

UNIVERSITE D'ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

5/71

3er

THESE DE FIN D'ETUDES



ETUDE ET REALISATION D'UN FILTRE ACTIF

proposée par
M^{me} G. MONDON

étudiée par
M. OULD-BACHIR

PROMOTION 1971

Electronique

Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT
TELECOMMUNICATIONS

THÈSE
de

FIN d'ETUDES

Promotion : 1971

Etude et Réalisation
d'un Filtre Actif

Proposée par :

Etudiée et réalisée par :

M^{me} G. Mondon

M. Ould-Bachir

JURY:

INVITÉ : Mr SANSAL

PRÉSIDENT: Mr. A. BENTCHIKOU
Maitre de Conférences

PROMOTEUR: M^{me} G. Mondon.
Ingénieur.

Assesseur : Mr. Floret.
Ingénieur.

- AVANT-PROPOS -

Je tiens à remercier, puisque l'occasion m'est offerte, tous les professeurs et assistants du Département Télécommunications de l'École Nationale Polytechnique, qui ont contribué à ma formation d'Ingénieur.

Qu'il me soit permis de remercier vivement M^{lle} G. MONDON pour les maints conseils et renseignements qu'elle a bien voulu me fournir.

Alger, le 25 Juin 1971.

~~El Hadj~~

But de l'Etudes

• Etude la détermination
des filtres actifs.

• Réalisation pratique :

- d'un filtre passe-bas

$$f_c = 2 \text{ kHz}; \quad A_{\text{max}} \text{ en Bande Passante} = 1 \text{ dB}$$

$$A_{\text{min}} \text{ en Bande Coupée} = 24 \text{ dB.}$$

à partir de $F = 4 \text{ kHz}$

- d'un filtre passe-haut.

$$f_c = 1 \text{ kHz.}$$

$$A_{\text{max}} \text{ en Bande Passante} = 1 \text{ dB.}$$

$$A_{\text{min}} \text{ pour } F < 500 \text{ Hz} : 24 \text{ dB.}$$

Table des Matières.

	Page:
Chap 0: Introduction	1
Chap 1: Problème du Filtrage	2
Classification des Filtrés	3
Chap 2: Filtrés à paramètres d'insertion	5
A. Définitions	5
B. Filtrés à paramètres d'insertion	6
Chap 3: Filtrés Actifs	10
A. Généralités	10
B. Forme des Fonctions de transfert	13.
C. Synthèse des Fonctions élémentaires	15
1. Opérateurs Actifs	15
2. Synthèse des Fonctions du 1 ^{er} ordre	18
3. Synthèse des Fonctions du 2 ^d ordre	20
Chap 4: Réalisation Pratique	23
1. Données	23
2. Calculs	23
a) Détermination des Paramètres	23
b) " " de la Fonction de transfert	25
c) Synthèse de la fonction: Réalisation du passe-bas	28
d) Dérivation du passe-haut	30.
3. Résultats et graphes	31.
Chap 5: CONCLUSION	39.
Bibliographie	40.

- PLAN D'ETUDE.

Chap 0: INTRODUCTION.

Chap 1: A) Problème du filtrage.

B) Classification des filtres.

- Familles de Filtres d'Affaiblissement.

• Filtres à paramètres-Images.

• " " " d'insertion.

Chap 2: Filtres à paramètres d'insertion.

• Filtres méplats ou de Butterworth.

• Filtres de Tchebyscheff.

Chap 3: Filtres ACTIFS:

A. Généralités.

- Détermination de la fonction de transfert.

- Synthèse.

B. Formes des Fonctions.

C. Synthèse des Fonctions de transfert.

1. Opérateurs actifs.

2. Fonctions du 1^{er} ordre.

3. Fonctions du 2^e ordre.

Chap. 4: Réalisation pratique:

• Données.

• Calculs.

• Résultats.

Chap. 5. Conclusion.

CHAPITRE 0:

- INTRODUCTION -

Quel que soit le domaine de l'électronique où on travaille, il arrive souvent qu'on se trouve en présence de signaux (courants ou tensions) appartenant à une large plage de fréquences; et qu'on veuille:

- Soit éliminer certains de ces signaux, qu'on juge indésirables,
- Soit sélectionner certains parmi eux appartenant à une bande déterminée.

- Soit séparer pour différents usages les courants et tensions dont on dispose, avec pour critère leur fréquence.

Ces différentes situations relèvent du problème du filtrage. Comme dans toute réalisation physique, les solutions apportées ne sont que des approximations. Cependant, l'avènement des circuits intégrés et la miniaturisation des composants électroniques (résistances, condensateurs, triodes à cristal) ont fait que les solutions qu'on apporte à ce problème deviennent de plus en plus élégantes, bon marché; et de moins en moins encombrantes, surtout dans le domaine de la B.F. où l'utilisation des bobines a été évitée (à cause de leur volume, de leur prix, et de leur mauvaise qualité) depuis l'avènement des FILTRES ACTIFS -

CHAPITRE I : A) Problème du filtrage :

Un filtre doit transmettre, sans déformation, tout signal dont le spectre se trouve répanti dans la bande utile et éliminer tout autre signal dont le spectre est situé en bande indésirable. La représentation graphique de la réponse en amplitude d'un filtre idéal d'affaiblissement serait :

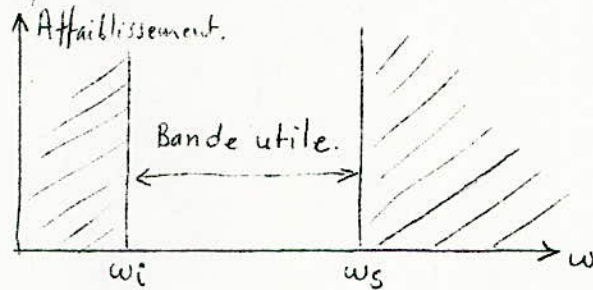


Fig 1-1.

Réponse d'un filtre idéal.

Un tel filtre est irréalisable physiquement (1) et le problème du filtrage ne peut donc avoir qu'une solution approchée. Cette approximation est une réponse contenue dans un « gabarit » indiquant les tolérances admises.

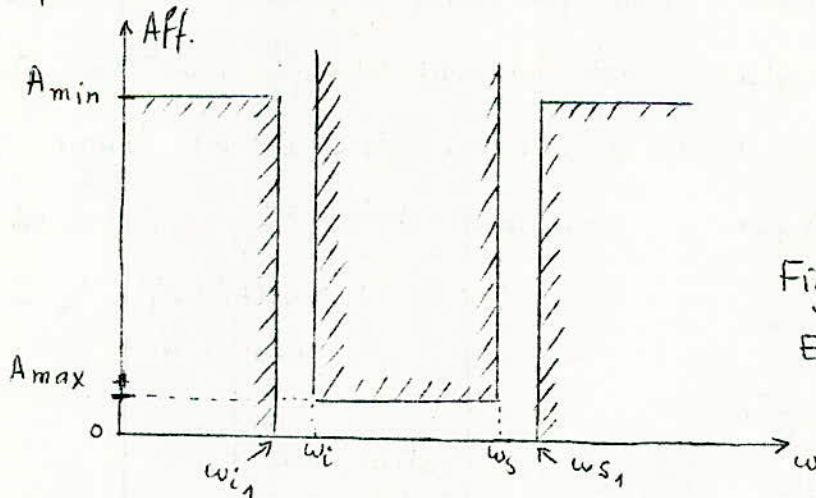


Fig 1-2.

Exemple de gabarit d'affaiblissement.

(1) Voir: R. GUILLIEN. Electronique I. p. 71, 72 et 73.

- pour la bande passante :

On tolère un affaiblissement maximal à ne pas dépasser (1 dB par exemple).

- pour la bande coupée :

On exige un affaiblissement minimum à partir de certaines fréquences ; ce qui permet de définir des pentes d'affaiblissement (ex: 150 dB par décade)

B: Classification des filtres :

Un filtre est constitué par un quadripôle Q attaqué par une source d'impédance interne Z_1 et chargé par une impédance Z_2 .

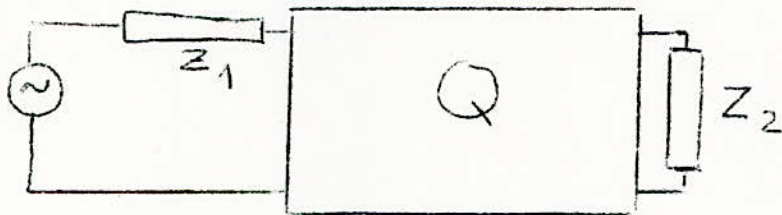


Fig 1.3.

La résolution du problème revient à la détermination du quadripôle Q par ses paramètres, et à la synthèse de ce quadripôle. Pour la synthèse, on peut se fixer d'autres paramètres, tels que :

- Coût de la réalisation
- Simplicité des calculs, etc.....

On distingue deux classes de filtres :

- les filtres d'affaiblissement.
- les filtres à temps de propagation de groupe.

(Dans cet exposé, on ne s'intéresse qu'aux filtres d'affaiblissement.)
Suivant la méthode de détermination, les filtres d'affaiblissement se classent en deux familles :

Familles de filtres :

- Les filtres à paramètres images : [1]

Ils se déterminent par la méthode classique basée sur l'hypothèse de l'adaptation-image, consistant à supposer que le quadripôle constituant le filtre est inséré entre ses deux impédances images et à analyser l'affaiblissement théorique qui en résulte.

- les filtres à paramètres d'insertion : [2]

Ils se déterminent à partir de l'affaiblissement d'insertion obtenu lorsque le quadripôle est effectivement inséré entre les deux résistances données. On impose donc à l'affaiblissement d'insertion une loi de variation en fonction de la fréquence, ce qui permet ~~la fois~~ de définir la fonction de transfert effectif du filtre et par suite sa synthèse.

Le chapitre II est consacré à donner quelques rappels brefs sur cette dernière famille de filtres.

