UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE
POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

CONDUITE ET COMMANDE OPTIMALE PAR LES VARIABLES D'ETAT

Proposé par :

Mr. Tran Van Hoï
Docteur - Ingénieur

Etudié par :

BENMOUSSA Djelloul
HANNACHI Larabi

PROMOTION JUIN 1978

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE
POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

PROJET DE FIN D'ETUDES

CONDUITE ET COMMANDE OPTIMALE PAR LES VARIABLES D'ETAT

Proposé par :

Mr. Tran Van Hoï
Docteur - Ingénieur

Etudié par :

BENMOUSSA Djelloul
HANNACHI Larabi

PROMOTION JUIN 1978

DEDICACES

A MES PARENTS

A MES FRERES ET SŒURS

A TOUS MES AMIS

BENMOUSSA DJELLOUL

A MES PARENTS

A MES FRERES ET SŒURS

A TOUS MES AMIS

HANNACHI LARABI

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tous les professeurs qui ont contribué à notre formation à l'école et plus particulierement à Monsieur Tran Van Hoï pour ses conseils et son aide qui nous ont permis de mener à terme cette importante étude.

Que tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement à la réalisation de cetts étude trouvent ici l'éxpréssion de notre gratitude .

D . BENMOUSSA

L . HANNACHI

A V A N T - P R O P O S

L'étude des systèmes par les variables d'état est une concéption assez récente , elle fait suite aux développements fait par les méthodes des fonctions de transfert qui n'ont pu s'adapter aux systémes variants et non linéaire .

La théorie de la commande par les variables d'état s'est développée à un rythme trés accéléré et a reçue de nombreuses applications dans divers domaines (économie , automatisation des unités de production , éxploration de l'éspace , etc . . .)

Dans cet éxposé on se limitera à une seule sorte de systèmes : les systèmes linéaires à fonctionnement continu , à régime déterministe et à paramètres localisés .

Cette présente thèse se compose de quatre chapitres :

Dans le 1er chapitre , on introduit la notion d'état , la mise en équations des systémes linéaires et invariants et leurs solutions par la méthode du diagramme de fluence et à l'aide de la formule de Mason .

Au 2^{éme} chapitre , on étudie la gouvérnabilité et l'observabilité qui sont nécéssaire surtout pour optimiser les systèmes étudiés . Dans le cas où des variables d'état ne sont pas mesurables , elles doivent étre éstimées par un obsérvateur pour faciliter l'étude de la commande optimale .

Le 3^{éme} chapitre est consacré à la correction des systèmes non stables , le critère d'amortissement de Pierre Naslin est d'un intéret grandiose pour la synthèse et la correction des systèmes non stables .

Dans le 4^{éme} chapitre , on développe la théorie de lacommande optimale par le principe du maximum de Pontriaguine , cette partie de ce présent ouvrage est d'une importance capitale : .

L'objectif général de la théorie de la commande est de chércher toujours à améliorer les pérformances d'un système de commande .

En résumé , c'est grace à l'emploi des calculateurs numériques et analogiques que s'est développée la théorie de la commande par les variables d'état avec une vitésse trés rapide .

Actuéllement , on chérche encore à améliorer la vitésse d'éxécution et à augmenter la capacité d'emmagasinage des informations c-à-d les mémoires de ces ordinateurs pour résoudre des problémes d'automatisme et de commande optimale qui se posent encore telles que conduite de quelques procéssus compléxes et croissance économique,etc . . .

T A B L E   D E S   M A T I E R E S

PREMIER CHAPITRE

INTRODUCTION A LA NOTION D'ETAT

INTRODUCTION A LA NOTION D'ETAT

L'étude et la concéption d'un système physique sont faites sur la base de lois plus ou moins empiriques .

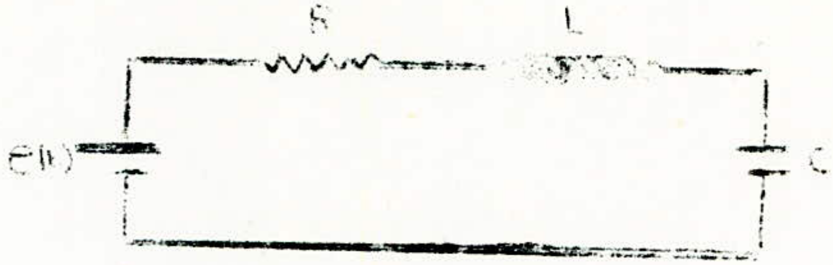
Ainsi la plupart des lois de la physique qui éxpriment l'évolution temporélle de grandeurs caractéristiques de l'objet étudié (tension , courant , vitesse , accélération , température , débit , etc . . .) sous l'influence d'autres grandeurs sont du types équations différentielles aux dérivées partiélles .

Le but de notre étude est l'analyse des systèmes dynamiques à l'aide des variables d'état .

1-1 SYSTEME REGI PAR DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1-1-1 Exemple Electrique : Circuit R . L . C .

Soit le circuit éléctrique suivant :



L'equation mathematique qui regit ce systeme est une equation du second ordre

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q\ (t)}{C.\ dt} = e\ (t)$$

Dans laquelle $q(t)$ designe la charge du condensateur

1-1-2 Transformation de l'equation differentielle en un systeme [illegible]

En effectuant le changement de variables suivant

$$x_1(t) = q(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

On obtient facilement une representation de 2 equations du 1^{er} ordre

$$L \frac{d\ x_2(t)}{d\ t} + R\ x_2(t) + \frac{1}{C} x_1(t) = e(t)$$

$$x_2(t) = \frac{d\ x_1(t)}{d\ t}$$

où

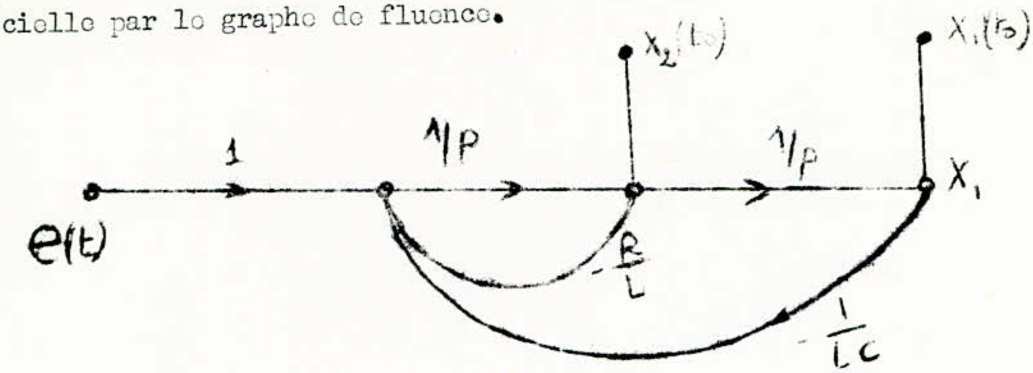
$$\frac{d\ x_1}{d\ t} = x_2$$

$$\frac{d\ x_2}{d\ t} = - \frac{R}{L} x_2 - \frac{1}{LC} x_1 + e(t)$$

Et sous forme matricielle:

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ - \frac{1}{LC} , & - \frac{R}{L} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} e(t)$$

Connaissant les conditions initiales $x_1(t_0)$ et $x_2(t_0)$ et en passant par les transformées de Laplace, on peut representer le système sous forme matricielle par le graphe de fluence.



La solution à l'aide de la formule de Mason:

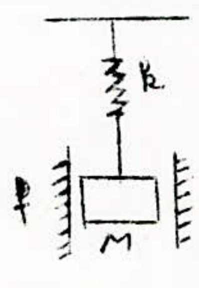
$$X_1(p) = \frac{LCp + RC}{LCp^2 + RCp + 1} X_1(t_0) + \frac{LC}{LCp^2 + RCp + 1} X_2(t_0) + \frac{LC}{LCp^2 + RCp + 1} E(t)$$

$$X_2(p) = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} X_1(t_0) + \frac{LCp}{LCp^2 + RCp + 1} X_2(t_0) + \frac{LCp}{LCp^2 + RCp + 1} E(t)$$

On obtient la resolution :

$$\begin{bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{LCp + RC}{LCp^2 + RCp + 1} ; & \frac{LC}{LCp^2 + RCp + 1} \\ \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} ; & \frac{LCp}{LCp^2 + RCp + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{LC}{LCp^2 + RCp + 1} \\ \frac{LCp}{LCp^2 + RCp + 1} \end{bmatrix} E(t)$$

1-1-3 Exemple mecanique = Systeme masse-ressort



l'equation de ce système mécanique

$$r(t) = M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t)$$

Où r(t) represente l'éxitation exterieure

y(t) represente l'allongement

La résolution de cette équation serait plus facile si on effectue le changement de variables suivant:

$$y = x_1$$

$$\frac{dy}{dt} = x_2$$

On obtient alors

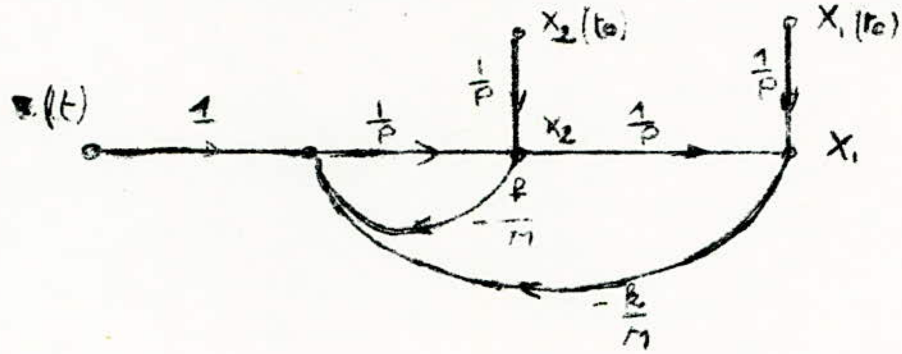
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{f}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{r(t)}{M}$$

d'ou

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{f}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} r(t)$$

De la même façon que pour le circuit électrique, on trace le graphe de fluence



La resolution est identique; on trouve

$$X_1(p) = \frac{\frac{M}{k}p + \frac{f}{k}}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} X_1(t_0) + \frac{\frac{M}{k}}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} X_2(t_0) + \frac{\frac{M}{k}}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} r(t)$$

$$X_2(p) = \frac{1}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} X_1(t_0) + \frac{\frac{M}{k}p}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} X_2(t_0) + \frac{\frac{M}{k}p}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} r(t)$$

D'ou

$$\begin{bmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{M}{k}p + \frac{f}{k}}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} \; ; & \dfrac{\frac{M}{k}}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} \\ -\dfrac{1}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} \; ; & \dfrac{\frac{M}{k}p}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(t_0) \\ X_2(t_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{M}{k}}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} \\ \dfrac{}{\frac{M}{k}p^2 + \frac{f}{k}p + 1} \end{bmatrix} r(t)$$

1-2 SYSTEME REGI PAR DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE n :

1-2-1 Cas ou le second membre ne contient pas de dérivée.

Soit un systeme scalaire regi par une equation differentielled'ordre n dont le second membre ne contient pas de dérivée des signaux d'entrée.

$$y(t)^n + a_{n-1}y(t) + \dots\dots\dots\dots a_1y(t) + a_0y(t) = b_0u(t)$$

1-2-1-1 Transformation de l'equation differentielle d'ordre non un système de n equations du 1er ordre.

Cette équation differentielle d'ordre nn'est pas facilement résolvable , on doit donc la ramener à un système de n equations du 1er ordre dont la resolution est facilitée par l'aplication du calculateur numerique.

Pour cela faisons le changement de variables.

$$X_1 = y$$

$$X_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$

$$X_3 = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}$$

$\cdot$

$\cdot$

$$X_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt}$$

$$\frac{dX_n}{dt} = \frac{d^ny}{dt^n} = - a_{n-1}\, y^{n-1} - a_{n-2}\, y^{n-2} - \dots\dots - a_1y' - a_oy + b_ou(t)$$

$$= - a_{n-1}X_n - a_{n-2}X^n_{n-1} \dots\dots\dots\dots - a_1X_2 - a_oX_1 + b_ou(t)$$

1-2-1-2 Representation matricielle

On vient de trouver que l'equation differentielle d'ordre n peut se mettre sous l a forme :

$$\frac{dx_1}{dt} = X_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = X_3$$

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

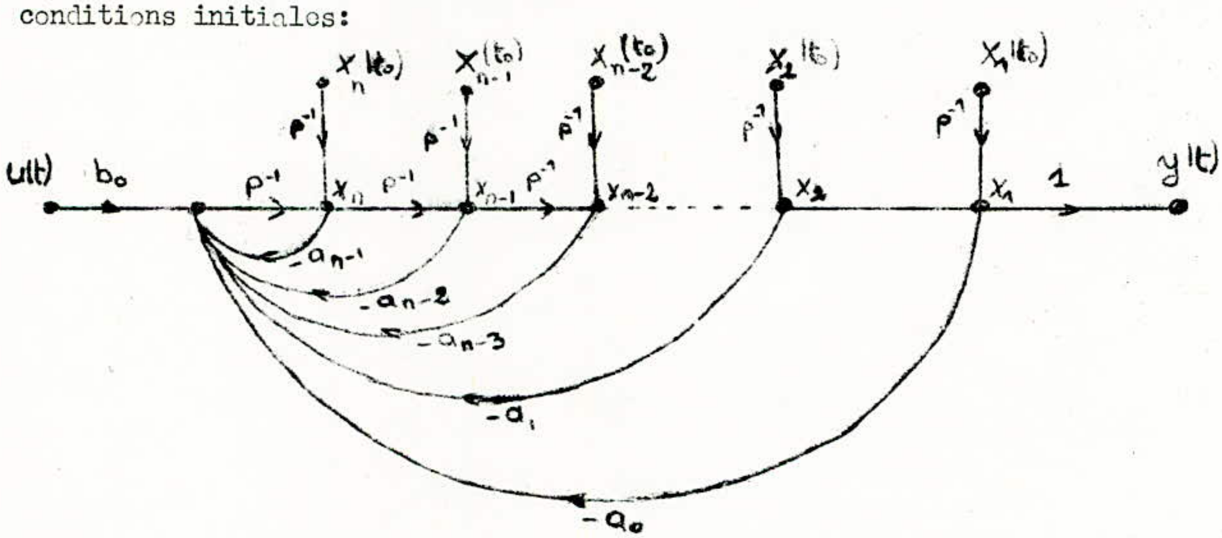
$$\frac{dx_{x-1}}{dt} = X_n$$

$$dx_n = - a_{n-1}X_{n-1} - a_{n-2}X_{n-1} \dots\dots\dots\dots -a_1X_2 - a_0X_1 + b_0u(t)$$

Sous forme matricielle elle peut être écrite

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0, & 1 \\ -a_o, & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

La representation de ce systeme par le diagrame de fluence en introduisant les conditions initiales:



1-2-1-3 Exemple: Systeme d'ordre 3

Soit le système regi par l'équation differentielle suivante:

$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 7u$

posons

$y = X_1$

$y' = X_2$

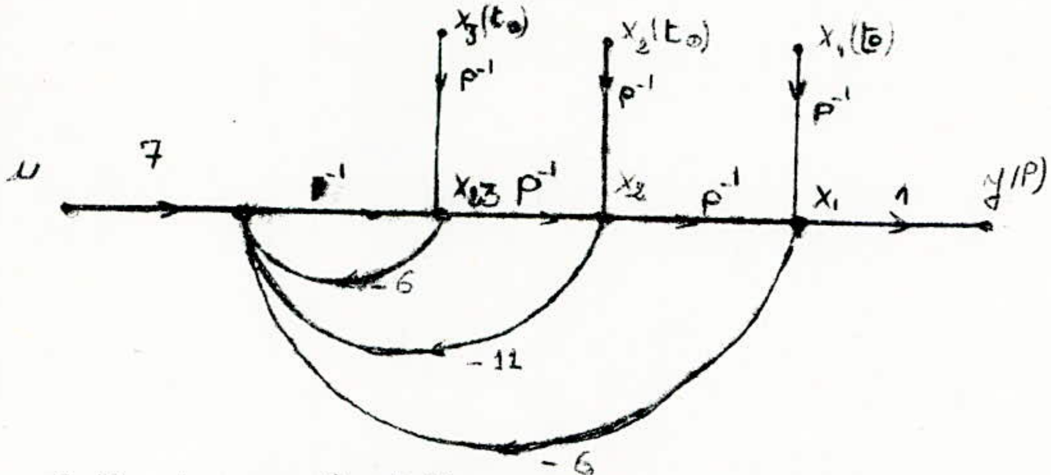
$y'' = X_2' = X_3$

$y''' = X_3' = -6X_1 - 11X_2 - 6X_3 + 7u$

D'ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6\,, & -11\,, & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

La representation par le diagramme de fluence:



La solution de ce système à l'aide de la formule de Mason :

$$X_1(p) = Y(p) = \frac{(p^2 + 6p + 11)\, X_1(t_o) + (p + 6)\, X_2(t_o) + X_3(t_o) + 7U(p)}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

$$X_2(p) = \frac{-6X_1(t_o) + (p^2 + 6p)\, X_2(t_o) + p\, X_3(t_o) + 7\, p\, U(p)}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

$$X_3(p) = \frac{-6p\, X_1(t_o) - 11p\, X_2(t_o) + p^2\, X_3(t_o) + 7\, p^2\, U(p)}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

1-2-2 CAS OU LE SECOND MEMBRE T UNE EQUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE m

Soit le systeme regi par l'équation differentielle suivante

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \dots + a_1y' + a_oy = b_mu^m + \dots + b_1u' + b_ou$$

Pour resoudre cette equation , on peut utiliser des derivateurs successifs du signal d'entree tel que

$x_{n+1} = u$ $\qquad\qquad$ $\dot{x}_{n+1} = x_{n+2}$

$x_{n+2} = u'$ $\qquad\qquad$ $\dot{x}_{n+2} = x_{n+3}$

.... $\qquad\qquad$ ....

....

$x_{n+m} = u^{n-1}$ $\qquad\qquad$ $\dot{x}_{n+m-1} = x_{n+m}$

$w = u^{m}$ $\qquad\qquad$ $x_{n+m} = w$

et

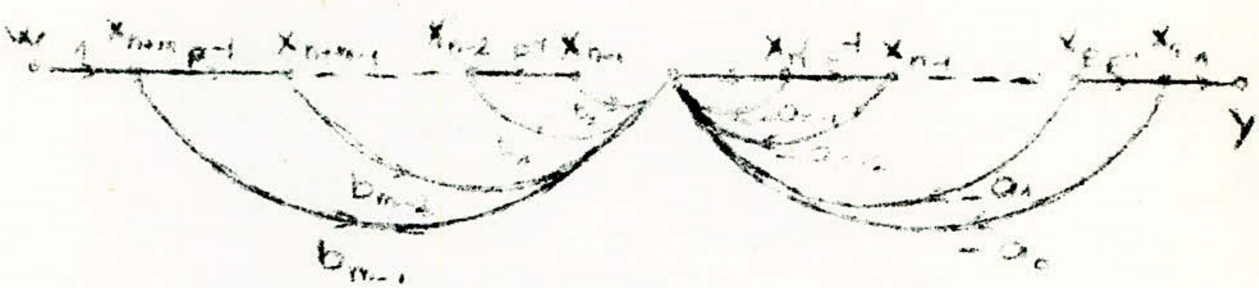
$$\frac{d\,x_n}{} = -a_{n-1}x_n + \dots - a_1x_2 - a_0x_1 + b_m w + b_{m-1}x_{n+m} + \dots + b_1x_{n+2} + b_0x_{n+1}$$

On obtient la representation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{x}_{n+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \dots 0 & & 0 \dots & & 0 \\ 0 & 0\ 1 . 0 & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_{n-1} & b_0 & b_1\ b_2 \dots & b_{m-1} \\ 0 & \dots & \dots 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W$$

Avec $\qquad y = x_1 \qquad$ et $\qquad w = u^m$

On represente ce systeme par le diagramme de fluence suivant



1-2-2-1. TRANSFORMATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE D'ORDRE n EN UN SYSTEME DE n EQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

M Methode générale: Changement de variable.

$$Y = x_1 + B_o u$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + B_1 u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 + B_2 u$$

$$\vdots$$

$$\frac{d x_{n-1}}{dt} = x_n + B_{n-1} u$$

$$\frac{dx_n}{dt} = - a_o x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + B_m u$$

Pour determiner les Coefficients B_i Derivons $y(t)$ n fois de suite .

