

---

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des  
Structures  
(LGSDS)



# Mémoire de Magister

Présentée Par :

**M. ZELMAT Yassine**

*Ingénieur d'Etat en Génie Civil de l'ENP*

## Thème

***ANALYSE DES EFFETS DES INCERTITUDES DES  
FREQUENCES PROPRES DE VIBRATION SUR LA  
REPNSES SISMIQUE MAXIMALE DES STRUCTURES  
PAR LA METHODE DE MONTE CARLO***

*Soutenue publiquement le 27 juin 2012 devant le jury composé de :*

**M. B. TILIOUINE**

*Professeur, ENP*

*Président*

**M. M. HAMMOUTENE**

*Professeur, ENP*

*Directeur de thèse*

**M. M. BOUABDALLAH**

*Professeur, ENP*

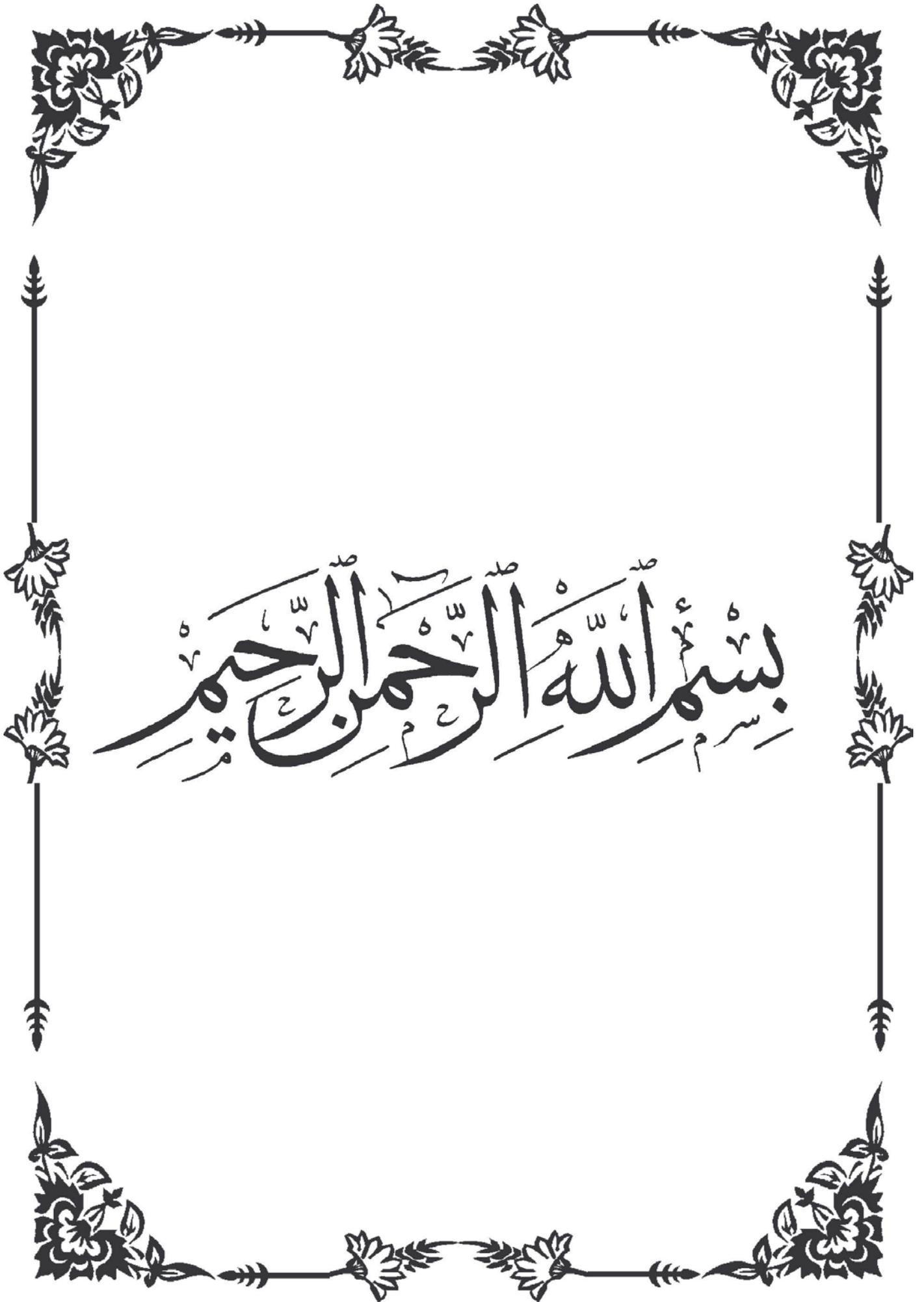
*Examineur*

**M. K. OMRACI**

*Maitre de conférence A ENP*

*Examineur*

**ENP 2012**



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*A ma famille*

*A tous mes amis*

## *Remerciements*

*Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le Clément et le Miséricordieux de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier Monsieur le Professeur M. HAMMOUTENE, directeur de ce mémoire, pour m'avoir accueilli, encadré tout au long de ce travail. J'ai beaucoup apprécié son soutien et sa rigueur scientifique tout au long de la durée de ce travail.*

*Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à Monsieur le Professeur B. TILIOUINE pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury, ainsi que pour les orientations et les conseils qu'il a su me prodiguer durant toute la période de recherche*

*Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur le Professeur M. BOUABDALLAH et à Monsieur le Docteur K. OMRACI pour l'honneur qu'ils ont bien voulu me faire en acceptant d'examiner ce travail.*

*Merci aussi à tous les membres de l'équipe du Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures pour leurs soutiens et leurs aides.*

*Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.*

*Enfin, je remercie chaleureusement ma Mère et mon Père pour leur attention, le soutien et la confiance qu'ils m'ont donné au cours de ces longues années. Enfin, un grand merci à toutes ma grande et petite familles et tous mes amis.*

*Je voudrais ici exprimer ma reconnaissance envers les personnes qui m'ont aidé et soutenu durant la période de la réalisation de ce mémoire. Je tiens à remercier pour cela les collègues et les amis croisés au cours de ces années ; je m'excuse de ne pouvoir les citer tous ici.*

## ملخص:

يتناول هذا العمل تأثير الترددات الخاصة للاهتزازات على الاستجابة الزلزالية العظيمة لنظم ذوا ميزات عشوائية. مع اكتشاف حلول للتقلب المتأصل في تقديراتها. استعملنا المحاكاة من خلال طريقة مونت كارلو لمحاكاة قيم تردد. أظهرت النتائج أن الشكوك من الترددات الطبيعية للاهتزاز لها تأثير كبير على استجابة النظم. في حين أننا استخدمنا تسجيلين الزلزاليين للنظر في مختلفة قيم معامل الاختلاف و وظائف كثافة لاحتمال. وتناقش النتائج التي حصل عليها من حيث التغيرات في توزيع القيم من الإثارة التردد وتعتبر الزلازل. استنتاجات وتبدل لوجهات النظر على ضوء النتائج التي تم الحصول عليها .

**مفاتيح:** التردد ، الارتياح، الاستجابة الزلزالية، الهياكل للمعلومات غير مؤكدة، طريقة مونت كارلو.

## Résumé :

Ce travail traite l'effet des incertitudes des fréquences propres de vibrations sur la réponse sismique maximale des systèmes à caractéristiques aléatoires. Avec la mise en évidence du traitement de la variabilité inhérente à son estimation.

Une simulation par la Méthode de Monte Carlo est utilisée pour simuler les valeurs des fréquences. Les résultats ont montré que les incertitudes des fréquences propres de vibrations à une influence considérable sur la réponse des systèmes. Deux enregistrements sismiques ont été utilisés en considérant différentes valeurs du coefficient de variation et deux fonctions de densité de probabilité. Les résultats obtenus sont discutés en termes de distribution des variations des valeurs de la fréquence et de l'excitation sismique considérée. Des conclusions et des perspectives sont formulées à la lumière des résultats obtenus.

**Mots clés:** fréquence, incertitude, réponse sismique, structures à paramètres incertains, méthode de Monte Carlo.

## Abstract:

This work deals with the effect of uncertainties own vibration frequencies of the maximum seismic response characteristics of systems at random. With the discovery of the treatment of the inherent variability in its estimate.

A simulation by the Monte Carlo method is used to simulate the frequency values. The results showed that the uncertainties of natural frequencies of vibration to a considerable influence on the response of systems. Two seismic records were used by considering different values of the coefficient of variation and two probability density functions. The results are discussed in terms of change distribution of frequency values and the seismic excitation considered. Conclusions and perspectives are drawn in light of the results.

**Key words:** frequency, uncertainty, seismic response, structures with uncertain parameters, Monte Carlo method.

# Table des Matières

Résumé : .....	I
Sommaire : .....	ii
Liste des figures : .....	v
Liste des tableaux : .....	vii
Notations : .....	viii

## Introduction Générale.

1. Introduction : .....	1
-------------------------	---

## Chap I : Incertitude et Probabilité.

1. Notion de hasard : .....	4
2. Étapes de la modélisation des incertitudes : .....	5
3. Incertitudes dans le processus de construction : .....	7
3.1. Incertitude à cause naturelle: .....	7
3.2. Incertitude à cause humaine: .....	7
3.2.1. Facteur de variation physique: .....	7
3.2.2. Facteur de variation statistique: .....	7
3.2.3. Facteur de variation de modèle: .....	8
4. Notions fondamentales de la théorie des probabilités : .....	8
4.1. Fréquence relative : .....	8
4.2. Probabilité : .....	8
4.3. Quantités statistiques : .....	9
4.3.1. Le traitement statistique : .....	9
4.3.2. Tendances centrale : .....	9
4.3.3. Dispersion : .....	10
4.3.4. Le Coefficient de variation : .....	10
5. Variables aléatoires et distributions : .....	10
5.1. Fonction de distribution de probabilité et Fonction de distribution cumulative : .....	11
5.1.1. Fonction de répartition : .....	11
5.1.2. Densité de probabilité : .....	11
5.1.3. Théorème central limite : .....	11
5.2. Principales distributions continues : .....	14
5.2.1. Distribution uniforme : .....	14
5.2.2. Distribution normal : .....	14
5.2.3. Distribution Log normal : .....	15
5.2.4. Distribution Gamma : .....	15
6. Conclusion : .....	16

## Chap II : Les Spectres de Réponse.

1. Introduction :	17
2. Réponse dans le temps :	18
3. Spectre de réponse :	20
4. Spectre de dimensionnement	27

## Chap III : Les Frequences Propres et Vibration des Structures.

1. Introduction :	29
1.1. Définition :	29
1.2. Notions de base	31
1.2.1. Modes propres	31
1.2.2. Réponse à une excitation	31
2. Utilisations de la résonance	32
3. Inconvénients de la résonance	32
3.1. Ponts	32
3.2. Ports	33
4. Fréquence fondamentale	33
5. Délimitation des fréquences naturelles dans les structures :	34
6. Introduction à la dynamique de l'oscillateur simple (domaine élastique)	34
6.1. Période propre d'oscillations : oscillations libres	34
6.1.1. Période d'oscillation:	34
6.1.2. Période propre d'oscillation d'un bâtiment:	35
6.1.3. Paramètres de la période propre d'oscillation	35
7. Comportement sous oscillations forcées	36
7.1. Réponse de l'oscillateur : Oscillations forcées	36
7.1.1. Régime harmonique	36
7.1.2. Régime non harmonique	36
7.1.3. Réponse d'une structure au séisme	37
7.1.4. Paramètres déterminant la période propre d'un oscillateur simple	37
7.1.5. Masses différentes	37
7.1.6. Hauteurs différentes	37
7.1.7. Sections différentes	37
7.1.8. Liaisons au support différentes	38
7.1.9. Matériaux différents	38

## Chap IV : La Methode de Monte Carlo

1. Aperçu historique de la méthode de Monte Carlo	39
2. Présentation de la méthode de Monte Carlo :	40

3.	Avantages et inconvénients de la méthode Monte Carlo : .....	42
4.	Nombre de simulations requises : .....	42
5.	Génération des nombres aléatoires : .....	46
6.	Échantillon d'une variable aléatoire de loi donnée : .....	47
6.1.	Simulation d'une variable de loi uniforme : .....	47
6.2.	Simulation d'une variable de loi quelconque : .....	48
6.2.1.	Loi uniforme sur $[a, b [$ .....	48
7.	Conclusion : .....	49
Chap V : Effets des incertitudes des fréquence propres de vibrations sur les spectres de reponses		
1.	Introduction : .....	50
2.	Effet de l'incertitude des fréquences propres des vibrations sur les spectres de réponse : .....	50
3.	Applications numériques : .....	51
4.	Conclusion .....	59
Chap VI : L'influence des variations des caractéristiques statistiques de la fréquence		
1.	L'influence des variations des caractéristiques statistiques de la fréquence : .....	60
2.	Applications numériques pour La loi Log normal : .....	61
3.	Applications numériques pour La loi Gamma : .....	64
4.	Conclusion : .....	68
Conclusion Générale : .....		69
Références bibliographiques : .....		72

# Liste des Figures

- \* **Figure 1.1** : Etapes d'une étude probabiliste.
- \* **Figure 1.2** : histogramme des valeurs simulées avec une loi normale.
- \* **Figure 1.3** : histogramme des valeurs simulées avec une loi log normale.
- \* **Figure 1.4** : Histogramme des valeurs simulées avec une loi Gamma.
- \* **Figure 2.1** : Composante horizontale de l'accélération dans la direction nord-sud enregistrée à El-Centro.
- \* **Figure 2.2** : Réponses de quatre structures à un degré de liberté soumises aux trente premiers secondes de la composante N-S de l'accélérogrammes d'EL Centro.
- \* **Figure 2.3** : Illustration de calcul du spectre de déplacement pour l'accélération d'El Centro.
- \* **Figure 2.4** : Spectres et pseudo-spectres de déplacement, de vitesse et d'accélération de l'accélérogramme d'El Centro pour  $\xi = 2\%$ .
- \* **Figure 2.5** : Exemple de spectre  $e$  en pseudo accélération en fonction de la période (spectre de réponse de la composante N-S enregistrée à Tolmezzo (séisme du Frioul) le 6 mai 1976)
- \* **Figure 2.6** : Diagramme tripartite représentant les spectres de réponse combinés SD-PSA-PSV de l'accélérogrammes d'El-Centro pour  $\xi = 0, 2, 5, 10$  et  $20\%$ .
- \* **Figure 2.7** : Spectres de dimensionnement moyen d'accélération normalisés à  $0.2g$  (Tiré d'U.S. Momie Energy Commission Report TID-7024, Août 1963).
- \* **Figure 3.1** : vibration d'un pendule.
- \* **Figure 3.2** : Modélisation d'un bâtiment par un oscillateur simple.
- \* **Figure 3.3** : Modélisation du mouvement de la vibration d'un bâtiment sous l'excitation d'une force simple.
- \* **Figure 4.1** : Distribution de probabilité de  $\hat{P}_S$ .
- \* **Figure 4.2** : Convergence de l'estimateur de probabilité de succès en fonction de nombre d'échantillon  $N$  pour une loi log normale.
- \* **Figure 4.3** : Convergence de l'estimateur de probabilité de succès en fonction de nombre d'échantillon  $N$  pour une loi Gamma.
- \* **Figure 4.4** : Histogramme de 1 000 tirages d'une loi uniforme répartis en 25 classes.
- \* **Figure 4.5** : Illustration de la transformation inverse.
- \* **Figure 5.1** : Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération. Pour :a) méthode analytique, b) simulation de MMC. Pour une loi Log normal, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.
- \* **Figure 5.2** : Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération. Pour :a) méthode analytique. b) simulation de MMC. Pour une loi Log normal. Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.
- \* **Figure 5.3** : Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération. Pour :a) méthode analytique, b) simulation de MMC. Pour une loi gamma, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.

- \* **Figure 5.4 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération. Pour : a) méthode analytique. b) simulation de MMC. Pour une loi gamma. Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.
- \* **Figure 6.1 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération pour différentes Cov de la fréquence : a) Cov =5%, b) Cov =10%, c) Cov =15%. d) Cov =20% pour une loi log normal, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940
- \* **Figure 6.2 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération pour différentes Cov de la fréquence : a) Cov =5%, b) Cov =10%, c) Cov =15%. d) Cov =20% pour une loi log normal, Le spectre correspond au séisme Parkfield du 27 juin 1966.
- \* **Figure 6.3 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération pour différentes COV de la fréquence : a) COV =5%, b) COV =10%, c) COV =15%. d) COV =20 % pour une loi gamma, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.
- \* **Figure 6.4 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération pour différentes COV de la fréquence : a) COV =5%, b) COV =10%, c) COV =15%. d) COV =20% pour une loi gamma, Le spectre correspond au séisme Parkfield du 27 juin 1966.

# Liste des tableaux

- \* **Tableau 5.1:** valeurs du coefficient de variation de PSA. Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940
- \* **Tableau 5.2:** valeurs du coefficient de variation de PSA. Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966
- \* **Tableau 6.3:** valeurs du coefficient de variation de PSA. Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.
- \* **Tableau 6.4:** valeurs du coefficient de variation de PSA. Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.
- \* **Tableau 6.5 :** valeurs du coefficient de variation de PSA. Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.
- \* **Tableau 6.6 :** valeurs du coefficient de variation de PSA. Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

## NOTATIONS

$\ddot{a}(t)$	= Accélération du sol
$c$	= Amortissement
$\{l\}$	= Vecteur unité
$k$	= Raideur
$m$	= Masse
$m_x$	= Moyenne ou valeur attendu
$N$	= Nombre total
$P$	= Facteur de pic de la réponse
$PSV$	= Pseudo spectre de vitesse
$r$	= $\omega_k / \omega_j$
$S(\omega)$	= Fonction de densité spectrale de puissance
$S_D(\omega)$	= Fonction de densité spectrale de la réponse en déplacement
$SD(\omega, \xi)$	= Spectre de réponse en déplacement
$SV(\omega, \xi)$	= Spectre de réponse en vitesse
$t$	= Le temps
$T$	= Durée totale d'un processus
$TD$	= Durée totale d'un enregistrement accélérométriques
$T_s$	= Durée stationnaire d'un processus
$U(t)$	= Déplacement modal d'un oscillateur.
$U_i(t)$	= Déplacement modal du $i^{\text{ème}}$ étage
$\nu$	= rapport du nombre de pics négatifs par rapport au nombre total de pics
$[V]$	= Matrice des variances
$x(t)$	= Fonction aléatoire
$X(t)$	= Processus aléatoire
$Y(t)$	= Déplacement relatif d'un oscillateur
$y_i(t)$	= Déplacement relatif du $i^{\text{ème}}$ étage
$\alpha_j$	= Facteur de participation modale du $j^{\text{ème}}$ mode
$\varepsilon$	= Erreur relative
$\{\phi\}_j$	= Vecteur propre du $j^{\text{ème}}$ mode
$n_d$	= Le nombre d'occurrence de l'événement d
$\sigma_x^2, \sigma_x$	= Variance et écart type
$\rho_{jk}$	= Coefficient de corrélation modale entre les réponses du $j^{\text{ème}}$ et du $k^{\text{ème}}$ mode
$\omega$	= Fréquence naturelle
$\xi$	Pourcentage d'amortissement critique d'un oscillateur

## INTRODUCTION GENERALE

### **1. Introduction :**

Les incertitudes sur le chargement et les caractéristiques structurales peuvent affecter la réponse et la fiabilité des structures. Par conséquent, il est souvent souhaitable de considérer les effets de ces incertitudes dans l'analyse et la conception. À titre d'exemple, pour certaines structures, telles que les parkings de véhicules par exemple, la masse relative à chaque niveau est fonction du temps (jours, saisons...) et il est pratiquement impossible de prédire sa valeur exacte lors d'un prochain séisme. En outre, si la structure considérée est fondée sur un sol meuble et que le phénomène d'interaction sol-structure ne peut être ignoré, les caractéristiques de la structure dépendront des caractéristiques dynamiques du sol de fondation qui peuvent être différentes avant, pendant et après le tremblement de terre.

Ceci exige le développement d'outils mathématiques appropriés pour incorporer de telles incertitudes dans la modélisation des structures, de même que dans l'élaboration de méthodes pour analyser ces modèles mathématiques. Les processus aléatoires, par exemple, sont souvent utilisés en tant qu'outils mathématiques pour modéliser les variations temporelles des chargements incertains, tels que ceux dus aux tremblements de terre ou aux vents. La théorie de vibration aléatoire peut être utilisée pour obtenir une description probabiliste de la réponse, telles que la moyenne et la covariance pour des processus Gaussiens, de même que les statistiques d'ordres supérieurs dans le cas des processus non Gaussiens. Ces descriptions probabilistes peuvent être combinées avec les théories de réponses extrêmes approximatives pour obtenir diverses estimations de fiabilité pour la structure.

Le traitement des incertitudes contenues dans la modélisation des caractéristiques structurales, a suscité un intérêt croissant. Ces incertitudes, qui résultent des nombreuses hypothèses proposées lors de modélisation de la géométrie, des conditions aux limites et du comportement des matériaux constitutifs peuvent avoir un effet significatif sur la fiabilité de nombreuses structures [H. Jensen et al 1992, T. Igusa et al 1988, C. G. Wall et al 1991, Jr. B. F. Spencer et al 1988]. Par conséquent, quand on considère un modèle structural, comme un modèle d'éléments finis, on doit prendre en considération les incertitudes contenues [L. S. Katfygiotis et al 1995 ; H. Jensen et al 1991], dans la rigidité de chaque élément ou sous-structure, dans la masse, dans les coefficients d'amortissement modaux, dans les constantes de ressort qui modélisent les conditions aux limites, ou dans la rigidité équivalente du sol lors de la prise en considération de l'interaction de sol- structure [Lambros, 1996].

L'objectif de la présente étude est l'estimation de l'effet des incertitudes liées à la fréquence propre de vibrations sur la réponse dynamique des structures. Les incertitudes sont traitées en considérant différentes distributions de probabilité dont le choix est fait en tenant compte des considérations physiques des problèmes à étudier.

La technique de Monte Carlo est utilisée pour simuler un grand nombre de valeurs de la fréquence propre de vibration des structures étudiées et les réponses dynamiques de celles-ci sont ensuite analysées de sorte à évaluer les fluctuations de leurs caractéristiques. Ces analyses sont faites en termes de spectres de réponse linéaire.

Dans un premier temps, on estime le nombre de simulations requises pour un intervalle de confiance déterminé. Les fluctuations de la probabilité de défaillance associée à la fonction d'état limite obtenue sont analysées en fonction du nombre d'échantillons, en terme de moyenne et d'écart type afin de déterminer le nombre de simulations requises associé à la diminution des amplitudes des fluctuations des estimations, c'est-à-dire à une stabilité des fonctions représentatives des estimations moyennes et des écarts types.

Dans un deuxième temps, les résultats obtenus ont été utilisées pour étudier l'effet des fonctions de distribution des fréquences sur les réponses structural, utilisant des bases empiriques, les valeurs de fluctuations des fréquences déduits de l'expérience [A. K. Chopra 1980] et déterminer en conséquence les caractéristiques probabilistes des fonctions de densité de probabilité de la variable aléatoire "fréquence". La forme fonctionnelle des densités de probabilité se fait sur la base des meilleurs ajustements des variations des valeurs empiriques de la fréquence.

Pour chaque loi de distribution de la fréquence propre de vibrations, on a ensuite étudié l'effet de la variabilité des valeurs de la fréquence elle-même sur la réponse des structures et ce pour deux enregistrements sismiques de caractéristique différente utilisés pour représenter le chargement dynamique.

Comme il a été souligné dans la section précédente, l'objectif principal de ce mémoire est d'effectuer une investigation de la réponse stochastique des structures dont les valeurs de fréquence propre sont incertaines sous excitations sismiques aléatoires.

Pour mener à bon terme cet objectif, le travail est divisé en plusieurs chapitres qui forment l'ensemble du travail effectué.

Le premier chapitre porte sur la description des incertitudes. Les notions d'erreurs et d'incertitudes sont discutées. Les divers types et source d'incertitudes sont également présentés.

Le deuxième chapitre présente la théorie des probabilités comme moyen mathématique efficace pour incorporer les incertitudes dans l'analyse et la conception des structures. Des moyens graphiques et numériques très utiles pour une meilleure compréhension de l'implémentation mathématique des concepts probabilistes sont présentés. La notion de variable aléatoire est discutée.

Le troisième chapitre est réservé à la description des modes propres de vibration comme caractéristique importante de la structure. Le traitement de l'incertitude des fréquences propre de vibrations est aussi présenté dans ce chapitre, la gamme des valeurs de variation et les lois de probabilités qui ont fourni le meilleur ajustement aux variations de la fréquence sont discutées.

On a consacré le quatrième chapitre à la description de la méthode de simulation de Monte Carlo. La génération des nombres aléatoires et la détermination du nombre de simulations requises sont présentées aussi dans ce chapitre.

Le cinquième chapitre traite des effets d'incertitudes inhérentes à l'estimation des fréquences propres de vibrations sur la réponse des structures et ce pour chacune des lois de distribution sélectionnées et pour chacun des deux accélérogrammes considérées dans cette étude.

Le dernier chapitre est dédié à l'étude de l'influence des variations des caractéristiques statistiques de fréquence sur la réponse structurale. Des résultats et des conclusions importantes sont déduites et récapitulés dans la conclusion générale. De même, des recommandations ont été faites à l'attention des ingénieurs des bureaux d'études et des perspectives de développement futures ont ainsi été présentées.

---

## INCERTITUDE ET PROBABILITE

### 1. Notion de hasard :

Le hasard et la chance jouent un rôle central dans la vie de tous les jours et dans une large palette de domaines. La production agricole est une fonction des conditions météorologiques ; le statut économique d'un individu peut être le résultat de son habileté dans le commerce et de son habileté à tisser des bons réseaux sociaux ainsi que de facteurs extérieurs que l'on qualifie généralement de conjoncture économique. Le hasard, comme on l'entend aujourd'hui, a été pendant longtemps une idée abstraite et, pendant des siècles, dans le sens commun largement liée à une explication métaphysique, le destin, ou à une volonté divine.

Historiquement, la première fois que l'humanité a eu à faire avec des nombres aléatoires fut probablement pour des activités divinatoires. Des dés rituels étaient en usage déjà à l'âge du bronze. Le plus ancien dé de forme cubique avec des faces numérotées de 1 à 6 remonte à 2000 ans avant Jésus-Christ et a été trouvé en Égypte.