CHAPITRE II : Filtres à paramètres d'insertion - [2]

A) Définitions :

• Facteur de transmission effectif :

Le facteur de transmission effectif est un nombre complexe dont le carré est égal au rapport de la puissance apparente disponible, à la puissance apparente fournie à la charge -

$$H^2(p) = \frac{P_{1\max}}{P_2}$$

Comme on a : $P_{1\max} = \frac{E^2}{4Z_1}$ et $P_2 = \frac{V_2^2}{Z_2}$

il vient : $H^2 = \frac{E^2}{4V_2^2} \cdot \frac{Z_2}{Z_1}$

En général, Z_1 et Z_2 sont des résistances pures, et $H(p)$ a donc une seule détermination :

$$H(p) = \frac{E}{2V_2} \cdot \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Le facteur de transmission effectif est lié à la fonction de transfert en tension par la relation :

$$F_{21}(j\omega) = \frac{1}{2H} \cdot \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

• Exposant de transfert composite =

Pour définir l'exposant de transfert composite, écrivons H sous forme exponentielle :

$$H = e^T$$

Par définition, T est l'exposant de transfert composite.

Le nombre entre crochets renvoie à la Bibliographie.

T étant complexe, on peut écrire :

$$T = A_c + j\varphi_c$$

On a alors les définitions suivantes :

- A_c est l'affaiblissement composite, tel que :

$$A_c = \text{Log} |H| \Leftrightarrow |H| = e^{A_c}$$

H s'exprime donc en Nepers.

- φ_c est le déphasage composite, tel que :

$$e^{j\varphi_c} = \text{Im} [H(j\omega)].$$

B) Filtres à paramètres d'insertion : Ce sont des filtres déterminés par une loi mathématique imposée à l'avance et donnant la variation de l'affaiblissement composite en fonction de la fréquence. Les lois de variations les plus connues et les plus utilisées sont celles qui ont été définies par Butterworth et par Tschebyscheff.

- Filtres méplats ou de Butterworth : Ils obéissent à la loi d'affaiblissement composite suivante :

$$e^{-2A_c} = \frac{1}{1+x^{2n}} \quad (2-1)$$

x étant la pulsation réduite et n l'ordre du filtre.

A_c et ses dérivés par rapport à x , jusqu'à l'ordre $(2n-1)$ sont nuls pour $x=0$. A_c croît régulièrement pour prendre une valeur infinie à $x=\infty$. Quel que soit n , pour la pulsation unité ($x=1$), on a toujours $A_c = 0,35 \text{ Np}$ (soit 3dB).

Étant donné $A_{c \text{ max}}$ toléré en bande passante, on tire :

$$x_c = \sqrt[2n]{e^{2A_{\max}} - 1} \quad 2.2.$$

x_c est la limite de la bande passante.

De même, la fréquence pour laquelle on obtient l'affaiblissement minimal imposé en bande coupée est définie par:

$$x_s = \sqrt[2n]{e^{2A_{\min}} - 1}$$

La bande comprise entre x_c et x_s s'appelle bande neutre.
 Ses filtres méplats ont une réponse de la forme:

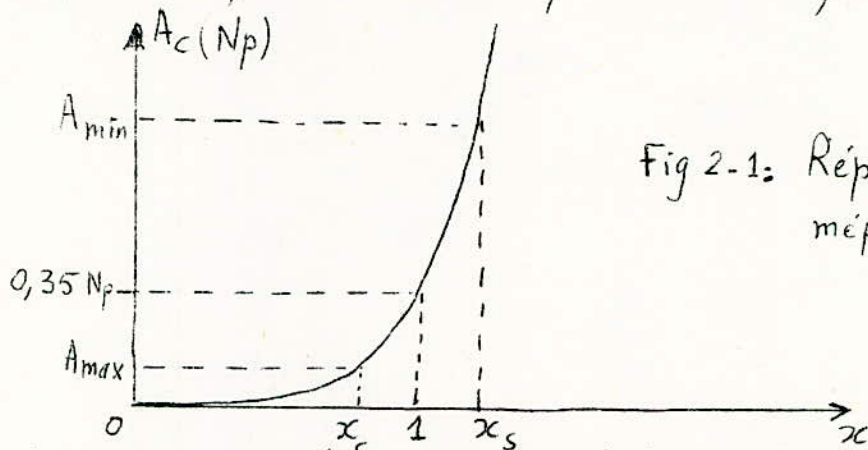


Fig 2-1: Réponse d'un filtre méplat (Butterworth).

On peut se fixer une relation entre x_c et x_s telle que

$x_c = \frac{1}{x_s}$ - L'affaiblissement minimum devient alors:

$$e^{2A_{\min}} = 1 + x_s^{2n} = 1 + \frac{1}{x_c^{2n}} = 1 + \frac{1}{e^{2A_{\max}} - 1}$$

$$\text{d'où : } e^{2A_{\min}} = \frac{e^{2A_{\max}}}{e^{2A_{\max}} - 1}$$

Si, par exemple, on se fixe : $A_{\max} = 0,005 Np$,

on aura :

$$x_c = \sqrt[2n]{0,005} \quad \text{et} \quad e^{2A_{\min}} \approx \frac{1}{0,005} = 200$$

soit $A_{\min} = 2,7 Np$.

Pour $n=4$, on a : $x_c = 0,52$ et $x_s = 1,94$.

Pour $n=10$, on aura : $x_c = 0,87$ et $x_s = 1,15$. On voit que pour réduire la bande neutre, il faut augmenter

l'ordre du filtre.

- Filtres de Tchebyscheff: Dans ce type de filtres, la loi imposée à A_c est la suivante:

$$e^{-2A_c} = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(x)}$$

avec:

ϵ = nombre réel inférieur à 1.

$$T_n(x) = \cos [n \text{ Arc } \cos x]$$

n = ordre du filtre.

On a:

• $T_n(x) = \pm 1$ pour $x_m = \cos \frac{m\pi}{n}$

avec $m = 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ si n est pair

ou $m = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ si n est impair

• $T_n(x) = 0$ pour $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$

avec $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ si n est pair

ou $k = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}$ si n est impair.

L'affaiblissement A_c oscille donc n fois entre 0 et

$$A_{max} = \frac{1}{2} \log_{10} (1 + \epsilon^2)$$

La variation est de la forme suivante:

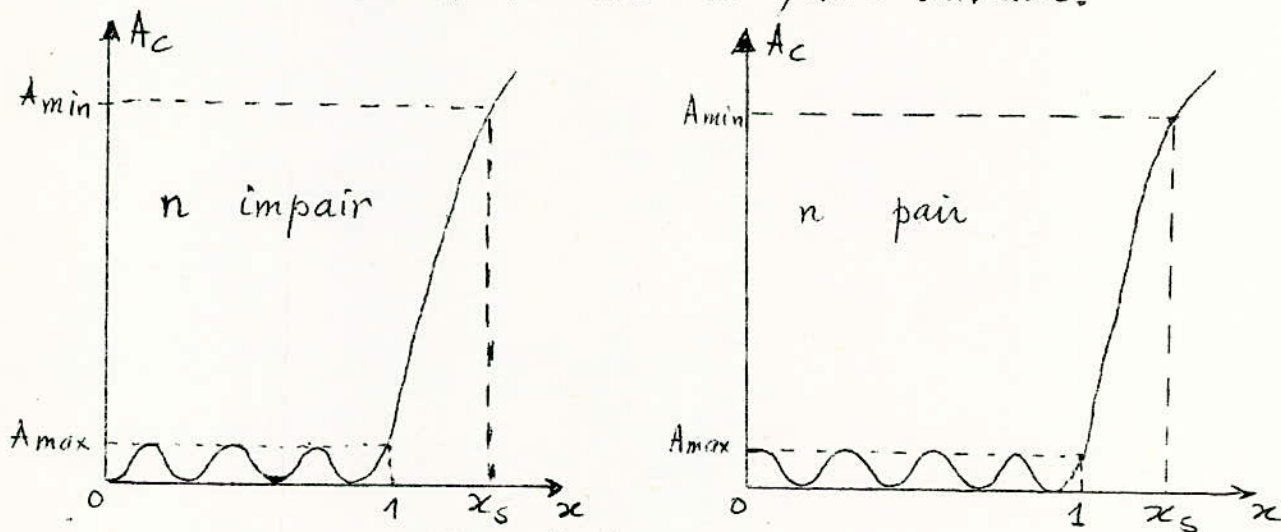


Fig 2-2.

Il est clair que quel que soit n , $A_c = A_{max}$ pour $x = 1$ (valeur de x_m pour $m=0$) et que pour $x=0$, $A_c = A_{max}$ si n est pair et $A_c = 0$ si n est impair.

Détermination des caractéristiques du filtre: Puisque dans tous les cas, $x_c = 1$, l'affaiblissement maximum adéquat en bande passante détermine ϵ :

$$\epsilon = \sqrt{e^{2A_{max}} - 1}$$

Notons que les polynômes de Tchebyscheff sont définis par la relation de récurrence:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Donc, $T_0(x) = 1.$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Pour $x > 1$, on peut prendre seulement la 1^{ère} forme. On aura donc:

$$T_n(x) = 2^{n-1} \cdot x^n$$

Cette approximation nous servira à donner une méthode simple de détermination de n :

On a: $e^{2A_c} = 1 + \epsilon^2 \cdot T_n^2(x)$

$$A_c = \frac{1}{2} \text{Log}_e (1 + \epsilon^2 T_n^2(x))$$

Pour $x \gg 1$, $A_c \approx \text{log}_e \epsilon \cdot T_n(x)$

soit $A_c = \text{Log}_e \epsilon + (n-1) \text{Log}_e 2 + n \text{Log}_e x$

Si on se fixe une certaine pente d'affaiblissement (par exemple 100 Np par octave), et connaissant ϵ , on peut tirer n .

CHAPITRE III : Filtres Actifs . [2]

A) Généralités :

S' utilisation des filtres actifs dans le domaine de la B.F. s'im-
-pose de plus en plus en raison notamment de la suppression
des inductances qui alors deviennent lourdes, encombrantes, et
mal définies et dont les pertes ne peuvent plus être négligées.

Actuellement, on les préfère aux filtres passifs tant que leurs
fréquences critiques couvrent une gamme allant de quelques
hertz à quelques dizaines de kilohertz.

