

12/93
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE-CIVIL

الدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة -
BIBLIOTHEQUE -
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ETUDE DE LA DIFFUSION DES CONTRAINTES
ET DES DEPLACEMENTS DANS UN MILIEU
GRANULAIRE LACHE PAR PROCESSUS
ALEATOIRES**

Proposé et Dirigé par:

Mr S. BELKACEMI

Etudié par:

HACHI Fatima

Promotion Juillet 1993

E.N.P 10, Avenue Hacen Badi El-Harrach - ALGER

Lire en p29, 3^o paragraphe : (La moyenne) \bar{S}_z
 et : (\bar{S}_z est obtenue

Lire en p30, 2^o paragraphe, 7^o ligne : une fonction $\lambda(x, y, z)$

Lire en p31 : - $V[\lambda(x, y, z)] = n(x, y, z) - n^2(x, y, z)$ (3.3)

- 2^o paragraphe, 2^o ligne : La mesure de λ en chaque point

- 2^o paragraphe, 5^o ligne : \tilde{n}_{ij} au lieu de n_{ij} .

Lire en p32 : - Ligne 14 : statistiquement au lieu de statiquement

Lire en p33 : Section 3.3: paragraphe 1 : \bar{S} au lieu de S
 paragraphe 2 : $n(x, y, z) = \bar{n}$

Lire en p34 : ligne 4 : \bar{S}_z au lieu de S_z

ligne 6 : S_z / \bar{S}_z au lieu de S_z / S_z

Lire en p35 : ligne 1 : α_s au lieu de α_z

ligne 3 : S_z / \bar{S}_z au lieu de S_z / S_z

Lire en p36 : - Les expressions (3.15) et (3.16) au lieu de
 (3.14) et (3.16).

$$- V\left[\frac{S_z}{\bar{S}_z}\right] = - \frac{1}{L n \bar{n}}$$

Lire en p37 : - dernière ligne : ... intergranulaire \bar{S}_z

Lire en p38 : - ligne 5, Pour une valeur \bar{S}_z donnée ...

- ligne 15 : \bar{S}_{xz} et \bar{S}_{yz} au lieu de S_{xz} et S_{yz}

- section 3.4 : ligne 4 : où η est une variable aléatoire

Lire en p39 : paragraphe 2, ligne 2 : ... S et η sont indépendants ...

paragraphe 3, ligne 1 : ... puisque η dépend

Lire en p45 : section 3.6, ligne 4 : ... approximativement au premier moment.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE-CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ETUDE DE LA DIFFUSION DES CONTRAINTES
ET DES DEPLACEMENTS DANS UN MILIEU
GRANULAIRE LACHE PAR PROCESSUS
ALEATOIRES**

Proposé et Dirigé par:

Mr S. BELKACEMI

Etudié par:

HACHI Fatiha

Promotion Juillet 1993

E.N.P 10, Avenue Hacen Badi El-Harrach - ALGER

REMERCIEMENTS

D'une plume sincère, je témoigne ma profonde gratitude a Mr BELKACEMI pour sa présence constante, ses précieux conseils et la confiance qu'il a placé en moi .

Mes remerciements vont à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

A ma mère et à mon père en faible témoignage de ma reconnaissance pour leurs sacrifices, leurs encouragements et leur soutien.

A ma soeur Djia ;

A ma petite nièce adorée Sihem ;

A mon frère Boualeme et son épouse Nora ;

A mon grand petit frère Yazid ;

A tous mes amis ; pour avoir supporté mes humeurs .

Fatiha .

Titre : Etude de la diffusion des contraintes et des déplacements dans un milieu granulaire lâche par processus aléatoires

Résumé : Le but de ce travail est de présenter une nouvelle approche pour la calcul des contraintes et des déplacements dans un milieu granulaire sec et lâche, indépendamment des concepts de la mécanique des sols classique qui sont issus des concepts de la mécanique des milieux continus. Un aléa provenant de la nature discrète du sol sera introduit dans la définition des sollicitations internes. Les processus aléatoires seront utilisés pour modéliser la transmission des forces par le biais des contacts entre grains, et la migration jusqu'en surface, des volumes d'air en excès qui en résultent. Cette modélisation conduit à des équations de diffusion pour la quantification des contraintes moyennes et des déplacements moyen d'un sol.

Title : Study of the diffusion of stresses and displacements in loose granular media by random processes.

Abstract: The goal of this work is to present a recent approach for the evaluation of stresses and displacements in loose and dry granular medium, independently from concepts of classical soil mechanics which are based on mechanics of continuum media. A random which arise from the discrete nature of the soil will be introduced in the definition of internal sollicitations. The random processes will be used to model the transmission of forces by mean of grains contacts, and the migration, up to the surface, of resultant air volumes in excess. This modelisation leads to diffusion equations for the quantification of the average stresses and displacements in a soil.

TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION	1
1. HISTORIQUE	4
2. NOTION DE CONTRAINTE DANS UN MILIEU GRANULAIRE	10
2.1 Approche classique des contraintes	10
2.1.1 Introduction	
2.1.2 Contraintes effectives	11
2.1.2.1 Principe des contraintes effectives de TERZAGHI	11
2.1.2.2 Extension du principe de TERZAGHI	12
2.2 Contraintes en mécanique probabiliste des milieux granulaires	15
2.2.1 Introduction	15
2.2.2 Forces de contacts intergranulaires	16
2.2.3 Contrainte en un point d'un massif granulaire charge en surface	18
3. DISTRIBUTION DE PROBABILITE DES CONTRAINTES ET TASSEMENT D'UN SOL GRANULAIRE LACHE	29
3.1 Introduction	29
3.2 Porosité	29
3.3 Distribution de probabilité des contraintes intergranulaires	33
3.4 Distribution de probabilité des contraintes locales	38
3.5 Tassement d'un sol granulaire lâche	39
3.5.1 Introduction	39
3.5.2 Micromécanismes de déformation	40
3.5.3 Instabilités locales et tassement	44
3.6 Conclusion	

4. PROCESSUS DE DIFFUSION ET DEFORMATION D	
MASSIF GRANULAIRE A L'ETAT STATIONNAIRE	
4.1 Introduction	47
4.2 Diffusion unidimensionnelle ou mouvement Brownien	48
4.2.1 Synoptique de la théorie du mouvement Brownien	48
4.2.2 Marche au hasard et connection avec Processus de diffusion	52
4.3 Application à la déformation à l'état stationnaire, sous l'effet d'une fondation superficielle. Etat plan de déformations	58
4.3.1 Introduction	58
4.3.2 Modèle de Bourdeau	63
4.3.2.1 Formulation du modèle	63
4.3.2.2 Equation de diffusion de la charge de déformation planes	66
4.3.2.3 Equation de diffusion des déplacements	72
4.3.2.4 Couplage des deux processus de diffusion	77
4.3.3 Resolution des équations	79
4.3.4 Exemples	85
 CONCLUSION	 89

ANNEXES

- A1 Résumé de la théorie des probabilités
- A2 Traitement numériques des équations
- A3 Exemples pour l'état stationnaire en déformations planes

Exemple 1 : Massif bicouche sur une base rigide chargé par une fondation souple

Exemple 2 : Massif monocouche sur une base rigide chargé par une fondation rigide (application au cas de l'essai sur limon)

Exemple 3 : Massif bicouche sur une base rigide (application au cas de l'essai sur sable / limon)

LISTE DES SYMBOLES

- a Altitude de la particule Brownienne
- a_s Aire spécifique des surfaces de contact intergranulaires
- A Aire d'une surface.
- A_i Aire de l'intersection d'un grain i par un plan coupant le milieu granulaire.
- A_t Aire totale de la surface interceptée par un plan coupant le milieu granulaire.
- D_z Coefficient de convection ou de dérive dans la direction z .
- C_{wx} Coefficient de dérive des déplacements dans le modèle stationnaire .
- D_z Coefficient de diffusion dans la direction z .
- $D_{\sigma x}$ ou D_{sx} Coefficient de diffusion des contraintes σ ou s dans la direction x .
- D_{w_x} Coefficient de diffusion dans la direction horizontale x des déplacements verticaux moyens w .
- D_w Coefficient de diffusion des déplacements dans le modèle stationnaire (issu du modèle original).
- $E[x]$ Espérance mathématique de x (ou moyenne) équivalente à x .
- f Concentration granulaire (nombre de grains par unité de volume).
- $f(x, t)$ Concentration d'une substance diffusée au cours du temps dans la direction x .
- $f_x(x)$ Fonction de densité de probabilité de x (abréviation : p. d. f)

- $f_x(x, t)$ ou $f_x(x, z)$ Fonction de densité de probabilité de transition entre t_0 et t ou z_0 et z d'un processus stochastique $x(t)$ ou $x(z)$
- F_i Force intergranulaire dans un grain i .
- H Epaisseur d'une couche de sol ou d'un échantillon.
- k_s Variable aléatoire discrète, entière, positive, utilisée dans l'expression des contraintes intergranulaires.
- K Coefficient de pression des terres.
- K_0 Coefficient de pression des terres au repos.
- n_A Porosité surfacique relative à la surface d'aire totale.
- $n(x, y, z)$ Probabilité qu'un point de coordonnées (x, y, z) d'un milieu granulaire soit situé dans un pore.
- n (ou n_v) Porosité volumique relative au volume total V .
- \bar{n}_v Mesure statistique de n_v .
- N Vecteur propre du tenseur des contraintes.
- N_z Nombre de noeuds sur l'axe vertical utilisés pour la résolution numérique de l'équation de diffusion.
- p Probabilité de transition en un pas dans une marche au hasard discrète unidimensionnelle ($p = 1 - q$).
- P Point matériel.
- P_{ij} Force agissant au j ème contact sur un grain i .
- F_{AB} Force de contact entre les grains A et B .
- $\text{Prob}[A]$ ou $P[A]$ Probabilité d'occurrence de l'événement A .

Prob[A/B] Probabilité de l'événement A conditionnée par l'événement B.

Prob[AB] Probabilité d'occurrence simultanée des deux événements A et B.

qv Concentration solide relative au volume du matériau V.

Q Densité linéaire de charge (charge par unité de longueur).

R_{zi} Contrainte locale normale verticale dans le grain i.

R_z(x, y, z) Contrainte locale normale verticale au point (x, y, z).

R_{zxi} Contrainte locale tangentielle dans le grain i.

R_{zx}(x, y, z) Contrainte locale tangentielle au point (x, y, z).

s_x Ecart type d'une variable aléatoire x.

s²_x (ou V[x]) Variance de x.

S Surface.

S_r Degré de saturation.

S_x(x, y, z) Contrainte intergranulaire normale au point (x, y, z) dans la direction x.

S_{zx}(x, y, z) Contrainte intergranulaire tangentielle au point (x, y, z).

t Temps

u_a Suppression intersticielle de l'air.

u_w Suppression intersticielle de l'eau.

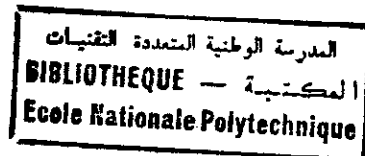
v_s Volume moyen d'une particule.

V Volume total d'une quantité donnée.

V_l Densité linéaire de volume déplacé (m³ par m).

v_x Coefficient de variation de la variable aléatoire x.

\bar{W}	Déplacement moyen dans le modèle stationnaire.
\bar{W}_x	Composante horizontale de W .
\bar{W}_z	Composante verticale de W .
x, y, z	- Variables algébriques ou aléatoires continus. - Coordonnées ou directions de l'espace.
x_i	Variable aléatoire discrète.
x_L	Abscisse d'une limite latérale dans le modèle stationnaire.
\bar{x} ou (μ_x)	Espérance mathématique de x .
z	Profondeur d'un massif granulaire comptée à partir de la surface.
z'	Coordonnée verticale dans un massif granulaire comptée vers le haut.
α_s	Constante d'étalonnage utilisée dans l'expression des contraintes intergranulaires.
β_v	Module de déformation volumétrique.
γ_d	Poids volumique apparent sec.
δx	Intervalle fini autour de l'axe x .
δa	Intervalle fini entre deux valeurs a .
δt	Intervalle de temps fini.
δz	Intervalle fini autour de l'axe z .
Δx	Pas de discrétisation horizontale pour la résolution numérique.
Δz	Pas de discrétisation verticale pour la résolution numérique.
ϵ_v	Déformation volumétrique.
$\eta(x, y, z)$	Fluctuation d'une contrainte locale $R(x, y, z)$ autour de la contrainte intergranulaire correspondante $S(x, y, z)$ au point (x, y, z) .
$\eta'(x, y, z)$	Forme adimensionnelle de la fluctuation $\eta(x, y, z)$. Coordonnées locales liées à la direction des contraintes intergranulaires moyennes principales \bar{S}_I et \bar{S}_{III} .



$\theta(x, z)$ Angle de la direction de la contrainte principale majeure avec la ~~verticale au point~~ (x, z) .

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

λ_s Paramètre de la distribution de Poisson pour S/\bar{S} .

$\lambda(x, y, z)$ Fonction aléatoire spatiale.

λ Coefficient de diffusivité des charges.

$\bar{\sigma}$ (ou σ') Contrainte effective.

σ_g Contrainte intergranulaire.

σ'_m Contrainte effective moyenne.

$\sigma(x)$ Une fonction de la variable aléatoire x .

τ Contrainte tangentielle.

τ_{xy} Contrainte tangentielle selon y sur une surface perpendiculaire à la direction x , en mécanique du continu.

ξ' Angle de frottement interne effectif.

ξ_C Flux de convection.

ξ_D Flux de diffusion.

Coefficient de Bishop.

LISTE DES FIGURES

- Fig 2.1 : Milieu granulaire sollicité par une surcharge concentrée à la surface.
- Fig 2.2 : Modèle de répartition des efforts entre contrainte totale, pression intersticielle et contrainte intergranulaire.
- Fig 2.3 : Forces de contacts et forces intergranulaires
- Fig 2.4 : Massif granulaire semi-infini sollicité en surface.
- Fig 2.5 : Sollicitations sur une section horizontale à travers une éprouvette de matériau granulaire saturé soumise à des pressions uniformes.
- Fig 2.6 : Fonctions univariée $\sigma(x)$.
- Fig 3.1 : Subdivision d'une section à travers un volume V .
- Fig 3.2 : Représentation symbolique de la contrainte dans la section.
- Fig 3.3 : Relation entre le coefficient de variation de la contrainte intergranulaire et la porosité.
- Fig 3.4 : Phénomène de verrouillage
- Fig 3.5 : Mécanismes de déformation par glissement relatif des grains.

Fig 4.1 : Schéma de transition pour la diffusion unidimensionnelle de la particule.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Fig 4.2 : Modèle de déformation à l'état stationnaire. Définitions des événements aléatoires.

Fig 4.3 : Massif chargé par une force répartie sur une ligne de longueur infinie.

Fig 4.4 : Modèle stationnaire de déformation. Marche au hasard des lacunes (vue bidimensionnelle simplifiée)

Fig 4.5 : Diffusion d'un volume d'air, d'origine localisée, jusqu'en surface.

Fig 4.6 : Exemple théorique. Modèle stationnaire pour l'état plan de déformation.

Fig 4.7 : Diffusion des contraintes verticales. Déformations planes. Fondation souple. Massif homogène.

Fig 4.8 : Déformations volumétriques. Déformations planes. Fondation souple. Massif homogène.

Fig 4.9 : Diffusion des déplacements verticaux. Déformations planes. Fondation souple. Massif homogène.

Fig 4.10 : Diffusion des déplacements horizontaux. Déformations planes. Fondation souple. Massif homogène.

INTRODUCTION

La mécanique des sols théorique actuelle repose sur les principes de la mécanique des milieux continus. Cette théorie a donc conservé, pour l'essentiel, les caractéristiques d'une théorie des milieux continus et par conséquent, ses inaptitudes lors de son application au sol qui est un milieu poreux.

En effet, le calcul des contraintes et des déformations dans un sol se base sur les hypothèses de continuité et souvent, d'homogénéité, d'isotropie et d'élasticité. Les résultats obtenus par le biais de ces théories déterministes peuvent s'avérer satisfaisants, quand la nature discontinue du sol n'affecte pas substantiellement son comportement. Les sols grossiers pulvérulents sont, ainsi, les plus visés par cette constatation.

Pour pallier aux insuffisances des théories classiques, une approche probabiliste reposant sur l'idée que le sol est un matériau discontinu et désordonné, est proposée. La théorie décrit la réponse d'un tel système, à un apport d'énergie à ses frontières indépendamment des concepts classiques, issus de la mécanique des milieux continus.

Le chapitre 1 présente un historique retraçant l'évolution des concepts appliqués à la mécanique des sols, depuis la modélisation du sol par un milieu semi-infini continu, isotrope, homogène et élastique jusqu'à l'approche la plus récente qui étudie le sol à l'échelle de la particule discrète.

Au chapitre 2, un rappel succinct du concept fondamental des contraintes effectives est fait avant de mettre en évidence, le caractère aléatoire de la contrainte

induite dans un massif de sol granulaire, et, de déduire que la contrainte effective n'est qu'une moyenne de la sollicitation locale dans un assemblage de grains.

Au chapitre 3, une définition probabiliste de la porosité est donnée, car cette caractéristique tient un rôle important dans la sollicitation interne et est nécessaire pour l'établissement de la distribution de la probabilité des contraintes. Dans ce même chapitre, les tassements sont décrits comme le résultat d'instabilités locales, causées par une augmentation des sollicitations internes, prenant naissance au sein du sol et se propageant jusqu'en surface. Ces instabilités sont représentées par des volumes d'air en excès devant être évacués.

Partant de l'idée de la propagation des forces, par le biais des contacts entre grains et de la migration des volumes d'air en excès, un modèle de cheminement aléatoire est formulé au chapitre 4. Du fait que ce modèle conduit à des équations de diffusion, pour la quantification des contraintes et des déplacements, quelques notions sur le mouvement Brownien sont introduites au début du chapitre. Un historique y est aussi donné sur l'évolution de la notion de diffusion en mécanique des sols.

Les équations de diffusion sont établies pour un sol granulaire lâche et sec à l'état stationnaire de déformation, sous l'effet d'une fondation parfaitement souple ou parfaitement rigide. Dans ce même chapitre, une résolution numérique des équations par la méthode des différences finies est faite. A cet effet, un programme en Fortran a été conçu, ce qui a permis de traiter quelques exemples dont les résultats sont rapportés sous forme graphique.

Le présent travail se termine par une synthèse des principales contributions apportées par cette nouvelle approche probabiliste pour l'étude de la déformation des sols granulaires lâches.

CHAPITRE I

1- HISTORIQUE :

La mécanique des sols théorique découle d'une adaptation judicieuse de la mécanique des milieux continus à un milieu poreux déformable. Ainsi la nature discrète du sol est omise au profit d'une abstraction mathématique, comme l'illustre les hypothèses de la théorie de Boussinesq (1885) pour le calcul des contraintes et des déformations dans un demi-espace, infini, continu, homogène, isotrope et élastique. Des doutes sont permis sur l'exactitude des tassements calculés sur la base de ces contraintes .

Néanmoins, les théories déterministes utilisées, avec prudence pour la résolution de certains problèmes peuvent donner des résultats satisfaisants .

Les problèmes qui seraient donc encore mal résolus sont ceux où la nature discrète du sol gouverne son comportement. Les sols non cohésifs sont les plus visés par cette constatation. Leurs déformations dépendent de la stabilité des contacts entre grains et de leurs réarrangement. Pour les sols cohérents, on peut parler de l'existence d'une continuité mécanique attribuée essentiellement aux interactions électrochimiques entre particules, aux faibles dimensions et à la grande déformabilité des grains (Bourdeau, 1986) .

Bullet (1691) et Coupelet (1726) sont les pionniers d'une approche plus structurale de la mécanique des sols. Ces auteurs ont proposé des modèles de sols granulaires où la nature discrète du sol a été mise en évidence. Cependant cette approche a gardé un aspect déterministe.

En effet, en plus de la simplicité des formes et des dimensions données aux grains, de la représentation

généralement bidimensionnelle des assemblages, la vision du désordre qui caractérise les sols est absente dans les modèles proposés dans le cadre de cette approche .

Or, toutes ces caractéristiques (forme, dimension, arrangement ...), et par suite les forces de contacts entre grains, sont des paramètres imprévisibles qui ne peuvent être adéquatement déterminés pour un sol donné. C'est alors avec l'indéterminisme qu'il faudra pallier à l'échec de ces approches.

Ce nouveau courant fût initié par Terzaghi suite à sa critique à la théorie de la poussée des terres de Coulomb, le 30 septembre 1920, dans Engineering News Record (Bourdeau, 1986). L'auteur a mis en exergue l'influence de la nature granulaire (discrète), sur la mobilisation de la résistance au cisaillement.

Globalement, trois méthodes de calcul sont à distinguer:

- Méthodes purement théoriques issues de la mécanique des milieux continus : Les modèles proposés se distinguent par l'adoption de relations constitutives différentes .
- Méthodes semi-empiriques : Les contraintes sont calculées par la théorie de l'élasticité en combinaison avec des lois de comportements expérimentales telles que les méthodes des chemins de contraintes (Lambe et Whithman, 1969). Les problèmes majeurs qui se posent avec ces méthodes sont ceux relatifs à l'échantillonnage (représentativité) et au remaniement (surtout pour les sols non cohésifs).
- Méthodes empiriques : Ces méthodes établissent des corrélations entre tassements des fondations et les résultats des essais in-situ (essai du pénétromètre standard, préssiomètre, etc). Bien que ces méthodes

tiennent compte des caractéristiques réelles du sol, les contraintes imposées par les instruments des essais in-situ, différent de celles existantes réellement sous les fondations.

L'indéterminisme a été introduit en premier lieu, dans le traitement de la variabilité des caractéristiques naturelles du sol. Les premiers travaux orientés dans ce sens sont ceux de Lumb (1966) et Wu et Kraft (1967).

Dans cette approche, le modèle proposé pour l'étude d'un phénomène donné est de base déterministe, mais le flux d'informations est traité par une analyse statistique. Les paramètres du sol sont caractérisés sous forme de variables aléatoires ou de fonctions aléatoires.

Différentes analyses sont utilisées pour le traitement statistique de ces paramètres. En vue d'une approche probabiliste de la sécurité, Favre (1980) utilise l'analyse de variance pour établir les différentes corrélations entre paramètres rhéologiques du sol et étudier l'influence des caractéristiques des grains (dimensions, forme, état de surface, minéralogie) sur ces paramètres.

Citons encore les travaux de Freeze (1977), sur la consolidation unidimensionnelle. Des modèles numériques sont disponibles pour traiter la consolidation des sols non homogènes. Toutefois ces modèles nécessitent la connaissance de la distribution exacte des propriétés du sol avec la profondeur.

Dans ses travaux, l'auteur exprime le coefficient de consolidation en fonction de la perméabilité du sol, de sa compressibilité et de la porosité. Ces facteurs varient de façon aléatoires et sont traités par les

simulations de Monte Carlo. Ceci permet de traiter la surpression intersticielle ainsi que les tassements de manière statistique. Les valeurs moyennes des tassements obtenues par cette méthode pour les sols hétérogènes sont très différentes de celle calculées par l'approche classique déterministe et leur dispersion est également importante .

Hwang et Witizak (1985), ont étendu cette étude au cas de la variabilité multidimensionnelle des paramètres du sol. Leur conclusion est, en fait, une interprétation des résultats de Freeze. Ces auteurs attribuent l'importante dispersion des résultats obtenus par Freeze à l'effet de dimension du modèle. En effet, les valeurs moyennes calculées, selon que le modèle soit unidimensionnel, bidimensionnel, ou tridimensionnel diffèrent des valeurs déterministes. Cependant, cette différence n'est pas très significative et ces auteurs, concluent que la solution déterministe courante n'introduit pas d'erreurs importantes dues à la variabilité des caractéristiques du sol .

Mais, malgré cette conclusion, est-il permis de prétendre que le tassement calculé par ces méthodes a une valeur fiable (précise), alors que le modèle utilisé ne tient pas compte de l'erreur dans le calcul des contraintes (calculées par la mécanique des milieux continus) .

Une autre approche purement structurale essaye de tirer profit du désordre au niveau des assemblages de grains et de l'incertitude sur leurs formes et leurs tailles, pour montrer le caractère aléatoire des contraintes induites dans un massif granulaire non cohésif .

Cette approche traite le matériau comme un assemblage de grains interagissant par le moyen des forces de contacts entre grains et tente de déduire une relation entre les paramètres à l'échelle granulaire et les paramètres macroscopiques .

Une étude à l'échelle du grain visant à tenir compte de tous les paramètres de façon exhaustive n'est évidemment pas possible. C'est ainsi que les assemblages de particules sont bidimensionnels et que les grains sont modélisés par des cylindres ou des sphères. Le premier instigateur de ces modèles fut Schneebeli (1956), puis suivirent les travaux expérimentaux de Dantu (1957,1968), Marsal (1960), Oda (1972). Ces travaux ont fourni des indications qualitatives sur les mécanismes de transfert de charge dans les matériaux granulaires .

Les travaux numériques récents de BATHURST et ROTHENBURG (1989), qui ont étudié l'anisotropie de la structure induite par les déformations de cisaillement, ont fourni des informations quantitatives sur la distribution des forces de contacts, du nombre de contacts et leur orientation .

Ces travaux ont grandement contribué à décrire le comportement physique des sols non cohésifs, mais leur adaptation à des problèmes pratiques reste laborieuse et peu commode, vu le nombre de paramètres mis en jeu et les problèmes de représentativité des modèles adoptés. Ainsi, il faut rechercher une approche, faisant intervenir un nombre restreint de paramètres, qui soit compatible avec les principes de la mécanique des milieux continus et qui tiendra compte de la nature discrète du sol.

Le principe de l'étude est de revenir à la notion fondamentale de contraintes et la généraliser à un milieu discret (HARR 1977) .

CHAPITRE II

2. NOTION DE CONTRAINTE DANS UN MILIEU GRANULAIRE :

2.1 APPROCHE CLASSIQUE DES CONTRAINTES :

2.1.1 Introduction:

Le concept de contrainte a été formulé en 1822 par CAUCHY. L'état de contrainte en un point par rapport à un système de coordonnées donné, est caractérisé par un tenseur de contraintes qui constitue la matrice de l'application linéaire qui à tout vecteur normal unitaire, définissant une orientation de surface au point considéré, fait correspondre le vecteur $t(n)$ des contraintes sur cette surface. L'établissement des expressions relatives à l'état de contraintes en un point repose sur le principe d'action et de réaction et de la continuité du milieu. Ainsi :

- La contrainte en un point est un objet purement mathématique ayant un rôle explicatif .
- La contrainte est indépendante de la nature discrète du matériau. Pour le cas du sol granulaire chargé en surface de la (fig.2.1), traité dans le cadre de la mécanique des milieux continus; l'état de contrainte en un point donné dépend des caractéristiques de la charge appliquée et des coordonnées de ce point relativement au point d'application de la charge.

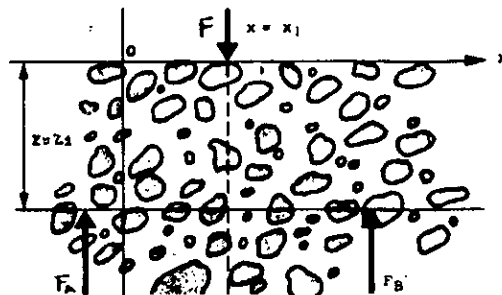


Fig. 2.1 Milieu granulaire sollicité par une surcharge concentrée à la surface (d'après HARR, 1977 et rapportée par BOURDEAU, 1986)

L'état de contrainte en deux points symétriques par rapport à la charge sera le même. L'appartenance d'un point à un grain et l'autre à un pore n'influera pas sur l'état de contrainte prévu. Aussi, l'état de compacité du milieu n'intervient pas dans l'état de contrainte en un point. Or, les efforts nécessaires à l'équilibre dans la phase solide sont plus importants dans un sol lâche que dans un sol dense .

Malgré les insuffisances du concept de contrainte de CAUCHY lors de son application aux sols, son rejet aurait conduit à un grand vide conceptuel. Dès lors cette notion a été adaptée de différentes façons pour résoudre les problèmes posés. La première tentative, mais non des moindres, faite dans ce sens est celle de Karl TERZAGHI (1920) où il introduit le concept fondamental des contraintes effectives .

2.1.2 Contraintes effectives :

La réponse d'une masse de sol au chargement appliqué dépend presque exclusivement des contraintes effectives et non pas des contraintes totales (calculées en considérant le sol comme continu) .

2.1.2.1 Principe des contraintes effectives de TERZAGHI :

Les travaux de TERZAGHI ont permis, dans un premier temps de prendre en compte la nature polyphasique du sol. L'auteur a mis en évidence l'influence de l'interaction entre les différentes phases sur les contraintes, donc sur le comportement du sol .

TERZAGHI a défini, pour un sol saturé et pour des plans principaux de contraintes, la contrainte effective comme suit :

$$\bar{\sigma} = \sigma - u_v \quad (2.1)$$

où :

- σ représente la contrainte totale
- u_v est appelée contrainte neutre et agit dans l'eau et dans le solide dans toutes les directions.
- $\bar{\sigma}$ représente donc un excédent par rapport à la contrainte neutre et agit exclusivement dans la phase solide.

Pour établir l'expression des contraintes effectives, en respectant les principes de la mécanique des milieux continus, TERZAGHI considère que chacune des deux phases (solide et liquide) occupe tout le volume et les deux phases occupent simultanément tout le volume .

Comme les fluides ne reprennent pas d'efforts de cisaillement, cette formulation est applicable même dans les autres directions avec en plus :

$$\bar{\tau} = \tau \quad (2.2)$$

Tout tassement, distorsion, changement de résistance ou cisaillement seront dûs aux variations des contraintes effectives .

2.1.2.2 Extension du principe de TERZAGHI :

BISHOP (1955) a étendu le concept des contraintes effectives de TERZAGHI, développé pour des sables saturés, aux sols partiellement saturés, en introduisant un coefficient , compris entre 0 et 1 dépendant du degré de saturation du sol (S_r) .

SKEMPTON (1960) a poussé l'étude à l'échelle du grain en tenant compte des propriétés mécaniques des grains .

L'auteur aboutit, à deux expressions différentes des contraintes effectives pour la compressibilité et le cisaillement .

Ces expressions font intervenir, en plus des paramètres de compressibilité et de cisaillement macroscopiques, ceux propres aux grains, et sont de ce fait, limitées aux domaines des très fortes pressions. En effet, les propriétés mécaniques des grains ne peuvent être mobilisées sous les pressions usuelles rencontrées dans la pratique .

Dans le cas d'un matériau idéal (c'est à dire que la nature granulaire est omise), les expressions de SKEMPTON reviennent à celle de TERZAGHI et de BISHOP. Si de plus la distinction entre les propriétés macroscopiques et granulaires n'est pas faite, les contraintes effectives σ seraient équivalentes aux contraintes intergranulaires σ_i , qui représentent la part des contraintes totales transmises au sein du sol par le biais des contacts entre grains .

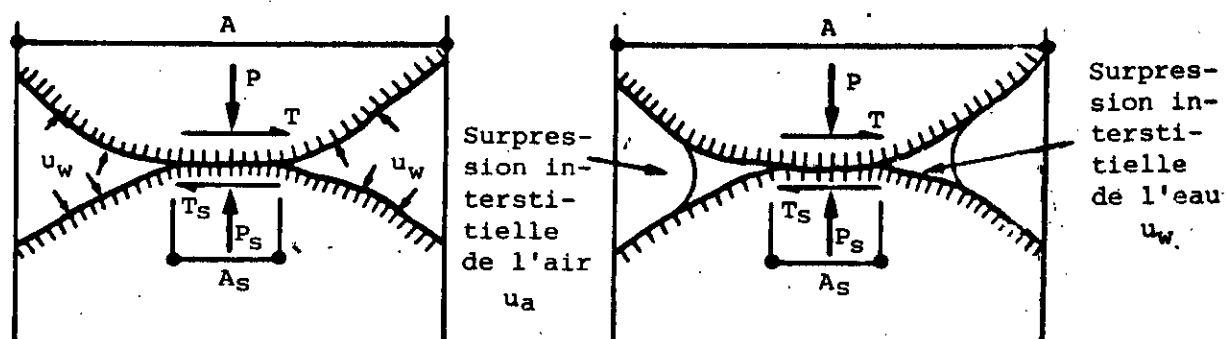


Fig 2.2 : Modèle de répartition des efforts entre contrainte totale, pression interstitielle et contrainte intergranulaire (d'après SKEMPTON 1960, rapporté par BOURDEAU 1986)

$$\sigma_g = \sigma - (1 - a_s) u_w.$$

(2-3)

$a_s = A_s / A$: Aire spécifique des contacts intergranulaires A_s / A

P et T : Résultante des efforts sur la section entière A

P_s et T_s : Forces agissant au contact sur la section A_s

$\sigma = P/A$: Contrainte totale ; $\sigma_g = P_s / A_s$: Contrainte intergranulaire .

Dans la littérature, contraintes effectives et contraintes intergranulaires sont souvent confondues à cause de leur signification physique similaire. Pour des contacts quasi-ponctuels $a_s = 0$ et la contrainte intergranulaire σ_g se ramène à la contrainte effective σ définie par TERZAGHI .

En résumé l'expression (2-1) constitue une excellente approximation dans le cas des sols saturés .

La contrainte totale ne peut généralement pas être égale à la surpression intersticielle u_w puisque les deux phases, solide et liquide, sont distinctes. Donc l'équation de TERZAGHI ne sera pas satisfaite si le point considéré est dans un pore. Cet équilibre ne peut être satisfait en tout point du milieu. De ce fait, la contrainte effective sera une contrainte moyenne rapportée à une section représentative .

Bien que le principe des contraintes effectives de TERZAGHI repose sur les principes de la mécanique des milieux continus, (l'auteur considère, tour à tour, que la phase solide et la phase fluide occupe tout le volume élémentaire), il fait allusion à la nature du sol (phases, puis nature discrète par SKEMPTON).

Alors pour lever toute ambiguïté et pour pallier à quelques insuffisances des concepts précédents, la

contrainte dans le sol à été reconsidérée d'un point de vue purement probabiliste (HARR, 1977) .

2-2 CONTRAINTES EN MECANIQUE PROBABILISTE DES MILIEUX GRANULAIRES :

2.2.1 Introduction :

A n'importe quelle échelle d'observation, le sol se présente comme un ensemble désordonné de particules discrètes où l'hétérogénéité et la variabilité sont les facteurs régissant son comportement .

Même si le sol est homogène du point de vue stratigraphique (sable, argile, limon ,...), la diversité des dimensions, des formes et des arrangements géométriques des particules ,rend difficile la description exacte du sol .

Les informations quantitatives et significatives pouvant être recueillies sont de nature statistique (granulométrie par exemple).

Prétendre donc, à une description "exacte" des forces aux points de contacts entre grains serait pure prétention. Parmi les travaux cités au chapitre 1, certains visaient à décrire les forces de contacts d'un point de vue probabiliste. La conclusion à tirer de ces travaux est que sous l'effet d'un chargement extérieur, les sollicitations internes dans un milieu granulaire sont extrêmement dispersées et très variables dans l'espace. En effet, le transfert de ce chargement, par le biais des forces de contacts se fait selon un chemin tortueux mais préférentiel .Ainsi, certaines particules peuvent être très sollicitées alors que leurs voisines le sont moins. ROTHENBURG et BATHURST (1989), affirment que sous un chargement déviatorique, les forces

supportées par les contacts entre particules, dirigés le long de la direction de la contrainte principale majeure, sont plus importantes que celles supportées par les contacts dirigés selon la direction principale mineure .