C'est seulement au cours du XX<sup>e</sup> siècle, avec le développement parallèle des sciences statistiques et de la technologie, que les nombres aléatoires ont trouvé une large application. La célèbre phrase d'Einstein «*Dieu ne joue pas aux dés*» est contemporaine à l'élaboration du principe d'incertitude de Heisenberg. Selon l'idée classique de causalité, pour prédire le futur avec un certain degré de précision, il suffisait de connaître le présent avec suffisamment de précision. Dans des instituts de prévision météorologique les quantités d'intérêt sont estimées à partir d'un grand nombre d'états initiaux, et l'évolution du phénomène est artificiellement simulée avec des modèles numériques utilisant des nombres aléatoires. Et bien que les capacités de calcul des ordinateurs des centres de prévision météorologique soient très élevées, les prévisions ne vont, hélas, jamais au-delà de quelques jours.

De telles techniques constituent ce que l'on appelle généralement la méthode de Monte Carlo, et aujourd'hui une vaste littérature sur les applications les plus variées est disponible.

À la base de toute simulation, il y a l'utilisation de nombres aléatoires en grande quantité. De plus, pour qu'une simulation soit fiable il faut que les nombres aléatoires utilisés aient toutes les propriétés que l'on attend. Ainsi, il ne suffit pas de disposer d'une liste finie de 100 ou même d'un million de nombres aléatoires et de l'utiliser en boucle pour des simulations. En bref, la production de nombres aléatoires en grandes quantités n'est pas une simple affaire.

L'histoire de la génération des nombres aléatoires commence avec des machines plus ou moins complexes dont le but était de piocher des boules numérotées d'une urne. Encore aujourd'hui, en dépit d'algorithmes performants et de qualité élevée pour la génération de nombres aléatoires en grandes quantités, de telles machines sont utilisées pour les loteries à numéros et les ordinateurs ne les remplaceront-ils probablement jamais. Il y a une raison philosophique à cela, celle qui est au fond soulevée par Neumann : un algorithme implémenté produira une suite de nombres dont la nature est déterministe, et donc d'une certaine manière prévisible, et la suite aura seulement l'apparence d'être aléatoire [Dodge, Y. 2008].

## 2. Étapes de la modélisation des incertitudes :

Les étapes essentielles pour mesurer les incertitudes sont discutées ailleurs (Haldar et Mahadcvan, 2000) pour des situations où les sources d'incertitude sont non cognitives et l'information nécessaire est disponible. Supposez que l'incertitude dans les précipitations annuelles ou la vitesse de vent maximum annuelle pour une ville particulière a besoin d'être mesurée. Évidemment, l'information peut être produite en rassemblant toutes les données enregistrées disponibles sur la vitesse de précipitations ou de vent. Il a pu y avoir des bases des données pendant les 50, 75, ou 100 dernières années, donnant 50, 75, ou 100 échantillons. L'information statistique nécessaire peut être extraite à partir de ces échantillons après les étapes représentées sur la figure 1.1.

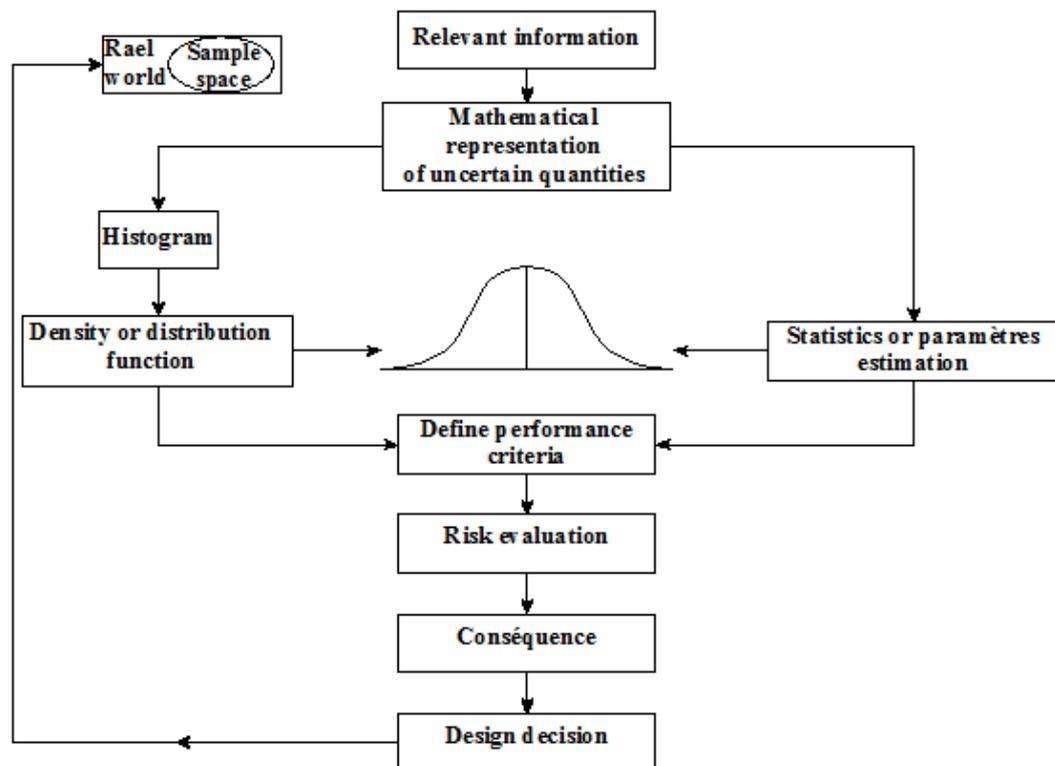


Figure 1.1 : Etapes d'étude probabiliste. [Haldar 2000]

L'information rassemblée constitue l'espace témoin. Les caractéristiques d'aspect aléatoire peuvent être décrites graphiquement sous forme d'histogramme ou de diagramme de fréquence. Pour une représentation plus générale d'aspect aléatoire, le diagramme de fréquence peut être rapproché par une fonction théorique connue de densité de probabilité, telle que la fonction de densité normale. Pour décrire la fonction de densité de probabilité uniquement, certains paramètres de la distribution doivent être estimés. L'évaluation de ces paramètres, appelée les statistiques, et elles constituent un composant important de l'analyse d'incertitude. L'aspect aléatoire dans chacun des paramètres de charge et de résistance peut être mesuré en utilisant ces statistiques. Puis, le risque impliqué dans la conception des structures peut être estimé pour un critère spécifique d'exécution.

Il est indésirable et peu économique, si non impossible, de concevoir une structure à risque-libre. Dans la plupart des cas d'importance pratique, le risque peut être réduit au minimum mais ne peut pas être éliminé complètement. Les centrales nucléaires sont relativement plus sûres que les bâtiments et les ponts ordinaires avec un coût élevé correspondant, mais elles ne sont pas absolument sûres. Faisant une structure plus fiable, implique plus d'argent dans la plupart des cas. Pour une structure donnée, les risques correspondants pour différentes solutions de rechange de conception peuvent être estimés. L'information sur le risque et les conséquences correspondantes de l'échec, y compris le coût de remplacement de la structure, peut être combinée en utilisant un cadre d'analyse de décision pour obtenir la meilleure alternative. Le concept de probabilité fournit un cadre unifié pour l'analyse quantitative de l'incertitude et de l'évaluation du risque comme la formulation de la compensation étudiée pour la prise de décision, la planification et la conception considérant les aspects du problème.

Un grand nombre de données sont importantes pour mettre en application exactement le concept de construction à risque. Il est toujours préférable d'estimer l'incertitude en utilisant à nombre proportionné d'observations fiables. Cependant, dans beaucoup de problèmes de technologie, il y a très peu de données disponibles, parfois seulement un ou deux observations. Le concept de probabilité peut encore être employé dans ce cas en combinant l'expérience, le jugement, et les données d'observation. Dans presque tous les cas, le concept de construction à risque peut être employé avec succès indépendamment du nombre de données disponibles [Haldar 2000].

### 3. Incertitudes dans le processus de construction :

Le processus de construction inclut la planification, la conception, la construction, et la démolition. Tous les composants du processus impliquent de diverses incertitudes. Ces incertitudes peuvent être mises dans deux catégories principales en ce qui concerne des causes naturelles et humaines.

#### 3.1. Incertitude à cause naturelle:

Résultat d'incertitude de l'imprévisibilité des charges telles que le vent, le tremblement de terre, la neige, la glace, la pression de l'eau. Une autre source d'incertitude attribuable aux causes naturelles est le comportement mécanique des matières employées pour construire le bâtiment. Par exemple, les propriétés matérielles du béton peuvent changer d'un échantillon à un autre et également dans le même échantillon.

#### 3.2. Incertitude à cause humaine:

Incluent des exceptions prévus et imprévus à une conception optimale. Les exemples de ces incertitudes pendant la phase de conception incluent des approximations, des erreurs de calcul, des problèmes de transmission, des omissions, le manque de la connaissance. De même, pendant la phase de construction, les incertitudes surgissent en raison de l'utilisation des matériaux insatisfaisants, des méthodes de construction, des connexions mauvaises, ou des changements sans analyse. Pendant leur utilisation, la structure peut être soumise à la surcharge, à l'entretien insatisfaisant, à l'abus, ou même à un acte de sabotage.

En raison de ces incertitudes, les charges et les résistances (c'est à dire portances des éléments structuraux) sont des variables aléatoires. Il est commode de considérer un paramètre aléatoire (charge ou résistance) en fonction de trois facteurs:

##### 3.2.1. Facteur de variation physique:

Ce facteur représente la variation de la charge et de la résistance qui est inhérente à la quantité étant considérée. Les exemples incluent une variation naturelle de pression de vent, de tremblement de terre, et de propriétés matérielles.

##### 3.2.2. Facteur de variation statistique:

Ce facteur représente l'incertitude résultant de l'estimation des paramètres basés sur un nombre d'échantillons limité. Dans la plupart des situations, la variation naturelle (facteur de variation physique) est inconnue et elle est quantifiée en examinant un nombre d'échantillon limité. Par conséquent, plus le nombre d'échantillon est grand, plus l'incertitude décrite par le facteur de variation statistique est petite.

### 3.2.3. Facteur de variation de modèle:

Ce facteur représente l'incertitude due aux hypothèses simplificatrices, des conditions aux limites inconnues, et des effets inconnus d'autres variables. Il peut être considéré comme le rapport de la force réelle (résultat d'essai) et de la force prévue en utilisant le modèle. [Nowak. A. S 2000].

## 4. Notions fondamentales de la théorie des probabilités :

La théorie de probabilité propose un cadre mathématique pour présenter quantitativement l'incertain. Elle prolonge le concept du facteur de sécurité pour incorporer explicitement l'incertitude dans les paramètres qui seront plus significatifs qu'une analyse déterministe, parce que l'ingénieur doit fournir une mesure de l'incertitude pour les paramètres utilisés.

### 4.1. Fréquence relative :

Dans un échantillon de taille  $n$ , extrait au hasard d'une population statistique définit la fréquence relative  $fr$ , cette dernière est obtenu en divisant le nombre d'occurrence dans un intervalle par le nombre total de points dans une série de mesures.

### 4.2. Probabilité :

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et 1. Plus ce nombre est grand, plus le risque (ou la chance, selon le point de vue) que l'événement se produise est grand. Si on considère que la probabilité qu'un lancer de pièce donne pile est égale à  $1/2$ , cela signifie que, si on lance un très grand nombre de fois cette pièce, la fréquence des piles va tendre vers  $1/2$ , sans préjuger de la régularité de leur répartition.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser de prime abord l'étude scientifique des probabilités est relativement récente dans l'histoire des mathématiques. D'autres domaines tels que la géométrie, l'arithmétique, l'algèbre ou l'astronomie faisaient l'objet d'étude mathématique durant l'Antiquité mais on ne trouve pas de trace de textes mathématiques sur les probabilités. L'étude des probabilités a connu de nombreux développements au cours des trois derniers siècles en partie grâce à l'étude de l'aspect aléatoire et en partie imprévisible de certains phénomènes, en particulier les jeux de hasard. Ceux-ci ont conduit les mathématiciens à développer une théorie qui a ensuite eu des implications dans des domaines aussi variés que la météorologie, la finance ou la chimie.

La probabilité est définit comme la limite d'une fréquence relative. Si on extrait au hasard un élément  $d$  d'une population. La probabilité  $P(d)$  d'avoir l'événement  $d$  est :

$$P(d) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n_d}{n} \right) \quad (1.1)$$

Où,  $n_d$  est le nombre d'occurrence de l'événement  $d$ , et  $n$  est le nombre d'épreuves.

Cette définition semble raisonnable, puisque la probabilité est employée pour décrire la fréquence relative pour un nombre infini d'observations. Cette théorie est fondée sur l'observation.

La probabilité doit satisfaire les axiomes suivants :

- ✚ La probabilité de l'événement a une valeur comprise entre 1 et 0.
- ✚ La somme des probabilités respectives de chaque événement mutuellement exclusif et collectivement exhaustif d'un ensemble donné est 1.
- ✚ La probabilité de deux événements indépendants  $d_1$  et  $d_2$  égale au produit de leurs différentes probabilités.

### 4.3. Quantités statistiques :

#### 4.3.1. Le traitement statistique :

Bien que les comportements aléatoires soient à priori sujets à des variations imprévisibles, on est cependant capable de donner des renseignements sur ce type de phénomènes. L'idée majeure est que ces renseignements vont être donnés par la répétition de l'expérience. On peut étudier la fréquence d'apparition de chaque résultat, la valeur moyenne de ces résultats et les oscillations autour de cette valeur moyenne. Tout le traitement de ces données est le traitement statistique.

L'expérience montre que, quand on observe un grand nombre de phénomènes aléatoires, on y décèle généralement des lois régissant les résultats, tout à fait déterminées, stables. Par exemple, quelle que soit la pièce non truquée avec laquelle on joue à pile ou face, quel que soit l'endroit où l'on joue, si on lance 1000 fois la pièce, on aura environ 50 % de piles, 50 % de faces. De même, si l'on étudie la répartition des tailles d'un groupe d'individus, quel que soit l'échantillon pris dans ce groupe, on aura toujours une courbe des répartitions de même type. Cette stabilité, confirmée par l'expérience, légitime l'utilisation d'une modélisation mathématique. Ainsi la théorie des probabilités va essayer de modéliser tous ces types de situations aléatoires. Cette notion de modèle abstrait commun à des expériences variées a mis beaucoup de temps à émerger [Sylvie].

#### 4.3.2. Tendances centrale :

La mesure de la tendance centrale d'une série de mesure, est généralement donnée par la valeur moyenne  $\mu_x$  d'un ensemble de valeurs mesurées par  $x_i$  de  $n$  série de mesures pour la variable aléatoire  $x$  est obtenu en additionnant les valeurs et en divisant par  $n$  :

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (1.2)$$

Où,  $X_i$  est la  $i^{eme}$  valeur, et  $n$  est le nombre total de points dans la série de mesures.

#### 4.3.3. Dispersion :

La dispersion dans un échantillon est le rang de l'échantillon, qui est la valeur maximale moins la valeur minimale dans la série de mesures.

La variance  $var[x]$  d'une variable aléatoire  $X$  est la valeur moyenne de la différence carrée entre la variable aléatoire et sa valeur moyenne.

$$Var[x] = \sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_x)^2 \quad (1.3)$$

L'écart type exprime la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne en mêmes unités que la variable aléatoire elle-même. L'écart type est pris comme racine carrée de la variance.

#### 4.3.4. Le Coefficient de variation :

Pour fournir une expression sans dimension commode de l'incertitude inhérente à une variable aléatoire. Le coefficient de variation  $Cov$  est calculé par la division de l'écart type sur la valeur moyenne qui est généralement exprimée en pourcentage.

$$Cov = \frac{\sigma_x}{\mu_x} X \ 100\% \quad (1.4)$$

## 5. Variables aléatoires et distributions :

Les notions fondamentales pour les analyses probabilistes sont les variables aléatoires. En termes mathématiques, une variable aléatoire est une fonction définie sur un espace donné pour représenter une quantité qui varie et qui impose une probabilité pour chaque événement possible dans cet espace. En pratique, une variable aléatoire est une variable pour laquelle la valeur précise est incertaine. Mais une certaine probabilité peut être convoquée à n'importe quelle valeur spécifique «pour des variables aléatoires discrètes-ou dans n'importe quelle marge des valeurs» pour des variables aléatoires continues.

Les variables aléatoires discrètes peuvent seulement supposer des valeurs spécifiques, elles peuvent prendre un nombre fini ou comptable infini de valeurs. Les modèles généralement utilisés pour les variables discrètes incluent les distributions binomiales et celle de Poisson.

Les variables aléatoires continues peuvent supposer une gamme continue des valeurs au-dessus d'un domaine. Elles peuvent prendre toutes les valeurs dans un intervalle continu donné « borné ou non borné » et des valeurs de probabilité doivent être associées à une certaine gamme

dans le domaine. Les modèles généralement utilisés pour des variables aléatoires continues incluent les distributions normales log normales, et uniformes ; cependant, il y a une certaine distribution, telle que la distribution beta [USACE, 1999].

## 5.1. Fonction de distribution de probabilité et Fonction de distribution cumulative :

### 5.1.1. Fonction de répartition :

Une variable aléatoire continue a une affinité de valeurs (ensemble dit non dénombrable). Il est donc impossible de dresser un tableau où toutes les valeurs d'une telle variable aléatoire sont énumérées. De plus, comme nous allons le voir ultérieurement, chaque valeur particulière de la variable aléatoire continue n'a pas de probabilité différente de zéro. Cependant les différents domaines des valeurs possibles d'une variable aléatoire ne sont pas équirépartition des probabilités, bien qu'il faille entendre ceci d'une manière quelque peu différente du cas de variable discrète.

Pour caractériser quantitativement cette répartition, il est commode d'utiliser non pas la probabilité de l'événement  $X=x$ , mais la probabilité de l'événement  $X < x$  où  $x$  est une certaine valeur courante. La probabilité de cet événement dépend évidemment de  $x$ , elle en est une certaine fonction. Cette fonction est appelée de répartition de la variable aléatoire  $X$ . Il est d'usage de la désigner par  $F(x) : F(x) = P(X < x)$ .

La fonction de répartition est la caractéristique la plus universelle d'une variable aléatoire. Elle existe pour toutes les variables aléatoires, tant discrètes que continue. La fonction de répartition caractérise complètement une variable aléatoire du point de vue probabiliste.

Mentionnons quelques propriétés générales de la fonction de répartition.

- ✓ La fonction de répartition  $F(x)$  est non décroissante de son argument, donc pour  $x_1 < x_2$  on a  $F(x_1) < F(x_2)$ .
- ✓ Lorsque l'argument  $x \rightarrow -\infty$ , la fonction de répartition est égale à zéro  $F(-\infty)=0$ .
- ✓ Lorsque l'argument  $x \rightarrow +\infty$ , la fonction de répartition est égale à 1  $F(+\infty)=1$ .

### 5.1.2. Densité de probabilité :

La fonction  $f(x)$  «dérivée de la fonction de répartition» caractérise la densité de la répartition des valeurs de la variable aléatoire en un point donnée. Cette fonction est appelée densité de répartition de probabilité ou plus brièvement densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$ .

La densité de probabilité tout comme la fonction de répartition est une des formes de la loi de répartition. Au contraire de la fonction de répartition, cette forme n'est pas universelle, car elle n'a de sens que pour des variables aléatoires continues.

Du point de vue géométrique la probabilité pour que la variable aléatoire  $X$  se trouve dans l'intervalle  $(\alpha, \beta)$  est égale à l'aire comprise entre la courbe de densité et l'axe des abscisses et limitée par les ordonnées correspondant aux extrémités de l'intervalle  $(\alpha, \beta)$ .

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad (1.5)$$

La relation entre les deux fonctions, la fonction de densités de probabilité et la fonction de répartition est représenté dans l'équation (1.6)

$$f(x) = F'(x) \quad (1.6)$$

La formule (1.6) exprime une densité de probabilité à l'aide d'une fonction de répartition. Soit maintenant le problème inverse, c'est-à-dire qu'il a y a lieu de trouver une fonction de répartition en fonction d'une densité. Par définition on a:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) \quad (1.7)$$

Alors en vertu de la formule (1.5) :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (1.8)$$

Du point de vue géométrique,  $F(x)$  n'est rien d'autre que l'aire comprise entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des abscisses et se trouvant à gauche du point  $x$ .

Enonçons les propriétés essentielles de la densité de probabilité :

- ✓ La densité de probabilité est une fonction non négative ;  $f(x) > 0$ .

Cette propriété est amplifiée immédiatement du fait que la fonction de répartition  $F(x)$  est une fonction non décroissante.

- ✓ L'intégrale prise de  $-\infty$  à  $+\infty$  de la densité de probabilité est égale à 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (1.9)$$

### 5.1.3. Théorème central limite :

Les lois de répartition limite sont objet d'un autre groupe de théorème, appelé théorème central limite, parfois considéré comme forme quantitative de la loi des grands nombres.

Toutes les formes du théorème central limite établissent les conditions pour lesquelles une loi normale peut apparaître. Comme ces conditions sont assez souvent réalisées dans la pratique, la loi normale se trouve être la plus répandue des lois de répartition, surtout dans les phénomènes aléatoires de la nature. Elle apparaît chaque fois que la grandeur aléatoire observée peut être présentée comme la somme d'un nombre suffisamment grand de composantes élémentaires indépendantes « ou faiblement liées », dont chacune influe peu sur la somme.

La loi normale prédomine dans plusieurs théories, par exemple de théorie de mesure, c'est en se basant sur la théorie de mesure que Laplace et Gauss ont formulé la loi normale.

En effet, dans la majorité des cas les erreurs apparaissant lors de la mesure de telle ou telle grandeur physique obéissent à la loi normale ; la raison en est que ces erreurs sont généralement la somme d'un grand nombre d'erreurs élémentaires indépendantes nécessitées à des causes différentes. Longtemps la loi normale était considérée comme loi unique et universelle des erreurs. Ce n'est pas vrai, car l'expérience montre que dans certains processus de mesure et de fabrication on rencontre des lois de répartition différentes de la loi normale, néanmoins celle-ci reste la plus répandue et la plus importante pour les applications pratiques des lois de mesures.

Le théorème de la limite centrale (appelé plus correctement théorème central limite, sans  $e$  à central puisque c'est le théorème qui est central) est un résultat sur la convergence en probabilités d'une suite de variables aléatoires. Intuitivement, ce résultat affirme que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. Il admet plusieurs généralisations qui donnent la convergence de cette somme sous des hypothèses beaucoup plus faibles.

Ces généralisations ne nécessitent pas des lois identiques mais font appel à des conditions qui assurent qu'aucune des variables n'exerce une influence significativement plus importante que les autres. Telles sont la condition de Lindeberg et la condition de Lyapounov. D'autres généralisations autorisent même une dépendance «faible». De plus, une généralisation due à Gnedenko et Kolmogorov stipule que la somme d'un certain nombre de variables aléatoires avec une queue de distribution décroissante selon  $\frac{1}{|x|^a} + 1$  avec  $0 < a < 2$  (Ayant donc une variance infinie) tend vers une loi de Lévy tronquée symétrique et stable quand le nombre de variables augmente.

Ainsi, ce théorème et ses généralisations offrent une explication à l'omniprésence de la loi normale dans la nature : de nombreux phénomènes sont dus à l'addition d'un grand nombre de petites perturbations aléatoires.

## 5.2. Principales distributions continues :

### 5.2.1. Distribution uniforme :

Une variable aléatoire continue  $X$  suit la distribution uniforme si et seulement si sa fonction de densité de probabilité PDF est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ avec } a < x < b \quad (1.10)$$

Où,  $a$  et  $b$  sont les paramètres de la distribution. La fonction de distribution cumulative CDF d'une variable aléatoire uniforme est :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{avec } a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad (1.11)$$

Pour  $a = 0$  et  $b = 1$ , cette distribution est nommée distribution uniforme standard.

### 5.2.2. Distribution normale :

Une variable aléatoire  $X$  suit la distribution normale ou gaussienne si sa fonction de densité de probabilité est donnée par:

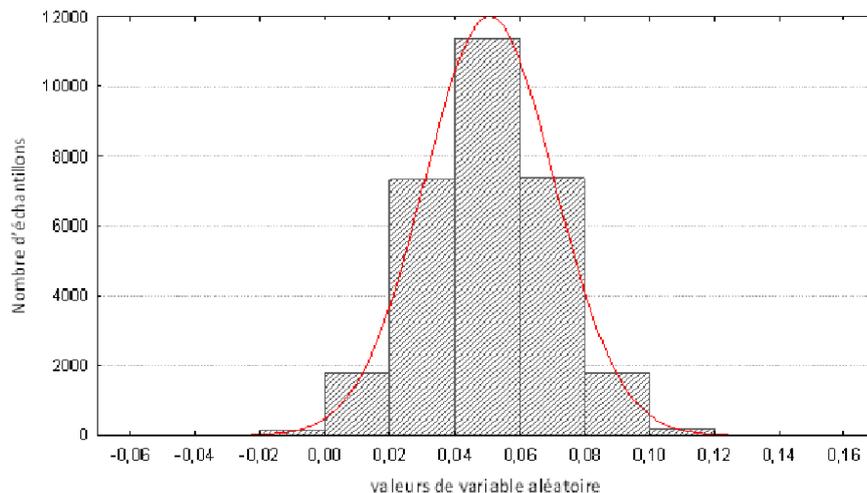
$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right], \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (1.12)$$

Où  $\mu_x$  et  $\sigma_x$  sont les paramètres de la distribution normale notée  $N(\mu_x, \sigma_x)$  de la variable aléatoire. La distribution normale avec  $\mu_x = 0$  et  $\sigma_x = 1$  s'appelle la standard normale.

La fonction de distribution cumulative CDF d'une variable aléatoire normale est notée  $F(x)$ , donnée par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (1.13)$$

Si  $X$  suit une loi de distribution normale avec une moyenne  $\mu_x$  et un écart type  $\sigma_x$ , alors  $Z = (X-\mu_x)/\sigma_x$  suit une distribution normale standard.