Détermination : Sa méthode de détermination des
filtres actifs diffère de celle des filtres passifs en ce sens que les
résistances d'insertion ont peu d'influence sur les caractéristiques
du filtre. En effet, on arrive facilement à réaliser des filtres à im-
-pédance d'entrée élevée et à impédance interne très faible.

Le filtre devient alors caractérisé par son gain de transfert
en tension. Si on impose $R_1 = \infty$ ou $R_2 = 0$, ou les deux à
la fois, la solution « FILTRE ACTIF » reste encore possible.

En effet, la fonction à réaliser serait alors chacun de ces cas :

- une impédance de transfert.
- une admittance de transfert.
- un gain de transfert en courant.

Ces fonctions ne sont pas rencontrées en général dans les filtres
actifs, nous n'envisagerons donc pas ces cas exceptionnels très rares.

* Le nombre entre crochets renvoie à la Bibliographie.

La détermination d'un filtre actif revient donc à deux problèmes :

a) détermination de la fonction de transfert correspondant aux tolérances admises dans le gabarit.

b) la synthèse de cette fonction à l'aide de réseaux R-C actifs.

Détermination de la fonction de transfert: Cette détermination s'effectue de la même manière que pour les filtres passifs, donc généralement par l'adoption d'une des approximations vues plus haut (Butterworth ou Tchebyscheff)⁽¹⁾. On peut procéder à un choix entre ces deux approximations en se basant sur le nombre d'éléments actifs que nécessite chacune de ces méthodes, donc en considérant le prix de la réalisation. Il suffit pour cela de voir l'ordre du filtre.

Notons qu'en général, sur le point économique, le filtre de Tchebyscheff est toujours préférable. Ceci est facile à démontrer :

en effet, pour un filtre de Butterworth, on a :

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right|^2 = \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

donc $20 \log_{10} \left| \frac{V_s}{V_e} \right| \cong -20 n \log_{10} x$ pour $x > 1$.

Un filtre de Butterworth a donc toujours une pente de $20 \times n$ dB par décade.

Pour un filtre de Tchebyscheff, on aura, tous calculs faits :

$$20 \log_{10} \left| \frac{V_s}{V_e} \right| \cong -20 \log \varepsilon - (n-1) 20 \log 2 - n \times 20 \log x$$

Pour une pente imposée, un filtre de Tchebyscheff donnera donc un ordre n inférieur ou égal à celui du filtre de Butterworth.

(1) Rappelons que pour passer de $|F_{21}(x)|$ à $F_{21}(p)$, il suffit de faire $x^2 = -p^2$ car $p = j\omega$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Synthèse des fonctions de transfert:

Les fonctions de transfert ainsi déterminées sont caractérisées par leurs pôles et zéros. Elles peuvent être synthétisées directement à l'aide d'opérateurs actifs (gyrateurs, convertisseurs d'impédance négative, réseaux R-C. associés à des sources contrôlées etc...). Nous verrons plus loin les définitions de quelques opérateurs actifs pouvant servir à cette synthèse.

Remarquons d'autre part que dès que l'ordre de la fonction de transfert dépasse trois ou quatre, la synthèse directe devient très difficile et peut amener des risques d'instabilité du réseau obtenu. Il est alors préférable, de décomposer la fonction de transfert en produit de fonctions élémentaires, du premier et du second ordre, suivant que n est pair ou impair, et de réaliser chacune de ces fonctions. On obtiendra la fonction voulue en mettant en cascade les différents réseaux. On peut, si nécessaire, intercaler entre deux étages « désadaptés » un montage séparateur, de gain unité. En effet, si l'impédance de sortie de l'un des montages n'est pas faible vis-à-vis de l'impédance d'entrée du montage suivant, il y a risque d'interaction entre ces deux étages et tout le fonctionnement du système est alors perturbé par suite du déplacement des pôles et des zéros de la fonction de transfert globale.

B) Formes des Fonctions à réaliser: Nous considérons ici le seul cas des filtres d'affaiblissement de Butterworth et de Tchebyscheff. De même, nous n'aborderons pas les filtres à temps de propagation de groupe. Cependant, nous signalerons l'existence, la forme des fonctions et les méthodes de réalisation des cellules correctrices de phase.

Tous les filtres passe-bas considérés ici ont leurs pôles d'affaiblissement infini, rejetés à l'infini, de sorte que leurs fonctions de transfert sont de la forme:

$$F_{21}(p) = \frac{K}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}$$

n étant l'ordre du filtre.

Les filtres d'affaiblissement passe-haut, passe-bande et éliminateur de bande peuvent être obtenus à partir du passe-bas

- Pour le filtre passe-haut, on effectue une dérivation LC, obtenue en remplaçant $\left(\frac{p}{\omega_0}\right)$ par $\left(\frac{\omega_0}{p}\right)$. On obtiendra alors une fonction de la forme:

$$F_{21}(p) = \frac{K \cdot p^n}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}$$

- Pour le filtre passe-bande, on effectue une dérivation conforme, consistant à remplacer $\left(\frac{p}{\omega_0}\right)$ par $\frac{p^2 + \omega_0^2}{\Delta \Omega \cdot p}$; où:

$\Delta \Omega$ = bande passante

ω_0 = fréquence centrale.

Ce filtre a une fonction de transfert de la forme:

$$F_{21}(p) = \frac{K \cdot p^n}{p^{2n} + a_{2n-1}p^{2n-1} + \dots + a_1p + a_0}$$

- Le filtre coupe-bande, lui, est obtenu par dérivation conforme

à partir du passe-haut. Sa fonction de transfert est de la forme:

$$F_{21}(p) = \frac{K \cdot (p^2 + \omega_0^2)^n}{p^{2n} + a_{2n-1} p^{2n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

• Ses cellules correctrices de phase, elles, ont des fonctions de transfert de la forme suivante:

• $\frac{p-a}{p+a}$ pour les cellules du 1^{er} ordre.

et $\frac{p^2 - ap + b}{p^2 + ap + b}$ pour les cellules du 2^e ordre.

Formes élémentaires: La décomposition des fonctions de transfert obtenues pour la détermination de filtres donne en général des fonctions élémentaires de formes diverses.

- Fonctions du 1^{er} ordre:

$\frac{K}{p+a}$ correspond au passe-bas.

$\frac{Kp}{p+a} \rightarrow$ passe-haut.

- Fonctions du 2^e ordre:

$\frac{K}{p^2 + ap + b} \rightarrow$ passe-bas

$\frac{Kp^2}{p^2 + ap + b} \rightarrow$ passe-haut.

$\frac{Kp}{p^2 + ap + b} \rightarrow$ passe-bande.

$\frac{K(p^2 + \omega_0^2)}{p^2 + ap + b} \rightarrow$ coupe-bande.

C) Synthèse des fonctions élémentaires:

1. Opérateurs Actifs: [3]

Les opérateurs actifs utilisés généralement en synthèse sont:

- les résistances négatives.
- les amplificateurs.
- les convertisseurs d'impédances.
- les gyrateurs.

a) La résistance négative peut être constituée par une diode-tunnel convenablement polarisée.

b) Parmi les amplificateurs, on connaît principalement:

- les amplificateurs de tension
- les amplificateurs de courant
- les amplificateurs de différence (disponibles sous forme de circuits intégrés sous le nom d'« amplificateurs opérationnels »)

L'amplificateur opérationnel est très utilisé en raison de son gain qui est très grand. Cette qualité lui permet de s'adapter aux différentes exigences de l'utilisateur.

On le schématise de la façon suivante:

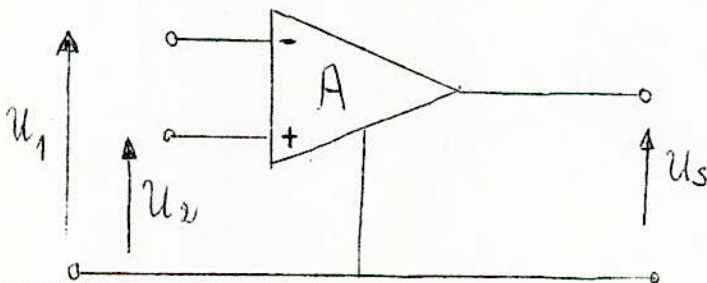


fig 3-1.

* Le nombre entre crochets renvoie à la Bibliographie.

On a ainsi:

$$U_s = A (U_2 - U_1)$$

avec A voisin du million

A s'appelle : gain en boucle ouverte.

On définit aussi, pour l'amplificateur opérationnel, un gain en boucle fermée, correspondant au schéma suivant:

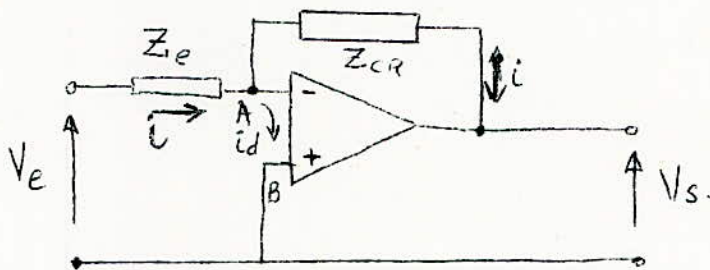


fig 3-2-

Une des caractéristiques principales de l'amplificateur opérationnel est sa grande impédance d'entrée (≈ 1 à plusieurs $M\Omega$).

Cette remarque permet d'écrire:

- $i_d = 0$

- $V_{AB} = i_d \times Z_{\text{entrée}} = 0 \Rightarrow V_A = 0.$

Ecrivons que les courants dans Z_e et Z_{CR} sont égaux:

$$\frac{V_e - V_A}{Z_e} = \frac{V_A - V_s}{Z_{CR}}$$

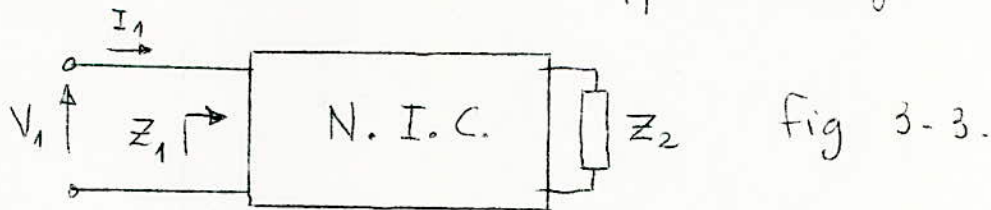
mais $V_A = 0$, on en tire:

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{Z_{CR}}{Z_e}$$

C'est le gain en boucle fermée.