Au cours du cisaillement, une anisotropie de la texture se développe, car les contacts les plus chargés se désintègreront plus vite, bien que l'ensemble initial était isotrope .

2.2.2 Forces de contacts intergranulaires :

Le concept des forces intergranulaires revient à Marsal (1960), dans une tentative de déterminer une distribution de probabilité des contraintes effectives dans un sol non cohésif. Pour ce faire, Marsal relie le tenseur contrainte du milieu continu équivalent, de sens déterministe, aux forces de contacts qui sont des variables aléatoires .

Un milieu continu équivalent est un milieu dont les valeurs déterministes adoptées pour décrire son comportement seraient les moyennes des valeurs qu'on aurait obtenues en considérant la nature discrète du sol et par suite sa nature aléatoire.

Remarques :

Tous les travaux cités reposent sur deux hypothèses de base :

1- Homogénéité statistique : Pour RECORDON et DESPOND (1977), une éprouvette de sol est homogène dans une direction donnée, si les moyennes et l'écart type des paramètres d'état (porosité surfacique , nombre de grains coupés ...) mesurés sur une succession de plans très rapprochés, sont constants .

2- Application de pressions uniformes aux frontieres des éprouvettes ,d'où une répartition uniforme des contraintes dans toute section du milieu continu équivalent (BOURDEAU, 1986)

Marsal définit la force intergranulaire, sur un plan θ , d'un massif granulaire comme la résultante des forces de contacts agissant sur un grain, d'un coté du plan θ intersectant ce grain (Fig. 2.3)

$$\vec{F}_i = \sum \vec{P}_{ij} \quad (2.4)$$

où : F_i est la force de contact intergranulaire

P_{ij} est la force de contact agissant sur le grain i au point de contact j .

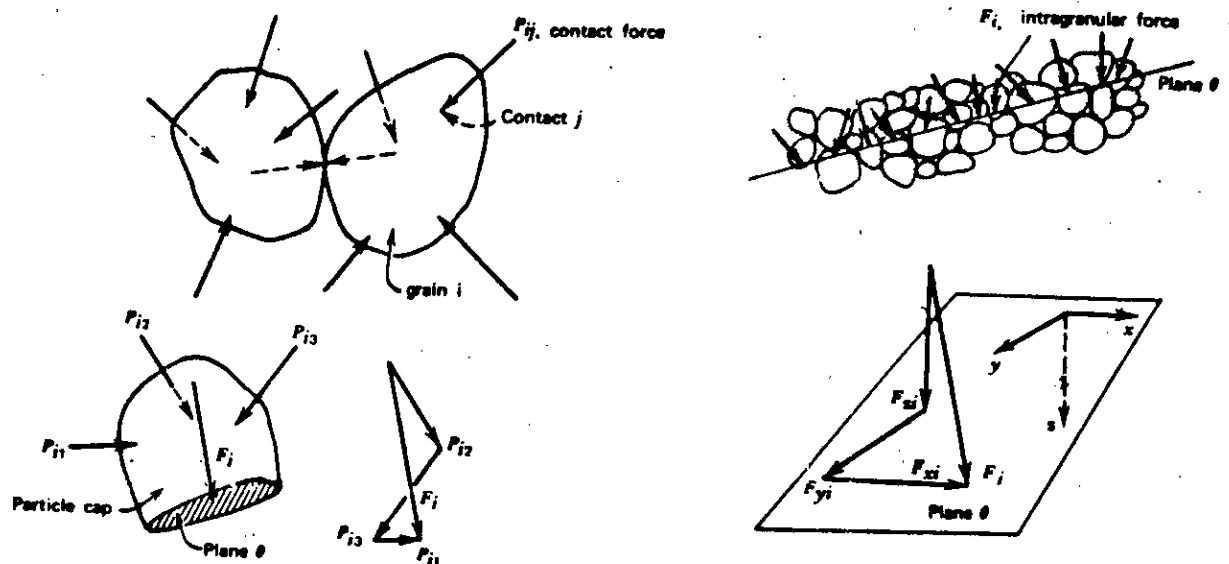


Fig 2.3 : Forces de contact et forces intergranulaires (d'après Marsal, 1973; rapportée par BOURDEAU, 1986)

Toujours d'après Marsal, les contraintes effectives relatives au plan θ , sont la moyenne des forces intergranulaires sur tous les grains interceptés par le plan θ , rapportée à l'aire totale de la section intersectée par ce même plan. En faisant l'hypothèse d'indépendance des composantes des forces de contacts et des composantes des forces intergranulaires, Marsal invoque le théorème de la limite centrale et propose une distribution de probabilité normale aux forces intergranulaires et aux contraintes effectives. Cette distribution n'écarte pas des valeurs négatives des contraintes effectives. Ceci est fondamentalement contradictoire avec le principe des contraintes effectives, vu que le sol étudié est un sol non cohésif ne pouvant développer des tensions entre grains .

La cause de cette contradiction est évidente, car les hypothèses d'indépendance des composantes des forces mises en jeu n'est pas justifiée. En effet l'équilibre du grain relie toutes ces composantes entre elles .

Divers travaux ont été menés dans le même état d'esprit (ODA ,1972) mais bien entendu ,en essayant de lever les contradictions conceptuelles .

Néanmoins, l'approche la plus cohérente ,et , la plus pratique reste celle de HARR (1977) qui,revient à la notion de contrainte et la généralise à un ensemble de particules discrètes et désordonnées .

2.2.3 Contrainte en un point d'un massif granulaire charge en surface :

L'état de contrainte au point x_1, y_1, z_1 d'un massif granulaire (fig 2.4) chargé en surface, est donné par la mécanique des milieux continus sans tenir compte de la configuration physique du point considéré (c'est à

dire est-ce que le point en question est dans un grain ou dans un pore) .

HARR (1977) a résolu ce problème pour un sol sec en tenant compte de la nature discrète du sol. Pour ce faire, l'auteur a imaginé l'expérience suivante :

La charge à la surface du massif est déplacée , tout en déplaçant le référentiel avec elle. Le point (x_1, y_1, z_1) passera par toutes les configurations physiques qui se trouvent à la profondeur z_1 . Toutefois, les facteurs qui, dans l'état de contrainte en un point, dépendent de la nature de chargement et des coordonnées du point ne sont pas altérés. En d'autres termes, cette expérience consiste à examiner différentes configurations, sous un même état de contrainte .

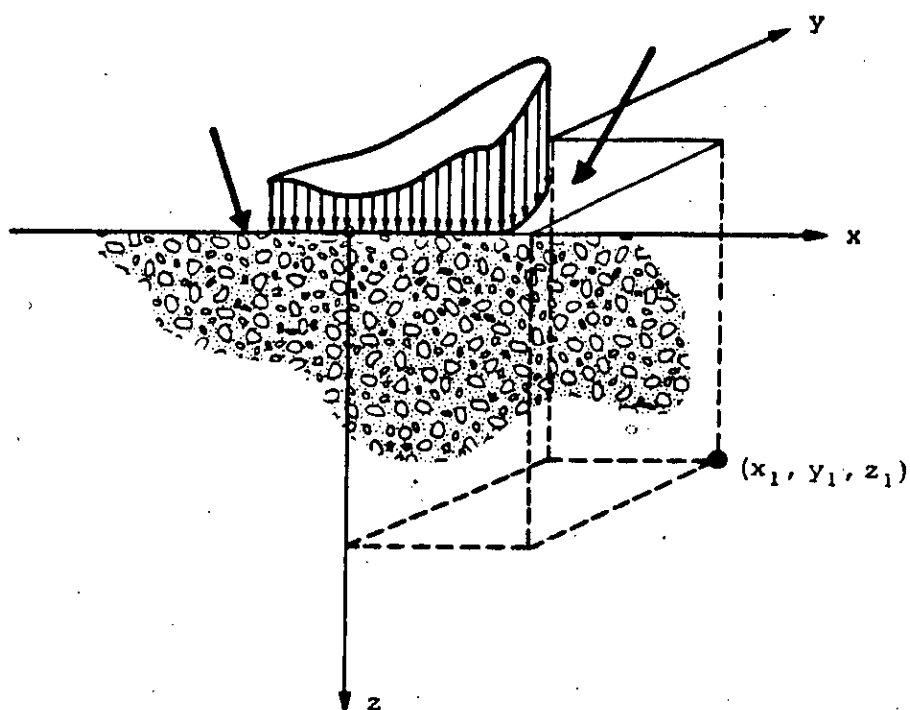


Fig 2.4 : Massif granulaire semi infini sollicité en surface (d'après BOURDEAU ,1986)

Généralement, pour déterminer l'état de contrainte en un point d'un massif granulaire, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, une éprouvette cylindrique, prélevée à la profondeur désirée, est

étudiée .

Les dimensions de cette éprouvette seront telles qu'une répartition uniforme, sur n'importe quel plan horizontal, puisse être supposée, suite à un chargement extérieur uniforme .

Une section de cette éprouvette est examinée en tenant compte de sa nature granulaire. En parcourant cette section, différentes configurations seront étudiés sous un même état de contrainte. Mathématiquement parlant, l'étude de l'éprouvette est équivalente à l'expérience décrite par HARR .

Un plan θ coupe horizontalement cette éprouvette saturée et uniformément sollicitée à ces frontières (fig 2.5). Une section de surface A_t est examinée, mais à l'échelle du grain .

BOURDEAU (1986), stipule que la mécanique des milieux continus est applicable au solide constitué par chaque grain, et fait de plus, les hypothèses suivantes :

- Les particules et le fluide sont en équilibre quasi - statique .
- Le poids propre du grain est négligé lors de l'étude de son équilibre (mais le poids des terres est compris dans les forces de contacts).
- La pression intersticielle, u_w est constante sur tout le plan et sur la hauteur des particules .

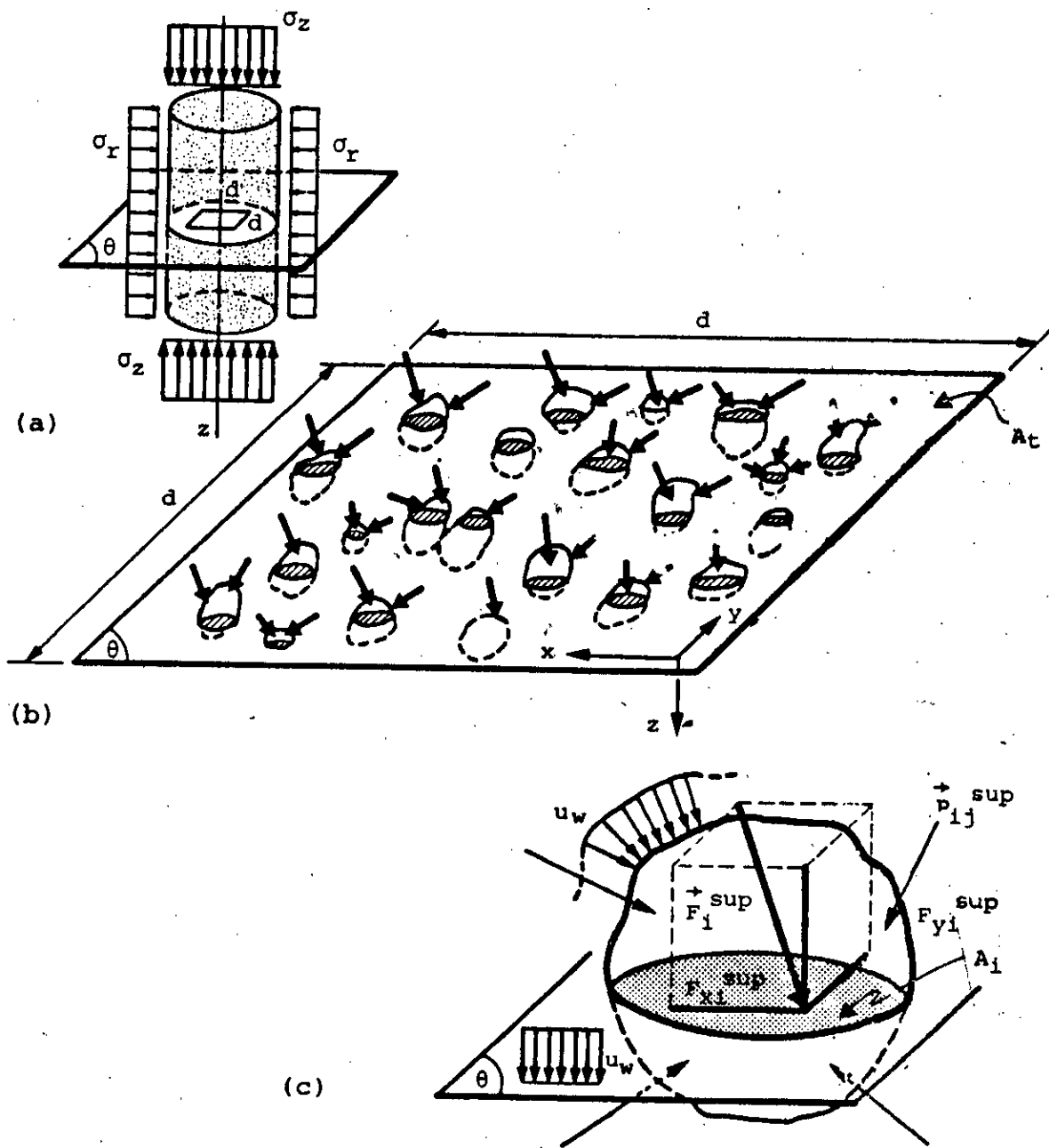


Fig 2.5 : Sollicitations sur une section horizontale à travers une éprouvette de matériau granulaire saturé soumise à des pressions uniformes (d'après BOURDEAU , 1986)

Après étude de l'équilibre du grain, BOURDEAU généralise la force intergranulaire de Marsal à un sol saturé (résultante des forces de contacts et la pression du fluide, c'est à dire que les contraintes résultantes seront des contraintes totales) .

Le point d'application de la force intergranulaire dans un grain , sera déterminée par l'équation des moments qui sont fonctions des forces de contacts, des caractéristiques des grains et leurs distributions spatiales. Toutes ces quantités sont aléatoires, donc les contraintes sur le plan θ en tout point de la section A_i du grain, seront des variables aléatoires spatiales.

Ces contraintes sont appelées contraintes locales et sont notées R_{zi} , R_{xzi} et R_{yzi} . Les développements qui vont suivre seront faits pour R_{zi} , mais, les résultats obtenus seront applicables pour les autres composantes.

Bourdeau (1986) imagine possible la réalisation d'une expérience consistant en la mesure des contraintes sur l'intersection du grain i par θ , en parcourant la surface A_i du grain .

Un événement consiste en l'enregistrement d'une certaine valeur de R_{zi} , par exemple .

En notant $\sigma(x)$ la contrainte à mesurer, qui est une quantité aléatoire , Bourdeau la suppose continue et monotone en fonction de x et, propose la démonstration suivante pour exprimer la moyenne des contraintes mesurées (en supposant un nombre infini de mesures).

$\sigma(x)$ étant continue et monotone, sa fonction inverse $\sigma^{-1}(x) = x(\sigma)$ est définie .

x , la variable spatiale, est aussi aléatoire. En effet, le point du grain où est faite la mesure de la contrainte est choisi au hasard, et tous les points ont

la même probabilité d'être observés .

De ce fait, x est une variable aléatoire de distribution uniforme et est fonction continue de σ (fig 2.6)

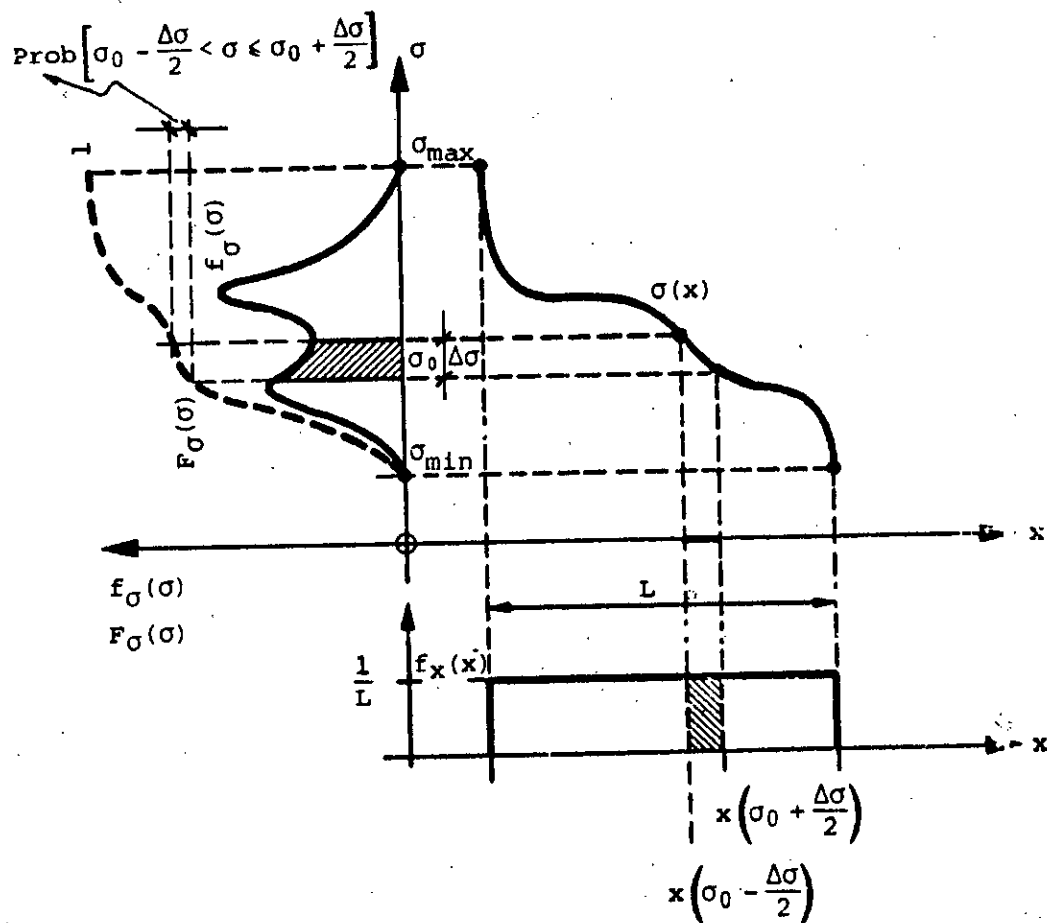


Fig 2.6 : Fonction univariée $\sigma(x)$ (d'après Bourdeau, 1986)

Vu la continuité et la monotonie de $\sigma(x)$, la probabilité que σ prenne une valeur située dans un intervalle $\Delta\sigma$ autour de la valeur σ_0 vaut :

$$P \left[\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \leq \sigma \leq \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] = \quad (2.5)$$

$$P \left[x \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \leq x \leq x \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \right]$$

x étant uniformément distribuée :

$$P \left[x \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \leq x \leq x \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \right] = \quad (2.6)$$

$$\frac{x \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) - x \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right)}{L}$$

Aussi:

$$P \left[\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \leq \sigma \leq \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right] = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} f_{\sigma}(\sigma) d\sigma = \quad (2.7)$$

$$F_{\sigma} \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) - F_{\sigma} \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right);$$

où $f_{\sigma}(\sigma)$ désigne la fonction de densité de probabilité de σ , et F_{σ} sa fonction cumulée de probabilité.

D'après (2-6) et (2-7), et en divisant par $\Delta\sigma$:

$$\frac{F_{\sigma} \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) - F_{\sigma} \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right)}{\Delta\sigma} = \quad (2.8)$$

$$\frac{\frac{1}{L} \left[x \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) - x \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \right]}{\Delta\sigma}$$

Lorsque $\Delta\sigma \rightarrow 0$:

$$\frac{dF_{\sigma}}{d\sigma}(\sigma_0) = \frac{1}{L} \frac{dx}{d\sigma}(\sigma_0) \quad (2.9)$$

Et d'après la définition de F_{σ} , (2-9) devient :

$$f_{\sigma}(\sigma) = \frac{1}{L} \frac{dx}{d\sigma}(\sigma)$$

$$\sigma f_{\sigma}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{L} dx \sigma$$

$$\text{D'où} \quad f_{\sigma}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{L} dx \quad (2.10)$$

En intégrant :

$$E[\sigma] = \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \sigma f_{\sigma}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{L} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sigma(x) dx \quad (2.11)$$

L'analogie de $\sigma(x)$ avec les contraintes locales conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} E[R_{zi}] = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} R_{zi} dA \\ E[R_{xzi}] = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} R_{xzi} dA \\ E[R_{yzi}] = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} R_{yzi} dA \end{array} \right. \quad (2.12)$$

où : $dA = dx \cdot dy$

C'est-à-dire, que la moyenne statistique des valeurs de R_{zi} , par exemple, si on pouvait les mesurer, en parcourant la section A_i , d'un grain, est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire R_{zi} .

Par ailleurs, le principe de contrainte de CAUCHY affirme que :

$$\int_{A_i} R_{zi} dA = F_{zi}$$

$$\int_{A_i} R_{xxi} dA = F_{xi} \quad (2.13)$$

$$\int_{A_i} R_{yyi} dA = F_{yi}$$

Ces expressions, en combinaison avec les expressions (2-12) conduisent à :

$$\begin{cases} E[Rz_i] = F_{zi} / A_i \\ E[Rz_{xi}] = F_{xi} / A_i \\ E[Rz_{yi}] = F_{yi} / A_i \end{cases} \quad (2-14)$$

Ces contraintes sont nommées contraintes intergranulaires S .

Remarque :

On admet que les expressions dérivées pour une fonction, continue et monotone d'une seule variable, sont valables pour des fonctions non monotones à plusieurs variables.

Le but de la démarche étant de quantifier la sollicitation interne, en tenant compte de la nature discrète du sol, la loi de distribution de probabilité des contraintes doit être fonction de l'état du point considéré. En effet, les expressions (2-14) conduisent à une espérance mathématique des contraintes différentes d'un grain à l'autre .

Le même raisonnement précédent sera étendu à la surface A_i entière. Cependant, pour pouvoir appliquer les mêmes principes, les pores sont supposés être des grains, où, la contrainte sera u_w (non aléatoire) pour pouvoir assumer la continuité du matériau .

En parlant de l'expression (2-13) étendue à la section A_t , on aura :

$$\begin{cases} E[R_z] = E[S_z] \\ E[R_{zx}] = E[S_{zx}] \\ E[R_{zy}] = E[S_{zy}] \end{cases} \quad (2-15)$$

Si A_t représente la section entière de l'éprouvette, on aura :

$$\int_{A_t} R_z \, dA = A_t \, \sigma_z \quad (2.16)$$

C'est-à-dire :

$$\sigma_z = E[R_z]$$

σ_z Contrainte totale appliquée

Les dimensions de l'éprouvette sont telles que σ_z soit la même en tout point de la section considérée .

Dés lors, en tout point :

$$\sigma_z = E[R_z(x, y)] = E[S_z(x, y)] \quad (2.17)$$

Par conséquent, la contrainte totale, en mécanique des milieux continus, est la moyenne des contraintes locales et intergranulaires rapportée à la surface totale .

En termes de distribution de probabilité de variable aléatoire, σ_z en un point est l'espérance mathématique de la contrainte intergranulaire en ce point. En résumé le fait de parcourir une section de l'éprouvette, fait allusion aux différentes configurations possibles en un point du massif .

Comme ces configurations ne peuvent être toutes déterminées avec exactitude, de même que les sollicitations internes, ce parcours servira à trouver une distribution de probabilité des contraintes, en un

point du massif (qui est représenté par l'éprouvette).

Les contraintes effectives sont déduites immédiatement :

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z - u_v \quad (2.18)$$

$$\bar{\tau} = \tau$$

En exprimant la relation (2.18) en fonction des relations (2.13), et en tenant compte des définitions de Marsal, la contrainte effective sera égale à la concentration des composantes verticales des forces de contact, rapportée à l'unité de surface. En conséquence, une théorie déterministe tient compte de la tendance centrale de la quantité à étudier.

Si la dispersion n'est pas très importante, la théorie déterministe peut conduire à des résultats satisfaisants. Mais, si la dispersion est grande, la théorie déterministe affecte considérablement les prévisions faites ou les décisions prises. En effet la déformation macroscopique résulte d'une accumulation de déséquilibres à l'échelle locale où les sollicitations peuvent être très éloignées des valeurs moyennes. Cette différence sera plus accentuée dans les sols non cohésifs lâches.

CHAPITRE III

3. DISTRIBUTION DE PROBABILITE DES CONTRAINTES ET TASSEMENT D'UN SOL GRANULAIRE LACHE.

3.1 INTRODUCTION :

Le problème à résoudre est celui de la détermination de l'état de contrainte, d'un point de vue probabiliste, en un point d'un massif sec semi-infini chargé en surface .

Ce problème a été résolu par BOURDEAU (1986) en s'inspirant des travaux de HARR (1977). Les travaux de BOURDEAU sont présentés dans ce qui suit .

BOURDEAU considère que l'espérance mathématique (la moyenne) S_z de la contrainte normale S_z à un plan horizontal en un point (x, y, z) est une connue du problème (S_z est obtenue par des méthodes probabilistes qu'on verra par la suite).

Les inconnues du problème sont les variables aléatoires $R_z(x, y, z)$ et $S_z(x, y, z)$ respectivement contrainte locale et contrainte intergranulaire en un point (x, y, z) .

3.2 POROSITE :

La porosité est une caractéristique physique du milieu à étudier. La définition classique de cette notion n'est pas relative à un point, mais est rapportée à une quantité de matériau .

La porosité volumique est : $n_v = V_{\text{vide}} / V$

La porosité surfacique est : $m_A = A_{\text{vide}} / A$

où :

V_{vide} est le volume des vides

V est le volume totale du matériau

Avide est la section des vides

A est la section totale du matériau

HARR considère que la porosité, d'un point de vue probabiliste, est la probabilité de trouver un vide en un point donné du volume total V . Le sol étant sec, et en admettant que la contrainte dans un pore est nulle, la probabilité de trouver un vide en un point donné sera identique à celle de trouver une contrainte nulle en ce point .

Cette définition de la porosité conduit à une valeur unique en tout point du volume. Implicitement cette définition de la porosité suppose le matériau étudié statiquement homogène. BOURDEAU généralise cette approche à un milieu non homogène. Pour se faire, l'auteur considère un cube élémentaire de volume V à l'intérieur duquel une fonction (x,y,z) est défini telle que :

Si le point considéré est dans un pore

$$\lambda(x,y,z) = 1$$

$$\lambda(x,y,z) = 0$$

Si le point considéré est dans un grain

Ces deux événements sont exhaustifs et mutuellement exclusifs. Ainsi, en posant

$$n(x,y,z) = Prob[\lambda(x,y,z) = 1] = 1 \tag{3.1}$$

il vient que :

$$1 - n(x,y,z) = Prob[\lambda(x,y,z) = 0]$$

Les expressions (3.1) introduisent la notion de porosité locale qui n'est autre que la probabilité de trouver un vide en un point donné de la quantité de matériau.

De plus :

$$\bar{\lambda} = E[\lambda(x, y, z)] = n(x, y, z) \quad (3.2)$$

$$V - [\lambda(x, y, z)] = n(x, y, z) - n^2(x, y, z) \quad (3.3)$$

Si l'observation de N points dans le volume V était possible, la mesure de en chaque point permettrait de calculer la moyenne de N valeurs observées. Cette moyenne serait une mesure de la porosité volumique nv_j mais comme N est fini nv_j sera différente à chaque mesure .

A l'expérience j on aura :

$$\bar{n}_{vj} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \quad (3.4)$$

où x_{ij} , y_{ij} , z_{ij} sont les coordonnées d'un point i, à l'expérience j

$$\text{Si } N \rightarrow \infty ; \quad \bar{n}_{vj} \rightarrow nv$$

(du fait de la définition de la probabilité au sens fréquentiel)

$$E[\bar{n}_{vj}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[\lambda(x_i, y_i, z_i)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n(x_i, y_i, z_i) \quad (3.5)$$

Si le nombre de point N à chaque mesure est très grand, l'espérance mathématique de la mesure tend vers la porosité volumique nv elle même, c'est à dire que

$$E[\bar{n}_v] \rightarrow nv$$

L'analogie avec les expressions (2.13) conduit à :

$$nv = \frac{1}{V} \int_V n(x, y, z) dV \quad (3.6)$$

Par analogie avec ce qui précède et pour une section d'aire A du cube élémentaire :

$$m_A(z) = \frac{1}{A} \int_A n(x, y, z) dA \quad (3.7)$$

en intégrant sur la hauteur H du cube :

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \int_H m_A(z) dz &= \frac{1}{AH} \int_H \left(\int_A n(x, y, z) dA \right) dz \\ &= \frac{1}{V} \int_V n(x, y, z) dz \end{aligned}$$

$$nv = \frac{1}{H} \int_H m_A(z) dz \quad (3.8)$$

En écrivant la relation (3-7) pour les directions x et y et en se servant de (3-8) :

$$\frac{1}{H} \int_H m_A(z) dz = \frac{1}{H} \int_H m_A(x) dx = \frac{1}{H} \int_H m_A(y) dy = nv \quad (3-9)$$

Si la porosité surfacique est constante dans chaque direction (c'est à dire que le matériau est statiquement homogène pour chaque direction) et du fait de (3-9) le milieu est nécessairement isotrope .

Généralement du fait de l'augmentation de la compacité essentiellement avec la profondeur, la porosité locale diminue selon z .

Pour montrer l'influence de la distribution de la porosité locale sur la porosité volumique, Bourdeau propose une variation linéaire puis une variation exponentielle pour nv. En se servant de (3-6), l'auteur

aboutit à :

$nv(z) = n(z)$ si la variation est linéaire
et $nv(z) = K.n(z)$ si la variation est exponentielle
où K est un facteur d'échelle dépendant des dimensions
de l'échantillon.

(*) Pour des dimensions usuelles de l'échantillon le
facteur K tend vers 1.

Bourdeau conclue que la proposition de HARR

$$nv = n \quad (3-10)$$

constitue en général une excellente approximation .

Cette conclusion apporte un fait nouveau qui consiste à
définir la porosité en un point tout comme la
contrainte, et ceci grâce au raisonnement probabiliste.
En outre, la porosité étant égale à la probabilité de
trouver une contrainte nulle en un point laisse
présager, que la contrainte en un point et la porosité
sont étroitement liées. Ce fait sera confirmé par la
suite .

3-3 DISTRIBUTION DE PROBABILITE DES CONTRAINTES INTERGRANULAIRES :

La distribution de probabilité des contraintes en un
point d'un massif chargé en surface devra tenir compte
de la position de ce point par rapport au chargement
extérieur (par le biais de S) et son état de
compacité (par le biais de nv).

Pour trouver cette distribution, Bourdeau (1986)
considère une éprouvette uniformément chargée, prelevée
au point en question. Les dimensions de cette
éprouvette sont telles que l'approximation de HARR
 $nv(x,y,z) = nv$ puisse être justifiée .

L'auteur examine une section de cette éprouvette, qui
est subdivisée en éléments, petits par rapport à la

plus petite section du grain ou du pore intersecté (fig 3-1). Les développements sont faits pour la contrainte verticale S_z .

La contrainte intergranulaire moyenne S_z étant une connue du problème, la variable aléatoire adimensionnelle S_z/S_z est considérée. Cette variable aléatoire est discrétisée en posant :

$$\frac{S_z}{S_z} = k_s \alpha_s \quad (3.11)$$

Aire totale $A = L^2$
 $N \times N$ éléments

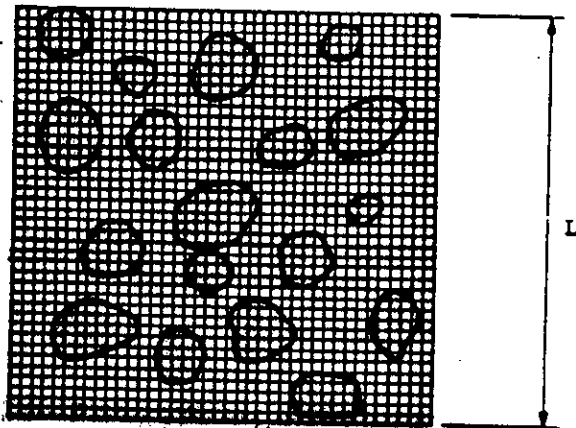


Fig 3-1 : $\frac{L}{N}$
 Subdivision d'une section à travers un volume V
 (d'après Bourdeau 1986)

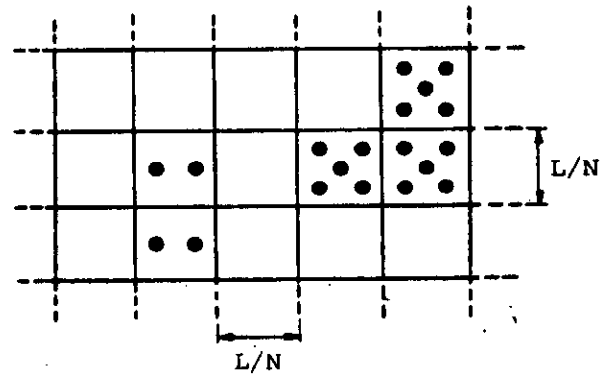


Fig 3.2 :
 Représentation symbolique de la contrainte dans la section.
 (d'après Bourdeau 1986)

: α_s est une constante d'étalonnage arbitrairement petite .

k_s est l'entier le plus proche de la valeur réelle:

$$\frac{S_z}{S_z \alpha_s}$$

αz est telle que :

$$\left| \frac{S_z}{S_z} - k_s \alpha_s \right| \leq \frac{1}{2} \alpha_s$$

C'est-à-dire que l'erreur commise sur S_z/S_z lors de la discrétisation sera très petite .

L'équation (3-11) peut être symbolisée physiquement par un nombre de points k_s dans chaque élément de surface, et les pores resteront évidemment vides. De part sa définition k_s est une variable aléatoire . Sa moyenne est :

$$\bar{k}_s = E\left[\frac{S_z}{S_z \alpha_s} \right] = \frac{1}{S_z \alpha_s} E[S_z] = \frac{1}{\alpha_s}$$

La présence d'un point dans un élément est un évènement aléatoire élémentaire se produisant dans l'espace .

En outre :

- Les évènements élémentaires aléatoires sont indépendants
- Les éléments peuvent être observés dans n'importe quel ordre .
- L'occurrence d'évènements élémentaires dans deux éléments observés consécutivement sont indépendants .

Ce processus est analogue au processus de Poisson (occurrence d'évènements aléatoires dans l'espace)

La masse de probabilité s'écrit :

$$P_{k_s}(k_s) = \frac{\lambda_s^{k_s} \exp^{-\lambda_s}}{k_s!} \quad (3.12)$$

$P_{k_s}(0) = \exp^{-\lambda_s}$ est la probabilité de trouver zero point en un élément. C'est à dire que ce point est dans un

pore.

