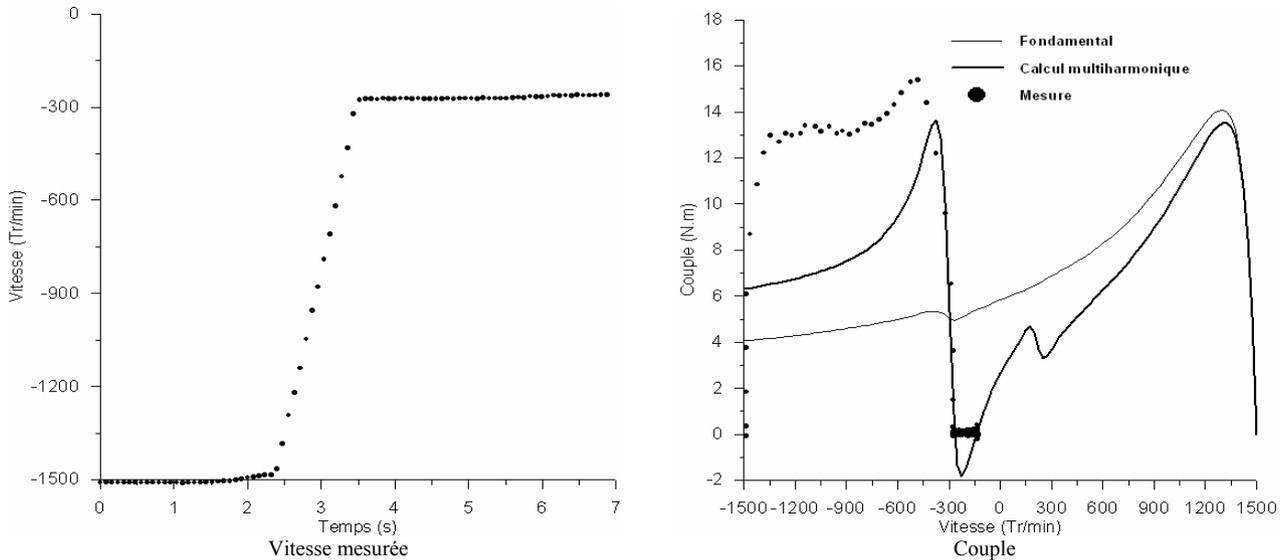


Fig. IV.13. Vitesse mesurée-temps et caractéristique couple-vitesse (1^{ère} et 2^{ème} bobines déconnectées).

La vitesse mesurée et la caractéristique couple-vitesse, pour la quatrième et dernière configuration du bobinage (cas où la 2^{ème} et la 3^{ème} bobine sont déconnectées), sont présentées sur les Figs. IV.14. Les résultats calculés et ceux mesurés montrent la présence importante des harmoniques 5 et 7. Une bonne concordance est enregistrée jusqu'à la vitesse d'environ 150 tr/min; et au delà, dans la zone de fonctionnement en frein, la concordance quantitative des résultats est moins nette.

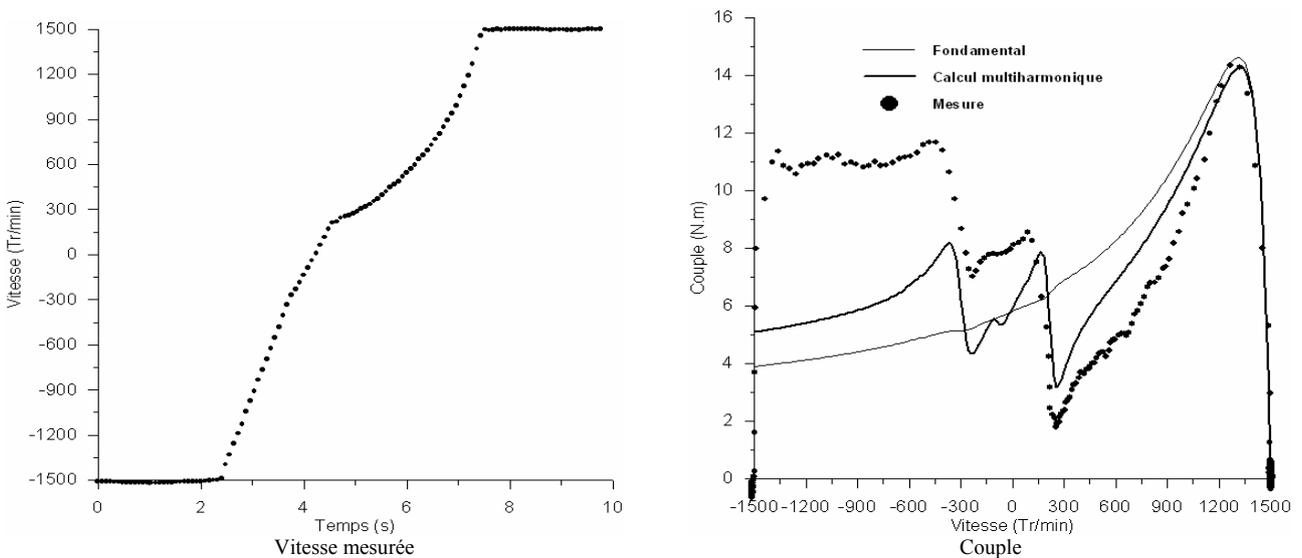


Fig.IV.14. Vitesse mesurée-temps et caractéristique couple-vitesse (2^{ème} et 3^{ème} bobines déconnectées).

Les différences enregistrées entre les résultats expérimentaux et les résultats calculés, surtout dans la zone de fonctionnement frein de la machine étudiée, sont dues aux couples parasites produits par

les courants inter-barres. Plusieurs auteurs ont observés ce phénomène lors de la mesure du couple, et ils ont montré que les courants inter-barres sont à l'origine d'importants couples additionnels mais aussi de pertes fer supplémentaires non négligeables [5], [6], [57], [110], [111], [112], [113], [114]. Les courants inter-barres circulent, entre deux barres successives via les tôles magnétiques, sous l'action de la différence des champs électromoteurs entre les barres. Ce phénomène, très marquant, est provoqué par la mauvaise isolation entre les tôles et les barres dans les moteurs à cage moulée. Notant que l'effet de ces courants est encore plus important dans la zone de fonctionnement en frein où les harmoniques d'espace présentent des fréquences importantes par rapport au fondamental.

Dans le modèle électromagnétique développé dans notre étude, on n'a pas tenu compte de ce phénomène typiquement 3D. D'ailleurs, il est extrêmement difficile de l'introduire dans une modélisation par éléments finis, même en 3D. Certains auteurs [115], [116] ont tenté de modéliser ce phénomène, en associant un modèle éléments finis avec un modèle circuit dans lequel ils introduisent des résistances inter-barres; malheureusement la mesure de ces résistances est assez délicate [117].

Vu que l'inclinaison des encoches favorise ce phénomène de courants inter-barres, on a alors refait les mêmes essais, sous les mêmes conditions, avec un rotor à encoches droites. Les résultats expérimentaux obtenus précédemment, avec un rotor à encoches inclinées d'un pas dentaire et ceux obtenus avec un rotor à encoches droites, sont comparés sur la Fig. IV.15. Cette dernière montre que l'effet des courants inter-barres diminue dans le cas d'un rotor à encoches droites mais qu'il n'est pas éliminé. Ceci confirme donc l'existence de ce phénomène dans tous les rotors à cage [118]. L'élimination totale de ce phénomène ne peut se faire que par un rotor dont les tôles sont isolées des barres de la cage.

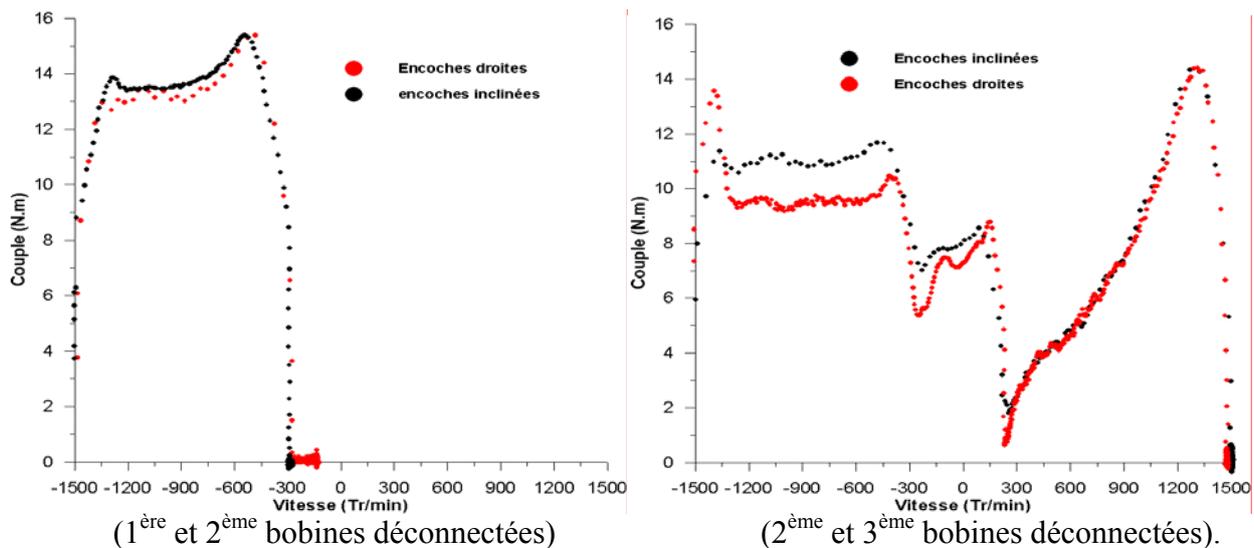


Fig. IV.15. Comparaison des caractéristiques mécaniques avec et sans biaisage des encoches rotoriques.

IV.4. Régime transitoire électrique

On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude du régime transitoire électrique où la vitesse de la machine est considérée comme constante. Cela peut avoir lieu, comme c'est déjà précisé, lorsque la machine fonctionne en régime permanent à une vitesse de rotation donnée Ω et où on coupe brusquement l'alimentation durant un intervalle de temps suffisant pour annuler les courants dans les phases sans changement de vitesse. La machine continue à tourner, avec son inertie ensuite, on réalimente la machine. Sous tension nominale sinusoïdale, on a représenté (Fig. IV.16) le transitoire du courant absorbé par le moteur à faible glissement en utilisant le modèle développé. Le régime transitoire, lors d'une perte brusque de l'alimentation, est très rapide. Le moteur se remet à son

régime de fonctionnement, après le rétablissement de son alimentation, dans une durée d'environ 60 ms, donc au bout de trois périodes électriques.

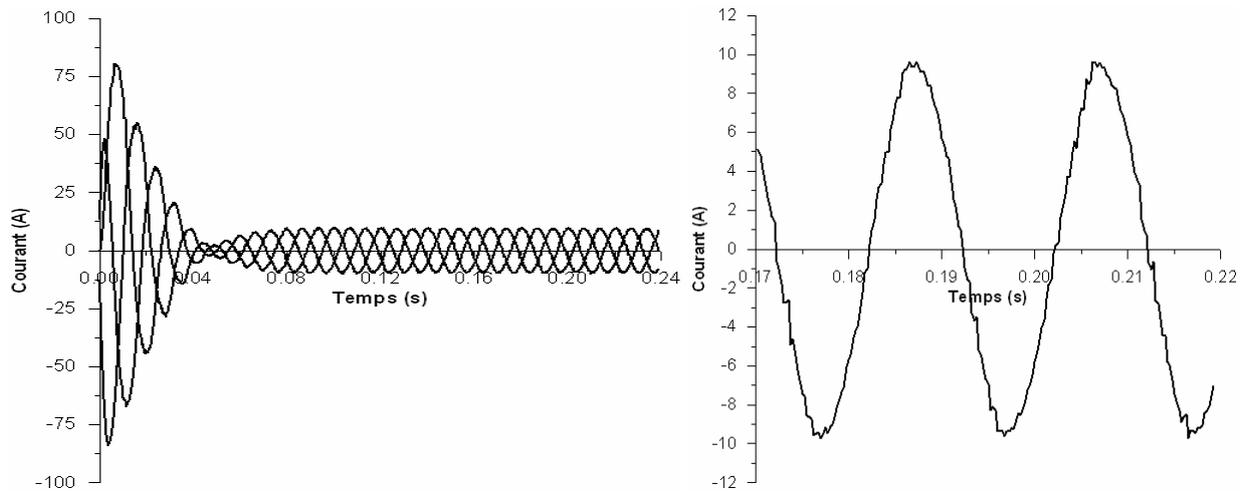


Fig. IV. 16. Transitoire du courant absorbé par la machine sous tension sinusoïdale ($U=380\text{ V}$).

Sous une tension d'alimentation sinusoïdale, nous avons comparé, (voir Fig. IV.17), le courant calculé et le courant mesuré après établissement du régime permanent. Ces deux résultats montrent une très bonne concordance.

