



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

## *Département Génie Mécanique*

### Laboratoire de **Génie Mécanique** et **Développement**

---

## *MÉMOIRE DE MAGISTÈRE*

*Option : Construction Mécanique*

*Étudié par :*

***Zebar Mohamed El Mahdi***

***Ingénieur d'Etat en Génie Mécanique - U. Blida***

### *Thème*

**Approche déterministe de la fissuration dans les milieux Multicouches Multi-fissurés: Simulation par la méthode de discontinuité de déplacement**

**Soutenu le : 05/01/2012**

**Devant le Jury composé de :**

<b>Président</b>	<b>Mohamed BOUAZIZ</b>	<b>MC-A</b>	<b>ENP</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>Yacine BELKACEMI</b>	<b>MA-A</b>	<b>ENP</b>
<b>Examineur</b>	<b>Said RECHAK</b>	<b>Professeur</b>	<b>ENP</b>
<b>Examineur</b>	<b>Nadir MESRATI</b>	<b>Professeur</b>	<b>ENP</b>

---

**E.N.P 10, Avenue Hassan Badi, EL HARRACH, ALGER Tél.(021) 52.14.92**

**Fax.(021) 52.29.73 Web: [www.enp.edu.dz](http://www.enp.edu.dz)**

## ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة محاكاة انتشار التشققات في الأوساط متعددة الطبقات بواسطة طريقة الانتقالات غير المستمرة في لأوساط ثنائية الأبعاد . تم بناء الصيغة العددية ابتداء من الصيغة الرياضية قمنا بإعادة انجاز برنامجا حسابيا وإدخال ثلاث معايير لي انتشار التشققات واستعمالها و بفضل هذا البرنامج نستطيع حساب عامل شدة الأجهادات لي شق أو عدت شقوق في نفس الوقت و معرفة طريق انتشار شق أو عدت شقوق في لأوساط الغير متجانسة باستعمال ثلاثة معايير تم أيضا برمجة حساب معاملات داندورس لمعرفة مدى تأثير مميزات الطبقات على طريق انتشار التشققات.

**كلمات مفتاحية:** مكانيك التشققات، شق، طريقة الانتقالات غير المستمرة، عامل شدة الاجهادات، انتشار

التشققات، تعدد الطبقات، تعدد الشقوق، تداخل التشققات.

---

## RESUME

Ce travail de recherche s'intéresse à la simulation de la propagation de fissures dans les multicouches par la méthode de discontinuité de déplacement en bidimensionnel.

La mise en forme de la procédure numérique à partir de la formulation mathématique est faite. Un code de calcul a été reformulé où trois critères de propagation ont été implémentés et utilisés. Grâce à ce code, nous pouvons déterminer le facteur d'intensité de contrainte d'une fissure ou plusieurs fissures simultanément et déduire la trajectoire de propagation d'une fissure ou plusieurs fissures en milieux non homogènes en utilisant ces trois critères. Les paramètres de Dundurs sont implémentés pour apprécier l'effet des caractéristiques des couches sur le chemin de propagation des fissures

**Mots clés :** Mécanique de la rupture, fissure, Méthode de discontinuité de déplacement, Facteur d'intensité de contrainte, propagations de fissures, multicouches, multi-fissures, interactions de fissures.

---

## ABSTRACT

This research focuses on the simulation of crack propagation in multilayer materials using the two-dimensional displacement discontinuity method.

The formulation of the numerical procedure from the mathematical formulation is made.

A computer code was rewritten and three criteria have been implemented and used. We can determine the stress intensity factor of a crack or multiple cracks simultaneously and deduce the trajectory of propagation of a crack or multiple cracks using these failure criteria in multilayered materials. Dundurs parameters are calculated to assess the effect of the layer's characteristics on the crack path.

**Key words:** Fractures mechanics, crack, Displacement Discontinuity Method, Stress intensity factor, Dundurs parameter, multilayered materials, crack propagation, Interacting crack growth.

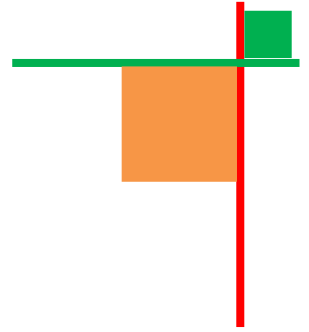
# Dédicaces

---

*Je dédie ce travail à mes parents pour la patience et le dévouement dont ils ont fait preuve pour leur soutien inconditionnel durant ces longues années, à mon frère, à mon promoteur et mes amis*

*Et, tous les enseignants et élèves de l'École Nationale Polytechnique.*

# Remerciements



Je remercie en premier lieu, Dieu tout Puissant, de m'avoir donné la force, le courage et la patience, et la capacité d'arriver à ce stade du savoir pour bien mener ce travail.

Je tiens particulièrement à exprimer, à travers ces quelques lignes, toute ma gratitude et mon profond respect à mon Promoteur : Dr Y. BELKACEMI, enseignant à l'école Nationale Polytechnique d'El-Harrach pour avoir accepté et dirigé ce travail, pour les nombreuses discussions que nous avons eues, malgré un emploi du temps chargé, pour sa sensibilité, à mon égard, le respect et la sympathie dont je fus témoins, et pour m'avoir montré l'importance de ce domaine.

Je remercie vivement Monsieur Kébir Hocine maître de conférences à l'université de Compiègne d'avoir accepté une communication privée avec nous pour faire le parallèle avec quelques expériences

Je remercie vivement le Dr. M. Bouaziz, Maître de Conférences à l'ENP, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je remercie sincèrement le Professeur Said RECHAK et le Professeur Nadir MESRATI qui ont bien voulu accepté d'examiner et évaluer mon travail.

Je veux également remercier mes parents, dont la présence à mes côtés, et le soutien constant, surtout pendant les moments difficiles, m'ont permis l'avènement de ce travail.

Je souhaite pour finir, exprimer mes plus grands remerciements à mon « autre famille », mes amis les plus chers, aussi chaleureusement à l'ensemble du personnel de l'école Nationale Polytechnique.

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
------------------------------------	----------

---

<b>CHAPITRE I</b>	<b>Méthode des Eléments Frontières</b>
-------------------	--

---

I.1 Introduction .....	6
I.1.1 Approche Indirecte .....	6
I.1.2 Approche directe .....	6
I. 2 Avantages de la méthode d'élément frontière .....	6
I.3 Méthode directe .....	7
I.3.1 Equation de Base .....	7
I.3.2 Solution fondamentale .....	8
I.3.3 Identité de Somigliana .....	10
I.4 Méthodes indirectes .....	11
I.5 Méthode de discontinuité de déplacement (MDD) .....	13
I.5.1 Principe de la Méthode de discontinuité de déplacement (MDD) .....	13
I.5.2 Procédure de la MDD dans un solide infini .....	13
I.5.3 Procédure numérique .....	15
I.5.4 Transformation de coordonnées .....	16
I.5.5 Coefficient d'influence .....	17

---

<b>CHAPITRE II</b>	<b>Notions sur la Mécanique de la Rupture</b>
--------------------	---

---

II.1 Introduction .....	21
II.2 Eléments de la Mécanique de la rupture .....	21
II.3 Modes élémentaires de fissuration .....	23
II.4 Champ de contraintes en pointe de fissure .....	23
II.5 Facteurs d'intensité de contrainte (Approche locale) .....	25
II.6 Méthodes énergétiques (Approche Globale) .....	26
II.6.1 Théorie énergétique de Griffith .....	26
II.7 Critère de branchement de fissure .....	26
II.7.1 Critère du taux de restitution d'énergie (MSERRC) .....	27
II.7.2 Taux de restitution d'énergie $G$ et énergie potentielle .....	28
II .7.3 Critère de la contrainte tangentielle maximale (MCSC) .....	28
II.7.4 Formule de taux de restitution d'énergie $G$ en $K_I$ formule de Hussain .....	29
II .7.5 Critère de densité d'énergie minimale (MSEDC) .....	30
II .7.5 .1 Stabilité et instabilité de propagation de la fissure .....	31
II.7.6 Autres méthodes .....	32

---

<b>CHAPITRE III</b>	<b>Notions sur les Matériaux Multicouches</b>
---------------------	---

---

III.1 Application de la méthode de discontinuité de déplacement aux bi-matériaux ....	35
III.2 Fissure proche de l'interface .....	39
III.2.1 Double Singularités .....	39
III.2. 2 Expression du taux de restitution d'énergie en multicouche.....	41
III.3 Structure du code de calcul.....	41
III.4 Conclusion .....	44

---

## **CHAPITRE IV**

## **Exemples, Résultats& Interprétation**

---

IV.1 Introduction .....	46
IV.2 Test de performance .....	46
IV.3 Première catégorie d'exemples (matériaux multicouches à une fissure) .....	48
IV.4 Deuxième catégorie d'exemples (matériaux multicouches à plusieurs fissures ....	57
IV.5 CONCLUSION ... ..	68

---

<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>70</b>
----------------------------------	-----------

## **Bibliographie**

# NOMENCLATURE

## Notations

$N$  : Nombre d'éléments de la discrétisation

$u_i$  : Champ de déplacement dans la direction  $i$

$u_i^*$  : Champ de déplacement auxiliaire

$\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker

$a$  : Fissure initiale en  $m$

$D_i$  : Discontinuité de déplacement suivant  $i$  en  $m$

$D_j$  : Discontinuité de déplacement dans la direction  $j$

$D_x$  : Discontinuité de déplacement suivant  $x$  en  $m$

$D_y$  : Discontinuité de déplacement suivant  $y$  en  $m$

$\mu$  : Module de cisaillement en  $MPa$

$\mu_1$  : Module de cisaillement pour le matériau 1

$\mu_2$  : Module de cisaillement pour le matériau 2

$\mu_i$  : Module de cisaillement de la couche  $i$  en  $MPa$

$x^i$  : Orientation de l'élément  $i$  suivant l'axe des  $x$  dans un repère global

$y^i$  : Orientation de l'élément  $i$  suivant l'axe des  $y$  dans un repère global

$\beta^i$  : Angle d'orientation de l'élément  $i$  suivant le repère local

$\beta^j$  : Angle d'orientation de l'élément  $j$  suivant le repère local

$U_i$  : Déplacement suivant la direction de l'axe  $i$  en  $m$

$U_x$  : Déplacement suivant la direction de l'axe  $x$  en  $m$

$U_y$  : Déplacement suivant la direction de l'axe  $y$  en  $m$

$U_s^i$  : Déplacement tangentiel de l'élément  $i$  en  $m$

$U_n^i$  : Déplacement normal de l'élément  $i$  en  $m$

$\sigma_s^i$  : Contrainte tangentielle de l'élément  $i$  en  $MPa$

$\sigma_n^i$  : Contrainte normale de l'élément  $i$  en  $MPa$

$A_{ss}^{ij}, A_{sn}^{ij}, A_{ns}^{ij}, A_{nn}^{ij}$  : Sont les coefficients d'influence relatifs aux contraintes sur la frontière

$B_{ss}^{ij}, B_{sn}^{ij}, B_{ns}^{ij}, B_{nn}^{ij}$  : Sont les coefficients d'influence relatifs aux déplacements sur la frontière

$J$  : Intégrale de Rice

$\sigma$  : Contrainte en  $MPa$

$\sigma_{ij}$  : Champ de contrainte en  $MPa$

$\sigma_{ij}^*$  : Champ de contrainte auxiliaire en  $MPa$

$\sigma$  : Tenseur des contraintes

$\epsilon$  : Tenseur linéarisé des déformations

$F_j$  : Les composantes des forces de volumes

$\bar{F}^*$  : Charges concentrées unitaires

$\lambda_L$  : Coefficient de Lamé

$\mu_L$  : Coefficient de Lamé

$\lambda_1$  : Exposant du champ de contrainte singulier en tête d'une fissure

$\lambda_2$  : Exposant du champ de contrainte singulier en tête d'une fissure

$\bar{T}(M, \bar{n})$  : Vecteur contrainte agissant au point  $M$  présentant une normale  $\bar{n}$

$\Gamma$  : Contour

$\bar{n}$  : Normale

$\delta(M - P)$  : est la distribution de Dirac.

$\bar{u}^*$  : Champ de déplacement virtuel

$\bar{u}$  : est le champ de déplacement réel.

$U_{ij}^*(M, P)$  : Déplacement du point  $M$  dans la direction  $j$  dû à une force unitaire appliquée au point  $P$  dans la direction  $i$

$\tau_{ij}^*$  : Tension au point  $M$  dans la direction  $j$  due à une force unitaire dans la direction  $i$

$F_i^*$  : Force de volume (problème de Kelvin)

$D$  : Domaine

$D^-$  : Domaine intérieur

$D^+$  : Domaine extérieur



$c_{ij}$  : Est un terme libre qui dépend de la régularité du contour.

$f_{ij}^\alpha$  : Fonction

$K_1$  : Facteur d'intensité de contrainte Mode I (Approche locale) en  $MPa\sqrt{m}$

$K_2$  : Facteur d'intensité de contrainte Mode II (Approche locale) en  $MPa\sqrt{m}$

$K_3$  : Facteur d'intensité de contrainte Mode III (Approche locale) en  $MPa\sqrt{m}$

$[U_i]$  : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction  $i$  en  $m$

$[U_x]$  : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction  $x$  en  $m$

$[U_y]$  : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction  $y$  en  $m$

$[U_z]$  : Discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction  $z$  en  $m$

$r$  : Rayon au voisinage de la tête de fissure en  $m$

$r_0$  : Longueur étendue qui sépare la région de l'homogénéité macroscopique de celle de l'inhomogénéité microscopique

$G$  : Taux de restitution d'énergie  $MPa \cdot m$

$G'$  : Taux de restitution d'énergie normalisée sans unité

$\gamma$  : Energie de surface

$W_p$  : Energie potentielle

$\Phi_{ext}$  : Le travail des forces extérieures

$W_e$  : L'énergie de déformation élastique du système

$\bar{F}$  : Force extérieure

$P$  : Force imposée en N

$\vec{u}$  : Vecteur de déplacement

$dS$  : Surface correspondant au travail extérieur

$G_c$  : Energie critique pour déclenchement de propagation en  $MPa \cdot m$

$K_\alpha$  : Facteur d'intensité de contrainte en Mode  $\alpha$  en  $MPa\sqrt{m}$

$K_I$  : Facteur d'intensité de contrainte en Mode I en  $MPa\sqrt{m}$

$K_{II}$  : Facteur d'intensité de contrainte en Mode II en  $MPa\sqrt{m}$

$K_{III}$  : Facteur d'intensité de contrainte en Mode III en  $MPa\sqrt{m}$

$K_i$  : Facteur d'intensité de contrainte en  $i$  Mode en  $MPa\sqrt{m}$

$\theta_c$  : Angle de branchement en degré  
 $\kappa$  : Constante élastique sans unité  
 $\psi$  : Taux de mode sans unité  
 $R_{(KII, KI)}$  : Rapport de KII sur KI  
 $\sigma_{\theta\theta}$  : Contrainte circonférentielle en  $MPa$   
 $\varepsilon$  : Constante bi-élastique  
 $\varepsilon_{ij}$  : Champ de déformation  
 $\varepsilon_{ij}^*$  : Champ de déformation auxiliaire  
 $E$  : Module de Young en  $MPa$   
 $E_i$  : Module de Young de la couche  $i$  en  $MPa$   
 $\nu$  : Coefficient de Poisson sans unité  
 $\nu_i$  : Coefficient de Poisson de la couche  $i$  sans unité  
 $V$  : Volume  
 $S$  : Densité d'énergie  
 $C_1$  : Contour de la couche 1  
 $C_2$  : Contour de la couche 2  
 $R_1$  : Milieu 1  
 $R_2$  : Milieu 2  
 $R$  : Rapport des modules de Young de deux matériaux  
 $i$  : Élément  
 $i^*$  : Élément opposé  
 $D_s^{[1]}$  : Discontinuité de déplacement tangentielle dans le milieu 1  
 $D_s^{[2]}$  : Discontinuité de déplacement tangentielle dans le milieu 2  
 $D_n^{[1]}$  : Discontinuité de déplacement normal dans le milieu 1  
 $D_n^{[2]}$  : Discontinuité de déplacement normal dans le milieu 2  
 $N_1$  : Nombre d'éléments dans le milieu 1  
 $N_2$  : Nombre d'éléments dans le milieu 2  
 $\Delta a$  : Pas de propagation  
 $d_{ss}$  : La profondeur de la trajectoire de la fissure (mesurée à partir de l'interface)  
 $u_0$  : Déplacement imposé en  $m$

$\alpha$  : Premier coefficient de Dundurs

$\beta$  : Deuxième coefficient de Dundurs

$\omega$  : Orientation de la fissure par rapport à l'interface

## **Abréviations**

BEM : Boundary Element Method (Méthode des Eléments Frontières)

ERR : Energy release rate (Taux de restitution d'énergie)

FIC : Facteur d'Intensité de Contrainte.

MCSC : Maximum circumferential stress criterion (critère de la contrainte circonférentielle maximale)

MDD : Méthode de discontinuité de déplacement

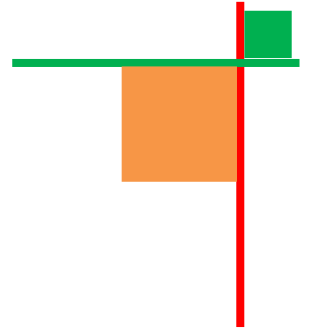
MERC : Maximum energy release rate criterion (critère du taux de restitution d'énergie maximale)

MSEDC : Minimum strain energy density criterion (critère de densité d'énergie minimale)

MSERRC : Maximum strain energy release rate criterion (critère du taux de restitution d'énergie maximale)

TD-bem : Time-domain boundary element formulations

XFEM : Extended Finite Element ( La méthode des éléments finis étendue)



# **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

Actuellement, un certain nombre d'industries, en particulier l'aéronautique, le nucléaire et l'aérospatiale demandent des matériaux à caractéristiques les plus élevées possible ; ces alliages ont généralement une ductilité limitée. Sous certaines conditions de contraintes, un défaut, même de la taille d'un grain, peut être générateur d'une rupture brutale. Ces défauts sont inévitables dans toute structure ; même dans des matériaux aussi propres que possible. Les défauts peuvent se créer après soudage ou par corrosion sous tension ou par fatigue si la structure est soumise à des charges cycliques [Plu-1989].

Le coût des accidents liés aux ruptures catastrophiques des structures jusqu'aux fin des années quatre-vingt (80) du siècle dernier représente, d'après une étude économique [Zeg-2003], près de 4% du Produit National Brut (PNB) dans les pays industriellement développés. D'après la même étude, On pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture et de 25% supplémentaires par le développement des recherches dans le domaine de la rupture.

Eviter la rupture des édifices et des structures était depuis longtemps une préoccupation pour l'homme. Les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons (pyramides) ou ceux des civilisations qui leur ont succédées (romaine, perse, musulmane,...) nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler, ce qui prouve bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Mais comme les structures anciennes de pierre, de brique ou de mortier étaient chargées en compression, elles ont autant résisté car le risque de rupture par fissuration était faible en l'absence de traction contribuant directement à l'ouverture et la propagation des fissures.

Le problème de la rupture est actuellement plus crucial avec le développement des structures complexes lié au progrès technologique utilisant des matériaux travaillant en traction tels que les aciers, les alliages métalliques et les composites [Zeg-2003].

Le fer a vu son utilisation dans les structures augmenter au cours du 19<sup>ème</sup> siècle. La rupture est devenue un problème. David Kirkaldy a débuté ses essais et travaux expérimentaux en 1865. Il a édité un compte rendu complet de ses expériences et discuté une partie des problèmes de la rupture de l'acier, le nouveau matériau de structure de l'époque et relevé surtout les problèmes de rupture en présence de gel.

Les vies de beaucoup de personnes, et la propriété de beaucoup plus, seront sauvées si la « vérité de la matière » est connue et vise versa [Cot-2002].

Les avancées dans la connaissance en mécanique de la rupture permettent dans les temps modernes et plus précisément depuis le début du 20<sup>e</sup> siècle, de mieux prévenir le risque de rupture. Néanmoins, la première vraie interprétation qualitative de la rupture est exposée en 1920 par Griffith [Gri-1920] qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux d'Inglis [Ing-1913] au début du 20<sup>ème</sup> siècle, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure. Il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure valable pour les matériaux fragiles (elle ne tient pas compte de la dissipation de l'énergie due à la plastification). Il a fallu attendre les travaux d'Irwin [Irw-1948] qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

Après ce qui arriva au bateau « Liberty » de la flotte américaine qui se fissure en deux parties lors de la deuxième guerre mondiale entre la Sibérie et en Alaska voir (Fig. 1) et à une dizaine d'autres navires sur les 2700 en service, qui subiront ensuite le même sort, la mécanique de la rupture passa du stade de curiosité scientifique à celui d'une discipline scientifique fortement imposée dans l'ingénierie de la construction. [Hac-2007].



*Fig. 1. Rupture fragile d'un liberty-ship (après la seconde guerre mondiale) au cours d'un hiver rigoureux [Hac-2007].*

Irwin [Irw-1956] avec un groupe de chercheurs dans les laboratoires de la marine Américaine développa en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard [Wes-1939], Irwin [Irw-1957] montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié aux taux de restitution d'énergie. Ce paramètre, principal outil de la mécanique linéaire de la rupture, est appelé le Facteur d'Intensité de contrainte (FIC).

Actuellement, on s'intéresse en plus aux comportements viscoplastiques et/ou viscoélastiques. Les premiers comportements se rencontrent à température élevée. Les seconds caractérisent les matériaux polymères à température ambiante, où le phénomène de fluage ne peut être négligé, sont de plus en plus utilisés dans l'industrie. L'apparition des nouveaux matériaux composites nécessite l'utilisation des concepts de la mécanique linéaire de la rupture pour décrire leur comportement [Hac-2007].

L'objet de la mécanique de la rupture est d'étudier les matériaux en présence de fissures et savoir quand et comment de tels défauts peuvent-ils se propager et quelle est leur taille critique? En bref, la mécanique de la rupture est la « science des défauts » [Plu-1989].

Nous voulons savoir aussi, quels sont les paramètres pouvant influencer la rupture. Ce souci est présent aussi pour les matériaux non homogènes, objet de cette étude. Les essais expérimentaux sont un moyen pour répondre à ces questions.

De plus en plus d'application de la mécanique de la rupture aux dispositifs fonctionnels miniaturisés ont besoin d'intégrité structurale [Cot-2002].

En dehors de l'expérimentation, la simulation numérique est une voie pour prendre en charge ce type de problèmes et beaucoup de problèmes de l'ingénierie.

Les principales méthodes numériques qui sont maintenant bien établies pour la résolution des problèmes de mécanique de la rupture sont la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière (BEM).

La méthode des éléments de frontière a été développée suivant deux approches. L'une d'elles est d'origine mathématique basée sur des théorèmes classiques de la théorie du potentiel. L'existence de solution à une équation intégrale, expression d'un problème aux limites dans le cadre de la théorie des potentiels a été montrée par Fredholm (1903). La discrétisation de la frontière pour résoudre l'équation intégrale, pour des problèmes de potentiels avec l'avènement des ordinateurs est due en premier à Jawsou [Jaw-1963] et Sym [Sym-1963]. La formulation de la méthode directe sous sa forme actuelle a été présentée par Rizzo [Riz-1967] et appliquée en thermo-élasticité par Rizzo et al. [Riz-1977]. La méthode a été étendue en 3-D par Cruse et al. [Cru-1971] et par Lachat et al. [Lac-1976].

A partir du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti, l'identité de Somogiana est obtenue comme une représentation intégrale directe donnant les déplacements dans le domaine en fonction des déplacements ou contraintes sur la frontière. En écrivant cette identité sur deux domaines complémentaires, deux méthodes intégrales dites indirectes ont été proposées par Crouch [Cro-1976] et [Cro-1983]. La première représentation est connue sous le nom de potentiel de simple couche de densité la discontinuité de contrainte et proposée par Crouch [Cro-1983] sous l'appellation de contraintes fictives ou discontinuité de contraintes. La deuxième représentation est connue sous l'appellation de potentiel double couche de densité la discontinuité de déplacement et proposée par Crouch [Cro-1976] comme étant la méthode de discontinuité de déplacement (MDD).

Des formulations duales ont été développées et utilisées par Aliabadi [Ali-1990] et Kebir [Keb-1998] permettent le traitement de problèmes de mécanique de la rupture

La MDD offre des avantages certains pour la simulation de la propagation des fissures [Cor-1977]. Alors que la méthode des éléments finis (FEM) nécessite un remaillage après chaque changement de configuration durant la propagation de fissure, dans la méthode de discontinuité de déplacement (MDD), la propagation de fissure se fait par addition d'éléments [Cor-1977].

Daux [Dau-2000], avec la méthode des éléments finis étendus (extended finite element method XFEM) prend en compte les problèmes de mécanique de la rupture avec la prise en charge des problèmes de singularité.

Un des problèmes posés par la MDD est d'assurer la continuité du champ de déplacement en bout de fissure. Malgré des éléments d'ordre supérieurs proposés par Crouch [Cro-1983], le problème de la compatibilité est resté posé. Le premier élément spécial proposé pour respecter la condition de continuité du champ de déplacement est dû à Crouch [Cro-1983] puis repris par Shou [Sho-1995]. La formulation présentée ne concernait que le mode d'ouverture.

Parmi les avantages de la MDD, nous pouvons ajouter qu'elle est particulièrement appropriée aux problèmes de fissuration, parce qu'elle calcule directement les discontinuités de déplacements normales et tangentielles pouvant aboutir au calcul des FIC [Sho-1976]. Simuler les problèmes de contact [Cra-1983], ruptures autour des cavités [Kon-1989], le développement de la méthode en champ complexe [Bel-1990], calcul des facteurs d'intensité des contraintes en mode mixte [Sch-1988], modélisation de tête de la fissure (crack tip) [Guo-1990], l'analyse des fissures soumises aux contraintes de compression normales [Sca-1992], et l'analyse de contraintes dans les multicouches [Sho-1999].