**Figure 1.2:** histogramme des valeurs simulées avec une loi normale.

### 5.2.3. Distribution Log normale :

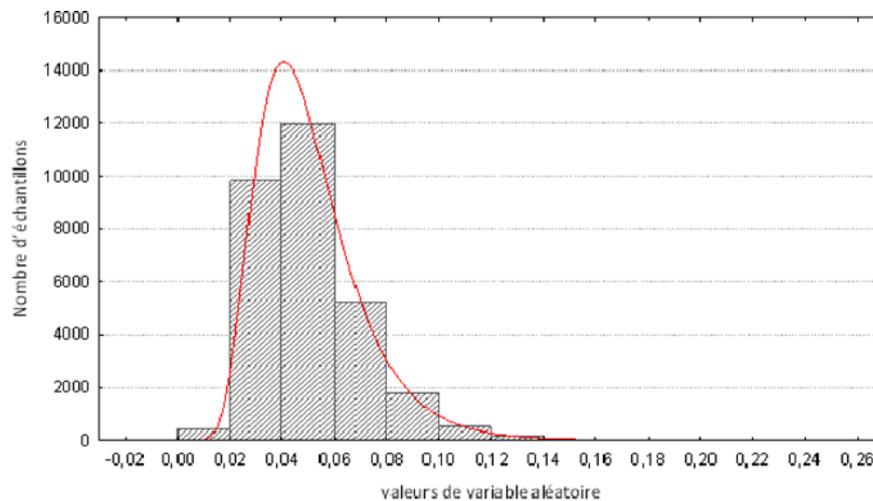
La distribution log normale est souvent utilisée parce qu'elle est commode pour modéliser la quantité qui varie et s'étend sur plusieurs ordres grandeurs. La fonction de densité probabilité d'une variable aléatoire log normale est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\zeta_x \pi \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log(x) - \lambda_x}{\zeta_x} \right)^2 \right], \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (1.14)$$

Où  $\lambda_x$  et  $\zeta_x$  sont les paramètres de la distribution log normale tel que :

$$\zeta_x = \ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_x}{\mu_x} \right)^2 \right] \quad (1.15)$$

$$\lambda_x = E[\ln x] = \ln \mu_x - \frac{1}{2} \zeta_x^2 \quad (1.16)$$



**Figure 1.3** : histogramme des valeurs simulées avec une loi log normale.

### 5.2.4. Distribution Gamma :

La fonction Gamma d'Euler étant connue, considérons deux paramètres  $a > 0$ ;  $\beta > 0$  et définissons la loi Gamma comme étant définie par la relation :

$$P_{\alpha, \beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx} \cdot 1_{]0, +\infty[}$$

En faisant le changement de variables  $t = \beta x$  nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

Et pouvons alors écrire la relation sous une forme plus classique que nous trouvons fréquemment dans les ouvrages :

$$P_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} 1_{]0,+\infty[}$$

*Remarque:*

Si  $\alpha=1$  alors  $\Gamma(\alpha) = 1$  et  $x^{\alpha-1} = 1$  nous retombons sur la loi exponentielle.

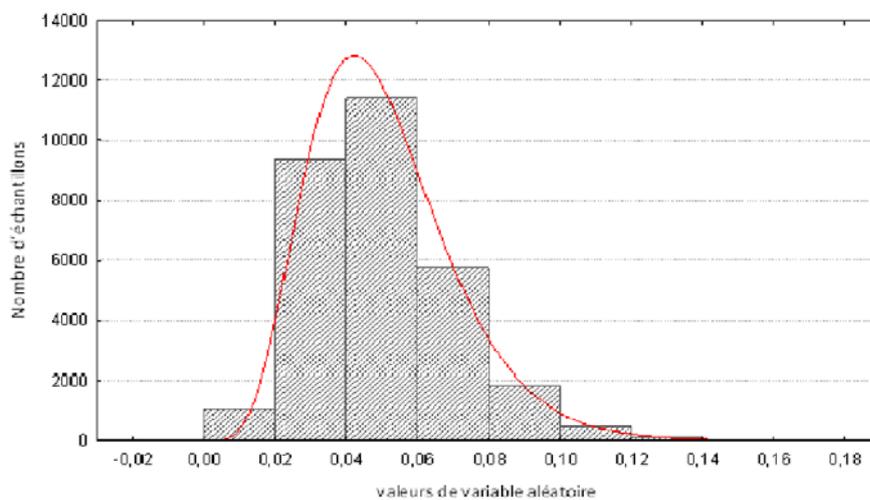
Si  $\alpha \in \mathbb{N}$  la distribution s'appelle alors la "fonction d'Erlang".

Si  $\alpha = \nu/2$  et  $\beta = 1/2$  nous retombons sur la distribution chi-square.

La moyenne et l'écart type sont donnés par :

$$\text{Moyenne} = \alpha/\beta.$$

$$\text{Ecart type} = \alpha/\beta^2.$$



**Figure 1.4 :** Histogramme des valeurs simulées avec une loi Gamma.

## 6. Conclusion :

La présence de l'incertitude ne peut pas être évitée dans chaque phase d'analyse et de conception dans le domaine de l'ingénierie, néanmoins il n'est pas simple de répondre aux exigences de conception en présence de l'incertitude. Les méthodes probabilistes nous permettent de caractériser l'incertitude associée à chaque paramètre mesuré, ainsi que pour proportionner l'influence de leur variabilité en utilisant un modèle théorique de variable aléatoire.

La présentation quantitative de l'incertitude des paramètres dans un cadre mathématique proposé par la théorie des probabilités est une phase importante dans l'analyse de fiabilité où les incertitudes sur les paramètres sont prises en compte dans un cadre mathématique plus cohérent.

## LES SPECTRES DE REPONSE

### 1. Introduction :

L'application la plus répandue de la dynamique des structures en génie civil est dans l'étude de la réponse des structures aux tremblements de terre. La raison principale est que les tremblements de terre génèrent des forces d'inertie importantes pour la grande majorité des bâtiments et des structures de génie civil, à l'exception des structures très flexibles telles que les très grands ponts suspendus, les pylônes très élancés et les gratte-ciel de très grande hauteur pour lesquels le vent devient le mode d'excitation dynamique dominant [BORGES 1968]. Ce qui nous concerne c'est qu'un tremblement de terre donne naissance à un mouvement de translation du sol dans trois directions qui se transmet aux structures par leur fondation. Si la fondation est monolithique, on a un mouvement synchrone de la fondation. Si les fondations sont multiples, comme dans le cas d'un grand pont par exemple, les mouvements seront décalés d'une durée égale au temps de propagation du front d'ondes. L'instrument le plus simple pour mesurer l'intensité du mouvement du sol est l'accélérographe, qui permet d'enregistrer l'accélération du sol dans le temps dans trois directions orthogonales, deux horizontales et une verticale. Ces enregistrements portent le nom d'accélérogrammes. L'accélérographe a longtemps été un appareil analogique constitué d'un accéléromètre du type force balancée enregistrant le signal sur film photographique. L'accéléromètre moderne, encore du type force balancée, est digital avec une fréquence de résonance  $f = 50$  Hz et un taux d'amortissement  $\zeta = 70$  %. Il a longtemps été difficile d'enregistrer les fortes accélérations en champ proche à cause de la trop grande sensibilité des instruments. Les premiers accélérogrammes en champ proche utilisables ont été obtenus lors du tremblement de terre de l'Impérial Valley du 18 mai 1940 en Californie. Ces accélérogrammes sont très utilisés en recherche.

L'historique de l'accélération horizontale dans la direction nord-sud du tremblement de terre de l'Impérial Valley enregistré à la sous-station d'irrigation du district d'Impérial Valley, à El-Centre, est présenté à la figure 2.1 et servira de mouvement du sol type dans cet ouvrage. En général, les accélérations sont digitalisées à des pas de temps constants de 1/100s à 1/50s. Les historiques de la vitesse et du déplacement montrés à la figure 2.1 ont été obtenus par intégration numérique.

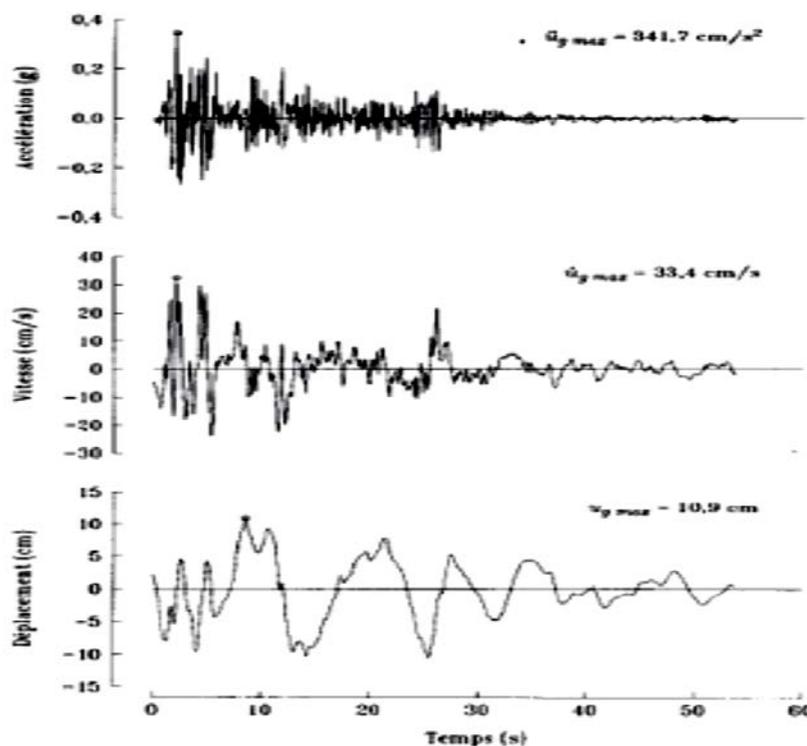
Nous étudierons dans ce chapitre la réponse des systèmes élémentaires linéaires élastiques aux tremblements de terre. Le caractère distinctif des tremblements de terre est qu'il n'y a pas de forces appliquées directement aux structures comme pour les autres types de chargements dynamiques mais plutôt des mouvements imposés aux appuis. Or on sait que l'effet de ces

mouvements était similaire à l'application d'une force effective au niveau de la masse. Nous introduirons le concept Paultre de spectre de réponse (en anglais *response spectrum*) et de spectre de dimensionnement (en anglais *design spectrum*) qui est généralement utilisé pour calculer la réponse maximum des systèmes élémentaires aux tremblements de terre. Nous verrons que rarement une structure peut résister, sans dommage, à un tremblement de terre. D'où l'importance d'étudier la réponse des systèmes élémentaires non linéaires à des tremblements de terre. [ . 2005].

## 2. Réponse dans le temps :

La réponse à un tremblement de terre d'un bâtiment d'un étage, assimilable à un système élémentaire, peut être obtenue à partir de l'intégrale de Duhamel ou de toute autre méthode d'intégration numérique. Notant que la force effective due à un tremblement de terre est donnée par le produit de masse  $m$ , par l'accélération du sol,  $\ddot{u}_g(t)$  c'est-à-dire  $p_{eff}(t) = -m \ddot{u}_g(t)$ , d'après l'intégrale de Duhamel, on obtient :

$$u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (2.1)$$



**Figure 2.1:** Composante horizontale de l'accélération dans la direction nord-sud enregistrée à El-Centro, en Californie durant le tremblement de terre de l'Imperial Valley du 18 mai 1940, ci-après référée comme accélérogrammes d'El-Centro. Les déplacements et les vitesses ont été calculés par intégration numérique. Catalogue de l'EERC. California Institute of Technology (Caltech), Californie [Paultre. 2005].

L'historique de la vitesse relative est obtenu par dérivation de (2.1) :

$$\dot{u}(t) = - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\omega_D(t-\tau) d\tau + \frac{\xi\omega}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Pour trouver l'expression de l'accélération totale, écrivons l'équation de mouvement d'un système élémentaire à un mouvement de base :

$$m\ddot{u}^t(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (2.3)$$

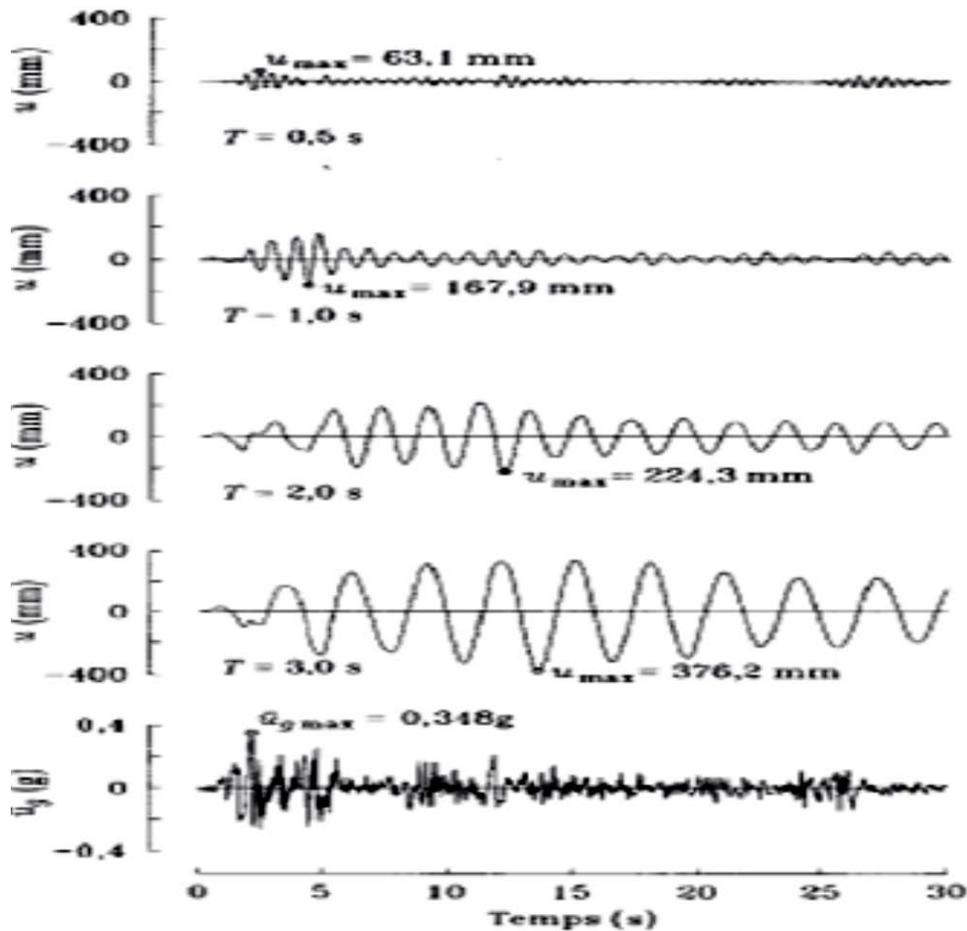
Où  $\ddot{u}^t(t)$  est l'accélération totale de la masse  $m$ . cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\ddot{u}^t(t) = 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2u(t) \quad (2.4)$$

L'historique de l'accélération totale s'obtient en substituant les équations (2.1) et (2.2) dans l'équation (2.4). Nous avons :

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) = & \frac{\omega(1-2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \\ & + 2\xi\omega \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\omega_D(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.5)$$

La figure 2.2 représente la réponse  $u(t)$  de quatre systèmes élémentaires différents à la composante nord-sud du tremblement de terre d'El Centro 1940. Les masses et les rigidités des systèmes élémentaires sont telles que leur périodes de vibration  $T$  valent 0.5s, 1.0s, 2.0s et 3.0s, on constate que le déplacement maximum ne se produit pas nécessairement au moment de l'accélération maximum et que le déplacement maximum est différent pour chaque système et, qu'apparemment, il croit avec une augmentation de la période naturelle de vibration de système. Nous verrons qu'il n'en est pas toujours de même.



**Figure 2.2 :** Réponses de quatre structures à un degré de liberté soumises aux trente premières secondes de la composante N-S de l'accélérogramme d'EL Centro. [Paultre. 2005].

### 3. Spectre de réponse :

Le concept de spectre de réponse a été utilisé pour la première fois par M.A. Biot [BIOT.1933] pour caractériser l'effet des tremblements de terre sur les structures. G.W. Housner [Housner. G 1941] a popularisé son utilisation en génie parasismique. L'importance de ce concept vient du fait que, lors d'un dimensionnement, on ne s'intéresse surtout qu'à la valeur maximum de la réponse d'une structure à un tremblement de terre. On a pour un paramètre de réponse quelconque  $r$  :

$$r_{max} = \max_t(|r(t)|) \quad (2.6)$$

Où l'indice max désigne la valeur maximum de la réponse dans le temps. La courbe des valeurs maximums d'un paramètre de réponse quelconque (déplacement, vitesse, accélération) en fonction de la période (ou fréquentielle) d'un système élémentaire est appelée un spectre de réponse. Définissons les spectres de réponses suivants :

$$\text{Spectre de déplacement relatif : } SD(\omega_D, \xi) = \max_t |u(t, \omega_D, \xi)| \quad (2.7)$$

$$\text{Spectre de vitesse relative : } SV(\omega_D, \xi) = \max_t |\dot{u}(t, \omega_D, \xi)| \quad (2.8)$$

$$\text{Spectre d'accélération absolue : } SA(\omega_D, \xi) = \max_t |\ddot{u}(t, \omega_D, \xi)| \quad (2.9)$$

Pour un tremblement de terre donné, les spectres de réponse sont donc des fonctions de la fréquence et de l'amortissement. On les représente sous forme de graphes pour des taux d'amortissement  $\xi$  donnés sur une large bande de fréquences. Pour une fréquence naturelle et un taux d'amortissement donné, la valeur du déplacement relatif maximum est obtenue de l'équation (2.1) pour nous donner :

$$SD(\omega, \xi) = \max_t \left| -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \right| = \max_t |D(t)| \quad (2.10)$$

Dans laquelle  $D(t)$  est l'historique du déplacement relatif de la masse donnée par l'équation 2.11.

$$D(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2.11)$$

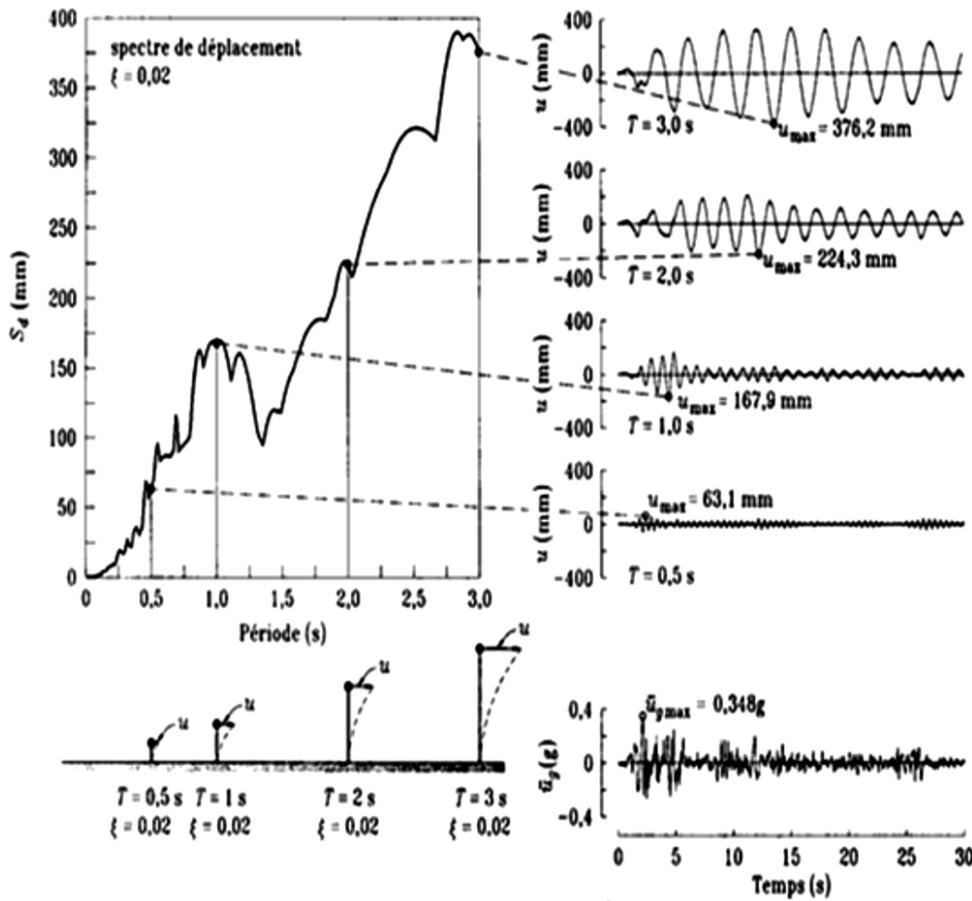
De même, pour une fréquence et un taux d'amortissement donnés, la vitesse relative maximum est obtenue en calculant le maximum absolu de la vitesse donnée par l'équation (2.2) :

$$SV(\omega_D, \xi) = \max_t \left| -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\omega_D(t-\tau) d\tau + \frac{\xi\omega}{\omega_D} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau \right| \quad (2.12)$$

Et l'accélération absolue maximum est obtenue de l'équation (2.5)

$$SA(\omega_D, \xi) = \max_t \left| \frac{\omega(1-2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_D(t-\tau) d\tau + 2\xi\omega \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\omega_D(t-\tau) d\tau \right| \quad (2.13)$$

On détermine les spectres de réponse en évaluant numériquement les intégrales des équations (2.10) à (2.13) pour un tremblement de terre et une valeur d'amortissement donnés et un grand nombre de fréquences naturelles. Le processus d'évaluation du spectre de déplacement est illustré à la figure 2.3.



**Figure 2.3 :** illustration de calcul du spectre de déplacement pour l'accélération d'El Centro [Paultre. 2005].

Une simplification considérable peut être obtenue en notant  $\omega \approx \omega_D$  pour les faibles valeurs d'amortissement rencontrées en pratique. C'est-à-dire pour  $\xi < 0.20$ , et en supposant que les termes en  $\xi$  et  $\xi^2$  sont petits. On obtient :

$$SV(\omega, \xi) = \max_t \left| \int_0^t -\ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\omega(t-\tau) d\tau \right| \quad (2.14)$$

Cette expression peut encore être simplifiée en remplaçant le terme en cosinus de l'équation (2.14) par un terme en sinus « qui a la même valeur maximum bien qu'à un temps différent » afin d'obtenir la relation finale suivante :

$$PSV(\omega, \xi) = \max_t \left| \int_0^t -\ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau) d\tau \right| = \max_t |V(t)| \quad (2.15)$$

Où  $PSV$  est utilisé pour désigner le pseudo-spectre de vitesse et le distinguer du spectre exact de vitesse dénommé  $SV$  et  $V(t)$  est l'historique de la pseudo-vitesse relative.

$$SV(\omega, \xi) = - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos\omega(t-\tau) d\tau \quad (2.16)$$

On obtient de manière similaire le pseudo-spectre d'accélération :

$$PSA(\omega, \xi) = \max_t \left| \int_0^t -\ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \omega \sin\omega(t-\tau) d\tau \right| = \max_t |A(t)| \quad (2.17)$$

Où l'historique de la pseudo-accélération absolue est défini par la relation suivante

$$A(t) = - \left| \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \omega \sin\omega(t-\tau) d\tau \right| = -\omega V(t) = -\omega^2 D(t) \quad (2.18)$$

En comparant les équations (2.10), (2.17) et (2.15) et en posant  $PSD = SD$ , on constate que :

$$PSV = \omega PSD \quad (2.19)$$

$$PSA = \omega PSV = \omega^2 PSD \quad (2.20)$$

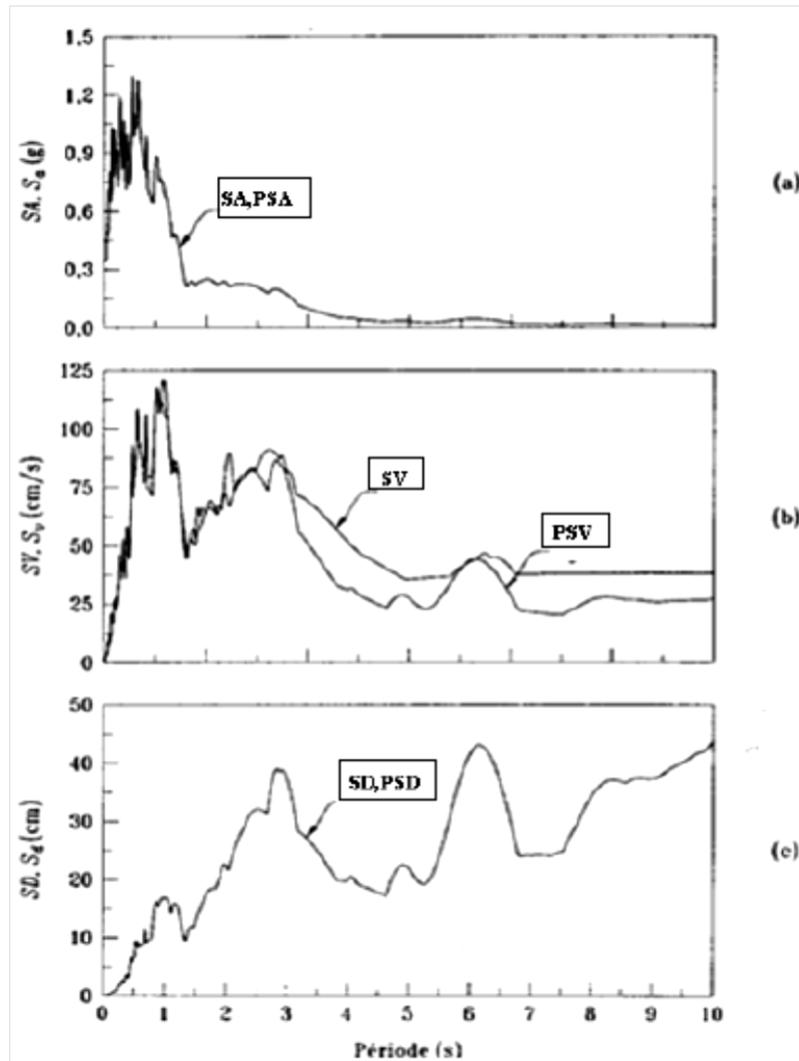
Tenant compte des relations (2.19) et (2.20), on peut calculer les pseudo-spectres de réponse par intégration numérique de l'intégrale de Duhamel dans (2.10). En général, cependant, on utilise une méthode directe d'intégration numérique des équations du mouvement pour calculer le déplacement maximum des différents systèmes élémentaires pour la détermination des spectres de réponse. On recommande d'utiliser la méthode d'intégration des fonctions linéaires par morceau. Dans ce cas, l'intégration peut être considérée comme exacte puisque l'historique de l'accélération est défini à intervalle de temps régulier et qu'une interpolation linéaire est utilisée entre les points.

Les spectres de réponse en déplacement, en vitesse et en accélération pour l'accélérogramme d'El Centro sont présentés à la figure 2.4 pour un taux d'amortissement  $\xi = 0.02$ . On peut constater que la différence entre  $SA$  et  $PSA$  est négligeable alors que cette différence est notable entre  $SV$  et  $PSV$  pour les périodes de vibration supérieures à 3s.