Il faut encore noter que l'utilisation de l'amplificateur opérationnel nécessite certaines précautions: alimentation convenable (indication du constructeur), éviter la saturation, etc.

c) Le convertisseur d'impédance négative est un quadripôle non réciproque qui présente une impédance d'entrée de signe opposé à celui de l'impédance de charge. L'usage a fait qu'on désigne cet opérateur sous le nom de N.I.C. (Négative Impedance Converter, selon l'appellation anglo-saxonne).



$$\text{On a : } Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = -K Z_2$$

La matrice de transfert d'un tel dispositif est:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

il vient alors: $K = \frac{k_1}{k_2} = cte$ positive.

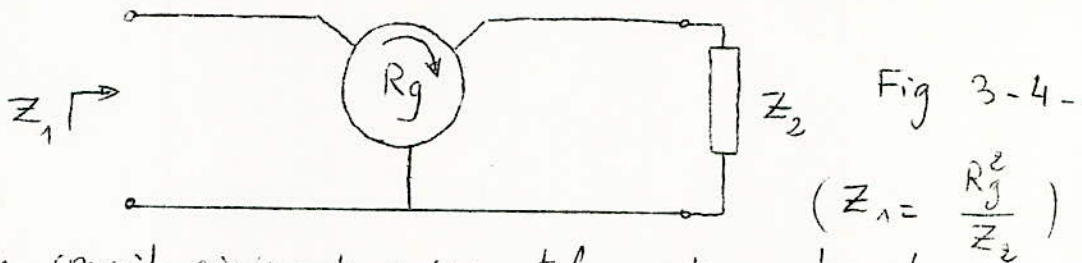
Deux cas sont à considérer:

- k_1 et k_2 sont positifs: On est en présence d'un circuit à inversion de courant qu'on désigne par I. N.I.C.
- k_1 et k_2 sont négatifs: le système est à inversion de tension. C'est un V. N.I.C.

d) Le gyrateur est un quadripôle non réciproque présentant une impédance d'entrée proportionnelle à l'inverse de son impédance de charge: $Z_1 = \frac{K}{Z_2}$.

D'après la définition, K est homogène au carré d'une résistance. On écrit $R_g = \sqrt{K}$ et on l'appelle « résistance de gyration »

La schématisation d'un gyrateur est la suivante:

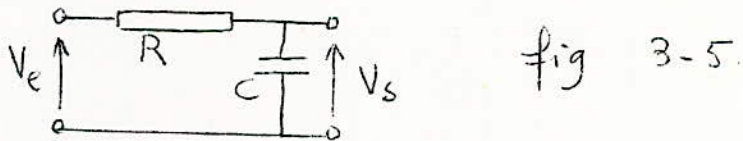


On conçoit aisément qu'un tel montage transformera une capacité en inductance. Il permettra donc de transformer un filtre passif en filtre actif, en remplaçant dans le premier toutes les bobines par des condensateurs associés à des gyrateurs. Les gyrateurs peuvent être synthétisés par des amplificateurs opérationnels.

2. Synthèse des fonctions du 1^{er} ordre:

a) Forme : $\frac{K}{p+a}$

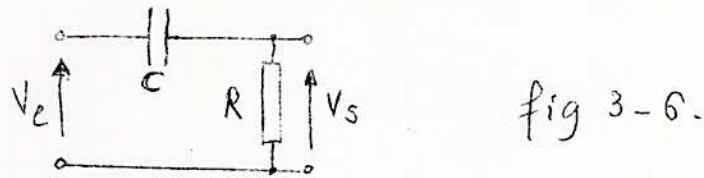
Cette fonction peut être synthétisée à l'aide d'un réseau passif. En effet, nous avons pour le réseau suivant:



$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\frac{1}{RC}}{p + \frac{1}{RC}} = \frac{a}{p+a}$$

Ce qui impose $K = a$. On peut se fixer la valeur de l'un des éléments et en déduire l'autre. Si par exemple, on se fixe C , on peut tirer R par : $R = \frac{1}{\omega_0 C}$
 ω_0 étant la fréquence de coupure du circuit.

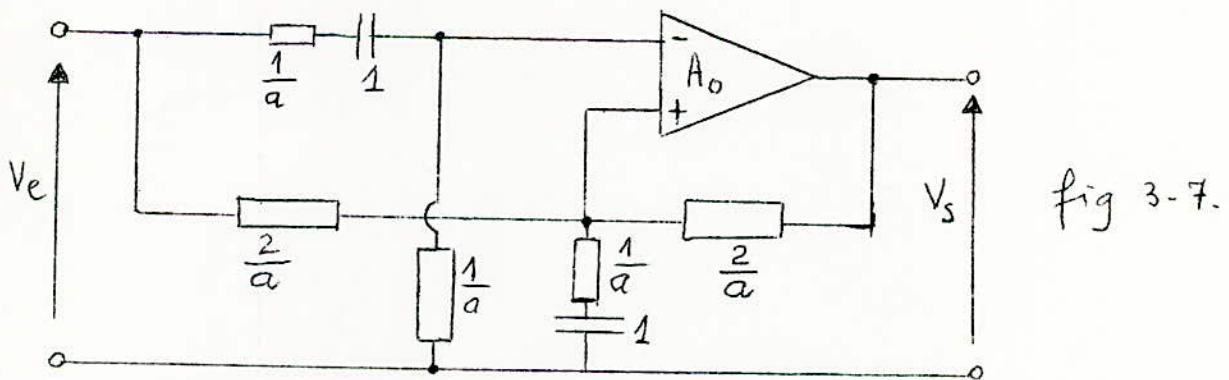
b) Forme $\frac{Kp}{p+a}$: Cette fonction est aussi réalisable à l'aide d'un réseau passif. Considérons le circuit suivant:



qui donne $\frac{V_s}{V_e} = \frac{p}{p+a}$, ce qui impose $K=1$.

Le même que plus haut, on peut se fixer la valeur d'un des éléments. Si le facteur K donné est différent de ceux qui imposent le montage, on peut faire usage, en bout de chaîne, (après réalisation de toutes les fonctions élémentaires) d'un amplificateur pour rétablir le gain à la valeur voulue.

c) Forme $\frac{p-a}{p+a}$: c'est la forme de la fonction de transfert d'une cellule passe-tout, correctrice de phase. Elle peut être obtenue à l'aide du réseau suivant:



On voit que sa réalisation nécessite un opérateur actif qui est ici un amplificateur opérationnel.

3) Synthèse des fonctions du second ordre: Nous ne donnerons ici que certains montages utilisant des amplificateurs de gain constant. Signalons cependant qu'on arrive à des solutions très élégantes avec les autres opérateurs actifs que nous venons de voir. [2]

a) Synthèse de la fonction passe-bas:

La fonction de transfert passe-bas du deuxième ordre s'écrit:

$$F_{21}(p) = \frac{K}{p^2 + ap + b}$$

Elle peut être synthétisée de la manière suivante:

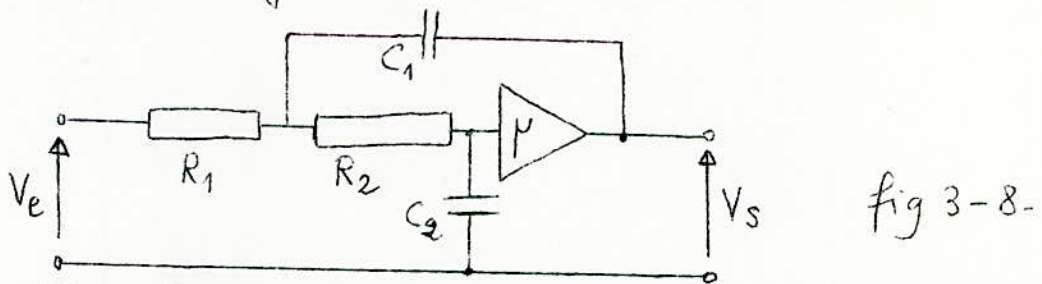


fig 3-8.

En effet, la fonction de transfert de ce réseau est:

$$F_{21}(p) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\mu \cdot \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{p^2 + \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_2} \right] p + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

L'identification donne: $\mu = \frac{K}{b}$, $a = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_2 C_2}$
 $b = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$

On voit que le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues, ce qui donne à l'utilisateur certains degrés de liberté dans la détermination des éléments, et il peut se fixer certains critères supplémentaires.

b) Transformation RC-CR :

Comme pour les filtres passifs où on peut, par la transformation LC, dériver un passe-haut d'un passe-bas, il est possible ici aussi de dériver le passe-haut du passe-bas.

La transformation utilisée, appelé « transformation RC-CR », consiste à remplacer toute résistance de valeur R par une capacité de valeur $\frac{1}{R}$, et toute capacité de valeur C par une résistance de valeur $\frac{1}{C}$.

Ceci revient à faire la correspondance :

$$R \rightarrow \frac{R}{p}$$
$$\frac{1}{Cp} \rightarrow \frac{1}{C}$$

Si gain de transfert en tension subira alors la transformation :

$$F_{21}(p) \rightarrow F_{21}\left(\frac{1}{p}\right)$$

et l'on comprend qu'un passe-bas sera ainsi transformé en passe-haut et réciproquement.

c) Synthèse de la fonction passe-haut : Su vertu de ce qui a été dit plus haut, à propos de la transformation RC-CR, on peut, à partir de la fig 3-8, déduire le schéma de réalisation d'un filtre passe-haut :

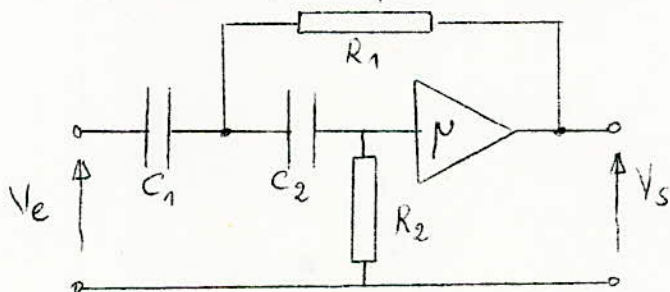


fig 3-9-

En effet, on a, pour ce réseau:

$$F_{21}(p) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{\mu p^2}{p^2 + \left[\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_1 C_1} \right] p + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

On procède de la même manière que pour le passe-bas.