Avec les moyens de la MDD, la méthode peut être considérée comme un moyen numérique à intégrer dans l'inventaire des méthodes numériques pour le traitement des milieux fissurés employés de nos jours.

L'objectif du présent travail de recherche est l'étude de fissure et multi-fissures dans les matériaux multicouches, autour de défaut et d'inclusion, et la simulation de la propagation des fissures et multi fissures à l'aide d'un code de calcul basé sur la méthode des discontinuités de déplacements.

Nous avons organisé notre travail en quatre parties :

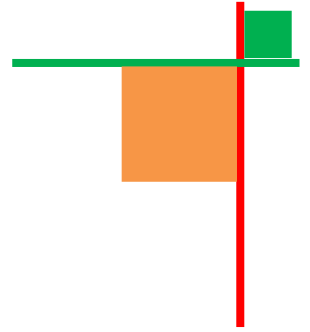
Le premier chapitre est consacré à une recherche bibliographique consacrée aux méthodes des équations intégrales de frontière. Parmi les méthodes présentées, la méthode des discontinuités de déplacement a été adoptée pour notre étude. Ce choix est motivé par la performance de la méthode pour la prise en charge des multicouche fissurées et par l'expérience acquise au sein de notre département dans ce domaine.

Le chapitre deux est une introduction à la mécanique de la rupture avec la présentation de plusieurs critères. Trois critères de rupture sont choisis dans cette étude pour réaliser la simulation numérique de la propagation.

Le chapitre trois est consacré à l'application de la méthode de discontinuité des déplacements aux matériaux multicouches fissurés. L'étude des fissures proches d'interface y est présentée. Trois critères de rupture sont implémentés et présentés dans l'organigramme du code de calcul qui termine le chapitre.

Le quatrième chapitre englobe les résultats et les interprétations de l'application de la méthode de discontinuités des déplacements pour une variété d'exemples. Pour la propagation de fissure dans les matériaux multicouche plusieurs applications de différentes configurations géométriques et différents modes de chargement sont présentées. La simulation de la propagation de multifissures dans les multicouches est présentée, Les effets d'interaction de fissures sont montrés. Les résultats liés aux problèmes des effets des rapports de module de Young de différentes couches sur le chemin de propagation sont présentés et commentés. Les effets d'interface sur le chemin de propagation sont discutés en terme de coefficient de Dundurs sont montrés. Tous nos résultats sont confrontés à ceux de travaux de recherche obtenus de la littérature.





# **CHAPITRE I**

# **METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERE**

# CHAPITRE I

## MÉTHODE DES ELÉMENTS FRONTIÈRES

### I.1 INTRODUCTION

La méthode d'éléments frontières BEM est devenue une méthode établie dans beaucoup de disciplines d'ingénierie comme technique numérique complémentaire au côté de la méthode d'éléments finis FEM. Les premiers développements de la BEM étaient concentrés sur la solution des problèmes linéaires élastiques et isotropes. La BEM est particulièrement bien adaptée à ce type de problème, puisqu'une solution fondamentale simple est disponible, mais la croissance rapide des moyens de la BEM a fait que cette méthode peut maintenant être appliquée à presque tous les problèmes d'ingénierie, tels que des problèmes de potentiel, élastostatique, thermo élastique et élastodynamique, etc., [Abd -1997].

Il y a un certain nombre de méthodes pour formuler les équations intégrales de frontière. Les plus importantes viennent d'identités intégrales, telles que l'identité de Green pour les problèmes de potentiel, simple ou doubles couches et les résidus pondérés [Hal-1994].

La solution des équations intégrales de frontière peut être classée en deux différentes catégories, bien que les deux puissent être considérées d'une origine commune. Les deux catégories sont classées comme suit :

#### I.1.1 APPROCHE INDIRECTE

Cette approche est basée sur les équations intégrales qui sont exprimées entièrement en terme de solutions d'unité singulière à partir d'équations différentielles originales et est distribuée avec des densités inconnues spécifiques sur la frontière du domaine de ce problème. Les fonctions de densité elles-mêmes n'ont aucune signification physique apparente. Une fois les fonctions de densité obtenues, les calculs peuvent être poursuivis en n'importe quel point intérieur du domaine étudié par un procédé d'intégration simple.

#### I.1.2 APPROCHE DIRECTE

Les équations intégrales dans cette approche sont celles qui sont exprimées en terme de variables physiques réelles du problème, telles que les tractions et les déplacements sur la frontière pour l'élasticité. Les paramètres pour le volume peuvent être obtenus comme un calcul ultérieur, une fois les valeurs sur la frontière connues. L'approche directe à une similitude étroite avec la FEM, avec laquelle beaucoup d'ingénieurs sont familiarisés. Cette méthode a été couplée avec la méthode des éléments finis dans plusieurs études [Abd -1997].

### I.2 AVANTAGES DE LA METHODE D'ELEMENT FRONTIERE

Les principaux avantages de la BEM, comparés à d'autres techniques numériques peuvent être récapitulés comme suit:

- (i) Pour la plupart des applications, la dimensionnalité du problème est réduite par une dimension, menant à une réduction considérable de la préparation des données et à un système d'équations algébriques plus réduit.
- (ii) Facilité de lecture des résultats

(iii) La BEM est idéale pour des domaines infinis. La prétendue TD-bem qui convient aux domaines semi-infinis ou infinis. [Oya-2011].

(iv) Des problèmes liés à la mécanique de la rupture élastique, mécanique de la rupture élasto-plastique ou de contact, peuvent être résolus efficacement et économiquement avec la BEM. Il existe plusieurs formulations de Méthode d'éléments frontières dans la littérature pour traiter correctement les problèmes de fissures. La formulation d'éléments de frontières duale DBEM est probablement la formulation d'éléments frontières la plus populaire pour l'analyse de propagation de fissure [Eds -2010].

(v) La solution de la BEM est basée sur la solution fondamentale qui est une solution analytique de l'équation différentielle gouvernante, donc des résultats intéressants sont susceptibles d'être obtenus. [Abd -1997].

### I.3 METHODE DIRECTE

Le concept de la distribution ou de pondération d'une équation différentielle est non seulement valide pour les solutions approximatives mais c'est un concept mathématique fondamental, qui peut être employé dans des applications innombrables d'ingénierie. Lagrange a proposé la première démonstration du principe des travaux virtuels, en utilisant les concepts des distributions, appliquant ce qui s'appelle maintenant les multiplicateurs Lagrangiens. Ces concepts sont également essentiels pour traiter des équations différentielles

#### I.3.1 EQUATIONS DE BASE

Les équations d'équilibre suivantes doivent être satisfaites en tout point du domaine étudié :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0 \quad (I.1)$$

Où  $\sigma_{ij}$  représentent les composantes du tenseur des contraintes  $\overline{\sigma}$  et  $F_j$  sont les composantes des forces de volumes.

La loi de Hooke généralisée est donnée par

$$\sigma_{ij} = 2\mu_L \varepsilon_{ij} + \lambda_L \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (I.2)$$

Où  $\varepsilon_{ij}$  sont les composantes du tenseur linéarisé des déformations  $\overline{\varepsilon}$ .  $\lambda_L$  et  $\mu_L$  sont les coefficients de Lamé.

Les composantes du tenseur de déformations sont obtenues à l'aide des composantes du champ de déplacement  $u_i$  par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (I.3)$$

Le vecteur contrainte  $\vec{T}(M, \vec{n})$  agissant au point sur une surface  $\Gamma$  de normale  $\vec{n}$  est donné par :

$$\bar{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (I.4)$$

Nous obtenons l'équation d'équilibre de Lamé-Navier suivante en terme de déplacement en injectant les équations(I.2)et (I. 3) dans l'équation (I.1) :

$$(\lambda_L + \mu_L) grad(div \vec{u}) - \mu_L rot \vec{u} + \vec{F} = \vec{0} \quad (I.5)$$

### I.3.2 SOLUTION FONDAMENTALE

La formulation intégrale requiert la solution répondant à un problème représenté par un domaine infini en présence d'une force concentrée. Cette solution est due à Kelvin et connue sous le nom de solution fondamentale.

La solution fondamentale de l'équation de Lamé-Navier est obtenue en recherchant une solution particulière de l'équation (I.5) en posant une distribution de charges concentrées unitaires  $\vec{F}^*$  appliquée au point  $P$  dans la direction  $e_i$  égale à :

$$F_i^* = \delta(M - P)e_i \quad (I.6)$$

Où  $\delta(M - P)$  est la distribution de Dirac.

Pour un champ de déplacement virtuel  $\vec{u}^*$ , il est possible de déduire le théorème des travaux virtuels qui s'écrit :

$$\int_{\partial D} \bar{T}(M, \vec{n}) \vec{u}^* dS + \int_D \vec{F} \vec{u}^* dV = \int_D \bar{\sigma} \varepsilon^* dV \quad (I.7)$$

Nous pouvons déduire le théorème de réciprocité de Maxwell Betti qui s'écrit :

$$\int_{\partial D} \bar{T}(M, \vec{n}) \vec{u}^* dS + \int_D \vec{F} \vec{u}^* dV = \int_{\partial D} \bar{T}^*(M, \vec{n}) \vec{u} dS + \int_D \vec{F}^* \vec{u} dV \quad (I.8)$$

Où  $\vec{u}$  est le champ de déplacement réel.

Utilisons le résultat précédent pour les deux états suivants :

Etat 1 :

$\vec{u}$  : Déplacement,

$\bar{T}(M, \vec{n})$  : Vecteur contrainte agissant au point  $M$  présentant une normale  $\vec{n}$

$\vec{F}$  : Force de volume

Etat 2 :

$U_{ij}^*(M, P)$ : Déplacement du point  $M$  dans la direction  $j$  dû à une force unitaire appliquée au point  $P$  dans la direction  $i$

$\tau_{ij}^*$  : Tension au point  $M$  dans la direction  $j$  due à une force unitaire dans la direction  $i$

$F_i^* = \delta(M - P)e_i$  : Force de volume (problème de Kelvin)

En considérant les forces dans les trois directions de l'espace, le déplacement en un point  $M$  quelconque du domaine s'écrit :

$$u_j^* = U_{ij}^*(M, P)e_i \quad (I.9)$$

Les expressions des solutions fondamentales pour un problème de Kelvin ont été données par [Cru-1974] et [Dom-1987] sous la forme :

$$U_{ij}^*(M, P) = \frac{1}{16\pi \mu(1-\nu)r} \left( (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \quad (I.10)$$

Dans le cas d'un problème en  $3-D$  et

$$U_{ij}^*(M, P) = \frac{1}{8\pi \mu(1-\nu)r} \left( (3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \quad (I.11)$$

Dans le cas d'un problème en  $2-D$  en déformation plane

Où  $r = r(P, M)$  est la distance entre le point  $P$  et le point  $M$  appartenant au contour

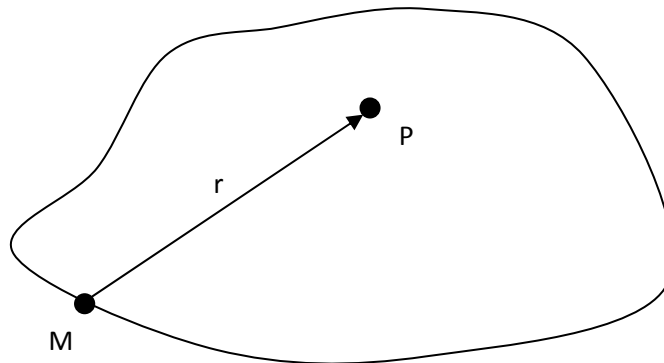


Fig. I.1. Domaine d'étude  $D$  avec  $P$  à l'intérieur

Et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Les contraintes peuvent être déduites au point  $P$ .

Les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}^*(M, \vec{n})$  au point  $M$  prennent la forme suivante :

$$T_j^* = \tau_{ij}^*(P, M)e_i \quad (I.12)$$

$\tau_{ij}^*$  Est donné pour les problèmes  $3D$  comme suit :

$$\tau_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu)\delta_{ij} + 3\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) + (1-2\nu) \left( n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \right] \quad (I.13)$$

Et pour les problèmes 2D en déformation plane il est donné par :

$$\tau_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu)\delta_{ij} + 2\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) + (1-2\nu) \left( n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} - n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \right] \quad (I.14)$$

### I.3.3 IDENTITE DE SOMIGLIANA

Considérons deux états élasto-statiques  $[\bar{\sigma}, \bar{u}, \bar{F}]$  et  $[\bar{\sigma}^*, \bar{u}^*, \bar{F}^*]$  définis sur le même domaine borné  $D$  de frontière  $\Gamma$  et reprenons le théorème de Maxwell-Betti écrit pour les deux états élastiques qui s'écrit :

$$\int_{\partial D} \bar{T}(M, \vec{n}) \cdot \bar{u}^* dS + \int_D \bar{F} \cdot \bar{u}^* dV = \int_{\partial D} \bar{T}^*(M, \vec{n}) \cdot \bar{u} dS + \int_D \bar{F}^* \cdot \bar{u} dV \quad (I.15)$$

Soit  $D$ , supposé une partie du domaine infini et chargé au point  $P$  par une force unitaire dans la direction  $i$ . Nous pouvons écrire à partir de l'équation (I.16) et de la distribution de Dirac pour un point  $P$  à l'intérieur du domaine  $D$ , ce qui suit :

$$u_i(P) + \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j(M) dS = \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j(M) dS + \int_D F_j(M) U_{ij}(M, M) dV \quad (I.16)$$

Connue sous le nom d'identité de Somigliana.

En l'absence de forces de volumes, l'équation (I.16) présente la forme simplifiée suivante :

$$u_i(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j(M) dS \quad (I.17)$$

Au passage à la limite, lorsque le point  $P$  est sur le contour, les intégrales sont singulières. Celles-ci sont intégrées au sens des valeurs principales de Cauchy.

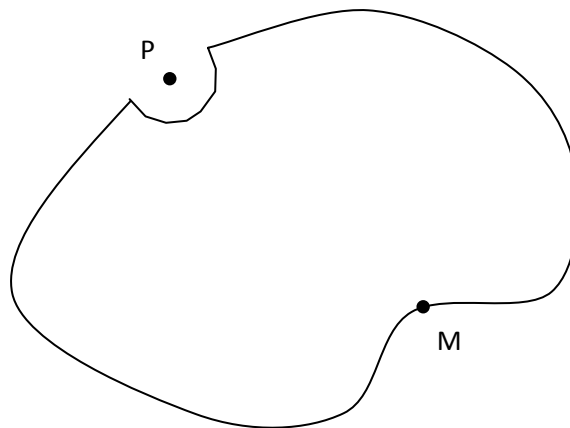


Fig.I.2. Domaine avec le point P sur la frontière

Dans le cas du plan, il est montré par [Dom-1987], pour un point  $P$  appartenant à la surface, que l'équation (I.17) devient:

$$c_{ij}u_i(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P)u_j(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P)T_j(M) dS \quad (I.18)$$

$c_{ij}$  Est un terme libre qui dépend de la régularité du contour.

On a  $c_{ij} = \frac{1}{2}$  pour un contour lisse au point  $P$

$c_{ij} = 0$  Pour  $P$  à l'extérieur du domaine.

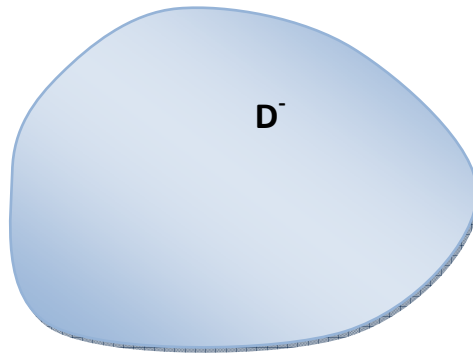
L'identité de Somigliana est commune comme une représentation intégrale directe donnant les contraintes et les déplacements en un point du domaine à partir des conditions appliquées à la frontière en terme de contrainte et déplacement.

#### I.4 METHODES INDIRECTES

Il existe des représentations où les déplacements et les contraintes sont des fonctions de certaines quantités qui ne sont ni les déplacements ni contraintes appliqués. Ces techniques sont appelées méthodes directes.

Celles-ci peuvent être introduites comme suit en supposant avoir à résoudre deux problèmes : un problème intérieur (borné) et un problème extérieur (infini).

Pour le problème intérieur (borné), on écrit l'identité de Somigliana pour ce problème (Fig.I.3)



*Fig.I.3. Domaine  $D^-$  intérieur repéré par le signe  $(-)$*

Le domaine  $(-)$  est le domaine réel occupé par la structure et sa solution est  $\left[ \overline{\sigma}^-, \vec{u}^- \right]$ .

On considère le domaine complémentaire à  $D^-$ , soit  $D^+$ . Pour ce problème la solution est  $\left[ \overline{\sigma}^+, \vec{u}^+ \right]$ .

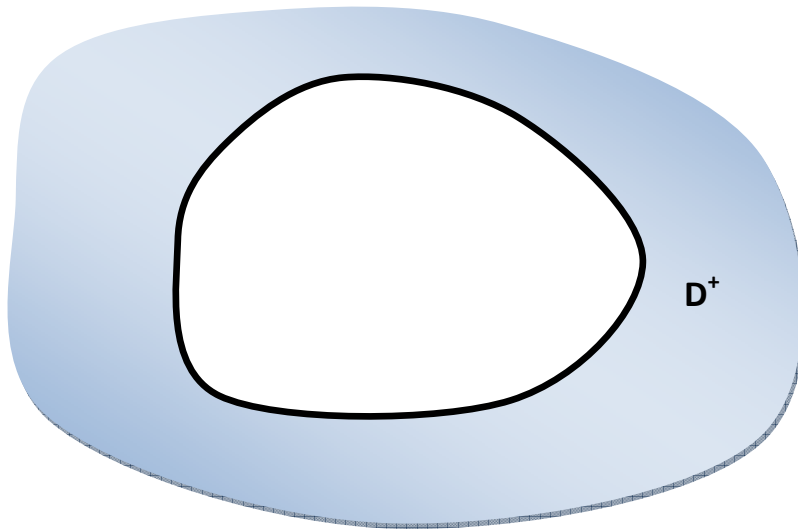


Fig.I.4. Domaine  $D^+$  extérieur repéré par le signe (+)

Appliquons le théorème de la réciprocité entre l'état (+) et la solution fondamentale, lorsque la charge concentrée est dans le domaine  $D^-$ . Nous obtenons l'identité de Somigliana comme suit :

$$0 = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) u_j^+(M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) T_j^+(M) dS \quad (I.19)$$

En soustrayant membre à membre (I.19) et l'équation (I.17) écrite pour le domaine  $D^-$ , nous obtenons :

$$u_i^-(P) = - \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) (u_j^- - u_j^+) (M) dS + \int_{\partial D} U_{ij}(M, P) (T_j^- - T_j^+) (M) dS \quad (I.20)$$

La solution dans  $D^+$  peut être choisie arbitrairement.

Choisissons, sur la frontière la condition suivante :

$$T_j^+ = T_j^-$$

En posant :

$$D_j = u_j^+ - u_j^-, j = 1, 2$$

Alors, il reste :



$$u_i^-(P) = \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P)(u_j^+ - u_j^-)(M) dS = \int_{\partial D} \tau_{ij}(M, P) D_j dS \quad (I.21)$$

Ce résultat est connu sous le nom de potentiel de double couche avec la densité  $D_j$ . Cette méthode a été introduite en premier par Crouch (1976) sous le nom de méthode des discontinuités de déplacement.

$D_j$  Est la discontinuité de déplacement dans la direction  $j$ .

### I.5 METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT (MDD)

#### I.5.1 PRINCIPE DE LA METHODE DE DISCONTINUTE DE DEPLACEMENT

Une discontinuité de déplacement peut être visualisée comme étant une fissure droite (rectiligne) composée de deux surfaces (lèvres) disjointes, se déplaçant relativement l'une par rapport à l'autre. La méthode de discontinuité de déplacement se base sur la solution analytique d'un problème d'une discontinuité de déplacement sur un segment de droite à l'intérieur d'un domaine élastique infini. Elle consiste à diviser (discrétiser) le segment de droite en une série de  $N$  éléments reliés les uns aux autres. Ainsi et connaissant la solution analytique pour chaque discontinuité élémentaire, on peut construire la solution numérique au problème donné, en sommant les effets de tous les éléments [Cro, Star-1983].

#### I.5.2 PROCEDURE DE LA MDD DANS UN SOLIDE INFINI

Le problème d'une discontinuité de déplacement constante sur un segment de droite dans le plan  $x, y$  d'un solide infini est spécifié par la condition que le déplacement est continu partout, sauf sur le segment en question. (Soit la partie  $-a < x < a$ , pour  $y = 0$ ). (Fig. I.5). Si nous considérons ce segment comme une fissure droite, nous pouvons distinguer ses deux surfaces en disant que l'une des surfaces est sur le côté positif de  $y = 0$ , noté  $y = 0^+$  et que l'autre est sur le côté négatif de  $y = 0$ , noté  $y = 0^-$ . En passant d'un côté à l'autre du segment, le déplacement subit un saut désigné par  $D_i = (D_x, D_y)$ . Nous définissons la discontinuité de déplacement  $D_i$  comme la différence de déplacement entre les deux côtés du segment :

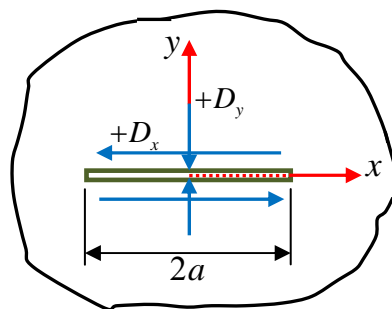


Fig.I.5. Discontinuité De Déplacement

$$D_i = U_i(x, 0^-) - U_i(x, 0^+) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} D_x = U_x(x, 0^-) - U_x(x, 0^+) \\ D_y = U_y(x, 0^-) - U_y(x, 0^+) \end{cases} \quad (I.22)$$

La solution du problème posé en contraintes et en déplacements est donnée par Crouch (1976)

$$\begin{aligned} U_x &= D_x \left[ 2(1-\nu) f_{,y} - y f_{,xx} \right] + D_y \left[ -(1-2\nu) f_{,x} - y f_{,xy} \right] \\ U_y &= D_x \left[ 2(1-\nu) f_{,x} - y f_{,xy} \right] + D_y \left[ 2(1-\nu) f_{,y} - y f_{,yy} \right] \end{aligned} \quad (I.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu D_x \left[ 2f_{,xy} + y f_{,xyy} \right] + 2\mu D_y \left[ f_{,yy} + y f_{,yyy} \right] \\ \sigma_{yy} &= 2\mu D_x \left[ -y f_{,xyy} \right] + 2\mu D_y \left[ f_{,yy} - y f_{,yyy} \right] \end{aligned} \quad (I.24)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu D_x \left[ f_{,yy} + y f_{,yyy} \right] + 2\mu D_y \left[ -y f_{,xyy} \right]$$

Avec :  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[ y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (I.25)$$

Ces équations forment la base de la méthode de discontinuité de déplacement. Les dérivées de  $f(x, y)$  dans les équations (I.23) et (I.24) sont obtenues directement à partir de l'équation (I.25)

Les déplacements le long de la droite  $y = 0$  sont :

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{-1}{2\pi} D_x \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y &= \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2\pi} D_y \lim_{y \rightarrow 0^\pm} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \end{aligned} \quad (I.26)$$

Les valeurs des limites des termes en arc tangente sont les suivantes :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] = \begin{cases} 0 & |x| > a, \quad y = 0 \\ +\pi & |x| < a, \quad y = 0^+ \\ -\pi & |x| < a, \quad y = 0^- \end{cases} \quad (I.27)$$

On peut considérer trois cas pour évaluer les déplacements le long de la ligne  $y = 0$  :

$$|x| > a, \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_x(x, 0) = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x, 0) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \end{cases} \quad (I.28)$$

$$|x| < a, y = 0^+ \Rightarrow \begin{cases} U_x(x, 0^+) = -\frac{1}{2}D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x, 0^+) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| - \frac{1}{2}D_y \end{cases} \quad (I.29)$$

$$|x| < a, y = 0^- \Rightarrow \begin{cases} U_x(x, 0^-) = \frac{1}{2}D_x - \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_y \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \\ U_y(x, 0^-) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}D_x \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{2}D_y \end{cases} \quad (I.30)$$

Les déplacements  $U_x$  et  $U_y$  sont continus pour  $|x| > a, y = 0$ , mais ont une discontinuité constante dans notre cas  $+D_x$  et  $+D_y$  pour  $|x| < a$ , Les contraintes le long de la ligne  $y = 0$ , d'après l'équation(I.24) peuvent être évaluées comme suit :

$$\sigma_{xx}(x, 0) = -\frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}D_y \left[ \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] = -\frac{a\mu}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2}$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\frac{a\mu}{\pi(1-\nu)}D_y \frac{1}{x^2 - a^2} \quad (I.31)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = -\frac{a\mu}{\pi(1-\nu)}D_x \frac{1}{x^2 - a^2}$$

Il est facile de vérifier que les contraintes sont continues partout sur  $y = 0$  sauf pour  $x = \pm a$  où on note une discontinuité et une singularité dues à la présence du terme  $1/(x^2 - a^2)$ .

