

P N 001 / 67

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE - UNIVERSITE D'ALGER
DEPARTEMENT TELECOMMUNICATION

PROJET DE FIN D'ETUDE

Regu le 15/16/67
Moussa

Département Télécommunications

conçu et rédigé par
ADANE Abed-el-Hamid
Sujet; Antenne parabolique
de faisceau hertzien

proposé par
M. AMEUR MOUSSA
Année 1966 - 67

PREFACE

Je tiens à remercier toutes les personnes ayant apporté leur concours à la réalisation de ce projet.

Adameff

SOMMAIRE

	pages
1 - Introduction	1
2 - Problème	1
3 - Etude de l'antenne parabolique	1
3 - 1 - Propriétés du paraboloïde	1
3 - 2 - Rayonnement du paraboloïde	2
3 - 2 - 1 - Généralités	2
3 - 2 - 2 - Distribution de courant sur le réflecteur	3
3 - 2 - 3 - Distribution de champ à l'ouverture	7
3 - 3 - Gain de l'antenne parabolique	11
3 - 3 - 1 - Ouverture angulaire optimum	11
3 - 3 - 2 - Interférence avec le lobe arrière de la source primaire	13
3 - 3 - 3 - Obstacles au rayonnement	14
3 - 3 - 4 - Pertes par spill - over et transparence	16
3 - 3 - 5 - Effets des erreurs de phase	18
3 - 3 - 5 - 1 - Erreur de phase due à l'absence d'un vrai centre d'alimentation	18
3 - 3 - 5 - 2 - Défocalisation	18
3 - 3 - 5 - 3 - Distorsion de surface	19
3 - 4 - Adaptation de la source primaire à la ligne d'alimentation	21
3 - 5 - Choix d'une antenne primaire	24
3 - 6 - Procédure d'un projet	27
4 - Réalisation	28
4 - 1 - Choix de l'antenne primaire	28
4 - 2 - Dimensionnement du paraboloïde	30
4 - 3 - Diagramme de rayonnement du paraboloïde	31
4 - 4 - Réalisation du prototype	33
4 - 5 - Mesure sur la maquette.	37
4 - 5 - 1 - Mesure du gain.	37
4 - 5 - 2 - Diagramme de rayonnement.	40
4 - 6 - Données de construction.	41
4 - 7 - Conclusion.	41
Bibliographie	43
Annexe	

$FM + MA = PM + MA = PA = Cte$ quel que soit le point M sur le paraboloïde

Si (L_0) passe par F, on obtient:

$$MF + MA = PA = P'F = 2f = \rho + \rho \cos \psi$$

$$\text{ou } \rho = \frac{2f}{1 + \cos \psi} \quad \text{c'est l'équation du paraboloïde}$$

Plaçons en F une source ponctuelle (source d'ondes sphériques). Le chemin optique du trajet FMA suivi par les ondes électromagnétiques, est $(FM + MA) = FM + MA = Cte$

Or, lorsque M se déplace sur le paraboloïde, A décrit le plan (L_0) , la condition $(FM + MA) = Cte$ signifie que (L_0) est une surface d'onde. Donc, les ondes sphériques sont transformées par le paraboloïde en ondes planes.

3-2-Rayonnement du paraboloïde

3-2-1 Généralités

Dans l'approximation de l'optique géométrique, cette antenne donnerait un faisceau de rayons tous parallèles à son axe Oz. Mais le champ réfléchi est un champ de dispersion qui ne pourra être déterminé par l'optique géométrique puisque celle-ci ne tient pas compte des phénomènes de diffraction et ne résout pas les problèmes de discontinuités sur le réflecteur. Comme nous le verrons plus tard, on aura un lobe principal de rayonnement dans la direction Oz et non un faisceau de rayons parallèles. Le champ rayonné par l'antenne primaire isolée dans l'espace est défini par \vec{E}_0 et \vec{H}_0 . En présence du réflecteur, il y a induction, à la surface de celui-ci, d'une distribution de densités de charges γ et de courants \vec{K} due aux champs \vec{E}_0 et \vec{H}_0 .

Si l'on suppose que la conductivité du réflecteur est infinie, \vec{K} et γ donnent naissance à une onde de dispersion définie par les champs \vec{E}_1 et \vec{H}_1 . Ceux-ci induisent à leur tour sur la source primaire une distribution de charges et de courants qui donne naissance à son tour à une onde de dispersion (\vec{E}_2, \vec{H}_2) , etc...

D'après le principe de superposition (1), le champ électromagnétique total sera donné par:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \\ \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3 + \dots \end{cases}$$

\vec{H}_1 et \vec{E}_1 sont de l'ordre de $\frac{1}{r}$ et \vec{E}_2 et \vec{H}_2 de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$, ...

En pratique, la distance focale f est très grande devant la longueur d'onde λ , par suite $f \gg \lambda$. Le réflecteur est, donc, placé dans la zone de rayonnement à grande distance de la source primaire, l'influence des termes $\vec{E}_2, \dots, \vec{H}_2, \dots$ est négligeable devant celle de

$$\vec{E}_1 \text{ et } \vec{H}_1, \text{ d'où } \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \\ \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 \end{cases}$$

Deux méthodes permettent le calcul de \vec{E}_1 et \vec{H}_1 à partir de \vec{E}_0 et \vec{H}_0 . Le champ réfléchi peut être déterminé

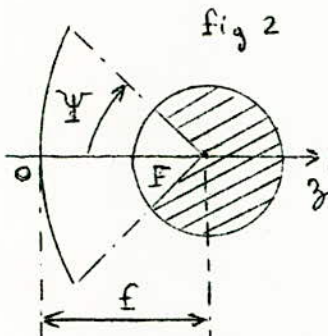
(1) Voir annexe-chapitre 10

- Directement, à partir de la distribution de courants et de charges sur le réflecteur
 (- ou sous la forme d'un champ de diffraction obtenu à partir de la distribution de champ à l'ouverture du réflecteur.

On aura toujours, intérêt à utiliser une source primaire rayonnant entièrement vers le réflecteur.

Ainsi dans le cas où l'antenne d'alimentation est une source isotrope

$$\text{Si } f = (2K + 1) \frac{\lambda}{4} \quad K = 1, 2, \dots$$



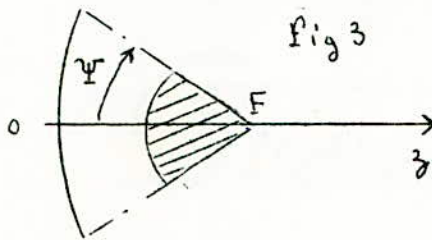
La zone hachurée du diagramme de rayonnement de la source primaire (fig 2) est plus ou moins en opposition de phase avec l'onde réfléchiée et tendra à annuler la partie centrale de celle-ci.

$$\text{Si } f = K \frac{\lambda}{2} \quad K = 1, 2, \dots$$

Il y a au contraire, renforcement de cette partie centrale.

Pour éviter l'interférence entre le champ de l'onde réfléchiée et celui dû à l'antenne

primaire, il faut que le diagramme de rayonnement de celle-ci ait l'allure idéale suivante : (zone hachurée de la figure 3)



Analytiquement, ceci s'exprime par :

$$\begin{cases} \vec{E}_0 \neq 0 \\ \vec{H}_0 \neq 0 \end{cases} \quad \text{Si } 0 \leq \psi \leq \Psi$$

(la figuré étant de révolution autour de \vec{oz}).

Dans ce cas, le champ rayonné par l'antenne parabolique est :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_i \\ \vec{H} = \vec{H}_i \end{cases}$$

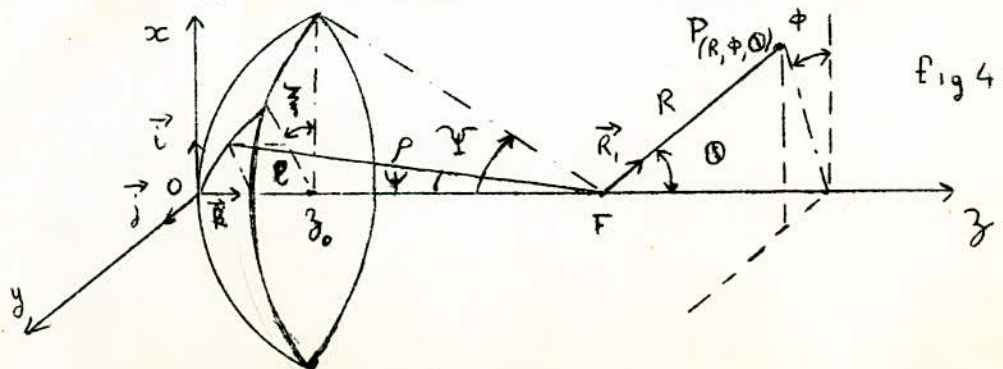
Le diagramme de rayonnement des antennes primaires couramment employées comprendra :

- un lobe de rayonnement avant à niveau très élevé (ce lobe est dirigé vers le réflecteur)
- un lobe de rayonnement arrière à niveau assez faible.

Il ne sera pas forcément de révolution autour de \vec{oz} , mais sera symétrique par rapport à deux plans :

- le plan \vec{E} parallèle à la polarisation du champ électrique
- le plan \vec{H} perpendiculaire à cette polarisation.

3 - 2 - 2 Distribution de courant sur le réflecteur



Puisque le paraboloïde se trouve dans la zone de rayonnement à grande distance de la source primaire, on applique les notions de surfaces d'ondes et de rayons associés au champ de celle-ci.

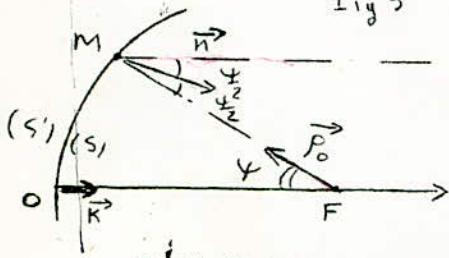
La conductivité du réflecteur est supposée infinie

La distribution de densité de courant \vec{K} est obtenue sur la surface du réflecteur éclairée par la source primaire, en supposant qu'en chaque point de cette surface, le champ incident est réfléchi comme une onde plane indéfinie, par un plan tangent indéfini

Dans ce cas, on obtient:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= 2(\vec{n} \wedge \vec{H}_c) = 2\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} (\vec{n} \wedge (\vec{\rho}_0 \wedge \vec{E}_c)) \\ &= 2(\vec{n} \wedge \vec{H}_i) = 2\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} (\vec{n} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}_i)) \end{aligned} \quad (3-2-2-a)$$

Fig 5



$\vec{\rho}_0$ et \vec{k} sont des vecteurs unitaires qui définissent la direction du vecteur de Poynting.

\vec{E}_c et \vec{H}_c sont des champs réfléchis en M

\vec{E}_i et \vec{H}_i sont les champs incidents

\vec{n} est la normale unitaire à la surface (S)

On suppose que les plans \vec{E}_c et \vec{H}_c du diagramme de rayonnement primaire coïncident avec les plans xOy yOz respectivement.

Soit P_r la puissance totale rayonnée par l'antenne primaire. Son gain $G(\xi, \psi)$ est par définition:

$$G = \frac{P(\xi, \psi)}{P_{moy}} = \frac{P_r}{4\pi R^2} = \frac{P_r \cdot R^2}{4\pi} = \frac{P(\xi, \psi)}{4\pi}$$

$P_r(\xi, \psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} |\vec{E}(\xi, \psi)|^2$ est la puissance rayonnée par unité de surface et $P(\xi, \psi) = P_r(\xi, \psi) R^2$, celle rayonnée par unité d'angle solide.

En un point M du réflecteur ($R = \rho$), on aura:

$$\vec{E}_c = \left[2\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \frac{P_r(\xi, \psi)}{\rho}\right] \vec{e}_c e^{-jk\rho}, \quad \vec{E}_i = \left[2\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \frac{P_r}{4\pi}\right]^{1/2} \frac{G(\xi, \psi)}{\rho} e^{-jk\rho} \vec{e}_i$$

Au même point, le champ réfléchi vaut:

$$\vec{E}_r = \left[2\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \frac{P_r}{4\pi}\right]^{1/2} \frac{G(\xi, \psi)}{\rho} e^{-jk\rho} \vec{e}_r$$

\vec{e}_c et \vec{e}_r sont des vecteurs unitaires définissant respectivement la polarisation de \vec{E}_c et \vec{E}_r . (la polarisation incidente étant supposée linéaire).

En appliquant les formules (3-2-2-a), on trouve:

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \left[8\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{P_r}{4\pi}\right]^{1/2} \frac{G^2}{\rho} e^{-2jk\rho} [\vec{n} \wedge (\vec{\rho}_0 \wedge \vec{e}_c)] \\ &= \left[8\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{P_r}{4\pi}\right]^{1/2} \frac{G^2}{\rho} e^{-2jk\rho} [(\vec{n} \cdot \vec{e}_c) \vec{\rho}_0 + \cos \psi \cdot \vec{e}_c] \end{aligned} \quad (3-2-2-b)$$

avec $\vec{n} \cdot \vec{\rho}_0 = -\cos \psi$

ou en fonction du champ réfléchi

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \left[8\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{P_r}{4\pi}\right]^{1/2} \frac{G^2}{\rho} e^{-2jk\rho} [\vec{n} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{e}_r)] \\ &= \left[8\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{P_r}{4\pi}\right]^{1/2} \frac{G^2}{\rho} e^{-2jk\rho} [(\vec{n} \cdot \vec{e}_r) \vec{k} - \cos \psi \cdot \vec{e}_r] \end{aligned} \quad (3-2-2-c)$$

avec $\vec{n} \cdot \vec{k} = \cos \psi$

Dans le cas où la source est un doublet électrique (par exemple, un dipôle et le réflecteur est constitué par une tôle pleine, le calcul exact de \vec{K} est résumé par la figure 6.

(1) voir annexe chapitre 9

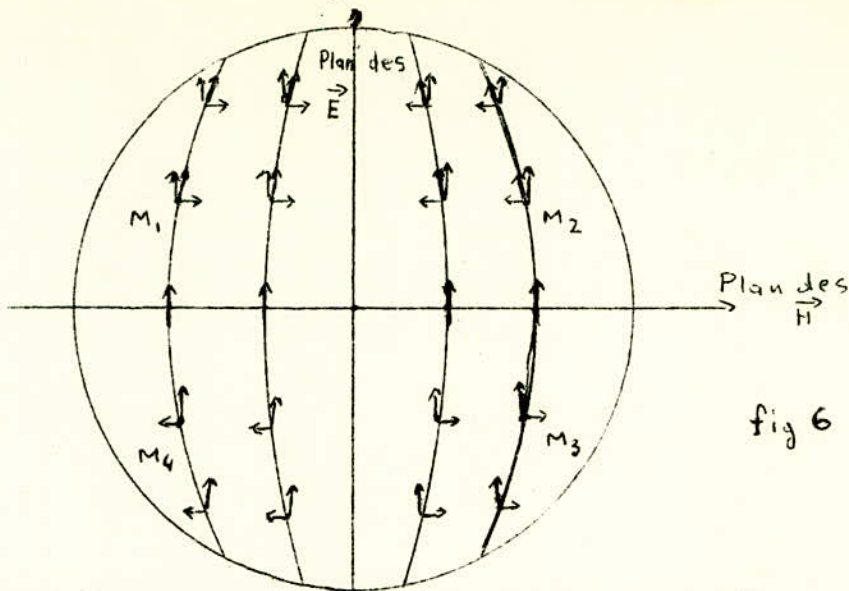


fig 6

Celle-ci représente dans le plan d'ouverture du paraboloïde les projections des lignes de courant qui font apparaître des composantes parallèles et des composantes perpendiculaires à la direction du dipôle (1).

La composante de \vec{K} parallèle au plan d'ouverture est :

$$\vec{K}' = - \left[8 \left(\frac{\epsilon}{r} \right)^{1/2} \frac{P_T}{4\pi} \right]^{1/2} \cdot \frac{G^{1/2}}{\rho} \cdot e^{-jk\rho} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \vec{e}_1$$

Elle est proportionnelle à la polarisation du champ réfléchi donc celle-ci est distribuée dans le plan d'ouverture de la même façon que K'

La composante $e_{1,x}$ (parallèle au plan \vec{E}) est appelée composante de polarisation principale.

La composante $e_{1,y}$ (parallèle au plan \vec{H}) est appelée composante de polarisation transverse.

Les composantes $e_{1,x}$ ont toutes même direction. Tandis qu'en des points tels que M_1, M_2, M_3, M_4 , les composantes $e_{1,y}$ s'opposent deux à deux à grande distance, le champ électrique aura une polarisation rectiligne parallèle à la direction du doublet.

Les diagrammes de rayonnement tracés dans les plans \vec{E} et \vec{H} , ou diagrammes principaux se traduiront par un lobe principal centré sur \vec{oz} et entouré de lobes secondaires (la polarisation étant parallèle à \vec{ox}).

→ Par contre, les diagrammes tracés dans les plans à 45° du plan \vec{E} ou \vec{H} dépendront de la polarisation avec laquelle ils sont tracés. Si celle-ci est parallèle à \vec{ox} , on obtient la même allure que celle des diagrammes principaux. Si la polarisation est parallèle à \vec{oy} , la résultante des composantes transversales n'est plus nulle, cela se traduira par un zéro dans la direction \vec{oz} et un lobe de part et d'autre de celui-ci suivis de lobes plus petits appelés lobes de polarisation transverse. Ceux-ci peuvent être plus importants que les lobes secondaires, donc être gênants. Pour les éliminer, le réflecteur parabolique sera construit avec des lames ou des tubes, mais dans ce cas, les composantes transversales passent à travers le réflecteur, ce qui diminue un peu le rendement de l'illumination du paraboloïde par la source.

Sur la surface concave (S) du réflecteur du réflecteur, il existe, donc, une distribution de courant électrique \vec{K} donnée par les formules (3-2-2-b) (3-2-2-c). Sur la surface convexe (S') $\vec{K} = 0$ (zone d'ombre). \vec{E} et \vec{H} satisfont aux équations de Maxwell, \vec{K} doit satisfaire à l'équation de continuité, pour cela, il faut qu'il existe une distribution de charges électriques donnée par

$$\sigma_e = \frac{1}{j\omega} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{K} \quad (\text{formule 8-1. de l'annexe}).$$

(1) Thourel - des antennes chapitre 12.

Sur les bords du réflecteur (contour (Γ) séparant les surfaces concave (S) et convexe (S')

$$\vec{K} = 2(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \vec{e}_r \quad (\text{formule 3-2-2-a})$$

$$\vec{C} = \frac{2}{j\omega} (\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \cdot \vec{n} = -\frac{2\xi \cdot \vec{H}_0}{j\omega}$$

Pour obtenir l'expression du champ rayonné par le paraboloïde, il suffit de remplacer \vec{u}_0 , dans la formule (6-1) de l'annexe :

- l'intégrale de volume (v) par une intégrale de surface (S) dans laquelle \vec{I} est changé en \vec{K} , ρ en η . (avec $\vec{I}_m = 0$, $\rho_m = 0$)
 - l'intégrale de surface (S_i) par une intégrale curviligne (Γ) dans laquelle η est changé en ζ (il n'y a pas de courants électriques et magnétiques et de charges magnétiques linéaires), d'où ;

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} (j\omega\mu\vec{K}\psi - \frac{\eta}{\epsilon} \text{grad}\psi) dS - \oint_{(\Gamma)} \frac{\zeta}{\epsilon} \cdot \text{grad}\psi \cdot d\vec{s} \\ \vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} -(\vec{K} \wedge \text{grad}\psi) \cdot d\vec{s} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} (j\omega\mu (\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \psi - (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) \text{grad}\psi) dS - \frac{1}{j4\pi\omega\epsilon} \oint_{(\Gamma)} (\vec{\zeta} \cdot \vec{H}) \text{grad}\psi \cdot d\vec{s} \\ \vec{H} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} (\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \wedge \text{grad}\psi \cdot d\vec{s} \end{aligned} \quad (3-2-2-d)$$

à grande distance (2), $R \gg \lambda$, les composantes de \vec{E} sont données par :

$$\begin{cases} E_R = 0 \\ E_\psi = -\frac{j\omega\mu}{2\pi R} \cdot e^{-jkR} \left[\left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \frac{P_\tau}{2\pi} \right] \cdot \vec{i}_\psi \cdot \vec{I} \\ E_\theta = -\frac{j\omega\mu}{2\pi R} \cdot e^{-jkR} \left[\left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \frac{P_I}{2\pi} \right] \cdot \vec{i}_\theta \cdot \vec{I} \\ \vec{I}_t = -\int_0^{2\pi} \int_0^\psi G^{1/2} \cdot \vec{e}_t \cdot e^{-jk\rho(1 + \cos\psi \cdot \cos\theta - \sin\psi \cdot \sin\theta \cdot \cos[\xi - \psi])} \cdot \sin\psi \cdot d\xi \cdot d\psi \\ \vec{I}_z = \vec{k} \int_0^{2\pi} \int_0^\psi G^{1/2} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{e}_t) \cdot e^{-jk\rho(1 + \cos\psi \cdot \cos\theta - \sin\psi \cdot \sin\theta \cdot \cos[\xi - \psi])} \cdot \frac{\sin\psi \cdot d\xi \cdot d\psi}{\cos\frac{\psi}{2}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{avec} \\ \vec{I} = \vec{I}_t + \vec{I}_z \end{matrix} \quad (3-2-2-e)$$

La composante longitudinale \vec{I}_z n'a d'effet que pour des grands angles, puisque $\vec{k} \cdot \vec{i}_\theta = \sin\theta$ et que \vec{i}_ψ est toujours dans un plan normal à \vec{K} . Le rayonnement obtenu étant à faisceau étroit, l'action de \vec{I}_z est donc négligeable devant celle de la composante transversale \vec{I}_t , surtout lorsque λ est faible.

Le rayonnement est concentré autour de \vec{o}_z ($\theta \simeq 0$), on peut écrire :

$$\rho (1 + \cos\psi \cos\theta) \simeq 2f$$

$$\vec{I}_t = -\int_0^{2\pi} \int_0^\psi G^{1/2} \cdot e^{-jk(2f - \rho \sin\psi \sin\theta \cos[\xi - \psi])} \cdot \rho \sin\psi \cdot d\xi \cdot d\psi \quad (3-2-2-f)$$

Si l'on fait l'intégration de \vec{I}_t sur l'ouverture du réflecteur, on obtient :

$$dS = \frac{l \cdot dl}{\cos\frac{\psi}{2}} \cdot d\xi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} l = \rho \sin\psi \\ 0 \leq l \leq a \\ 0 \leq \xi \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\vec{I}_t = - e^{-j 2 k f} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{G}{\rho} \frac{v_z}{\rho} \cdot \vec{e}_1 \cdot e^{j k \rho \sin \theta \cdot \cos(\frac{\xi}{\rho} - \phi)} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\xi$$

(3-2-2-g)

La calcul de E_θ et E_ϕ permet ensuite de tracer les diagrammes de rayonnement du paraboloïde.

Dans une direction arbitraire, le champ aura une polarisation élliptique.

Dans les plans \vec{E} et \vec{H} , le champ est polarisé linéairement.

Plan \vec{E} ($\phi = 0$) $E_\theta = \frac{j \omega \mu}{2 \pi R} \cdot e^{-j k R} \left[\left(\frac{\xi}{\rho} \right)^2 \frac{P_T}{2 \pi} \right]^{1/2} \cdot \cos \theta \cdot \vec{I}_{t_x}$

$$I_{t_x} = e^{-j 2 k f} \int_0^a \int_0^{2\pi} e_{1,x} \frac{G}{\rho} \frac{v_z}{\rho} \cdot e^{j k \rho \sin \theta \cdot \cos \xi} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\xi$$

Plan \vec{H} ($\phi = \frac{\pi}{2}$) $E_\phi = \frac{j \omega \mu}{2 \pi R} \cdot e^{-j k R} \left[\left(\frac{\xi}{\rho} \right)^2 \frac{P_T}{2 \pi} \right]^{1/2} \cdot \vec{I}'_{t_x}$

$$I'_{t_x} = e^{-j 2 k f} \int_0^a \int_0^{2\pi} e_{1,x} \cdot \frac{G}{\rho} \frac{v_z}{\rho} \cdot e^{j k \rho \sin \theta \cdot \sin \xi} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\xi$$

Ces expressions de \vec{E} permettent le tracé des diagrammes principaux.

3 - 2 - 3 - Distribution de champ à l'ouverture

Le champ peut, aussi, être calculé à partir de la distribution de champ à l'ouverture.

En un point $M(\rho, \xi, \gamma)$ du paraboloïde, le champ réfléchi vaut

$$\vec{E}_1 = \left[2 \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^2 \frac{P_T}{4 \pi} \right]^{1/2} \cdot \frac{[G(\xi, \gamma)]^{1/2}}{\rho} \cdot e^{-j k \rho} \vec{e}_1$$

On suppose que l'énergie électromagnétique passe du réflecteur au plan d'ouverture par propagation le long des rayons réfléchis. Or, ceux-ci sont tous parallèles, donc, l'intensité de champ reste constante en module le long d'un rayon réfléchi.

L'intensité du champ électrique $\vec{E}(\rho, \xi)$ en un point $A(\rho, \xi)$ de l'ouverture est alors donnée directement par \vec{E}_1 mais en tenant compte du retard de phase correspondant au chemin du réflecteur au plan d'ouverture.

$$\vec{E}(\rho, \xi) = \vec{E}_1(\rho, \xi, \gamma) \cdot e^{-j k (z_0 - z)} = \left[2 \left(\frac{\rho}{\xi} \right)^2 \frac{P_T}{4 \pi} \right]^{1/2} \frac{G}{\rho} \cdot e^{-j k (\rho + z_0 - z)} \vec{e}_1$$

$[\rho + z_0 - z]$ est le chemin optique total pour aller de F au plan d'ouverture, or, dans ce cas :

$$L = \rho + z_0 - z = \rho + z_0 + \rho \cos \gamma - f = f + z_0 = C^{te}$$

L'ouverture est une surface équiphase, puisque le chemin optique est indépendant du point.

Le champ en un point P est, alors, donné de façon générale par les formules de Kottler (voir formules (8-4), (8-5) et (8-6) de l'annexe).

Le champ électrique s'écrit en fonction de $\vec{E}(\xi, \tau)$

$$\vec{E}_P = - \frac{1}{4 \pi} \iint_{(A)} \left(\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) \cdot dS + \frac{1}{4 \pi} \oint_{(\Gamma_A)} \gamma \vec{E} \wedge \vec{\tau} \cdot d\tau - \frac{1}{2 \pi \omega \epsilon} \oint (\vec{\tau} \cdot \vec{n}) \gamma \omega \epsilon \cdot dS$$

Dans beaucoup d'antennes, le champ à l'ouverture est distribué comme indiqué figure 6. La composante de polarisation transversale est en général négligeable devant la composante de polarisation principale. Par conséquent, on peut supposer que le champ à l'ouverture est polarisé linéairement dans la direction \vec{Ox} ($E_y(\rho, \xi) \text{ et } E_z(\rho, \xi) = 0$).

D'autre part, $\vec{E} \wedge \vec{C}$ est normal à l'ouverture (A) et donne naissance à une composante dont l'effet est proportionnel à $\sin \theta$. Le rayonnement est à faisceau étroit, on peut donc négliger l'effet de cette intégrale à grande distance.

L'expérience montre (1) que, lorsque les dimensions de l'ouverture sont grandes devant λ , on peut négliger dans le calcul du champ à grande distance les intégrales curvilignes devant l'intégrale de surface.

$$E_{P_x} \approx -\frac{1}{4\pi} \iint_{(A)} \left(\Psi \frac{\partial E_x}{\partial n} - E_x \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS$$

avec

$$\begin{cases} E_{z_0} = A(x, y, z) \cdot e^{-jkL(x, y, z)} \\ L(x, y, z) = \rho + z_0 - z = f + z_0 \\ A(x, y, z) = \left[\left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{P_T}{2\pi} \right]^{1/2} \frac{G^{1/2}}{\rho} \cdot e_{ix} \end{cases} \quad (3-2-3-b)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial n} = \frac{\partial A}{\partial n} \cdot e^{-jkL} - jk \frac{\partial L}{\partial n} \cdot A e^{-jkL} = E_x \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial n} - jk \vec{n} \cdot \text{grad} L \right)$$

Or $\text{grad} L = \vec{n} \cdot \vec{s}$ avec $n = \frac{c}{v}$ (formules (11-1) et 11-2) de l'annexe). On suppose que $v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \Rightarrow \text{grad} L = \vec{s}$; ($\mu = \mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$)

$$\frac{\partial E_x}{\partial n} = E_x \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial n} - jk \vec{n} \cdot \vec{s} \right)$$

λ étant suffisamment petite pour que : $\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \ll \frac{2\pi}{\lambda} = k$ on obtient :

$$\frac{\partial E_x}{\partial n} \approx -jk E_x (\vec{n} \cdot \vec{s})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad} \Psi = -\vec{n} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \left(jk + \frac{1}{c} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} = (\vec{n} \cdot \vec{r}_1) \left(jk + \frac{1}{r} \right) \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}$$

à grande distance $\frac{1}{r} \ll k$
 $r = R - \vec{e} \cdot \vec{R}_1$

et $\vec{n} \cdot \vec{r}_1 = \vec{n} \cdot \vec{R}_1 = \cos \theta$ sur l'ouverture.

$$\text{D'où } E_{P_x} \approx \frac{jk}{4\pi R} \cdot e^{-jkr} \iint_{(A)} E_x \cdot e^{jk \vec{r} \cdot \vec{R}_1} (\vec{n} \cdot \vec{s} + \cos \theta) dS$$

$$E_{P_x} = \frac{jk(1 + \cos \theta)}{4\pi R} \cdot e^{-jkr} \iint_{(A)} E_x \cdot e^{jk \vec{r} \cdot \vec{R}_1} dS$$

L'ouverture (A) est équiphase; $\vec{s} = \vec{n}$ et $\vec{s} \cdot \vec{n} = 1$

Le rayonnement est concentré autour de \vec{O}_z , \vec{E}_p n'a une valeur significative que pour de faibles valeurs de θ ; $\cos \theta \approx 1$

$$E_{P_x} \approx \frac{jk}{2\pi R} \cdot e^{-jkr} \iint_{(A)} E_x \cdot e^{jk \vec{r} \cdot \vec{R}_1} dS \quad (3-2-3-c)$$

$$\vec{r} = \rho \cos \xi \vec{i} + \rho \sin \xi \vec{j} \quad ; \quad \vec{R}_1 = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{R}_1 = \rho \sin \theta \cos(\xi - \phi) \quad ; \quad dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\xi \text{ avec } 0 \leq \rho \leq a \text{ et } 0 \leq \xi \leq 2\pi$$

$$E_{P_x} = j \frac{k}{2\pi R} \cdot e^{-jkr} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{P_T}{2\pi} \right]^{1/2} \frac{G^{1/2}}{\rho} \cdot e_{ix} \cdot e^{jk(\rho \sin \theta \cos(\xi - \phi))} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\xi$$

ou

$$E_{P_x} = \frac{j \omega \mu}{2\pi R} \cdot e^{-jkR} \cdot \left[\left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{P_T}{2\pi} \right]^{1/2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{G^{1/2}}{\rho} \cdot e_{ix} \cdot e^{jk(\rho \sin \theta \cos(\xi - \phi))} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\xi \quad (3-2-3-d)$$

(1) S-Silver Microwave antenna theory and Design.