Par ailleurs, l'équation (3.12) donne:

$$P_{k_s}(0) = e^{-\lambda_s} \rightarrow n = e^{-\lambda_s}$$

$$P_{k_s}(0) = e^{-\lambda_s}$$

$$n_v = e^{-\lambda_s}$$

$$\text{D'où} \quad : \quad \lambda_s = - \ln n_v = \frac{1}{s_s} \quad (3.13)$$

Donc :

$$P_{k_s}(k_s) = \frac{(- \ln n_v)^{k_s} n_v}{k_s!} \quad (3.14)$$

La variance vaut :

$$V[k_s] = - \ln n_v \quad (3-15)$$

Par ailleurs :

$$V \left[\frac{s_s}{S_s} \right] = V \left[- \frac{s_s}{S_s} \ln n_v \right] = (- \ln n_v)^2 V \left[\frac{s_s}{S_s} \right] \quad (3.16)$$

les expressions (3-14) et (3-16) conduisent à :

$$V \left[\frac{s_s}{S_s} \right] = - \frac{1}{\ln n_v} \quad (3.17)$$

Le coefficient de variation est donné par :

$$\frac{V_{s_s}}{S_s} = \frac{\sqrt{V \left[\frac{s_s}{S_s} \right]}}{E \left[\frac{s_s}{S_s} \right]}$$

c'est à dire :

$$\frac{V_{S_z}}{S_z} = - (-\ln n_v)^{-\frac{1}{2}} \quad (3-18)$$

La varaince de S_z est donnée par (3-17) et vaut :

$$V[S_z] = - \frac{S_z^2}{\ln n_v} \quad (3-19)$$

et le coefficient de variation est :

$$V_S = (-\ln n_v)^{-\frac{1}{2}} \quad (3-20)$$

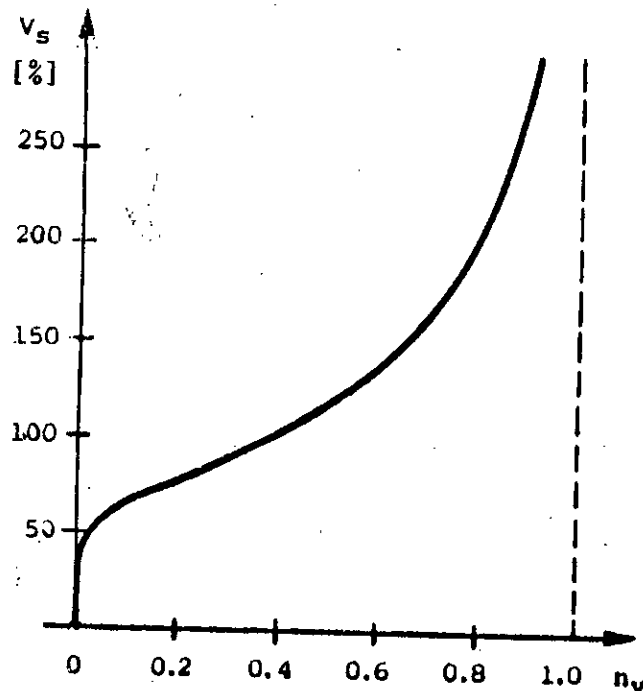


Fig 3.3: Relation entre le coefficient de variation de la contrainte intergranulaire et la porosité (d'après Bourdeau , 1986)

Les coefficients de variation (3-18) et (3-20) sont des fonctions croissantes de la porosité. Ainsi, une diminution de la porosité équivaut à une diminution de l'écart entre la moyenne de la contrainte intergranulaire S_z et la contrainte elle même S_z , et ceci

réduira la probabilité d'occurrence d'importantes contraintes locales .

L'expression (3-19) montre que la porosité est la cause principale de l'indéterminisme sur la géométrie d'assemblage des grains. Pour une valeur S donnée, la probabilité d'avoir d'importantes contraintes locales augmente avec la porosité. De ce fait, la rupture des particules est plus probable dans un milieu lâche que dans un milieu dense .

Le raisonnement précédent s'applique évidemment aux autres composantes normales S_x et S_y . Ceci n'est pas toute à fait exact en ce qui concerne les contraintes intergranulaires tangentiels. Celles-ci peuvent être positives ou négatives et sur un plan principal (par rapport aux contraintes moyennes bien sur), S_{xz} et S_{yz} sont nulle en chaque point alors que des efforts de cisaillement locaux existent. Donc ce raisonnement ne peut être appliqué qu'à la valeur absolue des contraintes tangentiels .

3.4 DISTRIBUTION DE PROBABILITE DES CONTRAINTES LOCALES:

En tout point du massif granulaire et pour n'importe quelle direction, Bourdeau propose l'expression suivante pour la contrainte locale :

$$R(x,y,z) = S(x,y,z) + \eta(x,y,z) \quad (3-21)$$

où est une variable aléatoire représentant les fluctuations de la contrainte locale R autour de la contrainte intergranulaire S .

Sous forme adimensionnelle (3-21) devient :

$$\frac{R(x,y,z)}{\bar{R}(x,y,z)} = \frac{S(x,y,z)}{\bar{S}(x,y,z)} + \eta'(x,y,z)$$

L'indéterminisme dû à l'assemblage des grains est pris en compte dans les contraintes intergranulaires par le biais de la porosité, et l'origine de la dispersion de " est à rechercher parmi les caractéristiques physiques des grains.

Cette séparation des effets conduit à supposer que les variables aléatoires S et sont indépendantes. Donc les influences respectives de la porosité et des caractéristiques des grains sur l'état de contrainte interne sont séparées .

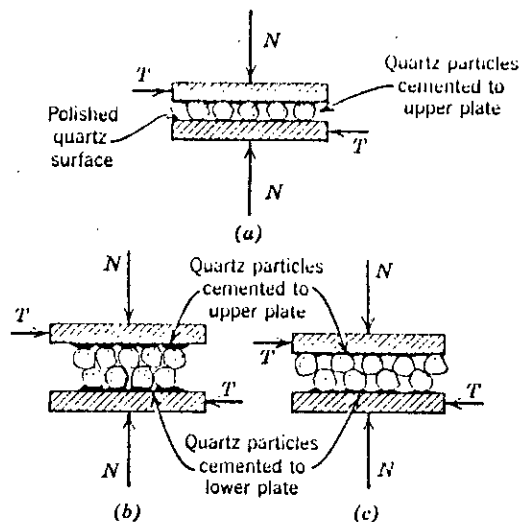
Puisque dépend essentiellement des caractéristiques des grains, ce paramètre pourra être étalonné expérimentalement.

3.5 TASSEMENT D'UN SOL GRANULAIRE LACHE :

3.5.1 Introduction :

Dans les sols lâches, la rupture se fait par poinçonnement sans que des soulèvements en surface ne soient apparents. Ainsi l'augmentation progressive de la capacité portante observée durant les tassements correspond à une augmentation de la compacité.

Pour les sols denses, la rupture est généralisée et des soulèvements en surface sont observés sans qu'il y ait nécessairement de changement de volume. Pour ce type de sol, une perte de résistance est observée, une fois le pic dépassé. Ceci est dû à une perte de résistance de verrouillage (fig. 3.4)



Example of interlocking. (a) Smooth sliding surface. (b) Slightly interlocked surfaces. (c) Highly interlocked surfaces.

Fig. 3.4 : Phénomène de verrouillage

Le mode de rupture donne d'importants renseignements sur le comportement général d'un sol et sur les micromécanismes de déformation.

3.5.1 Micromécanismes de déformation :

La déformation d'un milieu granulaire sera due à la déformation individuelle des grains ou de leur rupture et du réarrangement des assemblages des grains .

La déformation individuelle des grains sous l'action des forces de contact est généralement réversible pour des pressions usuelles (s'il n'y a pas de rupture de grains bien sur).

Dans la pratique, la déformation des matériaux granulaires est essentiellement irréversible. Bien que quelques ruptures de grains puissent avoir lieu, la majeure partie de cette déformation est due aux glissements entre particules, c'est-à-dire à leur réarrangement .Le réarrangement des grains est directement lié à la caractéristique macroscopique

qu'est la compressibilité qui est à son tour directement liée à la porosité .

La compressibilité d'un matériau est grandement influencée par l'histoire des contraintes. Cette caractéristique peut évoluer avec la déformation d'un matériau (Favre 1980) .Le comportement d'un sol dépend de sa compacité initiale. La compacité initiale n'est pas considérée comme la compacité correspondant à un état de contrainte nul, ni à l'état de contrainte sous l'effet du poids propre du sol dans le cas d'un sol dense, mais à l'état antérieur des contraintes qui a provoqué un réarrangement donné. Ceci est appelé surconsolidation dans les argiles ou plus généralement l'écroutissage .

J. Biarez, (1962), a étudié ce phénomène à l'aide d'éprouvettes de rouleaux circulaires métalliques de même diamètre en assemblage régulier sous une pression uniforme. L'auteur a pu observer que l'inclinaison des forces de contact peut varier de $+ \theta$ à $- \theta$: angle de frottement métal-métal .

Ainsi, si un déviateur est ajouté, les inclinaisons des forces de contact augmentent de δ à $\delta + \delta'$ et peuvent dépasser θ en xN points de contacts, d'où les déformations irréversibles. N représente le nombre total de contacts. Le retour à la pression isotrope provoque le retour des forces de contact à l'inclinaison initiale pour les $(1-x)N$ contacts élastiques. L'application d'un nouveau déviateur, mais plus petit, ne provoque plus qu'un tout petit nombre de variations pouvant dépasser θ et les déformations résultantes sont réversibles, c'est le phénomène d'écroutissage. Dans ce cas, la déformabilité du milieu sera plus conditionnée par la déformabilité des grains que par la variation de leur assemblage.

De ce fait, outre les conditions sur le niveau des contraintes, un accroissement de la compacité initiale diminue la compressibilité et le degré d'irréversibilité des déformations. Le comportement des sols granulaires precomprimés (dense) est phénoménologiquement semblable à celui des sols argileux surconsolidés.

Pour les sols granulaires lâches, le mécanisme principal de déformation est le glissement entre grains (la rotation des grains est faible ; Biarez, 1962).

En réalité, un comportement lâche et un comportement dense ont une signification statistique. En effet, à l'échelle locale, des assemblages élémentaires de compacité très variées existent. Ce sont les assemblages les plus nombreux qui gouvernent le comportement macroscopique.

Bourdeau (1986) propose la fig 3.5 pour illustrer schématiquement les deux assemblages essentiels .

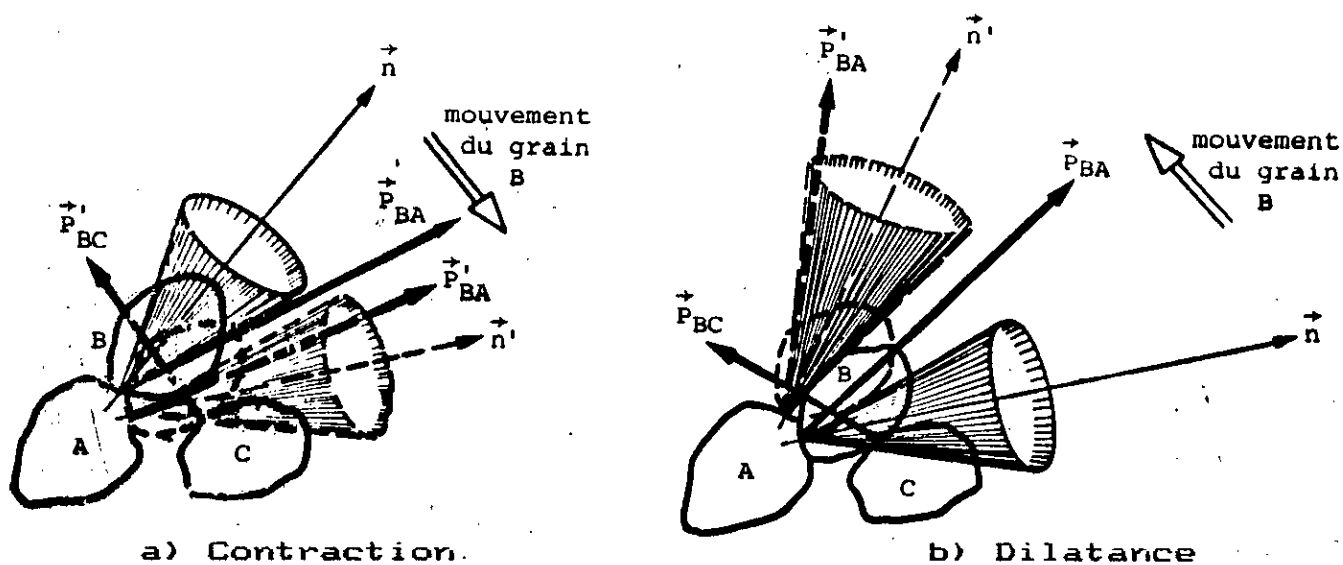


Fig 3.5 Mécanismes de déformation par glissement relatif des grains (d'après Bourdeau, 1986)

Arrangement initialement lâche :

Sous l'effet d'une charge extérieure, si le contact entre les grains A et B est instable, la force de contact est en dehors du cône de stabilité. Si le mouvement du grain B se fait dans le sens de la densification, un nouveau contact est créé avec le grain C. Le degré d'hypérestaticité augmente d'où une redistribution des forces. La nouvelle force de contact entre A et B peut revenir à l'intérieur du cône. La part de sollicitation initialement supportée par le contact A-B est allégée et ce contact sera éventuellement en mesure de supporter un autre incrément de charge. De ce fait, ceci constitue une réserve de capacité. C'est pour cela qu'il n'y a pas de chute brutale de résistance dans les sols lâches.

Arrangement initialement dense :

Sous un accroissement de charge, l'instabilité du contact B-A conduit à une perte de contact avec le grain C (le verrouillage diminue). Ce glissement s'arrête lorsque la force de contact P'BA revient dans le cône de stabilité. L'équilibre est retrouvé par une réorientation de la force et non pas grâce à une redistribution des efforts. La part de sollicitation revenant au contact B-A se trouve augmentée et un autre incrément de charge risque de provoquer une rupture. Ceci explique le pic observé dans les courbes contraintes - déformations et la chute brutale de la portance des sols denses.

Ces descriptions sont-elles cohérentes avec les résultats suggérés par la distribution de probabilités des contraintes ?

La contrainte intergranulaire moyenne est rapportée à une section donnée de matériau. Deux sections identiques d'un sol lâche et d'un sol dense soumises

au même chargement sont considérées. Le nombre de contacts, donc de grains, de la section du sol dense sont plus nombreux que ceux de la section du sol lâche. Ainsi, les contraintes supportées par les contacts du sol dense sont moins importantes que celles supportées par les contacts du sol lâche. La contrainte moyenne étant la même dans les deux cas, les contraintes mesurées au niveau des contacts du sol lâche seront plus dispersées de la contrainte moyenne relativement au sol dense. Ceci est conforme aux résultats trouvés au paragraphe 3.3. Ainsi, plus le sol est lâche plus cette dispersion est grande et vice versa .

3.5.3 Instabilités locales et tassement :

L'incrément de charge auquel est soumis un massif initialement en équilibre est transmis dans le sol par le biais des contacts entre grains. Ceci est valable pour un sol sec, ou un sol saturé sous une faible vitesse de chargement pour qu'il y'ai dissipation de la pression interstitielle (conditions drainées).

Même sous une charge assez faible, les contacts ne résisteront probablement pas à cet apport de chargement ce qui provoquera un glissement entre grains et donc leur réarrangement. Ce réarrangement s'effectuera aléatoirement et provoquera des changements locaux de porosité. Ce changement dépendra de la capacité de reprise de la charge en chaque point du sol et de la magnitude des sollicitations au niveau des contacts entre grains. De nombreux auteurs ont démontré qu'une diminution de la porosité conduisait à une augmentation du nombre moyen de contacts entre particules et par suite à une plus grande stabilité de la texture. L'augmentation du nombre de contacts modifie la géométrie des assemblages instables et provoque une redistribution des forces de contact dans les

assemblages adjacents et les rendra peut être instables et ainsi de suite. Toutes ces perturbations ont une certaine probabilité d'arriver en surface et consisteront en une déflexion localisée dont le cumul donnera les tassements observables en surface.

Rothenburg et Bathurst (1989) et leurs prédécesseurs ont montré que les contacts les plus sollicités étaient ceux orientés dans la direction de la contrainte principale majeure. Ces contacts seront les plus instables. Tout pousse à croire que le cheminement des perturbations est influencé par l'orientation du champ de forces intergranulaires et la propagation se fera essentiellement selon la direction des contraintes intergranulaires moyennes majeures.

De toutes ces descriptions jaillit une notion très importante qu'est la propagation qui constituera la base de tous les développements théoriques pour la quantification des phénomènes mis en jeu à l'échelle locale .

3.6 CONCLUSION :

En redéfinissant la contrainte en un point du sol, en tenant compte de sa nature discrète, Bourdeau (1986) montre que le concept classique de contrainte effective n'est qu'une approximation ou premier moment de la sollicitation locale réellement existante dans un assemblage de grains .

La distribution de la sollicitation interne sera celle de la distribution de probabilité des contraintes intergranulaires. Dans un milieu granulaire isotrope et sec, la porosité volumique et la contrainte intergranulaire moyenne suffisent pour définir cette distribution. Ces deux quantités seront donc les

paramètres du problème .

Les essais de rupture de particules effectués par Marsal donnent une illustration qualitative de cette proposition. La résistance à l'écrasement des particules étant certainement indépendante de la porosité du milieu, celle-ci interviendra à travers les sollicitations subies par les particules. La probabilité d'écrasement des particules d'une éprouvette soumise à une pression S est plus grande pour un sol lâche que pour un sol dense. Ce fait confirme les discussions faites à la section 3.5.2 .

CHAPITRE IV

4- PROCESSUS DE DIFFUSION ET DEFORMATION D'UN MASSIF GRANULAIRE A L'ETAT STATIONNAIRE :

4-1 INTRODUCTION:

Lors de la compression d'un massif granulaire sec, au cours du temps, le matériau évolue vers un état d'équilibre macroscopique. Cette état final n'est jamais atteint théoriquement. La pratique montre que la durée de la majeure partie des déformations d'un sol grossier est de l'ordre de quelques minutes à quelques heures et qu'au delà de cette durée, les tassements deviennent très faibles. C'est cet équilibre apparent qui est caractérisé par l'état stationnaire de déformation.

La déformation d'un massif granulaire résulte d'un accroissement des sollicitations internes, qui se traduit par un mouvement des particules à l'échelle locale afin d'atteindre un état stable. Les déformations permanentes observées sont l'aboutissement de ce phénomène. Pour caractériser ces déformations, trois étapes fondamentales doivent être considérées (Bourdeau, chap 6 , 1986) :

- 1 - La quantification de l'accroissement des sollicitations internes, en tout point du milieu, suite à un incrément de charge. Cette démarche revient à l'estimation des contraintes intergranulaires moyennes.
- 2 - L'estimation des changements de porosité causés par l'accroissement des sollicitations internes.
- 3 - La prévision des déplacements résultants de ce changement de porosité. (Transport de l'excès d'air aux frontières du massif)

La modélisation théorique de la première et de la troisième étape sera faite par le processus de diffusion. Le détail de chacune de ces étapes est fait dans ce qui suit.

4.2 DIFFUSION UNIDIMENSIONNELLE DU MOUVEMENT BROWNIEN

Au début du dix neuvième siècle, le botaniste Irlandais Robert BROWN observa au microscope une goutte d'eau emprisonnée dans un morceau de quartz. Dans cette goutte d'eau étaient suspendues de minuscules particules soumises à un mouvement oscillatoire, irrégulier et incessant. Brown rencontra ce mouvement à maintes reprises lors de l'observation des grains de pollen dans l'eau. L'explication donnée jadis disait que la vitalité était retenue longtemps après la mort de la plante. Or, la goutte d'eau retenue dans le quartz pouvait y exister depuis des millions d'années. Dès lors, Brown conclut que l'agitation des particules piégées ne pouvait avoir qu'une signification physique.

En effet, un grain suspendu dans un fluide est continuellement bombardé par les molécules du fluides. Par conséquent le mouvement de la particule est rendu aléatoire par ces chocs qui sont eux aussi aléatoires.

4.2.1 Synoptique de la théorie du mouvement Brownien :

Le mouvement sert actuellement de modèle mathématique pour le processus aléatoires. La théorie du mouvement Brownien a conduit à la première mesure précise de la masse de l'atome (Einstein). Cette théorie a contribué à la compréhension de nombreux phénomènes physiques et chimiques.

Initialement, Einstein tenta de faire une description mécanique directe de la particule Brownienne, mais vu

le nombre de chocs élevé qu'imposent les molécules fluides à la particule, cette description se trouve être très laborieuse sinon impossible. Par la suite, Einstein a introduit un raisonnement probabiliste.

Pour illustrer les résultats d'Einstein, un petit volume de forme arbitraire accessible aux particules diffusées est observé. Le flux des particules dans le fluide d'un point à l'autre est directement proportionnel à la différence de concentrations des particules en ces points. Le coefficient de proportionnalité est appelé coefficient de diffusion. Cette relation est la loi de Fick:

$$\phi_D = - D_z \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \quad (4-1)$$

où :

- f est la concentration des particules .
- t est la variable d'évolution .
- Z est la variable spatiale.
- ϕ_D est le flux de diffusion des particules à travers une surface horizontale de l'espace.
- D_z est le coefficient de diffusion.

Si des particules sont suspendues dans une colonne de liquide au repos, elles vont sédimenter sous l'action de la gravité tout en étant soumises au mouvement Brownien.

En sédimentant, la concentration augmente au voisinage du fond de la colonne provoquant une différence de concentration entre le fond et le haut de la colonne. Cette différence de concentration entraînera les particules vers le haut où la concentration est relativement plus faible. Quand l'équilibre est atteint, la concentration est stationnaire dans le

temps en tout point, bien que le mouvement des particules se poursuive. La viscosité du fluide empêche les particules d'être continuellement accélérées vers le bas par la gravité; c'est-à dire que l'accélération de la particule s'annule atteignant ainsi une vitesse limite verticale constante.

Vu l'étendue de ce corps de connaissances, les rappels faits ici sont ceux ayant une incidence importante sur les discussions qui vont suivre. Pour une présentation générale, le lecteur intéressé consultera utilement Lavenda (1985).

Le mouvement de la particule Brownienne est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - C_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (4-2)$$

Cette équation donne la concentration $f(z,t)$ des particules sédimentant dans un fluide visqueux au cours du temps.

Le premier terme de droite quantifie le mouvement désordonné des particules sous l'effet des chocs des molécules fluides.

Le deuxième terme rend compte de la contribution de la gravité; C_z étant le coefficient de convection.

Les conventions de signe sont les suivantes :

- axe z orienté vers le bas ;
- flux positif dans le sens z croissant ;
- C_z et D_z sont positifs.

La substance diffusée étant des particules, les unités sont :

- concentration f [particules. m^{-3}]
- flux \varnothing_c et \varnothing_D [particules. $m^2.s^{-1}$] où $\varnothing_c = C_z f(z,t)$
représente le flux de convection.
- D_z [$m^2.s^{-1}$]
- C_z [$m.s^{-1}$]

Le coefficient C_z représente la vitesse limite qu'atteint la particule après équilibre.

L'équation (4.2) peut être interprétée d'un point de vue probabiliste. En effet, la concentration représente la proportion de particules se trouvant dans un certain intervalle de l'espace. En supposant que cet intervalle soit entièrement rempli de particules; la concentration peut être exprimée comme étant le rapport entre le nombre de particules se trouvant réellement dans cet espace et le nombre total de particules pouvant être contenue dans ce même espace.

Ainsi, en considérant le mouvement d'une seule particule fictive au comportement représentatif de l'ensemble et en faisant un grand nombre d'observations (dans les mêmes conditions de l'expérience), la probabilité d'occupation d'un intervalle de l'espace est équivalente à la concentration de la substance diffusée (probabilité au sens fréquentiel).

Bourdeau (1986) a fait un rappel succinct des hypothèses du mouvement Brownien, nécessaires à la formulation de son modèle théorique pour l'étude de la déformation d'un massif granulaire lâche.

Ces hypothèses sont :

- Propriété d'ergodicité : Cette propriété a déjà été évoquée par le fait de remplacer l'étude de l'ensemble des particules par l'étude d'une seule

particule.

- Le mouvement désordonné des particules résulte uniquement des chocs avec les molécules fluides. Par conséquent la concentration des particules doit être faible pour pouvoir négliger les éventuels chocs entre particules. Si ces chocs sont nombreux, le mouvement ne résultera pas uniquement d'une différence de concentration mais aussi de leur énergie cinétique de ces particules.
- Les chocs entre particules étant des événements très rares, les mouvements d'une particule dans les trois directions seront indépendants .
- Le mouvement Brownien a un caractère Markovien; la position future d'une particule ne dépend que de sa position présente sans se soucier de son itinéraire antérieur.

Remarque : Si les coefficients D_z et C_z sont constants et que la quantité de substance diffusée est conservée, le mouvement Brownien est perpétuel.

L'examen de ces hypothèses justifie le caractère probabiliste attribué au mouvement Brownien.

4.2.2 Marche au hasard et connection avec les processus de diffusion :

Soit une particule se déplaçant sur un axe dirigé verticalement, à des intervalles de temps réguliers, d'un pas vers le haut ou vers le bas (si l'axe est horizontal, le déplacement se fera vers la gauche ou vers la droite)

A chaque pas de temps, une variable aléatoire discrète x_i peut être définie telle que :

$x_i = + 1$ si la particule se déplace vers le haut

$x_i = - 1$ si la particule se déplace vers le bas

Avec

Prob [$x_i = + 1$] = p ; Prob [$x_i = -1$] = q

et telles que $p + q = 1$

Les mouvements successifs étant indépendants, l'observation des variables x_1, x_2, \dots, x_N ; au cours de N intervalles de temps constitue un tirage de Bernoulli.

Au Nième pas de temps la particule occupe la position

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

Aussi

$$\overline{S_N} = E [S_N] = N(p-q) \quad (4-3a)$$

$$\text{Var} [S_N] = 4 pq N \quad (4-3b)$$

Les physiciens utilisent le modèle de marche au hasard comme illustration de la diffusion unidimensionnelle ou mouvement Brownien .

En considérant une unité de mesure de déplacement (Δa) et en s'intéressant non plus à la position de la particule mais à son déplacement, les expressions (4.3) deviennent :

$$E [\Delta a S_N] = (p-q) \Delta a N$$

$$\text{Var} [\Delta a S_N] = 4pq (\Delta a)^2 N$$

En rapportant ces deux expressions à la durée du mouvement $t = N \cdot \Delta t$; les expressions suivantes sont obtenues :

$$\frac{E [\Delta a S_N]}{t} = (p - q) \frac{\Delta a}{\Delta t} \quad (4.4a)$$

$$\frac{\text{Var} [\Delta a S_N]}{t} = 4pq \frac{(\Delta a)^2}{\Delta t} \quad (4.4b)$$

Pour illustrer le lien existant entre les expressions (4-4) et les coefficients de l'équation de diffusion (4-2), une démonstration simplifiée est donnée. Pour plus de détails, on consultera Feller (1971, chap.X).

La figure 4.1 illustre le déplacement de la particule pour lequel deux événements sont possibles.

- avec une probabilité q , la particule se trouvant dans la position a_{k+1} à l'époque t_n , peut descendre et occuper la position a_k à l'époque t_{n+1} ;
- avec une probabilité p , la particule se trouvant en a_{k-1} à l'époque t_n , peut monter et se placer à l'époque t_{n+1} .

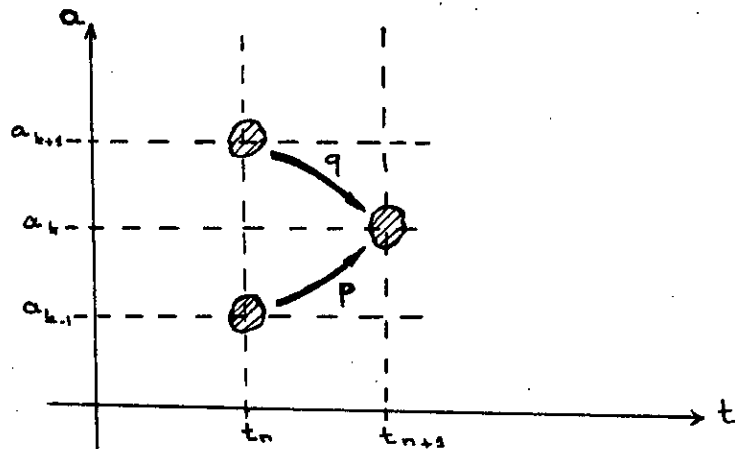


Fig 4.1: Schéma de transition pour la diffusion unidimensionnelle de la particule .

Remarque : La probabilité pour que la particule maintienne sa position est négligeable.

Les événements considérés sont exhaustifs et mutuellement exclusifs, donc :

$$p + q = 1$$

Avec :

$$\text{Prob} [a=a_k ; t=t_{n+1} / a = a_{k-1} ; t = t_n] = p \quad (4.5)$$

$$\text{Prob} [a=a_k ; t=t_{n+1} / a = a_{k+1} ; t = t_n] = q$$

Dans ces expressions, seule la position présente au temps t_n de la particule est explicitée, vu que son itinéraire n'apporte aucun supplément d'informations quant à la prédiction de la position future de cette particule. La marche au hasard possède donc la propriété Markovienne. Les probabilités de transition p et q étant constantes la formule de Chapman - Kolmogorov donne :

$$\begin{aligned} \text{Prob} [a=a_k; t=t_{n+1}] = \\ p\text{Prob} [a=a_{k-1}; t=t_n] + q\text{Prob} [a=a_{k+1}; t=t_n] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si les pas de temps et de position sont constants et si de plus, les probabilités de position peuvent être remplacées par des fonctions continues et dérivables

par rapport à (t) et à (a) , qui seraient des densités de probabilité (Bourdeau, 1986, chap.V), l'expression (4-6) devient :

$$f_a(a, t + \Delta t) \Delta a = p \cdot f_a(a - \Delta a, t) \Delta a + q \cdot f_a(a + \Delta a, t) \Delta a \quad (4.7)$$

car à un temps t_n :

$$\int_{a_k - \frac{\Delta a}{2}}^{a_k + \frac{\Delta a}{2}} f_a da = \text{Prob} [a = a_k ; t = t_n]$$

où a est un intervalle de l'espace centré sur a_k et f_a est la densité de probabilité.

Le développement de (4.7) en série de Taylor, de premier ordre pour le terme de gauche et de deuxième ordre pour le terme de droite, conduit à :

$$\begin{aligned} f_a(a, t) + \frac{\partial f_a(a, t)}{\partial t} \Delta t &= \\ &= p \left(f_a(a, t) - \frac{\partial f_a(a, t)}{\partial a} \Delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_a(a, t)}{\partial a^2} (\Delta a)^2 + \dots \right) \\ &+ q \left(f_a(a, t) + \frac{\partial f_a(a, t)}{\partial a} \Delta a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_a(a, t)}{\partial a^2} (\Delta a)^2 + \dots \right) \\ &= f_a(a, t) + (q-p) \frac{\partial f_a(a, t)}{\partial a} \Delta a + \frac{1}{2} (\Delta a)^2 \frac{\partial^2 f_a(a, t)}{\partial a^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial f_a(t, a)}{\partial t} = + \frac{1}{2} \frac{(\Delta a)^2}{\Delta t} \frac{\partial^2 f_a(a, t)}{\partial a^2} - (p-q) \frac{\Delta a}{\Delta t} \frac{\partial f_a(a, t)}{\partial a} \quad (4.8)$$

L'expression $(\Delta a \cdot SN) / t$, a la dimension d'une vitesse et représente la vitesse de propagation V_a de la particule Brownienne.

L'expression (4.4a) représente la vitesse moyenne des particules Browniennes :

$$E(V_a) = \bar{V}_a = (p - q) \frac{\Delta a}{\Delta t}$$

$$\text{et } \text{Var} \left[\frac{\Delta a \cdot S_N}{t} \right] = \frac{1}{t^2} \text{Var} [\Delta a \cdot S_N]$$

C'est-à-dire :

$$t \text{Var} [V_a] = 4pq (\Delta a)^2 / (\Delta t)$$

Le mouvement Brownien étant continu, à la limite quand :

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \Delta a \rightarrow 0 ; \quad \bar{V}_a \rightarrow C_a$$

Ainsi , le coefficient de convection :

$$C_a = \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \bar{V}_a = \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} [(p-q) \frac{\Delta a}{\Delta t}] \quad (4.9a)$$

Pour des valeurs modérées de p et q la quantité $4pq$ tend vers 1 et :

$$D_a = \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{2} t \text{Var}[V_a] \right] = \lim_{\substack{\Delta a \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{2} \frac{(\Delta a)^2}{\Delta t} \right) \quad (4-9b)$$

La proportionnalité entre le coefficient de diffusion et la variance de la vitesse de propagation des particules, illustre le sens physique de ce coefficient qui représente, ainsi, les fluctuations de la vitesse de propagation dues aux chocs des molécules fluides sur la particule.

Les hypothèses faites pour dériver l'équation (4.2) sont restrictives (coefficients constants, intervalles égaux), néanmoins la démarche suivie reste assez explicite; le but étant de mettre en exergue le caractère probabiliste du mouvement Brownien et non pas d'exposer des connaissances complexes qu'on n'oserait prétendre maîtriser.

La forme générale de l'équation (4.2), pour des probabilités de transition et des pas de temps et de position variables est :

$$\frac{\partial f_s(a, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial a^2} [D_s(a, t) \cdot f_s(a, t)] - \frac{\partial}{\partial a} [C_s(a, t) \cdot f_s(a, t)] \quad (4.10)$$

C'est l'équation de Fokker - Planck pour la diffusion unidimensionnelle sous sa forme la plus générale.

4.3 APPLICATION A LA DEFORMATION, A L'ETAT STATIONNAIRE, SOUS L'EFFET D'UNE FONDATION SUPERFICIELLE .ETAT PLAN DE DEFORMATION .

4.3.1 Introduction :

Au chapitre 3, le processus de déformation a été décrit comme étant le résultat d'une instabilité, qui a pris naissance au sein du massif, et ayant une certaine probabilité de se propager jusqu'en surface. Cette situation se résume en l'évolution du changement de porosité au cours du temps.

Marsal (1965) adapta la théorie du mouvement Brownien pour la modélisation de la déformation, dans le temps, d'un massif granulaire lâche, d'étendue infinie et

sollicité uniformément en surface.

En se basant sur l'hypothèse ergodique, Marsal exprime la probabilité de présence d'un grain solide dans un intervalle de l'espace en terme de concentration solide (volume solide par unite de volume total).

La particule Brownienne est, dans ce cas, le grain devenu instable à la suite d'un incrément de charge et les molécules fluides sont les particules voisines qui transmettent cette force par le biais des contacts sous forme d'impulsions aléatoires .

Marsal applique l'équation de diffusion (4.2) aux concentrations solides et des resultats expérimentaux de l'auteur (1973) confirmèrent ses prédictions théoriques

Cependant, certaines critiques ont été faites quant à la manière dont a été modélisé le phénomène par le mouvement Brownien. Ces critiques visaient surtout les hypothèse suivantes :

- L'hypothèse de faible concentration pour le milieu granulaire a été rejetée, car, les grains sont tout le temps en contact et leurs interactions mutuelles ne peuvent être négligées.
- Les coefficients de l'équation de diffusion ne peuvent être constants, vu que le mouvement des grains ne peut être perpetuel dans le temps, car une fois l'équilibre atteint leur mouvement cesse.

Pour s'affranchir de l'hypothèse de faible concentration, Bourdeau (1986) applique le même raisonnement que Marsal, non plus aux grains solides, mais à une "particule d'air". Cette particule d'air est

le volume d'air déplacé à chaque mouvement de grain, dans un milieu granulaire sec, suite à une augmentation des sollicitations internes. Ce volume d'air est égale au volume moyen de la particule solide déplacée. Ainsi, même s'il y a croisement de deux cheminements de lacunes, une lacune de plus grande dimension se forme sans que le processus ne soit vraiment affecté.