### I.5.3 PROCEDURE NUMERIQUE

La MDD est un moyen de trouver une approximation de la distribution régulière du déplacement et de contrainte. Pour la procédure numérique, nous considérerons un ensemble de  $N$  segment de droites, parfaitement reliés les uns aux autres et formant une courbe quelconque comme représentée dans la (Fig.I.6). La longueur de chacun de ces segments est notée par  $2a^i$

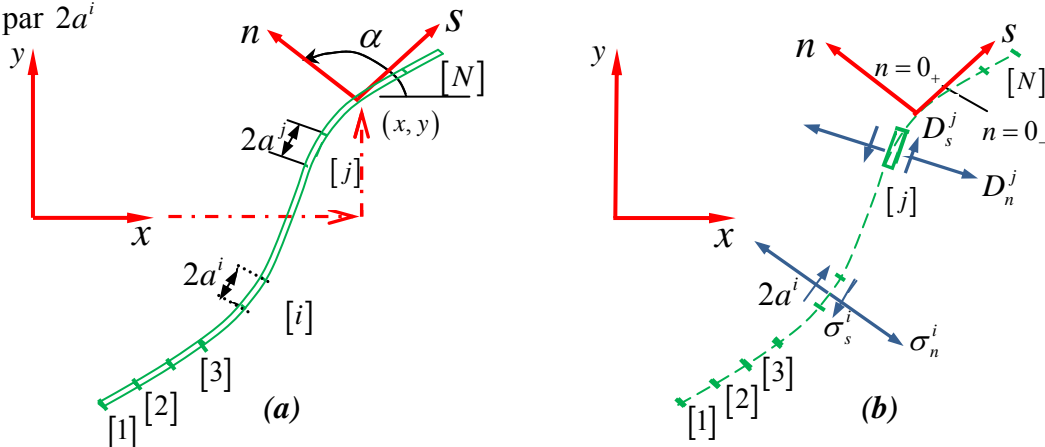


Fig.I.6.Représentation d'une fissure quelconque en N segments

Chaque segment de droite représente une discontinuité de déplacement élémentaire définie suivant un repère local  $s, n$  comme le montre la figure (Fig.I.6.b) de l'élément  $j$  et dont les composantes  $D_s^j$  et  $D_n^j$  sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} D_s^j &= U_s^{j-} - U_s^{j+} \\ D_n^j &= U_n^{j-} - U_n^{j+} \end{aligned} \quad (I.32)$$

Où :  $U_s^j$  et  $U_n^j$  sont les déplacements normaux et tangentiels de l'élément  $j$ . Les contraintes normales et tangentielles au milieu de l'élément  $i$  peuvent être exprimées en fonction des composantes de discontinuité de déplacement de l'élément  $j$  comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= A_{ss}^{ij} D_s^j + A_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= A_{ns}^{ij} D_s^j + A_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (I.33)$$

En utilisant le principe de superposition, et en tenant compte de l'effet de  $N$  éléments (discontinuités) on obtient le champ de contraintes et le champ de déplacements :

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j & U_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j & U_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \quad i = 1, N \quad (I.34) \text{ Et } \quad i = 1, N \quad (I.35)$$

Où :  $A_{ss} \dots$  sont les coefficients d'influence relatifs aux contraintes et  $B_{ss} \dots$  sont les coefficients d'influence relatifs aux déplacements. Une fois ces équations résolues, on peut exprimer les contraintes et les déplacements en chaque point du domaine par d'autres combinaisons linéaires des discontinuités de déplacements en utilisant la même procédure que précédemment.

#### I.5.4 TRANSFORMATION DE COORDONNEES

Les coefficients d'influence dans l'équation (I.34) et (I.35) sont développés pour une discontinuité de déplacement constante avec une orientation arbitraire d'un segment dans un solide infini. La méthode de discontinuité de déplacement est basée essentiellement sur la connaissance des coordonnées des points à étudier par rapport au repère local de chaque segment et l'orientation de ce repère par rapport au repère global.

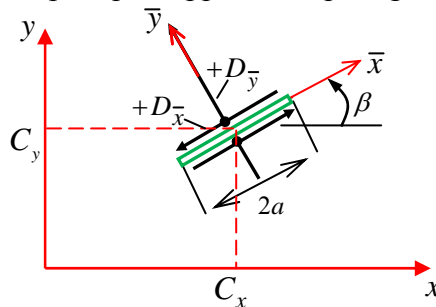


Fig. I.7. Discontinuité sur un segment d'orientation arbitraire

Les coordonnées locales  $(\bar{x}, \bar{y})$  sont obtenues par une translation et une rotation par rapport au repère global  $(x, y)$  du système. Les composantes de translation sont  $C_x$  et  $C_y$  suivant  $x, y$  respectivement, tandis que la rotation est définie par l'angle  $\beta$  positif dans le sens trigonométrique. Les expressions de transformation de coordonnées sont :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - C_x) \cos \beta + (y - C_y) \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x - C_x) \sin \beta + (y - C_y) \cos \beta\end{aligned}\quad (I.36)$$

Les déplacements et les contraintes dans les systèmes de coordonnées locales sont retrouvés en remplaçant  $(x, y)$  par  $(\bar{x}, \bar{y})$  dans les équations (I.23) et (I.24) avec :

$$\begin{aligned}f(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{F}_1(\bar{x}, \bar{y}), f_{,\bar{x}} = \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y}), f_{,\bar{y}} = \bar{F}_3(\bar{x}, \bar{y}), f_{,\bar{x}\bar{y}} = \bar{F}_4(\bar{x}, \bar{y}), f_{,\bar{x}\bar{x}} = -f_{,\bar{y}\bar{y}} = \bar{F}_5(\bar{x}, \bar{y}) \\ , f_{,\bar{x}\bar{y}\bar{y}} &= \bar{F}_6(\bar{x}, \bar{y}), f_{,\bar{y}\bar{y}\bar{y}} = \bar{F}_7(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}$$

Les coordonnées des déplacements et de contraintes dans le repère global  $(x, y)$  du système :

$$\begin{aligned}U_x &= D_x \left[ -(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 + \bar{y} (\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_y \left[ -(1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\ U_y &= D_x \left[ (1-2\nu) \cos \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \beta \bar{F}_4 + \sin \beta \bar{F}_5) \right] \\ &\quad + D_y \left[ -(1-2\nu) \sin \beta \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \beta \bar{F}_3 - \bar{y} (\sin \beta \bar{F}_4 - \cos \beta \bar{F}_5) \right]\end{aligned}\quad (I.37)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu D_x \left[ 2 \cos^2 \beta \bar{F}_4 + \sin 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] + 2\mu D_y \left[ -\bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ \sigma_{yy} &= 2\mu D_x \left[ 2 \sin^2 \beta \bar{F}_4 - \sin 2\beta \bar{F}_5 - \bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right] + 2\mu D_y \left[ -\bar{F}_5 - \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] \\ \sigma_{xy} &= 2\mu D_x \left[ \sin 2\beta \bar{F}_4 - \cos 2\beta \bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\beta \bar{F}_6 + \cos 2\beta \bar{F}_7) \right] + 2\mu D_y \left[ -\bar{y} (\cos 2\beta \bar{F}_6 - \sin 2\beta \bar{F}_7) \right]\end{aligned}\quad (I.38)$$

On peut utiliser ces équations pour calculer les coefficients d'influence de la MDD.

### 1.5 .5COEFFICIENTS D'INFLUENCE

On considère un domaine infini contenant  $N$  segments de droites orientés dans des directions arbitraires par rapport au repère global  $(x, y)$ . On considère deux éléments distincts

"i" et "j" reliés chacun à un repère local  $\begin{pmatrix} i & i \\ x & y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} j & j \\ x & y \end{pmatrix}$  respectivement, et orientés de  $\beta^i$

et  $\beta^j$  (voir Fig.I.8). Position et orientation des éléments frontières

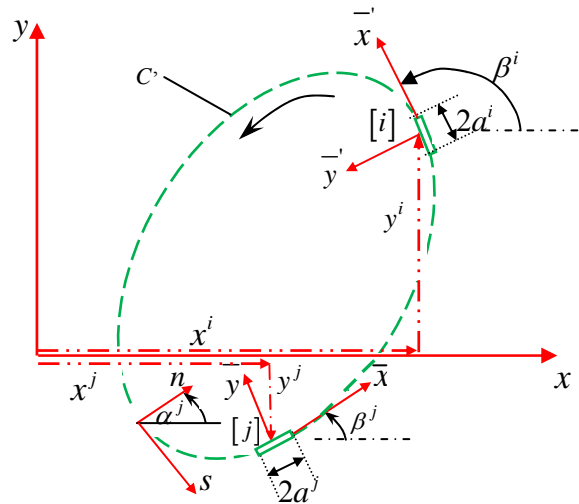


Fig.1.8. Position et orientation des éléments frontières

Les coordonnées locales  $(\bar{x}, \bar{y})$  dans les équations (I.37) et (I.38) représentent celles du point  $(x, y)$  par rapport au milieu de l'élément  $i$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x - x^j) \cos \beta^j + (y - y^j) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= -(x - x^j) \sin \beta^j + (y - y^j) \cos \beta^j \end{aligned} \quad (I.39) \quad \text{Les déplacements et les contraintes}$$

en ce point dus aux discontinuités de déplacements sur les  $N$  éléments sont obtenus par la sommation des contributions de chaque élément.

En choisissant le point  $(x, y)$  comme étant le milieu de l'élément  $i$ , c'est-à-dire

$x = x^i$  et  $y = y^i$ , l'équation (I.39) devient :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \left( x - x^j \right) \cos \beta^j + \left( y - y^j \right) \sin \beta^j \\ \bar{y} &= - \left( x - x^j \right) \sin \beta^j + \left( y - y^j \right) \cos \beta^j \end{aligned} \quad (I.40)$$

Les composantes de déplacements et de contraintes relativement en repère local au point "i" sont  $\bar{x}', \bar{y}'$ . Les deux repères locaux de l'élément  $i$  et l'élément  $j$  sont reliés par les relations

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \bar{x} \cos \gamma + \bar{y} \sin \gamma \\ \bar{y}' &= -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma \end{aligned} \quad (I.41)$$

Où  $\gamma = \beta^i - \beta^j$  (orientation de l'élément  $j$  par rapport à l'élément  $i$ ) Les déplacements et les contraintes seront :

$$\begin{aligned}
 U_x^i &= U_x^i \cos \gamma + U_y^i \sin \gamma \\
 U_y^i &= -U_x^i \sin \gamma + U_y^i \cos \gamma \\
 \sigma_{\bar{x}\bar{x}}^i &= \sigma_{xx}^i \cos^2 \gamma + 2\sigma_{xy}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{yy}^i \sin^2 \gamma \\
 \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i &= \sigma_{xx}^i \sin^2 \gamma - 2\sigma_{xy}^i \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{yy}^i \cos^2 \gamma \\
 \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i &= -\left(\sigma_{xx}^i - \sigma_{yy}^i\right) \sin \gamma \cos \gamma + \sigma_{xy}^i (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)
 \end{aligned} \tag{I.42}$$

Les coefficients d'influence pour les déplacements et les contraintes sont obtenus des systèmes d'équations (I.37), (I.38), (I.42) et (I.43) après avoir posé :

$$D_s^j = D_x^j, D_n^j = D_y^j, U_s^i = U_x^i, U_n^i = U_y^i, \sigma_s^i = \sigma_{\bar{x}\bar{y}}^i, \sigma_n^i = \sigma_{\bar{y}\bar{y}}^i$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 U_s^i &= D_s^j \left[ (1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 - \bar{y} (\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right] \\
 &\quad + D_n^j \left[ -(1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5) \right]
 \end{aligned} \tag{I.44}$$

$$\begin{aligned}
 U_n^i &= D_s^j \left[ (1-2\nu) \cos \gamma \bar{F}_2 - 2(1-\nu) \sin \gamma \bar{F}_3 - \bar{y} (\cos \gamma \bar{F}_4 - \sin \gamma \bar{F}_5) \right] \\
 &\quad + D_n^j \left[ (1-2\nu) \sin \gamma \bar{F}_2 + 2(1-\nu) \cos \gamma \bar{F}_3 + \bar{y} (\sin \gamma \bar{F}_4 + \cos \gamma \bar{F}_5) \right]
 \end{aligned}$$

$$\sigma_s^i = 2\mu D_s^j \left[ -\sin 2\gamma \bar{F}_4 - \cos 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y} (\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7) \right] + 2\mu D_n^j \left[ -\bar{y} (\cos 2\gamma \bar{F}_6 + \sin 2\gamma \bar{F}_7) \right] \tag{I.45}$$

$$\sigma_n^i = 2\mu D_s^j \left[ 2\sin^2 \gamma \bar{F}_4 + \sin 2\gamma \bar{F}_5 - \bar{y} (\cos 2\gamma \bar{F}_6 - \sin 2\gamma \bar{F}_7) \right] + 2\mu D_n^j \left[ -\bar{F}_5 + \bar{y} (\sin 2\gamma \bar{F}_6 - \cos 2\gamma \bar{F}_7) \right]$$

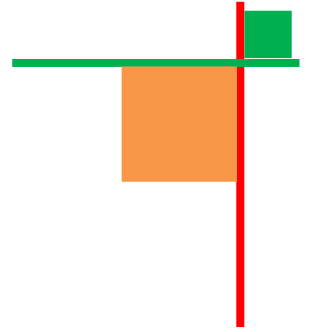
On peut écrire les équations (I.44) et (I.45) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 U_s^i &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} D_n^j & \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} D_n^j \\
 U_n^i &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} D_n^j & \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} D_n^j
 \end{aligned} \tag{I.46} \text{ Et } \tag{I.47}$$

• ELEMENTS DIAGONAUX

Ce sont les termes diagonaux de la matrice des coefficients d'influence qui sont donnés par :

$$B_{sn}^{ii} = B_{ns}^{ii} = 0; B_{ss}^{ii} = B_{nn}^{ii} = \mp \frac{1}{2} \text{ Pour } \bar{y} = 0_{\pm} \text{ Et } A_{sn}^{ii} = A_{ns}^{ii} = 0 \quad A_{ss}^{ii} = A_{nn}^{ii} = + \frac{\mu}{\pi(1-\nu)a}$$



## **CHAPITRE II**

# **NOTIONS SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE**



## CHAPITRE II

### NOTIONS SUR LA MÉCANIQUE DE LA RUPTURE

#### II.1 INTRODUCTION

En mécanique élastoplastique de la rupture, d'importants critères de fissuration sont basés sur l'intégrale  $J$ . Le concept de l'intégrale  $J$  a été introduit par Eshelby (1956) et développé par Rice (1968).

Dans cette étude nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture pour laquelle nous pouvons citer les critères applicables pour nos hypothèses de travail.

Parmi ces critères nous pouvons citer :

-Le critère de Griffith ou du Taux de restitution d'énergie maximale (Griffith) ou énergie nécessaire pour faire propager la fissure. Ce critère postule que la fissure se branche dans la direction qui est telle que la restitution d'énergie pour un incrément de fissure est maximale. Il est prouvé que la direction prédite par ce critère est la même que celle donnée par le critère d'Erdogan-Sih (Thèse Duflot) précédent dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture.

-Le critère basé sur le maximum de la contrainte principale circonférentielle (Erdogan et Sih (1963)).

- Le critère de Hussain est écrit avec les facteurs d'intensité de contrainte et permet de traiter le mode mixte.

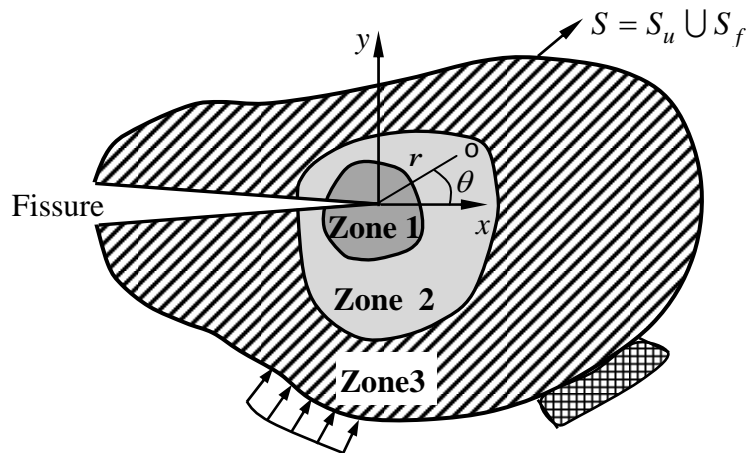
- Le critère basé sur le minimum de l'énergie de déformation (Sih (1974)) Ce critère postule que la fissure se branche dans la direction donnant l'énergie de déformation minimum.

Dans notre étude, nous avons adopté les trois premiers critères pour la simulation de la propagation. Le premier critère a été adopté dans plusieurs études. Le deuxième critère est l'un des plus utilisés dans l'étude de la propagation [**Kebir**]. Le troisième critère, malgré sa puissance, n'est pas aussi usité. Nous pensons que ce critère est un outil qui peut être implémenté dans un code de calcul pour réaliser la simulation de la propagation.

#### II .2 ELEMENTS DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

L'application de la mécanique des milieux continus dans le cas d'un élément de construction contenant une fissure se heurte à une singularité des champs de contraintes. La mécanique de la rupture est l'application de la mécanique des milieux continus à l'étude du comportement de l'élément constructif fissuré dont les conditions aux limites relatives à la présence géométrique de la fissure sont introduites.

D'un point de vue mécanique, on distingue schématiquement trois zones successives dans un milieu fissuré [**Bui 80**].



*Fig. II.1. Description du milieu au voisinage d'une pointe de fissure*

- **ZONE (1) :** se trouve à la pointe de la fissure. L'étude de cette zone est très complexe en présence de contraintes importantes endommageant fortement cette zone. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.
- **ZONE(2) :** On démontre que dans cette zone [Lem85], les composantes du champ de contraintes présentent une singularité en  $(1/\sqrt{r})$  élasticité linéaire ;
- **ZONE (3) :** comprend les champs lointains qui se raccordent d'une part à la zone singulière (2) et d'autre part aux conditions aux limites en charges et on déplacements. Dans cette zone, les champs des déplacements, des déformations et des contraintes varient peu et peuvent être approximés par des polynômes communément utilisés dans la méthode des éléments finis.

L'objectif de la mécanique appliquée de la rupture est de caractériser le comportement du matériau en présence de fissures à l'aide de paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment la contrainte, la taille de la fissure et sa ténacité [Jia -2002].

Dans de ce chapitre, nous présentons un aperçu sur la mécanique de la rupture en élasticité linéaire.

Deux approches sont généralement utilisées en mécanique de la rupture :

1. La première s'intéresse à l'analyse du champ des contraintes en tête de fissure. C'est l'approche par le facteur d'intensité de contrainte. Elle relie les facteurs d'intensité de contrainte au champ de contrainte en tête de fissure appelée approche locale.
2. La deuxième approche est énergétique et dite approche globale et due à Griffith. Elle procède par le calcul de l'énergie disponible pour faire propager la fissure dans la structure considérée. [Leb -2003].

II.3 MODES ELEMENTAIRES DE FISSURATION

D'un point de vue macroscopique, on peut considérer trois modes fondamentaux de rupture : (cf. Fig.II.2) [Rec-1995].

Les flèches indiquent les déplacements des lèvres de la fissure

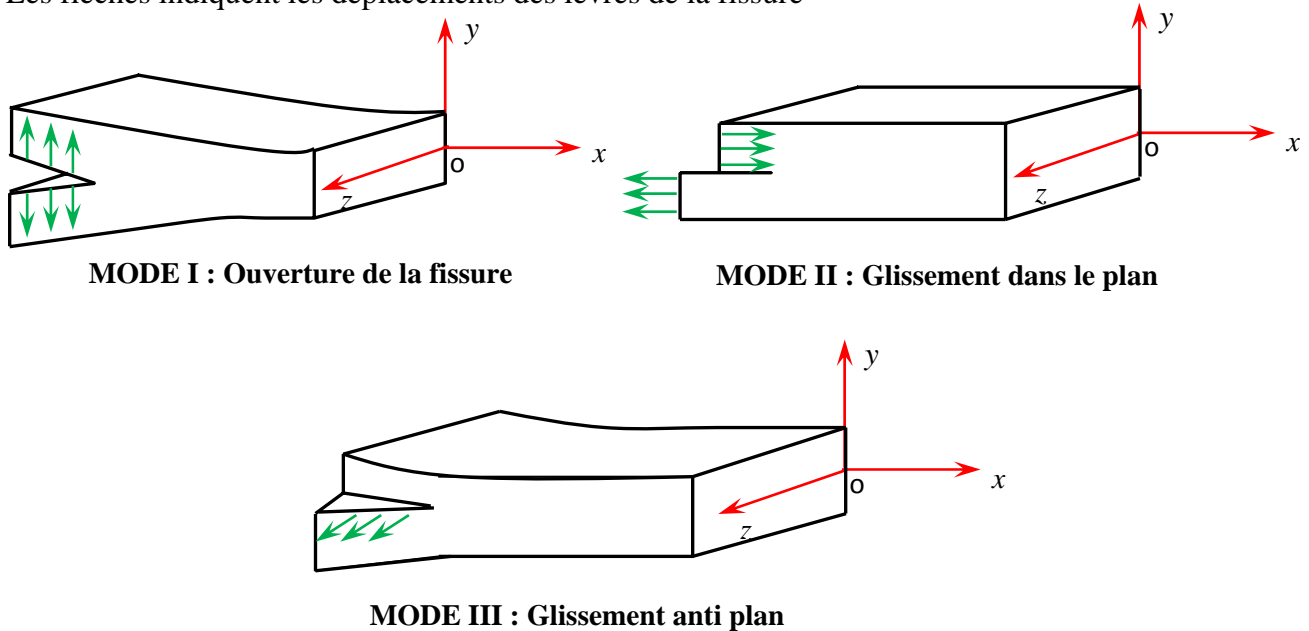


Fig.II.2. Les trois modes d'ouverture de fissure

**MODE I** : Mode d'ouverture de la fissure ou le chargement est perpendiculaire au plan de la fissure.

**MODE II** : mode de cisaillement plan ou le chargement est parallèle au plan et perpendiculaire au front de la fissure

**MODE III** : mode de cisaillement anti plan ou le chargement est parallèle au plan et au front de la fissure.

II.4 CHAMP DE CONTRAINTES EN POINTE DE FISSURE

Les contraintes et les déplacements au voisinage de la tête de fissure ont été calculés par Irwin à l'aide de la théorie de l'élasticité. Elles sont exprimées par les relations (II.1) ci-après, avec les notations de la (Fig.II.3).

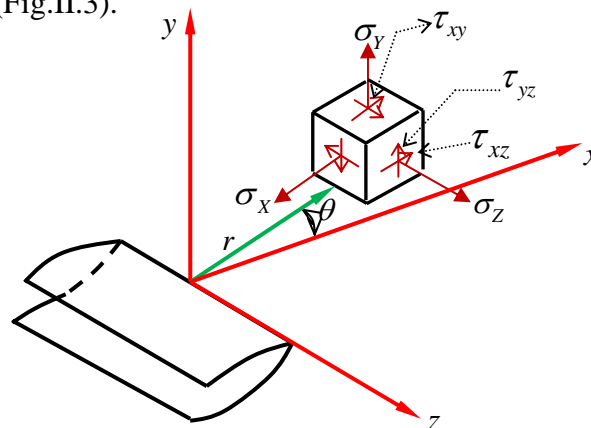


Fig.II.3. champ de contraintes en pointe de fissure

- **MODE I :**

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{II.1a}$$

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\left[ \frac{r}{2\pi} \right]} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\left[ \frac{r}{2\pi} \right]} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0 \text{ (Déformations planes)}$$

- **MODE II :**

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x - \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{II.1b}$$

$$u = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\left[ \frac{r}{2\pi} \right]} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\left[ \frac{r}{2\pi} \right]} \cos \frac{\theta}{2} \left[ -1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$w = 0 \text{ (Déformations planes)}$$

- **MODE III :**

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned}\quad (\text{II.1c})$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\left[\frac{2r}{\pi}\right]} \sin \frac{\theta}{2} \quad ; \quad u = v = 0$$

$\nu$  : est le coefficient de Poisson ;  $\mu$  est le module d'élasticité de cisaillement, reliés au module de Young par la relation  $2\mu(1+\nu) = E$

Les facteurs  $K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$  sont appelés facteurs d'intensité de contrainte et s'expriment en  $MPa\sqrt{m}$  . Ils caractérisent la singularité du champ de contrainte.

Les expressions précédentes sont exprimées au voisinage de la tête de la fissure. De façon générale, le champ de contrainte est donné par :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_\alpha}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^\alpha(\theta) + o(r) \quad (\text{II.2})$$

## II.5 FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE (APPROCHE LOCALE)

A partir des équations (II.1), il est possible de trouver le facteur d'intensité de contrainte pour le mode  $\alpha$  par

$$K_\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi r} \sigma_{ij} \quad (\text{II.3})$$

Le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre couramment utilisé pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la tête de la fissure. Une autre alternative permet de calculer ces facteurs. Ces facteurs sont proportionnels à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure

$$\begin{aligned}K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yy} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right) \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yx} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right) \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{yz} \sqrt{2\pi r}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_z] \right)\end{aligned}\quad (\text{II.4})$$

Ou  $[U_i]$  représente la discontinuité du champ de déplacement en tête de fissure dans la direction  $i$ . Dans notre étude, c'est cette technique qui est adoptée pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte. Nous pensons que le calcul de ce facteur passant par la recherche des contraintes en tête de fissure est risqué.

D'autres méthodes déterminent le facteur d'intensité de contrainte dont la technique utilisant la fonction de Green [Wen-1996].

## II.6 METHODES ENERGETIQUES (APPROCHE GLOBALE)

### II.6.1 THEORIE ENERGETIQUE DE GRIFFITH

Griffith (1920) a été le premier à étudier la rupture d'un point de vue énergétique. Son raisonnement est simple et instructif.

Griffith suppose l'existence d'une énergie de liaison positive par unité de surface  $\gamma$ , Griffith étudie alors l'éventualité de la propagation quasi statique, et sous chargement constant, d'une fissure et définit une énergie  $G$ . Le taux de restitution d'énergie  $G$  correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale  $W_p$  pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure  $a$ , à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur  $\delta a$ .

$$G = -\frac{\partial W_p}{\partial a} \quad (\text{II.5})$$

Avec  $W_p = W_e - \Phi_{ext}$

Où  $\Phi_{ext} = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \int_{d\Omega} \vec{T} \cdot \vec{u} dS$  : Le travail des forces extérieures

$$W_e = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \vec{\sigma} : \vec{\varepsilon} dV$$
 : L'énergie de déformation élastique du système

Il existe une énergie critique  $G_c = 2\gamma$  et le critère de propagation s'écrit comme suit

$$G \geq G_c = 2\gamma \quad (\text{II.6})$$

Il faut relever que pour les problèmes en mécanique de la rupture linéaire, les hypothèses de Griffith sont suffisantes pour le traitement des problèmes. Il faut relever que pour les chargements dynamiques ou en présence de zones plastiques non négligeables en tête de fissure, il faut tenir en compte les dissipations d'énergie dans le bilan [Bui].