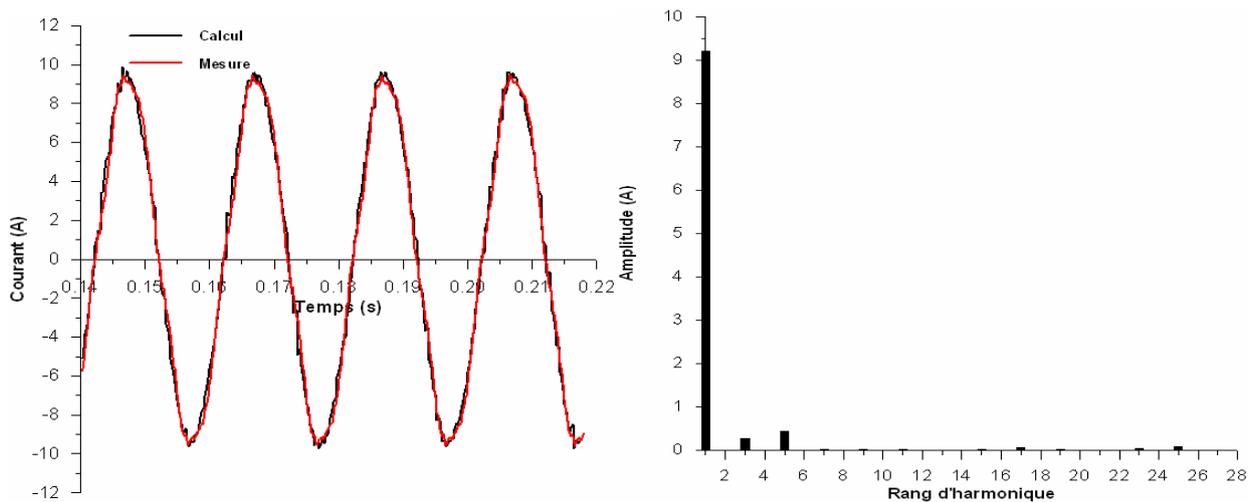


Fig. IV.17. Courant absorbé par la machine en régime permanent sous tension sinusoïdale ($U=380\text{V}$).

Afin de comparer tout le régime transitoire électrique et de garder la vitesse plus ou moins constante, on a accouplé sur l'arbre de la machine un volant de moment d'inertie plus important que celui de la machine elle-même. Les résultats expérimentaux obtenus sont donnés sur la Fig. IV.18. Celle-ci représente l'image prise directement sur l'écran de l'oscilloscope utilisé. Sachant que la tension d'alimentation est très perturbée, des harmoniques temporelles de rang 3 et 5 peuvent alors apparaître. C'est ce que confirment les figures IV. 19 (a) et (b) représentant, respectivement, la tension simple de la phase (a) et son spectre harmonique. Notant que l'harmonique de rang 3 s'élimine dans la tension composée. Sur les figures IV.20 et IV.21, nous avons représenté le transitoire, mesuré et calculé, de la vitesse et du courant absorbé par la phase (a).

La perturbation de la vitesse de rotation de la machine (Fig.IV.20) lors du ré-enclenchement de l'alimentation se répercute directement sur le transitoire du courant (Fig.IV.21-a). La machine reprend son fonctionnement normal après 0.15 s environ. Les résultats calculés et mesurés présentent la même allure de variation, les différences enregistrées dans le transitoire sont dues au fait que dans le calcul il est très difficile d'avoir les mêmes conditions initiales que dans la mesure

lors du ré-enclenchement de l'alimentation. Pour se rapprocher des conditions de l'expérimental nous avons procédé à une simulation du démarrage et dès que le régime permanent est atteint nous insérons une résistance très grande sur chaque phase pour annuler le courant. Après un intervalle de temps nous annulons les résistances additionnelles. Ainsi le régime transitoire électrique est obtenu. L'analyse harmonique du courant absorbé montre la présence des harmonique 3 et 5 dues à la saturation et à la forme de la tension d'alimentation (Fig. IV. 21-b).

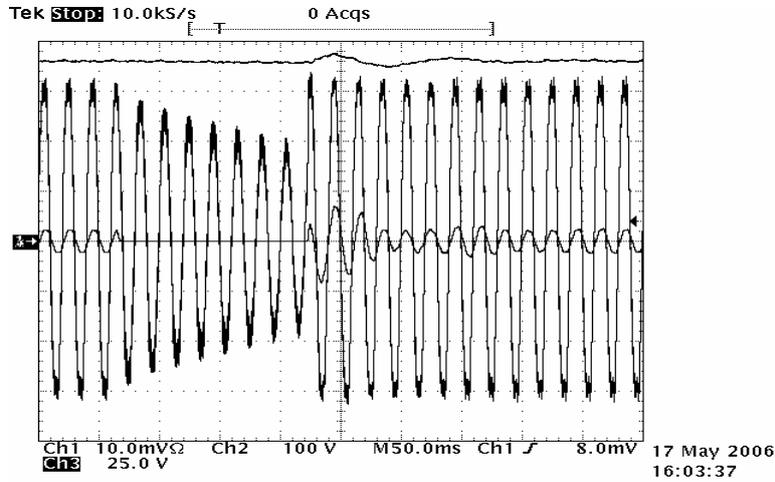
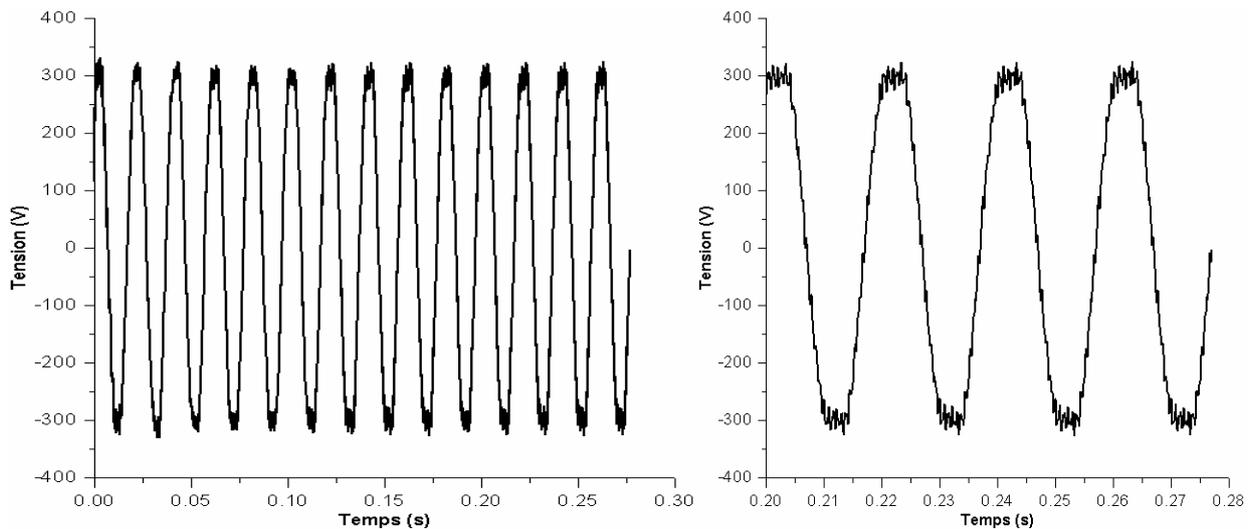
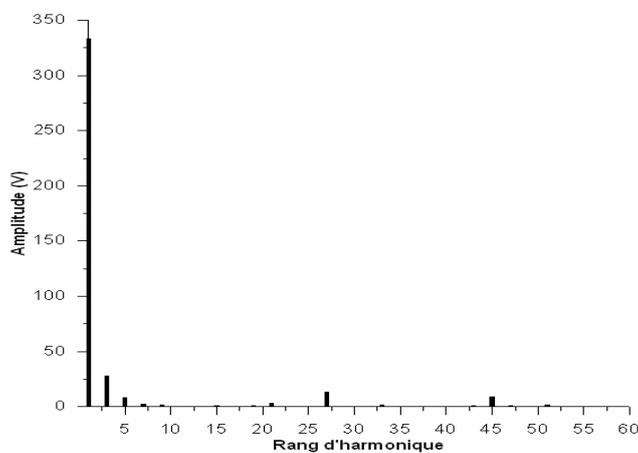


Fig. IV.18. Transitoire électrique (Image de l'écran de l'oscilloscope).



(a)- Tension simple aux bornes de la phase a.



(b)- Spectre harmonique de la tension simple de la phase a.

Fig. IV.19. Tension simple de la phase a et son spectre harmonique.

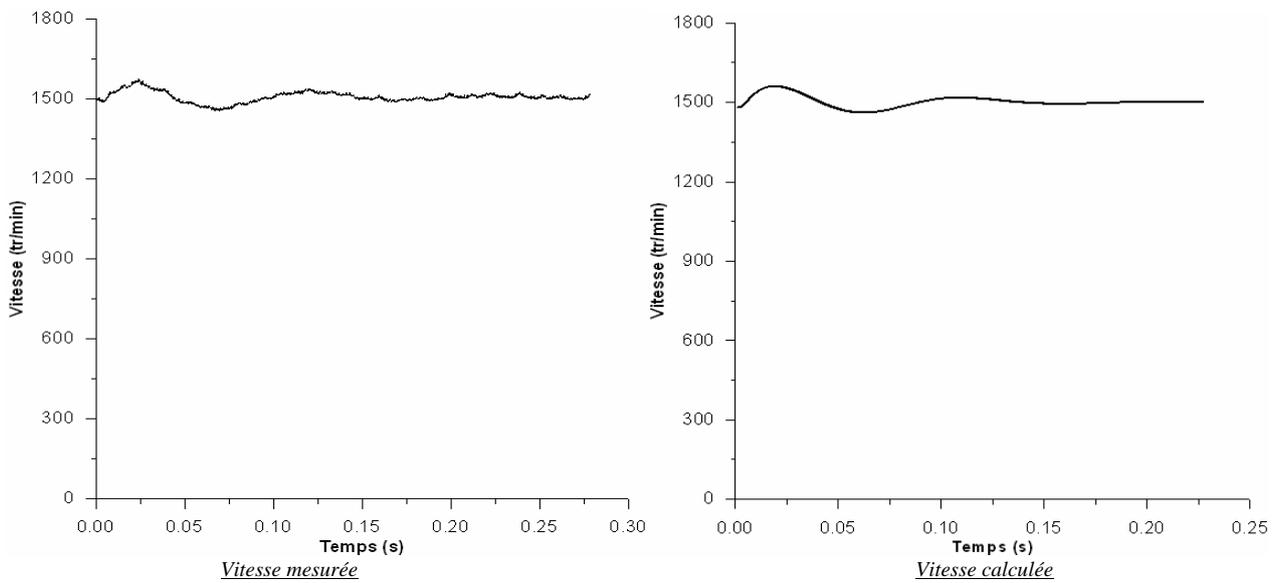
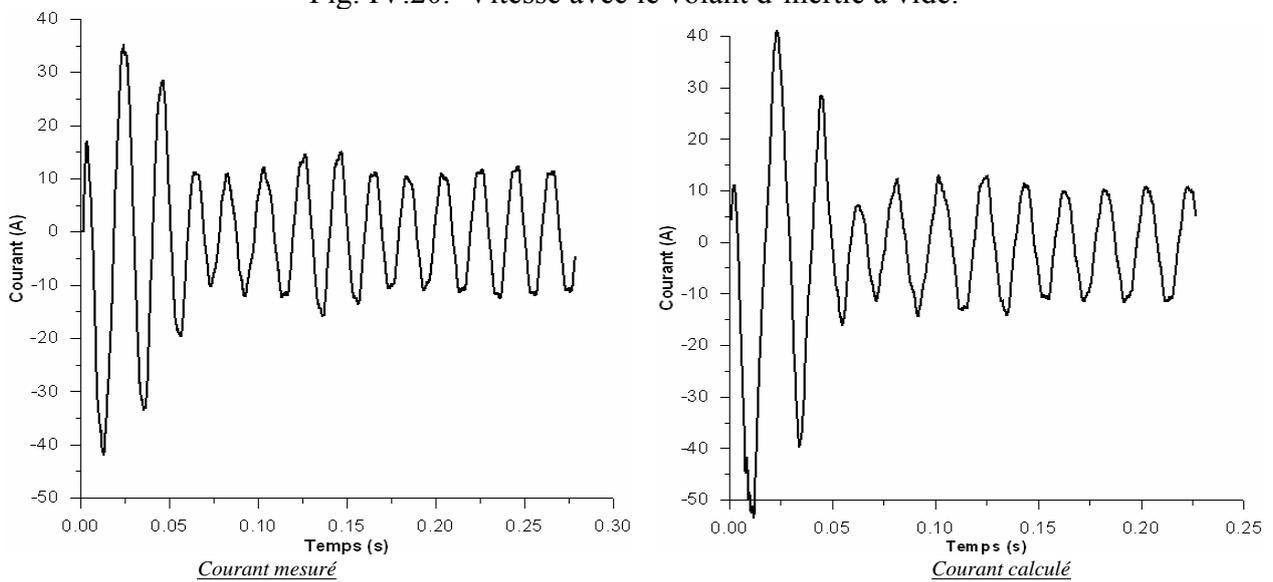
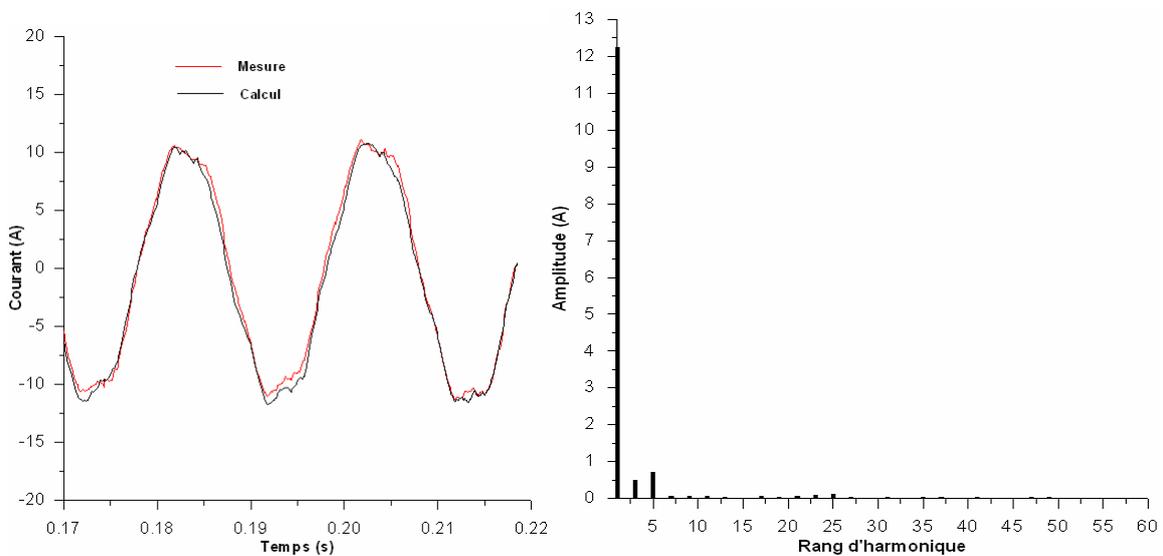


Fig. IV.20. Vitesse avec le volant d'inertie à vide.