L'hypothèse d'ergodicité de ce modèle établit la correspondance entre la probabilité de présence d'une lacune diffusée à une altitude a , au temps t , et la concentration volumique de l'air en excès sous la charge appliquée. L'équation de diffusion (4.10) s'applique au surplus de porosité:

$$\Delta n_v(a, t) = n_v(a, t) - n_v(a, t \text{ équilibre})$$

Les coefficients de l'équation de diffusion sont considérés variables pour pallier aux insuffisances du modèle de Marsal.

Néanmoins, dans les exemples étudiés par Bourdeau, les coefficients sont des constantes car aucune relation explicitant ces coefficients n'est encore établie.

Bien que l'étude faite se limite à un cas très particulier, les résultats obtenus par Marsal annoncent le début d'une ère nouvelle pour l'étude de la déformation des sols et constituent la base conceptuelle et mathématique sur laquelle de nombreux auteurs construisent leurs modèles pour l'étude de la déformation des milieux granulaires à l'état stationnaire.

La notion de diffusion en mécanique des sols n'est pas nouvelle; l'équation de consolidation de Terzaghi constitue la meilleure illustration.

Plus récemment, cette notion a été introduite pour décrire la transmission des charges et la propagation des déplacements dans les milieux granulaires. De nombreux modèles ont été développés indépendamment pour la diffusion des contraintes et pour la propagation des lacunes. Les premières études faites dans ce sens montrent une analogie entre la répartition des contraintes verticales sur un plan horizontal, dans un massif de sol chargé en surface, et la forme de la distribution normale de probabilité dont l'étalement irait croissant avec la profondeur. Cette constatation fait allusion à un processus de diffusion où la profondeur est la variable d'évolution.

Toutefois, ces études ne reposaient pas sur une base théorique solide. Ce n'est qu'en 1969 que Sergeev jeta les bases d'une théorie nouvelle basée sur un modèle de cheminement au hasard des forces transmises par les contacts entre grains. Sergeev aboutit à une équation parabolique de la forme :

$$\frac{\partial \sigma_z(x, z)}{\partial z} = D_x^0(z) \cdot \frac{\partial^2 \sigma_z(x, z)}{\partial x^2} \quad (4.11)$$

où ; σ_z représente la contrainte verticale sur un plan horizontal d'un massif granulaire.

L'équation (4.11) est un cas particulier de l'équation (4.2) à condition d'assimiler la contrainte σ_z à la concentration par unité de surface d'une substance diffusée dans la direction x , au cours d'un processus d'évolution selon la profondeur z .

Harr (1977) reprend le modèle de Sergeev et l'applique à l'espérance mathématique $\bar{S}(x, z)$ de la contrainte intergranulaire $S(x, z)$. Harr introduit ainsi, un aléa provenant de la nature discrète du sol. La contribution

de Harr a donné suite à bon nombre de travaux dans ce sens. La théorie de diffusion des contraintes est orientée principalement vers l'étude des fondations superficielles.

Par ailleurs, le problème de la prévision des tassements en surface dûs au phénomène de "subsidence", a généré des recherches dans ce sens se nourrissant du même concept.

Bourdeau (1986, Chap. VII) rapporte l'explication de ce phénomène donnée par Kanji (1979):

Le phénomène résulte d'une perturbation du sol née en profondeur, à la suite d'activités minières, d'extraction de gaz ou de pétrole. Cette perturbation est causée par un déplacement local du matériau, qui permettra à un volume d'air, équivalent à celui des grains déplacés, à s'introduire dans le milieu granulaire où il peut cheminer jusqu'en surface.

L'analogie est évidente avec les phénomènes décrits précédemment. Les solutions apportées dans ce cas se limitent généralement, à l'état stationnaire de déformation.

Le premier modèle proposé (LITWINISZYN, 1955) est basé sur les transitions d'une lacune échangeant sa position avec un grain et décrit l'évolution spatiale des tassements. Ce modèle possède la propriété Markovienne.

Suite à des critiques apportées par les travaux expérimentaux de certains auteurs, LITWINISZYN introduit une "mémoire" de certains événements passés dans le schéma de transition de la lacune.

Le modèle de marche au hasard avec mémoire a été exploité par Grivas et Harr (1975) en vue d'une meilleure compréhension de la génération des surfaces de rupture dans les milieux granulaires. L'exposé des travaux fait ci-dessus ne se prétend nullement être exhaustif, et bon nombre d'autres contributions ont été apportées à l'étude de la diffusion des déplacements.

Bien que les deux théories de diffusion, celle des contraintes et celle des déplacements n'aient été établies indépendamment l'une de l'autre, leur évolution historique fait ressentir qu'elles doivent être complémentaires.

Bourdeau (1986) propose une synthèse de ces deux théories, pour l'étude de la déformation d'un sol granulaire à l'état stationnaire et pour un cas général de charges verticales, basée sur une étude antérieure menée par d'autres auteurs dans le cas limité d'une charge concentrée uniquement.

4.3.2 Modèle de Bourdeau :

4.3.2.1 Formulation du modèle :

Bourdeau, considère un massif granulaire sec et statistiquement homogène dans le plan horizontal chargé en surface et substitue aux voies entreprises par la force lors de sa transmission en profondeur, qui sont de forme arborescente, un chemin unique (fig 4.2) mais aléatoire, vu la nature désordonnée et complexe du milieu granulaire. Néanmoins, la réponse de ce modèle en terme de tassements en particulier, doit être équivalente à celle du phénomène réel.

Les hypothèses fondamentales du modèle sont :

- La force ne peut être absorbée si le massif est

infini.

- La progression se fait toujours vers le bas.
- La force se transmet intégralement d'un grain à l'autre, c'est-à-dire sans être fractionnée.

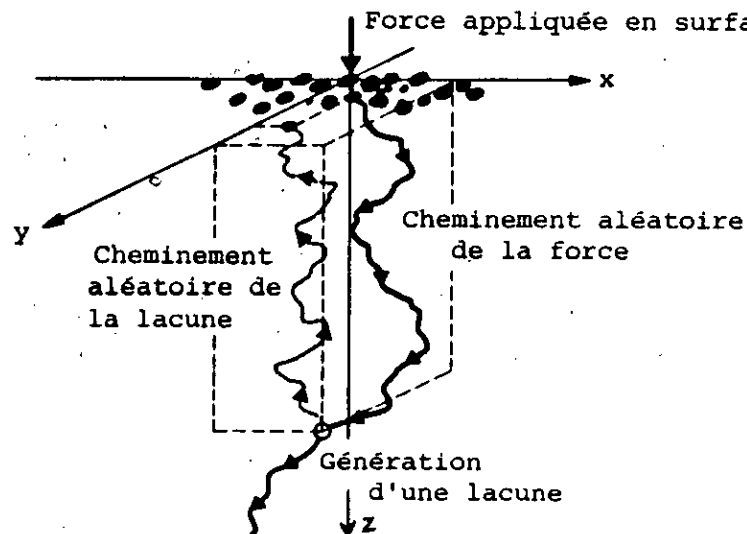


Fig 4.2 : Modèle de déformation à l'état stationnaire. Définitions des événements aléatoires élémentaires.

A la suite d'une augmentation des sollicitations internes, les grains se réarrangent dans une configuration plus stable qui se traduira par l'émission d'une lacune, chaque fois qu'un grain se déplace.

Les hypothèses faites pour la transmission de la force restent valables pour la progression de la lacune, la progression se faisant vers le haut. Pour un même chargement et pour un référentiel restant toujours lié au point d'application de la charge, des observations répétées, en différents points du massif des événements suivants:

- A : passage du chemin de transmission de la force à une profondeur z_i , par un point $(x=x_1, y=y_1)$
- B : émission d'une lacune en ce point
- C : aboutissement de la propagation de la lacune au point $(x=x_2, y=y_2)$ en surface ou elle est absorbée

permettent de définir les fonctions de probabilités conjointes de ces événements, à condition que le nombre de tentatives soit infini, vu le caractère aléatoire que revêt ce phénomène. Ces fonctions sont :

- $f_A(x, y, z_i)$ pour les coordonnées du point de passage de la force à la profondeur z_i
- $f_B(x, y, z_i)$ pour les coordonnées du point d'émission d'une lacune .
- $f_C(x, y, z_i)$ pour les coordonnées du point d'absorption en surface de la lacune.

Le processus décrit est un processus aléatoire, avec la profondeur z comme variable d'évolution. Ce processus est dit ergodique s'il pouvait être décrit par une seule tentative représentative de l'ensemble.

La transmission de la force et la progression de la lacune sont analogues aux phénomènes décrits par le modèle de Marsal (1965) pour le déplacement d'un grain et le modèle de Bourdeau (1986) pour le déplacement d'une particule d'air dans un milieu granulaire.

L'hypothèse de progression toujours vers le bas pour la force, à l'état stationnaire de déformation, en tout point du massif, indique que les forces intergranulaires et les déplacements des grains sont toujours dirigés vers le bas. Ceci est compatible avec le comportement physique réel du sol étudié, c'est-à-dire un massif granulaire lâche contractif. Le même raisonnement s'applique à la progression de la lacune.

L'hypothèse de non absorption des forces diffusées exprime qu'à chaque profondeur, l'équilibre du massif est assuré.

Pour les lacunes, cette même hypothèse signifie que la compacité varie uniquement au point où la lacune a été

émise et que lors de sa progression, le nombre de contacts des autres grains se trouvant sur son chemin ne varie pas

4.3.2.2 Equation de diffusion de la charge en déformations planes :

Avant l'application de la charge, la direction de la contrainte moyenne principale majeure due à la gravité est verticale. Seules les forces intergranulaires de compression sont transmises dans un sol granulaire lâche .

Ainsi, d'après Sergeev (1969) et Harr (1977), pour des charges verticales en surface, la direction de transmission sera orientée verticalement vers le bas. Ceci aura lieu sans diffusion dans cette direction. La diffusion se fera dans un plan horizontal x, y .

Le modèle proposé par Bourdeau (1986) s'applique au cas d'une semelle filante et d'un massif statiquement homogène caractérisant un état plan de déformation (fig. 4.3)

La théorie du mouvement Brownien impose l'indépendance des fluctuations dans toutes les directions. Ainsi:

$$f_A(x, y, z) = f_A(x, z) \cdot f_A(y, z)$$

La fondation étant filante dans la direction y (la charge par mètre linéaire dans cette direction est constante) et le massif étant statiquement homogène, le passage du chemin de transmission de la force en tout point du massif selon y sera équiprobable.

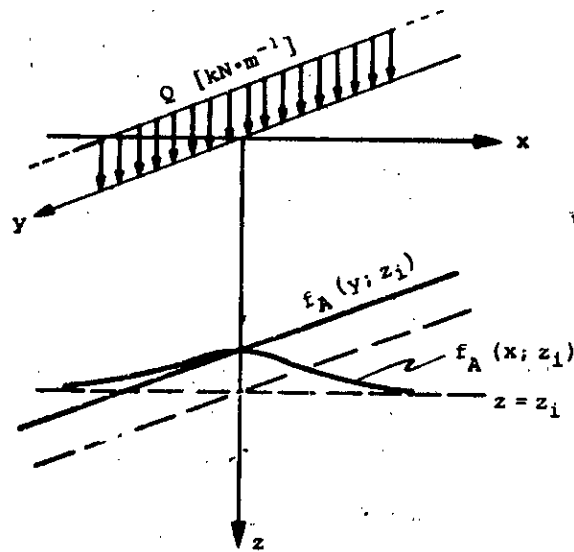


Fig 4.3 : Massif chargé par une force répartie sur une ligne de longueur infinie.
(d'après Bourdeau , 1986)

La distribution marginale dans la direction parallèle à la fondation est donc uniforme et $f_A(y, z)$ devient une constante qui s'élimine du problème. Ceci ramène le modèle à un cas unidimensionnel.

Un sol lâche est un sol n'ayant subi aucune pré-compression; et la charge appliquée constitue donc un premier chargement, et d'après l'hypothèse de Harr et Sergeev sur la direction de transmission qui est verticale, la diffusion de la force n'est conditionnée par aucun paramètre particulier. Au vu de toutes ces hypothèses, Harr (1977) a montré que la diffusion est symétrique .

L'analogie avec les équations dérivées au paragraphe 4.2.2 conduit, dans le cas d'un processus symétrique ($p=q$), à l'équation de diffusion:

$$\frac{\partial f_A}{\partial z} = \frac{\partial^2 [D_x^2 (X, Y) \cdot f_A(x, z)]}{\partial x^2} \quad (4.12)$$

où : - $D_x(x, z)$ est le coefficient de diffusion de la force dans la direction x .

A une profondeur z_1 , la probabilité pour que la force passe par un intervalle de largeur δx autour de $x = x_1$ est :

$$\text{Prob}[x_1/z_1] = \text{Prob}_A \left[x_1 - \frac{\delta x}{2} < x < x_1 + \frac{\delta x}{2} \right] = \int_{x_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x_1 + \frac{\delta x}{2}} f_A(x, z_1) dx \quad (4.13)$$

La force réellement évaluée dans l'intervalle $\delta x \cdot \delta y$ centré sur x_1 est la résultante des forces intergranulaires F .

Une interprétation au sens fréquentiel de Prob_A permet d'écrire :

$$\text{Prob}_A[x_1/z_1] = \frac{F}{Q \delta y} \quad (4.14)$$

où Q est la charge par mètre linéaire appliquée en surface.

Par ailleurs, la contrainte intergranulaire moyenne \bar{S}_z est la concentration par unité de surface des forces intergranulaires. Soit :

$$F = \delta y \int_{x_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x_1 + \frac{\delta x}{2}} \bar{S}_z(x, z_1) dx \quad (4.15)$$

La combinaison des équations (4-13), (4-14) et (4-15) conduit à :

$$Q \delta y \int_{x_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x_1 + \frac{\delta x}{2}} f_A(x, z_1) dx = \delta y \int_{x_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x_1 + \frac{\delta x}{2}} \bar{S}_z(x, z_1) dx \quad (4.16)$$

Après dérivation (4-16) devient :

$$Q f_A(x, z_1) = \bar{S}_z(x, z_1)$$

f_A s'exprime en m-1 vu l'analogie entre la probabilité de présence d'un chemin de transmission dans un intervalle δx et concentration d'une substance diffusée. Q s'exprime en kN/m. Le terme de gauche a bien la dimension d'une contrainte.

Q étant une constante l'équation (4-12) devient :

$$\frac{\partial \bar{S}_z(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 [Dx^y(x, z) \cdot \bar{S}_z(x, z)]}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

$\bar{S}_z(x, z)$ étant une pression, l'équation de diffusion reste applicable quelque soit la distribution en surface, qui tient lieu de condition initiale.

Le massif est initialement statiquement homogène dans les directions horizontales, Bourdeau suppose qu'il le reste après stabilisation (ce qui n'est pas vrai ROTHENBURG et BATHURST, 1989 : anisotropie structurelle). Les caractéristiques physiques restent donc constantes tout au long du phénomène et par suite :

$$\frac{\partial D_x^y}{\partial x} = 0$$

Et, (4.17) se réduit à :

$$\frac{\partial \bar{S}_s(x, z)}{\partial z} = D_x^s \frac{\partial^2 \bar{S}_s(x, z)}{\partial x^2} \quad (4.18)$$

Cette équation est similaire à celle de Sergeev (1969). Dans son modèle, Sergeev a introduit une relation linéaire entre le coefficient D_x^s et la profondeur z telle que :

$$D_x^s = \nu z \quad (4.19)$$

où ν est un paramètre adimensionnel. Cette relation fut reprise par Harr (1977) et Bourdeau (1986).

Pour Sergeev, cette hypothèse revient à dire que D_x^s augmente avec la compacité, c'est-à-dire qu'il y a plus de contacts et la force a un plus large champ d'action, mais la transmission se fait uniquement par compression.

Pour Bourdeau, l'augmentation de D_x^s en profondeur n'est pas due uniquement à la transmission par compression, mais aussi à l'effet du confinement qui est proportionnel à la gravité. Ce confinement provoque une transmission latérale des forces verticales. L'hypothèse de non fractionnement de la force est ainsi assouplie.

Harr (1977), exprime les composantes horizontales et de cisaillement des contraintes moyennes en un point comme suit :

$$\bar{S}_x = \nu \bar{S}_z + (\nu z)^2 \frac{\partial^2 \bar{S}_z}{\partial x^2} \quad (4.20)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = -v_z \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial x} \quad (4.21)$$

En négligeant le terme de second ordre dans (4-20), celle-ci devient:

$$\bar{\sigma}_x = v \bar{\sigma}_z \quad (4.22)$$

A cause de sa similitude avec le coefficient de pression des terres latérales, Harr a appelé λ coefficient de contraintes latérales. L'intérêt de cette hypothèse est de faire apparaître un terme géotechnique dans l'expression des contraintes. Harr propose donc, d'assimiler λ à K , coefficient de pression des terres, tout en émettant des réserves.

En effet, cette analogie nécessite que les contraintes verticales et horizontales soient des contraintes principales en tout point. Or cette situation est très peu probable dans un massif chargé sur une partie limitée de la surface.

Toutefois, Bourdeau propose d'assimiler λ à K_0 sur la base des comparaisons faites avec les estimations théoriques de λ , en fonction de la densité relative D_r , proposé par Chikwendu (1981) :

$$v = 0.5 \quad (D_r = 0)$$

$$v = 0.2 \quad (D_r = 100\%)$$

La formule de Jacky pour le calcul de K_0 donne les mêmes valeurs, pour des angles de frottement internes de 27° et 51° respectivement. λ peut donc être estimé par la formule de Jacky.

Plus l'angle de frottement est grand, plus le sol est dense et plus ν est faible. Par suite, le coefficient de diffusion est faible aussi, et ceci signifie que la dispersion des contraintes est moins importante. Cette déduction est logique, vu que dans un milieu dense, la quantité de matériau nécessaire pour équilibrer l'augmentation des sollicitations est plus faible.

4.3.2.3 Equation de diffusion des déplacements :

La direction de propagation des lacunes est conditionnée par le champ de sollicitations internes qui comprend la contribution de la gravité. D'un point de vue statistique, cette direction peut être confondue avec l'orientation de la contrainte principale majeure moyenne \bar{S}_I . La direction de propagation de la lacune remontera donc celle de \bar{S}_I et les fluctuations se feront dans la direction perpendiculaire. Ces deux directions (de propagation et des fluctuations) varient spatialement en fonction du champ de contraintes. Le processus de diffusion des déplacements est, de ce fait, beaucoup plus complexe que celui des contraintes.

Bourdeau propose le schéma de transition de la figure 4.4 pour la propagation de la lacune. L'auteur se limite à une région où les variations d'orientations de \bar{S}_I sont négligeables.

La marche au hasard originale d'une lacune se trouvant à l'origine des coordonnées locales, η et ξ , est symétrique selon η , et le coefficient de diffusion associé est :

$$D^*_{\eta} = \lim_{\substack{\delta\eta \rightarrow 0 \\ \delta\xi \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{2} \frac{(\delta\eta)^2}{\delta\xi} \right) \quad (4-23)$$

Bourdeau substitue à ce modèle, un autre modèle simpliste où les directions de propagation et de

diffusion sont constantes et confondues avec les directions verticale z' et horizontale x'

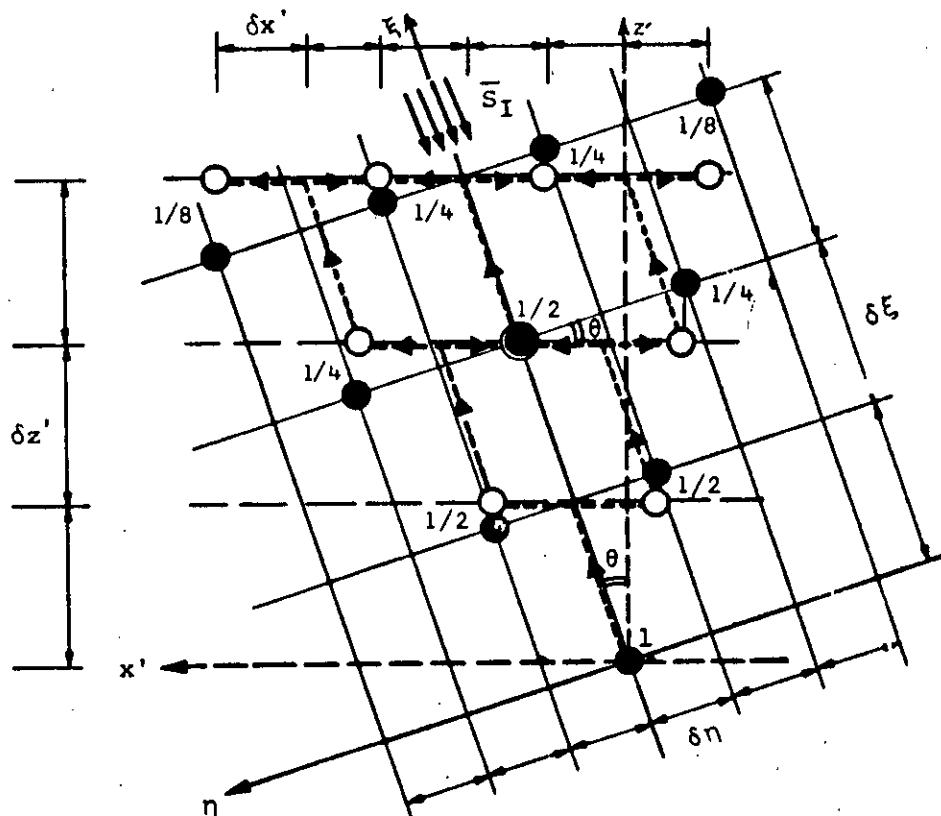


Fig 4.4 : Modèle stationnaire de déformation - Marche au hasard des lacunes (vue bidimensionnelle simplifiée) (d'après Bourdeau , 1986)

La marche au hasard issue de ce modèle est dissymétrique, et pour préserver une bonne prédiction des profils de tassement par rapport aux déplacements horizontaux, Bourdeau fait coïncider les coordonnées horizontales avec celles du modèle original (en effet, en décomposant selon la direction verticale pour les deux modèles, on trouve la même quantité vu que l'emplacement de la lacune fait le même angle pour les deux modèles).

Le processus de diffusion issu de cette modélisation est décrit par l'équation de Fokker - Planck, avec z' comme variable d'évolution :

$$\frac{\partial f_c(x', z')}{\partial z'} = \frac{\partial^2 [D_{x'}^v(x', z') \cdot f_0(x', z')]}{\partial x'^2} \quad (4.24)$$

$$- \frac{\partial [C_{x'}^v(x', z') \cdot f_c(x', z')]}{\partial x}$$

Pour assurer une équivalence approximative entre les deux processus, et en tenant compte des équations (4-9) (Bourdeau, 1986 ; Harr et Bourdeau, 1989), le coefficient de convection approprié est pris tel que :

$$C_{x'}^v = \lim_{\substack{\delta x' \rightarrow 0 \\ \delta z' \rightarrow 0}} (\overline{Vx'}) = \operatorname{tg}[\theta(x', z')] \quad (4.25)$$

θ est l'angle formé par la contrainte principale majeure \overline{SI} et l'axe vertical au point considéré .

Par définition :

$$D_{x'}^v = \lim_{\substack{\delta x' \rightarrow 0 \\ \delta z' \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{2} \frac{(\delta x')^2}{\delta z'} \right) \quad (4.26)$$

D'après la figure 4.5 :

$$\delta z' = \delta \xi \cos \theta$$

$$\delta x' = \delta \eta \cos \theta$$

En remplaçant dans (4.26) et d'après (4.23), il advient que :

$$D_{x'}^v = \cos^3[\theta(x', y')] \cdot D_{z'}^v \quad (4.27)$$

La quantité mise en jeu dans ce processus est la lacune émise au sein d'un massif granulaire à la suite d'une

augmentation des sollicitations internes.

L'émission d'une lacune correspond à un déplacement des grains. La propriété ergodique de ce processus établit la correspondance entre la probabilité qu'a une lacune de traverser un intervalle donné $\delta x'$, avec le volume déplacé en ce point, qui représente une fraction du volume total initial émis.

Le cas de déformations planes est simulé par une densité linéaire de volume émis $V_l(0,0)$. La figure 4.5 illustre la diffusion d'un volume d'air avec l'altitude, jusqu'en surface.

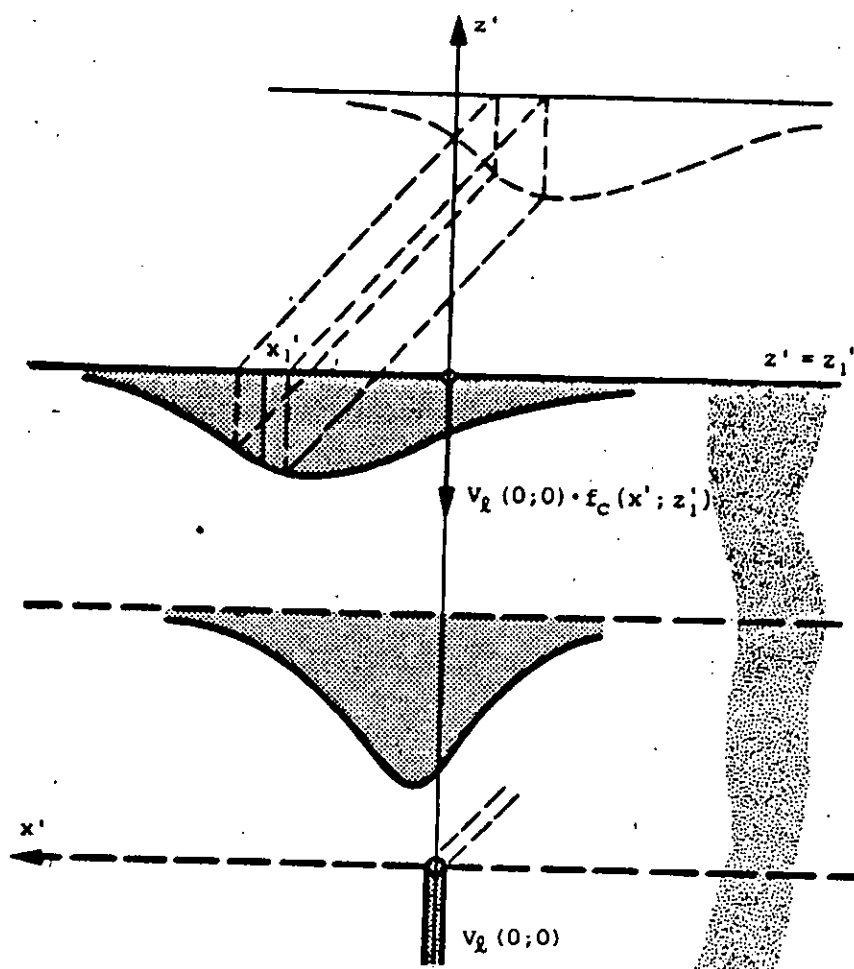


Fig 4.5 : Diffusion d'un volume d'air, d'origine localisée, jusqu'en surface. Etat plan de déformation (d'après Bourdeau, 1986)

A l'altitude z' et autour d'un point x' , la densité linéaire de volume émis vaut :

$$V_I(x'_1, z'_1) = V_I(0, 0) \int_{x'_1 - \frac{\delta x}{2}}^{x'_1 + \frac{\delta x}{2}} f_\sigma(x'_1, z'_1) dx' \quad (4.28)$$

Donc, le déplacement moyen \bar{w} d'un grain, en ce même point, est égal à la dérivée de $V_I(x', z')$ par rapport à x' .

En général :

$$\bar{w}(x', z') = V_I(0, 0) f_c(x', z') \quad (4.29)$$

où : V_I s'exprime en $[m^3 \cdot m^{-1}]$

f_c s'exprime $[m^{-1}]$

\bar{w} s'exprime en $[m]$

\bar{w} est un volume par unité de surface .

L'équation (4.29) devient :

$$\frac{\partial \bar{w}(x', z')}{\partial z'} = \frac{\partial^2 [D_{x'}^{w'}(x', y') \cdot \bar{w}(x', y')]}{\partial x'^2} - \frac{\partial [C_{x'}^{w'}(x', z') \cdot \bar{w}(x', z')]}{\partial x'} \quad (4.30)$$

\bar{w} est la substance diffusée.

De même que pour les contraintes, cette équation est applicable à n'importe quelle répartition initiale du volume émis, celle-ci tenant lieu de condition initiale.

Le déplacement calculé par le biais de cette équation est dans la direction de \vec{S}_I . Les déplacements verticaux et horizontaux valent :

$$\bar{w}_z(x', z') = \cos[\theta(x', z')] \cdot \bar{w}(x', z') \quad (4.31)$$

$$\bar{w}_x(x', z') = \sin[\theta(x', z')] \cdot \bar{w}(x', z')$$

En supposant que les longueurs des pas de transition, dans le modèle de marche au hasard, est de l'ordre de la distance entre particules, la définition du coefficient de diffusion suggère que sa valeur sera aussi du même ordre de grandeur (Bourdeau, 1986 ; Bourdeau et Harr, 1989). Différentes expressions ont été proposées pour l'estimation du coefficient de diffusion D_{η}^w . Une discussion détaillée de ces travaux est faite par (Bourdeau 1986, Chap.7). La conclusion qui s'en dégage est que le coefficient de diffusion est du même ordre de grandeur que le diamètre moyen des grains, tel que l'ont confirmé des travaux expérimentaux d'autres auteurs .

4.3.2.4 Couplage des deux processus de diffusion :

Les deux événements concernant la propagation des forces et celle des lacunes ont été quantifiés par les équations de diffusion. La quantification du troisième événement qui consiste en l'émission (ou la non émission) d'une lacune doit permettre de coupler les deux événements. Cette quantification est faite d'un point de vue probabiliste.

Soit Prob[A] : la probabilité pour que la force transmise par le contact entre grains passe par un point (x,y,z).

L'événement B consiste en l'émission d'une lacune au point (x,y,z). Prob[BA] est la probabilité d'occurrence simultanée des deux événements A et B.

Prob[B/A] est la probabilité conditionnelle que B se produise sachant que A s'est produit.

Un volume élémentaire Δv de dimensions Δx , Δy , Δz contenant un point P est examiné, Les valeurs moyennes des contraintes sont supposées être, approximativement égales à leur moyenne spatiale à l'intérieur du volume élémentaire.

A la suite de l'application d'une charge verticale Q à la surface, une interprétation fréquentielle de Prob[A] serait :

$$Prob[A] = \frac{\bar{S}_z \Delta x \Delta y}{Q}$$

où : \bar{S}_z est la contrainte verticale moyenne sur un plan horizontal à travers Δv .

A la suite de l'augmentation de la sollicitation, Prob[BA] est égale (au sens fréquentiel) au rapport du volume réel \bar{v} et le volume initial. Soit :

$$Prob[BA] = \frac{\bar{v}}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

Cette quantité est équivalente à la déformation volumétrique du volume élémentaire Δv .

Par ailleurs:

$$Prob[BA] = Prob[A] \cdot Prob[B/A] \quad (4.32)$$

Ainsi, toujours du même point de vue, Prob[B/A] est égale au rapport de la déformation volumétrique et l'augmentation des sollicitations internes, qui n'est autre que le coefficient de déformation volumétrique.

Bourdeau propose donc comme équivalent phénoménologique de l'équation (4.32) l'expression suivante :

$$\epsilon_v = \sigma_n \left(\frac{1}{\beta_v} \right) \quad (4.33)$$

où :

ϵ_v est la déformation volumétrique.

$$\sigma_m \text{ est la pression moyenne} = \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_I + \bar{\sigma}_{II} + \bar{\sigma}_{III})$$

avec $\bar{\sigma}_I$, $\bar{\sigma}_{II}$ et $\bar{\sigma}_{III}$ les contraintes principales au point considéré.

β_v est le module de déformation volumétrique.

4.3.3 Résolution des équations :

De nombreuses solutions analytiques des équations de diffusion des contraintes sont disponibles dans la littérature. Ce n'est pas le cas pour l'équation de diffusion des déplacements. Dans le cadre de ce travail, une procédure numérique basée sur la méthode des différences finies est utilisée pour résoudre l'ensemble des équations (4.17), (4.30) et (4.33).

La forme générale de l'équation à résoudre est :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 (Du)}{\partial x^2} - \frac{\partial (Cu)}{\partial x} \quad (4.34)$$

où $u = u(x, z)$ est la fonction inconnue : contraintes ou déplacements .

z est la variable d'évolution

x est la variable spatiale

$C = C(x, z)$ est le coefficient de dérive

$D = D(x, z)$ est le coefficient de diffusion.

$$\frac{\partial^2 (Du)}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} u$$

$$\frac{\partial(Cu)}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x} u$$

l'équation (4.34) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2 \frac{\partial D}{\partial x} - C \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) u \quad (4.35)$$

Pour la présente étude, le schéma de Cranck-Nicholson a été choisi pour la résolution.

Pour pouvoir étudier le cas de plusieurs fondations en surface, des zones de pas différents ont été définies.

Le schéma de Cranck-Nicholson étant implicite, l'écriture de l'équation (4.35) en termes de différences finies, en chaque noeud, à une profondeur donnée, conduit à un système d'équations de la forme

$$[C] (U) = (B)$$

Ces équations sont applicables pour tous les noeuds, à part les noeuds de frontières pour lesquels on devra, en plus, tenir compte des conditions aux limites.

L'expression de l'équation (4.35) et des conditions aux limites en termes de différences finies est faite dans l'annexe A2. Cette annexe donne aussi quelques détails sur la structure du programme écrit pour les besoins du présent travail.

Les conditions aux limites :

Bourdeau considère que le massif est limité par des parois verticales parfaitement rigides, et envisage les deux cas extrêmes d'adhérence nulle ou parfaite.

- Dans le cas d'une adhérence nulle, le massif limité par les frontières se comporte comme un corps indépendant n'ayant aucune interaction avec ce qui se trouve au-delà de ces frontières. Donc, quelque soit la quantité considérée, elle ne peut diffuser au-delà de ces frontières, celle-ci agissant comme des barrières réfléchissantes. Cette condition s'exprime par un flux nul à travers la barrière.

cette condition appliquée au mouvement Brownien, dans le cas d'une particule soumise au champ de gravité, donne :

$$\phi_C + \phi_D = 0 \quad \text{et} \quad D_x \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} - C_x f(x, z) = 0 \quad (4.36)$$

Avec les coefficients D_x et C_x constants, et f représente la concentration de la substance diffusée.

En constatant que l'équation (4.36) résulte d'une intégration par rapport à la variable spatiale de l'équation (4.2), Bourdeau fait une généralisation au cas où les coefficients sont variables et obtient :

$$\int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} [D_x(x, z) \cdot f(x, z)] - C_x(x, z) \cdot f(x, z) = 0 \quad (4.37)$$

Pour les contraintes, cette condition se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial x} [D_x^s(x, z) \cdot \bar{S}_x(x, z)]_{x=x_1} = 0 \quad (4.38)$$

x_1 est l'abscisse de la frontière.

Comme $D_x^s(x, z)$ est une constante, (4.38) devient :

$$\left[\frac{\partial \bar{S}_x}{\partial x} \right]_{x=x_1} = 0 \quad (4.39)$$

Dans ce cas, le massif limité par les barrières doit équilibrer la totalité des contraintes qui ne peuvent diffuser au-delà des

parois verticales.