## II.7 CRITERE DE BRANCHEMENT DE FISSURE

La détermination du chemin de propagation de fissure est prise en compte grâce aux critères. Les expériences sur les matériaux fragiles pré fissurés de la même géométrie sous les conditions de charges semblables, peuvent parfois donner des trajectoires différentes de propagations de fissure. On peut dire qu'un chemin de fissure est stable quand des essais de rupture sont réalisés sur un corps et les résultats obtenus peuvent être reproduits pour des essais semblables dans des conditions identiques. La trajectoire de fissure peut dépendre des

propriétés des matériaux, de la géométrie du corps, du taux de chargement et de température [Yan-2001]. La rigidité de la machine a une influence [Zac-2004].

La rupture peut être décomposée en deux étapes : l'amorçage et la propagation de la fissure. L'étape de l'amorçage de la fissure est cruciale. Les codes généraux de mécanique de la rupture évitent ce problème parce que le but est d'étudier l'évolution d'une fissure pré existante, ce qui correspond aux hypothèses de la mécanique de la rupture. Des modèles numériques basés sur le dommage sont d'avantage adaptés à ce problème parce qu'ils étudient l'évolution des dommages sans interruption et une fissure est initiée pour une valeur critique de dommages. Cependant, ces codes ne peuvent pas souvent modéliser la propagation de fissure sans l'aide de critère local. En effet, il est très difficile de déterminer l'endroit d'une nouvelle fissure. Les micro-défauts et les inclusions induisent toujours des concentrations de contraintes locales qui sont à l'origine des fissures et des défauts, car tous ces défauts ne peuvent pas être pris en considération numériquement, à moins d'employer des approches statistiques.

La détermination de la direction de fissure peut être obtenue par des critères de branchement. Quelques critères sont basés sur les champs locaux en tête de fissure donnant l'appellation d'approche locale. D'autres critères sont basés sur la distribution d'énergie dans toute la partie fissurée suivant une approche globale. Quelques auteurs ont également proposés de déterminer la propagation de fissure en utilisant le modèle des dommages continus micro-vides [Konk-1997, Vro-1999]. Ces théories sont fondées sur l'hypothèse que l'initialisation du vide et la croissance du vide commande la direction de propagation de la fissure. Plus souvent l'exactitude du calcul de la direction de propagation est directement liée à l'exactitude du calcul numérique des paramètres locaux ou énergétiques. [Bou- 2003].

Les critères qui vont être cités dont certains ont été adoptés dans notre étude peuvent être employés incrément par incrément pour déterminer le chemin de trajectoire de propagation de fissure [Zac-2004].

### II.7.1 CRITERES DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE (MSERRC)

Le taux de restitution d'énergie  $G$  représente l'énergie disponible pour faire avancer la fissure par unité. Le critère déclare que parmi des déplacements cinématiquement admissibles de longueur de fissure ; l'augmentation réelle est celle qui maximise le taux de restitution d'énergie. L'angle de branchement est alors déterminé par :

$$\left( \frac{\partial G}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_c} = 0 \quad (\text{II.7})$$

De nombreuses techniques numériques peuvent être employées pour calculer  $G$ . Les méthodes les plus généralement utilisées sont brièvement décrites dans ce qui suit par [Bou-2003].

### II.7.2 TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE $G$ ET ENERGIE POTENTIELLE

Basée sur la définition de  $G$ , cette méthode consiste à calculer toute l'énergie potentielle  $W_p$  pour le système avec la fissure principale de longueur  $a$  et celle du système pour la fissure de longueur  $a + \delta a$ ;  $G$  peut être approchée par :

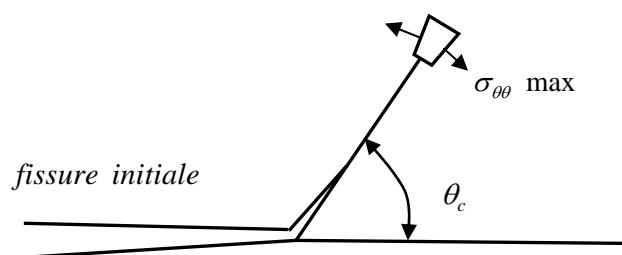
$$G = -\frac{\partial W_p}{\partial a} = \frac{W_p(a + \delta a) - W_p(a)}{\delta a} \quad (\text{II.8})$$

Il est facile de mettre en application cette technique, basée sur la définition physique de  $G$ . Cependant elle est chère en terme de temps de calcul informatique. [Bou- 2003].

### II.7.3 CRITERE DE LA CONTRAINTE TANGENTIELLE MAXIMALE (MCSC)

Ce critère présenté par Erdogan pour les matériaux élastiques postule que la fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte circonférentielle est maximale. C'est une approche locale puisque la direction de la propagation de la fissure est directement déterminée par le champ de contrainte local calculé le long d'un petit cercle de rayon  $r$  et de centre la tête de fissure. L'angle de branchement  $\theta_c$  est calculé en résolvant l'équation suivante avec les conditions [Bou- 2003].

$$K_I \sin(\theta_c) + K_{II} (\cos(\theta_c) - 1) = 0 \quad \text{Avec} \begin{cases} K_{II} \sin(\theta_c/2) < 0 \\ \theta_c \in ]-\pi, \pi[ \\ K_I > 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$



**Fig.II.4. Angle de branchement d'une fissure**

Ce critère prouve également l'existence d'un angle limite correspondant au mode II pur  $\theta_c = \pm 70,54^\circ$ . Ce critère est largement répandu dans la littérature, mais des détails numériques au sujet de son exécution sont rarement mentionnés [Bou- 2003].

Si  $\theta_c$  est l'angle de branchement de la fissure propagée nous avons les cas suivants qui se posent :



Si  $K_{II} = 0$  alors  $\theta_c = 0$  (mode I pur).

$K_{II} > 0$ , l'angle de branchement de la fissure  $\theta_c < 0$ ,

$K_{II} < 0$ , alors  $\theta_c > 0$ ,

Pour la programmation de ce critère, que nous avons adopté parmi d'autres, une expression plus favorable pour le calcul de l'angle de branchement  $\theta_c$  est mise en application par (Suo, 2002) :

$$\theta_c = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-2K_{II}/K_I}{1 + \sqrt{1 + 8(K_{II}/K_I)^2}} \right] \quad (\text{II.10})$$

Ou

$\psi = \tan^{-1}(K_{II}/K_I)$  l'angle de mode, est une mesure du rapport du mode II au mode I. [Suk-2003].

Dans le cas où les facteurs d'intensité de contrainte ne sont pas calculés ; le calcul de l'angle de branchement doit être basé sur la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  à chaque point d'intégration au bout de la fissure, la propagation de la fissure est alors exécutée vers le point d'intégration qui maximise  $\sigma_{\theta\theta}$ , les points d'intégration les plus proches du bout de fissure sont identifiés pour chacun d'eux, des valeurs propres et les vecteurs propres du tenseur de contraintes sont calculés ces valeurs propres fournissent les contraintes principales et permettent de trouver la direction de la propagation pour chaque point d'intégration ; la direction finale de la propagation de fissure est obtenue par une moyenne pondérée de chaque direction toute en respectant la distance entre le point d'intégration et le bout de fissure.

Cette manière de calculer la direction de propagation de fissure peut être incertaine puisque la direction est simplement déterminée en utilisant la contrainte principale maximale. Ces deux réalisations différentes du même critère peuvent mener ainsi à différents chemins de fissure, même pour des applications simples, le critère de contrainte circonférentielle maximale est un des critères les plus utilisés parce qu'il est facile de mettre en application cependant il peut être incertain par ce que le champ de contrainte à proximité immédiate du bout de la fissure est seulement rapproché

#### II.7.4 FORMULE DE TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE $G$ EN $K_i$ FORMULE DE HUSSAIN

Le taux de restitution d'énergie  $G$  en de mode mixte est généralement donné par :

$$G = \frac{\kappa+1}{(2\mu)} \left( \frac{1}{3+\cos^2 \theta} \right)^2 \left( \frac{\pi-\theta}{\pi+\theta} \right)^{\theta/\pi} \times \left\{ (1+3\cos^2 \theta) K_I^2 + 8\sin \theta \cos \theta K_I K_{II} + (9-5\cos^2 \theta) K_{II}^2 \right\} \quad (\text{II.11})$$

Le critère du taux de restitution d'énergie (MERC) postule que l'angle de branchement probable de fissure  $\theta_c$  maximise l'énergie  $G$ . La fissure se propage réellement dans cette direction quand  $G$  atteint l'énergie critique  $G_c$  [Wak-2005].

**II.7.5 CRITERE DE DENSITE D'ENERGIE MINIMALE (MSEDC)**

Pour un problème où les contraintes  $\sigma_{ij}$ , et les déformations  $\epsilon_{ij}$  sont connues et développées dans ce corps l'énergie de déformation élastique par unité de volume dans ce matériau peut être calculée par :

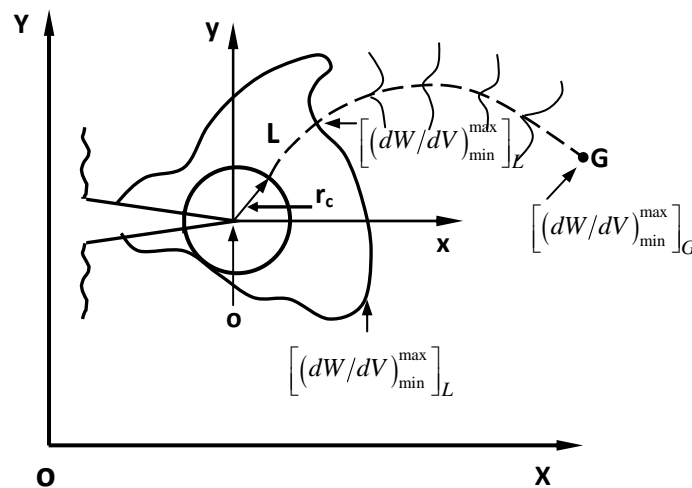
$$w_e = \frac{dw_e}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \tag{II.12}$$

Pour un matériau ayant un comportement élastique linéaire et pour un point qui est situé au voisinage de la tête de fissure la relation ci-dessus peut être utilisée pour définir la densité d'énergie  $S$  exprimée comme :

$$\frac{dw_e}{dV} = \frac{S}{r} \tag{II.13}$$

$r$  mesure la distance d'un point proche de la tête de fissure.

Le rayon du noyau de région  $r_0$  est une longueur étendue qui sépare la région de l'homogénéité macroscopique de celle de l'inhomogénéité microscopique.



**Fig. II.5. Chemin de fissure OLG reliant les contours de densité d'énergie minimale [Zac-2004]**

La rupture initiale à l'endroit où  $[(dW/dV)_{min}^{max}]_L$  est obtenue quand elle atteint la valeur critique  $(dW/dV)_c$ . Ceci peut être simulé par des étapes par accroissement fini comme :

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)_c = \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \dots = \frac{S_j}{r_j} = \dots = \frac{S_c}{r_c} \quad (II.14)$$

Dans le quel

$$\begin{aligned} S_1 < S_2 < \dots < S_j < \dots < S_c \\ r_1 < r_2 < \dots < r_j < \dots < r_c \end{aligned} \quad (II.15)$$

Correspondent au taux croissant de progression de la fissure et même la rupture instable.

Les conditions

$$\begin{aligned} S_1 > S_2 > \dots > S_j > \dots > S_a \\ r_1 > r_2 > \dots > r_j > \dots > r_a \end{aligned} \quad (II.16)$$

Correspondent au taux décroissant de progression de la fissure ayant pour résultat l'arrêt de la fissure.

### II .7.5 .1 STABILITE ET INSTABILITE DE PROPAGATION DE LA FISSURE

La stabilité de la propagation de la fissure peut être déduite du degré de l'acuité de la courbe représentée sur la (Fig.II.6) qui décrit une « gorge ». Dans le cas où la gorge peut être distinguée clairement ceci correspondrait à une propagation stable de fissure (Fig.II.6.a). Dans le cas où la gorge ne peut pas être distinguée clairement (Fig.II.6.b) ceci correspondrait à une propagation instable de la fissure. [Zac-2004]. Les prévisions théoriques dans le voisinage du bout de la fissure sont proches de la réalité. Le chemin de fissure tend à devenir instable quand le rapport  $R_{(K_{II}, K_I)} = \frac{K_{II}}{K_I}$  augmente [Zac-2004].

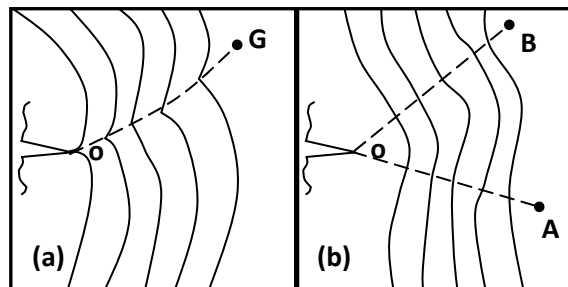


Fig.II.6. Contours de densité d'énergie ( $dw_e/dV$ ) pour la détermination du chemin de la fissure: (a) stable (b) instable. [Zac-2004].

La courbe  $S(\theta)$  peut être tracée et l'angle de branchement  $\theta_c$  est l'angle correspondant au minimum local de la courbe  $S(\theta)$  :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_c} = 0, \quad (II.17)$$

Il est important de calculer le minimum local de la courbe, et pas le minimum global qui peut mener aux résultats correspondants aux angles auxquels n'appartenaient pas  $[-70.54^\circ; 70.54^\circ]$  et ne sont pas donc appropriés. Enfin ce critère ne peut pas exactement être considéré comme critère global puisque le calcul de la densité d'énergie de déformation est basé sur des paramètres locaux,

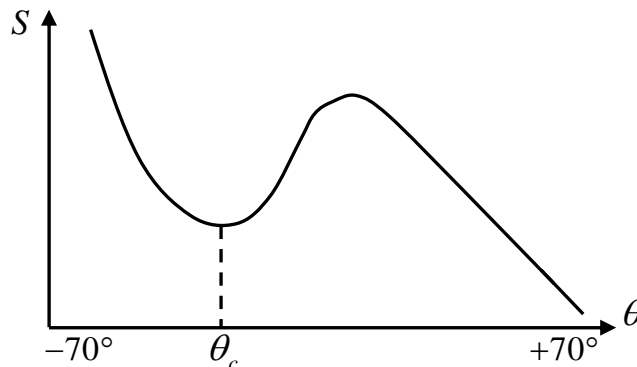


Fig. II.7. Densité d'énergie de déformation en fonction de l'angle  $\theta$

### II.7.6 AUTRES METHODES

Le taux de restitution d'énergie peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de contour

$$G = J = \int_S w(\varepsilon) dy + T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS \quad (\text{II.18})$$

L'intégrale  $J$  est appelée intégrale de Rice [**RIC 68b**].

Bui a défini [**Bui- 78**] une intégrale duale de l'intégrale  $J$  appelée intégrale  $I$ . De même manière, l'intégrale  $I$  est égale au taux de restitution de l'énergie complémentaire par rapport à la longueur de fissure :

Dans le cas d'un problème plan en élasticité linéaire, on démontre que :

$$I = J = G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'} \quad (\text{II.19})$$

- En contraintes planes :  $E' = E$
- En déformations planes :  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$

Cette relation ne peut être appliquée que dans le cas du mode mixte avec propagation dans le propre plan de la fissure. Cette relation ne prend pas en compte un branchement de fissure différent de zéro.

Cette équation ne sera pas utilisée dans cette étude.

Les intégrales  $T$  permettent essentiellement de découpler les deux modes [**Bui 84, Bui 85, Zha 92**] Les intégrales  $T$  peuvent être exprimées sous une forme bilinéaire de  $K_I$  et  $K_{II}$ .

Soit le champ des déplacements, des déformations et des contraintes  $C(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij})$  et  $K_I, K_{II}$  les facteurs d'intensité de contraintes en milieu élastique en déformations planes.

Supposons un autre champ auxiliaire  $C^*(u_i^*, \varepsilon_{ij}^*, \sigma_{ij}^*)$  avec les facteurs d'intensité de contraintes  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$ .  $C^*$  Correspond à la solution d'un problème quelconque d'élasticité sur le même solide  $V$ . On définit l'intégrale indépendante du contour  $\Gamma$  :

$$T = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} u_i \sigma_{ij,1}^* n_j - \frac{1}{2} \sigma_{ij} n_j u_{i,1}^* \right] ds \quad (II.20)$$

L'intégrale  $T$  est un produit scalaire entre le champ  $C$  et le champ  $C^*$ ; elle s'écrit sous la forme bilinéaire suivante par rapport aux facteurs d'intensité de contraintes :

$$T = \frac{1}{E'} (K_I K_I^* + K_{II} K_{II}^*) \quad (II.21)$$

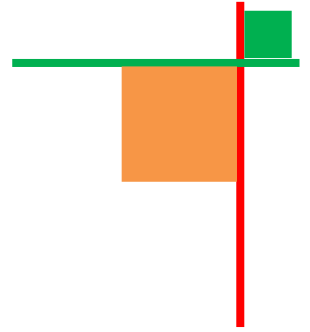
Avec	En contraintes planes :	$E' = E$
	En déformations planes :	$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$

En prenant successivement un champ auxiliaire correspondant à  $(K_I^*, 0)$  et à  $(0, K_{II}^*)$ , on obtient  $T_I = \frac{1}{E'} (K_I K_I^*)$  et  $T_{II} = \frac{1}{E'} (K_{II} K_{II}^*)$ , ce qui permet le calcul de  $K_I$  et  $K_{II}$  [Jia - 2002].

De Lorenzi [Del-1985] présente formulation de  $G$  sous la forme

$$G = J = \frac{1}{\delta a} \iint_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - w \delta_{i1} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA \quad (II.22)$$

Les applications numériques de cette méthode [Zha-1992, Lin -1988] montrent une bonne précision, et son indépendance de la surface d'intégration.



## **CHAPITRE III**

# **APPLICATION AUX MATERIAUX MULTICOUCHES FISSURES**

## CHAPITRE III

## NOTIONS SUR LES MATÉRIAUX MULTICOUCHES

## III.1. APPLICATION DE LA METHODE DE DISCONTINUITÉ DE DEPLACEMENT

## AUX BI-MATERIAUX

Nous allons présenter un exemple simple de multicouches. Nous supposons que le corps à étudier est composé de deux milieux  $R_1$  et  $R_2$  présentés sur la figure (Fig.III.1). Chaque domaine est supposé isotrope, homogène et linéairement élastique avec des constantes élastiques  $\nu_1, E_1$  et  $\nu_2, E_2$ . Les systèmes locaux des coordonnées sont associés aux deux contours et sont directement opposés le long de l'interface, c'est-à-dire :  $s_1 = -s_2$  et  $n_1 = -n_2$ . Pour la résolution de ce problème, nous définissons les conditions à l'interface. Ces conditions sont définies pour un point  $Q$  de l'interface par :

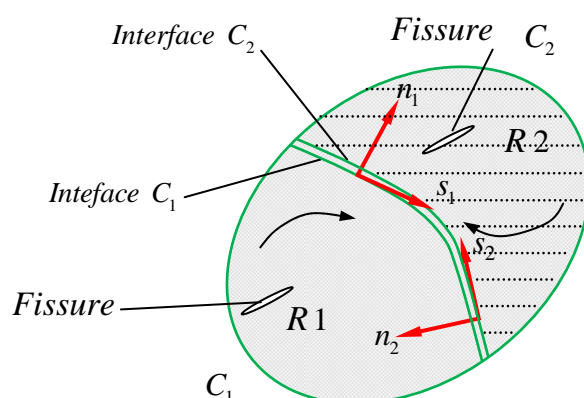


Fig.III.1. Corps bi-couches

$$\begin{aligned}\sigma_s^{[1]}(Q) &= \sigma_s^{[2]}(Q) \\ \sigma_n^{[1]}(Q) &= \sigma_n^{[2]}(Q)\end{aligned}\quad (III.1)$$

et

$$\begin{aligned}u_s^{[1]}(Q) &= -u_s^{[2]}(Q) \\ u_n^{[1]}(Q) &= -u_n^{[2]}(Q)\end{aligned}\quad (III.2)$$

Nous utilisons la procédure numérique liée à la méthode de discontinuité de déplacements pour traiter le problème de la (Fig.III.1) avec les deux milieux  $R_1$  et  $R_2$ . Nous avons deux problèmes qui sont liés entre eux par les conditions de continuités à l'interface. Nous associons des discontinuités de déplacements  $D_s$  et  $D_n$  à chaque élément de  $C_1$  et  $C_2$ . Les

déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_1$  sont donnés en fonction  $D_s^{[1]}$  et  $D_n^{[1]}$  des  $N_1$  éléments du contour  $C_1$ . Les déplacements et les contraintes dans le milieu  $R_2$  sont donnés en fonction  $D_s^{[2]}$  et  $D_n^{[2]}$  des  $N_2$  éléments du contour  $C_2$ .

Le problème se ramène à trouver les discontinuités de déplacements  $D_s$  et  $D_n$  dans chaque élément de frontière parmi les  $N = N_1 + N_2$  éléments. Il est préférable de numérotter les éléments de frontières du milieu  $R_1$  de l'élément 1 jusqu'à l'élément  $N_1$  le long de  $C_1$ , et de  $N+1$  à  $N = N_1 + N_2$  pour le milieu  $R_2$  le long de  $C_2$ . En se référant aux équations de la méthode de discontinuité des déplacements, les contraintes sur la frontière de  $R_1$  sont comme suit:

$$\sigma_s^{[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} A_{ss}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{sn}^{ij(1)} D_n^{j(1)}$$

$$\sigma_n^{[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} A_{ns}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{j=1}^{N_1} A_{nn}^{ij(1)} D_n^{j(1)}$$

$$i = 1, N_1 \quad (III.3)$$

Les contraintes sur la frontière du milieu  $R_2$  sont :

$$\sigma_s^{[2]} = \sum_{j=N_1+1}^N A_{ss}^{ij(2)} D_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N A_{sn}^{ij(2)} D_n^{j(2)}$$

$$\sigma_n^{[2]} = \sum_{j=N_1+1}^N A_{ns}^{ij(2)} D_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N A_{nn}^{ij(2)} D_n^{j(2)}$$

$$i = N_1 + 1, N \quad (III.4)$$

et les déplacements sur la frontière  $R_1$  peuvent s'écrire :

$$u_s^{[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} B_{ss}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{j=1}^{N_1} B_{sn}^{ij(1)} D_n^{j(1)}$$

$$u_n^{[1]} = \sum_{j=1}^{N_1} B_{ns}^{ij(1)} D_s^{j(1)} + \sum_{j=1}^{N_1} B_{nn}^{ij(1)} D_n^{j(1)}$$

$$i = 1, N_1 \quad (III.5)$$

et les déplacements sur la frontière du milieu  $R_2$  sont :



$$u_s^{i[2]} = \sum_{j=N_1+1}^N B_{ss}^{ij(2)} D_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N B_{sn}^{ij(2)} D_n^{j(2)} \quad i = N_1 + 1, N \quad (III.6)$$

$$u_n^{i[2]} = \sum_{j=N_1+1}^N B_{ns}^{ij(2)} D_s^{j(2)} + \sum_{j=N_1+1}^N B_{nn}^{ij(2)} D_n^{j(2)}$$

Les coefficients d'influence dans les équations (III.3) à (III.6) sont calculés exactement de la même manière que le cas du milieu monocouche en associant les caractéristiques mécaniques pour chaque couche.

Les équations (III.3) à (III.6) peuvent se mettre sous la forme d'un système algébrique de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues ( $D_s$  et  $D_n$ ):

$$\begin{cases} b_s^i = \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i = \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \end{cases} \quad \text{avec } i = 1, N \quad (N = N_1 + N_2) \quad (III.7)$$

En conservant les conditions aux limites et les conditions de continuité comme suit :

- a) L'élément  $i$  appartient à la partie libre de  $C_1$  et posons qu'on a des contraintes appliquées à cet élément  $\sigma_s^{i[1]} = (\sigma_s^i)_0$  et  $\sigma_n^{i[1]} = (\sigma_n^i)_0$  donc :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij[1]} & j = 1, N_1 \\ 0 & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = (\sigma_s^i)_0 ; \quad b_n^i = (\sigma_n^i)_0 \end{cases} \quad (III.8)$$

Même chose pour  $C_{ns}$ ,  $C_{sn}$  et  $C_{nn}$

- b) L'élément  $i$  appartient à la partie libre de  $C_2$  et si les conditions imposées sont en

déplacement  $u_s^{i[2]} = (u_s^i)_0$  et  $u_n^{i[2]} = (u_n^i)_0$  donc :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} 0 & j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij[2]} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = (u_s^i)_0 ; \quad b_n^i = (u_n^i)_0 \end{cases} \quad (III.9)$$

Même chose pour  $C_{ns}^{ij}, C_{sn}^{ij}, C_{nm}^{ij}$

Avec des relations similaires on peut exprimer les autres coefficients d'influence en combinant les deux conditions aux limites des deux milieux et en faisant un simple arrangement des équations (III.8) et (III.9) Nous obtenons un seul système.

En deuxième étape, considérons que l'élément  $i$  est situé sur l'interface et supposons qu'il appartient à  $C_1$  Nous aurons un élément  $i^*$  opposé directement à  $i$  et appartenant à l'autre contour  $C_2$ . Nous obtenons donc quatre conditions à vérifier concernant les deux éléments  $i$  et  $i^*$ , deux conditions de continuité de contraintes et deux déplacements.

1) Les conditions de continuité en contraintes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_s^{i[1]} - \sigma_s^{i^*[2]} &= 0 \\ \sigma_n^{i[1]} - \sigma_n^{i^*[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{III.10}$$

D'après (III.3) et (III.4) les quantités  $b_s^i, b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$  .....etc, dans l'équation (III.7), deviennent :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} A_{ss}^{ij[1]} & j = 1, N_1 \\ -A_{ss}^{i^*j[2]} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = \sigma_s^{i[1]} - \sigma_s^{i^*[2]} = 0 & ; b_n^i = \sigma_n^{i[1]} - \sigma_n^{i^*[2]} = 0 \end{cases} \tag{III.11}$$

et identiquement pour les autres coefficients d'influence.