On identifie cette fonction avec celle donnée :

$$F_{21}(p) = \frac{K p^2}{p^2 + ap + b}$$

On trouve :

$$p = K.$$

$$a = \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-\mu}{R_1 C_1}$$

$$b = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

De même que plus haut, on peut s'imposer d'autres contraintes car le nombre d'équations est insuffisant.

CHAPITRE IV : Réalisation pratique.

1. Données du problème :

On veut réaliser :

- a) Un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est 2 KHz. L'atténuation maximale admissible en bande passante est de 1 dB. L'affaiblissement doit être supérieur à 24 dB au-delà de $f_s = 4$ KHz. (pente : 24 dB / octave)

- b) Un filtre passe-haut dont la fréquence de coupure est de 1 KHz. L'atténuation maximale tolérée en bande passante est de 1 dB. Ses fréquences inférieures à 500 Hz doivent être affaiblies à 24 dB, au moins.

2. Calculs :

Remarque préliminaire : D'après les données, on voit immédiatement que pour les deux filtres, l'atténuation en bande passante ainsi que les pentes d'affaiblissement (24 dB/octave) sont les mêmes pour les deux filtres. On peut donc conduire les calculs uniquement pour le filtre passe-bas. Une fois ce dernier déterminé, on pourra déduire le filtre passe-haut en utilisant la transformation RC-CR. (page 21.)

a) Détermination des paramètres du filtre :

Calculons le degré n d'un filtre de Butterworth capable de réaliser les conditions imposées. Un tel filtre suit la loi d'affaiblissement :

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right|^2 = \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

donc :

$$20 \log \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = -10 \log (1 + x^{2n}).$$

Si $x > 1$:

$$20 \log \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = -10 \log x^{2n}$$

Or, on impose une pente de -24 dB / octave.; ceci

s'écrit:
$$-24 = -20 \log 2^n$$

Ceci conduit à :

$$\log 2^n = 1,2 \quad \text{ou encore} \quad \boxed{n = 4}$$

Calculons ce que deviendrait n si on optait pour l'approximation de Tchebyscheff. On a :

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(x)}$$

Déterminons ϵ :

Pour $x < 1$, donc en bande passante, la valeur maximale de l'affaiblissement est :

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \frac{1}{(1 + \epsilon^2)^{1/2}}$$

soit, en dB :

$$20 \log \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = -10 \log (1 + \epsilon^2).$$

Comme on impose $A_{\max} = 1$ dB pour $x = 1$, on aura :

$$0,1 = \log (1 + \epsilon^2)$$

$$\text{d'où : } \boxed{\epsilon = 0,509}$$

Reprenons l'approximation correspondant à $x > 1$ (voir page 9) :

$$T_n(x) = 2^{n-1} \cdot x^n$$

D'autre part, pour $x > 1$, on peut négliger 1 devant $\epsilon^2 T_n^2(x)$

En vertu de ces approximations, on a une :

$$A_{dB} \cong -20 \log \varepsilon - 20(n-1) \log 2 - 20n \log x.$$

On veut $A = -24$ dB pour $x = 2$:

$$-24 = -20 \log \varepsilon - 20n \log 2 + 20 \log 2 - 20 \log x \Big]_{x=2}$$

Soit :

$$24 = -5,84 + 12n - 6.$$

$$\text{d'où : } n = \frac{35,84}{12} = 2,99.$$

On prendra donc : $n = 3$

Il apparaît clairement que le filtre de Tchebyscheff est le plus économique puisqu'il ne nécessite qu'un étage actif (second ordre) et un étage passif (1^{er} ordre) alors qu'un filtre de Butterworth exigeait deux étages actifs.

b) Détermination de la fonction de transfert :

Nous connaissons la fonction de transfert par le carré de son module. En effet :

$$\left| \frac{V_s}{V_e} \right|^2 = |F_{21}(p)|^2$$

On l'obtient en remplaçant x^2 par $(-p^2)$ (car $p = j\omega$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$).

D'autre part, on sait que $|F_{21}(p)|^2 = F_{21}(p) \cdot F_{21}(-p)$.

Nous représenterons donc la constellation des pôles et zéros du module de $F_{21}(p)$ et déduirons en ne gardant que les pôles situés dans la portion gauche du plan complexe.

Les pôles d'une fonction du type donné : $\left| \frac{V_s}{V_e} \right|^2$ se trouvent répartis régulièrement sur une ellipse. En effet, on a, en

posant $x^2 = -p^2$:

$$F(p) \cdot F(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{p}{j}\right)}$$

Les pôles de cette fonction sont les racines de l'équation

$$T_n\left(\frac{p}{j}\right) = \operatorname{ch}\left[n \operatorname{ang} \operatorname{ch} \frac{p}{j}\right] = \pm j \frac{1}{\varepsilon}$$

en posant :

$$p = j \operatorname{ch}(a + jb), \text{ on aura :}$$

$$\operatorname{ch} n(a + jb) = \pm j \frac{1}{\varepsilon}.$$

Soit en décomposant :

$$\operatorname{ch} na \cdot \cos nb = 0$$

$$\operatorname{sh} na \cdot \sin nb = \pm \frac{1}{\varepsilon}$$

Les pôles recherchés sont alors

$$p_k = \alpha_k + j\omega_k$$

avec :

$$\alpha_k = \operatorname{sh}\left[\frac{1}{n} \operatorname{ang} \operatorname{sh} \frac{1}{\varepsilon}\right] \cdot \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$$

$$\text{et } \omega_k = \operatorname{ch}\left[\frac{1}{n} \operatorname{ang} \operatorname{sh} \frac{1}{\varepsilon}\right] \cdot \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$$

Ils se placent donc, dans le plan complexe, sur l'ellipse d'équation :

$$\frac{\alpha^2}{\operatorname{sh}^2\left[\frac{1}{n} \operatorname{ang} \operatorname{sh} \frac{1}{\varepsilon}\right]} + \frac{\omega^2}{\operatorname{ch}^2\left[\frac{1}{n} \operatorname{ang} \operatorname{sh} \frac{1}{\varepsilon}\right]} = 1$$

Aucun de ces pôles ne peut être situé sur l'axe ($j\omega$) car α_k ne peut pas être nul. En effet, pour avoir :

$$\alpha_k = 0, \text{ il faut } \sin \frac{2k-1}{2n} \pi = 0$$

donc que $\frac{2k-1}{2n} = \text{entier}$, ce qui est impossible.

Dans le cas qui nous concerne, on trouve, tous calculs faits :

$$p_1 = -0,248 + j 0,97$$

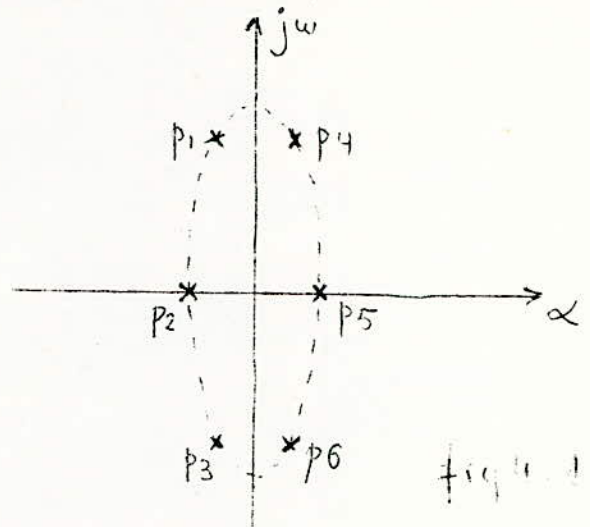
$$p_2 = -0,495$$

$$p_3 = -0,248 - j 0,97$$

$$p_4 = 0,248 + j 0,97$$

$$p_5 = +0,495$$

$$p_6 = 0,248 - j 0,97.$$



On prendra donc, pour former $F_{21}(p)$, les 3 premiers pôles qui se trouvent dans le demi-plan gauche. On obtient $F_{21}(p)$ par :

$$F_{21}(p) = \frac{K}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} \quad \text{avec } n = 3.$$

Il reste donc à définir le facteur de niveau K de la fonction de transfert. Pour le calculer, il faut se donner une valeur particulière de la fonction.