Pour un oscillateur élémentaire vibrant sinusoïdalement avec un déplacement maximum  $PSD$ , la vitesse maximum et l'accélération maximum sont égales à  $PSV$  et  $PSA$  respectivement. Pour un tremblement de terre, on peut montrer que  $PSV \approx SV$  et  $PSA \approx SA$  sur la gamme usuelle des périodes et des amortissements. L'accélération étant, comme on la vu, plus précise que la vitesse. Quand  $T \rightarrow \infty$ ,  $SD$  tend vers le déplacement maximum du sol,  $SV$  tend vers la vitesse maximum et  $PSA$  tend vers zéro. Or,  $S_v = 2\pi S_d/T$  tend vers zéro quand  $T \rightarrow \infty$ , donc pour les longues périodes, le pseudo-spectre de vitesse  $PSV$  peut être considérablement différent du spectre de vitesse  $SV$ . Il faut noter, de plus, que pour un amortissement nul,  $PSA = SA$  et  $PSV \neq SV$ , puisque l'expression de  $PSV$  contient un terme en sinus alors que l'expression de  $SV$  contient un terme en cosinus. Remarquons que l'emploi du terme pseudo « qui veut dire faux » en rapport avec la représentation approximative des spectres peut induire en erreur puisqu'il s'agit ici d'approximation et non de faux concepts.

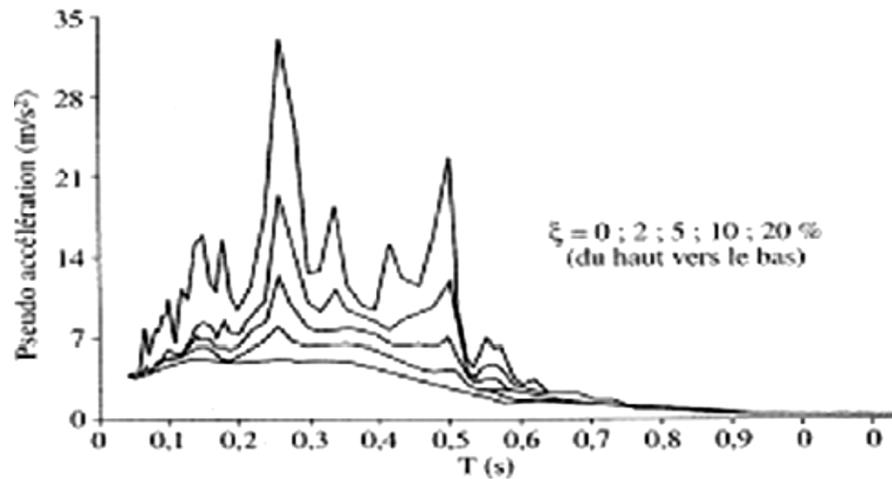
L'avantage d'utiliser les pseudo-spectres de réponse vient des relations simples données par

les équations (2.19) et (2.20). Ces relations entre  $SD$ ,  $PSV$  et  $PSA$  permettent de tracer simultanément sur un même graphique les trois spectres de réponse. Les spectres de  $SD$ ,  $PSV$  et  $PSA$  pour les accélérogrammes d'El Centro du tremblement de terre de l'Impérial Valley de 1940 sont illustrés à la figure 2.5 pour des taux d'amortissement  $\xi = 0, 2, 5, 10, \text{ et } 20\%$  de l'amortissement critique. Il faut noter que la représentation sur un seul diagramme à quatre axes logarithmiques n'est possible que pour des quantités qui sont reliées par une puissance de la fréquence comme dans (2.20).



**Figure 2.4 :** Spectres et pseudo-spectres de déplacement, de vitesse et d'accélération de l'accélérogramme d'El Centro pour  $\xi = 2\%$  [Paultre. 2005].

La figure 2.5 montre le spectre de réponse de la composante Nord-Sud de l'enregistrement de Tolmezzo (Italie du nord) lors du séisme du Frioul (6 mai 1976) il s'agit d'une représentation en pseudo-accélération (ordonnée) en fonction de la période (abscisse), avec des échelles linéaires sur les deux axes, pour des amortissements réduits de 0, 2, 5, 10 et 20 %.



**Figure 2.5 :** Exemple de spectre en pseudo accélération en fonction de la période (spectre de réponse de la composante N-S enregistrée à Tolmezzo (séisme du Frioul) le 6 mai 1976) [Paultre, 2005].

Son allure est typique des spectres d'accélérogrammes réels, c'est-à-dire très irrégulière avec des pics et des vallées très accusés, d'autant plus que l'amortissement est petit. On observe en particulier un grand pic autour de la période 0,25s (fréquence de 4 Hz).

Cette irrégularité montre que l'action sismique ne peut pas être valablement représentée par un seul accélérogramme de séisme réel (ou par le spectre qui lui est associé) ; dans l'exemple de la figure 2.5, les structures ayant 0,25s comme période de leur mode fondamental seraient beaucoup plus sollicitées que celles ayant des périodes fondamentales de 0,20s ou 0,30s. Compte tenu du caractère aléatoire de la position de ces pics de spectre sur l'axe des périodes d'une part, et des incertitudes de modélisation qui affectent la précision du calcul des périodes propres, d'autre part, il est évident que ces grandes différences dans l'amplitude des réponses, pour ces périodes relativement voisines, n'ont pas de signification pratique pour le dimensionnement ; celui-ci ne peut être effectué qu'à partir de spectres lisses, résultant d'études statistiques.

Un spectre de réponse d'accélérogrammes réel constitue une information synthétique extrêmement utile, sur le contenu fréquentiel et l'amplitude du signal ; il comporte en général trois parties :

Une zone à basse fréquence où la réponse de l'oscillateur est contrôlée essentiellement par le déplacement du support, les basses fréquences correspondent à des oscillateurs dont le ressort est extrêmement souple ; la masse reste alors pratiquement immobile par rapport aux axes absolus, puisque l'effort que lui transmet le ressort est quasiment nul, et son déplacement relatif maximal par rapport au support est donc très voisin du déplacement absolu maximal de celui-ci.

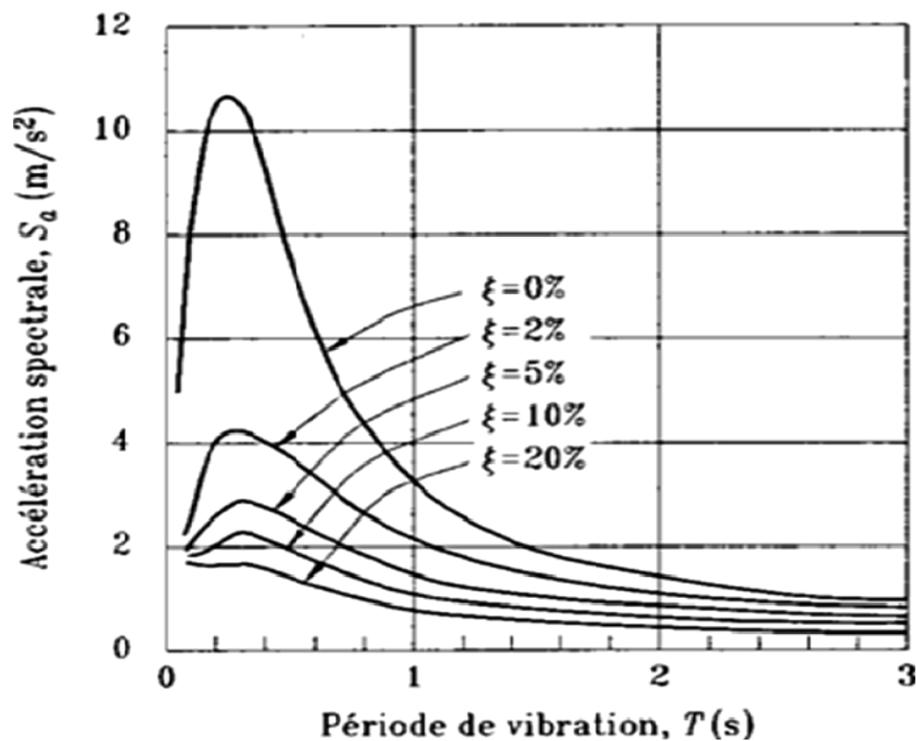
En passant à la limite (ressort infiniment souple, fréquence nulle ou période infinie), la masse ne bouge pas dans les axes absolus et il y a égalité stricte entre ces déplacements maximaux (relatif pour la masse, absolu pour le support), indépendamment de l'amortissement. Où on voit ça dans les graphes précédant, est que l'influence de la variation de la fréquence est diminuée pour la zone de basse fréquence.

Une zone à haute fréquence, où la réponse de l'oscillateur est contrôlée essentiellement par l'accélération du support. Cette zone va d'une fréquence de l'ordre constitue une approximation de la fréquence de coupure ; au-delà de cette fréquence de coupure, la réponse de l'oscillateur est du type rigide (il se déplace en bloc avec son support) et il y a égalité entre la pseudo-accélération et l'accélération maximale du support, quel que soit la fréquence. Où on voit ça dans le même graphe et que l'influence de la variation de la fréquence est diminué pour la zone de haute fréquence aussi.

Une zone de fréquences intermédiaires située entre les deux zones précédentes où les réponses en pseudo-accélération et en pseudo-vitesse sont généralement amplifiées par rapport aux valeurs maximales de l'accélération et de la vitesse du support ; cette zone présente des pics et des vallées distribuées de façon apparemment aléatoire ; elle est assez bien vérifiée pour des accélérogrammes réels, pour des amortissements compris entre 1 % et 20 %. On remarque une grande variabilité des réponses, même pour une petite variabilité la fréquence. [Betbeder 2003].



réponse provenant de différents tremblements de terre, normalisés à la même intensité. Housner [Housner G.1959] a développé les spectres moyens d'accélération montrés à la figure 2.7 en lissant la moyenne de spectres de réponse des deux composantes horizontales de quatre tremblements de terre réenregistrés aux États-Unis d'Amérique (El Centro 1934, El Centro 1940, Olympia 1949 et Tehachapi 1952) après normalisation. Les formes de ces spectres sont globalement cohérentes avec celles obtenues des mouvements enregistrés à des distances assez proches de l'épicentre dans l'Ouest de l'Amérique Nord. Ces courbes ne peuvent cependant pas être utilisées pour la ville de Mexico, par exemple, car elles ne tiennent pas compte des particularités locales de cette ville. De plus, ces courbes ont été duites pour des tremblements de terre forts et ne sont pas appropriées pour des tremblements de terre de faible magnitude. On a suggéré que ces courbes soient utilisées comme spectre de dimensionnement (en anglais *design spectrum*). Notons que ces courbes ont été normalisées à une valeur d'accélération maximum du sol de  $0.2g$ .



**Figure 2.7 :** Spectres de dimensionnement moyen d'accélération normalisés à  $0.2g$

(Tiré d'U.S. Atomic Energy Commission Report TID-7024, Août 1963) [Paultre 2005].

# LES FREQUENCES PROPRES ET VIBRATION DES STRUCTURES

## 1. Introduction :

Un aspect classique de la conception structurelle réside dans l'optimisation du rapport rigidité-masse à travers le choix des matériaux et de la forme des éléments constitutifs d'une structure, ainsi, il peut sembler que la fréquence naturelle peut être manipulée comme une réflexion à posteriori. Pour des structures classiques, cependant, il est important de connaître le rôle que jouent les matériaux et les conditions aux limites par rapport aux ratios des aspects géométriques bruts dans la modification des fréquences fondamentales.

En dépit des différences apparentes, le mode fondamental le plus dommageable pour les bâtiments qui est fonction de la surface de la section transversale et de la hauteur varie entre 0.8 Hz à 3.3 Hz pour des petites structures de 3 étages, 0.3 Hz à 1.5 Hz pour les bâtiments de moins de 20 étages et de 0.4 à 2.4 Hz pour les tours alors que pour les ponts, la fréquence fondamentale oscille de 0.2 Hz à 10.3 Hz tous types de ponts confondus. [K. B. Smith].

L'examen de structures civiles a montré leur large espace de conception physique, mais leurs relativement étroits intervalles de fréquences naturelles notamment pour les premiers modes [K. B. Smith]. La théorie des poutres simple est utilisée pour expliquer cette apparente contradiction et par conséquent les difficultés rencontrées lors du design pour obtenir les fréquences naturelles voulues. La conséquence pour les designers est que l'amortissement est critique, autant que les formes modales de résonance sont difficiles à déplacer des largeurs de bandes préjudiciables par de simples modifications de la géométrie de la structure.

### 1.1. Définition :

La fréquence temporelle, ou momentanée, est notée généralement  $f$  ou  $\nu$  et se définit comme l'inverse de la période temporelle notée  $T$ , soit  $f = \frac{1}{T}$ . La période temporelle étant le temps nécessaire pour que le phénomène se reproduise identique à lui-même, la fréquence temporelle est donc pour une unité de temps donnée le nombre de fois que le phénomène se reproduit identique à lui-même.

Si l'unité de temps choisie est la seconde (unité de temps dans le système international d'unités dit SI), la fréquence est alors mesurée en hertz dont le symbole est Hz (unité SI). Plus la valeur en hertz est élevée et plus la durée en seconde est courte.

Il est possible d'utiliser d'autres relations pour définir la fréquence temporelle : ainsi pour un

phénomène se propageant dans l'espace (par exemple l'amplitude d'une onde propagative), sa fréquence associée peut être également calculée par la relation  $f = \frac{c}{\lambda}$  où  $f$  est la fréquence de l'onde (en hertz),  $c$  la célérité de l'onde (en mètres par seconde) et  $\lambda$  la longueur d'onde (en mètres). Ainsi la fréquence représente le nombre de fois qu'une grandeur associée à un phénomène physique revient identique à elle-même après que le phénomène a parcouru une certaine distance  $\lambda$ . Cette relation est valide, et équivalente à la première relation, seulement dans le cas d'un phénomène qui se propage spatialement (exclu le cas de l'onde stationnaire).

La fréquence  $f$  est reliée à la notion de pulsation, généralement notée  $\omega$ , par la relation

$\omega = 2\pi f$ . Dans le cas de cette rotation,  $2\pi$  est la valeur en radian pour faire un tour complet : la pulsation est donc, dans ce cas, l'angle total en radian qu'effectue le système sur lui-même par unité de temps.

Dans le domaine de la physique ondulatoire on parlera d'une fréquence :

✚ D'oscillation mécanique (ressort, corde vibrante, vibration du réseau cristallin, vibration de molécules, etc.),

✚ D'oscillation acoustique dans le domaine audible (sonore) ou inaudible (infrasons, ultrasons, hyper sons...)

✚ D'oscillation électromagnétique (lumière visible, infrarouge, ultraviolet, etc.).

Lorsqu'on abandonne un système stable préalablement écarté de sa position d'équilibre, il y retourne, généralement à travers des oscillations propres. Celles-ci se produisent à la fréquence propre du système. Si le système n'est pas trop amorti, une excitation sinusoïdale est particulièrement amplifiée au voisinage de cette fréquence propre, c'est ce qu'on appelle la résonance. Sommairement on peut dire que le système réagit d'autant plus facilement qu'on lui fournit de l'énergie à une fréquence proche de sa fréquence naturelle.

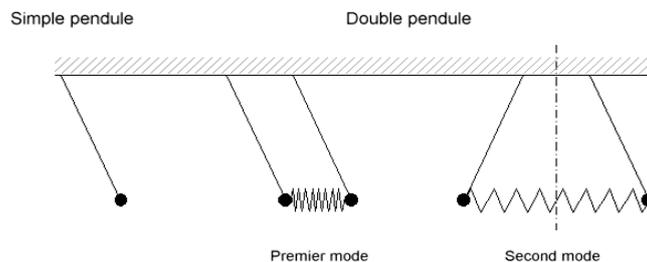
Les exemples sont les résonances acoustiques des instruments musicaux, la résonance des marées, la résonance orbitale (certaines des lunes jupitériennes), la résonance de la membrane basilaire dans le phénomène d'audition, la résonance dans des circuits électroniques et les systèmes mécaniques.

## 1.2. Notions de base

### 1.2.1. Modes propres

Implicitement, l'introduction concerne des systèmes à un degré de liberté ou supposés tels dont l'évolution est décrite par un seul paramètre en fonction du temps. On rencontre de tels systèmes, entre autres, en mécanique avec le simple pendule ou le système masse-ressort, en électricité avec le circuit RLC. Leurs oscillations libres ne peuvent se produire qu'à une fréquence bien définie susceptible d'induire une résonance.

Si on couple deux pendules par un ressort, le système est alors décrit par les inclinaisons généralement distinctes des deux pendules. Ce système à deux degrés de liberté possède deux modes propres dans lesquels les pendules oscillent à la même fréquence. Toute oscillation libre est une somme des deux modes propres correspondants et, face à une excitation sinusoïdale, chacun d'eux peut engendrer une résonance. En supposant les deux pendules identiques, l'origine des deux types d'oscillation devient évidente. Dans un cas les pendules oscillent de concert, comme s'ils étaient liés par une barre rigide ; la fréquence propre du système est la même que celle du pendule simple. Dans l'autre, ils oscillent en opposition, comme si le milieu du ressort avait été fixé ; une moitié de ressort accroît donc la raideur associée à chacun d'eux, ce qui, comme il est précisé plus loin, augmente la fréquence propre.



**Figure 3.1:** vibration d'un pendule.

Ces remarques se généralisent à des systèmes qui possèdent un nombre quelconque de degrés de liberté. La déformée d'une corde vibrante ou d'une poutre élastique est caractérisée par une infinité de positions ; il s'agit alors de systèmes continus à une infinité de degrés de liberté possédant une infinité de modes propres. Dans le cas de la corde sans raideur en flexion, les modes propres ont des formes sinusoïdales (pour plus de précisions, voir Onde sur une corde vibrante). La plus basse fréquence est alors appelée fréquence fondamentale tandis que les harmoniques ont des fréquences multiples de celle-ci.

Généralement, l'importance relative de l'amortissement s'accroît à mesure que s'élève l'ordre des modes, ce qui fait qu'il est suffisant de s'intéresser aux tous premiers modes, dans les problèmes techniques si ce n'est en musique.

### 1.2.2. Réponse à une excitation

Selon les systèmes oscillants à un degré de liberté, on constate que le rapport de l'amplitude  $X$  de la réponse à l'amplitude  $F$  de l'excitation dépend de la masse  $M$  (ou inertie ou, en électricité, auto-inductance), de la raideur  $K$  (ou inverse de la capacité) et de l'amortissement  $B$  (ou résistance) :

$$\frac{X}{F} = \frac{1}{\sqrt{(K-M\omega^2)+B^2\omega^2}} \quad (3.1)$$

Cette formule montre, ce qui se généralise qualitativement à des systèmes beaucoup plus complexes, que la fréquence propre croît avec la raideur et décroît lorsque l'inertie augmente.

L'amplification ne varie pas seulement en fonction de la fréquence. Elle dépend également de l'amortissement du système : lorsque celui-ci décroît, l'amplification augmente dans une bande de fréquences de plus en plus étroite.

Ce phénomène d'amplification est mis à profit dans divers domaines pour séparer une fréquence déterminée de ses voisines.

A l'inverse, il peut être fréquemment à l'origine de dommages causés au système. Dans ce dernier cas, on cherche soit à l'atténuer en augmentant l'amortissement, soit à déplacer la fréquence propre en jouant sur l'inertie ou sur la raideur.

## 2. Utilisation de la résonance

La résonance permet de trier certaines fréquences, (mais ne produit pas d'énergie).

## 3. Inconvénients de la résonance

### 3.1. Ponts

Un pont suspendu, dont le tablier est maintenu par des câbles, peut effectuer des oscillations verticales, transversales ou de torsions. À chacun de ces types d'oscillations, correspond une période propre. En 1850, une troupe traversant au pas cadencé le pont de la Basse-Chaîne, pont suspendu sur la Maine à Angers, provoqua la rupture du pont par résonance et la mort de 226 soldats. Pourtant, le règlement militaire interdisait déjà de marcher au pas sur un pont, ce qui laisse à penser que ce phénomène était connu.

En 1940, de forts vents (de 65 à 80 km/h) provoquèrent la chute du pont de Tacoma Narrows (USA) à la suite de vibrations de flexion transversale puis, après la rupture d'un câble, de vibrations de torsion qui l'achevèrent. Une première explication avait été fournie qui s'appuyait sur l'excitation d'une résonance par le détachement périodique de tourbillons dans une allée de Karman. En fait, la fréquence observée des vibrations était très inférieure à la fréquence de

détachement qu'il est possible de calculer. Il semble donc qu'il faille abandonner, dans ce cas, l'explication par une résonance pour la remplacer par celle qui fait appel à la notion d'instabilité aéroélastique. Dans un système linéaire possédant au moins une fréquence propre, comme ceux qui ont été envisagés précédemment, la stabilité est assurée quand le système est dissipatif, ou à la limite conservatif. Ici, le système devient actif, dans un vent que l'on peut supposer constant, à mesure que la tablier se tord, le moment des efforts aéroélastique peut être approché par sa composante en phase avec le déplacement (pseudo-raideur) et sa composante en quadrature, proportionnelle à la vitesse de vibration. La composante en quadrature, quand elle s'oppose à l'amortissement traduit l'apport d'énergie éolienne à la structure, cause de l'instabilité aéroélastique. Le mode de torsion devient instable, ce qui correspond à des oscillations d'amplitude croissante. La rupture peut alors survenir.

Le pont fut reconstruit en tenant compte de ce problème et est toujours en place.

### **3.2. Ports**

Les ports sont le lieu d'ondes stationnaires de périodes bien définies appelées seiches. Dans certains sites, ces ondes peuvent être excitées par les trains de vagues, créant ainsi des oscillations horizontales qui peuvent être dommageables pour les bateaux amarrés.

Un phénomène analogue, à plus grande échelle, s'observe dans les golfes, l'excitation étant fournie par les ondes de marée. Il ne présente pas d'inconvénients particuliers et peut même être utilisé par des usines marémotrices produisant une énergie renouvelable. Le bilan environnemental de ces dernières peut cependant être discuté, compte tenu de l'agression du site par les installations.

## **4. Fréquence fondamentale**

En acoustique, la fréquence fondamentale ou son fondamental est l'harmonique de premier rang d'un son.

C'est sur cette base que tout le son s'édifie : les harmoniques d'un son musical sont des fréquences multiples entiers de cette première harmonique. Si les harmoniques ne sont pas des multiples entiers de la fondamentale, on parle alors de partiels, et le son est dit inharmonique.

La fréquence fondamentale détermine la hauteur du son. Pour un son de basse fréquence, un son grave, la répartition des harmoniques dans l'ensemble du spectre harmonique est prise en compte par l'audition pour déterminer la hauteur. On peut donc supprimer la fréquence fondamentale : l'oreille continuera à percevoir une hauteur précise, uniquement par l'analyse des intervalles entre chaque harmonique.

## 5. Délimitation des fréquences naturelles dans les structures :

Depuis deux décennies, les chercheurs dans le domaine des vibrations ont fait des améliorations sur les techniques de prédiction et de mesure dans la précision des fréquences naturelles. Pour les modèles à haut risque, les analystes et les expérimentateurs ont salué cette amélioration dans la précision. Toutefois, pour les nombreux produits à faible risque (et donc les budgets de développement plus petits), les ingénieurs sont souvent confrontés à une question de savoir si les problèmes structurels d'habitude influent sur les efforts de test et la modélisation. Les premiers modes de vibration (caractérisée par une plus grande déviation et moins d'amortissement) gèrent le plus souvent les problèmes structurels de fatigue, alors que les formes des modes supérieurs gèrent les problèmes acoustiques. La valeur intrinsèque de précision est examinée, au besoin, en prédiction de la réponse dynamique ou de la mesure acoustique.

Les variations dynamiques entre les copies d'une conception commune uniques sont mesurées. La variabilité due à la répétition dans ce processus de fabrication et le pré-chargement, les différences dues à la température et les effets thermiques sont les paramètres qui influent sur la variation des fréquences d'excitation. La connaissance de cette variabilité de fréquence naturelle aide les concepteurs de base de données à gérer la sensibilité des tests d'analyses de demande. L'implication des données mises en évidence guideront la conception et les ingénieurs de test à partir tan que les données industrielles variées pour répondre plus efficacement aux besoins variés de leurs clients spécifiques.

## 6. Introduction à la dynamique de l'oscillateur simple (domaine élastique)

Une construction, qui peut être assimilée à un oscillateur (système masse + ressort), peut être un amplificateur des secousses qui lui sont communiquées au niveau des fondations (phasage de  $T_{sol}$  et de  $T_{bat}$ ). Aussi les amplitudes des paramètres du déplacement des différents niveaux de la superstructure sont en général plus importantes que celles du sol d'assise.

### 6.1. Période propre d'oscillations : oscillations libres

Les paramètres de l'oscillation des structures sous l'effet de celles du sol sont la période (ou la fréquence) et le(s) mode(s) (« forme ») de ces déformations cycliques. Nous allons voir que ces deux paramètres dépendent des masses et des raideurs de la structure, de leurs localisations et du type de liaisons.

#### 6.1.1. Période d'oscillation:

Est la durée d'un cycle d'oscillation mesurée en secondes (inverse de la fréquence d'oscillation).

### 6.1.2. Période propre d'oscillation d'un bâtiment:

Période selon laquelle le bâtiment oscille librement suite à un déplacement, c'est-à-dire, vis-à-vis du séisme, après l'arrêt des oscillations forcées (et jusqu'à l'amortissement complet du mouvement).

### 6.1.3. Paramètres de la période propre d'oscillation

Cas de l'oscillateur simple en oscillations libres :

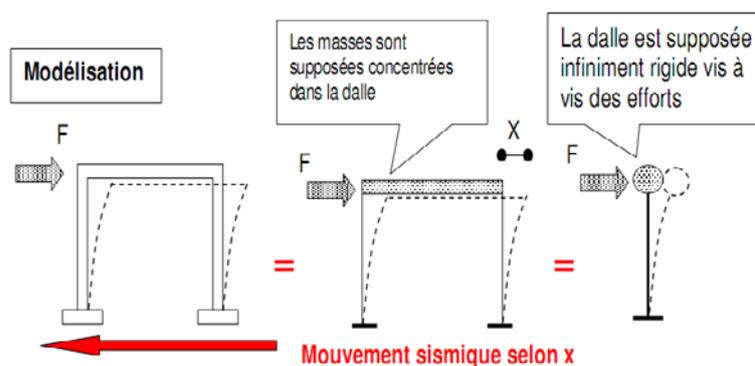
L'étude de l'oscillateur simple permet de mettre en place les notions et le vocabulaire fondamental. Une structure portique d'un seul niveau de plancher rigide sollicitée seulement en translation et dans une seule direction est une structure qui peut être modélisée comme un oscillateur simple.

On suppose :

- ✚ Une structure symétrique du point de vue des masses et des raideurs.
- ✚ Le plancher indéformable dans son plan.
- ✚ Les masses concentrées dans les planchers.