$y = x_1 + B_o u$

$y' = x_1' + B_o u' = x_2 + B_1 u + B_o u'$

$y'' = x_2' + B_o u'' + B_1 u = X_3 + B_2 u + B_1 u' + B_o u''$

$\vdots$

$y^{n-1} = x'_{n-1} + B_{n-2} u' + B_{n-3} u'' + \ldots B_1 u^{(n-2)} + B_o u^{(n-1)}$

$= x_n + B_{n-1} u + B_{n-2} u' + \ldots . B_1 u^{(n-2)} + B_o u^{(n-1)}$

$y^{(n)} = x'_n + B_{n-1} u' + B_{n-2} u'' + \ldots + B_1 u^{(n-1)} + B_o u^{(n)}$

$= -a_o x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - \ldots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n +$
$+ B_n u + B_{n-1} u' + \ldots B_o u^{(n)}$

En remplaçant les derivées successives de y dans l'équation differentielle On obtient;

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots a_1 y' + a_o y = (-a_{n-1} + a_{n-1}) x_n + (-a_{n-2} + a_{n-2}) x_{n-1} + \dots$$

$$+ \dots - a_n + a_1) x_2 + (-a_o + ao) x_1 + B_o u^{(N)}$$

$$+ (A_{n-1}) B_o + B_1) u^{(n-1)} + \dots +$$

$$+ B_{n-1} + a_{n-1} B_{n-2} + a_{N-2} B_{n-3} + \dots + a_1 B_o) u'$$

$$+ (B_n + a_{n-1} B_{n-1} + \dots B_1 a_1 + B_o a_o) u$$

$$= b_n u^{(n)} + B_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + B_1 u' + b_o u$$

Les coefficient $x^{(i)}$ $(i = (1 \dots n))$ s'annulent et il ne reste q'une equation en u et ses derivées.

Par idendification des coefficients de $u^{(i)}$ nous pouvons deduire les valeurs des Bi

$$b_m = B_o$$

$$b_{m-1} = B_1 + a_{n-1} B_o$$

$$b_{M-2} = B_2 + a_{n-1} B_1 + a_{n-2} B_o$$

$$\vdots$$

$$b_o = B_n + a_{n-1} B_{n-1} + \dots a_1 B_1 + a_o B_o.$$

1-2-2-2

Representation matricielle :

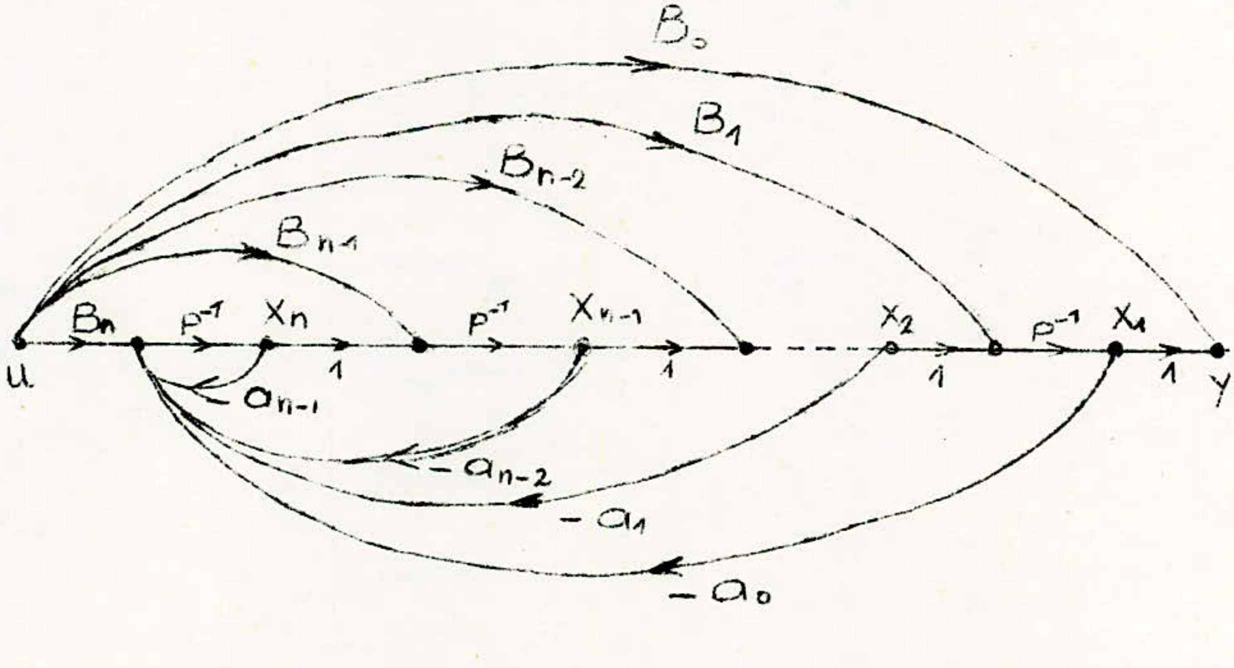
l'équation differentielle peut être representée sous forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \\ \dot{x}_i \\ \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \\ -a_o & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_i \\ \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \\ B_i \\ \\ B_n \end{bmatrix} U$$

Avec
$$\begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-2} \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_o & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_{n-1} & & 1 \\ a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ \vdots \\ \\ \\ B_n \end{bmatrix}$$

et
$$y = (1, 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B_o \cdot u$$

La representation de ce système par le diagrame, de fluence avec les conditions initiales sous entendues est la suivante.



1-2-2-3 Exemple systeme d'ordre 3

Soit le modèle mathematique d'un système dynamique :

$$y''' + 3\,y'' + 4\,y' + y = 3u'' + u' + 2u$$

posons

$$y = x_1 + B_o\,u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + B_1\,u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + B_2\,u$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - 4x_2 - 3x_3 + B_3\,u$$

avec

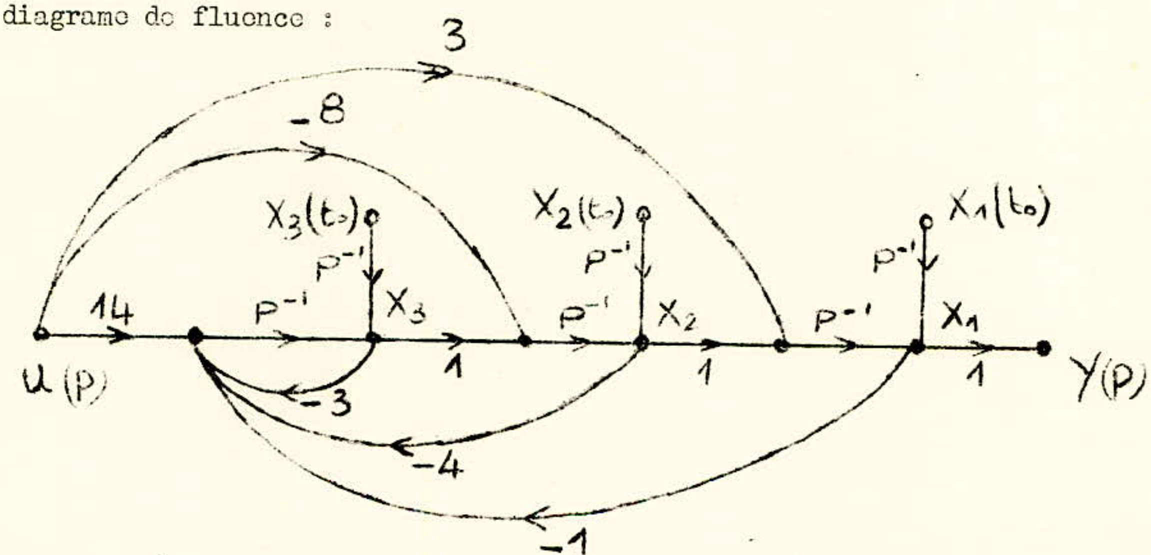
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_o \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \qquad \text{SOIT} \qquad \begin{aligned} B_o &= 0 \\ B_1 &= 3 \\ B_2 &= -8 \\ B_3 &= 14 \end{aligned}$$

$$Y = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

I) On obtient la representation matricielle .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 14 \end{bmatrix} U$$

et le diagrame de fluence :



la solution de ce système à l'aide de la forme de Mason

$$X_1(p) = Y(p) = \frac{(p^2 + 3p + 4)\ X_1(t_o) + (p + 3)\ X_2(t_o) + X_3(t_o) + (3p^2 + p + 2)\ U}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}$$

$$X_2(p) = \frac{-X_1(t_o) + (p^2 + 3p)\ X_2(t_o) + X_3(t_o) - (8p^2 + 10p + 3)\ U}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}$$

$$X_3(p) = \frac{-p\ X_1(t_o) - 4p\ X_2(t_o) + p^2\ X_3(t_o) + (14p^2 + 29p + 8)\ U}{p^3 + 3p^2 + 4p + 1}$$

1-3 VARIABLES D'ETAT , EQUATIONS D'ETAT.

1-3-1 Variables d'etat .

Dans tous les systemes que nous avons étudiés. On avait posé :

$$x_1 = y \ ; \ x_2 = \frac{dy}{dt} \ ; \ x_3 = \frac{d2y}{dt} \quad \text{etc.........}$$

Ces variables $x_1\ x_2\ x_3........x_n$ sont appelées variables d'etat elles sont les les variables de sortie des intégrateurs contenus dans le système considérè.

Généralement, on appelle variable d'état, une variable qui nous renseigne à chaque instant voulu sur l'état du système .

Donc l'évolution temporelle du système est totalement determinée si on connait l'état present du système c.à.d. les fonctions d'exitation et les équations regissant la dynamique de ce système.

Cependant nous pouvons avoir plusieurs solutions à ce système et l'unicité de l'état du système peut être entierement determinée à tout instant t à condition de connaitre

- l'équation qui le decrit
- l'état dans lequel il se trouve à un instant donné t_o c à.d. $x_{(t)}$
- le signal qui lui est appliqué de l'instant t_o à l'instant t

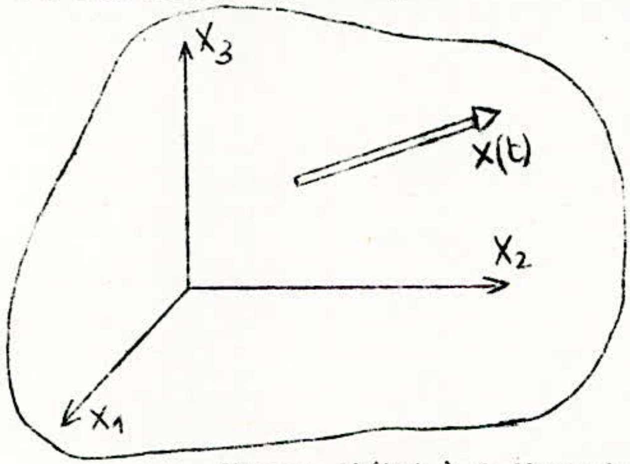
1-3-2 VECTEUR D'ETAT

On appelle vecteur d'etat, la matrice colonne regroupant toutes les variables d'etat. On le note $x(t)$

avec $$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

1-3-3 ESPACE D'ETAT

L'espace des variables que peut prendre le vecteur d'état $x(t)$ definit un espace à n dimensions appele espace d'état et noté $\{\mathcal{X}\}$



Espace d'état à 3 dimensions

Dans le cas où l'espace d'etat est à 2 dimensions, l'espace d'état est un plan appelé plan de phase et les variables d'état, variables de phase.

L'extrémité du vecteur d'état decrit une courbe dans l'espace d'état $\{\mathcal{X}\}$ que l'on appelle trajectoire d'état du systeme.

1-3-4 EQUATION D'ETAT

Retournons à notre systeme d'equations sous forme matritielle

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0, & 0, & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0, & 1 \\ -a_0, & -a_1, & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

Cette forme peut etre condensée et ecrite implicitement :

$$\frac{d}{dt} x(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$$

$$\dot{X}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$$

Où A et B sont des matrices dont les composantes sont des constantes et x(t) vecteur d'etat et u(t) vecteur de commande

L'équation (($\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t)$))est appelée equation d"état du systeme. La résolution de cette équation peut etre faite à l'aide du diagramme de fluence et de la formule de MASON

Neanmoins on exposera par la suite une autre méthode de résolution de l'équation d'état

1-4 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS D'ETAT A PARTIR DES FONCTIONS DE TRANSFERT

1-4-1 Fonction de transfert dont le denominateur est factorisable

Dans cette partie on suppose que le nombre de pôles est superieur au nombre de zeros de la fonction de transfert

On suppose de même que les conditions initiales sont nulles

1-4-1-1 Poles Simples

Soit la fonction de transfert de degré n .

$$H(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{N(p)}{(p - a_1)(p - a_2) \ldots (p - a_{n-1})(p - a_n)}$$

Cette fonction est décomposable en éléments simples.

$$H(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_1}{(p-a_1)} + \frac{b_2}{p-a_2} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{p-a_{n-1}} + \frac{b_n}{(p-a_n)}$$

On a donc :

$$y(p) = h(p)\ u(p) = X_1(p) + X_2(p) + \cdots + X_{n-1}(p) + X_n(p)$$

avec

$$X_1(p) = \frac{b_1\ u(p)}{p-a_1}$$

$$X_2(p) = \frac{b_2\ u(p)}{p-a_2}$$

$$\vdots$$

$$X_{n-1}(p) = \frac{b_{n-1}\ u(p)}{p-a_{n-1}}$$

$$x_n(p) = \frac{b_n\ u(p)}{p-a_n}$$

on a

$$(p-a_1)\ X_1(p) = b_1\ u(p) \qquad X'_1(p) = a_1\ x_1(p) + b_1\ u(p)$$

$$(p-a_2)X_2(p) = b_2\ u(p) \qquad X'_2(p) = a_2\ X_2(p) + b_2\ u(p)$$

$$(p-a_{n-1})\ x_{n-1}(p) = b_{n-1}\ u(p) \qquad X'_{n-1}(p) = a_{n-1}\ X_{n-1}(p) + b_{n-1}\ u(p)$$

$$(p-a_n)\ x_n(p) = b_n\ u(p) \qquad X'_n(p) = a_n\ X_n(p) + b_n\ u(p)$$

et $Y(p) = X_1(p) + X_2(p) + X_3(p) + X_4(p) + \cdots X_{n-1}(p) + X_n(p)$

d'ou sous forme matricielle :

$$(P - a_{n-1})\, X_{n-1}(p) = b_{n-1}\, U(p) \qquad X'_{n-1}(p) = a_{n-1}\, X_{n-1}(p) + b_{n-1}\, U(p)$$

$$(P - a_n)\, X_n(p) = b_n\, U(p) \qquad X'_n(p) = a_n\, X_n(p) + b_n\, U(p)$$

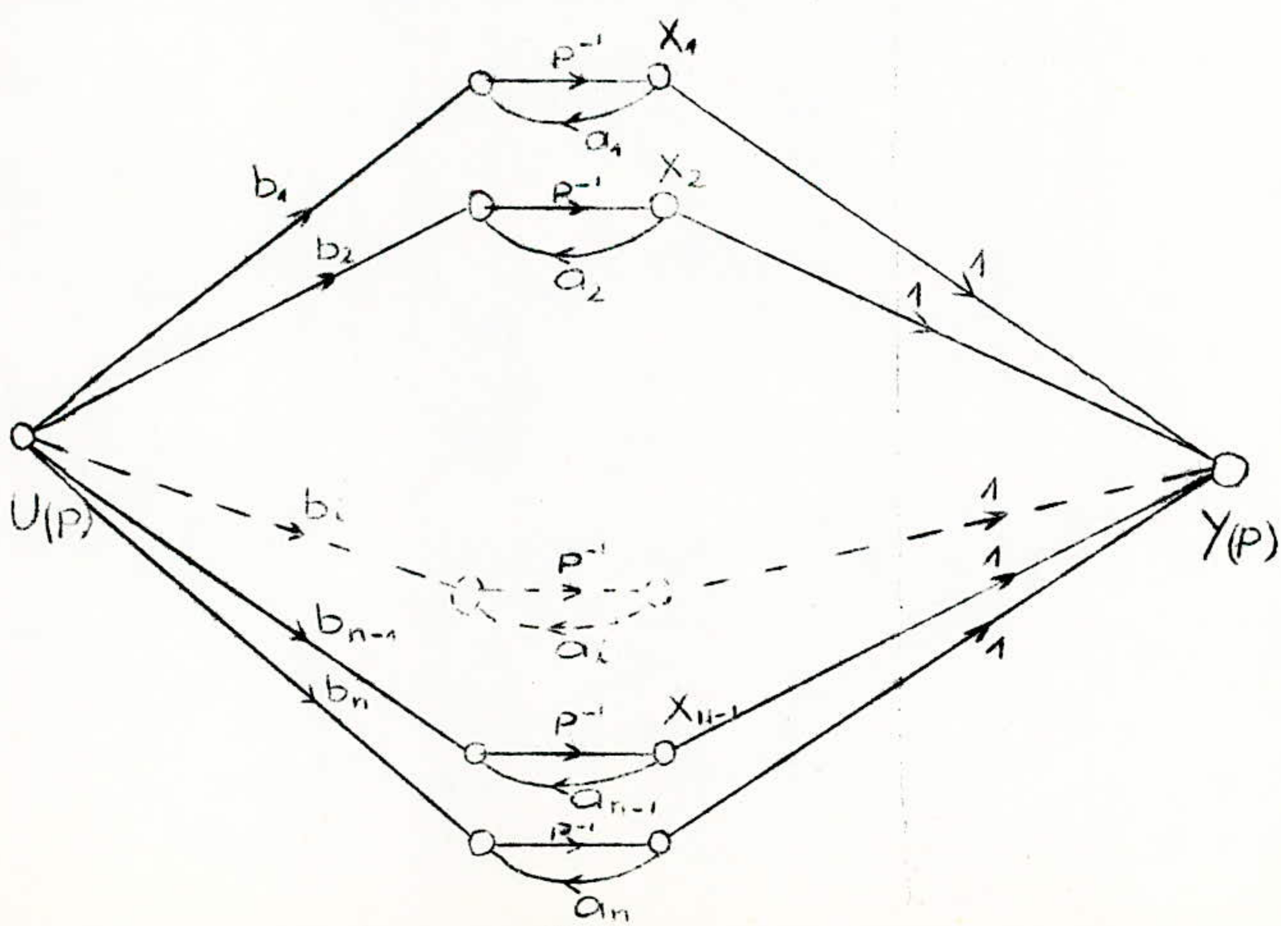
et $Y(p) = X_1(p) + X_2(p) + \ldots\ldots\ldots X_{n-1}(p) + X_n(p)$

d'ou sous forme m atricielle .

$$\begin{bmatrix} \dot X_1 \\ \dot X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot X_{n-1} \\ \dot X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} U(p)$$

$$Y(p) = (1\ 1\ 1 \ldots\ldots 1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} + 0\, U(p)$$

Le Diagramme de fluence de cette fonction se presente comme suit :



1-4-1-2 Poles multiples:

Soit la fonction de transfert de degré n possedant un nombre q de pôles multiples et un nombre n - q de pôles simples.

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_{11}}{(p-a_1)^m} + \frac{b_{21}}{(p-a_1)^{m-1}} \cdots\cdots + \frac{b_{1\,m-1}}{(P-a_1)} + \frac{b_{m+1,1}}{(p-a_2)^n} +$$

$$\frac{b_{m+2;1}}{(p-a_2)^{n-1}} + \frac{b_{m+h,1}}{(P-a_2)} + \cdots\cdots + \frac{b_{n-1}}{p-a_{n-1}} + \frac{b_n}{p-a_n}.$$

Dans ce cas on doit faire apparaitre des relations de dependance entre les X i.