(a)- Courant de la phase a.



(b)- Spectre harmonique du courant de la phase a en régime permanent.

Fig. IV. 21. Transitoire du courant absorbé par la phase a et son spectre harmonique (U= 380V).

IV.5. Régime transitoire électromécanique

On présente, dans ce qui suit, le régime transitoire électromécanique de la machine étudiée lors d'un démarrage direct sur le réseau. Cet essai est effectué sous pleine tension du réseau. Les bobines du moteur étudié sont alors toutes alimentées pour que le bobinage puisse supporter le courant important du démarrage. Les résultats expérimentaux obtenus sont représentés sur la Fig. IV. 22. La forme de la variation de la tension simple du réseau d'alimentation est représentée sur la Fig. IV. 23 pour la phase (a). Cette tension, entachée d'harmoniques temporelles, influe directement sur la forme d'onde du courant absorbé par le moteur et présente aussi un régime transitoire. Afin de confronter nos résultats de calcul à ceux mesurés, on a effectué une simulation du démarrage avec les mêmes tensions mesurées aux bornes des phases de la machine.

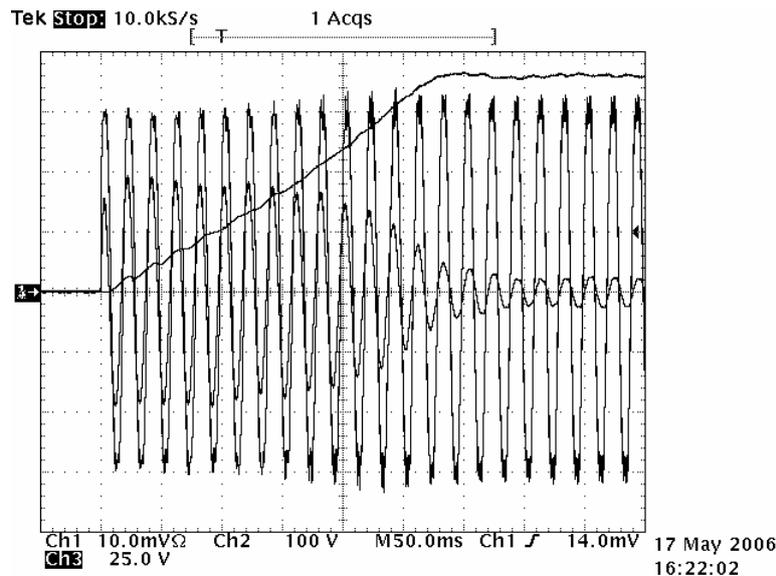


Fig. IV. 22. Transitoire électromécanique (Image de l'écran de l'oscilloscope).

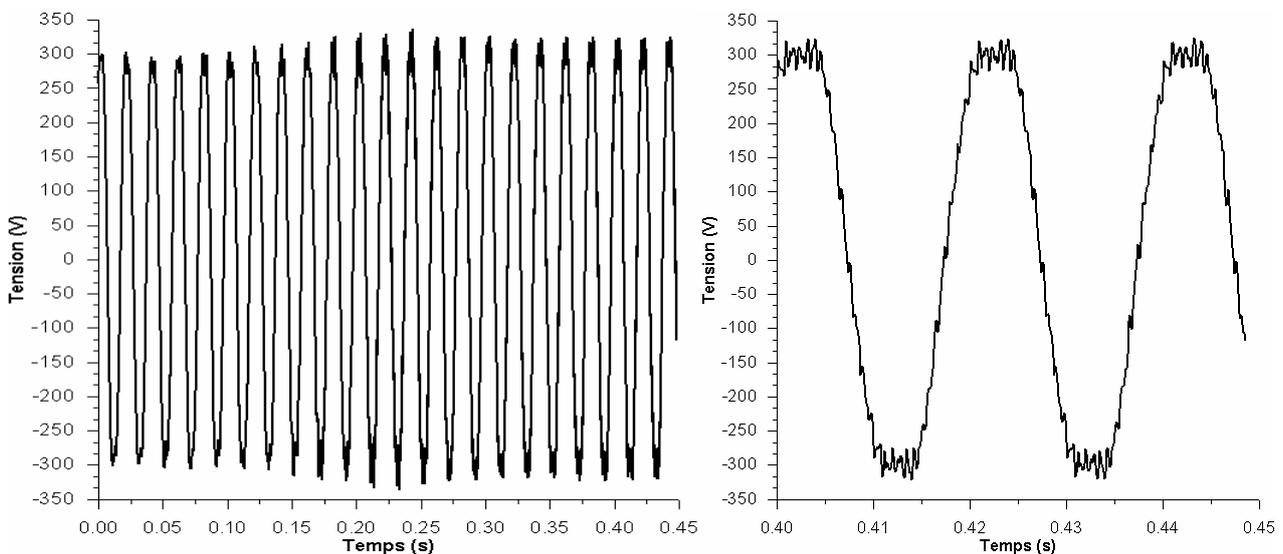
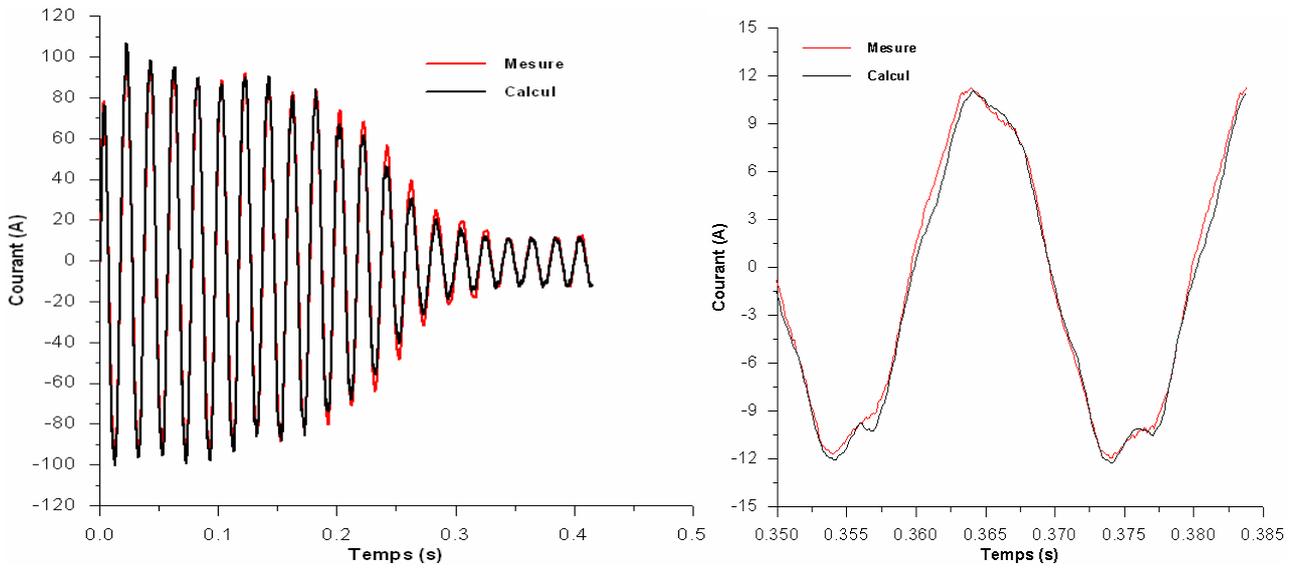
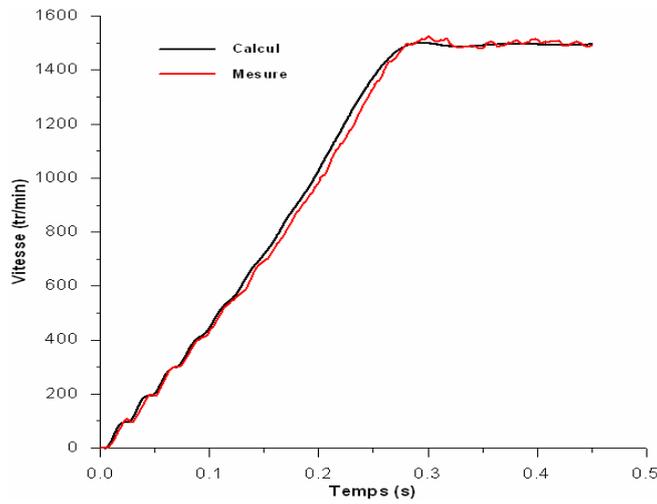


Fig. IV. 23. Tension simple aux bornes de la phase a.

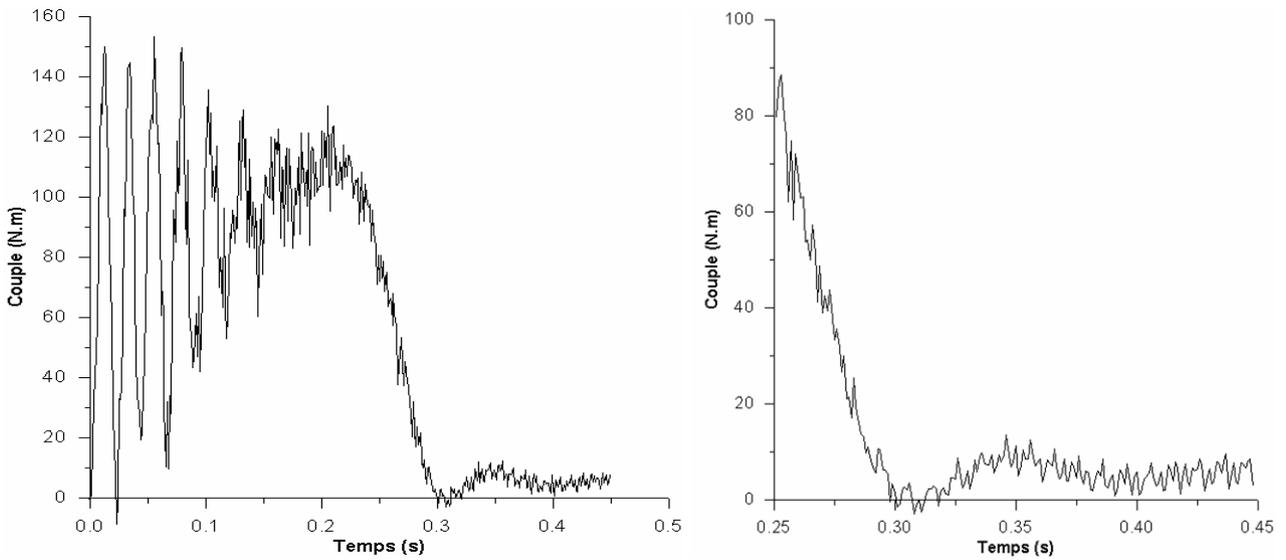
On compare (Figs. IV. 24 (a) et (b)) le courant et la vitesse calculés avec ceux mesurés lors d'un démarrage à vide. Ainsi, on constate une bonne concordance entre les résultats de calcul obtenus à l'aide du modèle du couplage d'interface, que nous avons développés, et ceux obtenus avec l'expérimentation. Sur la Figure IV. 24 (c), on a représenté le couple électromagnétique développé par la machine lors de son démarrage direct sur le réseau.



(a)- Courant de la phase a.



(b)- Vitesse.



(c)- Couple électromagnétique.

Fig. IV.24. Transitoire électromécanique (U=380V).

IV. 6. Conclusion

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une validation expérimentale des résultats obtenus à l'aide de la méthode du couplage d'interface que l'on a développée, dans les cas suivants :

- Modèle magnétodynamique complexe couplé aux circuits électriques avec et sans prise en compte des harmoniques d'espace;
- Modèle magnétodynamique couplé aux circuits électriques en régime transitoire électrique;
- Modèle magnétodynamique couplé aux circuits électriques et à l'équation mécanique en régime transitoire électromécanique.

Le modèle magnétodynamique complexe avec couplage du premier harmonique d'espace est validé sur les deux types de machines, à rotor massif et à cage. Les relevés expérimentaux effectués sur les deux machines en régime permanent concordent avec les résultats calculés.

Le bobinage spécial de la machine à cage étudiée, qui permet de favoriser plus particulièrement les harmoniques 5 et 7 et la méthode utilisée pour la mesure du couple, nous ont permis de valider le modèle magnétodynamique complexe en présence des harmoniques d'espace. Les résultats obtenus, à l'aide de notre modèle, sont conformes avec les mesures dans la zone de fonctionnement en moteur. Les différences enregistrées dans la zone de fonctionnement en frein, causées par le phénomène des courants inter-barres que ce soit avec le rotor à encoches droites ou inclinées, sont dues au fait que le modèle développée ne tient pas compte de ce phénomène.

De par la simplicité de sa formulation mathématique et du fait qu'elle utilise des maillages séparés pour le domaine fixe (stator) et le domaine mobile (rotor), la méthode de couplage d'interface développée nous a permis de tenir compte du mouvement du rotor dans le calcul pas à pas (temporel). Les résultats obtenus avec le modèle que nous avons développé, pour l'étude des régimes transitoires électriques à vitesse constante et mécanique lors d'un démarrage direct sur le réseau, montrent une bonne concordance avec les relevés expérimentaux.