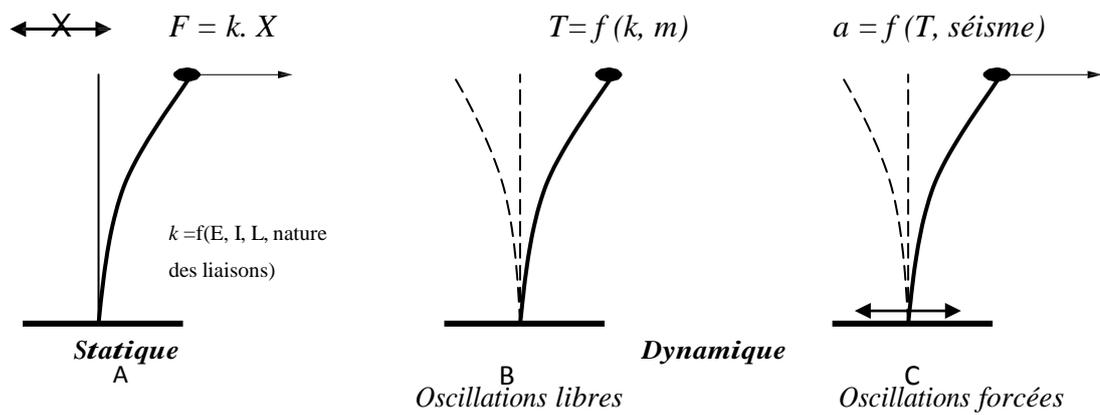
On verra l'influence des paramètres définissant la raideur (longueurs et inerties des éléments de la structure, nature des liaisons entre éléments, matériaux utilisés) et l'influence de la masse sur les modes propres de vibration.

**Exemple :** bâtiment à un niveau considéré comme un oscillateur simple.



**Figure 3.2:** Modélisation d'un bâtiment par un oscillateur simple.

Cet oscillateur simple, oscillateur linéaire à un seul degré de liberté, est soumis à un mouvement sismique, suivant  $x$ , appliqué à sa base. La masse  $m$  est soumise en cas d'oscillations à une force de rappel du ressort  $F_r$  et à une force d'amortissement  $F_a$ .



**Figure 3.3:** Modélisation du mouvement de la vibration d'un bâtiment sous l'excitation d'une force simple.

- \* **A :** Soumise à une force statique  $F$ , la force de rappel du système  $F_r = F$  ;
- \* **B :** Le système est libre d'osciller après application de cette force statique qui l'avait déplacé de sa position d'origine. La période de ces oscillations libre, ou période propre du système est fonction de la masse  $m$  et de la raideur du système ;
- \* **C :** Excité par les oscillations périodiques du sol dans lequel il est encastré, le système « répondra » en amplifiant d'un facteur majorant ou minorant les paramètres de déplacement du sol. Ce facteur dépendra de la concordance ou non de la période propre du système et du mouvement périodique qui l'excite.

## 7. Comportement sous oscillations forcées

### 7.1. Réponse de l'oscillateur Oscillations forcées

#### 7.1.1. Régime harmonique

Dans ce cas la sollicitation est répétée et périodique. La force appliquée est donc caractérisée par son amplitude et sa période.

L'amplitude des déplacements en réponse du système croît si la sollicitation et la réponse sont en phase, elle est pondérée par le taux d'amortissement ( $\zeta$ ). Elle pourrait tendre vers l'infini si  $\zeta$  était égal à 0.

#### 7.1.2. Régime non harmonique

Les sollicitations sont répétées, mais aléatoires et décomposables en une succession d'impulsions élémentaires. La réponse à chaque impulsion est à rapprocher de celle d'une oscillation libre, mais la réponse réelle du système est une convolution entre la succession des forces imposées et celle des réponses à chaque impulsion.

### 7.1.3. Réponse d'une structure au séisme

Le contenu spectral du signal sismique propre au site sera déterminant quant à la réponse du système. La résonance se produira en cas de composantes sismiques de  $T$  (fondamentale ou harmoniques) proche de  $T$  bâtiment.

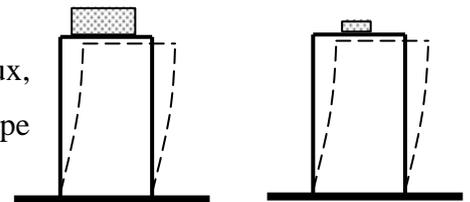
Rappelons que la réaction d'une construction aux secousses sismiques du sol est caractérisée par les accélérations, les vitesses et les déplacements de ses éléments, notamment des planchers.

### 7.1.4. Paramètres déterminant la période propre d'un oscillateur simple

L'observation de paires de maquettes (caractérisées comme des oscillateurs simples : quatre poteaux semblables et masse rassemblée dans le plancher infiniment rigide au regard des poteaux, un degré de liberté) oscillant librement après application d'une force en translation permet de mettre aisément en évidence les paramètres de la période propre d'oscillation. On utilise des paires de maquettes semblables en faisant varier un seul paramètre. On déplace leur « plancher » de sa position d'origine, on relâche et on peut mesurer (au moins comparé visuellement) la période d'oscillation de chacune.

#### 7.1.5. Masses différentes

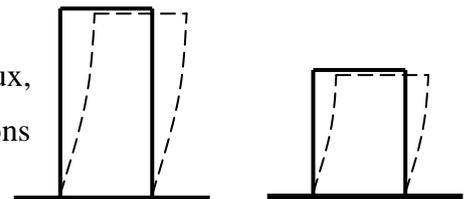
Les deux maquettes sont semblables : même hauteur de poteaux, même section de poteaux, même matériau des poteaux, même type de liaisons (encastremets), mais la masse fixée sur le plancher diffère.



On observe que la maquette dont la masse est plus importante a une période propre d'oscillation plus longue.

#### 7.1.6. Hauteurs différentes

Les deux maquettes sont semblables : même section de poteaux, même matériau des poteaux, même type de liaisons (encastremets), même masse sur le plancher, mais la longueur des poteaux diffère.



On observe que la maquette dont les poteaux sont plus élancés a une période propre d'oscillation plus longue.

#### 7.1.7. Sections différentes

Les deux maquettes sont semblables : même hauteur de poteaux, même matériau des poteaux, même type de liaisons

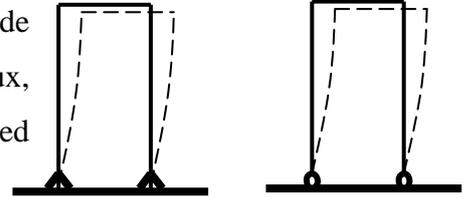


(encastremements), même masse sur le plancher, mais la section des poteaux diffère.

- ✚ On observe que la maquette dont la section des poteaux est moindre (moindre inertie) a une période propre d'oscillation plus longue.

### 7.1.8. Liaisons au support différentes

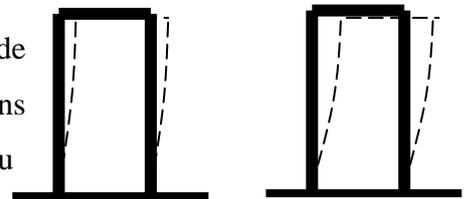
Les deux maquettes sont semblables : même hauteur de poteaux, même section de poteaux, même matériau des poteaux, même masse sur le plancher, mais le type de liaisons en pied diffère.



- ✚ On observe que la maquette articulée en pied a une période propre d'oscillation plus longue que la maquette encastree en pied.

### 7.1.9. Matériaux différents

Les deux maquettes sont semblables : même hauteur de poteaux, même section de poteaux, même type de liaisons (encastremements), même masse sur le plancher mais le matériau des poteaux diffère.



- ✚ On observe que la maquette dont matériau à un module de déformation moins élevé a une période propre d'oscillation plus longue.

On note que la première expérience démontre que la période propre d'oscillation croît avec les masses mises en mouvement. Les quatre autres expériences montrent que la période propre d'oscillation décroît avec la raideur.

Or le projet architectural va conditionner ces paramètres. Si le programme le permet, le concepteur pourra opter pour un mode constructif et des élancements qui lui permettront « d'éloigner » la construction des périodes dominantes du sol (structures rigides sur sols souples, riches en basses fréquences et structures flexibles sur sols rigides, riches en hautes fréquences).

## LES METHODES DE MONTE CARLO

### 1. Aperçu historique des méthodes de Monte Carlo

Les techniques de Monte Carlo ont été utilisées depuis plusieurs siècles, même si ce n'est qu'après la Seconde Guerre mondiale qu'elles ont acquis un véritable statut de méthode. Ainsi on en retrouve des traces aussi lointaines qu'à l'époque de Babylone et de l'Ancien Testament.

Plus récemment, en 1777, on les retrouve dans l'une des premières applications célèbres, celle du problème de l'aiguille de Buffon, pour donner une valeur approchée de  $\pi$ : on jette plusieurs fois une aiguille de longueur  $l$  sur un sol formé de lattes parallèles qui créent des bandes de largeur  $d$  avec  $l \leq d$ . Si  $p$  désigne la proportion d'essais ayant touché l'une des droites formant les séparations entre les lattes, alors le nombre  $\pi$  peut être estimé par  $2lp/d$ . Cet algorithme convergait nettement plus lentement que d'autres existants à l'époque.

Au début du vingtième siècle, les méthodes de Monte Carlo furent utilisées pour étudier l'équation de Boltzmann. On en retrouve également des traces dans les cours de l'école anglaise de statistiques, bien que leur utilisation dans ce cadre fût uniquement didactique. En 1908, Student (W.S. Gosset) utilise un échantillonnage expérimental pour estimer un coefficient de corrélation. Dès lors, la fréquence d'utilisation de ces méthodes s'est amplifiée (Courant, Friedrichs et Lewy en 1928, Kolmogorov en 1931 et Polya en 1938). L'utilisation systématique, par Ulam, Metropolis et Von Neumann notamment, est intervenue à Los Alamos, pendant la préparation de la première bombe atomique, où ont collaboré de nombreux mathématiciens et physiciens de renom.

L'appellation « Monte Carlo » est due à Métropolies, inspiré de l'intérêt d'Ulam pour le poker, car Monte Carlo est un grand centre de casinos, et a pour origine les liens avec les jeux de hasard. Le travail à Los Alamos consistait à simuler directement les problèmes de dispersion et d'absorption de neutrons pour les matériaux fissibles. Dès les premières applications, des méthodes de réduction de la variance ont été utilisées.

Les recherches étant bien évidemment secrètes à Los Alamos, les premières publications sur le domaine ne sont intervenues qu'à partir de 1949. Ensuite, le développement de ces méthodes a accompagné les développements de l'informatique. En 1945 déjà, J. Von Neumann conjecturait le grand potentiel des ordinateurs pour la simulation stochastique: « L'ordinateur offrira certainement une nouvelle approche à la statistique mathématique : l'approche par expérience ». C'est alors aussi posé le problème de la génération de nombres aléatoires sur ordinateur. A partir des années 1950, les techniques de Monte Carlo ont été utilisées fréquemment et dans de

nombreux domaines, et cette évolution a continué depuis. Aujourd'hui, elles occupent une place majeure dans la panoplie des outils disponibles pour calculer. [RUBINO et al 2007].

## 2. Présentation des méthodes de Monte Carlo :

La résolution de nombreux problèmes scientifiques nécessite de calculer des sommes, des intégrales, ou encore de résoudre des équations ou des problèmes d'optimisation. Les techniques de calcul direct, encore appelées techniques analytiques, sont très vite dépassées par la complexité des modèles : elles nécessitent souvent des hypothèses trop fortes, de sorte qu'on ne peut pas les appliquer, ou alors, comme dans le cas de calcul de sommes, le nombre d'opérations requises peut être trop important pour être réalisé en un temps raisonnable. On doit alors nécessairement faire appel à des méthodes d'approximation. Cependant, celles-ci requièrent également des hypothèses fortes, bien que moins fortes que pour les méthodes analytiques. De plus, ces méthodes s'avèrent rapidement inefficaces dès que la dimension mathématique du problème augmente. Afin d'illustrer ce phénomène, on peut remarquer dans le tableau 1 les vitesses de convergence des règles de quadrature habituelles pour le calcul d'intégrales multiples ( $N$  représente le nombre d'évaluations de la fonction à intégrer). Ce tableau montre qu'en augmentant la dimension  $s$ , on atteint vite des valeurs pour lesquelles les quadratures numériques deviennent rapidement inutilisables à cause de leur coût exponentiel en  $s$ .

**Tableau 4.1 :** Vitesse de convergence pour diverses règles de quadrature et pour la méthode de Monte Carlo, en dimension  $s$  et en utilisant  $N$  points. [Gerardo et al 2007].

Méthode	Vitesse
Règle trapézoïdale	$N^{-2/s}$
Règle de Simpson	$N^{-4/s}$
Règle de Gauss (à $m$ points)	$N^{-(2m-1)/s}$
Monte Carlo	$N^{1/2}$

Les méthodes de simulation de Monte Carlo peuvent être vues comme des méthodes d'approximation, même s'il s'agit d'approximations au sens statistique du terme. Comme nous le verrons, ces méthodes sont moins exigeantes en termes d'hypothèses sur le modèle. Il n'y a pas un consensus absolu sur une définition précise de ce qu'est une technique de type Monte Carlo, mais la description la plus habituelle consiste à dire que les méthodes de ce type se caractérisent par l'utilisation du hasard pour résoudre des problèmes centrés sur un calcul. Elles sont en général applicables à des problèmes de type numérique, ou bien à des problèmes de nature elle-même probabiliste. On se sert aussi du hasard pour résoudre d'autres problèmes déterministes (par exemple, pour trier un vecteur) mais dans ce cas, l'objectif n'est pas ce qu'on associe habituellement au mot calcul et on ne parle pas de Monte Carlo, on utilise plutôt le terme « algorithme probabiliste ».

Une méthode de type Monte Carlo fournira donc une réponse statistique, du type « la valeur cherchée  $I$  se trouve très probablement (par exemple, avec probabilité au moins égale à 0,95) dans l'intervalle (dit de confiance)  $I_1, I_2$  [ ». La précision est mesurée par la taille  $I_2 - I_1$  de l'intervalle de confiance. Si l'on utilise  $n$  points échantillonnés de manière indépendante, la méthode converge en  $O(N^{1/2})$ , quelle que soit la dimension du problème. Comme illustré dans le tableau 4.1, les méthodes de Monte Carlo convergent plus rapidement que les techniques numériques dès que la dimension augmente. Dans certains cas, pour des fonctions à plusieurs dizaines de variables, une méthode de Monte Carlo devient le seul outil capable de donner une réponse en un temps raisonnable.

Du point de vue des applications, les méthodes de Monte Carlo sont aujourd'hui indispensables dans des domaines aussi variés et différents que la finance, la mise au point de nouveaux microcomposants électroniques, la sismologie, les télécommunications, en ingénierie ou en physique, mais aussi en biologie, en sciences sociales, etc. Par exemple, en chimie, en physique, de nombreux problèmes exigent l'analyse des propriétés dynamiques d'un nombre tellement grand d'objets (particules atomiques, atomes, molécules ou macromolécules), que ceci ne peut se faire que par des techniques de type Monte Carlo.

Ces méthodes peuvent en revanche être gourmandes en temps de calcul si elles ne sont pas correctement utilisées. L'un des enjeux est donc d'obtenir un intervalle de confiance avec la plus grande précision possible pour un temps de simulation donné. De plus, utiliser les méthodes de Monte Carlo nécessite aussi de mimer le comportement du hasard sur un ordinateur, par nature déterministe, via ce qu'on appelle un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Ici aussi, une utilisation inappropriée peut induire des erreurs parfois subtiles. Ce chapitre traite de ces différents points : les différentes méthodes d'application des méthodes de Monte Carlo, les procédures de base pour obtenir une bonne précision pour un temps de calcul donné, comment utiliser les générateurs de nombres pseudo-aléatoires, ainsi que quelques sujets annexes. Nous avons essayé de sélectionner une liste de références bibliographiques pertinente mais limitée en nombre. Pour certains sujets (par exemple, sur la simulation de modèles markoviens, ou sur l'optimisation combinatoire), nous n'avons pas mis de références car les bonnes sources sur ces thèmes sont vraiment très nombreuses. Sur d'autres sujets (par exemple, sur la génération de nombres pseudo-aléatoires), les références à utiliser ont été incluses dans la bibliographie.

### 3. Avantages et inconvénients de la méthode Monte Carlo :

Les avantages de la méthode de simulation de Monte Carlo sont les suivants :

- Elle permet d'estimer la forme de la distribution de la fonction de base ;
- Elle est facile à mettre en œuvre, en particulier pour des fonctions de base explicites.

L'inconvénient majeur de la méthode MCS est le nombre de simulations nécessaire pour obtenir une estimation correcte de la probabilité de rupture. La précision obtenue est proportionnelle à la racine carrée du nombre d'itérations; si la probabilité de rupture est très petite un très grand nombre de simulations est alors nécessaire pour obtenir une adéquate précision.

Halder et al (2000), ont mentionné que même si le nombre de cycles augmente, les statistiques de la fonction d'état limite n'ont aucune tendance à la convergence, et ils ont recommandé l'utilisation de la technique de comptage. [Laid 2007].

Les étapes de cette méthode sont (Halder et al, 2000) :

1. Définir le problème en termes de toutes les variables aléatoires ;
2. Quantifier les caractéristiques probabilistes de toutes les variables aléatoires ;
3. Générer des valeurs pour ces variables ;
4. Evaluer le problème d'une manière déterministe pour chaque série de réalisation de toutes les variables aléatoires;
5. Extraire des informations pour N réalisations ;
6. Déterminer l'efficacité et la précision de la méthode.

### 4. Nombre de simulations requises :

La simulation de Monte Carlo implique l'échantillonnage aléatoirement pour simuler artificiellement un grand nombre d'expériences et d'observer les résultats, par exemple, pour le cas d'analyse de fiabilité des structures, chaque valeur simulée aléatoirement X donne une valeur d'une expérience x. La fonction d'état limite G(x) est évaluée pour conclure si la configuration tirée est dans le domaine de succès ou bien d'échec.

On définit la fonction d'état limite comme :

$$G(x) = \begin{cases} G(x) \leq 0, & \text{pour les SD hors spectre moyen } \pm \text{écart type} \quad \text{succès} \\ G(x) > 0, & \text{pour les SD hors spectre moyen } \pm \text{écart type} \quad \text{échec} \end{cases}$$

Si on répète l'opération précédente n fois, la probabilité de succès  $P_s$  est donnée approximativement par :

$$P_s = \frac{n(G(x) \leq 0)}{N} \quad (4.1)$$

Où n ( $G(x) \leq 0$ ) est le nombre d'essai ou  $G(x) \leq 0$ , et N est le nombre d'essai total.

Évidemment le nombre  $N$  requis est en fonction d'exactitude souhaitée pour  $P_s$ .

La fonction indicatrice est défini comme suit :

$$I_D = \begin{cases} 1, & \text{pour } G(x) \leq 0 \\ 0, & \text{pour } G(x) > 0 \end{cases}$$

Une estimation de nombre de simulation requise pour donner un intervalle de confiance de  $P_s$  souhaité est nécessaire afin de connaître le nombre minimal de  $N$  pour avoir cet intervalle de confiance.

Puisque  $G(x)$  est une VA, la fonction indicatrice ID est aussi une VA, qui prend seulement une des deux valeurs 0 ou 1. Il est issu du théorème central limite que la distribution de  $\hat{P}_s$  donné par la somme des fonctions d'échantillons indépendants approche une distribution normale quand le nombre d'échantillons  $N$  tend vers l'infini.

Où  $\hat{P}_s$  est l'estimateur de la probabilité de succès  $P_s$ .

La moyenne  $E(\hat{P}_s)$  de la distribution de  $\hat{P}_s$  est donnée par :

$$E(\hat{P}_s) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} E[1(G \text{ vérifiée})] \quad (4.2)$$

Et la variance de l'estimateur de probabilité de succès est :

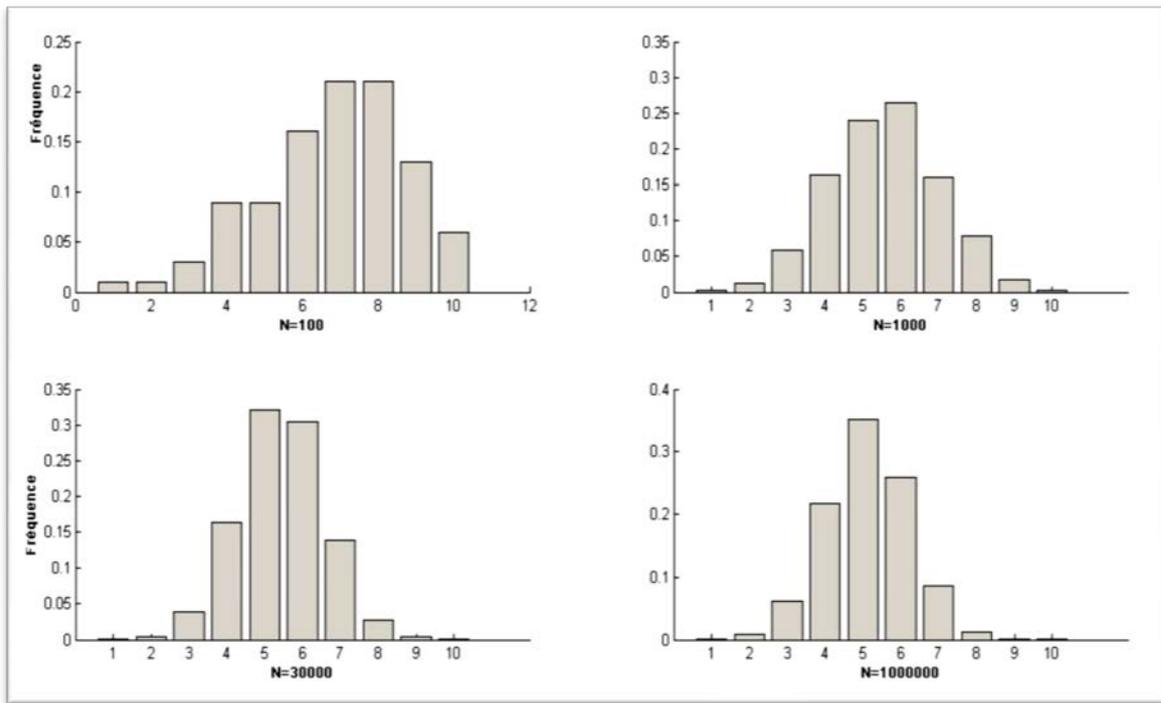
$$\sigma^2 = \left( \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1^2 [G \text{ vérifiée}] \right\} - \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 [G \text{ vérifiée}] \right\}^2 \right) \quad (4.3)$$

En se basant sur que le théorème de central limite est appliqué, l'intervalle de confiance peut être donné par :

$$P(-k\sigma < \hat{P}_s - P_s < +k\sigma = c) \quad (4.4)$$

Donc pour un intervalle de confiance  $C=95\%$ ,  $k=1.96$  :

$$P_s - 1.96\sigma < \hat{P}_s < P_s + 1.96\sigma = c \quad (4.5)$$

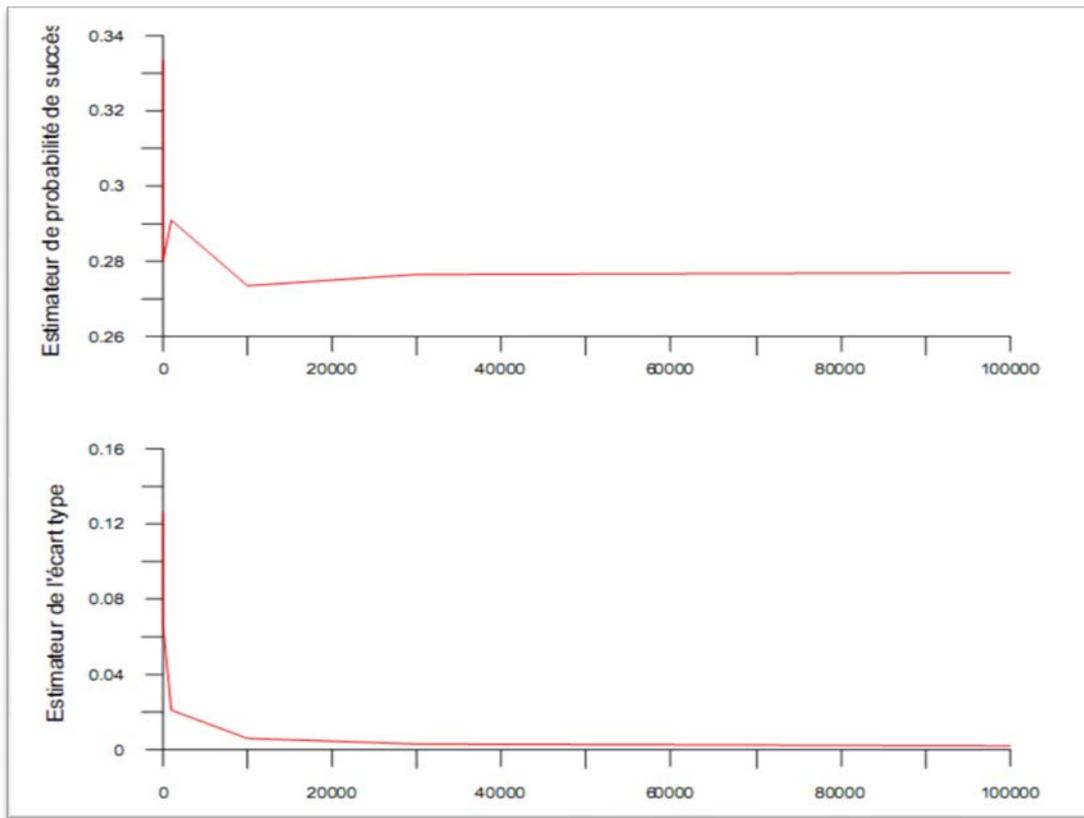


**Figure 4.1 :** Distribution de probabilité de  $\hat{P}_S$ .

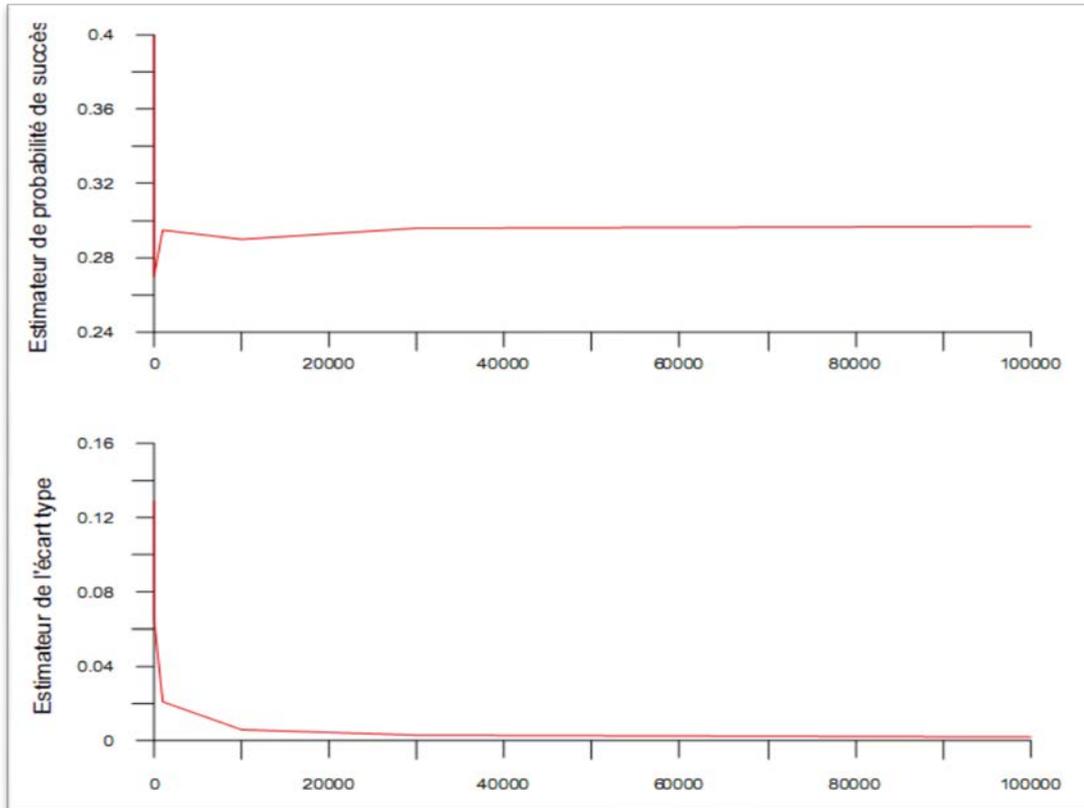
Broding et al (1964), suggère que le nombre de simulation nécessaire est plus de 3000 simulations, d'autres ont suggéré que le nombre de simulations est de l'ordre de 10.0000-20.000 pour approximativement un intervalle de confiance de 95 %. Les règles ci-dessus souvent utilisé, n'indiquent pas l'analyste beaucoup au sujet de l'exactitude dans n'importe quelle analyse particulière de Monte Carlo, un outil utile à cette fin est de tracer les valeurs de l'estimateur de  $P_S$  et de l'estimateur sur leur écart type (Figure 4.2, Figure 4.3).