Posons :

$$X1 = \frac{X_2}{P-a_1}; \quad X_2 = \frac{X_3}{p-a_1}; \quad X_3 = \frac{X_4}{P-a_1};;\ldots X_{m-1} = \frac{X_m}{p-a_1}$$

$$X_{m+1} = \frac{X_{m+2}}{p-a_2}; \quad X_{m+2} = \frac{X_{m+3}}{p-a_2} + \cdots\cdots + X_{m+h-1} = \frac{X_{m+h}}{p-a_2}$$

$$X_{n-2q+1} = \frac{X_{n-2q+2}}{p-a_{n-2q}}; X_{n-2q+2} = \frac{X_{n-2q+3}}{p-a_{n-2q}} \cdots\cdots X_{n-q-1} = \frac{X_{n-q}}{p-a_{n-2q}}$$

On aura en cas de pôles multiples.

$$X'_1 = a_1 X_1 + X_2$$
$$X'_2 = a_1 X_2 + X_3$$
$$\vdots$$
$$X'_{m-1} = a_1 x_{m-1} + x_m$$
$$X'_{m+1} = a_2 X_{m+1} + x_{m+2}$$

$$x'_{n+h-1} = a_2\, x_{n+h-1} + x_{n+h}$$

$$x'_{n-2q} = a_{n-2q}\, x_{n-2q} + x_{n-2q+1}$$

$$x'_{n-q-1} = a_{n-2q}\, x_{n-q} + x_{n-q}$$

En cas de pôles simples:

$$X_n(p) = \frac{U(p)}{p - a_1} \Longrightarrow x'_n = a_1\, x_n + U(p)$$

$$\vdots$$

$$X_{n+h} = \frac{U(p)}{p - a_2} \Longrightarrow x'_{n+h} = a_2\, x_{n+h} + U(p)$$

$$\vdots$$

$$X_{n-q} = \frac{U(p)}{p - a_{n-2q}} \Longrightarrow x'_{n-q} = a_{n-2q}\, x_{n-q} + U(p)$$

$$\vdots$$

$$X_{n-1} = \frac{U(p)}{p - a_{n-1}} \Longrightarrow x'_{n-1} = a_{n-1}\, x_{n-1} + U(p)$$

$$X_n = \frac{U(p)}{p - a_n} \Longrightarrow x'_n = a_n\, x_n + U(p)$$

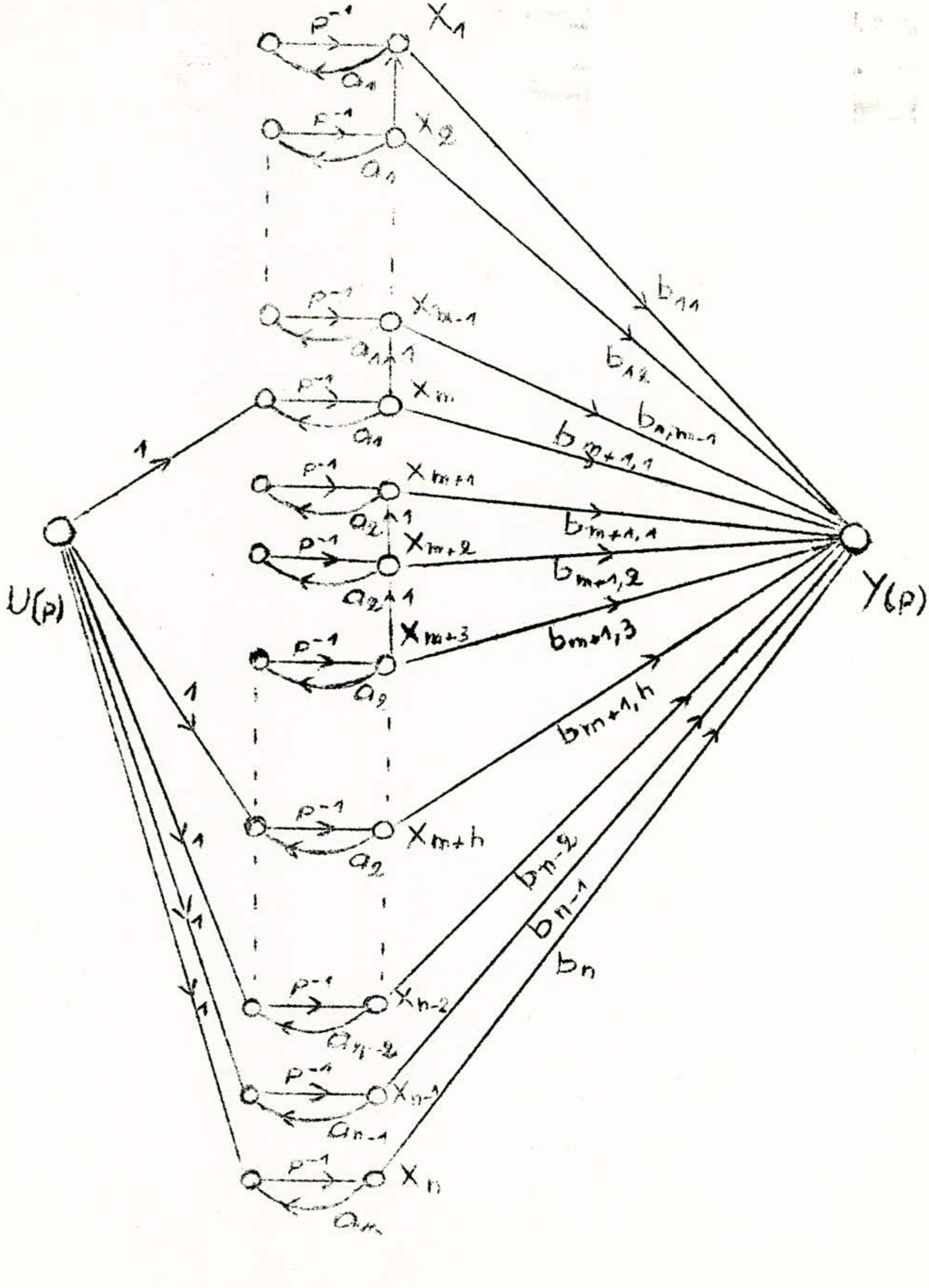
et

$$y = (b_{11}, b_{12} \dots b_{1n}, b_{21} \dots, b_{q,n-q}, b_{n-q+1}, \dots, b_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donc

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} b_{1\,i}\, x_i(p) + \sum_{j=1}^{h} b_{n+h,j}\, x_{n+j} + \dots + \sum_{k=1}^{n-Q} b_k\, x_{q+k}$$

Et sous forme de diagramme de fluence et de forme matricielle on aura :



p^{-1}
X_1
a_1
X_2
X_{m-1}
X_m
X_{m+1}
X_{m+2}
X_{m+3}
X_{m+h}
X_{n-2}
X_{n-1}
X_n
a_2
a_{n-2}
a_{n-1}
a_n
b_{11}
b_{12}
$b_{1,m-1}$
$b_{m+1,1}$
$b_{m+1,2}$
$b_{m+1,3}$
$b_{m+1,h}$
b_{n-2}
b_{n-1}
b_n
$U(p)$
$Y(p)$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{m-1} \\ \dot{x}_m \\ \dot{x}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{m+n-1} \\ \dot{x}_{m+n} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-2q} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-q} \\ \dot{x}_{n-q+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & & & & 0 \\
0 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & & & 0 \\
0 & 0 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & \cdots & & 0 & a_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\
0 & \cdots & & & a_2 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & 0 & a_{2n-q} & 1 \; 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & 0 & a_{n-2q} & 1 \; 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & a_{n-2q+1} \; 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & a_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{m+n-1} \\ x_{m+n} \\ \vdots \\ x_{n-2q} \\ \vdots \\ x_{n-q} \\ x_{n-q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
U_F
$$

1-4-2 Fonction de transfert dont le denominateur n'est pas factorisable :

Soit la fonction de transfert de degré n

$$H(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \dots\dots + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots\dots a_2 p + a_1}$$

Les coefficients (a_1 , a_2 ; . . . . . , a_n) et (b_1 , b_2 , ... b_n) sont quelconques

Posons

$$H(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{y(p)}{x(p)} \cdot \frac{x(p)}{u(p)}$$

avec

$$\frac{x(p)}{u(p)} = \frac{1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots\dots + a_2 p + a_1}$$

$$X(p)\left(p^n + a_n p^{n-1} + \dots\dots\dots + a_2 p + a_1\right) = U(p)$$

On a

$$x = x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{X}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots\dots - a_n x_n + u$$

et

$$\frac{y(p)}{x(p)} = b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \dots\dots + b_2 p + b_1$$

$$\frac{Y(p)}{x(p)} = (b_n\, p^{n-1} + b_{n-1}\, p^{n-2} + \ldots\ldots\ldots b_2\, p + b_1$$

$$y(p) = (\ b_n\, p^{n-1} + b_{n-1}\, p^{n-2} + \ \ldots\ldots b_2 p + b_1) \notin X\ (p)\ )$$

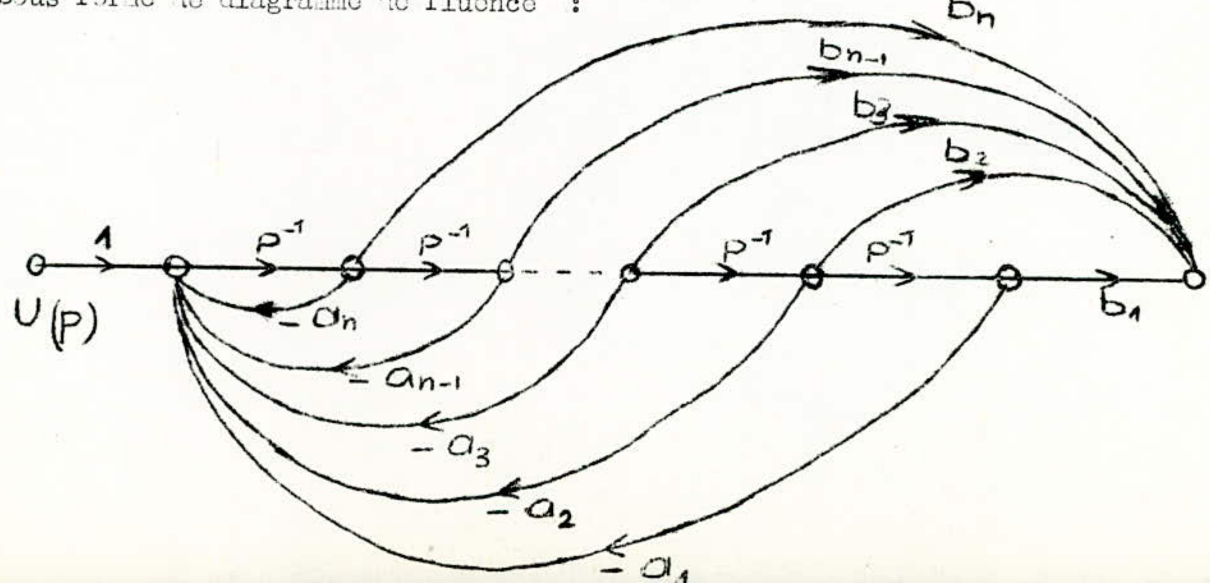
$$= \ b_n\, x_n + b_{n-1}\, x_{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots b_2\, x_2 + b_1\, x_1$$

d'ou l'équation :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y(p) = (b_1 \quad b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_n \quad) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

Sous forme de diagramme de fluence :



. . . . .

EXEMPLE :

SOIT LA FONCTION DE TRANSFERT .

$$H(p) = \frac{p^2 - 3p + 2}{p^3 + 6p^2 + 11\,p + 6}$$

on peut traiter cet exemple par les 2 methodes mais on se limitera à la première étude des fonctions de transfert.

En decomposant cette fonction en éléments simples :

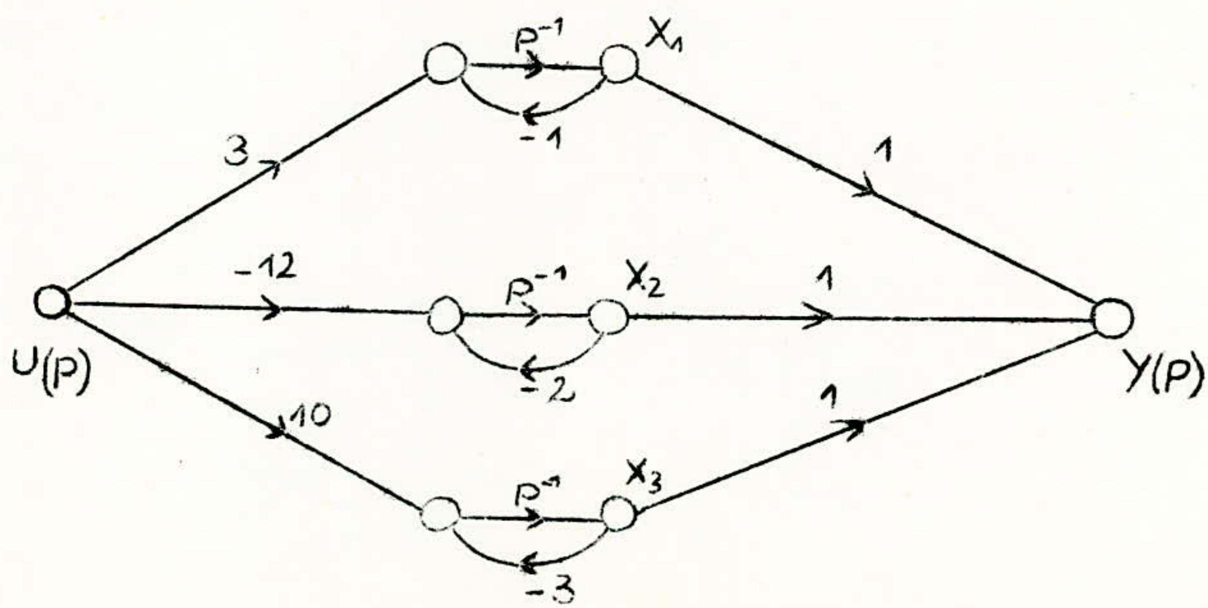
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3}{P+1} - \frac{12}{P+2} + \frac{10}{P+3}$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix} U$$

$$Y(p) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

D'où sous forme de diagramme de fluence



1-5 RESOLUTION DES EQUATIONS D'ETAT PAR INTEGRATION

On expose ici une méthode d'integration des equations d'état , cette methode est deduite par analogie avec les systèmes linéaires invariants du 1^{er} ordre.

L 'équation d'état

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + B\,u$$

1-5-1 Equation homogène

L'equation homogène c . à . d . quand aucun signal n'est apliqué au sys tème.

$$\frac{dx}{dt} = A\,x$$

Par analogie avec les systemes scalaires on peut repretondre à une solution de l'équation d'état homogène de la forme:

$$x\,(t) = e^{A(t-t_0)}\,x\,(t_0)$$

avec t_0 temps initial

posons

$$e^{A(t-t_0)} = \emptyset\,(t,t_0)$$

Il vient alors

$$x\,(t) = \emptyset\,(t,t_0)\,x\,(t_0)$$

1-5-2 Equation forcée

On a quand le signal de commande est appliqué

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t} = A\,x(t) + B\,u(t)$$

Cherchons la solution de la forme :

$$X = \phi\,(t,t_0)\; q\,(t)$$

d 'ou

$$\frac{d\,X}{d\,t} = A\,x + B\,u = \phi\,(t,t_0)\; q\,(t) + B\,u$$

On aussi

$$\frac{d\,\phi}{d\,t} = A\,\phi\,(t,t_0)$$

Pour un systeme invariant

On de même

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \phi\,\frac{d\,q}{d\,t} + A\,.\,\phi\,.\,q = A.\phi.q + B\,u$$

On tire de ces deux equations:

$$\frac{d\,q\,(t)}{d\,t} = \phi^{-1}(t,t_0).\;B.\;u(t)$$

D'ou

$$q\,(t) = \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(\tau,t_0).\;B.\;u(\tau)\;d\tau$$

1-5-3 Solution générale.

$$X(t) = \phi\,(t,t_0).\;X(t_0) + \phi\,(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(\tau,t_0).\;B.\;u(\tau).d\tau$$

$$=\phi(t,t_0).\;X(t_0) + \int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau).\;B.\;u(\tau).d\tau$$

Puisque

$$\phi(t_2\,,t_0) = \phi\,(t_2,t_1).\;\phi\,(t_1,t_0)$$

Donc

$$\phi\,(t_2,t_1) = \phi\,(t_2,t_0).\;\phi^{-1}(t_1,t_0)$$

Pour $t_2 = t_0$ on tire

$$\phi\,(t_0,t_1) = \phi^{-1}\,(t_1,t_0)$$

Donc la solution generale est de la forme

$$X\,(t) = e^{A.(t-t_0)}.\;X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A.(t-\tau)}.\;B\,.\;u(\tau).d\tau$$

G O U V E R N A B I L I T E   E T   O B S E R V A B I L I T E

GOUVERNABILITE ET OBSERVABILITE

OBSERVATION DE L'ETAT D'UN SYSTEME LINEAIRE

G O U V E R N A B I L I T E ET O B S E R V A B I L I T E

DES SYSTEMES LINEAIRES

La notion de gouvernabilite et d'observabilite jouent un rôle important dans l'étude et la théorie de la commande optimale et dans les interactions entre un systeme à plusieurs variables et ses organes de conduite .

G O U V E R N A B I L I T E

Un systeme est dit gouvernable si on peut le faire passer d'un état dans un autre état pendant un intervalle de temps fini, sous l'effet d'un certain vecteur de commande . Donc si la commande affecte toutes les variables d'état .

O B S E R V A B I L I T E

Un systeme est observable si tout état peut être détèrminé à partir de l'observation des sorties sur un intervalle de temps fini . Donc si toutes les variables d'état influent sur la sortie .

Soit le système linéaire invariant decrit par l'equation differentielle vectorielle suivante :

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{l} x \in R^n \\ u \in R^m \end{array}$$

Un processus est gouvernable si , connaissant les matrices A et B et x(t) à l'instant t_o , nous pouvons construire un vecteur de commande u agissant pendant l'intervalle de temps $(t_1 - t_o)$ qui amene le systeme à l'état imposé $x(t_1)$

On pose

$$x = T\,z \qquad \text{d'où} \qquad (T\,z)' = A\,T\,z + B\,u$$

Où

$$T\,\dot{z} = A\,T\,z + B\,u$$

EN multipliant à gauche par T^{-1}

$$T^{-1}\,T\,\dot{z} = T^{-1}\,A\,T\,z + T^{-1}\,B\,u$$

On pose

$$J = T^{-1}\,A\,T$$

$$G = T^{-1}\,B$$

On obtient

$$\dot{z} = J\,z + G\,u$$ (J doit etre une matrice diagonale)

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + \dots\dots + g_{1m}u_m$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + \dots\dots + g_{2m}u_m$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_n = \lambda_n z_n + g_{n1}u_1 + g_{n2}u_2 + \dots\dots + g_{nm}u_m$$

Une condition necessaire et suffisante pour qu'un systeme linéaire invariant soit gouvernable ; est que chacune des lignes de la matrice G contient au moins un élément NON NUL.

La sortie du systeme est determinée par :

$$y = C\,x + D\,u \qquad \text{Avec} \quad \begin{array}{ll} x & R^n \\ u & R^m \\ y & R^p \end{array}$$

Avec y = vecteur de sortie

C et D sont des matrices reliant le vecteur de sortie aux vecteurs d'état et de commande

Enposant comme precedemment

$x\ T \qquad x = T\ z$

On aura

$$y = C\ T\ z + D\ u$$

On pose $\quad C\ T = H$

$D = 0$ ((la sortie ne dependant pas directement de la commande))

D'où

$$y = h_1 z_1 + h_2 z_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot + h_n z_n$$

Un systeme est observable si chaque colonne de la matrice H contient au moins un element NON NUL .