Tout calcul fait, on trouve :

$$F_{21}(p) \approx \frac{K}{(p + 0,49)(p^2 + 0,49p + 1)}$$

Pour déterminer K , remarquons que $|F_{21}(p)| = 1$ pour $p = 0$

$$1 = \frac{K}{0,49} ; \quad \text{d'où } K = 0,49.$$

On aura finalement :

$$F_{21}(p) \approx \frac{0,49}{p + 0,49} \times \frac{1}{p^2 + 0,49p + 1}$$

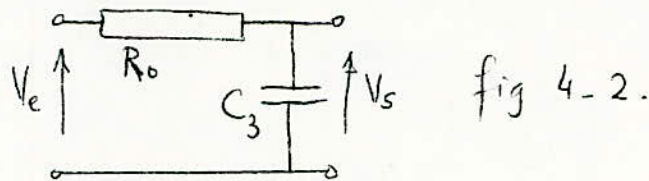
c) Synthèse de la fonction de transfert:

La décomposition en fonctions élémentaires est très simple dans ce cas. En effet:

$$[F_{21}(p)]_1 = \frac{0,49}{p+0,49}$$

$$\text{et } [F_{21}(p)]_2 = \frac{1}{p^2+0,49p+1}$$

La première fonction est réalisable à l'aide du réseau de la figure 3-5 (reprise ici selon 4-2), dont la réponse est $\frac{V_s}{V_e} = \frac{a}{p+a}$

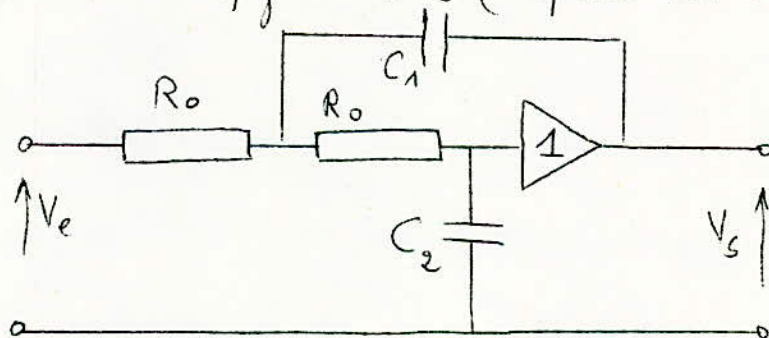


avec $a = \frac{1}{R_0 C_3}$

Si on choisit R_0 comme unité de résistance, on aura:

$$C_3 = \frac{1}{a}.$$

Quant à la seconde fonction, elle est réalisable à l'aide du réseau de la figure 3-8 (reprise ici selon 4-3)



On a choisi ici =

$$R_1 = R_2 = R_0$$

et $\mu = 1$.

de sorte qu'en travaillant en valeurs réduites, la fonction de transfert du réseau est :

$$F_{21}(p) = \frac{1}{C_1 C_2 p^2 + 2C_2 p + 1}$$

En identifiant, on obtient :

$$a = 0,49 \rightarrow C_3 = \frac{1}{0,49} = 2,04.$$

$$2C_2 = 0,49(\tau) \rightarrow C_2 = 0,248.$$

$$C_1 C_2 = 1 \rightarrow C_1 = \frac{1}{C_2} = 4,04$$

Prenons comme unité de capacité $C_0 = 10\text{nF}$

On tire d'après $F_0 = 2\text{kHz}$

$$R_0 = \frac{1}{C_0 \times 2\pi F_0} \simeq 8\text{k}\Omega.$$

Le schéma définitif sera :

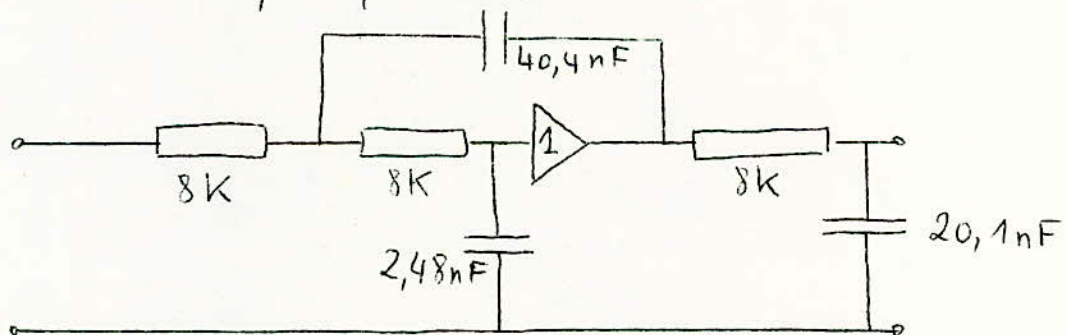


Fig. 4-4.

Quant à l'amplificateur de gain unité, il sera réalisé de la façon suivante :

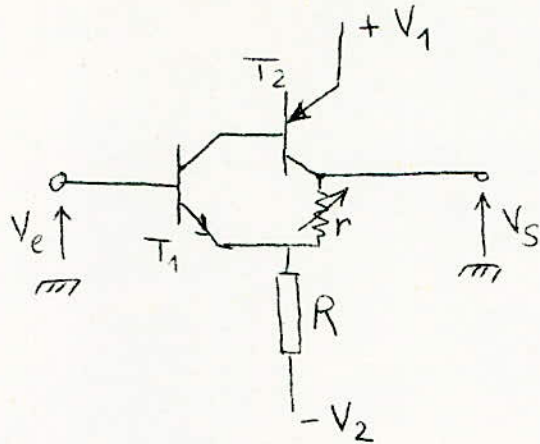


fig 4-5.

Le gain de ce montage est :

$$G = 1 - \frac{h_{11}(T_1)}{\beta_1 \beta_2 R} + \frac{r}{R}$$

A l'aide de r qu'on ajuste à : $r = \frac{h_{11}}{\beta_1 \beta_2}$, on peut avoir un gain égal à l'unité.

L'impédance d'entrée de cet amplificateur est :

$$Z_e \approx \beta_1 \beta_2 R$$

Quant à son impédance de sortie, elle vaut :

$$Z_s \approx \frac{r}{\beta_2} + \frac{R_g + h_{11}}{\beta_1 \beta_2}$$

où $R_g =$ résistance du générateur d'attaque.

Elle est donc très faible.

d) Dérivation du passe-haut :

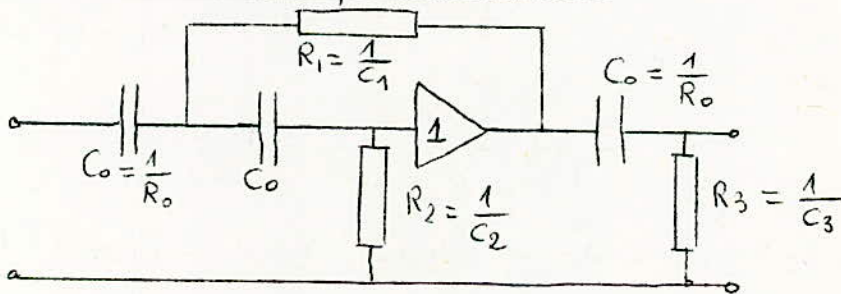


fig 4-6.

On aura donc

$$R_1 = \frac{1}{4,04} \approx 0,248.$$

- 31 -

$$R_2 = \frac{1}{0,248} \approx 4,04.$$

$$R_3 = \frac{1}{2,01} = 0,49.$$

Si on choisit $C_0 = 10\text{nF}$, la condition $f_c = 1\text{kHz}$ impose la valeur de l'unité de résistance:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi f_c \cdot C_0} = 15,92\text{ k}\Omega.$$

On aura donc:

$$R_1 = 0,248 \times 15,92 = 3,95\text{ k}\Omega.$$

$$R_2 = 4,04 \times 15,92 = 64,3\text{ k}\Omega.$$

$$R_3 = 0,49 \times 15,92 = 7,92\text{ k}\Omega.$$

Pour l'amplificateur de gain unité, on peut encore utiliser le schéma indiqué à la figure 4-5.

3- Résultats et graphes: Il est clair qu'il est impossible d'obtenir exactement les valeurs calculées; cependant, en pratique, on se guide sur un autre paramètre que nous n'avons pas encore signalé et qui est le coefficient de surtension de la fonction: Etant donnée une fonction du second degré de la forme:

$$F(p) = \frac{k}{p^2 + ap + b}$$

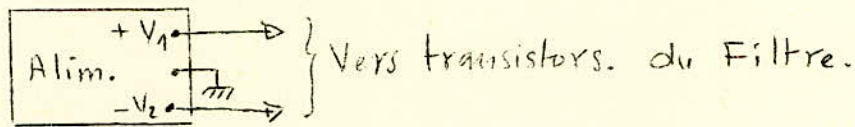
On appelle coefficient de surtension la quantité:

$$Q = \sqrt{\frac{b}{2a}}$$

Tant que $Q < 2$, on peut prendre les éléments à 1%,

mais dès que Q devient important, on exige plus de précision, il faut descendre jusqu'à 0,1%. Dans notre cas, $Q = 2,02$.

Pour relever les courbes de réponse des filtres, on réalise le montage suivant :



On fait varier la fréquence de la tension de sortie du générateur en mettant cette dernière à une valeur constante et on relève la tension de sortie en fonction de la fréquence.

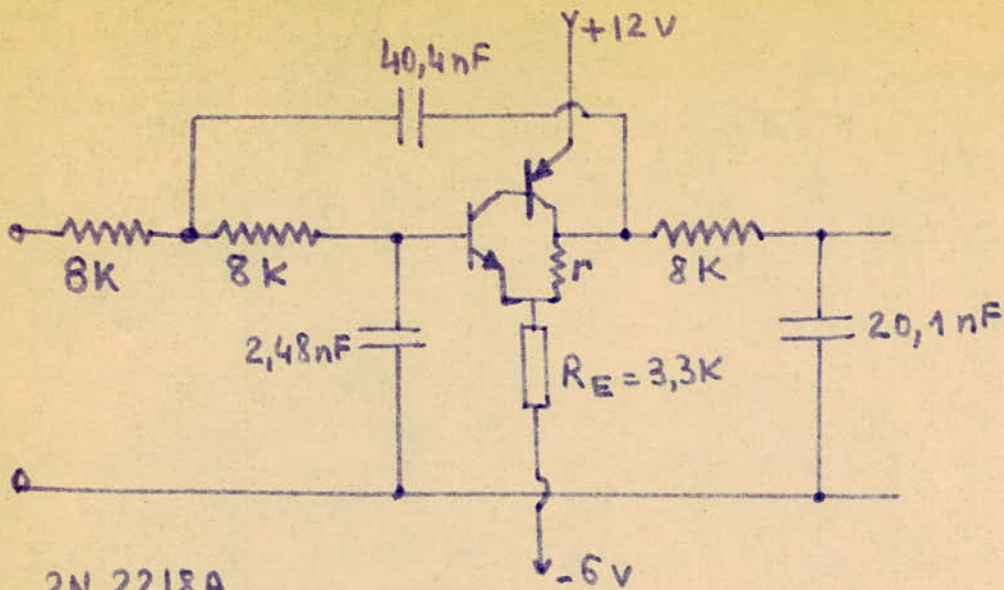
Si les deux voltmètres sont identiques et gradués en dB, on peut avoir directement $20 \log \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = f(F)$

Nous avons obtenu un filtre passe-bas qui répond largement aux conditions imposées. Malheureusement, la réalisation du filtre passe-haut n'est pas très satisfaisante. La raison en est que les éléments utilisés ne sont pas assez précis.