Le même raisonnement s'applique aux déplacements. Ce raisonnement assure que tous les changements de volume susceptibles de se produire au sein du massif se propagent jusqu'en surface. Comme au contact de la paroi, les contraintes sont principales, C_{α} s'annule et la condition (4.37) se réduit à :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'} (D_{x'}^{\bar{w}}(x', z') \cdot \bar{w}(x', z')) \right]_{x=x_2} = 0 \quad (4.40)$$

Pour les autres composantes des contraintes, les conditions aux limites sont :

$$S_{xz}(x_L ; z) = 0 \quad (4.41)$$

car le glissement est parfait aux frontières .

$$S_x(x_L ; z) = v S_z(x_L, z) \quad (4.42)$$

- Dans le cas d'une adhérence parfaite, tous les déplacements doivent être nuls à la frontière. Cette condition est appelée absorption et s'écrit simplement

$$\bar{w}(x_L, z') = 0 \quad (4.43)$$

Pour les contraintes, aucune condition ne peut être imposée du fait de la présence des contraintes tangentielles aux limites, qui permettent à une fraction des contraintes de diffuser au-delà des limites.

Une condition pourrait éventuellement être posée, si on pouvait spécifier une relation entre le coefficient de

frottement et les contraintes tangentielles aux frontières, de façon à ce que les déplacements soient nuls. Ce résultat pourrait être obtenu en procédant à des itérations sur le coefficient de frottement. Malgré, cette éventualité, le problème reste complexe. Des conditions d'absorption peuvent être imposées aux contraintes si les limites sont placées suffisamment loin de la charge, par analogie avec un massif d'étendue infinie.

Conditions aux limites des couches :

Dans la théorie des multicouches (Burmister 1945), les conditions d'interfaces sont des conditions d'intégrabilité qui expriment qu'en tout point, l'équilibre, la compatibilité des déformations et la continuité sont satisfaits. Elles sont énoncées dans le cadre de la mécanique du continu, où la transition d'une couche à l'autre est considérée comme une discontinuité géométrique, et par là même une discontinuité mécanique.

Ces conditions ne sont, en fait, qu'un outil mathématique permettant de rendre un système d'équations statiquement déterminé.

Dans la théorie de la diffusion, les équations ont été dérivées en se basant sur la nature discrète du sol. Or vu dans son ensemble, que le sol soit formé d'une seule couche ou de plusieurs, il sera toujours constitué de particules discrètes. Et c'est cette nature discrète qui gouverne le comportement du sol.

Il suffit donc de tenir compte des caractéristiques de chaque couche lors de la résolution séquentielle des équations. En mécanique du continu, il n'est pas fait allusion aux caractéristiques intrinsèques du matériau.

Harr (1977) a montré que la théorie de la diffusion permet, pour le calcul des contraintes, de s'affranchir des conditions d'interfaces. Bourdeau (1986) aboutit à la même conclusion en ce qui concerne les déplacements; la théorie de la diffusion modélisant un phénomène de transport à travers un milieu, et non un comportement mécanique soumis à des conditions de comptabilité et de continuité.

Bourdeau ne spécifie aucune condition d'interfaces dans son modèle

Conditions initiales :

Les deux cas extrêmes de fondation souple et de fondation rigide ont été considérés par Bourdeau, car, pour un cas intermédiaire une relation entre rigidité et répartition des contraintes, doit être spécifiée, or celle-ci n'est pas disponible.

Pour une fondation souple, la solution est immédiate car la distribution des contraintes en surface est connue et est uniforme (la fondation suit le mouvement du sol lors de sa déformation et distribue uniformément les contraintes de contact sous la semelle). La distribution en surface dans ce cas est une donnée du problème.

Pour la fondation rigide, la seule information disponible porte sur les tassements qui doivent être uniformes sous la semelle. Or, pour démarrer la résolution, la distribution des contraintes en surface doit être connue a priori, ce qui n'est pas le cas. Pour contourner cette impasse, un processus itératif est nécessaire, où la distribution des contraintes est corrigée au fur et à mesure, en fonction des tassements en surface. Une distribution de forme connue (parabole

ou sinusoïde) peut être imposée à condition que son intégrale soit égale à la charge appliquée.

Presentation du programme :

On calcule dans un premier temps les contraintes et les déformations volumétriques qui en résultent à chaque profondeur, en progressant vers le bas.

Les déformations volumétriques fournissent à chaque altitude, après cumul avec les déplacements diffusés, les conditions initiales pour la résolution de l'équation de diffusion des déplacements. La base étant rigide, la condition initiale pour les déplacements est représentée par des déplacements nuls.

La déformation volumétrique résulte en un déplacement nodal fictif $\Delta \bar{w}(x'i, z'j)$ tel que :

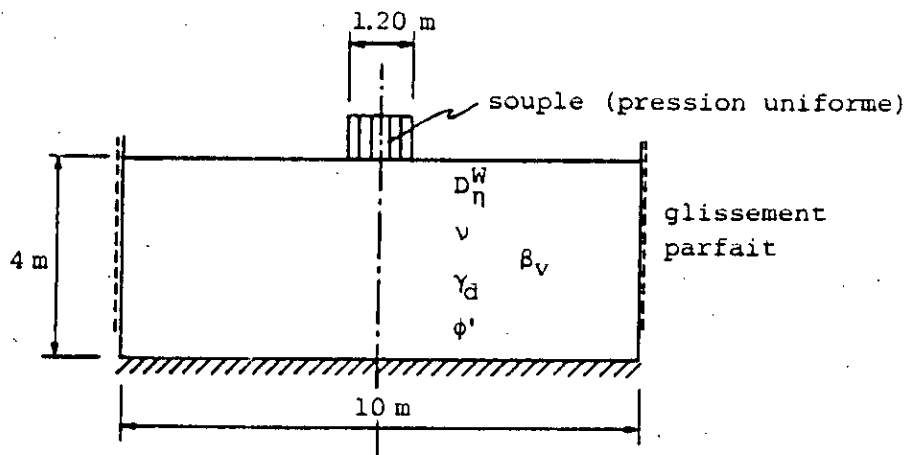
$$\Delta \bar{w}(x'_i, z'_j) = \frac{1}{2} (\epsilon_v(x'_i, z'_j) + \epsilon_v(x'_i, z'_{j+1})) \cdot \Delta z$$

$(x'i, z'j)$ est la déformation volumétrique moyenne dans un élément de volume $\Delta x \cdot \Delta z \cdot 1$ centré sur le noeud (i, j) .

4.3.4. Exemples :

La figure (4.6) illustre le cas présenté comme exemple théorique par Bourdeau. Les caractéristiques du massif de sol sont considérées constantes en chacun de ses points.

La pression en surface est uniforme.



Pression : 83 kN /m²

γ_d : 18 kN/m³
 ϕ' : 35
 D_n^W : 2 mm
 ν : 0.4
 β_v : 10000 kN/m²

Fig 4.6 : Exemple théorique. Modèle stationnaire pour l'état plan de déformation

Les figures 4.7, 4.8, 4.9 et 4.10 permettent d'observer l'évolution théorique de chaque variable avec la profondeur. Les résultats obtenus dans le cadre du présent travail sont conformes à ceux obtenus par Bourdeau (1986) .

L'allure des courbes des contraintes et des déplacements est compatible avec le processus de diffusion qui les modélisent. En effet, l'étalement des courbes de ces deux quantités va croissant avec la profondeur. De plus l'allure des tassements met en évidence la diminution progressive des volumes totaux déplacés. Une autre prédiction théorique, en accord avec le comportement réel des sols étudiés, à savoir les sols granulaires lâches, est la forme de la

cuvette. Le tassement est minimum au centre de la fondation et va en augmentant jusqu'à atteindre son maximum sous les angles de la fondation. Ce phénomène s'explique par le fait qu'au centre de la fondation, la capacité portante est plus importante. Cette région résiste donc mieux et le tassement sera moindre. Pour mieux comprendre cette situation, la fondation est supposée constituée de petits éléments posés l'un coté de l'autre. Si chacun des éléments est considéré comme une petite fondation, et que la capacité portante correspondant à chacun de ces éléments est calculée, le terme relatif à la surcharge sera plus important pour l'élément central que pour l'élément de rive, ce qui explique la tendance observée.

L'allure des déplacements horizontaux montre une variation rapide à faible profondeur puisqu'ils apparaissent nuls en surface. Leur maximum est situé juste au dessous de la surface à proximité des angles de la fondation. La prédominance des déplacements horizontaux à cet endroit conduit à ce que les tassements en surface, aux limites de la zone chargée ne sont pas maximums, mais le phénomène correspond toujours à une diminution de volume. Ce fait est confirmé par l'allure des déformations volumétriques.

Le même exemple a été repris mais en divisant la pression par dix. Les figures 4.11 et 4.7 montrent qu'il existe une superposition des effets dans le cas des contraintes. Cette situation n'est pas vraie pour les fig 4.9 et 4.12. Ceci s'explique par le fait que l'équation décrivant les tassements est beaucoup plus complexe que celle décrivant les contraintes.

En effet cette équation dépend de beaucoup de paramètres variables.

Dans le second exemple étudié, une stratification a été introduite, la couche inférieure étant plus

compressible. En plus des discussions ci-dessus, une discontinuité brutale est observée pour les déformations volumétriques à cause de la brusque et importante, ^{variation} du module de compressibilité volumétrique. Les courbes correspondant à cet exemple sont regroupées à l'annexe A3. Les résultats obtenus restent toujours compatibles avec ceux obtenus par Bourdeau.

Deux autres exemples dont les données et les résultats sont regroupés à l'annexe A3 ont été appliqués au cas des essais sur sable et limon, faits par Bourdeau.

L'essai sur sable n'a pas été pris en compte car la zone dans laquelle les déplacements prennent naissance est située en profondeur, hors du champ d'observation.

Une bonne concordance entre la théorie et les observations est obtenue, tant que la charge ne se rapproche pas de la charge de rupture.

Lorsque la charge augmente et s'approche de la charge de poinçonnement, le modèle mathématique sous-estime les tassements sous la fondation.

Bourdeau attribue la sous-estimation des tassements aux éléments suivants :

- la modélisation n'a pas été envisagée en tenant compte de la modification du comportement se manifestant à l'approche de la rupture du massif.
- la valeur indépendante des coordonnées x et y attribuée au coefficient de diffusivité λ , alors que des modifications de structure se produisent lorsque les sollicitations augmentent (Rothenburg et Bathurst, 1989).
- l'hypothèse simplificatrice sur la relation entre direction de propagation des mouvements et direction de la contrainte principale majeure.

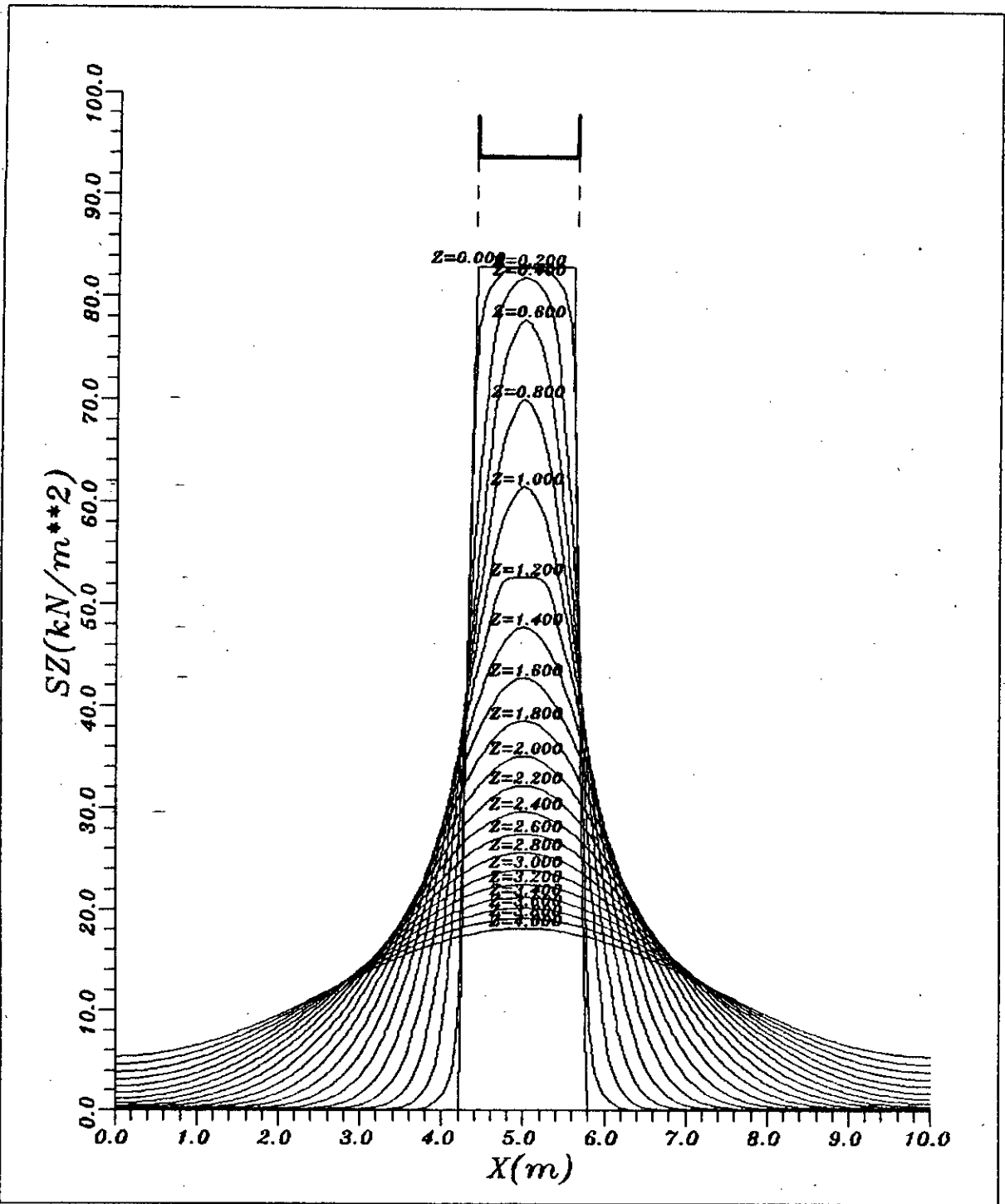


Fig.4.7 :Diffusion des contraintes verticales -
 Deformations planes-Fondation souple -
 Massif homogène.Pression=83.kN/m²

NX=51 DX=0.200 PHI=35. K0=0.40 G=18. DNW=0.002
 NZ=21 DZ=0.200
 BETAV=10000. Unites:(kN) (kN.m-2) (m) (degrees)

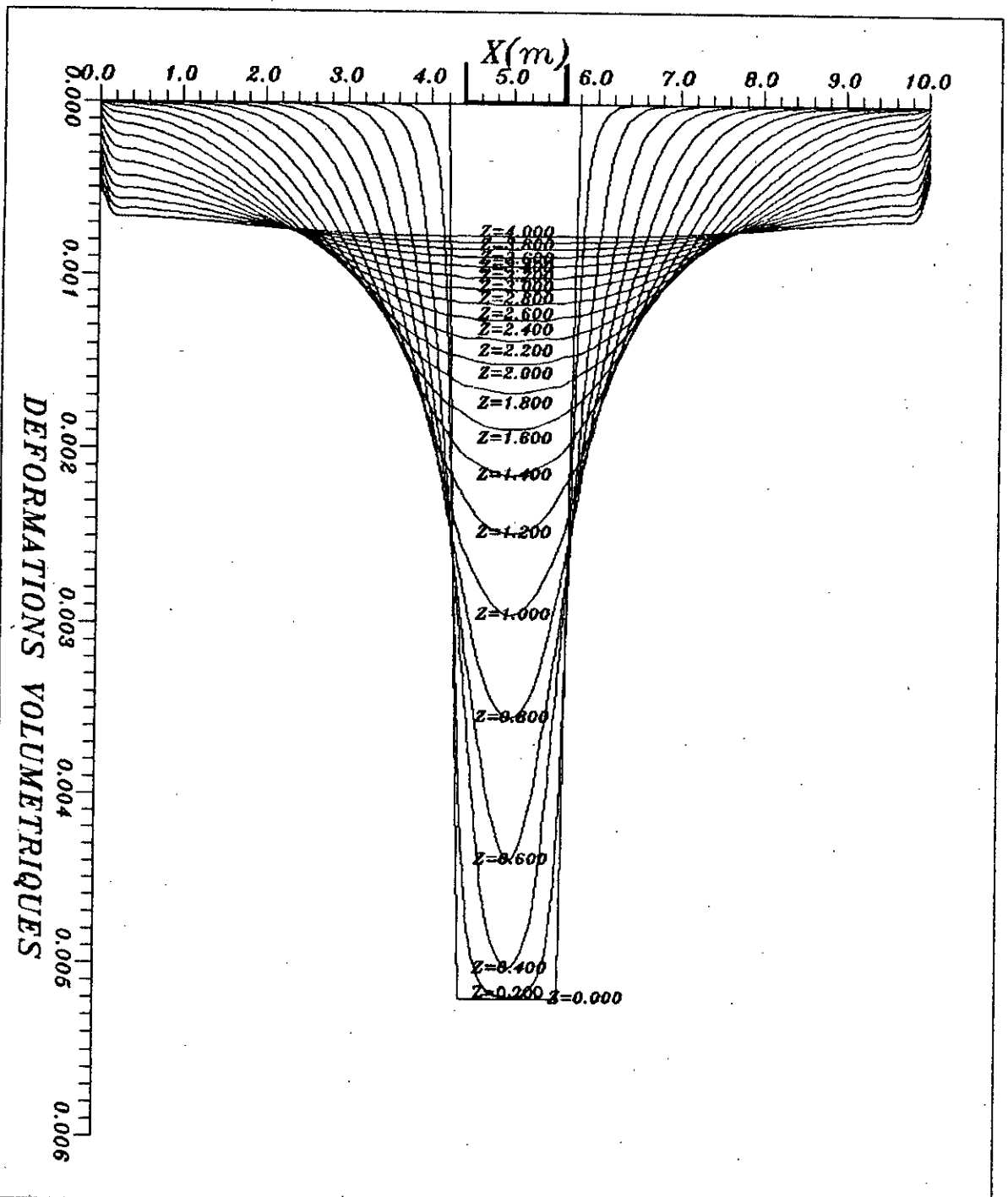


Fig.4.8 : Deformations volumetriques -
 Deformations planes-Fondation souple -
 Massif homogène-Pression=83.kN/m**2.

NX=51 DX=0.200 PHI=35. KO=0.40 G=18. DNW=0.002
 NZ=21 DZ=0.200
 BETAV=10000. Unites:(kN) (kN.m-2) (m) (degrees)

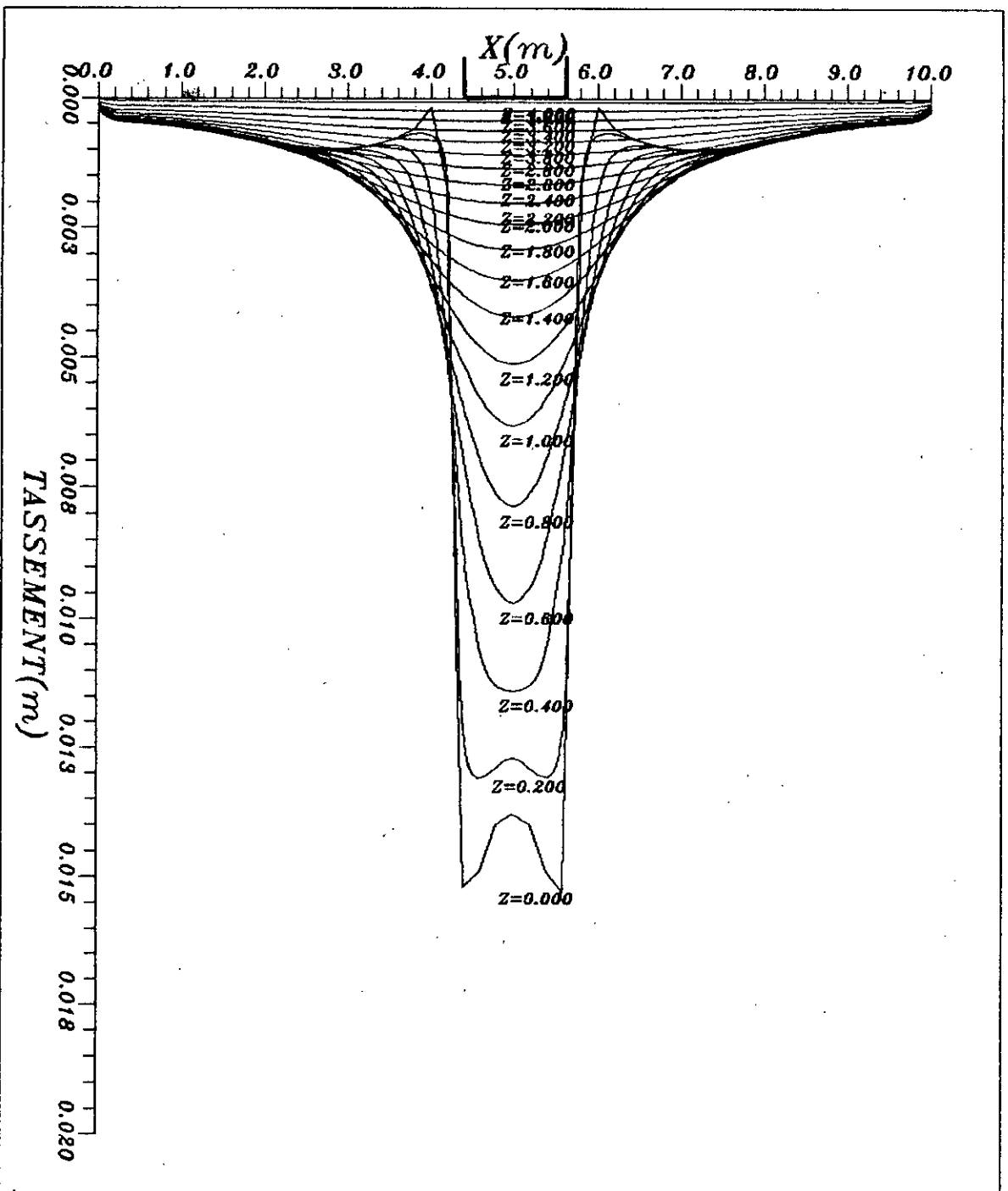


Fig.49: Diffusion des déplacements verticaux -
 Deformations planes - Fondation souple -
 Massif homogène - Pression = $83. \text{kN/m}^2$.

$NX=51$ $DX=0.200$ $PHI=35$ $K0=0.40$ $G=18$ $DNW=0.002$
 $NZ=21$ $DZ=0.200$
 $BETAV=10000$ Unites: (kN) (kN.m⁻²) (m) (degrees)

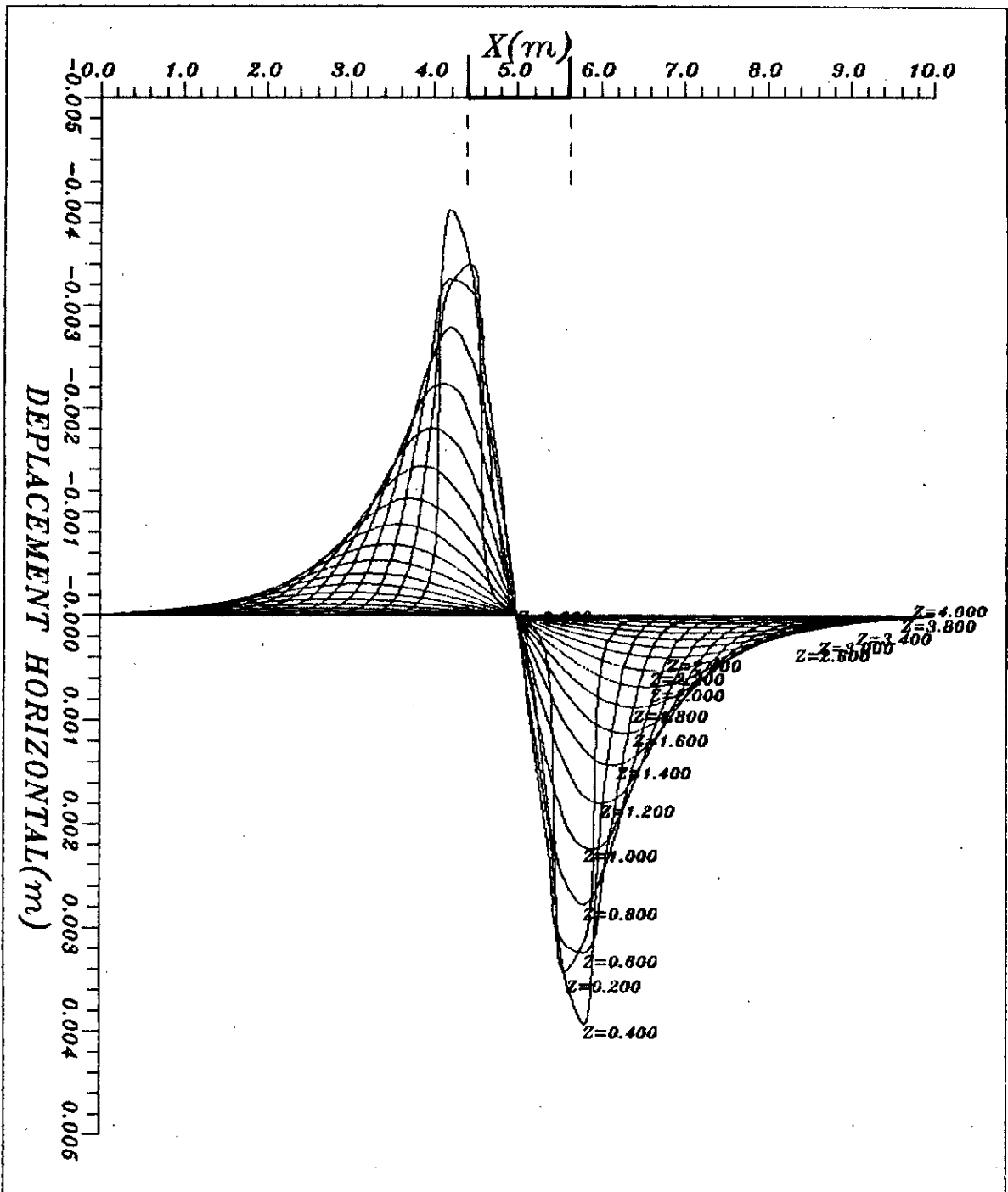


Fig.410: Diffusion des déplacements horizontaux -
 Deformations planes - Fondation souple -
 Massif homogène - Pression = 83.kN/m**2.

NX=51 DX=0.200 PHI=35. KO=0.40 G=18. DNW=0.002
 NZ=21 DZ=0.200
 BETAV=10000. Unites:(kN) (kN.m-2) (m) (degrees)

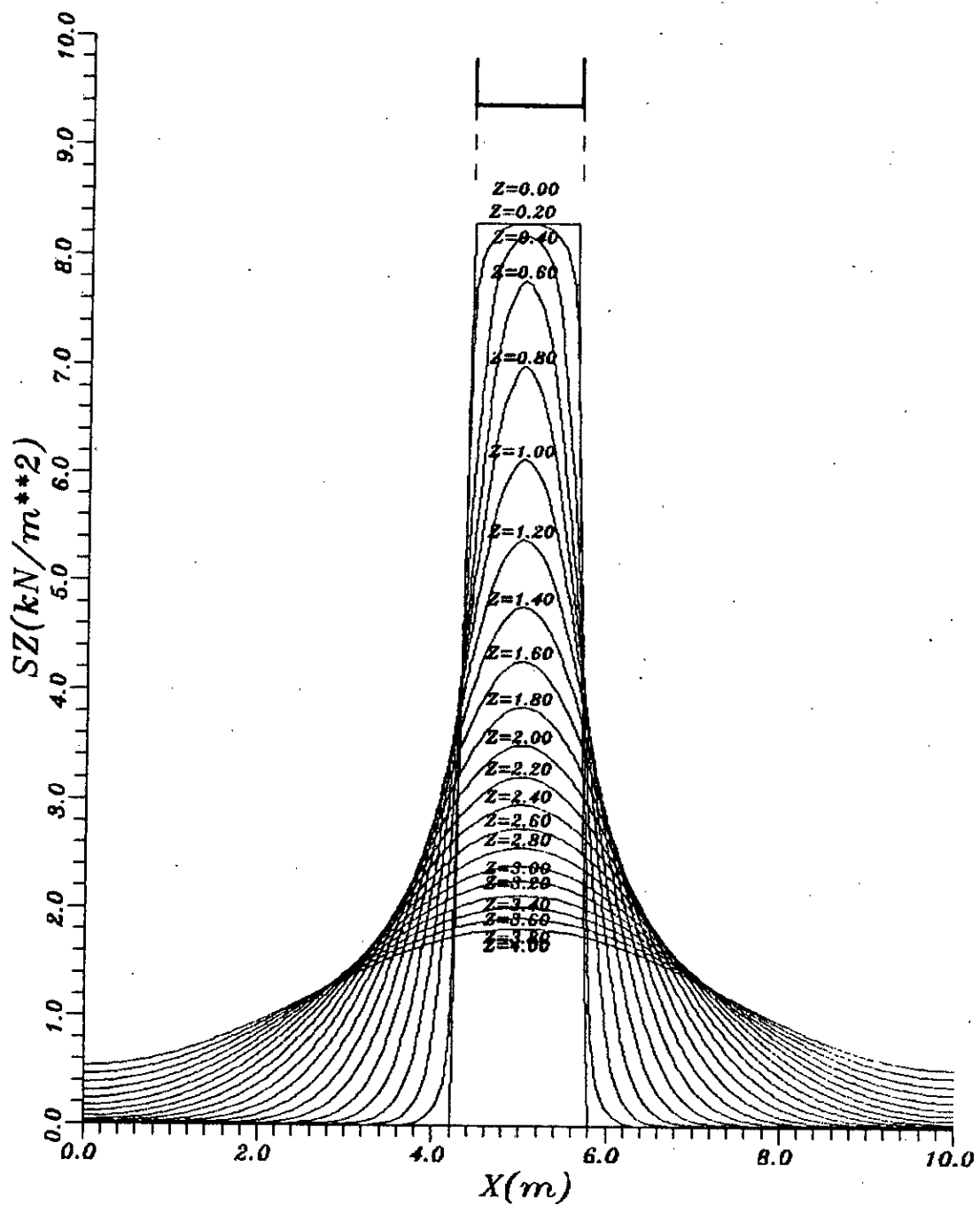


Fig. 4.11 : Diffusion des contraintes verticales - Deformations planes - Fondation souple - Massif homogène - Press: 8.3 kN/m². (comparaison avec exple 1).

NX=51 DX=0.200 PHI=35. KO=0.40 G=18. DNW=0.002
 NZ=21 DZ=0.200
 BETAV=10000. Unites: (kN) (kN/m²) (m) (degrees).

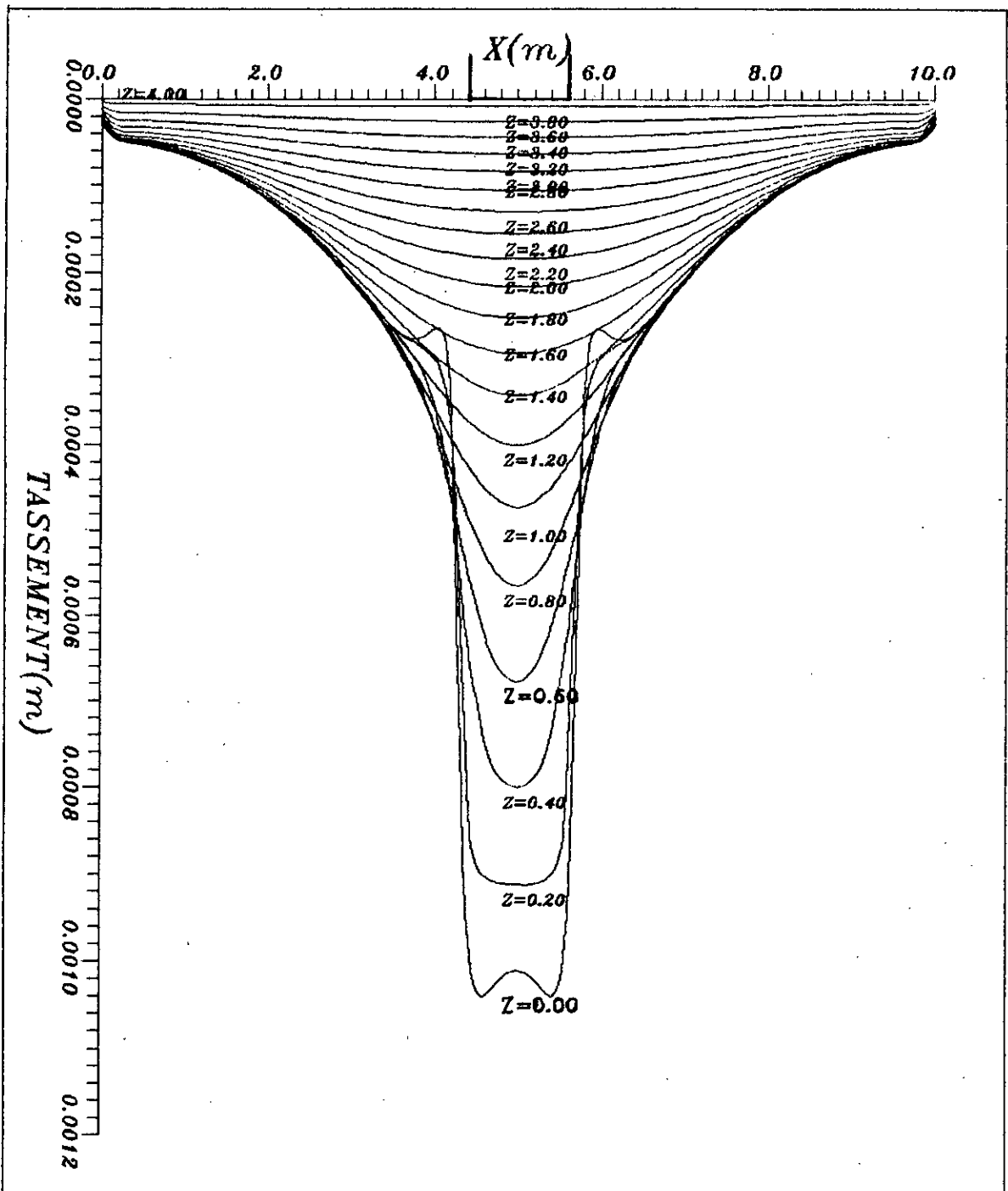


Fig.4.12: Diffusion des déplacements verticaux - Deformations planes - Fondation souple - Massif homogène - Press: 8.3 kN/m^2 . (comparaison avec exple 1).

$NX=51$ $DX=0.200$ $PHI=35$. $K0=0.40$ $G=18$. $DNW=0.002$
 $NZ=21$ $DZ=0.200$
 $BETAV=10000$. Unites: (kN) (kN/m^2) (m) (degrees).