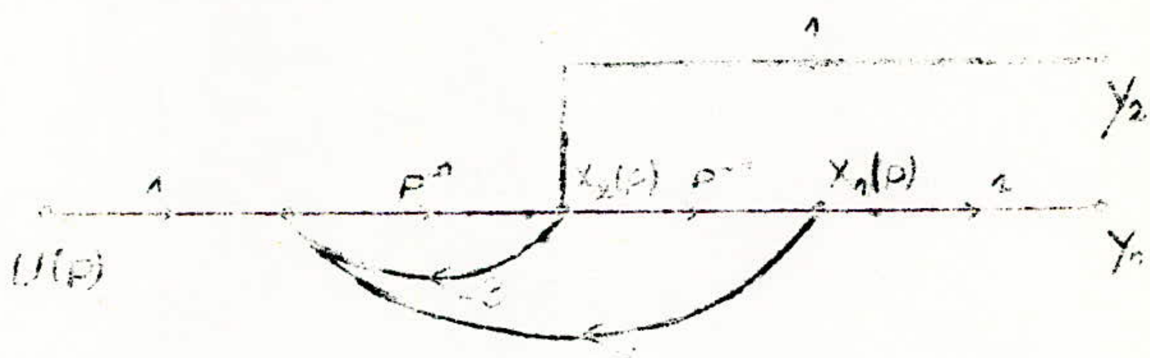
EXEMPLE d'un systeme gouvernable et observable:

$$\frac{d^2x}{d\ t^2} + 3\ \frac{d\ x}{d\ t} + 2\ x = u(t)$$

En passent aux transformees de Laplace

$$X(p) = \frac{U(p)}{(p-1)(p-2)}$$

Dont le diagramme de fluence est le suivant:



On a $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2(p) \\ \dot{x}_2 = -2\ x_1(p) - 3\ x_2(p) + u(p) \end{cases}$

Et sous forme matricielle

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

La sortie est definie comme suit

$$y = I\ x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

On cherche maintenant si le systemè est gouvernable

Recherche de la matrice Modale:T:.

On pose

$$x = T z$$

Il faut que

$$T^{-1} A T$$

SOIT DIAGONALE

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Recherche des valeurs propres

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

On trouve $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$

Recherche des vecteurs propres

$$v_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -c_2 \\ 2c_2 \end{bmatrix}$$

Pour $c_1 = c_2 = 1$ on a la matrice Modale T

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\dot{z} = J z + G u$$

La matrice $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = I x = I T z = T z$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} z$$

On a donc

$$y_1 = z_1 - z_2 = x_1$$
$$y_2 = - z_1 + 2 z_2 = x_2$$

On a de même

$$\dot{z}_1 = - z_1 + u \qquad p\, z_1(p) = - z_1(p) + u(p)$$
$$z_1(p) = \frac{u(p)}{p + 1}$$

$$\dot{z}_2 = - 2 z_2 + u \qquad p\, z_2(p) = - Z_2(p) + u(p)$$
$$z_2(p) = \frac{u(p)}{p + 2}$$

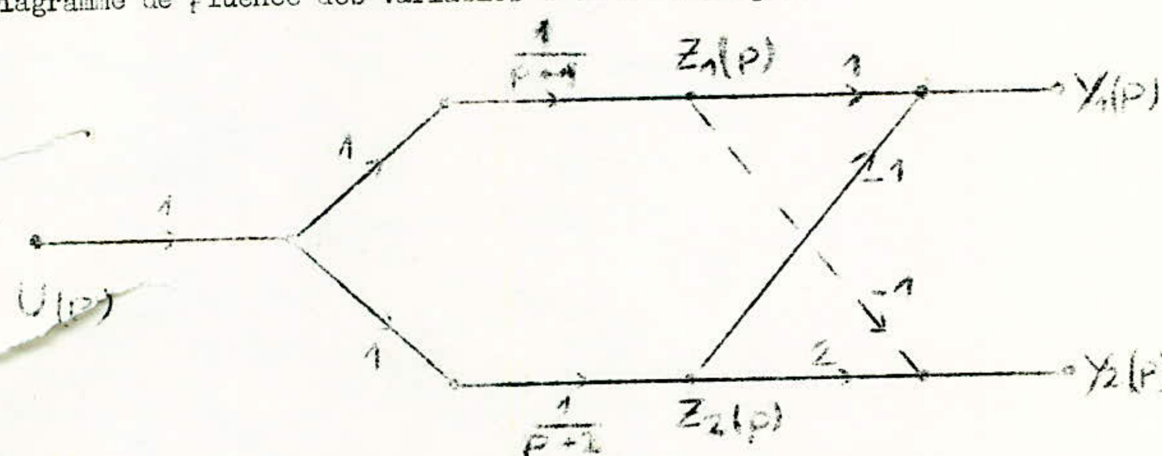
Comme $z = T z$

$$x_1 = z_1 - z_2$$
$$x_2 = - z_1 + 2 z_2$$

La sortie

$$y = x \qquad y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2$$

Diagramme de fluence des variables d'état canoniques



Nous remarquons que le signal d'entrée est relié à chacune des variables d'état canoniques , chacune des variables canoniques est gouvernable.

On voit bien que les variables d'état influent sur les sorties , donc le système est observable.

Le système regi par l'équation differentielle

$$\frac{d x^2}{d t^2} + 3 \frac{d x}{d t} + 2 x = u(t)$$

EST GOUVERNABLE et OBSERVABLE

EXEMPLE Couplage entre deux transmitances ((en **SERIE**))

$$Sa = \frac{1}{p + 1}$$

$$Sb = \frac{p + 1}{(p + 2)(p + 3)}$$

$$S\ a = \frac{y_1(p)}{u(p)} = \frac{1}{p + 1} \qquad\qquad y_1(p) = \frac{u(p)}{p + 1} = X\ a(p)$$

On a donc

$$U(p) = p\ X\ a(p) + X\ a(p) \qquad\qquad U = \dot{X}\ a + X\ a$$

$$\dot{X}\ a = - X\ a + U$$

La sortie de ce systeme est

$$y_1(p) = X\ a$$

Le diagramme de fluence

$$S\ b = \frac{p + 1}{(p + 2)(p + 3)} = \frac{2}{p + 3} - \frac{1}{p + 2} = \frac{y_2(p)}{u_2(p)}$$

$$y_2(p) = \frac{2\ U_2(p)}{p\ +\ 3} - \frac{u_2(p)}{p\ +\ 2}$$

Ce systeme nous donne 2 variables d'état:

$$y_2(p) = X\ b1 + X\ b2$$

Avec

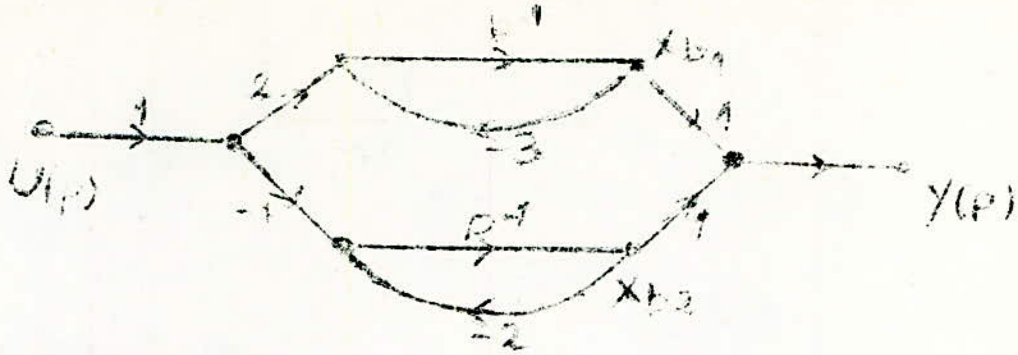
$$X\ b1(p) = \frac{2\ U_2(p)}{p\ +\ 3} \qquad\qquad \dot{X}\ b1 = - 3\ X\ b1 + 2\ U_2$$

$$X\ b2(p) = \frac{- U_2(p)}{p\ +\ 2} \qquad\qquad \dot{X}\ b2 = - 2\ X\ b2 - U_2$$

On a donc le systeme :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}\ b1 \\ \dot{X}\ b2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X\ b1 \\ X\ b2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} U_2$$

$$Y = (1\ ,\ 1) \begin{bmatrix} X\ b1 \\ X\ b2 \end{bmatrix}$$



ETUDE DU COUPLAGE $S_a - S_b$

$$\longrightarrow \boxed{S_a = \frac{1}{p+1}} \longrightarrow \boxed{S_b = \frac{p+1}{(p+2)(p+3)}} \longrightarrow$$

$$\dot{X}_a = - X_a(p) + U_1(p)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_{b1} \\ \dot{X}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b1} \\ X_{b2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} U_2$$

La sirtie

$$Y_2 = (1 \quad , \quad 1) \begin{bmatrix} X_{b1} \\ X_{b2} \end{bmatrix}$$

La sortie du systeme S_a est la commande du systeme S_b

$$Y_1 = X_a(p) = U_2(p)$$

On obtient donc un systeme à 3 équations

$$\dot{X}_a = - X_a(p) + U_1(p)$$

$$\dot{X}_{b1} = - 3 X_{b1} + 2 X_a$$

$$\dot{X}_{b2} = - 2 X_{b2} - X_a$$

Et la sortie

$$Y_2(p) = X_{b1} + X_{b2}$$

Et sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{X}a \\ \dot{X}b1 \\ \dot{X}b2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xa \\ Xb1 \\ Xb2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U_1$$

$$Y_2(p) = (0 \; , \; 1 \; , \; 1) \begin{bmatrix} Xa \\ Xb1 \\ Xb2 \end{bmatrix}$$

Donc

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

Donc

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$

On fait la transformation

$$x = T\,z \qquad \text{d'où} \qquad \dot{x} = T\,\dot{z}$$

d'où

$$\dot{z} = T^{-1} A\,T\,z + T^{-1} B\,u$$

Il faut que $T^{-1} A\,T = J$ = Matrice Diagonale formée par les valeurs propres

Valeurs propres

$$\det(I - A) = 0 \qquad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -3 \quad \lambda_3 = -2$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Recherche de la matrice Modale T

$$v_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Pour $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ on a

$$\dot{X}a = -Xa + Xb1 + Xb2$$

$$\dot{X}b1 = -3\,Xb1 + 2\,U_2$$

$$\dot{X}b2 = -2\,Xb2 - U_2$$

Et

$$Y = Y_1 = Xa$$

Donc sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \dot{X}b1 \\ \dot{X}b2 \\ \dot{X}a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xb1 \\ Xb2 \\ Xa \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} U_2$$

$$Y_1 = (0\ ,\ 0\ ,\ 1) \begin{bmatrix} XD1 \\ Xb2 \\ Xa \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1} \Lambda T = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Recherche de la matrice modale T

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2c_1 \\ 0 \\ -c_1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Pour $c_1 = c_2 = c_3 = 1$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Condition nécessaire et suffisante pour que le systeme soit gouvernable est :

$G = T^{-1} B$ ne possède aucune ligne NULLE

$$G = T^{-1} B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LE SYSTEME N' EST PAS GOUVERNABLE

Condition nécessaire et suffisante d'observabilité:

Chaque colonne de la matrice C T contient au moins un élément NON NUL

$$C = (0, 0, 1) \qquad \text{et } C\,T = (0, 0, 1) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

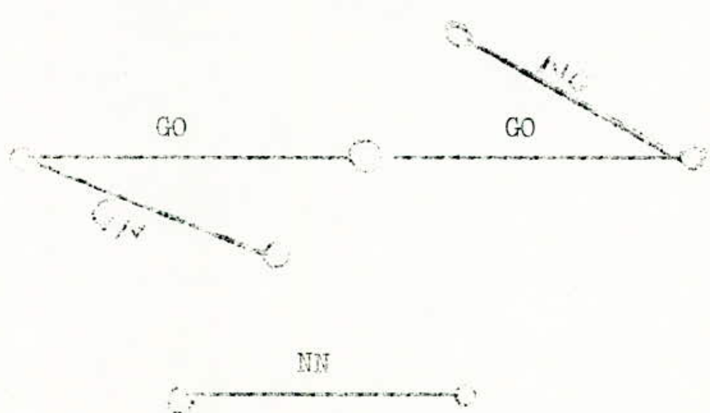
$$C\,T = (-1, -1, 1)$$

Le systeme est observable.

C O N C L U S I O N

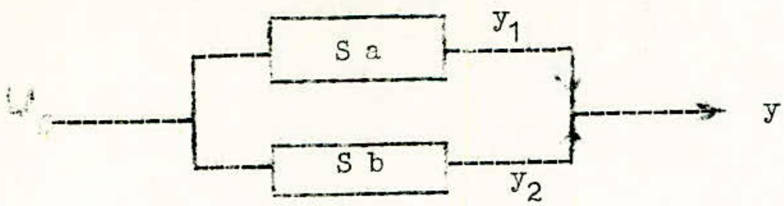
Nous dirons que deux systemes , completement gouvernables et observables , connectés en cascade ne donnent pas necessairement un systeme gouvernable et observable.

Le couplage en cascade de deux systemes gouvernables et observables peut être schematisé par la figure suivante:



ETUDE DU COUPLAGE PARALLELE

Soit le systeme S a et S b connectés en parallele:



Avec S a $\begin{cases} \dot{X}a = -Xa + U \\ Y_1 = Xa \end{cases}$

et S b $\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}b1 \\ \dot{X}b2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XB1 \\ Xb2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} U \\ Y_2 = (1 , 1) \begin{bmatrix} Xb1 \\ Xb2 \end{bmatrix} \end{cases}$

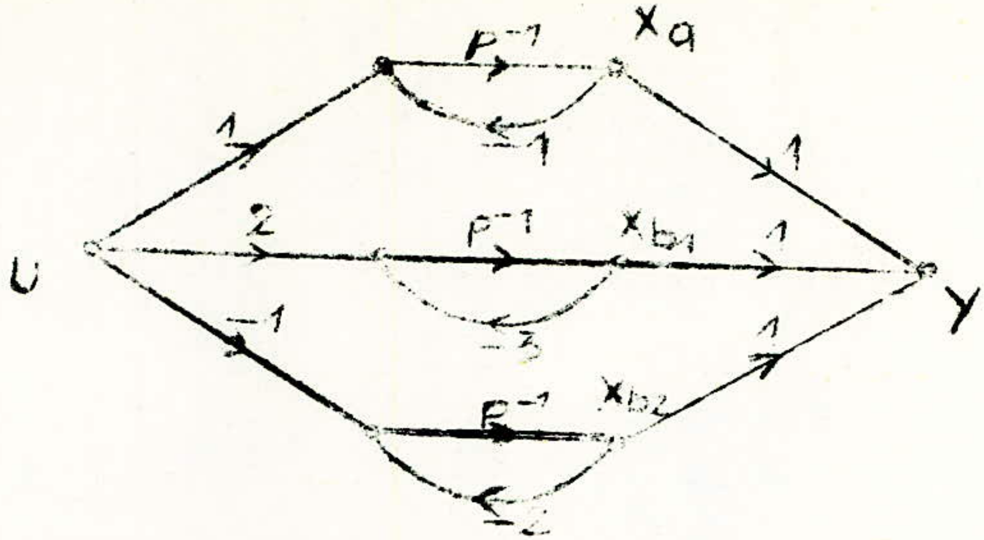
La sortie étant la somme des 2 sorties paralleles .

$$Y = Y_1 + Y_2 = Xa + Xb1 + Xb2$$

La forme matricielle du systeme S resultant du couplage parallele de S a et S b .

$$S \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{X}a \\ \dot{X}b1 \\ \dot{X}b2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xa \\ Xb1 \\ Xb2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} U \\ Y = (1 , 1 , 1) \begin{bmatrix} Xa \\ Xb1 \\ Xb2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Le diagramme de fluence du systeme S .



Le systeme S est completement gouvernable et observable

CONCLUSION

Pour que le systeme S ((resultant de S a et S b connectes en parallele)) soit gouvernable et observable est que les 2 systemes partiels S a et S b soient tous les deux gouvernables et observables .

OBSERVATION DE L'ETAT D'UN

SYSTEME LINEAIRE

Nous avons étudié précédemment la gouvérnabilité et l'obsérvabilité d'un système linéaire .

Si un système est obsérvable nous voulons savoir s'il est mesurable c-à-d si toutes ses variables d'état sont mesurables .

Tous les systèmes ne sont pas entiérement mesurables , on construit alors un obsérvateur pour éstimer les variables d'état non mesurables .

L'obsérvateur est un système linéaire invariant soumis à l'action des signaux d'entée et de sortie qu'il obsérve , on suppose qu'il éffèctue une transformation linéaire du véctour d'état .

Il est important de noter que l'introduction d'un obsérvateur ne détériore pas les pérformances du système initial .

($z = T\,x$) montre que l'obsérvateur construit la totalité du vecteur d'état

Mais plusieurs variables sont mesurables , le role de l'obsérvateur se réduit alors à construire les variables d'état non mesurables .

Soit un système linéaire sans signaux d'entrée

$$\dot{x} = A\,x \qquad (1)$$

Soit le 2ème système S_2 soumis à l'action de x

$$\dot{z} = D\,z + C\,x \qquad (2)$$

Hypothèse

$z = T\,x$ (z et x sont liés par une transformation linéaire)

A

$$T\dot{x} = Dz + Cx \Longrightarrow T\dot{x} = DTx + Cx$$

$$T\dot{x} = TAx$$

$$\Longrightarrow DTx + Cx = TAx$$

On tire $\boxed{TA - DT = C}$

La transformation doit être unique , pour cela nous imposerons à A et D de ne pas avoir de racines caractéristiques communes .

$$\dot{z} = Dz + Cx \Longrightarrow \dot{z} - T\dot{x} = Dz + Cx - T\dot{x}$$

$$= Dz - TAx + Cx$$

$$= Dz - (DT + C)x + Cx$$

$$= Dz - DTx$$

$$\dot{z} - T\dot{x} = D(z - Tx)$$

C'est une équation différentielle véctorielle du 1er ordre par rapport à la variable $(z - Tx)$.

$$z - Tx = e^{DT}(z(o) - Tx(o))$$

$$z = Tx \quad \text{si} \quad \begin{cases} e^{DT} \longrightarrow 0 & \text{Rapidité du système} \\ z(o) \triangleq Tx(o) \end{cases}$$

Soit maintenant le système S_1 soumis à l'action du vécteur d'entrée U

$\dot{x} = Ax + Bu$ (1) équation du système

$y = Cx$ (2) sortie du système

On définit l'obsérvateur par

$$\dot{z} = S\,z + D\,x + G\,u \qquad (3)$$

$$z = T\,x \qquad (4)$$

$D\,x$ représente une combinaison des variables mesurables du vecteur d'état

$$D\,x = E\,(\,C\,x\,) = E\,y \qquad (5)$$

De (4) on tire $\dot{z} = T\,\dot{x}$ (6)

De (3) on tire $T\,\dot{x} = S\,z + D\,x + G\,u$, (7)

De (1) on tire $T\,\dot{x} = T\,A\,x + T\,B\,u$ (8)

Comme (7) = (8) $\Longrightarrow$ $S\,z + D\,x + G\,u = T\,A\,x + T\,B\,u$

On a

$G = T\,B$

$T\,S + D = T\,A$

$$\boxed{\begin{aligned} G &= T\,B \\ S + T^{-1}D &= A \end{aligned}}$$

<u>Exemple</u>

Soit le système régi par

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & +1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (\,1\,,\,0\,) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On voit que seule la variable x_1 est mesurable

Le système est-il obsérvable ?