E_{Px} correspond à l'expression de E_θ (ou E_ϕ) donnée par (3-2-2-g) dans laquelle on néglige \vec{I}_z
 $\vec{I}_t = -e^{j\omega t} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{G^{1/2}}{r} \cdot \vec{e}_1 \cdot e^{jR\theta \sin \theta \cdot \cos(\xi - \phi)} \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\xi$

Pour que le champ calculé par la distribution de courant corresponde au champ calculé par la distribution de champ, on suppose que l'approximation $2f \approx \rho(1 + \cos\psi \cos\theta)$ équivaut à l'approximation $2f \approx f + z_0$. Dans ce cas \vec{I}_t est donné par la formule (3-2-2-g).

Ces deux méthodes conduiront à un résultat d'autant plus identique que $\frac{\lambda}{D}$ est petit ($D=2a =$ diamètre de l'ouverture).

La distribution du champ à l'ouverture est appelée illumination. Elle est fonction de la forme du paraboloïde et de la nature de la source primaire.

Dans le cas idéal de la figure 3,
$$G(\xi, \psi) = \begin{cases} C^{1/2} & \text{si } 0 \leq \psi \leq \Psi \\ 0 & \text{si } \psi > \Psi \end{cases}$$

$$|\vec{E}(r, \xi)| = \left[\left(\frac{\lambda}{E} \right)^{1/2} \frac{P_T}{2\pi} \right]^{1/2} \frac{G^{1/2}}{r} = E' \cdot \cos^2 \frac{\psi}{2}$$

Avec $E' = \left[\left(\frac{\lambda}{E} \right)^{1/2} \frac{P_T}{2\pi} \right]^{1/2} \cdot \frac{G^{1/2}}{f} = |\vec{E}(0, \xi)|_{\psi=0}$

L'illumination sera donnée par la courbe

$$\frac{I}{I_0} = \frac{|\vec{E}(r, \xi)|}{E'} = F\left(\frac{\rho}{2f}\right) = \cos^2 \frac{\psi}{2}$$

Avec $\rho = r \sin \psi = 2f \tan \frac{\psi}{2}$ et $0 \leq \rho \leq \frac{D}{2}$

✕ Pour différentes formes du paraboloïde, on obtient les distributions suivantes:

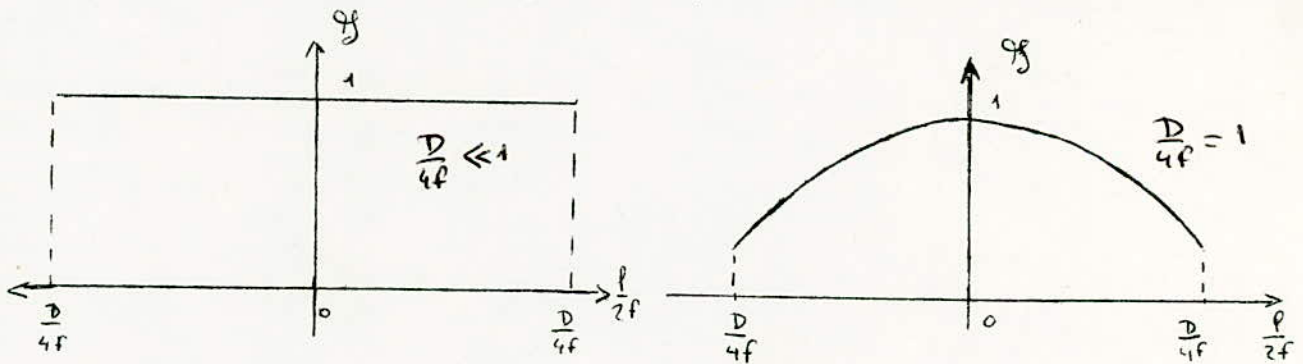
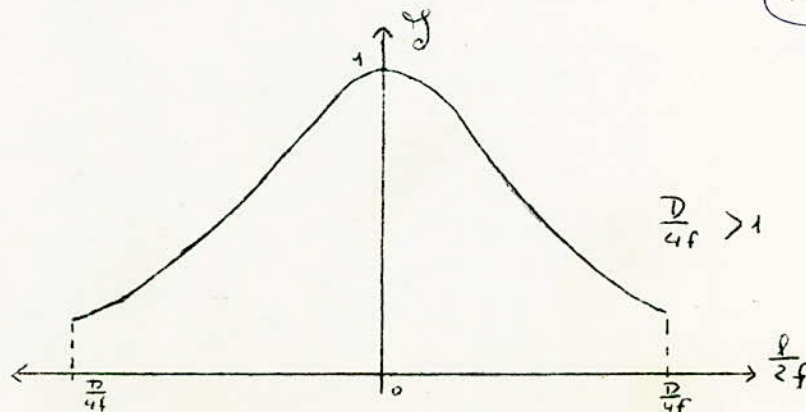
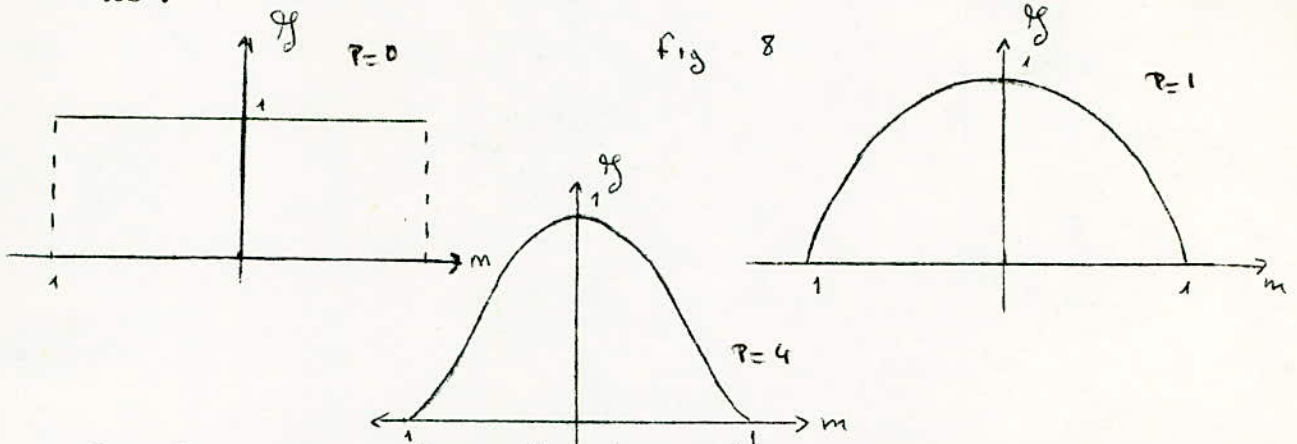


fig 7



Si l'on a affaire à une série de distributions de champ $\mathcal{F} = F(\rho, \xi) = (1-m^2)^P$ avec $P=0, 1, 2, \dots$ et $m = \frac{2\rho}{D}$ due à des sources de nature différente, les courbes obtenues sont les suivantes :



D'après les formules (3-2-3-c) et (3-2-3-d) le champ rayonné par le paraboloïde est de la forme :

$$E_{\theta} = j \frac{e^{-jKR}}{\lambda R} \cdot E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\rho, \xi) \cdot e^{jK\rho \sin\theta \cos(\xi-\phi)} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\xi$$

Posons $u = K \cdot \frac{D}{2} \cdot \sin\theta$; $m = \frac{2\rho}{D} = \frac{\rho}{a}$; $F(\rho, \xi) = (1-m^2)^P$

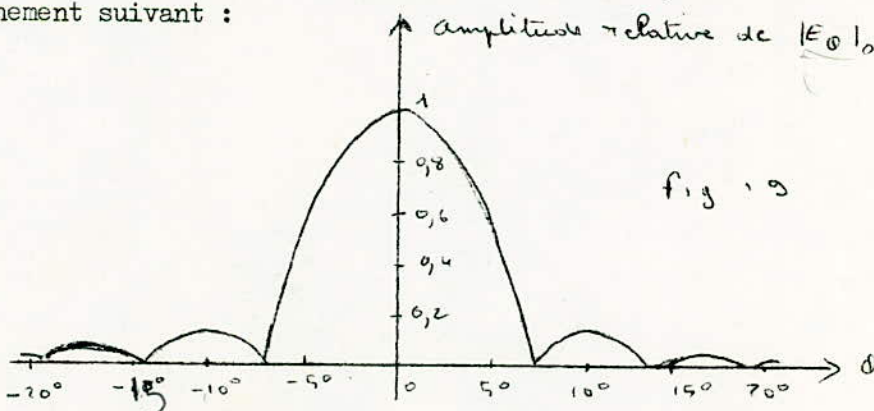
$$\Rightarrow E_{\theta} = j \frac{e^{-jKR}}{\lambda R} \cdot a^2 E_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-m^2)^P e^{j u m \cos(\xi-\phi)} m \, dm \, d\xi$$

La distribution selon ϕ étant partout la même, par raison de symétrie, on fait $\phi = 0$.

si $P=0$ $|E_{\theta}|_0 = \frac{2\pi}{\lambda R} \cdot a^2 E_0 \int_0^1 m J_0(u \cdot m) \, dm = \frac{2\pi a^2 E_0}{\lambda R} \cdot \frac{J_1(u)}{u}$

si $P \neq 0$ $|E_{\theta}|_P = \frac{2\pi a^2 E_0}{\lambda R} \int_0^1 (1-m^2)^P J_0(u \cdot m) \cdot m \, dm = \frac{\pi a^2 E_0 \cdot 2^P \cdot P!}{\lambda R} \cdot \frac{J_{P+1}(u)}{u^{P+1}}$

Dans le cas de l'illumination uniforme, on obtient le diagramme de rayonnement suivant :



Pour $P \neq 0$, l'allure du diagramme de rayonnement est la même mais les valeurs remarquables sont différentes, on obtient le tableau suivant (1):

(1) S.Silver Microwave antenna theory and Design Chapitre 6.

P	Facteur de gain g	Directivité à 3 d B $\frac{\lambda}{D}$	Position du 1er zéro $\frac{\lambda}{D}$	Niveau du 1er lobe secondaire (en dB)
0	1	1,02 $\frac{\lambda}{D}$	$\text{arcsin } 1,22 \frac{\lambda}{D}$	17,6
1	0,75	1,27 $\frac{\lambda}{D}$	$\text{arcsin } 1,63 \frac{\lambda}{D}$	24,6
2	0,56	1,47 $\frac{\lambda}{D}$	$\text{arcsin } 2,03 \frac{\lambda}{D}$	30,6
3	0,44	1,65 $\frac{\lambda}{D}$	$\text{arcsin } 2,42 \frac{\lambda}{D}$

Par définition, le facteur de gain g est donné par $g = \frac{G_m}{G_0}$

G_m désigne le gain maximum du paraboloïde lorsqu'il est éclairé de façon quelconque et G_0 , le gain maximum de l'aérien parabolique lorsqu'il est illuminé uniformément ($\frac{D}{\lambda} \ll 1$ ou $P=0$).

On déduit de ce tableau que lorsque l'illumination tend vers une forme en cloche, le niveau des lobes secondaires et le gain diminuent, l'angle de directivité augmente.

X 3-3 Gain de l'antenne parabolique
3-3-1 Ouverture angulaire optimum Y

Le gain de l'aérien dans une direction (θ, ϕ) est par définition $G(\theta, \phi) = \frac{P_r(\theta, \phi)}{P_{T \text{ moy}}} = P_r(\theta, \phi) / \frac{P_T}{4\pi R^2} = \frac{P_r(\theta, \phi) R^2}{\frac{P_T}{4\pi}} = \frac{P_r(\theta, \phi)}{\frac{P_T}{4\pi}}$ (3-3-1 a)

P_T est la puissance totale fournie à l'antenne

$$P_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \iint_{(A)} |\vec{E}(r, z)|^2 dS \quad (\vec{E}_{(r, z)} \text{ est le champ à l'ouverture}).$$

La puissance rayonnée par unité de surface est :

$$P_r(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} |\vec{E}_P|^2 \quad (\vec{E}_P \text{ est le champ au point } P(R, \theta, \phi))$$

La puissance rayonnée par unité d'angle solide est :

$$P(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} |\vec{E}_P|^2 R^2 = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \left| \iint_{(A)} E_x e^{jk \vec{P} \cdot \vec{R}_1} dS \right|^2$$

$$\text{or } E_x = \vec{E}(r, z) \quad \text{d'où} \quad G(\theta, \phi) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \frac{\left| \iint_{(A)} E_x e^{jk \vec{P} \cdot \vec{R}_1} dS \right|^2}{\iint_{(A)} |E_x|^2 dS}$$

Le gain maximum est obtenu lorsque : $\theta=0, \phi=0 \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{R}_1 = 0$

$$G_m = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \iint_{(A)} E_x dS \right|^2}{\iint_{(A)} |E_x|^2 dS} \quad (3-3-1 b)$$

Si E est constant à l'ouverture (illumination uniforme), on obtient:

$$G_0 = \frac{4\pi A}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 D^2}{\lambda^2} \quad (3-3-1-c)$$

La formule (3-2-2-e) dans laquelle on néglige \vec{I}_z , nous donne l'expression de \vec{E} le long de oz .

$$\vec{E}(R, 0, 0) = \vec{I} \cdot \frac{j\omega\mu}{2\pi R} \cdot e^{-jkR} \left[\left(\frac{E}{r} \right)^{1/2} \frac{P_T}{4\pi} \right]^{1/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Psi} e_{1,\alpha} G(\psi) e^{-jk\rho(1+\cos\psi)} \rho \sin\psi \, d\psi \, d\alpha$$

$e_{1,\alpha}$ est, en général, une fonction de ξ et ψ à cause de la présence de $e_{1,\beta}$.
Cependant, dans la majorité des cas, $e_{1,\beta} \ll e_{1,\alpha} \Rightarrow e_{1,\alpha} = e_{1,\beta} = 1$

On suppose de plus, que le gain $G(\xi, \psi)$ de la source primaire est indépendant de ξ . Dans la pratique, cela revient à remplacer le diagramme de rayonnement primaire par la moyenne arithmétique des diagrammes principaux de la source primaire. (Le diagramme obtenu est alors de révolution autour de oz).

$$P = \frac{2f}{1+\cos\psi} \Rightarrow E = \frac{j\omega\mu f}{R} \left[8 \left(\frac{E}{r} \right)^{1/2} \frac{P_T}{4\pi} \right]^{1/2} \cdot e^{-jk(R+2f)} \int_0^{\Psi} G(\psi) \cdot \cot\frac{\psi}{2} \, d\psi$$

La puissance rayonnée par unité d'angle solide dans la direction oz est :

$$P(0,0) = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{r} \right)^2 |E|^2 R^2$$

D'où la gain maximum.

$$G_m = \frac{P(0,0)}{\left(\frac{P_T}{4\pi} \right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{r} \right)^2 \left(\frac{\omega\mu f}{R} \right)^2 8 \left(\frac{E}{r} \right)^{1/2} \frac{P_T}{4\pi} \frac{R^2}{\frac{P_T}{4\pi}} \left| \int_0^{\Psi} G(\psi) \cot\frac{\psi}{2} \, d\psi \right|^2$$

$$= \frac{16\pi^2 f^2}{\lambda^2} \left| \int_0^{\Psi} G(\psi) \cot\frac{\psi}{2} \, d\psi \right|^2$$

$$\frac{D}{2} = \frac{2f}{1+\cos\psi} \cdot \sin\psi = 2f \cot\frac{\psi}{2} \Rightarrow G_m = \left(\frac{16\pi^2}{\lambda^2} \right) \left(\frac{1}{\cot^2\frac{\psi}{2}} \right) \left| \int_0^{\Psi} G(\psi) \cot\frac{\psi}{2} \, d\psi \right|^2 \quad (3-3-1-d)$$

On en déduit le facteur de gain: $g = \frac{1}{\cot^2\frac{\psi}{2}} \left| \int_0^{\Psi} G(\psi) \cot\frac{\psi}{2} \, d\psi \right|^2 \quad (3-3-1-e)$

Il ne dépend que de $G(\psi)$ et Ψ

Considérons des gains $G(\psi)$ de la forme :

$$G(\psi) = G_0^{(n)} \cos^n \psi \quad \text{si } 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (3-3-1-f)$$

$$= 0 \quad \text{si } \psi > \frac{\pi}{2}$$

Beaucoup d'antennes primaires ont un diagramme de rayonnement pouvant être approximativement représenté par des fonctions de ce type (au moins sur une grande partie du lobe principal).

$$G(\psi) = \frac{P(\psi)}{\left(\frac{P_T}{4\pi} \right)} \quad ; \quad P_T = \iint_{\Omega} P(\psi) \, d\Omega \quad ; \quad \frac{P_T}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} P(\psi) \, d\Omega$$

$$\int_0^{\Psi} \frac{P(\psi)}{\left(\frac{P_T}{4\pi} \right)} \, d\Omega = 4\pi = \iint_{\Omega} G(\psi) \, d\Omega = \int_0^{\Psi} \int_0^{2\pi} G_0^{(n)} \cos^n \psi \sin\psi \, d\alpha \, d\psi$$

$$\text{d'où } G_0^{(n)} = 2(n+1) \text{ et } G(\psi) = 2(n+1) \cos^n \psi$$

$$g_n = 2(n+1) \cot^2\frac{\psi}{2} \left| \int_0^{\Psi} \cos^{\frac{n}{2}} \psi \cot\frac{\psi}{2} \, d\psi \right|^2$$

$$= 2(n+1) \left| \cot^2\frac{\psi}{2} \int_0^{\Psi} \cos^{\frac{n}{2}} \psi \cot\frac{\psi}{2} \, d\psi \right|^2 \text{ après calcul (1), on obtient}$$

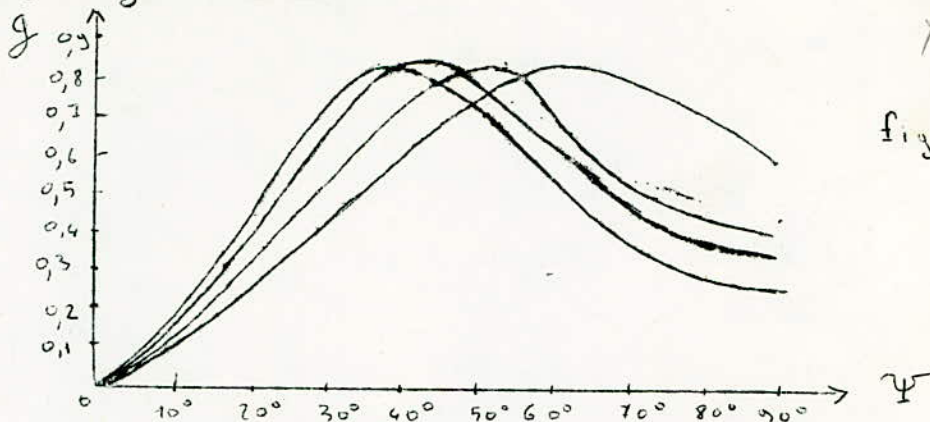
$$g_2 = 24 \left(\sin^2\frac{\Psi}{2} + \ln \cos\frac{\Psi}{2} \right)^2 \cdot \cot^2\frac{\Psi}{2}$$

$$g_4 = 40 \left(\sin^4\frac{\Psi}{2} + 2\ln \cos\frac{\Psi}{2} \right)^2 \cdot \cot^2\frac{\Psi}{2}, \text{ etc...}$$

Les courbes obtenues pour $n=2,4,6,8$ montrent qu'il existe une ouverture opti-

(1) Silver Microwave Antenne Théory and Design chapitre 12.

mum pour laquelle g est maximum.



L'ouverture angulaire optimum sera d'autant plus petite que l'antenne primaire sera plus directive (ceci correspond à n croissant). Or $f = \frac{D}{4\sqrt{2}\lambda}$
 Si D est fixé, pour avoir Ψ assez faible, il faut que f soit élevé.

X Le facteur de gain dépend :

- de l'illumination de l'ouverture ou de l'efficacité de celle-ci.
- de la fraction de la puissance totale rayonnée par l'antenne primaire, interceptée par le réflecteur et par conséquent utile à l'ouverture pour la formation du lobe principal.

L'énergie non interceptée par le réflecteur est dite énergie perdue par " Spill-over ".

Les valeurs de g maximum sont considérablement élevées par rapport à celles obtenues en pratique, ceci parce que l'on a supposé implicitement que :

- la source primaire ne rayonne pas en arrière
- celle-ci ne forme pas obstacle au rayonnement (et de façon générale, il n'y a pas d'obstacles devant le réflecteur)
- le paraboloïde réfléchit totalement le champ électromagnétique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de réfraction, par la surface du réflecteur, du champ (on dit encore que cette surface ne présente pas de "transparence" à ce champ).

est Le facteur de gain g_r obtenu avec une antenne primaire réelle

$$g_r = \frac{G_{r0}}{2(n+1)} \cdot g$$

La valeur optimum de Ψ n'est pas affectée par ce rapport.

Dans le cas, où l'antenne primaire est représentée par une fonction quelconque $G(\psi)$, il suffit de faire

$$\frac{d g}{d \Psi} = 0$$

à partir de l'expression (3-3-1-e)
 on obtient alors l'équation : $n \sin^2 \frac{\Psi}{2} \cdot G^{1/2}(\psi) = \frac{1}{2} \int_0^{\Psi} G^{1/2}(\psi) \cdot \psi \cdot d\psi$

g_{max} varie très peu avec l'illumination (voir fig. 10)

3-3-2 - Interférence avec le lobe arrière de la source primaire.

Les résultats précédents peuvent être modifiés de façon nette par l'effet des interférences du lobe arrière du champ primaire avec le champ réfléchi, soit G_{π} , le gain de l'antenne primaire dans la direction $\psi = 180^\circ$

L'intensité du lobe arrière au point $(R, 0, 0)$ est alors :

$$\vec{E}_{\pi} = \pm \frac{1}{R} \left[\left(\frac{P_1}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{P_1}{4\pi R} \right]^{1/2} G_{\pi}^{1/2} e^{-j k R} \cdot \vec{r}$$

Le signe + ou - indique le fait que le champ primaire dans la direction $\psi = \pi$ est en phase ou en opposition de phase avec celui dans la direction $\psi = 0$

Le champ total est alors donné par :

$$\vec{E} = \vec{r} \cdot \frac{1}{R} \left[2 \left(\frac{P_1}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{P_1}{4\pi R} \right]^{1/2} e^{-j k R} \left\{ \pm G_{\pi} + j \frac{4\pi f}{\lambda} e^{-j 2 k f} \int_0^{\psi} G(\psi) \cdot t_{\psi} \frac{d\psi}{2} \right\}$$

Un même calcul que celui du chapitre précédent conduit à :

$$g = \left(U_0 \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 \left[1 \pm \frac{2 \lambda G_{\pi}^{1/2}}{\pi D U_0} \cdot t_{\psi} \frac{\psi}{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \cot \frac{\psi}{2} \right) + \frac{\lambda^2 G_{\pi}}{(\pi D U_0)^2} t_{\psi}^2 \frac{\psi}{2} \right]; U_0 = \int_0^{\psi} G(\psi) \cdot t_{\psi} \frac{d\psi}{2}$$

Les sources primaires employées couramment sont telles que G_{π} soit très faible, ce qui nous permet d'écrire :

$$g \approx \left(U_0 \cot \frac{\psi}{2} \right)^2 \left[1 \pm \frac{2 \lambda G_{\pi}^{1/2}}{\pi D U_0} \cdot t_{\psi} \frac{\psi}{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \cot \frac{\psi}{2} \right) \right]$$

L'effet du lobe arrière est d'introduire un terme supplémentaire dépendant de $\frac{D}{\lambda}$. Pour un diagramme de rayonnement primaire donné, g n'est plus fonction seulement que de la forme du paraboloïde. Avec une antenne primaire, dont le lobe principal est donné sensiblement par :

$$G(\psi) = 7 \cdot \cos^4 \psi$$

et dont $G_{\pi} = 0,142$, on obtient les courbes suivantes(1):

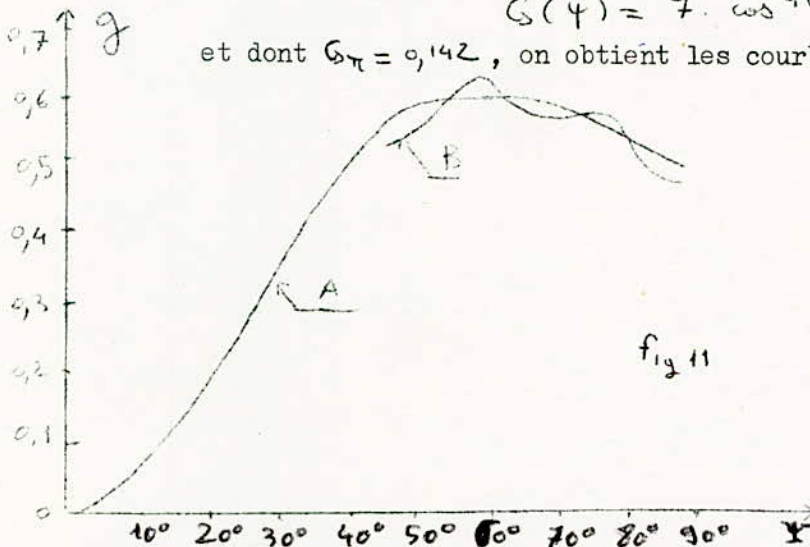


fig 11

avec l'antenne idéale on aurait $G_0^{(1)} = 10$ et un facteur de gain maximum compris entre 0,8 et 0,9.

Dans le cas de l'antenne réelle, la courbe (A) donnant $g = f(\psi)$ en négligeant G_{π} , montre que $0,6 < g_{max} < 0,7$. La courbe (B) a été tracée en tenant compte de l'effet de G_{π} . Selon que le lobe arrière est en phase ou opposé en phase avec le champ réfléchi, (B) se trouvera au-dessus ou au-dessous de (A).

3-3-3- Obstacles de rayonnement.

La source primaire, étant construite de façon à ne rayonner que vers le paraboloïde, doit comporter une surface réfléchissante. Celle-ci masque une partie non négligeable des rayons issus du paraboloïde.

Cela se traduira à l'ouverture par une ombre dont la forme est déterminée par la projection de la source dans le plan d'ouverture.

(1) S.Silver Microwave antenna Théory and Désign.

De façon générale, le champ résultant sera déterminé à partir de la distribution de champ existant à la surface (A') du plan d'ouverture limitée par les bords (Γ_A) du réflecteur et le contour (Γ₀) de l'ombre due à la source. L'emploi des formules de Kottler fait apparaître des intégrales curvilignes étendues à (Γ₀).

Si, à grande distance, on néglige les effets des intégrales curvilignes (Γ_A) et (Γ₀), le champ résultant est alors donné par la formule de Kirchhoff.

$$\begin{aligned} \vec{E}_P &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{(A')} \left(4 \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) \cdot dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{(A')} \left(4 \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} \left(4 \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) dS \\ &= (\vec{E}_P)_{(A)} + (\vec{E}_P)_{(S_0)} \end{aligned}$$

\vec{E}_P est le champ résultant lorsque la source forme un obstacle au rayonnement.
 $(\vec{E}_P)_{(A)}$ est le champ résultant lorsque l'on ne tient pas compte de cet effet d'ombre.
 $(\vec{E}_P)_{(S_0)}$ est le champ qui se serait dû à une ouverture de surface (S₀) égale à celle de l'ombre et sur laquelle régnerait une même distribution de champ que sur (A) mais opposée en phase.

À grande distance, on peut utiliser toutes les approximations du chapitre (3-2-3), pour le calcul de $(\vec{E}_P)_{(S_0)}$, $(\vec{E}_P)_{(A)}$, puis \vec{E}_P . \vec{E}_P peut, donc, être calculé directement ou à partir de $(\vec{E}_P)_{(S_0)}$ et $(\vec{E}_P)_{(A)}$.

Dans la cas général, la détermination de \vec{E}_P est très difficile et nécessite l'emploi de machines calculatrices.

Dans le cas où l'ombre est un cercle de diamètre d et où la distribution de champ à l'ouverture est de la forme $(1-m^2)^p$ (voir chapitre 3-2-3), la calcul de \vec{E}_P est simple.