Le nombre de simulations requises est étudié, on a utilisé les 2 lois de probabilités, gamma et log normale pour générer des échantillons de l'expérience qui représentent les valeurs de l'amortissement, et faire les calculs nécessaires.

La fonction limite  $G(x)$  est choisie de telle façon, que les valeurs des réponses spectrales sont dans l'intervalle  $\mu_x \pm \sigma_x$ .



**Figure 4.2 :** Convergence de l'estimateur de probabilité de succès en fonction du nombre d'échantillons  $N$  pour une loi log normale.



**Figure 4.3 :** Convergence de l'estimateur de probabilité de succès en fonction du nombre d'échantillons  $N$  pour une loi Gamma.

Typiquement de tel graphes, montrent que ces mesures sont réduites à mesure que le nombre d'échantillons est augmenté et qu'un degré de stabilité est atteint à un nombre suffisamment élevé d'échantillons. Le taux de convergence et leur stabilité dépendent de la qualité du générateur du nombre aléatoire étant employé. [E. Melchers 1999].

D'après ces graphes, faites pour les deux lois de probabilité, on a choisis un nombre d'échantillons  $N=30.000$ , qui vérifie les conditions cités ci-dessus, pour les prochaines applications numériques, La stabilité des graphes est apparu à partir approximativement de  $N=20.000$ , en contrepartie, on ne peut pas prendre le nombre maximal de  $N$ , à cause du temps de calcul qui devient important, par conséquence, le calcul devient coûteux.

## 5. Génération des nombres aléatoires :

A la base de toute simulation, il y a l'utilisation de nombres aléatoires en grande quantité. De plus, pour qu'une simulation soit fiable il faut que les nombres aléatoires utilisés aient toutes les propriétés que l'on attend. Ainsi, il ne suffit pas de disposer d'une liste finie de 100 ou même d'un million de nombres aléatoires et de l'utiliser en boucle pour des simulations. En bref, la production de nombres aléatoires en grandes quantités n'est pas une simple affaire.

L'exigence d'utiliser des nombres aléatoires dans la science s'est manifestée au début du siècle passé. En 1927, une liste de 41 600 nombres aléatoires pour usage scientifique, produite par Leonard Tippett, a été publiée par Cambridge University Press. Ensuite, La fondation RAND, en 1955, publia *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*, sur la base d'une simulation par ordinateur avec un algorithme qui aujourd'hui est considéré comme dépassé. Déjà à l'époque, certains soulevaient de sérieux doutes sur la possibilité de produire des nombres vraiment aléatoires de façon automatique. Neumann, en 1951, remarquait justement que par leur propre nature il ne peut pas exister une méthode algébrique capable de produire des nombres aléatoires. Cela montre bien que la production automatique de nombres aléatoires a été un sujet controversé.

Des suites décimales de nombres normaux spéciaux ' $f$ ' vus comme suite aléatoire de chiffres décimaux ont aussi été proposées (Dodge, 1996). En effet, Borel en 1909 démontra qu'un nombre réel pris au hasard sur l'intervalle  $[0, 1]$  est normal avec probabilité 1, c'est-à-dire que toutes les différentes séquences finies de chiffres (sous une base fixée) apparaissent selon une distribution de fréquences uniforme, en faisant d'un nombre normal un bon candidat pour fournir ainsi une suite de nombres aléatoires.

L'histoire de la génération des nombres aléatoires commence avec des machines plus ou moins complexes dont le but était de piocher des boules numérotées d'une urne. Encore

aujourd'hui, en dépit d'algorithmes performants et de qualité élevée pour la génération de nombres aléatoires en grandes quantités, de telles machines sont utilisées pour les loteries à numéros et les ordinateurs ne les remplaceront-ils probablement jamais. Il y a une raison philosophique à cela, celle qui est au fond soulevée par Neumann : un algorithme implémenté produira une suite de nombres dont la nature est déterministe, et donc d'une certaine manière prévisible, et la suite aura seulement l'apparence d'être aléatoire.

## 6. Échantillon d'une variable aléatoire de loi donnée :

### 6.1. Simulation d'une variable de loi uniforme :

Une suite  $u_i$  de nombres pseudo-aléatoires uniformes est un échantillon uniformément distribué sur un intervalle, en général  $[0, 1]$ . Le processus est initié par une semence  $u_0$ . Chaque semence engendre une suite déterministe, d'où l'expression de nombres *pseudo-aléatoires*, mais le choix de la semence peut être confié à un aléa : par exemple à partir des secondes de l'horloge du calculateur. La plupart des logiciels de calcul et même certaines calculettes possèdent une fonction de génération sous les noms RANDOM, RND, RAN...

De part sa construction mathématique, un générateur possède certaines propriétés :

**Périodicité** : le codage numérique est effectué sur un nombre fini de bits et trouver la période  $p$  tel que :  $u_i + p = u_i$  est possible. Il est bien sûr nécessaire de disposer d'un générateur dont la période est largement supérieure à la taille de l'échantillon. La période du générateur « *Mersenne Twister* » de Matsumoto et Nishimura est  $2^{1937} - 1$ . [Lemaire 2008].

**Indépendance des réalisations**:  $\text{Prob} \{U_i = a / u_i - 1 = b\} = \text{Prob} \{U_i = a\}$  pour tout  $a, b \in [0, 1[$ . -uniformité : le générateur ne doit pas remplir l'intervalle par strates successives.

**Uniformité** : le générateur ne doit pas remplir l'intervalle par strates successives.

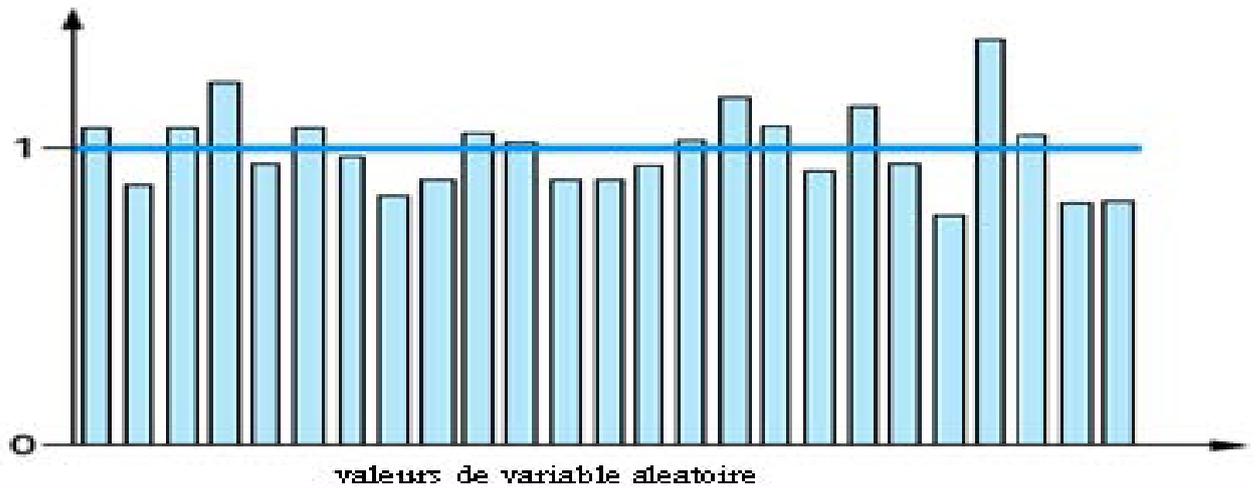
Il importe de contrôler la qualité du générateur par :

- Le calcul des estimateurs non biaisés des échantillons (moyenne, écart-type) et leur comparaison avec les valeurs attendues ;
- Des tests d'adéquation  $\chi^2$  ou Kolmogorov-Smirnov sur l'échantillon total et sur des sous-échantillons pour détecter un manque éventuel d'uniformité ;
- Des tests de succession pour vérifier l'indépendance entre les réalisations successives ;
- Des tests de tendance pour détecter l'évolution à la hausse ou à la baisse de sous-échantillons successifs ;
- Des tests de cavité pour rechercher l'éventuelle absence d'une valeur dans un intervalle

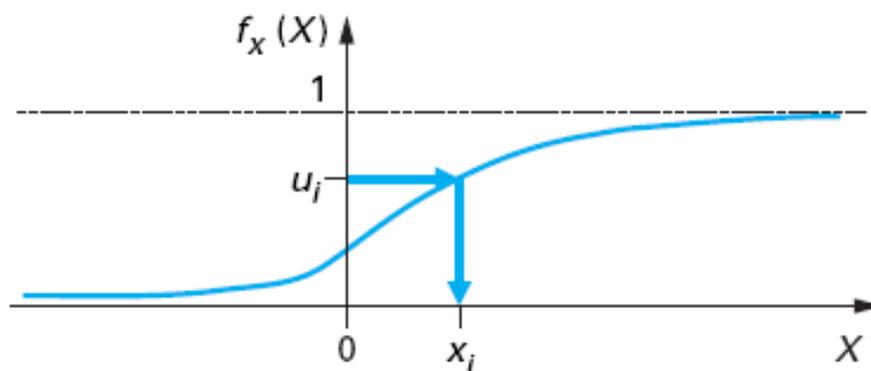
donné.

Ces précautions étant prises, il faut également se rappeler qu'il s'agit d'une génération statistique nécessitant un nombre de tirages  $N$  suffisant. La statistique montre que la convergence est en  $\sqrt{N}$ .

La figure 4.4 représente un histogramme type qui résulte de la simulation d'une variable de loi uniforme.



**Figure 4.4 :** Histogramme de 1 000 tirages d'une loi uniforme répartis en 25 classes [Lemaire2008].



**Figure 4.5 :** Illustration de la transformation inverse [Lemaire 2008].

## 6.2. Simulation d'une variable de loi quelconque :

### 6.2.1. Loi uniforme sur $[a, b[$

Il suffit d'effectuer la transformation :

$$Ui \in ]0,1[ \rightarrow Xi = a + (b - a)Ui \in [a, b[ \quad (4.6)$$

#### ❖ Cas général :

La méthode de la transformation inverse donne une solution générale.  $U$  étant  $(0,1)$ , la variable  $X = F_X^{-1}(U)$  possède une fonction de répartition  $F_X(X)$ . En effet, puisque  $F_X$  est strictement croissante :

$$Prob(X \ll X) = Prob(F_X^{-1}(U) \ll X) = Prob(U \ll F_X(X)) = F_X(X) \quad (4.7)$$

Il suffit donc de donner un nombre  $Ui$  et de déduire la variable correspondante  $Xi$  par :  $Xi = F_X^{-1}(Ui)$  (figure 4.5). Ce calcul requiert l'inversion de la fonction de probabilité de la variable  $X$  ce qui est parfois délicat, en particulier pour la loi de Gauss.

## 7. Conclusion :

La méthode de simulation de Monte-Carlo est simple à mettre en œuvre à l'aide des nombreux logiciels qui possèdent des fonctions de génération de nombres aléatoires de lois quelconques.

Si le calcul des tendances centrales d'une distribution par une analyse de sensibilité ne nécessite qu'un petit nombre de réalisations, en revanche la recherche de valeurs faibles de probabilité est extrêmement coûteuse :  $10 N^{+2}$  à  $10 N^{+3}$  réalisations pour  $P_f \approx 10^{-N}$ .

## EFFETS DES INCERTITUDES DES FREQUENCES PROPRES DE VIBRATIONS SUR LES SPECTRES DE REPONSES

### **1. Introduction :**

Dans le but d'estimer de manière plus fiable la réponse sismique d'une construction, il est indispensable de considérer l'effet des incertitudes des paramètres dynamiques sur la réponse structurale. Ces incertitudes, causées essentiellement par la variation des propriétés des matériaux et les approximations dans l'estimation des paramètres des modèles mathématiques de structure, peuvent introduire une variation significative de la réponse structurale. Pour certaines structures, telles que les parkings de véhicules par exemple, la masse relative à chaque niveau est fonction du temps (jours, saisons) et il est pratiquement impossible de prédire sa valeur exacte lors d'un prochain séisme. En outre, si la structure considérée est fondée sur un sol meuble et que le phénomène d'interaction sol-structure ne peut être ignoré, les caractéristiques de la structure dépendront des caractéristiques dynamiques du sol de fondation qui peuvent être différentes avant, pendant et après le tremblement de terre.

L'incertitude liée aux fréquences propres de vibrations des systèmes structuraux est identifiée et discutée. Une technique de simulation en utilisant la méthode de Monte Carlo est utilisée pour examiner les effets de la variabilité des fréquences sur la réponse dynamique des systèmes structuraux. Les résultats démontrent que les incertitudes influent effectivement sur la réponse des systèmes. Les effets sont plus prononcés pour une variabilité plus élevée des valeurs des fréquences.

L'objectif de cette étude est d'étudier l'influence de l'incertitude des fréquences propres sur la réponse dynamique des systèmes structuraux, on quantifie la réponse des structures sous forme de spectre de réponse.

### **2. Effet de l'incertitude des fréquences propres des vibrations sur les spectres de réponse :**

Après une brève discussion de l'évaluation des valeurs de fréquence, une description probabiliste de la réponse de système en termes de statistiques de la variabilité de la fréquence est présentée en utilisant une simulation avec la méthode de Monte Carlo. Pour atteindre ce but, on doit générer des échantillons distribués suivant les lois de probabilité qui ont fourni le meilleur ajustement aux variations de fréquence et calculer la réponse des structures « sous forme de spectre de réponse » pour chaque échantillon et analyser ces résultats, en calculant les paramètres statistiques des réponses spectrales et en discutant sur leurs distributions.

N'importe quelle simulation qui se fonde sur des nombres aléatoires exige qu'il y ait une certaine manière de produire des nombres aléatoires. La plupart des programmes disponibles (Fortran, Matlab, ...) peuvent produire des nombres aléatoires pour des distributions couramment utilisées. Dans notre travail on a utilisé le logiciel Matlab pour générer ces distributions et faire le calcul nécessaire.

Dans un premier temps, en se basant sur des considérations physiques du problème, nous avons testé quatre lois de densité de probabilité, la loi Uniforme, la loi Normal, la loi Log normal et la loi Gamma. Les deux lois, Uniforme et Normal, sont ensuite exclues de notre travail à cause de considération physique, à cause d'apparence des valeurs négatives pour ces deux lois, la chose qui n'est pas satisfaisante pour le phénomène de l'amortissement et qui amplifie les réponses et atteindre des valeurs très grande. Donc, on a constaté que la physique du problème n'était restituée que par deux lois de probabilité seulement. Ces deux lois ont été retenues pour la suite de notre travail.

La simulation de Monte Carlo nécessite d'utiliser la loi de probabilité qu'elle fournit le meilleur ajustement aux variations de variable aléatoire. L'étude fait par [Haviland. 1976] a prouvé que les distributions Log normal et Gamma ont fourni le meilleur ajustement aux variations de fréquence.

Nous présentons dans ce qui suit, les principaux résultats d'une simulation numérique de l'effet des incertitudes inhérentes aux valeurs d'amortissement critique sur la réponse sismique maximale des systèmes à caractéristiques aléatoires. A cet effet, l'excitation est définie sous forme d'un accélérogramme, deux enregistrements accélérométriques sont utilisés pour quantifier cette influence. Le séisme d'El-Centro du 8 mai 1940 et de Parkfield du 27 juin 1966. Une valeur fixe du pourcentage de la fréquence  $\cong 10\%$  a été considérée pour l'ensemble des spectres.

Bien que l'évaluation de Cov de fréquence il est suggéré d'une valeur de 10%. La distribution Log normal et La distribution Gamma se sont avérées convenables pour décrire la variabilité dans la fréquence.

### **3. Applications numériques :**

Les résultats de la simulation numérique sont présentés, avec une description de la fréquence en utilisant la distribution Log normal et la distribution Gamma qui se sont avérées convenables pour décrire la variabilité dans la fréquence. Pour les deux séismes, Le séisme d'El-Centro du 8 mai 1940 et de Parkfield du 27 juin 1966.

Les figures (5.1, 5.2, 5.3 et 5.4) montrent, à titre illustratif, les valeurs de réponse spectrales,

obtenus pour les réponses en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération d'un oscillateur à paramètres dynamiques incertains, en représentant les valeurs moyennes  $\pm$  un écart type des réponses spectrales correspondantes en vue de prendre en considération les incertitudes sur les propriétés dynamiques. On constate que l'incertitude sur la fréquence critique varie sensiblement pour les spectres SD, PSV et PSA. On remarque aussi que l'écart type est caractérisé par d'importantes fluctuations pour les spectres d'accélérogrammes réels, il varie de manière assez uniforme. On peut observer, à partir des résultats des figures (5.1, 5.2, 5.3 et 5.4), notamment pour les spectres en pseudo-vitesse, que même de petites incertitudes dans les propriétés structurales peuvent avoir une influence considérable sur les amplitudes spectrales.

Les figures (5.1a, 5.2a, 5.3a et 5.4a) représentent les résultats obtenus en faisant la simulation de Monte Carlo, avec une distribution Log normal des valeurs de la fréquence avec un coefficient de variation 10 %. Les figures (5.1b, 5.2b, 5.3b et 5.4b) représentent les résultats obtenus par Zermout et Tiliouine [ZERMOUT 2007], en utilisant une méthode analytique. La variance de l'amplitude moyenne quadratique due aux incertitudes sur les propriétés dynamiques peut évaluer de manière approximative, en développant le carré de l'amplitude de la fonction de transfert en une série de Taylor au voisinage des valeurs moyennes  $j$ , en ne retenant que les termes du premier ordre.

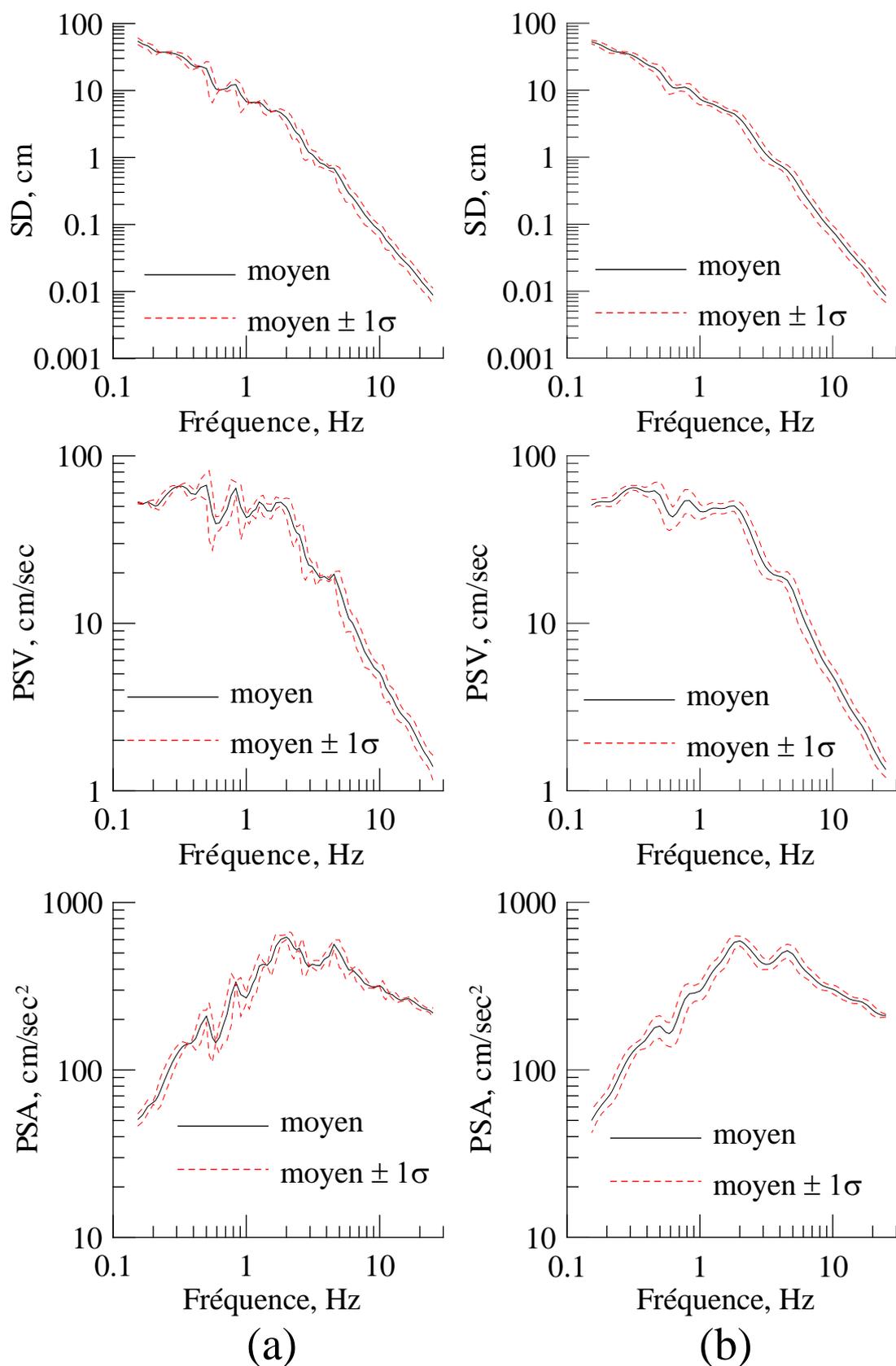
On remarque que les deux graphes obtenu par les deux méthodes ont la même tendance, pour les trois graphes, en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération, avec un peu de différence qui réside dans l'envergure entre le spectre moyen et Spectre moyen  $\pm 1$  écart type.

