

P 10008/67

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE - UNIVERSITE D'ALGER

Département : Télécommunications

Reçu le 15/6/67
94
M. A. T.

Département Télécommunications

TECHN I QUES DES HYPERFREQUENCES
 :::::::::::::::::::::
 ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
 Etude des Transformateurs à quart-d'onde
 à large bande

Juin 1967

par M. Mohamed OUINTEN

I - INTRODUCTION

= =====

Après quelques brefs rappels sur les systèmes de transmission et leurs diverses caractéristiques, on montre comment, à l'aide de lignes de transmission et de guides-d'ondes, réaliser des transformateurs quart-d'onde d'impédance.

La nécessité de l'adaptation se fera sentir tout au long de cette étude et est nécessaire principalement pour une bonne transmission de l'énergie électromagnétique.

Si longue que soit une ligne de transmission d'énergie, elle est toujours, dans les applications, de longueur finie. Elle est connectée aux bornes d'un certain récepteur, d'où réflexion éventuelle et le fonctionnement du générateur, disposé à l'autre extrémité de la ligne dépend du système ligne-récepteur.

Cela revient à envisager l'impédance qui charge le générateur. C'est l'impédance ramenée à l'entrée de la ligne. On est amené, de la sorte, à considérer les lignes comme des transformateurs d'impédances.

Ce nouveau point de vue est très fécond en hyperfréquences (ondes très courtes) où une portion de ligne de l'ordre de la longueur d'onde (de quelques centimètres) a les dimensions du matériel de laboratoire courant. On dispose d'un circuit parfaitement maniable.

Les applications des lignes transformatrices d'impédances sont très nombreuses et utilisent les propriétés propres aux lignes $\lambda/4$.

L'étude faite sur les lignes, conduit toujours à des résultats qui, convenablement transposés, s'étendent, en hyperfréquences, aux guides d'ondes.

Le but de la présente étude est de contribuer à une investigation des méthodes théoriques d'analyse et de synthèse des transformateurs à large bande. Elle se terminera par un calcul détaillé et une conception (théorique) d'un transformateur quart-d'onde à large bande.

TABLE DES MATIERES

I - <u>Introduction</u>	I
A - <u>LES SYSTEMES DE TRANSMISSION</u>	
II- <u>Généralités sur les lignes de transmission</u>	4
2-1 Rappels sur les lignes	
2-2 Utilisation des lignes et des guides	
2-3 Propriétés des guides d'ondes	
III- <u>Changement de section droite</u>	II
3-1 Cas d'une ligne coaxiale	
3-2 Cas d'un guide d'onde	
3-3 Remarques sur les discontinuités	
B - <u>ADAPTATION PAR TRANSFORMATEUR QUART-D'ONDE</u>	
IV- <u>Introduction</u>	I4
V - <u>Théorie générale</u>	I4
5-1 Détermination des impédances caractéristiques	
5-2 Influence de la fréquence	
5-3 Selectivité et bande passante	
VI- <u>Adaptation à large bande</u>	20
6-1 Système de lignes en cascade	
6-2 Avantages de ces systèmes	
6-3 Détermination des impédances Z_n	
VII- <u>Adaptation par guides quart-d'onde</u>	23
7-1 Adaptation à bande étroite	
7-2 Adaptation à large bande	
C - <u>SYNTHESE GENERALE DES TRANSFORMATEURS QUART-D'ONDE</u>	
VII- <u>Remarques générales sur les méthodes de synthèse</u>	25
IX- <u>Introduction à l'étude</u>	26
X - <u>Synthèse générale</u>	27

IO-1	Le problème	
IO-2	Solution du problème	
IO-3	Vérification pour Z	
IO-4	Vérification pour Γ	
XI	<u>Calcul et conception d'un transformateur $\lambda/4$</u>	39
II-1	Détermination des Z_n	
II-2	Calcul de la bande passante	
II-3	Conception physique	
XI	<u>Détermination des Z_n : 2^e méthode</u>	49
XII	<u>Application des transformateurs $\lambda/4$</u>	51
	- Jonction à large bande guides rectangulaire et circulaire	
	- Passage symétrique-dissymétrique 'BALUN'	
XIV	<u>Conclusion</u>	54
-	<u>Annexe A</u> : Fonction à partie réelle positive	55
-	<u>Annexe B</u> : Fonction atténuation d'insertion	56
-	<u>Bibliographie</u>	60

A- LES SYSTEMES DE TRANSMISSION

II - GENERALITES SUR LES LIGNES DE TRANSMISSION.