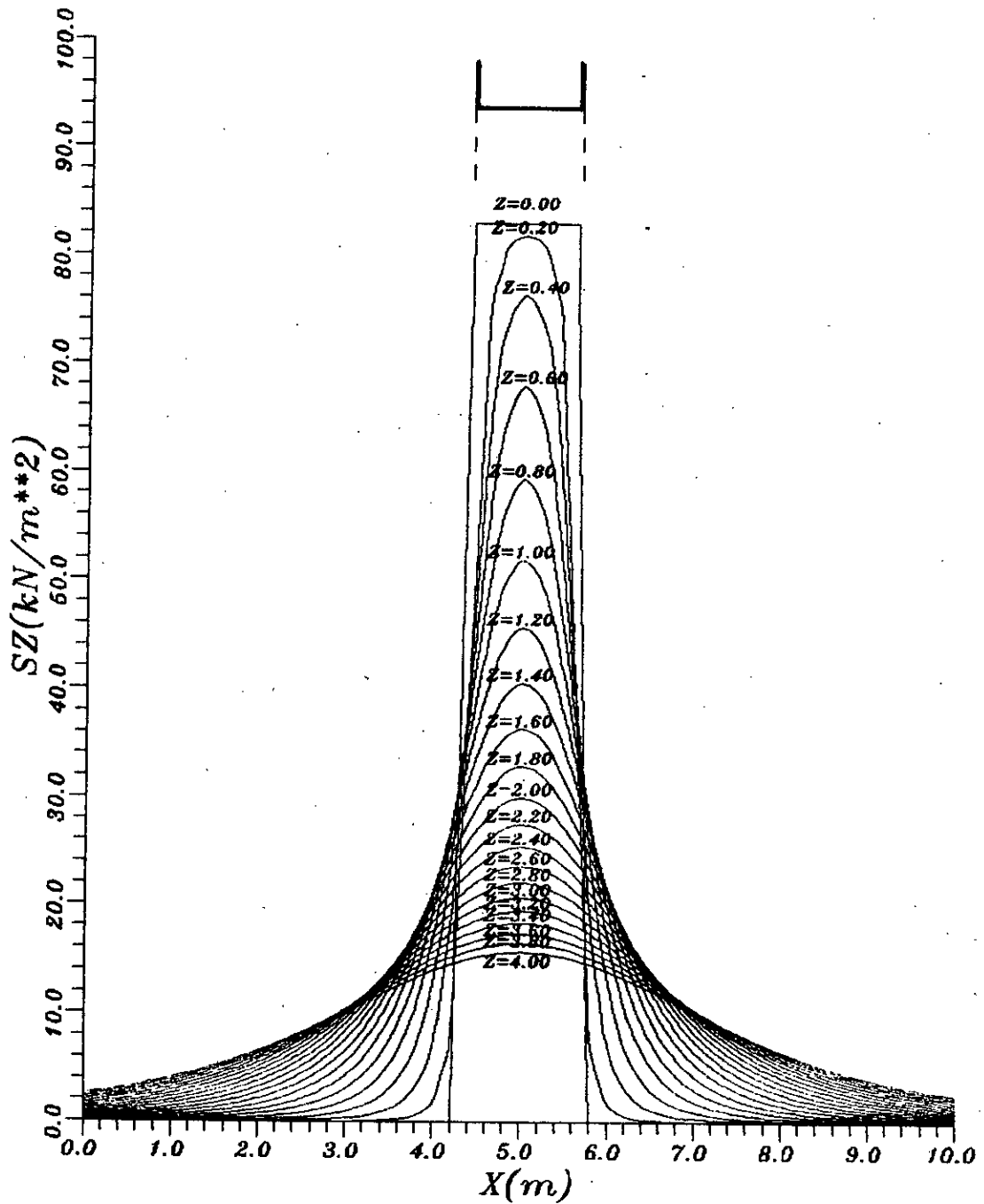


Fig. 4.13 :Distribution des contraintes verticales en elasticite plane (Boussinesq).
 Pression= $83.kN/m^{**2}$.

La comparaison des courbes de contraintes verticales sur un plan horizontal estimées par l'équation de diffusion (fig.4.7) avec celles obtenues par la théorie de Bousinesq, (sol homogène, semi-infini, isotrope, et élastique) (fig.4.13) montre une différence dans les amplitudes de ces quantités bien que la forme des distributions pour les deux cas est la même (fig.4.15).

Les contraintes étant utilisées pour l'évaluation des tassements, le choix d'une théorie par rapport à l'autre se fera sur la base des déformations obtenues par l'une ou l'autre de ces approches.

La fig.4.14 représente les tassements en surface du limon obtenus par :

- les mesures expérimentales menées par Bourdeau
- le calcul en élasticité linéaire (Bourdeau)
- le calcul, par le biais des équations de diffusion, de Bourdeau
- le calcul fait par le programme écrit pour la présente étude.

La comparaison entre les différentes courbes montre une bonne concordance entre les résultats qu'on a obtenus et ceux de Bourdeau d'une part, et entre ces deux résultats et l'expérimentation.

Les tassements obtenus par l'élasticité linéaire isotrope sont *sur*-estimés loin de la fondation.

Cette discussion permet de conclure sur la capacité de l'approche probabiliste à prédire correctement les contraintes et tassements induits dans un massif granulaire lâche.

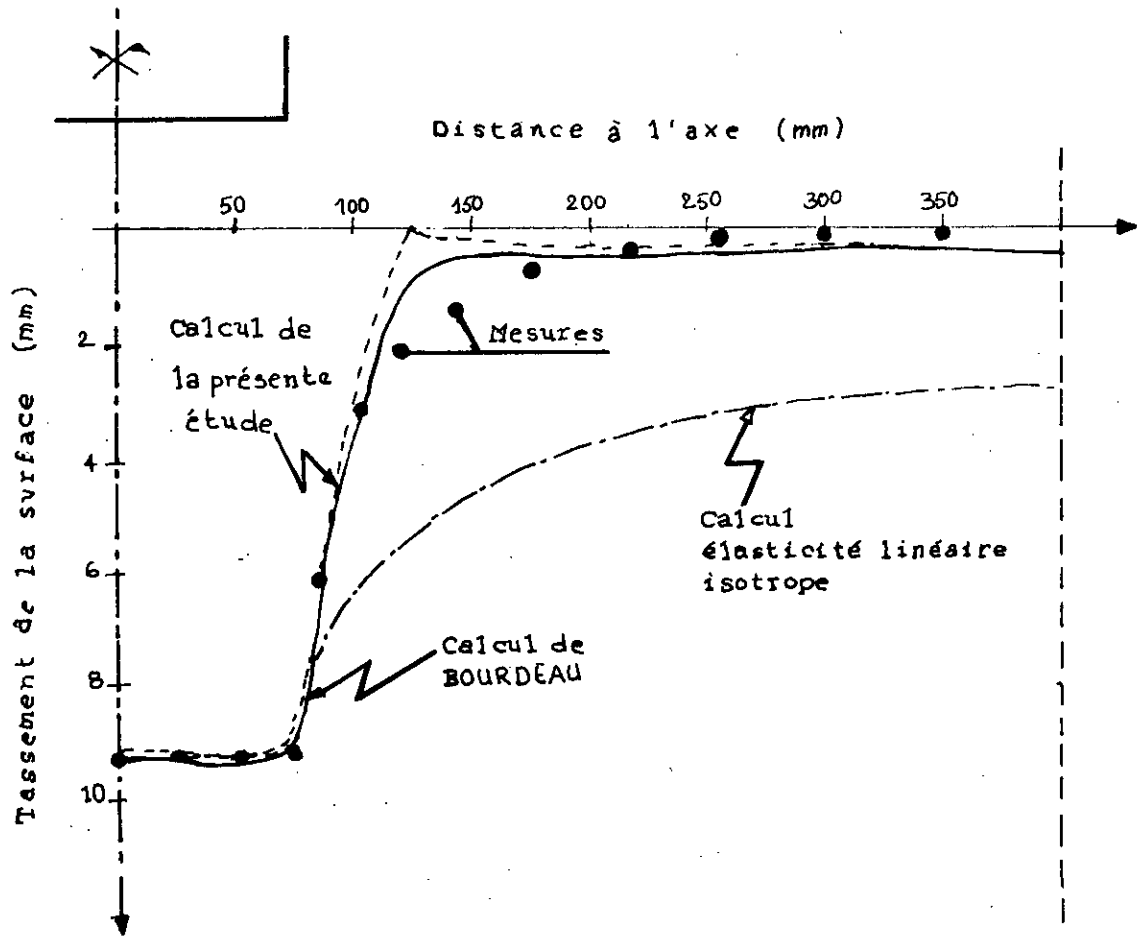


Fig. 4.14: Courbes comparatives des tassements en surface du limon

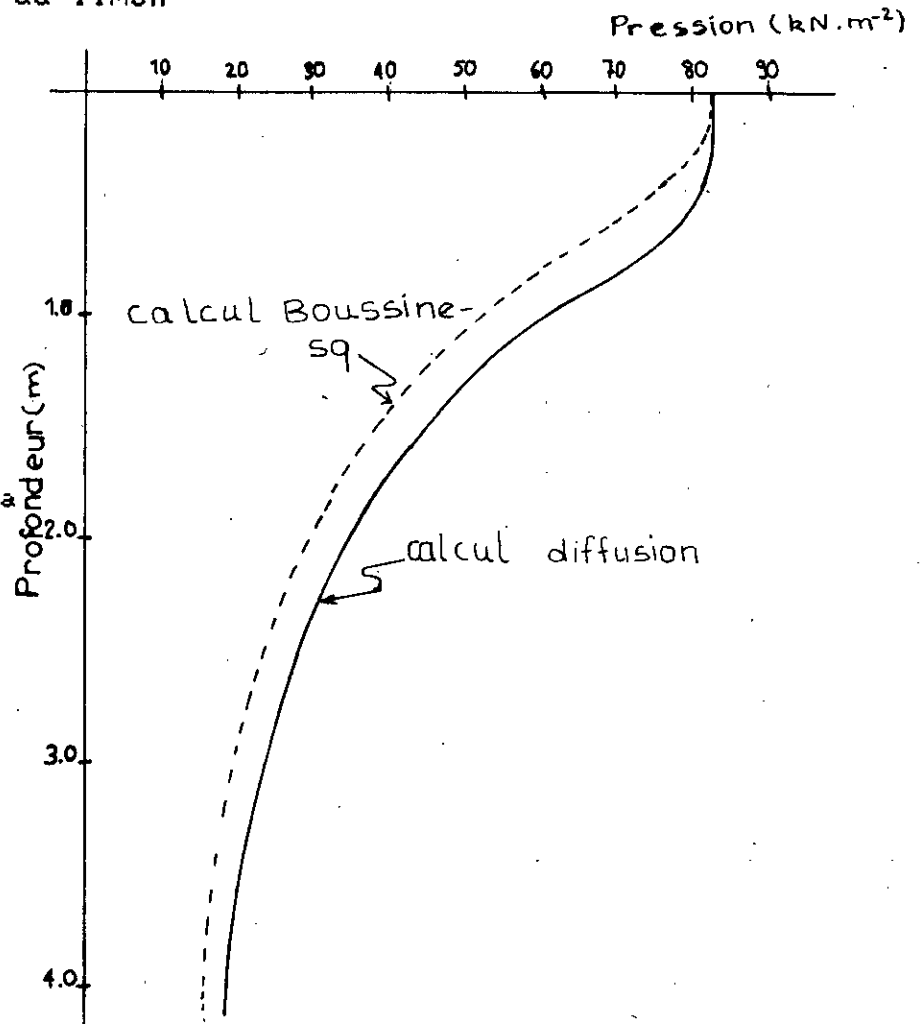


Fig. 4.15: Relation entre la pression dans l'axe de la fondation et la profondeur

CONCLUSION

Partant du principe qu'un sol est un milieu discontinu formé de particules distinctes, Bourdeau a montré que la déformation d'un massif de sol granulaire, sous l'effet de sollicitations externes, résulte d'instabilités locales, c'est-à-dire de changements locaux de la porosité, et leur propagation dans le milieu. Ces instabilités, représentées par des volumes d'air en excès, se diffusent jusqu'en surface pour induire les tassements macroscopiques observables.

Pour le type de sol étudié, à savoir un milieu granulaire sec ou saturé et parfaitement drainé, lâche et soumis à un chargement statique faible par rapport à sa capacité portante; la théorie rapportée dans le présent travail met en relief le rôle tenu par la porosité dans la sollicitation interne induite dans le matériau, et constitue une synthèse des deux théories de diffusion des contraintes et des déplacements développées, initialement, indépendamment l'une de l'autre. En outre, cette théorie simplifie grandement l'étude des milieux stratifiés vu l'absence de conditions d'interfaces, et fait usage d'un nombre restreint de paramètres intrinsèques de signification physique évidente.

Les travaux expérimentaux de Bourdeau sur le limon confirment les prévisions théoriques tant que la charge appliquée ne se rapproche pas de la charge de poissonnement. En effet, lorsque la charge augmente et avoisine la charge de rupture, le modèle mathématique sous-estime les tassements sous la fondation. Sur la base des discussions faites au chap.4 sur les résultats expérimentaux, Bourdeau propose de continuer les investigations sur les hypothèses simplificatrices portant, essentiellement, sur le coefficient de diffusivité supposé indépendant des coordonnées x et z ,

et sur la relation admise entre la direction de propagation des mouvements des lacunes et l'orientation de la contrainte principale majeure. Ces deux restrictions limitent, dans l'état actuel de sa formulation mathématique, la validité du modèle aux déformations relativement faibles.

La confrontation des résultats qu'on a obtenu par le biais de la programmation avec ceux de l'auteur est positive.

Toutes ces conclusions sont obtenues sans faire appel à des relations constitutives, mais émergent naturellement du raisonnement probabiliste appliqué à la description de la transmission des charges, et de la propagation des lacunes, dans un milieu désordonné formé d'un très grand nombre de particules discrètes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1- ADDA, Y . et PHILIBERT, J., (1960). La diffusion dans les solides, tome I, Inst. Nat. des Sc. et Tech. Nucléaires, Saclay, Presses Univ. de France, Paris.
- 2- BATURST, R. J. and ROTHENBURG, L., (1989). Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials, Géotechnique, Vol.39, n°4, pp.601-614.
- 3- BENJAMIN, J. R. and CORNELL, C. A., (1970). Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers, Mc Graw Hill, N.Y.
- 4- BOURDEAU , P. L., (1986). Analyse probabiliste des tassements d'un massif de sol granulaire, Thèse de Doctorat ès Sciences Techniques, n°.628, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.
- 5- BOURDEAU, P. L. and HARR, M. E., (1989). Stochastic theory of settlement of loose cohesionless soils, Géotechnique, Vol.39, n°4, pp.641-654.
- 6- COULON, F de., (1984). Théorie et traitement des signaux, Vol. VI, Collection Traité d'Electricité de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Presses Polytechnique Romandes.
- 7- CARNAHAN , B., (1969). Applied numerical methods, John Wiley and Sons, N.Y.
- 8- FAVRE, J. L., (1980). Milieu continu et discontinu. Mesure statistique indirecte des paramètres rhéologiques et approches probabilistes de la sécurité, Thèse de Doctorat ès Sc., Université Paris 6.

- 9- FAVRE, J.L., (1985). Analyse de données géotechniques, Cours de 3^{ème} année d'études de l'Ecole Centrale de Paris.
- 10- FELLER, W., (1957). An introduction to probability theory and its applications, Vol.1, J.Wiley and Sons, N.Y.
- 11- FREEZE, R.A., (1977). Probabilistic one-dimensional consolidation, Journal of the Geotechnical Eng. Division, ASCE., Vol.103, n° 657, pp. 725-742.
- 12- HWANG, D. and WITCZAK, M.W., (1984). Multi-dimensional probabilistic consolidation, Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE., Vol.110, n° 8, pp.1059 - 1078.
- 13- JUMIKIS, A.R., (1964) Fundamentals of advanced study University series in Civil Engineering and Applied Mechanics, N.Y.
- 14- KNUT, D.R., (1989). Probabilistic consolidation analysis with model updating, Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE., Vol.115, n° 2, pp. 199-217.
- 15- LAMBE, T.W. and WHITMAN, R.V., (1969). Soils mechanics, John Wiley and Sons, N.Y.
- 16- LAVENDA, B.H., (1985). Brownian motion, Scientific American, Vol. 252, n°2, pp. 56-67.
- 17- MAGNAN, J.P et BAGHERY, S., (1982). Statistiques et probabilités en mécanique des sols. Etat des connaissances, rapport de recherche LPC, n°109.
- 18- ODA, M. (1974). A mechanical and statistical model of granular material, Soils and Foundations, Vol. 14, n°1, pp. 13-27.

- 19- PAPOULIS, A., (1965). Probability, random variables, and stochastic processes, Mc Graw Hill, N.Y.
- 20- ROWE, P.W., (1962). The stress dilatancy relation for static equilibrium of assembly of particles in contact, Proceedings of the Royal Society, London, series A, Vol.269, pp.500-527.
- 21- ROZANOV, Y., (1975). Processus aléatoires, Editions Mir, Moscou.
- 22- TAYLOR, D.W., (1948). Fundamentals of soils mechanics, J.Wiley and Sons, N.Y.
- 23- TERZAGHI, K., (1943). Theoretical soil mechanics J.Wiley and Sons, NY.
- 24- VENTSEL, H., (1973). Théorie des probabilités, Editions Mir, Moscou.

ANNEXES

A1 RAPPELS SUR LA THEORIE DES PROBABILITES

$$A \cap B = \emptyset$$

A1.1.3. Probabilité conjointe:

Si $A \cup B = D$ avec $A \cap B \neq \emptyset$

Si $A \cup B = D$ avec $A \cap B = \emptyset$

$$\text{Prob}[D] = \text{Prob}[A] + \text{Prob}[B] - \text{Prob}[AB]$$

$\text{Prob}(AB)$ est la probabilité-coïnjointe, elle mesure les chances de réalisation de l'événement A et B.

A1.1.4. Probabilité conditionnelle:

Soient deux événements A et B ne s'excluant pas mutuellement; alors la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est donné par :

$$\text{Prob}[A/B] = \text{Prob}[A.B] / \text{Prob}[B]$$

Ainsi

$$\text{Prob}[A.B] = \text{Prob}[A/B] \cdot \text{Prob}[B] = \text{Prob}[B/A] \cdot \text{Prob}[A]$$

En général pour n événements on aura :

$$\text{Prob}[A_1, A_2, \dots, A_n] =$$

$$\text{Prob}[A_1] \cdot \text{Prob}[A_2/A_1] \dots \text{Prob}[A_n/A_1 \dots A_{n-1}] \quad (A1.1)$$

A1.1.5. Evénements indépendants:

Deux événements sont statiquement indépendants si

$$\text{Prob}\left[\frac{A}{B}\right] = \text{Prob}[A] ; \text{Prob}\left[\frac{B}{A}\right] = \text{Prob}[B]$$

$$\Rightarrow \text{Prob}[A.B] = \text{Prob}[A] \cdot \text{Prob}[B]$$

A1.2. Variables aléatoires (v.a.) :

A1.2.1. Définition :

Une variable aléatoire est une grandeur réelle dont la

valeur dépend du hasard. Cette dépendance est exprimée par une loi de probabilité .

A.1.2.2 Variable aléatoire discrète (V.A.D) :

Une variable aléatoire est dite discrète lorsqu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini, ou dénombrable, de valeurs distinctes. La fonction de répartition (distribution cumulative de probabilité) d'une telle variable aléatoire est donnée par

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} \text{Prob} [x_i]$$

ou $\text{Prob} [x_i] = \text{Prob} [x=x_i]$ est la masse de probabilité de la variable aléatoire x .

A1.2.3. Variable aléatoire continue (V.A.C):

Une variable aléatoire est dite continue lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné et sa fonction de répartition est donné par :

$$F(x) = \text{Prob}[x \leq x_1] = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad \text{où } p(x) \text{ est la densité}$$

$$\text{de probabilité } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

A1.2.4. Variable aléatoire bidimensionnelle :

Soit X et Y deux variables aléatoires. Le couple (X, Y) est une variable aléatoire bidimensionnelle dont la distribution peut être définie par sa fonction de répartition conjointe:

$$F(x, y) = \text{Prob}(X \leq x \text{ et } Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(x, y) dx dy$$

où $P(x,y)$ est la densité de probabilité conjointe.

* Les lois de probabilité marginales permettent de définir la distribution de l'une des variables indépendamment de l'autre:

$$\text{VAC} : P_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) dy ; \quad P_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,y) dx \quad (A1.2)$$

$$\text{VAD} : \text{Prob}(x_i) = \sum_{j=1} \text{Prob}(x_i, y_j) ;$$

$$\text{Prob}(y_j) = \sum_{i=1} \text{Prob}(x_i, y_j)$$

* Loi de probabilité conditionnelles :

$$\text{VAC} : P(x/y) = P(x,y)/P_y(y) ; P(y/x) = P(x,y)/P_x(x)$$

$$\text{VAD} : \text{Prob}(x_i/y_j) = \text{Prob}(x_i, y_j) / \text{Prob}(y_j)$$

$$\text{Prob}(y_j/x_i) = \text{Prob}(x_i, y_j) / \text{Prob}(x_i)$$

A1.2.5. Variables statiquement indépendantes

x et y sont dites indépendantes si :

$$\text{VAC} : P(x,y) = P_x(x) \cdot P_y(y)$$

$$\text{VAD} : \text{Prob}(x_i, y_j) = \text{Prob}(x_i) \cdot \text{Prob}(y_j)$$

pour tout i, j

A1.3. Moyennes statistiques et moments :

A1.3.1. Espérance mathématique d'une fonction d'une variable aléatoire :

Soit une VAD X dont on observe N réalisations. x_1 apparaît N_1 fois, l'état x_2 apparaît N_2 fois ect.. , $N_1 + N_2 + \dots + N_n = N$.

La valeur moyenne expérimentale de X est est l'espérance mathématique de X

$$\bar{X} = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_{nN_n}) / N$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X} = E[X] = \sum_{i=1}^n \text{Prob}(x_i) = \mu_x$$

Pour une variable aléatoire continue

$$\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x D(x) dx$$

Soit $f(X)$ une fonction d'une variable aléatoire X . Par analogie :

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) D(x) dx$$

Pour une VAD :

$$E[f(X)] = \sum_{i=1}^n f(x_i) p(x_i) dx$$

Pour une variable aléatoire bidimensionnelle (X_1, X_2) on aura :

$$\text{.VAC } E[f(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) D(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{.VAD } E[f(x_1, x_2)] = \sum_i \sum_j f(x_i, x_j) \text{prob}(x_i, x_j)$$

A.1.3.2. Moments absolus

On appelle moment absolu du premier ordre et de degré n d'une variable aléatoire, l'espérance mathématique de sa nième puissance:

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n D(x) dx$$

A1.3.3. Moments centrés

$$E[x - E(x)]^n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^n p(x) dx$$

A1.3.4. Variance et écart type

Variance :

$$\text{Var}(x) = \sigma_x^2 = E[(x - E(x))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 p(x) dx$$

$$\cdot \text{VAD} : \sigma_x^2 = \sum_i (x_i - E(x))^2 \text{Prob}(x_i)$$

· Ecart type :

$$\sigma_x = (\text{Var}(x))^{\frac{1}{2}}$$

C'est la mesure de la dispersion des valeurs de x autour de la valeur moyenne $E[x]$.

A1.3.5. Corrélation et co-variance

Dans le cas d'un couple (x, y) de variable aléatoire.

Correlation statistique :

$$R_{xy} = E[xy] = \iint_{-\infty}^{+\infty} xy p(x, y) dx dy \quad (\text{VAC})$$

et aussi

$$E[xy] = \sum_i \sum_j x_i y_j \text{Prob}(x_i, y_j) \quad (\text{VAD})$$

Dans le cas d'une covariance

$$C_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p(x, y) dx dy \quad (\text{VAC})$$

$$C_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) p(x, y) \quad (\text{VAD})$$

$$\rho_{x,y} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \text{ avec } |\rho_{xy}| \leq 1 \text{ coefficient de corrélation}$$

si $\rho_{xy} = 1$, x et y sont parfaitement corrélées et sont liés par une relation linéaire.

A1.4. Principales distribution

A1.4.1. Distribution de Bernoulli

Les résultats de l'expérience sont, soit, un échec ou un succès. La variable aléatoire x définie dans ce cas prend deux valeurs l'une pour succès, l'autre pour échec.

Exemple :

$$\begin{cases} x = 1 \text{ succès} \\ x = 0 \text{ échec} \end{cases} \quad P_x(x) = \begin{cases} P & \text{si } x = 1 \\ 1 - P & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

A1.4.2. Loi binomiale

C'est la loi statique de la variable aléatoire discrète obtenue en comptant le nombre de réalisations d'un événement au cours de n essais indépendants. Si P est la probabilité de réalisation de l'évènement, celle d'obtenir exactement k réalisations sur n essais est :

$$P_Y(k) = C_n^k p^k (1 - p)^{(n-k)} ; C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$E(Y) = np, \quad \sigma^2_y = np(1 - p)$$

A1.4.3. Distribution de Poisson

Cette distribution caractérise de nombreux processus aléatoires ponctuels dont les instants de réalisation sont aléatoires. Le cas d'événements pouvant survenir dans n'importe quelle position dans l'espace sont aussi concernés par cette distribution. Cette distribution est donnée par :

$$P_N(N) = \frac{(\lambda t)^N e^{-\lambda t}}{N!}$$

(pour plus de détails concernant la démonstration de cette distribution, consulter l'une des références citées).

λ est le nombre moyen d'événements par unité de temps. La valeur moyenne est donc $\mu = \lambda t$ et la variance $\sigma^2 = \lambda t$.

N: nombre d'événements réalisés pendant un intervalle t

A1.4.4. Distribution uniforme

Dans certains problèmes, on rencontre des variables aléatoires continues que l'on sait d'avance se trouver dans les limites d'un certain intervalle. De plus, on sait que, dans cet intervalle, toutes les valeurs de la variable étudiée sont équiprobables. Ces variables aléatoires sont réparties suivant une distribution uniforme donnée par la densité de probabilité.

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{pour } a < x < b \\ f(x) = 0 & x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

A1.4.5. Distribution normale ou de Gauss

Une variable aléatoire continue de moyenne μ_x et de variance σ^2_x est une distribution normale (ou gaussienne) si sa densité de probabilité est de type :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}}$$

Cette loi joue un rôle particulièrement important en occupant une place de choix pour les lois de probabilités. Sa particularité fondamentale est d'être une loi limite vers laquelle tendent les autres lois pour des conditions se rencontrant fréquemment dans les applications pratiques.

A1.5. Théorème de la limite centrale

Ce théorème est l'un des plus importants résultats de la théorie des probabilités.

* Sous des conditions très générales, plus le nombre de variables d'une somme est grand, la distribution de la somme des variables aléatoires approchera de la distribution normale. Ce théorème s'applique à la plus part des variables aléatoires de sens physique significatif à condition que :

- 1 - les variables aléatoires mises en jeu soient indépendantes et identiquement distribuées.
- 2 - les variables aléatoires mises en jeu soient indépendantes sans être identiquement distribuées. (Pourvu qu'aucune variable n'influence la somme)
- 3 - les variables aléatoires ne soient pas indépendantes mais distribuées jointivement, tel

que la corrélation entre n'importe quelle variable et les autres approche de zéro.

A1.6. Processus aléatoires

A1.6.1. Définition

Dans une expérience, une variable aléatoire prend une certaine valeur unique, bien qu'inconnue d'avance.

L'étude de telles variables aléatoires présentent les phénomènes aléatoires d'une façon statique, dans les conditions constantes, d'une seule expérience. Cette méthode élémentaire est souvent insuffisante pour la résolution de problèmes pratiques. En effet les grandeurs aléatoires varient souvent d'une manière continue durant l'expérience. De telles grandeurs aléatoires sont appelés processus aléatoires (ou stochastiques). La théorie des processus aléatoires peut d'une manière imagée, être appelée "dynamique des variables aléatoires".

Mathématiquement, un processus aléatoire peut être défini comme une famille de fonctions à deux variables notée $X(\xi, t)$.

t est la variable d'évolution qui est souvent le temps. La variable ξ dénote la nature aléatoire du processus : c'est un élément de l'espace des épreuves (ensemble des résultats possibles d'une expérience statique) et dépend des lois du hasard.

Ainsi, une fonction aléatoire est une fonction pouvant dans l'expérience adopter une forme quelconque inconnue d'avance.

La forme prise par une fonction aléatoire lors d'une expérience est appelée réalisation de cette fonction aléatoire. Si on effectue une série d'expériences sur une fonction aléatoire, on obtient une famille de réalisations de cette fonction

Jusqu'à présent on n'a parlé que des processus aléatoires dépendant d'un seul argument, mais dans la pratique il existe des cas où le processus dépend de quatre arguments (x, y, z, t) .

A1.6.2. Processus aléatoire et variables aléatoires :

A chaque instant t_i , le processus $X(\xi, t)$ se réduit à une simple variable aléatoire $X(t_i)$ dont le comportement statistique est décrit par une répartition $F(x_i, t_i)$ ou par sa densité de probabilité $p(x, t_i)$

A1.6.3. Vecteur aléatoire :

Définition:

Si l'on considère les instants t_1, t_2, \dots, t_k , on peut définir k variables aléatoires X_1, \dots, X_k formant un vecteur aléatoire à k composantes $X = (X_1, \dots, X_k)$ caractérisé par une loi de probabilité conjointe $p(x_1, \dots, x_k)$ à k dimensions. La connaissance de cette loi en fonction des paramètres t_1, \dots, t_k constitue une statistique d'ordre k du processus.

Evidemment, plus le nombre de paramètres t_i augmente plus les caractéristiques de la fonction aléatoire sont

détaillées. Toutefois, ces caractéristiques étant de maniement difficile, l'utilisation en pratique de statistique d'ordre 1 et de celle de l'ordre 2 permet de caractériser suffisamment le comportement du processus et de préciser son évolution dans le temps .

A1.6.4. Ergodisme

Un processus aléatoire est dit ergodique si les valeurs moyennes de l'ensemble sont identifiées aux valeurs moyennes temporelles ie

$$E [X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) da = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2 (t) dt = \overline{x^2}$$

Par conséquent, lorsqu'il paraît justifié d'émettre cette hypothèse d'ergodisme, les propriétés statistiques d'un processus $x(\xi, t)$ peuvent être estimées par l'analyse temporelle d'une seule fonction $x(t)$ (c'est-à-dire une réalisation de processus). Cette procédure d'observation est évidemment beaucoup plus facile à réaliser pratiquement .

A1.6.5. Notion de processus aléatoire stationnaire :

Un processus est dit stationnaire s'il se déroule d'une manière à peu près homogène dans le temps et ressemble à des oscillations aléatoires continues autour d'une certaine valeur moyenne; ni l'amplitude moyenne, ni le caractère de ces oscillations ne subissent de variations importantes dans le temps. Lors de l'étude d'un processus aléatoire stationnaire le choix du moment initial importe peu. Les caractéristiques d'un processus stationnaire doivent être les mêmes quelque soit l'intervalle de temps qu'on choisit pour étudier le processus.

A1.6.6. Modèles particuliers de processus aléatoires :

Trois modèles doivent être spécialement mentionnés:

-Les processus Gaussiens (modèle de processus continu).

Un processus aléatoire est un processus gaussien, si pour tout ensemble d'instants $\{t_i\}$, le vecteur aléatoire $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, avec $x_i = x(t_i)$, possède une densité de probabilité conjointe multidimensionnelle gaussiennes, ie :

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C_x|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} (x - \mu_x)^T C_x^{-1} (x - \mu_x)}$$

où $(x - \mu_x)$ est un vecteur à n dimensions, $(x - \mu_x)^T$ est le même vecteur transposé et C_x est la matrice de co-variance.

μ_x : valeur moyenne (espérance mathématique) pour chaque v.a $x_i = x(t_i)$

$$C_x(t_i, t_j) = E([(x(t_i) - \mu_x(t_i)) (x(t_j) - \mu_x(t_j))])$$

L'importance des processus gaussiens résulte, d'une part, du théorème de la limite centrale qui en fait le modèle asymptotique d'un grand nombre de phénomènes naturels, et d'autre part du fait que ce type de processus est entièrement caractérisé par ces moments du premier (valeur moyenne) et du deuxième ordre (co-variance). Ainsi la connaissance de ces deux moments entraîne automatiquement sa distribution statique.

-Processus de Poisson (modèle de processus ponctuel)

Le processus de Poisson est le plus simple des processus ponctuels (comptage). Ce modèle permet toutefois, l'étude de nombreux phénomènes résultants de la réalisation d'événements aléatoires distribués dans le temps tels que : appels téléphoniques, décès ou accidents, etc. De tels phénomènes peuvent être

représentés par une séquence aléatoire d'événements indépendants qui sont susceptibles de se réaliser à n'importe quel instant avec la même probabilité.

Si le nombre moyen d'événements par unité de temps est λ la probabilité de compter exactement N événements pendant un intervalle de temps t , est donné par :

$$Prob(N, t) = \frac{(\lambda t)^N}{N!} e^{-\lambda t} \quad \text{avec} \quad \sigma^2 = \mu = \lambda t$$

-Les processus de Markov

Dans certaines situations, l'évolution future d'un processus aléatoire ne dépend pas de son passé, mais uniquement de l'état présent. Les processus jouissant de cette propriété sont appelés processus de Markov.

Autrement dit, soit une séquence quelconque d'instants $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ auxquels un processus prend les valeurs arbitraires $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$: ce processus est Markovien si la densité de probabilité conditionnelle au temps t_{n+1} :

$$P(x_{n+1} / x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = P(x_{n+1} / x_n)$$

Lorsque le processus est discret, on parle de chaînes de Markov. Le modèle Markovien s'applique à de nombreux phénomènes naturels : particules en mouvement, évolution génétique, processus d'usure, etc.

Les chaînes de Markov sont caractérisées par les paramètres suivants :

1 - La distribution initiale des états

$$q_i(0) = P[x(0) = i] \quad \text{pour tout } i$$

2 - La probabilité de transition $P_{ij}(n)$. Chacune représente la probabilité pour que le processus soit dans l'état j au temps n sachant qu'il était dans l'état i au pas précédent

$$P_{ij}(n) = P[x(n) = j / x(n-1) = i] \quad \text{pour tout } i, j$$

Formule de Chapman-Kolmogorov:

Le raisonnement sera fait sur les densités de probabilité pour une plus grande facilité d'écriture et la déduction sera faite pour le cas discret.