Sont données ici les courbes de réponse de chacun de ces filtres, établis par la méthode de même indiquée plus haut. Nous avons également essayé d'avoir un filtre passe-bande à partir des deux autres, placés en cascade.

On remarque que le fait de mettre le passe-bas avant le passe-haut donne de meilleurs résultats qu'en réalisant la combinaison inverse (cf. courbes.)

Les schémas détaillés, avec indication des transistors utilisés, sont donnés ci-après.

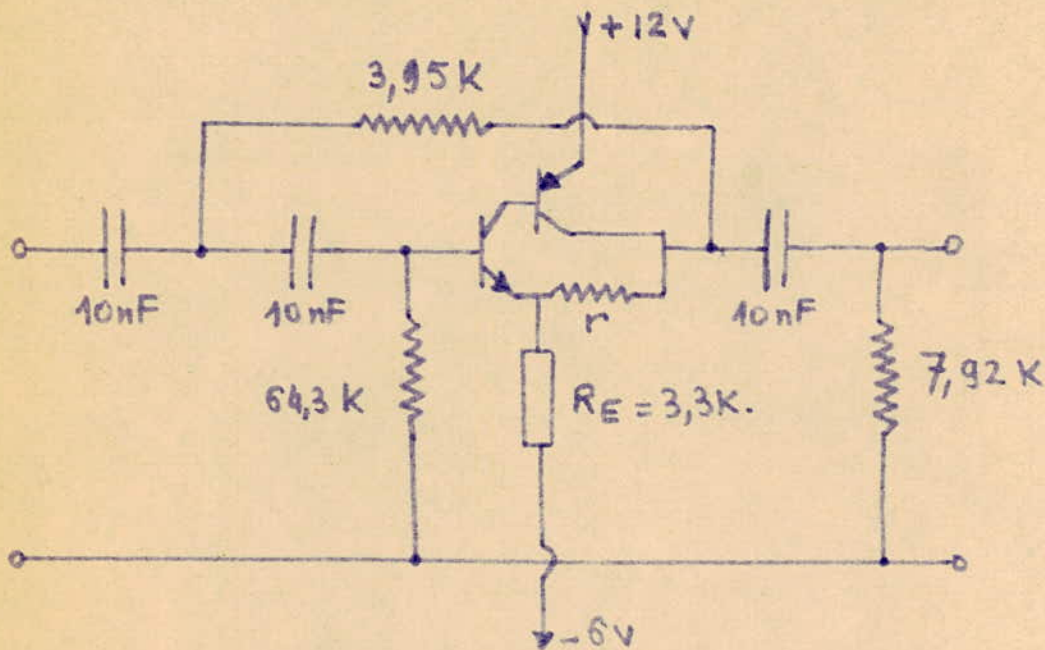


NPN: 2N 2218A

PNP: 2N 2907A

Filtre passe-bas. $F_c = 2\text{KHz}$.

pente : -26 dB/octave .

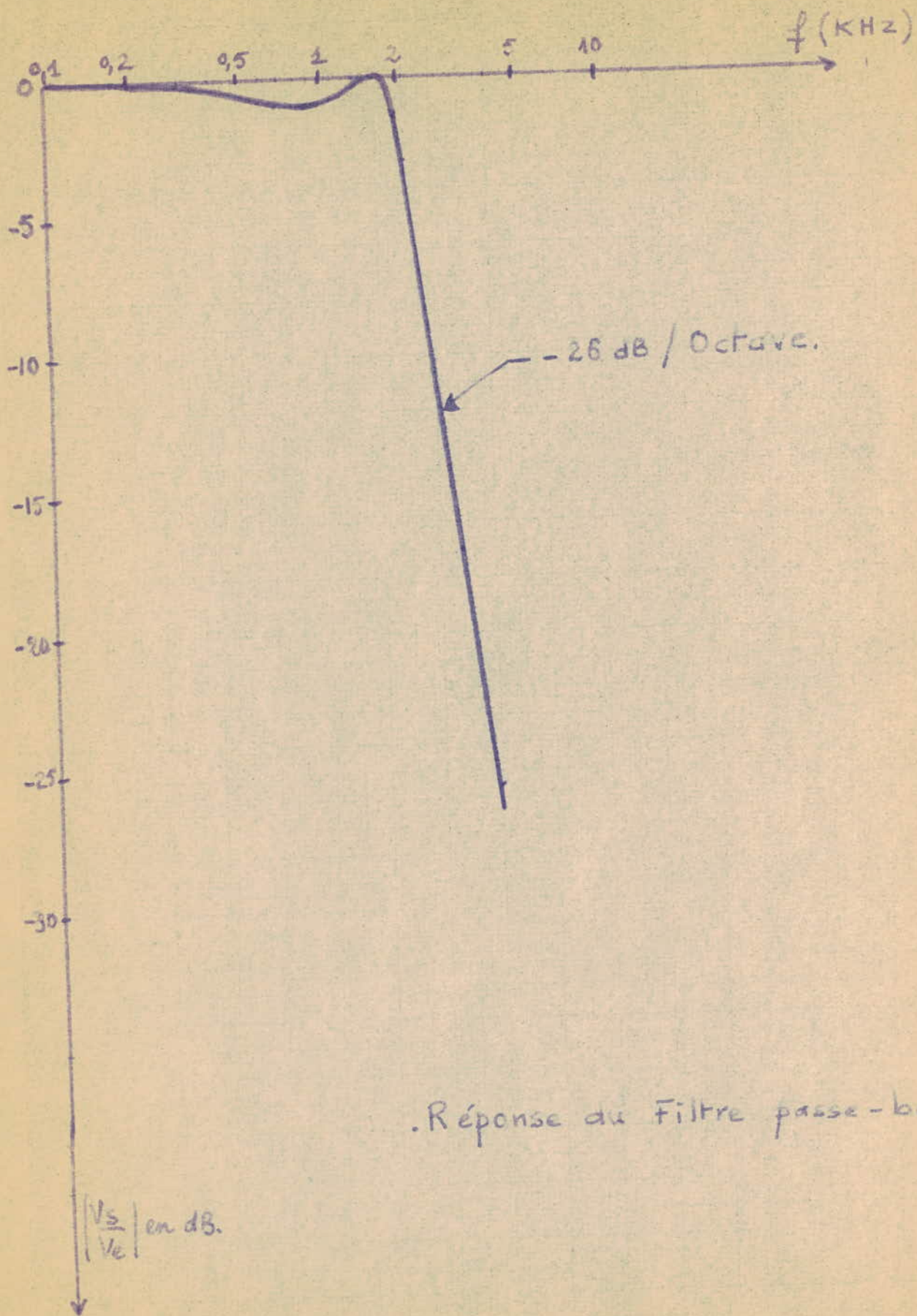


Filtre passe-haut. $F_c = 1\text{KHz}$.

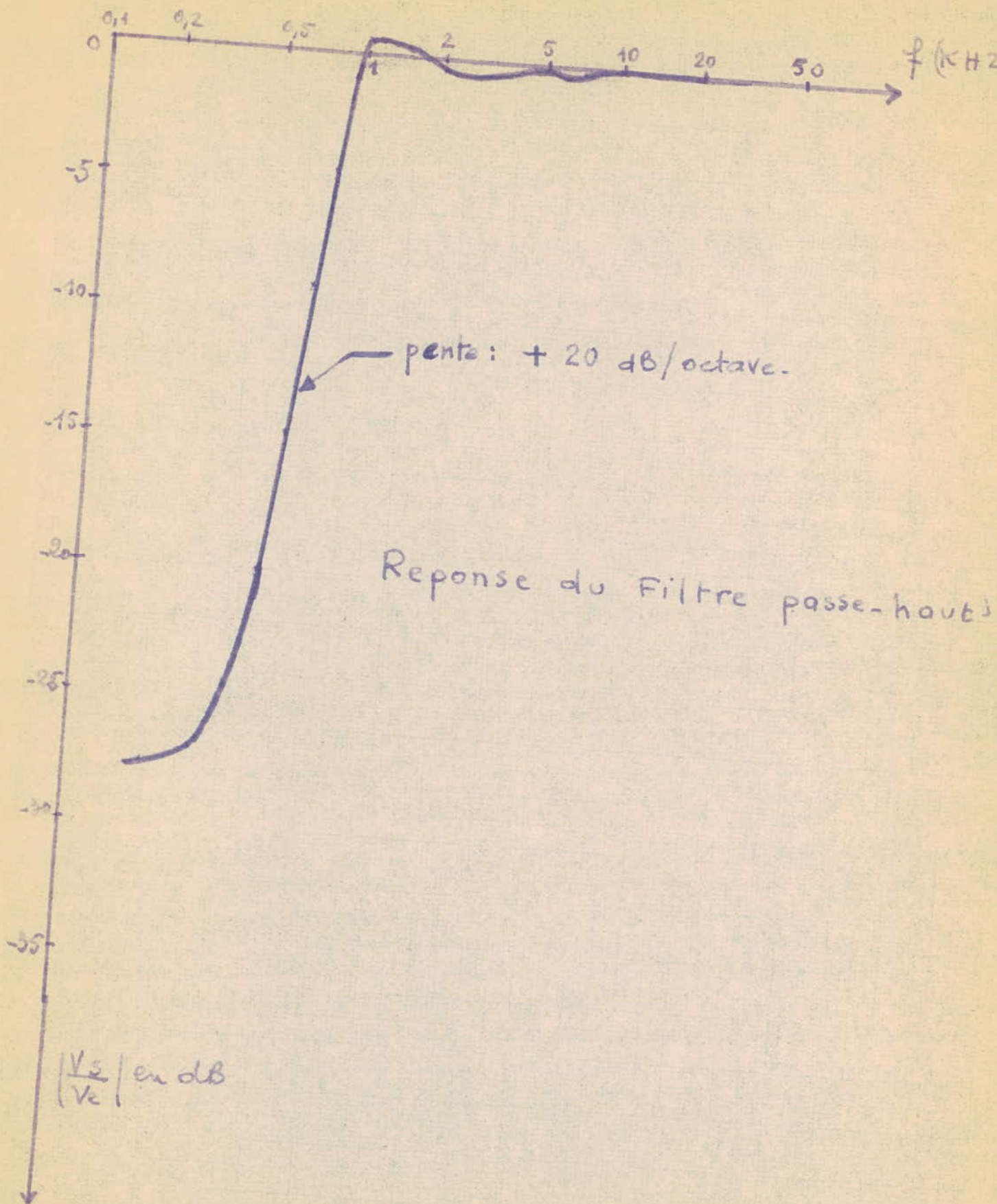
pente : $+20\text{ dB/octave}$.