Conclusion générale

Dans le cadre de ce travail nous avons abordé brièvement les phénomènes physiques intervenant dans le fonctionnement des machines à induction. Il s'est avéré que la modélisation de ces phénomènes est essentiellement interne et basée sur la résolution des équations du champ électromagnétique. Cependant, le calcul électromagnétique des machines à induction est un problème magnétodynamique conditionné par l'alimentation des circuits électriques et par l'interaction mécanique de la machine. Nous avons analysé la mise en équation du modèle magnétodynamique en régime harmonique et en régime transitoire et ce, avec le couplage des équations des circuits électriques. En régime transitoire, l'interaction mécanique de la machine, est considérée par l'équation mécanique de mouvement. La résolution de ce problème couplé est effectuée évidemment par la méthode des éléments finis.

Selon l'objectif visé, la modélisation électromagnétique des machines à induction est effectuée à l'aide du modèle magnétodynamique complexe, lorsqu'on s'intéresse au régime permanent et à l'aide du modèle pas à pas temporelle lorsqu'on s'intéresse aux régimes transitoires. Le premier modèle s'applique uniquement dans l'approximation sinusoïdale dans le temps, par conséquent il est très attractif dans la réduction du temps de calcul. Le deuxième modèle, pour lequel plusieurs techniques de couplage magnétique du stator avec le rotor en mouvement ont été exposées, conduit à des résultats meilleurs, mais ces techniques de couplages restent coûteuses en temps de calcul. Les problèmes liés à la prise en compte des harmoniques d'espace dans le modèle magnétodynamique complexe et au couplage du champ du stator avec celui du rotor en mouvement, dans le modèle magnétodynamique transitoire, restent des taches difficiles dans la modélisation électromagnétique des machines à induction.

Afin d'apporter une modeste contribution dans la modélisation de ces deux problèmes, on a développé une technique de couplage d'interface des champs du stator et du rotor pour la prise en compte des harmoniques d'espace en régime harmonique ainsi que du mouvement mécanique du rotor en régime transitoire. Les équations des circuits électriques, dans les deux cas, sont directement couplées aux équations de champ, on a montré comment coupler le champ du stator avec le fondamental du champ rotorique sur une interface artificielle située dans l'entrefer, et comment introduire ce couplage avec la technique de transformation de variables dans une résolution par la méthode des éléments finis en 2D. En utilisant la même technique de couplage, on a vu comment introduire les champs harmoniques significatifs dans le rotor en s'appuyant sur la décomposition en série de Fourier du potentiel vecteur sur l'interface de couplage. A l'aide de ce modèle développé, les performances de deux types de moteur à induction son calculées avec et sans la présence des harmoniques d'espace. Les résultats obtenus montrent que, dans la zone de fonctionnement normal de la machine, l'effet des harmoniques d'espace est faible. Par conséquent, la technique classique de transformation de glissement peut être utilisée avec la seule fréquence du fondamental. Toutefois, pour un fonctionnement à faible vitesse, comme c'est le cas lors du démarrage ou du freinage, la considération des harmoniques d'espace devient indispensable. Notant que dans le cas où seul le fondamental est considéré le temps de calcul est, bien sûr, très réduit.

Vu que la conversion électromécanique de l'énergie est la fonction principale des machines à induction, alors une description très fine de leur fonctionnement dynamique est indispensable. Dans cette description, la considération de l'interaction entre le champ magnétique, les circuits électriques et le mouvement mécanique du rotor, est primordiale. Nous avons développé une approche pour la modélisation électromagnétique des machines à induction en régime transitoire où

le problème magnétodynamique est fortement couplé aux circuits électriques externes. Le mouvement du rotor est considéré par la technique de couplage d'interface que l'on a développée. Nous avons appliqué cette approche au calcul du régime transitoire électrique des machines à induction. Ensuite nous avons considéré l'interaction du problème électromagnétique avec la mécanique de mouvement du rotor pour calculer le régime transitoire lors d'un démarrage direct sur le réseau. Avec l'approche développée, les performances de la machine à induction à cage en régime transitoire sont calculées. Les résultats obtenus avec le premier harmonique d'espace ont été comparés à ceux obtenus en présence des harmoniques d'espace. L'avantage du couplage avec le premier harmonique d'espace réside dans le temps de calcul très réduit par rapport à celui enregistré en considérant les harmoniques d'espace car les pas d'intégration dans le premier cas sont relativement importants. Il faut noter aussi que les harmoniques d'espace affectent les caractéristiques de la machine de point de vue qualitative et quantitative.

Enfin, nous avons procédé à la validation de nos modèles sur deux bancs d'essais qui permettent d'effectuer les mesures directes des grandeurs électriques et mécaniques en régime permanent ainsi que les enregistrements des courants et de la vitesse en régime dynamique. La mesure du couple, dans ce dernier régime, est effectuée par une méthode indirecte qui consiste en la dérivation des relevés de la vitesse.

Les résultats obtenus, avec le modèle magnétodynamique complexe dans le cas du premier harmonique d'espace, sont conformes aux points mesurés pour les deux moteurs. En présence des harmoniques d'espace, et pour plusieurs configurations du bobinage statorique, les résultats de calcul montrent une bonne concordance avec les résultats issus des mesures dans les zones stables de la caractéristique mécanique. Ainsi, nous avons mis en relief et observé le phénomène de rampage des machines à induction lors d'un démarrage en charge. Les résultats expérimentaux effectués ont confirmé aussi l'existence du phénomène des courants inter-barres, relatifs aux rotors à cage non isolés, qui se manifestent fortement dans la zone de fonctionnement en frein.

En régime transitoire, à vitesse constante, les calculs effectués, pour le courant absorbé par la machine, concordent avec les relevés expérimentaux. Les résultats obtenus lors du démarrage direct sur le réseau, à savoir le transitoire du courant et la montée en vitesse, sont en bonne corrélation avec les enregistrements expérimentaux. Notant que pour les régimes transitoires, le couplage avec le premier harmonique d'espace conduit à une réduction très appréciable du temps de calcul ce qui encourage son utilisation dans le cas où le fondamental est largement prépondérant.

Les modèles que nous avons développés, dans ce modeste travail, doivent être complétés par la prise en compte des effets de l'inclinaison des encoches du rotor dans un calcul 2D. Ceci peut être effectué par un calcul en multi-slice, dans lequel le phénomène des courants inter-barres peut être introduit dans les circuits électriques de la cage. Au vu de la simplicité de sa formulation et de son implantation, la technique de couplage d'interface que l'on a développée peut également être facilement adaptée pour considérer des alimentations par convertisseurs statiques.

Références bibliographiques

- [1] A. Nesba, "Caractérisation du phénomène de la saturation magnétique de la machine asynchrone". Thèse de doctorat d'Etat, ENP Alger, 2006.
 - [2] P. Barret, "Machines électriques théorie et mises en œuvre", Edition Ellipses, 2002 Paris, 244p.
 - [3] G. Sturtzer, and E. Smigiel, "Modélisation et commande des moteurs triphasés : Commande vectorielle des moteurs synchrones, commande numériques par contrôleurs DSP", Edition Ellipses, 2000 Paris, 244p.
 - [4] S. Moulahoum, "Contribution à la modélisation de la machine asynchrone avec prise en compte de la saturation et des pertes fer : Application à la commande vectorielle avec et sans capteur mécanique", Thèse de Doctorat, U.S.T.HB., 2006, 138.p.
 - [5] P. L. Alger, *Induction machines – Their behavior and uses*, Gordon and Breach Science Publishers, 3rd edition, 1995, 528 p.
 - [6] N. Christofides, "Origins of load losses in induction motors with cast aluminium rotors", *Proceedings IEE*, Vol. 112, No. 12, December 1965, pp. 2317-2332.
 - [7] R. Ibtouen, "Etude d'un moteur à rotor massif lisse pour différentes largeurs d'entrefer: performances sous divers régime d'alimentation-comportement thermique", Thèse de Magister, ENP, Mai 1984, Alger.
 - [8] S. Williamson, "Induction motor modeling using finite elements", *Revue Générale de l'Electricité (RGE)*, No. 8/94, Septembre 1994, pp. 1-8.
 - [9] S. Williamson, L. H. Lim and A. C. Smith, "Transient analysis of cage induction motors using finite elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, March 1990, pp. 941-944.
 - [10] D. Zhou, C. B. Rajanathan, A. T. Sapeluk and R. Egin, "Transit simulation of the shaded pole motor based upon a multi-slice finite element model", *9 International Conference on Electrical Machines and Drives*, Conference publication N° 468, ©IEE, 1999, pp. 30-34.
 - [11] E. Vassent, G. Meunier & J.C. Sabonnadiere, "Simulation of induction machine operation using complex magnetodynamic finite elements", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 25, no. 4, pp. 3064-3066, July. 1989.
 - [12] B. Laporte, G. Vinsard and J. C. Mercier, "A computation method for induction motors in steady-state", *Mathematics and computers in simulation*, Elsevier (38), pp. 369 – 376, 1995.
 - [13] J. C. Mercier, "Contribution à l'étude par éléments finis du comportement électromagnétique des machines asynchrones rapides", Thèse de Doctorat de INPL, Nancy (France), Septembre 1993, 152 p.
-

- [14] J. P. Bock, "Modélisation et calcul couplé des champs électromagnétiques dans les machines asynchrones en régime transitoire", Thèse de Doctorat de INPL, Nancy (France), Septembre 1996, 140 p.
- [15] R. Ibtouen, R. Kechroud, O. Touhami and S. Mekhtoub, "Complex finite element analysis of a solid rotor induction motor", IEMDC, 2003, *IEEE-International Electrical Machines and Drives Conference*, Madison WI (USA), 1-4 June, 2003, pp. 1606-1610.
- [16] H. De Gersem, M. Clemens and T. Weiland, "Coupled finite-element, spectral-element discretisation for models with circular inclusions and far field domains", *IEE Proc.-Sci. Meas. Technol.*, Vol. 149, N°. 5, September 2002, pp. 237-241.
- [17] H. De Gersem and K Hameyer, "Air-gap flux splitting for the time-harmonic finite-element simulation of single-phase induction machines," *IEEE Trans Mag*, vol. 38, n°. 2, pp. 1221-4, 2002.
- [18] J. Gyselinck, L. Vandeveld, P. Dular, C. Geuzaine, W. Legros, "A general method for the frequency domain FE modeling of rotating electromagnetic devices", *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 39, No. 3, May 2003, pp. 1147-1150.
- [19] S. Mezani, "Modélisation électromagnétique et thermique des moteurs à induction, en tenant compte des harmoniques d'espace", Thèse de Doctorat de INPL, Nancy (France), Juillet 2004, 113 p.
- [20] S. Williamson, M. J. Robinson, "Calculation of cage induction motor equivalent circuit parameters using finite elements", *IEE Proceedings B*, Vol. 138, No. 5, September 1991, pp. 264-276.
- [21] P. Zhou, J. Gilmore, Z. Badics, Z. J. Cendes, "Finite element analysis of induction motors based on computing detailed equivalent circuit parameters", *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 34, No. 5, September 1998, pp. 3499-3502.
- [22] K. Yamazaki, "An efficient procedure to calculate equivalent circuit parameter of induction motor using 3D nonlinear time stepping finite element method", *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 38, No. 2, Mars 2002, pp. 1281-1284.
- [23] J. H. H. Alwash, S. H. Ikhwan, "Generalised approach to the analysis of asymmetrical three-phase induction motors", *IEE Proceedings - Electrical Power Applications*, Vol. 142, No. 2, March 1995, pp. 87-96.
- [24] B. Laporte, "Enroulement des machines à courant alternatif", Cours de 3^{ème} année, GE-CERE, ENSEM - INPL, non publié, 2003.
- [25] S. P. Verma, A. Balan, "Determination of radial forces in relation to noise and vibration problems of squirrel cage induction motors", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 9, No. 2, June 1994.
- [26] P. L. Tamar, A. Fazekas, J. Kiss, A. Miklos and S. J. Yang, "Noise and vibration of electrical machines", *Elsevier Scientific Publishing Company*, Amsterdam Oxford New York, 1989.
- [27] D. H. Im, J. H. Chang, S. C. Park and B. I. Kwon, "Analysis of radial force as a source of vibration in an induction motor with skewed slots", *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 33, No. 2, March 1997, pp. 1650-1653.
-

- [28] H. Jordan, "Electric motor silencer –formation and elimination of the noise in the electric motors", W. Geradet-Essen editor, 1950.
- [29] G. Meunier, "Electromagnétisme et problèmes couplés", Edition Hermes Sciences, Paris 2002.
- [30] H. Razik, "Le contenu spectral du courant absorbé par la machine asynchrone en cas de defaillance, un état de l'art", La revue 3EI, N°. 29, Juin 2002, pp. 48-52.
- [31] A. Arkkio, "Analysis of induction motors based in the numerical solution of the magnetic field and circuit equations", Thesis of Acta polytechnica Scandinavia, Electrical Engineering series N°59, Helsinki, Finlande, 1987.
- [32] T. H. Pham, P. F. Wendling, S. J. Salon and H. Acikgoz, "Transient finite element analysis of an induction motor with external circuit connections and electromechanical coupling", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 14, No. 4, December 1999, pp. 1407-1412.
- [33] R. J. Hill-Cottingham, P. C. Coles, D. Rodger and H. C. Lai, "Numerical models of an induction machine", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 39, No. 3, May 2003, pp. 1551-1553.
- [34] K. L. Bins, P. J. Lawrenson and C. W. Trowbridge, "The analytical and numerical solution of electrical and magnetic fields", Ed. John Wiley & sons, Chichester, 1994.
- [35] E. Durand, "Magnétostatique", Edition Masson, Paris, 1968.
- [36] E. Chauveau, "Contribution au calcul électromagnétique et thermique des machines électriques: Application à l'étude de l'influence des harmoniques sur l'échauffement des moteurs asynchrones", Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes, France, Novembre 2001, 147 p.
- [37] R. Kechroud, "Contribution à la modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis associée au multiplicateurs de Lagrange", Thèse de Doctorat d'Etat Es Sciences, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 2002, 113 p.
- [38] M. E. Zaim, "Contribution à la conception des machines asynchrones à rotor massif", Thèse de Docteur d'Etat Es Sciences, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, 1989, 154 p.
- [39] J. P. Ducreux, A. Diop, "Computation of electromagnetic losses in high speed motors", *Electrimacs'96*, Saint-Nazaire, pp. 1017-1022, September 1996.
- [40] D. Kim, H. Jung, S. Hahn and C. Lee, "Three dimensional resistance calculation in end ring of induction motor by finite element method", *IEEE Trans. Mag*, vol. 36, no. 6, pp. 3932-3938, Nov. 2000.
- [41] B. Boualem and F. Priou, "Modelling of induction motor accounting for skewed slots effect", *ICEM94*, Vol. 2, pp. 699-704, 1994.
- [42] P. Zhou, W. N. Fu, D. Lin, S. Stanton and Z. J. Cendes, "Numerical modelling of magnetic devices", *IEEE Trans. Mag*, vol. 40, no. 4, pp. 1803-1809, July. 2004.
-