Par exemple, si $p = 1$; $|(\vec{E}_P)_{(A)}| = \frac{\pi D^2}{\lambda R} \cdot E_0 \cdot \frac{J_2(u)}{u^2} = E_P$
 avec $u = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$
 et $E_{max} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi D^2}{\lambda R} E_0 \Rightarrow E_P = 8 E_{max} \frac{J_2^2(u)}{u^2}$
 on suppose que $\frac{\pi D}{\lambda}$ soit suffisamment grand pour admettre que le champ est uniforme à l'intérieur du disque d'ombre.

$$(\vec{E}_P)_{(S_0)} = -\frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{\lambda R} \cdot \frac{J_1(u)}{u} \quad \text{d'où}$$

$$E_P = E_{max} \left(8 \frac{J_2^2(u)}{u^2} - \frac{4}{\pi^2} \frac{J_1^2(u)}{u^2} \right)$$

Les formules (3-3-1-b) et (3-3-1-c) permettent le calcul de g . On obtient le tableau suivant :

$\frac{1}{n} = \frac{d}{D}$	g	Directivité à 3 dB	niveau du premier lobe secondaire par rapport au lobe principal (en dB).
0	0,75	$1,27 \frac{\lambda}{D}$	24,5 dB
$\frac{1}{10}$	0,74	$1,24 \frac{\lambda}{D}$	22,7 dB
$\frac{1}{5}$	0,72	$1,21 \frac{\lambda}{D}$	18,4 dB

En résumé, la présence d'un obstacle au rayonnement provoque :

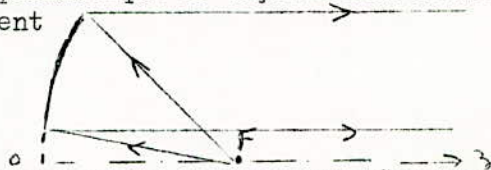
- l'accroissement du niveau des lobes secondaires;
- la diminution du gain;
- une augmentation de la directivité.

On a négligé beaucoup de facteurs importants pour simplifier l'étude (tel que l'effet des intégrales curvilignes). En réalité, le phénomène est beaucoup plus complexe et se traduit toujours par les conséquences citées précédemment.

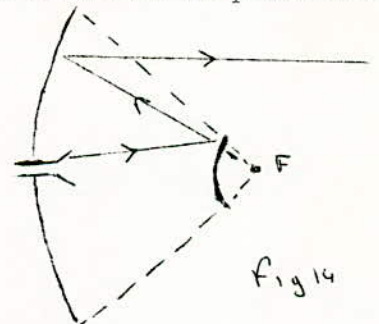
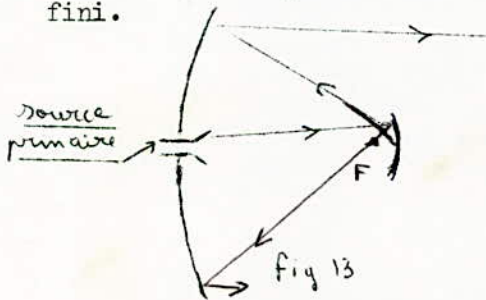
Dans la pratique, les obstacles au rayonnement seront principalement dûs à l'encombrement de la source et de sa fixation au réflecteur. La présence de la source dans la zone de rayonnement du paraboloïde engendre aussi (comme nous le verrons par la suite) une certaine désadaptation de l'antenne primaire à son feeder. Pour limiter tous ces inconvénients

- on réduira l'encombrement de la source ($n \gg 10$, dans le cas d'une ombre circulaire) et de sa fixation.
- on utilisera une calotte parabolique de façon à soustraire la source et sa fixation de la zone de rayonnement

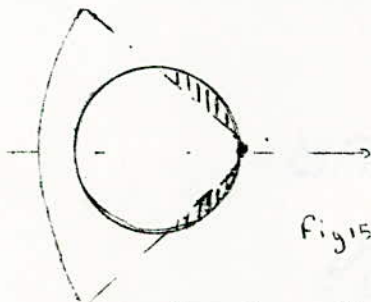
fig 12



ou bien on emploiera une antenne parabolique type Cassegrain. Le réflecteur (1) est de type à grillage à mailles suffisamment grandes pour former un obstacle négligeable au rayonnement réfléchi par la paraboloïde. Mais, il permet aussi de concentrer le rayonnement de la source primaire (qui doit être directive) au foyer F et ainsi constituer en ce point un centre de phase bien défini.



3-3-4 Pertes par Spill-Over et par transparence.



Les pertes par Spill-Over caractérisent l'énergie non interceptée par le réflecteur (zone hachurée de la figure 15).

Pour chiffrer ces pertes, on définit le rendement η_i de l'illumination; rapport de la puissance interceptée P_i par le réflecteur à la puissance totale P_T rayonnée par la source primaire

$$\eta_i = \frac{P_i}{P_T}$$

Dans la pratique, la surface du réflecteur est soit en tôle pleine, lorsque l'antenne est de faibles dimensions, soit une surface grillagée ou constituée de barres ou de tiges lorsque ces dimensions sont importantes.

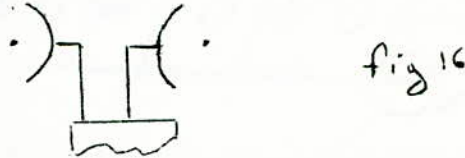
Au point de vue radio-électrique, la surface réfléchissante sera caractérisée par une transparence aux ondes électromagnétiques qui définira, ainsi, l'aptitude du paraboloïde à réfléchir plus ou moins parfaitement l'énergie incidente.

La transparence T en un point de la surface réfléchissante sera donnée par le rapport de la puissance P_0 , non réfléchiée en ce point à la puissance incidente $P(\xi, \psi)$

Ce sont les pertes par spill-over et par transparence qui déterminent la structure du lobe arrière du paraboloïde.

L'effet de pertes par spill-over étant très faible devant celui dû à la transparence, le lobe arrière sera donc déterminé ~~devant celui du lobe principal pour~~ *principalement par celle-ci. de niveau de ce lobe arrière ou être*

- un bon rendement de l'aérien
- éviter des effets désastreux d'interférence avec d'autres aériens qui pourraient être placés à proximité (voir figure 16).



Pour cela, le réflecteur doit se comporter comme une surface pleine vis à vis du rayonnement.

Ainsi, dans le cas d'une surface grillagée, chaque maille se comporte comme un guide d'onde de fréquence de coupure.

$\lambda_c = 2b$ (b étant la plus grande dimension de la maille).

Il y aura transmission de l'énergie électromagnétique de l'autre côté du réflecteur (par transparence) si $\lambda < 2b$

Il n'y aura pas transmission de cette énergie, ou plutôt réflexion totale par la surface réfléchissante si $\lambda > 2b$

Dans le cas où les mailles sont des carrés de côté a, la plus grande dimension est la diagonale du carré soit :

$$b = a\sqrt{2} < \frac{\lambda}{2} \quad \text{pour qu'il y ait réflexion.}$$

On peut choisir $b = \frac{\lambda}{4}$ on est presque sûr qu'aucune énergie ne traverse la surface. La transparence étant de l'ordre de 5%.

Pour avoir $T < 5\%$ on peut prendre $b = \frac{\lambda}{8}$ ou $\frac{\lambda}{16}$

Le lobe arrière peut être déterminé par le calcul (à condition de connaître T), en effet $P_0(\xi, \psi) = T \cdot G(\xi, \psi) \frac{P_r}{4\pi}$

La distribution de champ sur la projection de l'ouverture sur le plan directeur est donnée par :

$$\vec{E}_i = \left[2 \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} T \cdot \frac{P_r}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{G}{r} \vec{e}_i \cdot e^{-jk r}$$

Le champ dû au rayonnement arrière peut alors être calculé par les formules de Kottler, comme dans le cas du chapitre 3-2-3.

Si R est le coefficient de réflexion de la surface parabolique, le champ rayonné par la paraboloïde sera déterminé à partir de la distribution à l'ouverture suivante :

$$\vec{E}_i = \left[2 \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} R \frac{P_r}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{G}{r} \vec{e}_i \cdot e^{-jk r}$$

$R = \frac{P_r}{P(\xi, \psi)} \approx 1$ (Pr = puissance réfléchiée). Sans un grand risque d'erreur on peut calculer le champ rayonné à partir de

$$\vec{E}_i = \left[2 \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P_r}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{G}{r} \vec{e}_i \cdot e^{-jk r}$$

3-3-5 - Effets des erreurs de phase.

Dans les chapitres précédents, on a supposé que le plan d'ouverture était une surface équiphasé. Dans la réalité, ce plan n'est pas exactement

équiphase, mais la phase φ varie autour d'une valeur constante. Les erreurs ou déviations de phase obtenues sont essentiellement dues à :

- la forme réelle du paraboloïde différente de la forme théorique,
 - la défocalisation (déplacement du centre de l'antenne primaire par rapport au foyer),
- et aux fronts d'ondes de la source primaire pas exactement des sphères. (on n'a pas un centre de phase bien défini).

3-3-5-1 - Erreur de phase due à l'absence d'un vrai centre d'alimentation.

On néglige l'interférence due au lobe arrière de la source. Le Champ dû à celle-ci le long de \vec{o}_3 est :

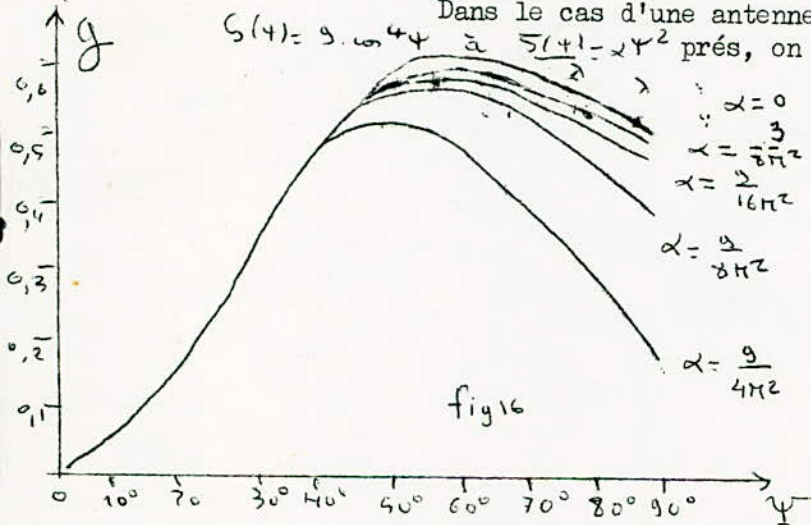
$$\vec{E} = \left[\left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P_T}{2\pi} \cdot G(\varphi) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-j k r(\varphi)} \cdot \vec{e}_0(\varphi, \varphi)$$

$S(\varphi)$ est l'erreur de phase due au fait qu'il n'existe pas de centre de phase bien défini.

Le facteur de gain est alors donné par :

$$g = \cot^2 \frac{\psi}{2} \left[\int_0^{\psi} G(\varphi) \cdot \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \cdot \frac{7\pi S(\varphi)}{\lambda} \left(\cot \frac{\psi}{2} \right)^2 d\varphi \right]^2 \left\{ \int_0^{\psi} G(\varphi) \cdot \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \cdot \frac{7\pi S(\varphi)}{\lambda} \cot \frac{\psi}{2} d\varphi \right\}^2$$

Dans le cas d'une antenne primaire, telle que $G(\varphi)$ soit donné par $G(\varphi) = g \cdot \cos^4 \varphi$ à $S(\varphi) = \alpha \varphi^2$ près, on obtient le réseau de courbes (1) suivant



Pour $S(\varphi) = \frac{\lambda}{24}, \frac{\lambda}{16}, \frac{\lambda}{8}, \frac{\lambda}{4}$

$S(\varphi)$ représente, alors, les erreurs de phase obtenues à une ouverture d'angle optimum

Dans la réalité, $S(\varphi)$ englobera les erreurs dues au fait que l'on a pas exactement des ondes sphériques pour le champ primaire, que l'on a négligé le lobe arrière du rayonnement primaire et qu'il y a distorsion de la surface parabolique.

Les courbes de la figure 16 montrent que l'on peut se permettre au maximum une erreur de phase de $\frac{\lambda}{8}$; pour un écart plus grand, le gain décroît rapidement.

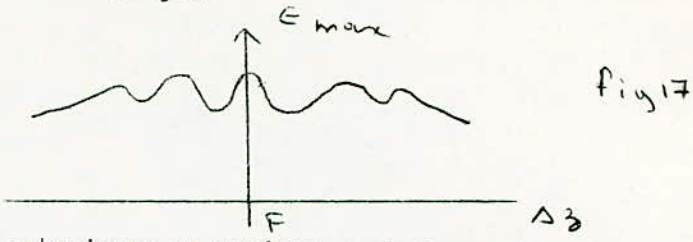
3-3-5-2 - Défocalisation.

On dit qu'il y a défocalisation lorsque le centre de phase de la source ne coïncide pas avec le foyer F.

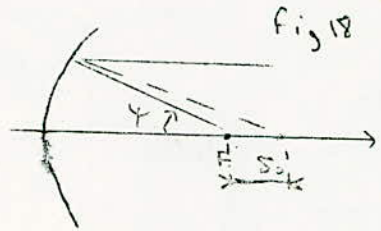
Une défocalisation longitudinale introduit des erreurs de phase symétriques par rapport à \vec{o}_3 . Le lobe principal s'élargit et le niveau des lobes secondaires varie, mais la direction de rayonnement maximum coïncide toujours avec \vec{o}_3 . La courbe (2) du champ maximum E max. en fonction des écarts Δz autour de la position du foyer F montre qu'il existe en général, plusieurs maxima et minima résultant de la combinaison des rayonnements élémentaires entre eux et avec le rayonnement arrière de la source primaire.

(1) S.Silver Microwave antennas théory and désign Chap. 12.

(2) Thourel - les antennes Chap. 12.



Mais, il y a toujours un maximum maximum net correspondant au foyer F. C'est un moyen commode pour régler la position de la source primaire.



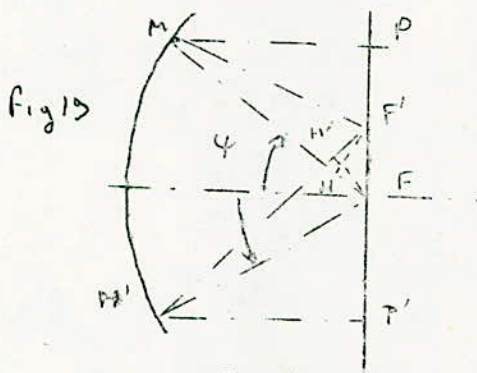
Si le centre de phase de l'antenne primaire est déplacé de Δz le long de \vec{Oz} et à partir de F l'erreur de phase est alors :

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta z}{\lambda} = \frac{\Delta z}{\lambda} \cdot 2\pi$$

Si $\frac{\Delta z}{\lambda} = \frac{1}{8}$ le déplacement Δz est, alors, donné par : *par yemmak*

En pratique, comme nous l'avons déjà dit, on recherchera un maximum maximum de l'intensité de champ pour éliminer Δz .

La défocalisation transversale est due à un déplacement du centre de phase de la source, normal à \vec{Oz} .



Quand la source est en F, le déphasage des champs en deux points symétriques P et P' par rapport à F est :

$$\varphi_1 = k(FM + MP) = k(FM' + M'P) = 2f$$

Lorsque l'on déplace la source en F', de la distance $FF' = d$, le déphasage du champ en P sera :

$$\varphi_2 = k(F'M + MP)$$

$$\text{avec } \varphi_1 - \varphi_2 = k(FM - F'M) > 0$$

$$\text{Si } d \ll MF ; MF - MF' \approx FH = d \sin \gamma$$

Le déphasage du champ en P' sera :

$$\varphi_3 = k(F'M + M'P') \text{ avec } \varphi_1 - \varphi_3 = k(FM' - F'M) < 0 ; FM' - F'M = -d \sin \gamma$$

Les déphasages introduits en des points symétriques P et P' sont égaux, mais opposés en signe : $\Delta \varphi = \pm kd \sin \gamma$

Le résultat final sera une déviation de la direction de rayonnement maximum par rapport à \vec{Oz} . La déviation du faisceau se fera en sens inverse du déplacement de la source primaire.

Une défocalisation vers le haut entraînera une déviation du faisceau vers le bas et réciproquement. Il y aura aussi une perte de gain due à l'inclinaison de faisceau.

Un paraboloïde dont $\frac{f}{\lambda}$ est peu élevé sera moins sensible à la défocalisation transversale. Les aériens à distance focale longue donneront lieu à des plus grandes déviations de faisceau.

Notons enfin, qu'il y a apparition d'un lobe résiduel se trouvant dans le diagramme de rayonnement du même côté de et appelé lobe de coma (analogie optique à l'aberration du coma).

3-3-5-3 - Distorsion de surface.

La fabrication d'un réflecteur étant soumise à des imperfections, la surface théorique d'un paraboloïde ne sera réalisée qu'avec une approximation

d'autant plus serrée que la précision de fabrication sera plus grande.

La surface réelle sera comprise entre deux surfaces paraboliques parallèles et distantes de 2ε . ε étant la tolérance de fabrication.

Le passage d'un point à un autre s'accompagne d'une variation de phase supplémentaire à la variation de phase théorique, pour le champ réfléchi. Dans le plan d'ouverture, la phase subira des écarts $\delta(+)$ autour d'une valeur constante. Les courbes de la fig. 16, pour l'exemple choisi, traduisent les effets de distorsion de surface et on peut, ainsi, fixer la précision de fabrication du réflecteur grâce à ces courbes, en tenant compte évidemment de l'écart de phase introduit par la source d'alimentation.

Les effets des imperfections de surface se traduiront par :

- un gain plus faible que le gain théorique
- une augmentation du niveau des lobes secondaires.

Le problème de la détermination de la précision d'exécution est très délicat dans le cas général et n'a reçu que des solutions incomplètes.

Les travaux de Mr Robieux (1) sont une bonne approximation de la réalité. Ils peuvent être résumés de la façon suivante :

- il est impossible de construire des paraboloïdes de gain aussi élevé que l'on veut.

Si A est la plus grande dimension de l'antenne, le gain maximum réalisable exprimé en dB est donné par :

$$G_m = 20 \log \frac{A}{\varepsilon} - 8 \quad (3-3-5-3-a)$$

Quand $\frac{A}{\varepsilon} = 10000$ on est à la limite possible du rapport car c'est l'ordre de grandeur des déformations de dilatation.

Le gain maximum réalisable est :

$$G_m = 20 \log 10000 - 8 = 72 \text{ dB}$$

Il est donc inutile de chercher à accroître G_m en augmentant A.

En pratique, il est difficile de réaliser un aérien tel que son gain dépasse 50 dB.

- Pour une valeur A donnée, il existe une valeur de gain G_0 et une dimension A_0 qui ne peuvent être dépassés que dans des conditions trop onéreuses, soit :

$$\begin{cases} \log \frac{A_0}{\varepsilon} = \frac{G_0 + 11}{20} \\ \log \frac{A_0}{\lambda} = \frac{G_0 - 9}{20} \end{cases} \quad (3-3-5-3-b)$$

G_0 étant exprimé en dB.

- L'accroissement du niveau des lobes secondaires est lié à la fluctuation du champ réel autour de la valeur du champ théorique, fluctuation qui dépend évidemment de ε

On décompose la surface du réflecteur en éléments d'aires de côté $\frac{\lambda}{2}$. La contribution d'un élément quelconque M_k de la surface théorique au rayonnement est un vecteur d'amplitude e_k et de phase φ_k

(1) Annales de radio-électricité - janvier 1956. Influence de la précision de fabrication d'une antenne sur ses performances.

- Thourel-les antennes Chap. 12.

Le champ théorique est donné par : $E = e^{j\Phi} = \sum e_k \cdot e^{j\psi_k}$

Posons $K = \frac{\sqrt{\sum e_k^2 \cos^2(\psi_k - \psi)}}{E}$

soit E' , l'amplitude du champ réel et $N = 20 \log \frac{E'}{E}$

Si la relation $N = 100 K \cdot \frac{\xi}{\lambda}$ est respectée, il y a 99 chances sur 100 pour que le rapport du champ réel au champ théorique n'excède pas N. Cela signifie, au point de vue fabrication, sur une série de 100 antennes, il y en aura au plus une qui ne satisfera pas aux conditions requises.

Supposons, par exemple, que le niveau théorique des lobes secondaires est 31 dB et que nous désirons un niveau réel de 28 dB; la précision de fabrication devra être fixée à :

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{3}{100 K}$$

La détermination de K est laborieuse et se fait dans la direction considérée (celle où apparait le maximum du lobe secondaire le plus important).

Dans le choix de N, il est prudent de se réserver toujours une certaine marge de sécurité car la méthode ne tient pas compte de l'accroissement des lobes secondaires dû aux obstacles placés devant le réflecteur.

- le pourcentage de puissance diffusé par les défauts de surface est :

$$P_d = \left(\frac{2f}{\lambda}\right)^2$$

Cette méthode est très complexe, mais très générale et s'applique à tous les types d'antenne.

Il existe des méthodes plus simples exposées par MM. Korman, Herman et Ford (1), mais les résultats obtenus sont beaucoup plus sévères que ceux donnés par la méthode de Mr Robieux.

3 - 4 - Adaptation de la source primaire à la ligne d'alimentation.

L'interaction entre la source primaire et le champ dû au réflecteur parabolique se traduira par un désaccord dans la ligne d'alimentation. Si la source primaire était adaptée au feeder lorsqu'elle était isolée dans l'espace, la désadaptation due à la présence du réflecteur donnera lieu à un coefficient de réflexion (2) dans la ligne.

$$\Gamma_r = \frac{G_0 \lambda}{4\pi f} e^{-j(2kP + \delta)} \quad \text{ou} \quad |\Gamma_r| = \frac{G_0 \lambda}{4\pi f} \quad (3 - 4 - a)$$

Si l'antenne primaire en espace libre n'était pas adaptée, à la ligne, le coefficient de réflexion étant Γ_0 .

En présence du réflecteur, le coefficient de réflexion résultant sera obtenu par addition vectorielle $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 + \vec{\Gamma}_r$ sur l'abaque de Smith, par exemple.

Si l'on déplace la source le long de $\vec{O_3}$ tout en restant au voisinage de F, on a :

$$\Gamma_r = \frac{G_0 \lambda}{4\pi f} e^{-j(kP + \delta)} \quad (3 - 4 - b)$$

P est la distance source-sommet du paraboloïde ($p \approx f$). Lorsque la source se déplace le long de $\vec{O_3}$, Γ décrit un cercle de centre, l'extrémité de Γ_0 et de rayon Γ_r . La mesure de Γ est le tracé du lieu de celui-ci

(1) Thourel les antennes chapitre 12.

(2) Annexe chapitre 13.

nous permet de déterminer Γ_0 (cette mesure est faite pour des déplacements $|f-p| \leq \lambda$. L'approximation $f \approx p$ est donc respectée puisque $f \gg \lambda$, Γ_0 étant donné par (3-4-b) ou (3-4-a).

Pour réaliser l'adaptation, il faut que $\Gamma = 0$. Pour cela, il suffira de placer un transformateur d'impédance dans la ligne tel que Γ_0 soit transformé en $-\Gamma_r$, mais l'adaptation ne se fait que dans une bande passante restreinte (les moyens classiques d'adaptation par stubs peuvent être, aussi, employés mais les inconvénients sont les mêmes que pour le transformateur).

D'autres méthodes permettent de réaliser l'adaptation dans une bande passante plus large. Citons deux solutions principales :

a) on dispose une plaque au sommet du réflecteur. Le principe est le suivant : le réflecteur est partagé en deux surfaces (la plaque au sommet et le reste du réflecteur). Les effets de celles-ci sur la source sont égaux en module, ensuite, un petit déplacement d'une surface par rapport à l'autre amène ces effets à être opposés en phase. On a alors, $\Gamma = 0$. Ce processus d'adaptation est indépendant de la fréquence. La bande passante est alors déterminée par l'impédance caractéristique de la source en espace libre.

Supposons, pour simplifier, que $G(\varphi, z)$ est de révolution autour de Oz ; $G(\varphi, z) = G(\varphi)$. En effectuant l'intégration de Γ_r donné par la formule (13-4) de l'annexe, sur l'ouverture, on obtient :

$$dS = \frac{2\pi r \cdot dr}{\cos \varphi} ; \sin \varphi = \frac{r}{f} \sqrt{1 + \frac{r^2}{4f^2}}$$

$$\Gamma_r(\varphi) = \overline{\Gamma_r(r)} e^{-j(2kr + \delta)} = \frac{1}{2} \int_0^f \frac{G(\frac{r}{f})}{f^2 (1 + \frac{r^2}{4f^2})^2} e^{-j \frac{\pi f}{\lambda} \frac{r^2}{f^2}} \cdot r \cdot dr$$

ou en posant : $v = \frac{r^2}{f^2}$

$$\begin{cases} \overline{\Gamma_r}(v) = R(v) + jI(v) \\ R(v) = \frac{1}{4} \int_0^v \frac{G(v)}{(1 + \frac{v}{4})^2} \cos \frac{\pi f}{\lambda} v \cdot dv \\ I(v) = -\frac{1}{4} \int_0^v \frac{G(v)}{(1 + \frac{v}{4})^2} \cdot \end{cases} \quad (3-4-c)$$

En général, la courbe $I(v) = f(R(v))$ est une spirale. Le vecteur d'origine, celle des axes et d'extrémité le point tel que $v = \frac{D^2}{4f^2}$ correspond au coefficient de réflexion Γ_r dû à la présence de tout le parabolôïde.

L'expérience montre que l'on peut remplacer $\frac{G(\frac{r}{f})}{(1 + \frac{r^2}{4f^2})^2}$ de façon satisfaisante par $G_0 \cdot e^{-\alpha \frac{r^2}{f^2}} = G_0 e^{-\alpha v}$ dans beaucoup de cas.

Après calcul, on obtient :

$$\begin{cases} R(v) = \frac{G_0}{4(\alpha^2 + \pi^2 \frac{f^2}{\lambda^2})} \left\{ 2 + e^{-\alpha v} \left[\frac{\pi f}{\lambda} \sin \frac{\pi f}{\lambda} v - \alpha \cos \frac{\pi f}{\lambda} v \right] \right\} \\ I(v) = \frac{G_0}{4(\alpha^2 + \pi^2 \frac{f^2}{\lambda^2})} \left\{ \frac{\pi f}{\lambda} - e^{-\alpha v} \left[2 \sin \frac{\pi f}{\lambda} v + \frac{\pi f}{\lambda} \cos \frac{\pi f}{\lambda} v \right] \right\} \end{cases}$$

Le point limite de la spirale obtenue est donné par ($v = \infty$);

$$\begin{cases} R_\infty = \frac{\alpha G_0}{4(\alpha^2 + \pi^2 \frac{f^2}{\lambda^2})} \\ I_\infty = \frac{\pi f G_0}{4\lambda (\alpha^2 + \pi^2 \frac{f^2}{\lambda^2})} \end{cases}$$

La courbe obtenue est comprise entre la spirale de Cornu (pour laquelle $R \rightarrow \infty$ lorsque $\alpha = \frac{\pi f}{4}$) et la spirale de diffraction d'une ouverture circulaire (pour laquelle $R \rightarrow 0$ et $I \rightarrow \frac{\lambda^2}{4\pi f}$, lorsque $\alpha = 0$). au point limite;

La méthode d'adaptation (1) est la suivante: $\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \alpha^2}{4\pi^2 f^2}}$
 - on trace la spirale $\Gamma(\nu) = \int (R(\nu))$ à l'aide de (3-4-c), puis Γ_c (connaissant $\nu_c = \frac{\lambda^2}{4f}$).
 - on mène la médiatrice à Γ_c , elle coupe la spirale au point $\nu_c = \frac{\lambda^2}{4f}$. Le paraboloïde est alors divisé en deux zones, l'une intérieure au rayon ℓ_c et donnant le vecteur Γ_b l'autre extérieure à ℓ_c et donnant Γ_a (Fig. 20 a).
 $|\Gamma_a| = |\Gamma_b|$

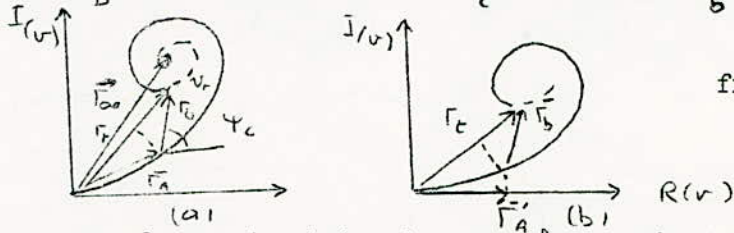
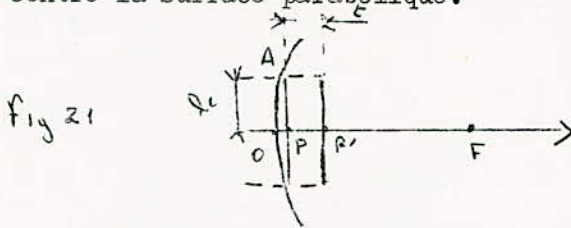


fig. 20

- une plaque circulaire de rayon ℓ_c de très faible épaisseur est placée contre la surface parabolique.



