



Ecole Nationale Polytechnique

THESE
Présentée par

Brahim El Khalil HACHI
(Magister de l'ENP)

Pour l'obtention du diplôme de
Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie mécanique
Option : Construction

Contribution à la modélisation tridimensionnelle des structures fissurées en utilisant la technique d'hybridation des fonctions de poids

Ductile Tearing

Soutenue publiquement le **12 avril 2007** devant le jury constitué de :

Mr. Malek HAMOUTENE, Professeur ENP Alger	Président
Mr. Toufik BOUKHAROUBA, Professeur USTHB Alger	Examineur
Mr. Gérard MAURICE, Professeur ENSEM/LEMETA Nancy	Examineur
Mr. Brahim NECIB, Professeur Université de Constantine	Examineur
Mr. Belkacem KEBLI, Maître de Conf. ENP Alger	Examineur
Mr. Saïd RECHAK, Professeur ENP Alger	Directeur de thèse
Mr. Mohamed HABOUSSI, Maître de Conf. ENSEM/LEMETA Nancy	Invité

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire Génie Mécanique et Développement (LGMD) de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, sous la responsabilité du Professeur Said RECHAK ; je le remercie très sincèrement pour la formation que j'ai acquise sous sa direction, pour toute l'aide scientifique qu'il m'a apportée, les conseils qu'il m'a donnés, l'attention et le soutien moral qu'il m'a accordés.

La finalisation de cette thèse a été réalisée au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMETA) de Nancy, dans le cadre d'un accord-programme LGMD-LEMETA ; dans ce contexte, j'ai eu l'opportunité de travailler de façon très conviviale.

Mohamed HABOUSSI, Maître de Conférence à l'EEIGM de Nancy, a considérablement contribué à mon travail, non seulement par son apport scientifique mais aussi par sa patience, sa disponibilité, et ses critiques relatives à la rédaction de la thèse ; pour tous cela je lui témoigne ma profonde gratitude.

M'barek TAGHITE, Maître de Conférence et H.D.R. à l'U.H.P. de Nancy, m'a accueilli chaleureusement dans son bureau du LEMETA ; il a de plus accepté de relire attentivement mon document ; je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Je veux également remercier Gérard MAURICE, Professeur à l'EEIGM de Nancy, qui en tant que responsable (coté français) de l'accord-programme mentionné ci-dessus, m'a accueilli et rendu de nombreux services logistiques ; je lui suis aussi reconnaissant d'avoir accepté d'évaluer mon travail en qualité d'examineur.

Je suis sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs : Toufik BOUKHAROUBA (Professeur à l'USTHB d'Alger), Brahim NECIB (Professeur à l'Université de Constantine) et Belkacem KEBLI (Maître de Conférence à l'ENP d'Alger), d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse en qualité d'examineurs.

Mes sincères remerciements sont aussi adressés à Monsieur Malek HAMOUTENE, Professeur à l'ENP d'Alger, pour avoir accepté la présidence du jury de thèse.

Yacine BELKACEMI, mon enseignant de mécanique des milieux continus durant ma scolarité à l'ENP d'Alger, a déclenché en moi un vif intérêt pour cette discipline. Il a été de plus, mon directeur de thèse de Magister ; Pour toutes ces raisons, je lui exprime ma profonde reconnaissance.

De manière générale, je remercie tous ceux qui ont, directement ou indirectement, participé à l'élaboration de ce travail, laquelle s'est déroulée dans de bonnes conditions.

Table des Matières

Nomenclature	5
Chapitre I : Introduction générale et recherche bibliographique	7
Première Partie : Implémentation de la méthode d'hybridation	15
Chapitre II : Développement de la méthode d'hybridation des fonctions de poids	16
II.1 Introduction	17
II.2 Rappel sur la fonction de Green	22
II.3 Présentation de l'idée d'hybridation	23
II.4 Mise en œuvre numérique de la méthode d'hybridation	28
II.4.1 L'intégrale de surface	28
II.4.2 L'intégrale de contour	31
II.5 Couplage de la méthode d'hybridation avec la méthode de fonction de poids du point (PWFM)	35
II.6 Conclusion	40
Chapitre III : Présentation du code de calcul HWFun	41
III.1 Introduction	42
III.2 Les différents modules du code de calcul	42
III.2.1 Module du mailleur automatique	43
a) Lecture des données globales	43
b) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires réguliers	43
c) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires non-réguliers	45
d) Création du fichier résultat	50
III.2.2 Module de visualisation tridimensionnelle du maillage	51
III.2.3 Module de Calcul du FIC pour une fissure elliptique	51
a) Lecture des données du problème	52
b) Discrétisation du contour de l'ellipse	52
c) Calcul de la partie singulière du FIC	53
d) Calcul de la valeur optimale de la proportion β	53
e) Calcul de la partie restante du FIC	53
f) Affichage des résultats	54
III.2.4 Module de Calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique	55
III.3 L'interface graphique du code de calcul HWFun	56
a) La ligne de titre	57
b) La ligne de menu	57
c) La ligne de commande	58
d) La zone principale de texte	59
e) La zone de saisie des données globales	59
f) La zone d'affichage des résultats	59
g) La zone de chargement	60
h) La zone de calcul en série	60
i) La fenêtre de présentation 3D	60
III.4 Conclusion	61

<i>Deuxième Partie : Tests de validation de l'hybridation</i>	62
Chapitre IV : Application de la méthode d'hybridation aux cas des fissures elliptiques internes	63
IV.1 Introduction	64
IV.2 Fissure elliptique interne dans un milieu infini soumise à un chargement polynomial	64
IV.3 Fissure elliptique interne transversale dans une plaque sous flexion.....	73
IV.4 Fissure elliptique interne dans un tube sous pression	77
IV.5 Conclusion	81
Chapitre V : Application de la méthode d'hybridation aux cas des fissures semi-elliptiques débouchantes	82
V.2 Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube mince.....	83
V.3 Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube épais	84
V.4 Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion	90
V.5 Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement polynomial	99
V.6 Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement exponentiel ...	103
V.7 Conclusion.....	107
Conclusions et perspectives	108
Références bibliographiques	111

Nomenclature

Notations

\hat{L}	L'opérateur différentiel d'une fonction.
δ	La fonction de Dirac (au sens d'une distribution).
G	La fonction de Green.
Q	Le point arbitraire de la surface de l'ellipse.
Q'	Le point de calcul du Facteur d'intensité de contrainte (FIC) sur le contour de l'ellipse.
$K_{IQ'}$	Le FIC en mode I au point Q' .
q	Le chargement appliqué à un point arbitraire de l'ellipse.
S	La surface de l'ellipse.
a	Le petit axe de l'ellipse.
b	Le grand axe de l'ellipse.
$W_{QQ'}$	La fonction de poids liée au problème.
r, φ	Les coordonnées polaires du point arbitraire Q .
R	La distance entre le centre de la fissure elliptique et son bout en passant par Q .
$l_{QQ'}$	La distance entre Q et Q' .
(Γ)	La courbe de l'ellipse (front de fissure).
ρ_Q	La distance entre le point Q et le segment infinitésimal $d\Gamma$.
θ	La position angulaire du point Q' .
θ_r	L'angle réduit de θ .
α	Le rapport entre les axes de l'ellipse.
β	Le paramètre définissant la proportion entre les deux zones de l'ellipse.
β_1	Le paramètre définissant l'influence du rayon de courbure de l'ellipse.
R_c	Le rayon de courbure du front de fissure.
β	Le paramètre définissant la proportion entre les deux zones de l'ellipse.
β_1	Le paramètre définissant l'influence du rayon de courbure de l'ellipse.
β_2	Le paramètre définissant l'influence du gradient du rayon de courbure de l'ellipse.
R_0	Le rayon du premier demi-cercle concernant le maillage de surface.
r_i	Le rayon d' $i^{\text{ème}}$ demi-cercle concernant le maillage de surface.
K	L'intégrale elliptique de première espèce.
E	L'intégrale elliptique de seconde espèce.
Δ	L'épaisseur de la bande ignorée de la surface S .
ψ	La position angulaire de $d\Gamma$.
T	L'angle situé entre la tangente en un point de (Γ) et la droite passant par le centre de l'ellipse et ce même point.
$\delta\Gamma$	Le segment élémentaire de (Γ) .
ε	L'erreur de linéarisation de $\delta\Gamma$.
$\delta\psi$	L'ouverture angulaire du segment $\delta\Gamma$.
N	Le nombre de point subdivisant le quart du contour (Γ) .
$W_{QQ'}^A$	La composante asymptotique de $W_{QQ'}$.

$W_{QQ'}^C$	La composante correctrice de $W_{QQ'}$.
Q_x	Le symétrique du point Q par rapport à l'axe des abscisses.
D	Le paramètre géométrique de correction lié à α et θ .
σ	La distribution du chargement à l'intérieur de l'ellipse.
G_0	La solution de référence concernant le FIC adimensionnel.
$\bar{K}_I, F_I, F_I', Y_A, Y_B$	Les FIC adimensionnels utilisés pour les différents problèmes.
p_i	La pression à l'intérieur d'un tube.
R_i	Le rayon interne d'un tube.
t	L'épaisseur d'un tube ou d'une plaque.
w	La largeur d'une plaque.
σ_t	La contrainte de traction appliquée sur une plaque.
σ_f	La contrainte de flexion appliquée sur une plaque.
M	Le moment de flexion appliqué sur une plaque.
A	Le point du fond d'une fissure semi-elliptique.
B	Le point de surface d'une fissure semi-elliptique.

Abréviations

PNB	Produit National Brut.
FIC	Facteur d'Intensité de Contrainte.
CTOD	Crack Tip Opening Displacement.
HRR	Hutchinson, Rice et Rosengren.
FEM	Finite Element Method.
BEM	Boundary Element Method.
DDM	Displacement discontinuity method.
FSM	Fictitious Stress Method.
WFM	Weight Function Method.
PWFM	Point Weight Function Method.
XFEM	eXtended Finite Element Method.
HBEM	Hybrid Boundary Element Method.
SGBEM	Symmetric Galerkin Boundary Element Method.
GFBEM	Green Function Boundary Element Method.
LSM	Line Spring Model.
MBFM	Modified Body Force Method.

Chapitre I :
Introduction générale et
recherche
bibliographique

Introduction générale et recherche bibliographique

Le coût des accidents liés aux ruptures catastrophiques des structures jusqu'aux fin des années quatre-vingt (80) du siècle dernier représente, d'après une étude économique [Zeg-2003], près de 4% du Produit National Brut (PNB) dans les pays industriels développés. D'après la même étude, On pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture et de 25% supplémentaires par le développement des recherches dans le domaine de la rupture.

La pertinence de la maîtrise d'une telle science est due au fait de l'importance des incidents liés à la rupture et à la délicatesse de la prévention de leurs risques. On distingue deux causes majeures provoquant la rupture des structures :

- Une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure qui pourrait être évitée si la structure avait été bien dimensionnée avec un choix de matériaux adaptés et un chargement correctement évalué.
- L'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue où la prévention de la rupture est plus délicate ; en effet lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il y a souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours.

Eviter la rupture des édifices et des structures était depuis longtemps une préoccupation pour l'homme. Les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons (pyramides) ou ceux des civilisations qui leurs ont succédé (romaine, perse, musulmane, ...) nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler, ce qui prouve bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Mais comme les structures anciennes de pierre, de brique ou de mortier étaient chargées en compression, elles ont autant résisté car le risque de rupture par fissuration était très faible en l'absence de la traction contribuant directement à l'ouverture des fissures.

Le problème de la rupture est actuellement plus crucial avec le développement des structures complexes lié au progrès technologique utilisant des matériaux travaillant en traction tels que les aciers, les alliages métalliques et récemment les composites. Les avancées dans la connaissance en mécanique de la rupture permettent dans les temps modernes et plus précisément depuis le début du 20e siècle, de mieux prévenir le risque de rupture. Néanmoins, la première vraie interprétation qualitative de la rupture est exposée en 1920 par Griffith

[Gri-1920] qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux de Inglis [Ing-1913] au début du 20^{ème} siècle, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure. Il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure valable uniquement pour les matériaux fragiles (elle ne tient pas compte de la dissipation de l'énergie due à la plastification). Il a fallu attendre les travaux d'Irwin [Irw-1948] qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

Après ce qui arriva au bateau « Liberty » de la flotte américaine qui se fissura en deux parties lors de la deuxième guerre mondiale entre la Sibérie et l'Alaska (voir figure1 [Pom-2005]) et à une dizaine d'autres navires sur les 2700 en service, qui subiront ensuite le même sort, la mécanique de la rupture passa du stade de curiosité scientifique à celui d'une discipline scientifique fortement imposée dans l'ingénierie de la construction.

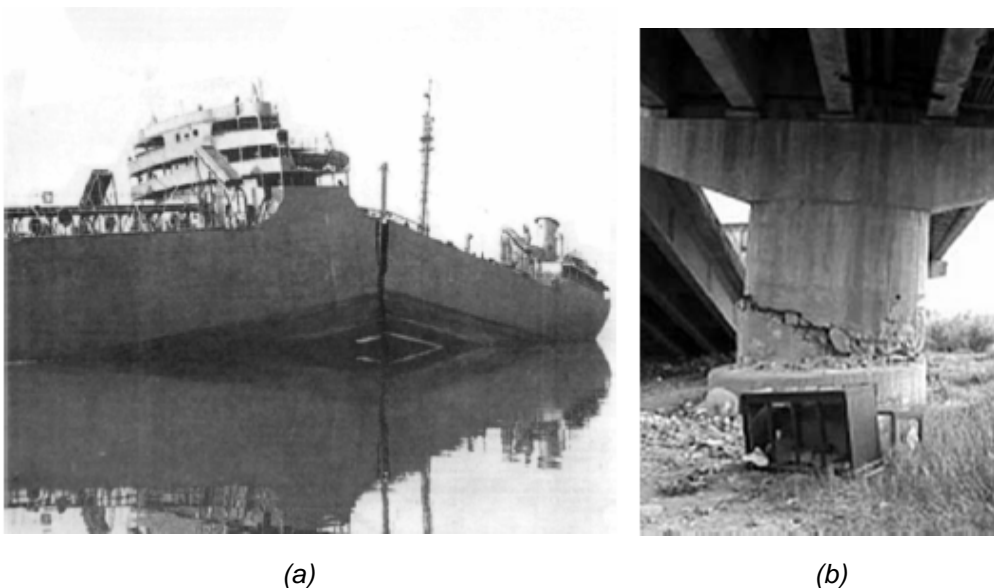


Figure 1 (a) Rupture fragile d'un liberty-ship (après la seconde guerre mondiale) au cours d'un hiver rigoureux, (b) Rupture d'un autopont lors d'un tremblement de terre [Pom-2005].

Après, Irwin [Irw-1956] avec un groupe de chercheurs dans les laboratoires de la marine américaine développa en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard [Wes-1939], Irwin [Irw-1957] montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure

peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié au taux de restitution d'énergie. Ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est appelé le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC). Le concept de FIC fut également utilisé par Paris [Par-1963] pour décrire la propagation des fissures de fatigue pour remplacer la notion d'endurance pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles concurrentes. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs comme Irwin [Irw-1962], Dugdale [Dug-1960] et Barenblatt [Bar-1962] proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone plastique ; la taille de la fissure est alors augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC. Wells [Wel-1961], un des représentants de la deuxième école, proposa en 1961 le déplacement en fond de fissure - ou CTOD « Crack Tip Opening Displacement » - comme paramètre alternatif à la mécanique linéaire de la rupture ou plus précisément au concept de FIC, lorsque la plastification devient importante comme c'est le cas dans les matériaux très ductiles. Plus tard, Hutchinson [Hut-1968], Rice et Rosengren [Ric-1968] (HRR) développèrent un nouveau paramètre appelé intégrale J pour mieux décrire la répartition des contraintes dans les zones plastifiées (champ HRR). Landes et Begley [Lan-1972] caractérisèrent la ténacité à l'aide du paramètre J et développèrent une procédure standard pour l'utilisation de cette intégrale dans des cas pratiques. Shih et Hutchinson [Shi-1976] proposèrent également une méthodologie pour utiliser l'intégrale J non seulement pour décrire la ténacité mais aussi pour la relier à la taille du défaut et au champ des contraintes appliquées. Shih [Shi-1981] établit par la suite la relation existante entre l'intégrale J et le CTOD. On commençait même avec les travaux de Nguyen [Ngu-1980] à introduire l'effet thermique sur l'analyse de la rupture en utilisant les lois thermodynamiques (cité aussi dans [Mau-1999]).

Actuellement, on s'intéresse en plus aux comportements viscoplastiques et/ou viscoélastiques. Les premiers comportements se rencontrent à température élevée lorsque les phénomènes de fluage deviennent importants alors que les seconds caractérisent les matériaux polymères de plus en plus utilisés dans l'industrie. L'apparition des nouveaux matériaux composites

nécessite de nouveau l'utilisation des concepts de la mécanique linéaire de la rupture pour décrire leur comportement (la première école).

Plus récemment encore, de nouvelles approches tentent de relier le comportement local à l'échelle microscopique au comportement global lors de la rupture d'un matériau. Ces approches micro – macro deviennent parfois nécessaires lorsqu'on atteint les limites d'utilisation des autres approches plus classiques concrétisées par les deux écoles précédemment citées¹. Cependant, jusqu'à l'heure actuelle, beaucoup de mécanismes de rupture restent toujours mal connus notamment lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés.

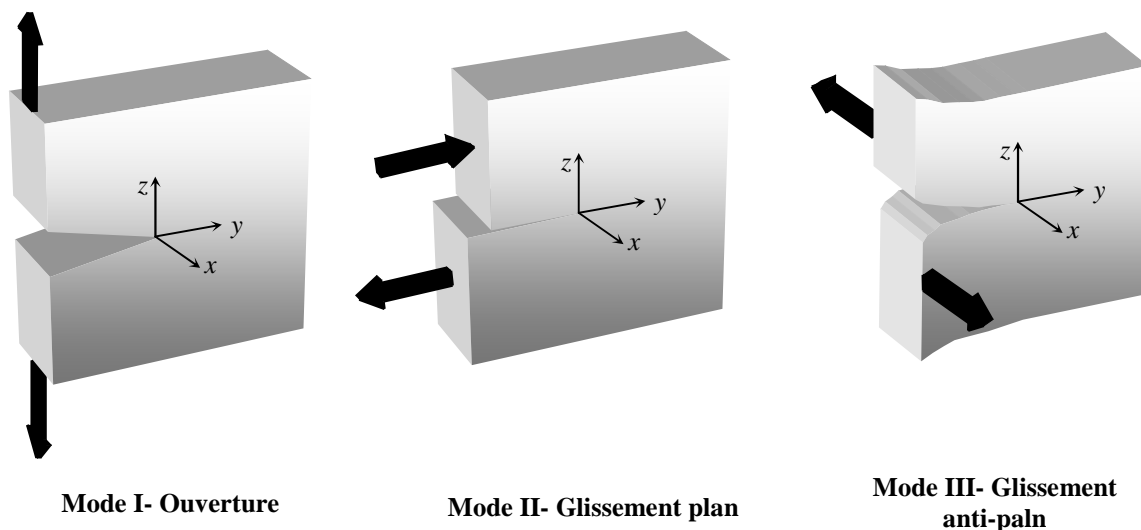


Figure 2 : Les trois modes de rupture

Par rapport à ce contexte, notre étude porte sur l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte (FIC) sur le contour des fissures elliptiques internes et des fissures semi-elliptiques débouchantes en mode I considéré comme le plus dangereux, dans le but de prévoir un éventuel risque de fissuration pour beaucoup de problèmes pratiques, tout en restant en mécanique de la rupture linéaire (l'école d'Irwin). Rappelons dans la figure 2 les trois modes de rupture. La forme elliptique est une forme géométrique très utilisée en mécanique de la rupture [Sha-1971, New-1981, Vai-1990, Guo-1995, Wan-1998, Kra-1999, ...] et qui permet de simuler, en jouant sur le rapport des axes de l'ellipse, différentes formes des fissures réelles présentes dans les structures (voir la photo de la figure 3).

¹ La chronologie historique citée est extraite de la référence [Zeg-2003]

Les méthodes expérimentale et analytique constituaient les principales approches en sciences physiques, cependant avec l'évolution de l'informatique, une troisième approche qui consiste en la simulation numérique s'est imposée dans la résolution des problèmes de la mécanique de la rupture. Parmi lesquelles on trouve la méthode des fonctions de poids adoptée dans la modélisation du phénomène de fissuration dans cette étude.

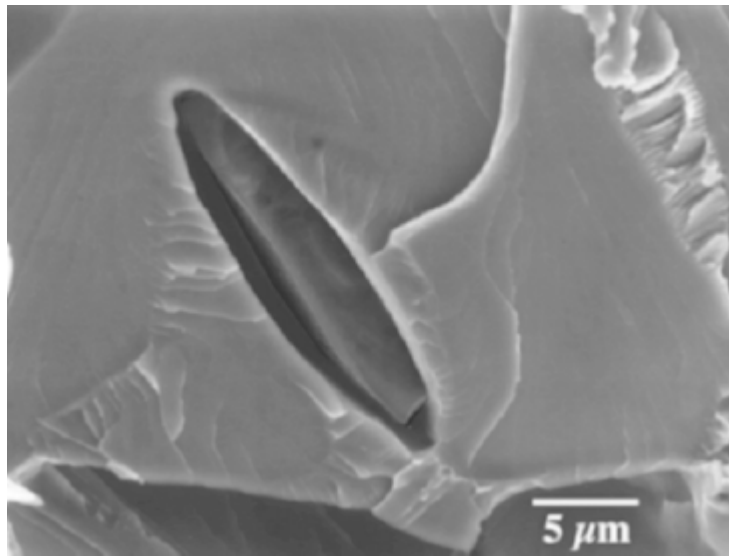


Figure 3 : Exemple d'une fissure interne de forme pratiquement elliptique due à une inclusion de sulfure de manganèse dans l'acier du Titanic [Pom-2005].

La principale raison de ce choix est la grande simplicité que représente cette technique, sur le plan de la formulation mathématique et sur le plan du traitement numérique vis-à-vis des autres techniques numériques les plus utilisées en mécanique de la rupture, telles que la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments aux frontières (BEM).

La FEM est relativement simple de point de vue de la formulation mathématique puisqu'elle consiste en une transformation des équations différentielles sur un domaine continu vers des équations algébriques sur un domaine discret. Cependant, sur le plan numérique la FEM est très gourmande en terme de mémoire de calcul notamment pour les problèmes tridimensionnels, puisqu'on est obligé de discrétiser toute la structure. Sans oublier de mentionner les problèmes liés à la convergence des calculs itératifs et son incompatibilité à traiter les problèmes des milieux infinis.

Pour la BEM, on peut considérer que le constat est inverse. On a tout d'abord une réduction d'une dimension par rapport à la FEM, donc un gain appréciable en terme de mémoire de calcul car on discrétise uniquement la frontière du problème. En sus, on a une grande aptitude pour la modélisation des problèmes des milieux infinis. Cependant sur le plan de la formulation mathématique, elle est très complexe et mène à des singularités d'ordre relativement élevé pouvant aller jusqu'à l'ordre 7 ($1/r^7$) pour certains problèmes ; la variable r étant la distance entre le point de calcul et le point arbitraire du domaine étudié (cette variable sera décrite dans le chapitre II). Le traitement de ces problèmes de singularité est aussi complexe que la formulation elle-même.

D'après sa conception comme on va le découvrir dans le prochain chapitre, la méthode des fonctions des poids ne possède pas la même adaptabilité sur les différents domaines d'application et les différentes configurations des problèmes à étudier par rapport à la FEM et à la BEM. Néanmoins, elle représente une simplicité et une efficacité remarquables que ce soit sur le plan mathématique ou numérique.

Sur le plan numérique, la discrétisation se limite à la partie ayant le plus d'influence sur la solution recherchée du problème. Donc, pour les problèmes de fissuration, on s'intéresse uniquement au maillage de la fissure sur laquelle on projette toutes les conditions de chargement du problème. Cette approche permet donc un gain de la taille de mémoire de calcul par rapport à la BEM puisqu'elle n'exige pas de mailler toutes les frontières et elle permet encore plus de gain par rapport à la FEM puisqu'on ne discrétise pas toute la structure.

Sur le plan de la formulation mathématique, la solution est donnée par un calcul intégral direct. Ce qui n'est pas le cas en fissuration pour les autres méthodes FEM et BEM, pour lesquelles l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte est un calcul indirect, passant obligatoirement par la détermination du champ de contrainte ou le champ de déplacement ou encore par des évaluations énergétiques. Il est à signaler aussi que les singularités présentes dans la solution donnée moyennant les fonctions de poids sont nettement moins compliquées que celles de la BEM, l'ordre est plus faible et leur traitement est très abordable vu qu'elles ne se reproduisent pas à chaque passage sur un élément de maillage (ceci sera développé dans le chapitre suivant).

La contribution de cette étude porte sur le développement d'une nouvelle approche qui hybride entre deux fonctions de poids dans le but d'améliorer la précision de calcul par rapport à chacune d'elles et par rapport à d'autres approches. Ceci lors de l'évaluation du facteur d'intensité de contraintes en mode I pour des fissures elliptiques et semi – elliptiques. Cette thèse est organisée en deux parties. La **première partie** (chapitre II et III) est consacrée au développement de la méthode d'hybridation. Après un rappel sur les différentes techniques numériques employées historiquement en mécanique de la rupture ainsi qu'un bref rappel sur la théorie de la fonction de Green, nous allons décrire en détail dans le **chapitre II** l'idée de notre technique d'hybridation qui constitue le cœur de cette étude. Ce détail comporte l'aspect de formulation mathématique, de l'implémentation numérique ainsi que de tous les traitements des singularités liées à la procédure numérique de la méthode. Afin d'étendre l'utilisation de l'approche d'hybridation à la modélisation des fissures semi-elliptiques débouchantes nous allons exposer à la fin de deuxième chapitre son couplage avec la méthode appelée « Point Weight Function Method (PWFM) », et les corrections appropriées sur la fonction de poids d'une fissure elliptique pour tenir compte de l'effet de la surface libre que ce couplage nécessite. Au **chapitre III**, nous présentons le code de calcul élaboré dans lequel nous décrivons les différents modules le constituant. Une description détaillée de l'interface graphique du code de calcul est aussi exposée à la fin de ce chapitre. La **deuxième partie** (chapitre IV et V) concerne les résultats et les interprétations de l'application de la méthode d'hybridation pour une variété d'exemples d'ordre pratiques. Pour les fissures elliptiques internes, plusieurs applications de différentes configurations géométriques et avec différents modes de chargement sont présentées dans le **chapitre IV**. Le couplage de la méthode d'hybridation avec la PWFM a donné des résultats probants à travers une variété d'exemples d'intérêt pratique qui sont rassemblés au **cinquième chapitre**. Finalement, nous terminerons cette thèse par une conclusion générale mettant en évidence l'intérêt de cette étude, ses perspectives immédiates ainsi que les horizons envisageables liés à son exploitation.

Première Partie :

Implémentation de la

méthode d'hybridation

Sommaire

<i>Première Partie : Implémentation de la méthode d'hybridation</i>	15
Chapitre II : Développement de la méthode d'hybridation des fonctions de poids	16
II.1 Introduction	17
II.2 Rappel sur la fonction de Green	22
II.3 Présentation de l'idée d'hybridation	23
II.4 Mise en œuvre numérique de la méthode d'hybridation	28
II.4.1 L'intégrale de surface	28
II.4.2 L'intégrale de contour	31
II.5 Couplage de la méthode d'hybridation avec la méthode de fonction de poids du point (PWFm)	35
II.6 Conclusion	40
Chapitre III : Présentation du code de calcul HWFun	41
III.1 Introduction	42
III.2 Les différents modules du code de calcul	42
III.2.1 Module du mailleur automatique	43
a) Lecture des données globales	43
b) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires réguliers	43
c) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires non-réguliers	45
d) Création du fichier résultat	50
III.2.2 Module de visualisation tridimensionnelle du maillage	51
III.2.3 Module de Calcul du FIC pour une fissure elliptique	51
a) Lecture des données du problème	52
b) Discrétisation du contour de l'ellipse	52
c) Calcul de la partie singulière du FIC	53
d) Calcul de la valeur optimale de la proportion β	53
e) Calcul de la partie restante du FIC	53
f) Affichage des résultats	54
III.2.4 Module de Calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique	55
III.3 L'interface graphique du code de calcul HWFun	56
a) La ligne de titre	57
b) La ligne de menu	57
c) La ligne de commande	58
d) La zone principale de texte	59
e) La zone de saisie des données globales	59
f) La zone d'affichage des résultats	59
g) La zone de chargement	60
h) La zone de calcul en série	60
i) La fenêtre de présentation 3D	60
III.4 Conclusion	61

Chapitre II :
Développement de la
méthode d'hybridation
des fonctions de poids

II.1 Introduction

Il est rare qu'un problème réel où la géométrie et les conditions de chargement sont souvent très complexes, soit soluble analytiquement. Parfois on est amené à simplifier le problème pour le rapprocher à un cas où la solution analytique est envisageable. Mais une telle simulation n'est pas possible sans trop s'éloigner du cas réel ; ce qui demande de faire appel aux méthodes numériques qui englobent depuis leur apparition une grande variété de techniques. Parmi lesquelles citons la méthode des différences finis, la méthode des volumes finis, la méthode des éléments finis, la méthode des éléments de frontière, la méthode des fonctions de poids et beaucoup d'autres qui sont parfois un mélange, de deux voire plus, de ces méthodes. Si on parle plus particulièrement de la mécanique de la rupture, ce sont plutôt les trois dernières méthodes les plus reconnues par leurs efficacités vis-à-vis de la complexité du traitement des champs physiques influant le phénomène (champs contraintes-déplacements) considérés comme singuliers au voisinage des fissures.

Grâce à ces méthodes, on a pu modéliser le phénomène de la rupture en transformant le modèle mathématique défini généralement sur un domaine continu sous forme d'équations aux dérivées partielles très complexe à résoudre analytiquement, en un modèle discontinu obtenu par discrétisation du domaine avec des mailles plus au moins fines.

Parmi ces trois méthodes, la méthode des éléments finis reste la plus populaire. Elle repose sur la modélisation des équations aux dérivées partielles du milieu continu par subdivision en régions (appelées éléments finis) dans chacune desquelles le comportement est décrit par un ensemble distinct de fonctions représentant les champs de contrainte et de déplacement dans cette région (dans le cas de mécanique de solide).

On peut raisonnablement situer les débuts de la FEM vers les années cinquante. Les premières applications sont issues de la mécanique des milieux continus déformables et notamment du domaine aéronautique comme les travaux de Levy [Lev-1947, Lev-1953] ou ceux d'Argyris & Kelsey [Arg-1954]. Par ailleurs les travaux théoriques concernant les approximations analytiques des équations de l'élasticité linéaire, parus dans les années cinquante, ont été utilisées par Clough [Clo-1960]. A cet effet c'est lui le premier à introduire le terme d'éléments finis pour la résolution des problèmes bidimensionnels. L'analyse mathématique s'est poursuivie après, notamment pour l'estimation de l'erreur d'approximation (les travaux de Johnson & Mclay [Joh-1968]) et celle de l'interpolation (les travaux de Zlamal [Zla-1968]). Les recherches sur la FEM ont par la suite porté sur l'enrichissement de la gamme d'éléments de dimensions différentes (1D, 2D et 3D) et d'ordre variable (constant, linéaire, quadratique, cubique, ...) comme le montre la figure 4a.

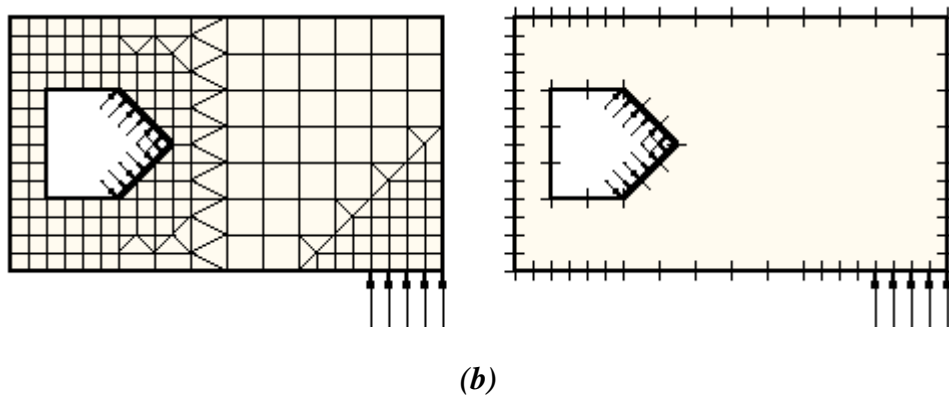
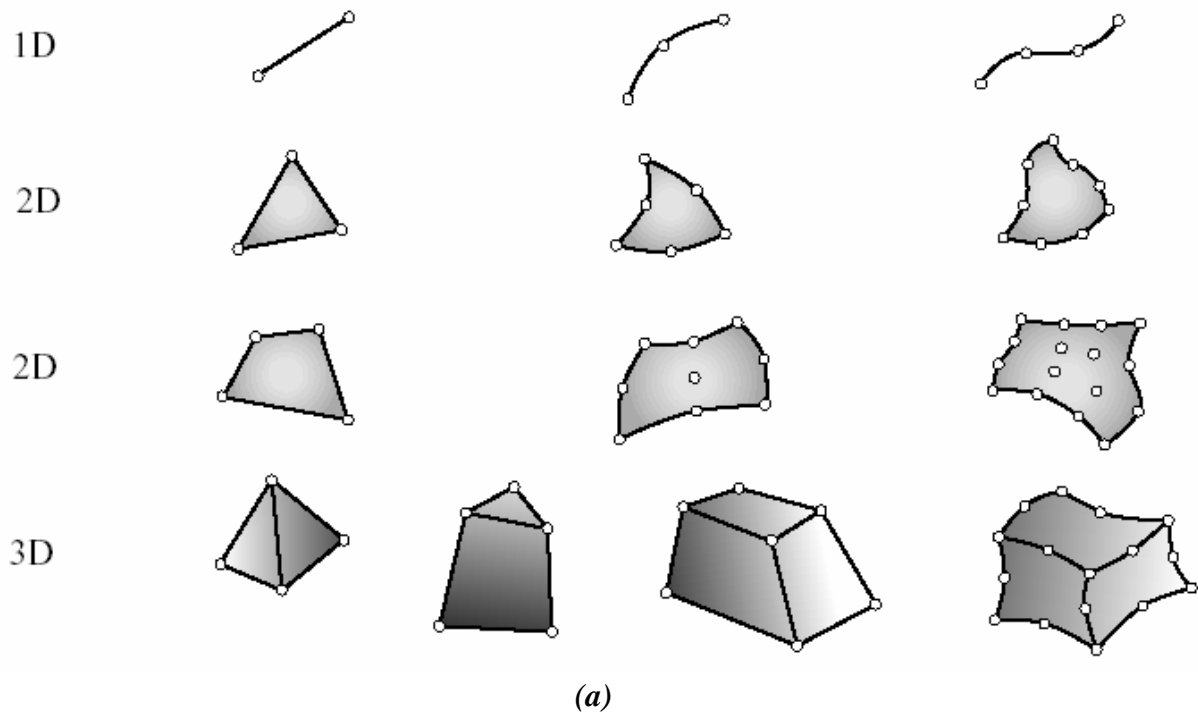


Figure 4 : (a) Les éléments usuels de discrétisation des domaines de différentes dimensions –
 (b) Exemple de discrétisation d'un domaine bidimensionnel par FEM (à gauche) et par BEM (à droite)

Pour la mécanique de la rupture, citons les travaux de Newman & Raju [Raj-1982 , New-1979, New-1981, 1988] et ceux d'Atluri et al. [Atl-1979, Atl-1983, Rhe-1986] portant sur les plaques sous traction et sous flexion ainsi que les tubes sous pression interne, les travaux de Grebner & Strathmeier [Gre-1985] utilisant des éléments de bouts de fissures axisymétriques, les travaux de Yoshimura et al. [Yos-1989] sur la rupture non - linéaire des matériaux viscoplastiques, les travaux de Kobayashi et al. [Du-1992, Yu-1993] sur la rupture des tubes sous chargement dynamique, les travaux de Rahman [Rah-1995] sur les modèles

stochastiques en rupture élasto-plastique et les travaux de Wang & Lambert [Wan-1997, Wan-1998] qui ont investi sur les développements des fonctions de poids par optimisation basée sur des résultats d'éléments finis...etc.

D'autres chercheurs ont opté pour des formulations mieux adaptées au maillage, on cite notamment Belytschko et al. [Bel-1994, Moe-1999, Bel-1999, Kry-1999, Sto-2001, Bel-2003] et Sukumar et al. [Suk-1997, Suk-2000, Suk-2001, Suk-2003].

Ces études ont contribué à l'extension de la FEM pour un calcul optimal en mécanique de la rupture (réduction de nombre d'éléments de maillage). Cette nouvelle extension est connue sous le nom eXtended Finite Element Method (XFEM). Cette même équipe a beaucoup contribué au développement d'une autre extension de la FEM appelée la méthode sans maillage (Meshless Methods) dont l'avantage d'éviter le remaillage des structures à géométrie variable (le cas de propagation de fissure par exemple).

Maintenant, la FEM a connu de grands progrès par le biais des développements d'un grand nombre de logiciels dans les différents domaines de l'ingénierie. Cependant, l'immensité des maillages nécessaires pour la modélisation, entre autres les espaces mémoires importants occupés lors du calcul, représentait toujours un obstacle aux praticiens de cette méthode. Comme cela a été mentionné, les problèmes de convergence de la FEM ainsi que son handicap vis-à-vis de la modélisation des milieux infinis, ont encouragé le développement des méthodes concurrentes ; la BEM en est une, conçue pour résoudre les problèmes aux limites toujours par discrétisation portant seulement sur la frontière du domaine. Donc une dimension au moins des éléments de discrétisation par rapport à la FEM (voir la figure 4b) et un calcul direct sans risque de problème de convergence, ce qui va entraîner une nette réduction de l'espace mémoire.

Dans le cas général, la BEM consiste en la transformation des équations décrivant le comportement des fonctions inconnues des différents champs physiques à l'intérieur et sur le contour (la frontière) d'un domaine, en une équation intégrale reliant les inconnues et certaines de leurs dérivées aux valeurs qu'elles prennent sur le contour. En mécanique de la rupture, ces inconnues sont les déplacements et les tensions ; ces derniers permettent de calculer directement le FIC après leur évaluation au voisinage du bout de la fissure pour le cas de la rupture fragile (élastique) ou à travers l'intégrale J de Rice [Ric-1968] pour la rupture élasto-plastique.

Ainsi, la BEM repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière du domaine étudié. On note au passage que l'étude de ces équations a commencé il y a plus d'un siècle et constitue une branche de la physique mathématique classique qui est la théorie de potentiel.

L'identité intégrale de Somigliana (cité par [Bon-1995]) pour l'élasto-statique par exemple, a été publiée en 1886. Le développement de la BEM en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui de la FEM. Les premiers développements numériques de la BEM ont été proposés à la fin des années soixante par Rizzo [Riz-1967], Cruse [Cru-1969] et Shaw [Sha-1970] pour citer que quelques-uns.

Si les équations intégrales issues de la théorie de potentiel portent sur des inconnues intermédiaires, elles sont qualifiées « méthodes indirectes » qui ont été développées essentiellement par Crouch, & Starfield [Cro-1983]. Ces méthodes regroupent deux approches ; la méthode de discontinuité de déplacement (DDM) et la méthode de discontinuité de contrainte appelée parfois la méthode des contraintes fictives (FSM).

D'autres formulations intégrales dites « méthodes directes » établissent une relation entre les grandeurs physiques (vecteur déplacement et vecteur contrainte) sur la frontière du domaine d'étude sans variables intermédiaires. Leur domaine de validité n'est pas restreint à des conditions aux limites spécifiques. Citons pour les méthodes directes en élasto-statique les travaux de Lachat & Watson [Lac-1976], les travaux de Bui [Bui-1977] ainsi que ceux d'Aliabadi & Rooke [Ali-1991].

Comme les lèvres des fissures constituent des frontières du domaine, dont on peut les discrétiser plus facilement avec la BEM qu'avec la FEM. A cet effet, la BEM a vite gagné du terrain en mécanique de la rupture avec un rapport « précision / coût de calcul » très élevé. On constate aussi qu'aux files des années les auteurs ont pensé à hybrider les méthodes BEM entre elles dans le but toujours de concevoir des approches optimales comme la HBEM (Hybrid Boundary Element Method) et de profiter au maximum des avantages que représentent les unes par rapport aux autres. Citons notamment les travaux de Guozhong et al. [Guo-1995, Guo-2000, Guo-2004]. On a même pu adapter la BEM pour les problèmes de la rupture non-linéaires en introduisant la notion d'élément dual grâce notamment aux travaux de Portela & Aliabadi [Por-1992], Cisilino and Aliabadi [Cis-1999], et ceux de Kebir et al. [Keb-1999, Keb-2006].