2-I Rappels sur les lignes

On designera par ligne de transmission tout ensemble de conducteurs permettant le transfert d'énergie entre deux points donnés. Il est donné ci-après quelques définitions essentielles:

2-I-I Notion d'impédance de ligne

Si une ligne est fermée à son extrémité par une impédance de charge quelconque Z , différente de Z_0 (impédance caractéristique), on constate qu'à partir du plan de charge apparaissent différentes valeurs d'impédance.

Il est possible de déterminer l'impédance Z_1 , vue de la source, à une distance l de l'extrémité. Cette valeur est définie par le rapport de la tension et du courant au point considéré:

$$\text{Soit } Z_1 = \frac{V_1}{I_1}$$

Il est bien connu que V et I , le long de la ligne, sont reliés par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} V &= V_I \text{ch} \gamma l - Z_0 I_I \text{sh} \gamma l \\ I &= -V_I / Z_0 \text{sh} \gamma l + I_I \text{ch} \gamma l \end{aligned} \quad (2-1)$$

où:

- V_I et I_I représentent respectivement la tension et le courant à l'origine;
- γ est le coefficient de propagation

Au point l considéré, on peut en déduire que:

$$Z_1 = Z_0 \frac{Ae^{\gamma l} + Be^{-\gamma l}}{Ae^{\gamma l} + Be^{-\gamma l}} \quad (2-2)$$

Il peut être constaté que, pour $l=0$, c'est à dire dans le plan de Z , on a:

$$\Gamma_0 = \frac{A}{B} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad (2-3)$$

La quantité ainsi définie est le coefficient de réflexion. En général Γ est complexe et est ≤ 1 .

Il est à noter que:

- lorsque l'extrémité de la ligne est fermée par une résistance (ou une impédance) Z égale à Z_0 , $\Gamma_0 = 0$ et il n'y a pas d'onde réfléchie. La ligne est en régime d'ondes progressives et on dit qu'il y a adaptation.

Ainsi cette dernière propriété ne peut exister que si $Z = Z_0$.

- lorsque l'extrémité de la ligne est fermée une impédance Z plus grande (ou plus petite) que Z_0 , Γ_0 est alors fonction du rapport $\frac{Z}{Z_0}$ (ou $\frac{Z_0}{Z}$) et il y a réflexions; d'où une désadaptation.

- lorsque l'extrémité de la ligne est court-circuitée, $Z = 0$ et $\Gamma_0 = -1$; il y a réflexion totale de l'onde incidente, et l'onde réfléchie est en opposition de phase avec la précédente au plan de court-circuit. La tension V en ce point, somme des tensions incidentes et réfléchies est nulle.

- lorsque l'extrémité de la ligne est ouverte, $Z = \infty$ et $\Gamma_0 = 1$; il y a encore réflexion totale, mais l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente et la tension V est alors le double de la tension incidente.

Ces quelques rappels montrent l'importance de l'impédance de charge et ce, par l'intermédiaire de Γ_0 .

Revenons à la relation (2-2) et divisons haut et bas par A :

$$Z_1 = Z_0 \frac{(Z + Z_0)e^{\gamma l} + (Z - Z_0)e^{-\gamma l}}{(Z + Z_0)e^{\gamma l} - (Z - Z_0)e^{-\gamma l}} = Z_0 \frac{Z + Z_0 \operatorname{th} \gamma l}{Z_0 + Z \operatorname{th} \gamma l} \quad (2-4)$$

Il a été ainsi obtenu l'impédance vue à l'entrée d'une ligne (Z_0) de longueur l chargée par une impédance Z .