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}\,A\,T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = C\,T = (1\,,0)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = (1\,,\,1) \Longrightarrow \text{Obsérvable}$$

On construit un obsérvateur du 1^{er} ordre pour éstimer la variable X_2

$$\dot{x} = A\,x + B\,u$$

$$\dot{z} = S\,z + C\,x + G\,u \qquad G = T\,B$$

$$T\,A - S\,T = C$$

$$z = T\,x$$

$$(t_1\,,\,t_2)\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix} + 4\,(t_1\,,\,t_2) = (1\,,\,0)$$

$$-2\,t_1 + 4\,t_1 = 1 \Longrightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

$$t_1 - 3\,t_2 + 4\,t_2 = 0 \Longrightarrow t_1 + t_2 = 0 \Longrightarrow t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$T = \left(\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\right)$$

$$G = T\,B = \left(\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

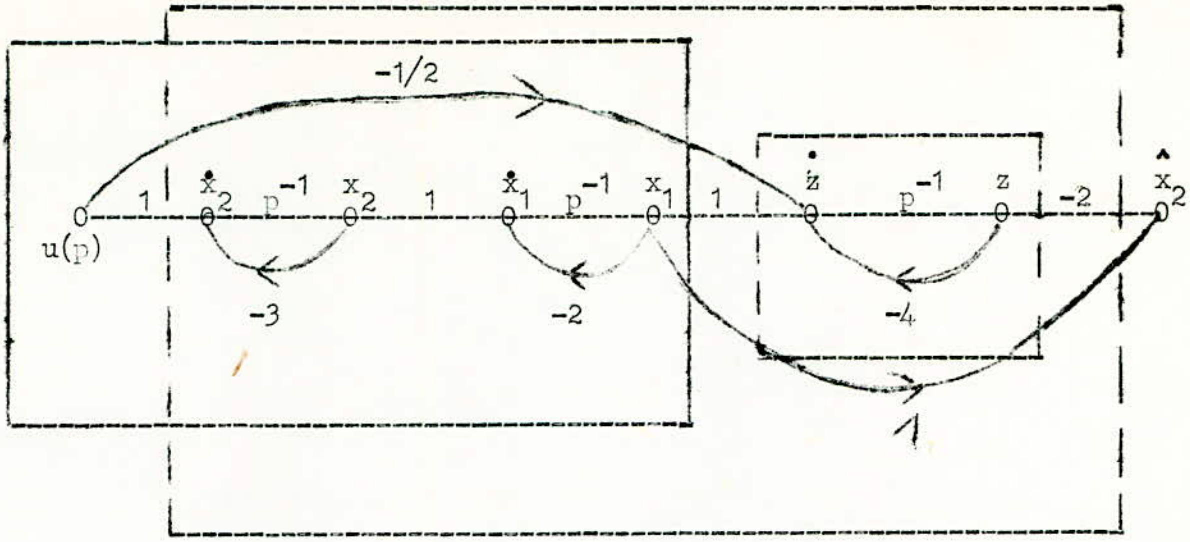
$$\dot{z} = -4\,z + x_1 + \left(-\frac{u}{2}\right) = -4\,z + x_1 - \frac{u}{2}$$

$$z = T\,x = \left(\frac{1}{2}\,,\,-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}$$

D'ou la valeur éstimée de x_2

$$\boxed{\hat{x}_2 = -2\,z + x_1}$$

Diagramme de fluence:



$$\dot{x}_2 = -3\,x_2 + u \Longrightarrow \quad p\,x_2 + 3\,x = u \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{u(p)}{p+3}$$

$$\boxed{\frac{x_2\,(p)}{u(p)} = \frac{1}{p+3}}$$

Maintenant on détermine la fonction de transfert de $\dfrac{\hat{x}_2\,(p)}{u(p)}$

On applique la formule de Mason au graphe de fluence pour calculer cette transmittance :

$$x_j = \frac{\sum x_i \ \sum C_{ij}\,\Delta_{ij}}{\Delta}$$

Δ = Déterminant géneral

$$\Delta = 1 - (-3\,p^{-1} - 2\,p^{-1} - 4\,p^{-1}) + 6\,p^{-2} + 8\,p^{-2} + 12\,p^{-2} + 24\,p^{-3}$$

$$\Delta = 1 + 9\,p^{-1} + 26\,p^{-2} + 24\,p^{-3}$$

$$\frac{\hat{x}_2\,(p)}{u(p)} = \frac{-2\,p^{-3} + p^{-1}(1 - (-5\,p^{-1}) + 6\,p^{-2}) + p^{-2}(1 + 4\,p^{-1})}{\Delta}$$

$$= \frac{8\,p^{-3} + 6\,p^{-2} + p^{-1}}{1 + 9\,p^{-1} + 26\,p^{-2} + 24\,p^{-3}}$$

On multiplie par p^{+3} on a :

$$\frac{\hat{x}_2(p)}{u(p)} = \frac{8 + 6p + p^{+2}}{p^{+3} + 9p^{+2} + 26p + 24} = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+2)(p+3)(p+4)}$$

$$\frac{\hat{x}_2(p)}{u(p)} = \frac{1}{(p+3)}$$

On remarque que la valeur éstimée ne change en rien la transmittance de la variable non mesurable /

CORRECTION DES SYSTEMES

PAR LES VARIABLES D'ETAT

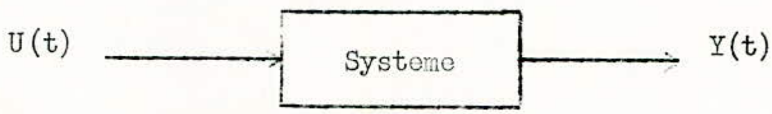
CORRECTION DES SYSTEMES

PAR LES VARIABLES D ' ETAT

1 - RAPPELS DES PROPRIETES DYNAMIQUES DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES

1 -1 Systeme en boucle ouverte

Soit le systeme linéaire continu et invariant decrit par:



Donc la fonction de transfert est la suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k \prod_{i=1}^{m} (p - b_i)}{\prod_{i=1}^{n} (p - a_i)} = k\ G(p) ,$$

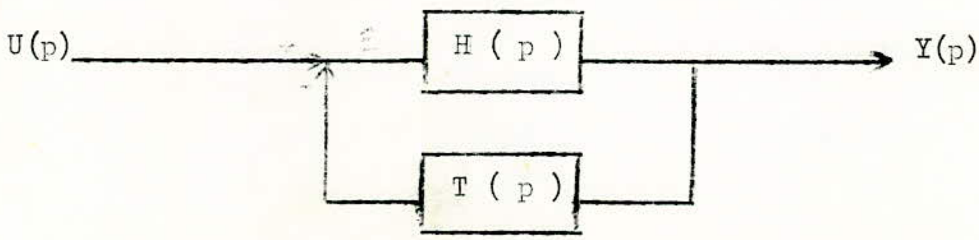
si $m \leqslant n$ la decomposition de $H(p)$ en éléments simples

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{(p - a_i)}$$

La reponse temporelle de ce système est stable si les parties reelles des a_i sont strictement négatives .

1 -1 Systeme en boucle fermée

La boucle de retour permet de corriger la grandeur de sortie si celle-ci n'est pas conforme à celle que l'on désire , en agissant la sortie sur l'entrée à travers une fonction de transfert $T(p)$ qui satisfait les pérformances du système .



La fonction de transfert du systeme bouclé est :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p)T(p)}$$

1 -3 Comparaison du systeme bouclé et du systeme non bouclé

1 - 3 - 1 Cas du systeme non bouclé

Pour une variation $d\,H(p)$ de la fonction de transfert $H(p)$ correspondra une variation $d\,Y(p)$ de la sortie $Y(p)$ égale à :

$$d\,Y(p) = d\,H(p) \cdot E(p) \quad \text{Soit} \quad \frac{d\,Y(p)}{Y(p)} = \frac{d\,H(p)}{H(p)} .$$

Soit une variation relative de la sortie égale à celle de la transmittance.

1 - 3 - 2 Cas du systeme avec boucle de retour

Si la fonction de transfert $H(p)$ de la chaine directe varie de $d\,H(p)$ la sortie $Y(p)$ variera d'une quantité égale à $d\,Y(p)$

$$d\,Y(p) = \frac{d\,H(p)}{((1 + H(p)T(p)))^2}\,E(p) \quad \text{Soit} \quad \frac{d\,Y(p)}{Y(p)} = \frac{d\,H(p)}{H(p)} \cdot \frac{1}{1 + H(p)T(p)}$$

Si $H(p)T(p)$ est très grand devant 1 , la variation est assez faible .

Donc un systeme bouclé reagit moins aux variations de la fonction de transfert de la chaine directe qu'un systeme non bouclé .

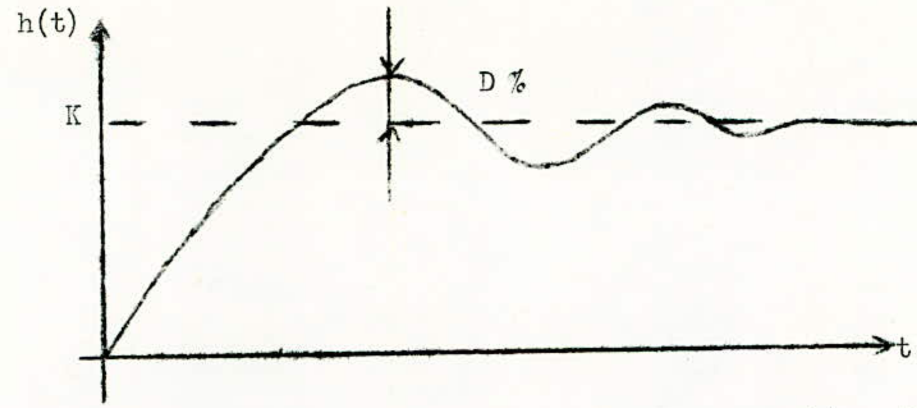
1 - 4 STABILITE

Critère de ROUTH - HURWITZ

Une condition necessaire et suffisante de stabilité d'un systeme decrit par une fonction de transfert $H(p)$ est que , toutes les parties reelles des pôles de cette fonction soient toutes strictement NEGATIVES .

Malheuresement cette condition ne donne aucune indication sur le degré d'amortissement des regimes transitoirs .

On considere par exemple la reponse indicielle de la forme :



Le systeme est stable mais n'est pas amorti , pour l'amortir d'avantage on doit delimiter le depassement à une certaine valeur D .

1 - 5 PRECISION

La precision $\mathcal{E}(t)$ d'un systeme est chiffrée par la difference entre la sortie desirée et la sortie reelle du systeme .

La sortie est meilleure si $\mathcal{E}(t)$ est faible .

L'expression de $\mathcal{E}(t)$ est :

$$\mathcal{E}(t) = E(t) - Y(t)$$

où

$$\mathcal{E}(p) = E(p) - Y(p) = E(p) - \frac{H(p)}{1 + H(p)T(p)}E(p) = \frac{1 + H(p)T(p) - H(p)}{1 + H(p)T(p)} E(p)$$

On considere le cas d'une boucle de retour unitaire $T(p) = 1$

$$\mathcal{E}(p) = \frac{1}{1 + H(p)} E(p) = \frac{1}{1 + kG(p)} E(p)$$

$\mathcal{E}(p)$ est faible si k est grand et $G(p)$ est grand .

1 - 6 DILEME STABILITE - PRECISION

La stabilité est inversement proportionnelle au gain de la fonction de transfert $H(p)$ et proportionnelle au facteur de résonnance.

La precision est proportionnelle à ce gain , à la bande passante et inversement proportionnelle au facteur de résonnance .

On voit que precision et stabilité sont incompatibles , pour améliorer une on déteriore l'autre . Donc,il faudrait faire un compromis entre precision et stabilité .

Et pour mieux regler le systeme , on utilise des correcteurs .

2 - PRINCIPE DE LA CORRECTION PAR LES VARIABLES D ' ETAT .

2 - 1 Correction par retour d'état

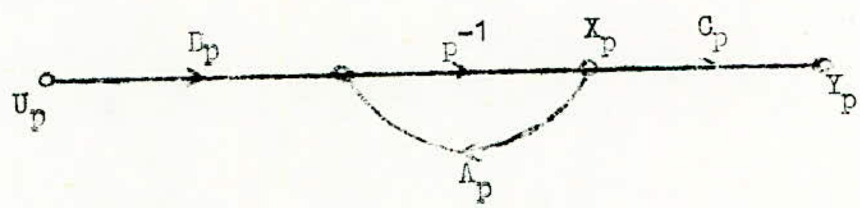
Soit un processus linéaire d'équation d'état :

$$\dot{X}_p = A_p X_p + B_p U_p$$

$$Y_p = C_p X_p$$

Avec $X_p \in R^n$; $U_p \in R^m$; $Y_p \in R^p$

Dont le diagramme de fluence



On veut modifier ce systeme et parvenir à un modèle décrit par :

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m$$

$$Y_m = C_m X_m$$

Avec $X_m \in R^n$, $U_m \in R^m$, $Y_m \in R^p$

Le diagramme de fluence de ce systeme est le suivant :

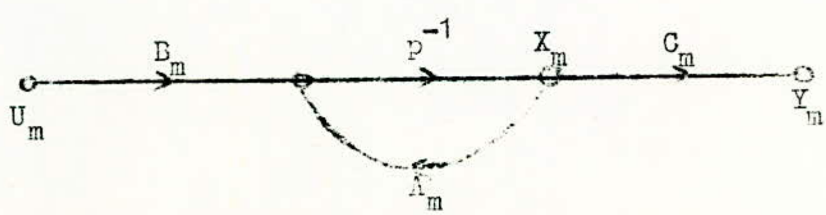


fig 1

Pour corriger le procedé , on utilise une compensation par retour d'état, c à d on doit choisir une commande de la forme :

$$u = F\,x \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} u \in R^m \\ x \in R^n \end{array}$$

Le systeme corrigé devient :

$$\overset{\circ}{x} = (A_p + B_p F)\, x$$

$$y = C_p\, x$$

Le systeme corrigé a un diagramme de fluence de la forme :

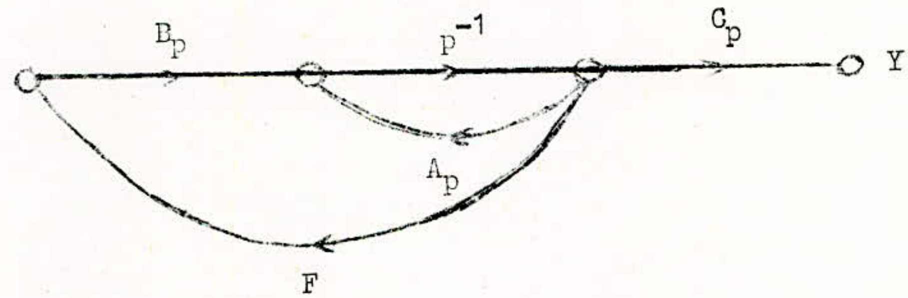


fig 2

La fig 1 du modéle et la fig 2 du systeme corrigé ne se ressemblent pas on remarque principalement qu'il manque la commande .

2 - 2 Introduction d'une npuvelle variable de commande .

De la même façon que pour (2 -1)

L'équation d'état du procedé est la suivante :

$$\begin{array}{ll} \overset{\circ}{x}_p = A_p\, x_p + B_p\, u_p & \\ & \text{avec} \\ y_p = C_p\, x_p & \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_p \in R^n \\ u_p \in R^m \\ y_p \in R^p \end{array}$$

Alors , Existe - il une compensation ou une loi de commande pour le systeme de façon à ce que, modéle et systeme corrigé soumis aux même exitations (commandes) réagissent ensemble de la même façon .

Ou en d'autres termes aient la même matrice de transfert .

. En introduisant une nouvelle variable de commande à la loi de commande on obtient :

$$u = F x + G w \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} x \in R^n \\ u \in R^m \\ w \in R^q \end{array}$$

w étant la nouvelle variable de commande .

Le couple de matrices (F , G) definissant la loi de commande :

Le systeme corrigé est décrit par la nouvelle équation d'état :

$$\dot{x} = (A_p + B_p F) x + B_p G w$$

$$y_p = C_p x$$

Le but de cette correction est de choisir (F , G) de façon à avoir les sorties du modéle et du procédé corrigé semblables .

$$y_p = y_m$$

c à d de minimiser l'écart entre y_p et y_m et cela quel que soit les variables d'état .

$$\varepsilon = y_p - y_m = (C_p - C_m) \begin{bmatrix} x_p \\ x_m \end{bmatrix}$$

Si $\varepsilon = 0$ on dira qu'il y a une poursuite parfaite du modéle c à d que le procédé corrigé et le modéle sont identiques .

<u>2 - 2 - 1 1^er^ Exemple = Systeme sans boucle de retour</u>

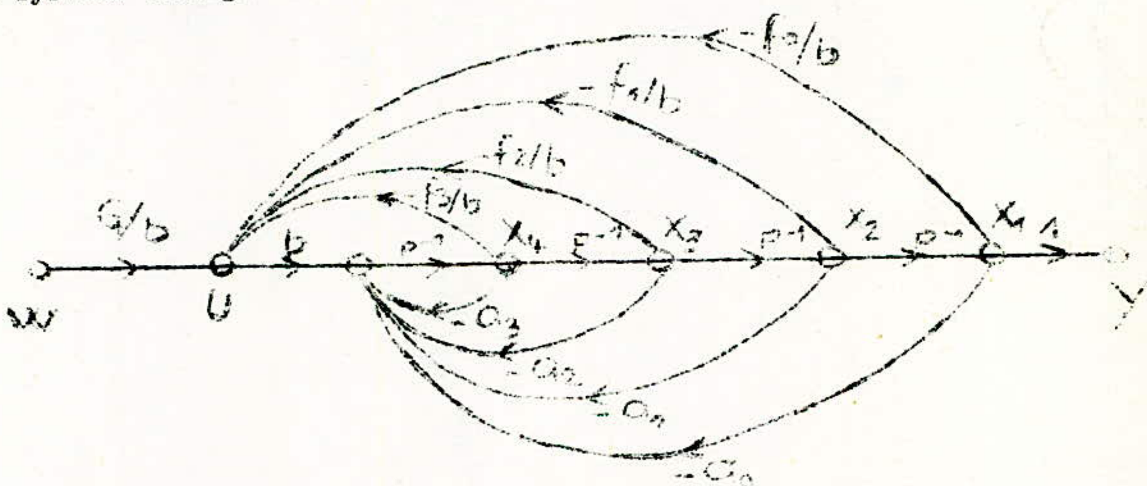
Soit le systeme decrit par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_o & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Diagramme de fluence

Le systeme corrigé ou modéle désiré



On trouve la loi de commande

$$u = \left(-\frac{f_o}{b} \; ; -\frac{f_1}{b} \; ; -\frac{f_2}{b} \; ; -\frac{f_3}{b} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{G}{b} w$$

Le système corrigé a une équation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(a_o + f_o), & -(a_1 + f_1), & -(a_2 + f_2), & -(a_3 + f_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

D'où sous forme de fonction de transfert :

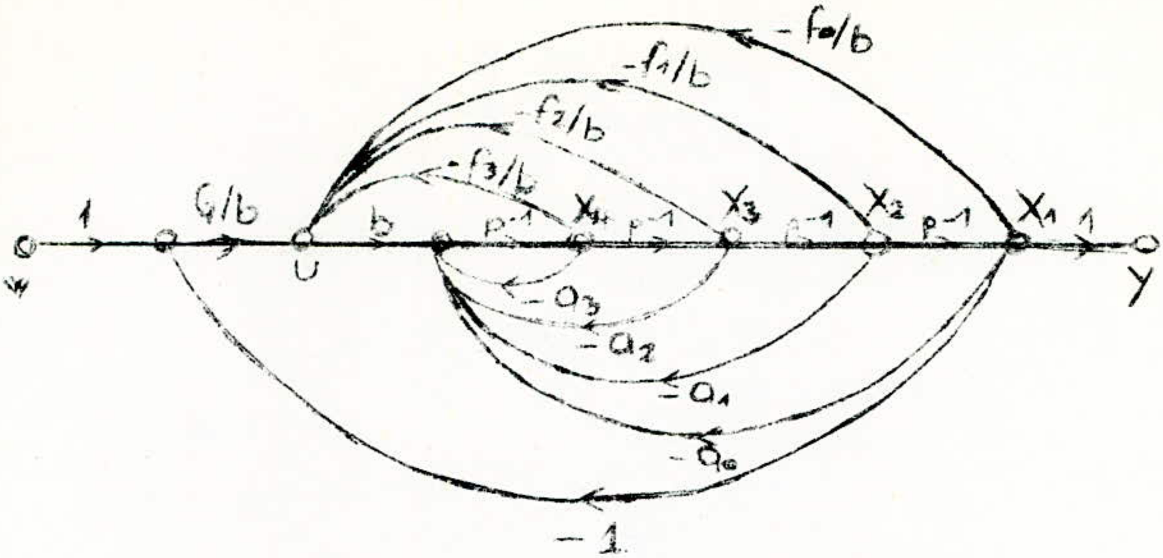
$$T_{FG}(p) = \frac{G}{(a_o + f_o) + (a_1 + f_1)p + (a_2 + f_2)p^2 + (a_3 + f_3)p^3 + p^4}$$

En conclusion , on peut modifier à volonté la transmittance d'un système par un choix convenable des coéfficients de réaction , c-à-d par les matrices F et G

<u>$2^{ème}$ Exemple : système avec boucle de retour</u>

Si le système considéré constitue la chaine d'action d'un système assérvi on peut modifier la transmittance en boucle férmée .