- [43] S.L. Ho, W. N. Fu and H.L. Li, ,'' The state of art on dynamic mathematical models of induction machines: circuit-field coupled models'', *International Conference on Power Electronics and Drive Systems*, PEDS'99, Proceedings of the IEEE, Vol. 1, 27-29 July 1999, pp. 525-530, 1999.
- [44] P. Dziwniel, F. Piriou, ''A time-stepped 2D-3D finite element method for induction motors with skewed slots modeling'', *IEEE Trans. Mag*, vol. 35, no. 3, pp. 1262-1265, May. 1999.
- [45] S. J. Salon, M. J. De Bortoli and R. Palma, ''Coupling of transient fields, circuits, and motion using finite elements analysis'', *Journal of Electromagnetic waves and applications*, Vol. 4, N°. 11, pp. 1077-1106, 1990.
- [46] S.L. Ho and W. N. Fu, ''A comprehensive approach to the solution of direct-coupled multislice model of skewed rotor induction motors using finite element method'', *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 3, May 1997, pp. 2265-2273.
- [47] E. Vassent, G. Meunier, A. Foggia, and G. Reyne, "Simulation of induction machine operation using step-by-step finite element method coupled with circuits and mechanical equations", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 6, November 1991, pp. 5232-5234.
- [48] T. W. Preston, A. B. J. Reece, P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time stepping techniques", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, January 1988, pp. 471-473.
- [49] H. Kometani, S. Sakabe, A. Kameari, "3-D analysis of induction motor with skewed slots using regular coupling mesh", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 36, No. 4, July 2000, pp. 1767-1773.
- [50] B. Davat, Z. Ren, M. Lajoie-Mazenc, "The movement in field modeling", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 21, No. 6, November 1985, pp. 2296-2298.
- [51] G. Bedrosian, ''A new method for coupling finite element field solutions with external circuits and kinematics'', *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, 1993, pp. 1664-1668.
- [52] A. M. Oliveira, P. Kuo-peng, N. Sadowski, M. S. de Andrade and J. P. A. Bastos, ''A non-a priori approach to analyze electrical machines modeled by FEM connected to static converters'', *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 38, No. 2, March 2002, pp. 933-936.
- [53] S. R. H. Hoole, "Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 21, No. 6, November 1985, pp. 2292-2295.
- [54] E. Vassent, G. Meunier, A. Foggia, J. C. Sabonnadière, "Simulation of induction machine operation with step-by-step finite element method coupled with mechanical equation", *Modelling and Control of Electrical Machines: New Trends, IMACS'91*, pp. 41-46.
- [55] G. Vinsard, B. Laporte, "A new formulation for induction machine computation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, September 1994, pp. 3693-3696.
- [56] S. Mezani, B. Laporte, N. Takorabet, "Complex finite element computation of induction motors with consideration of space harmonics", *IEMDC 2003, IEEE International Electrical Machines and Drives Conference*, Madison WI (USA), 1-4 June, 2003, pp. 264-268.
-

- [57] S. Mezani, B. Laporte, N. Takorabet, "Saturation and Space Harmonics in the Complex Finite Element Computation of Induction Motors," *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 41, no. 5, pp.1460-1463, May. 2005.
- [58] A. A. Abdelrazek, J. L. Coulomb, M. Féliachi, J. C. Sabonnadière, "Conception of an air-gap element for the dynamic analysis of the electromagnetic field in electric machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 18, No. 2, March 1982, pp. 655-659.
- [59] R. Wang, H. Mohelbi, T. J. Flack, M. J. Kamper, J. D. Buys and M. Féliachi, "Two-dimensional cartesian air-gap element (cage) for dynamic finite-element modeling of electrical machines with a flat air gap", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 38, No. 2, March 2002, pp. 1357-1360.
- [60] G. D. Kalokiris, T. D. Kefalas, A. G. Kladas and J. A. Tegopoulos, "Special air-gap element for 2D FEM analysis of electrical machines accounting for rotor skew", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 41, No. 5, May 2005, pp. 2020-2023.
- [61] Z. J.Liu, C. Bi, H. C. Tan and T. S. Low, "A combined numerical and analytical approach for magnetic field analysis of permanent magnet machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 41, No. 5, May 2005, pp. 2020-2023.
- [62] K. Lee, M. J. De Bortoli, M. J. Lee, S. J. Salon, "Coupling finite elements and analytical solution in the airgap of electrical machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, May 1995, pp. 1372-1375.
- [63] S. J. Salon, *Finite element analysis of electrical machines*, Kluwer Academic Publishers, 1995, 247 p.
- [64] H. De Gercem and T. Weiland, "A computationally efficient air-gap element for 2D FE machine models", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 41, No. 5, May 2005, pp. 1372-1375.
- [65] S. J. Salon, J. D'Angelo, "Application of the hybrid finite element method in electromagnetics", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No.1, January 1988, pp. 1844-1847.
- [66] F. Bouillaut, A. Razek, "Hybrid numerical methods for movement consideration in electromagnetic systems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, January 1988, pp. 259-261.
- [67] A. Nysveen, R. Nilssen, "Time domain simulation of magnetic systems with a general moving geometry", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 2, March 1997, pp. 1394-1397.
- [68] S. Kurz, J. Fetzer, G. Lehen, W. M. Rucker, "A novel formulation for 3D eddy current problems with moving bodies using a Lagrangian description and BEM-FEM coupling", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, September 1998, pp. 3068-3073.
- [69] Y. Ouazir, R. Ibtouen, N. Takorabet and O. Touhami, "Analyse par EF de la magnétodynamique complexe couplée aux circuits électriques des machines à induction avec couplage des champs du stator et du rotor dans l'entrefer", *An International publication of Engineering science, Algerian Journal of Technology, AJOT*, Numéro spécial, ISSN 1111 – 357X, Avril 2005, pp. 33-37.
-

- [70] Y. Maréchal, G. Meunier, J. L. Coulomb, H. Magnin, "A general purpose tool for restoring inter-element continuity", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1728-1731.
- [71] D. Rodger, H. C. Lai, P. J. Leonard, "Coupled elements for problems involving movement", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 26, No. 2, March 1990, pp. 548-550.
- [72] R. Kechroud, R. Ibtouen, S. Mezani, O. Touhami, B. Laporte, "Modeling of a slotless permanent magnet machine with motion consideration", *Archives of Electrical Engineering*, Vol. XLIX, No. 3-4, 2000, pp. 377-393.
- [73] H. C. Lai, D. Rodger, P. J. Leonard, "Coupling meshes in 3D problems involving movements", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, March 1992, pp. 1732-1734.
- [74] C. Golovanov, J. L. Coulomb, Y. Maréchal, G. Meunier, "3D mesh connection techniques applied to movement simulation", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, September 1998, pp. 3359-3362.
- [75] R. Kechroud, R. Ibtouen, O. Touhami, "Coupled nonlinear finite elements analysis of solid rotor induction motor", *ICS TEAM, Workshop and application forum*, Compumag, Evian, France, July 2001, pp. 16-17.
- [76] H. De Gercem and T. Weiland, "Harmonic weighting functions at the sliding interface of a finite-element machine model incorporating angular displacement", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 40, No. 2, March 2004, pp. 545-548.
- [77] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, and F. Rapetti, "Comparaison between nonconforming movement methods", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 42, No. 4, Avril 2006, pp. 599-602.
- [78] G. Touzot & G. Dhatt, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine SA Editeur, Paris, 1984.
- [79] C. S. Biddlecombe, J. Simkin, "Transient electromagnetic analysis coupled to electric circuits and motion", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 34, No. 5, September 1998, pp. 3182-3185.
- [80] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, and F. Rapetti, "Using hierarchic interpolation with mortar element method for electrical machines analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 41, No. 5, May 2005, pp. 1472-1475.
- [81] F. Rapetti, Y. Maday, F. Bouillault and A. Razek, "Eddy current calculations in three dimensional moving structures", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 38, No. 2, March 2002, pp. 613-616.
- [82] A. Foggia, "Méthodes de calcul des inductances de fuites", *Techniques de l'Ingénieur, Traité Génie Electrique*, D3440, Février 1999, pp. 1-20.
- [83] A. K. Ziarani, and A. Konrad, "Galerkin's method and the variational procedure", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 38, No. 1, January 2002, pp. 190-199.
-

- [84] Y. Ouazir, N. Takorabet, R. Ibtouen and S. Mezani, "Time Harmonic Finite Element Analysis of induction motors with Air-gap interface coupling», *6th International Symposium on Advanced Electromechanical Motion systems*, ELECTROMOTION 2005, Lausanne, Switzerland, Sept 27-29, 2005 .
- [85] H. E. Jordan, R. C. Zowarka, Jr, and S. B. Pratap, "Nine-Phase Armature Windings Design, Test, and Harmonic Analysis," *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 41, no. 1, pp. 299-302, January 2005.
- [86] Y. Ouazir, N. Takorabet, R. Ibtouen and S. Mezani, "Air-gap interface coupling of stator and rotor fields for the complex magnetdynamic FE analysis of voltage fed induction machines", *XII International Symposium on Electromagnetic fields In Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering*, ISEF'2005-EE-2.13, ISBN 84-609-7057-4, Baiona, Spain, Sept 15-17, 2005.
- [87] S. Mezani, B. Laporte, N. Takorabet, "Saturation and space harmonics in the complex finite element computation of induction motors", *CEFC 2004, IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, Seoul (Korea), June 6-9, 2004, p. 266.
- [88] Y. Ouazir, N. Takorabet, R. Ibtouen and S. Mezani, "Consideration of space harmonics in complex finite element analysis of induction motors with an air-gap interface coupling", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 42, no. 4, Avril 2006, pp. 299-302.
- [89] D. Lederer and A. Kost, "Modelling of nonlinear magnetic material using a complex effective reluctivity," *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 34, no. 5, Sept. 1998.
- [90] N. Takorabet, B. Laporte, S. Mezani, "An approach to compute saturated induction motors in steady state", *IEMDC 2003, IEEE International Electrical Machines and Drives Conference*, Madison WI (USA), 1-4 June, 2003, pp. 1646-1650.
- [91] B. Laporte, "Etude du comportement d'un matériau ferromagnétique isotrope dans un champ glissant," *Revue Générale de l'électricité*, vol. 83, no. 3, pp. 155- 160, Mars 1974.
- [92] N. Takorabet, R. Lateb, S. Mezani, Y. Ouazir, F. Meibody-Tabar, and R. Ibtouen, "Computation of the effect of space harmonics on the performances of a cage induction motor using time harmonic and time stepping methods", *CEFC 2006, IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, Miami (USA), April 30 – 3 Mai, 2006, p. 183.
- [93] Y. Ouazir, N. Takorabet, R. Ibtouen and S. Mezani, "Time Harmonic Finite Element Analysis of induction motors with Air-gap interface coupling», *Journal of Advanced Electromechanical Motion systems*, ELECTROMOTION, Vol. 13, n° 1, pp. 16-19, January-March 2006.
- [94] H. Kometani, S. Sakabe, and A. Kameari, "3-D analysis of induction motor with skewed slots using regular coupling mesh", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, no. 4, July 2000, pp. 1769-1773.
- [95] Y. K. Shin, "Numerical techniques for solving magnétostatic problems involving motion and non uniform geometry", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 33, no. 2, March 1997, pp. 1161-1166.
- [96] M. Clemens, M. Wilke, R. Schuhmann and T. Weiland, "Subspace projection extrapolation scheme for transient field simulations", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 40, no. 2, March 2004, pp. 934-937.
-