$FA = f + z$; $FP = f - z$
 donc $f - z \leq \rho \leq f + z$

En général, $PA \ll FP$ d'où $\int_{\rho} \frac{e^{-j(2kf + \delta)}}{4\pi\rho^2} dS = \Gamma'_A \cdot e^{-j(2kf + \delta)}$
 Γ'_A est porté par l'axe des réels. Par conséquent, la plaque circulaire amène Γ'_A sur $R(\nu)$

- pour Γ'_A en opposition de phase avec Γ_b , il suffit de déplacer la plaque jusqu'à une distance t telle que :
 $2k t = (2n+1)\pi - \psi_c$ (la rotation de Γ'_A se faisant toujours dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque la plaque se déplace vers le foyer F),

d'où $t = (2n+1) \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda \psi_c}{4\pi}$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Dans beaucoup de cas, on peut faire $\Gamma'_t \approx \Gamma_c$, la position finale de la plaque étant ajustée empiriquement pour compenser les erreurs.

Nous avons fait les calculs en supposant que sur la surface illuminée de la plaque existe une distribution de courant identique à celle sur la surface correspondante du paraboloïde (sauf pour la phase). En réalité, la plaque étant de petites dimensions, il existe, aussi, sur sa surface d'ombre (côté sommet du réflecteur) une distribution de courant d'effets non négligeables. Pour éliminer celle-ci, il est préférable d'utiliser une plaque d'épaisseur

$(2n+1) \frac{\lambda}{2} - \frac{\psi_c \lambda}{4\pi}$

faisant un bon contact électrique avec le réflecteur, plutôt qu'une plaque fine placée à la distance t .

(1) S.Silver Microwave antenna theory and design.

L'inconvénient majeur de la plaque d'adaptation est l'introduction d'erreurs de phase dans la distribution de champ à l'ouverture avec une perte résultante de gain, une augmentation de l'angle de directivité et du niveau des lobes secondaires. Dans le cas où les spécifications sur ces lobes sont strictes, cette technique ne doit pas être utilisée.

b) une seconde solution consiste à rendre la source primaire insensible au rayonnement réfléchi. Pour cela, on fait subir une rotation de $\frac{\pi}{2}$ à la polarisation du champ réfléchi par la surface de paraboloïde. Celle-ci sera constituée dans ce but par un grillage d'épaisseur $\frac{\lambda}{4}$.

Le grillage comprendra des lames parallèles en forme de parabole et orientées de façon à faire un angle de 45° avec le plan \vec{E} de la source. Les lames sont espacées entre elles d'une distance λ et leur profondeur est $p = \frac{\lambda}{4}$. On utilise l'effet de guide d'onde des lames parallèles.

Lorsque le vecteur électrique est parallèle aux plaques, si $\lambda < \frac{\lambda}{2}$ l'onde est atténuée, si $\lambda < \frac{\lambda}{8}$, l'onde est presque complètement réfléchie par le grillage. (voir chapitre 3-3-4).

→ Avec le grillage orienté avec un angle de 45° par rapport au plan \vec{E} , le vecteur incident comprendra une composante parallèle aux lames qui sera réfléchie avec une rotation de phase de π , à condition que $\lambda < \frac{\lambda}{8}$ et une composante perpendiculaire qui se propage entre les lames à la même vitesse qu'en espace libre. La profondeur des lames étant $\frac{\lambda}{4}$, après réflexion, le composante perpendiculaire émerge des lames avec la même phase qu'elle avait à l'entrée. Le vecteur résultant est, alors, perpendiculaire au plan \vec{E} .

Remarque : Pour soustraire la source primaire au rayonnement réfléchi, on peut utiliser une calotte parabolique comme réflecteur (Fig. 13).

3 - 5 - Choix de l'antenne primaire.

Dans un système de faisceau hertzien, les dispositions générales des fréquences de fonctionnement les unes par rapport aux autres seront définies par un plan de fréquence (1).

Une station-relais reçoit et émet simultanément des informations.

Pour éviter que les récepteurs ne soient perturbés par les émetteurs, il faut que les fréquences d'émission et de réception soient suffisamment écartées. En effet, on aura des différences de niveaux de 60 à 80 dB environ (et même plus en cas d'évanouissement de propagation) entre signaux issus des émetteurs et ceux à l'entrée des récepteurs, de plus, on désire que le niveau des perturbations parasites à la réception soit inférieur de 60 dB environ à celui des signaux utiles.

Il faut éviter, aussi, les couplages entre les deux sens de transmission. L'aérien de réception du sens aller ne doit recueillir qu'une très faible fraction des signaux destinés à l'aérien de réception du sens retour.

En ondes centimétriques, grâce aux rayonnements arrière et latéraux très faibles du paraboloïde par rapport au rayonnement maximum, le découplage entre les deux sens de transmission est assuré et on peut utiliser un plan à deux fréquences. Lorsque l'on a affaire à une artère à plusieurs canaux hertziens, on obtient un plan de fréquence du même type que l'exemple suivant :

(1) Libois. Les faisceaux hertziens - Chapitre 10.

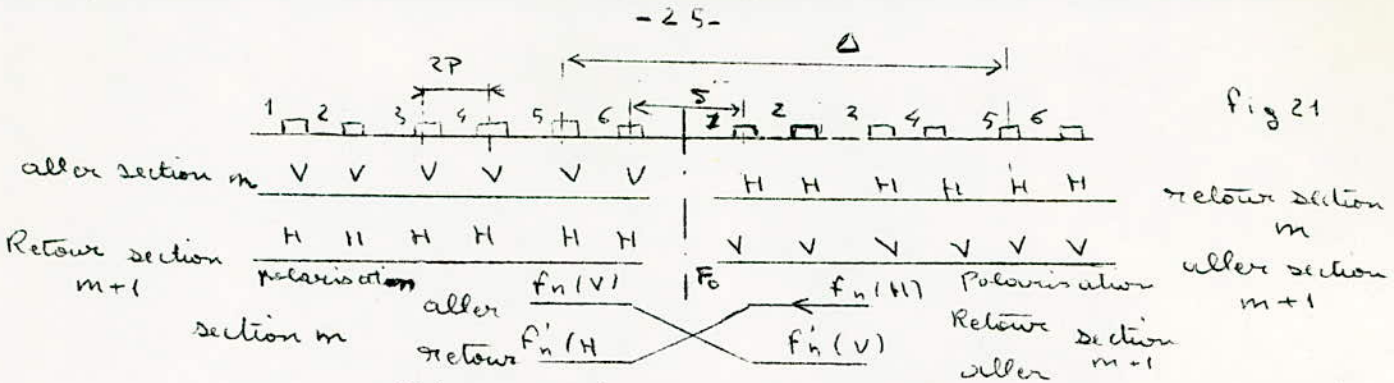


Fig 21

L'écart en fréquences entre le canal aller et le canal retour à la même valeur Δ pour tous les canaux. Deux canaux voisins sont séparés, dans l'échelle des fréquences d'une quantité $2P$, P est le pas du plan de fréquences. Entre le dernier canal aller et le premier canal retour, ou inversement, existe un écart de fréquences \bar{S} .

Dans le cas de la section de faisceau hertzien m , la réception se fait en polarisation verticale (V) et l'émission en polarisation horizontale (H). Dans le cas de la section $m+1$, l'émission se fait en polarisation verticale et la réception en polarisation horizontale.

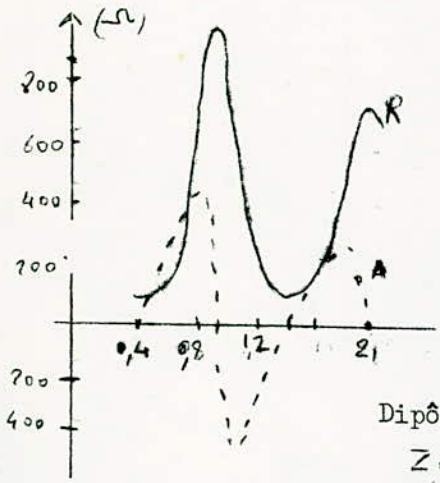
Ce plan peut être réalisé soit par un aérien émetteur-récepteur, soit par un aérien émetteur et un aérien récepteur, par direction. Le croisement des polarisations permet de séparer localement, le groupe émission du groupe réception.

Chaque canal occupe une bande passante assez large (transmission d'un canal de télévision : 12 MHz ou de 300 à 600 voies téléphoniques), par conséquent, l'antenne primaire d'émission ou de réception doit être à large bande.

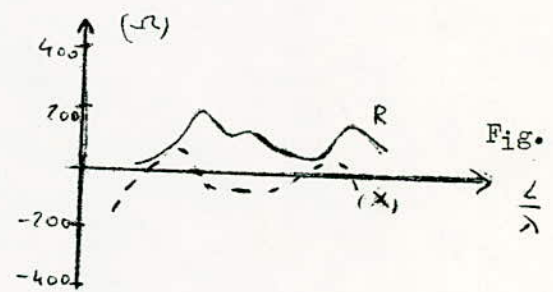
Vers les fréquences supérieures à 3000 MHz, on utilise les surfaces rayonnantes, telles que le cornet électromagnétique alimenté par guide d'onde.

Vers 900 MHz, on emploie les réseaux d'antennes, du type fentes rayonnantes ou dipôles épais, alimentés par ligne coaxiale.

Si $Z_e = R + jX$ est l'impédance d'un dipôle de longueur L , on obtient les courbes suivantes :



Dipôle mince



Dipôle épais.

Fig. 22

Z_e varie beaucoup moins en fonction de λ pour le dipôle épais que pour le dipôle mince.

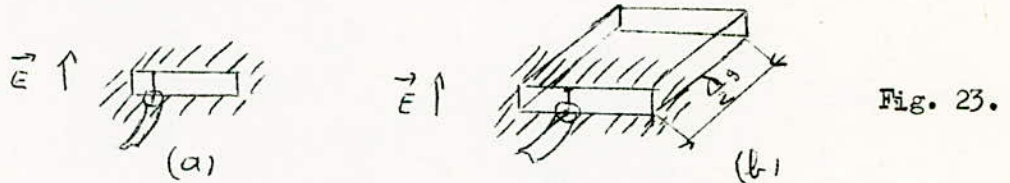
Pour constituer la source primaire avec des doublets (2) on groupe ceux-ci devant un plan réflecteur et on les alimente en parallèle, c'est-à-dire en phase. Le plan réflecteur est une surface limitée et ne forme qu'un réflecteur imparfait.

- (1) - Everitt - Cours fondamental de radio et d'électronique - Chapitre 20.
- (2) - Rigal - Cours de Radio-électricité générale. les Antennes tome 1. Chap. 8 et 14.
- Thourel - Les antennes chapitre 7.

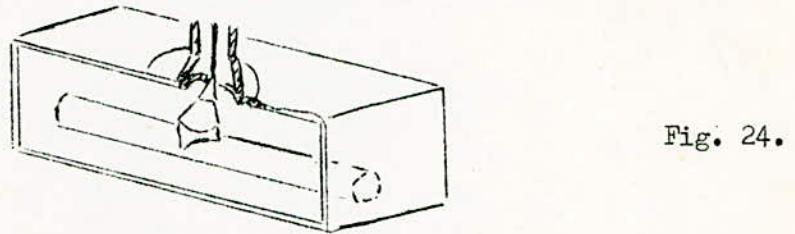
L'impédance d'entrée de l'antenne primaire dépend des dipôles employés, de la distance dipôle-rélecteur, du couplage entre doublets et des dimensions de l'antenne.

Les caractéristiques de rayonnement (1) d'une fente se déduisent facilement de celles du dipôle équivalent par application du principe de Babinet (notons, aussi, qu'un dipôle constitué par un fil ou un tube cylindrique est équivalent à un dipôle plat de longueur double).

L'excitation d'une fente est facile à réaliser à partir d'une ligne coaxiale transversale; cependant les impédances ramenées au centre étant généralement élevées, la ligne occupe une situation excentrique afin que son impédance de charge soit sensiblement égale à son impédance caractéristique.



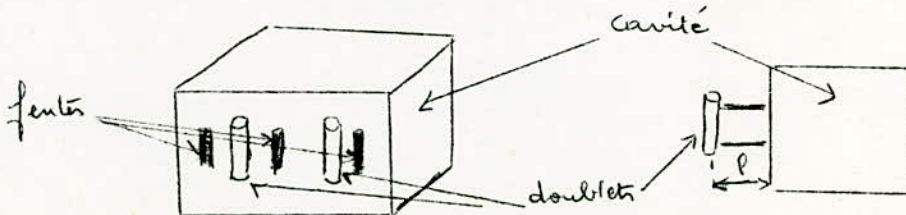
Un tel système rayonne symétriquement de part et d'autre de l'écran (Fig. 23 - a). Un rayonnement unilatéral est obtenu en fermant la fente sur une cavité parallélépipédique de $\lambda_g/4$ de profondeur (Fig. 23 - b). La portion de guide $\lambda_g/4$ ainsi constitué ramène une impédance infinie sur la fente mais double sa résistance de rayonnement (action analogue au plan réflecteur). L'impédance vue par le feeder est donc doublée. Pour l'excitation de la cavité, on a l'habitude d'utiliser un transition guide-coaxial de type " cross-bar " (2). (p. 24)



On peut, comme pour les doublets, constituer l'antenne primaire avec un réseau de fentes.

On peut tracer les diagrammes de rayonnement de telles sources primaires en utilisant le calcul théorique. Mais, celui-ci n'est qu'une approximation de la réalité. Seule l'expérience peut nous fournir des résultats concernant les caractéristiques de l'antenne et les corrections à faire pour approcher les résultats désirés (adaptation-gain-directivité, largeur de bande.....).

Pour réaliser l'émission et la réception simultanée par le même aérien, il suffit de placer au foyer un réseau de fentes fermées sur une cavité et un groupement de doublets, la face rayonnante de la cavité servant en même temps de plan de réflecteur pour ceux-ci (voir fig. 25).



(1) Thourel - Les antennes, chapitre 14.
(2) Thourel - Les antennes, chapitre 14.

Si le groupement de doublets est polarisé verticalement, le réseau de fentes, dans le cas de figure, est polarisé horizontalement. On a donc croisement des polarisations des deux antennes. EN général $l \leq \frac{\lambda}{4}$, comme $f \gg \lambda$ on peut considérer que le centre de phase de ces deux antennes coïncide pratiquement avec le foyer F du paraboloïde.

* Une source primaire doit :

- Présenter un centre de phase bien défini
- Etre à large bande passante
- Etre adaptée en présence du réflecteur dans la bande passante désirée
- Etre directive et présenter un rayonnement arrière très faible,
- Etre protégés contre les intempéries (l'étanchéité de la source primaire est assurée par un couvercle en verre-polyester ou radôme, sur sa face rayonnante. Pour éviter l'introduction d'impuretés ou de l'humidité, les câbles coaxiaux et la source primaire sont pressurisés).

Si l'antenne primaire doit travailler à l'émission, il faudra déterminer sa tenue en puissance (caractérisée par la tension de claquage, ou par la puissance que peut supporter l'antenne sans amorçage, ni éffluage).

Une source primaire sera, aussi, caractérisée par son poids, ses dimensions et autres paramètres mécaniques.

Son alimentation et sa fixation au réflecteur peut être axiale; l'avantage est l'encombrement réduit et l'inconvénient, la présence de la ligne sur l'axe engendrant, ainsi, une perturbation sérieuse du champ.

On peut fixer, aussi, la source primaire au réflecteur, par trois ou quatre tirants disposés en pyramide, dont un ou deux de ces tirants sont des lignes coaxiales. L'avantage est dû au fait que les bords du paraboloïde sont plus faiblement éclairés que le centre pour réduire le niveau des lobes secondaires, les tirants étant fixés au voisinage de ces bords, le champ n'est pratiquement pas affecté. L'inconvénient est l'encombrement qui est, cependant, relativement réduit dans le cas de réflecteurs à grand diamètre.

Un dispositif de réglage de la position de l'antenne primaire par rapport au foyer doit, aussi, être prévu.

3 - 6 - Procédure d'un projet.

Le gain maximum G_m et la fréquence de travail du paraboloïde étant fixés, on a : $G_m = g \cdot G_0$ avec $G_0 = \frac{\pi^2 D^2}{\lambda^2}$

- si le facteur de gain g est fixé, on peut, alors, calculer le diamètre D du réflecteur,
- g est déterminé par le type d'antenne primaire;
- lorsque cela est possible, on choisit celle-ci de façon que son diagramme de rayonnement corresponde sensiblement à un gain de la forme :

$$G(\psi) = G_0^n \cdot \cos^n \psi$$

Les courbes de la figure 11 nous donnent, alors, l'angle d'ouverture optimum ψ dès que n est fixé (celui-ci pourra, par exemple, être déterminé en fonction du niveau de lobes secondaires et de la directivité désirés).

Plus rigoureusement, si $G(\psi)$ est le gain de l'antenne primaire, on peut calculer g (voir chapitres 3-3-1 et 3-3-2), puis trouver l'angle d'ouverture optimum en faisant $\frac{dG}{d\psi} = 0$.

Le choix de l'antenne primaire est imposé, aussi, par les caractéristiques énumérées au chapitre 3-5.

X

- l'Angle optimum γ , nous permet le calcul du rapport $\frac{D}{f} = \frac{4 \sin \gamma}{1 + \cos \gamma}$

- les courbes de la figure 11 indiquent que le facteur de gain maximum théorique est d'environ 0,8. En réalité, à cause des erreurs de phase dues à la source primaire, à la précision de fabrication du réflecteur et des différentes pertes par spill-over, interférence avec le lobe arrière, transparence, obstacles etc..... le facteur de gain maximum est donné par :

$0,5 < g < 0,6$ (voir courbe de la figure 16).

La précision d'exécution ϵ du réflecteur sera déterminée soit à partir de ces courbes, soit par l'emploi des formules du chapitre 3-3-5-3.

Si l'on fixe ϵ , alors g est fixé.

Par exemple, si $\epsilon = \frac{\lambda}{16}$ et si l'on admet que les autres causes d'imprécision donnent des erreurs inférieures à $\frac{\lambda}{16}$, l'erreur globale sera toujours inférieure à $\frac{\lambda}{8}$ et $g \approx 0,55$, d'où le diamètre D , puis la distance focale f .

- on peut faire, ensuite, le calcul puis le tracé des diagrammes de rayonnement théoriques pour déterminer les différents paramètres, directivité, niveau des lobes etc.....

- on réalise un prototype en fonction des dimensions D et f et de la précision ϵ . Des mesures faites sur celui-ci doivent vérifier approximativement la théorie (surtout en ce qui concerne le gain imposé) sinon, on doit corriger les dimensions D et f ou la précision ϵ .

- la structure de la surface réfléchissante sera prédéterminée par le choix du type d'adaptation de l'antenne primaire au feeder en présence du réflecteur (voir chapitre 3-4) et par le niveau de lobes secondaires (et éventuellement du lobe arrière) que l'on se fixe. Là, encore, des mesures de bande passante sont à faire en prototype.

- on procède, enfin, à une étude mécanique de l'antenne en fonction des caractéristiques du prototype.

Il s'agira de concevoir la charpente métallique de l'antenne, adopter un type de fixation de la source primaire au réflecteur, déterminer différents paramètres mécaniques, tels que le minimum poids/volume, résistance au vent (essais en soufflerie), en tenant compte évidemment d'autres facteurs, tels que les facteurs économiques.

4 - Réalisation.

4 - 1 Choix de l'antenne primaire.

Lorsque l'ouverture du réflecteur est optimum, on a vu que :

$0,5 < g < 0,6$

Le gain demandé est : $G_{dB} = 10 \log G_m = 30 \text{ dB}$

$\Rightarrow G_m = 1000 = g \cdot \frac{\pi^2 D^2}{\lambda^2}$ d'où le diamètre $D = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1000}{g}}$

or $F = 900 \text{ MHz} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{F} = 0,33 \text{ m}$

et $D = 1,06 \sqrt{\frac{10}{g}}$ (4-1-a)

aux valeurs précédentes de g , correspondent :

$4,35 \text{ m} \leq D \leq 4,75 \text{ m}$

Le réflecteur étant de dimensions importantes et à cause de son prix de revient élevé, on aura intérêt à réaliser un aérien émetteur-récepteur.

La source primaire sera du même type que celle de la figure 25 et comprendra :

- un réseau de fentes
- un panneau de doublets.

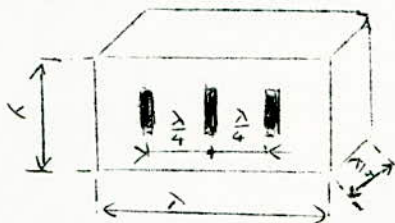
L'axe des fentes est parallèle à l'axe des doublets de façon à réaliser le croisement des polarisations d'émission et de réception (voir chapitre 3-5

Notons que pour que le découplage des polarisations se fasse correctement, on aura intérêt à réduire la composante de polarisation transversale du champ réfléchi par le paraboloïde, dans ce but, le réflecteur aura une structure laminaire ou grillagée.

La conception d'une source primaire n'étant pas le but de ce projet, nous nous bornerons à utiliser une source primaire du même type que celle-réalisée par la C.F.T.H (1).

Elle comprendra :

- Un réseau de 3 fentes fermé par une cavité de section $\approx \lambda \times \lambda$ et de profondeur $\frac{\lambda}{4}$. La fente centrale est seule alimentée.



- un panneau de deux doublets $\frac{\lambda}{2}$ distants de $\frac{\lambda}{2}$ l'un par rapport à l'autre et de $\frac{\lambda}{4}$ par rapport à la surface rayonnante de la cavité.

Chacune de ces deux antennes est reliée respectivement aux équipements du relais hertzien par une ligne coaxiale.

À l'émission, la puissance que peut supporter l'antenne primaire sans amorçage, ni effluage est de 2KW.

La bande passante de chaque antenne est de l'ordre de 50 à 60 MHz.

Par exemple, l'antenne à fentes peut travailler dans la bande 915-960 MHz avec un T.O.S. = 1,15 et l'antenne à dipôles dans la bande 830-875 MHz avec un T.O.S. = 1,2. Leur directivité à 3 dB est comprise entre 40° (ou $\pm 20^\circ$) et 80° (ou $\pm 40^\circ$). La largeur à - 12 dB du lobe principal est comprise entre $\pm 50^\circ$ et $\pm 75^\circ$.

Le rayonnement arrière est inférieur à - 15 dB

Le rayonnement latéral est inférieur à - 15 dB.

D'autre part, lorsque la source est en espace libre, la différence entre les niveaux envoyés par une antenne et recueilli par l'autre est supérieur à 35 DB.

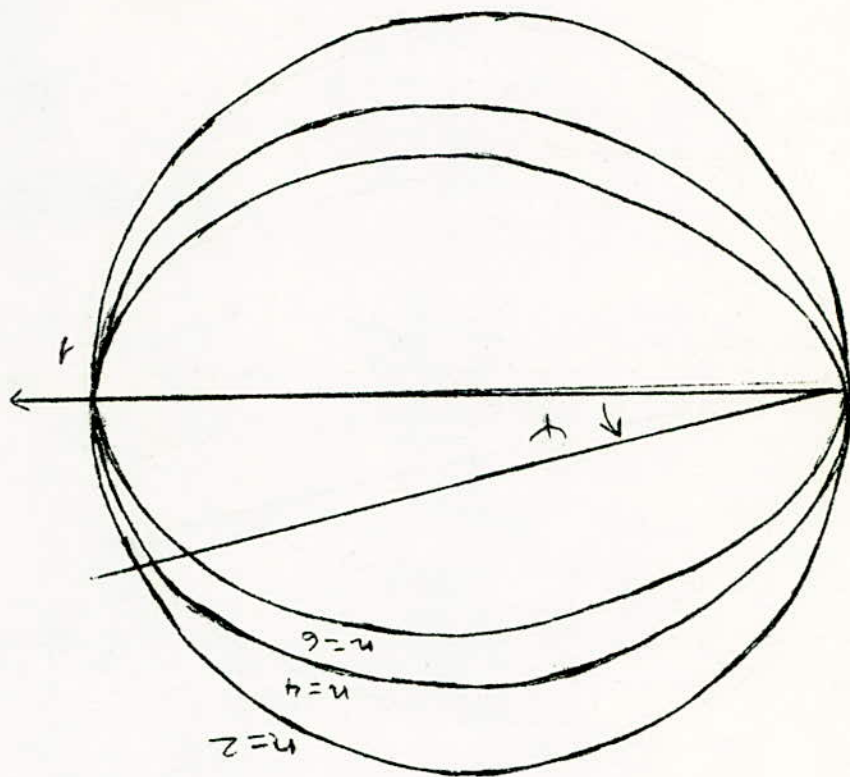
La protection contre l'énergie calorifique se fait par radôme en verre polyester.

L'encombrement de la source primaire avec radôme est le suivant :

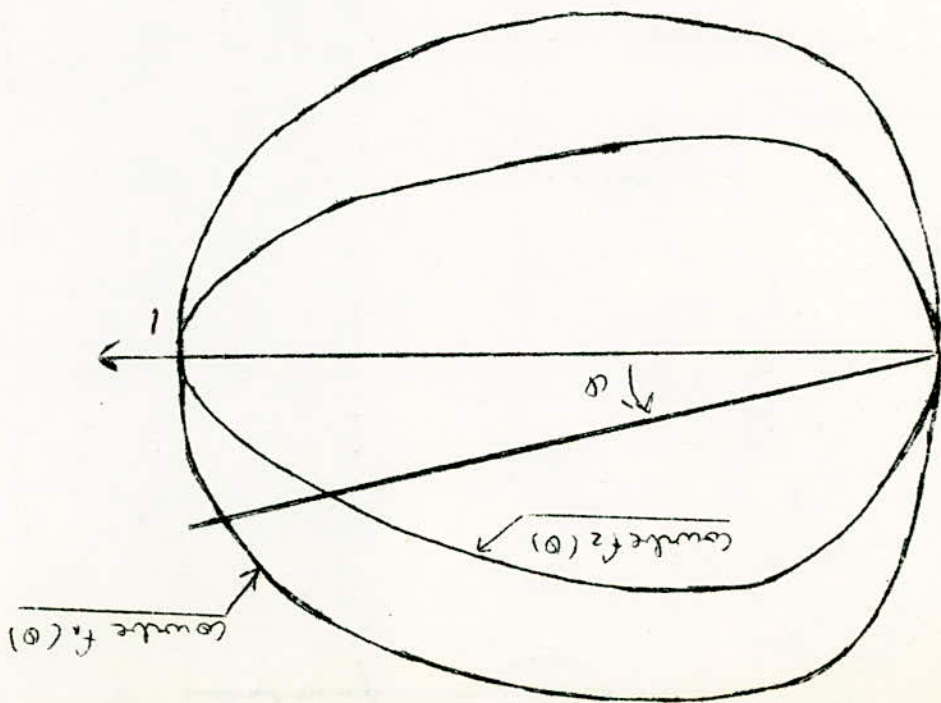
- Longueur : 35 cm.
- Largeur : 38 cm.
- Hauteur : 35 cm.

D'après les données précédentes, les diagrammes de rayonnement du panneau de doublets et de l'antenne à fentes se trouveront dans la zone limitée par les deux courbes tracées à partir des tableaux suivants (on néglige les lobes latéraux et arrière).

(1) - C.G.E et C.F.T.H. Faisceau hertzien transhorizon Alger-Bône.
Fascicule n° 4 aériens et filtres.



Coordinate $f(\psi) = \cos \frac{n\psi}{2}$



①	- 90°	- 50°	- 20°	0°	+ 20°	+ 50°	90°
$F_1(\Theta)$ (dB)	- 00	- 12	- 3	0	- 3	- 12	- 00
$F_1(\Theta)$	0	0,4	0,71	1	0,71	0,4	0
②	- 90°	- 75°	- 40°	0°	40°	+ 75°	90°
$f_2(\Theta)$	0	0,4	0,71	1	0,71	0,4	0

Considérons maintenant l'expression $G(\Psi) = G_0 \cos^n \Psi$ La fonction caractéristique de rayonnement correspondante est de la forme.

$$F(\Psi) = \sqrt{\frac{G(\Psi)}{G_0^n}} = \cos \frac{n}{2} \Psi$$

On trace les diagrammes correspondants à $n = 2, 4, 6$

On déduit que les diagrammes de rayonnement de la source primaire peuvent être approximativement représentés par $\cos \Psi, \cos^2 \Psi$ et $\cos^3 \Psi$ ($n = 2, 4, 6$).

4 - 2.- Dimensionnement du paraboloïde.

Le gain du panneau de doublets ou du réseau de fentes est de la forme.

$$G(\Psi) = G_0 \cos^n \Psi \quad \text{avec } n = 2, 4, 6$$

L'examen des courbes de la figure 11 montre que le facteur de gain est maximum que pour l'une des trois courbes, G sera le plus grand possible pour celles-ci lorsque $\Psi = 55^\circ$ est, alors, maximum pour $n = 4$.

Les courbes de la figure 16 tracées pour $n = 4$, montrent que ce maximum s'est déplacé et a lieu pour $\Psi = 61^\circ \approx 60^\circ$.

Si l'on admet une précision d'exécution du réflecteur $\epsilon = \frac{\lambda}{16} = 2 \text{ cm}$ les erreurs de phase à l'ouverture seront $\epsilon \leq \frac{\lambda}{8}$ ce qui correspond à $\alpha = \frac{3}{8\pi^2}$. On déduit $g_{\max} \approx 0,55$

Le facteur de gain global est donné par : $g = g_{\max} \eta_i$

η_i désigne le rendement de l'illumination.

Si $n = 4$ le champ rayonné par la source primaire est de la forme $F(\Psi) = \cos^2 \Psi$ Pour une ouverture optimum $\Psi = 60^\circ$. L'atténuation du champ à la périphérie du réflecteur par rapport au champ au sommet est donné par :

$$20 \log \frac{1}{\cos^2 \Psi} = - 20 \log 4 = - 12 \text{ dB.}$$

Le tableau (1) suivant nous donne les valeurs d'atténuation en fonction de l'illumination η_i .

Atténuation	η_i	Atténuation	η_i
8	0,71	15	0,81
10	0,75	20	0,83
12	0,79	20	0,84

On déduit que lorsque l'atténuation vaut 12 dB, $\eta_i = 0,79$.