2) Les conditions de continuité en déplacements sont :

$$\begin{aligned} u_s^{i[1]} + u_s^{i^*[2]} &= 0 \\ u_n^{i[1]} + u_n^{i^*[2]} &= 0 \end{aligned} \tag{III.12}$$

D'après (III.5) et (III.6), les quantités  $b_s^i, b_n^i$  et  $C_{ss}^{ij}$  ....ect, dans l'équation(III.7) deviennent :

$$\begin{cases} C_{ss}^{ij} = \begin{cases} B_{ss}^{i^*j[1]} & j = 1, N_1 \\ B_{ss}^{ij[2]} & j = N_1 + 1, N \end{cases} \\ b_s^i = u_s^{i[1]} + u_s^{i^*[2]} = 0 & ; b_n^i = u_n^{i[1]} + u_n^{i^*[2]} = 0 \end{cases} \tag{III.13}$$

et identiquement pour les autres coefficients d'influence [Cro 1983].

### III.2 FISSURE PROCHE DE L'INTERFACE

Il existe un problème spécifique lorsqu'une fissure dans une des couches du matériau se propage en direction de l'interface. Pour la suite de l'étude, ce problème est traité et certains coefficients sont mis en évidence Dundurs (1969).

#### III.2.1 DOUBLES SINGULARITES

Dans un bi-matériau, pour des milieux élastiques, contenant une fissure dans une des couches et faisant un angle de  $\omega$  avec l'interface (Fig.III.2), Dundurs (1969) a prouvé que le champ de contrainte dépend des constantes élastiques par deux paramètres sans dimensions

$$\alpha = \frac{\mu_1(1-\nu_2) - \mu_2(1-\nu_1)}{\mu_1(1-\nu_2) + \mu_2(1-\nu_1)} \tag{III.14}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_1(1-2\nu_2) - \mu_2(1-2\nu_1)}{\mu_1(1-\nu_2) + \mu_2(1-\nu_1)} \right] \tag{III.15}$$

où  $\mu_i$  et  $\nu_i$  sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de la couche  $i$ . Avec la condition  $0 \leq \nu \leq 0.5$  et  $\mu > 0$ , les paramètres de Dundurs sont confinés dans un parallélogramme dans le plan  $(\alpha, \beta)$  avec des sommets à  $(1,0)$ ,  $(1,0.5)$ ,  $(-1,0)$  et  $(-1,-0.5)$ .

La contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  prend la forme  $\sigma_{\theta\theta} r^{-\lambda}$ . L'exposant  $\lambda$  est la racine d'une équation donnée par Bogy (1971). La racine est restreinte à  $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ , une restriction généralement adoptée, avec des justifications critiquées par Hui and Ruina.

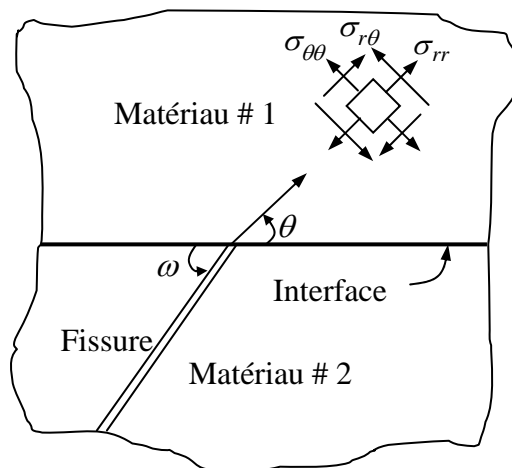
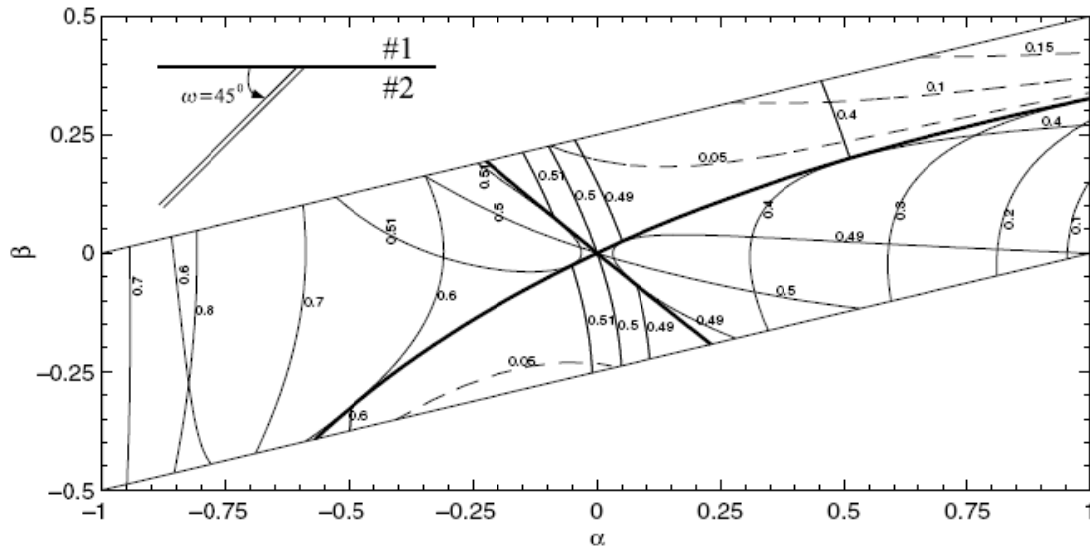


Fig.III.2. Bi-matériau avec une fissure inclinée

Selon les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de Dundurs le bi-matériau contenant une fissure dans la couche et faisant un angle de  $\omega$  avec l'interface, la solution de l'exposant peut être deux nombres réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ou une paire de conjugués complexes  $\lambda_{1,2} = \xi \pm i\varepsilon$  ou  $i^2 = -1$ .

A  $\alpha = \beta = 0$  les deux matériaux ont les mêmes constantes élastiques, et les deux exposants sont  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ , correspondent aux deux modes familiers en tête d'une fissure dans un matériau homogène.



**Fig.III.3. Contour des exposants du champ de contrainte singulier en tête d'une fissure faisant un angle de  $\omega = 45^\circ$  avec l'interface, tracé dans le plan des paramètres de Dundurs  $(\alpha, \beta)$  et limité dans le parallélogramme.**

Les contours définis dans la (Fig.III.3) changent quand l'angle  $\omega$  entre l'interface et la fissure varie comme le cas limite, d'abord étudié par Williams (1959), quand la fissure se trouve à l'interface ( $\omega = 0$ )

Les exposants sont une paire de complexes conjugués

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{III. 16}$$

Dans ce cas ci ; les régions de complexes conjugués se développent sur l'ensemble du plan  $(\alpha, \beta)$  excepté la ligne  $\beta = 0$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$

Pour ( $\omega = 90^\circ$ ) les deux exposants se dégèrent en un nombre réel, régi par l'équation:

$$\cos(\lambda\pi) = \frac{2(\beta-\alpha)}{(1+\beta)}(1-\lambda)^2 + \frac{\alpha+\beta^2}{1-\beta^2} \tag{III. 17}$$

Nous pouvons tracer les contours de  $\lambda$  dans le plan  $(\alpha, \beta)$  . Le cas  $\lambda = 0.5$  correspond à la ligne droite  $\alpha = -\beta$  . Lorsque  $\beta = 0$  , les exposants sont une paire de nombres réels. Nous pouvons conclure que les exposants  $\lambda$  varient de manière significative avec la disparité élastique et l'angle  $\omega$  [Zhe-2007].

### III.2.2 EXPRESSION DU TAUX DE RESTITUTION D'ÉNERGIE EN MULTICOUCHE

Dans le cas où une fissure est située sur la jonction entre les matériaux élastique et isotrope 1 et 2 ayant les caractéristiques  $(\mu_1, \nu_1), (\mu_2, \nu_2)$  le taux de restitution d'énergie [Leb-2003] est donné par :

$$G = \frac{(1-\nu_1)/\mu_1 + (1-\nu_2)/\mu_2}{4 \cosh^2(\pi\varepsilon)} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{III. 18})$$

La quantité  $\varepsilon$  est appelée « constante bi-élastique ». Elle est généralement très inférieure à 1 en valeur absolue [Leb 2003] Elle change de signe lorsqu'on intervertit les matériaux 1 et 2

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(3-4\nu_1)\mu_2 + \mu_1}{(3-4\nu_2)\mu_1 + \mu_2} \quad (\text{III. 19})$$

Nous pouvons vérifier aisément que l'on retombe sur la formule usuelle (en mode I+II) dans le cas d'un matériau homogène ( $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu, \nu_1 = \nu_2 \equiv \nu, \varepsilon = 0$ ) en effet on a alors [Leb 2003]

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{III. 20})$$

Dans cette étude, nous ne considérons pas le cas de fissures disposées sur l'interface.

### III.3 STRUCTURE DU CODE DE CALCUL

Le code de calcul développé est réalisé avec le langage de programmation **FORTRAN 90**, en utilisant le compilateur F32 sous Windows. Le programme est constitué de cinq parties :

La 1<sup>ère</sup> Partie du programme comporte la lecture des principales données : les caractéristiques mécaniques, le calcul des paramètres de Dundurs le chargement, le raffinement des éléments et le positionnement du problème. Il discrétise le corps à étudier et il affecte à chaque élément sa position, son orientation et ses conditions aux limites.

La 2<sup>ème</sup> Partie est la partie principale de la méthode MDD. Il récupère les données à partir de la localisation et il calcule les coefficients d'influence en faisant appel à la sous-routine COEFF. En suite, il construit le système algébrique d'équations pour le résoudre par la sous-routine SOLVE pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Ces résultats vont être chargés dans un fichier qui va être utilisé comme une base de données pour les autres parties. Finalement cette partie calcule le champ de contraintes et de déplacements pour chaque élément de frontière.

La 3<sup>ème</sup> partie du programme traite les problèmes de la mécanique de la rupture. En présence de fissure, il récupère les données à partir de la deuxième partie, ajoute les nouveaux

éléments, et ensuite il calcule les nouveaux coefficients d'influence entre chaque couple d'éléments, en appelant toujours la sous-routine COEFF, et ensuite, il construit le système algébrique d'équations pour le résoudre par la sous-routine SOLVE pour obtenir les composantes de discontinuité de déplacement de chaque élément. Enfin, le facteur d'intensité de contrainte peut être calculé par cette méthode ou en utilisant une approche locale à n'importe quel bout de fissure.

La mise en œuvre numérique de la propagation se fait en ajoutant un élément en tête de la fissure. Avant propagation, un premier calcul élastique nous fournit un système d'équations de la forme :  $[A]\{x\} = \{B\}$ . A chaque pas de propagation, l'incrément de la fissure se fait en ajoutant un élément singulier en fond de fissure. D'un point de vue numérique, on ne calcule que les coefficients liés au nouvel élément. L'élément qui est singulier à l'étape  $i$  ne sera plus singulier au pas  $i + 1$ , puisqu'il n'est plus en fond de fissure.

Pour la procédure de propagation de la fissure, nous utilisons trois critères.

Le premier critère est le critère du taux de restitution d'énergie maximale  $G$  et discuté par Hussain, Pu & Underwood en 1974, Nous pouvons réaliser une série de calculs sur des fissures branchées d'un angle  $\theta$ , avec une incrément de longueur constante adéquate égale à  $\Delta a$ ,

Pour chaque configuration,  $G(\theta)$  est calculée. La direction de branchement probable est celle qui rend  $G(\theta_c)$  maximum. L'angle trouvé est ensuite utilisé pour avoir l'orientation de l'élément suivant

Le deuxième critère utilisé est celui de Sih. Il est le plus simple à utiliser est cela suite à une étude comparative établie.

Pour la programmation de ce critère une expression plus adaptée pour  $\theta_c$  est mise en application par Suo 2002 donnant un seul angle de propagation calculé à partir des facteurs d'intensité de contrainte. L'angle est ensuite utilisé pour avoir l'orientation de l'élément suivant

Le troisième critère utilise la formule de Hussain du taux de restitution d'énergie  $G$  sous le chargement de mode mixte. Cette formule est donnée en fonction des facteurs d'intensité de contrainte et en fonction de  $\theta$ . Les résultats des  $G$  calculés de  $-90^\circ$  à  $+90^\circ$  sont chargés dans un fichier. La valeur choisie est la valeur maximale de  $G(\theta_c)$  donnant l'angle de branchement. L'angle  $\theta_c$  correspondant à  $G$  maximum est utilisé ensuite pour avoir l'orientation de l'élément suivant.

La structure du code de calcul est donnée par la figure qui suit.

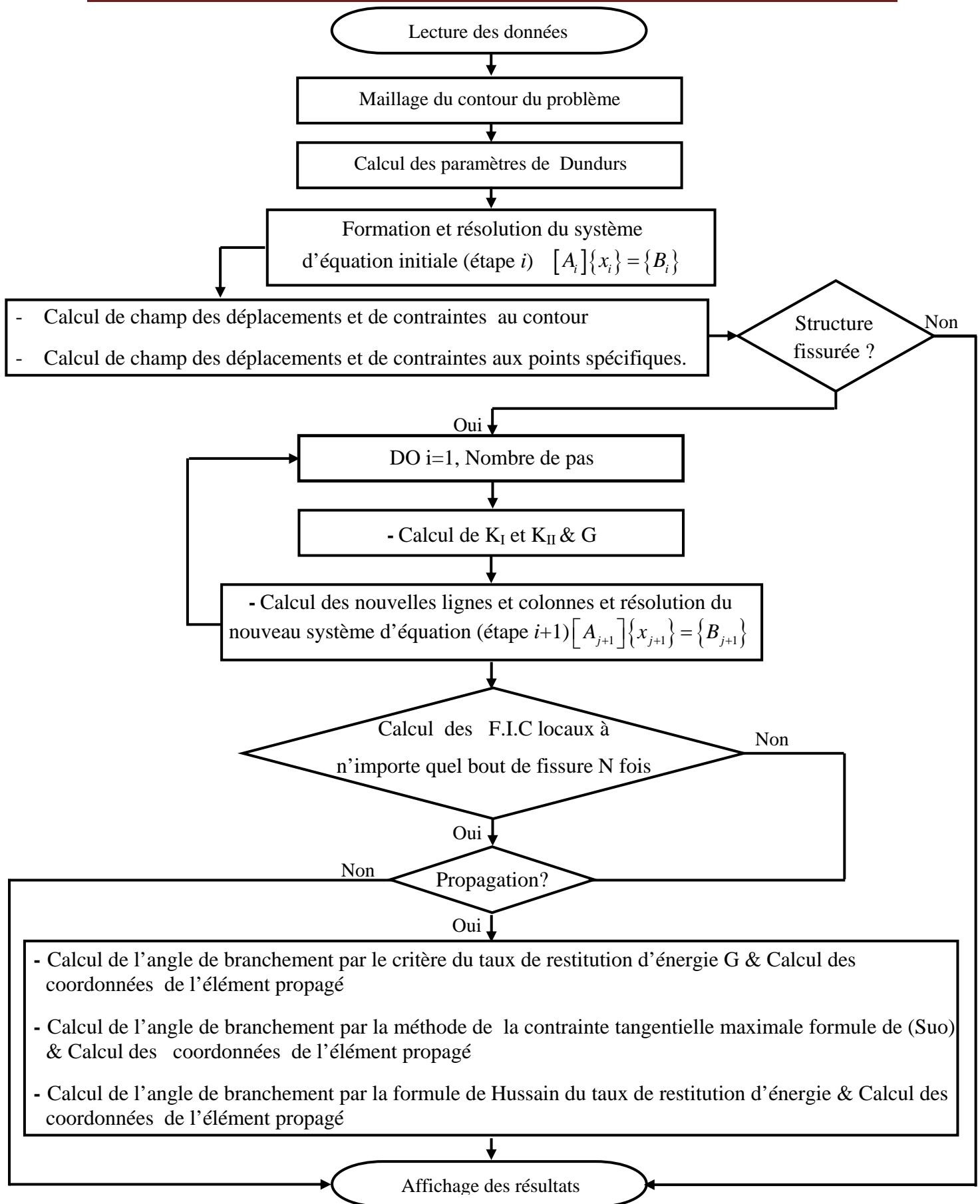
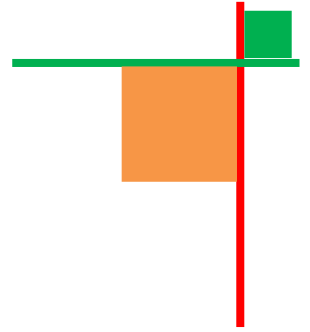


Fig.III.4. Organigramme et chronologie des calculs du code de calcul réalisé

**III.4 CONCLUSION**

Le problème d'interaction entre les fissures et l'interface est étudié en terme de facteurs de Dundurs. Les coefficients de Dundurs permettent de mesurer l'influence des caractéristiques des multicouches sur le chemin de propagation de la fissure. Des trois critères introduits dans le code de calcul, les critères de Sih et Hussain sont les plus simples à implémenter.





## **CHAPITRE IV**

# **EXEMPLES RESULTATS & INTERPRETATIONS**

## CHAPITRE IV

## EXEMPLES , RÉSULTATS &amp; INTERPRETATION

## IV.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous traitons un nombre d'exemples pratiques en mécanique des solides, et qui peuvent être simulés numériquement par la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) en bidimensionnel. Ces exemples peuvent être divisés en deux catégories :

- La première catégorie d'exemples concerne l'utilisation de la méthode de discontinuité de déplacement (MDD) dans les matériaux multicouches contenant une fissure se propageant en mode I et mixte de rupture
- La deuxième catégorie concerne les matériaux multicouches multifissurés et prenant en compte les propagations avec différentes configurations.

## IV.2 TEST DE PERFORMANCE

Avant d'entamer les tests sur les multicouches fissurées , le premier exemple est choisi pour montrer la performance et la fiabilité des résultats

## EXEMPLE 01 : FISSURE EMANANT D'UN TROU CIRCULAIRE

Considérons une plaque rectangulaire, contenant une fissure horizontale débouchant, représentée par la figure (Fig.IV.1) On note par  $l=100mm$  la largeur de la plaque et  $2l$  sa hauteur.  $R$  est le rayon du trou de la plaque et  $a$  représente la longueur de la fissure. La plaque est soumise à un effort de traction uniforme  $\sigma = 100MPa$

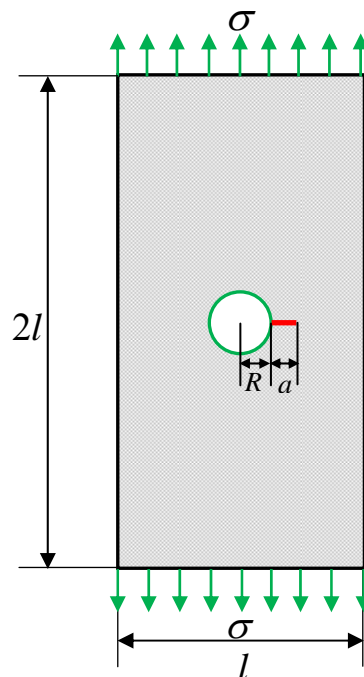


Fig.IV.1. Plaque rectangulaire en traction avec fissure émanant d'un trou

Les nombres d'éléments ont été choisis comme  $N_t = 26$ ,  $N_{2t} = 54$ . Le périmètre du trou de rayon  $R = 24mm$  est fortement discrétisé avec un nombre d'éléments égal à  $N_t = 84$ . La fissure de longueur  $a = 4mm$  est discrétisée avec 2 éléments. Le nombre d'éléments sur la fissure augmente avec sa longueur pour avoir une discrétisation en cohérence avec les éléments sur le cercle. Le module de Young  $E$  du matériau est égal  $210GPa$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  est égal à  $0,3$ . On fixe la valeur de  $R$  à  $25mm$  et on fait varier le rapport  $a/R$  entre  $0,16$  et  $0,4$ . Les résultats analytiques sont donnés par les deux formules suivantes [Rol-1977].

$$KI \approx 1,12(3\sigma)\sqrt{\pi a} \quad (a \ll R) \tag{VI.1}$$

Les résultats analytiques et numériques sont représentés dans le tableau suivant :

**Tableau IV.1. Facteur d'intensité de contraintes (KI) pour différentes valeurs de a/R**

$a/R$	$KI(NUM)$	$KI(Analytique)$	Erreur
0,16	38,86	37,67	3,17%
0,24	46,82	46,13	1,50%
0,32	52,25	53,27	1,90%
0,4	59,33	59,55	0,37%

Dans le cas où  $a > R$ , il est admis [Rol-1977] de considérer que le trou fait partie de la fissure. La longueur effective de la fissure devient alors  $a + 2R$  et le facteur d'intensité de contrainte en mode I est donné par [Rol-1977]

$$KI \approx \sigma \sqrt{\pi \left( \frac{a + 2R}{2} \right)} \quad (a > R) \tag{VI.2}$$

Dans cet exemple nous fixons la valeur  $R$  à  $5mm$ . Le nombre d'éléments sur le cercle est  $N_t = 17$  pour toute l'expérience. Pour une longueur de fissure  $a = 10mm$  en dehors du périmètre du cercle, le nombre d'éléments correspond est de  $N_a = 5$ . Le rapport  $a/R$  varie de 3 à 4

Les résultats analytiques sont obtenus numériquement et sont représentés dans le tableau suivant :

**Tableau IV.2. Facteur d'intensité de contraintes (KI) pour différentes valeurs de a/R**

$a/R$	$KI(NUM)$	$KI(Analytique)$	Erreur
3	19,78	19,82	0,21%
3,2	20,21	20,21	0,004%
3,6	21,39	20,97	2,03%
4	22,61	21,71	4,15%

On remarque que les résultats numériques convergent vers la solution analytique. L'erreur est plus grande pour le cas  $a/R = 4$ , prévisible à cause de l'importance de la longueur de la fissure où l'effet de bord se manifeste.

### IV.3 PREMIERE CATEGORIE : LES MATERIAUX MULTICOUCHES A UNE FISSURE

Dans ce paragraphe, une série d'exemples est présentée. Le phénomène de la qualité de l'interface sur le chemin de propagation est mis en évidence. Les coefficients de Dundurs, Dundurs (1969) sont des paramètres qui peuvent donner une appréciation sur le chemin de propagation au voisinage de l'interface ou des films (dépôts). Dans cette partie, trois critères sont utilisés. Le premier critère est celui de l'approche globale utilisant le taux de restitution d'énergie  $G$  [Bou-2003] de Griffith. Le deuxième critère est celui de Sih [Suk 2003]. Ce critère, comme mentionné dans l'organigramme présenté au chapitre III a été facilement implémenté. Le dernier critère est du à Hussain et al. [Wak-2004]. C'est un critère qui exprime le taux de restitution d'énergie en terme de facteur d'intensité de contrainte KI et KII et avec prise en charge du mode mixte eq. N°(II.11) en mode mixte. Des résultats dus à Wakako simulant la propagation en mode mixte sur la résine epoxy utilisant ce critère montre l'efficacité de ce critère. Pour notre travail, ce critère a été choisi aussi pour simuler la propagation simultanée de fissures en multicouches et en mode mixte. La simplicité de l'implémentation de ce critère dans le code de calcul nous a motivé à utiliser ce critère.

#### IV.3.1 SIMULATION DE PROPAGATION DE MONOFISSURE

##### IV.3.1.1 CRITERE DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE MAXIMUM

##### EXEMPLE 02 : PLAQUE FINIE CONTENANT UNE INCLUSION

##### 1<sup>ER</sup> CAS : INCLUSION PLUS SOUPLE QUE LA MATRICE

Cet exemple concerne une plaque rectangulaire de largeur  $l = 100\text{mm}$  et de hauteur  $2l$ . La plaque présente une fissure débouchante de longueur  $l/8$  au milieu de sa hauteur et une inclusion de diamètre  $l/2$  centrée dans la moitié inférieure de la plaque. La pièce est sollicitée en traction avec un chargement constant  $\sigma_0 = 100\text{Mpa}$ . La matrice est en acier de construction de module de Young  $E_1 = 210\text{GPa}$  et coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0,3$ . L'inclusion est du plomb de module de Young  $E_2 = 18\text{GPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu_2$  égal à 0,44.

Nous définissons le rapport des modules de Young (matrice/inclusion) de

$$R = \frac{E_{\text{Matrice}}}{E_{\text{Inclusion}}} = 11,66.$$

La simulation numérique de la propagation a été effectuée en discrétisant le contour de la plaque en 227 éléments et le contour de l'inclusion en 47 éléments. La fissure initiale est discrétisée en 6 éléments. La propagation est effectuée par pas de  $\Delta a = 2\text{mm}$ .