- [97] F. Bouillault and A. Razek, "Eddy currents due to stator teeth in synchronous machine rotors", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. Mag-20, no. 5, September 1984, pp. 1939-1941.
- [98] W. N. Fu, S. L. Ho, and C. Wong, "Design and analysis of practical induction motors", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 37, no. 5, September 2001, pp. 3663-3667.
- [99] W. N. Fu, P. Zhou, D. Lin, S. Stanton and Z. J. Cendes, "Modeling of solid conductors in 2-D transient finite element analysis and its application to electric machines", *IEMDC 2003, IEEE International Electrical Machines and Drives Conference*, Madison WI (USA), 1-4 June, 2003, pp. 1272-1278.
- [100] H. N. Phyu, M. A. Jabbar, L. Zhejie and B. Chao, "Modeling and simulation of brushless permanent magnet DC motor in dynamic conditions by time stepping technique", *IEMDC 2003, IEEE International Electrical Machines and Drives Conference*, Madison WI (USA), 1-4 June, 2003, pp. 376-381.
- [101] H. C. Lai, P. C. Coles, D. Rodger, and P. J. Leonard, "Transient analysis of an electromagnetic actuator using an overlapping finite element scheme", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, no. 4, July 2000, pp. 1462-1467.
- [102] K. Srairi, and M. Féliachi, "Numerical coupling models for analyzing dynamic behaviors of electromagnetic actuators", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 34, no. 5, September 1998, pp. 3608-3611.
- [103] O. Bottauscio, M. Chiampi, and A. Manzin, "Advanced model for dynamic analysis of electromechanical devices", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 41, no. 1, January 2005, pp. 36-46.
- [104] P. Lambard, G. Meunier, "A general method for electric and magnetic coupled problem in 2D and magnetodynamic domain", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 28, no. 2, pp. 1291-1294, 1992.
- [105] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, and F. Rapetti, "Torque calculation with conforming and nonconforming movement interface", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 42, No. 4, April 2006, pp. 983-986.
- [106] S. Lepaul, and J. K. Sykulski, "Coupling of motion and circuits with electromagnetic analysis", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 35, No. 3, May 1999, pp. 1602-1605.
- [107] M. Boumahrat, and A. Gourdin "Méthodes numériques appliquées avec nombreux problèmes résolus en Fortran 77", Edition OPU, Alger 1993.
- [108] R. C. Healey, S. Lesley, S. Williamson, P. R. Palmer, "The measurement of transient electromagnetic torque in high-performance electrical drives", *International Conference on Power Electronics and Variable Speed Drives*, 23-25 September 1996, pp. 226-229.
- [109] M. Y. Ematsu, P. S. dos Santos, A. Habitzreuter, "A method to perform speed torque curves on induction motors using the acceleration method", *ICEM 2004*, 6-8 September.
- [110] B. Heller, V. Hamata, "Harmonic field effects in induction machines", *Elsevier Scientific Publishing Company*, Amsterdam Oxford New York, 1977, 330 p.
- [111] N. Christofides, B. Adkins, "Determination of load losses and torques in squirrel-cage induction motors", *Proceedings IEE*, Vol. 113, No. 12, December 1966, pp. 1995-2005.
-

- [112] A. M. Odok, "Stray-load losses and stray torques in induction machines", *AIEE Transactions*, No. 77, Pt. II, 1958, pp.43-53.
- [113] D. G. Dorrell, T. J. E. Miller, C. B. Rasmussen, "Inter-bar currents in induction machines", *36 IAS Annual Meeting*, Chicago (USA), Vol. II, 2001, pp. 729-736.
- [114] S. Williamson & A. C. Smith, "Equivalent circuits for cage induction motors with inter-bar currents," *IEE Proc-Electr.Power Appl.*, vol. 149, no. 3, pp. 173- 183, May 2002.
- [115] R. Carlson, C. A. da Silva, N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Mazenc, "Analysis of the effect of inter-bar currents on the performance of polyphase cage-induction motors", *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 39, No. 6, November/December 2003, pp. 1674-1680.
- [116] S. L. Ho, H. L. Li, and W. N. Fu, "Inclusion of interbar currents in a network-field coupled time stepping finite-element model of skewed-rotor induction machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 35, No. 5, May 1999, pp. 4218-4225.
- [117] S. Williamson, C. Y. Poh, and A. C. Smith, "Estimation of the interbar resistance of a cast cage rotor", *IEEE Trans on Industry application*, Vol. 40, n°2, Mars-April 2004, pp. 558-564.
- [118] Y. Ouazir, R. Ibtouen, N. Takorabet, O. Touhami, S. Mezani, "Phase belt harmonics in complex finite-element analysis of induction motors with an air-gap interface coupling", *IEE proc. Electr. Power. Appl.*, Vol. 153, n°4, July 2006, pp. 530-534.
- [119] A. George, J. W. Liu, *Computer solution of large sparse positive definite systems*, Prentice-Hall, N.J., 1981, 324 p.
- [120] S. W. Sloan, "A FORTRAN program for profile and wavefront reduction", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 1989, pp. 2651-2679.
- [121] Y. Boutoura, "A new proposed method for minimizing the bandwidth and skyline storage for triangular finite elements meshes", *CEFC 2006, IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, Miami (USA), April 30 – 3 Mai, 2006, p. 47.
- [122] L. Jänicke and A. Kost, "Convergence properties of the Newton-Raphson method for nonlinear problems", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 34, no. 5, September 1998, pp. 2505-2506.
-

ANNEXES

A. Formulation éléments finis des équations du champ

Les équations du champ électromagnétique, en 2D, à résoudre dans le domaine étudié ($\Omega = \Omega_s \cup \Omega_r$), en fonction du potentiel vecteur a , sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_s \frac{\partial a_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_s \frac{\partial a_s}{\partial y} \right) + J_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_r \frac{\partial a_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_r \frac{\partial a_r}{\partial y} \right) - \sigma \left(\frac{\partial a_r}{\partial t} - \frac{u_b}{l} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_r \quad (\text{A.2})$$

Sur les frontières extérieures du domaine, on a :

$$a_s = a_r = 0 \quad (\text{A.3})$$

Ces deux domaines sont séparés par une interface artificielle Γ , située dans l'entrefer, sur laquelle il faut assurer la condition de passage du champ.

Ce système d'équations peut être formulé en éléments finis nodaux du premier ordre sur un maillage triangulaire. Les éléments de ce maillage sont supposés être suffisamment petits pour pouvoir approximer l'inconnue a par une fonction linéaire en coordonnées spatiales. Sur chaque élément e du maillage, la solution a est de la forme suivante :

$$a^e(x, y) = b^e + d^e x + c^e y \quad (\text{A.4})$$

A.1 Fonctions d'interpolation

On cherche les valeurs de l'inconnue aux nœuds du maillage. Donc la solution (A.4) doit vérifier :

$$a^e(x_i, y_i) = A_i^e \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.5})$$

où A_i^e est la valeur de la solution au nœud i de l'élément e . Soit :

$$\begin{cases} A_1^e = b^e + c^e x_1 + d^e y_1 \\ A_2^e = b^e + c^e x_2 + d^e y_2 \\ A_3^e = b^e + c^e x_3 + d^e y_3 \end{cases}$$

que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

$$a^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i^e(x, y) A_i^e \quad (\text{A.6})$$

avec :

$$N_i^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (b_i^e + c_i^e x + d_i^e y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.7})$$

Où les $N_i^e(x, y)$ sont les fonctions d'interpolations nodales de premier ordre entièrement définies par les coordonnées des nœuds du maillage et où Δ^e est la surface de l'élément considéré. On s'assure, aisément, que les fonctions $N_i^e(x, y)$ vérifient l'Eq. (A.5). La solution recherchée s'exprime alors comme une combinaison linéaire des valeurs nodales du maillage.

A. 2 Formulation intégrale

La forme intégrale des équations (A.1) et (A.2) peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\pi = \iint_{\Omega} \left\{ a' \left(-\nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right) + \sigma \frac{\partial a}{\partial t} - f \right) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{A.8})$$

Soit, après intégration par partie :

$$\pi = \iint_{\Omega} \left(\nu \frac{\partial a'}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \nu \frac{\partial a'}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} + \sigma a' \frac{\partial a}{\partial t} - a' f \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} a' \left(\nu \frac{\partial a}{\partial x} e_x + \nu \frac{\partial a}{\partial y} e_y \right) \cdot \mathbf{n} \cdot d\Gamma = 0 \quad (\text{A.9})$$

La première intégrale décrit les équations (A.1) et (A.2) sur le domaine de résolution et s'exprime comme la somme des intégrales élémentaires sur les constituants du maillage alors que la seconde intégrale décrit les conditions aux limites. Les inconnues a et a' sont remplacées par leurs formes définies dans l'Eq. (A.6). Puisque ces formes sont des approximations linéaires de la solution exacte, l'Equation (A.9) n'est pas nulle mais minimale pour la meilleure d'entre elles. L'équation à résoudre devient alors :

$$\frac{\partial \pi}{\partial a'} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Il apparaît d'abord que, comme a' est une combinaison linéaire des valeurs au nœuds du maillage, la dérivée (A.10) s'exprime comme une dérivée par rapport à chacune de ces valeurs. De plus, comme les conditions aux limites sont imposées et connues, la seconde intégrale sur le contour dans l'équation (A.9) n'a pas d'intérêt immédiat.

L'équation (A.9) devient, sur chaque élément e du maillage, la suivante :

$$\pi^e = \iint_{\Omega^e} \left(\nu \frac{\partial a'^e}{\partial x} \frac{\partial a^e}{\partial x} + \nu \frac{\partial a'^e}{\partial y} \frac{\partial a^e}{\partial y} + \sigma a'^e \frac{\partial a^e}{\partial t} - a'^e f^e \right) d\Omega^e = 0 \quad (\text{A.11})$$

La minimisation de l'expression (A.11) s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \iint_{\Omega^e} \left(\nu \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \nu \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega^e \times a_i^e + \iint_{\Omega^e} (\sigma N_i^e N_j^e) d\Omega^e \times \frac{\partial a_i^e}{\partial t} = \iint_{\Omega^e} (f N_j^e) d\Omega^e \right\} \quad (\text{A.12})$$

Cette équation décrit, pour chaque élément e du maillage, un système de trois équations linéaires à 3 inconnues.

Nous considérons maintenant le cas de la formulation adoptée dans notre travail où le domaine d'étude est subdivisé en deux sous domaines ($\Omega = \Omega_s \cup \Omega_r$). Pour chaque élément du maillage des domaines du stator et du rotor, l'équation (A.12) s'exprime sous forme matricielle ainsi :

$$\mathbf{K}_s^e \mathbf{A}_s^e = \mathbf{F}_s^e \quad \text{dans } \Omega_s^e \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{K}_r^e \mathbf{A}_r^e + \mathbf{T}^e \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r^e = \mathbf{F}_r^e \quad \text{dans } \Omega_r^e \quad (\text{A.14})$$

Les matrices et les vecteurs de ces deux équations sont donnés par :

$$\mathbf{K}_{s,r}^e = [K_{ij(s,r)}^e]_{i,j=1,2,3} \quad \text{avec} \quad K_{ij(s,r)}^e = \iint_{\Omega_{s,r}^e} \left(\mathbf{v}_{s,r} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \mathbf{v}_{s,r} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega^e \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{F}_{s,r}^e = [F_{j(s,r)}^e]_{j=1,2,3} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_{js}^e = \iint_{\Omega_s^e} J_s N_j^e d\Omega_e \\ F_{jr}^e = \iint_{\Omega_r^e} \sigma \frac{u_b}{l} N_j^e d\Omega_e \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{T}^e = [T_{ij}^e]_{i,j=1,2,3} \quad \text{avec} \quad T_{ij}^e = \iint_{\Omega_r^e} (\sigma N_i^e N_j^e) d\Omega^e \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{A}_{s,r}^e = [A_{i(s,r)}^e]_{i=1,2,3}$$

Les contributions de tous les éléments du maillage sont assemblées pour aboutir à un système matriciel décrivant le problème sur l'ensemble du domaine.

B. Couplage des équations électromagnétiques-circuits

Dans le modèle bidimensionnel de calcul de champ dans les machines électriques, le potentiel vecteur magnétique ne présente que la composante axiale. Les courants induits ou inducteurs sont alors dirigés dans la même direction axiale. De ce fait une modélisation par éléments finis ne permet de tenir compte que des parties actives des circuits électriques. Pour compléter cette analyse 2-D en considérant la totalité des circuits électriques, les impédances des têtes de bobines au stator et des anneaux de court-circuit de la cage sont introduites dans les équations électriques. Alors un couplage direct des équations électromagnétiques à celles des circuits est nécessaire.

B.1 Couplage des équations de champ aux grandeurs électriques

Afin de coupler l'équation du champ aux équations des circuits électriques, nous exprimons les termes sources du champ en fonction des grandeurs électriques à savoir les courants et les tensions.

- *Stator*

Le vecteur \mathbf{F}_s , dans le domaine Ω_s , décrit la densité de courant dans le bobinage. Elle est supposée uniforme et imposée par les tensions d'alimentation. Sa forme discrétisée en éléments finis est donnée, pour chaque nœud (j) d'un élément (e), par l'expression suivante :

$$F_{js}^e = \iint_{\Omega_s^e} N_j J_s d\Omega_e = \frac{\Delta^e}{3} J_s \quad (\text{B.18})$$

où J_s peut être exprimée en fonction des courants de phase du stator comme suit :

$$J_s = \left(\frac{N}{S_e}\right) \beta^e (\alpha_a^e i_a + \alpha_b^e i_b + \alpha_c^e i_c) \quad (\text{B.19})$$

Le terme entre parenthèses représente la densité de conducteur dans l'encoche. Celle-ci est supposée uniforme sur toute la surface de l'encoche S_e , β^e . Un coefficient égal à (± 1) donne le sens des conducteurs et ($\alpha_a^e \alpha_b^e \alpha_c^e$) définissent l'appartenance des éléments aux trois phases du stator a, b et c. Sous forme matricielle, l'équation (B.18) s'écrit ainsi :

$$\mathbf{F}_s^e = \mathbf{C}_s^e \mathbf{I}_s \quad (\text{B.20})$$

avec :

$$\mathbf{C}_s^e = [C_{i,j}^e]_{i,j=1,2,3} = \left(\frac{N}{S_e}\right) \frac{\Delta^e}{3} \beta^e \begin{bmatrix} \alpha_a^e & \alpha_b^e & \alpha_c^e \\ \alpha_a^e & \alpha_b^e & \alpha_c^e \\ \alpha_a^e & \alpha_b^e & \alpha_c^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_s = [i_j]_{j=a,b,c}$$

L'assemblage sur tous les éléments conduit à écrire :

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{C}_s \mathbf{I}_s \quad (\text{B.21})$$

où \mathbf{C}_s est une matrice de connexion de dimensions ($3 \times n$).