Le coefficient de propagation est la somme de deux termes tels que:

$$\Gamma_0 = \alpha + j\beta$$

où

- α représente la constante d'atténuation,

- β représente la constante de phase.

In général, et dans la plupart des cas pratiques, les pertes dans les lignes en hyperfréquences sont si petites que, dans les calculs, on peut considérer α comme nul.

Alors, $\gamma = j\beta$ d'où $\text{th } \gamma l = \text{th } j\beta l = j \text{tg } \beta l$

La relation (2-4) devient :

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z + jZ_0 \text{tg } \beta l}{Z_0 + jZ \text{tg } \beta l} \quad (2-5)$$

2-I-2 Propriétés des lignes quart-d'onde

Calculons l'impédance, vue de la source, à la distance de la charge égale à $\lambda/4$.

$\beta l = \pi/2$ d'où $\text{tg } \beta l = \infty$

Reportons ce résultat dans (2-5) et il vient: (en tenant compte du rapport de deux quantités infinies)

$$Z_1 = \frac{Z_0^2}{Z} \quad Z_0^2 = Z \cdot Z_1 \quad \text{soit} \quad Z_0 = \sqrt{Z \cdot Z_1} \quad (2-6)$$

Ainsi une ligne de longueur $\lambda/4$ se comporte comme un transformateur d'impédance. Elle transforme les impédances extrêmes en une impédance égale à la moyenne géométrique du produit $Z \cdot Z_1$. La relation (2-6) sera le fondement de toute la théorie des transformateurs quart-d'onde.

Dans toute l'étude qui suivra on supposera que l'impédance de charge est une résistance pure. De ce fait, si Z_1 est elle aussi réelle, Z_0 sera alors réelle.

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2} \quad \text{ou} \quad Z_0 = \sqrt{R \cdot R_g}$$

2-I-3 Taux d'onde stationnaire

Pour mieux mettre en évidence le phénomène d'onde incidente et réfléchi, on définit un terme très important: le taux d'onde stationnaire S.

C'est le rapport du maximum de tension (ou de courant) sur un minimum de tension (ou de courant)

Par définition,

$$S = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{I + |\Gamma|}{I - |\Gamma|} \quad (2-7)$$

Dans le cas général, $S \geq 1$.

A partir de cette nouvelle valeur, il est possible de définir le problème de l'adaptation:

Dans tout système de transmission, on a intérêt à avoir l'énergie transmise intégralement; cela veut dire que S doit être aussi voisin de 1 que possible. Aussi, afin d'améliorer le rendement d'une ligne de transmission, est-il nécessaire de fermer la ligne sur son impédance caractéristique. Si la charge en est différente, il y a nécessité d'adaptation.

2-I-4 Importance pratique d'un T.O.S. faible

Une ligne utilisée comme feeder (alimentation d'une antenne) doit avoir un T.O.S. aussi faible que possible; ce qui n'est pas le cas, par exemple, d'une ligne utilisée comme élément réactif d'un circuit résonant.

En pratique, un T.O.S. égal à 1 n'est jamais atteint mais des valeurs de 1,05 à 2 sont couramment obtenues.

Il est indispensable que S soit peu élevé que possible pour les raisons suivantes:

- la puissance admissible décroît rapidement lorsque S croît;
- le rendement est plus grand;
- l'affaiblissement est plus petit.

Tout ceci concourt à affirmer que, pour ne pas dépasser les valeurs maximums, on est conduit à adapter l'ensemble source-charge.

2-I-5 Affaiblissement dans les lignes

L'affaiblissement total dans une ligne est la somme de deux affaiblissements ou pertes :

- pertes dans les conducteurs,
- pertes dans le diélectrique.

Soit: $A_t = A_c + A_d$

A_c et A_d sont donnés en db/m, pour des conducteurs en cuivre par les formules pratiques suivantes: (pour un T.O.S.=1) [1]

Ligne coaxiale:

$$A_c = 0,0026 \frac{I/d + I/D}{\log_{10} D/d} \sqrt{\epsilon F}$$

$$A_d = 0,091 \sqrt{\epsilon p.F}$$

- où
- d et D représentent les conducteurs interne et externe (les diamètres étant en mm)
- F est la fréquence en Mhz
- ϵ est la constante diélectrique de l'isolant
- p est le facteur de perte de l'isolant.