D'après (A1,1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 / x_2, x_3) f(x_2 / x_3) f(x_3)$$

Si le processus est Markovien

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1 / x_2) f(x_2 / x_3) f(x_3)$$

En intégrant par rapport à dx_2 et d'après (A1.2)

$$f(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 / x_2) f(x_2 / x_3) f(x_3) dx_2 \quad (A1.3)$$

$$f(x_1, x_3) = f(x_1 / x_3) f(x_3)$$

(A1.3) devient :

$$f(x_1 / x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 / x_2) f(x_2 / x_3) dx_2 \quad (A1.4)$$

(A1.4) est l'équation de Chapman-Kolmogorov

Pour les chaines de Markov :

$P[x(n_1) = j / x(n_2) = i]$ est notée $P_{ij}(n_1, n_2)$

$$P_{ij}(n_1, n_3) = \sum_r P_{ir}(n_1, n_2) \cdot P_{rj}(n_2, n_3)$$

ANNEXE

A2 TRAITEMENT NUMERIQUE DES EQUATIONS

TRAITEMENT NUMERIQUE DES EQUATIONS

ECRITURE DES EQUATIONS EN TERMES DE DIFFERENCES FINIES:

Posons:

$$D_1 = 2 \frac{\partial D}{\partial X} - C \quad \text{et} \quad D_2 = \frac{\partial^2 D}{\partial X^2} - \frac{\partial C}{\partial X}$$

dans l'équation (4.35)

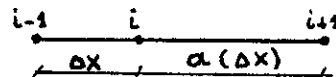
En utilisant le schéma de Cranck-Nicholson, si le noeud considéré n'est pas un noeud d'interzone, cette même équation s'écrit (tous calculs faits) :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{D(i, j+1)}{(\Delta X)^2} - \frac{D_2(i, j+1)}{2(\Delta X)} \right] u_{i-1, j+1} + \left[D_2(i, j+1) - \frac{2D(i, j+1)}{(\Delta X)^2} - \frac{2}{D_z} \right] \\ & \left[\frac{D(i, j+1)}{(\Delta X)^2} + \frac{D_2(i, j+1)}{2(\Delta X)} \right] u_{i+1, j+1} = \left[\frac{D_2(i, j)}{2(\Delta X)} - \frac{D(i, j)}{(\Delta X)^2} \right] u_{i-1, j} + \\ & \left[\frac{2D(i, j)}{(\Delta X)^2} - D_2(i, j) - \frac{2}{\Delta Z} \right] u_{i, j} - \left[\frac{D(i, j)}{(\Delta X)^2} + \frac{D_2(i, j)}{2(\Delta X)} \right] u_{i+1, j} \end{aligned}$$

(A.21)

Pour un noeud d'interzone on aura :

$$u_{i+1} = u_i + a\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{(a\Delta)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + 0[(a\Delta x)^3]$$



$$u_{i-1} = u_i - \Delta X \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + 0[\Delta x^3]$$

avec :

$$a = \frac{\Delta X(\text{Zone } k+1)}{\Delta X(\text{Zone } k)}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1} + (a^2 - 1)U_i - a^2 U_{i-1}}{\Delta x (a + a^2)}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{2(U_{i+1} - (a+1)U_i + a U_{i-1})}{(\Delta x)^2 (a + a^2)}$$

La substitution de ces expressions dans l'équation (A2,1) donne :

$$\begin{aligned} & a \left[\frac{2 D(i, j+1)}{(\Delta x)^2} - \frac{a D_1(i, j+1)}{\Delta x} \right] u_{i-1, j+1} \\ & + (1+a) \left[\frac{a-1}{\Delta x} D_1(i, j+1) - \frac{2a}{\Delta x} + a D_2(i, j+1) - \frac{2 D(i, j+1)}{(\Delta x)^2} \right] u_{i, j+1} + \\ & \left[\frac{D_1(i, j+1)}{\Delta x} + \frac{2 D(i, j+1)}{(\Delta x)^2} \right] u_{i+1, j+1} \\ & = a \left[a \frac{D_1(i, j)}{\Delta x} - \frac{2 D(i, j)}{(\Delta x)^2} \right] u_{i-1, j} \\ & + (1+a) \left[\frac{2 D(i, j)}{(\Delta x)^2} - \frac{a-1}{\Delta x} D_1(i, j) - a D_2(i, j) - \frac{2a}{\Delta x} \right] u_{i, j} \\ & - \left[\frac{D_1(i, j)}{\Delta x} + \frac{2 D(i, j)}{(\Delta x)^2} \right] u_{i+1, j} \end{aligned} \tag{A2.2}$$

avec $1 < i < n$

$1 \leq j \leq M$

n représente le nombre de noeuds selon x et M le nombre de noeuds selon y .

CONDITIONS AUX LIMITES

Cas d'adhérence nulle

Pour les contraintes, cette condition s'exprime en termes de différences centrales par :

* Au noeud 1 :

$$\frac{u_{2,j} - u_{0,j}}{2 (\Delta x)} = 0$$

* Au noeud n :

$$\frac{u_{n+1,j} - u_{n-1,j}}{2 \Delta x} = 0$$

C'est-à-dire: $u_{2,j} = u_{0,j}$
 $u_{n+1,j} = u_{n-1,j}$

Les noeuds 0 et n+1 sont des noeuds fictifs.

Pour les déplacements on aura :

* Au noeud 1 :

$$\frac{D_1(1,j)}{2} u_{1,j} + D(1,j) \frac{u_{2,j} - u_{0,j}}{2 (\Delta x)} = 0$$

* Au noeud n :

$$\frac{D_1(n,j)}{2} u_{n,j} + D(n+1,j) \frac{u_{n+1,j} - u_{n-1,j}}{2 (\Delta x)} = 0$$

C'est-à-dire :

$$u_{0,j} = \frac{D_1(1,j)}{D(1,j)} (\Delta x) u_{1,j} + u_{2,j}$$

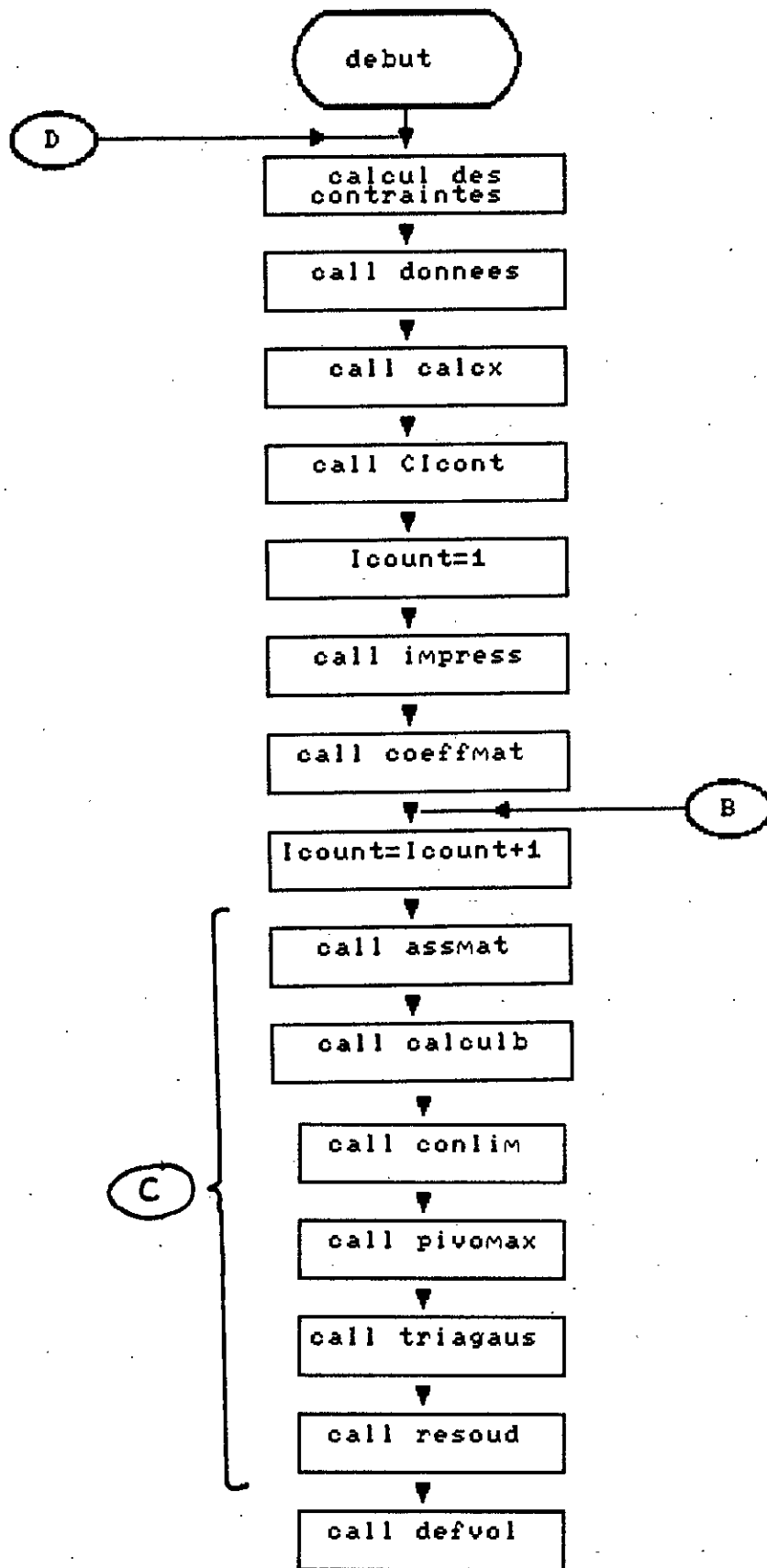
$$u_{n+1,j} = u_{n-1,j} - \frac{D_1(n,j)}{D(n,j)} u_{n,j}$$

- Cas d'adhérence parfaite :

Cette condition s'écrit simplement :

$$u_{2,j} = -u_{0,j}$$

$$u_{n+1,j} = -u_{n-1,j}$$



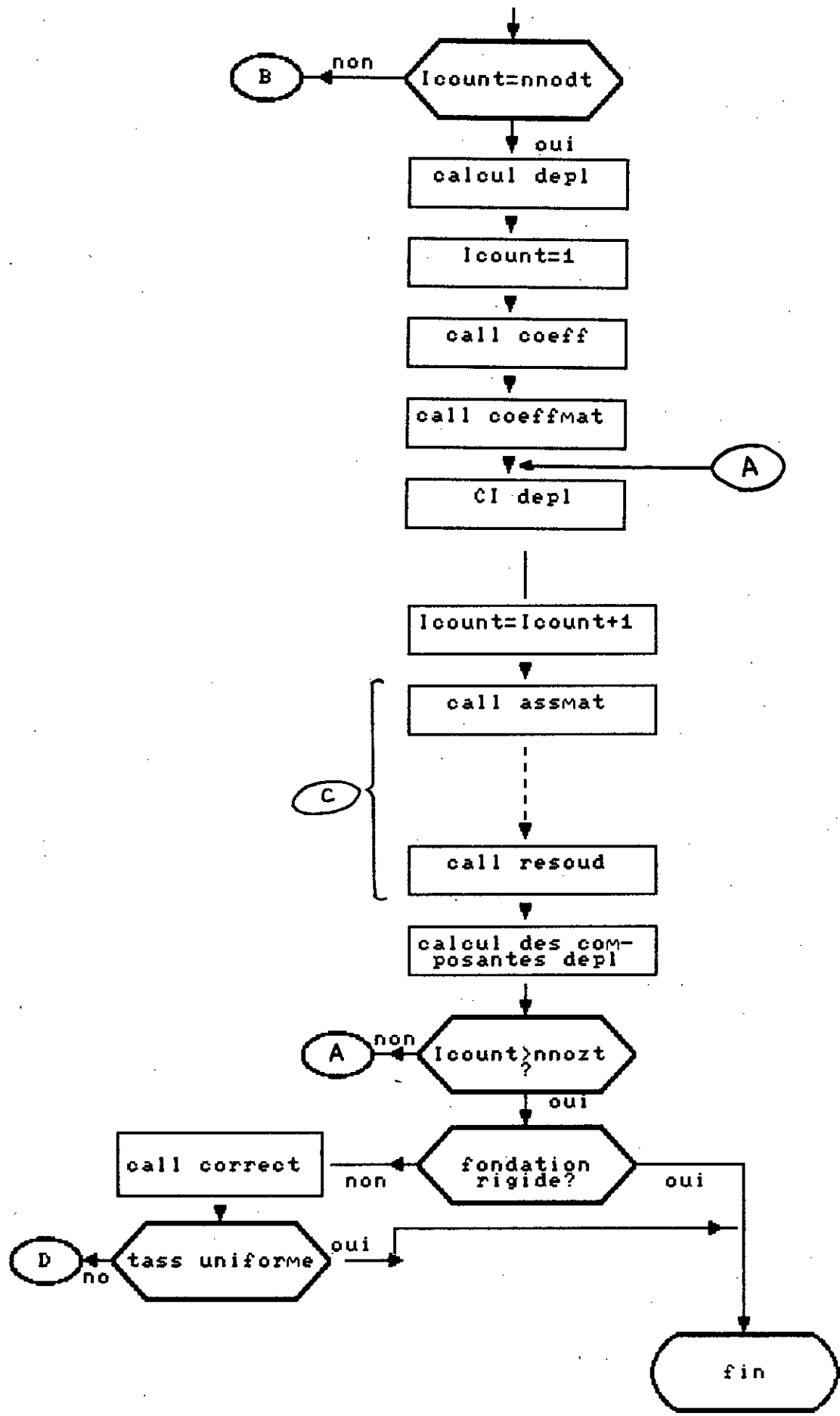


Fig. A2.1: Organigramme

Subroutine données :

Permet la lecture des données du problème à partir du fichier de données et leur réécriture sur le fichier de sortie.

Les données du problème sont :

- géométrie : nombre de couches et leur épaisseurs, nombre et longueurs de zones, nombre de noeuds par couche et par zone.
- caractéristiques physiques : l'angle de frottement interne θ , le module de déformation volumétrique β_v , le poids propre du sol γ_s , le coefficient de diffusivité des contraintes λ , coefficient de diffusion des déplacements D_{η} .
- conditions aux limites : glissement parfait ou adhérence parfaite.
- type de fondation : souple ou rigide.

Les pas de transition ΔX , ΔZ ainsi que le nombre total de noeuds selon x et selon z sont aussi calculés par ce programme.

Subroutine CALCULUS :

Permet de calculer le vecteur distance x à partir de la frontière. Ce vecteur servira lors du calcul des contraintes initiales.

Subroutine CICONT :

Une fois que les zones et le type de fondation est définis, on procède au calcul des contraintes initiales à l'aide de fonctions spécifiques pour chaque type de fondation.

Ce sous-programme calcule aussi les composantes contraintes initiale et les déformations volumétriques initiales.

Subroutine COEFFMAT :

Permet de calculer les coefficients intervenant dans le système d'équations à résoudre soit :

$$\begin{aligned} D &= \lambda Z \\ \text{(A)} \quad D_1 &= 0.0 && \text{pour les contraintes} \\ D_2 &= 0.0 \end{aligned}$$

et

$$\text{(B)} \quad D = \cos \theta D_{\eta} \quad \text{pour les déplacements}$$

$$D_1 = - (2 D \frac{\partial \theta}{\partial x} + 1) \operatorname{tg} \theta$$

$$D_2 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - (1 - \operatorname{tg}^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Dans un premier temps il n'y aura que la partie (A) qui sera exécutée. Une fois le calcul des contraintes terminé, la partie (B) sera exécutée.

Subroutine ASSMAT :

A chaque profondeur (ou altitude), la matrice C sera générée. L'écriture de l'équation de diffusion en chaque noeud fait intervenir au plus trois inconnus, et la matrice C sera tridiagonale. Ce sous-programme fait l'assemblage de cette matrice en ne mémorisant que les termes non nuls de la matrice.

Subroutine CALCUL_B :

Permet le calcul du vecteur B. Ce vecteur résulte des quantités calculées au pas précédent le présent pas.

Subroutine CONLIM :

Après l'assemblage de la matrice C et le calcul du vecteur B, ce sous programme introduit les conditions aux limites avant la résolution du système d'équations. Il permet aussi d'imposer les conditions aux limites sur les composantes contraintes.

Subroutine PIVOMAX :

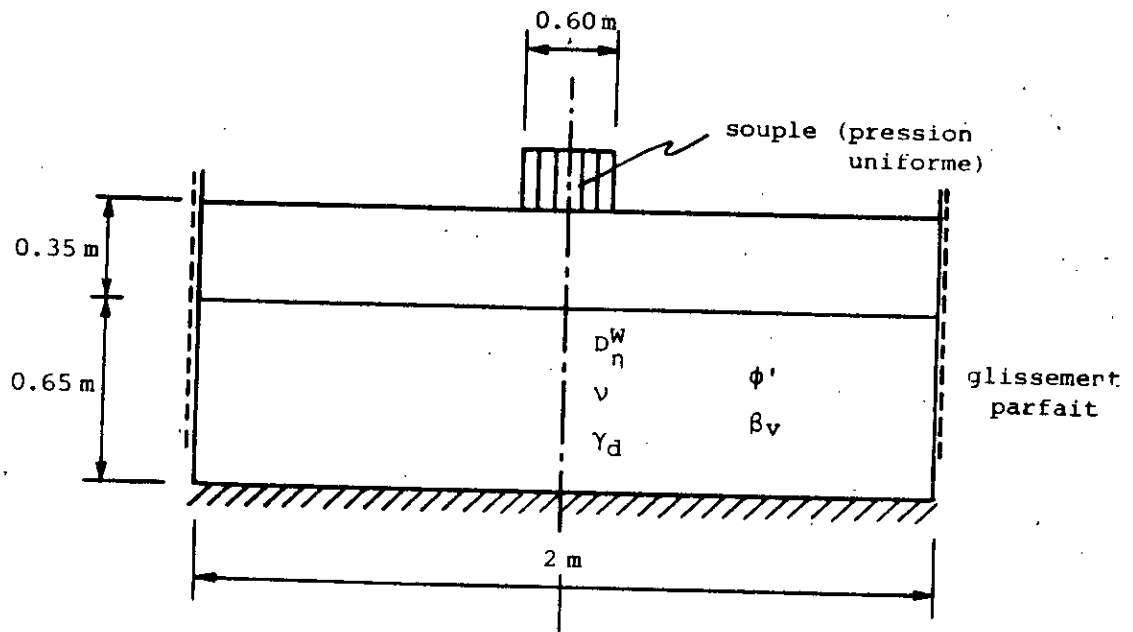
Si les frontières sont à adhérence parfaite, il faut annuler u et v pour les déplacements. Ce sous programme permet de le faire en donnant une très grande valeur au coefficient de la matrice C correspondant à la variable à éliminer.

Subroutine TRIAGAUS :

Elle permet la triangularisation du système d'équations avant la résolution par la méthode de GAUSS.

A3 Exemples pour l'état stationnaire en
déformations planes

Exemple 1 : Massif bicouche sur base rigide



Pression $8.3 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-2}$

Couche supérieure

$$\gamma_d = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$\phi' = 37^\circ$$

$$D_\eta^W = 10 \text{ mm}$$

$$v = 0.36$$

Couche inférieure

$$\gamma_d = 20 \text{ kN}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$\phi' = 30^\circ$$

$$D_\eta^W = 5 \text{ mm}$$

$$v = 0.45$$

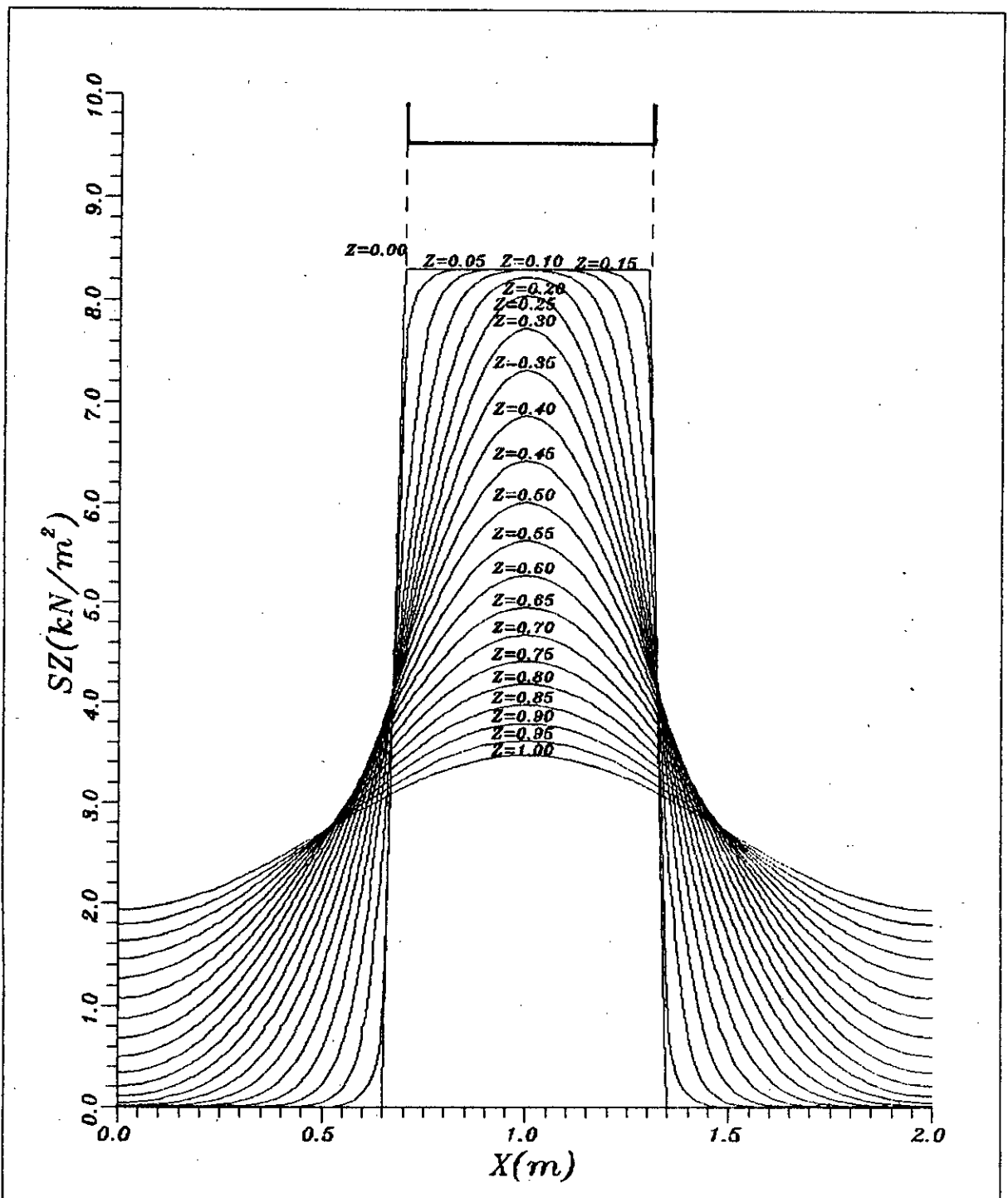


Fig.A3.1 : Diffusion des contraintes verticales -
 Deformations planes - Fondation souple -
 Massif bicouche. Pression = 8.3 kN.m^{-2} .

$NX=41 \quad DX=0.05 \quad PHI1=37. \quad K01=0.36 \quad G1=20. \quad DNW1=0.010$
 $NZ=21 \quad DZ=0.05 \quad PHI2=30. \quad K02=0.45 \quad G2=20. \quad DNW2=0.005$
 $BETAV1=10000. \quad BETAV2=5000.$
 Unites: (m) (degrees) (kN/m^3) (kN/m^2).

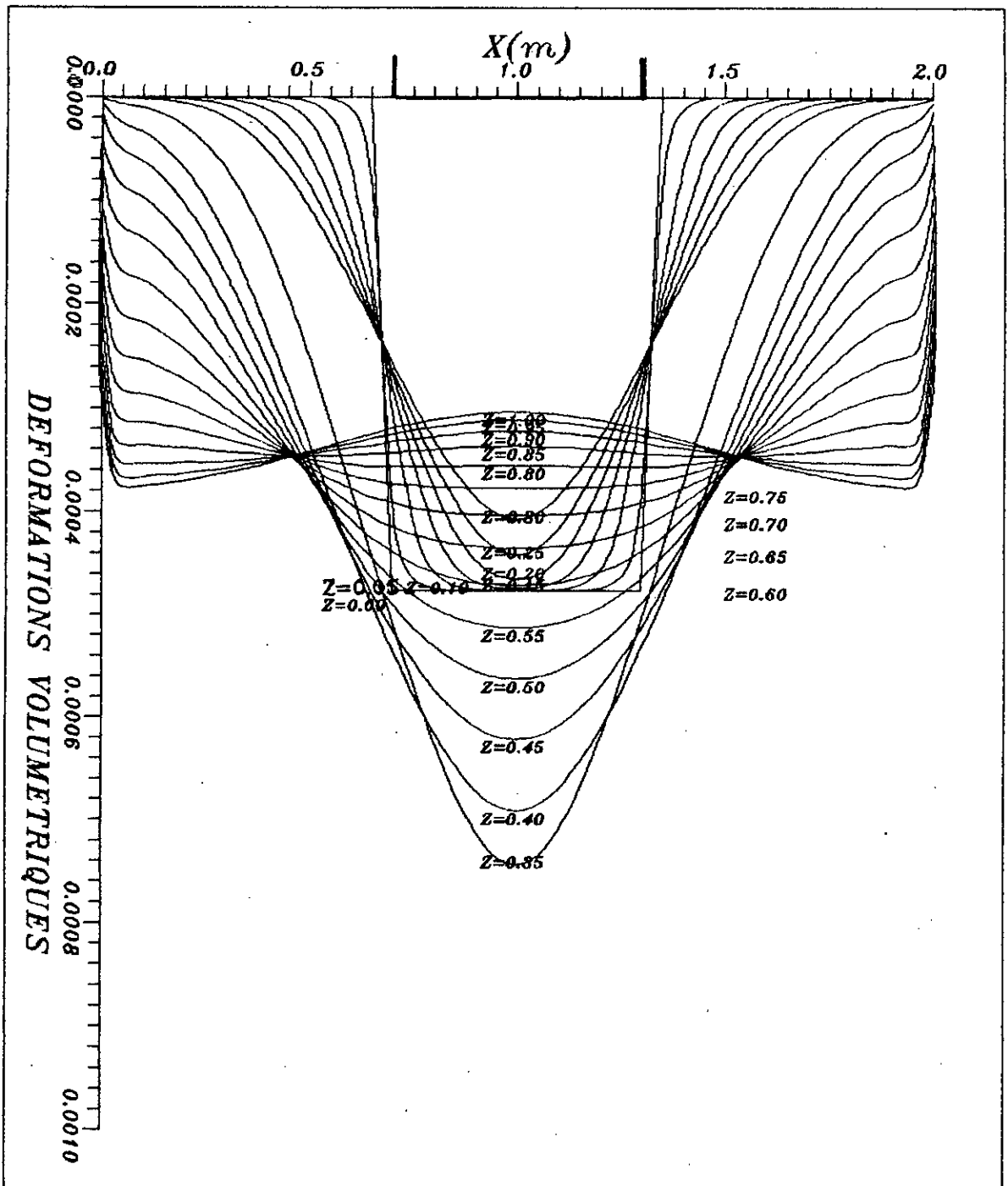


Fig.A3.2 : Deformations volumetriques -
 Deformations planes-Fondation souple, -
 Massif bicouche- Pression=8.3 kN.m².

NX=41 DX=0.05 PHI1=37. K01=0.36 G1=20. DNW1=0.010
 NZ=21 DZ=0.05 PHI2=30. K02=0.45 G2=20. DNW2=0.005
 BETAV1=10000. BETAV2=5000.
 Unites: (m) (degrees) (kN/m³) (kN/m²).

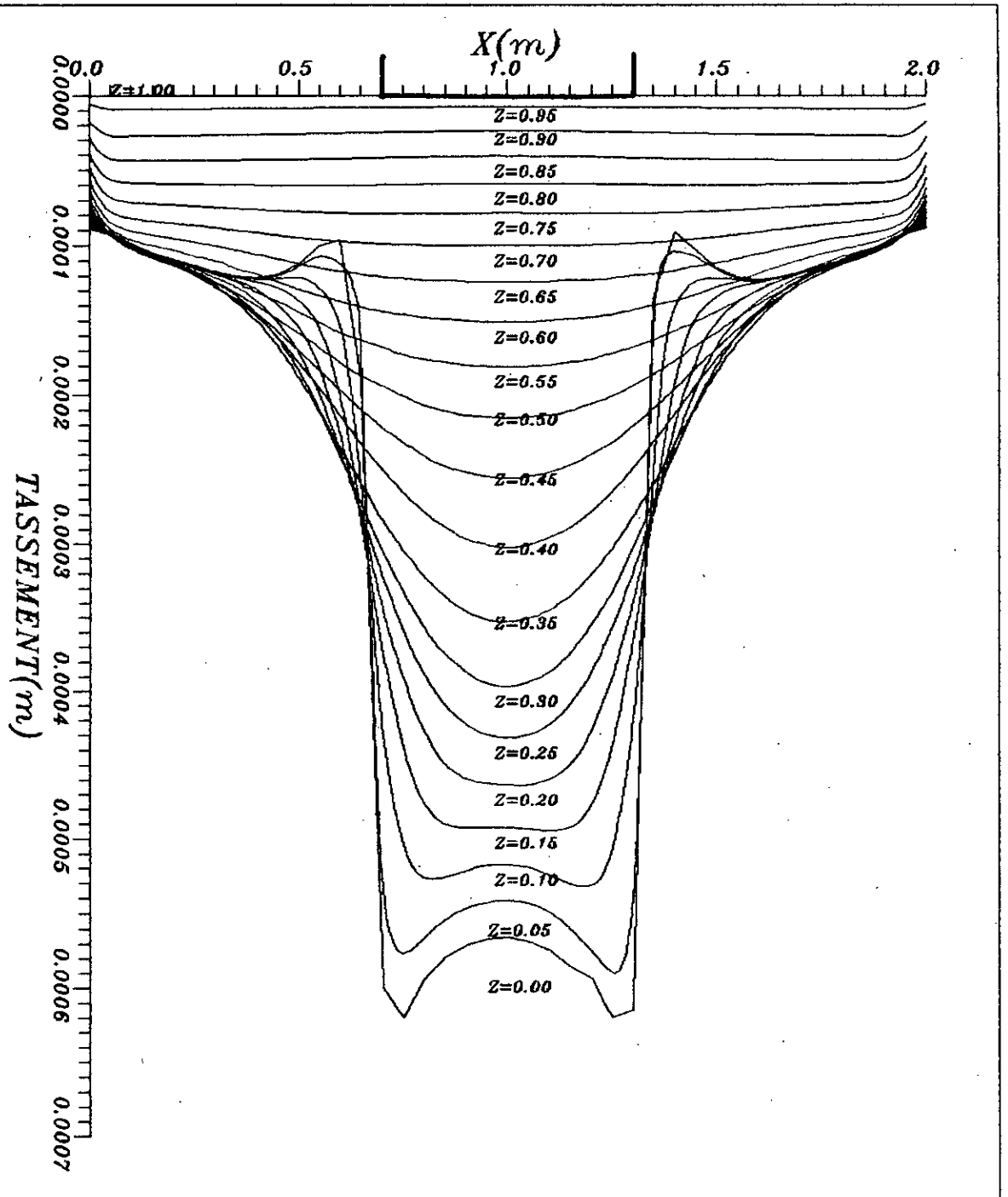
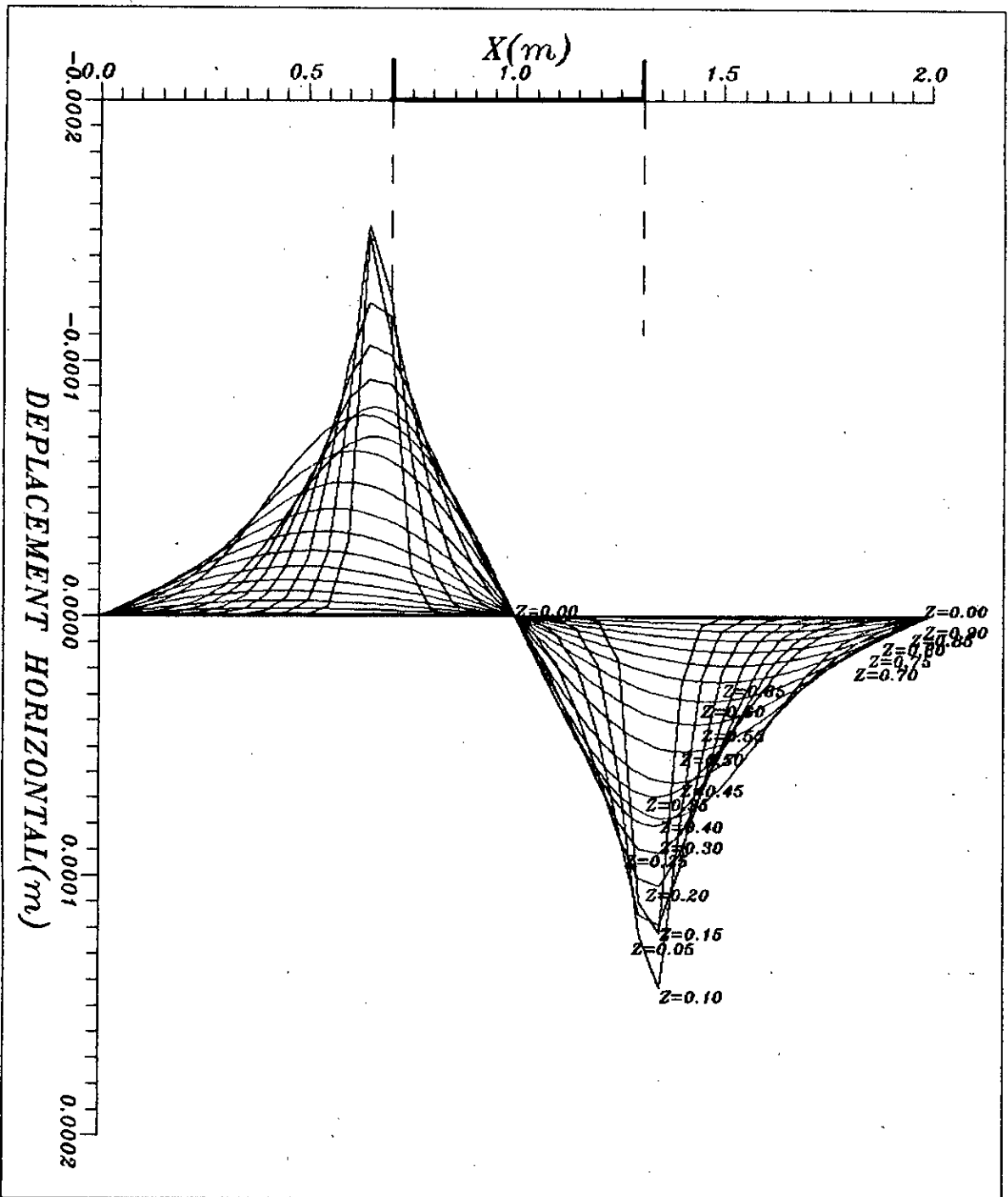


Fig.A33: Diffusion des déplacements verticaux -
 Deformations planes - Fondation souple -
 Massif bicouche - Pression = 8.3 kN.m^2 .

$NX=41 \quad DX=0.05 \quad PHI1=37. \quad K01=0.36 \quad G1=20. \quad DNW1=0.010$
 $NZ=21 \quad DZ=0.05 \quad PHI2=30. \quad K02=0.45 \quad G2=20. \quad DNW2=0.005$
 $BETAV1=10000. \quad BETAV2=5000.$

Unités: (m) (degrees) (kN/m^3) (kN/m^2)

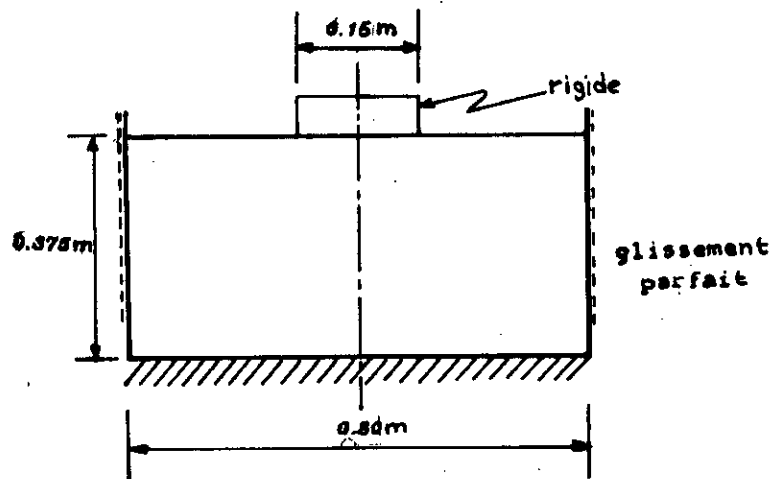


FigA3#Diffusion des déplacements horizontaux -
 Deformations planes - Fondation souple -
 Massif bicouche - Pression = 8.3 kN/m².