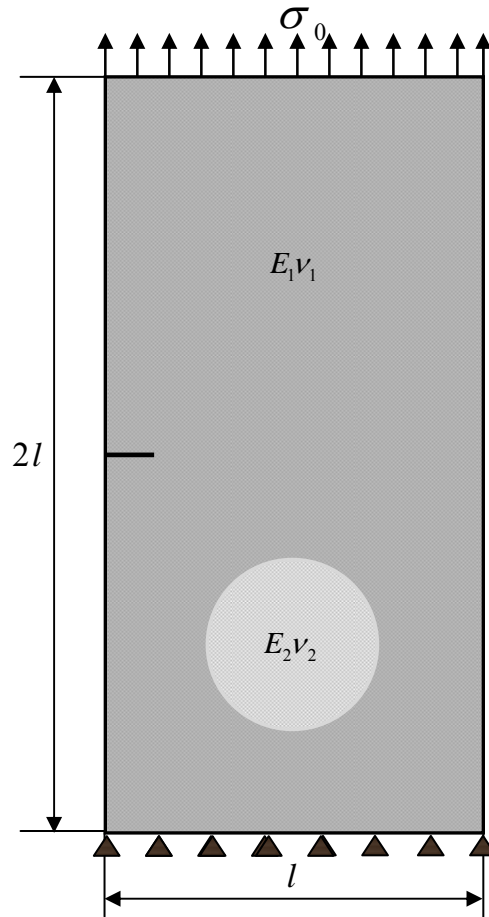


Fig.IV.2. Plaque bi-matériaux fissurée contenant une inclusion

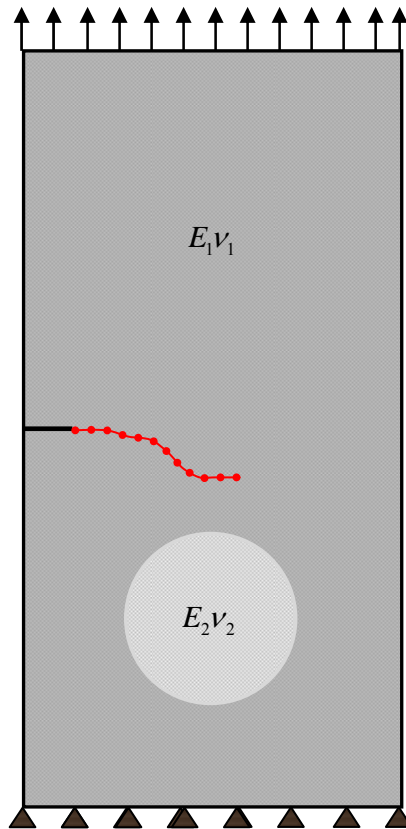
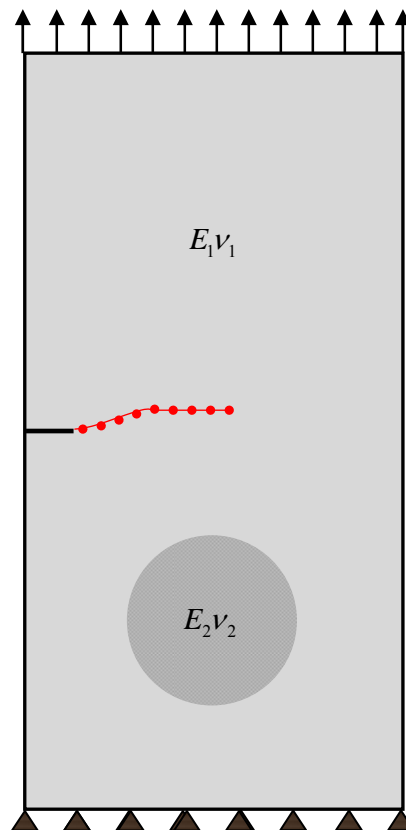


Fig.IV.3. Trajectoire de propagation pour la plaque avec inclusion  
 $E_1/E_2 = 11,66$  Chemin de propagation décrit par le critère de Griffith

**2<sup>EM</sup> CAS : INCLUSION PLUS RIGIDE QUE LA MATRICE**

Nous gardons la même configuration géométrique que l'exemple précédent. Nous choisissons une inclusion plus rigide que la matrice. La matrice est de l'époxy ayant un module de Young  $E_1$  égal à  $E_1 = 3,5GPa$  et un coefficient de Poisson  $\nu_1 = 0,35$ . Les caractéristiques de l'inclusion sont  $E_2 = 68GPa$  et  $\nu_2 = 0,19$  et correspondent au verre. Nous obtenons un rapport (matrice/inclusion) égal à  $R = \frac{E_{Matrice}}{E_{Inclusion}} = 0,051$ .



*Fig.IV.4. Trajectoire de propagation pour la plaque avec inclusion  $E_1/E_2 = 0,051$*

*Chemin de propagation décrit par le critère de Griffith*

Ces deux exemples montrent bien l'influence du type de l'inclusion dans la matrice sur le chemin de propagation de la fissure.

Les résultats obtenus (Fig.IV.3) montrent que pour une inclusion moins rigide que la matrice, la fissure est attirée par l'inclusion, et que la réorientation de la fissure est cependant moins prononcée que celle obtenue avec un trou puisque le trou crée une chute de contraintes dans cette région. Nous constatons que les résultats obtenus sont en accord avec ceux de la littérature [Bou-2003].

Réciproquement, si l'inclusion est plus rigide que la matrice (Fig.IV.4), la fissure s'éloigne de l'inclusion.

## IV.3.1.2 CRITERE DE SIH

Nous reprenons les deux exemples précédents en utilisant le critère de Sih. L'intérêt est de montrer la souplesse et le gain de temps de calcul en adoptant ce critère.

## EXEMPLE 03 : PLAQUE FINIE CONTENANT UNE INCLUSION

1<sup>ER</sup> CAS : INCLUSION PLUS SOUPLE QUE LA MATRICE

Nous reprenons les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques utilisées pour l'exemple 02. La discrétisation est plus fine sur la fissure et sur l'inclusion.

La simulation numérique de la propagation a été effectuée en discrétisant le contour de la plaque en 240 éléments. Le contour de l'inclusion est discrétisé avec 79 éléments et la fissure principale en 12 éléments. La propagation est effectuée par pas de  $\Delta a = 1mm$ .

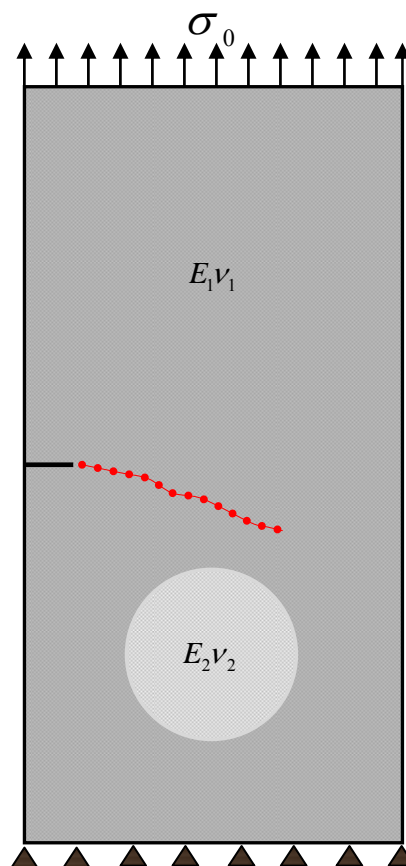
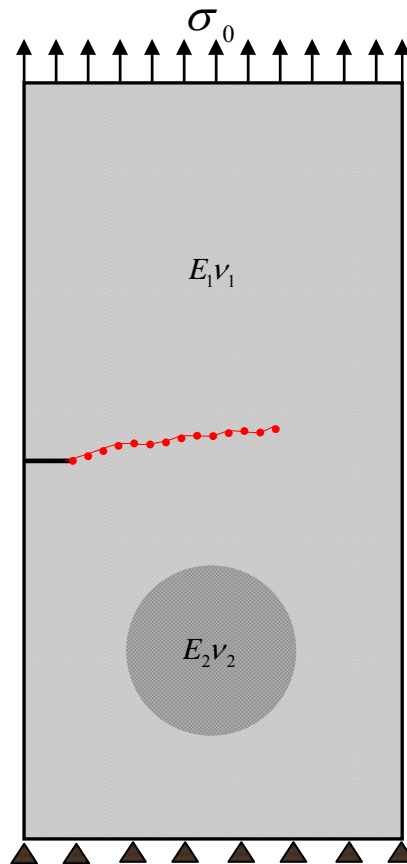


Fig.IV.5. Trajectoire de propagation pour la plaque avec inclusion  $E_1/E_2 = 11,66$

*Chemin de propagation décrit par le critère de Sih*

**2<sup>EM</sup> CAS : INCLUSION PLUS RIGIDE QUE LA MATRICE**

Nous gardons la même configuration que l'exemple précédent mais nous choisissons une inclusion plus rigide que la matrice. Les caractéristiques mécaniques de la matrice sont  $E_1 = 3,5GPa$  et  $\nu_1 = 0.35$  et correspondent à de l'époxy. Le module de Young et le coefficient de Poisson sont respectivement  $E_2 = 68GPa$ ,  $\nu_2 = 0.19$  et correspondent à du verre donnant ainsi un rapport des modules de Young (matrice inclusion) égal à  $R = \frac{E_{Matrice}}{E_{Inclusion}} = 0,051$ .



**Fig.IV.6. Trajectoire de propagation pour la plaque avec inclusion  $E_1/E_2 = 0,051$   
Chemin de propagation décrit par le critère de Sih**

Nous retrouvons les deux aspects de refoulement et d'attraction de la fissure par rapport à l'inclusion.

Les résultats obtenus avec le critère de Sih sont semblables à ceux obtenus avec le critère de Griffith.

Malgré que la discrétisation soit plus fine dans le cas de l'utilisation du critère de Sih, le temps de calcul est beaucoup plus faible que celui absorbé dans les calculs par le critère de Griffith.

Pour les besoins de l'étude, le critère de Sih est adopté pour les exemples suivants au vu de la souplesse de son utilisation et en matière de gain en temps de calcul. Le critère donne



directement l'angle de branchement  $\theta_c$  pour chaque pas de propagation. Notons que le critère de Griffith demande un temps assez important pour le calcul de l'énergie pour chaque angle  $\theta$  et pour chaque pas de propagation. Il reste que le critère de Griffith a montré sa fiabilité dans beaucoup de configurations.

**EXEMPLE 04 : FILM SOLLICITE EN TRACTION COLLE A UN SUBSTRAT PREFISSURE**

Considérons une couche mince collée sur un substrat contenant une fissure horizontale et représentée sur la (Fig.IV.7). La hauteur du substrat est  $H = 10h = 100mm$ . Sa largeur est égale à  $L = 200mm$ . On note par  $a = 10mm$  la longueur de la fissure principale. Le film est soumis à un effort de traction uniforme  $\sigma = 100MPa$ .

La simulation numérique de la propagation a été effectuée en discrétisant le contour du substrat en 150 éléments. La fissure initiale est discrétisée en 10 éléments. Le film a été discrétisé en 110 éléments. La propagation est effectuée par pas de  $\Delta a = 1mm$ . Le matériau utilisé pour le film et le substrat est de la céramique Alumina. Le module de Young et le coefficient de Poisson sont respectivement égaux à  $E_{film} = E_{substrat} = 370GPa$  et

$$\nu_{film} = \nu_{substrat} = 0,27.$$

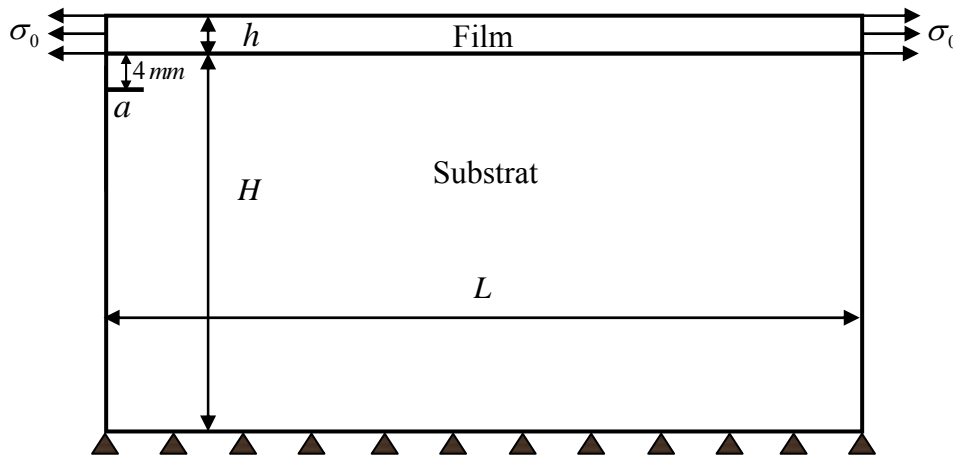


Fig.IV.7. Film et substrat en céramique Alumina

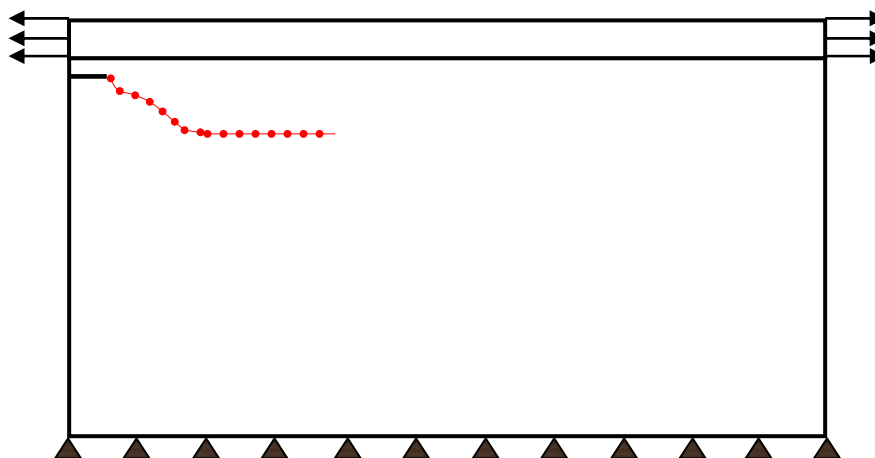


Fig.IV.8. Trajectoire de propagation d'une fissure dans un substrat en céramique collé à un film en céramique sous tension

Pour une couche mince prétendue et collée sur un substrat fragile et épais, les fissures provenant des bords ont une tendance à s'éloigner du film et suivent une trajectoire parallèle à l'interface. Cannon et al (1986), Thouless et autres en (1987) ont observé ce phénomène sur de la céramique. Des investigations expérimentales et analytiques détaillées de ce type de problème ont été conduites par Evans et al (1990), Suo et Hutchinson (1989), et Chiao et Clarke (1990). La solution de référence pour ce problème est due à Suo et Hutchinson, (1989). Ils ont montré que la profondeur du chemin de propagation dépend fortement de la différence des constantes élastiques et l'épaisseur du substrat, mais le taux de restitution d'énergie normalisé est peu sensible à l'épaisseur du substrat à partir de  $H/h > 10$ .

Le modèle étudié est montré sur la (Fig.IV.7). La solution de référence pour ce problème est due à Suo et Hutchinson 1989, celle-ci montre que :

$$G_{ss} = 0.281\sigma^2 h / \bar{E} \quad d_{ss} = 1.05h$$

$G_{ss}$  : est le taux de restitution d'énergie en mode I

$d_{ss}$  : est la profondeur de la trajectoire de la fissure (mesurée à partir de l'interface)

On considère que le chemin simulé est le chemin probable de la propagation de la fissure Sur la (Fig.IV.8), du problème simulé, la fissure se propage en premier en mode mixte. La profondeur de la trajectoire de la fissure se stabilise pour  $d_{ss} = 0.0105m$  et le taux de restitution d'énergie est calculé à cette phase de stabilisation et il est égal à  $G_{ss} = 7.10^{-5} Mpa.m$

Les résultats obtenus sont très conformes à la solution d'état d'équilibre obtenue par Suo et Hutchinson (1989). La simulation montre également que la première phase de la propagation est en mode mixte [Hua-2003].

#### EXEMPLE 05 : STRUCTURE MULTICOUCHE EN FLEXION 4 POINTS

Nous revenons dans cet exemple pour montrer l'effet de la qualité des matériaux sur le chemin de propagation.

Une barre rectangulaire en flexion 4 points, de dimension  $125 \times 15mm$ , est composée de deux matériaux formant trois couches (Fig.IV.9). Une couche d'épaisseur  $h = 2,25mm$ , pouvant être assimilée à un joint est intercalée au milieu de la barre entre deux domaines de même caractéristiques mécaniques. La longueur de chaque domaine est égale à  $L_1 = L_2 = 62,5mm$ . La hauteur de la barre ainsi composée, notée  $W$  est égale à 15mm.

Une fissure initiale, parallèle à l'interface, de longueur  $a = 1,5mm$ , démarre à partir de la face inférieure à droite de l'interface. Elle est distante de  $d = 4,5mm$  de celle ci.

La barre est soumise à deux forces à égale distance de l'extrémité et d'intensité  $P = 180N$  dirigées suivant les y positifs.. Elle repose sur deux appuis disposés aux extrémités de la barre permettant de réaliser une flexion à 4 points.

Pour mettre en évidence l'importance des couples de matériaux sur la trajectoire du chemin de propagation de la fissure, nous avons traité le cas du couple aluminium/céramique et du couple cuivre/verre.

Nous allons commencer par traiter le cas du couple aluminium/céramique.

La simulation de la propagation a été effectuée en discrétisant le contour de la première couche en 186 éléments. La deuxième couche est discrétisée en 66 éléments et la troisième en 165 éléments. La fissure initiale est divisée en 6 éléments. La propagation est effectuée par pas de  $\Delta a = 0,25mm$ .

Les caractéristiques mécaniques sont :

$$E_{c\acute{e}ramique} = 370GPa, \nu_{c\acute{e}ramique} = 0,27$$

$$E_{Aluminium} = 71GPa, \nu_{Aluminium} = 0,345$$

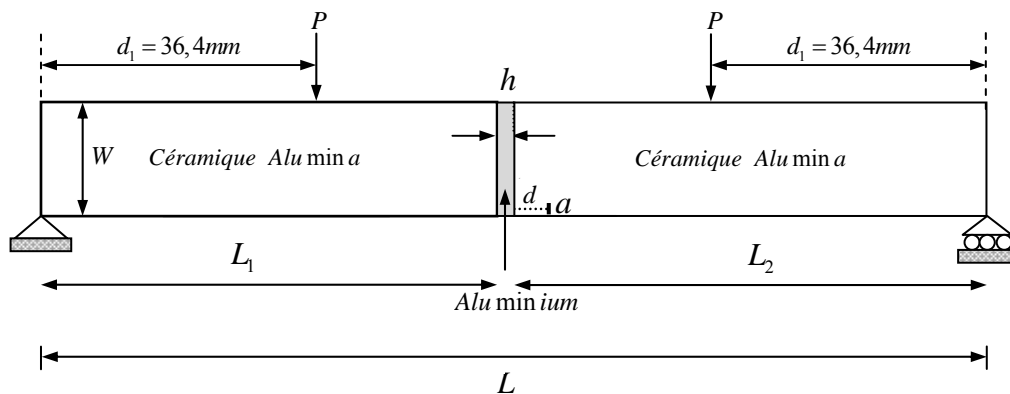


Fig.IV.9. Structure multi couches fissurée contenant une fissure proche de l'interface

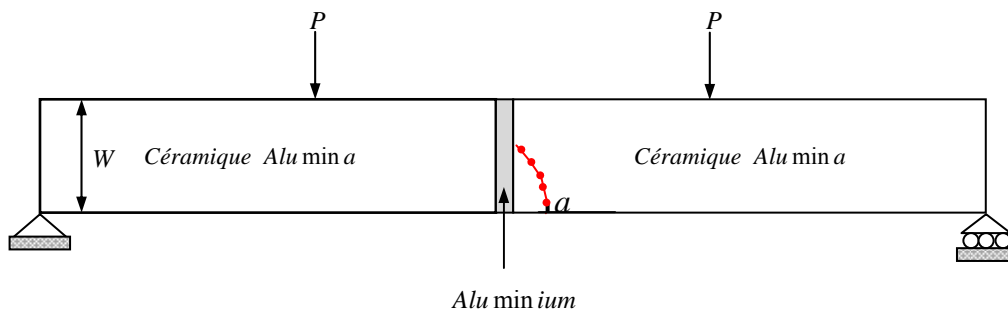
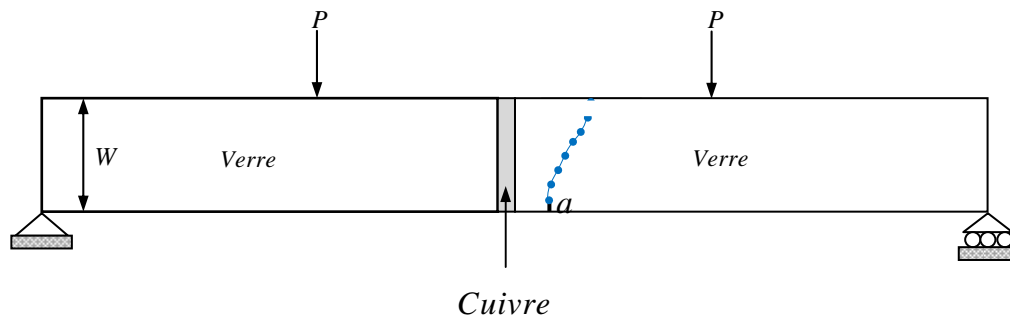


Fig.IV.10. Trajectoire de propagation d'une fissure proche de l'interface dans une structure multi couche en utilisant le critère de Sih

Le deuxième couple est du cuivre/verre La géométrie est celle de l'exemple précédent. L'élément inséré ou l'élément joint est du cuivre à la place de l'aluminium. Le verre remplace la céramique(alumina). Les caractéristiques mécaniques des matériaux choisis sont les suivantes:  $E_{verre} = 74GPa, \nu_{verre} = 0,17$

$$E_{cuivre} = 130GPa, \nu_{cuivre} = 0,34$$



**Fig.IV.11. Trajectoire de propagation d'une fissure proche de l'interface dans une structure multi couche en utilisant le critère de Sih**

**Tableau IV.3. propriétés des matériaux et paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de Dundurs pour les deux couplets des matériaux**

Couplets de matériaux	$E_1$ (GPa)	$\nu_1$	$E_2$ (GPa)	$\nu_2$	$\alpha$	$\beta$
Alumina/aluminium	370	0,27	71	0,345	0,666	0,144
Verre/cuivre	74	0,17	130	0,343	-0,324	-0,183

Les deux exemples précédents montrent les possibilités de la MDD dans la prise en compte de la fissuration en milieux non homogènes et au voisinage d'interfaces.

Cette étude a déjà été menée par McNaney et al. (1994) dans le cas du couple alumina-aluminium.

La fissure de longueur  $a$ , initialement égale à 1,5mm est parallèle à l'interface commence à se propager en mode I et son chemin dévie en mode mixte.

Les travaux expérimentaux ainsi que l'analyse théorique faite par McNaney et autres (1994) montrent que lorsque la fissure est située près de l'interface, la trajectoire de propagation de la fissure est fortement affectée par la qualité des deux matériaux constitutifs du spécimen composé. Le champ de contrainte au voisinage de la tête de fissure est affecté par l'interface.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de Dundurs (1969), décrivent l'effet de la différence dans les propriétés élastiques des deux matériaux constitutifs:

L'étude menée par McNaney et Al (1994) indique que, pour le cas satisfaisant la condition  $K_{II} = 0$ , la trajectoire du chemin de propagation de la fissure proche de l'interface se dirige vers l'interface quand  $\beta > 0$ . Cette configuration est bien montrée dans l'exemple de la (Fig.IV.10) où pour le couple aluminium/alumina  $\beta = 0,144$ .

La trajectoire de la fissure s'éloigne de l'interface en mode mixte quand  $\beta < 0$ . Ceci est bien montré à la (Fig.IV.11) où  $\beta = -0,183$  pour le couple cuivre/verre [Yuh-2008].

#### IV.4 LES MATERIAUX MULTICOUCHES CONTENANT PLUSIEURS FISSURES

Les études sur la propagation des multifissures dans les multimatériaux sont complexes et pas nombreuses. Les exemples suivants sont une contribution dans ce domaine. Pour les exemples de ce paragraphe, nous avons choisi de nous intéresser au calcul du taux de restitution d'énergie réduit  $G'$  qui sera défini ultérieurement. Le calcul du taux de restitution d'énergie  $G$  peut être calculé de deux manières dans cette partie. Nous avons choisi d'utiliser les formules suivantes donnant le facteur d'intensité de contrainte en fonction de la discontinuité de déplacement pour ensuite déduire le taux de restitution d'énergie.

$$G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 \quad (\text{IV.3})$$

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right) \quad (\text{IV.4})$$

Cette formule reste valable dans notre cas puisque la configuration reste en mode I. Le facteur d'intensité de contrainte reste facilement accessible avec le calcul de l'ouverture en tête de fissure.

#### EXEMPLE 06 : PLAQUE CARREE FINIE EN BIMATERIAUX SOLICITEE EN TRACTION CONTENANT DEUX FISSURES.

Le premier exemple de cette série est une plaque carrée de dimension  $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$  composée de deux matériaux (Fig.IV.12). Chaque couche contient une fissure perpendiculaire à l'interface et mesurant  $2a = 10 \text{ mm}$ . La pièce ainsi formée est sollicitée en traction. Sur la partie la plus rigide, du module de Young  $E_2 = 344,37 \text{ GPa}$ , la pièce est soumise à une contrainte de  $\sigma = 100 \text{ MPa}$ . Sur la partie la plus souple, du module de Young  $E_1 = 34,43 \text{ GPa}$ , le chargement est parallèle à l'interface dans le matériau 1 et fixé à  $0,1\sigma$ .

Nous nous proposons de faire une étude sur l'interaction des fissures à travers l'interface. Pour cela, nous faisons varier la distance  $h$  entre les centres des fissures et l'interface.

Nous considérons sept configurations géométriques différentes et données par les rapports  $\frac{h}{a} = 1,1 ; 1,25 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 2,75 ; 3$ .

Pour chaque valeur  $\frac{h}{a}$ , nous calculons le facteur d'intensité puis le taux de restitution d'énergie (ERR) de chaque tête (A,B,C,D) de fissures

La simulation numérique de la plaque a été effectuée en discrétisant le contour de la plaque en 388 éléments pour chaque couche. Chaque fissure est discrétisée en 10 éléments. Plusieurs calculs ont été effectués en faisant varier la distance  $h$  entre le centre de la fissure et l'interface (Fig.IV.12),

Les caractéristiques mécaniques sont :  $E_1 = 34,47GPa$ ,  $E_2 = 344,74GPa$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  [Jon-1982].