Il faut noter que la BEM, comme toute méthode de simulation numérique, a aussi ses inconvénients. Citons notamment les problèmes liés aux singularités qui demandent des traitements analytiques et/ou numériques aussi importants que la méthode elle-même.

Ceci a amené certains chercheurs au couplage de la FEM (pour modéliser la majorité du domaine) avec la BEM (pour modéliser les régions fissurées) comme dans les travaux de Keat et al. [Kea-1988], Wang & Atluri [Wan-1996] , Frangi & Novati [Fra-2002] et dans ceux de Margonari & Bonnet [Mar-2005]. Parfois on couple plus de deux méthodes comme pour le

cas de Han & Atluri [Han-2002] avec la méthode FEM pour les zones non fissurées, et l'hybridation SGBEM de la méthode de l'élément symétrique de Galerkin avec la méthode des éléments de frontières pour modéliser les zones fissurées.

Pour la méthode des fonctions de poids, son développement en mécanique de la rupture remonte aux travaux de Bueckner [Bue-1970] portant sur l'étude d'une fissure semi-infinie dans un milieu infini. L'approche développée alors utilisait la fonction de Green [Gre-1828]. Depuis, la recherche de nouvelles fonctions de poids combinée à un approfondissement du bilan énergétique de Rice [Ric-1972] a fait l'objet de plusieurs travaux, parmi lesquels, Paris et al. [Par-1976], Oore et Burns [Oor-1980] et Bortmann et al. [Bor-1983]. En 1986, Gao et Rice [Gao-1986] ont introduit l'étude de la stabilité de la forme rectiligne du front de fissure pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes (FIC). Par la suite, beaucoup de travaux utilisant cette technique se sont succédés. Les problèmes traités concernent alors la forme de la fissure, le mode de rupture ainsi que le domaine d'application (statique, dynamique, thermo-élastique, . . .). Citons notamment, parmi ces travaux, par ordre chronologique, Fett & al. [Fet-1989], Vainshtok & al. [Vai-1990], Dominguez & al. [Dom-1992], Rooke & al. [Roo-1994], Orynyak & al. [Ory-1995], Zheng & al. [Zhe-1997], Kiciak & al. [Kic-1998], Pommier & al. [Pom-1999], Krasowsky & al. [Kra-1999], Hachi & al. [Hac-2003], Christopher & al. [Chr-2004] et Hachi & al. [Hac-2005].

La technique de fonction de poids consiste à utiliser une ou plusieurs solutions connues (solution de référence) d'un cas particulier dans le but de trouver la solution pour le cas général. La solution de référence vient généralement de résultats analytiques (exactes). Mais dans certains cas, l'absence de tels résultats oblige les auteurs, tels que Orynyak et al. [Ory-1994, Ory-1995] pour la méthode de fonction de poids du point (PWF), à utiliser des solutions approximatives des fissures elliptiques pour déterminer la solution générale dans le cas de fissures semi-elliptiques [Ory-1975] et quart-elliptiques [Ory-1974].

La question de l'efficacité relative des différentes méthodes numériques FEM, BEM et WFM les unes par rapport aux autres, objet de nombreuses discussions notamment entre les deux premières, ne nous semble pas essentielle. En effet, la FEM occupe une position dominante, son champ d'application est incontestablement plus grand que celui des autres. Les BEM représentent une supériorité pour le traitement de certaines situations (problèmes linéaires, fissuration en utilisant des éléments de discontinuité de déplacement, milieux infinis, frontières mobiles, ...). Les WFM sont destinées à des domaines d'application plus restreints mais elles représentent, pour les problèmes dont on dispose déjà de l'implémentation

analytique en terme de fonction de poids, une simplicité et une efficacité fascinante. Il faut donc conclure que ces différentes approches sont complémentaires plutôt que concurrentes.

Notre étude prend sa source dans la modélisation en mécanique de la rupture par les fonctions de poids représentées ici par les fonctions de Green. Elle présente une nouvelle approche améliorant le calcul des facteurs d'intensité de contrainte par hybridation de deux fonctions de poids. Elle est présentée et appliquée aux cas de fissures elliptiques et semi – elliptiques sous différents chargements. L'hybridation consiste à utiliser l'une ou l'autre des deux fonctions dans la zone de la fissure où la fonction est la plus efficace. La délimitation des deux zones est faite après optimisation du rapport des axes et du rayon de courbure de la fissure. Lors de l'optimisation on cherche à atténuer l'effet des singularités présentes dans les fonctions de poids et à mieux prendre en compte l'influence de la courbure de l'ellipse.

Ce chapitre constitue le noyau de notre étude. Dans lequel, en première partie, nous présentons un petit rappel sur la théorie de la fonction de Green, ensuite nous exposons le principe de l'idée d'hybridation, sa formulation mathématique ainsi que sa mise en œuvre après une étude d'optimisation par rapport aux paramètres géométriques de la fissure. Et enfin, nous développons la mise en œuvre numérique de l'approche, qui est une tâche aussi importante que la formulation de l'approche, avec, notamment les traitements des singularités des intégrales curvilignes et surfaciques présentes dans la formulation de la méthode d'hybridation.

II.2 Rappel sur la fonction de Green

Avant d'entamer la présentation de notre approche, il est utile de mettre en évidence la notion de fonction de Green qui est généralement à la base des formulations analytiques des fonctions de poids. Pour cela, nous allons présenter la définition de la fonction de Green dans sa forme la plus simple.

Soit une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre n :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) f^{(i)}(x) = \phi(x) \Leftrightarrow \hat{L}(x)f(x) = \phi(x), \quad \hat{L}(x) \stackrel{\text{Déf}}{=} \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} \quad (1)$$

$\hat{L}(x)$ étant l'opérateur différentiel.

La fonction de Green de cette équation est la fonction satisfaisant l'équation (1) en remplaçant le second membre (ou le terme source) $\phi(x)$ par la fonction (au sens d'une distribution) de

Dirac $\delta(x-x')$ ayant la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x')dx' = 1$ avec $\delta(x-x') = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x = x' \\ 0 & \text{pour } x \neq x' \end{cases}$.

Alors, on a par définition de la fonction de Green G :

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i} G(x, x') \stackrel{\text{Déf}}{=} \delta(x-x') \Leftrightarrow \hat{L}(x) G(x, x') \stackrel{\text{Déf}}{=} \delta(x-x') \quad (2)$$

En appliquant les propriétés de la fonction de Dirac il s'en suit pour (2) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x') \phi(x') dx' = \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}(x) G(x, x') \phi(x') dx' \quad (3)$$

Ce qui donne avec l'équation (1) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L}(x) G(x, x') \phi(x') dx' = \hat{L}(x) f(x) \Leftrightarrow f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx' \quad (4)$$

Alors, nous avons fini par trouver une solution de notre équation différentielle (1) pouvant servir comme solution particulière. La solution générale sera la somme de la solution homogène et de la solution particulière donnée par l'équation (4) :

$$f(x) = f_h(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \phi(x') dx' \quad (5)$$

Pour résumer son intérêt, la fonction de Green est une fonction, une fois connue pour une équation différentielle, pourra facilement servir à trouver une solution particulière.

II.3 Présentation de l'idée d'hybridation

L'expression du FIC pour une fissure elliptique dans un milieu infini, basée sur les fonctions de poids, est donnée par [Oor-1980] :

$$K_{IQ'} = \int_{(S)} W_{QQ'} q(Q) dS \quad (6)$$

$K_{IQ'}$ représente le facteur d'intensité de contrainte en mode I au point Q' du bout de fissure, $q(Q)$ le chargement au point Q et S la surface de l'ellipse (fissure). $W_{QQ'}$ représente classiquement la fonction de poids liée au problème. Elle représente également la solution du problème (le facteur d'intensité de contrainte) pour un chargement unitaire appliqué au point Q . D'après l'équation (5), $W_{QQ'}$ correspond donc à une fonction de Green $G(x, x')$, où les variables x et x' sont remplacées par les positions des points Q' et Q conformément au cadre bidimensionnel. Ainsi, le domaine de variation de Q est la surface (S) au lieu de l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, l'élément différentiel de la surface dS au lieu de dx' et $q(Q)$ au lieu de $\phi(x')$. La fonction $K_{IQ'}$ correspond à $f(x)$ est à la fois la solution particulière selon l'équation (4) et la solution générale selon (5) comme la solution homogène $f_h(x)$ est nulle puisqu'elle correspond

à $\phi(x') = q(Q) = 0$. Ceci est cohérent avec le fait que le FIC K_{IQ} est nul pour un chargement nul.

Dans le présent travail on se propose de définir la fonction $W_{QQ'}$ par hybridation de deux fonctions de poids. On montre alors qu'il est possible d'améliorer l'évaluation du FIC en restant dans des temps de calcul comparables voire inférieurs à ceux observés pour les méthodes standards.

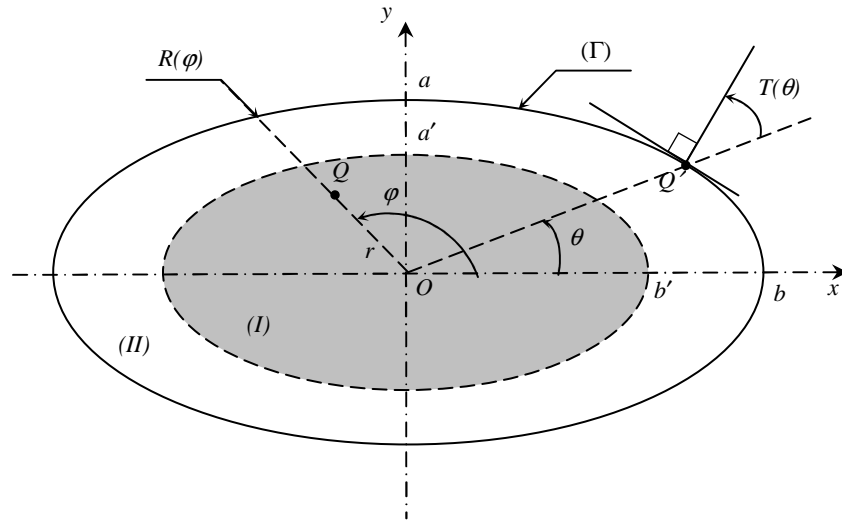


Figure 5 : Paramètres géométriques et subdivision de la fissure elliptique

La méthode d'hybridation développée ici utilise deux types de fonctions de poids. La première fonction a été développée par Oore & Burns [Oor-1980] pour modéliser toute forme fermée de fissure dans un milieu infini :

$$W_{QQ'} = \frac{\sqrt{2}}{\pi l_{QQ'}^2 \sqrt{\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}}} \quad (7)$$

La deuxième est celle développée par Krasowsky *et al.* [Kra-1999] pour les fissures elliptiques dans un milieu infini :

$$W_{QQ'} = \frac{2\Pi^{1/4}(\theta)}{\sqrt{\pi a \left(1 - \frac{r^2(\phi)}{R^2(\phi)}\right) l_{QQ'}^2 \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}}} \quad (8)$$

Dans les relations (7) et (8), on a (voir la figure 5) :

r et ϕ : les coordonnées polaires du point arbitraire Q ,

$R(\varphi)$: la distance entre l'origine O et le bout de fissure en passant par Q ,

$l_{QQ'}$: la distance entre le point Q' et le point arbitraire Q ,

(Γ) : la courbe de l'ellipse (front de fissure),

ρ_Q : la distance entre le point Q et le segment infinitésimal $d\Gamma$,

θ : la position angulaire du point Q' .

$\alpha = a/b$: le rapport entre les axes de l'ellipse et $\Pi(\theta) = \left(\frac{\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta} \right)$.

Partant de l'observation que les fonctions de poids n'ont pas la même efficacité numérique partout à l'intérieur de l'ellipse, l'idée de l'hybridation consiste à considérer que la surface de l'ellipse est séparable en deux zones I et II (voir la figure 5). Sur chacune des deux zones, on utilise la fonction de poids qui est la plus efficace. Les deux zones sont définies par :

$$\begin{cases} \text{zone I} : \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 \leq 1 \\ \text{zone II} : \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 > 1 \end{cases} \quad (9)$$

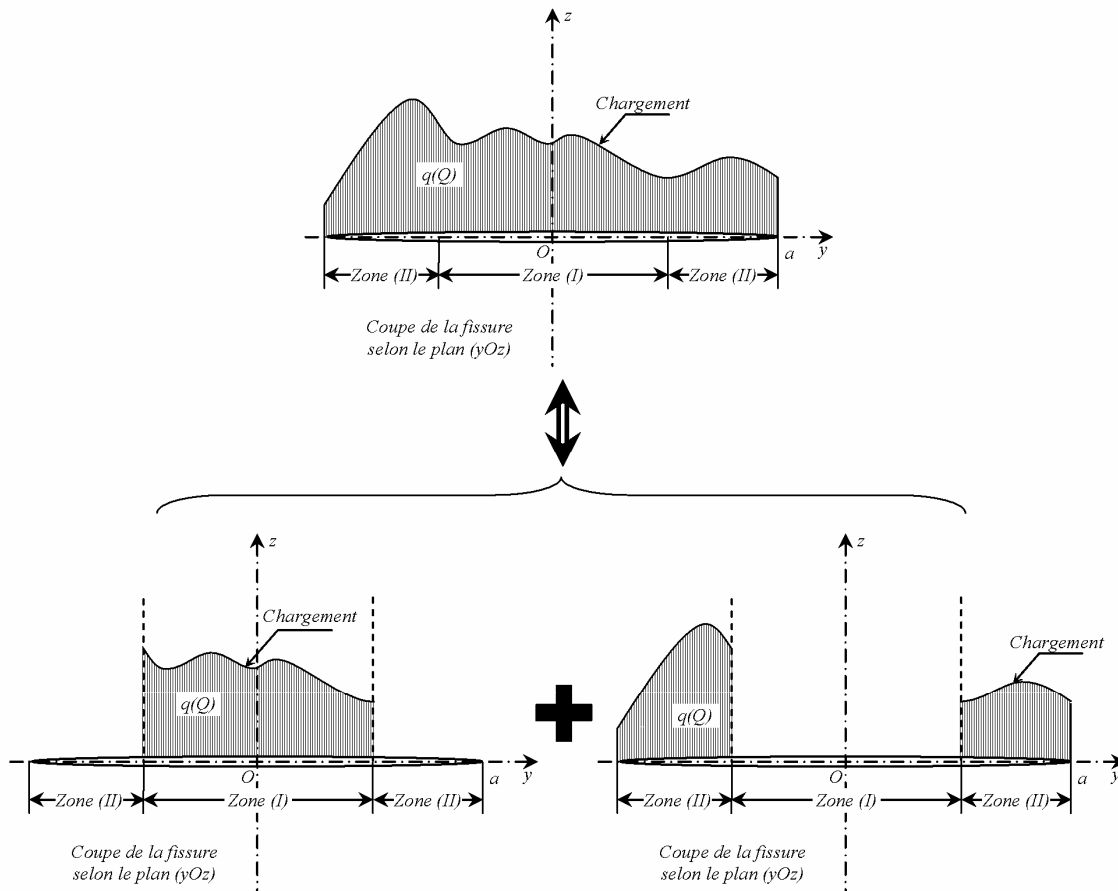


Figure 6 : Décomposition du problème physique

Avec $a'/a = b'/b = \beta$ et $\beta \in [0, 1]$, le paramètre β définissant la proportion entre les zones sera précisé par la suite.

En réalité par notre approche, nous avons remplacé le problème physique classique qui représente une fissure elliptique sous un chargement $q(Q)$ et pour laquelle nous utilisons une seule fonction de poids $W_{QQ'}$, par un autre équivalent réalisé par décomposition du problème original en deux problèmes physiques. Le premier représente une fissure elliptique soumise au chargement appliqué uniquement sur la Zone (I). Le deuxième représente la même fissure elliptique soumise au reste du chargement appliqué sur la Zone (II), comme le montre la figure 6.

Il est à noter que pour qu'une fonction de poids $W_{QQ'}$ soit analytiquement acceptable [Kra-1999], il faut qu'elle vérifie les deux conditions :

$$\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} W_{QQ'} = W_{QQ'}(d' \text{ une fissure rectiligne}) \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1} W_{QQ'} = W_{QQ'}(d' \text{ une fissure circulaire}) \end{cases} \quad (10)$$

avec :

$$W_{QQ'}(d' \text{ une fissure rectiligne}) = \sqrt{2d} / (\pi \sqrt{\pi} l_{QQ'}^2) \quad (11)$$

$$W_{QQ'}(d' \text{ une fissure circulaire}) = \sqrt{R^2 - r^2} / (\pi \sqrt{\pi R} l_{QQ'}^2) \quad (12)$$

d étant la plus courte distance entre le point Q et le front de la fissure rectiligne et R représente dans ce cas le rayon de la fissure circulaire.

On vérifie donc que l'hybridation est analytiquement acceptable car les deux fonctions de poids (7) et (8) vérifient simultanément les conditions (10).

La fonction de poids de l'expression (8) est destinée exclusivement aux fissures de forme elliptique. Néanmoins, lors de l'évaluation numérique de l'intégrale de surface donnée par l'équation (6), l'expression (8) présente une singularité supplémentaire $(1-r/R)^{-1/2}$ par rapport à l'expression (7). Sachant que cette intégrale et l'intégrale curviligne présente dans les fonctions (7) et (8) seront évaluées indépendamment (voir la section II.4). Ceci rend l'expression (8) moins efficace au voisinage du bout de fissure (lorsque $r \rightarrow R$). Cet argument nous a conduit à choisir la fonction de poids (8) pour la zone elliptique I et la fonction de poids (7) pour la zone II, autrement dit :

$$W_{QQ'} = \begin{cases} W_{QQ'} \text{ de l'eqn (8) si } Q \in \text{zone I} \\ W_{QQ'} \text{ de l'eqn (7) si } Q \in \text{zone II} \end{cases} \quad (13)$$

Il reste à déterminer la proportion adéquate β entre les deux zones I et II.

Il faut signaler que la fonction (7) d'Oore & Burns a une forme très similaire aux fonctions (11) et (12) pour une fissure rectiligne et une fissure circulaire, respectivement. D'ailleurs lors de son développement Oore & Burns se sont particulièrement appuyés sur les fonctions (11) et (12) pour déduire les constantes présumées de son expression finale (voir les pages 203 et 204 de la référence [Oor-1980]). Ce qui n'est pas le cas pour la fonction (8) de Krasowsky et al. [Kra-1999] qui est déduite à partir de la variation élémentaire du bilan énergétique du Rice lors d'une propagation élémentaire de la fissure. Ce qui donne l'avantage à la fonction (7) par rapport à la fonction (8) lorsqu'il s'agit des deux cas suivants :

- Bout de fissure d'une forme proche d'un cercle ($\alpha \rightarrow 1$) ; ceci est confirmé numériquement comme le montre le graphe de la figure 7 où les paramètres f_1 et f_2 sont

définis par : $f_1 = \frac{\int_S (W_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'})_{eqn(7)} dS}{\int_S (W_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'})_{eqn(12)} dS}$ et $f_2 = \frac{\int_S (W_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'})_{eqn(8)} dS}{\int_S (W_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}'})_{eqn(12)} dS}$. Ce graphe montre clairement que

la fonction (7) converge plus rapidement vers celle d'une fissure circulaire, par rapport à la fonction (8).

- Bout de fissure proche d'une droite (faibles valeurs de α avec des valeurs de θ loin de zéro).

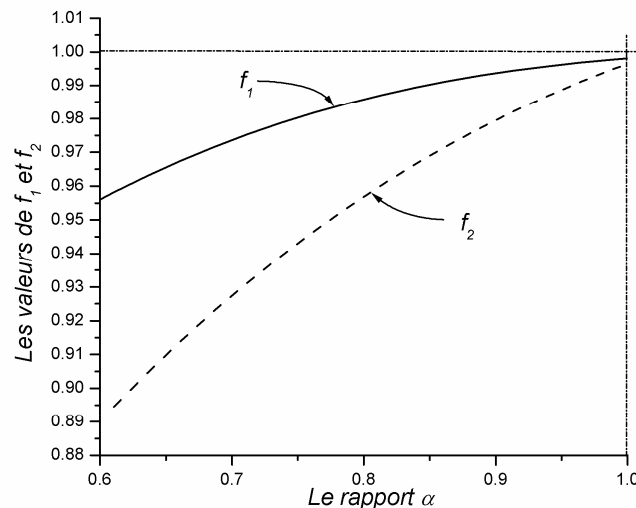


Figure 7 : Comparaison des fonctions de poids (30) et (31) avec celle d'une fissure circulaire pour $\alpha \in [0.6, 1]$

En fait ces deux cas correspondent à des situations où la variation du rayon de courbure R_c de la fissure est très faible tout en s'éloignant des faibles valeurs relative de R_c (faibles valeurs de

α et $\theta \rightarrow 0$). Dans le cas contraire c'est la fonction de poids (8) de Krasowsky et al. qui est favorisée puisqu'elle est nettement plus adaptée aux cas à grande variation de R_c . Ceci est confirmé par la présence via la fonction $\Pi(\theta)$ de rayon de courbure $R_c = \frac{a}{\alpha} \Pi^{3/2}(\theta)$ dans l'expression de la fonction (8).

Par conséquent, plus le rayon de courbure est relativement faible ou sa dérivée (gradient du rayon de courbure) est élevée, plus la zone I devrait s'agrandir vis à vis de la zone II et vice versa.

Compte tenu de toutes ces considérations, nous avons proposée une forme relative et simple de la représentation de l'influence du rayon de courbure par rapport au grand axe de l'ellipse. Elle est donnée par l'expression suivante:

$$\beta_1 = \frac{(b - \min(R_c, a))}{b} \quad (14)$$

notre proposition concernant la représentation de l'influence du gradient du rayon de courbure pour un α donné est donnée par l'expression relative suivante :

$$\beta_2 = \frac{\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right) - \left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\min}}{\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\max} - \left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\min}} \quad (15)$$

avec $\frac{\partial R_c}{\partial \theta}$ la dérivée partielle par rapport à la position angulaire du point Q' , ses valeurs maximale et minimale sont calculées en balayant tout le contour de l'ellipse pour un α donné. Ce calcul de dérivée est évalué numériquement.

Le paramètre de proportion β pourra, alors être logiquement exprimé par :

$$\beta = \max(\beta_1, \beta_2) \quad (16)$$

II.4 Mise en œuvre numérique de la méthode d'hybridation

Le calcul du FIC nécessite l'évaluation de deux types d'intégrale ; de surface dans l'expression (6) et curviligne à l'intérieur des fonctions de poids (7) et (8). Les différentes singularités présentes dans ces intégrales nécessitent un traitement qu'on détaille ci-après.

II.4.1 L'intégrale de surface

Pour l'intégrale de surface de l'équation (6), la technique de traitement de la singularité $1/l_{QQ'}^2$ est celle employée efficacement par Krasowsky *et al.* [Kra-1999]. Elle consiste à entourer le

point Q' par un petit demi-cercle de rayon R_0 sur lequel l'intégrale (6) est analytiquement évaluée en utilisant la fonction de poids (11) d'une fissure rectiligne.

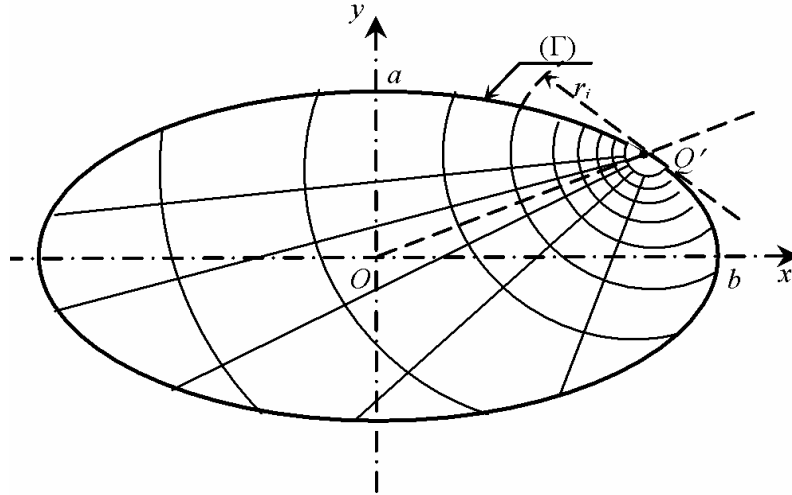


Figure 8 : Discretisation de la fissure

On trouve ainsi :

$$K_I^{S'} = \frac{8}{\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{R_0}\left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]q(Q') \approx 1.21703\sqrt{R_0}q(Q') \quad (17)$$

Le FIC est donné dans ce cas par $K_I^S = K_I^{S'} + K_I^{S''}$ avec S la surface de l'ellipse, S' la surface intérieure au demi-cercle et S'' la surface restante, K et E sont les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, respectivement.

Pour réduire l'erreur due à la linéarisation de la courbure au point (Q'), on prendra dans (17) :

$$\frac{\min(R_c(Q'), a)}{30} \leq R_0 \leq \frac{\min(R_c(Q'), a)}{20} \quad (18)$$

qui est un intervalle de validité vérifié après plusieurs tests de calcul. Cet intervalle est moins restrictif que celui proposé par Krasowsky *et al.*[Kra-1999] en prenant la seule valeur : $R_0 = \min(R_c(Q'), a)/30$.

En vue du calcul numérique de l'intégrale de surface, le domaine (S'') est discrétisé en traçant des demi-cercles concentriques de centre (Q') et de rayons $R_0 < r_0 < r_1 < r_2 < r_3 \dots$ et des demi-droites partant de (Q') (environ 60 dans la plupart des discrétisations effectuées dans cette étude) comme le montre la figure 8.

Deux types d'éléments sont générés à l'issue de ce maillage :

- Des quadriangles à 4 nœuds provenant de l'intersection de demi-cercles avec les demi-droites et parfois de l'intersection des demi-droites avec la Frontière de (S'') (voir la figure 9a). Dans ce cas, nous utilisons des fonctions de formes associées à l'élément de référence de la figure 9b, de forme linéaire estimée suffisante pour une intégration numérique. Elles sont données par :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 0.25(1 - \xi - \eta + \xi\eta) \\ N_2 &= 0.25(1 + \xi - \eta - \xi\eta) \\ N_3 &= 0.25(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \\ N_4 &= 0.25(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

- Des éléments triangulaires à 3 nœuds, localisés uniquement au voisinage de la Frontière de (S''), car ils proviennent de l'intersection entre cette dernière avec les demi-cercles et les demi-droites (voir la figure 9a). Dans ce cas, nous utilisons également pour l'élément de référence de la figure 9c, des fonctions de formes linéaires :

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - \xi - \eta \\ N_2 &= \xi \\ N_3 &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

L'algorithme utilisé lors de l'intégration numérique sur la surface (S'') est celui de Gauss à 9 points pour les éléments quadrilatéraux et à 7 points pour les éléments triangulaires.

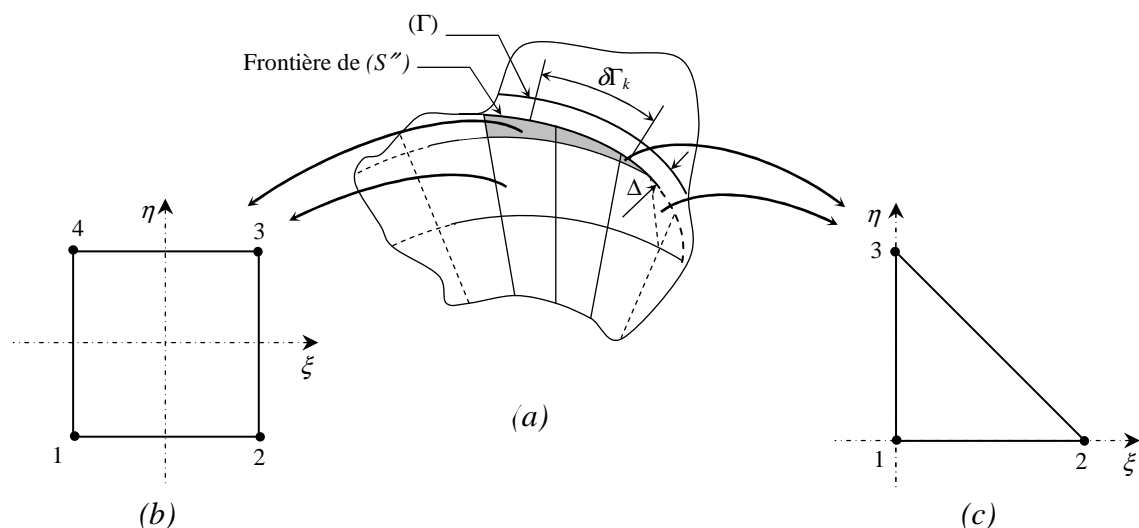


Figure 9 : (a) Passage des éléments réels aux éléments de référence
 (b) Élément de référence carré à 4 nœuds – (c) Élément de référence triangulaire à 3 nœuds

II.4.2 L'intégrale de contour

Il s'agit de l'intégrale $\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}$ présente dans le dénominateur de chacune des fonctions de poids (7) et (8). Tant que le point Q est loin du front de fissure (Γ), l'intégrale en question se transforme en une somme :

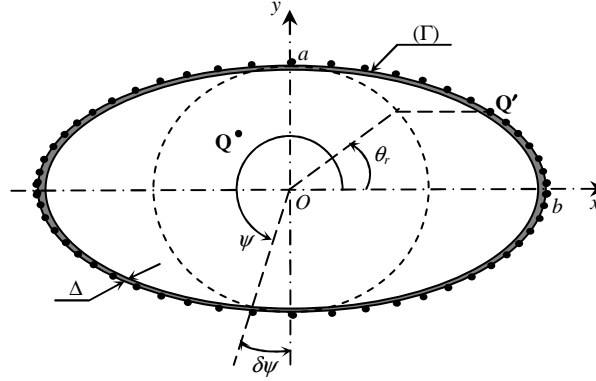


Figure 10 : Discretisation du front de la fissure

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} = \sum_{i=1}^{4N} \frac{(\delta\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} \quad (21)$$

Dans la relation (21), N désigne le quart du nombre de point subdivisant le contour (Γ) et $\delta\Gamma$ son segment élémentaire.

Lorsque Q est très proche du bout de fissure, l'intégrale $\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}$ devient singulière ($\rho_Q \rightarrow 0$) et son évaluation numérique devient délicate. Pour traiter cette singularité nous ignorons, comme Krasowsky *et al.* [Kra-1999], une bande très fine à proximité du contour (voir la figure 10) d'épaisseur constante :

$$\Delta = \gamma a \quad \text{où } \gamma = 1/300 \quad (22)$$

Cette équation nous distingue de Krasowsky *et al.* [Kra-1999], pour lesquels cette épaisseur est variable :

$$\Delta(\psi) = \frac{1}{300} \cos(T(\psi)) \min(R_i(\psi), a) \quad (23)$$

ψ étant la position angulaire de $d\Gamma$ (voir la figure 10).

L'angle T en un point du bout de la fissure est mesuré entre la tangente en ce point et la droite passant par ce point et l'origine O (voir la figure 5).

L'utilisation d'une telle équation rend le maillage automatique que nous utilisons, relativement complexe voire impossible d'où le choix d'un Δ constant donné par l'équation (22). En ce qui concerne Krasowsky *et al.* [Kra-1999], ces derniers ont adopté l'équation (23) sans soucier du maillage automatique.

L'erreur sur l'intégrale (6) provoquée par l'exclusion de la bande d'épaisseur Δ est estimée par [Kra-1999], à environ $\left(\frac{\int_0^{\gamma} \sqrt{x} dx}{\int_0^1 \sqrt{x} dx} \right) \approx \left(\frac{1}{300} \right)^{3/2}$ contre $\left(\frac{2}{300} \right)^{3/2}$ pour notre choix de

Δ constant. Ces deux valeurs étant identiquement très faibles.

Le domaine effectif de la fissure devient :

$$\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \leq \left(1 - \frac{\Delta}{R(\theta)} \right)^2 \quad (24)$$

Il nous paraît nécessaire que l'épaisseur Δ reste inférieure à la taille caractéristique d'une maille du domaine discrétisé, représentée par la distance entre deux arcs de demi-cercles consécutifs (voir la figure 9a). Cette condition a pour but de ne pas tomber sur le cas pathologique des éléments excessivement petits, auquel le temps de calcul sera prohibitif sans un gain significatif en précision. Donc à la limite Δ doit satisfaire la condition suivante [Kra-1999] :

$$\Delta = (r_{i+1} - r_i)_{\min} = r_0 - R_0 \quad (25)$$

Ce qui nous donne, avec les équations (18) et (22), la proportion de progression du rayon r_i suivante :

$$\nu = \frac{r_{i+1} - r_i}{r_i} = \frac{r_0 - R_0}{R_0} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{10} \right] \quad (26)$$

Le calcul numérique de l'intégrale du contour nécessite évidemment la discrétisation de ce dernier avec un nombre fini de points, délimitant des segments de droite de longueur $\delta\Gamma$ (voir la figure 10). L'erreur ε de linéarisation du segment $\delta\Gamma$ est donnée en utilisant le développement limité de $\sin(\delta\psi/2)$ au voisinage de zéro, à savoir

$$\sin(\delta\psi/2) = (\delta\psi/2) - \frac{(\delta\psi/2)^3}{3!} + \dots \text{ ce qui entraîne :}$$

$$\varepsilon = \frac{\widehat{\delta\Gamma} - \delta\Gamma}{\widehat{\delta\Gamma}} \approx \frac{(\delta\psi)^2}{24} \quad (27)$$

Avec $\delta\psi$ l'ouverture angulaire du segment $\delta\Gamma$.

Pour uniformiser l'erreur ε sur toute la courbe (Γ), nous prenons la valeur moyenne (comme s'il s'agit d'un cercle) :

$$\varepsilon = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{2N} \right)^2 = \frac{1}{24} (\delta\psi_r)^2 \quad (28)$$

Le paramètre ψ_r représente l'angle réduit de ψ tel que :

$$\psi = \arctan[\alpha \tan(\psi_r)] \quad (29)$$

comme l'angle réduit du $i^{\text{ème}}$ point est :

$$\psi_r(i) = i(\delta\psi_r) = i \frac{\pi}{2N} \quad (30)$$

En substituant (30) dans (29), l'angle du $i^{\text{ème}}$ point est :

$$\psi(i) = \arctan \left[\alpha \tan \left(i \frac{\pi}{2N} \right) \right] \quad (31)$$

Donc, les N points ne pourront pas être équidistants, s'ils n'ont pas le même rayon de courbure. Krasowsky *et al.* [Kra-1999] ont trouvé une équation très similaire à (31) sauf qu'au lieu de α , ils ont mis α^2 sans expliquer la démarche adoptée pour obtenir leur résultat.

Pour que l'erreur ε demeure toujours faible, Krasowsky *et al.* [Kra-1999] ont imposé selon la figure 11, la condition suivante :

$$l_1(\psi)/\Delta \leq \mu \quad (32)$$

avec $\mu = l_1/l_0 \in [0.1; 0.2]$, les distances l_0 et l_1 sont mentionnées sur la figure 11.

Comme l'erreur est supposée constante et égale à celle d'un cercle, l_1 peut être évalué en utilisant les deux premiers termes de développement limité de $\cos(\delta\psi/2)$ au voisinage de zéro :

$$l_1 = a - a \cos(\delta\psi/2) \approx a \frac{(\delta\psi/2)^2}{2} \quad (33)$$

Cette équation projetée dans la condition (32) peut nous offrir avec l'équation (22), une borne inférieure du nombre de points N :

$$N \geq \pi / (2\sqrt{8\mu\gamma}) \quad (34)$$

Si le point Q est situé à proximité de la bande fine ignorée, donc suffisamment proche du $k^{\text{ème}}$ segment du front de fissure discrétisé (figure 11), l'intégrale est évaluée analytiquement sur ce segment afin d'éviter tout risque de singularité pouvant perturber le bon déroulement du calcul:

$$\int_{(\delta\Gamma)_k} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} \approx \int_{c_1}^{c_2} \frac{dc}{c^2 + d^2} = \left| \frac{1}{d} \left(\arctan \frac{c_2}{d} - \arctan \frac{c_1}{d} \right) \right| \quad (35)$$

L'équation (21) devient alors :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\delta\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} + \int_{(\delta\Gamma)_k} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} + \sum_{i=k+1}^{4N} \frac{(\delta\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} \quad (36)$$

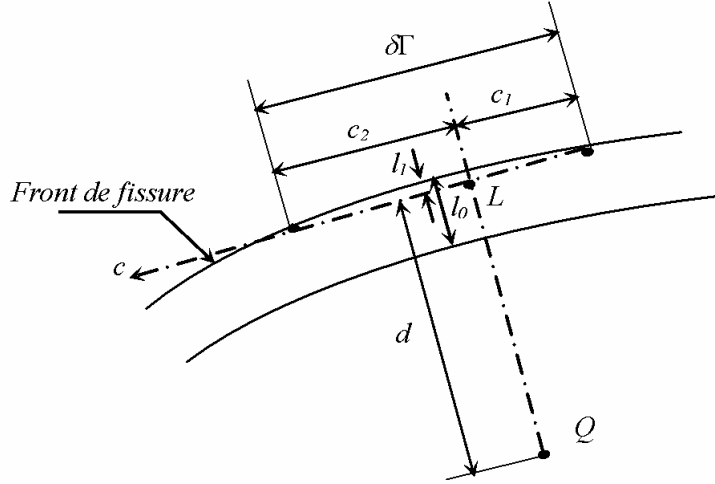


Figure 11 : Agrandissement au voisinage du front de fissure

L'utilisation de (36) au lieu de (21) est justifiée par l'amélioration des résultats obtenus et permet d'éviter une discrétisation excessivement raffinée de la courbe (Γ), obligatoire lorsque Q se rapproche de celle-ci.

Si on prend, par exemple, le point L (voir la figure 11) au milieu du $\delta\Gamma$ ($c_1 = -c_2$). Pour le cas $\delta\Gamma \approx a(\delta\psi_r) = a(\pi/2N) = a\sqrt{8\mu\gamma}$ et $d \approx \Delta = a\gamma$, les intégrales calculées pour le $k^{\text{ème}}$ terme via l'équation (21) et l'équation (35) sont respectivement :

$$I_1 = \frac{d\Gamma}{d^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{8\mu}{\gamma^3}} \approx 5600a^{-1} \text{ et } I_2 = \left| \frac{2}{a\gamma} \arctan \left(\sqrt{\frac{2\mu}{\gamma}} \right) \right| \approx 880a^{-1} \quad (37)$$

L'erreur commise sur le $k^{\text{ème}}$ terme est alors très importante (Erreur relative supérieur à 600%).

Dans notre code de calcul, nous avons préféré utiliser l'équation (36) pour chaque élément de surface (S^r) dont au moins un des nœuds est situé sur le segment $\delta\Gamma_k$ (les éléments en gris dans la figure 9b).

II.5 Couplage de la méthode d'hybridation avec la méthode de fonction de poids du point (PWFm)

L'étude des fissures semi-elliptiques présente un grand intérêt pratique dès qu'on s'intéresse à des milieux présentant des surfaces libres. C'est le cas de beaucoup de structures industrielles (barres, plaques, tubes, ...) ou des milieux semi-infinis (roches, massifs de béton, structures métalliques de grandes dimensions, ...). L'importance de telle étude découle de la dangerosité et de risques de rupture causés par ce genre de fissures. Il faut signaler que pour ce cas, l'effet de la surface libre multiplie de façon importante le risque de fissuration par rapport à une fissure interne, comme on va s'en apercevoir en avançant dans le développement de ce chapitre. Cependant les fissures semi-elliptiques débouchantes représentent l'avantage d'être plus exploitables de point de vue expérimental par rapport aux fissures internes, notamment lorsqu'il s'agit de propagation de fissure par fatigue. Ceci est dû essentiellement à la facilité relative pour accéder aux mesures de déformations/déplacements à l'intérieur de la fissure, surtout lorsque les dimensions de cette dernière augmentent sous l'action de la sollicitation.

Le prolongement de notre méthode d'hybridation vers le traitement des fissures semi-elliptiques se voit justifier par toutes ces considérations. Afin de réaliser cet objectif, nous avons adopté une démarche basée sur le couplage de l'hybridation avec une autre technique appelée PWFm (Point Weight Function Method) développée par Orynyak [Ory-1994]. La PWFm consiste à chercher l'expression de la fonction de poids $W_{QQ'}$ du cas semi-elliptique en se basant sur la solution du cas elliptique. La fonction de poids $W_{QQ'}$ est alors décomposée en deux parties asymptotique et correctrice [Ory-1995] :

$$W_{QQ'} = W_{QQ'}^A + W_{QQ'}^C \quad (38)$$

où $W_{QQ'}^A$ est la composante asymptotique et $W_{QQ'}^C$, la composante correctrice.

La composante asymptotique $W_{QQ'}^A$ représente l'approximation principale de la fonction de poids $W_{QQ'}$ qui se confond avec celle-ci lorsqu'elle atteint sa valeur maximale (ceci sera développé ultérieurement). Elle est donc supposée être la composante la plus importante du point de vue quantitatif.