Un spectre de réponse d'accélérogrammes réel constitue une information synthétique extrêmement utile, sur le contenu fréquentiel et l'amplitude du signal ; il comporte en général trois parties :

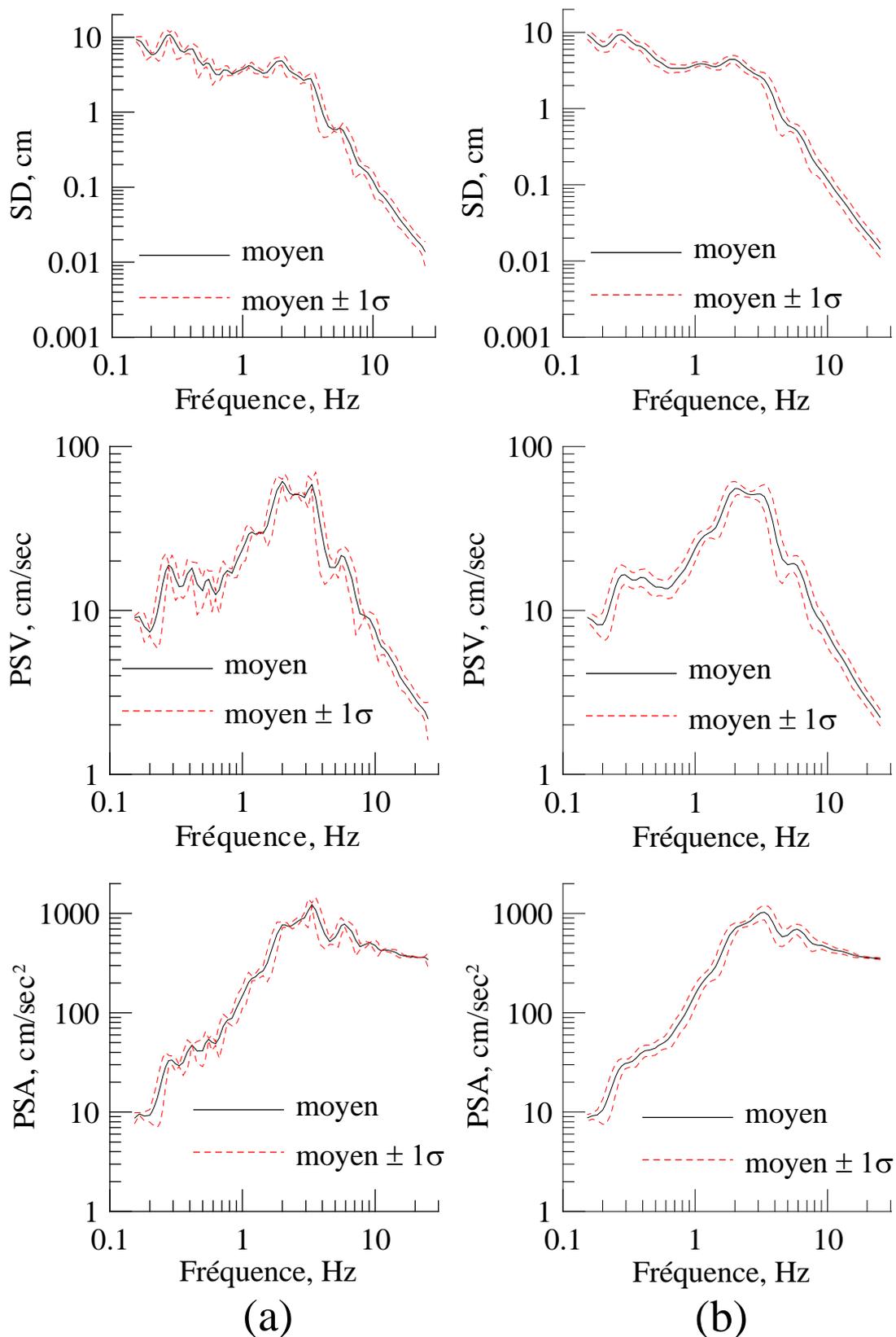
✚ Une zone à basse fréquence où la réponse de l'oscillateur est contrôlée essentiellement par le déplacement d'appui, les basses fréquences correspondent à des oscillateurs dont le ressort est extrêmement souple ; la masse reste alors pratiquement immobile par rapport aux axes absolus, puisque l'effort que lui transmet le ressort est quasiment nul et son déplacement relatif maximal par rapport à l'appui est donc très voisin du déplacement absolu maximal de celui-ci. En passant à la limite (ressort infiniment souple, fréquence nulle ou période infinie), la masse ne bouge pas dans les axes absolus et il y a égalité stricte entre ces déplacements maximaux (relatif pour la masse, absolu pour l'appui), indépendamment de la fréquence. Cette indépendance est remarquée dans les graphes précédant (les Figures 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4), où on voit que l'influence de la variation de la fréquence est diminuée pour la zone de basses fréquences ;

✚ Une zone à haute fréquence, où la réponse de l'oscillateur est contrôlée essentiellement par l'accélération du support. Cette zone va d'une fréquence constitue une approximation de la fréquence de coupure ; au-delà de cette fréquence de coupure, la réponse de l'oscillateur est du type rigide (il se déplace en bloc avec son support) et il y a égalité entre la pseudo-accélération et l'accélération maximale du support, quelle que soit la fréquence, La chose qui est remarquée dans ces graphes, où il apparaît clairement que l'influence de la variation de la fréquence est diminuée pour la zone de haute fréquence aussi ;

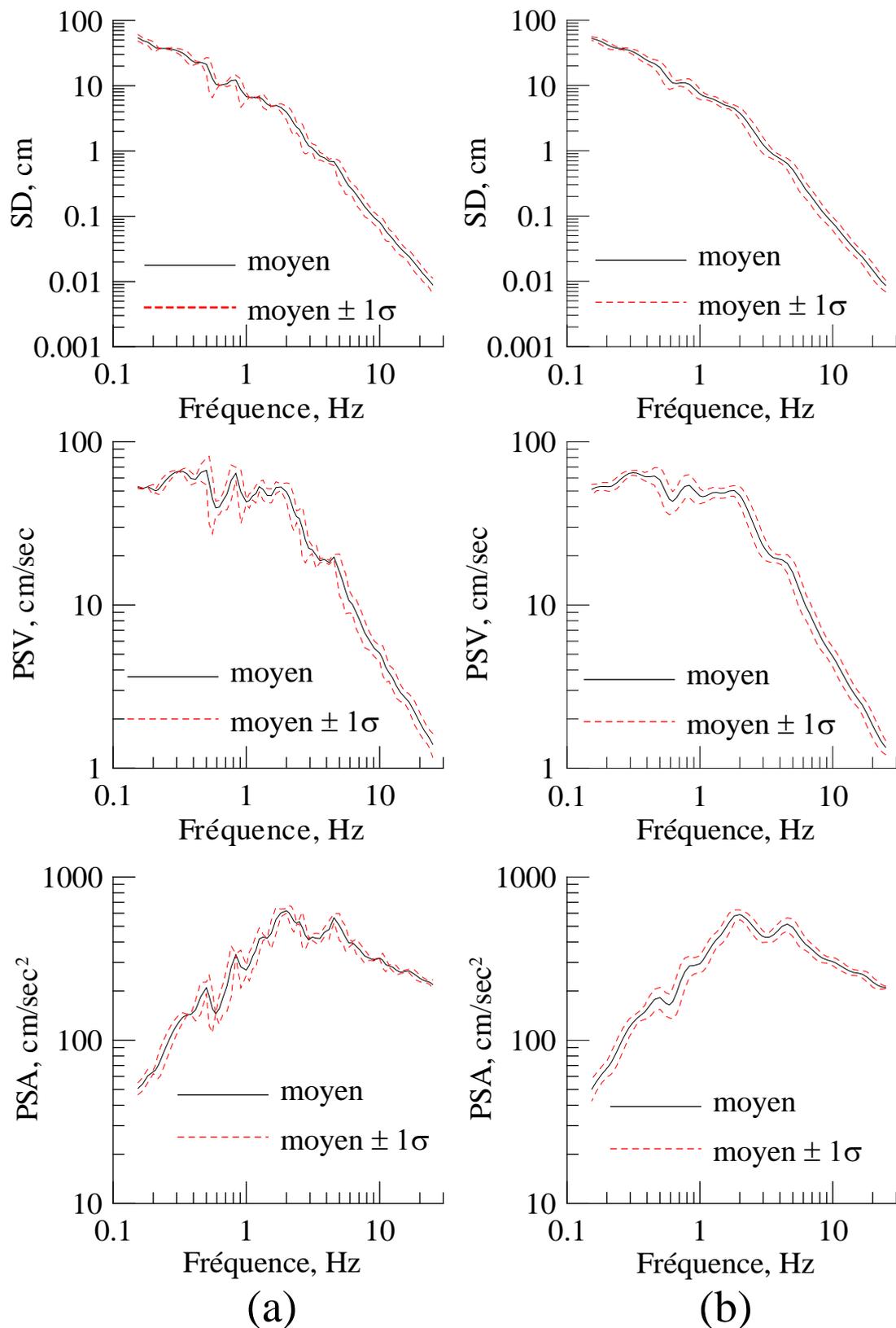
✚ Une zone de fréquences intermédiaires située entre les deux zones précédentes où les réponses en pseudo-accélération et en pseudo-vitesse sont généralement amplifiées par rapport aux valeurs maximales de l'accélération et de la vitesse d'appui, pour des fréquences comprises entre 1% et 20%. On remarque une grande variabilité des réponses, même pour une petite variabilité de fréquence [Betbeder-matibet. 2003].



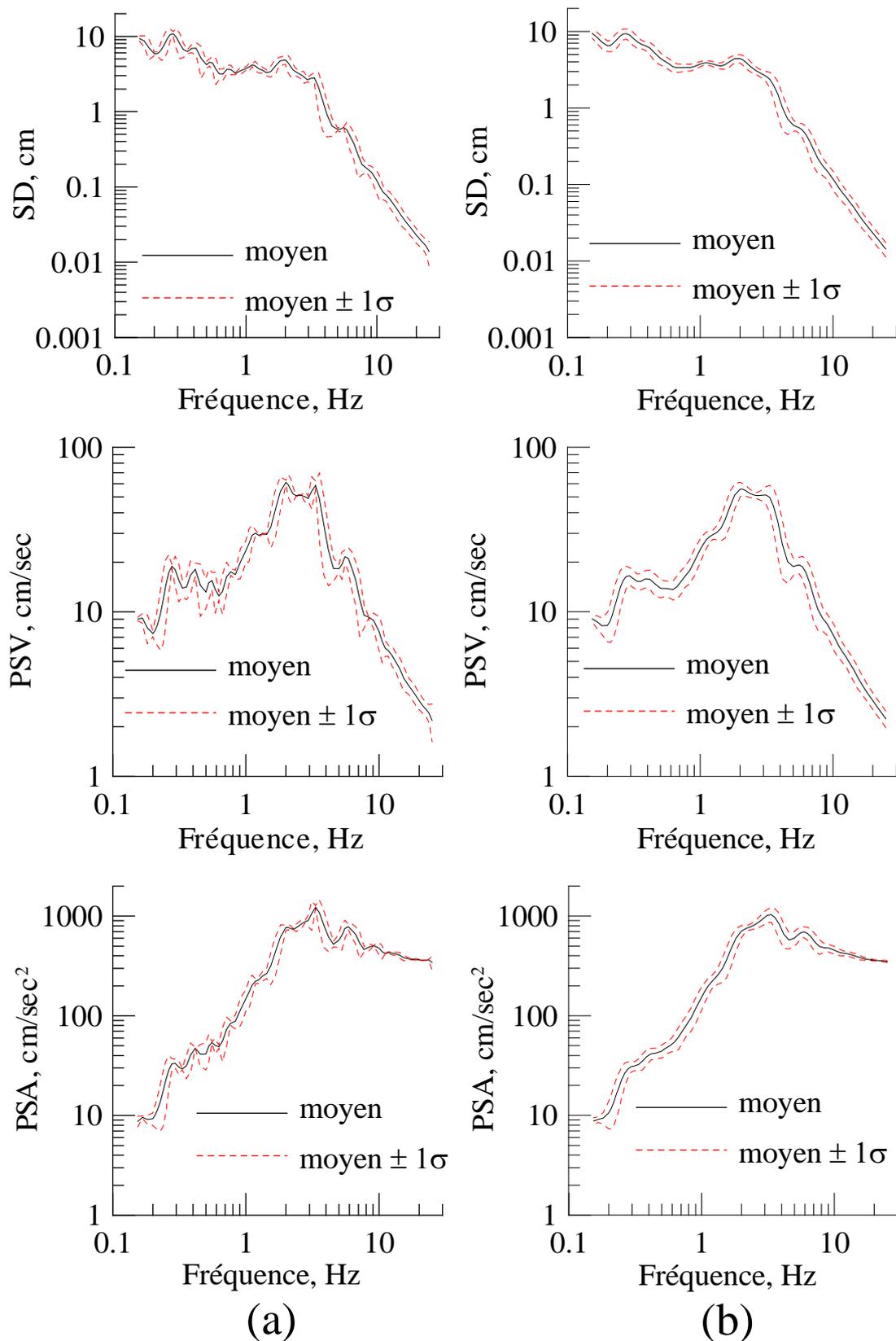
**Figure 5.1** : Spectre  $\text{moyen} \pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération. Pour : a) méthode analytique, b) simulation de MMC. Pour une loi Log normal, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.



**Figure 5.2 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo - accélération. Pour : a) méthode analytique. b) simulation de MMC. Pour une loi Log normal. Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.



**Figure 5.3** : Spectre  $\text{moyen} \pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération. Pour : a) méthode analytique, b) simulation de MMC. Pour une loi gamma, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.



**Figure 5.4 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo - accélération. Pour : a) méthode analytique. b) simulation de MMC. Pour une loi gamma. Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

La comparaison entre les résultats obtenus pour les deux lois de distributions avec la simulation de Monte Carlo, est faite dans les tableaux ci-dessous. Pour différentes fréquences de spectre, les statistiques de PSA (moyenne et écart type) sont obtenues à partir de simulation numérique, pour chaque fréquence on peut calculer une valeur de coefficient de variation qui varie sensiblement en fonction de la fréquence, ce qui permet de faire une étude statistique de ces coefficients de variation pour avoir une vue large de leurs variations en fonction de la fréquence, en calculant le coefficient de variation de la distribution de coefficient de variation de PSA, la plage de variation de ce coefficient, pour une valeur de coefficient de variation de fréquence  $Cov = 10\%$ . Il a été constaté que les fluctuations induites de la réponse dynamique des structures en utilisant la loi Gamma sont relativement plus importantes que celles obtenues avec la loi Log normal.

**Tableau .1:** valeurs du coefficient de variation de PSA. *Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940*

Cov de la fréquence	Log normal	Gamma
Moyenne de Cov	11.06%	11.09 %
Ecart type de Cov	30.90%	30.97 %
Plage de Cov de PSA	2.00% -26.13%	1.81 % -26.33 %

**Tableau .2:** valeurs du coefficient de variation de PSA. *Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966*

Cov de la fréquence	Log normal	Gamma
Moyenne de Cov	16.02%	16.24%
Ecart type de Cov	50.12%	50.27%
Plage de Cov de PSA	1.54% -42.57%	1.56 % -42.90 %

Les tableaux (1,2) représentent les valeurs des paramètres statistiques qui concernent le coefficient de variation de PSA pour la valeur de Cov de la fréquence  $Cov = 10\%$ . Pour les deux accélérogrammes, l'accélérogrammes de séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, et celle de séisme de Parkfield du 27 juin 1966. Donc, on trouve la plage de variation, la moyenne et l'écart type de la distribution des valeurs de coefficient de variation Cov de PSA, chacune une de ces valeurs de Cov est obtenue après une étude statistique des distributions de PSA pour chaque fréquence considérée.

Les conclusions qu'on souhaite de les tirent de cette étude statistique est la quantification de l'effet des incertitudes inhérentes aux valeurs de la fréquence sur la réponse structurale, on a montré que cet effet est considérable et ne peut pas être négligé. Par exemple, une variation des

valeurs de fréquence avec un  $Cov = 10\%$  conduit à une variation des réponses de plus que  $Cov = 20\%$ , qui est une valeur très importante. On remarque aussi que les valeurs de  $Cov$  de réponse obtenus que pour les deux lois Gamma, Log normal les résultats sont presque similaires.

La dépendance entre la variation des caractéristiques statistiques de la fréquence et la variation de celle-ci est aussi remarquée, où on a obtenu une plage de variation des  $Cov$  de fréquence de l'ordre de  $1.54\%$  à  $42.90\%$  en fonction de la fréquence, donc il y a une grande différence entre les deux valeurs ce qui implique la grande relation entre la variation de la fréquence.

#### **4. Conclusion**

Pour l'estimation probabiliste de la réponse sismique, la technique de simulation de Monte Carlo a été utilisée, Néanmoins, pour la génération des valeurs de l'amortissement, il a été nécessaire de déterminer le nombre optimal d'échantillons sur la base d'une procédure de calcul basé sur la stabilité des fluctuations des paramètres statistiques de l'estimateur de la probabilité de défaillance retenue et ceci pour chacune des deux lois de probabilité.

Une fois les paramètres de simulations sont retenus, il a été procédé à l'étude de l'effet de fonction de densité de probabilité de la fréquence sur la réponse sismique. Il a été constaté que les fluctuations induites de la réponse dynamique des structures en utilisant la loi Gamma sont relativement plus importantes que celles obtenues avec la loi Log normal.

## L'INFLUENCE DES VARIATIONS DES CARACTERISTIQUES STATISTIQUES DE L'AMORTISSEMENT

### **1. L'influence des variations des caractéristiques statistiques de la fréquence :**

Dans cette section, l'évaluation de l'influence des variations des caractéristiques statistiques de la fréquence sur la statistique du spectre de réponse doit être étudiée. Dans ce but, le coefficient de variation Cov soit varié de 0.05 à 0.2 et prend les valeurs 0.05, 0.1, 0.15 et 0.2.

Nous présentons dans ce qui suit, les principaux résultats d'une simulation numérique avec une description de l'amortissement en utilisant les deux lois de probabilité, La loi Log normal et loi Gamma, pour différentes valeurs de coefficient de variation Cov (0.05, 0.1, 0.15 et 0.2), pour les deux séismes. Le séisme d'El-Centro du 8 mai 1940 et de Parkfield du 27 juin 1966.

Dans les tableaux suivants, on résume les résultats numériques de la simulation de Monte Carlo pour estimer l'effet de variation des caractéristiques statistiques de la fréquence sur les statistiques de la réponse spectrale, pour voir comment une variation de coefficient de variation de la fréquence peut influencer la réponse des systèmes, donc l'importance d'avoir une bonne connaissance, lors d'une étude ou d'établir des règlements, les valeurs les plus appropriées des fréquences ou la prises en compte des incertitudes inhérentes aux paramètres structuraux.

Pour les différentes fréquences de spectre, les statistiques de PSA (moyenne et écart type) sont obtenues à partir des simulations numériques, donc pour chaque fréquence on peut calculer une valeur de coefficient de variation qui varie sensiblement en fonction des fréquences, donc on peut faire une étude statistique de ces coefficients de variation pour avoir une vue large de leurs variations en fonction de la fréquence, en calculant le coefficient de variation de la distribution de coefficient de variation de PSA et la plage de variation de ce coefficient, pour chaque valeur des trois valeurs de coefficient de variation de la fréquence.

## 2. Applications numériques pour La loi Log normal :

Nous présentons dans ce qui suit, les principaux résultats d'une simulation numérique avec une description de la fréquence en utilisant la distribution Log normal qui s'est jugée convenable pour la variabilité dans les fréquences.

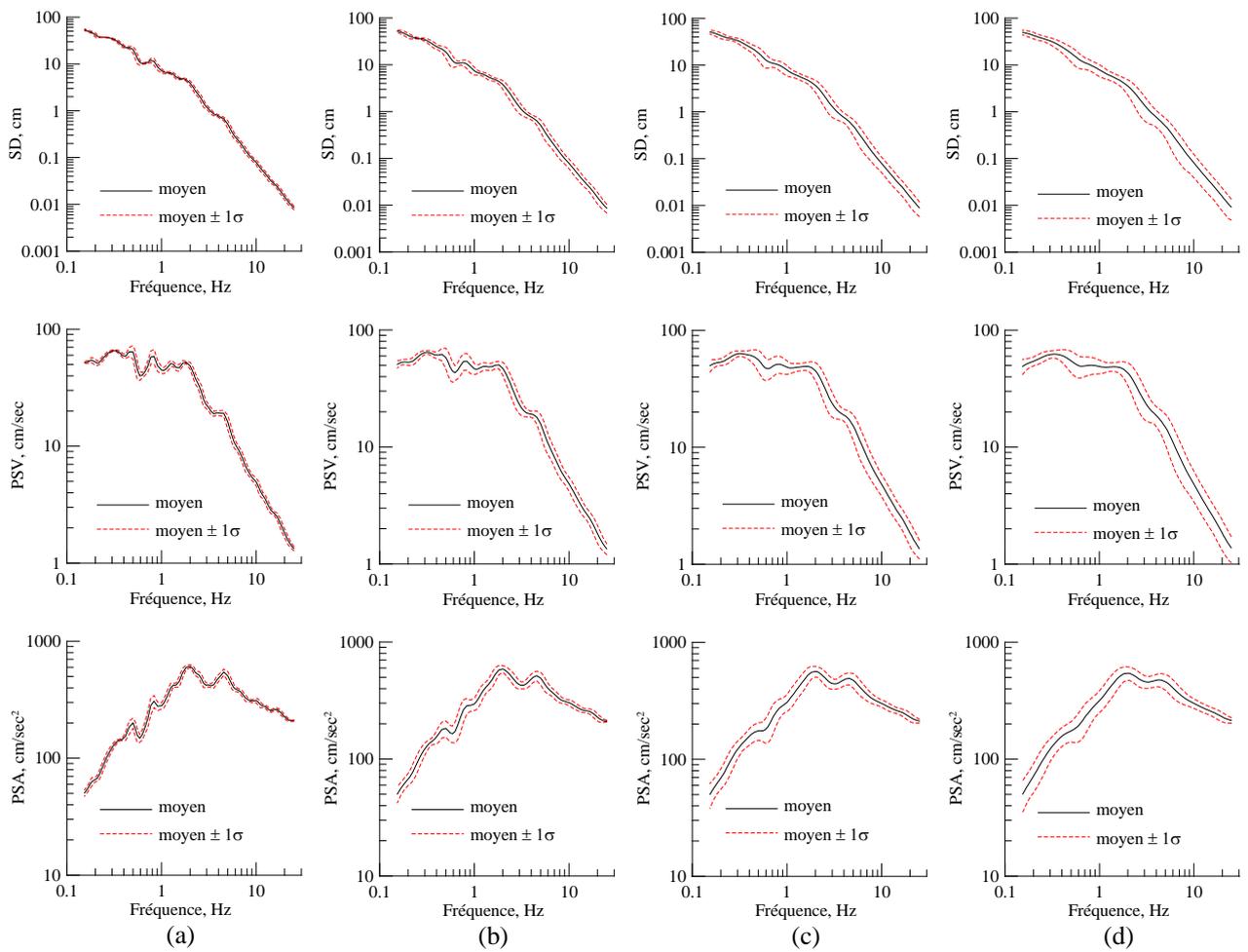
Les tableaux (6.3, 6.4) représentent les valeurs des paramètres statistiques qui concernent le coefficient de variation de PSA pour différentes valeurs de Cov de la fréquence (5%, 10%, 15% et 20%). Pour les deux accélérogrammes, accélérogramme du séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, et celui du séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

**Tableau 6.3:** valeurs de coefficient de variation de PSA. *Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.*

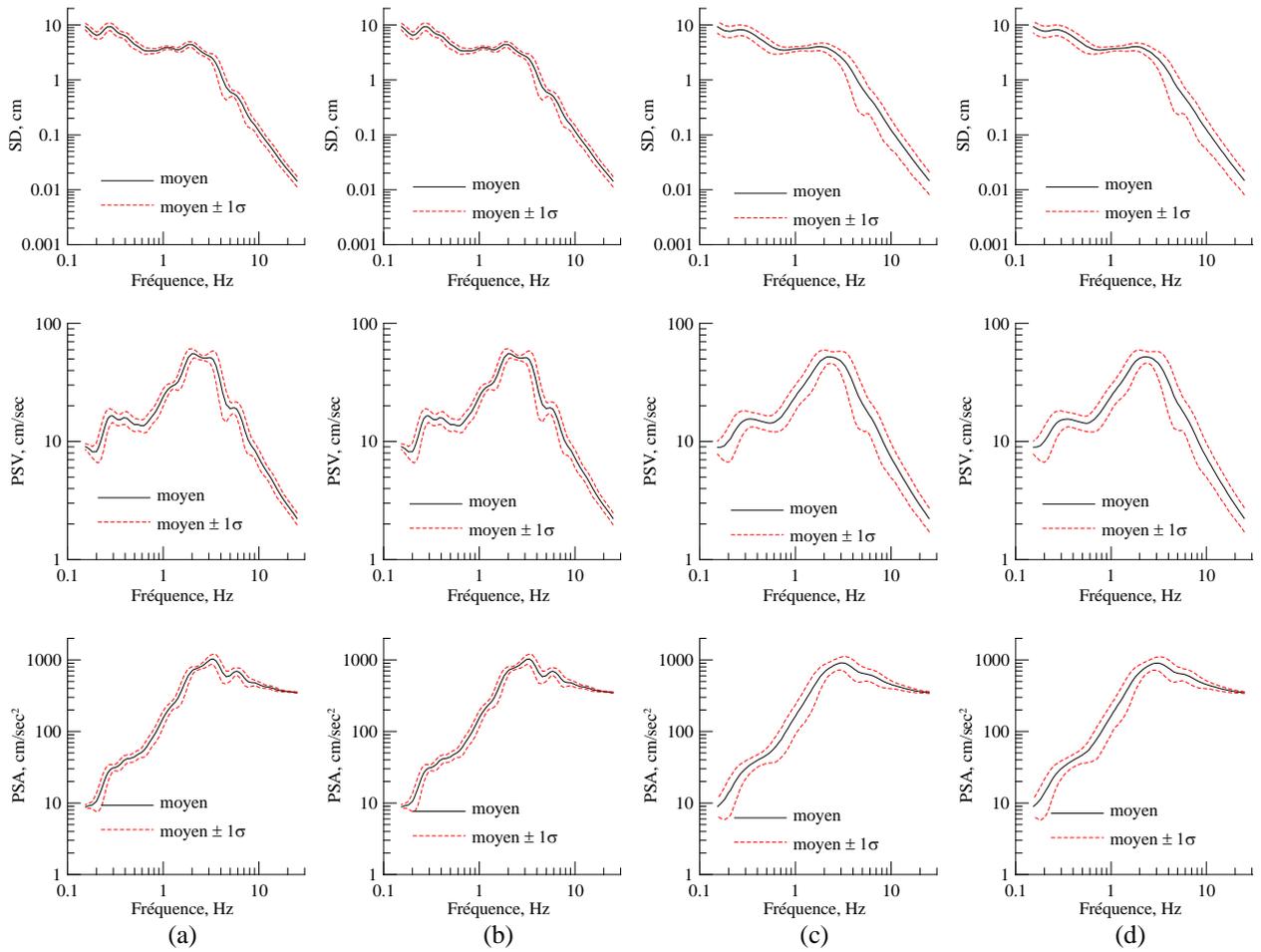
Cov de la fréquence	5 %	10 %	15 %	20 %
Moyenne de Cov	6.71%	11.06%	14.49 %	17.47 %
Ecart type de Cov	19.36%	30.90%	39.78 %	47.23 %
Plage de Cov de PSA	1.34% -16.61%	2.00% -26.13%	3.65% -29.19%	5.31 %- 30.30 %

**Tableau 6.4:** valeurs de coefficient de variation de PSA. *Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.*

Cov de la fréquence	5 %	10 %	15 %	20 %
Moyenne de Cov	9.23%	16.02%	27.38%	27.40%
Ecart type de Cov	29.26%	50.12%	80.45%	80.32%
Plage de Cov de PSA	0.46% -25.96%	1.54% -42.57%	2.84% -54.77%	2.89% -55.34%



**Figure 6.1** : Spectre  $\text{moyen} \pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération pour différentes  $Cov$  de la fréquence : a)  $Cov = 5\%$ , b)  $Cov = 10\%$ , c)  $Cov = 15\%$ . d)  $Cov = 20\%$  pour une loi log normale, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.



**Figure 6.2 :** Spectre moyen $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération pour différentes Cov de la fréquence : a) Cov = 5 %, b) Cov = 10 %, c) Cov = 15 %. d) Cov = 20 % pour une loi log normal, Le spectre correspond au séisme Parkfield du 27 juin 1966.

### 3. Applications numériques pour La loi Gamma :

Nous présentons dans ce qui suit, les principaux résultats d'une simulation numérique avec une description de la fréquence en utilisant La distribution Gamma qui s'est jugée convenable pour la variabilité dans les fréquences.