Donc : $g = 0,55 \times 0,79 = 0,425$

Dans le chapitre 4 - 1, on a calculé le diamètre D sans tenir compte du rendement de l'illumination, dans la formule (4 - 1 - a), g représente en réalité le gain global.

$$D = 1,06 \sqrt{\frac{10}{0,425}} = 5,15 \text{ m.}$$

Cette valeur de D a été calculée dans le cas de g le plus favorable. Mais le gain du paraboloïde doit être d'au moins 30 dB pour les trois cas n = 2, 4, 6, il faudra donc considérer le courbe $g = f(\Psi)$ donnant la valeur g la plus faible pour une ouverture $\Psi = 60^\circ$. Pour cette raison et par mesure de sécurité, on choisira :

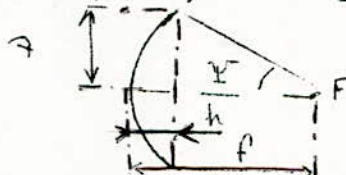
D = 6 m

ce qui correspondrait à un facteur de gain global de :

$$6 = 1,06 \sqrt{\frac{10}{g_i}} \quad g_i = 0,31 \quad f_{max} = \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{\sin \Psi} = \frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 3,46 \text{ m.}$$

Les dimensions du paraboloïde seront les suivantes :

D = 6m f = 2,6 m $\Psi = 60^\circ$ h = 0,87 m $E = 12 \text{ cm.}$



Les relations (3-3-5-3-b) nous donnent les dimensions qui ne peuvent être dépassées que dans des conditions trop onéreuses.

$\log \frac{A_0}{E} = \frac{G_0 + 11}{20} = 2,05 \Rightarrow \frac{A_0}{E} = 112$ (avec $G_0 = 30 \text{ dB}$)
il faut que $\frac{A_0}{E} \leq 112$

or, dans notre cas, la dimension maximum A est $f_{max} = 3,46 \text{ m}$

$\frac{A}{E} = \frac{f_{max}}{E} = \frac{3,46}{0,02} = 173 > \frac{A_0}{E}$

La construction du réflecteur sera coûteuse. Cependant, le prix de revient élevé du paraboloïde sera compensé par l'économie due au fait que l'on utilise un seul aérien pour l'émission et la réception.

4 - 3 - Diagramme de rayonnement du paraboloïde.

La distribution de champ à l'ouverture est donnée par :

$$|E(r, \psi)| = \left[2 \left(\frac{r}{E} \right)^2 \frac{P_r}{4\pi r^2} \right]^{1/2} \left[G_0 \right]^{1/2} \frac{\cos^2 \psi}{f} \quad (\text{voir chapitre 3-2-3}).$$

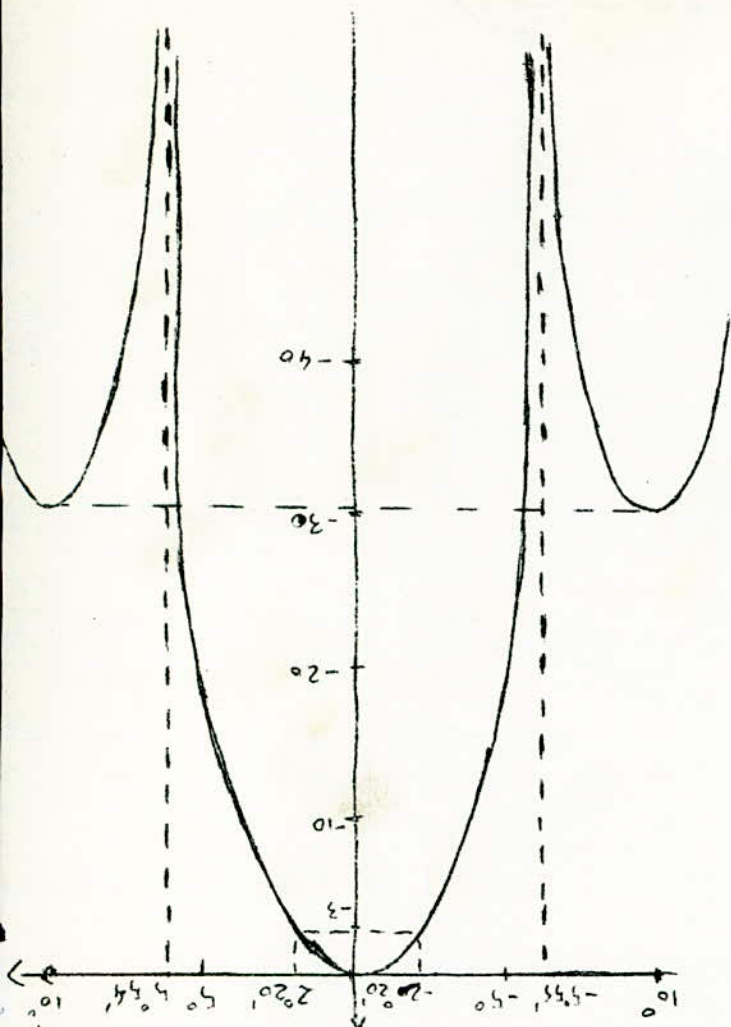
L'intégration du champ à l'aide des formules (3-2-3-c) ou (3-2-3-d) est très difficile.

Ici, encore, le calcul du champ rayonné à grande distance se fera par une méthode graphique. C'est-à-dire on tracera les courbes $g = f(m)$ correspondant à $G(\Psi) = G_0 \cos^2 \Psi$ (n = 2, 4, 6) avec

Diagrammes de rayonnement théorique du
paraboloïde pour

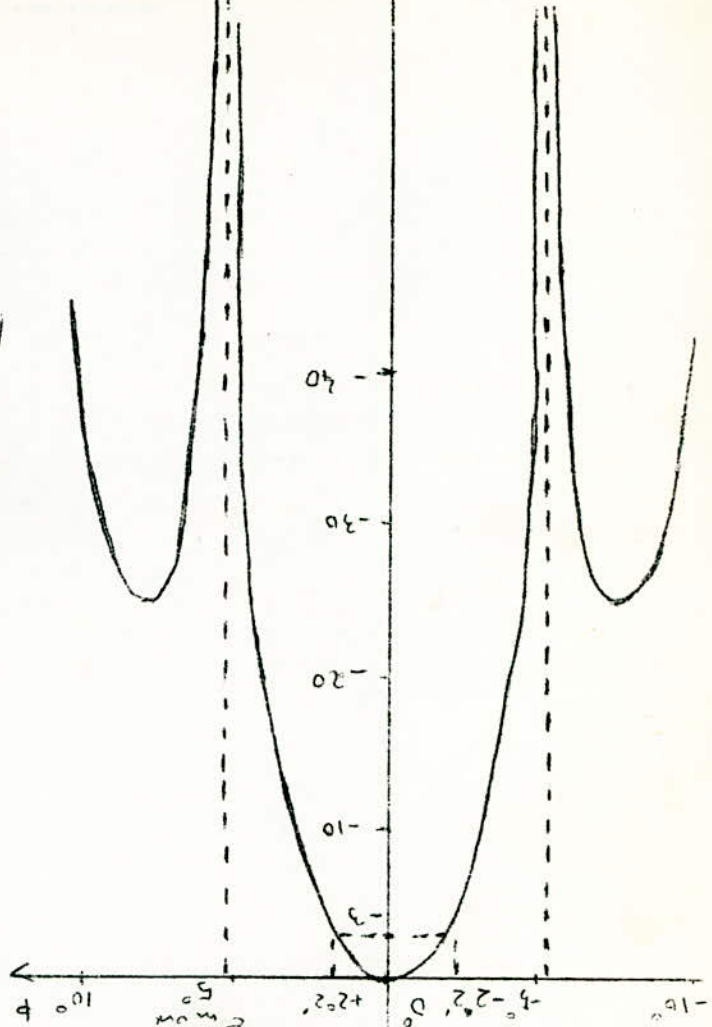
$$\overline{P=2}$$

$$F(\phi) \text{ (dB)}$$

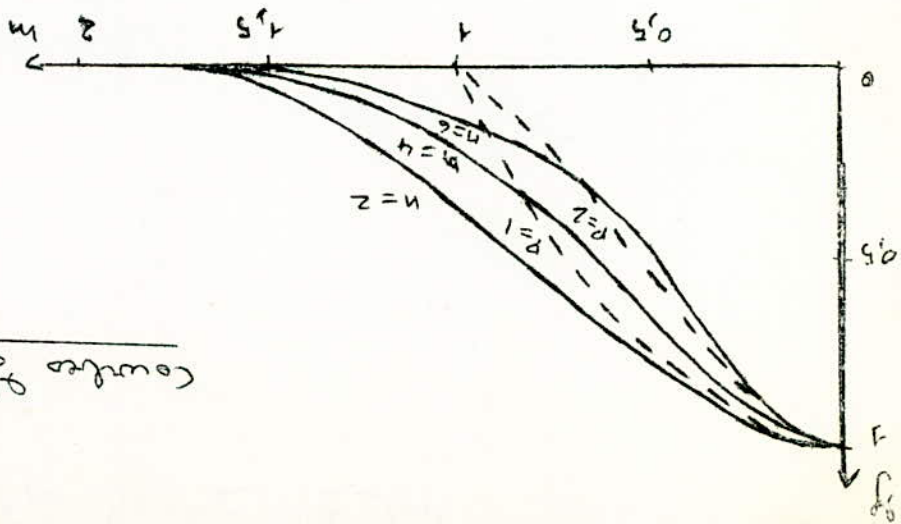


$$\overline{P=1}$$

$$F(\phi) = \frac{|E_p(\phi)|^2}{E_{max}^2} \text{ (dB)}$$



Courbes de $F = F(m)$



$$g = \left| \frac{E'(1.3)}{E'} \right| = \cos \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} ; E' = \left[\left(\frac{D}{\lambda} \right)^2 \frac{P_r}{2\pi r} \right]^{1/2} \left[\frac{G_r}{f} \right]^{1/2}$$

$$m = \frac{4f}{D} \tan \frac{\pi}{2} = \frac{4 \times 0,26}{6} \tan \frac{\pi}{2} = \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{2}$$

On cherchera ensuite à approcher ces courbes par des distributions connues du type $f_m = (1 - m^2)^P$ avec $P = 0, 1, 2, \dots$

Pour $f_m = \cos^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2}$, on obtient le tableau suivant :

ψ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
m	0	0,445	0,7	1	1,73
$f(2)$	1	0,7	0,425	0,187	0
$f(4)$	1	0,81	0,6	0,375	0
$f(6)$	1	0,56	0,3	0,094	0

On trace les courbes correspondantes (en trait plein sur le graphique).
Pour $f_m = (1 - m^2)^P$ avec $P = 1, 2$, on obtient le tableau et les courbes (en pointillé)

m	0	0,5	0,7	1
$f(1)$	1	0,75	0,51	0
$f(2)$	1	0,56	0,26	0

$\cos^2 \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} = f_m$ ($n=2,4,6$) peut donc être approchée par la fonction $(1 - m^2)^P$ ($P = 1, 2$). Dans ce cas le champ à grande distance sera donné par une expression comprise entre :

$$\frac{\pi a^2}{\lambda R} E' \frac{J_2(u)}{u^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi a^2}{\lambda R} E' \frac{J_3(u)}{u^3}$$

Le tableau du chapitre 3-2-3 nous permet de tracer les diagrammes de rayonnement correspondant à $P = 1, 2$, avec $\frac{\lambda}{D} = \frac{0,333}{6} = 0,055$

P	Directivité à 3 dB	Position du 1er zéro	Niveau du 1er lobe secondaire (dB)
1	4 ° 4 '	5 ° 12 '	24,6
2	4 ° 39 '	5 ° 54 '	30,6

Le diagramme de rayonnement du paraboloïde sera compris dans la zone limitée, par ces deux courbes.

4.4.- REALISATION DU PROTOTYPE.

Il est peu commode de réaliser un prototype à l'échelle et de faire des mesures sur celui-ci, à cause des dimensions importantes du paraboloïde.

Par contre, il est plus intéressant de réaliser une maquette à échelle réduite. Des essais sur une telle maquette ont été effectués pour une antenne d'un sondeur ionosphérique.

Une maquette à échelle réduite conduit à des résultats permettant de faire avancer rapidement le projet, fournit des renseignements que l'on ne peut connaître que difficilement sur l'antenne réelle, son prix de revient est faible. De tels essais sur maquette sont très utiles tant que l'on ne doit pas faire intervenir des phénomènes non linéaires en fréquence comme les pertes ohmiques ou les pertes diélectriques, elle ne fournit, donc, aucun renseignement sur le problème de la bande passante.

Il faut évidemment réaliser le modèle avec la même précision relative que l'antenne réelle, mais cela est en général possible parce que le procédé de fabrication n'est pas le même, alors que l'antenne à l'échelle doit être réalisée avec un assemblage de poutres et de poutrelles métalliques supportant la surface réfléchissante en grillage à mailles soudées, la maquette peut être exécutée à partir d'une tôle formée et raidie par des couples calibrés très précis. Moyennant ces restrictions, on peut accorder une grande confiance aux diagrammes de rayonnement relevés par ce procédé.

Si l'on choisit un rapport de réduction $k = 10$

La fréquence de travail sera 9000 MHz.

Les dimensions de la maquette seront :

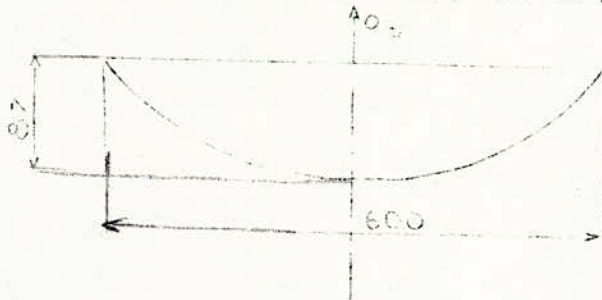
$D = 60 \text{ cm}$; $f = 26 \text{ cm}$; $h = 8,7 \text{ cm}$; $\gamma = 60^\circ$; $\epsilon = 2 \text{ mm}$.

Le paraboloïde a été exécuté par martelage à partir d'une plaque de tôle d'aluminium de 700×700 et d'épaisseur 2 mm.

Au préalable, il a fallu fabriquer un calibre et un gabarit.

(1) Onde électrique Mars 1966 - Antenne d'émission du
sondeur ionosphérique par Y TOCQUEC

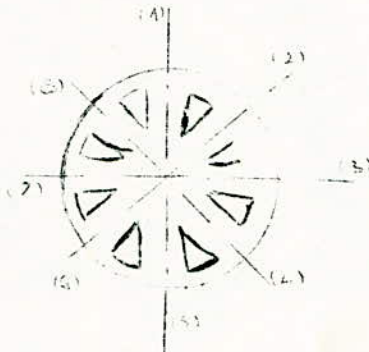
Pour cela, il a fallu tracer à l'échelle de la maquette et avec précision une section du réflecteur passant par \vec{Oz} , sur du papier calque.



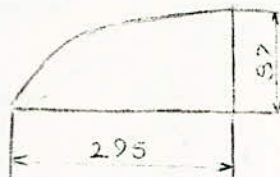
On reporte ce dessin qui constitue le plan de lancement de la fabrication de la maquette, sur une plaquette de tôle d'aluminium d'épaisseur 1 mm, puis on découpe celle-ci en suivant le tracé, à la cisaille. La section parabolique, ainsi obtenue constitue l'étalon.

Ensuite, on découpe dans de la tôle de fer de 1 mm.

- Une circonférence ϕ 600. Dans laquelle on pratique huit ajourages.



- huit demi-paraboles (tracées à partir du calibre)



Celles-ci sont ensuite fixées perpendiculairement à la surface de la circonférence et le long des demi-axes (1), (2), ..., (8), à l'aide de cornières soudées par points sur les demi-paraboles et la circonférence, de façon à constituer un gabarit ayant la forme d'un parabololoïde.

Ce gabarit est maintenu rigide par soudure au point de convergence de toutes les demi-paraboles et par emploi de raidisseurs. On vérifie ensuite que le gabarit est à la cote voulue.

On découpe dans la plaque d'aluminium précédente, un disque $\phi 700$. Celui-ci est recuit pour faciliter le travail du martelage, tout en restituant les qualités de malléabilité au métal.

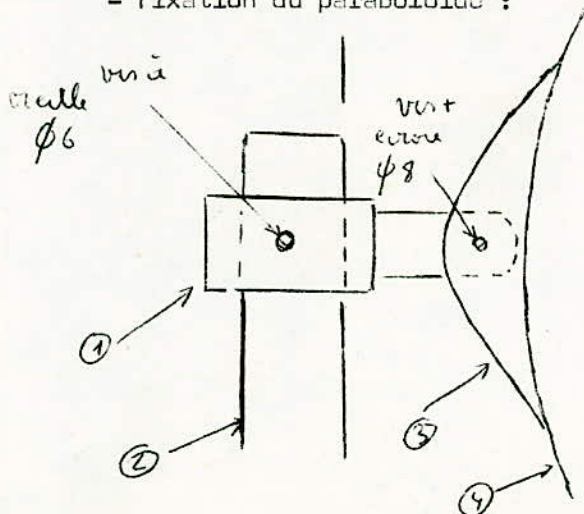
On déforme la tôle de façon à lui donner une forme concave, puis on la travaille de façon à la mettre à la forme (emploi du gabarit pour contrôler la forme).

Ensuite, on élimine les déformations par planage de la surface concave obtenue.

Puis, on effectue la mise à la cote. Pour cela, on procède encore par planage (emploi de marteaux spéciaux) et on contrôle la surface à l'aide de l'étalon. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'employer des raidisseurs, la forme étant conservée à cause de l'épaisseur de la tôle.

Lorsque le parabololoïde est terminé, on résout les problèmes de détail, c'est-à-dire.

- Fixation du parabololoïde :



La pièce (1) permet la fixation du paraboloïde (4) à un tube (2) (ϕ 27 longueur l m 20) solidaire d'un socle rectangulaire en béton (non représenté sur la fig.), par l'intermédiaire de deux ailettes (3) rivetées au paraboloïde.

(celui-ci peut ainsi tourner soit dans le sens horizontal, soit dans le sens vertical).

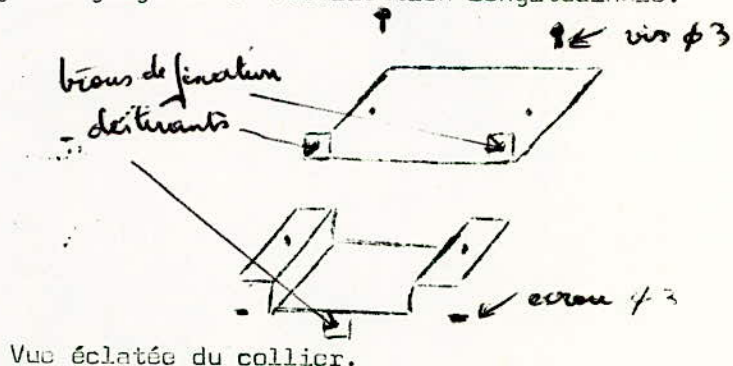
- Fixation de l'antenne primaire. Celle-ci sera un élément de guide d'onde ouvert à une extrémité, comprenant un cristal accordable et une sortie pour un voltmètre électronique par câble coaxial fin.

Dans ^{ce} cas, l'antenne parabolique est réceptrice. L'avantage est que l'encombrement du guide d'onde est identique à celui prévu pour la source primaire, alors que pour faire travailler l'antenne à l'émission, il faudrait placer un guide ouvert, des éléments de mesure et un klystron, ce qui poserait un problème d'obstacles. Les résultats obtenus à la réception sont identiques à ceux obtenus à l'émission sur la même antenne d'après le principe de réciprocité.

L'antenne primaire réelle sera fixée à l'aide de trois ou quatre tirants dont le diamètre varie entre 6 et 10 cm.

Pour être proche des conditions réelles, le guide d'onde est monté par l'intermédiaire d'un collier l'entourant, avec trois barres métalliques ϕ 6 terminées à leurs extrémités par des tiges filetées ϕ 4. Les barres sont fixées à la périphérie du réflecteur dans trois trous disposés selon un triangle équilatéral, à l'aide d'écrous ϕ 4.

Lorsque le collier (voir fig.) est desserré, le guide peut être déplacé longitudinalement, il y a réglage de la focalisation longitudinale.



L'action sur les écrous de 4 mm règle la focalisation ~~longitudinale~~ transversale
 La réalisation de la maquette a nécessité 48 heures de travail environ.

4-5 - MESURES SUR LA MAQUETTE

4-5-1 - Mesure du gain

Le gain maximum d'un aérien d'émission est

$$G_E = \frac{P_{\max}}{P_{\text{moy}}} \quad \text{avec} \quad P_{\text{moy}} = \frac{P_T}{4\pi d^2}$$

Un aérien de réception placé en d et orienté en vue de la réception maximum à pour surface effective :

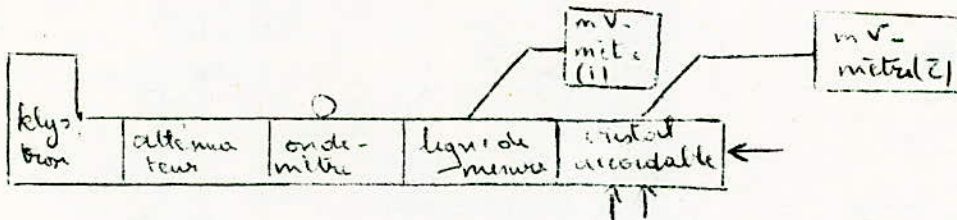
$$S_R = \frac{P_R}{P_{\max}} \quad (P_R \text{ est la puissance maximum reçue})$$

$$\frac{P_T}{P_R} = \frac{4\pi d^2}{\frac{P_{\max}}{P_{\text{moy}}} S_R} = \frac{4\pi d^2}{G_E \cdot S_R} \quad \text{or} \quad G_R = \frac{4\pi S_R}{\lambda^2}$$

d'où

$$G_R = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{P_R}{P_0 \cdot G_E} \quad (4 - 4 - I - a)$$

On réalise le montage suivant :



On effectue les opérations suivantes

- réglage du klystron à 9000 MHz sur le mode principal
 (tension cible : 250 v tension réflecteur : -230 v)
- accord de la ligne de mesure
- accord du cristal de façon que le T.O.S. mesuré par (1)

soit voisin de 1, on trouve

$$T.O.S = 1,04$$

La détection étant quadratique, le signal reçu par (2) est proportionnel à la puissance détectée.

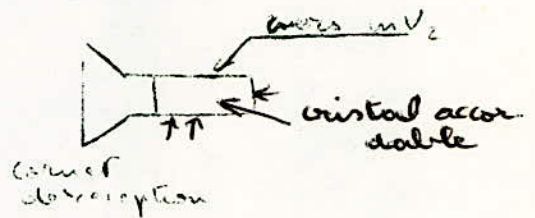
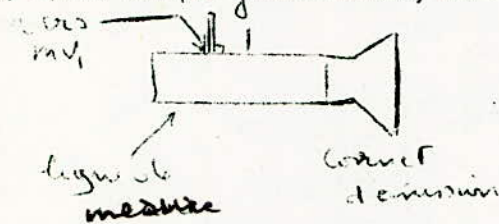
On relève les valeurs P_{T1} et P_{T2} correspondent respectivement à une atténuation minimum α_1 et maximum α_2

soit

$$P_{T1} \equiv 108 \text{ m V} \quad \alpha_1 = 0 \text{ dB}$$

$$P_{T2} \equiv 0,140 \text{ m V} \quad \alpha_2 = 40 \text{ dB.}$$

On sépare ensuite la monture cristal du circuit de mesure et on fixe, après chaque guide ouvert, un cornet



Les deux cornets sont identiques et placés dans la direction de rayonnement maximum à 1 m l'un de l'autre.

On règle l'atténuation de façon à retrouver

$$P_{T2} \equiv 0,140 \text{ m V sur le millivoltmètre (2),}$$

l'atténuation obtenue est $\alpha_3 = 19 \text{ dB.}$

$$10 \log \frac{P_R}{P_0} = \alpha_3 - \alpha_2 = 19 \text{ dB} - 40 \text{ dB} = 21 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow \frac{P_R}{P_0} = 79,5 \cdot 10^{-4} \quad \text{or } G_R = G_E = \frac{4\pi d^2}{\lambda} \sqrt{\frac{P_R}{P_0}}$$

Le gain d'un cornet sera :

$$G_E = 33,5$$

pour la mesure du gain du paraboloïde, on procède de la même façon

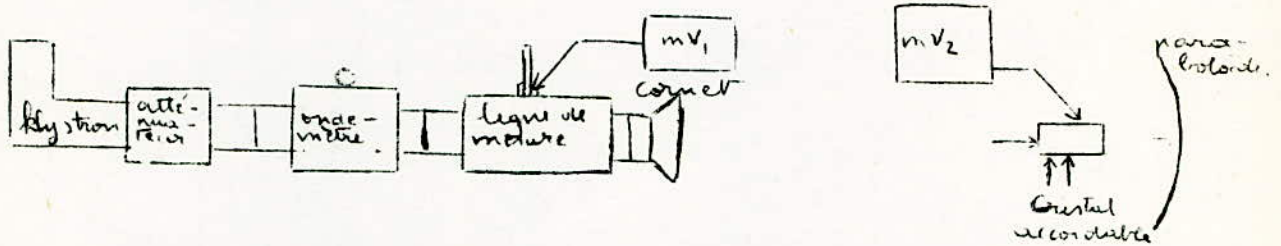
On sépare le cornet de réception du cristal accordable, celui-ci étant monté sur le paraboloïde. Celui-ci étant dirigé vers le cornet émetteur en vue de la réception maximum. On règle la focalisation, en réglant la position de la monture cristal.

Pour être dans la zone de Fraunhofer (1), on place le paraboloïde à une distance

$$d \geq \frac{D^2}{\lambda} = \frac{(60 \text{ cm})^2}{3,3 \text{ cm}} = 11 \text{ m}$$

On choisit $d = 20 \text{ m}$

L'endroit où l'on effectue les mesures doit être bien dégagé pour éviter les réflexions parasites.



Comme précédemment on règle α de façon à retrouver

$$P_{T2} \equiv 0,14 \text{ mV} \quad \text{soit} \quad \alpha_4 = 8,5 \text{ dB}$$

$$10 \log \frac{P_R}{P_T} = 8,5 - 40 = -31,5 \text{ dB}$$

$$G_R = \frac{P_R}{P_T} \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{1}{G_E}$$

$$10 \log G_R = 20 \log \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) - 10 \log G_E + 10 \log \frac{P_R}{P_T}$$

$$\frac{4\pi d}{\lambda} = 7,55 \cdot 10^3$$

$$10 \log G_R = 60 + 20 \log 7,55 - 10 \log 33,5 - 31,5$$

$$(G_R)_{dB} = 31,8 \text{ dB} = 32 \text{ dB}$$

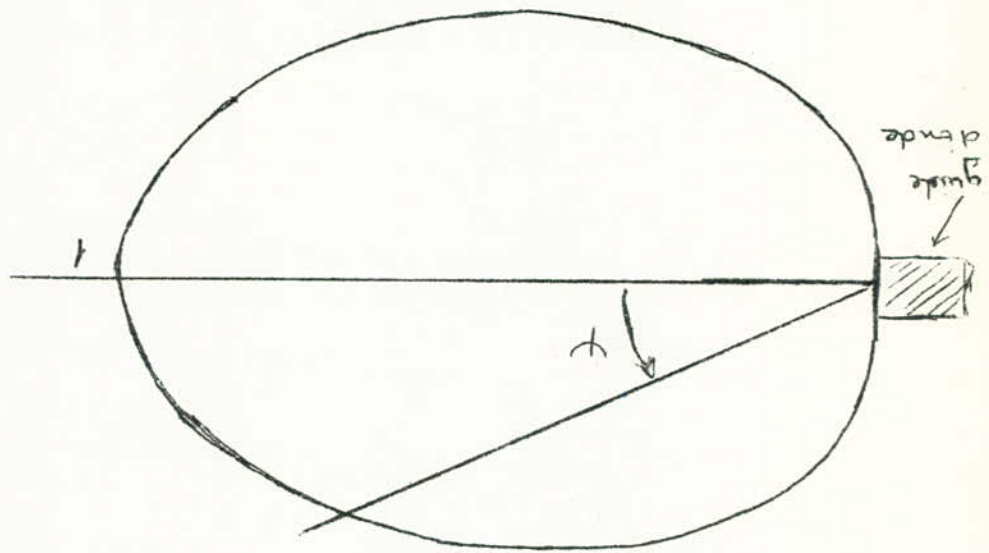


Diagramme de rayonnement
du guide ouvert

4-5-2 Diagramme de rayonnement

On trace d'abord le diagramme de rayonnement de l'antenne primaire, c'est à dire du guide ouvert, dans le plan \vec{H}



Les antennes d'émission et de réception sont placées à distance maximum (pour être dans le cas d'une onde plane en polarisation rectiligne).