Afin de déterminer l'expression de $W_{QQ'}^A$, on se place d'abord dans la zone sans influence de la surface libre mentionnée sur la figure 12. Dans ce cas Q ou Q' sont des points internes et la fissure semi-elliptique est sensée se comporter comme une fissure elliptique de même géométrie mais chargée uniquement sur sa moitié. Nous considérons $W_{QQ'}^A$ comme la fonction

de poids d'une fissure elliptique qu'on note $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$ et prend la forme suivante par hybridation:

$$W_{QQ'}^A = W_{QQ'}^{(Ellipse)} = \begin{cases} W_{QQ'} & \text{de l'eqn (8) si } Q \in \text{zone I} \\ W_{QQ'} & \text{de l'eqn (7) si } Q \in \text{zone II} \end{cases} \quad (39)$$

conformément à l'équation (13).

Dans le cas où l'effet de la surface libre est très fort (voire maximum), introduisant une plus grande ouverture de la fissure, on aura par conséquent une fonction de poids $W_{QQ'}^A$ aux valeurs plus élevées, lorsque Q et Q' sont simultanément très proches de la surface libre. Dans ce cas, la fissure est supposée se comporter comme une fissure elliptique mais chargée sur sa totalité par un chargement symétrique par rapport au plan de la surface libre. La partie du chargement rajoutée par symétrie est fictive et a pour intérêt la prise en compte de l'effet de la surface libre dans le calcul du FIC.

Chaque point Q chargé par $q(Q)$ est associé à son symétrique Q_x par rapport à l'axe (Ox). Le point Q_x se trouvant à une distance $l_{Q_x Q'}$ du point Q' (voir la figure 12) est soumis au même chargement. On peut établir d'après les équations (7) et (8) donnant l'expression de $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$, la relation suivante entre les fonctions de poids $W_{Q_x Q'}^{(Ellipse)}$ et $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$:

$$W_{Q_x Q'}^{(Ellipse)} = W_{QQ'}^{(Ellipse)} \left(\frac{l_{QQ'}^2}{l_{Q_x Q'}^2} \right) \quad (40)$$

ce qui permet de rassembler ces deux fonctions de poids en une seule, à savoir :

$$W_{QQ'}^A = W_{QQ'}^{(Ellipse)} + W_{Q_x Q'}^{(Ellipse)} = W_{QQ'}^{(Ellipse)} \left[1 + \frac{l_{QQ'}^2}{l_{Q_x Q'}^2} \right] \quad (41)$$

On retrouve dans (41) le résultat énoncé par Isida et al.[Isi-1984] et Orynyak et al.[Ory-1995] sans une démarche suffisamment explicite.

L'autre souci qui n'est également pas exposé par Orynyak et al. [Ory-1994, Ory-1995] porte sur l'absence de la solution lorsqu'on est entre ces deux cas limites. Autrement dit, quels sont les intervalles de validité de chacune des équations (39) et (41) en fonction des positions de Q et Q' ? Le présent développement est une contribution pour tenter de répondre à cette question.

Pour respecter les conditions liées à chacune des équations (39) et (41) tout en offrant une solution pour les situations intermédiaires, nous proposons une forme compacte de $W_{QQ'}^A$ valide pour toutes les positions des points Q et Q' :

$$W_{QQ'}^A = W_{QQ'}^{(Ellipse)} \left[1 + \left(\frac{l_{QQ'}^2}{l_{Q_x Q'}^2} \right) \left(1 - \frac{y_{Q'}}{a} \right) \left(1 - \frac{y_Q}{a} \right) \right] \quad (42)$$

où y_Q et $y_{Q'}$ sont la projection sur l'axe (O_y) des points Q et Q' .

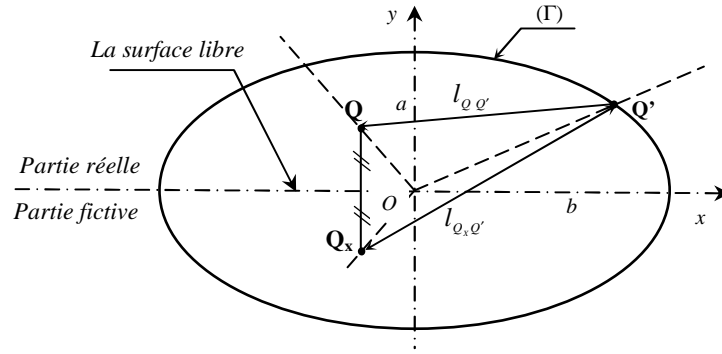


Figure 12 : Mise en évidence de la partie réelle et la partie fictive de la fissure

Pour le choix de la composante correctrice, on doit, en premier lieu, exploiter la définition de $W_{QQ'}^A$ pour en tirer la première condition concernant $W_{QQ'}^C$. On a déjà évoqué que $W_{QQ'}$ et $W_{QQ'}^A$ se confondent lorsque $W_{QQ'}^A$ prend sa valeur maximale. Ce qui correspond au maximum de $W_{QQ'}^{(Ellipse)}$ et correspond à son tour au minimum de la distance $l_{QQ'}$ d'après l'équation (41). Donc pour $W_{QQ'}^C$, la première condition à respecter est $W_{QQ'} \rightarrow W_{QQ'}^A$ ce qui équivaut à $\frac{W_{QQ'}^C}{W_{QQ'}^A} \rightarrow 0$ lorsque $Q \rightarrow Q'$.

Par ailleurs, pour obtenir l'expression de $W_{QQ'}^A$, on a assimilé une fissure semi-elliptique à une fissure de forme elliptique, ce qui est un peu loin de la réalité si on observe le problème tel qu'il est décrit sur la figure 13. Ceci nous a amené à envisager un terme correctif $W_{QQ'}^C$ à ajouter à $W_{QQ'}^A$ dans l'équation (38). Cependant, il faut noter que ce terme n'est nécessaire que lorsque Q s'éloigne du front de la fissure (Γ), c'est-à-dire dans la zone où l'ouverture d'une fissure semi-elliptique ne coïncide plus avec celle d'une fissure elliptique (voir la figure 13).

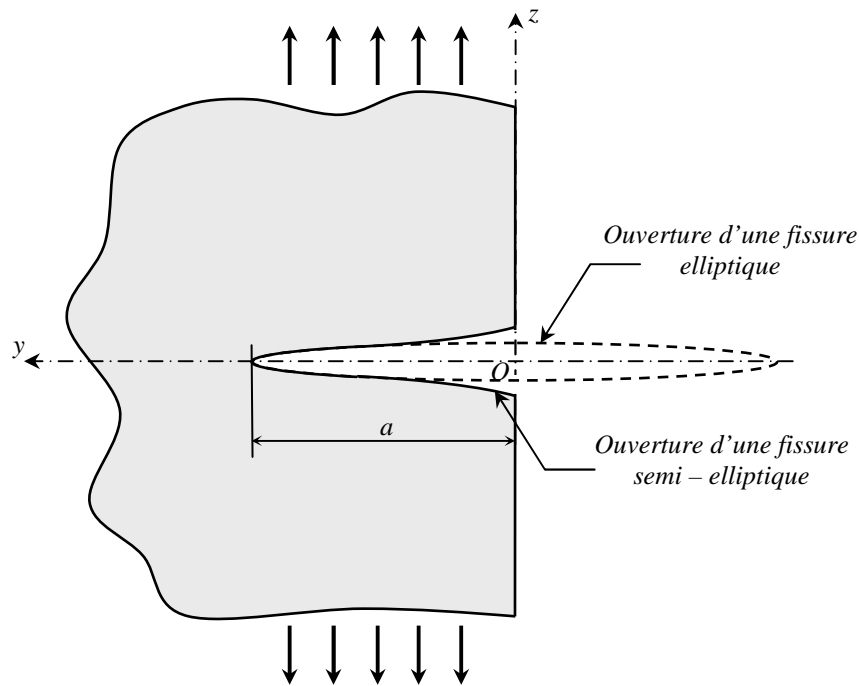


Figure 13 : Coupe d'une fissure semi - elliptique débouchante suivant le plan (Oyz)

Ceci nous fournit la deuxième condition concernant $W_{QQ'}^C$ qui se résume à $\frac{W_{QQ'}^C}{W_{QQ'}^A} \rightarrow 0$ lorsque Q est au voisinage de (Γ) .

Pour récapituler, nous avons deux conditions à respecter concernant le rapport $W_{QQ'}^C/W_{QQ'}^A$. Il doit être négligeable ($W_{QQ'}^C/W_{QQ'}^A \rightarrow 0$) lorsque :

- i) Le point de chargement Q est très proche du point de calcul Q' .
- ii) Le point de chargement Q est au voisinage du contour (Γ) .

On trouve ces mêmes conditions chez Orynyak et al.[Ory-1995] qui les ont énoncé sans justification. Ils ont choisi :

$$W_{QQ'}^C = W_{QQ'}^A \left(1 - \frac{r}{R}\right) D(\theta, \alpha) \quad (43)$$

pour satisfaire la première condition.

Et :

$$W_{QQ'}^C = W_{QQ'}^A \left(\frac{l_{QQ'}^2}{a^2}\right) D(\theta, \alpha) \quad (44)$$

pour la deuxième condition.

$D(\theta, \alpha)$ est la seule fonction inconnue à déterminer. Elle est liée à la géométrie de la fissure et la position angulaire du point de calcul Q' . Orynyak et al. [Ory-1994] n'ont pas précisé également les intervalles d'utilisation de chacune des équations (43) et (44).

De la même manière que pour $W_{QQ'}^A$, nous proposons une forme compacte de la composante $W_{QQ'}^C$. Elle convient également à n'importe quelle position de Q , tout en essayant de vérifier les deux conditions citées ci-dessus :

$$W_{QQ'}^C = W_{QQ'}^A \left(1 - \frac{r}{R}\right) \frac{\min(l_{QQ'}^2, a^2)}{a^2} D(\theta, \alpha) = \bar{W}_{QQ'}^C D(\theta, \alpha) \quad (45)$$

Par rapport à l'expression donnée par Orynyak et al. [Ory-1995], nous avons remplacé $l_{QQ'}^2$ par $\min(l_{QQ'}^2, a^2)$ pour forcer le rapport $l_{QQ'}^2/a^2$ à être inférieur à 1, ceci n'a pas été également suivi de la moindre indication dans la référence [Ory-1995].

Le facteur géométrique $D(\theta, \alpha)$ est déterminé lors du développement de la méthode de calcul dans la section suivante.

Nous considérons que la distribution du chargement à l'intérieur de la fissure est arbitraire, $q(Q) = \sigma(x, y)$, et nous adoptons le FIC adimensionnel $G(\theta, \alpha)$ suivant :

$$G(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} K_I(\theta, \alpha) \quad (46)$$

$E(k)$ est l'intégrale elliptique de seconde espèce et $k = \sqrt{1 - \alpha^2}$.

En utilisant l'équation (6) donnant l'expression intégrale de K_I avec l'équation (38), on obtient :

$$G(\theta, \alpha) = I^A(\theta, \alpha) + I^C(\theta, \alpha) D(\theta, \alpha) \quad (47)$$

Avec l'équation (45), les intégrales adimensionnelles I^A, I^C peuvent être données par :

$$I^A(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \int_{(S)} \sigma(x, y) W_{QQ'}^A dS \quad \text{et} \quad I^C(\theta, \alpha) = \frac{E(k)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \int_{(S)} \sigma(x, y) \bar{W}_{QQ'}^C dS \quad (48)$$

Si pour un chargement particulier σ_0 , la solution $G_0(\theta, \alpha)$ est connue (solution de référence), le calcul des intégrales $I_0^A(\theta, \alpha)$ et $I_0^C(\theta, \alpha)$ liées à ce cas de référence permet de déterminer le paramètre $D(\theta, \alpha)$ en appliquant l'équation (47) :

$$D(\theta, \alpha) = \frac{G_0(\theta, \alpha) - I_0^A(\theta, \alpha)}{I_0^C(\theta, \alpha)} \quad (49)$$

L'introduction de cette équation dans (47) permet de trouver la solution générale donnant le FIC adimensionnel pour toute autre forme de chargement $\sigma(x,y)$:

$$G(\theta, \alpha) = I^A(\theta, \alpha) + I^C(\theta, \alpha) \left(\frac{G_0(\theta, \alpha) - I_0^A(\theta, \alpha)}{I_0^C(\theta, \alpha)} \right) \quad (50)$$

En appliquant la technique basée sur le couplage exposée ci-dessus, nous envisageons dans le cinquième chapitre traiter les fissures semi-elliptiques pour des problèmes types.

II.6 Conclusion

Après avoir donné un petit aperçu sur les différentes techniques numériques employées historiquement en mécanique de la rupture, nous avons présenté le long de ce chapitre les différents développements concernant l'hybridation des fonctions de poids. Liée à son contexte par rapport à la fonction de Green, nous avons commencé par l'exposition de l'idée d'hybridation en adoptant l'amélioration des résultats dans le calcul du FIC, comme l'objectif principal de cette étude. Ceci a passé par une optimisation de l'hybridation par rapport à des paramètres liés à la fissure étudiée. Ensuite, pour le passage à la procédure numérique de la formulation de l'hybridation, une étude sur le traitement des différentes singularités des intégrales est présentée. Le couplage de la technique d'hybridation avec la PWFm présenté à la fin de ce chapitre a prolongé le domaine d'application de l'hybridation vers les fissures débouchantes, ce qui a donné davantage d'intérêt à cette étude.

Chapitre III :
Présentation du code de
calcul HWFun

III.1 Introduction

Notre objectif dans ce travail de thèse est d'évaluer le facteur d'intensité de contrainte sur le contour des fissures elliptiques internes et semi-elliptiques débouchantes par la technique d'hybridation de fonctions de poids. Les développements réalisés dans ce cadre ont été présentés d'une manière détaillée dans le chapitre précédent. Ils ont été concrétisés par l'élaboration d'un code de calcul nommé *HWFun* qu'on propose de décrire dans le présent chapitre.

Le code *HWFun* est réalisé en utilisant le langage C++ orienté objet, reconnu par sa puissance aussi bien dans le calcul arithmétique que dans la présentation graphique. Il comporte deux parties ; une partie principale regroupant les différents modules de programmation liés au calcul physique concernant le problème étudié, et une partie secondaire formée par les différentes fonctionnalités nécessaires pour améliorer l'utilisation et l'accessibilité du code de calcul. Dans ce qui suit, on choisit de présenter la partie principale en laissant la présentation de la partie secondaire pour la section 3 consacrée à l'interface graphique du code.

III.2 Les différents modules du code de calcul

Le code de calcul *HWFun* est formé principalement de quatre modules différents (voir la figure 14). Ils concernent dans l'ordre :

- i) le maillage automatique de la fissure.
- ii) la présentation graphique en 3D du maillage réalisé dans le premier module.
- iii) l'évaluation du FIC sur le contour des fissures elliptiques internes après avoir récupéré les données du maillage issues du premier module.
- iv) le calcul du FIC pour les fissures semi-elliptiques débouchantes.

Nous allons procéder dans ce qui suit à la description de la structure de chacun de ces modules.

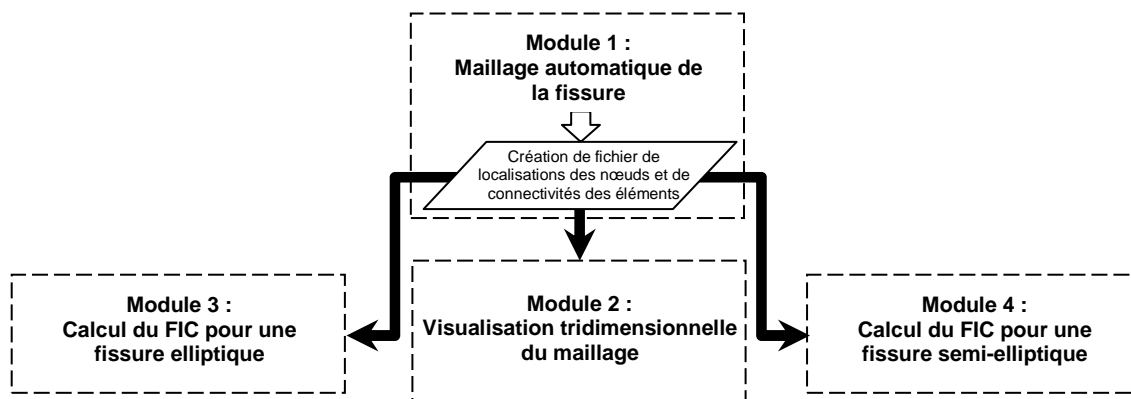


Figure 14 : Organigramme général du code de calcul *HWFun*

III.2.1 Module du mailleur automatique

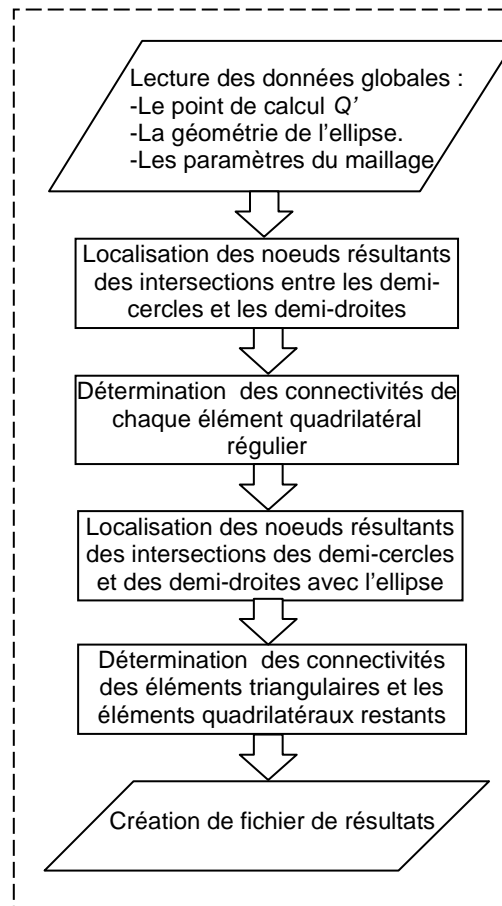


Figure 15 : Structure du Module 1 concernant le mailleur automatique

Dans ce module la progression des étapes de calcul suit la chronologie décrite dans l'organigramme de la figure 15, comprenant les étapes suivantes :

a) Lecture des données globales

Les données globales nécessaires à nos calculs sont la configuration géométrique de l'ellipse (le petit axe a et le grand axe b), la position angulaire du point de calcul (Q') ainsi que les paramètres liés au maillage. Il s'agit pour ces derniers du rayon R_0 du petit demi-cercle, du nombre des subdivisions angulaire n des demi-droites autour du point (Q'), du paramètre γ lié à la bande ignorée, de la proportion ν de la progression des rayons des demi-cercles et du paramètre μ (paramètres décrits dans la section II.4).

b) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires réguliers

Les éléments réguliers sont ceux résultant de l'intersection des demi-cercles et demi-droites (voir la figure 16). Les coordonnées des ces intersections sont évaluées analytiquement pour

chaque point (Q') en résolvant par substitution un système de deux équations (équation d'une droite et équation d'un cercle) à deux inconnues (x et y) donné par :

$$\begin{cases} y = Ax + B \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \end{cases} \quad (51)$$

Où $A = \tan(\phi_j)$ représente la pente des demi-droites, $B = y_{Q'} - Ax_{Q'}$, $x_0 = x_{Q'}$, $y_0 = y_{Q'}$ et $r = r_i$ (voir la figure 16)

Les nœuds ainsi trouvés vont former construire une grille de quadrangles réguliers, dont les dimensions sont de plus en plus grandes en s'éloignant du point (Q').

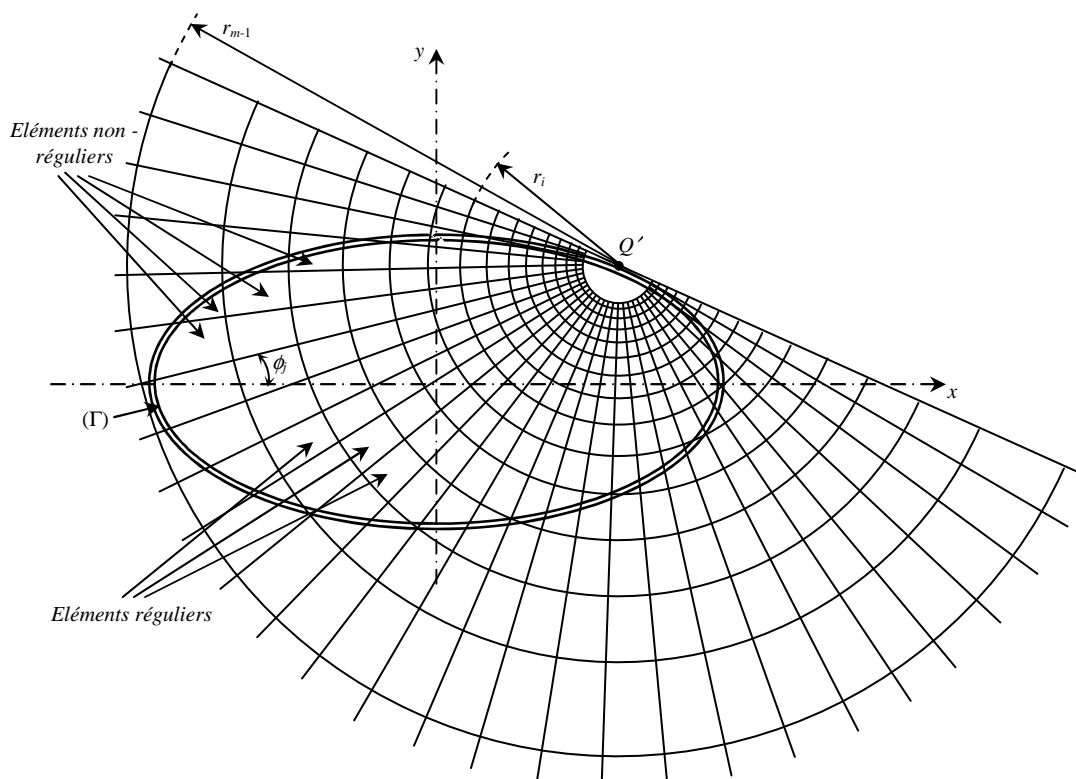


Figure 16 : Grille des mailles du demi-plan de la fissure

Ces éléments restent réguliers tant qu'ils sont loin du front de fissure elliptique (Γ). Au voisinage de ce dernier, des éléments non-réguliers apparaissent pour lesquels des nœuds résultent des intersections entre demi-droites et ellipse ainsi qu'entre demi-cercles et ellipse (voir la figure 6). Ces intersections sont nettement plus complexes à évaluer que celles des éléments réguliers.

Avant d'entamer les calculs des intersections pour les éléments non-réguliers, nous terminons le calcul portant sur la localisation des intersections entre demi-droites et demi-cercles de

toute la grille. Cette grille est délimitée par la tangente à l'ellipse au point (Q') et le premier demi-cercle de rayon r_{m-1} qui ne coupe pas l'ellipse comme le montre la figure 6. La détermination des connectivités des éléments réguliers obéit à l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l}
 l = 1 \\
 \left. \begin{array}{l}
 con1_l = (i-1)n + j \\
 con2_l = (i-1)n + j + 1 \\
 con3_l = (i)n + j \\
 con4_l = (i)n + j + 1 \\
 l = l + 1
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 j = 1, 2, \dots, n \\
 i = 1, 2, \dots, m
 \end{array}
 \end{array}$$

Le paramètre l représente le numéro de l'élément, i , le numéro du rangé d'éléments, m , le nombre de rangés, j , le numéro de la portion, n , le nombre de portions, $con1_l, \dots, con4_l$ sont les quatre connectivités de l'élément numéro l .

Sachant que cet algorithme est conçu en supposant que les nœuds sont numérotés d'une façon progressive pour chaque rangé en suivant le sens trigonométrique.

c) Localisation des nœuds et connectivités des éléments quadrangulaires non-réguliers

Les éléments dont une partie se trouve à l'extérieur de la surface effective de l'ellipse, qu'on a appelés éléments non-réguliers, deviendront des éléments triangulaires, quadrangulaires déformés ou pentagonaux (voir la figure 17). Afin que leur implémentation numérique soit envisageable, les éléments pentagonaux seront subdivisés en deux éléments ; un élément triangulaire et un autre quadrangulaire (voir la figure 17). Les nouveaux nœuds, comme déjà évoqué, représentent d'une part les intersections des demi-cercles avec l'ellipse et d'autre part les intersections des demi-droites avec l'ellipse. Ces derniers sont obtenus en procédant à la résolution par substitution d'un système très similaire au système (51). Le nouveau système d'équations est obtenu en remplaçant l'équation du cercle dans (51) par l'équation de la courbe délimitant la surface effective de l'ellipse donnée par (24), à savoir :

$$\begin{cases}
 y = Ax + B \\
 \left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \leq \left(1 - \frac{\Delta}{R(\theta)} \right)^2
 \end{cases} \quad (52)$$

La détermination des intersections entre ellipse et demi-cercles revient à résoudre un système de deux équations quadratiques à deux inconnues qui est donné par :

$$\begin{cases} (x - x_{Q'})^2 + (y - y_{Q'})^2 = r_i^2 \\ \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{\Delta}{R(\theta)}\right)^2 \end{cases} \quad (53)$$

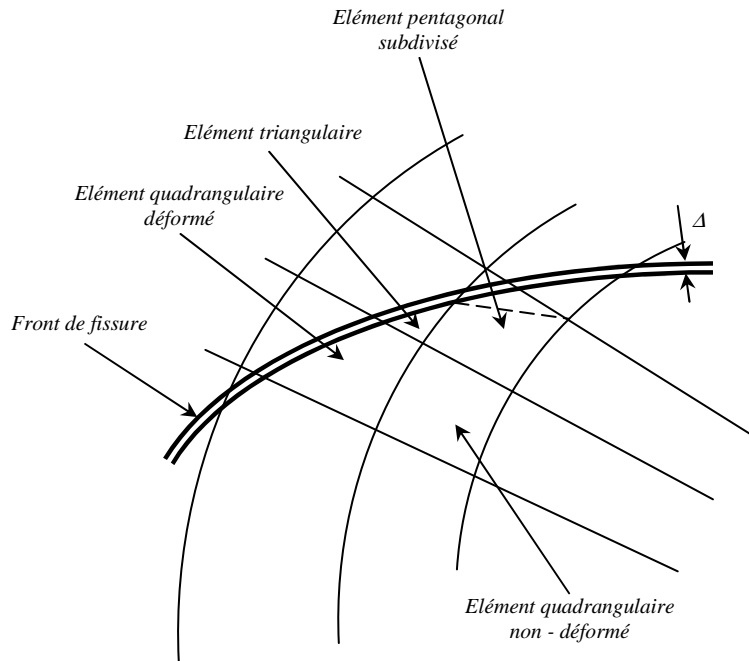


Figure 17 Agrandissement de l'intersection de la grille de mailles et l'ellipse

Compte tenu de la complexité de la substitution due à la puissance variable des inconnues dans le système (53), une technique de résolution de type Newton-Rafson [For-1995] a été retenue. Cette méthode utilise $(x, y)_0$ comme étant une valeur initiale de la solution pour trouver, s'il y a convergence, une approximation à la solution (x, y) en effectuant un nombre fini d'itérations. A priori, l'intersection entre les demi-cercles et l'ellipse, se produit en deux points différents (voir la figure 18a), alors, selon la valeur de $(x, y)_0$ retenue, on est à proximité de l'une ou l'autre des deux solutions présumées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et on convergera forcément vers l'une ou l'autre solution. Autrement dit, pour trouver la première solution (x_1, y_1) , on doit s'assurer que le point initial $(x, y)_0$ soit plus proche de (x_1, y_1) que de (x_2, y_2) , et vice-versa.

Pour cela nous avons adopté une procédure simple, qui nous a rassuré du bon choix des points initiaux $(x, y)_0$ et ce d'une manière automatique. Nous avons commencé par calculer les intersections du demi-cercle de rayon R_0 avec la tangente à l'ellipse au point Q' qui nous a

donné les points P_1 et P_2 (voir la figure 18a). Ces deux points vont nous servir comme points initiaux afin de déterminer les solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) en $r_i = R_0$, respectivement. Une fois calculées, les deux solutions sont considérées comme points initiaux pour évaluer les solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) en $r_i = r_0$ et ainsi de suite. D'une manière générale, (x_1, y_1) et (x_2, y_2) en r_i sont les points initiaux pour calculer les solutions (x_1, y_1) et (x_2, y_2) à r_{i+1} .

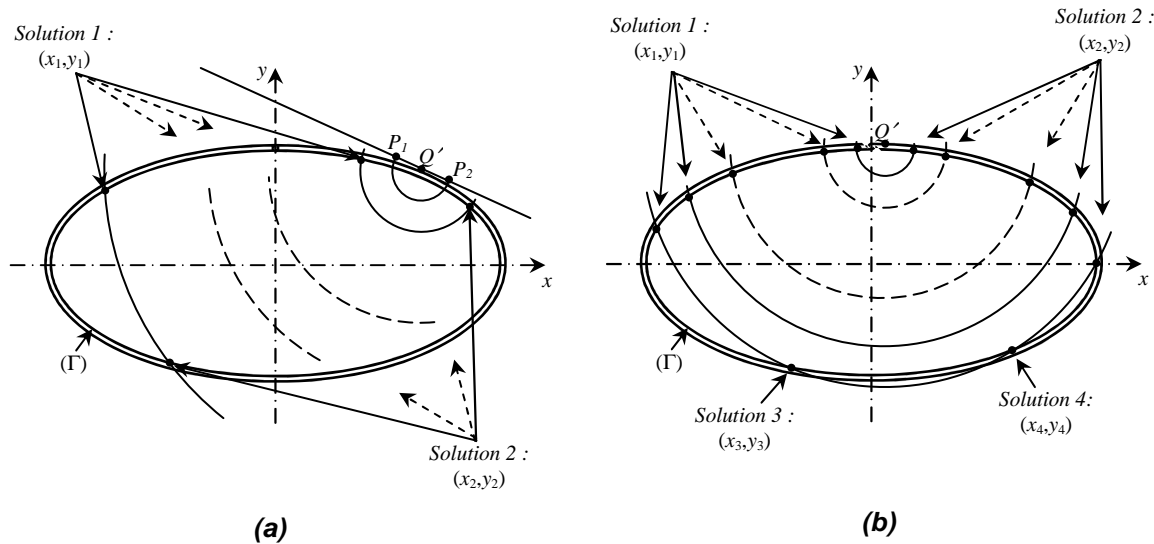


Figure 18 Intersections entre demi-cercles et ellipse
 (a) cas avec uniquement deux solutions –
 (b) cas avec quatre solutions

Cette procédure de calcul nous a permis de déterminer les intersections entre diverses courbes d'une manière efficace et opérationnelle. Nous l'avons testé et validé sur plusieurs configurations, et elle a fonctionné avec perfection. Cependant, nous avons constaté son handicap lorsqu'il s'agit de quatre solutions au lieu de deux, le cas où le rapport des axes α est faible et la position angulaire θ du point Q' est très proche de $(\pi/2)$ comme le montre la figure 18b. Ce qui nous empêche de prévoir, à partir d'un point initial, laquelle des solutions allons nous obtenir ? Ceci nous a poussé à remettre en question toute cette procédure de maillage automatique, et nous a incité à rechercher une autre méthode, plus valide de point de vue programmation pour n'importe quelle configuration du problème.

Cette nouvelle procédure consiste, d'abord à revenir au début et faire une extension du calcul de connectivité donné dans la section (a) pour les éléments possédant une partie à l'extérieur de l'ellipse, en les considérant totalement à l'intérieur de l'ellipse. Ensuite, on traite ces éléments selon leurs positions par rapport à l'ellipse, afin de trouver les localisations des

nœuds et les connectivités des éléments non-réguliers qui les contiennent (triangles et quadrangles déformés comme la figure 17). Alors, après utilisation de l'algorithme de connectivité donné dans la section (a), nous avons les localisations des nœuds ainsi que les connectivités de plusieurs éléments que nous pouvons trier, selon leurs positions par rapport à l'ellipse, comme suit :

- i) L'élément est totalement à l'intérieur de l'ellipse : Dans ce cas, tout l'élément fait partie du maillage et ses connectivités sont maintenues.
- ii) L'un des nœuds de l'élément est en dehors de l'ellipse : L'élément ne pourra évidemment pas garder ses connectivités étant donné que le 3^{ème} nœud (l'exemple de la figure 19) sera ignoré. Comme on l'a déjà vu, l'élément pentagonal restant à l'intérieur de l'ellipse est subdivisé en quadrangle 1-2-6-4 et un triangle 2-5-6. Le problème de la détermination de la position du nœud 6 est résolu dans cette nouvelle procédure en supposant que l'arc 3-4 est un segment de droite. Comme le nœud 5, le nœud 6 est alors trouvé en évaluant analytiquement l'intersection entre une droite et une ellipse. Malgré cette approximation, la rentabilité de ce calcul sera récompensée par le gain sur le temps d'exécution et la précision d'un calcul direct par rapport à un calcul itératif.

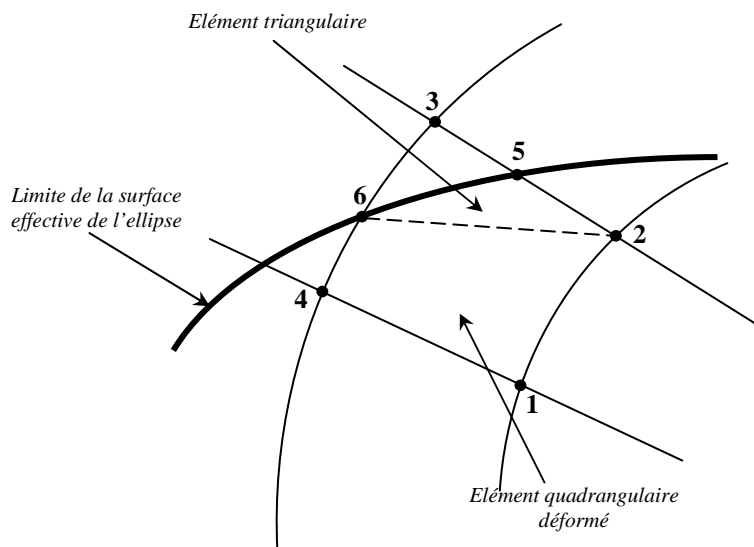


Figure 19 : Quadrangle de la grille avec un nœud en dehors de l'ellipse

Dans la base de données concernant les localisations des nœuds et les connectivités des éléments, nous allons rajouter les localisations des deux nouveaux nœuds et les connectivités du nouvel élément triangulaire et modifier les connectivités de l'élément quadrangulaire. Une

démarche similaire aurait pu être suivie si un seul autre nœud (1, 2 ou 4) est en dehors de l'ellipse.

iii) Cas où deux nœuds de l'élément sont en dehors de l'ellipse :

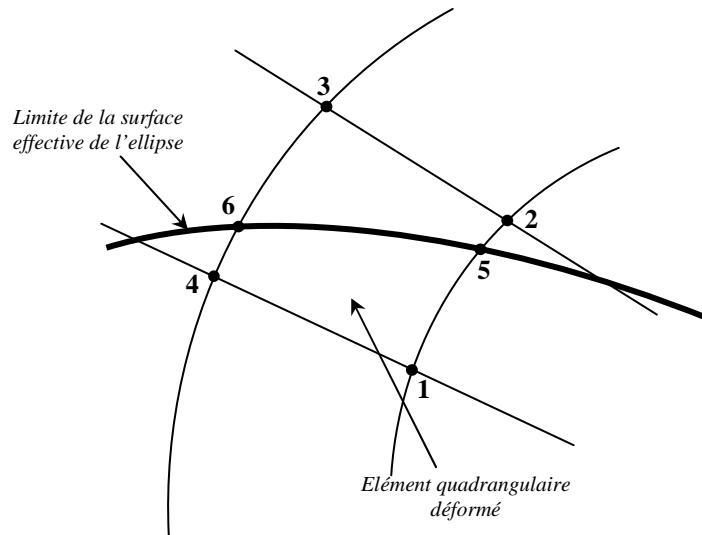


Figure 20 : Quadrangle de la grille avec deux nœuds en dehors de l'ellipse

Ces nœuds peuvent être 2-3 (comme le cas de la figure 20), ou n'importe quel couple de nœuds appartenant au même coté (1-2, 3-4 ou 1-4). Dans ce cas, l'élément initial 1-2-3-4 prend la forme de 1-5-6-4 mais reste toujours un quadrangle. Ce qui nécessite une modification de ses connectivités. Les localisations des nouveaux nœuds 5 et 6 sont évaluées de la même manière que le nœud 6 du cas précédent.

iv) Cas où trois nœuds de l'élément sont en dehors de l'ellipse :

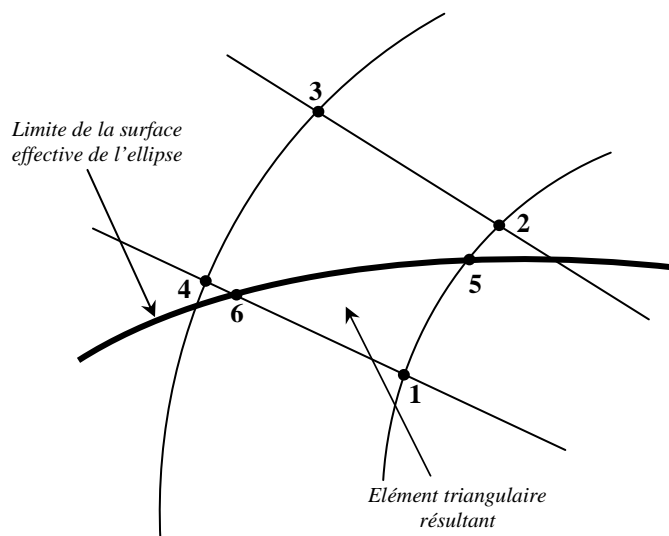


Figure 21 : Quadrangle de la grille avec trois nœuds en dehors de l'ellipse

Quatre possibilités sont envisageables pour ce cas. Les nœuds peuvent être 2-3-4 (l'exemple de la figure 21), 1-2-3, 1-2-4 ou 1-3-4. Dans ce cas de la figure 21, la partie située à l'intérieur de l'ellipse est alors considérée comme étant un triangle (1-5-6) dont une connectivité est déjà localisée (le nœud 1) et les deux autres (5 et 6) sont déterminées de la même manière exposé précédemment.

En fait, l'ensemble des différents cas de situation de l'élément par rapport à la surface effective de l'ellipse, représentent, en terme d'algorithme de calcul et de programmation, 13 possibilités différentes. Dans le code de calcul, chacune de ces possibilités est traitée séparément, afin d'insérer les localisations des nouveaux nœuds et les connectivités des nouveaux éléments et éventuellement d'effectuer les changements des connectivités des anciens éléments. Deux cas de maillage réel sont présentés sur la figure 22, justifiant l'intérêt de la procédure adaptée dans le mailleur automatique utilisé dans notre code de calcul *HWFun*.

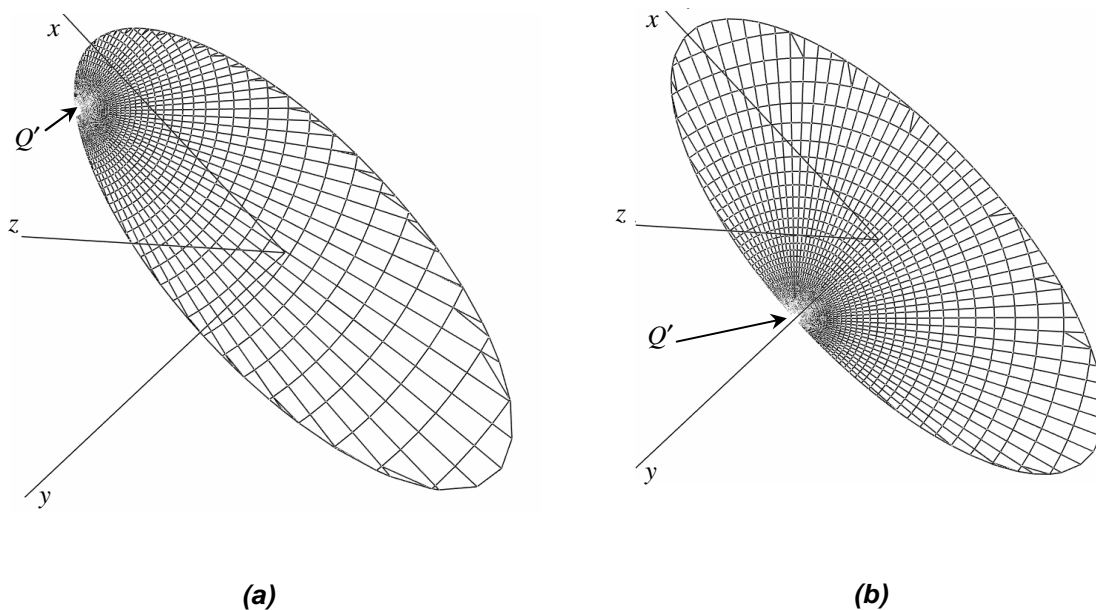


Figure 22 : Maillage réel d'une fissure elliptique avec $\alpha = 0.4$
(a) à $\theta_f = 30^\circ$ - (b) à $\theta_f = 90^\circ$

d) Création du fichier résultat

Une fois que toutes les localisations des nœuds et les connectivités des éléments ont été déterminées, le code de calcul ouvre une boîte de dialogue Windows sur laquelle l'utilisateur spécifie le nom et l'emplacement du fichier où toutes les informations concernant les nœuds et les éléments seront stockées. Ce fichier représentera une vraie base de donnée du maillage

exploitable par les autres modules de calcul (évaluation du FIC et présentation 3D du maillage).