Le système corrigé du procédé considéré auparavant est décrit par :



On trouve la loi de commande :

$$u = \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{f_o}{b} + \dfrac{G}{b}\right) & -\dfrac{f_1}{b} & -\dfrac{f_2}{b} & -\dfrac{f_3}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \frac{G}{b} w$$

Le systeme corrigé a une équation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(a_o + f_o + G) & -(a_1 + f_1) & -(a_2 + f_2) & -(a_3 + f_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ G \end{bmatrix} W$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ X_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

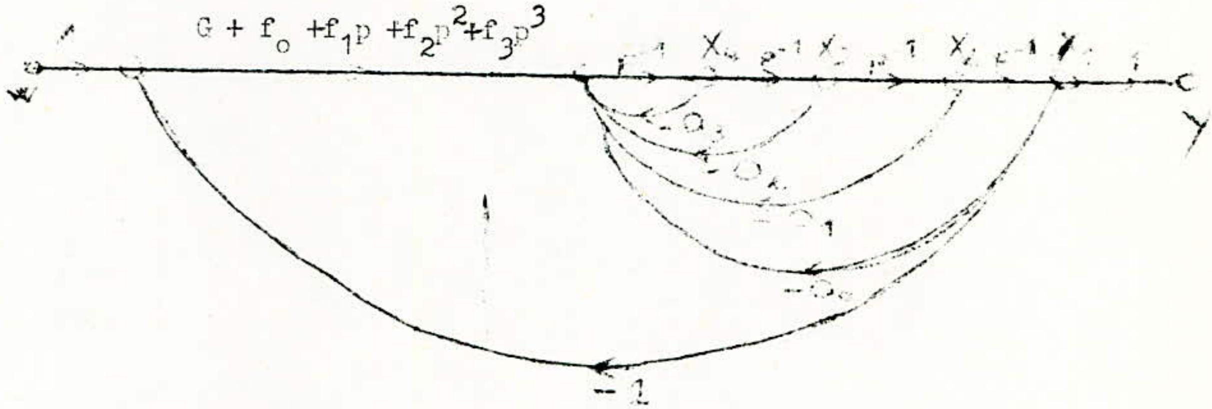
Et sous forme de fonction de transfert :

$$T_{F,G}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{G}{(a_o + f_o + G) + (a_1 + f_1)\, p + (a_2 + f_2)\, p^2 + (a_3 + f_3)\, p^3 + p^4}$$

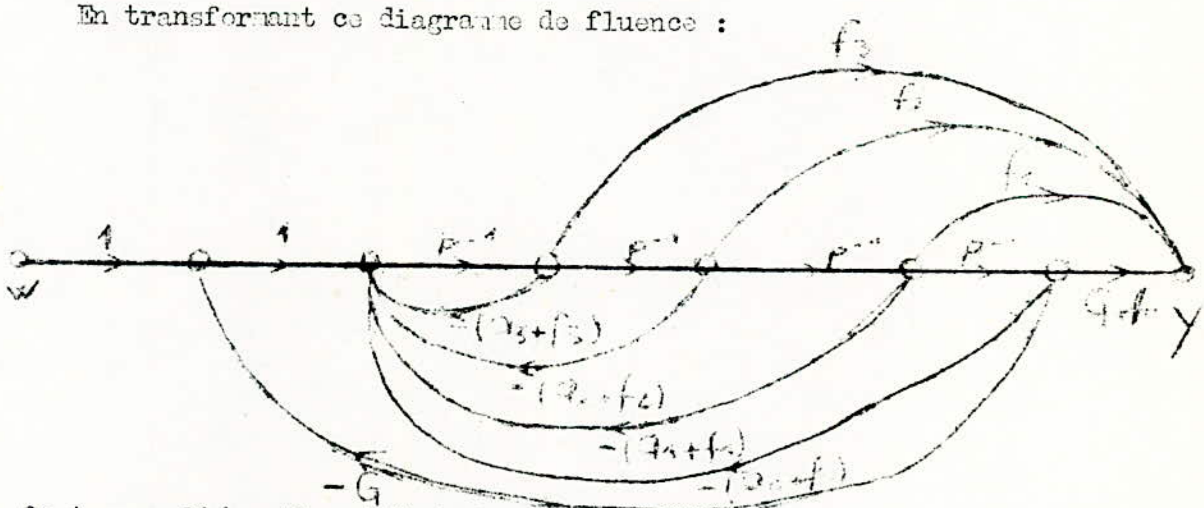
On remarque que le terme de gain $\frac{G}{b}$ s'introduit dans les termes de la matrice F et particuliérement , il s'ajoute au coéfficient de la variable d'état x_1 dans la loi de commande .

2 - 2 - 3 : Correction classique : correcteur en cascade .

On peut introduire un correcteur en cascade avec la transmittance de la chaine diréctc decrit par le diagramme de fluence suivant :



En transformant ce diagramme de fluence :



On trouve l'équation d'état du systeme corrigé :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(a + f + G) & -(a + f) & -(a + f) & -(a + f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = \left[(f_o + G) \; ; \; f_1 ; \; f_2 ; \; f_3 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Et sous forme de fonction de transfert :

$$T_{F,G}(p) = \frac{G + f_o + f_1\, p + f_2\, p^2 + f_3\, p^3}{(a_o + f_o + G) + (a_1 + f_1)\, p + (a_2 + f_2)\, p^2 + (a_3 + f_3)\, p^3 + p^4}$$

On remarque au numerateur de la fonction de transfert l'apparition d'une fonction qui depend de p et cela rend plus difficile la cörrection et la commande .

DONC LA CORRECTION PAR RETOUR D'ETAT c à d ($u = F\,x + B\,w$) EST PLUS MANIABLE ET PERMET UNE CORRECTION ET UNE COMPENSATION PERMANENTE DU SYSTEME PAR L'APPLICATION DE L'ORDINATEUR .

3 - STABILITE ET AMORTISSEMENT

3 - 1 Stabilité

Soit un systeme dynamique ou statique dont l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} x \in R^n \\ u \in R^m \\ y \in R^p \end{array}$$

Le système corrigé aura une équation

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B\,F)\,x + B\,G\,w \\ y = C\,x \end{cases}$$

On remarque que la matrice F de la loi de commande ($u = F\,x + G\,w$) modifie la matrice A et devient pour le systeme corrigé ($A + B\,F$) .

La matrice F doit stabiliser tous les modes instables de A qui sont à la fois gouvernables et observables .

Ce qui est identique : que tout mode instable de A + B F est ou non gouvernable ou non observable .

En explicitant ce théoreme :

supposons que le systeme d'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + b u \\ y = C x \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \begin{array}{l} x \in R^n \\ u \in R^m \\ y \in R^p \end{array}$$

est gouvernable et observable .

Posons

$$x = T z$$

On a

$$\dot{z} = J z + T^{-1} B u$$

Avec : ($J = T^{-1} A T$) Matrice diagonale dont les coéfficients qui composent la diagonale principale sont les valeurs propres de le matrice A .

Supposons que parmi ces coéfficients il existe des valeurs propres non negatives .

On a d'aprés le critére de Routh

Si le systeme comporte des modes instables (valeurs propres non negatives) ce systeme est instable.

Alors cherchons à le stabiliser par la loi de commande et en particulier par la matrice F ;

Supposons que la loi de commande est : $u = F x + G w$

il vient alors que l'équation d'état du système corrigé

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BF)\,x + B G w \\ y = C x \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} x \in R^n \\ u \in R^m \\ y \in R^p \end{array}$$

Cherchons à diagonaliser la matrice $A + B F$

Posons

On a $x = M z$

$$\dot{z} = D z + M^{-1} B G w$$

$$y = M C z$$

La matrice $(d = M^{-1}(A + B F)M)$ est aussi diagonale , donc les coéfficients non nuls sont les valeurs propres de la matrice $A + B F$

Pour que le système corrigé soit stable on doit jouer sur les coéfficients de la matrice F pour rendre stable tous les modes instables, c à d chercher une matrice F de façon à avoir toutes les valeurs propres de $A + B F$ negatives .

ainsi la loi de stabilité est satisfaite :

$$x \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty$$

c à d quel que soit le système , il revient toujours à son état d'équilibre si on l'abondonne à lui-même .

3 - 2 Precision

3 - 2 - 1 Fonction de transfert simple

Soit la fonction de transfert du systeme corrigé

$$H(p) = \frac{G}{a'_n p^n + \dots + a_1 p + a_o}$$

On definit un coéfficient d'amortissement caracteristique

$$\alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1}\, a_{i+1}}$$

L'amortissement sera bon si

$$\alpha_i \geqslant \alpha \quad \text{avec } \alpha \text{ de l'ordre de } 2$$

Deffinissons de même une pulsation caracteristique .

$$\omega_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$$

A partir de ces données , on peut calculer les coéfficients a_i du systême corrigé et la matrice F

Calcul des coéfficients ($a_i + f_i$.

Si on connait ω_o et α on a

$$\alpha_i = \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}} \Longrightarrow \omega_i = \alpha_i\,\omega_{i-1} = \omega_o\,\alpha_i^i = \omega_o\,\alpha^i$$

Si on connait de même un coéfficient a_i c à d un mode qui soit stable , on peut déterminer les autres coéfficients du polynome caracteristique par iteration .

— Coéfficients de p de puissance superieur à i

$$a_{i+1} = \frac{a_i}{\omega_i} = a_i\,\omega_i^{i-1} = a_i\,\omega_o^{-1}\,\alpha^{i}$$

$$a_{i+2} = \frac{a_{i+1}}{i+1} = a_i\,\omega_o^{-2}\,\alpha^{-(2i+1)}$$

$$a_{i+3} = \frac{a_{i+2}}{i+2} = a_i\,\omega_o^{-3}\,\alpha^{-(3i+3)}$$

$$a_{i+4} = \frac{a_{i+3}}{i+3} = a_i\,\omega_o^{-4}\,\alpha^{-(4i+6)}$$

. . .

. . .

—Coéfficients de p de puissance inferieure à i

$$a_{i-1} = a_i \omega_{i-1} = a_i \omega_0 \alpha^{i-1}$$

$$a_{i-2} = a_{i-1} \omega_{i-1} = a_i \omega_0^2 \alpha^{2i-3}$$

$$a_{i-3} = a_{i-2} \omega_{i-2} = a_i \omega_0^3 \alpha^{3i-6}$$

$$a_{i-4} = a_{i-3} \omega_{i-3} = a_i \omega_0^4 \alpha^{4i-9}$$

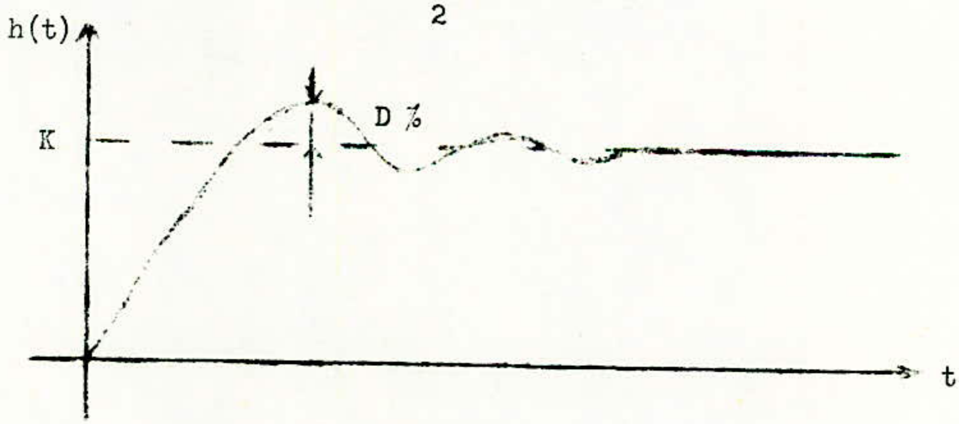
$$\vdots$$

Propriétés

On definit le dépassement relatif D pour calculer la valeur de α.

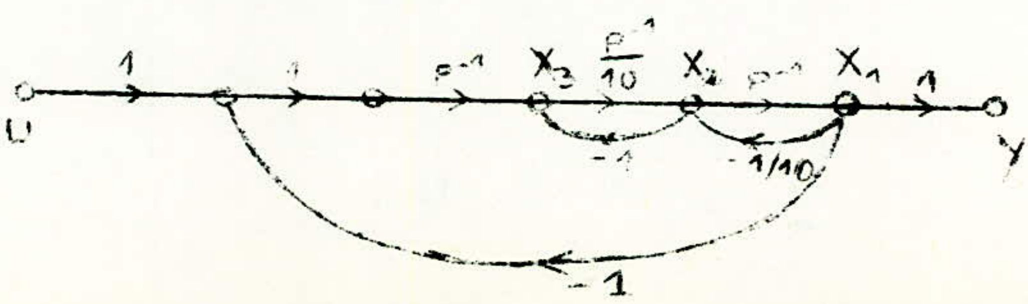
La loi de dépassement relatif est :

$$\alpha = 2,4 - \frac{\log D\%}{2}$$



EXEMPLE

Soit le système asservi :



Dont l'équation d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \ , \ 0 \ , \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

On détermine facilement le déterminant du système à l'aide du diagramme de fluence

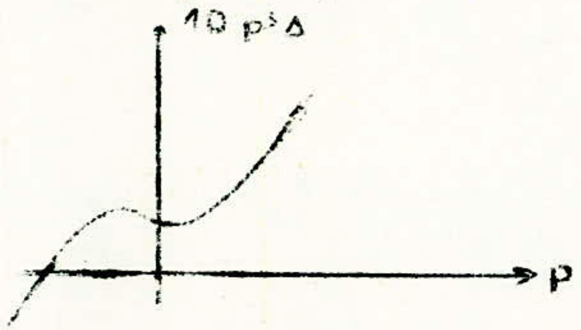
$$\Delta = 1 + \frac{2\,p^{-1}}{10} + \frac{p^{-3}}{10}$$

D'ou

$$10\,P^3\,\Delta = 10\,p^3 + 2\,p^2 + 1$$

Ce système n'admet pas de solution ; il est donc instable

Graphiquement il est représenté par la courbe :



Cherchons donc à le stabiliser par la loi de commande

$$u = (-f_0 \ , \ -f_1 \ , \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 1 \\ 1 + f_o & f_1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + \frac{1}{10})(\lambda^2 + \lambda) - \frac{1 + f_o}{10} - f_1 (\lambda + \frac{1}{10})$$

$$= \lambda^3 + \frac{11}{10}\lambda^2 - \lambda(f_1 - \frac{1}{10}) - \frac{f_o + f_1 + 1}{10}$$

Choisissons un dépassement relatif de 25 %

On détermine alors

$$\alpha = 2,4 - \frac{\log 25}{2} = 1,7$$

Et $\omega_2 = \alpha^2 \omega_o = \frac{a_2}{a_3} = 1,1$

Et pour

$$\alpha = 1,7$$

$$\omega_o = \frac{1,1}{(1,7)^2} = 0,393$$

On a

$$a_{i-1} = a_i \omega_{i-1} = a_i \omega_o \alpha^{i-1}$$

$$a_1 = 1,1 \times 1,7 \times 0,393 = 0,71 = \frac{1}{10} - f_1$$

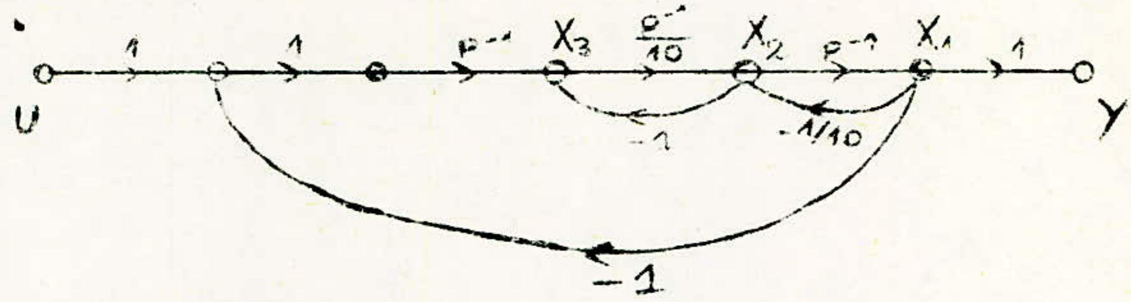
$$a_o = 1,1 \times 1,7 \times (0,393)^2 = 0,28 = - \frac{f_o + f_1 + 1}{10}$$

On tire

$$\boxed{\begin{aligned} f_o &= -4,41 \\ f_1 &= -0,61 \end{aligned}}$$

Exemple

Soit le système comportant une boucle de retour :

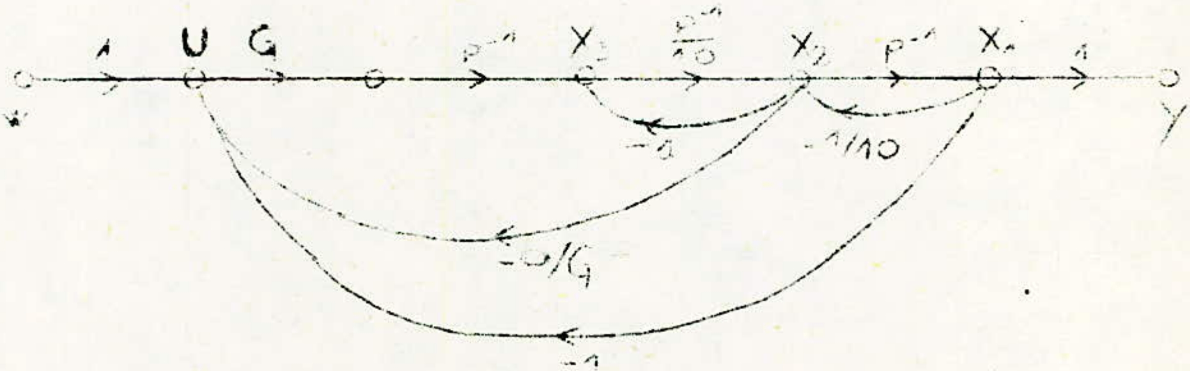


Dont l'équation d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \ , \ 0 \ , \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

En utilisant un correcteur tachymétrique on aura le diagramme de fluence suivant :



On obtient l'équation d'état de ce diagramme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -G & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$y = (1 , 0 ; 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dont la fonction de transfert

$$T_{F,G}(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{G}{G + (a+1)\,p + 11\,p^2 + 10\,p^3}$$

On choisit $D = 25\,\%$

On obtient $\alpha = 1,701 \# 1,7$

Dans cette fonction de transfert c'est a_2 et a_3 qui sont connus

$$a_2 = 11 \quad \text{et} \quad a_3 = 10$$

On obtient $\omega_2 = \frac{a_2}{a_3} = \frac{11}{10} = 1,1$

D'ou $\omega_1 = \frac{\omega_2}{\alpha} = \frac{1,1}{1,7} = \frac{a+1}{11}$

$$\omega_o = \frac{\omega_1}{\alpha} = \frac{1,1}{(1,7)^2} = \frac{G}{a+1} = \frac{1,7\,G}{11 \times 1,1}$$

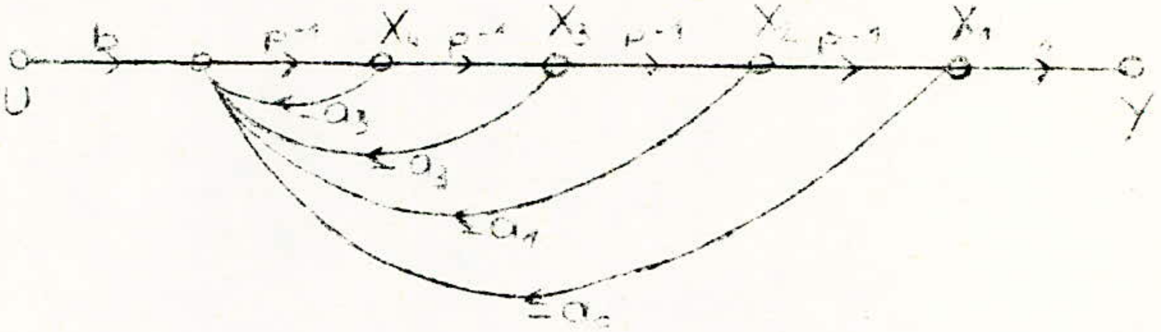
D'ou $G = \frac{(1,1)^2 \times 11}{1,7} = 2,709 \# 2,71$

$$a = \frac{(1,1)^2 \times 11}{1,7} - 1 = 6,117 \# 6,12$$

Si une variable ou plusieurs ne sont pas accessibles c à d non mesurables , on doit les supprimer du système par un moyen de transformation du diagramme de fluence ou de la fonction de transfert .