2-2 Utilisation des lignes et des guides

Le choix d'un type de ligne déterminé pour transmettre la puissance électromagnétique entre deux points donnés, dépend principalement de la fréquence d'utilisation mais aussi d'autres facteurs tels que: commodité de construction, de manipulation, de puissance à transmettre, etc....

On distingue, généralement, les lignes coaxiales et les guides d'ondes. On écartera les lignes bifilaires, dites de Lecher, dont le domaine d'utilisation (en ondes métriques) présente peu d'intérêt pour nous.

Aux basses fréquences, au-dessous de 1000 Mhz, l'utilisation des lignes coaxiales est presque universelle. Cependant sa construction étant plus difficile, elle ne peut concurrencer les lignes de Lecher que lorsqu'il est désirable de disposer d'un blindage extérieur. Sa limite d'utilisation vers les fréquences élevées, résulte de la présence des régimes guidés qui nécessitent une réduction des dimensions latérales au fur et à mesure que la longueur d'onde employée diminue.

Aux fréquences supérieures à 3000 Mhz, les dimensions du coaxial dans lequel les modes supérieurs sont supprimés, sont si petites que

les atténuations sont très grandes. Par conséquent les atténuations relatives du coaxial, par rapport à celles du guide d'ondes sont très grandes du fait que le guide a la possibilité d'offrir une plus grande surface pour les ondes transmises. Aussi, pour les fréquences au-dessus de 3000 Mhz, on n'utilise pratiquement que les guides d'ondes.

2-3 Propriétés des guides d'ondes

On trouvera ci-dessous les principales propriétés et ce d'une manière succincte.

2-3-1 Choix des guides sur les lignes

Les propriétés majeures des G.O. qui les font préférer dans les systèmes de transmission micro-ondes sont, entre autre, les suivantes:

- étant fermés, les guides ne perdent pas d'énergie par rayonnement parasite
- ils sont capables de transmettre de grandes puissances H.F.
- les pertes ohmiques sont réduites en raison de l'absence du conducteur central.
- absence de pertes diélectriques.
- très faibles atténuations de puissance propagée.

Le seul inconvénient des G.O. est qu'ils sont incapables de transmettre les fréquences inférieures à la fréquence de coupure. Les guides sont des filtres passe-haut naturels.

2-3-2 Fréquence de coupure et impédance caractéristique

La fréquence de coupure et la longueur d'onde dans un guide d'onde sont données par les relations suivantes:

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (2-8)$$

m et n sont deux facteurs dépendant du guide et indiquent le mode propagé.

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_g} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (2-9)$$

La notion d'impédance caractéristique, parfaitement claire dans les circuits linéaires, devient arbitraire et quelque peu conventionnelle dans les G.O. où les composantes des champs \vec{E} et \vec{H} varient avec le type d'onde et le mode particulier de propagation.

Par définition, l'impédance spécifique de l'onde est le rapport des amplitudes du champ électrique transversal et du champ magnétique transversal:

$$Z_0 = \left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \left| \frac{E_y}{H_x} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_g}{\lambda} = 120 \frac{\pi \lambda_g}{\lambda} \quad (2-9)$$

Il est à noter que cette impédance est fonction de l'onde, de la géométrie du guide, de la fréquence utilisée.

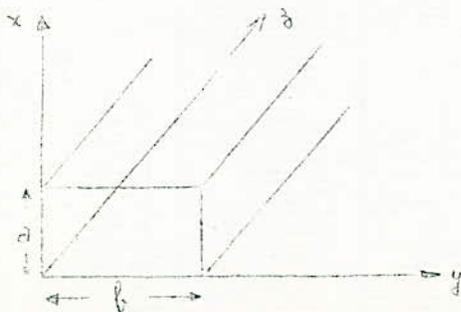
A partir de cette notion d'impédance, et par analogie avec les lignes, il est possible de définir les mêmes constantes: Γ_0 , S , Z_1 . Le guide se comporte comme une ligne et de ce fait en possède les mêmes propriétés et en particulier celle où $l = \lambda/4$.