III.2.2 Module de visualisation tridimensionnelle du maillage

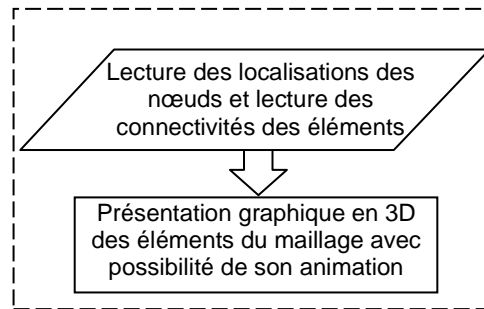


Figure 23 : Structure du Module 2 concernant la visualisation 3D du maillage

Dans le module 2 décrit sur la figure 23, le code de calcul commence par lire les données concernant les localisations des nœuds et les connectivités des éléments à partir du fichier résultats créé à l'issue du Module 1. Ensuite, la visualisation tridimensionnelle des éléments du maillage est assurée en utilisant les différentes options des fonctions graphiques nommées OpenGL (L'équivalent du DirectX inclus dans le Windows). Les fonctions OpenGL sont reconnues pour leur grande puissance dans l'exploitation du matériel graphique de la machine (la carte graphique dans notre cas). La visualisation du maillage est réalisée en procédant avec une boucle répétitive qui affiche un élément du maillage à chaque passage avec un petit temps d'arrêt. Ceci donne un effet d'animation et de progressivité de la génération du maillage autour du point (Q'). L'exécution de ce module est alors un moyen très efficace pour vérifier le bon déroulement de la procédure de maillage automatique exposé dans le module 1.

III.2.3 Module de Calcul du FIC pour une fissure elliptique

C'est le module où on concrétise numériquement la technique d'hybridation présentée dans cette étude. Il contient tous les développements théoriques transformés en numérique concernant la subdivision de la fissure en deux zones, l'évaluation des intégrales, traitement des singularités, et ceci dans le but de calculer le FIC sous plusieurs formes adimensionnelles pour les données du problème considéré. Par le biais du code de calcul on effectue donc une succession d'actions lors de l'exécution de ce module comme le montre l'organigramme de la figure 24 :

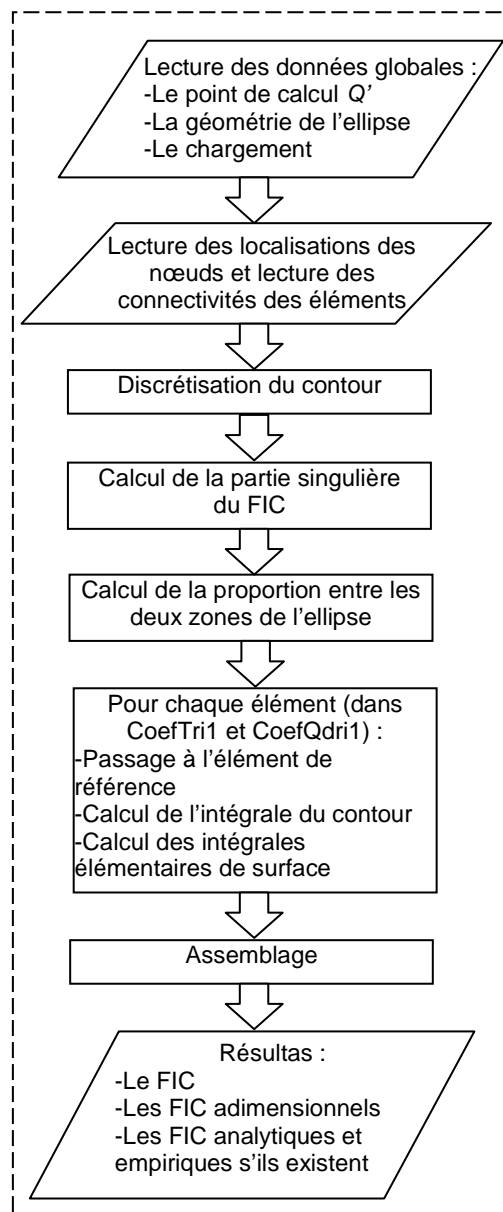


Figure 24 : Structure du Module 3 concernant le calcul du FIC pour une fissure elliptique

a) Lecture des données du problème

En premier, on lit les données globales du problème concernant la configuration géométrique de l'ellipse et la position angulaire du point de calcul (Q') ainsi que les données concernant le chargement appliqué. Ensuite, on récupère toutes les informations concernant le maillage de la surface de l'ellipse à partir du fichier résultat créé par le Module 1.

b) Discrétisation du contour de l'ellipse

Le code entame ensuite la discrétisation du contour en plusieurs petits segments de droite, nécessaire lors de l'évaluation de l'intégrale curviligne donnée par l'équation (21). Ces petits

segments sont de longueur de plus en plus petite en se rapprochant des faibles valeurs du rayon de courbure, conformément à l'équation (31). A ce niveau, notre code de calcul offre la possibilité de visualiser cette discrétisation en activant l'option de traçage des graphes (décrite ultérieurement dans la section de l'interface du code).

c) Calcul de la partie singulière du FIC

La partie singulière du facteur d'intensité de contrainte désignée par $K_I^{S'}$ est donnée par l'expression (17). Comme on a besoin uniquement de la valeur du chargement au point de calcul (Q') et la valeur de R_0 lue avec les données globales du problème, l'évaluation de cette partie singulière est un calcul direct dont le résultat sera stocké pour être rajouté à la partie restante du FIC $K_I^{S''}$.

d) Calcul de la valeur optimale de la proportion β

Avant d'entamer le calcul de la partie restante du FIC, on s'intéresse dans cette partie au calcul de la proportion β des deux zones de la fissure. Celle-ci dépend des valeurs de β_1 et β_2 d'après l'équation (16). Le calcul de β_1 est effectué directement à partir de l'équation (14).

Cependant, le calcul de β_2 n'est possible qu'après l'évaluation des termes $\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\min}$, et

$\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\max}$ comme l'exprime l'équation (15). Ces derniers sont calculés en déterminant, par

balayage du front de fissure, la valeur de $\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)$ pour chaque subdivision du contour de l'ellipse. La valeur de la dérivée partielle sera évaluée par l'approximation numérique classique suivante [For-1995]:

$$\left(\frac{\partial R_c}{\partial \theta}\right)_{\theta_i} = \frac{(R_c)_{\theta_{i+1}} - (R_c)_{\theta_i}}{\theta_{i+1} - \theta_i} \quad (54)$$

e) Calcul de la partie restante du FIC

L'intégrale de surface restante sera évaluée numériquement comme évoqué au premier chapitre. Pour cela, une boucle sur l'ensemble des éléments constituant le maillage de la surface de l'ellipse sera adoptée. Pour chacun des éléments, on calcule la partie de l'intégrale correspondante. Ce calcul est effectué en appelant pour chaque élément et selon son type, triangulaire ou quadrangulaire, le sous-programme CoefTri1 ou CoefQdri1, respectivement. Les connectivités de chaque élément et les coordonnées de ses connectivités constituent les variables d'entrée de ces sous-programmes.

A l'intérieur des sous-programmes, on commence par faire les changements de variables permettant de passer de l'élément réel à l'élément de référence. A ce stade, l'algorithme de Gauss est utilisé pour l'intégration numérique sur la surface de l'élément, avec 9 points (3 x 3) pour les éléments quadrangulaires et 7 points pour les éléments triangulaires. Ce choix a été fait, après plusieurs tests, sur la base d'une optimisation entre la précision et le temps machine afin de minimiser le coût de calcul.

A l'intérieur de la procédure d'intégration numérique sur la surface de l'élément, l'intégrale du contour présente dans l'expression des deux fonctions de poids (7) et (8), est aussi évaluée en utilisant l'expression (18). Parallèlement, la proximité de chaque subdivisant $\partial\Gamma$ du contour est testée afin d'enclencher éventuellement l'intégration analytique donnée par l'expression (34).

Les variables communes entre les deux fonctions de poids (7) et (8) telles que $r, R, l_{Q'}$ ainsi que le chargement q lié au point seront toutes calculées pour n'importe quel point de l'élément de référence. Ensuite, on teste la position de ce point par rapport aux deux zones de la fissure décrites par les expressions (9) et redéfinies par les changements des variables liés au passage vers l'élément de référence. Ce test nous permet de choisir la fonction de poids convenable, conformément à l'équation (13), afin d'achever le calcul de l'intégrale de surface concernant l'élément considéré. L'assemblage des éléments se fait en calculant la somme de toutes les intégrales élémentaires de surface dans le but de quantifier la valeur finale de la partie restante du FIC désignée par $K_I^{S''}$.

f) Affichage des résultats

Les résultats affichés à l'issue de ce module concernent principalement le FIC :

- La valeur dimensionnelle (la valeur effective en $Pa\sqrt{m}$).
- Les valeurs adimensionnelles selon leurs définitions données dans la partie applications de l'hybridation (chapitre IV et V).
- Eventuellement, La valeur analytique et/ou empirique.

Le code de calcul *HWFun* permet aussi et d'une manière automatique l'évaluation du FIC pour plusieurs valeurs de la position angulaire θ du point (Q') ou pour plusieurs valeurs du rapport des axes de l'ellipse α . Pour cela, nous utilisons une boucle de calcul en série (voir la zone *h* l'interface graphique exposé dans la section III.3) qui permet à chaque passage d'exécuter le Module 1 ensuite le Module 2 en incrémentant sur θ ou α d'un incrément donnée et jusqu'à une valeur finale donnée. L'intérêt de cette fonction est de réduire

l'intervention de l'utilisateur et par conséquent le risque d'erreur et le temps d'exécution global dans le cas où on a besoin de la variation du FIC en fonction de θ ou α .

III.2.4 Module de Calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique

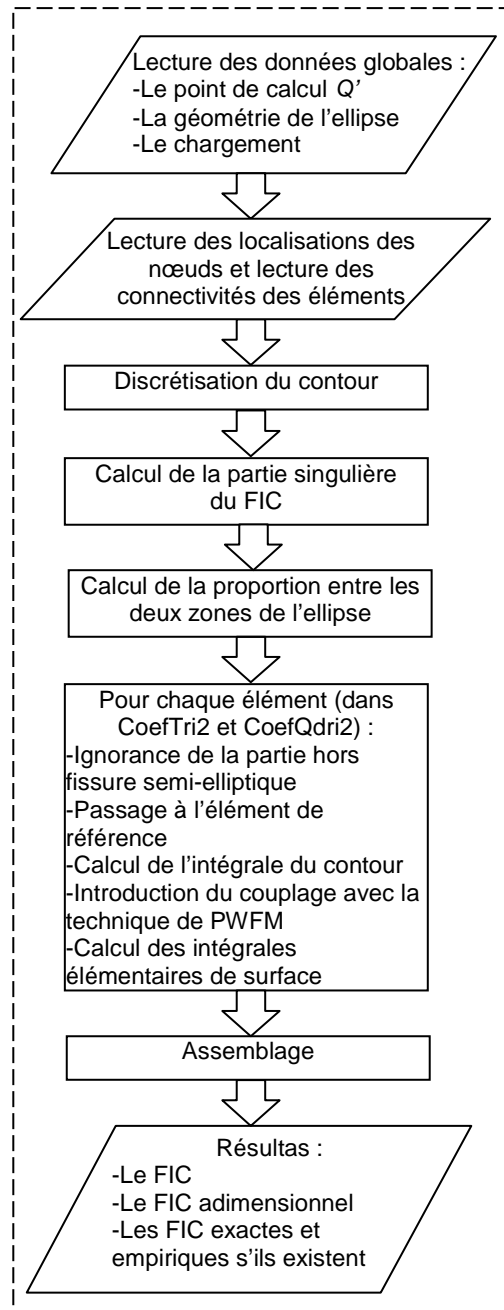


Figure 25 : Structure du Module 4 concernant le calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique

Ce module remplace le module 3 dans le cas d'une fissure semi-elliptique débouchante afin de trouver le FIC sur son contour. Par rapport au module 3, ce module comprend les mêmes

étapes de calcul (voir la figure 25) mais avec d'autres sous-programmes *CoefTri2* et *CoefQdri2* pour l'intégration numérique sur la surface de chaque élément. A l'intérieur de ces sous-programmes, un test supplémentaire est effectué sur la position du point arbitraire de l'élément par rapport à la surface libre pour ignorer la partie de l'ellipse située en aval de la surface libre en bénéficiant du maintien de la même procédure du maillage utilisée pour le cas d'une fissure elliptique.

Conformément aux développements présentés dans la section II.5, le calcul des fonctions de poids est aussi modifié en ajoutant les corrections liées au couplage avec la PWFm conformément aux équations (38), (42) et (45). Ce calcul est fait simultanément pour le chargement appliqué et le chargement de référence σ_0 pour déduire le paramètre géométrique $D(\theta, \alpha)$ donné par l'équation (49). Un autre changement est nécessaire au niveau du calcul de la partie singulière du FIC pour laquelle il faut éventuellement déduire la partie du petit demi-cercle de rayon R_0 se trouvant en aval de la surface libre (pour les faibles valeurs de θ).

III.3 L'interface graphique du code de calcul HWFun

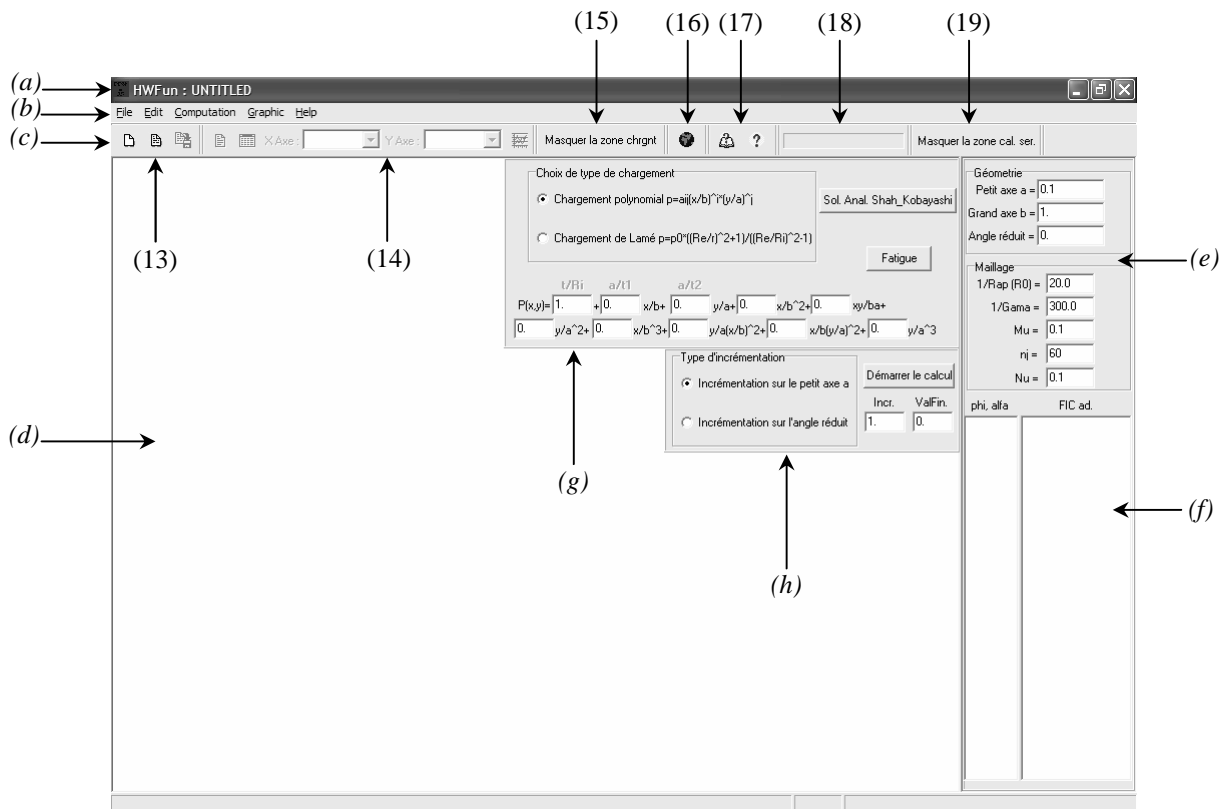


Figure 26 : Interface graphique principale du code de calcul HWFun

HWFun est un code de calcul réalisé sous la forme d'un progiciel avec interface graphique, installable et totalement indépendant de son compilateur (C++). En dehors du maillage et du calcul du FIC présentés à travers les différents modules de la section 2, ce code comprend beaucoup d'autres fonctionnalités secondaires mais très utiles pour l'utilisateur. Parmi lesquelles, on cite :

- L'accès total au disque dur de la machine (ouverture, fermeture et modification des fichiers).
- Les fonctionnalités d'édition (Copier, Couper, Coller, Sélectionner tout, ...).
- Traçage des graphes des différents résultats sous la forme de courbes 2D.
- Un service d'aide (Help), sur lequel un manuel d'utilisation du code est disponible.

Malgré la multitude de ses fonctions, il est à signaler que l'installable de notre code de calcul ne dépasse pas la taille d'une seule disquette (inférieur à 1.44Mo). L'interface graphique du code est présentée sur la figure 26, sur laquelle on distingue plusieurs zones, à savoir :

a) La ligne de titre

Comme toute fenêtre Windows sur cette ligne apparaît le nom de l'application (*HWFun*) suivi par le nom du fichier actuellement ouvert nommé par défaut *UNTITLED*. Au bout de cette ligne, les trois boutons (réduire, agrandir, fermer) communs des fenêtres Windows sont présents.

b) La ligne de menu

Cette ligne comporte cinq groupes de fonctions parmi lesquels des groupes standards (File, Edit et Help) que l'on trouve dans beaucoup d'applications Windows, et des groupes spécifiques à notre code de calcul (Computation et Graphic). Sur le tableau I, nous exposons la description des principales fonctions de ces groupes présentées sur la figure 27.

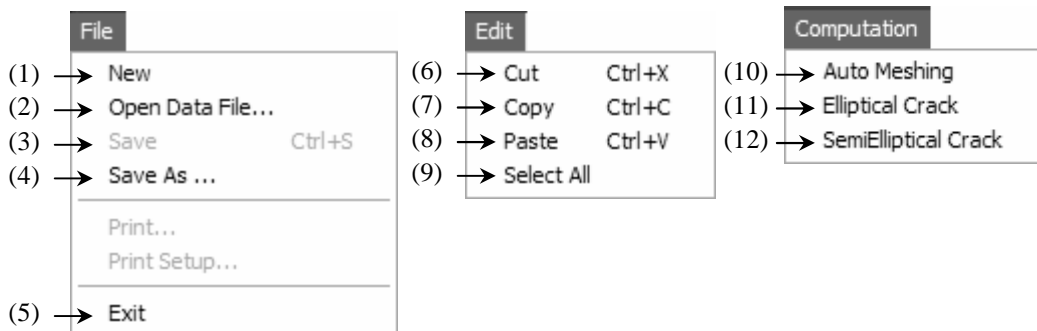


Figure 27 : Fonctions principales de la ligne de menu.

Tableau I : Description des fonctions de la ligne de menu

N° de fct.	Nom de fct.	Description de fct.
1	New	Créer un nouveau fichier, éventuellement un fichier de données de format texte.
2	Open Data File...	Ouvrir un fichier existant (un fichier de données par défaut) en exécutant la boîte de dialogue OpenFile du Windows.
3	Save	Enregistrer le fichier en cours (ouvert). Activer une fois le fichier en cours est modifié. Ctrl+S sont des touches de raccourcie.
4	Save As...	Ouvrir la boîte de dialogue SaveAs du Windows pour pouvoir enregistrer le fichier en cours sous un nom et format personnalisés (.dat par défaut et .txt éventuellement)
5	Exit	Fermer toute l'application <i>HWFun</i> en vérifiant l'enregistrement du fichier en cours.
6	Cut	Couper les chaînes de caractères sélectionnées du texte du fichier en cours en le sauvegardant dans la presse-papier.
7	Copy	Faire une copie des chaînes de caractères sélectionnées en le sauvegardant dans la presse-papier.
8	Paste	Coller les chaînes de caractères sauvegardées dans la presse-papier à l'endroit actuel du curseur.
9	Select All	Sélectionner toutes les chaînes de caractères appartenant au texte du fichier en cours.
10	Auto-meshing	Lancer l'exécution du Module 1 (maillage automatique).
11	Elliptical crack	Lancer l'exécution du Module 3 (calcul du FIC pour une fissure elliptique)
12	Semi-elliptical crack	Lancer l'exécution du Module 4 (calcul du FIC pour une fissure semi-elliptique)

c) La ligne de commande

Comme toute application Windows, cette ligne est une zone contenant des boutons de lancement rapide des fonctions se trouvant déjà dans la ligne du menu et beaucoup d'autres se trouvant nulle par ailleurs. Ce sont les fonctions sensées les plus utilisées qui sont rassemblées dans cette ligne de commande. Nous pouvons récapituler le contenu de cette ligne d'après la figure 26, à travers le tableau II.

Tableau II : Description des fonctions de la ligne de commande

N°	Nom	Description
13	Groupe du traitement de fichier	Lancement rapide des trois fonctions 1, 2 et 3 du groupe File de la ligne du menu.
14	Groupe du mode graphique	Lancement rapide des deux fonctions de basculement vers et depuis le tableau des résultats, le choix des deux axes parmi les colonnes du tableau et finalement le lancement du traçage du graphe.
15	Masquer/Afficher la zone du chargement	Masquer ou afficher la zone (<i>g</i>) concernant le chargement.
16	Présentation 3D	Exécuter le Module 2 (visualisation tridimensionnelle du maillage) en ouvrant une nouvelle fenêtre décrite dans la section (<i>i</i>).
17	Groupe d'aide	Lancement rapide de la fonction d'aide (Help) sur l'utilisation du code et de la fonction « A propos de... » (About...) qui ouvre une boîte de dialogue affichant la version et le concepteur de l'application.
18	Progression de calcul	Afficher la progression et le pourcentage d'avancement du calcul en cours.
19	Masquer/Afficher la zone de calcul en série	Masquer ou afficher la zone (<i>g</i>) concernant le calcul répétitif.

d) La zone principale de texte

C'est la zone où le contenu du fichier en cours est affiché. On peut ainsi modifier facilement le texte par saisie ou par l'utilisation des fonctions d'édition (couper, copier et coller). Il faut évidemment terminer ces opérations par l'enregistrement pour qu'elles prennent effet. La capacité d'affichage de cette zone dépasse les 68000 lignes, permettant l'affichage des informations d'un grand nombre d'éléments de maillage.

e) La zone de saisie des données globales

Cette zone sert à saisir les données globales du problème traité par Hybridation de fonctions de poids. La zone de saisie de données est décomposée en deux parties ; la partie des données géométriques, à savoir le petit axe, le grand axe et la position angulaire (θ) du point de calcul (Q'), et la deuxième partie concerne les données du maillage, à savoir le rayon du petit cercle R_0 , le paramètre de l'épaisseur de la bande γ , le paramètre de la progression des demi-cercles ν , le paramètre de discrétisation du contour μ et le nombre de portions angulaires du maillage n .

f) La zone d'affichage des résultats

Cette zone est composée de deux colonnes, une grande à droite et une petite à gauche (voir la figure 26). La grande colonne sert à afficher la valeur du FIC et celle des différents FIC

adimensionnels selon l'exemple traité. La petite colonne est utilisée uniquement en cas de calcul en série pour afficher les valeurs progressives de l'angle réduit θ_r ou le rapport des axes α en face des valeurs du FIC correspondantes.

g) La zone de chargement

C'est une zone sur laquelle on saisit les paramètres du chargement et on choisit son mode selon le problème traité. On trouve aussi sur cette zone un bouton pour activer le calcul analytique du FIC développée par Shah & Kobayashi [Sha-1971] pour les fissures elliptiques sous un chargement polynomial.

h) La zone de calcul en série

Cette zone comporte le champ de saisie de la valeur de l'incrément sur l'angle réduit θ_r ou le rapport des axes α et le champ de saisie de sa valeur finale, en prenant leurs valeurs saisies dans la zone des données globales comme valeurs initiales. Le bouton « démarrer le calcul » lance le calcul en série.

i) La fenêtre de présentation 3D

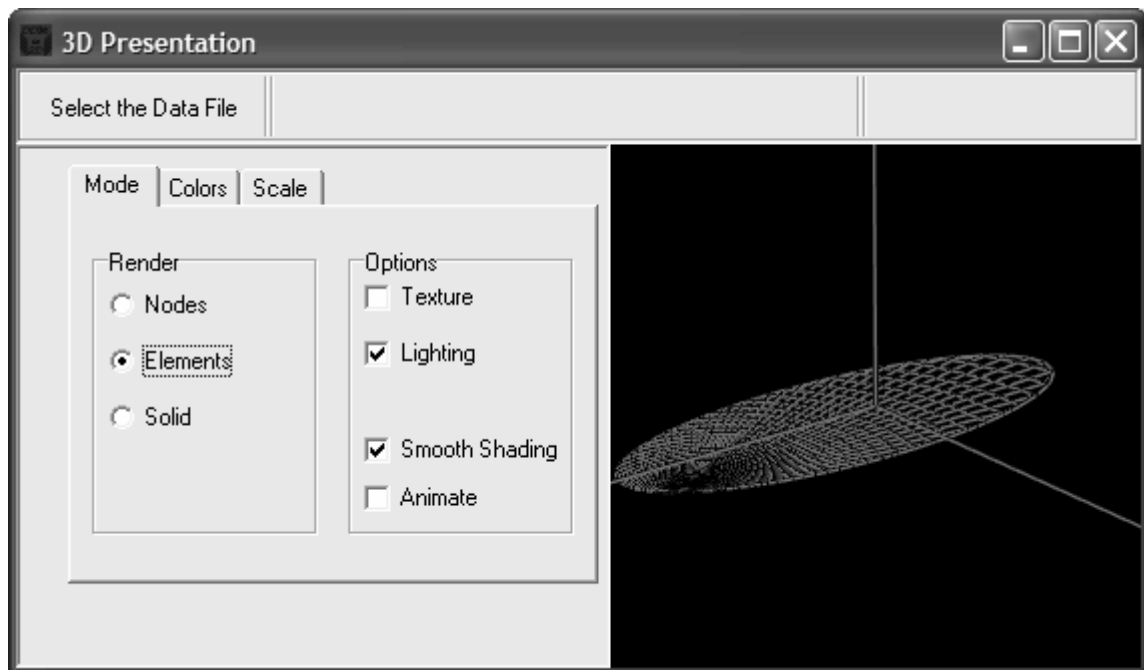


Figure 28 : La fenêtre de présentation 3D du code HWFun

Cette fenêtre est composée essentiellement de trois zones (voir la figure 28). La zone supérieure comprenant le bouton « Select the data file » qui lance la présentation graphique en 3D du maillage en désignant le fichier contenant les résultats du maillage. La deuxième zone

(à gauche) rassemble toutes les options liées aux fonctions OpenGL selon lesquelles la présentation 3D est réalisée. Le tableau III récapitule le détail des principales fonctions. La troisième zone (à droite) est celle de la visualisation graphique tridimensionnelle sur laquelle apparaît la progression du maillage.

Tableau III : Description des fonctions de la fenêtre de Présentation 3D

Anglet	Option	Description
Mode	Nodes	Afficher uniquement les nœuds des éléments
	Elements	Afficher les coté des éléments
	Solid	Afficher les éléments pleins
	Lighting	Activer l'effet de la lumière
	Animate	Fait tourner l'ensemble du maillage aléatoirement autour de ses trois axes.
Colors	Beckground	Modifier la couleur de l'arrière-plan de la zone de visualisation.
	Object	Modifier la couleur de l'objet (les éléments)
	Light	Modifier la couleur de l'effet de lumière.
Scale	Scale X	Modifier la proportion de la taille de l'ensemble selon l'axe X.
	Scale Y	Modifier la proportion de la taille de l'ensemble selon l'axe Y.
	Scale Z	Modifier la proportion de la taille de l'ensemble selon l'axe Z.
	Gang	Raccorder les trois proportions de la taille entre elles.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail le développement menant au code de calcul *HWFun* à travers la description de ses différents modules de calcul. Ces derniers représentent les procédures numériques des différents développements analytiques présentés dans le chapitre II. A la fin de ce chapitre, les différentes fonctions d'accessibilité (traitement des fichiers, réalisation des graphes, ...) mises à la disposition de l'utilisateur du code de calcul sont exposées en décrivant l'interface graphique du programme.

Deuxième Partie :

Tests de validation de

l'hybridation

Sommaire

<i>Deuxième Partie : Tests de validation de l'hybridation</i>	<i>62</i>
Chapitre IV : Application de la méthode d'hybridation aux cas des fissures elliptiques internes	63
IV.1 Introduction	64
IV.2 Fissure elliptique interne dans un milieu infini soumise à un chargement polynomial	64
IV.3 Fissure elliptique interne transversale dans une plaque sous flexion.....	73
IV.4 Fissure elliptique interne dans un tube sous pression	77
IV.5 Conclusion	81
Chapitre V : Application de la méthode d'hybridation aux cas des fissures semi-elliptiques débouchantes	82
V.2 Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube mince.....	83
V.3 Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube épais	84
V.4 Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion	90
V.5 Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement polynomial	99
V.6 Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement exponentiel ...	103
V.7 Conclusion.....	107

Chapitre IV :
Application de la
méthode d'hybridation
aux cas des fissures
elliptiques internes

IV.1 Introduction

Trois exemples pratiques sont illustrés et traités ci-après, dans le but de valider notre approche d'hybridation. Ils concernent le cas d'une fissure elliptique interne dans un milieu infini sous un chargement polynomial, le cas d'une fissure elliptique interne dans une plaque sous flexion et finalement le cas d'une fissure elliptique interne dans un tube sous pression.

Tableau IV : Comparaison du FIC adimensionnel \bar{K}_I , sur le contour de la fissure elliptique sous chargement uniforme pour différentes valeurs du rapport α .

α	θ_r°	\bar{K}_I (exacte)	Résultats obtenus par HWFun				Résultats de Krasowsky et al	
			\bar{K}_I (par hybridation)	Er(%)	\bar{K}_I ($\beta=0$, F.P. de Oore & Burns)	Er(%)	\bar{K}_I	Er(%)
1.0	0.	1.00000	1.00056	0.056	0.99893	0.107	1.00035	0.035
	30.	1.00000	1.00057	0.057	0.99894	0.106	1.00035	0.035
	60.	1.00000	1.00058	0.058	0.99896	0.104	1.00035	0.035
	90.	1.00000	1.00059	0.059	0.99897	0.103	1.00035	0.035
0.8	0.	1.00000	1.00940	0.940	1.01155	1.155	0.98523	1.477
	30.	1.00000	1.00346	0.346	1.00384	0.384	0.99170	0.830
	60.	1.00000	0.99555	0.445	0.99266	0.734	1.00573	0.573
	90.	1.00000	0.99339	0.661	0.98886	1.114	1.01184	1.184
0.6	0.	1.00000	1.00858	0.858	1.03387	3.387	0.96532	3.468
	30.	1.00000	0.99823	0.177	1.00915	0.915	0.98550	1.450
	60.	1.00000	0.99493	0.507	0.98480	1.520	1.00985	0.985
	90.	1.00000	0.99851	0.149	0.97884	2.116	1.01390	1.390
0.4	0.	1.00000	0.99780	0.220	1.07704	7.704	0.94460	5.540
	30.	1.00000	0.98987	1.013	1.01327	1.327	0.98180	1.820
	60.	1.00000	0.99619	0.381	0.97608	2.392	1.00540	0.540
	90.	1.00000	0.99994	0.006	0.96953	3.047	1.02053	2.053
0.2	0.	1.00000	0.99399	0.601	1.17519	17.519	0.93730	6.270
	30.	1.00000	0.98730	1.270	1.01328	1.328	0.99690	0.310
	60.	1.00000	0.99575	0.425	0.96876	3.124	1.00400	0.400
	90.	1.00000	0.99315	0.685	0.96531	3.469	1.00400	0.400
0.1	0.	1.00000	1.00294	0.294	--	--	--	--
	30.	1.00000	0.99957	0.043	--	--	--	--
	60.	1.00000	0.99349	0.651	--	--	--	--
	90.	1.00000	0.99007	0.993	--	--	--	--

IV.2 Fissure elliptique interne dans un milieu infini soumise à un chargement polynomial

Nous considérons dans cet exemple une fissure elliptique dans un milieu élastique infini (bords du domaine situés suffisamment loin de la fissure). La fissure est considérée soumise à un chargement (contrainte) de répartition polynomiale, de la forme suivante :

$$\sigma(x, y) = \sum_j \sum_i a_{ij} \left(\frac{x}{b}\right)^i \left(\frac{y}{a}\right)^j \quad i, j \in \{0,1,2,3\} \quad (55)$$

Tableau V : FIC adimensionnel \bar{K}_I trouvé par Oore & Burns sur le contour de la fissure elliptique sous chargement uniforme pour différentes valeurs du rapport α .

α	θ_r°	$\bar{K}_I(\text{exacte})$	Résultats d'Oore & Burns	
			\bar{K}_I	Er(%)
1.0	16	1.00000	1.01212	1.212
	36	1.00000	1.00767	0.767
	49	1.00000	1.00766	0.766
	70	1.00000	1.01917	1.917
	88.2	1.00000	1.01473	1.473
0.8	14	1.00000	1.03170	3.170
	32.5	1.00000	0.99976	0.024
	49	1.00000	1.00442	0.442
	73	1.00000	1.00700	0.700
	88.2	1.00000	1.00184	0.184
0.6	12.5	1.00000	1.04112	4.112
	28.2	1.00000	1.02799	2.799
	50	1.00000	0.99731	0.269
	75	1.00000	0.99252	0.748
	88.6	1.00000	0.98868	1.132
0.4	10	1.00000	1.09510	9.510
	27	1.00000	1.01981	1.981
	50	1.00000	0.98773	1.227
	74.6	1.00000	0.97867	2.133
	89	1.00000	0.97417	2.583
0.2	2.2	1.00000	1.05026	5.026
	15.6	1.00000	0.96778	3.222
	31.3	1.00000	0.98808	1.192
	69.4	1.00000	0.97980	2.020
	89.5	1.00000	0.96747	3.253

Ce mode de chargement est couramment utilisé dans la littérature (voir par exemple Shah & Kobayashi [Sha-1971], Raju & Newman [Raj-1982], Orynyak & Gienko [Ory-2002]), car il permet de simuler de multiples situations pratiques.

Dans un premier temps, le cas d'un chargement uniforme ($a_{ij} = 0$, sauf $a_{00} = \sigma_0$) est considéré. Nous calculons le facteur d'intensité de contrainte adimensionnel en mode I

$$\bar{K}_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)} \quad (\text{on rappelle que } E(k) \text{ est l'intégrale elliptique de seconde espèce et}$$

$$k = \sqrt{1 - \alpha^2}).$$

Le calcul est fait pour différentes valeurs de α et de l'angle réduit $\theta_r = \arctan\left(\frac{\tan(\theta)}{\alpha}\right)$.

Sur le tableau IV, nous avons reporté les valeurs du FIC fournies par le code de calcul *HWFun* basé sur la méthode d'hybridation présentée dans le chapitre précédent dans le cas étudié pour différentes valeurs du rapport α et d'angle réduit θ_r . Sur le tableau IV sont également reportés pour le même problème traité, la solution exacte, les résultats trouvés par Krasowsky et al. [Kra-1999] ainsi que les résultats trouvés par le code *HWFun* en utilisant la fonction de poids de Oore & Burns [Oor-1980] sur tout le domaine ($\beta = 0$). Comme il ne s'agit pas des mêmes valeurs de l'angle réduit θ_r° , nous avons préféré mettre les résultats trouvés par Oore & Burns [Oor-1980] pour le même problème dans un le tableau V. D'après le tableau IV, nous constatons que l'erreur maximale sur la valeur de FIC est de 6.27% pour les résultats de Krasowsky et al. [Kra-1999], 17.52% en utilisant la fonctions de poids d'Oore & Burns [Oor-1980] sur tout le domaine dans le code *HWFun* et finalement 1.27% pour l'approche d'hybridation dans le code *HWFun*. Pour les résultats d'Oore & Burns [Oor-1980], l'erreur maximale sur le FIC est de 9.51% comme le montre le tableau V.

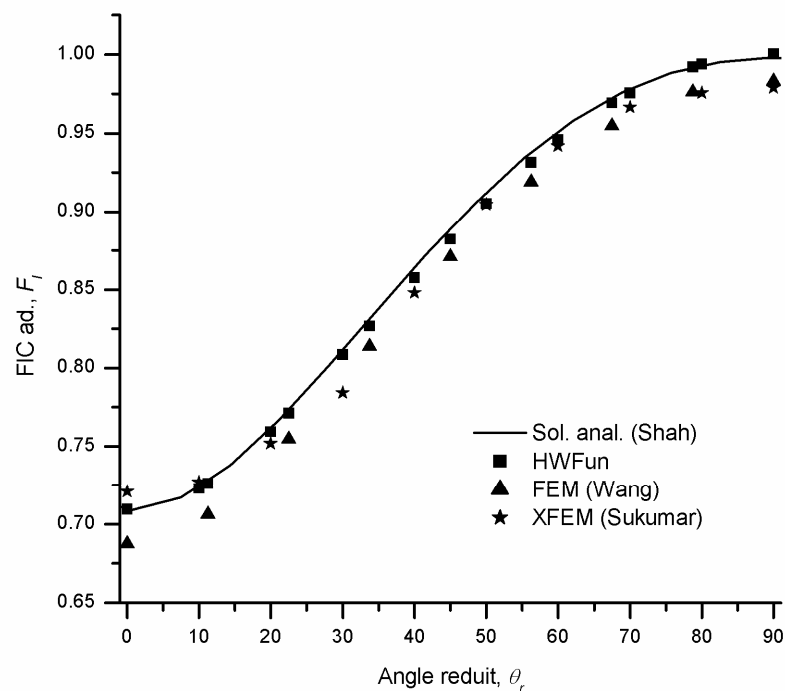


Figure 29 : FIC adimensionnel sur le contour d'une fissure elliptique pour $\alpha = 0.5$

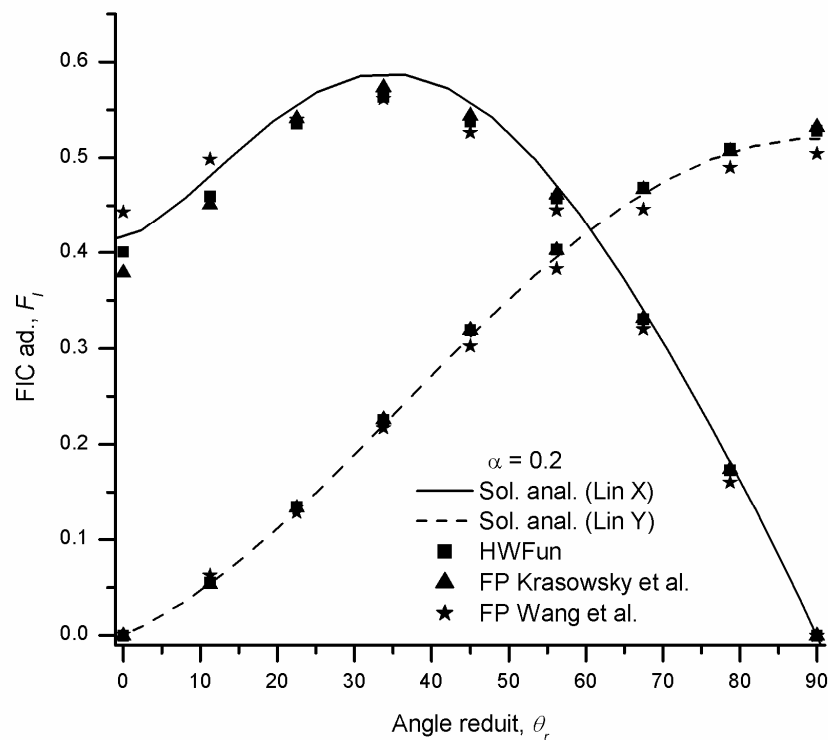


Figure 30 : FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique pour $\alpha = 0.2$ avec un chargement linéaire

Nous observons donc une amélioration de la précision sur la valeur de FIC pour la présente approche basée sur l'hybridation par rapport aux résultats obtenus par Krasowsky et al. [Kra-1999], par le code de calcul HWFun utilisant la fonction de poids d'Oore et Burns [Oor-1980] sur tout le domaine (voir le tableau IV) ou par Oore et Burns dans la référence [Oor-1980] pour d'autres valeurs de θ_r° (voir le tableau V). On signale également un large domaine d'applicabilité de l'approche par hybridation des fonctions de poids vu que les autres méthodes ne traitent pas le cas $\alpha = 0.1$. Ceci est dû peut être aux limites des capacités des codes de calcul correspondant à ces méthodes de point de vue mémoire, étant donné que les fissures aplaties demandent plus de raffinement du maillage et de point de vue facilité de remaillage (disponibilité de mailleur automatique).