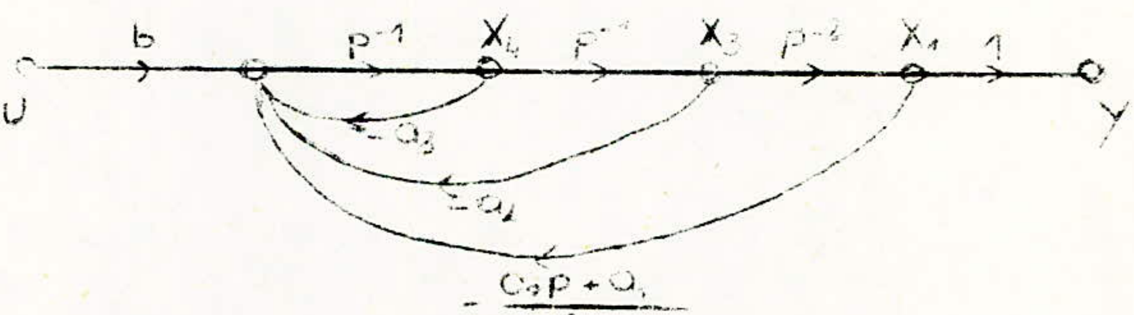
Exemple

soit le système decrit

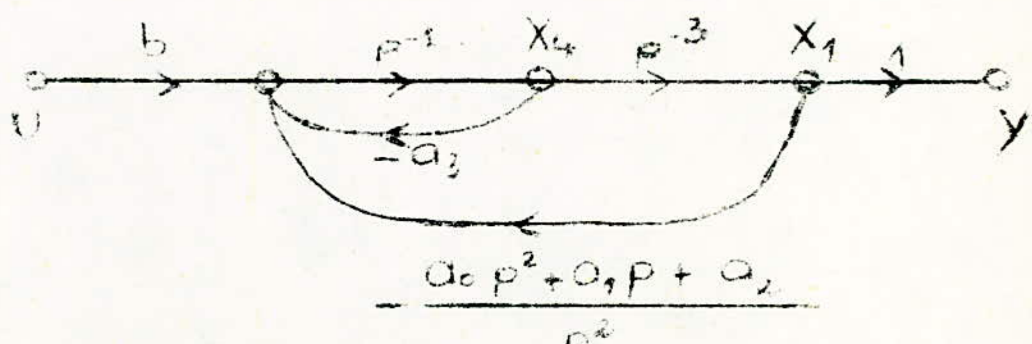


Supposant que X_2 n'est pas accessible et que X_1 , X_3 , X_4 sont mesurables, on doit donc supprimer X_2 du diagramme de fluence .

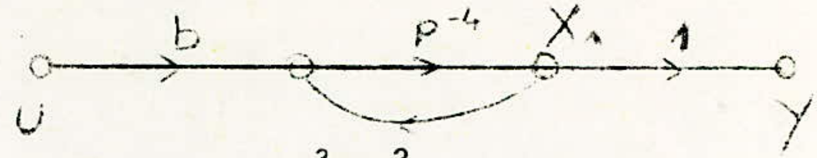
On obtient



Si encore X_3 est inaccessible , on obtient



Si X_4 est encore inaccessible



$$-\frac{a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3}{p^3}$$

Si encore X_1 n'est pas accessible on obtient une chaine directe dont la fonction de transfert est :

$$T(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

5 - CORRECTION MODALE

Soit le systeme

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{matrix} x & R^n \\ u & R^m \\ y & R^p \end{matrix}$$

Posons pour la loi de commande

$$u = k\,F\,x \qquad \text{avec} \quad F \text{ vecteur}$$

En remplaçant u par sa valeur, ilvient :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + k\,B\,F)\,x = G\,x \quad (G \text{ matrice } nxn) \\ y = C\,x \end{cases}$$

En supposant que la matrice A est diagonalisable ,

On pose la matrice Modale T tel que :

$$T = (m_1\,,\ m_2\,,\ m_3\,,\ m_4\,, \ldots m_n) \qquad m_i \text{ colonne de } T$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_n \end{bmatrix} \qquad r_i \text{ ligne de } T^{-1}$$

Supposons que le vecteur F est le 1er vecteur propre à gauche c à d $F = r_1$

On a

$$G\, m_1 = (A + k\, B\, F)\, m_1 = (A + k\, B\, r_1)\, m_1$$

On d'aprés les propriétés de la matrice Modale de A

$$r_i\, A = \lambda_i\, r_i$$

$$\text{et} \quad A\, m_i = m_i\, \lambda_i = \lambda_i\, m_i$$

$$r_i\, m_i = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$= 1 \quad \text{si } i = j$$

On d'apres la distribution du produit matricielle

$$G\, m_i = A\, m_i + k\, B\, r_1\, m_i$$

$$= A\, m_1 + k\, B \qquad \text{si} \quad i = j = 1$$

$$= A\, m_i = \lambda_i\, m_i \qquad \text{si} \quad i \neq 1$$

Cherchons maintenant à diagonaliser la matrice G

Supposons que le vecteur propre de G est $\sum q_i\, m_i$ et γ la valeur propre correspondante .

On peut mettre la matrice G sous la forme :

$$G \sum q_i\, m_i = \gamma \sum q_i\, m_i \qquad q_i \text{ constantes}$$

$$(A + k\, B\, r_1) \sum q_i\, m_i = \gamma \sum q_i\, m_i$$

$$A \sum q_i\, m_i + k\, B\, r_1 \sum q_i\, m_i = \gamma \sum q_i\, m_i$$

$$\sum q_i\, \lambda_i\, m_i + k\, q_1\, B = \gamma \sum q_i\, m_i$$

On decompose la matrice B dans la base des vecteurs propres :

$$B = \sum p_i\, m_i \quad \text{avec} \quad p_i = r_i\, B$$

On retrouve

$$G\, m_i = \sum q_i\, \lambda_i\, m_i + k\, q_1 \sum p_i\, m_i = \gamma \sum q_i\, m_i$$

En multipliant à droite par m^{-1} on trouve :

$$q_i \lambda_i = k\, q_i\, p_i = \gamma\, q_i$$

d'ou

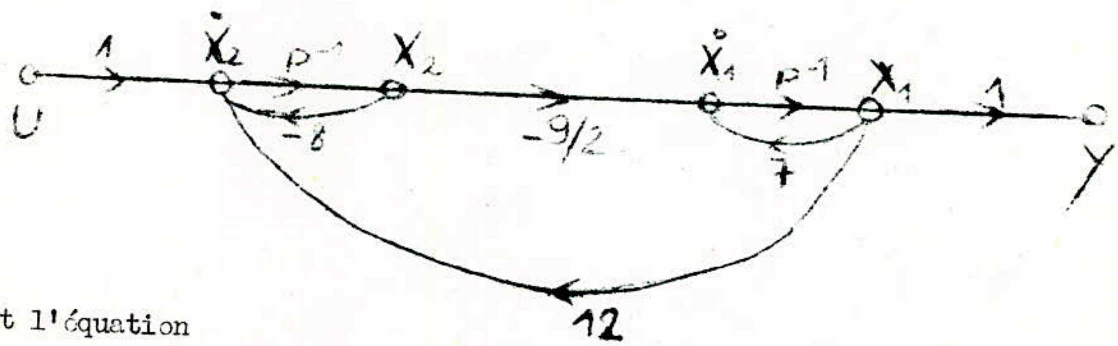
$$\gamma = \lambda_i + k \frac{q_1\, p_i}{q_i}$$

Ainsi pour $i = 1$

$$\gamma = \lambda_1 + k\, p_1 \quad \text{ou} \quad k = \frac{\gamma - \lambda_1}{p_1}$$

La valeur propre est donc devenue $\lambda_1 + k\, p_1$

A titre d'exemple



Dont l'équation

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -\frac{9}{2} \\ 12 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On tire $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$

La matrice modale T

$$T = \begin{bmatrix} c_1 & 3\,c_2 \\ 2\,c_1 & 4\,c_2 \end{bmatrix}$$

Pour $c_1 = c_2 = 1$ On trouve

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

On veut rendre $\lambda_1 = 1$ en $\lambda'_1 = -1$

On a

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = p_1\, m_1 + p_2\, m_2$$

$$p_1 = r_1 B = \left(1\, , -\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$p_2 = r_2 B = \left(-2\, , \frac{3}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}$$

On a $$k = \frac{\gamma - \lambda_1}{p_1} = \frac{-1-1}{-1/2} = 4$$

On a

$$G = A + k\,B\,r_1 = A + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (1\, , -1/2) = A + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 7 & -9/2 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9/2 \\ 16 & -10 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de G

$$\det(\ I - G\ ) = \begin{bmatrix} \lambda - 7 & -9/2 \\ 16 & \lambda + 10 \end{bmatrix} = (\lambda - 7)(\lambda + 10) + 72$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

On a m_2 toujours vecteur propre

$$G\, m_2 = \begin{bmatrix} 7 & -9/2 \\ 16 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot m_2$$

m_1 est devenu

$$m_1' = q_1\, m_1 + q_2\, m_2$$

On prend

$$q_1 = 1$$

$$q_2 = \frac{k\, p_2}{\gamma - \lambda_2} = \frac{4 \times 3/2}{-1 + 2} = 6$$

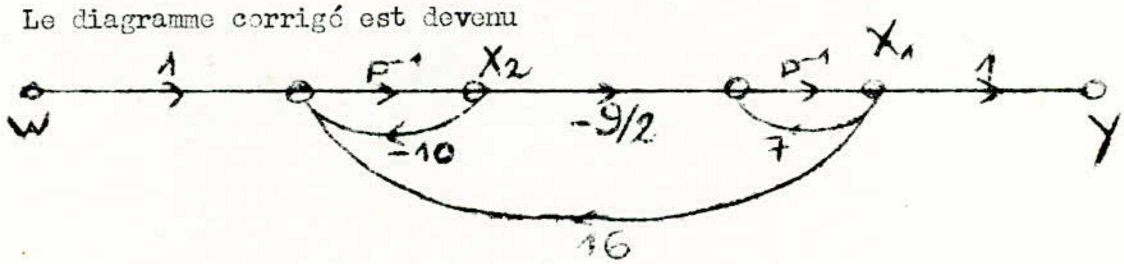
$$m_1' = m_1 + 6\, m_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$G\, m_1' = \begin{bmatrix} 7 & -9/2 \\ 16 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -16 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 9 \\ 16 \end{bmatrix} = \gamma\, m_1'$$

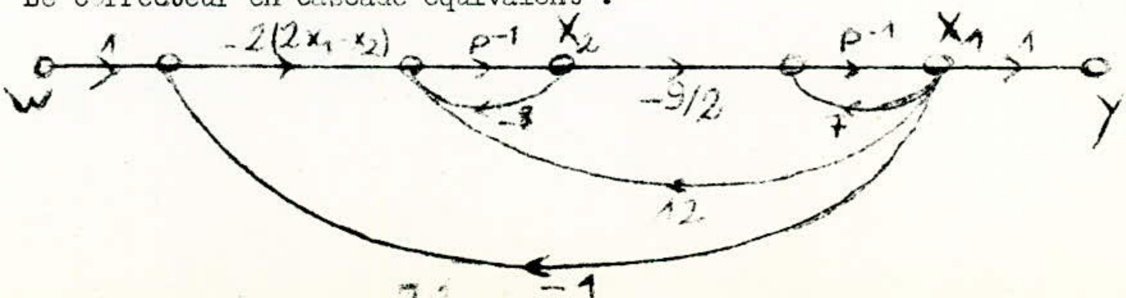
La loi de commande est donnée par

$$u = k\, F\, x = k\, r_1\, x = 4\, (1\ ,\ -1/2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 4\, x_1 - 2\, x_2$$

Le diagramme corrigé est devenu



Le correcteur en cascade equivalent :



C O M M A N D E   O P T I M A L E

C O M M A N D E   O P T I M A L E

Dans ce chapitre , on cherche à optimiser un système , c-à-d à obtenir un meilleur résultat en minimisant une fonction de coût .

Pour cela , il faut que les variables d'état soient toutes accéssibles et qu'elles obéissent à une équation différentielle vectorielle génerale de la forme

$$\frac{d\,x}{d\,t} = f(x,u,t)$$

Pour optimiser ce système on doit chércher la meilleur loi de commande $u = g(x,t)$ qui ramène le vécteur d'état d'un point à un autre par une trajectoire optimale qui satisfait à des pérformances désirées .

En géneral , le problème de choix de la commande optimale du procéssus est plus important , il s'agit de choisir une loi de commande admissible perméttant de guider le procéssus commandé $x(t)$ vers la région désirée de l'éspace d'état , tout en minimisant la fonction de coût .

La commande optimale peut étre étudiée pour réaliser un objectif dans un minimum de temps ou avec la plus faible dépense d'énergie , etc . .

1 / PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRIAGUINE

1 - 1 / Commande admissible

La loi de commande optimale n'est pas toujours continue , on appelle loi de commande admissible , toutes lois de commande qui optimise le procéssus étudié . Cette loi doit étre continue au moins par morceaux dans un intervalle de temps et bornée dans un domaine de R^m

Etant donné dans l'éspace de phase $\mathcal{X}$ deux points $X(t_o)$ et $X(t_1)$ parmi ces commandes admissibles $u = u(t)$ transforant le point représentatif de x_o en x_1. Trouver celle qui minimise la fonctionnelle

$$Q = \int_{t_o}^{t_1} f_o((x(t) , u(t))) \, d t$$

$X(t)$ désigne la solution de l'équation $\frac{d X}{d t} = f (X , U)$

Avec $X(t_o)$ connus et t_1 l'instant où cette fonction passe par le point $X_1 = x (t_1)$.

$f_o (x , t)$ est définie et continue avec ses dérivées partielles $\frac{\partial f_o}{\partial x_i}$ dans $R^n \times R^m$

La commande $u(t)$ qui donne la solution du problème énoncé est définie dans l'éspace de commande ((R^m ou un tronçon de R^m)) et continue par morceaux dans cet éspace.

Elle est de même définie et continue par morceaux dans l'intervalle de temps ((t_o , t_1))

1 - 3 / Principe du maximum :

Pour la formulation et la démonstration de la condition nécessaire d'optimalité, il est plus commode d'ajouter aux coordonnées de phase ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) la coordonnée x_o obéissant à la loi :

$$\frac{d x_o}{d t} = f_o (x_1 ,x_2 , \ldots , x_n)$$

Le système d'équations qui régit le procéssus commandé et la fonctionnelle Q se résume :

$$\frac{d x_i}{d t} = f_i (x_1 , x_2 , \ldots , x_n , u_1 , u_2 , \ldots , u_m)$$

Et sous forme vectorielle

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad \text{avec} \qquad x \in R^{n+1}$$

et $f(x, u)$ ne depend pas de x_o

Supposons de plus que ce système d'équations , on ait un autre système d'équations par rapport aux variables auxiliaires $\Psi = (\Psi_o, \Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ satisfaisant l'équation differentielle vectorielle suivante :

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_k} \Psi_i$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

En peut regrouper ces 2 systèmessous une seule écriture en introduisant la fonction H dépendante des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(\Psi_o, \Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ sous la forme :

$$H(\Psi, x, u) = \sum_{i=0}^{n} \Psi_i \; f_i(x, u)$$

Cette fonction vérifie les 2 systèmes en la differentiant comme suit :

$$\frac{\partial H(\Psi, x, u)}{\partial \Psi_i} = \frac{dx_i}{dt} \qquad ((i = 0, 1, 2, \ldots, n))$$

$$\frac{\partial H(\Psi, x, u)}{\partial x_i} = -\frac{d\Psi_i}{dt} \qquad ((i = 0, 1, 2, \ldots n))$$

Pour des valeurs fixes de Ψ et de x la fonction H dépend seulement de u et atteint son supprémum pour une valeur de $u_{opt} \in R^m$

Donc la fonction H est maximum pour Ψ et x fixés. C'est la condition nécessaire d'optimalité qui s'énonce sous forme de théoreme suivant

Soit $u(t)$ $((t_o \leqslant t \leqslant t_1))$, une commande admissible telle que la trajéctoir correspondante $x(t)$ issue du point $x(t_o)$ à l'instant t_o passe à l'instant t_1 par le point $x(t_1)$. Pour que la commande $u(t)$ et la trajéctoir $x(t)$ soient optimales, il est nécessaire qu'éxiste un vecteur fonction $\Psi(t) = (((\Psi_o(t), \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))))$ continue et non nulle, correspondant aux fonctions $u(t)$ et $x(t)$ tel que

1)) quel que soit t ; $((t_o \leqslant t \leqslant t_1))$, la fonction H $H(\Psi(t), x(t), u)$ de la variable $u \in R^m$ atteigne au point $u = u_{opt}$ son maximum

$$\max_{u \in R^m} H((\Psi(t), x(t), u(t))) = H(\Psi, x, u_{opt})$$

2)) à l'instant t_1 on a la relation

$$\Psi_o(t) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \max_{u \in R^m} H(\Psi, x, u) = 0 \quad \text{et} \quad x(t) = 0$$

<u>Discution du problème du Maximum</u>

Il se peut que pour un instant quelconque t $((t_o \leqslant t \leqslant t_1))$ le vecteur $((\Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots\ldots, \Psi_n(t)))$ soit nul. Comme la condition nécessaire d'optimalité impose que $\Psi = (\Psi_o, \Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ ne doit jamais être nul, il résulte que $\Psi_o \neq 0$

Nous pouvons donc poser $\Psi_o = -1$, pour que le vecteur Ψ soit normalisé.

On obtient donc $\Psi(t) = ((-1, \Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots, \Psi_n(t)))$

Pour les variables auxiliaires :

$$\frac{d\psi_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_2$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_2} = - \psi_1$$

Pour $\psi_1 = A \sin (t - \varphi)$ A est positif

on a $\psi_2 = A \cos (t - \varphi)$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

La condition nécessaire d'optimalité donne H maximum.

Pour que H soit maximum il faut que $u (\psi_o + \psi_2)$ soit positif et comme u est assujéti à la contrainte $|u| \leqslant 1$

la solution optimale sera donnée par :

$$u = \text{sign} (\psi_o + \psi_2) = \text{sign} (A \cos (t - \varphi) - 1)$$

Pour $u = 1$

$$H = 2 \psi_o + x_2 \psi_1 - x_1 \psi_2 + \psi_2$$

On trouve alors les variables d'état :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{d (x_1 - 1)}{dt} = x_2$$

ou encore

$$\frac{dx_2}{dt} = - x_1 + 1 \qquad \frac{dx_2}{dt} = - (x_1 - 1)$$

La solution optimale est :

$$x_1 - 1 = B \sin (t - \alpha)$$

$$x_2 = B \cos (t - \alpha)$$

avec $B \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$

ou encore

$$x_1 = B \sin (t - \alpha) + 1$$

$$x_2 = B \cos (t - \alpha)$$

On vérifie les conditions initiales :

$$x(t_o) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On trouve

$$x_1(t_o) = 2 = B \sin(t_o - \alpha) + 1$$

$$x_2(t_o) = 1 = B \cos(t_o - \alpha)$$

On a

$$B \sin(t_o - \alpha) = 1$$

$$B \cos(t_o - \alpha) = 1$$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg}(t_o - \alpha) = 1 \Longrightarrow \alpha = t_o - \frac{\pi}{4}$$

$$B = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

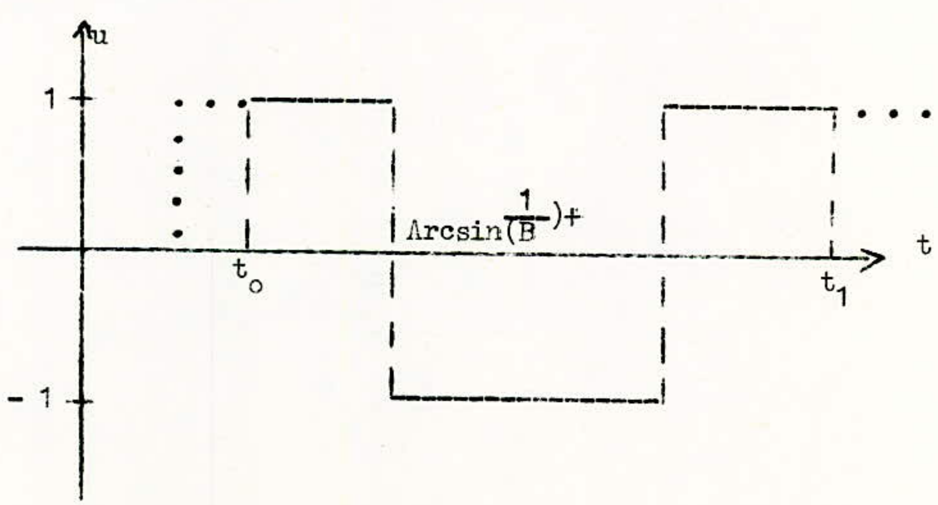
La trajectoire est déterminée

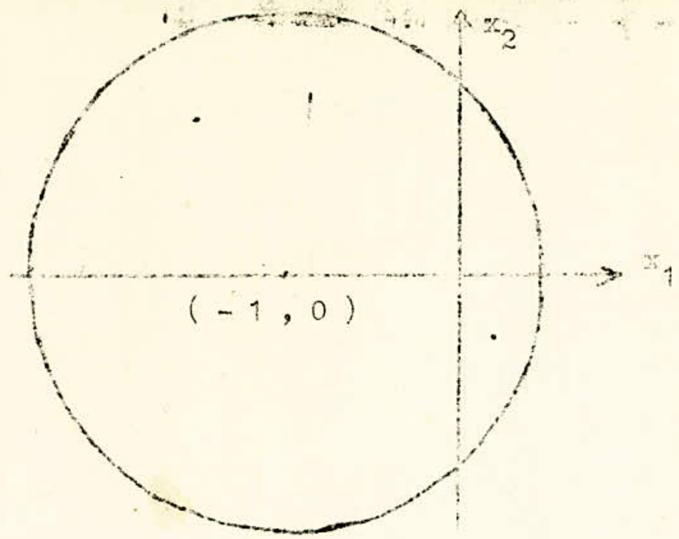
$$x_1 = \sqrt{2} \sin(t - t_o + \frac{\pi}{4}) + 1$$

$$xx_2 = \sqrt{2} \cos(t - t_o + \frac{\pi}{4})$$

La trajéctoire de phase est une circonférence de rayon $\sqrt{2}$ et de centre $(-1, 0)$.