Le cornet émetteur étant fixe, on tourne la monture cristal dans le plan horizontal. La fonction caractéristique de rayonnement est alors donnée par :

$$f(\psi) = \sqrt{\frac{P(\psi)}{P_R}}$$

P_R étant la puissance dans la direction de réception maximum

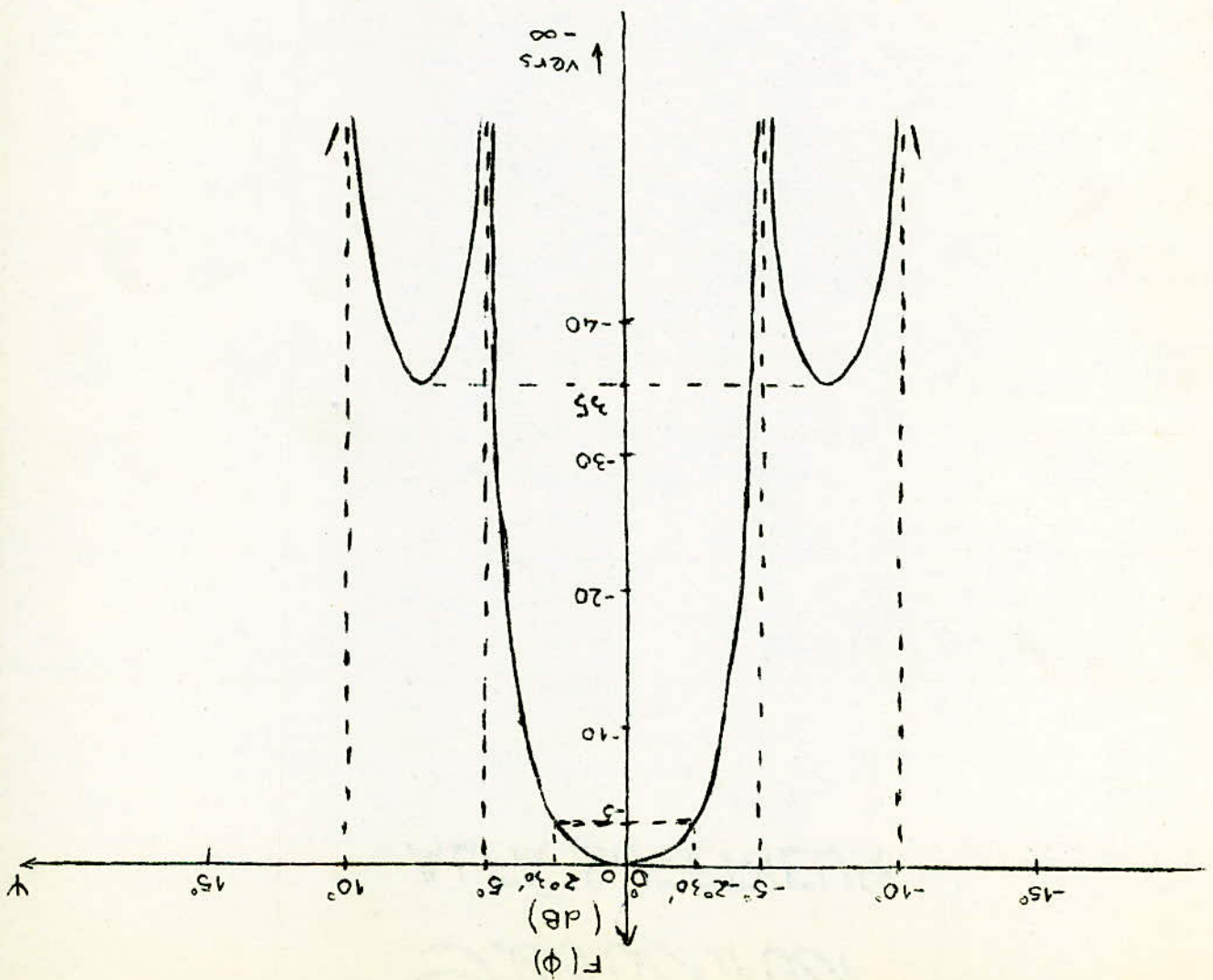
La puissance reçue sera mesurée à puissance $P_{T2} = Cste$ pour plus de précision (car la diode de la monture cristal travaille toujours au même point de fonctionnement); d'où le diagramme de rayonnement tracé à partir de $f(\psi)$

En le comparant aux courbes $\cos^{\frac{n}{2}} \psi$ du chapitre 4-1 on voit que la fonction caractéristique de rayonnement du guide est comprise entre $\cos^2 \psi$ ($n=4$) et $\cos^3 \psi$ ($n=6$)

Donc le guide ouvert correspond au type de source primaire choisi.

On trouve le diagramme de rayonnement du paraboloïde en opérant de même que pour la mesure du Gain

Diagramme de rayonnement du prototype



Les mesures étant faites à $d = 20$ m, dans un endroit dégagé, à puissance reçue constante, le cornet d'émission fixe le parabololoïde tourne dans le plan horizontal

On obtient le tableau suivant:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	Directivité	1 ^{er} Zéro	Niveau des	Position du	Position du		
1	à		lobes secon-	maxi. des 1 ^{er}	lobes second.	2 ^e Zéro	
1	3 dB		daires.	lobes second.			
1			(dB)				
1							
1	5° ($\pm 2^{\circ}$ 30')	5°	35 dB	7°		10°	
1							
1							
1							

D'où le diagramme de rayonnement.

On remarque que si la directivité est conservée, le niveau des lobes secondaires est plus faible que celui prévu par la théorie alors que l'on devrait s'attendre à un résultat contraire ; cela est dû à plusieurs raisons:

- mesures faites dans un endroit insuffisamment dégagé
- précision de mesure.

On peut dire que globalement les résultats prévus par la théorie correspondent avec l'expérience à condition d'opérer les corrections précédentes (facteur de gain, rendement de l'illumination etc...). *À cause du temps limité, nous ne ferons pas de mesures dans le plan z*

4-6 Données de Construction

- Dimensions du réflecteur
 - $D = 6$ m $f = 2,6$ m $h = 0,87$ m $\Psi = 60^\circ$
- Précision d'exécution $\epsilon = \pm 2$ cm
- La surface réfléchissante sera un grillage dont les mailles sont soudées ou en métal déployé ceci, pour

. Diminuer la résistance au vent: des essais sur prototype seront faits en soufflerie pour déterminer la trainée du grillage et la résistance au vent

. Diminuer la réaction du réflecteur sur la source primaire (pour cela le grillage doit être incliné à 45°)

. Rendre négligeable la composante de polarisation transversale

Dans le cas où les spécifications sur les lobes secondaires sont strictes, on utilisera de préférence une surface composée de lames parallèles (1)

Au chapitre 3-3-5 on a vu que la plus grande diagonale d'une maille doit être telle que $b < \frac{\lambda}{4}$ on choisit

$$b \leq \frac{\lambda}{8} = \frac{33,3}{8} \text{ cm} \approx 4 \text{ cm}$$

de façon que l'effet de transparence soit négligeable.

- Les mailles du grillage seront de forme telle qu'elles permettent le découpage des polarisations d'émission et de réception

-- La charpente métallique qui supportera la surface réfléchissante aura une structure tubulaire ou en profilé de manière à obtenir la forme parabolique. La construction sera faite en alliage léger.

- Il faudra prévoir une fixation de la source primaire au réflecteur à l'aide de trois ou quatre tirants dont deux seront les lignes coaxiales d'émission et de réception.

Il faudra concevoir un dispositif de réglage de la focalisation longitudinalement et transversalement et étudier

(1) Thourel : Les Antennes Chapitre 12

aussi les problèmes de fixation de l'aérien à une tour, du réglage en site et en azimuth, de la protection contre les intempéries (foudre, neige ...) et de l'adaptation des lignes coaxiales aux antennes d'émission et de réception.

Pour terminer disons que le poids approximatif d'une telle antenne est de l'ordre de 300 Kgs à 500 Kgs

4 - 7 C o n c l u s i o n

Le sujet étant très vaste et, à cause du temps limité pour la réalisation, beaucoup de problèmes n'ont pas été développés dans le détail, notamment celui de la construction où il y a encore beaucoup à dire.

Dans la partie réalisation nous avons essayé de résoudre ce problème tel qu'il se pose en pratique. La maquette a confirmé l'ordre de grandeur des calculs effectués, elle a surtout permis de déterminer les dimensions réelles de l'antenne.

Remarquons aussi que n'importe quel type d'antenne primaire peut être employé avec ce réflecteur pourvu que ses diagrammes de rayonnement aient une forme approchée de $\text{Cos}^{n/2} \psi$
 $n = 2, 4, 6$.

Mentionnons pour terminer que les constructeurs fabriquent en série les réflecteurs et, par conséquent essaient de normaliser les dimensions ($D = 10 \text{ m}, 6 \text{ m}, 3 \text{ m}$). Par exemple, si une liaison hertzienne nécessite une antenne de gain G_0 , on choisira le réflecteur dont le diamètre D est tel que le gain G pouvant être obtenu avec ce réflecteur soit $G \geq G_0$. à la fréquence de travail considérée.

BIBLIOGRAPHIE

- Robieux I. influence de la précision de fabrication d'une antenne sur ses performances. Annales de radio-électricité tome XI n° 43 janvier 1956
- Tocquec Y. L'antenne d'émission du sondeur ionosphérique. L'onde électrique n°468 mars 1966
- Silver S. Microwave antenna Theory and Design
M.I.T. Radiation Laboratory
BTL Edition
- Libois I.J. Faisceaux Hertzien et Systèmes de modulation
Collection Technique et Scientifique du C.N.E.T.
Editions Chiron
- Thourel L. Les Antennes Edts **Dunod**
- Everitt W.L. **Cours fondamental de radio** et d'électronique
Edition radio
- Korman, Herman et Ford. Analysis of Microwave Antennas Sidelobes.
R.C.A. Review septembre 1952
- CGE §CFTH faisceau hertzien transhorizon Alger-Bône fascicule n°4
aérien et filtres

ANNEXE

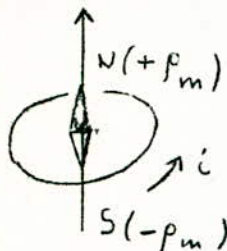
1 - Equations de Maxwell	1
2 - Conditions aux limites	2
3 - Ondes sphériques isotropes	3
4 - Champs dûs à des sources sinusoïdales dans un milieu homogène	4
5 - Conditions de rayonnement	8
6 - Champs dans une région limitée par des surfaces d'un milieu de conductivité infinie	10
7 - Principe de Huygens	10
8 - Formules de Kottler	13
9 - Reflection d'une onde plane par un plan conducteur indéfini	15
10 - Principe de superposition	17
11 - Indice de refraction d'un milieu	17
12 - Rayonnement à grande distance du paraboloïde	18
13 - Réaction du réflecteur parabolique sur la source primaire	20
14 - Zones de Fresnel	22

1) Equations de MAXWELL

Div $\vec{B} = 0$ exprime le fait qu'il n'existe pas de charges magnétiques libres et courants magnétiques correspondants.

Cependant, lorsqu'un circuit électrique peut se décomposer en boucles de courant élémentaires, il est alors commode d'utiliser la notion de charges et courants magnétiques.

Une boucle de courant équivaut à un dipôle magnétique porté par l'axe de la boucle et ayant même moment magnétique



$\vec{M} = s \cdot \vec{i} = \rho_m \cdot \vec{l}$ (s est l'élément de surface plane limitée par la boucle, \vec{l} est la longueur orientée du pôle sud vers le pôle nord, du dipôle).

Si $\vec{i} = f(t)$, ρ_m sera aussi fonction du temps t , donc il y aura apparition d'un courant magnétique élémentaire.

Supposons que, dans une région déterminée de l'espace, l'on ait affaire à une distribution de charges électriques ρ et magnétiques ρ_m , et de densités de courants électrique \vec{I} et magnétique \vec{I}_m

Dans ce cas ; $\text{div } \vec{B} = \rho_m$ et on n'aura plus $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ puisque

$$\text{div rot } \vec{E} = 0 = - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \text{div } \vec{B}$$

Pour éliminer cette contradiction, on suppose que ;

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{K}$$

$$\text{div rot } \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \cdot \text{div } \vec{B} + \text{div } \vec{K} = 0$$

$$\text{d'où } \text{div } \vec{K} = \frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

$$\iint_{(S)} \vec{I}_m \cdot \vec{n} \cdot dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{(V)} \rho_m \cdot dv = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{I}_m \cdot dv$$

$$\text{div } \vec{I}_m = - \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = - \text{div } \vec{K}$$

$$\text{on en déduit : } \vec{I}_m = - \vec{K}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{I}_m$$

Les équations de MAXWELL s'écrivent, alors, de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = - \vec{I}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1-1)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = \rho_m \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{cases} \quad (1-1)$$

Les équations de continuité qui leur sont associées, sont données par :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{I}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{I} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (1-2)$$

On en déduit les équations d'ondes pour \vec{E} et \vec{H} , en faisant :

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot} \vec{I}_m - \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} \quad (1-3 \text{ a}) \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} &= -\operatorname{rot} \vec{I}_m - \mu \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \rho + \operatorname{rot} \vec{I}_m + \mu \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \end{aligned}$$

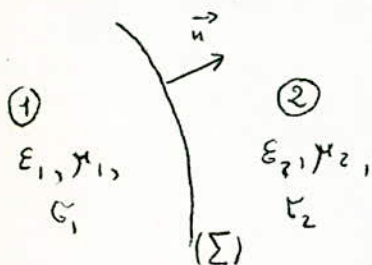
$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{I} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} \quad (1-3 \text{ b}) \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{I} - \epsilon \frac{\partial \vec{I}_m}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \rho_m - \operatorname{rot} \vec{I} + \epsilon \frac{\partial \vec{I}_m}{\partial t} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{I}_m + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \rho \quad (1-3 \text{ c}) \\ \Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \epsilon \frac{\partial \vec{I}_m}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{I} + \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \rho_m \end{cases}$$

\vec{I}_m et ρ_m sont des notions purement formelles introduites dans le but d'éviter la répétition de certains développements dans les calculs qui vont suivre. Elles seront différentes de zéro, seulement, dans des cas spéciaux.

2) Conditions aux limites



Soit une surface (Σ) séparant deux milieux ① et ②

Les conditions aux limites sur la surface de séparation (Σ) sont ;

- La composante tangentielle de \vec{E} est continue
 $\vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2-1)$

Dans le cas où le milieu ① est un très bon conducteur ($\sigma = \infty$), \vec{E}_1 pénètre jusqu'à une distance inversement proportionnelle à $\sqrt{\sigma} \Rightarrow \vec{E}_1 = 0$ sur (Σ)
 et $\vec{n} \wedge \vec{E}_2 = 0 \quad (2-2)$

- La composante normale de \vec{D} est discontinue, s'il existe sur (Σ) une couche de charges superficielles η

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \eta = \vec{n} \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) \quad (2-3)$$

- La composante normale de \vec{B} est continue

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{n} \cdot (\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) = 0 \quad (2-4)$$

-La composante tangentielle de \vec{H} est discontinue, s'il existe sur (Σ) une répartition de densités de courant superficielles \vec{K}

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (2-5)$$

Dans le cas où $\epsilon_1 = \infty, \vec{H}_1 = 0$ (le champ pénètre en $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ dans ①)

$$\begin{cases} \vec{n} \wedge \vec{H}_2 = \vec{K} \\ \vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0 \end{cases} \quad (2-6)$$

Si l'on introduit la notion de charges et courants magnétiques ρ_m et \vec{K}_m , on aura;

$$\begin{cases} \vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\vec{K}_m \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \rho_m \end{cases} \quad (2-7)$$

avec

$$\begin{cases} \oint_{(c)} \vec{K}_m \cdot d\vec{l} = - \iint_{(s)} \frac{\partial \rho_m}{\partial r} dS \\ \oint_{(c)} \vec{K} \cdot d\vec{l} = - \iint_{(s)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dS \end{cases} \quad (2-8)$$

3) Ondes sphériques isotropes

Soit une source ponctuelle de champ électromagnétique placée en 0, les surfaces d'ondes sont des sphères concentriques à 0.

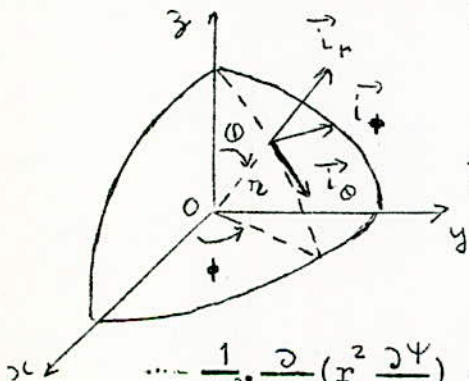
Donc \vec{H} et \vec{E} sont de la forme.

$$\begin{cases} \vec{E} = E(r) \cdot \vec{i}_\theta \\ \vec{H} = H(r) \cdot \vec{i}_\phi \end{cases} \quad (3-1)$$

\vec{E} et \vec{H} satisfont à l'équation d'onde

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0 \quad (3-2a)$$

ou en coordonnées sphériques



$$\dots - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (3-2b)$$

avec $\psi = E(r), H(r)$ et $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{d\psi}{dr}) + k^2 \psi = 0$$

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + k^2 \psi = 0 \quad (3-3)$$

Posons $\psi = y(r) \cdot e^{ar}$

$$\left(\frac{d^2 y}{dr^2} e^{ar} + 2a \frac{dy}{dr} e^{ar} + a^2 y e^{ar} \right) + \frac{2}{r} \left(\frac{dy}{dr} e^{ar} + ay e^{ar} \right) + ky e^{ar} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dy}{dr} + ky \right) + \left(a^2 + \frac{2a}{r} \right) y + 2a \frac{dy}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \left(a^2 + \frac{2a}{r} \right) y + 2a \frac{dy}{dr} = 0$$

$$\frac{a}{2} \cdot dr + \frac{dr}{r} = - \frac{dy}{y}$$

$$\frac{ar}{2} + \ln r = - \ln y + \ln A$$

$$y = A \cdot \frac{e}{r} - \frac{ar}{2}$$

$$\text{et } \Psi = A \cdot \frac{e}{r} e^{ar}$$

$$\frac{d\Psi}{dr} = A \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{e^{ar}}{r} - A \cdot \frac{e^{ar}}{r^2}$$

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} = A \cdot \frac{a^2}{4r} \cdot e^{\frac{ar}{2}} - A \cdot \frac{a}{r^2} \cdot e^{\frac{ar}{2}} + \frac{2A}{r^3} \cdot e^{\frac{ar}{2}}$$

En remplaçant dans (3-3), on trouve $\frac{a^2}{4} + k^2 = 0$, soit :

$$a = \pm j2k$$

$$\Psi^+ = A \cdot \frac{e}{r} e^{jkr} \quad (\text{onde se propageant dans le sens des } r \text{ négatifs})$$

$$\Psi^- = A \cdot \frac{e}{r} e^{-jkr} \quad (\text{onde se propageant dans le sens des } r \text{ positifs})$$

Dans le cas de la source placée en 0 ;

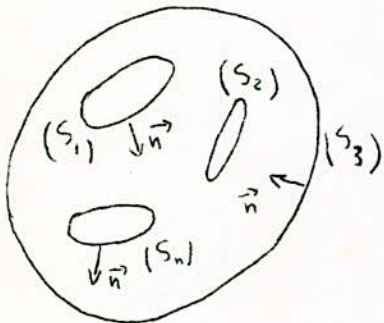
$$\vec{E} = E_0 \cdot \frac{e}{r} e^{-jkr} \cdot \vec{i}_\phi$$

$$\vec{H} = H_0 \cdot \frac{e}{r} e^{-jkr} \cdot \vec{i}_\phi$$

4) Champs dûs à des sources sinusoïdales dans un milieu homogène

Soit un milieu homogène de volume (V) limité par des surfaces (S₁, ... S_n). Soient \vec{F} et \vec{G} , deux champs de vecteurs définis, continus partout sur (V), (S₁), ..., (S_n), ainsi que leurs dérivées première et seconde.

La normale unitaire \vec{n} aux surfaces est orientée positivement vers l'intérieur du volume (V)



$$\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$$

$$\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} = \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) + \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$$

a) posons $\vec{B} = \vec{F}$; $\vec{A} = \text{rot} \vec{G}$

$$\vec{F} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{G} = \text{div} (\text{rot} \vec{G} \wedge \vec{F}) + \text{rot} \vec{G} \cdot \text{rot} \vec{F}$$

b) posons $\vec{B} = \vec{G}$
 $\vec{A} = \text{rot} \vec{F}$

$$\vec{G} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{F} = \text{div} (\text{rot} \vec{F} \wedge \vec{G}) + \text{rot} \vec{F} \cdot \text{rot} \vec{G}$$

$$\iiint_{(V)} (\vec{F} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{G} - \vec{G} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{F}) \cdot d.v = \iiint_{(V)} \text{div} (\text{rot} \vec{G} \wedge \vec{F} - \text{rot} \vec{F} \wedge \vec{G}) \cdot d.v$$

$$= - \iint_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} (\text{rot} \vec{G} \wedge \vec{F} - \text{rot} \vec{F} \wedge \vec{G}) \cdot \vec{n} \cdot ds$$

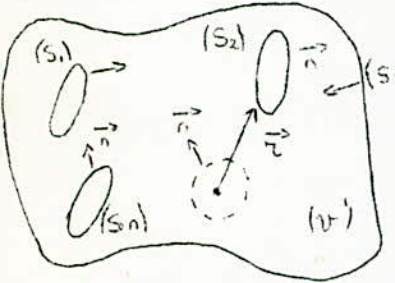
$$\iiint_{(V)} (\vec{F} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{G} - \vec{G} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{F}) \cdot dV = - \iint_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} (\vec{G} \wedge \text{rot} \vec{F} - \vec{F} \wedge \text{rot} \vec{G}) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (4-1)$$

Supposons, maintenant, qu'il existe dans (V) un champ électromagnétique tel que \vec{E} et \vec{H} réalisent les conditions de continuité requises pour \vec{F} .

Le problème étant d'exprimer le champ en un point quelconque de (V) en fonction des sources se trouvant à l'intérieur de (V) et des valeurs de champ sur $(S_1), \dots, (S_n)$, on pose ;

$$\vec{G} = \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \vec{a} = \Psi \cdot \vec{a} \quad (4-2)$$

\vec{a} est un vecteur arbitraire mais constant. \vec{G} satisfait aux conditions de Green sauf en P, où il y a une singularité ($r = 0$)



On entoure P par une petite sphère (Σ) de rayon r centrée en P, puis on considère le nouveau domaine (V') limité par $(S_1), \dots, (S_n), (\Sigma)$.

$$a) \begin{cases} \vec{G} = \Psi \cdot \vec{a} \\ \vec{F} = \vec{E} \end{cases}$$

$$\iiint_{(V')} (\Psi \vec{a} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \Psi \vec{a}) \cdot dV = - \iint_{S_1 + \dots + S_n + \Sigma} (\vec{E} \wedge \text{rot} \Psi \vec{a} - \Psi \vec{a} \wedge \text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (4-3)$$

$$\text{rot} \cdot \text{rot} \Psi \vec{a} = \text{grad} \text{div} \Psi \vec{a} - \Delta \Psi \vec{a} \quad (4-4)$$

$$\Delta \Psi \vec{a} = \Delta \Psi \cdot a_1 \vec{i} + \Delta \Psi \cdot a_2 \vec{j} + \Delta \Psi \cdot a_3 \vec{k} = \Delta \Psi \cdot \vec{a} = -k^2 \Psi \vec{a}$$

(en utilisant l'équation 3-2 a)

On déduit des équations (4-4) et (1-3)

$$\Psi \vec{a} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \cdot \text{rot} \Psi \vec{a} = \Psi \vec{a} \cdot (-j\omega \mu \vec{I} - \text{rot} \vec{I}_m + k^2 \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\text{grad} \text{div} \Psi \vec{a} + k^2 \Psi \vec{a}) = (-j\omega \mu \vec{I} \Psi - \Psi \text{rot} \vec{I}_m) \vec{a} - \text{grad} (\text{div} \Psi \vec{a}) \cdot \vec{E} \quad (4-5)$$

$$\vec{E} \cdot \text{grad} (\text{div} \Psi \vec{a}) = \text{div} (\vec{E} \cdot \text{div} \Psi \vec{a}) - \text{div} \vec{E} \cdot \text{div} \Psi \vec{a}$$

$$\text{div} \Psi \vec{a} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} a_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y} a_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial z} a_3 = \vec{a} \cdot \text{grad} \Psi$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\vec{E} \cdot \text{grad} (\text{div} \Psi \vec{a}) = \text{div} (\vec{E} \cdot (\vec{a} \cdot \text{grad} \Psi)) - \frac{\rho}{\epsilon} \vec{a} \cdot \text{grad} \Psi \quad (4-6)$$

$$\Psi \text{rot} \vec{I}_m = \text{rot} (\Psi \vec{I}_m) + \vec{I}_m \wedge \text{grad} \Psi \quad (4-7)$$

On porte (4-6) et (4-7) dans (4-5), puis le résultat obtenu dans (4-3)

$$\iiint_{(V')} \{ (-j\omega \mu \vec{I} \Psi - \text{rot} (\Psi \vec{I}_m) - \vec{I}_m \wedge \text{grad} \Psi) \vec{a} + \frac{\rho}{\epsilon} \vec{a} \cdot \text{grad} \Psi - \text{div} [\vec{E} (\vec{a} \cdot \text{grad} \Psi)] \} \cdot dV$$

$$= - \iint_{S_1 + \dots + S_n + \Sigma} (\vec{E} \wedge \text{rot} \Psi \vec{a} - \Psi \vec{a} \wedge \text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \text{rot} (\Psi \vec{I}_m) \cdot \vec{a} \cdot dv &= \vec{a} \int_{(V)} \text{rot} (\Psi \vec{I}_m) \cdot dv = - \vec{a} \int_{S_1 + \dots + S_n + \Sigma} (\Psi \vec{n} \wedge \vec{I}_m) \cdot dS \\ \int_{(V)} \text{div} [\vec{E} (\vec{a} \cdot \text{grad} \Psi)] \cdot dv &= - \int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n + \Sigma} \vec{E} (\vec{a} \cdot \text{grad} \Psi) \cdot \vec{n} \cdot dS \\ &= - \vec{a} \int_{S_1 + \dots + S_n + \Sigma} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \cdot \text{grad} \Psi \cdot dS \quad (4-10) \end{aligned}$$

$$(\vec{E} \wedge \text{rot} \Psi \vec{a}) \cdot \vec{n} = (\vec{n} \wedge \vec{E}) \cdot \text{rot} \Psi \vec{a}$$

$$\text{rot} \Psi \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Psi \cdot a_1 & \Psi \cdot a_2 & \Psi \cdot a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \text{grad} \Psi \wedge \vec{a}$$

$$(\vec{n} \wedge \vec{E}) \cdot \text{rot} \Psi \vec{a} = (\vec{n} \wedge \vec{E}) \cdot (\text{grad} \Psi \wedge \vec{a}) = [(\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \text{grad} \Psi] \cdot \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} (\Psi \vec{a} \wedge \text{rot} \vec{E}) &= (\vec{E} \wedge \text{rot} \Psi \vec{a}) \cdot \vec{n} \quad (4-11) \\ \vec{n} (\Psi \vec{a} \wedge \text{rot} \vec{E}) &= [\Psi \vec{a} \wedge (-\vec{j}_m - j\omega\mu \vec{H})] \cdot \vec{n} \quad \text{en utilisant les équations (1-1)} \\ &= -j\omega\mu \Psi (\vec{a} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} - \Psi (\vec{a} \wedge \vec{I}_m) \cdot \vec{n} \\ &= -j\omega\mu \Psi (\vec{n} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{a} + \Psi (\vec{n} \wedge \vec{I}_m) \cdot \vec{a} \quad (4-12) \end{aligned}$$

on porte (4-9), (4-10), (4-11) et (4-12) dans (4-8), on obtient

$$\vec{a} \int_{(V)} (j\omega\mu \Psi \vec{I}_m + \vec{I}_m \wedge \text{grad} \Psi - \frac{\rho}{\epsilon} \text{grad} \Psi) \cdot dv = \int_{S_1 + \dots + S_n + \Sigma} \{ \Psi (\vec{n} \wedge \vec{I}_m) + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \cdot \text{grad} \Psi + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \text{grad} \Psi - j\omega\mu (\vec{n} \wedge \vec{H}) - \Psi (\vec{n} \wedge \vec{I}_m) \} \cdot dS$$

\vec{a} étant un vecteur arbitraire mais constant, on obtient quelque soit \vec{a} ;

$$\int_{(V)} \left\{ -j\omega\mu \Psi (\vec{n} \wedge \vec{H}) + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \text{grad} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \cdot \text{grad} \Psi \right\} \cdot dS = \int_{(V)} \left\{ j\omega\mu \Psi \vec{I}_m + \vec{I}_m \wedge \text{grad} \Psi - \frac{\rho}{\epsilon} \text{grad} \Psi \right\} \cdot dv - \int_{(V)} \left\{ -j\omega\mu \Psi (\vec{n} \wedge \vec{H}) + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \text{grad} \Psi + [(\vec{n} \cdot \vec{E}) \cdot \text{grad} \Psi] \right\} \cdot dS$$

La normale à (Σ) étant dirigée vers l'extérieur de celle-ci, elle sera définie par $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$

$$\text{grad} \Psi = \frac{d\Psi}{dr} \cdot \text{grad} r = \frac{d\Psi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{d\Psi}{dr} \cdot \vec{n}$$

A la surface de la sphère, on aura :

$$\text{grad} \Psi = \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right)_{r=r_0} \cdot \vec{n} = - \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \cdot \frac{e^{-jkr_0}}{r_0} \cdot \vec{n}$$

Un élément $dS_{(\Sigma)}$ est vu du point P sous un angle solide :

$$d\Omega = \frac{r_0}{r_0^3} \cdot \vec{r}_0 \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{r_0}{r_0^2} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{dS}{r_0^2}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{(\Sigma)} \left\{ -j\omega\mu \Psi (\vec{n} \wedge \vec{H}) + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{\text{grad}} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{\text{grad}} \Psi \right\} \cdot dS = \\ & \iint_{(\Sigma)} \left\{ -j\omega\mu \frac{e^{-jk r_0}}{r_0} (\vec{n} \wedge \vec{H}) - (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \frac{e^{-jk r_0}}{r_0} \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \left(jk + \frac{1}{r_0} \right) \frac{e^{-jk r_0}}{r_0} \right\} r_0^2 \cdot d\Omega = \\ & -j r_0 \cdot e^{-jk r_0} \iint_{(\Sigma)} \left\{ \omega\mu (\vec{n} \wedge \vec{H}) + k \left[(\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} \right] \right\} d\Omega - \\ & e^{-jk r_0} \iint_{(\Sigma)} \left\{ (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} \right\} d\Omega = \\ & -j r_0 e^{-jk r_0} \iint_{(\Sigma)} \left(\omega\mu (\vec{n} \wedge \vec{H}) + k \vec{E} \right) d\Omega - e^{-jk r_0} \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\Omega = I \\ & \text{(puisque } (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{E} = \vec{E}) \end{aligned}$$

La valeur moyenne de \vec{E} sur la surface de la sphère (Σ) est :

$$\langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{4\pi r_0^2} \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} \frac{\vec{E} \cdot dS}{r_0^2} = \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\Omega$$

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\Omega = 4\pi \langle \vec{E} \rangle \quad \text{de même :}$$

$$\iint_{(\Sigma)} (\vec{n} \wedge \vec{H}) \cdot d\Omega = 4\pi \langle \vec{n} \wedge \vec{H} \rangle \quad \text{d'où}$$

$$I = -j 4\pi r_0 e^{-jk r_0} \left[\omega\mu \langle \vec{n} \wedge \vec{H} \rangle + k \langle \vec{E} \rangle \right] - 4\pi e^{-jk r_0} \langle \vec{E} \rangle$$

Lorsque $r_0 \rightarrow 0$, le 1er terme devient nul puisque par hypothèse \vec{E} et \vec{H} ont une valeur finie partout dans (V) , donc au voisinage de P , le volume (V') tend alors vers (V) .