Pour un chargement uniforme, une comparaison entre les résultats de la méthode des éléments finis (FEM) trouvés par Wang et al. [Wan-1998], les résultats de son extension (XFEM) trouvés par Sukumar et al. [Suk-2003], et ceux de la présente approche est effectuée pour $\alpha = 0.5$ sur la figure 29. Le FIC adimensionnel y est alors défini par $F_I = K_I E(k) / (\sigma_0 \sqrt{\pi a})$.

La figure 29 montre la très bonne qualité des résultats obtenus avec l'hybridation dans ce cas, avec même une meilleure concordance comparée aux autres approches.

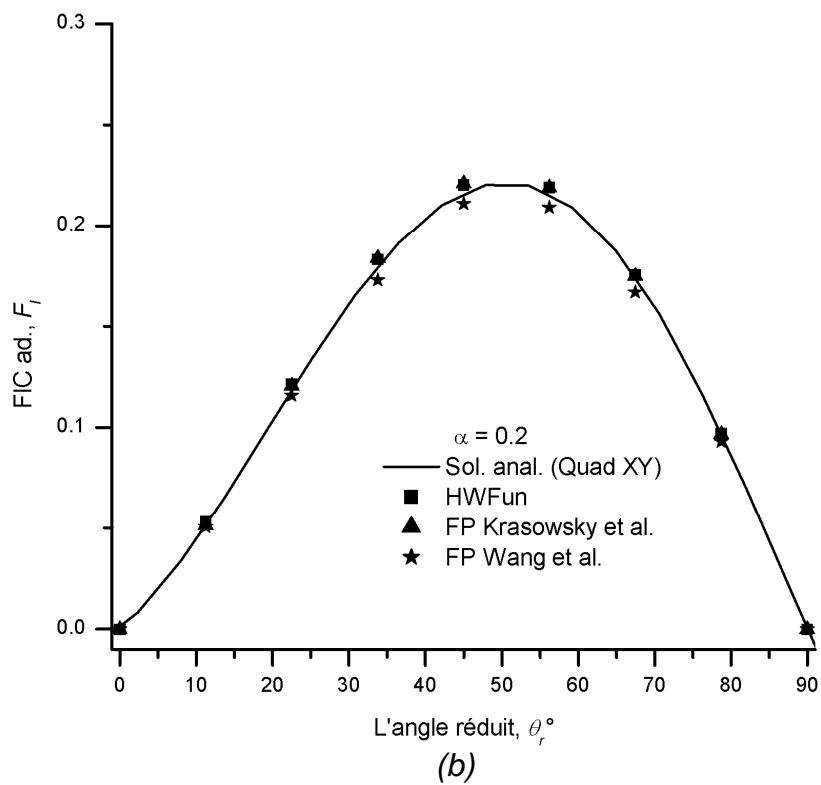
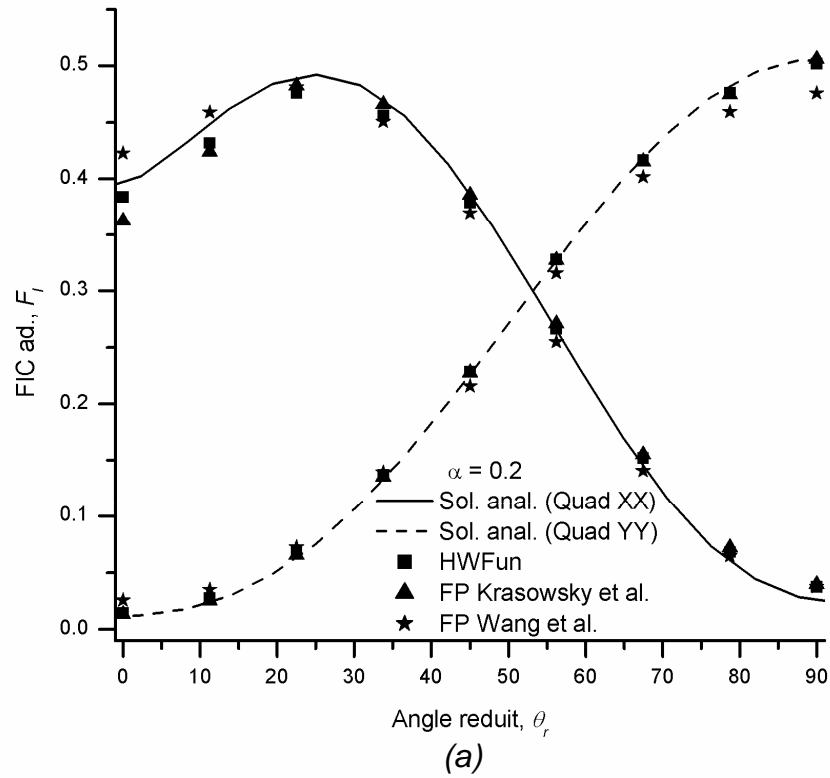


Figure 31 : FIC adimensionnel F_l sur le contour de la fissure elliptique pour $\alpha = 0.2$
 (a) Chargement quadratique XX et YY – (b) Chargement quadratique XY

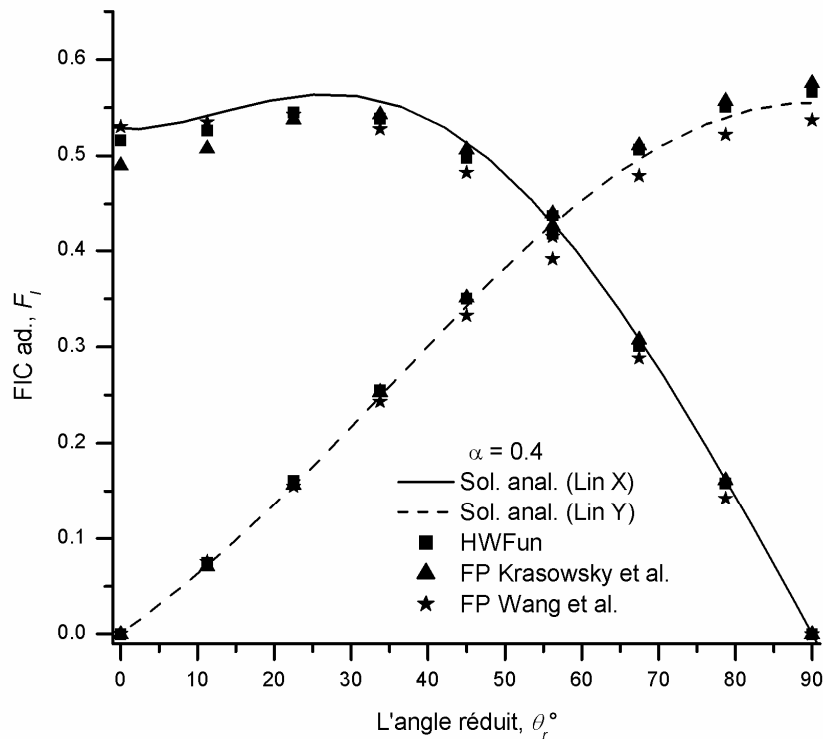


Figure 32 : FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique pour $\alpha = 0.4$ avec un chargement linéaire

Pour les chargements d'ordre supérieur :

- i) linéaire (LinX : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{10} = \sigma_0$ et LinY : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{01} = \sigma_0$ dans l'équation (55)),
- ii) quadratique (QuadXX : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{20} = \sigma_0$; QuadYY : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{02} = \sigma_0$; QuadXY : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{11} = \sigma_0$ dans l'équation (55)),
- iii) cubique (CubXXX : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{30} = \sigma_0$; CubXYY : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{12} = \sigma_0$).

les résultats trouvés pour le FIC adimensionnel F_I par l'approche d'hybridation pour différentes valeurs de α (0.2 ; 0.4 ; 0.6 ; 0.8 ; 1.0) montrent une bonne corrélation avec la solution analytique de Shah & Kobayashi [Sha-1971] pour des angles réduits entre 0° et 90° . Les comparaisons proposées sur les figures 30, 31, 32, 33, 34 et 35 correspondant à trois valeurs de α (0.2 ; 0.4 ; 0.6) en sont représentatives. Ces comparaisons sont effectuées entre la présente approche d'hybridation, la fonction de poids de Wang et al. [Wan-1998] et la

fonction de poids Krasowsky et al. [Kra-1999] appliquée sur tout le domaine dans le code *HWFun* ($\beta = 1$).

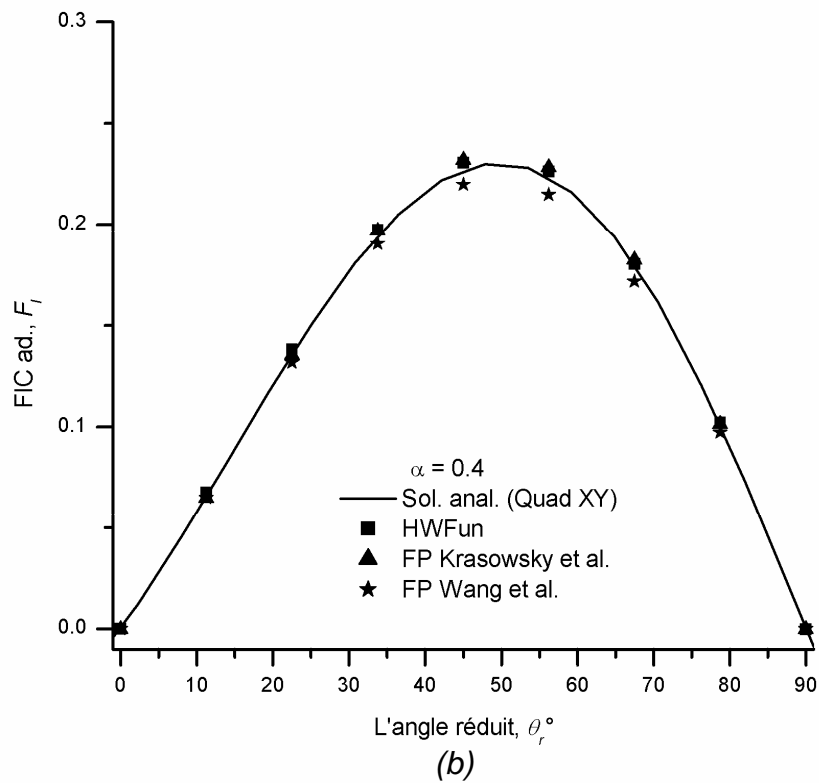
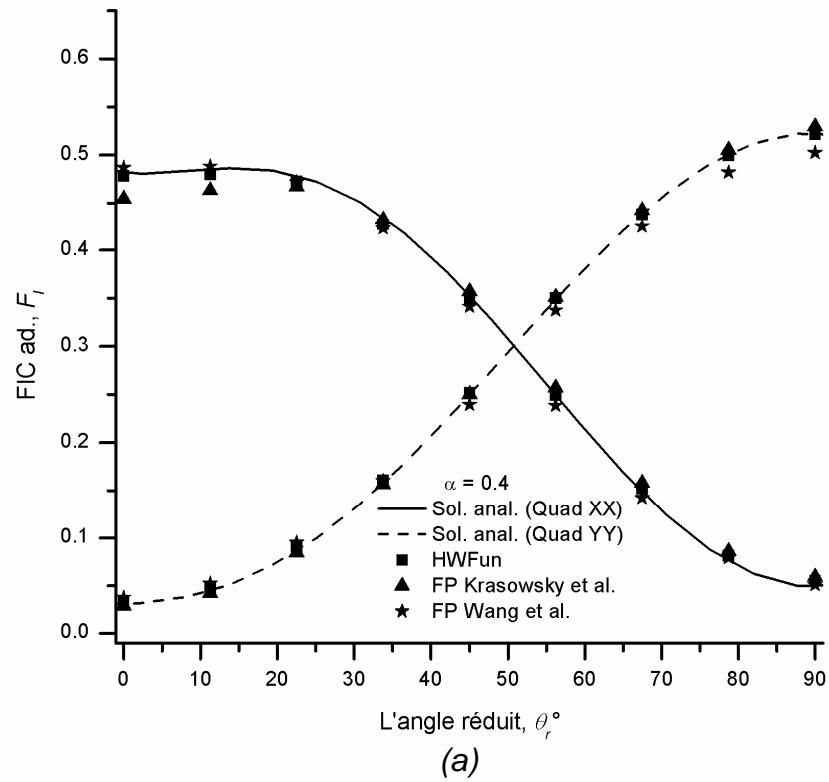


Figure 33 : FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique pour $\alpha = 0.4$
 (a) Chargement quadratique XX et YY – (b) Chargement quadratique XY

Globalement les différentes méthodes permettent une bonne évaluation du FIC avec un léger avantage à la méthode d'hybridation surtout pour les faibles valeurs de α où on observe de décrochement plus claire (figure 30 et 31).

Dans le cas d'un chargement cubique, les résultats obtenus par hybridation des fonction de poids sont en parfaite concordance avec la solution analytique développée par Orynyak & Gienko [Ory-2002]. La fonction de poids de Wang et al. [Wan-1998] ne fournit pas de résultats pour ce mode de charge ce qui prouve la grande applicabilité tout en préservant une bonne qualité des résultats de la présente approche. Dans la figure 36, une présentation des résultats est proposée.

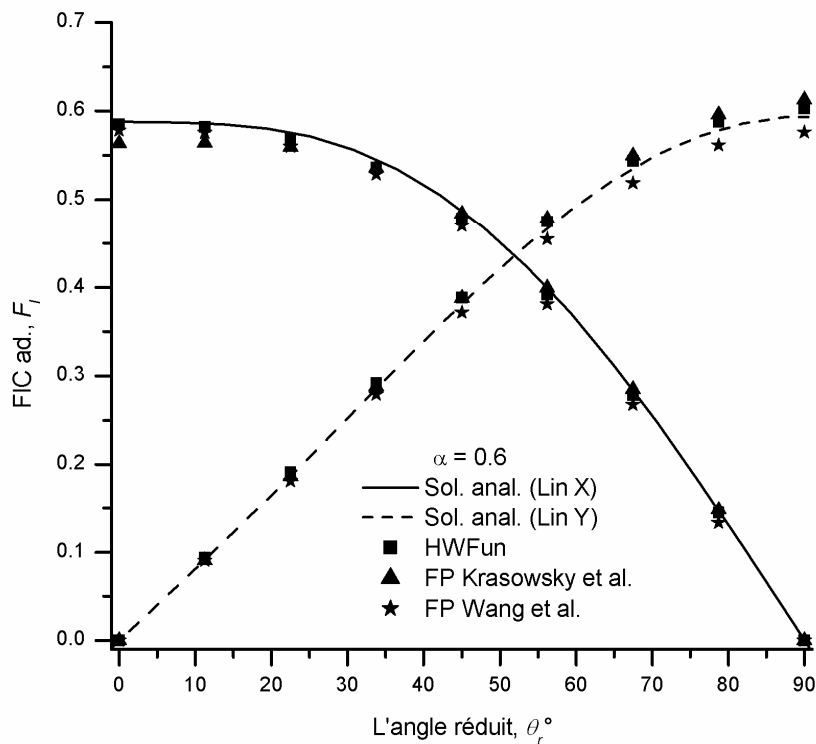


Figure 34 : FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique pour $\alpha = 0.6$ avec un chargement linéaire

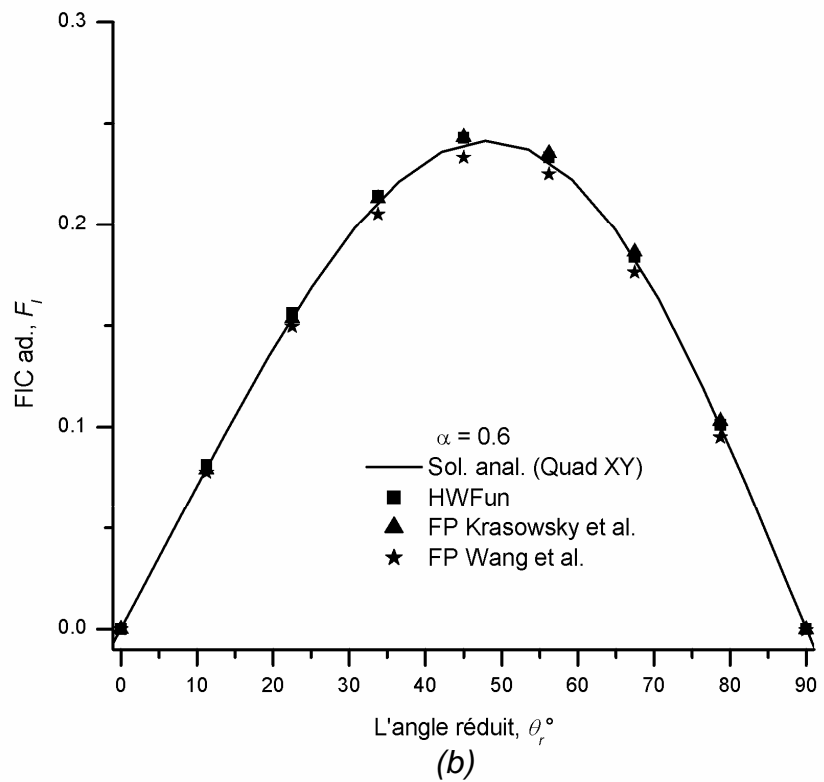
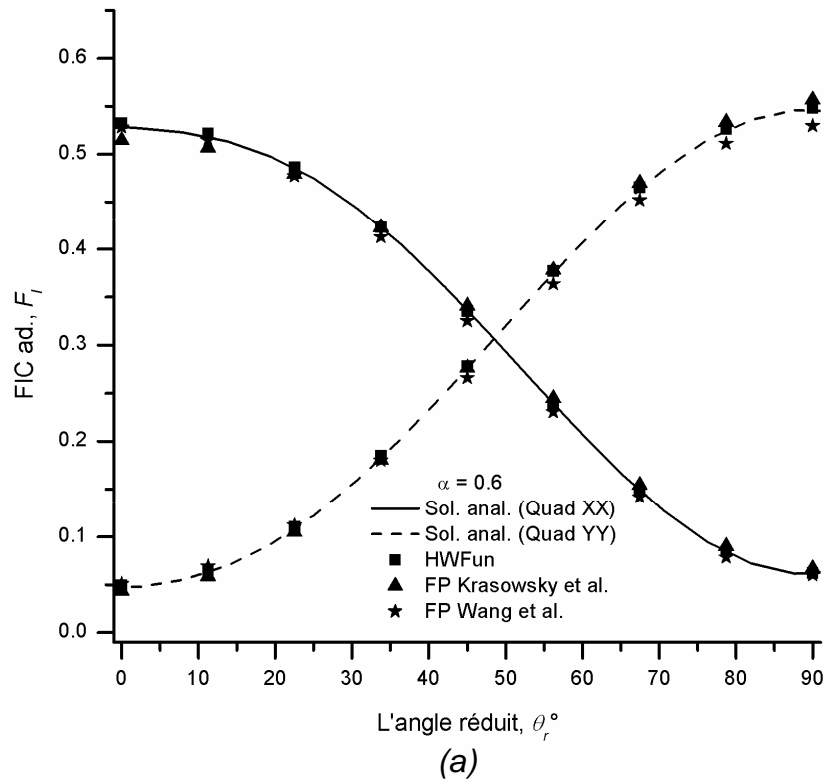


Figure 35 : FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique pour $\alpha = 0.6$
 (a) Chargement quadratique XX et YY – (b) Chargement quadratique XY

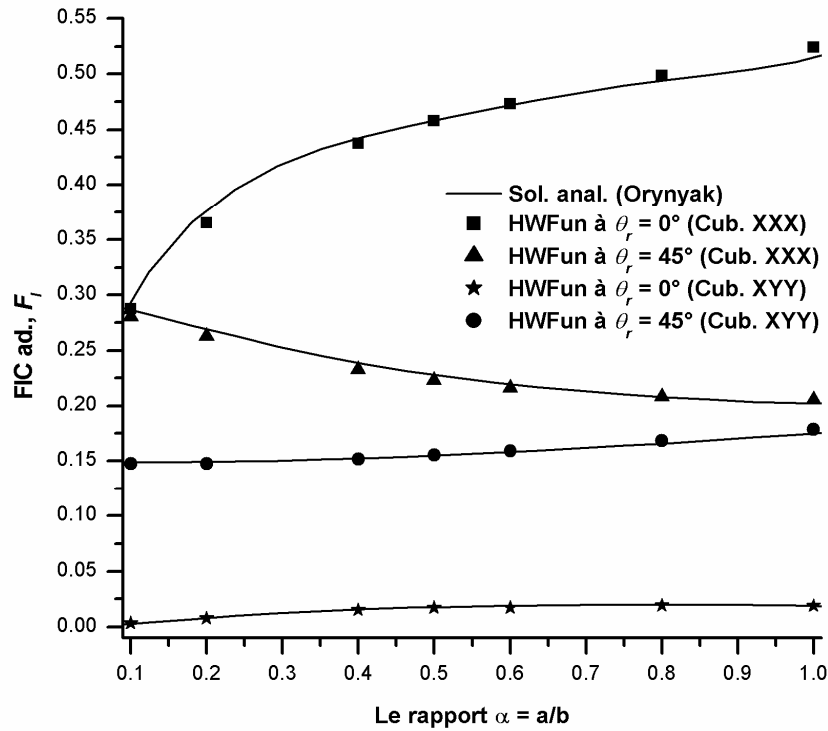


Figure 36 : Variation du FIC adimensionnel F_I en fonction du rapport α à $\theta_r = 0^\circ$ et 45° pour des chargements cubiques

IV.3 Fissure elliptique interne transversale dans une plaque sous flexion

La présence des lacunes et des inclusions à l'intérieur des plaques travaillant en flexion constitue un problème rencontré couramment en pratique. L'existence de tels défauts fragilise les structures en diminuant considérablement leur résistance et augmente leur risque de fissuration. Dans l'étude de ces structures, les défauts sont souvent assimilés à des fissures elliptiques planes plus au moins aplaties, afin de pouvoir affiner le calcul de leur résistance. Pour une plaque de grandes dimensions sollicitée en flexion et comprenant une fissure elliptique transversale (voir la figure 37), l'expression du FIC est donnée par [Bar-1980] :

$$K_I = C\sigma\sqrt{\frac{\pi a}{\omega}}(\cos^2\theta_r + \alpha^2\sin^2\theta_r)^{1/4}\left[1 - \frac{k^2 E(k)\cos\theta_r}{(1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)}\right] \quad (56)$$

où σ est la contrainte appliquée sur la fissure, C est un facteur correcteur dépendant des paramètres géométriques θ , α , a/d et de la limite élastique (σ_e), ω est un paramètre qui vaut $E(k)^2$ pour les faibles valeurs du rapport σ/σ_e , $K(k)$ est l'intégrale elliptique de première espèce et $E(k)$ est l'intégrale elliptique de seconde espèce comme précédemment définies. Le

paramètre d est la distance de la fissure à la surface libre la plus proche et h sa distance à la deuxième surface libre ($h \geq d$). Pour un coefficient de Poisson $\nu=0.3$, la référence [Bar-1980] nous fournit les valeurs de C sous la forme d'abaques. Par exemple, pour $a/d \leq 0.2$, $\theta_r \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\alpha \in [0.1, 1.0]$, on a $C \approx 1$.

Le cas d'une plaque de grandes dimensions (considérée comme infinie) soumise à une flexion pure comme illustré sur la figure 37 avec $a/d \leq 0.2$ et $\sigma(y) = \sigma_0(1+(y/a))$, est considéré et résolu par l'approche d'hybridation. Les résultats trouvés sont reportés sur les figures 38, 39 et 40. Le graphe de la figure 38 donne le FIC en fonction de θ , dans le cas d'une fissure circulaire. On observe que les résultats trouvés par hybridation (*HWFun*) ou en utilisant une seule fonction de poids (celle de Krasowsky et al. [Kra-1999] utilisée dans *HWFun*) corroborent de façon presque identique avec la solution analytique (56), comme c'était le cas pour un milieu infini et un chargement uniforme (voir le tableau IV).

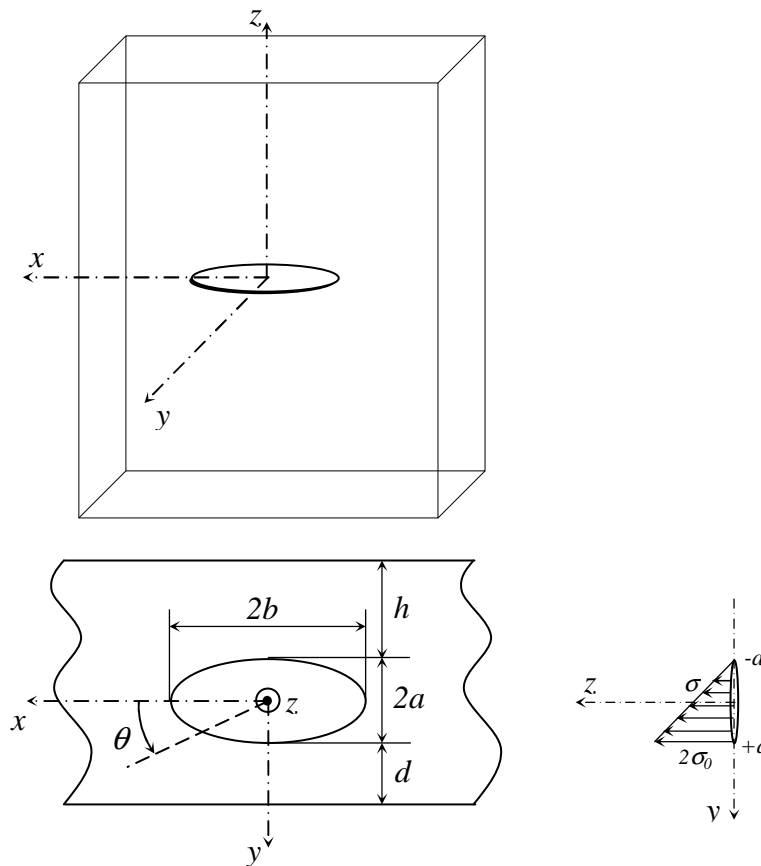


Figure 37 : Fissure elliptique interne dans une plaque infinie sous flexion

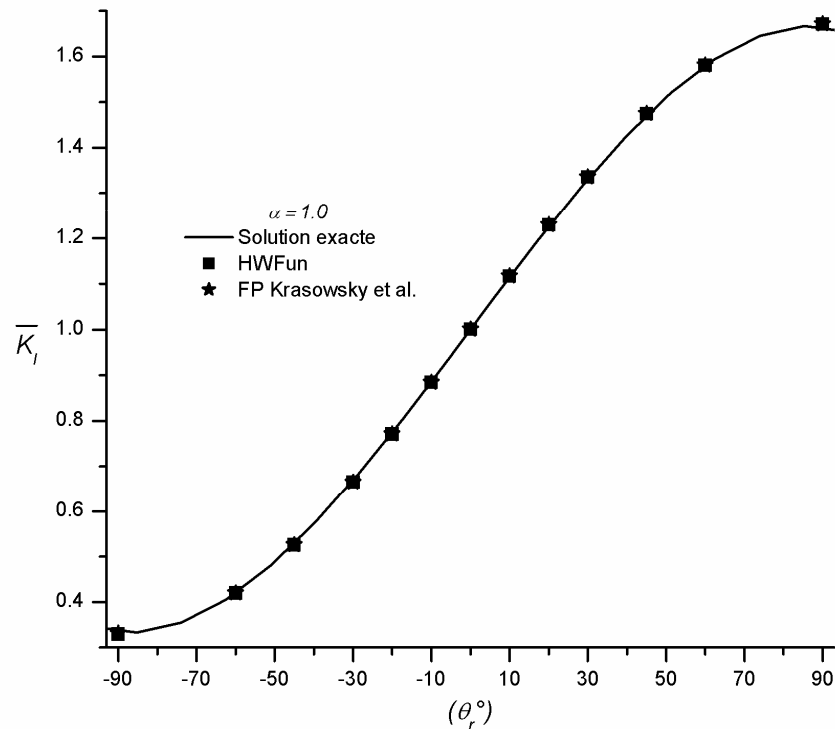


Figure 38 : Variation du FIC adimensionnel K_I sur le contour d'une fissure circulaire ($\alpha = 1.0$)

Les graphes de la figure 39 montrent la même qualité de résultats concernant \bar{K}_I calculés par notre code *HWFun* basé sur hybridation et ceux trouvés en utilisant la fonction de poids de Krasowsky et al. [Kra-1999]. L'avantage de l'approche par hybridation est constatable notamment pour $-30^\circ < \theta_r < +30^\circ$. Sur le graphe de la figure 40, on s'intéresse au calcul de FIC au point correspond à son maximum sur le contour de la fissure ($\theta_r = \pi/2$) pour différentes valeurs de α (de 0.1 à 1.0). D'après ce graphe, la qualité des résultats obtenus par hybridation est mieux mise en évidence comparée à celle des résultats obtenus en utilisant la fonction de poids de Krasowsky et al. [Kra-1999] sur tout la domaine de la fissure ($\beta = 1$).

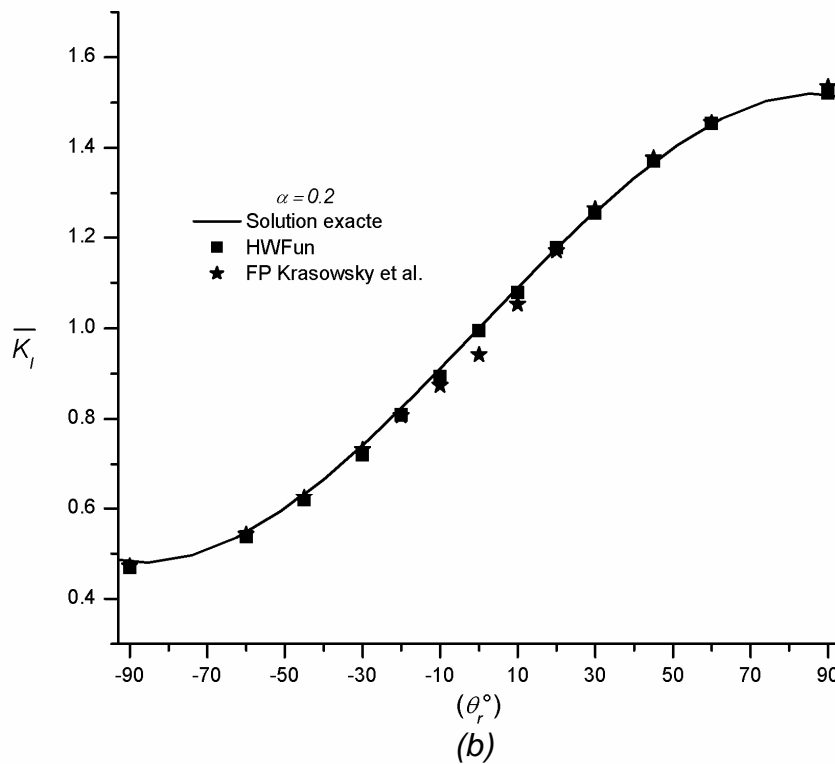
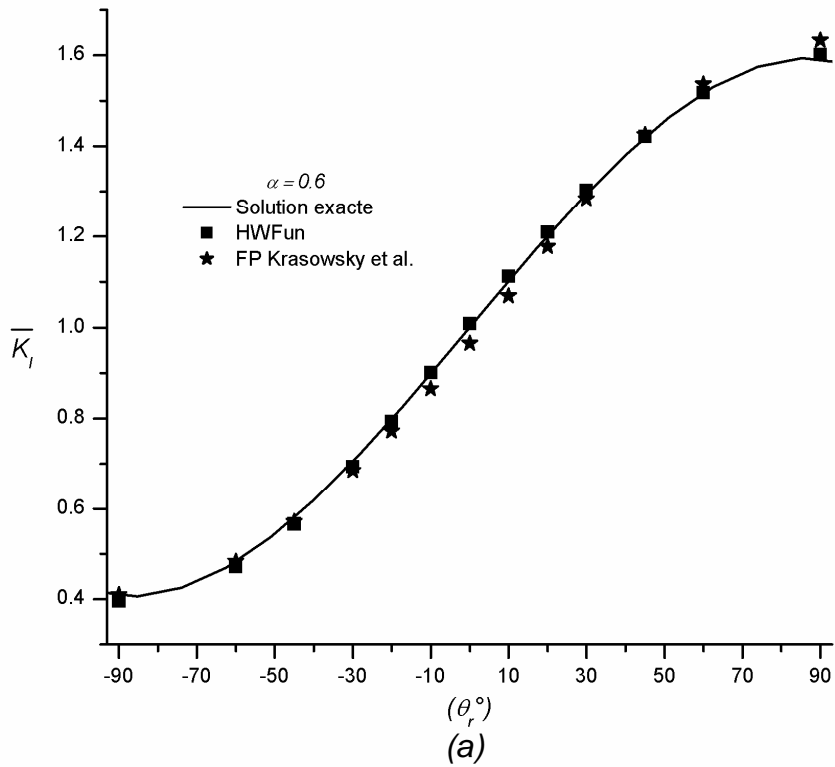


Figure 39 : Variation du FIC adimensionnel \bar{K}_I pour une fissure elliptique dans une plaque sous flexion (a) pour $\alpha = 0.6$, (b) pour $\alpha = 0.2$

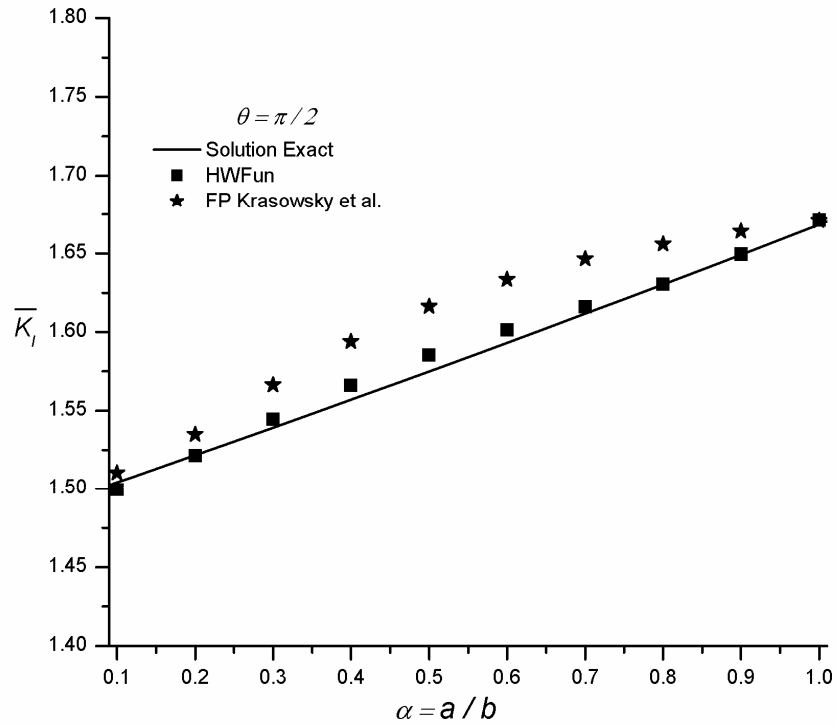


Figure 40 : Variation du FIC adimensionnel \bar{K}_I pour une fissure elliptique dans une plaque sous flexion pour $\alpha \in [0.1, 1.0]$ et $\theta = \pi/2$.

IV.4 Fissure elliptique interne dans un tube sous pression

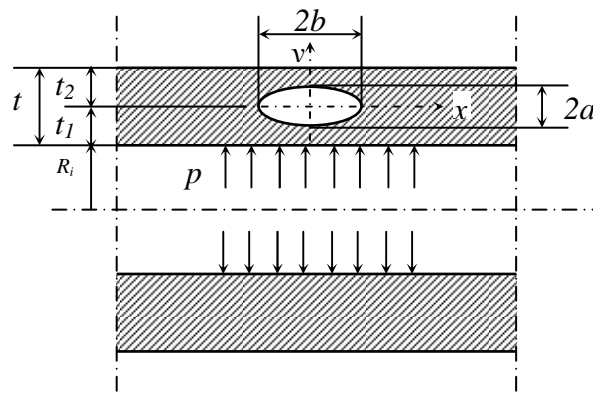


Figure 41 : Fissure elliptique interne dans un tube sous pression

Le problème des tubes travaillant sous pression interne est aussi répondu que le problème précédent (plaque sous flexion). La présence de lacunes, d'inclusions ou de défauts de joints de soudure dans ces structures fragilise ces dernières et diminue leur ténacité. Comme pour le cas des plaques ces défauts sont couramment décrits comme des fissures de forme elliptique. Ces fissures peuvent être transversales, longitudinales ou autres. Ce sont les fissures longitudinales, objet de notre étude, qui sont les plus dangereuses compte tenu du risque d'ouverture de la fissure sous l'effet de la pression interne. C'est un problème où le chargement, dû essentiellement à la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ à l'intérieur de la fissure, a une distribution non-polynomiale. Cette dernière est donnée par la relation de Lamé :

$$\sigma_{\theta\theta} = p_i \left[\left(\frac{R_i + t}{R_i + t_1 + y} \right)^2 + 1 \right] / \left[\left(\frac{R_i + t}{R_i} \right)^2 - 1 \right] \quad (57)$$

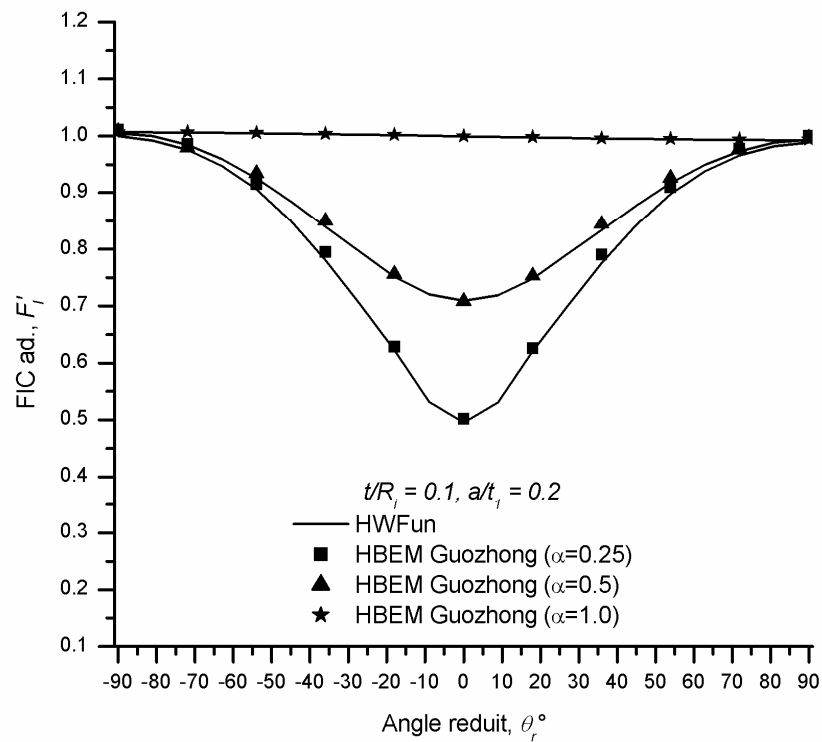
avec R_i le rayon intérieur du tube, t son épaisseur, t_1 et t_2 les distances entre le centre de la fissure et les parois du tube, p_i la pression intérieure et y l'ordonnée du point Q liée au repère mentionné sur la figure 41.