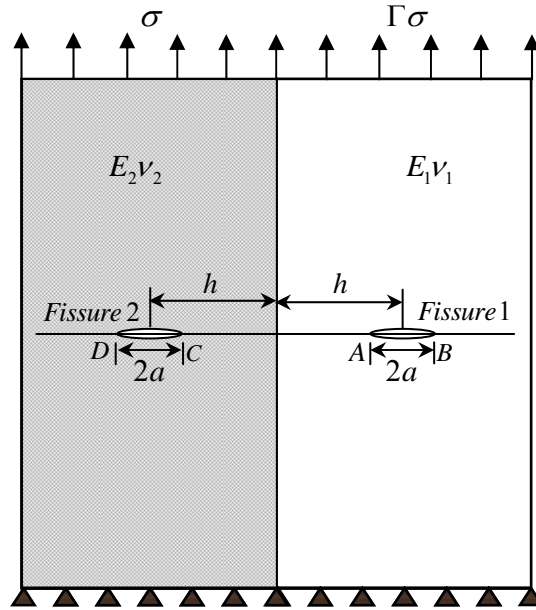


Fig.IV.12. plaque carrée en bimatériaux contenant deux fissures  $E_2/E_1 = 10$

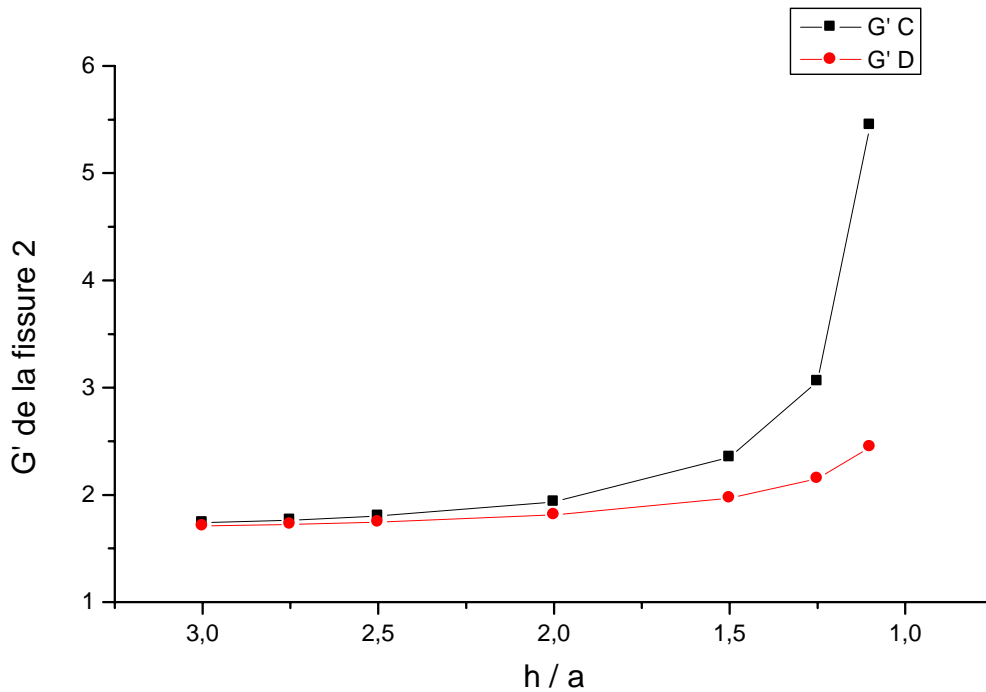


Fig.IV.13. les taux de restitution d'énergie normalisés par  $\sigma^2 \pi a (\kappa_2 + 1) / (8 \mu_2)$

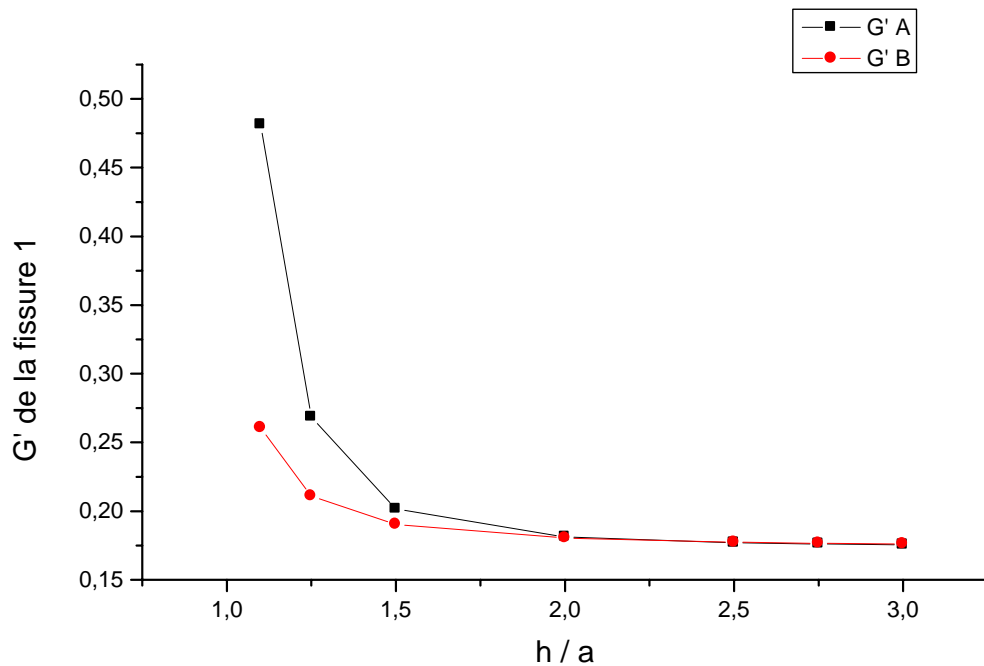


Fig.IV.14. les taux de restitution d'énergie normalisés par  $\sigma^2 \pi a (\kappa_2 + 1) / (8 \mu_2)$

Les résultats sont représentés dans la figure (Fig.IV.13) (Fig.IV.14) en terme de :  $G'$  qui représente le taux de restitution d'énergie normalisé

La forme générale du taux de restitution d'énergie est  $G$

- En déformation plane : 
$$G = \frac{(1-\nu^2)}{E} K_I^2 \tag{IV.5}$$

- le taux de restitution d'énergie normalisé : 
$$G' = \frac{G}{\sigma^2 \pi (\kappa_2 + 1) / (8 \mu_2)} \tag{IV.6}$$

Nous remarquons que le taux de restitution d'énergie adimensionnel  $G'$  augmente quand les deux fissures s'approchent de l'interface. Ceci implique que les deux fissures tendront à se propager en direction de l'interface. Nous pouvons déduire des résultats, que la fissure dans le milieu le plus rigide se propage la première. Ceci respecte les conditions du problème, étant donné que l'état de contrainte est moins singulier dans le milieu le plus souple [Xue2002].

**EXEMPLE 07 : PLAQUE CARREE FINIE EN BIMATERIAUX SOLICITEE EN TRACTION CONTENANT CINQ FISSURES DANS LA COUCHE RIGIDE**

Une plaque carrée de dimension  $400\text{ mm} \times 400\text{ mm}$  composée de deux matériaux présentant cinq fissures parallèles dans la deuxième couche la plus rigide (Fig.IV.15)

Le chargement est parallèle à l'interface. Dans la couche 2 est appliquée une contrainte  $\sigma = 100\text{ MPa}$ . Dans la couche 1 le chargement est égal à  $\Gamma \sigma$  avec  $\Gamma = 0.1$

Quatre fissures de longueur  $2l_0 = 10\text{mm}$  chacune sont disposées dans le domaine le plus rigide. Une cinquième fissure de longueur variable  $2l$  est disposée entre ces 4 fissures, Nous considérons cinq configurations géométriques différentes, avec  $h = 0,25l_0$ ,  $h = 0,5l_0$ ,  $h = 1l_0$ ,  $h = 2l_0$ ,  $h = 6l_0$ . Pour chaque  $h$  donnée précédemment, nous faisons varier le rapport  $l/l_0 = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$

Nous proposons de calculer le taux de restitution d'énergie adimensionnel (ERR) au niveau de la tête de fissure A de la fissure de longueur  $2l$

La discrétisation de la plaque a été effectuée en divisant le contour de la plaque en 350 éléments pour chaque couche.. Chaque fissure de longueur  $2l_0$  est discrétisée en 10 éléments. La fissure du milieu de longueur  $2l$  est discrétisé de façon à avoir la même longueur d'élément en relation de chaque configuration. Ceci donne deux éléments pour  $l/l_0 = 0.2$ , quatre éléments pour  $l/l_0 = 0.4$ , six éléments pour  $l/l_0 = 0.6$  huit éléments pour  $l/l_0 = 0.8$  et enfin 10 dans le cas  $l/l_0 = 1$  Les caractéristiques mécaniques sont  $E_1 = 34,47\text{GPa}$ ,  $E_2 = 344,74\text{GPa}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$

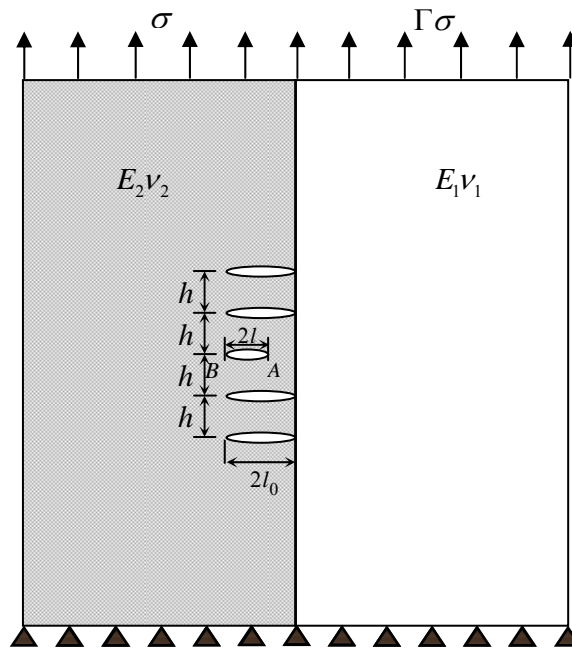
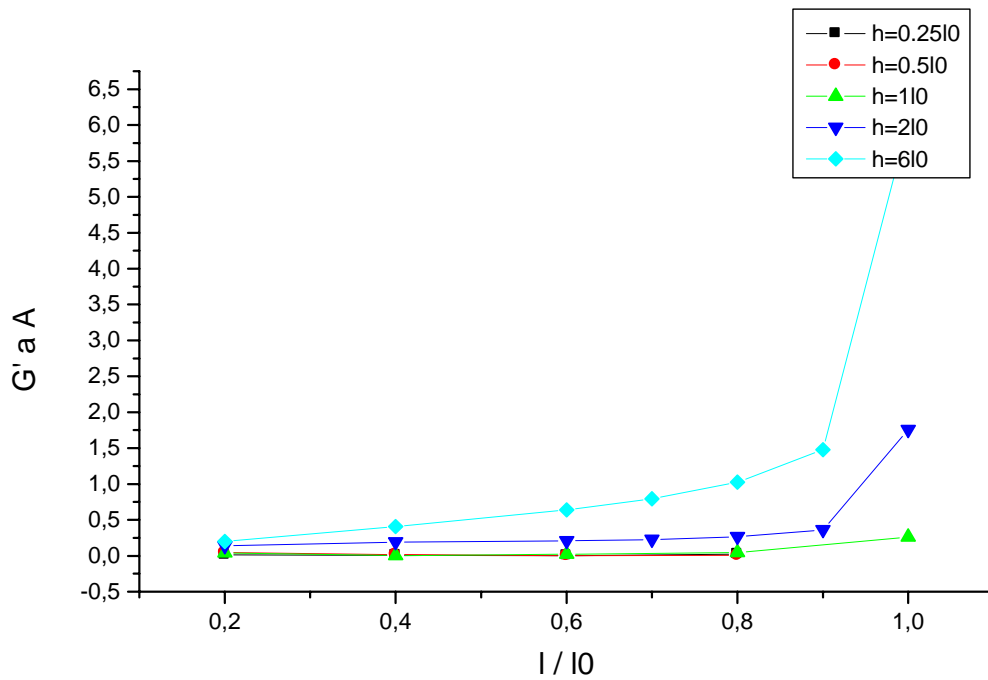


Fig.IV.15. plaque carrée en bimatériaux contenant cinq fissures dans la couche la plus rigide  $E_2/E_1 = 10$





**Fig.IV.16. Taux de restitution d'énergie normalisés  $G'$ , pour une fissure s'approchant de l'interface entourée de quatre fissures**

D'après les résultats obtenus et reportés sur la (Fig.IV.16), nous pouvons remarquer que  $G'$  augmente rapidement pour des fissures éloignées. Par contre, il reste quasi constant pour des fissures rapprochées. Ces résultats sont confortés par les travaux de Wolodko et al (1999). L'effet de  $h$  et du matériau est présenté avec l'exemple suivant.

**EXEMPLE 08 : PLAQUE CARREE FINIE EN BIMATERIAUX SOLICITEE EN TRACTION CONTENANT CINQ FISSURES DANS LA COUCHE SOUPLE**

Nous reprenons l'exemple précédent mais en disposant les fissures dans la couche la plus souple. Le chargement, Les caractéristiques mécaniques et la discrétisation sont identiques à l'exemple précédent

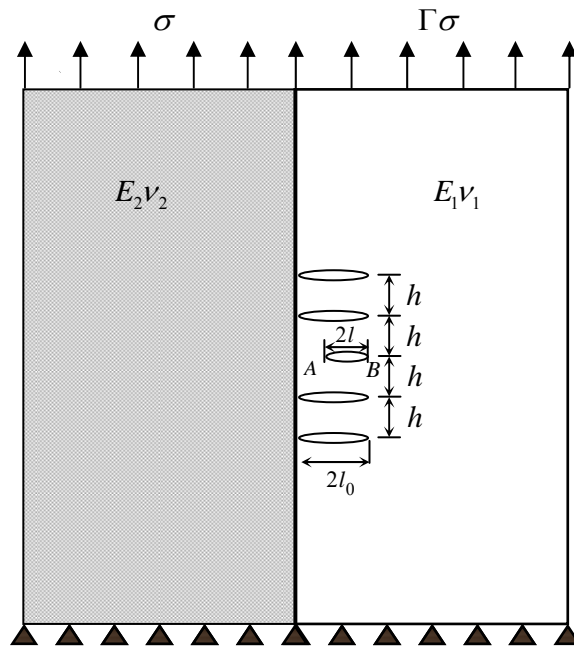


Fig.IV.17. Plaque carrée en bimatériaux contenant cinq fissures dans la couche la plus souple  $E_2/E_1 = 10$

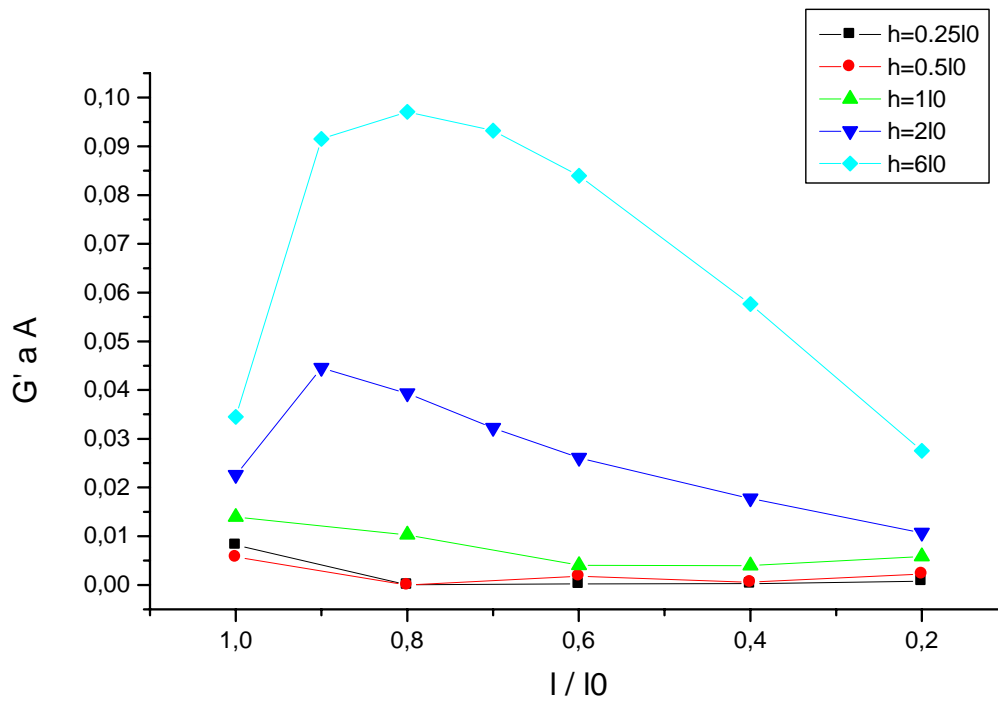


Fig.IV.18. Taux de restitution d'énergie normalisés  $G'$ , pour une fissure s'approchant de l'interface et entourée par quatre fissures

Lorsque les fissures sont dans la couche la plus souple, les résultats sont semblables pour des  $h$  faibles. Par contre, des extrêmes de la valeur de  $G'$  à  $l/l_0 = 0.6$  pour  $h = 2l_0$  et à  $l/l_0 = 0.8$  pour  $h = 6l_0$  sont notés. Ce qui n'est pas le cas lorsque les fissures sont dans le domaine le plus rigide. Un effet de saturation est remarqué pour les faibles valeurs de  $h$  quelle que soit le matériau. Ces résultats sont aussi obtenus par Wolodko et al (1999). Les résultats prévus dans (Fig.IV.18) sont en accord avec les observations expérimentales rapportées par Wolodko et Al. (1999). [Xue-2002 ].

#### EXEMPLE 09 : PLAQUE EN BIMATERIAUX CONTENANT DEUX FISSURES PARALLELES

Une plaque rectangulaire de dimension  $100mm \times 50mm$  composée de deux matériaux (Fig.IV.19) ,présente deux fissures de  $10mm$  chacune, débouchant dans la couche de propriété macanique  $E_2$  et  $\nu_2$ . La plaque est chargée par  $\sigma_0 = 100MPa$  perpendiculairement à l'interface,

La simulation de la propagation a été réalisée en discrétisant le contour de la première couche avec 200 éléments. Le contour de la deuxième couche utilise 230 éléments. Chaque fissure initiale est discrétisée en 10 éléments. La propagation est effectuée par pas  $\Delta a = 1mm$  . La distance entre la fissure de gauche et l'interface et entre la deuxième fissure et la face chargée est prise égale à  $d_1 = d_2 = 15mm$ . Les caractéristiques mécaniques sont  $E_1 = 100GPa$  ,  $\nu_1 = 0,25$  pour la première couche et  $E_2 = 200GPa$   $\nu_2 = 0,25$  pour la deuxième couche.

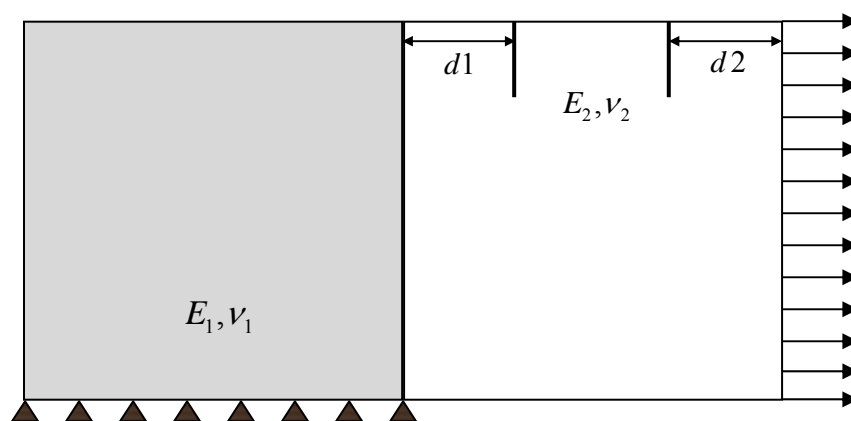


Fig.IV.19. Plaque bi-matériaux multi- fissurée.

Dans les deux cas étudiés, se pose le problème, pour le cas des multifissures, de la fissure majeure au sens de Griffith.

La réponse à cette problématique est que la fissure qui doit se propager la première est celle qui à les facteurs d'intensité de contraintes les plus grands.

Nous avons comparé nos résultats avec ceux du Dr. Kebir (correspondance particulière) en terme de facteur d'intensité de contrainte pour la configuration initiale avec  $d_1 = d_2 = 15mm$  :

Tableau IV.4. Facteurs d'intensité de contraintes (KI), (KII) pour les deux fissures

$d_1=15\text{mm}$	FISSURE DROITE	FISSURE GAUCHE
KI (Dr. KEBIR)	27,05	26,28
KI (NUMERIQUE)	27,63	22,86
KII (Dr. KEBIR)	-4,26	3,36
KII (NUMERIQUE)	-4,60	1,60

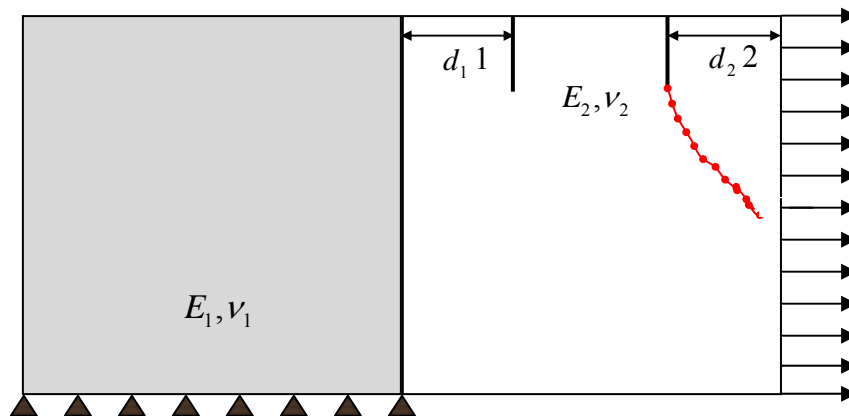


Fig.IV.20. trajectoire du chemin de propagation pour le cas  $E_2/E_1 = 2$

Nous gardons les mêmes caractéristiques mécaniques de l'exemple précédent. Nous agissons sur le paramètre  $d_1$ . Nous choisissons  $d_1 = 25\text{mm}$ , impliquant que les fissures sont plus rapprochées entre elles que l'exemple précédent. Ceci nous amène à raffiner plus la discrétisation. entre les deux fissures et aussi entre la fissure gauche et l'interface et entre la deuxième fissure droite et la face chargée [Keb 2010].

La simulation numérique de la propagation à été effectuée en discrétisant le contour de la première couche en 200 éléments. Le contour de la deuxième couche est discrétisé en 270 éléments et les deux fissures initiales en 10 éléments chacune, La propagation est effectuée par pas de  $\Delta a = 1\text{mm}$ .

Le chemin de la propagation de la fissure est présenté sur la (Fig.IV.22)

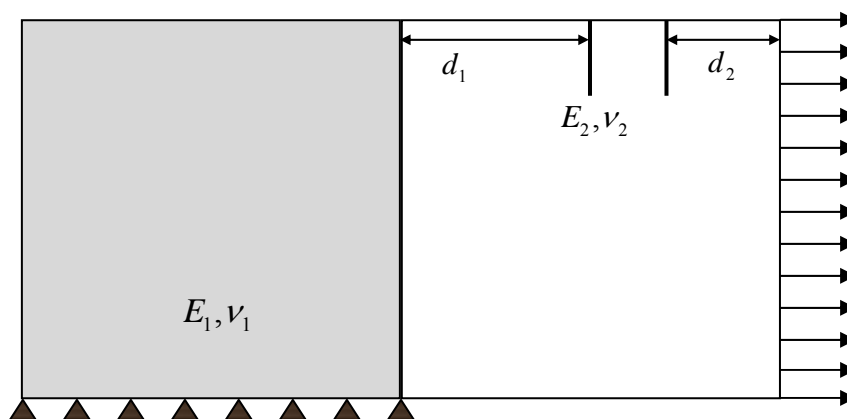
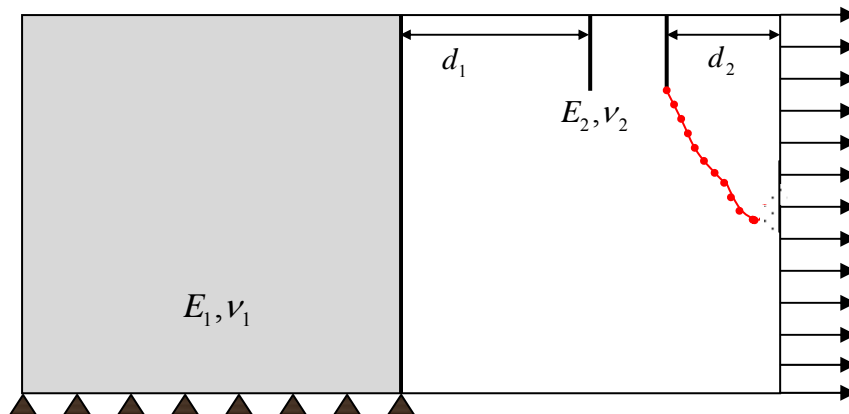


Fig.IV.21. Plaque bi-matériaux multi-fissurée.

Tableau IV.5. Facteurs d'intensité de contraintes ( $K_I$ ), ( $K_{II}$ ) pour les deux fissures

$d_1=25mm$	FISSURE DROITE	FISSURE GAUCHE
$K_I$ (NUMERIQUE)	24,19	18,54
$K_{II}$ (NUMERIQUE)	-4,05	1,56

Fig.IV.22. Trajectoire de propagation pour le cas d'une plaque en bimatériau multi fissurée  $E_2/E_1 = 2$ 

Dans la configuration géométrique et de chargement du problème, il est clair que la rupture est quasi-mode I au départ pour les deux cas. Les valeurs de  $K_I$  le montrent. Ceci implique que la fissure la plus proche du chargement se propage la première. Dans le cas de mode mixte, il faut travailler avec un critère adéquat.

Concernant la trajectoire du chemin de propagation, nous pouvons remarquer que les deux principaux facteurs qui influent fortement sur le chemin de propagation sont l'interface et la différence des caractéristiques mécaniques.