- *Rotor*

Le vecteur \mathbf{F}_r qui apparaît dans l'équation du champ (A.14) du domaine Ω_r , est relié aux différences de potentiels induites aux bornes des barres de la cage. Sa forme discrétisée en éléments finis est donnée, pour chaque nœud (j) d'un élément (e) appartenant à la $k^{\text{ième}}$ barre, par l'expression suivante :

$$F_{jr}^{ek} = \sigma \iint_{\Omega_e^k} N_j \frac{u_b^k}{l} d\Omega_e \quad (\text{B.22})$$

Sous la forme de matrice élémentaire, on obtient :

$$\mathbf{F}_r^e = \mathbf{C}_r^e \mathbf{U}_b \quad (\text{B.23})$$

La matrice de connexion élémentaire s'écrit comme suit :

$$\mathbf{C}_r^e = [C_{ij}^e]_{i=1,3, j=1,n_b} = \frac{\sigma \Delta^e}{3l} \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{n_b} \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{n_b} \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{n_b} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{U}_b = [u_{bj}]_{j=1,n_b}$$

où η_i définit l'appartenance des éléments aux barres.

L'assemblage sur tous les éléments des barres de la cage du rotor permet d'écrire :

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{C}_r \mathbf{U}_b \quad (\text{B.25})$$

où \mathbf{C}_r est une matrice de connexion de dimensions $(n_b \times n)$.

En injectant les Eqs. (B.21) et (B.25) respectivement dans les Eqs. (A.13) et (A.14), on obtient :

$$\mathbf{K}_s \mathbf{A}_s - \mathbf{C}_s \mathbf{I}_s = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{K}_r \mathbf{A}_r + \mathbf{T} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r - \mathbf{C}_r \mathbf{U}_b = 0 \quad \text{dans } \Omega_r \quad (\text{B.27})$$

B.2 Couplage des équations de circuits aux grandeurs magnétiques

B.2.1 Stator

Si on note par R_s et l_s , la résistance et l'inductance de fuite des têtes de bobines, par phase du bobinage statorique, l'équation électrique des trois phases s'écrit, sous forme matricielle, ainsi :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \frac{d}{dt} \mathbf{I}_s + \mathbf{E}_s \quad (\text{B.28})$$

où \mathbf{V}_s , \mathbf{I}_s et \mathbf{E}_s représentent respectivement les vecteurs tensions d'alimentation, courants et forces contre-électromotrices au stator. Les forces contre-électromotrices des trois phases peuvent être reliées au potentiel vecteur magnétique a_s en utilisant l'équation suivante :

$$\mathbf{E}_s = [E_j]_{j=a,b,c} \quad \text{avec} \quad E_j = l \frac{N}{S_e} \left(\iint_{\Omega_+} \frac{\partial a_s}{\partial t} d\Omega_s - \iint_{\Omega_-} \frac{\partial a_s}{\partial t} d\Omega_s \right) \quad (\text{B.29})$$

où l est la longueur utile de la machine; Ω_+ et Ω_- sont, respectivement, la section des conducteurs aller et retour du bobinage.

Sachant que le potentiel vecteur magnétique, dans un élément (e) du maillage, est donné par l'expression (A.6), alors l'Eq. (B.27) prend la forme suivante :

$$E_j = \sum_e E_j^e \quad \text{avec} \quad E_j^e = l \sum_{i=1}^3 \frac{N_i}{S_e} (\beta^e \alpha_j^e \iint_{\Omega_s^e} N_i^e d\Omega_s^e) \frac{\partial A_{is}^e}{\partial t}$$

sous forme matricielle, on obtient :

$$\mathbf{E}_s^e = l \mathbf{C}_s^{eT} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_s^e$$

L'assemblage des contributions de tous les éléments, produit l'expression suivante :

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{R}_s \mathbf{I}_s + \mathbf{I}_s \frac{d}{dt} \mathbf{I}_s + l \mathbf{C}_s \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_s \quad (\text{B.30})$$

B.2.2 Rotor

Les barres de la cage rotorique sont des conducteurs massifs court-circuités par des anneaux. On peut alors les assimiler à un circuit électrique constitué par les résistances des barres (R_b) et par les impédances d'une portion des anneaux de court-circuit (R_e, l_e). Si on suppose qu'aucun courant ne circule entre les barres via le circuit magnétique, le schéma équivalent de la cage peut être alors représenté par celui de la Figure B.1.

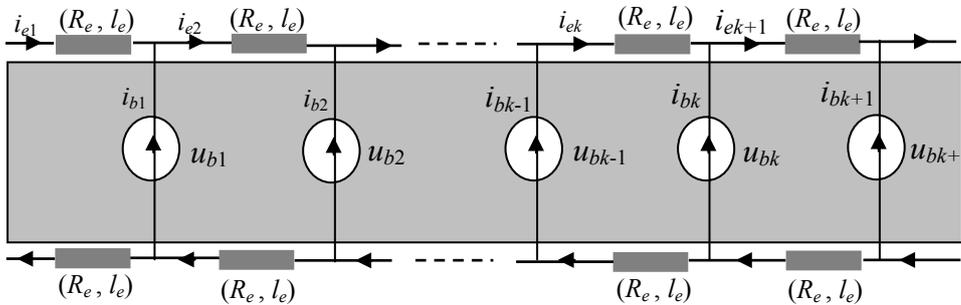


Fig. B.1. Modèle du circuit de la cage rotorique.

En écrivant les lois de Kirchhoff, on peut exprimer les courants et les tensions induits dans les barres de la cage, respectivement, par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} i_{b1} = i_{e2} - i_{e1} \\ i_{b2} = i_{e3} - i_{e2} \\ \vdots \\ i_{bn_b-1} = i_{en_b} - i_{en_b-1} \\ i_{bn_b} = hi_{e1} - i_{en_b} \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(R_e + l_e \frac{\partial}{\partial t})i_{e1} = hu_{b1} - u_{bn_b} \\ 2(R_e + l_e \frac{\partial}{\partial t})i_{e2} = u_{b2} - u_{b1} \\ 2(R_e + l_e \frac{\partial}{\partial t})i_{e3} = u_{b3} - u_{b2} \\ \vdots \\ 2(R_e + l_e \frac{\partial}{\partial t})i_{en_b} = hu_{bn_b} - u_{bn_b-1} \end{array} \right. \quad (\text{B.32})$$

où n_b est le nombre de barres de la cage et où le coefficient h permet de tenir compte d'une éventuelle symétrie. Sous forme matricielle, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\mathbf{R}_e \mathbf{I}_e + \mathbf{I}_e \frac{d}{dt} \mathbf{I}_e) = \mathbf{M} \mathbf{U}_b \\ \mathbf{I}_b = -\mathbf{M}^T \mathbf{I}_e \end{array} \right. \quad (\text{B.33})$$

avec:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -h \\ -1 & 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est une matrice de connexion de dimensions $(n_b \times n_b)$.

Vu que les matrices résistances et inductances sont diagonales, la combinaison de ces deux équations aboutit à l'expression suivante :

$$-\frac{1}{2} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{U}_b = \mathbf{R}_e \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_e \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I}_b \quad (\text{B.34})$$

La densité de courant induite dans une barre k , de section s_b , est donnée par l'expression suivante :

$$J_b^k = -\sigma \left(\frac{\partial a_r}{\partial t} - \frac{u_b^k}{l} \right) \quad (\text{B.35})$$

Le courant total dans la barre est obtenu par intégration de l'équation (B.35) sur tous les éléments de la surface de la barre :

$$i_b^k = \sum_e \left(-\eta_k \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega_e} \sigma N_i \frac{\partial A_i^e}{\partial t} d\Omega_e + \iint_{\Omega_e} \sigma \frac{u_b^k}{l} d\Omega_e \right) \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned}
i_b^k &= \sum_e \left(-\sigma \frac{\Delta^e}{3} [\eta_k \quad \eta_k \quad \eta_k] \frac{\partial}{\partial t} A_r^e \right) + \frac{u_b^k}{R_b} \\
&\vdots \\
i_b^{n_b} &= \sum_e \left(-\sigma \frac{\Delta^e}{3} [\eta_{n_b} \quad \eta_{n_b} \quad \eta_{n_b}] \frac{\partial}{\partial t} A_r^e \right) + \frac{u_b^{n_b}}{R_b}
\end{aligned}$$

Le vecteur \mathbf{I}_b , représentant les courants de toutes les barres, s'écrit alors comme suit :

$$\mathbf{I}_b = \sum_e \left(-\sigma \frac{\Delta^e}{3} \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_1 & \eta_1 \\ \eta_2 & \eta_2 & \eta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{n_b} & \eta_{n_b} & \eta_{n_b} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r^e \right) + \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{U}_b \quad (\text{B.37})$$

En tenant compte de l'Eq. (B.24) on peut écrire :

$$\mathbf{I}_b = \sum_e \left(-\mathbf{I} \mathbf{C}_r^{eT} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r^e \right) + \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{U}_b \quad (\text{B.38})$$

soit, sous une forme globale :

$$\mathbf{I}_b = -\mathbf{I} \mathbf{C}_r^T \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}_r + \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{U}_b \quad (\text{B.39})$$

La combinaison des Eqs. (B.34) et (B.39) donne l'équation électrique du rotor.

B.3 Equations en régime harmonique

En régime harmonique établi, toutes les grandeurs électriques et magnétiques sont supposées à variation sinusoïdale dans le temps. Les dérivées temporelles sont alors remplacées par le terme ($j\omega$). En valeurs complexes, les équations du champ et celles des circuits relatifs au stator et au rotor s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{K}}_s \underline{\mathbf{A}}_s - \underline{\mathbf{C}}_s \underline{\mathbf{I}}_s = 0 \\ j\omega_s \mathbf{I} \underline{\mathbf{C}}_s \underline{\mathbf{A}}_s + \underline{\mathbf{Z}}_s \underline{\mathbf{I}}_s = \underline{\mathbf{V}}_s \quad \text{dans } \underline{\Omega}_s \\ \underline{\mathbf{Z}}_s = \underline{\mathbf{R}}_s + j\omega_s \underline{\mathbf{I}}_s \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{R}}_r \underline{\mathbf{A}}_r - \underline{\mathbf{C}}_r \underline{\mathbf{U}}_b = 0 \\ -jg\omega_s \mathbf{I} \underline{\mathbf{C}}_r^T \underline{\mathbf{A}}_r + \left(\frac{1}{2} \underline{\mathbf{Z}}_e^{-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^T + \underline{\mathbf{R}}_b^{-1} \right) \underline{\mathbf{U}}_b = 0 \\ \underline{\mathbf{R}}_r = \underline{\mathbf{K}}_r + jg\omega_s \underline{\mathbf{I}} \\ \underline{\mathbf{Z}}_e = \underline{\mathbf{R}}_e + jg\omega_s \underline{\mathbf{I}}_e \end{cases} \quad \text{dans } \underline{\Omega}_r \quad (\text{B.41})$$

C. Notes sur la résolution éléments finis et traitement de la saturation

La matrice éléments finis du système d'équations à résoudre est symétrique et creuse. Pour optimiser son profil et réduire le temps de calcul, une nouvelle renumérotation des nœuds du maillage est nécessaire. Cette optimisation peut être réalisée à l'aide d'algorithmes de Cuthill-McKee [119], Sloan [120], Boutoura [121]. Le stockage adopté est celui de la technique Sky-line très répandue pour les traitements numériques [78]. Cette technique consiste à stocker la matrice sous formes de vecteurs afin de réduire l'espace mémoire et le temps de calcul. La méthode de résolution utilisée est la méthode directe de Gauss-Crout qui consiste à décomposer la matrice du système sous la forme suivante :

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T \quad (\text{C.42})$$

où \mathbf{L} est une matrice triangulaire inférieure et où \mathbf{D} est une matrice diagonale. Par la suite, une étape de substitution est suffisante pour déterminer la solution.

La méthode directe de résolution adoptée est associée à la méthode itérative de substitutions successives pour le traitement de la non linéarité. En effet, cette technique consiste à démarrer le processus itératif par une réluctivité constante dans tout le domaine de la machine. Une fois la solution initiale (\mathbf{A}^0 dans le cas du régime harmonique ou \mathbf{A}_0^t en pas à pas dans le temps) obtenue, on détermine l'induction dans chaque élément du domaine sachant que dans le cas du régime harmonique, l'induction magnétique au rotor est calculée après la superposition des potentiels vecteurs de chaque harmonique. Puis, dans chaque élément du maillage une nouvelle réluctivité est déterminée à l'aide de la courbe $b-h$, pour être réutiliser dans l'itération k dont la solution sera \mathbf{A}^k ou \mathbf{A}_k^t . Afin d'accélérer le processus itératif, un facteur de relaxation est utilisé pour actualiser le potentiel vecteur qui détermine la réluctivité des éléments de l'itération suivante [122], par :

$$\mathbf{A}_k^t = \mathbf{A}_{k-1}^t + \alpha(\mathbf{A}_k^t - \mathbf{A}_{k-1}^t) \quad (\text{C.43})$$

où α est le facteur de relaxation compris entre 0 et 1. Cependant un test d'arrêt est nécessaire pour stopper le processus itératif. Celui-ci mesure à quel point deux solutions consécutives se ressemblent pour avoir la convergence. Le critère que nous avons adopté est de la forme:

$$\frac{\sum_k |A_k^t - A_{k-1}^t|}{\sum_k |A_k^t|} \leq \varepsilon \quad (\text{C.44})$$

D. Couplage des champs magnétiques dans l'entrefer

Les deux modèles relatifs au stator et rotor définis doivent être couplés sur l'interface Γ , en assurant les conditions de continuité du champ magnétique. Il a été déjà démontré dans des travaux antérieurs [74], [75] qu'introduire une contrainte de couplage comme :

$$\underline{A}_r(R, \theta') - \underline{A}_s(R, \theta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{D.45})$$

conduit à la définition d'une fonctionnelle du type suivant :

$$\Pi' = \Pi_s + \Pi_r + \int_{\Gamma} \lambda (\underline{A}_s - \underline{A}_r) d\Gamma \quad (\text{D.46})$$

où Π_s et Π_r sont des fonctionnelles correspondantes aux problèmes du stator et du rotor si les conditions homogènes de Neumann sont appliquées sur les interfaces Γ_s et Γ_r . Le vecteur λ représente les multiplicateurs de Lagrange existants juste sur l'interface de couplage. La résolution du problème défini par la fonctionnelle (D.46) nous oblige à définir les multiplicateurs de Lagrange comme étant les dérivées normales du potentiel vecteur magnétique sur l'interface Γ . La modification de la fonctionnelle avec les multiplicateurs de Lagrange aboutit généralement au système algébrique suivant [77], [37] :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{P}}_s^T \\ \mathbf{0} & \underline{\mathbf{R}} & -\underline{\mathbf{P}}_r^T \\ \underline{\mathbf{P}}_s & -\underline{\mathbf{P}}_r & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{A}}_s \\ \underline{\mathbf{A}}_r \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_s \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{D.47})$$

Dans ce système, $\underline{\mathbf{A}}_r$ contient, au même temps, les variables du rotor $\underline{\mathbf{A}}_{r-\Gamma}$ et celles de l'interface $\underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma$.