La présente approche est comparée avec la méthode des éléments de frontières hybrides HBEM développée par Guozhong & Kankda [Guo1-1995]. Le FIC adimensionnel $F_1' = K_1 E(k) / (p(R_i/t)\sqrt{\pi a})$ est alors déterminé sur le contour de l'ellipse pour les configurations suivantes :

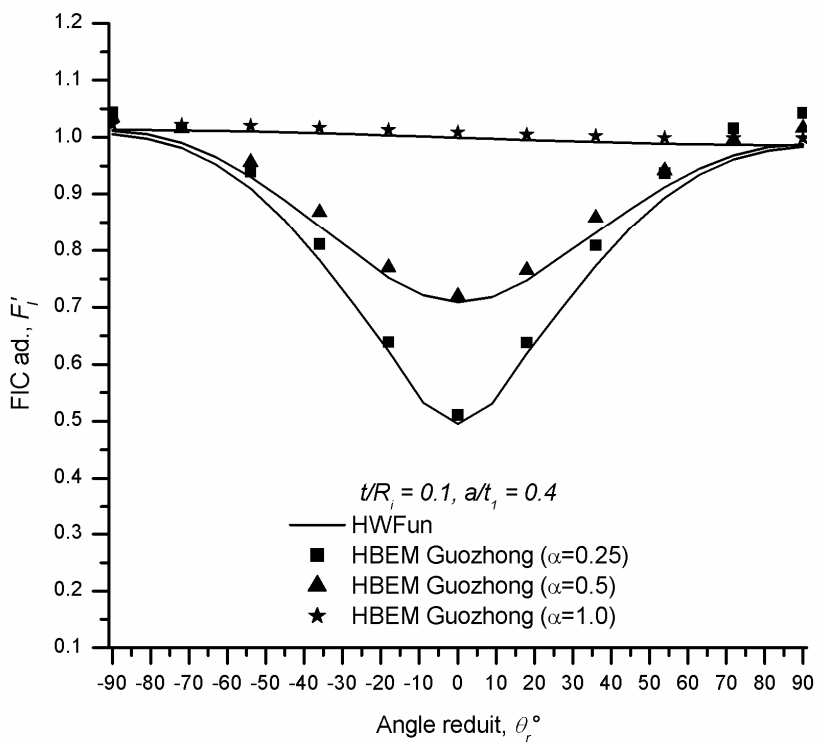
$$t/R_i = \{0.1, 0.25\}, a/t_1 = a/t_2 \in \{0.2, 0.4\}, \alpha \in \{0.25, 0.50, 1.00\}$$

Comme on peut le constater sur les comparaisons reportées sur les figures 42a et 42b pour $t/R_i=0.1$, notre approche initialement prévue pour des corps infinis reste valable même pour des corps finis (c'est le cas pour le tube étudié). Le décalage avec la HBEM, qui est une approche plus générale, ne dépasse pas les 6% tant que a/t_1 et $a/t_2 \leq 0.4$.

Le décalage augmente en se rapprochant des surfaces libres du tube, c-à-d lorsque le rapport a/t_1 augmente ou lorsque θ_i tend vers $\pm 90^\circ$. Les surfaces libres engendrent des concentrations de contraintes non prises en compte par la méthode d'hybridation dans sa version actuelle. Comme prévu, on remarque que la HBEM montre une certaine sensibilité à cet effet au voisinage de la surface libre ($\theta \rightarrow \pm 90^\circ$) lorsque a/t_1 augmente. Les mêmes remarques sont maintenues pour $t/R_i=0.25$ car l'influence de l'épaisseur du tube sur la convergence des résultats n'est pas trop importante comme le montrent les figures 43a et 43b.



(a)



(b)

Figure 42 : FIC adimensionnel F'_I pour $t/R_i=0.1$ (a) avec $a/t_i = 0.2$ – (b) avec $a/t_i = 0.4$

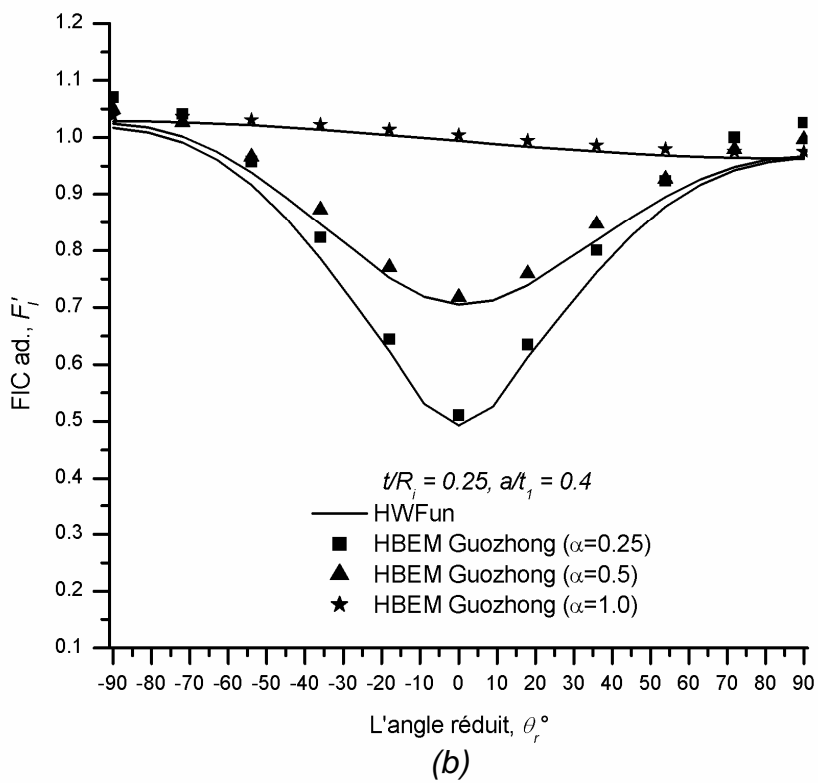
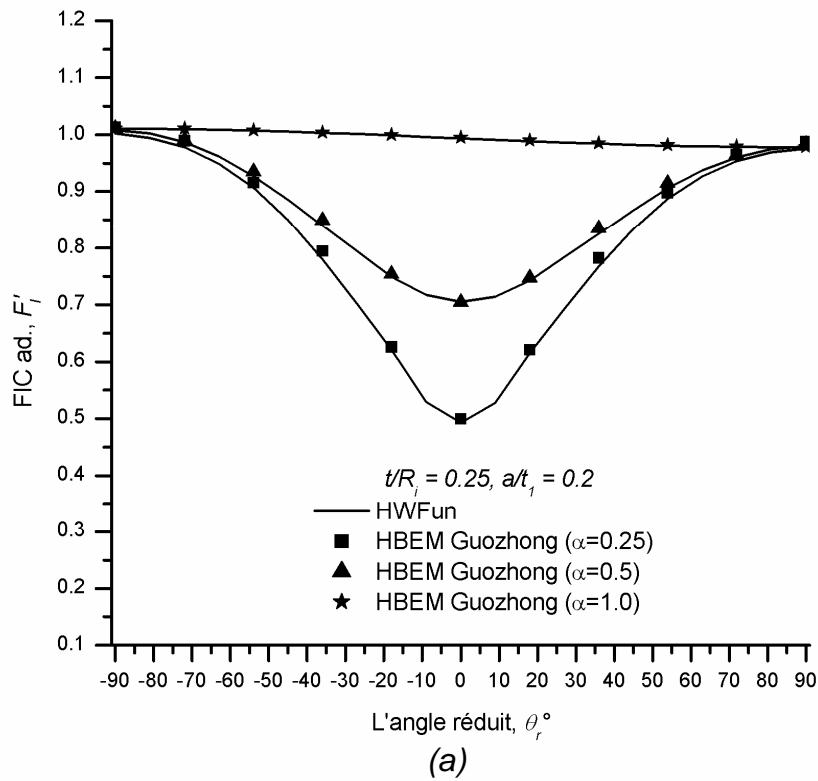


Figure 43 : FIC adimensionnel F_1' pour $t/R_i=0.25$ (a) avec $a/t_i = 0.2$ – (b) avec $a/t_i = 0.4$

IV.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons testé la technique d'hybridation de fonctions de poids en utilisant le code de calcul *HWFun* sur des applications de structures tridimensionnelles contenant des fissures elliptiques internes. Grâce à l'hybridation nous avons pu améliorer les résultats sur les FIC pour les milieux infini par rapport à ceux obtenus en utilisant les fonctions de poids conventionnelles (d'autres auteurs). Les résultats sont aussi améliorés par rapport à ceux des travaux utilisant d'autres techniques telles que la FEM et la XFEM. En l'absence de solution analytique, les résultats obtenus pour les milieux finis (tubes) sont en bonne concordance avec ceux des auteurs utilisant la technique HBEM. Ces résultats montrent sans doute l'intérêt de l'hybridation présentée dans cette étude.

Chapitre V :
Application de la
méthode d'hybridation
aux cas des fissures
semi-elliptiques
débouchantes

V.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de résoudre cinq problèmes types de fissures semi-elliptiques débouchantes en utilisant la technique d'hybridation couplée avec la PWFm. Pour se faire, l'effet de bord du à la surface libre est pris en compte en modifiant la fonction de poids hybride (13) selon les expressions (38), (42) et (45) développées dans la section (II.5). En l'absence de solutions analytiques exactes pour l'évaluation du FIC dans le cas de fissures semi-elliptiques ou de valeurs expérimentales, plus disponibles en fatigue, les résultats obtenus avec la présente approche seront comparés à des résultats de la littérature obtenus par approximation numérique ou par une démarche empirique. Les problèmes traités dans ce chapitre sont dans l'ordre :

- 1) Tube mince contenant une fissure semi-elliptique débouchante interne sous un chargement polynomial.
- 2) Fissure semi-elliptique à l'intérieur d'un tube épais sous un chargement polynomial et sous un chargement de Lamé.
- 3) Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion et sous sollicitation composée (flexion+traction).
- 4) Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque avec un chargement polynomial.
- 5) Plaque contenant une fissure semi-elliptique débouchante sous un chargement exponentiel.

On va successivement examiner les cinq cas mentionnés précédemment.

V.2 Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube mince

La théorie de Lamé (voir la référence [Tim-1970]) montre que les fissures longitudinales situées sur la paroi interne d'un tube comme le montre la figure 44 sont les plus dangereuses. Nous appliquons l'approche d'hybridation couplée avec la PWFm développée ici pour évaluer le FIC dans le cas d'un tube relativement mince avec $t/R_i = 0.1$, $a/t = 0.5$ pour $\alpha = 1.0$ et $\alpha = 0.4$ (voir la figure 44) renfermant une fissure soumise à un chargement intérieur de forme polynomiale $p = \sigma_0(y/a)^i$. Nous considérons que la solution de référence est celle qui

correspond à $p = \sigma_0$ en accord avec la technique de PWFm. Le calcul de $\bar{K}_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)}$

est réalisé pour les deux points caractéristiques de la fissure $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$ successivement pour des chargements linéaire ($i=1$), quadratique ($i=2$) et cubique ($i=3$). D'après les graphes

de la figure 45, les résultats trouvés avec notre code de calcul *HWFun* sont en bon accord avec ceux trouvés par Raju & Newman [Raj-1982] utilisant la méthode des éléments finis et ceux trouvés par Krasowsky *et al.* [Kra-1999], Vainshtock [Vai-1991] et Orynyak *et al.* [Ory-1995] utilisant les méthodes de fonction de poids. D'après ces graphes, le mode de chargement imposé influe de manière significative sur les valeurs du FIC. En effet,

- i) Plus α diminue plus les valeurs du FIC augmentent.
- ii) Le maximum du FIC correspond au chargement uniforme pour lequel le calcul de résistance sera éventuellement effectué.
- iii) Seul le chargement uniforme provoque un FIC plus important au point de surface ($\theta = 0^\circ$) qu'au point du fond de la fissure ($\theta = 90^\circ$).

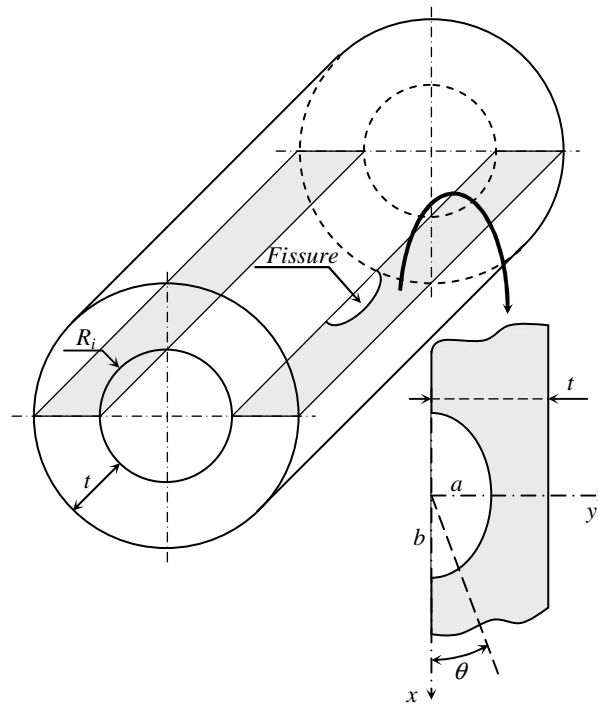


Figure 44 : Fissure semi – elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube

V.3 Fissure semi-elliptique débouchante à l'intérieur d'un tube épais

Dans cet exemple, on résout le même type de problème qu'en (V.2) posé sur un tube de même épaisseur et de rayon intérieur relativement faible ($t/R_i = 0.5$). Le but étant de tester la validité de l'approche d'hybridation et de mieux connaître ses limites notamment lorsqu'on s'éloigne de l'hypothèse d'un milieu semi-infini (une surface libre loin d'être plate), comme c'est le cas du présent exemple.

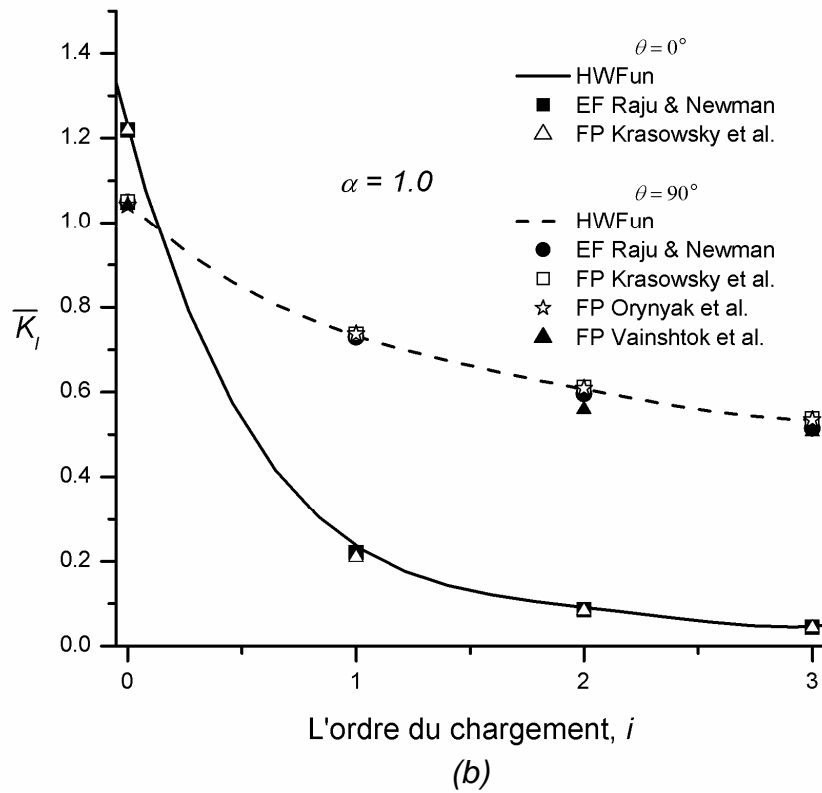
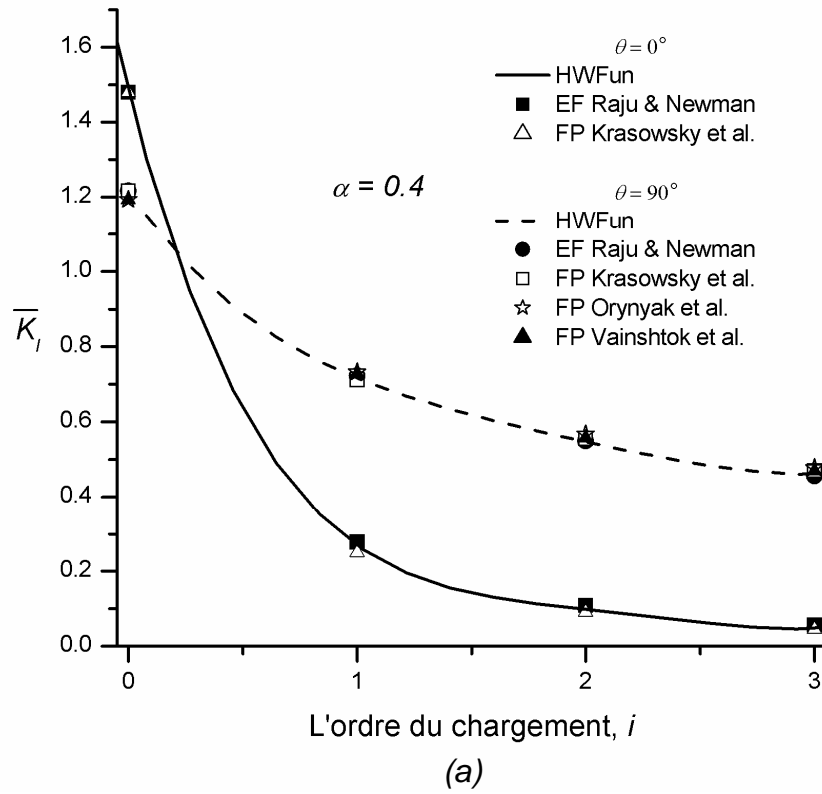


Figure 45 : FIC adimensionnel pour une fissure semi-elliptique dans un tube mince et sous un chargement polynomial - (a) $\alpha = 1.0$ - (b) $\alpha = 0.4$

Le chargement considéré est similaire à celui de l'exemple précédent. Il s'agit d'un chargement à l'intérieur de la fissure de la forme polynomiale $p = \sigma_0(y/a)^i$. Les deux cas relatifs au rapport α que nous retenons pour le présent calcul sont ceux traités par Mettu *et al.* [Met-1992] à savoir $\alpha = 0.2$ et $\alpha = 1$. Nous considérons que l'ordre du chargement et la profondeur relative de la fissure sont variables ; $i \in \{0, 0.5, 1, 2, 3\}$ et $\frac{a}{t} \in [0, 1]$.

Comme pour le cas du tube mince, la solution de référence retenue est celle qui correspondant au chargement le plus simple $p = \sigma_0$ ($i=0$). Dans les figures 46 et 47, nous proposons une comparaison entre les valeurs du FIC adimensionnel \bar{K}_I obtenues en utilisant notre code de calcul et celles obtenues par Mettu *et al.* [Met-1992] pour les deux points caractéristiques du bout de la fissure ; le point de surface ($\theta = 0^\circ$) et le point du fond ($\theta = 90^\circ$). Les résultats de Mettu *et al.* [Met-1992], obtenus par la méthode des éléments finis basée sur le maillage de toute la structure du problème, nous serviront comme des résultats de référence que nous utiliserons pour tester la fiabilité de la technique d'hybridation.

Les comparaisons effectuées (figures 46 et 47) permettent de montrer la très bonne concordance de nos résultats avec ceux de Mettu *et al.* [Met-1992]. Cette concordance se dégrade en augmentant la profondeur relative de la fissure a/t . Ce que nous trouvons très logique vu l'influence de la deuxième surface libre (paroi externe du tube) non pris en compte par notre approche.

Les observations faites dans l'exemple précédent concernant l'influence du mode de chargement restent valables. Ce qu'on peut rajouter est le fait que le FIC croit aussi en augmentant la profondeur relative a/t . Cet effet est plus accentué pour des valeurs de α faibles ($\alpha = 0.2$). Ceci est physiquement plausible compte tenu de la fragilisation de la structure (réduction de sa ténacité) due à l'augmentation de la profondeur de la fissure (moins de matière supportant la traction).

Dans la deuxième partie de cet exemple, nous nous intéressons à un mode de chargement plus concret. Il s'agit d'appliquer directement la sollicitation due essentiellement à la contrainte de Lamé $\sigma_{\theta\theta}$ donnée par l'équation (57), sans faire appel à des approximations polynomiales du chargement comme dans les précédents cas. L'étude de ce type de chargement est utile compte tenu de l'influence que peut avoir $\sigma_{\theta\theta}$ sur la tenue mécanique de la structure. En effet, cette contrainte de par sa nature tend à ouvrir la fissure. De plus, sa variation en fonction de la position dans l'épaisseur donnée par (57) montre qu'elle prend son maximum au niveau de la

paroi interne, ce qui rend cette contrainte encore plus néfaste pour l'intégrité physique de la structure.

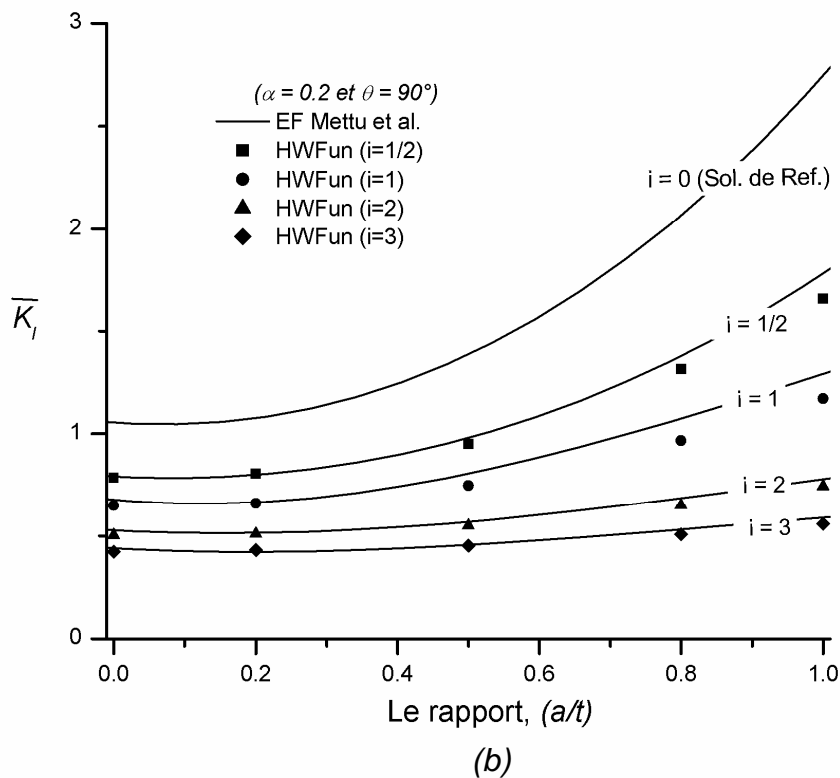
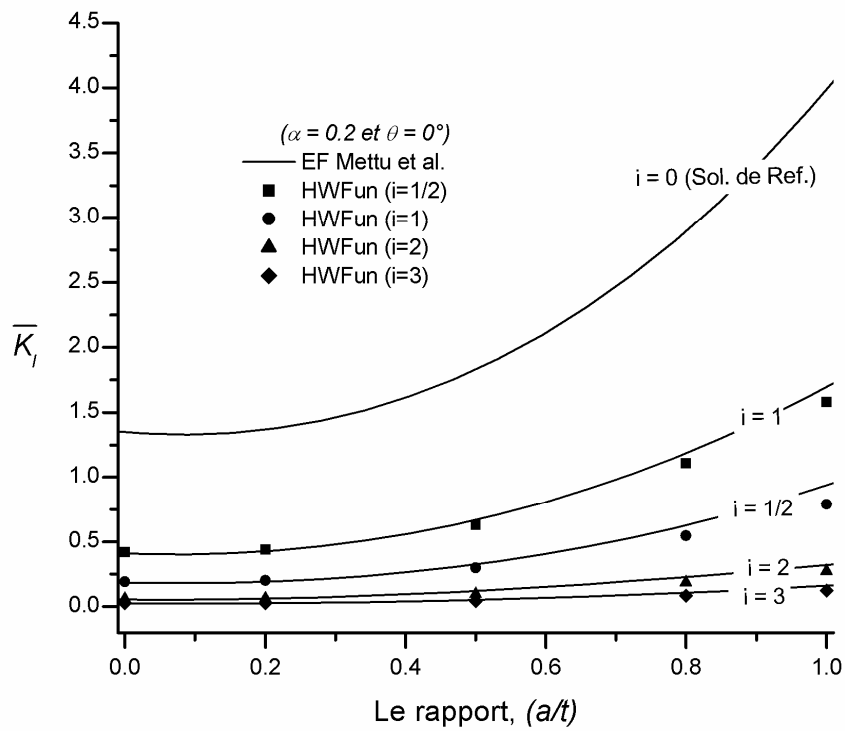


Figure 46 : FIC adimensionnel pour une fissure semi – elliptique pour dans un tube épais et sous un chargement polynomial pour $\alpha=0.2$ (a) pour $\theta = 0^\circ$ - (b) pour $\theta = 90^\circ$

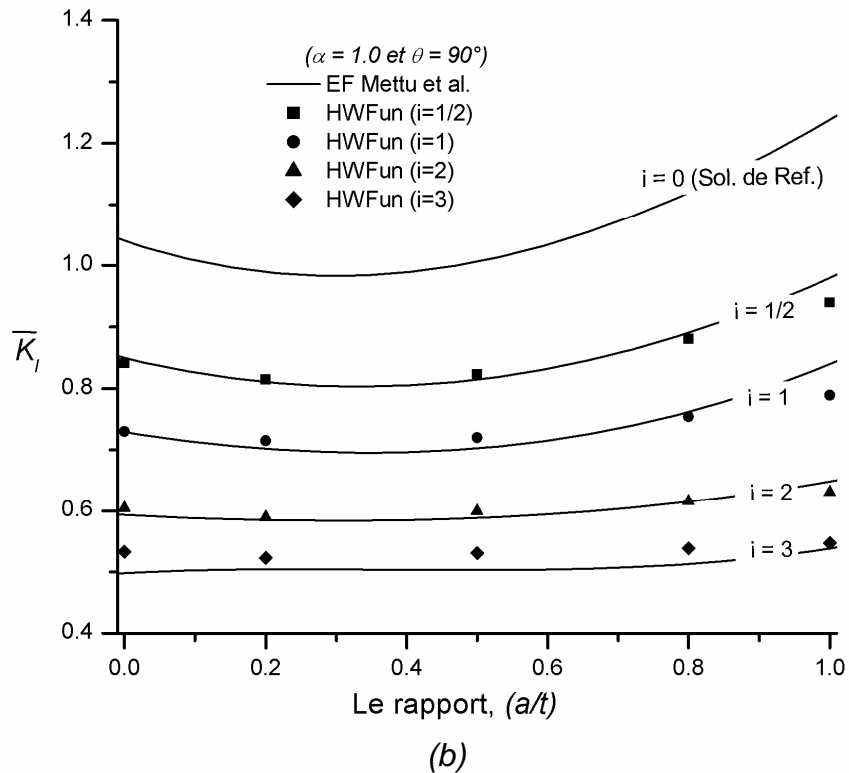
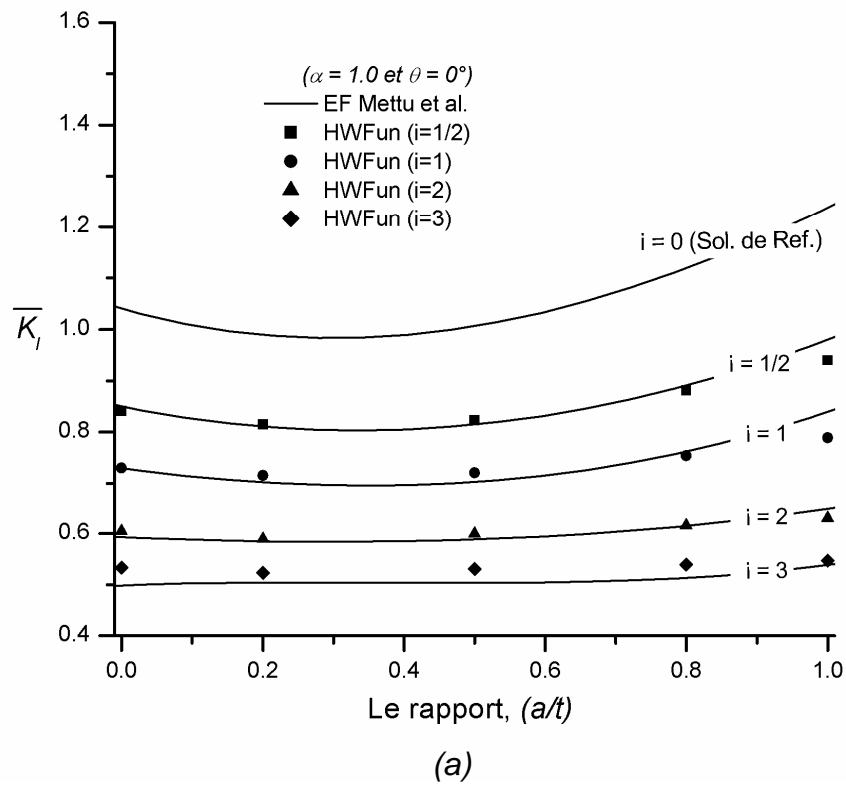


Figure 47 : FIC adimensionnel pour une fissure semi – elliptique pour dans un tube épais et sous un chargement polynomial pour $\alpha=1.0$ (a) pour $\theta = 0^\circ$ - (b) pour $\theta = 90^\circ$

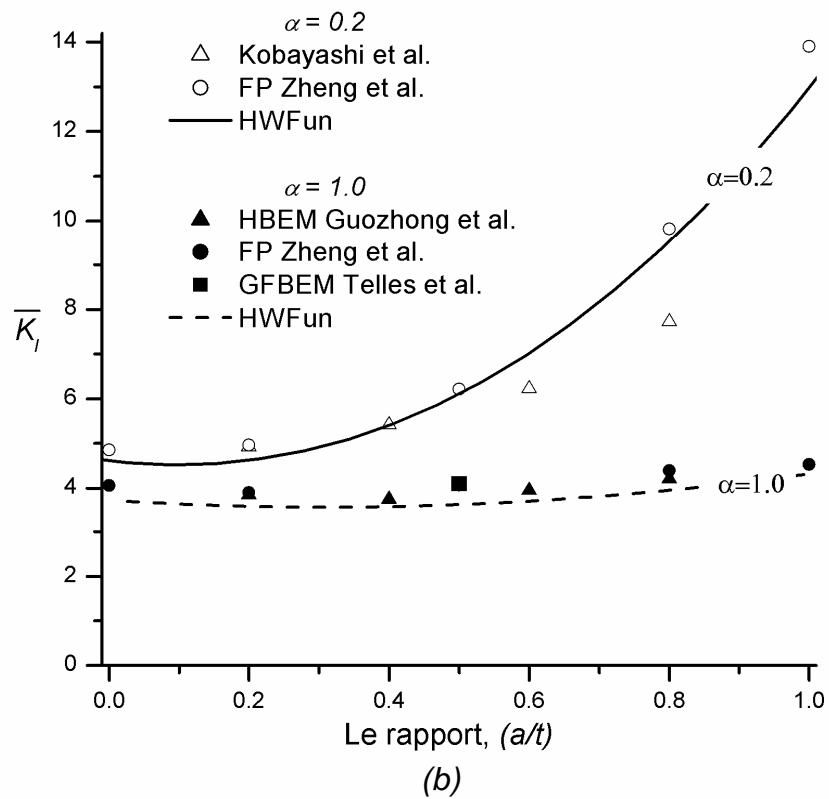
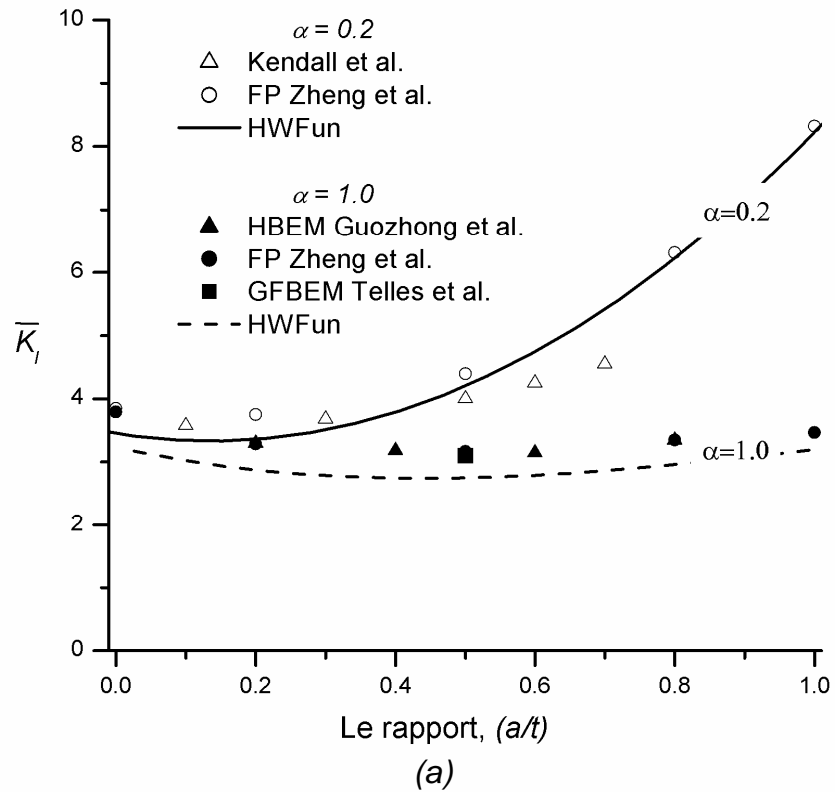


Figure 48 : FIC adimensionnel pour une fissure semi-elliptique dans un tube épais et sous un chargement de Lamé (a) pour $\theta = 90^\circ$, (b) pour $\theta = 0^\circ$.

De plus, dans le cas d'un écoulement à l'intérieur du tube, la contrainte due à la pression du fluide p_i qui s'infiltrerait entre les lèvres de la fissure doit être prise en compte pour trouver le chargement effectif appliqué à la fissure. Ce dernier se présente donc sous la forme suivante :

$$\sigma(y) = p_i \left[1 + \frac{R_i^2}{(2R_i + t)t} \left(1 + \left(\frac{R_i + t}{R_i + y} \right)^2 \right) \right] \quad (58)$$

y étant l'ordonnée selon le repère lié à l'épaisseur du tube (voir la figure 31).

Partant d'un FIC adimensionnel donné par $\bar{K}_I = \frac{K_I E(k)}{p_i \sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(\theta)}$, nous présentons sur la figure

48 une comparaison entre les résultats que nous avons obtenus avec le code de calcul basé sur la technique d'hybridation des fonctions de poids *HWFun* et ceux trouvés par des auteurs tels que Kobayashi et al. [Kob-1979], Kendall & Perez [Ken-1993], Guozhong et al. [Guo2-1995], Zheng et al. [Zhe-1997] et Telles et al. [Tel-2002] utilisant d'autres techniques (la méthode des éléments finis, la méthode hybride des éléments de frontière HBEM, la méthode des fonction de poids et la méthode de fonction de Green utilisée dans la méthode des éléments de frontière GFBEM). Ces résultats, plus ou moins dispersés, sont purement numériques et nulle solution exacte n'est connue à ce jour comme nous l'avons précédemment évoqué. Les comparaisons permettent néanmoins d'observer la concordance du point de vue de l'allure entre nos résultats et ceux obtenus par les autres auteurs pour une profondeur relative de la fissure a/t allant de 0 à 1. Nous constatons que pour ce problème, les valeurs du FIC sont nettement plus grandes pour le point de surface ($\theta = 0^\circ$) que pour le point du fond ($\theta = 90^\circ$), notamment en $\alpha = 0.2$, et ceci pour toutes les valeurs de la profondeur relative de la fissure a/t .

V.4 Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque sous flexion

Les défauts dus aux procédés de fabrication des plaques et notamment ceux de soudure constituent souvent une source de fragilisation des plaques en augmentant le risque de rupture par fissuration de ces dernières. Ces défauts sont fréquemment modélisés par des fissures débouchantes de forme semi-elliptique plus ou moins aplaties. Le présent exemple est une illustration de ce type de problème. C'est le cas d'une plaque d'épaisseur t et de largeur w contenant une fissure semi-elliptique débouchante (voir figure 49).

Nous nous intéressons dans cet exemple au calcul du FIC adimensionnel $F_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$ de la

fissure soumise à un chargement donné par $\sigma_0 = \max(\sigma_t, \sigma_f)$ où σ_t et σ_f représentent

respectivement les contraintes de traction et de flexion. Cette dernière est exprimée en fonction du moment de flexion M par $\sigma_f = \frac{3M}{wt^2}$.

Deux modes de chargement sont considérés ; un chargement de flexion simple ($\sigma_t=0$ et $\sigma_f=1$) et un chargement de flexion composée ($\sigma_t=1$ et $\sigma_f=1$).

Ce même problème a été traité par Newman & Raju [New-1979, New-1981] chronologiquement par la méthode des éléments finis et de manière empirique. Les auteurs proposent ainsi l'expression empirique suivante du FIC [New-1981]:

$$K_I = (\sigma_t + H\sigma_f) \frac{\sqrt{\pi a}}{E(k)} U \quad (59)$$

H et U sont des fonctions à plusieurs variables liées à la configuration géométrique de la structure étudiée $\left(\frac{a}{t}, \alpha, \frac{b}{w}, \theta_r\right)$, θ_r étant l'angle réduit de θ . La fonction U est un facteur de correction concernant la contrainte de traction de la plaque par rapport à un milieu infini. Pour la contrainte de flexion, le facteur correcteur est le produit des deux fonctions U et H . Les expressions détaillées de ces fonctions sont fournies dans la référence [New-1981].

Le présent problème a aussi été traité par Isida et al. [Isi-1984] en utilisant la méthode des volumes finis modifiés (MBFM) et par Gonçalves & de-Castro [Gon-1999] par la méthode appelée « Line Spring Model » (LSM).

Dans la suite, nous retenons comme solution de référence du problème, la solution trouvée par Newman & Raju [New-1979] basée sur la méthode des éléments finis pour un chargement de traction pure ($\sigma_t=1$ et $\sigma_f=0$).

Plusieurs configurations sont considérées dans cet exemple, à savoir :

- $\alpha \in \{0.2, 0.4\}$ pour $\theta_r \in \{0, \pi/2\}$ et $a/t \in [0, 0.8]$.
- $\alpha \in \{0.6, 1.0\}$ pour $\theta_r \in \{0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2\}$ et $a/t \in [0, 0.8]$.

On reporte sur les figures 50, 51 et 52 les résultats obtenus par différentes approches pour le mode de flexion simple.

Sur la figure 50, on s'est limité, pour $\alpha = 0.2$ et $\alpha = 0.4$, à la présentation des courbes concernant les points caractéristiques A ($\theta_r = \pi/2$) et B ($\theta_r = 0$), celles correspondant aux autres points ($\theta_r = \pi/8$, $\theta_r = \pi/4$, $\theta_r = 3\pi/8$) étant très proches les unes des autres. Cependant, pour des valeurs plus grandes de α ($\alpha = 0.6$ et $\alpha = 1.0$), les courbes concernant les valeurs intermédiaires ($\theta_r = \pi/8$, $\theta_r = \pi/4$, $\theta_r = 3\pi/8$) sont présentées sur les figures 51b et 52b où les variations du FIC en fonction de θ_r sont plus distinctes.

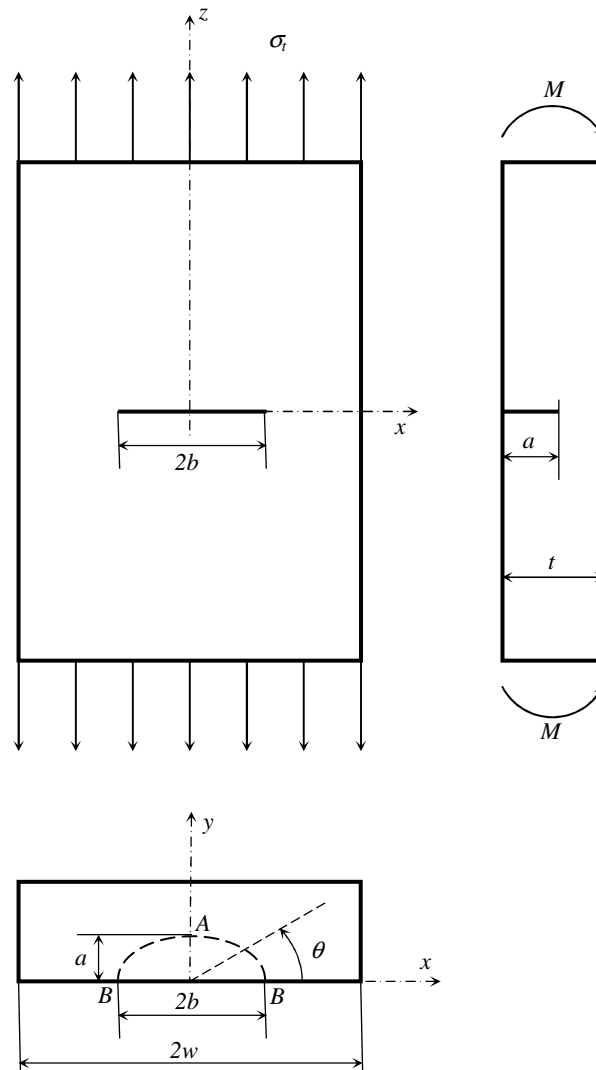


Figure 49 : Fissure semi – elliptique dans une plaque sous sollicitation composée (traction+flexion).