NX=41 DX=0.05 PHI1=37. K01=0.36 G1=20. DNW1=0.010
 NZ=21 DZ=0.05 PHI2=30. K02=0.45 G2=20. DNW2=0.005
 BETAV1=10000. BETAV2=5000.

Unites: (m) (degres) (kN/m³) (kN/m²).

Exemple 2 : Massif monocouche sur une base rigide chargée par une fondation rigide (application au cas de l'essai sur limon)



Charge: 1.8 kN.m^{-1}

$\gamma_d : 12.4 \text{ kN.m}^{-3}$

$\phi' : 30^\circ$

$D_v^* : 0.2 \text{ mm}$

$\lambda = K_0 : 0.45$

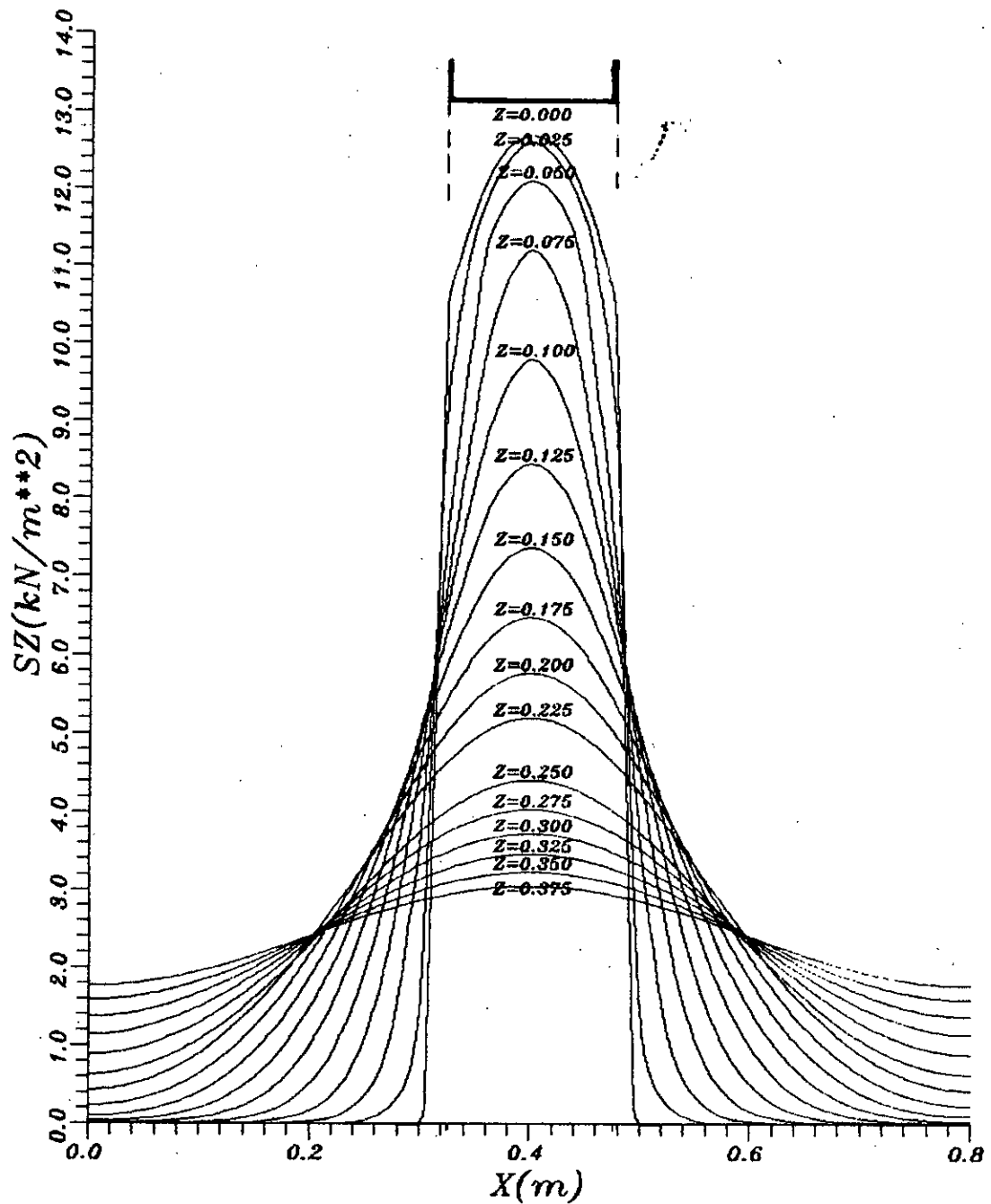


Fig.A3.5 : Diffusion des contraintes verticales -
 Deformations planes - Fondation rigide -
 Massif homogène. Charge = 1.8 kN/m

$NX=33$ $DX=0.025$ $PHI=30$. $K0=0.45$ $G=12.4$ $DNW=0.0002$
 $NZ=16$ $DZ=0.025$
 $BETAV=250$. Unites: (m) (degrees) (kN/m^3) (kN/m^2).

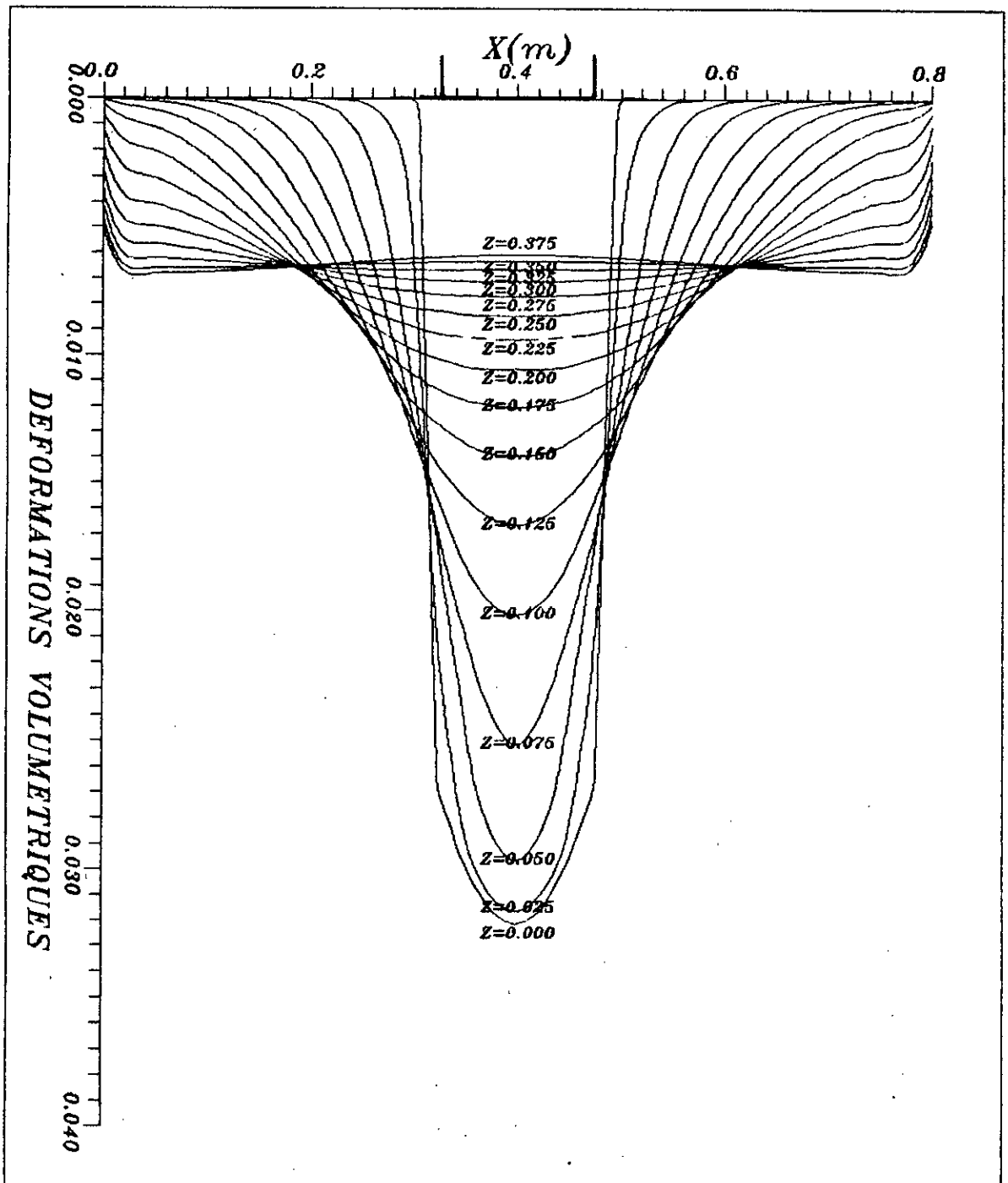
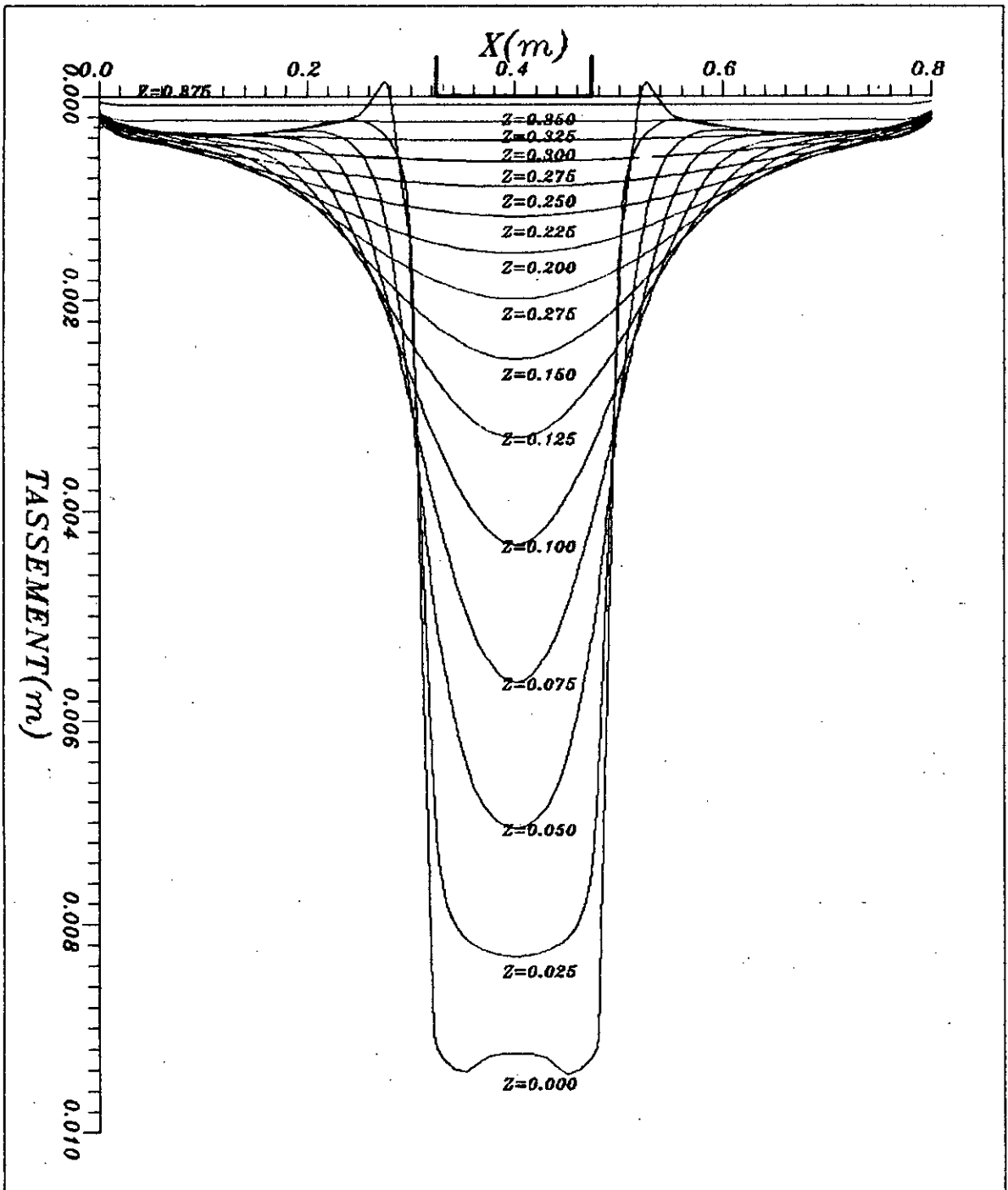


Fig.A.3.6: Deformations volumetriques -
 Deformations planes-Fondation rigide -
 Massif homogène- Charge=1.8 kN/m

NX=33 DX=0.025 PHI=30. KO=0.45 G=12.4 DNW=0.0002
 NZ=16 DZ=0.025
 BETAV=250. Unites: (m) (degrees) (kN/m³) (kN/m²).



FigA37: Diffusion des déplacements verticaux -
 Deformations planes - Fondation rigide -
 Massif homogène - Charge = 1.8 kN/m.

$NX=33$ $DX=0.025$ $PHI=30$ $K0=0.45$ $G=12.4$ $DNW=0.0002$
 $NZ=16$ $DZ=0.025$
 $BETAV=250$. Unites: (m) (degres) (kN/m^3) (kN/m^2).

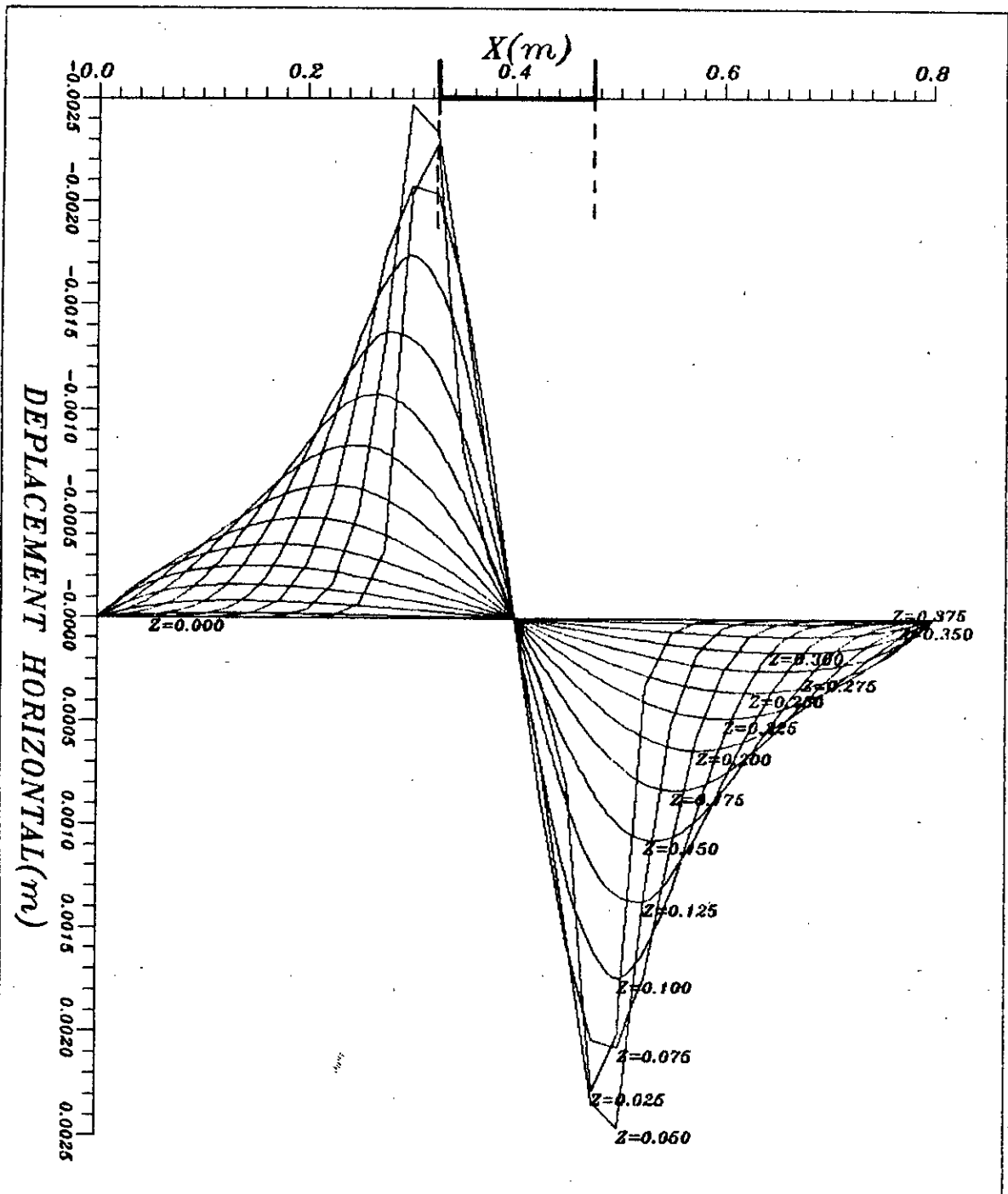
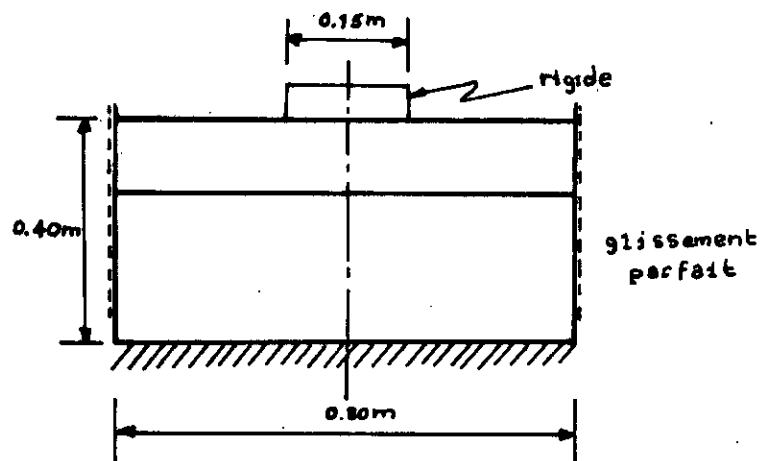


Fig. A38: Diffusion des déplacements horizontaux -
 Deformations planes - Fondation rigide -
 Massif homogène - Charge = 1.8 kN/m

NX=33 DX=0.025 PHI=30. KO=0.45 G=12.4 DNW=0.0002
 NZ=16 DZ=0.025
 BETAV=250. Unites: (m) (degrees) (kN/m³) (kN/m²).

Exemple 3 : Massif bicouche sur une base rigide
 (application au cas de l'essai sur
 sable / limon)



Charge: 1.05 kN.m^{-2}

Couche supérieure:

$$\gamma_d = 15.7 \text{ kN.m}^{-3}$$

$$\phi' = 37.0^\circ$$

$$D_w^w = 0.0003 \text{ m}$$

$$\lambda = K_0 = 0.36$$

Couche inférieure:

$$\gamma_d = 12.4 \text{ kN.m}^{-3}$$

$$\phi' = 30.0^\circ$$

$$D_w^w = 0.02 \text{ mm}$$

$$\lambda = K_0 = 0.45$$

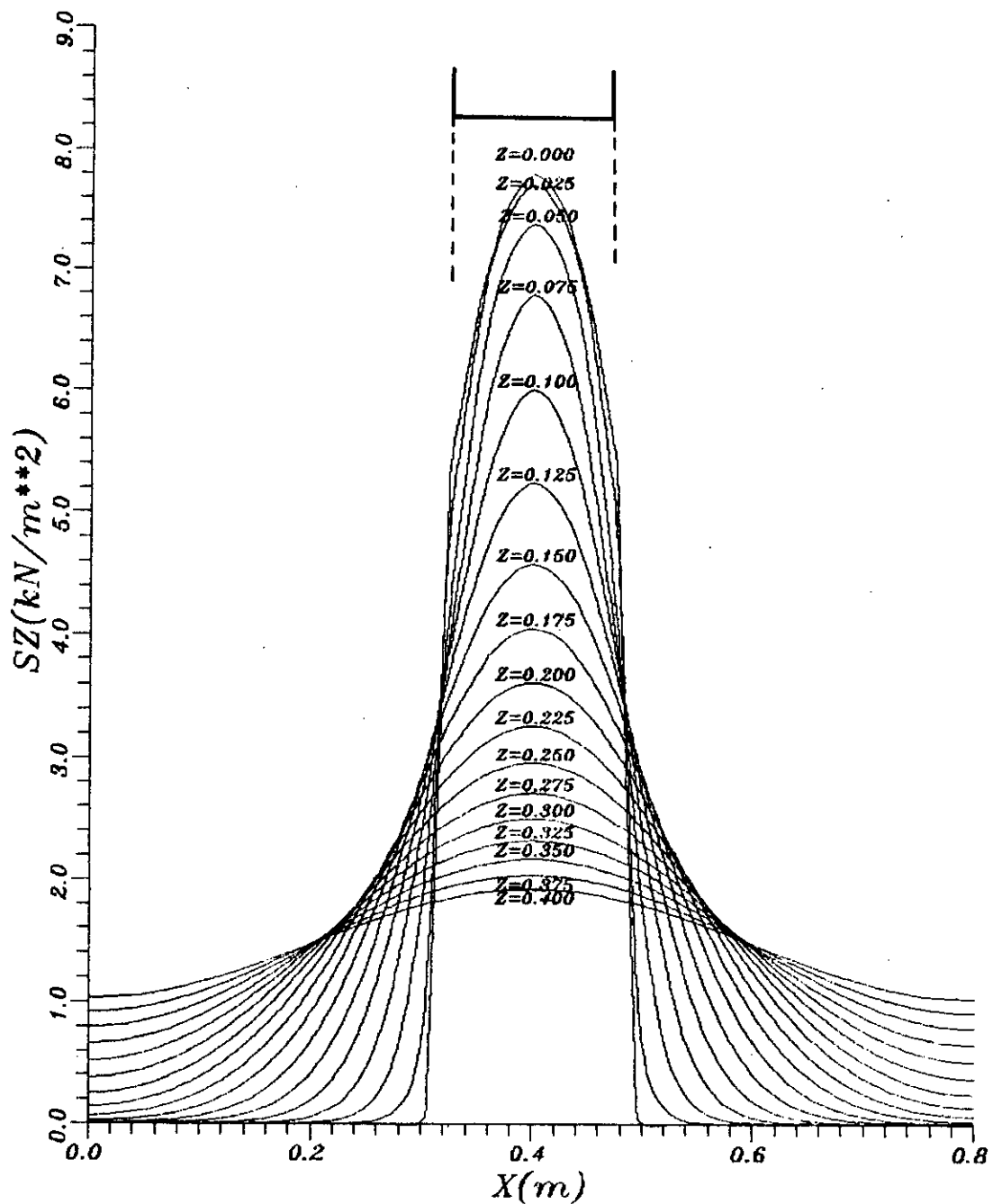


Fig.A3.9 : Diffusion des contraintes verticales -
 Deformations planes - Fondation rigide -
 Massif bicouche - Charge = 1.05 kN/m

$NX=33$ $DX=0.025$ $PHI1=37$. $K01=0.36$ $G1=15.7$ $DNW1=0.00030$
 $NZ=17$ $DZ=0.025$ $PHI2=30$. $K02=0.45$ $G2=12.4$ $DNW2=0.00002$
 $BETAV1=4500$. $BETAV2=300$.

Unités: (m) (degrees) (kN/m^3) (kN/m^2).

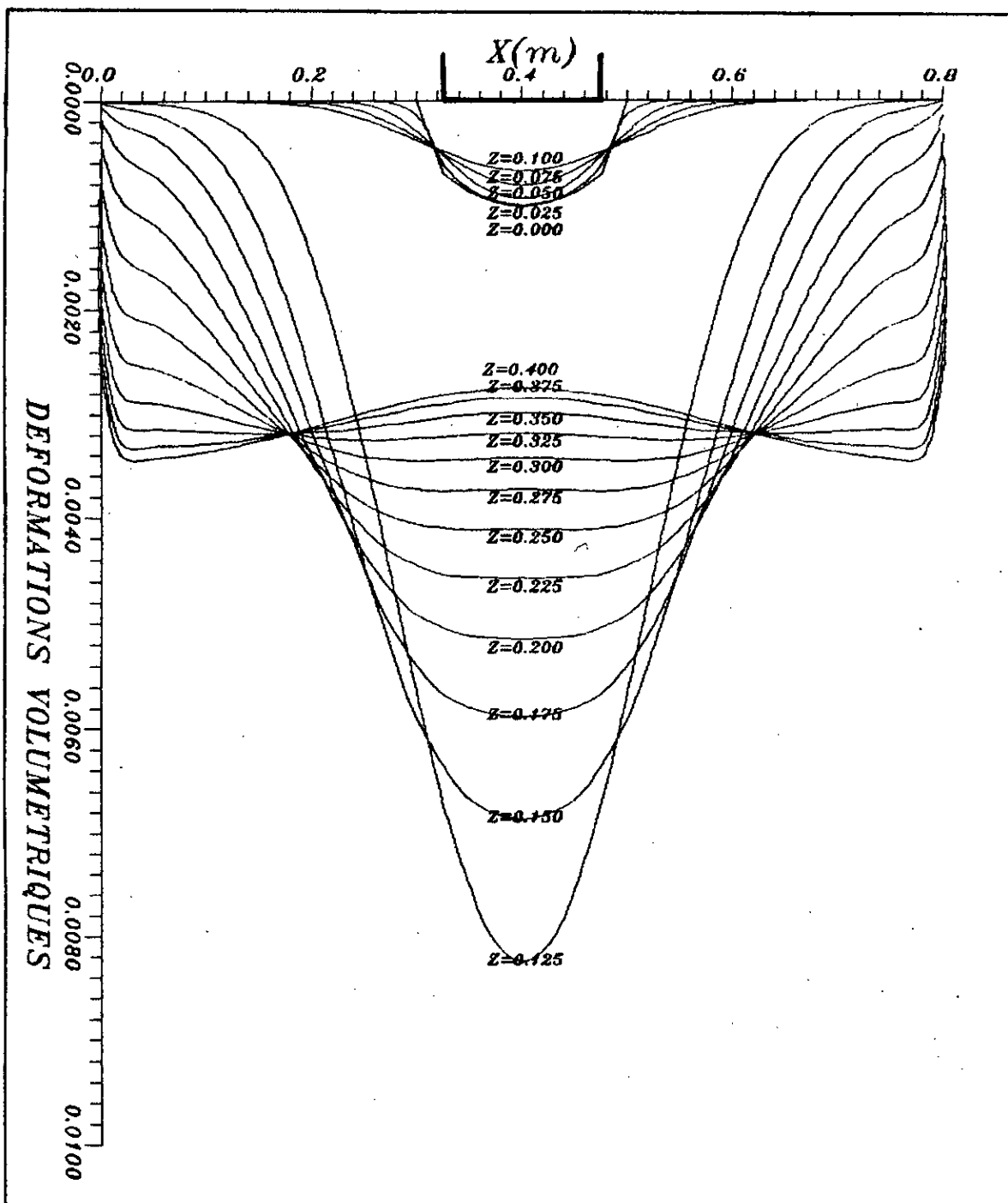
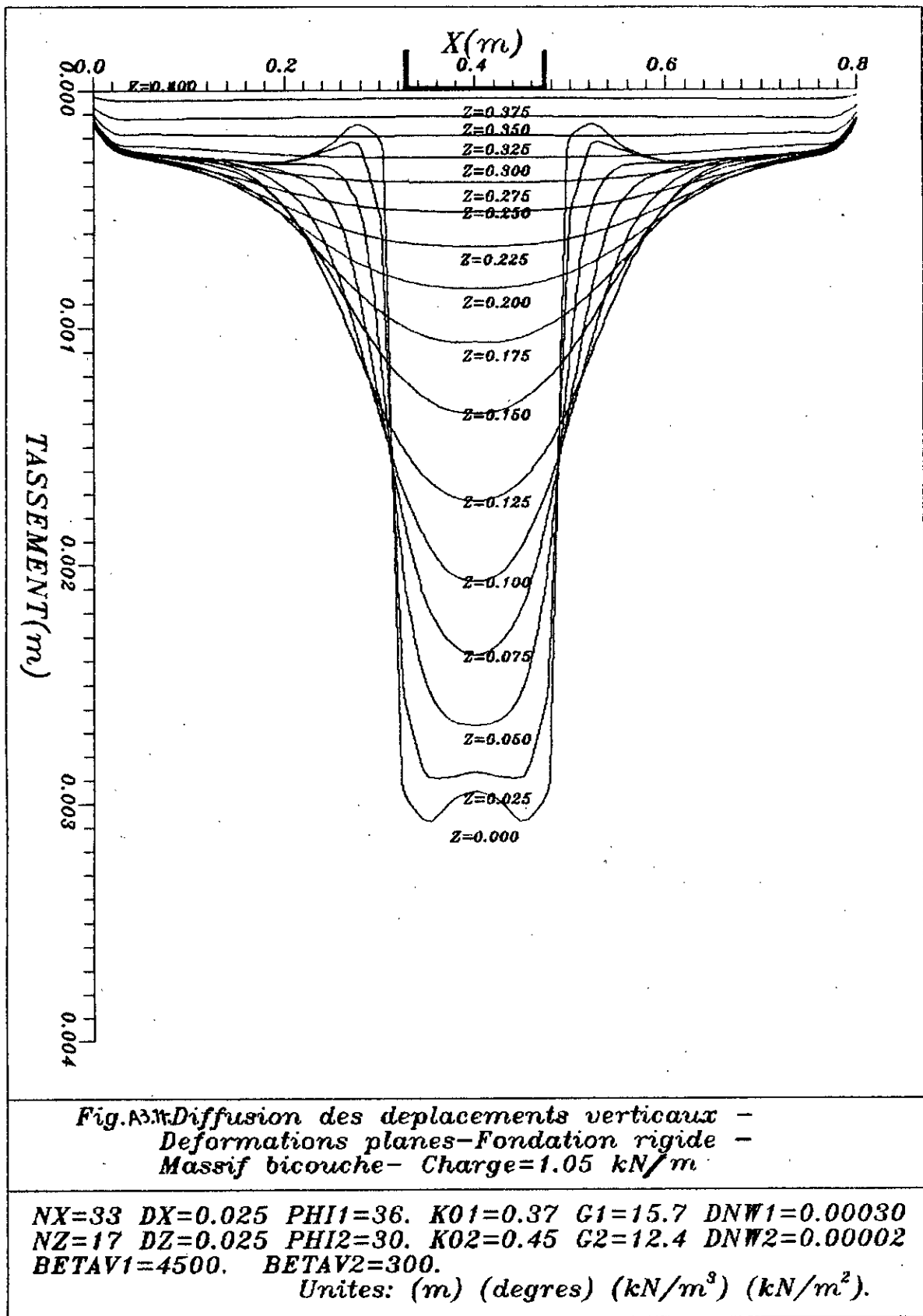


Fig.A3.10 : Deformations volumetriques -
 Deformations planes - Fondation rigide -
 Massif bicouche - Charge = 1.05 kN/m

NX=33 DX=0.025 PHI1=37. K01=0.36 G1=15.7 DNW1=0.00030
 NZ=17 DZ=0.025 PHI2=30. K02=0.45 G2=12.4 DNW2=0.00002
 BETAV1=4500. BETAV2=300.
 Unites: (m) (degres) (kN/m³) (kN/m²).



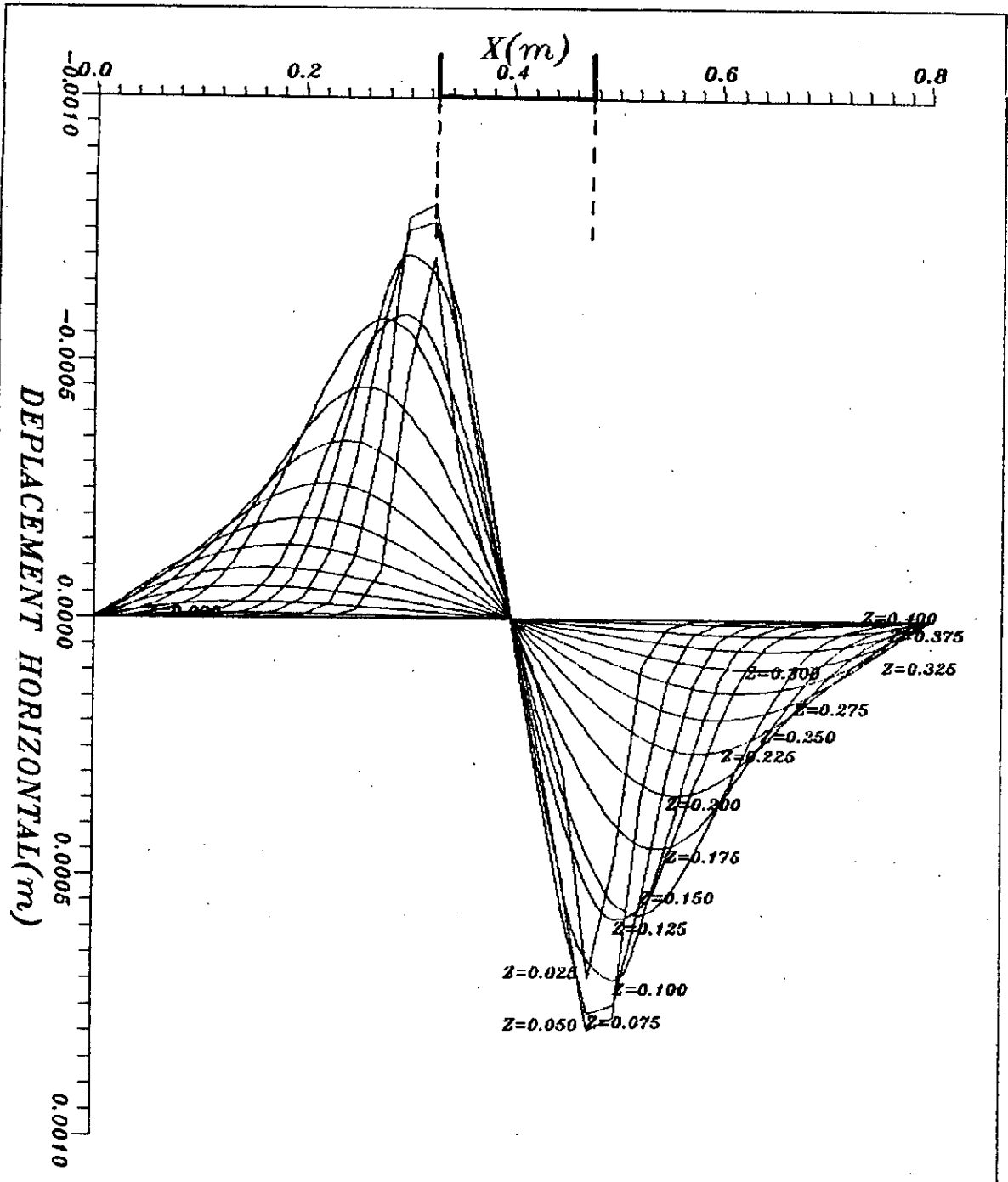


Fig.A32: Diffusion des déplacements horizontaux -
 Deformations planes - Fondation rigide -
 Massif bicouche - Charge = 1.05 kN/m

NX=33 DX=0.025 PHI1=36. K01=0.37 G1=15.7 DNW1=0.00030
 NZ=17 DZ=0.025 PHI2=30. K02=0.45 G2=12.4 DNW2=0.00002
 BETAV1=4500. BETAV2=300.

Unites: (m) (degrees) (kN/m³) (kN/m²).