La représentation graphique est la suivante





2 - APPLICATION AUX PROBLEMES DE COMMANDE OPTIMALE EN TEMPS MINIMAL

Un cas particulier important du problème d'optimalité de la commande est celui de minimiser le temps de transfert du point $x(t_o)$ au point $x(t_1)$

On a donc la fonctionnelle :

$$Q = \int_{t_o}^{t_1} dt = t_1 - t_o$$

D'où

$$f_o(x , u) = 1$$

La condition nécessaire d'optimalité de la commande en temps minimal est de minimiser la fonction H.

$$H = \psi_o + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x , u)$$

En différentiant cette fonction

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = \frac{d x_i}{d t} \qquad \text{pour } (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = - \frac{\partial \psi_i}{d t} \qquad \text{pour } (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

Pour des valeurs fixes de Ψ et de x, la fonction H depend de u seulement

$$\text{et} \quad \underset{u \in R^m}{\text{Max}} \; H(\Psi, x, u) = H(\Psi, x, u_{opt})$$

ON obtient le thèoreme de Pontriaguine pour l'optimalité de la commande en temps minimal

Soit $u(t)$ $((t_o \leqslant t \leqslant t_1))$ une commande admissible transferant le point représentatif de $x(t_o)$ à la position $x(t_1)$

Pour que la commande $u(t)$ et la trajectoir $x(t)$ soient optimales (au sens du temps optimal) il est nécessaire qu'éxiste un vecteur fonction

$\Psi'(t) = ((\Psi_1(t), \Psi_2(t), \ldots, \Psi_n(t)))$ continu et non nul.

correspondant aux fonctions $u(t)$ et $x(t)$ et tel que :

1) Pour tout t $(t_o \leqslant t \leqslant t_1)$ la fonction $H(\Psi(t), x(t); u)$

de la variable $u \in R^m$ atteigne au point u son maximum

$$H(\Psi(t), x(t), u_{opt}) = -\Psi_o \geqslant 0$$

2) Dans l'intervalle de temps optimal soit satisfaite la relation :

$$H(\Psi(t), x(t), u_{opt}) \geqslant 0$$

2 - 1) Exemple

Soit le système régi par l'équation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

On demande d'optimiser ce système, c'est à dire d'arriver le plus vite à l'origine des coordonnées sachant que les coordonnées u_1 et u_2 sont assujétties aux contraintes

$$|u_1| \leqslant 1 \qquad u \in R^m$$
$$|u_2| \leqslant 1$$

La fonction H s'écrit alors :

$$H = \Psi_1 (x_1 + u_1) + \Psi_2 (- x_1 + x_2)$$

$$= \Psi_1 x_1 - \Psi_2 x_2 + \Psi_1 u_1 + \Psi_2 u_2$$

Le système auxiliaire

$$\frac{d \Psi_1}{d t} = \Psi_2$$

$$\frac{d \Psi_2}{d t} = - \Psi_1$$

On trouve comme prècedemment

$$\Psi_1 = A \sin (t - \alpha) \qquad \text{Avec} \qquad A \geqslant 0$$

$$\Psi_2 = A \cos (t - \alpha) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$$

Pour que H soit maximum , il faut que

$$\Psi_1 u_1 \geqslant 0$$

$$\Psi_2 u_{22} \geqslant 0$$

Alors la commande optimale est donnée par :

$$u_1 = \text{sign}\, \Psi_1 = \text{sign}\, ((A \sin(t - \alpha) = \text{sign}\, (\sin (t - \alpha))$$

$$u_2 = \text{sign}\, \Psi_2 = \text{sign}\, ((A \cos(t - \alpha) = \text{sign}\, (\cos (t - \alpha))$$

On obtient donc divers solutions résumées dans le tableau suivant

Valeurs de u_1 et u_2		Centres des circonferences qui sont les trajectoires de phase du système considéré
$u_1 = 1$	$u_2 = 1$	le centre de la circonference est $(1 , - 1)$
$u_1 = -1$	$u_2 = 1$	" " " " " " $(1 , 1)$
$u_1 = -1$	$u_2 = -1$	" " " " " " $(- 1 , 1)$
$u_1 = 1$	$u_2 = -1$	" " " " " " $(- 1 , - 1)$

3)) APPLICATION AUX PROBLEMES DE REGULATION ET DE SERVOMECANISME

3 - 1)) Problèmes de régulation d'état à critère quadratique de pérformance .

Soit le système linéaire stationnaire décrit par

$$\dot{x} = A x + B u \qquad x \in R^n$$

$$u \in R^m$$

$$y = C x \qquad y \in R^q$$

La commande $u(t)$ doit étre choisie de façon à minimiser la fonctionnelle

$$Q = \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_1} (x^T M x + u^T N u) \, d t$$

Les matrices M et N sont symétriques et définies positives .

La condition nécessaire d'optimalité par le principe du Maximum de Pontriaguine est de maximiser la fonction H

$$H = \frac{1}{2} \psi_o (x^T M x + u^T n x) + A x \psi + B u \psi$$

Cette fonction doit satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = - \frac{d \psi_i}{d t} \qquad \text{pour } (i = 1 , 2 , \ldots , n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_i} = \frac{d x_i}{d t} \qquad \text{pour } (= 1 , 2 , \ldots , n)$$

On a donc

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = - \dot{\psi} = A^T \psi + M x$$

Cherchons maintenant à éxtremiser la fonction H par rapport à u .

$$\frac{\partial H}{\partial u} = N u + B^T \psi$$

La condition nécessaire pour obtenir l'éxtremum de H au point $u = u_{opt}$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_{u_{opt}} = 0$$

On a alors $N\, u_{opt} + B^T \Psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{opt} = - N^{-1} B^T \Psi$

La trajectoir d'état optimale est devenue ;

$$\dot{x} = A\,x - B\,N^{-1} B^T \Psi$$

On obtient donc 2 systèmes d'équations écrite sous forme matricielle déterminant précisement le système optimal cherché

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B\,N^{-1} B^T \\ -M & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Psi \end{bmatrix}$$

3 - 2)) Problèmes de sérvomécanisme

Désignons par $y^d(t)$ le vecteur de dimension q qui représente le vecteur de sortie cherché du système et $y(t)$ la sortie reelle du système

L'écart ou erreur du système

$$e(t) = y^d(t) - y(t) = y^d(t) - C\,x(t)$$

Le problème revient à minimiser la fonctionnelle

$$Q = \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_1} ((e^T(t)\, M\, e(t) + u^T(t)\, N\, u(t)))\, d\,t$$

La commande optimale $u(t)$ doit maximiser la fonction H qui est la même chose qu'auparavant

$$H = \frac{\Psi_o}{2} (((y^d - C\,x)^T M (y^d - C\,x) + u^T N\,u)) + A\,x\,\Psi + B\,u\,\Psi$$

On obtient comme précedemment :

$$\bar{u} = - N^{-1} D^T \Psi$$

et $\dot{x} = A\,x - B\,N^{-1} B^T \Psi$

Et le vecteur auxiliaire

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H}{\partial x} = (C^T M C x + A^T \psi - C^T M x^d)$$

On obtientt le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & - B N^{-1} B^T \\ - C^T M C & - A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ - C^T M \end{bmatrix} y^d$$

Pour résoudre ces équations on dispose de n conditions initiales

$$x (t)_{t=t_o} = x (t_o)$$

Et pour les variables auxiliaires ψ_i ($i = 1 , 2 , \ldots , n$) on suppose que ψ et x sont liés par la relation :

$$\psi = K x + v$$

On obtient alors

$$\dot{\psi} = K \dot{x} + \dot{K} x + \dot{v}$$

On obtient les nouvelles équations

$$\dot{x} = A x + B N^{-1} B^T \psi$$

$$\dot{\psi} = - C^T M C x - A^T \psi - C^T M y^d$$

$$= K \dot{x} + \dot{K} x + \dot{V}$$

En portant $\dot{x}$ dans la deuxieme équation

$$- C^T M C x - A^T K x - A^T v - C^T M y^d =$$

$$K A x + K B N^{-1} B^T K x + K B N^{-1} B^T v + \dot{K} x + \dot{v}$$

En ordonnant tout cela

$$(- C^T M C - A^T K - K A - K B N^{-1} B^T K - \dot{K}) x$$

$$+ (- A^T v - C^T M y^d - K B N^{-1} B^T v - \dot{v}) = 0$$

Et $\quad x(t_o) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

On a donc

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = (1 \quad , \quad 0)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad N = 1$$

Les équations de Ricatti deviennent alors

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s$$

$$\dot{s} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s$$

$$K = s\, z^{-1}$$

On a donc

$$\dot{z}_1 = + z_2 \qquad \dot{s}_1 = - z_1$$

$$\dot{z}_2 = + s_2 \qquad \dot{s}_2 = - s_1$$

On peut prétendre à une solution de la forme exponentielle

$$z_1 = z_1(t_o)\, e^{-t} = A\, e^{-t}$$ avec A Cste d'intégration

$$z_2 = z_2(t_o)\, e^{-t} = -A\, e^{-t}$$

$$s_1 = s_1(t_o)\, e^{-t} = +A\, e^{-t}$$

$$s_2 = s_2(t_o)\, e^{-t} = +A\, e^{-t}$$

$$K = \begin{bmatrix} +A\, e^{-t} \\ +A\, e^{-t} \end{bmatrix} \left(1 \;,\; A - \frac{1}{A}\, e^{t} \right)$$

$$K = \begin{bmatrix} +1 & +\left(A - \frac{1}{A}\, e^{t} \right) \\ 1 & \left(A - \frac{1}{A}\, e^{t} \right) \end{bmatrix} A\, e^{-t}$$

$$\psi = K\,x + v = \begin{bmatrix} +1 & +\left(A - \frac{1}{A}\, e^{+t} \right) \\ 1 & \left(A - \frac{1}{A}\, e^{+t} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} A\, e^{-t} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$u = -N\, B^T \psi = -\,(0 \;,\; 1) \begin{bmatrix} +A\, e^{-t}\, x_1 + (A^2\, e^{-t} - 1)\, x^2 + v_1 \\ A\, e^{-t}\, x_1 + (A^2\, e^{-t} - 1)\, x_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

D'ou

$$u = -A\, e^{-t}\, x_1 - (A^2\, e^{-t} - 1)\, x_2 - v_2$$

En supposant que $v = (v_1 \;,\; v_2) = 0$

On trouve

$$\boxed{u = -A\, e^{-t}\, x_1 - (A^2\, e^{-t} - 1)\, x_2}$$

C O N C L U S I O N   G E N E R A L E

La méthode d'analyse par l'intermediaire des variables d'état est [illegible] féconde en automatisme par ses possibilités d'éxtension aux régimes non [illegible] linéaires et variants . Elle se développe dans l'étude des réseaux industriels et économiques grace à la facilité de son traitement par ordinateur .

L'interet de la correctinn des systèmes par les variables d'état c'est qu'elle ne fait pas intervenir les réseaux correcteurs (P I , P I^2 , . . P I D) Elle permet aussi un controle en temps reel de la régulation .

Dans la commande optimale nous nous sommes limités au principe du maximum de Pontriaguine qui , lui, peut détérminer une loi de commande optimale adaptable aux systèmes en abscence de pérturbations et une commande éfficace si celui - ci possede une structure de réaction .

Cependant le principal avantage du principe du maximum c'est que la commande optimale peut étre formulée parfois sans résoudre l'équation d'état .

Par contre la programmation dynamique de BELLMAN nécéssite des ordinateurs puissants possédant untrès grand nombre de mémoires rapides , lors de la discrétisation de l'état d'un système continu , car l'accroissement du nombre d'état crée rapidement des diffucultés insurmontables .

Nous avons aussi évité d'utiliser le principe adaptatif de KALMAN dont la loi de commande change continuellement et est fonction non seulement de l'état du système et du temps mais aussi du milieu environnant .

Le bloc de commande devient ainsi assez complexe et difficile à réaliser .

$ $ $ $ $ $ $ $ $ $

* * * *

A N N E X E

SOLUTION DIRECTE : REGLE DE MASON

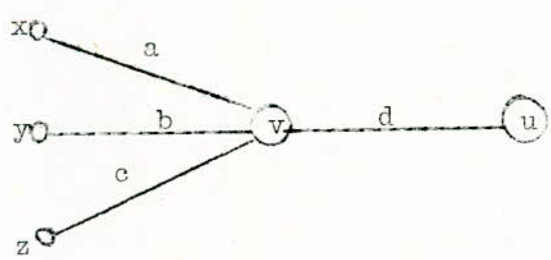
La résolution des équations d'état par la régle de Mason utilise les graphes de fluence .

A) Diagramme de fluence :

Soit l'équation :

$$v = ax + by + cz$$
$$u = dv$$

A chaque variable x , y , z , v , u on affécte un noeud , ces noeuds sont reliés entre eux par des branches orientées qui caractérisent les transmittances .



On remarque que trois branches convergent vers le noeud (v) et leur contribution (ax , by , cz)s'ajouteent pour donner la variable $v = ax + by + cz$

On remarque aussi la présence d'une branche qui convérge vers (u) à laquelle est affectée la transmittance d et donne ($u = dv$).

Cette branche ne modifie rien à la variable (v) .

B) Mode d'emploi de la formule de mason

La solution dirécte pour une variable dépendante x_j est donnée par la régle de Mason :

$$x_j = \frac{\sum x_i \sum C_{ij} \Delta_{ij}}{\Delta}$$

Au dénominateur apparait Δ détérminant du système d'équations représentées qui s'obtient par inspéction du graphe .

$$\Delta = 1 - \sum b_i + \sum b_i \, b_j - \sum b_i \, b_j \, b_k + \cdots$$

b_i désigne le produit des transmittances de branches d'une boucle

$\sum b_i$ est la somme des produits de toutes transmittances de toutes les buocles du diagramme .

$\sum b_i \, b_j$ est la somme des produits deux à deux des transmittances des boucles . Les 2 boucles d'une même produit ne devant pas avoir de point commun (noeuds ou branches) .

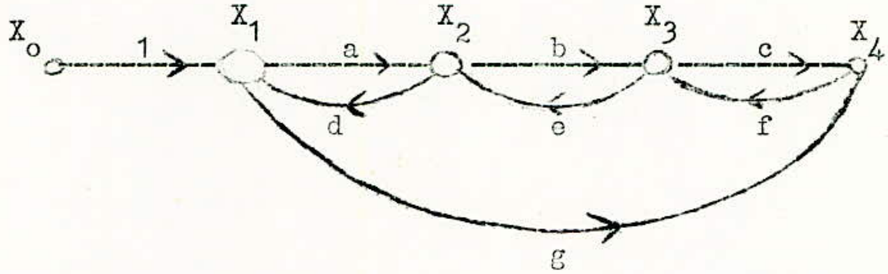
$\sum b_i \, b_j \, b_k$ est la somme des produits trois par trois des transmittances des boucles . Les trois branches d'un même produit ne devant pas avoir de point commun .

C_{ij} représente la transmittance de l'un des chemins ouverts (ne possédant pas de boucle reliant le neoud X_i au noeud X_j)

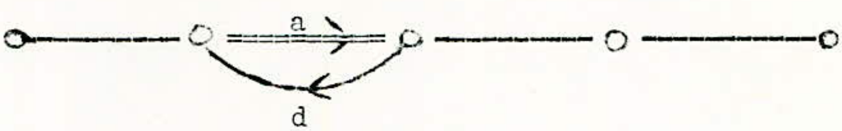
Δ_{ij} représente le détérminant du diagramme obtenu en supprimant dans le diagramme initial le chemin C_{ij} c-à-d l'ensemble des térmes de Δ dont les boucles n'ont pas de point commun avec C_{ij} .

C) Exemple

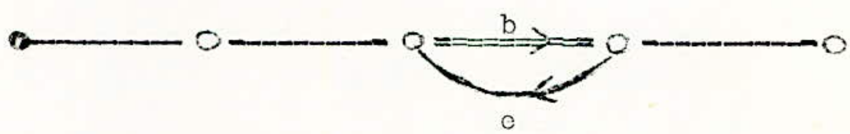
Soit le graphe de fluence :



Sa décomposition en boucles simples :



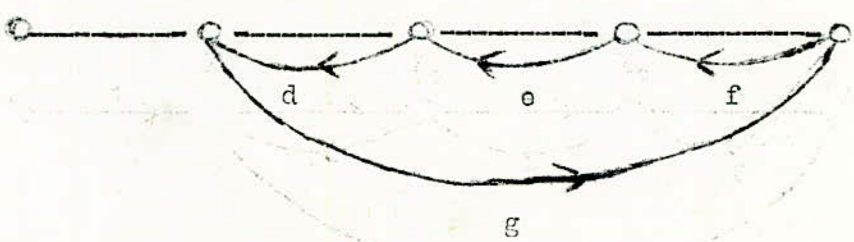
ad



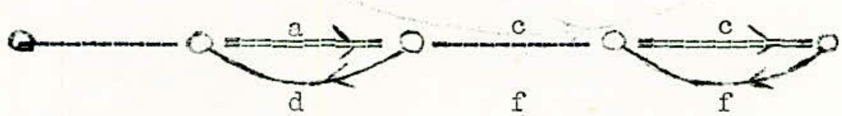
be

b_i

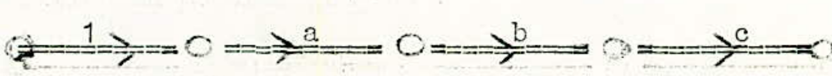
cf



gfed



adcf $\quad b_i \, b_j$



C_1 = abc; $\quad$ = 1

C_2 = g; $\quad$ 1 − be

Pour détérminer X_4 on a d'après la régle de Mason :

$$X_4 = \frac{X_o \sum C_{o4} \Delta_{o4}}{\Delta}$$

$$\sum C_{o4} \Delta_{o4} = 1.x.abc + (1 - bc)\, g$$

$$\Delta = 1 - \sum b_i + \sum b_i\, b_j = 1 - (ad + bc + cf + defg) + acdf$$

D'ou

$$X_4 = \frac{abc + g(1 - bc)}{1 - ad - bc - cf - defg + acdf} . X_o$$

B I B L I O G R A P H I E

L I V R E S

J. Liferman —— Systèmes linéaires — Variables d'état

P. Naslin —— Thèorie de la commande et variables d'état

R. C. Dorf —— Les variables d'état dans l'analyse et la synthese des systèmes de commande .

I. Roitenberg —— Théorie du controle automatique

L. Pontriaguine , V. Boltianski , R. Gamkrélidzé ,
E. Michtchenko —— Théorie mathématique des procéssus optimaux .

A R T I C L E S

Revue R . A . I . R O —— Automatisme n° 2
Année 1977