A l'exception de la courbe de la figure 52a (pour $\alpha = 1.0$), nous constatons que le maximum du FIC pour toutes les autres courbes correspond au point du fond de la fissure A ($\theta_r = \pi/2$) pour $a/t \rightarrow 0$. Notons aussi, d'après les figures 50, 51 et 52, que la décroissance du FIC en fonction du rapport a/t est plus rapide pour le point A ($\theta_r = \pi/2$) puisqu'il est le plus proche de la surface arrière de la plaque (voir figure 49), donc c'est le point le plus exposé à l'influence de l'épaisseur de la plaque. En ce point, le FIC peut atteindre des valeurs négatives (qui sont physiquement des valeurs nulles) pour les cas $\alpha = 0.6$ et $\alpha = 1.0$ (voir les figures 51a et 52a) à cause des contraintes négatives (compression) au voisinage du point A dues à la flexion.

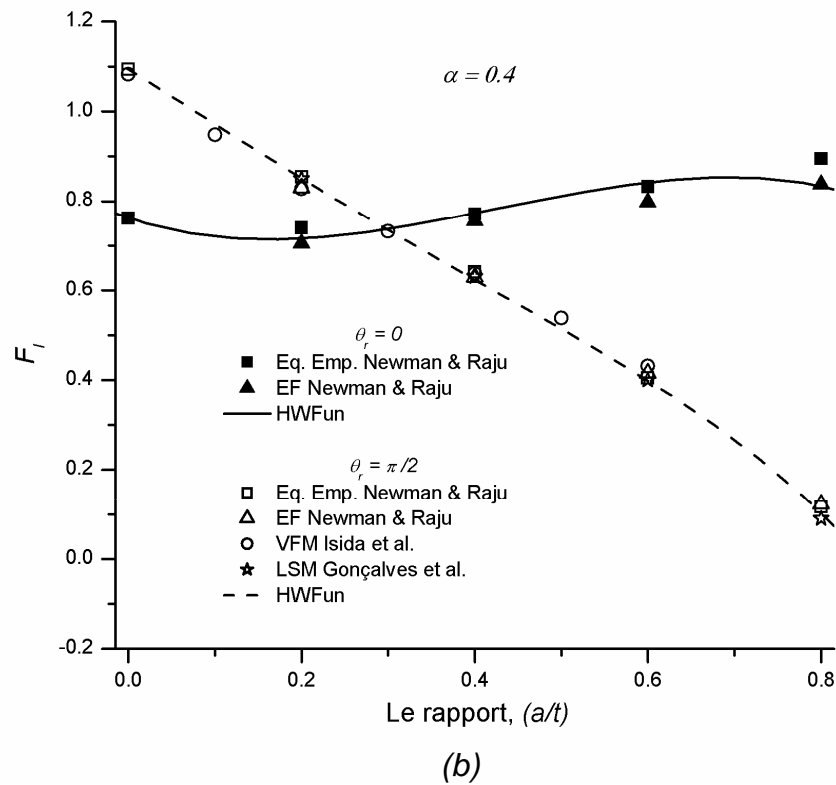
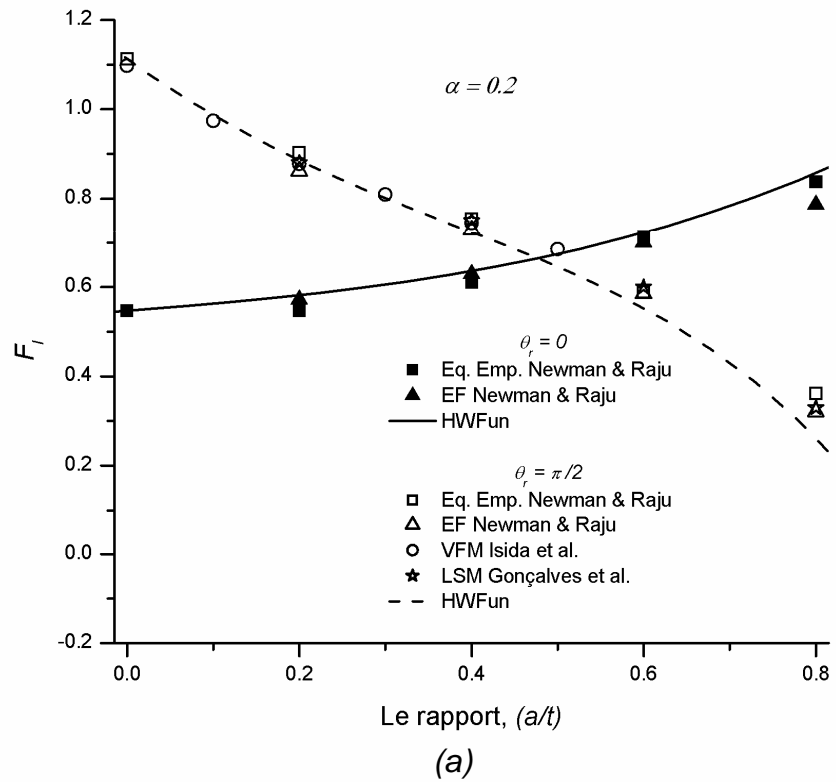


Figure 50 : FIC adimensionnel à $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ dans le cas d'une flexion pure ($\sigma_r = 0$ et $\sigma_t = 1$) (a) pour $\alpha = 0.2$, (b) pour $\alpha = 0.4$

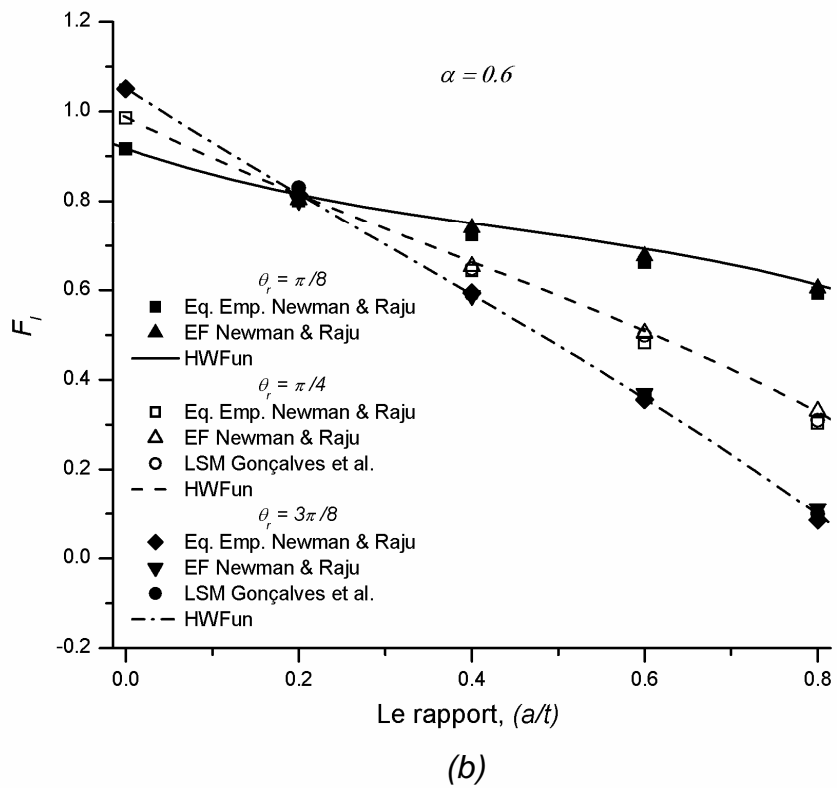
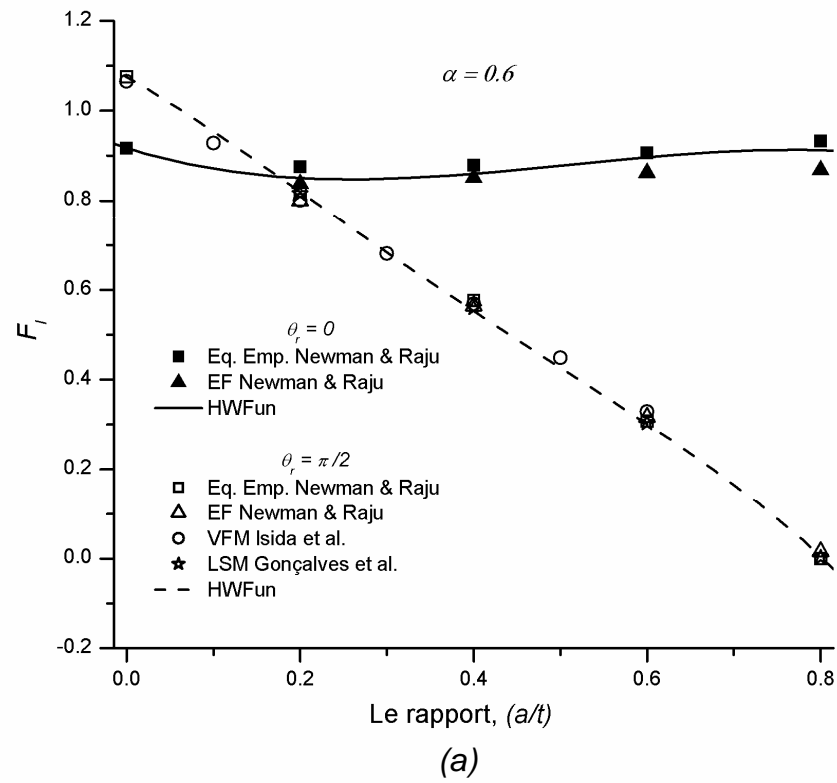
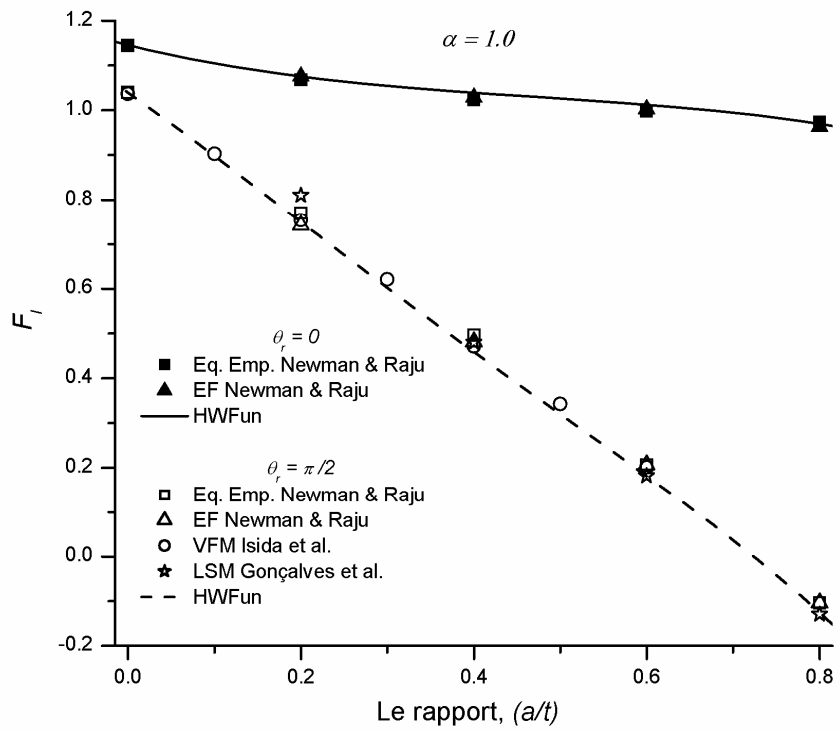
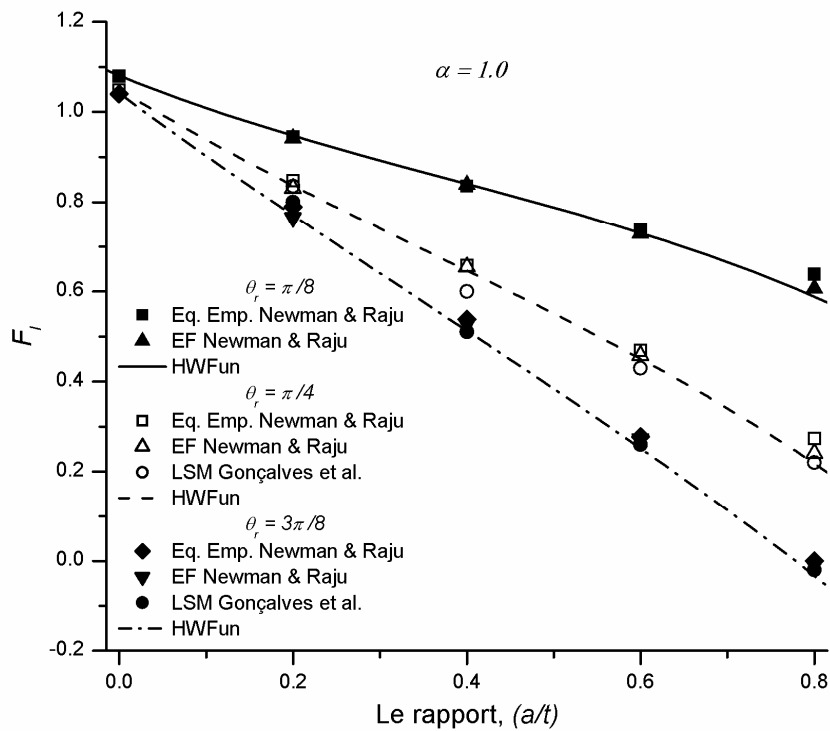


Figure 51 : FIC adimensionnel pour $\alpha = 0.6$ dans le cas d'une flexion pure ($\sigma_i = 0$ et $\sigma_j = 1$) (a) à $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$ (b) à $\theta = \pi/8$, $\theta = \pi/4$ et $\theta = 3\pi/8$

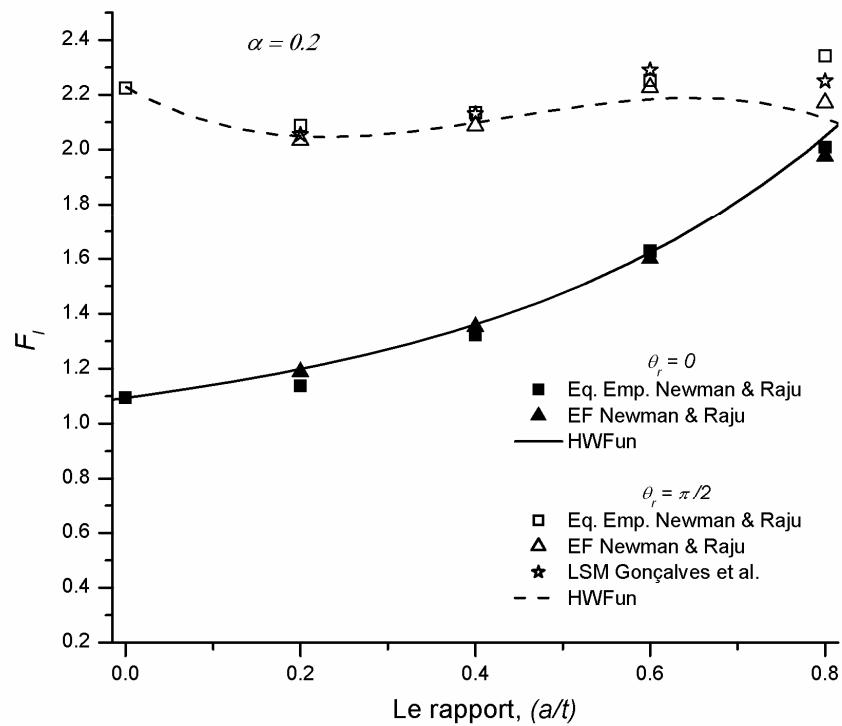


(a)

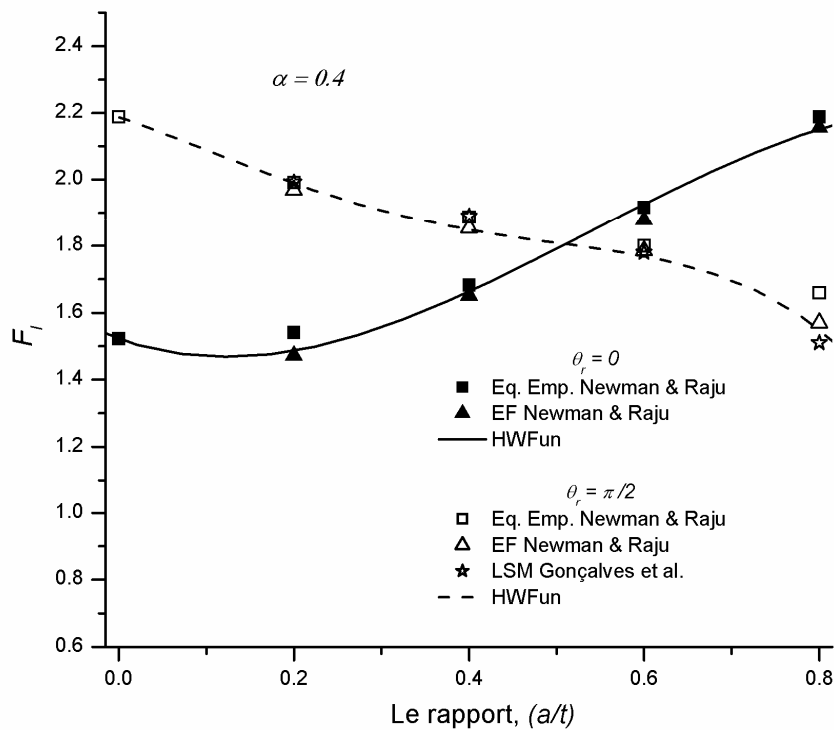


(b)

Figure 52 : FIC adimensionnel pour $\alpha = 1.0$ dans le cas d'une flexion pure ($\sigma_f = 0$ et $\sigma_t = 1$) (a) à $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$ (b) à $\theta = \pi/8$, $\theta = \pi/4$ et $\theta = 3\pi/8$



(a)



(b)

Figure 53 : FIC adimensionnel à $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ dans le cas d'une flexion composée ($\sigma_i = 1$ et $\sigma_f = 1$) (a) pour $\alpha = 0.2$, (b) pour $\alpha = 0.4$

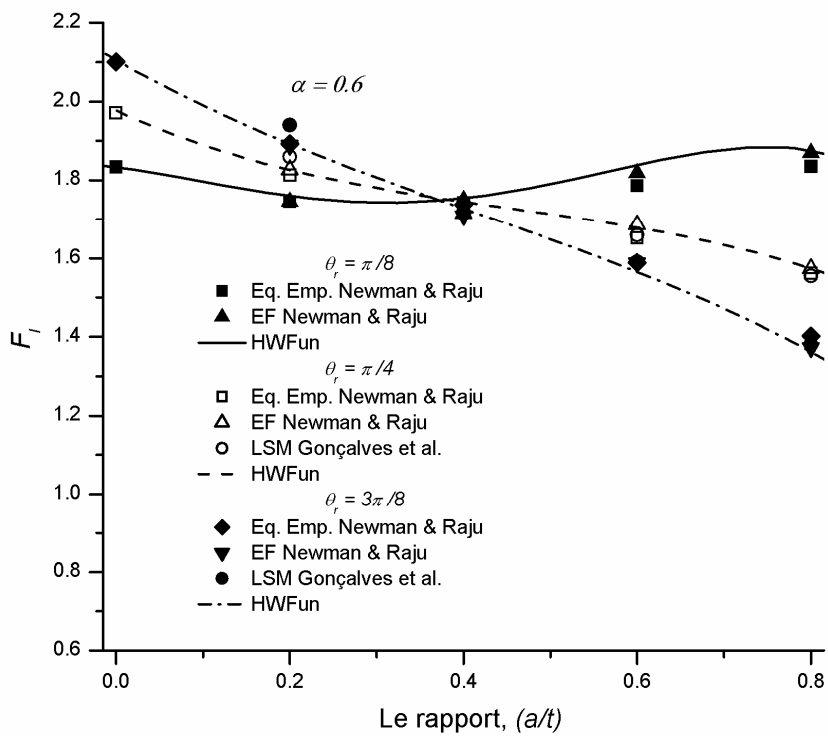
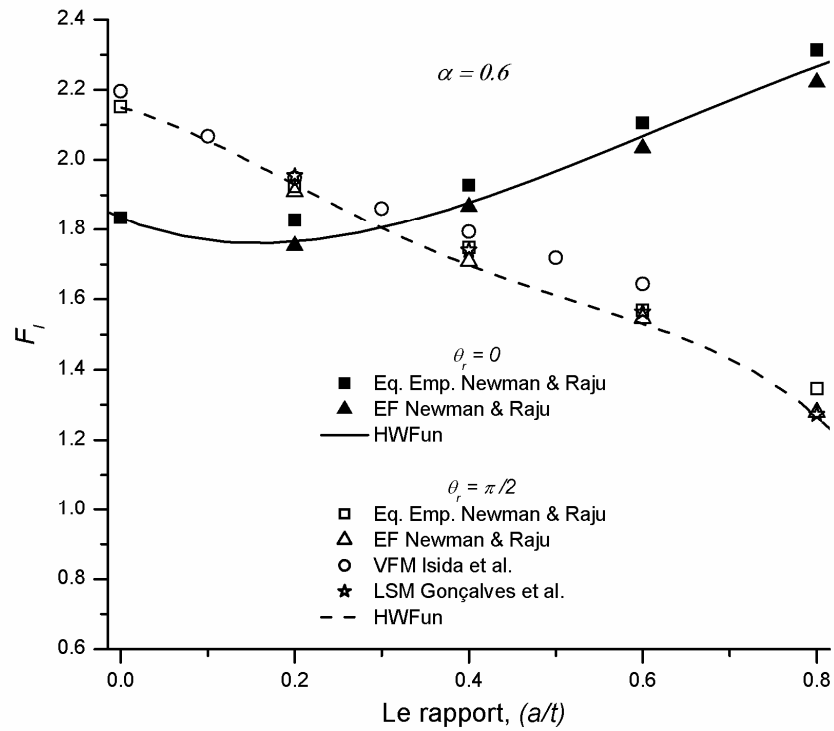


Figure 54 : FIC adimensionnel pour $\alpha = 0.6$ dans le cas d'une flexion composée ($\sigma_i = 1$ et $\sigma_f = 1$) (a) à $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$ (b) à $\theta = \pi/8$, $\theta = \pi/4$ et $\theta = 3\pi/8$

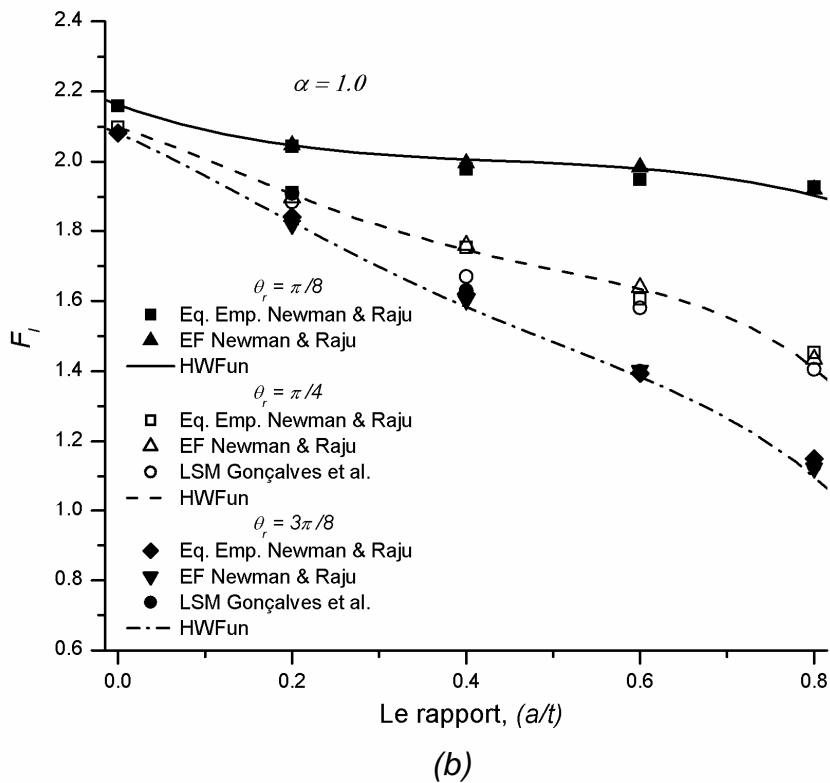
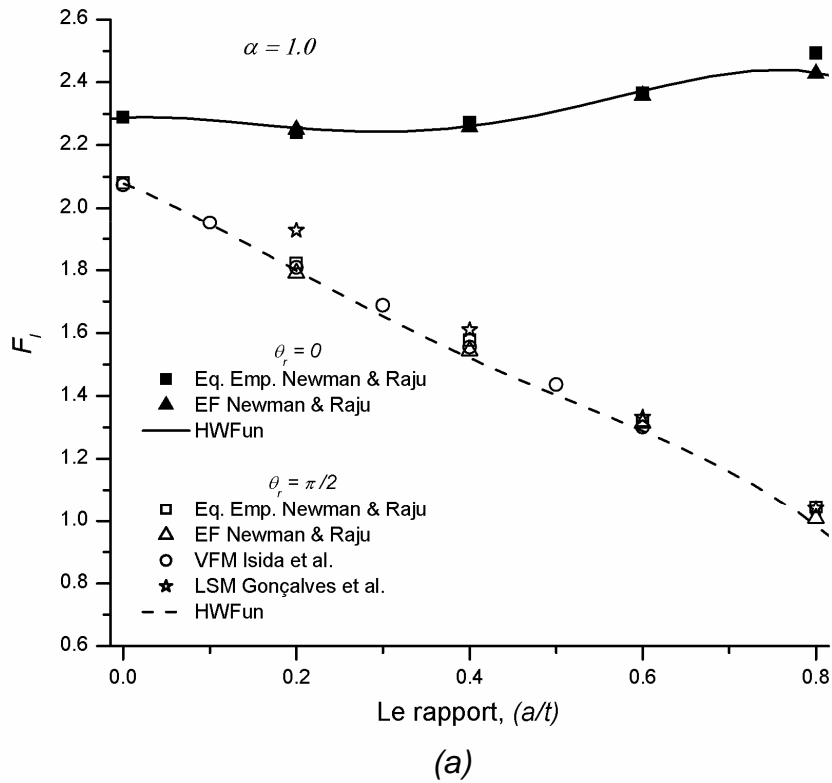


Figure 55 : FIC adimensionnel pour $\alpha = 1.0$ dans le cas d'une flexion composée ($\sigma_r = 1$ et $\sigma_t = 1$) (a) à $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$ (b) à $\theta = \pi/8$, $\theta = \pi/4$ et $\theta = 3\pi/8$

Nos résultats, obtenus avec le logiciel *HWFun*, sont dans leur intégralité conformes aux calculs de Newman & Raju [New-1979, New-1981] utilisant la méthode des éléments finis et l'équation empirique (59) découlant de la FEM ainsi qu'aux résultats d'Isida et al. [Isi-1984] et Gonçalves & de-Castro [Gon-1999] utilisant les approches MBFM et LSM, respectivement. Cette concordance des résultats est moins marquante lorsque le rapport a/t tend vers l'unité étant donné que les différentes approches, y compris la notre, se différencient dans la prise en compte de l'effet du bord arrière de la plaque (la surface libre arrière).

On reprend les calculs pour le même problème avec le mode de chargement d'une flexion composée (flexion + traction). Les résultats sont reportés sur les figures 53, 54 et 55. Ce que nous pouvons rajouter ici par rapport aux observations faites pour le cas d'une flexion simple, l'augmentation des valeurs du FIC sous l'effet de la traction (ouverture des lèvres de la fissure plus importante) et par conséquent une disparition des valeurs négatives du FIC (voir les figures 54a et 55a). Les valeurs maximales du FIC correspondent toujours au point A pour les profondeurs relatives de la fissure très faibles ($a/t \rightarrow 0$), à l'exception toujours du cas d'une fissure circulaire (voir la figure 55a) pour lequel la maximum du FIC est au point B.

V.5 Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement polynomial

Le chargement polynomial, couramment utilisé dans la littérature, permet la représentation d'une large gamme de sollicitations rencontrées en pratique. Le choix de ce type de chargement est motivé par la possibilité d'approximer par interpolation ou extrapolation différentes distributions du chargement. Le chargement polynomial que nous avons retenu ici est donné par l'équation (60) appliqué au même type structure abordée précédemment, c'est à dire une plaque renfermant une fissure débouchante :

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right)^n \quad (60)$$

On s'intéressera en particulier aux distributions quadratique ($n = 2$) et cubique ($n = 3$). La distribution linéaire ($n = 1$), représentant le cas d'une flexion composée, a été traité dans l'exemple précédent.

Nous calculons pour cet application le FIC adimensionnel $F_I = \frac{K_I E(k)}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}}$ en deux points caractéristiques de la fissure ; le point de surface B ($\theta = 0$) et le point du fond A ($\theta = \pi/2$) (voir la figure 49) pour des rapports des axes de l'ellipse $\alpha = 0.6$, $\alpha = 1.0$ et une profondeur relative de la fissure $a/t \in [0; 0.8]$.

Nous utilisons comme solution de référence celle adoptée dans le problème précédent. On rappelle qu'elle a été trouvée par Newman & Raju [New-1979] en se basant sur la méthode des éléments finis pour un chargement de traction ($n = 0$). Les résultats sont regroupés dans les graphes de la figure 56 pour le chargement quadratique et dans les graphes de la figure 57 pour le chargement cubique.

Les résultats obtenus avec notre code de calcul *HWFun* sont comparés à ceux trouvés par :

- i) Shiratori *et al.* [Shi-1987] utilisant les éléments finis,
- ii) Wang & Lambert [Wan-1997] utilisant des fonctions de poids déduites des résultats obtenus par éléments finis.

A première vue, nous pouvons constater que les valeurs du FIC dans la figure 56 sont nettement plus faibles pour le mode du chargement quadratique ($n = 2$) comparé au cas du chargement linéaire de l'exemple précédent (F_I ne dépasse jamais l'unité). Ces valeurs continuent à diminuer en passant au chargement cubique correspond à $n = 3$ (voir la figure 57). La décroissance du FIC avec l'augmentation de l'ordre du chargement n est due à la diminution de la contrainte σ donnée par (60) via le facteur $\left(1 - \frac{y}{a}\right)$ qui est inférieur à l'unité.

Ce même facteur a maintenu le chargement σ positif sur toute la fissure (pas de zone de compression) et quelque soit la profondeur relative de la fissure a/t . Ce qui explique la croissance du FIC adimensionnel F_I en fonction du rapport a/t pour le point du fond A (voir les figures 56 et 57), contrairement à l'exemple précédent. Par conséquent, la valeur maximale du FIC pour cette application aura lieu lorsque a/t s'approchera de l'unité.

Les graphes des figures 56 et 57 montrent une bonne corrélation de nos résultats avec les autres travaux aussi bien pour le chargement quadratique que pour le chargement cubique.

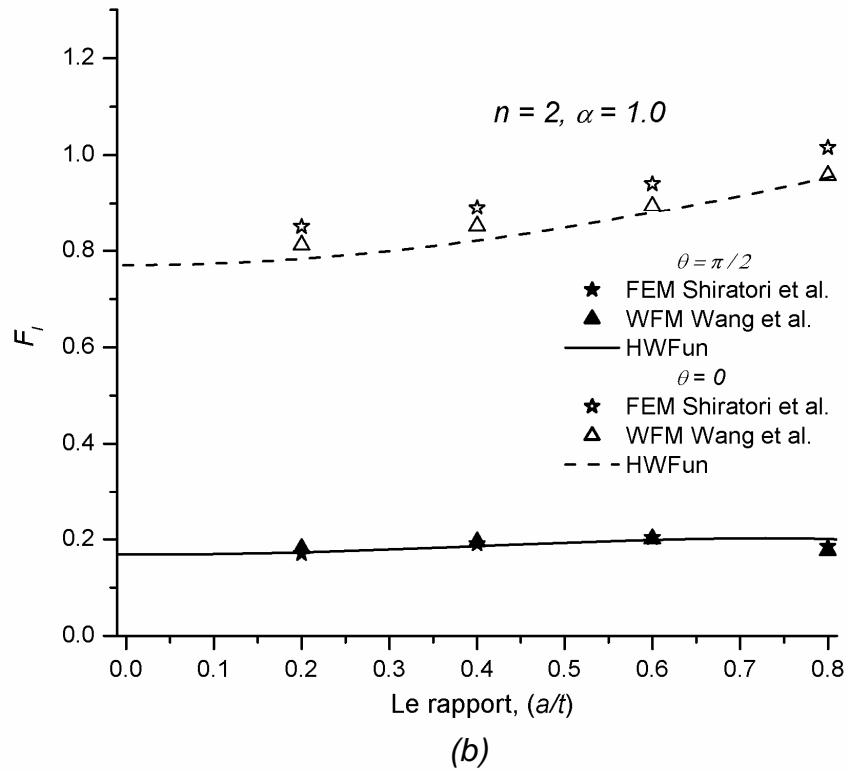
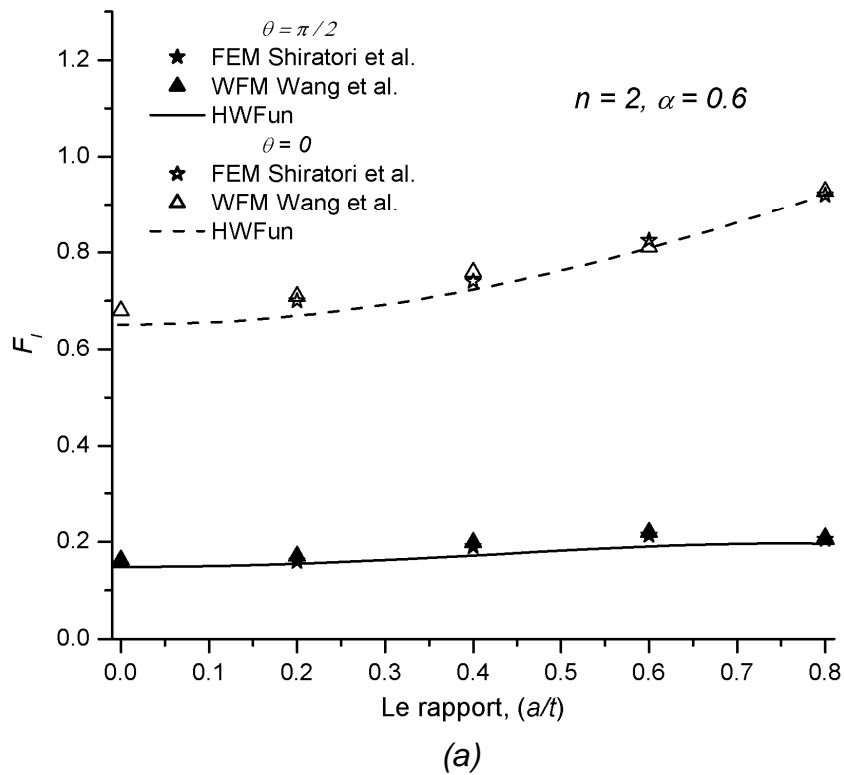
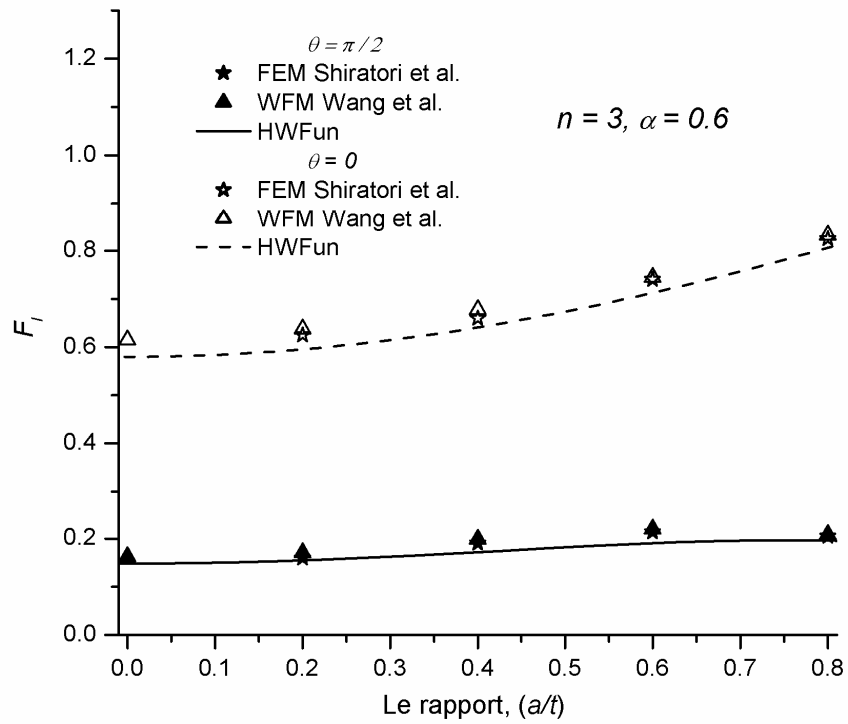
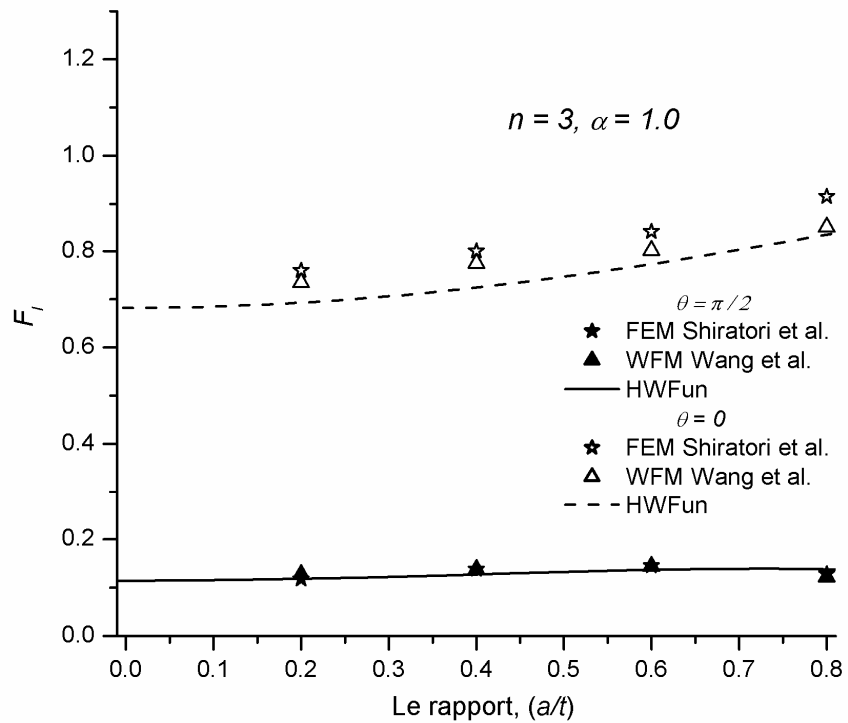


Figure 56 : FIC adimensionnel au point de surface et au point du fond d'une fissure semi – elliptique débouchante sous un chargement quadratique.



(a)



(b)

Figure 57 : FIC adimensionnel au point de surface et au point du fond d'une fissure semi-elliptique débouchante sous un chargement cubique.

V.6 Plaque contenant une fissure semi – elliptique sous un chargement exponentiel

Dans les plaques travaillant en traction ou en flexion, la présence de rainures ou d'entailles au voisinage des fissures (voir la figure 58) peut modifier considérablement la loi de distribution du chargement supportée par les lèvres de la fissure sous l'effet des concentrations de contraintes.

Fett & Munz [Fet-1999] ont étudié ce problème en considérant des distributions de contraintes sur les lèvres de la fissure de formes exponentielles, à savoir :

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y} \quad (61a)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2} \quad (61b)$$

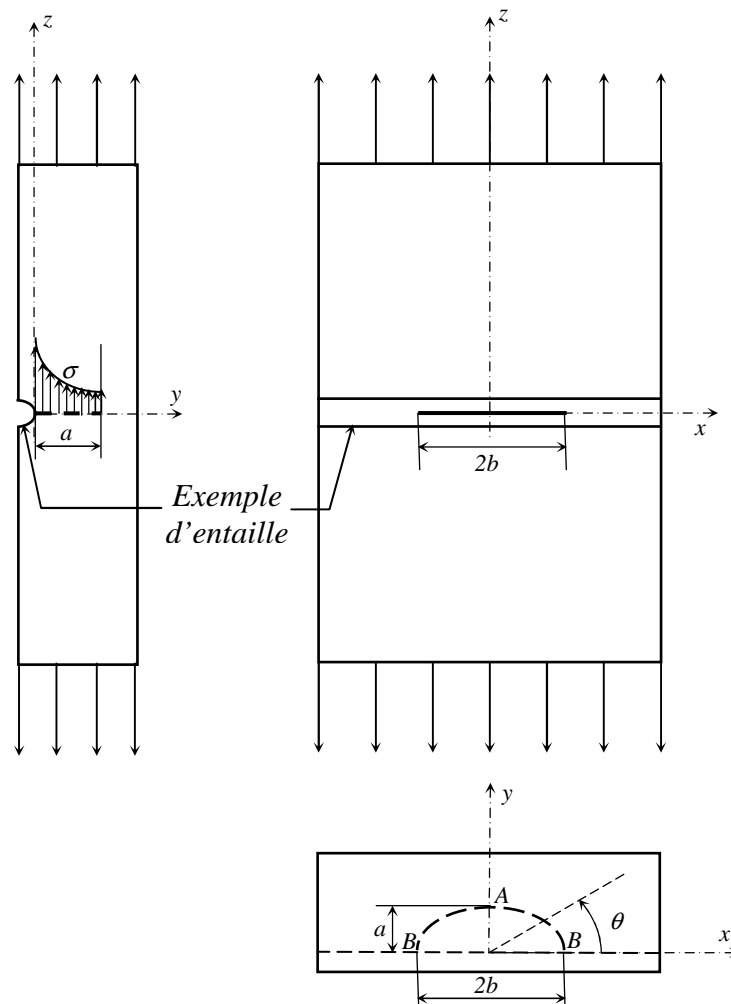


Figure 58 : Fissure semi-elliptique débouchante dans une plaque et au voisinage d'une entaille.