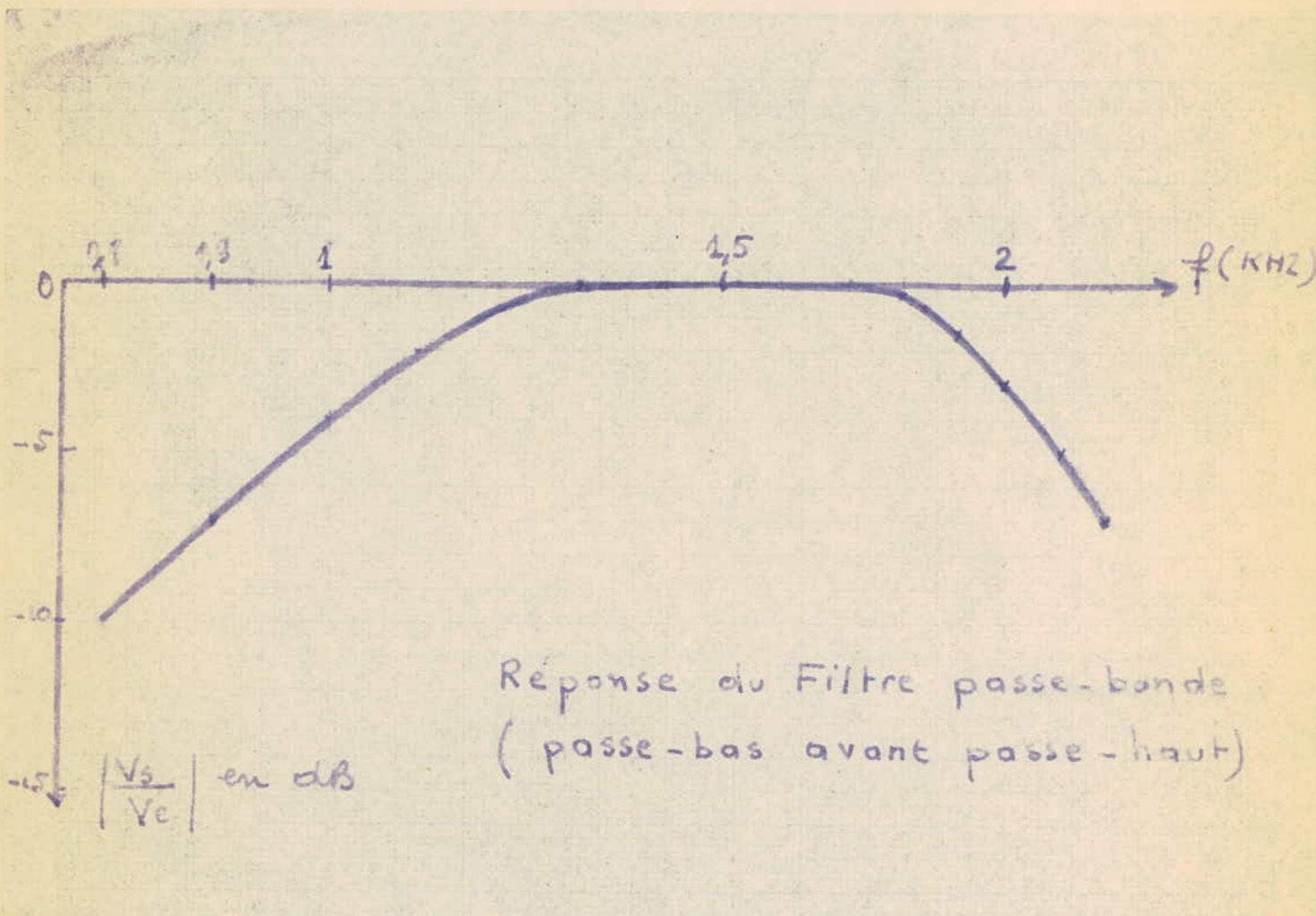
NPN: 2N 2218A

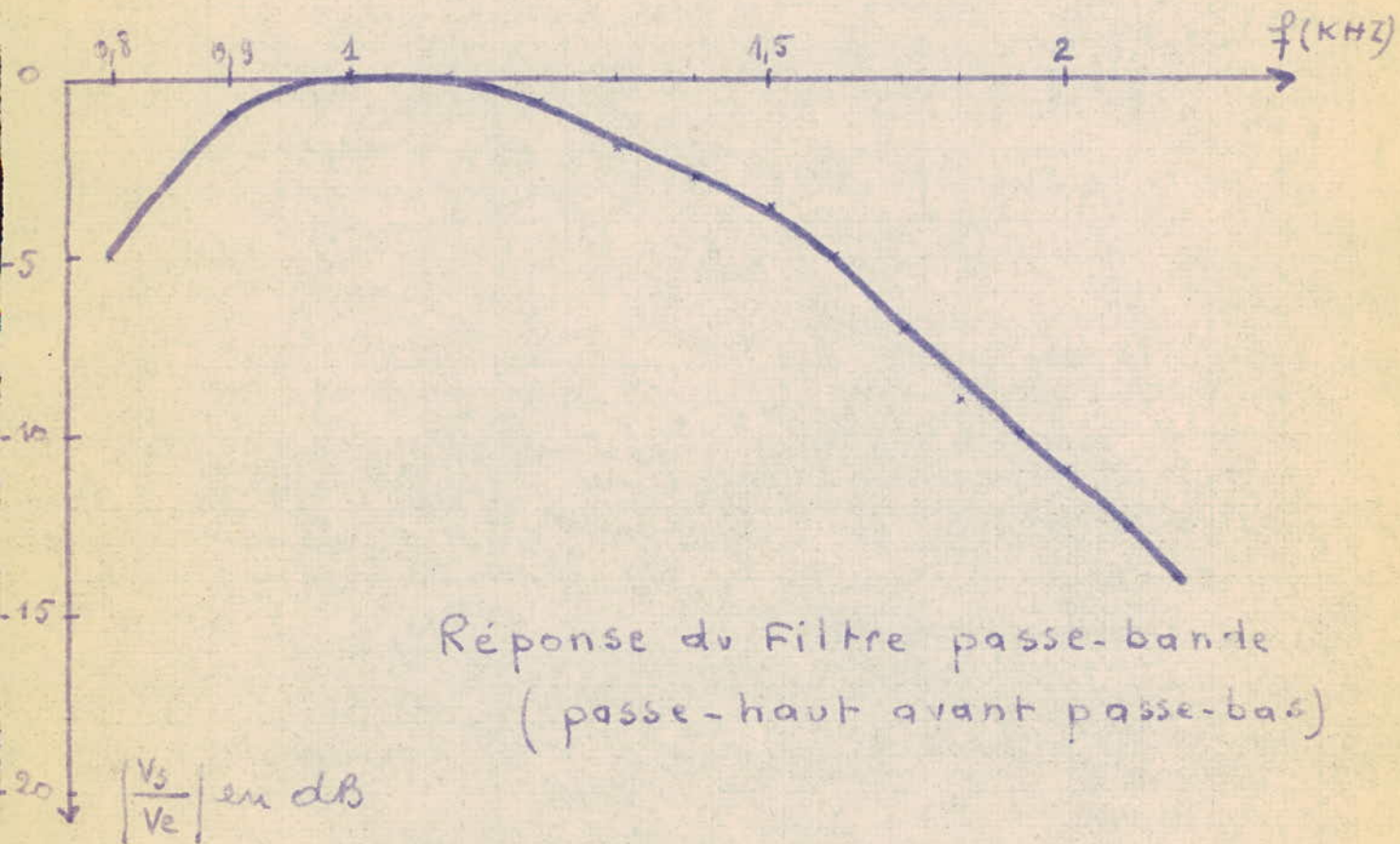
PNP: 2N 2907A



. Réponse du Filtre passe-bas.







CHAPITRE 7 : Conclusion :

On voit que les filtres actifs sont de réalisation très simple, pourvu qu'on dispose des composants nécessaires (valeurs critiques de la précision : 0,1% à 1%). On a aussi vu apparaître l'avantage de la technique de normalisation (relative aux valeurs des éléments) qui permet d'avoir des méthodes générales de synthèse où les fréquences critiques n'interviennent qu'en bout de chaîne. Cette technique a permis à M. P. Bildstein de mettre au point des tableaux de valeurs calculés à l'ordinateur, permettant la détermination, en un temps très court, d'un filtre actif répondant aux exigences de la circonstance, sans passer par la détermination de la fonction de transfert. (voir Bibliographie). [4].

L'étude donnée ici est très modeste en soi, car, en fait, le problème du filtrage est très vaste. Le lecteur intéressé par ce problème, pourra consulter utilement la Bibliographie que nous avons essayé de condenser au maximum, pour éviter les problèmes que pose souvent une documentation trop variée.

Bibliographie:

- [1]: Théorie des Circuits Tome I.
par M^r J. SLOSIAR. (Cours professé à l'École
Nationale Polytechnique)
- [2]: Théorie des Réseaux Electriques Linéaires.
Fascicules 4 et 5.
Par A. DAUPHIN. (Cours professé à l'École Supérieure
d'Electricité de PARIS)
- [3] Filtrés Actifs par P. Bildstein
E. 615. Techniques de l'Ingenieur (1969)
- [4] Publication de P. Bildstein
dans Electronique Industrielle (Avril 1968)
p. 275, 276, 277, 278 et 279.