#### EXEMPLE 10 : PLAQUE AVEC FIBRES ET FISSURES PARALLELES

Dans cet exemple, nous considérons une plaque rectangulaire de largeur  $2l = 30mm$  et de hauteur  $2B = 60mm$ . Deux fibres de diamètre égal à  $3mm$  et d'une longueur, ayant un module de Young  $E_2 = 360GPa$  et un coefficient de Poisson  $\nu_2 = 0,3$ , sont disposées sur les côtés en hauteur et d'une façon anti-symétrique. La matrice contenant les fibres présente les caractéristiques suivantes :  $E_1 = 40GPa$ ,  $\nu_1 = 0,38$ . Une fissure principale de longueur  $a_0 = 9mm$  est positionnée à une distance de  $2mm$  du bout de chaque fibre. Nous imposons un déplacement uniforme aux deux côtés de la plaque égal à  $u_0 = 0,1mm$ .

L'initialisation de la fissuration en présence de fibre partent à partir des interfaces fibre-matrice. Les résultats de [Sum 1997], le montrent bien.

Ce test permet l'étude de l'interaction de 2 fissures parallèles en multi-couche. La méthode de discontinuité de déplacement ne permet pas le traitement de fissure à la jonction fibre-fissure.

Pour pouvoir confronter nos résultats aux travaux de [Sum 1997], nous avons décalé la fissure principale de 2 mm par rapport à l'extrémité de la fibre.

Pour réaliser la simulation de la propagation, le contour de la plaque a été discrétisé avec 230 éléments et les deux fibres en 80 éléments chacune. Chaque fissure initiale est discrétisée en utilisant 9 éléments. La propagation est réalisée avec un pas  $\Delta a = 1mm$ .

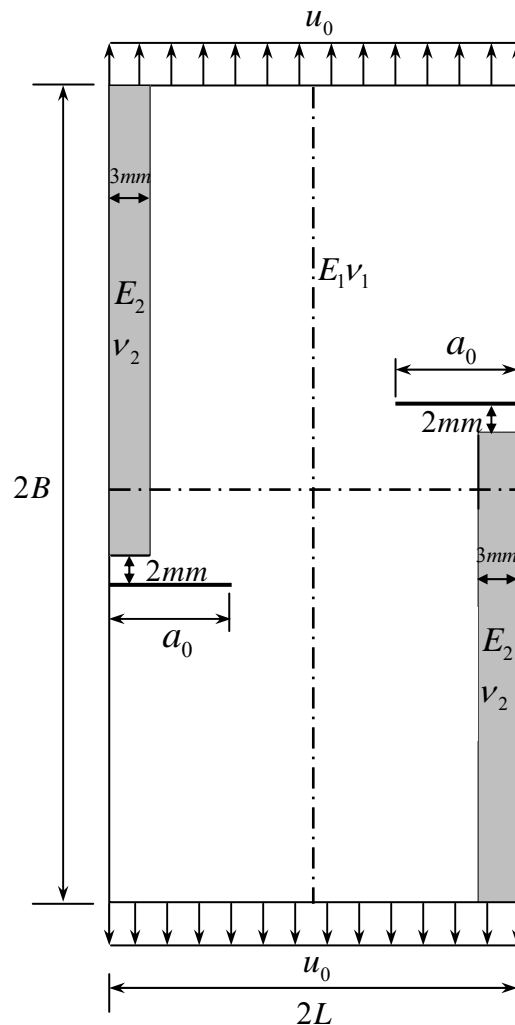
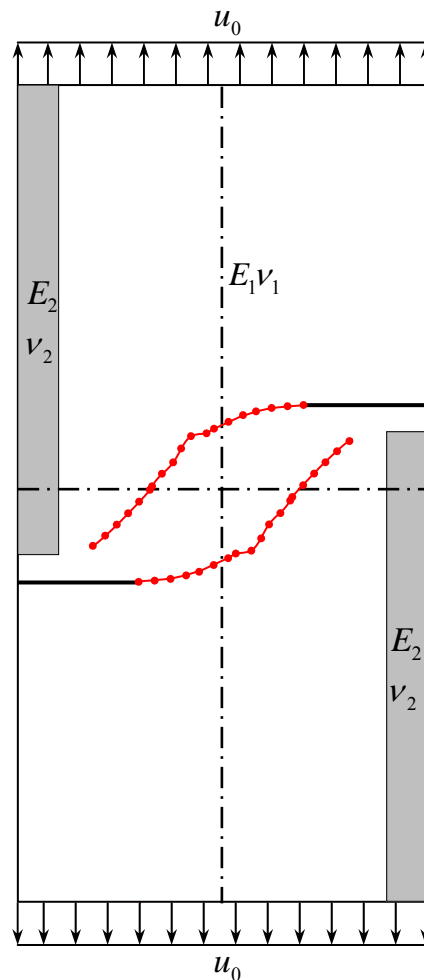


Fig.IV.23. Plaque avec deux fibres contenant deux fissures parallèles

L'utilisation du critère de Sih avec cette discrétisation nous a donné un résultat que nous avons jugé pas très satisfaisant. Pour l'obtention d'un bon résultat, il faut augmenter le nombre d'éléments de la discrétisation encore plus ce qui coûte en terme de temps de calcul et

devient prohibitif. Ceci nous a motivé à explorer une voie offerte par le critère de Hussain qui a l'avantage d'être rapide. Les résultats satisfaisants que nous présentons ci-dessous confirment notre choix.

Le chemin de propagation a été obtenu en utilisant le critère du taux de restitution d'énergie en terme de facteurs d'intensité de contrainte pour le mode mixte (Formule de Hussain) de l'éq. (II.11)



**Fig.IV.24. Trajectoire de propagation de deux fissures en utilisant le critère du taux de restitution d'énergie (Formule de Hussain)**

L'interaction de la propagation de deux fissures d'un matériau hétérogène est bien montrée sur la (Fig.IV.24) en utilisant la MDD.

D'après le chemin décrit par les fissures, nous pouvons remarquer que les deux fissures démarrent en mode I. La propagation est simultanée. Il n'y a pas de fissure majeure. Ce résultat respecte bien la symétrie de la géométrie et du chargement. En s'éloignant des fibres, le mode mixte se manifeste et les fissures dévient leur chemin en se rapprochant. Une fois le

mode mixte établi, le chemin décrit par les fissures montre que le processus est influencé fortement par les fibres et l'interaction des fissures entre elles. Le chemin de propagation décrit par notre code de calcul est en très bonne concordance avec les résultats obtenus par [Sum 1997].

#### **IV.5 CONCLUSION**

Ce travail montre les grandes possibilités qu'offre la méthode de discontinuité de déplacements pour la résolution des problèmes de la mécanique de la rupture en bidimensionnel pour les matériaux multicouches en présence de mono ou multi fissure fissurées.

A partir des ces exemples traités, nous pouvons conclure que concernant les trajectoires de fissures, le critère de Griffith donne de bons résultats pour les matériaux multicouches mais reste très couteux en terme de temps de calcul.

Les calculs menés avec le critère de Sih sont rapides mais demandent une discrétisation très fine.

Le critère de Hussain est rapide et donne des résultats satisfaisants. La discrétisation pour réaliser des calculs équivalents avec ce critère ne demandent pas une discrétisation importante.

Dans le cas de plusieurs fissures parallèles, un phénomène de saturation est mis en évidence en travaillant sur les distances entre les fissures. Ceci est confirmé par les travaux obtenus par Wolodko e al (1999).

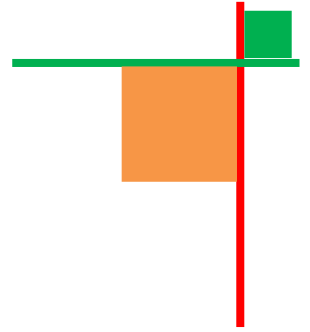
Les résultats obtenus dans notre étude sont très conformes à la solution d'état d'équilibre obtenue par Suo et Hutchinson (1989) dans le cas de propagation au voisinage de dépôt de film. La simulation montre également que la première phase de la propagation est en mode mixte pour se terminer en mode I parallèlement à l'interface.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de Dundurs (1969), décrivent l'effet de la différence dans les propriétés élastiques des deux matériaux constitutifs.

L'étude menée par McNaney et Al (1994) indique que, pour le cas satisfaisant la condition  $K_{II} = 0$ , la trajectoire du chemin de propagation de la fissure proche de l'interface se dirige vers l'interface quand  $\beta > 0$ . Cette configuration est bien montrée dans nos résultats pour le couple aluminium/alumina où  $\beta = 0,144$ .

La trajectoire de la fissure s'éloigne de l'interface en mode mixte quand  $\beta < 0$ . Ceci est bien montré pour le couple cuivre/verre où  $\beta = -0,183$ .





# **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté a montré les grandes possibilités qu'offre la méthode de discontinuité de déplacements pour la résolution des problèmes de propagation d'une ou plusieurs fissures en bidimensionnel dans des matériaux multicouches en utilisant la méthode de discontinuité de déplacement.

Un code de calcul a été reformulé et dans lequel trois critères pour la simulation de la propagation de fissures ont été implémentés en milieux non homogènes et présentant plusieurs fissures. Ces critères sont celui du taux de restitution d'énergie, le critère de Sih et celui de Hussain. Ce code permet aussi de calculer les facteurs d'intensité de contrainte prenant en compte plusieurs configurations.

Pour tester la validité du code de calcul, nous avons lancé une série d'exemples de configurations très différentes les unes des autres dont certains concernent des essais standards.

Les exemples traités ont particulièrement montré la puissance de cette méthode en mécanique de la rupture.

Les résultats obtenus ont été comparés à des solutions analytiques, quand elles sont disponibles dans certains cas, et à des solutions numériques de la littérature obtenues par des méthodes numériques comme la FEM, XFEM, et la BEM. Les différentes comparaisons permettent d'apprécier la qualité de nos résultats.

Dans la première catégorie d'exemples, nous nous sommes intéressés à déterminer la trajectoire de mono fissures dans les matériaux multicouches en utilisant les critères de propagation de Griffith, de Sih et Hussain.

Dans la deuxième catégorie d'exemples, nous nous sommes intéressés à l'étude de trajectoires de propagations mais avec les critères de Sih et de Hussain pour des matériaux multicouches et multi-fissurés. Certains exemples concernent le calcul des facteurs d'intensité de contrainte pour des multi-fissures à travers le calcul du taux de restitution d'énergie sans considérer la propagation.

A partir des ces exemples traités, nous pouvons conclure que concernant les trajectoires de fissures, le critère de Griffith donne de bons résultats pour les matériaux multicouches mais reste très couteux en terme de temps de calcul.

Les calculs menés avec le critère de Sih sont rapides mais demandent une discrétisation très fine.

Le critère de Hussain est rapide et donne des résultats satisfaisants. La discrétisation pour réaliser des calculs équivalents avec ce critère ne demande pas une discrétisation importante.

Dans le cas de plusieurs fissures parallèles, un phénomène de saturation est mis en évidence en travaillant sur les distances entre les fissures. Ceci est confirmé par les travaux obtenus par Wolodko e al (1999).

Les résultats obtenus dans notre étude sont très conformes à la solution d'état d'équilibre obtenue par Suo et Hutchinson (1989) dans le cas de propagation au voisinage de dépôt de film. La simulation montre également que la première phase de la propagation est en mode mixte pour se terminer en mode I parallèlement à l'interface.

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de Dundurs (1969), décrivent l'effet de la différence dans les propriétés élastiques des deux matériaux constitutifs.

L'étude menée par McNaney et Al (1994) indique que, pour le cas satisfaisant la condition  $K_{II} = 0$ , la trajectoire du chemin de propagation de la fissure proche de l'interface se dirige vers l'interface quand  $\beta > 0$ , Cette configuration est bien montrée dans nos résultats pour le couple aluminium/alumina où  $\beta = 0,144$ .

La trajectoire de la fissure s'éloigne de l'interface en mode mixte quand  $\beta < 0$ , Ceci est bien montré pour le couple cuivre/verre où  $\beta = -0,183$ .

À partir des exemples traités nous pouvons dire que l'interface et les caractéristiques mécaniques ont une influence non négligeable sur le chemin de propagation. Le phénomène de coalescence peut être relevé et prévu.

### ➤ Perspective

La simulation de la propagation en mode mixte en compression n'a pas fait l'objet de cette étude. C'est un problème lié à des structures particulières. Nous pouvons recommander de prendre en charge ce type de problème.

Les résultats obtenus par la simulation gagneraient à être confrontés à l'expérience.

# Références Bibliographiques

## A

- [Abd -1997] **Abd . Latif Saleh** « *Crack Growth in Concrete Using Boundary Elements* » Computational Mechanics Publications Southampton UK and Boston USA Volume 30 Edited by C.A. Brebbia and J.J.Connor **1997**, pp 2-4
- [Ali-1990] **Aliabadi M.H.** « *Evaluation of mixed mode stress intensity factors using the path independent J- integral* ». In Computational Mechanics Publication. Editor Boundary Elements in Engineering, **1990**, pp. 281-291.

## B

- [Bel-1990] **Belkacemi Y,** « *Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe Développements analytiques et numériques-applications aux milieux fissurés* » Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France, **1990**
- [Bou-2000] **P.O. Bouchard,** « *Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux* », Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, **Septembre 2000**
- [Bou- 2003] **P.O.Bouchard \*, F.Bay, Y. Chastel** « *Numerical modelling of crack Propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria* » Ecole des Mines de Paris, **France 2003**, UMR 7635.B.P. 207
- [Bouk-2006] **Boukhalkhal Ahmed Lamine** « *Extension de la méthode de discontinuité de déplacement pour la Simulation de la rupture dans les multicouches* » Ecole National Polytechnique d'Alger Mémoire de Magistère **2006**
- [Bui -78] **Bui H.D,** « *Mécanique de la rupture fragile* », Masson, Paris, **1978**.
- [Bui -80] **Bui H.D,** « *Introduction à la mécanique de la rupture* » in Rupture contrôle

## Références bibliographiques

---

Suret<sup>é</sup> Edité par Masounave, Bathias, Dickson, Conseil national de recherches du Canada, Institut de Génie des Matériaux, pp.3-5,1980.

[Bui -84a] **Bui H.D, Proix J.M.**, «*Mécanique des solides-loi de conservation en thermo-élasticité linéaire* », Comptes-rendus Acad. Sci., Paris, A.298, Série II, n°8, 1984 pp.325-327.

[Bui -84b] **Bui H.D**, «*A path-independent integral for mixed modes of fracture in linear thermoelasticity* », IUTAM, Symposium on fundamentals of deformation and fracture, Sheffield, avril 1984.

[Bui -84c] **Bui H.D, Ehrlacher A., Renard C**, «*The steady state propagation of a damaged zone of an elastic brittle solid* », Proc. Of 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Fracture, Valluri S.R. et al. (dir.),3, 1984 , pp1061-1067,.

[Bui -85] **Bui H.D, Proix J.M.**, «*Découplage des modes mixtes de rupture en thermo-élasticité par des intégrales indépendantes du contour* », Actes du troisième colloque tendances actuelles en calcul de structure, Bastia, novembre 1985 p. 631-643, 6-8

## C

[Cor-1977] **Cornet F.H** «*Comparative analysis by displacement discontinuity method of two energy criteria of fracture* »- J. of Appli. Mech., N°79, APM-25, 1977 pp. 1-6.

[Cot-2002] **B. Cotterell** «*The past, present, and future of fracture mechanics* » Engineering Fracture Mechanics 69 (2002) 533-553

[Cra-1983] **Crawford A.M, Curran J, H** «*A displacement discontinuity approach to modeling the creep behavior of rock and discontinuities* ». Int.J.of Num.and anal. Meth. In geomech., Vol 7 1983, pp245-267,

[Cro-1976] **Crouch S.L** «*Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method* ». Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 10 1976, pp. 301-343.

[Cro-1983] **Crouch S.L, Starfield A.M** «*Boundary Element Method in Solid Mechanics with Application in Rock Mechanics and Geological Mechanics* » London Allen & Unwin, Boston 1983.

[Cru-1974] **Cruse T.A** «*An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis* » Computers and Structures, Vol. 4, pp. 741-754 1974, Pergamon Press

[Cru-1971] **Cruse T.A., VanBuren W.** «*Three dimensional elastic stress analysis of fracture specimen with edge crack* » Int. J. of Fracture 1971 , Vol. 7, N°1.

## D

- [Dau-2000] **Daux C., Moes N, Dolbow J., Sukumar N. Belytschko T.** « *Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method* ». Int. J. Num. Meth. Eng., 48, **2000**, pp. 1741-1760.
- [Del-1985] **H.G. de Lorenzi**, « *Energy release rate calculations by the finite element method* » Engng Fract. Mech **1985**, 21 (1) 129–143.
- [Dom-1987] **Dominguez.** « *Elastostatics in boundary element methods in structural Analysis* » .Beskos Ed. ASCE **1987**
- [Dom-1995 ] **Dominique François André Pineau André Zaoui** « *Comportement Mécanique des Matériaux* » Hermès **1995**

## E

- [Eds -2010] **Edson Denner Leonel n, Wilson Sergio Venturini** « *Dual boundary element formulation applied to analysis of multi- fractured domains* » Engineering Analysis with Boundary Elements **2010**

## G

- [Gho-2005] **Dr.Amar Ghoul** « *Mécanique de la rupture* » pp 191 ISBN :9947-0-0847-9 Algérie **2005**
- [Gri-1920] **Griffith A. A.**, « *The Phenomena of Rupture and Flow of Solids* », Philosophical Transactions of Royal Society **1920**, Vol. A-221, p 163-197.
- [Guo-1990] **Guo H. Aziz N.I, Schmidt L.C.**, « *linear elastic crack tip modeling by the displacement discontinuity method* ».Engng Fracture Mech.36, pp.933-942, **1990**

# H

- [Hac-2007] **Brahim El Khalil HACHI** « *Contribution à la modélisation tridimensionnelle des Structures fissurées en utilisant la technique d'hybridation des fonctions de poids* » Thèse de doctorat, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, **2007**
- [Hal-1994] **W.S.Hall** « *The Boundary Element Method* » University of Teesside, Scholl of Computing and Mathematics, Middlesborough, Cleveland, U.K Kluwer Academic Publishers **1994** Volume 27 pp 41
- [Hua-2003] **R. Huang, N. Sukumar , J-H Prévost** « *Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications* » International journal of solids and Structures **2003**, 40 7539-7552

# I

- [Ing-1913] **Inglis C.E.** « *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp Corners* », Trans. Inst. Naval Architects **1913**, Vol. 55, p 219-241.
- [Irw-1948] **Irwin G.R.**, « *Fracture Dynamics* », Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland **1948**.
- [Irw-1956] **Irwin, G. R.**, « *Relation of Stresses Near a Crack to the Crack Extension Force*», Proceedings of the 9th International Congress on Applied Mechanics, Brussels **1956**.
- [Irw-1957] **Irwin G.R.**, « *Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate*», J. of Appl. Mech. Transactions **1957**, p 361-364.

# J

- [Jaw-1963] **Jawson M.A.** « *Integral equation in potential theory I* »- Proceeding of the Royal Society **1963**, 275, pp. 23-32.
- [Jia -2002] **Jia Li , Naman Recho** « *Méthodes Asymptotiques en Mécanique de la Rupture* » Hermès **2002**

## Références bibliographiques

---

[Jon-1982] **Robert M. Jones** « *Mechanics of Composite Materials* » McGraw- Hill Book Company **1982**

## K

[Keb-1998] **Kebir H. (1998)** « *Approches déterministe et probabiliste de la prévision de la durée de vie de structure aéronautique à l'aide de la méthode des équations intégrales duales* ». Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, **1998** France.

[Kon-1989] **Kondo D.**, « *Modélisation du comportement des roches par la mécanique linéaire de la rupture : Application à l'étude de la stabilité des ouvrages souterrains* ». Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Lille, France, **1989**

[Konk-1997] **K. Konke, G. Schmid, in: Meskouris 1 Wittek (Ed.)**, « *Prediction of Crack Propagation Directions under Plane Normal and Shear Loading* », Aspects in Modern Comp. Struct. Analysis, Balkema Press, Rotterdam, **1997**, pp. 431–441.

## L

[Lac-1976] **Lachat J.C., Watson J.O.** « *Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three dimensional elasto-statics* »- Int. J. Num. Meth. Eng., **1976** Vol. 10, pp. 991-105.

[Lem-1986] **Lemaitre J, Chaboche J.L.**, « *Mécanique des matériaux solides* ». Editions Dunod Paris, **1986**

[Leb -2003] **Jean-Baptiste Leblond** « *Mécanique de la Rupture fragile et ductile* » Hermès **2003**.

[Lin -1988] **S.C. Lin, J.F. Abel**, « *Variational approach for a new direct-integration form of the virtual crack extension method* » , Int. J. Fract. 38 (**1988**) 217–235.

## O

[Oya -2011] **P. Oyarzun** « *A time-stepping scheme based on numerical Green's functions for the domain boundary element method The ExGA-DBEM Newmark approach* » Engineering Analysis with Boundary Elements **2011**



## P

- [Plu-1989] **G.Pluinage** « *Mécanique Elastoplastique de rupture-critère d'amorçage* » .Cepad. 1989.

## R

- [Rec-1995] **Naman Recho** «*Rupture par fissuration des Structures* » Hermès 1995
- [RIC 68b] **Rice J.R.**, « *A path Independent Integral and the Approximate Analysis of strain Concentration by Notches and Cracks* » ASME Journal of Applied Mechanics, 35, p.379- 386, 1968
- [Rol-1977] **S.T.Rolf, J.M. Barsom** « *Fracture and fatigue control in structures. Applications of fracture mechanics* », Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1977
- [Riz-1967] **Rizzo F.J.** « *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics* » Quarterly of applied mathematics, 25, 1967, pp. 83-95.
- [Riz-1977] **Rizzo F.J., Shippy D.J.** « *An advanced boundary integral equation method for three dimensional thermo-elasticity* » Int. J. for NUM. Meth. In Eng., Vol. 11 1977, pp. 1753-1768
- [Rol-1977] **S.T.Rolf, J.M. Barsom** « *Fracture and fatigue control in structures. Applications of fracture mechanics* », Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1977

## S

- [Sca-1992] **Scavia C.A.**, « *Numerical technique for the analysis of cracks subjected to normal compressive stresses* » .Int.J.Numer .Meth.Engng 33, 1992,pp.929-942,
- [Sch-1988] **Schultz R. A.**, « *Stress intensity factors for curved cracks obtained with the displacement discontinuity method* ».Int.J. Fracture 37, 1988, R31-R34
- [Sho-1976] **Shou K.J, Crouch S.L.**, « *A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems.* »Int. J.Num.Methods Eng.10, 1976, pp301-343

## Références bibliographiques

---

- [Sho-1999] **Shou K.J., Napier J.A.L.**, « *A two-dimensional linear variation displacement discontinuity method for three-layered elastic media* » .Int.J. Rock Mech. Min.sci, **1999**, vol. 36, pp.719-729.
- [Sho-1995] **Shou K.J., Crouch S.L.** « *A higher order displacement discontinuity method for analysis of crack problems* ». Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. **1995**, Vol. 32, No. 1, pp 49-55
- [Suk-2003] **N.Sukumar, J-H .Prévost** « *Modeling quasi - static crack growth with the extended finite element method Part I:*  » Computer implementation International Journal of Solids and Structures 40 **2003**, 7513-7537
- [Sum-1998] **Y. Sumi, Z.N. Wang** « *A finite-element simulation method for a system of growing cracks in a heterogeneous material* » Mechanics of Materials 28 **1998** , 197-206
- [Sym-1963] **Sym G.T.** « *Integral equation methods in potential theory II* » Proceeding of the Royal Society **1963**, 275, pp. 33-46.

## V

- [Vro-1999] **J.C.W. van Vroonhoven, R. de Borst**, « *Combination of fracture and damage mechanics for numerical failure analysis* », Int. J. Solids and Structures 36 **1999**, pp1169– 1191.

## W

- [Wak-2005] **Wakako Araki, Kentaro Nemoto, Tadaharu Adachi, Akihilo Yamaha**  
« *Fracture toughness for mixed mode I/II of epoxy resin* » Acta Materialia 53 (2005) 869-875 Hussain MA, Pu SL, Underwood J. ASTM STP 1974; 560:2.
- [Wen-1996] **PH. Wen**, « *Dynamic fracture mechanics: Displacement discontinuity method* ». Computational mechanics publication, Southampton, UK and Boston, USA, **1996**.
- [Wes-1939] **Westergaard H.M.**, « *Bearing pressures and cracks* », J. Appl. Mech. **1939**, Vol. 61, p A49-A53.

# X

- [Xue-2002] **Xueli Han, Fernand Ellyin\*** « Interaction among interface, multiple cracks and dislocations, International journal of solids and structures » 39(2002) 1575-1590

# Y

- [Yan-2001] **B. Yang, K. Ravi Chandar,** «*Crack path instabilities in quenched glass plate,*» J.Mech. Phys. Solis 49 (2001) 91-130.
- [Yuh-2008 ] **Yuhai Yan, Si** « *An extended finite element method for modeling near interfacial crack propagation in a layered structure* » Hwan Park International journal of solids and structures 45 (2008) 4756-4765

# Z

- [Zac-2004] **D.A. Zacharopoulos** « *Stability analysis of crack path using the Strain energy density Theory* » Theoretical and Applied Fracture Mechanics 41 (2004) 327- 337.
- [Zeg-2003] **A. Zegloul** « *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture* » Université de Metz 2003
- [Zha-1992] **X.B. Zhang,** « *Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture,* » Thèse de doctorat de l'université Clermont-Ferrand II, **Juin 1992.**
- [Zhe-2007] **Zhen Zhang, Zhigang Suo,** « *Split singularities and the competition between crack Penetration and debond at a bimaterial interface* » International journal of solids and structures 44 (2007) 4559-4573
- [Zha-1992] **X.B. Zhang,** « *Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de la rupture,* » Thèse de doctorat de l'université Clermont-Ferrand II, **Juin 1992.**

## ***Références bibliographiques***

---

- [Zha-1992] **Zhang X.B.**, « *Etude numérique de la propagation de fissures par la mécanique de rupture* », Thèse de l'université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, **1992**.