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \langle \vec{E} \rangle = \vec{E}_P ; \quad \lim_{r_0 \rightarrow 0} \langle \vec{H} \rangle = \vec{H}_P ;$$

Donc $\lim_{r_0 \rightarrow 0} I = -4\pi \vec{E}_P$. D'où l'expression générale du champ électrique \vec{E} en un point

P du domaine (V) .

$$\begin{aligned} \vec{E}_P = & -\frac{1}{4\pi} \iiint_{(V)} (j\omega\mu \Psi \vec{I} + \vec{I}_m \wedge \vec{\text{grad}} \Psi - \frac{\rho}{\epsilon} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) \cdot dv \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} (-j\omega\mu \Psi (\vec{n} \wedge \vec{H}) + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{\text{grad}} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{\text{grad}} \Psi) \cdot dS \end{aligned}$$

(4 - 13)

b) Pour obtenir l'expression de \vec{H} au point P , on fait le même calcul que précédemment, en posant dans (4 - 1)

$$\begin{cases} \vec{G} = \Psi \vec{a} \\ \vec{F} = \vec{H} \end{cases}$$

on trouve

$$\vec{H}_p = -\frac{1}{4\pi} \iiint (j\omega\epsilon \Psi \vec{I}_m - \vec{I} \wedge \text{grad} \Psi - \frac{\rho_m}{\mu} \text{grad} \Psi) dv$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1 + \dots + S_n} \left\{ j\omega\epsilon (\vec{n} \wedge \vec{E}) \Psi + (\vec{n} \wedge \vec{H}) \wedge \text{grad} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \text{grad} \Psi \right\} \cdot dS$$

(4 - 14)

\vec{E}_p et \vec{H}_p s'expriment en fonction

- des sources distribuées dans la région (V) (intégrales de volume)
- des champs existant sur les surfaces (S₁), ..., (S_n) limitant le domaine (V) (intégrales de surfaces). Ce sont des champs dus à des sources extérieures à (V).

Chacun des termes de l'intégrale de surface peut être mis en corrélation avec le terme correspondant de l'intégrale de volume.

Ainsi à $\vec{I}, \vec{I}_m, \rho, \rho_m$ on fera correspondre respectivement, $\vec{K} = (\vec{n}' \wedge \vec{H})$, $\vec{K}_m = -(\vec{n} \wedge \vec{E})$, $\gamma = \epsilon (\vec{n} \cdot \vec{E})$, $\gamma_m = \mu (\vec{n} \cdot \vec{H})$ et inversement.

Moyennant cette correspondance, on passera d'une distribution volumique à une distribution superficielle ou réciproquement.

5) Conditions de rayonnement

Considérons, maintenant, le cas où

- (V) est un domaine illimité
- les sources de champ se trouvent limitées à un volume (D) compris

dans (V)

Soit, une sphère de rayon R suffisamment grand, centrée au point P considéré et entourant toutes les sources de champ.

Les relations de \vec{E}_p et \vec{H}_p se réduisent, alors, à une intégrale de volume et à une intégrale de surface qui est ;

$$I = \frac{1}{4\pi R} \iint_{S(R)} \left\{ -j\omega\mu \Psi (\vec{n} \wedge \vec{H}) + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \text{grad} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \text{grad} \Psi \right\} \cdot dS$$

(dans le cas de \vec{E}_p)

S (R) étant la surface de la sphère dont la normale \vec{R}_1 est dirigée extérieurement à la sphère.

$$\vec{R}_1 = \frac{\vec{r}}{r} = -\vec{n}$$

$$\text{grad} \Psi = \frac{d\Psi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{d\Psi}{dr} \cdot \vec{R}_1 = -\left(jk + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \vec{R}_1$$

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S(R)} \left\{ j\omega\mu \Upsilon (\vec{R}_1 \wedge \vec{H}) - (jk + \frac{1}{R}) \Upsilon [(-\vec{R}_1 \wedge \vec{E}) \wedge \vec{R}_1] - (jk + \frac{1}{R}) \Upsilon (-\vec{R}_1 \cdot \vec{E}) \vec{R}_1 \right\} ds \\
 &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S(R)} \left\{ j\omega\mu \Upsilon (\vec{R}_1 \wedge \vec{H}) + (jk + \frac{1}{R}) \left[(\vec{R}_1 \wedge \vec{E}) \wedge \vec{R}_1 + (\vec{R}_1 \cdot \vec{E}) \vec{R}_1 \right] \Upsilon \right\} ds \\
 &\cdot (\vec{R}_1 \wedge \vec{E}) \wedge \vec{R}_1 + (\vec{R}_1 \cdot \vec{E}) \vec{R}_1 = -\vec{R}_1 \wedge (\vec{R}_1 \wedge \vec{E}) + (\vec{R}_1 \cdot \vec{E}) \vec{R}_1 = (\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_1) \vec{E} = \vec{E} \\
 &\cdot \frac{k}{\omega\mu} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon}\mu}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \\
 I &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S(R)} \left\{ j\omega\mu \left[(\vec{R}_1 \wedge \vec{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E} \right] + \frac{\vec{E}}{R} \right\} \cdot \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot dS \\
 S(R) &= 4\pi R^2
 \end{aligned}$$

Pour que $I = 0$ lorsque $R \rightarrow \infty$, il faut que :

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \cdot \vec{E} \right\} \text{ soit finie} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[(\vec{R}_1 \wedge \vec{H}) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E} \right] \right\} = 0 \end{cases} \quad (5-1)$$

De même, dans le cas de \vec{H}_p , pour que l'intégrale de surface étendue à $S(R)$ lorsque $R \rightarrow \infty$, soit nulle, il faut que

$$\begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \cdot \vec{H} \right\} \text{ soit finie} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} (\vec{R}_1 \wedge \vec{E}) - \vec{H} \right] \right\} = 0 \end{cases} \quad (5-2)$$

Les conditions (5-2) et (5-1) exigent qu'à grande distance, \vec{E}_p et \vec{H}_p décroissent aussi rapidement $\frac{1}{R}$.

(5-1) et (5-2) sont appelées conditions de rayonnement du champ électromagnétique.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 &\vec{R}_1 \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[(\vec{R}_1 \wedge \vec{H}) + \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{E} \right] \right\} = 0 \\
 \Rightarrow &\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[\vec{R}_1 \cdot (\vec{R}_1 \wedge \vec{H}) + \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{E} \cdot \vec{R}_1 \right] \right\} = 0 \\
 &\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R (\vec{E} \cdot \vec{R}_1) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

\vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation \vec{R}_1 lorsque $R \rightarrow \infty$ (en termes d'ordre $\frac{1}{R}$)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (\vec{R}_1 \wedge \vec{E}) - \lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot \vec{H} \right] \right\} = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \{ R \cdot \vec{H} \} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \cdot (\vec{R}_1 \wedge \vec{E}) \right\}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \cdot \vec{H} = \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \cdot (\vec{R}_1 \wedge R \cdot \vec{E}) \right\}$$

\vec{H} est perpendiculaire à \vec{R}_1 et \vec{E} en termes d'ordre $\frac{1}{R}$. \vec{E} et \vec{H} se propagent comme une onde plane.

Si les champs issus des sources se trouvant dans le volume (D) satisfont aux conditions de rayonnement, on aura au point P ;

$$\vec{E}_p = - \frac{1}{4\pi} \iiint_{(v)} \left\{ j\omega \mu \Psi \vec{I} + \vec{I}_m \wedge \text{grad } \Psi - \frac{\rho}{\epsilon} \cdot \text{grad } \Psi \right\} dv$$

$$\vec{H}_p = - \frac{1}{4\pi} \iiint_{(v)} \left\{ j\omega \epsilon \Psi \vec{I}_m - \vec{I} \wedge \text{grad } \Psi - \frac{\rho_m}{\mu} \text{grad } \Psi \right\} dv$$

(5 - 3)

6) Champs dans une région limitée par des surfaces d'un milieu de conductivité infinie

Considérons le cas pour lequel la région (V) est limitée par des surfaces (Si) de corps très bons conducteurs (conductivité $\sigma = \infty$) et par la surface S_∞ .

On suppose que les champs à l'infini satisfont aux conditions de radiation (5 - 1) et (5 - 2), dans ce cas, les intégrales de surfaces étendues à S_∞ disparaissent et nous n'avons seulement à considérer que les intégrales étendues aux surfaces des conducteurs. Sur celles-ci, les conditions aux limites sont :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = 0 \qquad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad \vec{n} \wedge \vec{H} = \vec{K}$$

(ρ et \vec{K} étant les distributions superficielles de charges et de courants électriques)

D'où

$$\vec{E}_p = - \frac{1}{4\pi} \left\{ \iiint_{(v)} \left\{ j\omega \mu \vec{I} \cdot \frac{e^{-jhr}}{r} - \frac{\rho}{\epsilon} \text{grad } \frac{e^{-jhr}}{r} + \vec{I}_m \wedge \text{grad } \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} dv \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_i)} \left\{ j\omega \mu \vec{K} \cdot \frac{e^{-jhr}}{r} - \frac{\rho}{\epsilon} \text{grad } \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} dS \right\}$$

(6 - 1)

$$\vec{H}_p = - \frac{1}{4\pi} \left\{ \iiint_{(v)} \left\{ j\omega \epsilon \vec{I}_m \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{\rho_m}{\mu} \text{grad } \frac{e^{-jkr}}{r} - \vec{I} \wedge \text{grad } \frac{e^{-jkr}}{r} \right\} dv \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_i)} \left\{ \vec{K} \wedge \text{grad } \frac{e^{-jhr}}{r} \right\} dS \right\}$$

7) Principe de HUYGENS

Problème :

Etant donné les valeurs de \vec{E} et \vec{H} sur une surface équiphasse (S), comment pouvons nous déterminer les vecteurs champs en un point donné?.

La solution de ce problème est donné par (4 - 13) et (4 - 14) dans lesquelles les intégrales de volume disparaissent puisque les sources de champ se trouvant à l'extérieur de la région considérée.

$$\begin{cases} \vec{E}_p = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \left[-j\omega\mu (\vec{n} \wedge \vec{H}) \Psi + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{\text{grad}} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{\text{grad}} \Psi \right] ds \\ \vec{H}_p = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \left[j\omega\varepsilon (\vec{n} \wedge \vec{E}) \Psi + (\vec{n} \wedge \vec{H}) \wedge \vec{\text{grad}} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \vec{\text{grad}} \Psi \right] ds \end{cases} \quad (7 - 1)$$

(la région considérée est limitée par (S) et S_∞ , les conditions de rayonnement étant supposées réalisées).

Nous allons montrer que (7 - 1) représente l'expression analytique du principe de HUYGENS - FRESNEL, dont l'énoncé est le suivant :

LES VIBRATIONS électromagnétiques qui se propagent à l'extérieur d'une surface fermée (S) à l'intérieur de laquelle se trouve une source ponctuelle A sont identiques à celles que l'on obtiendrait en remplaçant la source A par des sources dérivées réparties sur toute la surface (S), l'amplitude et la phase d'une source dérivée M étant celles de la vibration produite en M par la source.

Pour cela, raisonnons sur \vec{E}_p (le raisonnement fait sur \vec{H}_p étant identique à celui fait sur \vec{E}_p)

$$\begin{aligned} & -j\omega\mu (\vec{n} \wedge \vec{H}) \Psi + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{\text{grad}} \Psi + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{\text{grad}} \Psi = \\ & \Psi \vec{n} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) \vec{E} + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{\text{grad}} \Psi \end{aligned} \quad (7 - 2)$$

(On suppose que les sources de champ sont purement électriques c'est à dire $\vec{I}_m = 0$;
 $\vec{J}_m = 0 \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$)

$$(\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) \vec{E} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \cdot \vec{E} \quad (7 - 3)$$

$$\Psi \vec{n} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} (\Psi \vec{n} \cdot \vec{E}) - (\Psi \vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n} \Psi - \vec{E} \wedge \vec{\text{rot}} \Psi \vec{n} \quad (7 - 4)$$

$$\vec{\text{rot}} \Psi \vec{n} = \Psi \vec{\text{rot}} \vec{n} - \vec{n} \wedge \vec{\text{grad}} \Psi$$

$$\vec{E} \wedge \vec{\text{rot}} \Psi \vec{n} = \vec{E} \wedge \Psi \vec{\text{rot}} \vec{n} - \vec{E} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\text{grad}} \Psi) \quad (7 - 5)$$

$$\begin{aligned} (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n} \Psi &= (\Psi E_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} + \Psi E_2 \frac{\partial n_2}{\partial y} + \Psi E_3 \frac{\partial n_3}{\partial z}) \vec{i} + \dots \\ &+ n_1 (E_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + E_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + E_3 \frac{\partial \Psi}{\partial z}) \vec{i} + \dots \\ &= (\Psi \vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n} + \vec{n} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) \end{aligned} \quad (7 - 6)$$

$$\begin{aligned} (\Psi \vec{n} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{E} &= \Psi (\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} E_1) \vec{i} + \Psi (\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} E_2) \vec{j} + \Psi (\vec{n} \cdot \vec{\text{grad}} E_3) \vec{k} \\ &= \Psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} \end{aligned} \quad (7 - 7)$$

$$- (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{\text{grad}} \Psi = - \vec{E} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\text{grad}} \Psi) \quad (7 - 8)$$

On porte (7 - 7), (7 - 6) et (7 - 5) dans (7 - 4), puis le résultat obtenu,

(7 - 8) et (7 - 3) dans (7 - 2), on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} (\Psi \vec{n} \cdot \vec{E}) - \Psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - (\Psi \vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n} - \vec{n} (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) - \vec{E} \wedge \Psi \vec{\text{rot}} \vec{n} \\ + \vec{E} (\vec{n} \wedge \vec{\text{grad}} \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial n} \vec{E} - \vec{E} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\text{grad}} \Psi) = \\ \vec{\text{grad}} (\Psi \vec{n} \cdot \vec{E}) + \vec{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{n} (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi) - \vec{E} \wedge \Psi \vec{\text{rot}} \vec{n} \\ - (\Psi \vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n}. \end{aligned}$$

$\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}} \Psi = \vec{E} \cdot \frac{d\Psi}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = (\vec{E} \cdot \frac{\vec{r}}{r}) \frac{d\Psi}{dr} = 0$ (puisque (S) est une surface équiphasse par hypothèse, donc \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation $(\frac{\vec{r}}{r})$)

$$\iint_{(S)} \vec{\text{grad}} (\Psi \vec{n} \cdot \vec{E}) \, dS = \oint_{(\Gamma)} \Psi \vec{E} \wedge \vec{c} \, ds$$

$$\vec{E} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{n} \begin{cases} E_2 (\frac{\partial n_2}{\partial x} - \frac{\partial n_1}{\partial y}) - E_3 (\frac{\partial n_1}{\partial z} - \frac{\partial n_2}{\partial x}) \\ E_3 (\frac{\partial n_2}{\partial y} - \frac{\partial n_1}{\partial z}) - E_1 (\frac{\partial n_1}{\partial x} - \frac{\partial n_2}{\partial y}) \\ E_1 (\frac{\partial n_1}{\partial z} - \frac{\partial n_2}{\partial x}) - E_2 (\frac{\partial n_2}{\partial y} - \frac{\partial n_1}{\partial z}) \end{cases}$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n} \begin{cases} E_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} + E_2 \frac{\partial n_1}{\partial y} + E_3 \frac{\partial n_1}{\partial z} \\ E_1 \frac{\partial n_2}{\partial x} + E_2 \frac{\partial n_2}{\partial y} + E_3 \frac{\partial n_2}{\partial z} \\ E_1 \frac{\partial n_3}{\partial x} + E_2 \frac{\partial n_3}{\partial y} + E_3 \frac{\partial n_3}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Psi [\vec{E} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{n} + (\vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n}] = \Psi \left[(E_1 \frac{\partial n_1}{\partial x} + E_2 \frac{\partial n_2}{\partial x} + E_3 \frac{\partial n_3}{\partial x}) \vec{i} + (E_1 \frac{\partial n_1}{\partial y} + E_2 \frac{\partial n_2}{\partial y} + E_3 \frac{\partial n_3}{\partial y}) \vec{j} + (E_1 \frac{\partial n_1}{\partial z} + E_2 \frac{\partial n_2}{\partial z} + E_3 \frac{\partial n_3}{\partial z}) \vec{k} \right]$$

$$= (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial x}) \vec{i} + (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial y}) \vec{j} + (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial z}) \vec{k}$$

$$\Psi \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\Psi \vec{E} \cdot \vec{n}) - \vec{n} \cdot \frac{\partial (\Psi \vec{E})}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \Psi \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial x} \, dS &= \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi \vec{E} \cdot \vec{n}) \, dS - \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi \vec{E} \cdot \vec{n}) \, dS \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_{(S)} \Psi \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS - \iiint_{(V)} \text{div} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi \vec{E}) \, dv \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \iiint_{(V)} \text{div} (\Psi \vec{E}) \, dv - \iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial x} (\text{div} (\Psi \vec{E})) \, dv \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \iiint_{(V)} \text{div} (\Psi \vec{E}) \, dv - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \iiint_{(V)} \text{div} (\Psi \vec{E}) \, dv = 0 \end{aligned}$$

De même, on peut montrer que :

$$\iint_{(S)} \Psi \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial y} \, dS = 0 \text{ et } \iint_{(S)} \Psi \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial z} \, dS = 0$$

On déduit que :

$$\iint_{(S)} \left[\psi \vec{E} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{n} + (\psi \vec{E} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{n} \right] dS = 0$$

D'où

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} \right) \cdot dS + \frac{1}{4\pi} \oint_{(\Gamma)} \psi \vec{E} \cdot \wedge \vec{G} ds \quad (7-9)$$

Or (S) est une surface fermée, (Γ) est, alors, un contour nul

donc :

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \left(\psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \cdot dS \quad (7-10)$$

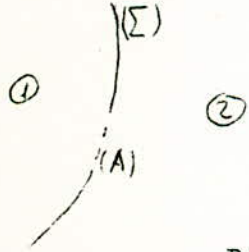
(7-10) est la formule de Kirchhoff, elle résoud le problème de diffraction optique. Elle est l'expression analytique du principe de Huygens.

8)-Les formules de KOTTLER

Dans le cas d'une ouverture rayonnante (telle que celle d'une antenne parabolique, d'un cornet, d'une fente, etc...) les surfaces d'ondes obtenues sont des surfaces non fermées limitées par un contour. La formule de Kirchhoff est alors insuffisante pour la description du phénomène de diffraction. Aux expressions de E_p et H_p de (7-1) vont s'ajouter des termes correctifs.

En effet, l'ouverture rayonnante peut être considérée comme appartenant à une surface équiphasse (Σ) partageant l'espace en deux zones.

- L'une (1) dans laquelle sont situées les sources de champ qui engendrent la surface d'onde (Σ)



- l'autre (2) dans laquelle on veut calculer le champ à partir de la distribution de champ sur (Σ)

Cette distribution peut être définie de la façon suivante

- $\vec{E} \neq 0, \vec{H} \neq 0$ sur l'ouverture de surface (A)
- $\vec{E} = 0, \vec{H} = 0$ partout ailleurs sur (Σ) (zone d'ombre).

D'après le principe de Huygens, chaque point du front d'onde (Σ) peut être considéré comme une source secondaire d'onde sphérique. Chacune de ces ondes secondaires se combine aux autres pour donner un nouveau front d'onde.

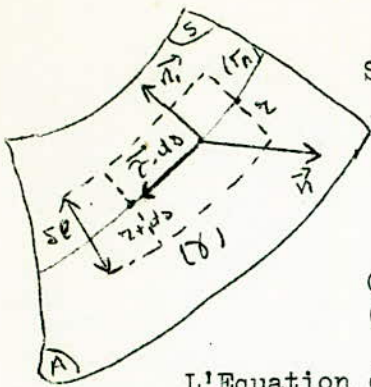
Donc sur (Σ), on pourra définir une distribution de courants et charges équivalente aux champs \vec{E} et \vec{H} sur cette surface.

\vec{E} et \vec{H} satisfont aux équations de Maxwell, donc la distribution superficielle de courants et charges doit satisfaire à l'équation de continuité.

Sur (A), la distribution superficielle de courant est \vec{K}

Dans la zone d'ombre (S) ; $\vec{K} = 0$.

(A) est limitée par un contour (ΓA), le passage de (A) à la zone d'ombre se fait de façon discontinue. Pour qu'il y ait compatibilité avec l'équation de continuité, il faut introduire une distribution linéaire de charge le long de (ΓA)



Soit \vec{C} , un vecteur unitaire le long de (Γ_A)
 \vec{n}_1 , un vecteur normal à \vec{C} dans le plan tangent à (Σ)
 \vec{n} , la normale à (Σ)
 ζ , la densité linéaire de charge le long de (Γ_A)

On considère un élément de surface de (Σ) à cheval sur (Γ_A) et de cotés ζl et ds . (ζl est normal à Γ).

L'Equation de continuité est donné par :

$$\oint_{(\delta)} \vec{K} \cdot \vec{n}_1 \cdot ds = - \frac{\partial Q}{\partial t}$$

\vec{n}_1 est la normale orientée extérieurement au contour (γ) et dans le plan tangent à (Σ) . (γ) est le contour limitant la surface élémentaire. Q est la charge portée par celle-ci.

$$\oint_{(\delta)} \vec{K} \cdot \vec{n}_1 \cdot ds = \vec{K}(r+ds) \cdot \vec{C} \frac{\zeta l}{2} - \vec{K} \cdot \vec{n}_1 \cdot ds - \vec{K}(r) \cdot \vec{C} \cdot \frac{\zeta l}{2} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta A} \zeta \cdot ds = - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot ds$$

Lorsque $\zeta l \rightarrow 0$, on obtient, à la limite :

$$- \vec{K} \cdot \vec{n}_1 \cdot ds = - \frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot ds$$

ou $\vec{K} \cdot \vec{n}_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$

Dans le cas d'un champ périodique : $\zeta = \frac{1}{\partial \omega} \vec{K} \cdot \vec{n}_1$ (8 - 1)

Dans le cas de courants et charges électriques

$$\vec{K}_e = \vec{n} \wedge \vec{H}$$

$$\zeta_e = \frac{1}{\partial \omega} (\vec{n} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n}_1 = \frac{1}{\partial \omega} (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}) \cdot \vec{H} = - \frac{1}{\partial \omega} \vec{C} \cdot \vec{H} \quad (8-2)$$

Dans le cas de courants et charges magnétiques

$$\vec{K}_m = - (\vec{n} \wedge \vec{E})$$

$$\zeta_m = - \frac{1}{\partial \omega} (\vec{n} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{n}_1 = \frac{1}{\partial \omega} \vec{C} \cdot \vec{E} \quad (8 - 3)$$

Dans le chapitre 4, on a vu que l'on peut passer d'une distribution volumique à une distribution superficielle.

Dans la formule (4 - 13) du champ électrique \vec{E}_p , on remplace

$$\begin{array}{l} (V) \text{ par } (A) \\ \vec{I} \text{ par } \vec{K} = \vec{n} \wedge \vec{H} \\ \vec{I}_m \text{ par } \vec{K}_m = - (\vec{n} \wedge \vec{E}) \\ \rho \text{ par } \zeta = \vec{C} \cdot \vec{E} \\ (A) \text{ par } (\Gamma_A) \end{array}$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{E}) = \frac{\zeta}{\epsilon} \text{ par } \frac{\zeta}{\epsilon} = - \frac{1}{j\omega\epsilon} (\vec{C} \cdot \vec{H})$$

(Il n'y a pas de distribution linéaire de courants électriques et magnétiques

D'où

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi} \iint_{(A)} \left\{ -j\omega\mu (\vec{n} \wedge \vec{H}) \Upsilon + (\vec{n} \wedge \vec{E}) \wedge \vec{grad} \Upsilon + (\vec{n} \cdot \vec{E}) \vec{grad} \Upsilon \right\} ds$$

$$- \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_{(\Gamma_A)} (\vec{C} \cdot \vec{H}) \vec{grad} \Upsilon ds \quad (8-4)$$

En opérant de même pour \vec{H}_p (emploi de (4-14)), on trouve;

$$\vec{H}_p = \frac{1}{4\pi} \iint_{(A)} \left\{ j\omega\epsilon (\vec{n} \wedge \vec{E}) \Upsilon + (\vec{n} \wedge \vec{H}) \wedge \vec{grad} \Upsilon + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \vec{grad} \Upsilon \right\} ds$$

$$+ \frac{1}{4\pi j\omega\mu} \oint_{(\Gamma_A)} (\vec{C} \cdot \vec{E}) \vec{grad} \Upsilon ds \quad (8-5)$$

Le sens de parcours de (Γ_A) étant tel que la normale à (A) se trouve à gauche (8-4) et (8-5) constituent les formules de Kottler, et généralisent la formule de Kirchhoff, en effet (8-4) peut s'écrire en employant (7-9)

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(A)} \left(\Upsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \Upsilon}{\partial n} \right) ds + \frac{1}{4\pi} \oint_{(\Gamma_A)} \Upsilon \vec{E} \wedge \vec{C} ds - \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon} \oint_{(\Gamma_A)} (\vec{C} \cdot \vec{H}) \vec{grad} \Upsilon ds$$

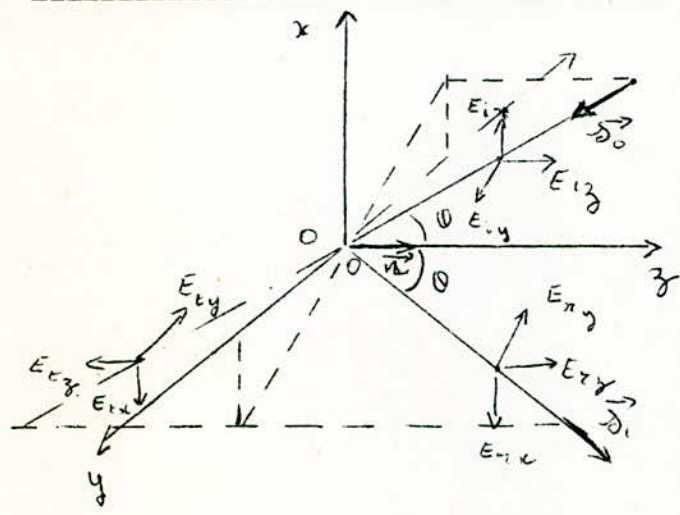
(8-6)

Remarque :

La région (2) de l'espace est limitée par la surface indéfinie (Σ) et (S_∞)

Les conditions de rayonnement étant supposées réalisées et le champ sur la surface d'ombre (S) étant nul, le champ en un point P de l'espace (2) résulte seulement de la distribution de champ à l'ouverture (A) .

9) - Reflection d'une onde plane par un plan conducteur indéfini



Soit une onde plane se propageant dans la direction définie par \vec{k}_0

Le champ initial est alors :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - k \vec{D}_0 \cdot \vec{r})}$$

(\vec{r} définit la distance de l'origine 0 au point considéré. $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$)

Introduisons un plan conducteur indéfini qui coïncidera avec le plan $x o y$.

La normale \vec{n} est orientée dans le sens des z positifs.