Ils ont en particulier calculé les FIC adimensionnels Y_A et Y_B aux points A et B de la fissure (voir la figure 58), en fonction de l'exposant λ . Nous présentons dans les figures 59 et 60 les résultats qu'on a obtenu avec le code de calcul *HWFun* et ceux obtenus par Fett & Munz [Fet-1999] pour les configurations suivantes :

- Au point A pour $\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y}$, $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ et $\lambda\alpha \in [0, 3.5]$ (figure 59a).
- Au point B pour $\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y}$, $\alpha \in \{0.2, 0.4, 1.0\}$ et $\lambda\alpha \in [0, 3]$ (figure 59b).
- Au point A pour $\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2}$, $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$ et $\lambda\alpha \in [0, 2.0]$ (figure 60a).
- Au point B pour $\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2}$, $\alpha \in \{0.2, 0.4, 1.0\}$ et $\lambda\alpha \in [0, 1.75]$ (figure 60b).

Les valeurs des paramètres considérés lors de ces différents calculs ont été choisies en accord avec les résultats disponibles de Fett & Munz [Fet-1999]. Nous avons ignoré quelques valeurs de α ($\alpha = 0.6$ et $\alpha = 0.8$) pour le point B afin d'éviter une éventuelle surcharge et illisibilité des graphes.

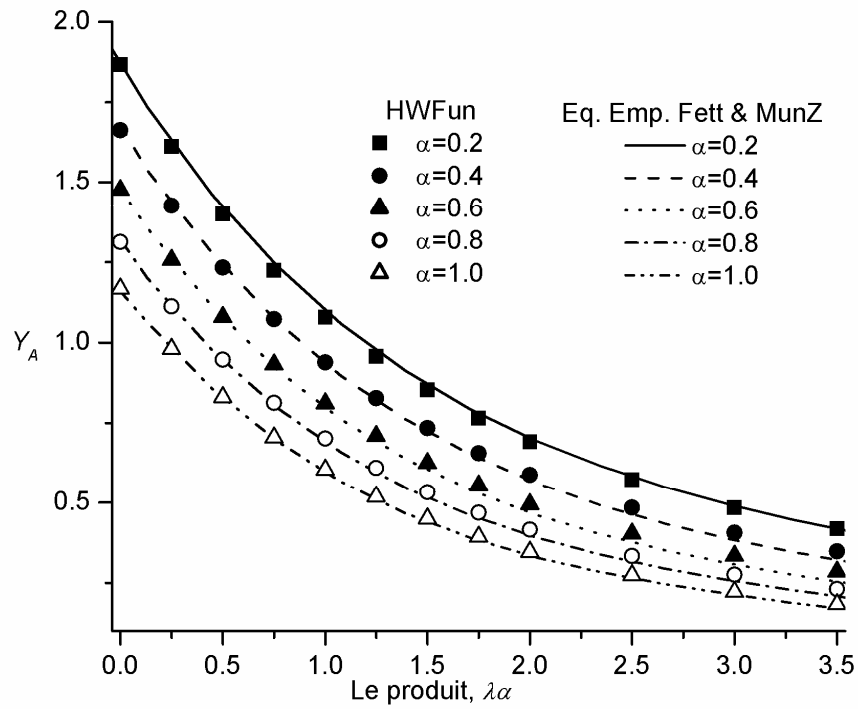
Les FIC adimensionnels Y_A et Y_B sont donnés par l'expression :

$$Y_{(A,B)} = \frac{K_{I(A,B)}}{\sigma_0 \sqrt{a}} \quad (62)$$

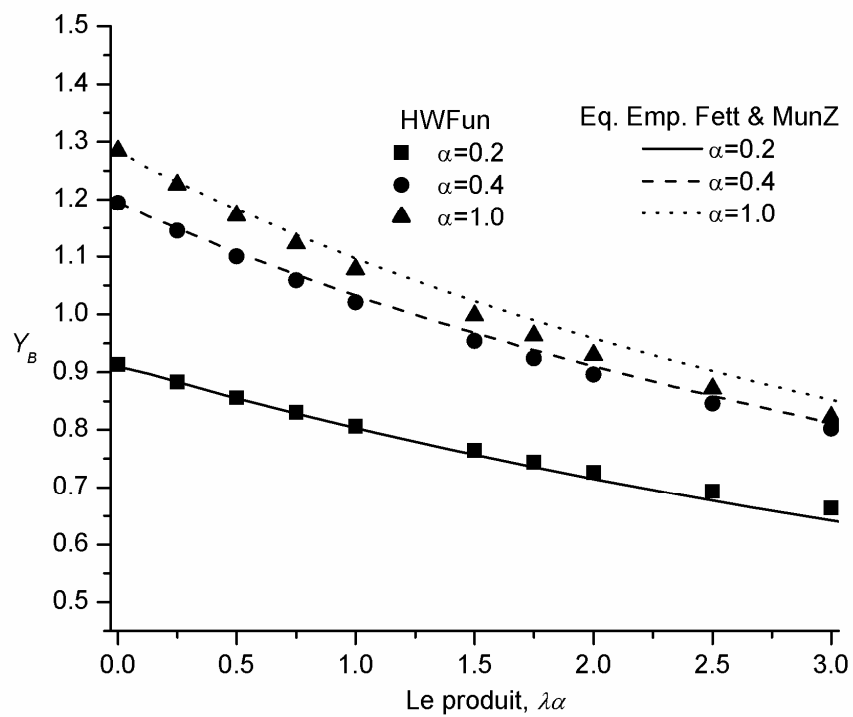
D'après la figure 59, nous constatons que les valeurs des FIC adimensionnels Y_A et Y_B décroissent en augmentant l'exposant λ , vu que l'intensité du chargement diminue d'après (61). La valeur maximale du FIC est observée au point A pour $\lambda = 0$ (chargement constant).

On peut constater la bonne concordance de nos résultats avec ceux de Fett & Munz [Fet-1999] au point A . Cette corrélation est moins bonne pour le point B , considéré comme le plus exposé à l'effet de la surface libre étant donné que l'épaisseur de la plaque est considérée très grande. Sachant que les résultats de Fett & Munz [Fet-1999] sont des approximations basées sur interpolations et extrapolations polynomiales de la forme exponentielle du chargement donné par (61a) et (61b) utilisant les résultats de ces mêmes auteurs dans [Fet-1997] pour le point A et ceux de Cruse & Besuner [Cru-1975] pour le point B .

Pour le deuxième mode du chargement exponentiel donné par (61b), les graphes de la figure 60 montrent que le maximum du FIC correspond toujours aux faibles valeurs de l'exposant λ . Cependant, nous constatons que le gradient des FIC adimensionnel Y_A et Y_B est minimal pour les faibles valeurs de λ contrairement au cas du chargement (61a). Ceci est dû au fait que le gradient du chargement donné par (61b) est minimal pour les faibles valeurs de l'exposant λ alors que celui donné par (61a) est maximal.



(a)



(b)

Figure 59 : FIC adimensionnel d'une fissure semi – elliptique débouchante sous un chargement $\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda y}$, (a) au point du fond, (b) au point de surface

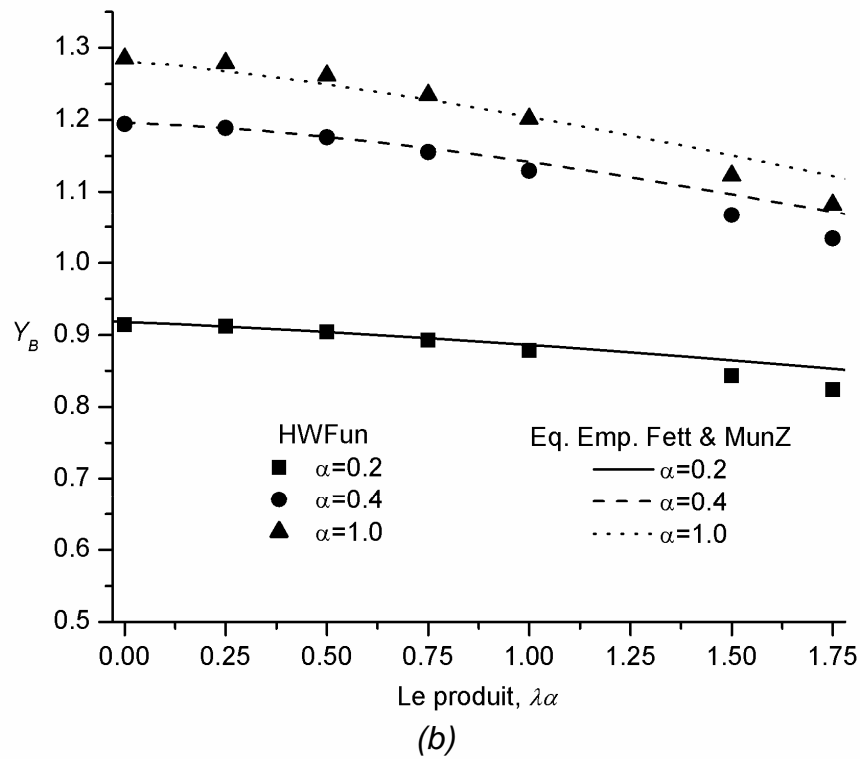
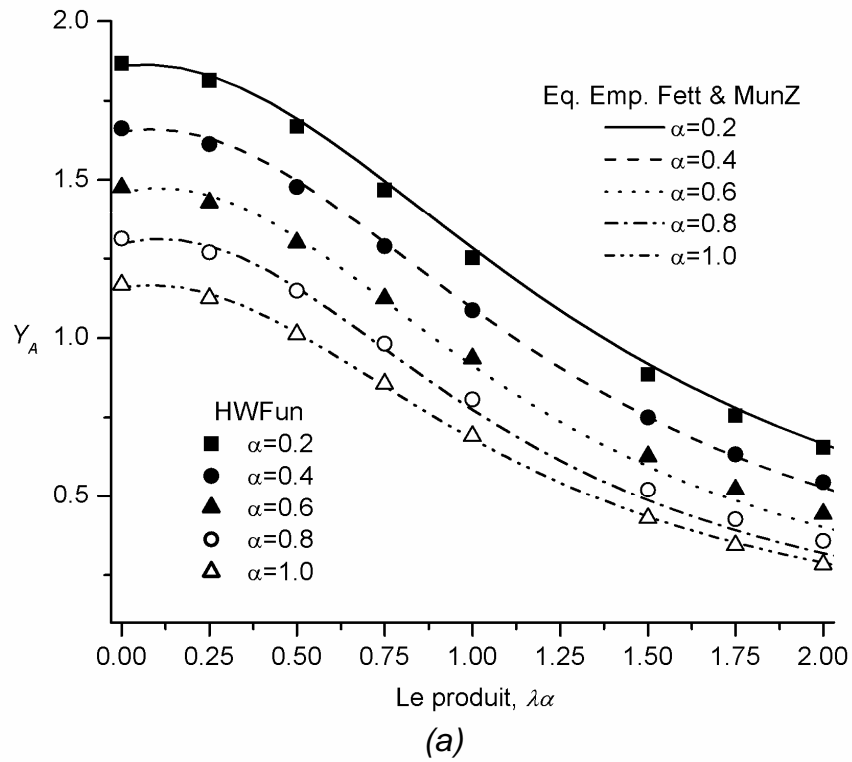


Figure 60 : FIC adimensionnel d'une fissure semi – elliptique débouchante sous un chargement $\sigma = \sigma_0 e^{-(\lambda y)^2}$, (a) au point du fond, (b) au point de surface

V.7 Conclusion

Le couplage de la technique d'hybridation avec la PWFEM nous a permis de tenir en compte de l'effet de la surface libre et par conséquent l'extension de cette étude au traitement des fissures semi-elliptiques débouchantes. Le test des corrections apportées à l'hybridation des fonctions de poids adoptée dans la section II.5 pour réaliser le couplage est effectué à travers une variété d'exemples pratiques. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont comparés à des travaux utilisant plusieurs méthodes (FEM, WFM, HBEM, GFBEM, LSM, FBM, Eq. Emp.). La grande cohérence de nos résultats avec ceux des autres auteurs pour la majorité des applications traitées, prouve encore une fois l'utilité de cette étude.

Conclusions et perspectives

Conclusions et perspectives

Les objectifs de ce travail ont été triples :

- i) développer une méthode basée sur l'hybridation de fonctions de poids permettant l'amélioration de l'évaluation du facteur d'intensité de contrainte de fissure elliptique en mode I,
- ii) coupler cette méthode avec la méthode de fonction de poids du point (PWFM) afin de l'appliquer aux fissures semi-elliptiques (débouchantes) en mode I,
- iii) valoriser ces développements à travers la conception d'un progiciel de calcul et validation par des applications sur des problèmes type.

Concernant le **premier objectif**, une approche basée sur l'hybridation des fonctions de poids d'Oore et Burns (1980) et de Krasowsky *et al.* (1999) a été développée et largement détaillée dans le chapitre II. L'idée d'hybridation que nous avons proposée consiste à subdiviser la fissure en deux zones pour appliquer sur chacune d'elles la fonction de poids appropriée. L'affectation des fonctions de poids est effectuée de manière à atténuer les problèmes de singularités en bord de la fissure liées à l'expression de ces fonctions de poids. La proportion entre les deux zones est-elle obtenue par optimisation des paramètres géométriques de l'ellipse de manière à mieux prendre en compte les effets de courbure du front de fissure. Dans ce même chapitre, la mise en œuvre numérique de cette approche a également été présentée d'une manière détaillée. Elle concerne principalement l'évaluation des différentes intégrales présentes dans l'approche après discrétisation des domaines et traitement des différentes singularités. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux bases théoriques du couplage entre la méthode d'hybridation développée précédemment et la PWFM, ce point relevant du **deuxième objectif** de cette recherche. Ce couplage a été réalisé en cherchant une correction aux fonctions de poids retenues précédemment pour la prise en compte de l'effet de bord de la fissure conformément à la théorie PWFM.

Le **troisième objectif**, concernant le développement d'un code de calcul basé sur la présente approche et la validation de cette dernière sur des cas types, s'étale sur trois chapitres (III, IV, V). Dans le chapitre III, la structure du code de calcul, appelé HWFun, est exposée ainsi que les différents développements qui sont liés à son élaboration. La réalisation de ce code de

calcul qui est une concrétisation des développements théoriques de l'hybridation, est un travail aussi important que les développements eux-mêmes.

Afin de valider la méthode d'hybridation, elle a été appliquée au chapitre IV pour modéliser des fissures elliptiques internes présentes dans structures utilisées en pratique. Les résultats obtenus concernant le FIC ont été comparés à des solutions analytiques, quand elles sont disponibles, et à des solutions numériques de la littérature obtenues par des méthodes comme la FEM, la XFEM et la BEM. Les différentes comparaisons permettent d'apprécier la qualité des résultats concernant le FIC obtenus avec la présente approche.

Le chapitre V a été consacré à la validation du couplage entre la méthode d'hybridation et la PWFEM. Le problème de fissures débouchantes semi-elliptiques a été traité pour différentes structures (plaques, tubes) soumises à des chargements divers (flexions simple et composée, chargement polynomial, chargement exponentiel). En l'absence de solutions exactes pour ce type de problèmes, les comparaisons ont été réalisées avec des résultats numériques issus d'approches numériques (FEM, WFM, HBEM, GFBEM, LSM, FBM) ou empiriques. Elles ont permis de vérifier la bonne concordance entre ces différentes approches et la présente méthode d'hybridation. Il est à signaler que cette dernière présente l'avantage d'être applicable à une large gamme de sollicitations.

De multiples perspectives à ce travail peuvent être envisagées. Parmi lesquelles :

- i) L'application de la technique d'hybridation pour les problèmes de fatigue (propagation des fissures elliptiques et semi-elliptiques) qui fait l'objet d'une recherche déjà initiée et qui donne d'après les premiers tests des résultats prometteurs.
- ii) L'extension du couplage de la présente approche avec la PWFEM pour les fissures en quart d'ellipse (fissures de coin), considérées comme des fissures très répondues dans les structures rivetées. Cette extension devrait donner une nouvelle dimension à l'applicabilité de l'approche d'hybridation.
- iii) Le développement d'une hybridation similaire à la présente approche pour les autres modes de rupture, à savoir les modes II, III et mixtes, ainsi que pour d'autres formes de fissures.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

A

- [Ali-1991] Aliabadi M. H., Rooke D. P., *Numerical Fracture Mechanics. Computational Mechanics Publications*, Southampton, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1991.
- [Arg-1954] Argyris J.H., Kelsey S. Energy theorems and structural analysis. *Aircraft Engineering* 1954, 26-27 (Oct. 1954–May 1955).
- [Atl-1979] Atluri S.N., *On Rate Principles for Finite Strain Analysis of Elastic and Inelastic Nonlinear Solids Recent Research on Mechanical Behavior*, University of Tokyo Press 1979, 79-107.
- [Atl-1983] Atluri, S.N., *Alternate Stress and Conjugate Strain Measures, and Mixed Variational Formulations Involving Rigid Rotations, for Computational Analyses of Finitely Deformed Plates and Shells: Part-I*, Thoery Computers & Structures 1983, Vol. 18-1, p 93-116.

B

- [Bar-1962] Barenblatt G.I., *The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture*, Advances in Appl. Mech. 1962, Vol. 7, p 55-129.
- [Bar-1980] Barthelemy B., *Notions pratiques de la mécanique de la rupture*, Ed. Eyrolles, Paris, 1980.
- [Bel-1994] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., *Element free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 1994, Vol. 37, p 229-256.
- [Bel-1999] Belytschko T., Black T., *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, Int J Numer Meth Eng 1999, Vol. 45-5, p 601-620.
- [Bel-2003] Belytschko T., Parimi C., Moes N., Sukumar N., Usui S., *Structured extended finite element methods for solids denned by implicit surfaces*, Int. J. Numer. Meth. Engng 2003, Vol. 56, p 609-635.
- [Bon-1995] Bonnet M., *Equations intégrales et éléments de frontières*, Ed. Eyrolles/CNRS, Paris, 1995.
- [Bor-1983] Bortmann Y., Banks-Sills L., *An extended weight function method for 2D and 3D-problems*, Journal of Applied Mechanics 1983, Vol. 50, p 907-909.
- [Bue-1970] Bueckner H.F., *A novel principle for the computation of stress intensity factors*, Z. Angew Meth. 1970, Vol. 50, p 529-546.
- [Bui-1977] Bui H.D., *An integral equations method for solving the problem of plane crack of arbitrary shape*, J. Mech. Phys. Solids 1977, Vol. 25, p 29-39.

C

- [Chr-2004] Christopher T., Sankarnarayanan K., Rao B.N., *Fracture behaviour of maraging steel tensile specimens and pressurized cylindrical vessels*, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 2004, Vol. 27, p 177-186.

- [Cis-1999] Cisilino, A.P., Aliabadi M.H., *Threedimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems*, Eng. Fract. Mech. 1999, Vol. 63, p 713-733.
- [Clo-1960] Clough R.W., *The Finite Element Method in plane stress analysis*, in 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA 1960.
- [Cro-1983] Crouch, S. L., Starfield A. M., *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*, George Allen & Unwin, London 1983.
- [Cru-1969] Cruse T.A., *Numerical solutions in three-dimensional elastostatics*, International Journal of Solids and Structures 1969, Vol. 5, p 1259-1274,.
- [Cru-1975] Cruse T.A., Besuner P.M., *Residual life prediction for surface cracks in complex structural details*, J. of Aircraft 1975, Vol. 12, p 369-375.

D

- [Dom-1992] Dominguez J., Gallego F., *Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computations*, International Journal of Numerical Methods in Engineering 1992, Vol. 33, p 635-647.
- [Du-1992] Du J., Yon J.H., Hawkins N.M., Arakawa K., Kobayashi A.S., *Fracture process zone for concrete for dynamic loading*, ACI Materials Journal 1992, Vol. 89-3, p 252-258.
- [Dug-1960] Dugdale D.S., *Yielding of Steel Sheets Containing Slits*, J. Mech. Phys. Solids 1960, Vol. 8, p 100-108.

F

- [Fet-1989] Fett T., Mattheck C., Munz D., *Approximate weight function for 2D and 3D-problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements 1989, Vol. 6, p 37-48.
- [Fet-1997] Fett T., Munz D., *Stress intensity factors and weight functions*, Computational Mechanics Publications, Southampton 1997.
- [Fet-1999] Fett T., Munz D., *Local stress intensity factors for small semi-elliptical cracks under exponentially distributed stresses*, Engineering Fracture Mechanics 1999, Vol. 64, p 105-116.
- [For-1995] Fortin A., *Analyse numérique pour ingénieurs*, Ed. de l'Ecole Polytechnique de Montréal 1995.
- [Fra-2002] Frangi A., Novati G., Springhetti R., Rovizzi M., *3D fracture analysis by the symmetric Galerkin BEM*, Computational Mechanics 2002, Vol. 28, p 220-232.

G

- [Gao-1986] Gao H., Rice J.R., *Shear stress intensity factors for planar crack with slightly curved front*, Journal of Applied Mechanics 1986, Vol. 53, p 774-778.
- [Gon-1999] Gonçalves J.P.M., de-Castro P.M.S.T., *Application of the line spring model to some geometries, and comparison with three-dimensional results*, Int. J. Press. Vess. Piping. 1999, Vol. 76, p 551-560.
- [Gre-1828] Green G.; *An essay on the application of mathematical analysis to the theory of electricity & magnetism*, Printed by Wheelhouse. Sold by Hamilton, Adams & Co. 33, Paternoster Row; Longman & Co. and W.Joy, London; and S. Bennett, H. Barnett, and W. Dearden, Nottingham, 1828.

- [Gre-1985] Grebner H., Strathmeier U., *Stress Intensity Factors for Circumferential Semi-elliptical Surface Cracks in a Pipe Under Thermal Loading*, Engineering Fracture Mechanics 1985, Vol. 22, p 1-7.
- [Gri-1920] Griffith A. A., *The Phenomena of Rupture and Flow of Solids*, Philosophical Transactions of Royal Society 1920, Vol. A-221, p 163-197.
- [Guo1-1995] Guozhong C., Kangda C., *Analysis of embedded elliptical cracks in cylindrical pressure vessels*, Int. J. Pres. Ves. & Piping 1995, Vol. 64, p 153-159.
- [Guo2-1995] Guozhong C., Kangda Z., Wu D., *Stress intensity factors for internal semi-elliptical surface cracks in pressurized thick-walled cylinders using the hybrid boundary element method*. Engineering Fracture Mechanics 1995, Vol. 52, p 1055-1064.
- [Guo-2000] Guozhong C., Kangda Z., *Stress intensity factors for interaction of surface crack and embedded crack in a cylindrical pressure vessel*, International Journal of Pressure Vessels and Piping 2000, Vol. 77-9, p 539-548.
- [Guo-2004] Guozhong C., Xianfeng J., Gan L., Zhimin F., *Boundary element analysis on interaction of external surface crack and embedded crack in a pressurized cylinder*, Nuclear Engineering and Design 2004, Vol. 231-1, p 1-11.

H

- [Hac-2003] Hachi B.K., Belkacemi Y., Rechak S., *Détermination du champ de contrainte et du facteur d'intensité de contrainte en tridimensionnel par l'utilisation de la fonction de Green dans la méthode de discontinuité de déplacement*, Revue de mécanique appliquée et théorique 2003, Vol. 1-5, p 289-310.
- [Hac-2005] Hachi B.K., Rechak S., Belkacemi Y., Maurice G., *Modelling of elliptical cracks in infinite body and in pressurized cylinder by a hybrid weight function approach*, Int. J. Press. Vess. Piping. 2005; 82: 917-924.
- [Han-2002] Han Z. D., Atluri S. N., *SGBEM (for cracked local subdomain) - FEM (for uncracked global structure) alternating method for analyzing 3D surface cracks and their fatigue-growth*, Tech Science Press CMES-Comp. Model. Eng. Sci., Vol. 3-6, pp.699-716, 2002.
- [Hut-1968] Hutchinson J.W., *Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 1968, Vol. 16, p 13-31.

I

- [Ing-1913] Inglis C.E., *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. Naval Architects 1913, Vol. 55, p 219-241.
- [Irw-1948] Irwin G.R., *Fracture Dynamics*, Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland 1948.
- [Irw-1956] Irwin, G. R., *Relation of Stresses Near a Crack to the Crack Extension Force*, Proceedings of the 9th International Congress on Applied Mechanics, Brussels 1956.
- [Irw-1957] Irwin G.R., *Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate*, J. of Appl. Mech. Transactions 1957, p 361-364.
- [Irw-1962] Irwin G. R., *The Crack Extension Force for a Part Through Crack in a Plate*, Journal of Applied Mechanics 1962, Vol. 29-4, p 651-654.
- [Isi-1984] Isida M., Noguchi H., Yoshida T., *Tension and bending of finite plates with a semi-elliptical surface crack*, Int. J. Fracture 1984, Vol. 26, p 157-188.

J

- [Joh-1968] Johnson M.W.Jr., McLay R.W., *Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity*, d. Appl. Mech. 1968, Series E, Vol. 3 et 5-2, p 274-278.

K

- [Kea-1988] Keat W.D., Annigeri B.S., Cleary M.P., *Surface integral and finite element hybrid method for two and three-dimensional fracture mechanics analysis*, Int. J. Fracture 1988, Vol. 36, p 35-53.
- [Keb-1999] Kebir H., Roelandt J. M., Foulquier J., *A new singular boundary element for crack problems: Application to bolted joints*, Engineering Fracture Mechanics 1999, Vol. 62-6, p 497-510.
- [Keb-2006] Kebir H., Roelandt J. M., Chambon L., *Dual boundary element method modelling of aircraft structural joints with multiple site damage*, Engineering Fracture Mechanics 2006, Vol. 73-4, p 418-434.
- [Ken-1993] Kendall D.P., Perez E.H., *Comparison of stress intensity factor solutions for thick walled pressure vessels*, In High Pressure-Codes, Analysis and Applications, ASME 1993, p 115-119.
- [Kic-1998] Kiciak A., Glinka G., Eman M., *Weight functions and stress intensity factors for corner quarter-elliptical crack in finite thickness plate subjected to in-plane loading*, Engng. Fracture Mech. 1998, Vol. 60-2, p 221-238.
- [Kob-1979] Kobayashi A.S., Emery A.F., Love W.J., Jain A., *Further studies on stress intensity factors of semi-elliptical cracks in pressurized cylinders*, In Structural mechanics in reactor technology, SMiRT'79, Transactions of the 5th international conference, Eds A. Jaeger and Boley 1979, Paper G4/1.
- [Kra-1999] Krasowsky A.J., Orynyak I.V., Gienko A.Yu., *Approximate Closed form Weight Function for an Elliptical Crack in an Infinite Body*, Int. J. Fracture 1999, Vol. 99-1/2, p 117-130.
- [Kry-1999] Krysl P., Belytschko T., *The element-free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-d cracks*. Int J Numer Meth Eng 1999, Vol. 44-6, p 767-800.

L

- [Lac-1976] Lachat J.C., Watson J.O., *Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations; a Formulation for Three Dimensional Elastostatics*, Int. J. Num. Meth. Engng. 1976, Vol. 10, p 991-1005.
- [Lan-1972] Landes J. D., Begley J. A., *The Effect of Specimen Geometry on JIC*, Fracture Toughness, ASTM STP 514, American Society for Testing and Materials, Philadelphia 1972, p 24-39.
- [Lev-1947] Levy S., *Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback*, J. Aero. Sci. 1947, Vol. 14, p 547-560,
- [Lev-1953] Levy S., *Structural analysis and influence coefficients for delta wings*, J. Aero. Sci. 1953, Vol. 20, p 677-684.

M

- [Mar-2005] Margonari M., Bonnet M., *Fast multipole method applied to elastostatic BEM-FEM coupling*, Computers and Structures 2005, Vol. 83, p 700-717.

- [Mau-1999] Maugin G. A., *The thermodynamics nonlinear irreversible behaviours an introduction*, series A Vol. 27, page 204, World scientific series on nonlinear science Ed., Singapore 1999.
- [Met-1992] Mettu S.R., Raju I.S., Forman R.G., *Stress intensity factors for part-through surface cracks in hollow cylinders*, NASA Technical Report 1992, N° JSC25685, LESC 30124.
- [Moe-1999] Moes N., Dolbow J., Belytschko T., *A finite element method for crack growth without remeshing*, Int. J. Num. Meth. Engng. 1999, Vol. 46, p 131-150.

N

- [New-1979] Newman J.C. Jr., Raju I.S., *Analyses of surface cracks in finites plates under tension or bending loads*, NASA TP-1578, National Aeronautic and Space Administration, Washington DC 1979.
- [New-1981] Newman J.C. Jr., Raju I.S., *An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack*, Engng. Fracture Mech. 1981, Vol. 15-1/2, p 185-192.
- [Ngu-1980] Nguyen Q.S., *Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture*, J. de Méca. 1980, Vol. 19-2, p 363-386.

O

- [Oor-1980] Oore M., Burns D.J., *Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields*. Transaction of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology 1980, Vol. 102-2, p 202-211.
- [Ory-1994] Orynyak I.V., Borodii M.V., Torop V.M., *Approximate construction of a weight function for quarter-elliptical and semi-elliptical cracks subjected to normal stresses*, Engng. Fract. Mech. 1994, Vol. 40, p 143-151.
- [Ory-1995] Orynyak I.V., Borodii M.V., *Point weight function method application for semi-elliptical mode I cracks*, Int. J. Fracture 1995, Vol. 70, p 117-124.
- [Ory-2002] Orynyak I. V., Gienko A. Yu., *Mode-I elliptical crack in an infinite elastic body-Part I: Crack-face displacement for the polynomial law of loading*, Strength of Materials 2002, Vol. 34-1, p 12-26.

P

- [Par-1963] Paris P., Erdogan F., *A critical analysis of crack propagation laws*, Journal of Basic Engineering, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 1963, p 528-534.
- [Par-1976] Paris P.C., McMeeking R.M. & Tada H., *Cracks and Fracture*, ed. S-W, STP601, ASTM 1976, p 471-489.
- [Pom-1999] Pommier S., Sakae C., Murakami Y., *An empirical stress intensity factor set of equations for a semi-elliptical crack in semi-infinite body subjected to a polynomial stress distribution*, Int. J. Fatigue 1999, Vol. 21, p 243-251.
- [Pom-2005] Pommier S., *Science des Matériaux*, Cours Université de Pierre & Marie Curie 2005-2006, Paris 2005.
- [Por-1992] Portela A., Aliabadi M.H., *The dual boundary element method: effective implementation for crack problems*. Int J Numer Methods Engng 1992, Vol. 33, p 1269-1287.

R

- [Rah-1995] Rahman S., *A stochastic model for elastic-plastic fracture analysis of circumferential through-wall-cracked pipes subject to bending*, Eng. Frac. Mech. 1995, Vol. 52-2, p 265-288.
- [Raj-1982] Raju I.S., Newman J. C. Jr., *Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels*, Transaction of the ASME Journal of Pressure Vessel Technology 1982, Vol. 104, p 293-298.
- [Raj-1988] Raju I. S., Newman J. C., Jr., *Stress-Intensity Factors for Corner Cracks in Rectangular Bars*, Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium, ASTM STP 969, T. A. Cruse (ed.), American Society for Testing and Materials 1988, p 43-55.
- [Rhe-1986] Rhee H. C., Atluri S.N., *Polygon-Circle Paradox in the Bending of Simply Supported Circular Plates*, Computers and Structures 1986, Vol. 22-4, p 553-558.
- [Ric-1968] Rice J.R., Rosengren G.F., *Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material*, J. Mech. Phys. Solids 1968, Vol. 16, p 1-12.
- [Ric-1972] Rice J.R., *Some remarks on elastic crack-tip stress fields*. International Journal of Solids & Structures 1972, Vol. 8, p 751-758.
- [Riz-1967] Rizzo F.J., *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics*, Quarterly of Applied Mathematics 1967, Vol. 25, p 83-95.
- [Roo-1994] Rooke D.P., Aliabadi M.H., *The use of fundamental fields to obtain weight functions for mixed-mode cracks*, Int. J. Engng. Sci. 1994, Vol. 32, p 155-166.

S

- [Sha-1970] Shaw R.P., *An Integral Equation Approach to Diffusion Problems*, ESSA and JTRE Report 1970, 29 pp.
- [Sha-1971] Shah R.C., Kobayashi A.S., *Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading*, Engineering Fracture Mechanics 1971, Vol. 3, p 71-96.
- [Shi-1976] Shih C.F., Hutchinson J.W., *Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems*, J. Engineering Materials and Technology 1976, Vol. 98, p 289-295.
- [Shi-1981] Shih C.F., *Relationship between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks*, J. of Mech. Phys. Solids 1981, Vol. 29, p 305-326.
- [Shi-1987] Shiratori M., Niyoshi T., Tanikawa K., *Analysis of stress intensity factors surface cracks subjected to arbitrarily distributed surface stresses*, In Stress Intensity Factors Handbook, ed. Murakami et al. 1987, Vol. 2, p 698-705.
- [Sto-2001] Stolarska M., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., *Modeling crack growth by level sets and the extended finite element method*. Int J Numer Meth Eng 2001, Vol. 51-8, p 943-60.
- [Suk-1997] Sukumar N., Moran B., Black T., Belytschko T., *An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics*, Computat Mech 1997, Vol. 20, p 170-5.
- [Suk-2000] Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T., *Extended Finite element method for three-dimensional crack modeling*. Int J Numer Meth Eng 2000, Vol. 48-11, p 1549-1570.
- [Suk-2001] Sukumar N., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., *Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method.*, Comp Meth Appl Mech Eng 2001, Vol. 190-46/47, p 6183-6200.

- [Suk-2003] Sukumar N., Chopp D.L., Moran B., *Extended Finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation*, Engineering Fracture Mechanics 2003, Vol. 70, p 29-48.

T

- [Tel-2002] Telles J.C.F., Vera-Tudela C.A.R., Guimaraes S., *Extended Applications of the Numerical Green's Function BEM Analysis*. *Electronic Journal of Boundary Elements* 2002, Vol. BETEC2001, N° 2, p 136-150.
- [Tim-1970] Timoshenko S. and Coodier J.N., *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill 3rd Ed., New York 1970.

V

- [Vai-1990] Vainshtok V.A., Varfolomeyev I.V., *Stress intensity factor analysis for part-elliptical cracks in structures*. *International Journal of Fracture* 1990, Vol. 46, p 1-24.
- [Vai-1991] Vainshtok V.A., *Application of the weight function method to solving multi-parametric three-dimensional fracture mechanics problems*, *Int. J. Fracture* 1991, Vol. 47, p 201-212.

W

- [Wan-1996] Wang, L., Atluri, S.N., *Recent Advances in the alternating methods for elastic and inelastic fracture analyses*, *Com. methods in Appl. Mech. and Engng* 1996, Vol. 137, p 1-57.
- [Wan-1997] Wang X., Lambert S.B., *Stress intensity factors and weight functions for high aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates*, *Engng. Fract. Mech.* 1997, Vol. 57-1, p 13-24.
- [Wan-1998] Wang X., Lambert S.B., Glinka G., *Approximate weight functions for embedded elliptical cracks*, *Engng. Fracture Mech.* 1998, Vol. 59, p 381-392.
- [Wel-1961] Wells A.A., *Unstable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture*, *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, College of Aeronautics and the Royal Aeronautical Society, Cranfield 1961, Vol. 1, p 210-230.
- [Wes-1939] Westergaard H.M., *Bearing pressures and cracks*, *J. Appl. Mech.* 1939, Vol. 61, p A49-A53.

Y

- [Yos-1989] Yoshimura S. Y., Yagawa G., Atluri S.N., *Generation and Propagation Analysis of High-Strain-Rate Dynamic Crack Propagation in a Visco-Plastic Solid*, *Nuclear Engineering and Design* 1989, Vol. 111, p 273-289.
- [Yu-1993] Yu C.T., Kobayashi A.S., Hawkins N.M., *Energy-dissipation mechanisms associated with rapid fracture of concrete*, *Experimental Mechanics* 1993, Vol. 33-3, p 205-211.

Z

- [Zeg-2003] Zegloul A., *Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture*, Cours Université de Metz 2003-2004, Metz 2003.
- [Zhe-1997] Zheng X.J., Kiciak A., Glinka G., *Weight functions and stress intensity factors for internal surface semi-elliptical crack in thick-walled cylinder*, Engng. Fracture Mech. 1997, Vol. 58-3, p 207-221.
- [Zla-1968] Zlamal M., *On the Finite Element Method*, Numerische Math. 1968, Vol. 12, p 394-409.

ملخص عرضنا في هذا العمل طريقة تهدف الى تحسين حساب معاملات شدة الإجهاد من النمط الأول بواسطة تهجين دالتي ثقل والتي طبقناها على الشقوق ذات الشكل الإهليلجي تحت تأثير إجهادات مختلفة. التهجين يتمثل في استعمال هاته الدالة أو تلك في المنطقة من الشق التي يفترض أن تكون الدالة فيها أكثر فعالية. حدود مناطق استعمال كلاً من الدالتين تم التحصل عليها بعد دراسة تحسينية لنسبة المحاور ونصف قطر انحناء الشكل الإهليلجي. أثناء هذه الدراسة ، نسعى قدر الإمكان إلى تقليص أثر عدم التعريف في دوال الثقل مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير انحناء الشكل الإهليلجي. من أجل توسيع استعمال هذه الطريقة نحو دراسة الشقوق النصف إهليلجية السطحية ، قمنا بالمزاوجة ما بين هذه الطريقة و الطريقة المسماة طريقة دالة النقل للنقطة (PWF) حتى يتم الأخذ بالاعتبار تأثير السطح الحر. النتائج المحصل عليها سواء فيما يخص الشقوق الإهليلجية أو الشقوق النصف إهليلجية مرضية للغاية.

كلمات مفتاحية : تهجين ؛ دالة ثقل ؛ معامل شدة الإجهاد ؛ شق إهليلجي ؛ شق سطحي.

Résumé Une méthode améliorant le calcul des facteurs d'intensité de contrainte en mode I par hybridation de deux fonctions de poids est présentée et appliquée aux cas de fissures elliptiques sous différents chargements. L'hybridation consiste à utiliser l'une ou l'autre des deux fonctions dans la zone de la fissure où la fonction est la plus efficace. La délimitation des deux zones est faite après optimisation du rapport des axes et du rayon de courbure de la fissure. Lors de l'optimisation on cherche à atténuer l'effet des singularités présentes dans les fonctions de poids et à mieux prendre en compte l'influence de la courbure de l'ellipse. Afin d'étendre l'utilisation de l'approche d'hybridation à la modélisation des fissures semi-elliptiques débouchantes, son couplage avec la PWF (Point Weight Function Method), et les corrections appropriées sur la fonction de poids d'une fissure elliptique pour tenir compte de l'effet de la surface libre que ce couplage nécessite ont été réalisés. La qualité des résultats trouvés aussi bien pour les fissures elliptiques que pour les fissures semi-elliptiques est bonne.

Mots-clefs : Hybridation ; fonction de poids ; facteur d'intensité de contrainte ; fissure elliptique ; fissure débouchante.

Abstract A method improving the evaluation of the stress intensity factor by hybridization of two weight functions is presented and applied for embedded elliptical cracks under various loadings. The hybridization consists in using one or another function in the zone of the crack where it is the most efficient. The delimitation of the two zones is achieved after optimizing the axes ratio and the curvature radius of the crack. During this optimization one seeks to reduce the effects of the singularities present in the weight functions as well as improving the taking into account of the influence of the ellipse curvature. In order to extend the use of the hybrid approach to the modeling of semi-elliptical surface cracks, its coupling with the PWF (Point Weight Function Method), and the suitable corrections to the weight function of elliptical crack to take account of the free edge effect which this coupling requires were carried out. The quality of the results found as well for the elliptical cracks as for the semi-elliptical cracks is good.

Keywords: Hybridization; weight function; stress intensity factor; elliptical crack; surface crack.