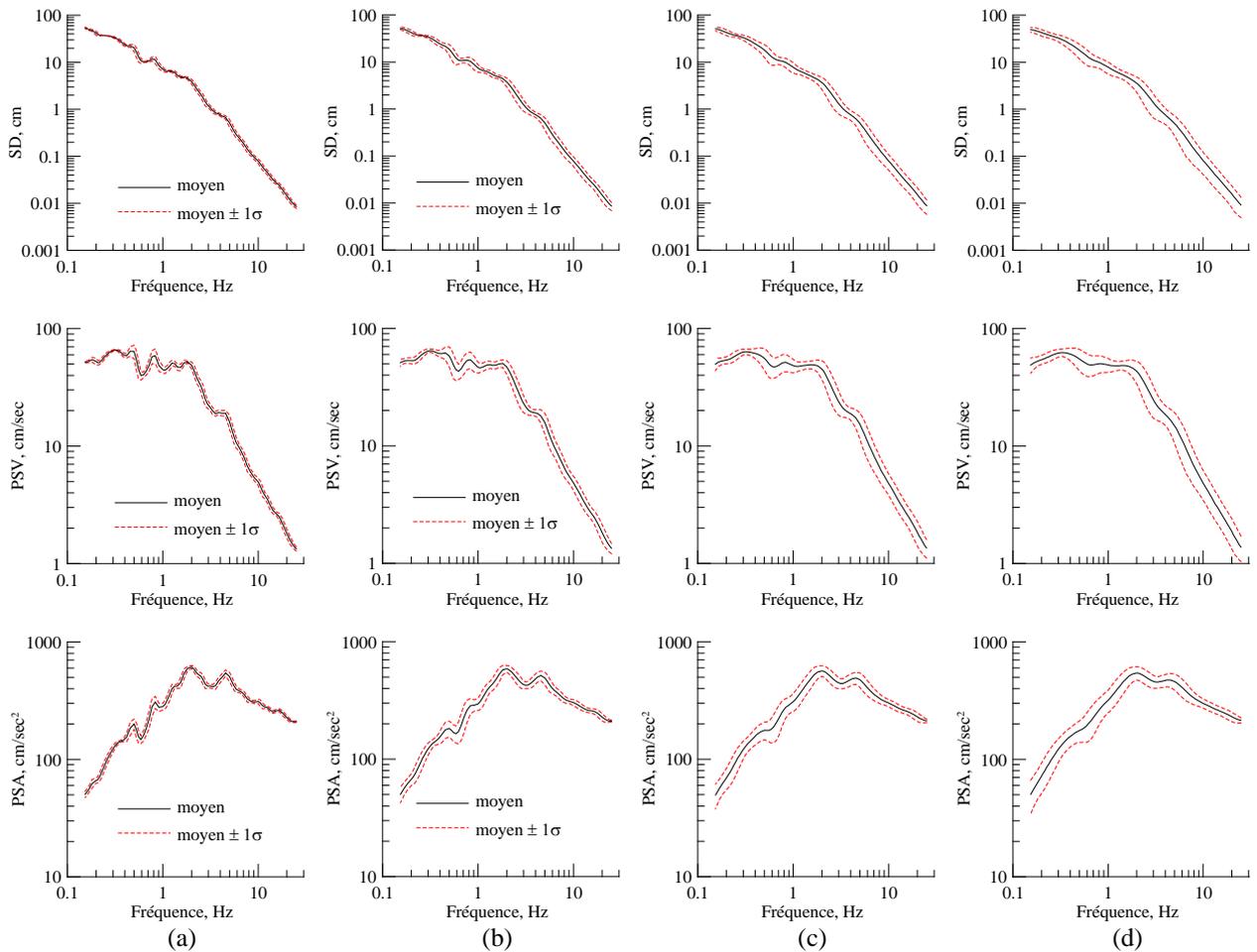
Les tableaux (6.5, 6.6) représentent les valeurs des paramètres statistiques qui concernent le coefficient de variation de PSA pour différentes valeurs de Cov de la fréquence (5%, 10%, 15% et 20%). Pour les deux accélérogramme, accélérogramme du séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, et celui du séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

**Tableau 6.5 :** valeurs de coefficient de variation de PSA. *Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.*

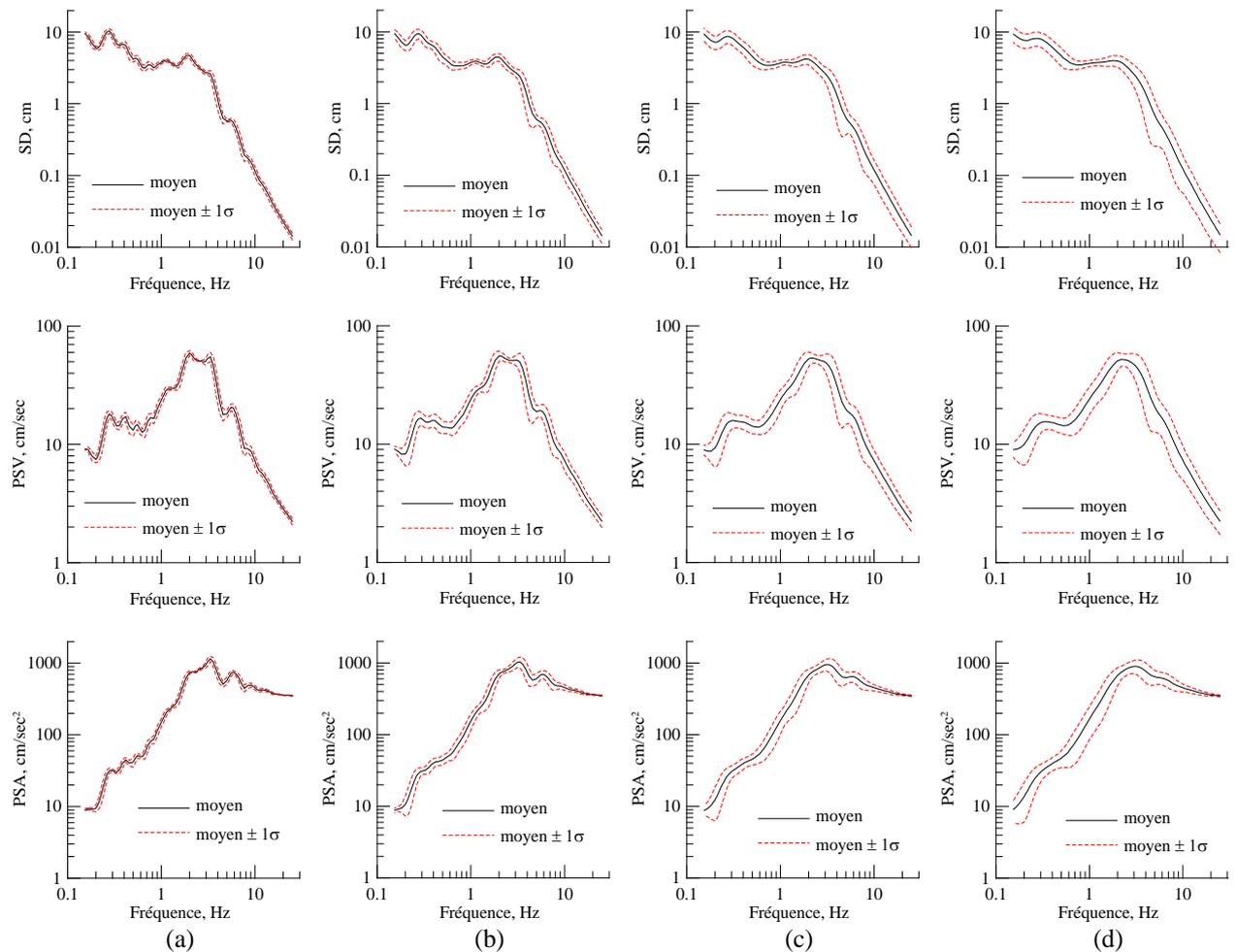
Cov de la fréquence	5 %	10 %	15 %	20 %
Moyenne de Cov	6.73 %	11.09 %	14.66 %	17.76%
Ecart type de Cov	19.39 %	30.97 %	40.18 %	47.79%
Plage de Cov de PSA	1.33 % -17.24 %	1.81 % -26.33 %	3.54 % -29.47 %	5.08 % -31.87 %

**Tableau 6.6 :** valeurs du coefficient de variation de PSA. *Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.*

Cov de la fréquence	5 %	10 %	15 %	20 %
Moyenne de Cov	9.28%	16.24%	22.44%	28.37%
Ecart type de Cov	29.36%	50.27%	67.18%	81.18%
Plage de Cov de PSA	0.45 % -25.76 %	1.56 % -42.90 %	2.24 % -51.14 %	2.78% -56.03%



**Figure 6.3 :** Spectre moyen $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération pour différentes Cov de la fréquence : a) Cov =5 %, b) Cov =10 %, c) Cov =15 %. d) COV =20 % pour une loi gamma, Le spectre correspond au séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.



**Figure 6.4 :** Spectre moyen  $\pm 1$  écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération pour différentes COV de la fréquence : a) COV = 5 %, b) COV = 10 %, c) COV = 15 %. d) COV = 20 % pour une loi gamma, Le spectre correspond au séisme Parkfield du 27 juin 1966.

Les figures (6.1, 6.2, 6.3 et 6.4) montrent, à titre d'illustration, les valeurs de réponse spectrale, pour les deux lois de probabilité log normal et Gamma qui sont utilisées pour modéliser les caractéristiques probabilistes de la fréquence, obtenue pour les réponses en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération d'un oscillateur à paramètres dynamiques incertains. On constate que l'incertitude sur la fréquence varie sensiblement pour les spectres SD, PSV et PSA. On peut observer, à partir des résultats des figures (6.1, 6.2, 6.3 et 6.4), notamment pour les spectres en pseudo-vitesse, que même de petites incertitudes dans les propriétés structurales peuvent avoir une influence considérable sur les amplitudes spectrales. En général, pour une incertitude sur la fréquence, l'influence décroît avec une augmentation de la fréquence.

L'effet des incertitudes inhérentes aux valeurs de fréquence sur la réponse structurale est bien analysé, cet effet qui a apparu très important. Par exemple, une variation des valeurs de fréquence avec  $Cov = 10\%$  conduit à une variation des réponses spectrales plus grandes que  $Cov = 42\%$  pour les deux lois de probabilité.

Cette étude a montré l'importance de la prise en considération des incertitudes sur les caractéristiques structurales dans la conception et le design des structures, on a constaté que les fluctuations des réponses peuvent atteindre des valeurs de coefficient de variation de l'ordre de  $20\%$  peuvent engendrer des désordres certains dans la non-prise en compte de ces fluctuations peut conduire à la conception des structures non fiables pour un niveau d'excitation donnée.

Les tableaux (6.3, 6.4, 6.5 et 6.6) représentent les valeurs des paramètres statistiques qui concernent le coefficient de variation de PSA pour différentes valeurs de  $Cov$  de la fréquence ( $5\%$ ,  $10\%$ ,  $15\%$  et  $20\%$ ). Pour les deux accélérogrammes, accélérogrammes de séisme d'El-Centro du 18 mai 1940 et celle de séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

Tous les graphes (6.1, 6.2, 6.3 et 6.4) présentés précédemment ont la caractéristique se décompose en trois parties :

- ✚ Une zone à basse fréquence où la réponse de l'oscillateur est contrôlée essentiellement par le déplacement d'appui, indépendamment de la fréquence. Cette indépendance est remarquée dans ces graphes, on voit que l'influence de la variation de la fréquence est diminuée pour la zone de basses fréquences ;
- ✚ Une zone à haute fréquence, il apparaît clairement que l'influence de la variation de la fréquence est diminuée pour la zone de haute fréquence aussi ;
- ✚ Une zone de fréquences intermédiaires située entre les deux zones précédentes où les réponses en pseudo-accélération et en pseudo-vitesse sont généralement amplifiées par rapport aux valeurs maximales de l'accélération et de la vitesse du support ; cette zone présente des pics et des vallées distribuées de façon apparemment aléatoire ; elle est assez bien vérifiée pour des accélérogrammes réels, pour des fréquences comprises entre  $5\%$  et  $20\%$ .

#### 4. Conclusions :

Pour l'estimation probabiliste de la réponse sismique, la technique de simulation de Monte Carlo a été utilisée, Néanmoins, pour la génération des valeurs de fréquence, il a été nécessaire de déterminer le nombre optimal d'échantillons sur la base d'une procédure de calcul en fonction de la stabilité des fluctuations des paramètres statistiques de l'estimation de la probabilité de défaillance retenue et ceci pour chacune des deux lois de probabilité.

On a étudié l'influence des fluctuations des valeurs des fréquences sur celle de la réponse sismique. On remarque que plus la fluctuation de la fréquence augmente, plus que la fréquence de la réponse augmente et ça quelle que soit la fonction de densité de probabilité et l'action sismique considérés.

Cette étude a montré l'importance de la prise en considération des incertitudes sur les caractéristiques structurales dans la conception et le design des structures, il a été montré que les fluctuations de la réponse peuvent atteindre des valeurs de coefficient de variation dans l'ordre de 0.3 % à 46 %. Ces fluctuations peuvent engendrer des désordres certains dans la non-prise en compte de ces fluctuations peut conduire à la conception des structures non fiable pour un niveau d'excitation donnée.

Les valeurs spectrales varient sensiblement avec la fréquence de l'oscillateur, notamment dans le domaine des hautes fréquences. Cette variation est d'autant plus sensible que la valeur de la fréquence est plus faible.

De façon générale, les résultats numériques obtenus montrent que même de petites incertitudes dans les caractéristiques dynamiques peuvent avoir une incidence significative sur les amplitudes spectrales. En général, pour une incertitude sur la fréquence, l'influence décroît avec une augmentation de la fréquence.

On remarque que la variation de la fréquence peut engendrer de grandes variations sur la réponse des structures, où on observe des valeurs plus grands de coefficients de variations de réponse peut atteindre 46 % pour une loi Gamma et 32 % pour une loi Gamma.

La simulation en utilisant la méthode de Monte Carlo fournit une méthode simple et pratique pour l'évaluation de la variabilité des amplitudes de la réponse spectrale induite par de petites incertitudes sur les paramètres dynamiques.

L'influence de la variation de la fréquence dépend de la période propre de la structure, où on a observé pour la même variation de celle-ci une différence de variation de réponse pour chaque fréquence.

## CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre de ce mémoire de magister, nous avons été amenés à étudier l'effet des incertitudes des fréquences propre de vibrations sur la réponse dynamique des structures.

En se basant sur des considérations physiques du problème, nous avons testé quatre lois de densité de probabilité et les résultats ont montré que la physique du problème n'était restituée que par deux lois de distribution de probabilité seulement, qui sont la loi Gamma et la loi Log normal. Ces deux lois ont été retenues pour la suite de notre travail.

Pour l'estimation probabiliste de la réponse sismique, la technique de simulation de Monte Carlo a été utilisé, pour la génération des valeurs de la fréquence, il a été nécessaire de déterminer le nombre optimal d'échantillons sur la base d'une procédure de calcul basé sur la stabilité des fluctuations des paramètres statistiques de l'estimateur de la probabilité de défaillance retenue et ceci pour chacune des deux lois de probabilité.

Une fois les paramètres de simulations retenus, il a été procédé à l'étude de l'effet des fonctions de densité de probabilité de la fréquence sur la réponse structurale. Il a été constaté que les fluctuations de la réponse dynamique des structures en utilisant la loi Gamma sont relativement plus importantes que celles obtenus avec la Loi log normal. Pour les deux lois de probabilités sélectionnées, la convergence de la Méthode de Monte Carlo a été obtenue pour un nombre minimal  $N$  d'échantillons égal à 30 000.

L'effet des fluctuations des valeurs de la fréquence sur celles de la réponse sismique montre que plus les fluctuations de la fréquence augmentent, plus celles de la réponse augmente et ceci quelque soit la fonction de densité de probabilité et l'action sismique considérées.

Les spectres de réponse obtenus constituent une information synthétique extrêmement utile, ils comportent en général trois parties :

- ✚ Une zone à basse fréquence où la réponse de l'oscillateur est contrôlée essentiellement par le déplacement du support. En passant à la limite (ressort infiniment souple), la masse ne bouge pas dans les axes absolus et il y a égalité stricte entre ces déplacements maximaux (relatif pour la masse, absolu pour le support), indépendamment de la fréquence.

- ✚ Une zone en hautes fréquences, où la réponse de l'oscillateur est contrôlée essentiellement par l'accélération du support, dans laquelle on remarque que l'influence de la variation de la fréquence est moindre.

✚ Une zone de fréquences intermédiaires située entre les deux zones précédentes, dans laquelle, les valeurs de la réponse spectrale présente des extrema distribués de façon apparemment aléatoire. Ces extrema sont obtenus quelque soit la valeur de la fréquence choisie dans l'intervalle 1 % à 20 %. On remarque une grande sensibilité des valeurs de la réponse spectrale aux fluctuations de la fréquence ; en effet, des petites variations de la fréquence engendrent de relativement importantes variations de la réponse.

Cette étude a montré l'importance de la prise en considération des incertitudes sur les caractéristiques structurales dans la conception et le design des structures, il a été montré que les valeurs du coefficient de variation des fluctuations de la réponse et de l'ordre de 10 %. Cette variabilité très importante de la réponse structurale n'exclue pas l'occurrence de niveaux de sollicitation très important rendant la structure très vulnérable si celle-ci a été dimensionnée pour des seuils moyens de réponse.

Cette étude peut être étendue en vue de prendre en considération les effets des incertitudes systématiques induites en général par l'ingénieur dans les valeurs adoptées pour les paramètres dynamiques (masse, rigidité, fréquence propre de vibration), et à l'intégration des aspects fiabilistes dans la conception des structures vis-à-vis des tremblements de terre.

L'étude peut être aussi étendue à l'étude de l'influence de variations de la fréquence sur la réponse dynamique de structure en considérant les aspects relatifs aux différents règlements parasismiques en vigueur de part le monde.

De façon générale, les résultats numériques obtenus montrent que :

✚ La variation du coefficient de variation engendré une variation de la réponse des structures, l'écart type augment avec l'augmentation du Cov ;

✚ Les deux enregistrements sismiques influent sur la réponse, le type de la plage de variation des fréquences de l'enregistrement 'une plage large pour El-Centro pas de grande pic' et 'une plage étroite pour Parkfield avec des pic considérable '. elle à montre que séisme de Parkfield donne des totaux plus grande que celle d'El-Centro ;

✚ Les deux lois de distribution n'influe pas sur la réponse des structures (l'écart type) ;

✚ La comparaison des deux méthodes de calcul, elle nous à donne des résultats similaire pour les deux méthodes.

Les conclusions suivantes peuvent être tirées de ce travail:

✚ Les valeurs spectrales varient sensiblement avec la fréquence de l'oscillateur, notamment

dans le domaine des basses fréquences. Cette variation est d'autant plus sensible que la valeur de la fréquence est plus faible.

✚ De façon générale, les résultats numériques obtenus montrent que même de petites incertitudes dans les caractéristiques dynamiques peuvent avoir une incidence significative sur les amplitudes spectrales. En général, pour une incertitude sur l'amortissement, l'influence décroît avec une augmentation de la fréquence.

✚ On remarque que la variation de la fréquence peut engendrer des grandes variations sur la réponse des structures, où on observe des grands valeurs de coefficients de variations de réponse peut atteindre 42.90% pour un coefficient de variation de la fréquence de  $Cov = 10\%$ .

✚ La simulation en utilisant la méthode de Monte Carlo fournit une méthode simple et pratique pour l'évaluation de la variabilité des amplitudes de la réponse spectrale induite par de petites incertitudes sur les paramètres dynamiques.

✚ L'influence de variation de la fréquence dépend de la fréquence propre de la structure, où on a observé pour la même variation de la fréquence une différence de variation de réponse pour celle ci.

De façon générale, les résultats numériques obtenus montrent que même de petites incertitudes dans les caractéristiques dynamiques peuvent avoir une incidence significative sur les amplitudes spectrales. En général, pour une incertitude sur la fréquence, l'influence décroît avec une augmentation de la fréquence. En revanche, pour une incertitude sur la fréquence propre, l'influence décroît légèrement avec une diminution de la fréquence. On constate aussi que de manière générale, l'influence des incertitudes décroît avec une augmentation de la raideur du sol.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

1. Amini, A. and M.D. Trifunac (1985). *Statistical extension of response spectrum superposition*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., 4, 54–63.
2. Basu, B., V.K. Gupta and D. Kundu (1996). *Ordered peak statistics through digital simulation*. Earthq. Eng. Struct. Dyn. , 25, 1061–1074.
3. Basu, B., V.K. Gupta and D. Kundu (1996a), *A Markovian approach to ordered peak statistics*. Earthq. Eng. Struct. Dyn., 25, 1335–1351.
4. Ben Ahmed, B (2009). *Effet de l'incertitude inhérent à l'amortissement sur la réponse des structures sous excitations sismiques. Mémoire de magister ENP Alger*.
5. Bendat, J.S. and A.G. Piersol (1986). *Random Data Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley & Sons, mc. New York.
6. Bozorgnia, Y. and V. Bertero (2004). *Earthquake engineering*, CRC Press, New York, NY.
7. Cartwright, D.E. and M. S. Longuet-Higgins (1956). *The statistical distribution of maxima for a random function*, Proc. Royal Soc. of London, Ser. A327, 212–232.
8. Clough, R.W. and J. Penzien (1975). *Dynamics of structures*, Mc Graw–Hill, New York, NY.
9. Elghadamsi, F.E., B. Mohraz, C.T. Lee and P. Moayad (1988). *Time dependent power spectral density of earthquake ground motion*. Soil Dynam. & Earthq. Eng., 7(1), 15–21.
10. Gupta, I.D. (1994a). *Defining effective peak acceleration via order statistics of acceleration peaks*. Europ. Earthquake Eng., 11, 3–11.
11. Gupta, I.D., R.G. Joshi and (1993). *On synthesizing response spectrum compatible accelerograms*. Europ. Earthquake Eng., 2, 25–33.
12. Gupta, I.D., R.G. Joshi and V.K. Pandit (1994). *A note on design power spectral density function of strong earthquake ground motion*. Proc. 10<sup>th</sup> Symp. On Earthquake Eng., Nov. 16-18, Roorkee, 843–852.
13. Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1988). *Order statistics of peaks in earthquake response*. J. Engng. Mech. Div., ASCE, 114(10), 1605–1627.
14. Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1998a). *Defining equivalent stationary PSDF to account for nonstationarity of earthquake ground motion*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., 17, 89–99.
15. Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1998b). *A note on the statistics of ordered peaks in stationary stochastic processes*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., 17, 317–328.
16. Hammoutene, M. (1995). *Simulation nonstationnaire et bidimensionnelle des enregistrements de tremblements de terre. Thèse de doctorat d'état ENP Alger*.
17. Hammoutene, M., B. Tiliouine, P.Y. Bard (2000). *On the phase content modelling of earthquake strong ground motions*. Europ. Earthquake Eng., 2, 27–34.
18. Lai, S.P. (1982). *Statistical characteristics of strong ground motions using power spectral density function*. Bull. Seism. Soc. Amer., 72, 259—274.
19. McCann, M.W., H.C. Shah (1979). *Determining strong-motion duration of earthquake*. Bull. Seism. Soc. Amer., 69, 1253-1265.

20. Novikova, E.I., M.D. Trifunac (1994). *Duration of strong ground motion in terms of earthquake magnitude, epicentral distance, site conditions and site geometry*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., 23, 1023-1043.
21. Patricia B (2001) *Eléments de conception parasismique à l'usage des techniciens du bâtiment. cours de construction parasismique volume 2.DDE Martinique SECQUIP*.
22. Paultre, P. (2005). *Dynamique des structures application aux ouvrages de genie civil*. Lavoisier, Paris.
23. Preumont, A. (1980). *A Method for the generation of artificial earthquake accelerograms*, Nuclear Engineering and design, 59, 357-368.
24. Preumont, A. (1990). *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne.
25. Règles Parasismiques Algériennes RPA2003, (2003).Centre National de Recherches Appliquées en Génie Parasismique, D.T.R.-B.C.-2.48, Alger.
26. Reinoso, E., M. Ordaz (2001). *Duration of strong ground motion during Mexican earthquakes in terms of magnitude, distance to the rupture area and dominant site period*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., 30, 653-673.
27. Sabetta, F., A. Pugliese (1996). *Estimation of response spectra and simulation of nonstationary earthquake ground motions*. Bull. Seism. Soc. Amer., 86, 337-352.
28. Şafak, E. (1988). *Analytical approach to calculation of response spectra from seismological models of ground motion*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., 16, 121–134.
29. Seed, H.B., C. Ugas and J. Lysmer (1976). *Site-dependent spectra for earthquake resistant design*. Bull. Seism. Soc. Amer., 66, 221–234.
30. Sibson, R.H. (1989). *Earthquake faulting as a structural process*. Journal of structural geology, 11, 1-14.
31. Smith, K. Shust, W.C (2004). *Bounding Natural Frequencies in Structures I: Gross Geometry, Material and Boundary Conditions. Proceedings of the XXII International Modal Analysis Conference, Society of Experimental Mechanics*,
32. Shust, W.C. Smith, K. *Bounding Natural Frequencies in Structures II: Local Geometry, Manufacturing and Preload Effects. Proceedings of the XXII International Modal Analysis Conference, Society of Experimental Mechanics*,
33. Tiliouine, B., M. Hammoutene, P.Y. Bard (1992). *A two dimensional nonstationary optimized accelerogram scaled for magnitude, distance and soil conditions*. Proc. 10th World Conference on Earthquake Engineering. 817-821.
34. Tiliouine, B., S. Zermout, A. Mebarki et C. Soize (2003). *Génération de spectre de puissance pour l'analyse stochastique de la réponse sismique des structures*. Proc. VI<sup>e</sup> Colloque National AFPS, Génie parasismique : Aspects dynamiques et vibratoires en Génie Civil, Palaiseau, France, 1, 107–114.
35. Tiliouine, B. et S. Zermout (2003). *Sur les spectres de réponse des systèmes à paramètres incertains*. Proc. Colloque international, Risque vulnérabilité et fiabilité dans la construction : Vers une réduction des désastres, Alger, 1, 253–267.
36. Trifunac, M.D. and A.G. Brady (1975). *A study on the duration of strong earthquake ground motion*. Bull. Seism. Soc. Amer., 65(3), 581–626.
37. Trifunac, M.D. (1978). *Response spectra for earthquake ground motion*. J. Engng. Mech.

- Div., ASCE, (EM5), 1081-1097.
38. U.S. Nuclear Regulatory Commission (1973). *Design response spectra for seismic design of nuclear power plants*. Regulatory guide 1.60, Washington D.C.
  39. Vanmarcke, E.H., S.P. Lai (1980). *Strong-motion duration and RMS amplitude of earthquake records*. Bull. Seism. Soc. Amer., 70, 1293-1307.
  40. Zermout, S. (2004). *Investigation de la réponse stochastique des structures sous excitations sismiques*. Thèse de magister ENP Alger.
  41. Zerva, A., T. Harada (1997). *Effet of surface layer stochasticity on seismic ground motion coherence and strain estimates*. Soil Dynam. & Earthq. Eng., 16, 445-457.