Les matrices, $\underline{\mathbf{P}}_s$ et $\underline{\mathbf{P}}_r$ représentent la forme discrétisée de la contrainte de couplage (D.45), qui s'écrit comme suit :

$$\underline{\mathbf{P}}_s \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma - \underline{\mathbf{P}}_r \underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma = 0 \quad (\text{D.48})$$

Dans notre cas, les matrices $\underline{\mathbf{P}}_s$ et $\underline{\mathbf{P}}_r$ s'identifient à :

$$\underline{\mathbf{P}}_s = [\mathbf{0} \quad \underline{\mathbf{G}}] \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{P}}_r = [\underline{\mathbf{I}} \quad \mathbf{0}] \quad (\text{D.49})$$

Si on sépare maintenant la contribution des éléments d'interface de celle du reste du domaine, le système d'équations (D.47) s'écrit alors ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}_{ss} \underline{\mathbf{A}}_{s-\Gamma} + \underline{\mathbf{K}}_{s\Gamma} \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma &= \underline{\mathbf{F}}_s \\ \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma s} \underline{\mathbf{A}}_{s-\Gamma} + \underline{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma + \underline{\mathbf{G}}^T \lambda &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma r} \underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma + \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma r'} \underline{\mathbf{A}}_{r-\Gamma} - \underline{\mathbf{I}} \lambda &= 0 \\ \underline{\mathbf{R}}_{r\Gamma} \underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma + \underline{\mathbf{R}}_{r'r'} \underline{\mathbf{A}}_{r-\Gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.51})$$

Equations auxquelles on adjoint l'équation (D.48) qui s'écrit ainsi :

$$\underline{\mathbf{A}}_r^\Gamma = \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma \quad (\text{D.52})$$

De la 1^{ère} équation de (D.51) en tenant compte de (D.52), on obtient :

$$\lambda = \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma\Gamma} \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{A}}_s^\Gamma + \underline{\mathbf{R}}_{\Gamma r} \underline{\mathbf{A}}_{r-\Gamma} \quad (\text{D.53})$$

Cette dernière équation, qui représente les multiplicateurs de Lagrange (identifiés aux composantes tangentielles du champ), montre le couplage des éléments du rotor à ceux de l'interface du stator. En injectant l'Eq. (D.53) dans l'Eq. (D.50), on obtient le même système que celui obtenu en utilisant la technique de transformation de variables. Ainsi les deux méthodes sont alors équivalentes, avec l'avantage de la méthode de transformation de variables dans la réduction du nombre d'inconnues et dans la résolution numérique du système.

E. Caractéristiques de la machine à cage étudiée

E. 1. Caractéristiques nominales de la machine étudiée

La machine étudiée est fabriquée en grande série par l'entreprise Leroy Somer. Les caractéristiques électromécaniques sont fournies par ce constructeur.

Caractéristiques	Valeur	Unité
Puissance utile	5.5	kW
Nombre de phases	3	-
Fréquence d'alimentation	50	Hz
Nombre de pôles	4	-
Type d'enroulement	Concentrique	-
Nombre de conducteurs en série par phase	19	
Connexion des enroulements	Etoile (Y)	-
Classe d'isolation	F	-
Nombre d'encoches au stator (semi fermées)	48	-
Nombre d'encoches au rotor (fermées)	28	-
Résistance d'une phase au stator à 25°C	1.05	Ω
Tension d'alimentation	380	V
Glissement	4.13	%
Courant absorbé	11.62	A
Couple nominal	37	N.m
Facteur de puissance	0.865	-
Rendement	84.26	%

Table E. 1 : Caractéristiques nominales de la machine à cage étudiée.

E.2 Paramètres électriques et mécaniques de la machine à cage étudiée

Les paramètres électriques et mécaniques de la machine à cage étudiée sont donnés respectivement par les tableaux C.1 et C.2. sachant que les résistances et les inductances de fuite des têtes de bobines diffèrent selon le nombre de bobines connectées dans le bobinage statorique.

	0 bobine déconnectée	1 bobine déconnectée	2 bobines déconnectées
R_s (Ω)	2,2	1,8	1,4
l_s (mH)	0,35	0,27	0,2

Table E.2 Résistances et inductances de fuite des têtes de bobines (par phase) pour différentes configurations du bobinage statorique de la machine à cage étudiée.

J (kg.m ²)	f_0 (s ⁻²)	f_1 (m ⁻¹ s ⁻¹)	f_2 (m ⁻²)
0,014	0,036	0,011	-5.73 10 ⁻⁵

Table E.3 Paramètres mécaniques de la machine à cage étudiée.

E.3 Dimensions géométriques de la machine

Composante	Valeur	Unité
Rayon extérieur du stator	84,00	Mm
Rayon intérieur de la culasse statorique	69,50	Mm
Rayon d'alésage	55,00	Mm
Rayon extérieur du rotor	54,60	Mm
Largeur de l'entrefer	0,40	Mm
Rayon extérieur de la culasse rotorique	33,20	Mm
Rayon de l'arbre	16,50	Mm
Longueur utile	160,00	Mm
Inclinaison des barres au rotor	7,50	Degrés

Table E. 4 : Principales dimensions de la machine à cage étudiée.

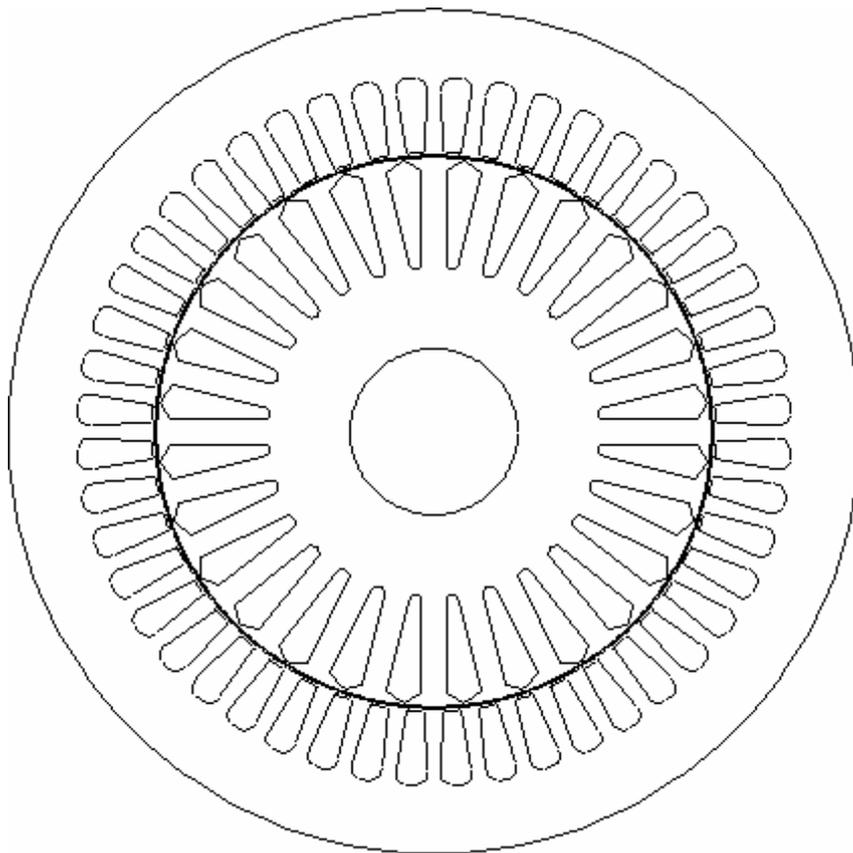
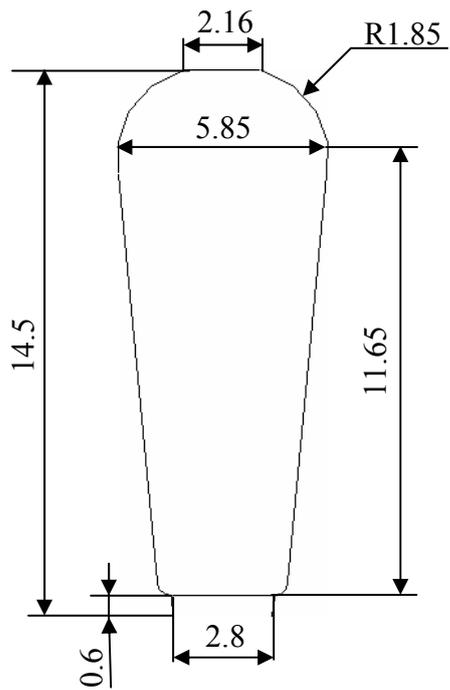
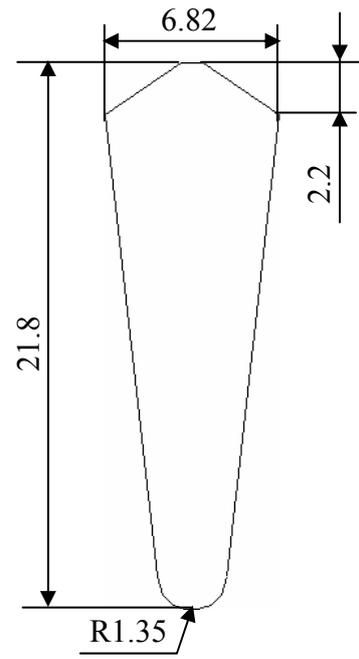


Fig. E. 1. Coupe droite de la machine à cage étudiée.



Encoche statorique



Encoche rotorique.

Fig. E. 2. Dimensions des encoches statorique et rotorique de la machine à cage étudiée.

ملخص— لوصف بطريقة دقيقة عمل المحركات ذات التحريض المغناطيسي، يستلزم الأخذ بعين الاعتبار التأثير المتبادل بين الحقل المغناطيسي، الدارات الكهربائية و ميكانيكية القطعة المتحركة. هدفنا هو مساهمة بسيطة في نمذجة المحركات ذات التحريض المغناطيسي بطريقة العناصر المنتهية بإستعمال تقنية ربط السطح البيني بين حقول الدوار والساكن. النموذج المقدم أولاً هو المغنطوديناميكية في النمط الفضائي الذي يأخذ بعين الإعتبار الإيقاعات الفضائية و التشبع المغناطيسي. نفس تقنية ربط السطح البيني، كيفت لأخذ بعين الإعتبار حركة الدوار، إستعملت لنمذجة الأنماط الإنتقالية للمحركات ذات التحريض المغناطيسي حيث كل من المسائل المغناطيسية، الكهربائية و ميكانيكية حركة الدوار قد تحل في آن واحد. النماذج المقدمة حقق منها بأعمال تجريبية.

الكلمات الهامة: المحركات ذات التحريض المغناطيسي، ربط السطح البيني، الإيقاعات الفضائية، طريقة العناصر المنتهية، الحركة.

Résumé — Pour décrire de façon fine le fonctionnement des machines à induction, il est indispensable de considérer l'interaction entre le champ magnétique, les circuits électriques et le mouvement mécanique de la partie mobile. Notre objectif porte sur une modeste contribution dans la modélisation par éléments finis des machines à induction en utilisant une technique de couplage d'interface des champs du stator et du rotor. Le premier modèle développé est celui de la magnétodynamique en régime harmonique avec une prise en compte de la saturation et des harmoniques d'espace. La même technique de couplage d'interface, adaptée pour tenir compte du mouvement du rotor est utilisée pour modéliser les régimes transitoires des machines à induction où les problèmes magnétique, électrique et la mécanique de mouvement du rotor sont résolus simultanément. Les modèles développés sont validés expérimentalement.

Mots clefs : Machines à induction, couplage d'interface, Harmoniques d'espace, Méthode des éléments finis, mouvement.

Summary — To describe the induction machines operation with fitness manner, it is necessary to consider the interaction between magnetic field, electrical circuits and mechanic movement of the rotating parts. The aim of our work consists to a modest contribution in finite elements modelling of induction machines using a coupling interface technique for stator and rotor fields. The first developed model is the time harmonic finite elements taking into account the saturation and space harmonics, in steady state mode. The same coupling technique, that considers the rotor movement, is used to modelling the transient mode of induction machines where the magnetic field, electrical circuits and mechanical movement of the rotor problems are solved simultaneously. The developed models are validated by experiments.

Key words: Induction machines, Interface coupling, Space harmonics, finite element method, movement.