Le champ de dispersion \vec{E}_t dans la zone des z négatifs est tel que le champ résultant soit nul dans cette zone, d'où

$$\vec{E}_t = - \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - k \vec{D}_0 \cdot \vec{r})}$$

Dans la zone des z positifs, le champ de dispersion \vec{E}_r est l'image de \vec{E}_t

soit :

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 \cdot e^{j(\omega t - k \vec{s}_0 \cdot \vec{r})}$$

On doit, donc, avoir les propriétés suivantes :

- leurs modules égaux $|\vec{E}_R| = |\vec{E}_t|$ ou $|\vec{E}_0| = |\vec{E}_1|$ (9 - 1)

- leurs composantes parallèles au plan xoy égales en grandeur et

direction

$$\vec{n} \wedge \vec{E}_1 = \vec{n} \wedge (-\vec{E}_0) = -\vec{n} \wedge \vec{E}_0$$

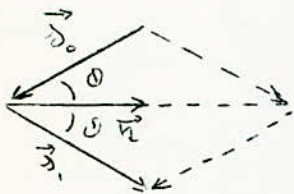
ou $\vec{n} \wedge \vec{E}_R = \vec{n} \wedge \vec{E}_t = -\vec{n} \wedge \vec{E}_1$ (9 - 2)

- leurs composantes normales au plan xoy, égales en grandeur et opposées en direction

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_1 = -\vec{n} \cdot (-\vec{E}_0) = \vec{n} \cdot \vec{E}_0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_R = -\vec{n} \cdot \vec{E}_t = \vec{n} \cdot \vec{E}_1$$
 (9 - 3)

D'après les lois de Descartes, $\vec{s}_0, \vec{n}, \vec{s}_1$, sont dans un même plan



$$\vec{s}_0 \cdot \vec{n} = -\vec{s}_1 \cdot \vec{n} \quad (9 - 4)$$

$$\vec{s}_1 = 2\vec{n} \cos \theta - (-\vec{s}_0)$$

$$\vec{s}_1 = \vec{s}_0 - 2(\vec{n} \cdot \vec{s}_0) \vec{n} \quad (9 - 5)$$

$$\vec{s}_0 = \vec{s}_1 - 2(\vec{n} \cdot \vec{s}_1) \vec{n} \quad (9 - 6)$$

Les vecteurs champs magnétique sont donnés par :

$$\vec{H}_i = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} (\vec{s}_0 \wedge \vec{E}_1)$$

$$\vec{H}_R = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} (\vec{s}_1 \wedge \vec{E}_R)$$

Le champ magnétique total est

$$\vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_R$$

La densité de courant induite sur le plan réflecteur est :

$$\vec{K} = \vec{n} \wedge \vec{H} = \vec{n} \wedge (\vec{H}_i + \vec{H}_R)$$

$$\vec{n} \wedge \vec{H}_i = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} [\vec{n} \wedge (\vec{s}_0 \wedge \vec{E}_1)]$$

$$= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} [(\vec{n} \cdot \vec{E}_1) \vec{s}_0 - (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) \vec{E}_1]$$

$$\vec{n} \wedge \vec{H}_R = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} [\vec{n} \wedge (\vec{s}_1 \wedge \vec{E}_R)]$$

$$= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} [(\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{s}_1 - (\vec{n} \cdot \vec{s}_1) \vec{E}_R]$$

$$= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} [(\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{s}_0 - 2(\vec{n} \cdot \vec{s}_0) (\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) \vec{E}_R]$$

(emploi de (9 - 4) et (9 - 5))

$$\vec{n} \wedge \vec{H}_R = \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} [(\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{s}_0 - 2(\vec{n} \cdot \vec{s}_0) (\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{n} + (\vec{n} \wedge \vec{E}_R) \vec{n} \right\}]$$

$$= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{s}_0 - (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) (\vec{n} \cdot \vec{E}_R) \vec{n} + [(\vec{n} \wedge \vec{E}_R) \wedge \vec{n}] (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) \right]$$

On utilise ensuite (9 - 3) et (9 - 2)

$$\begin{aligned} \vec{n} \wedge \vec{H}_R &= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(\vec{n} \cdot \vec{E}_1) \vec{s}_0 - (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) (\vec{n} \cdot \vec{E}_1) \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) \{ (\vec{n} \wedge \vec{E}_1) \wedge \vec{n} \} \right] \\ &= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(\vec{n} \cdot \vec{E}_1) \vec{s}_0 - (\vec{n} \cdot \vec{s}_0) \vec{E}_1 \right] \Rightarrow \\ &\qquad \vec{n} \wedge \vec{H}_1 = \vec{n} \wedge \vec{H}_R \quad (9 - 8) \end{aligned}$$

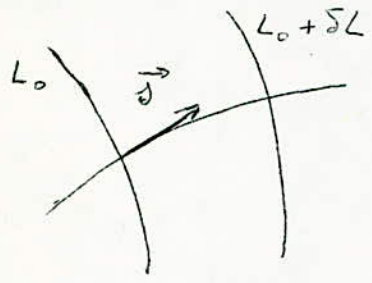
d'où

$$\begin{aligned} \vec{k} &= 2 (\vec{n} \wedge \vec{H}_1) = 2 \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\vec{n} \wedge (\vec{s}_0 \wedge \vec{E}_1) \right] \\ &= 2 (\vec{n} \wedge \vec{H}_R) = 2 \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\vec{n} \wedge (\vec{s}_1 \wedge \vec{E}_R) \right] \end{aligned} \quad (9-9)$$

10) Pincipe de superposition

Soit une suite de vecteurs champ \vec{E}_1 et \vec{H}_1 , \vec{E}_2 et \vec{H}_2 , ... issus de distributions de charges et courants respectivement ρ_1 et \vec{I}_1 , ρ_2 et \vec{I}_2 , ... si \vec{E}_n , \vec{H}_n , ρ_n et \vec{I}_n ($n = 1, 2, \dots$) satisfont aux équations de Maxwell, alors, \vec{E}_1 et $\vec{E}_2 + \dots$; \vec{H}_1 et $\vec{H}_2 + \dots$; $\rho_1 + \rho_2 + \dots$; $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots$ sont aussi solutions de ces équations.

11) Indice de réfraction d'un milieu



Soit à l'instant t_0 , un front d'onde de surface $L(x, y, z) = L_0$

Puis, à l'instant $t_0 + \delta t$, le nouveau front d'onde de surface $L(x, y, z) = L_0 + \delta L$

La propagation se fait le long de rayons associés aux fronts d'ondes. Cette famille de rayons définit en chaque point la direction \vec{s} du vecteur de Poynting.

La variation phase entre les deux surfaces successives est :

$$\delta \varphi = k \cdot \delta L = \frac{\omega}{c} \cdot \delta L$$

Pendant le temps δt , cette variation de phase vaut aussi :

$$\delta \varphi = \omega \delta t$$

Si δs_n est la distance entre les deux surfaces d'ondes et v la vitesse de propagation :

$$\begin{aligned} \delta t &= \frac{\delta s_n}{v} \\ \frac{\omega}{c} \delta L &= \frac{\omega}{v} \cdot \delta s_n \end{aligned}$$

Or $\delta L = \text{grad } L \cdot \vec{\delta s}_n = |\text{grad } L| \cdot \delta s_n$ (le déplacement se fait normalement à $L(x, y, z)$)
d'où $|\text{grad } L| = \frac{c}{v} = n \quad (11 - 1)$

n est l'indice de réfraction du milieu considéré.

La direction du vecteur de Poynting est donnée par :

$$\vec{s} = \frac{\text{grad } L}{|\text{grad } L|} \quad \text{ou} \quad \vec{s} = \frac{\text{grad } L}{n} \quad (11 - 2)$$

12-Rayonnement à grande distance du paraboloïde

De façon générale, le champ est donné par ;

$$\begin{cases} \vec{E} = - \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \{ j\omega \epsilon (\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \Psi - (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) \text{grad } \Psi \} dS - \frac{1}{j2\pi\omega\epsilon} \int_{(\Gamma)} (\vec{z} \cdot \vec{H}_0) \text{grad } \Psi ds \\ \vec{H} = \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} (\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \wedge \text{grad } \Psi dS \end{cases} \quad (12-1)$$

Le sens de parcours de (Γ) est tel que la normale à (S) se trouve à gauche. Le point P où l'on calcule le champ étant pris comme origine pour les opérations gradient, divergence, etc..., on a ;

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} (\vec{z} \cdot \vec{H}_0) \text{grad } \Psi ds &= i \oint_{(\Gamma)} \vec{z} \cdot \vec{H}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x} ds + j \oint_{(\Gamma)} \vec{z} \cdot \vec{H}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y} ds + k \oint_{(\Gamma)} \vec{z} \cdot \vec{H}_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z} ds \\ &= -i \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{H}_0 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}) \vec{n} dS - j \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{H}_0 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y}) \vec{n} dS - k \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{H}_0 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z}) \vec{n} dS \\ \text{rot}(\vec{H}_0 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}) \vec{n} &= \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \text{rot} \vec{H}_0 - \vec{H}_0 \wedge \text{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} \vec{n} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} j\omega\epsilon (\vec{e} \cdot \vec{z}) - (\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}$$

On opère de même pour les composantes le long de Oy et Oz, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{j2\pi\omega\epsilon} \int_{(\Gamma)} (\vec{z} \cdot \vec{H}_0) \text{grad } \Psi ds &= \frac{1}{j2\pi\omega\epsilon} \left\{ \left[j\omega\epsilon (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) \text{grad } \Psi - [(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial x}] \vec{i} \right] \vec{i} \right. \\ &\quad \left. - [(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial y}] \vec{j} - [(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial z}] \vec{k} \right\} ds \\ &= - \frac{1}{2\pi} \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) \text{grad } \Psi - \frac{1}{j\omega\epsilon} [(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad}] \text{grad } \Psi \right\} dS \end{aligned}$$

En portant dans (12-1), E devient.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= - \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[j\omega\epsilon (\vec{n} \cdot \vec{E}_0) \Psi - \frac{1}{j\omega\epsilon} [(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad}] \text{grad } \Psi \right] dS \right. \\ &= \frac{1}{j2\pi\omega\epsilon} \int_{(S)} \left\{ [(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad}] \text{grad } \Psi + k^2 (\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \Psi \right\} dS \end{aligned} \quad (12-2)$$

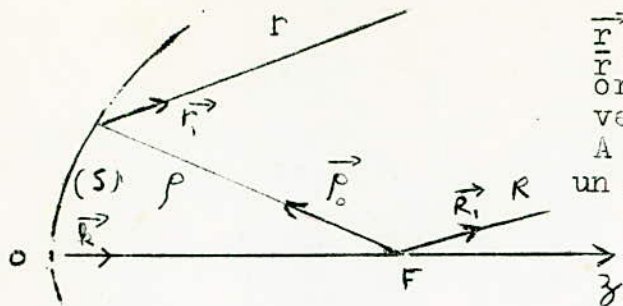
avec $\Psi = \frac{e^{-jkr}}{r}$ (r distance d'un élément dS au point considéré)
 et $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$

$$\begin{aligned} [(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad}] \text{grad } \Psi &= - \left(\frac{-k}{2} \text{grad} \right) \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \\ &= - \frac{1}{2} (K_1 \frac{\partial}{\partial x} + K_2 \frac{\partial}{\partial y} + K_3 \frac{\partial}{\partial z}) \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \left(jk + \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{i} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[-K_1 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} + K_1 3 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r^3} \cdot \frac{x^2}{r} - k^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot K_1 \frac{x^2}{r} + \right. \\ &\quad \left. K_2 3 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r^3} \cdot \frac{xy}{r} - K_2 k^2 \frac{e^{-jkr}}{r^3} \cdot \frac{xy}{r} + K_3 3 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r^3} \cdot \frac{xz}{r} - \right. \\ &\quad \left. K_3 k^2 \frac{e^{-jkr}}{r^3} \cdot \frac{xz}{r} \right] \vec{i} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left[3 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r^3} \left(\frac{x}{r} K_1 + \frac{y}{r} K_2 + \frac{z}{r} K_3 \right) - K_1 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} - \right. \\ &\quad \left. k^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot \frac{x}{r} \left(\frac{x}{r} K_1 + \frac{y}{r} K_2 + \frac{z}{r} K_3 \right) \right] \vec{i} + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-jkr}}{r} \left[- \frac{K}{2} \frac{1}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) + \frac{3}{r} \left(jk + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{r}}{2r} \right) \frac{\vec{r}}{r} - k \left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{r}}{2r} \right) \frac{\vec{r}}{r} \right]$$



$\vec{r}_1 = -\vec{r}_1$ (puisque P. est pris comme origine des opérateurs de l'analyse vectorielle)
 A grande distance, $r \gg \lambda$ on peut faire un certain nombre d'approximations

$$\frac{r}{r_1} = \frac{R}{R_1}$$

Dans le facteur de phase, on ne peut pas négliger tout à fait la

variation de r

$$r \cdot \vec{r}_1 = R \cdot \vec{R}_1 - \rho \cdot \vec{\rho}_0 = r \cdot \vec{R}_1$$

$$r = R - \rho \cdot \vec{\rho}_0 \cdot \vec{R}_1$$

$$\left[(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) \text{grad} \right] \text{grad} \Psi = -k \left(\frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{R}_1 \right) \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_1 e^{-jkR} e^{jk\rho \vec{\rho}_0 \cdot \vec{R}_1} = -k \left(\frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{R}_1 \right) \vec{R}_1$$

D'où l'expression de \vec{E} à grande distance;

$$\vec{E} = \frac{1}{j2\pi\omega\epsilon} \iint_{(S)} \left(-k \left(\frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{R}_1 \right) \vec{R}_1 \Psi + k \left(\frac{\vec{K}}{2} \right) \Psi \right) dS$$

$$\vec{E} = - \frac{j\omega\mu}{2\pi R} e^{-jkR} \iint_{(S)} \left(\frac{\vec{K}}{2} - \left(\frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{R}_1 \right) \vec{R}_1 \right) e^{jk\rho \vec{\rho}_0 \cdot \vec{R}_1} dS \quad (12-3)$$

Soit $\vec{R}_1, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\phi$, les vecteurs unitaires associés à (R, θ, ϕ)
 Les composantes de \vec{E} sont données par;

$$\vec{E} \cdot \vec{R}_1 = E_r = - \frac{j\omega\mu}{2\pi R} e^{-jkR} \iint_{(S)} \left(\frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{R}_1 - \frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{R}_1 \right) e^{jk\rho \vec{\rho}_0 \cdot \vec{R}_1} dS = 0$$

$$\vec{E} \cdot \vec{i}_\phi = E_\phi \text{ et } \vec{i}_\phi \cdot \vec{R}_1 = 0 \text{ d'où}$$

$$E_\phi = - \frac{j\omega\mu}{2\pi R} e^{-jkR} \iint_{(S)} \frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{i}_\phi e^{jk\rho \vec{\rho}_0 \cdot \vec{R}_1} dS \quad (12-4)$$

$$E_\phi = - \frac{j\omega\mu}{2\pi R} e^{-jkR} \left[\left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \frac{P_T}{2\pi} \right] \vec{i}_\phi \cdot \vec{I}$$

$$\vec{I} = \iint_{(S)} \left[\frac{G(\theta, \phi)}{\rho} \right] \vec{n} \wedge (\vec{\rho}_0 \wedge \vec{e}_3) e^{-jk(\rho - \vec{\rho}_0 \cdot \vec{R}_1)} dS \quad \text{ou}$$

$$\vec{I} = \iint_{(S)} \left[\frac{G(\theta, \phi)}{\rho} \right] \vec{n} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{e}_1) e^{-jk(\rho - \vec{\rho}_0 \cdot \vec{R}_1)} dS \quad (\text{en posant } \rho \vec{\rho}_0 = \vec{\rho})$$

$$E_\phi = \vec{E} \cdot \vec{i}_\phi = - \frac{j\omega\mu}{2\pi R} e^{-jkR} \left[\left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{1/2} \frac{P_T}{2\pi} \right] \vec{i}_\phi \cdot \vec{I}$$

$$\vec{\rho} = \rho \cdot \vec{\rho}_0 = \rho (\sin\psi \cos\zeta \vec{i} + \sin\psi \sin\zeta \vec{j} - \cos\psi \vec{k})$$

$$\vec{R}_1 = \sin\theta \cos\phi \vec{i} + \sin\theta \sin\phi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\vec{\rho} \cdot \vec{R}_1 = \rho [\sin\psi \sin\theta \cos(\zeta - \phi) - \cos\psi \cos\theta] \quad (\text{voir fig 4 - Chapitre 3. 2.2})$$

L'angle solide sous lequel on voit dS à partir de F est

$$d\Omega = \frac{dS}{\rho^2} \cos\psi = \sin\psi d\zeta d\psi$$

$$dS = \rho^2 \frac{\sin\psi}{\cos\psi} d\psi d\zeta \quad \text{avec } \begin{cases} 0 \leq \psi \leq \psi \\ 0 \leq \zeta \leq 2\pi \end{cases}$$

On en déduit \vec{I} qui comprendra une composante transversale

$$\vec{I}_\zeta = - \int_0^{2\pi} \int_0^\psi G \vec{e}_1 e^{-jk\rho(1 + \cos\psi \cos\theta - \sin\psi \sin\theta \cos[\zeta - \phi])} \cdot \rho \cdot \sin\psi d\psi d\zeta$$

et une composante longitudinale

$$\vec{I}_\psi = \vec{k} \int_0^{2\pi} \int_0^\psi G \vec{e}_1 e^{-jk\rho(1 + \cos\psi \cos\theta - \sin\psi \sin\theta \cos[\zeta - \phi])} \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} d\psi d\zeta$$

L'effet de \vec{I}_3 ne se fait sentir que pour des grands angles, puisque $\vec{k} \cdot \vec{i}_0 = \sin \theta$ et que \vec{i}_0 est toujours dans un plan normal à \vec{k} . Le rayonnement obtenu étant un faisceau étroit, l'action de \vec{I}_3 est donc négligeable devant celle de \vec{I}_t , surtout lorsque λ est faible.

Le rayonnement est concentré autour de $\vec{o}z$ ($\theta=0$), on peut écrire

$$\rho \approx \frac{2f}{1 + \cos \psi \cos \theta} \quad \text{ou} \quad \rho (1 + \cos \psi \cos \theta) \approx 2f \quad \text{et}$$

$$\vec{I}_t = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi} G \frac{\vec{y}_2}{\rho} e^{-jk(2f - \rho \sin \psi \sin \theta \cos [\xi - \psi])} \rho \sin \psi d\psi d\xi \quad (12-5)$$

On peut aussi calculer I_t en faisant l'intégration sur l'ouverture du réflecteur, dans ce cas;

$$dS \cdot \cos \frac{\psi}{2} = l dl d\xi \quad \text{ou} \quad dS = \frac{l dl}{\cos \frac{\psi}{2}} d\xi$$

avec $l = f \sin \psi$ et $\begin{cases} 0 \leq l \leq a \\ 0 \leq \xi \leq 2\pi \end{cases}$ d'où

$$\vec{I}_t = -e^{-j2kf} \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi} \frac{G \vec{y}_2}{\rho} e^{jk l \sin \theta \cos (\xi - \psi)} l dl d\xi \quad (12-6)$$

13) Réaction du réflecteur parabolique sur la source primaire

On suppose que la source est adaptée à l'aligne en l'absence du réflecteur. Elle est, alors, le siège d'une onde progressive et la puissance totale qui traverse une section transversale prise comme référence est de la forme;

$$P_r = \alpha |V_i|^2$$

α est une constante caractéristique de la ligne et de la distribution de champ sur cette section. V_i est la tension mesurée à cette section. Si l'on néglige les pertes ohmiques et diélectriques dans la ligne et la source, P_r est aussi la puissance totale rayonnée par l'antenne primaire.

En un point du réflecteur, la distribution de courant induite est;

$$\vec{K} = 2(\vec{n} \wedge \vec{H}_0) = \left[8 \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P_r}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{G}{\rho} e^{-jk\rho} \left[(\vec{n} \cdot \vec{e}_0) \vec{\rho}_0 + \cos \frac{\psi}{2} \cdot \vec{e}_0 \right]$$

(en utilisant la formule 3-2 2-b)

on suppose que l'on a affaire à une dispersion simple, c'est à dire que l'on néglige les effets de la dispersion multiple devant les effets de l'onde de dispersion due à \vec{K} .

La condition $\rho \gg \lambda$ nous permet d'assimiler cette onde, à une onde plane au voisinage de l'antenne primaire.

De la formule (12-3), on déduit que le champ dû à un élément dS du réflecteur est donné au foyer F ($\vec{R}_1 = -\vec{\rho}_0$; $R = \rho$), par;

$$d\vec{E} = \frac{k^2}{j2\pi\omega\epsilon} \left[\left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{\rho}_0}{2} \right) \vec{\rho}_0 + \frac{\vec{K}}{2} \right] \psi dS$$

$$dE_{\rho_0} = 0$$

$$d\vec{E} \cdot \vec{e}_0 = \frac{k^2}{j2\pi\omega\epsilon} \left[- \left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{\rho}_0}{2} \right) \vec{\rho}_0 \cdot \vec{e}_0 + \left(\frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{e}_0 \right) \right] \psi dS = dE_r = \frac{k^2}{j2\pi\omega\epsilon} \frac{\vec{K}}{2} \cdot \vec{e}_0 \psi dS$$

(La polarisation \vec{e}_0 étant perpendiculaire à la direction de propagation)

$$dE_r = - \frac{jk^2}{2\pi\omega\epsilon} \left[\left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\alpha |V_i|^2}{2\pi} G \right]^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-j2k\rho}}{\rho^2} \cos \frac{\psi}{2} dS \quad \text{d'où}$$

$$dE_r = - \frac{j\omega\mu}{2\pi\rho^2} |V_i| \left[\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} G \right]^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\psi}{2} e^{-j2k\rho} dS$$

Le vecteur de Poynting est alors donné par;

$$|d\vec{P}| = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} |dE_r|^2$$

La surface effective de l'antenne primaire est par définition

$$S_{\text{eff}} = \frac{dP_r}{|d\vec{P}|} = G \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

dP_r est la puissance reçue par la source primaire et due à l'onde de dispersion considérée.

$$dP_r = G |dP| \frac{\lambda^2}{4\pi} = \frac{G}{2} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{\lambda^2}{4\pi} |dE_r|^2$$

Il s'établit, dans la ligne, une onde réfléchie caractérisée par une tension dV_r mesurée à la section de référence.

$$dV_r = \left(\frac{dP_r}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-j(2k\rho + \delta_1)}$$

δ_1 est un déphasage constant dû à l'ensemble source - feeder et à $-j$ dans l'expression de dE_r

$$dV_r = \left[\frac{\lambda^2}{8\pi\alpha} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} G \right]^{1/2} \frac{\omega\mu}{2\pi\rho^2} |V_i| \left[\frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} G \right]^{1/2} \cos \frac{\psi}{2} e^{-j(2k\rho + \delta_1)} dS$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \frac{2\pi\mu}{\lambda\sqrt{\epsilon\mu}} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} G \cos \frac{\psi}{2} e^{-j(2k\rho + \delta_1)} dS$$

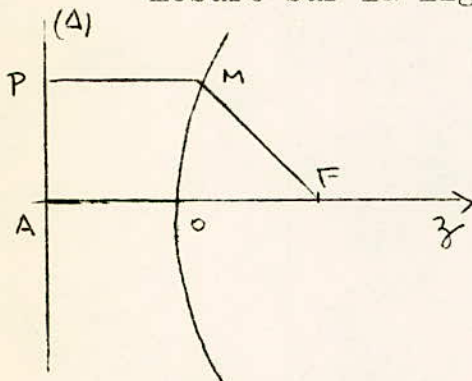
Le coefficient de réflexion $d\Gamma$ dû à l'élément dS du réflecteur est;

$$d\Gamma = \frac{dV_r}{V_i} = \frac{1}{4\pi\rho^2} G \cos \frac{\psi}{2} e^{-j(2k\rho + \delta_1)} dS$$

Donc, le désaccord causé par la présence du réflecteur se traduira par un coefficient de réflexion

$$\Gamma = e^{-j\delta_1} \iint_{(\Sigma)} \frac{G(\psi, \xi)}{4\pi\rho^2} \cos \frac{\psi}{2} e^{-j2k\rho} dS \quad (13-1)$$

mesuré sur la ligne.



$$\rho = MF = [x^2 + y^2 + (z-f)^2]^{1/2} = MP = z + f$$

on en déduit ; $x^2 + y^2 = 4fz$

ρ passe par un minimum au point O, en effet;

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{2\rho} \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{f}\right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{2\rho} \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{f}\right) \end{cases} \quad \left(\text{avec } \rho = \left[\frac{x^2 + y^2}{2} + f^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{4f}\right)^2 \right]^{1/2} \right)$$

pour $x = y = 0$ $\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \end{cases}$

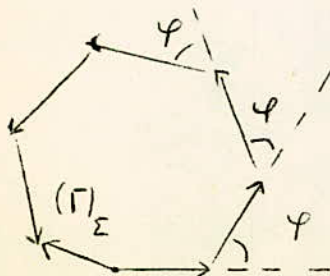
et $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}$ sont du même signe que x et y respectivement. Soit ψ , la Phase de $d\Gamma$

Par conséquent, au voisinage de O, varie très peu et la phase varie très faiblement, malgré que $\rho \gg \lambda$. En un point M éloigné de O, ρ et par suite ψ varie très rapidement. Ceci est résumé par le principe de la phase stationnaire.

La phase est stationnaire en un point d'incidence normale

Soit une portion de surface (Σ) du réflecteur, entourant un point M où l'incidence est quelconque. La résolution de l'intégrale (13-1) étendue à (Σ) par la construction de Fresnel donne un résultat voisin de zéro, puisque la phase varie rapidement au voisinage de ce point.

Lorsque (Σ) entoure le point O où l'incidence est normale, la phase a une valeur stationnaire. L'effet de la surface à phase stationnaire ainsi obtenue est prépondérant devant ceux des autres surfaces et on peut négliger ces derniers devant le premier.



$$\rho - f = f \left[1 + \frac{x^2 + y^2}{2f^2} + \left(\frac{x^2 + y^2}{4f}\right)^2 \right]^{1/2} = f$$

$$= \frac{x^2}{4f} + \frac{y^2}{4f} + \dots$$

Le développement en série étant fait au voisinage de O, on peut

faire aussi, les approximations suivantes;

$$\rho \approx f; \rho - f \approx \frac{x^2}{4f} + \frac{y^2}{4f}; G(\frac{x}{f}, \frac{y}{f}) \approx G_0; \cos \frac{\psi}{2} \approx 1; dS = \frac{dx dy}{\cos \frac{\psi}{2}} \approx dx dy$$

On suppose que (Σ) fait partie d'un plan sur lequel la phase est stationnaire et coïncidant avec le plan xOy.

(13-1) devient alors

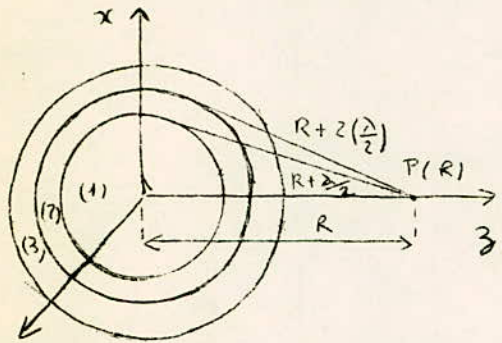
$$\Gamma = e^{-j\delta} e^{-j2kf} \frac{G_0}{4\pi f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= e^{-j(2kf + \delta)} \frac{G_0}{4\pi f^2} 2 \sqrt{\frac{\pi f}{k}} \sqrt{\frac{\pi f}{k}} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \text{d'où}$$

$$\Gamma = \frac{G_0}{2fk} e^{-j(2kf + \delta)} = \frac{G_0}{4\pi f} e^{-j(2kf + \delta)} \quad (13-2)$$

avec $\delta = \delta_1 + \frac{\pi}{2}$

14) Zones de Fresnel



Il s'agit de déterminer à partir de quelle distance R de l'ouverture, on peut dire que l'on est dans la zone de champ à grande distance ou région de Fraunhofer

Soit un point P sur Oz, traçons la famille de sphères de rayon $R + \frac{\lambda}{2}, R + \lambda, \dots$, centrées en P et partageant l'ouverture en zones annulaires, celles-ci sont connues sous le nom de zones de Fresnel. On les numérote comme indiqué sur la figure.

Chaque élément d'une zone n se trouve

opposé en phase avec un élément opposé dans la zone n+1. L'effet total de la zone n se trouve à peu près déphasé de π par rapport à celui de la zone n+1.

Si S_n est l'effet de la zone n, on aura pour l'ouverture entière;

$$S = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots$$

S_n décroît lentement lorsque n augmente donc $S_n - S_{n+1} \approx 0$

Si $n \rightarrow N$ (nombre suffisamment grand), à la limite, on aura;

$$S = \frac{1}{2}(S_1 \pm S_N)$$

Lorsque R croît, N décroît et

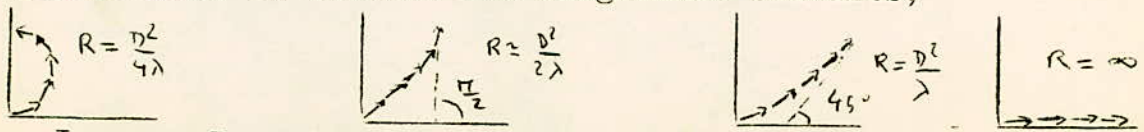
$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{1}{2}(S_1 - S_N) \approx S_1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ S = \frac{1}{2}(S_1 + S_N) \approx S_1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$$

L'amplitude du champ le long de l'axe passe par des minimas et des maximas

IL n'y aura plus de fluctuations, lorsque R est tel que l'ouverture entière apparaît comme une simple zone de Fresnel, soit;

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 + R^2 = \left(R + \frac{\lambda}{2}\right)^2 \quad \text{d'où } R = \frac{D^2 - \lambda^2}{4\lambda} \approx \frac{D^2}{4\lambda}$$

ON n'est pas encore dans la zone de Fraunhofer, car l'effet des bords est opposé en phase à celui du centre et elle suppose que les directions d'un point quelconque de l'ouverture vers le point P sont parallèles. On obtient les diagrammes suivants;



Lorsque $R \rightarrow \infty$, le champ le long de l'axe est uniforme (on est dans le cas d'une onde plane polarisée linéairement). D^2 est une bonne approximation de la valeur $R = \infty$. Dans les mesures de gain on désire toujours que le champ soit uniforme. POUR cela, il faut se placer à une distance $R \gg \frac{D^2}{\lambda}$ de l'ouverture