2-3-3 Modes et dimensions dans les G.O.

L'utilisation d'un G.O. pour transmettre une puissance électromagnétique entre un émetteur (générateur) et un récepteur (charge) nécessite que, pour plusieurs raisons, seul le mode dominant se propage et que tous les autres soient évanescents (rapidement atténués). Autrement il est impossible de garantir la même configuration du champ tout le long du guide.

Le mode dominant est celui qui présente une fréquence de coupure la plus petite, soit une longueur d'onde de coupure la plus grande. C'est aussi le fondamental.

En pratique, et pour les guides rectangulaires, on utilise principalement le mode TE_{01} ou $a < b$.



Il est alors possible de choisir les dimensions transversales pour que seul ce mode soit transmissible; dans ce cas la longueur d'onde de coupure devient:

$$\lambda_c = 2b$$

Dans les guides circulaires, c'est le mode TE_{11} le fondamental. Il est essentiel que la polarisation (direction du champ électrique) de l'onde transmise ne change pas le long du guide et, à cet égard, le guide circulaire ne convient pas en pratique; on ne l'utilise que sous forme de tronçons courts.

III- CHANGEMENT DE SECTION DROITE

=====
=====

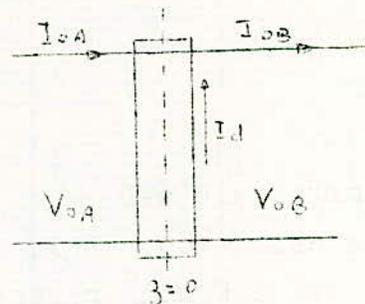
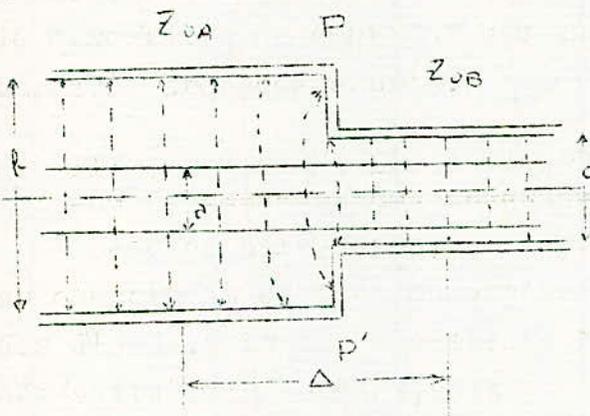
Dans ce paragraphe, on se propose l'étude des discontinuités dues au changement de section droite dans les lignes coaxiales et les guides d'onde. Cela est nécessaire car la construction des transformateurs nécessite très souvent, soit:

- le raccord de deux lignes différentes,
- le passage, dans une même ligne, entre deux impédances caractéristiques différentes.

Tout ceci conduit à des changements de section droite qu'il nous faut étudier.

3-1 Cas d'une ligne coaxiale

C'est la configuration qui se présente le plus souvent: seul le conducteur extérieur subit une déformation.



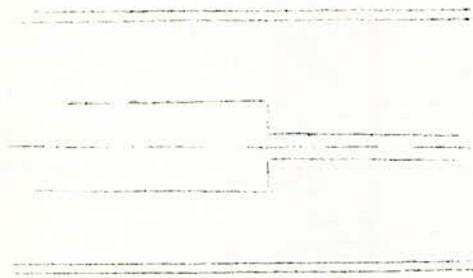
Soit la discontinuité située dans le plan PP' où le diamètre du conducteur externe passe de b à c .

La longueur d'onde d'utilisation est supposée grande par rapport aux dimensions des conducteurs.

Le calcul théorique d'une telle discontinuité est assez ardu et R.N.Ghose [2] démontre que la tension entre les deux conducteurs plans ne subit aucune discontinuité, ce qui n'est pas le cas pour le courant.

IL y a de part et d'autre de PP' une zone de transition ayant une épaisseur de l'ordre de grandeur des dimensions transversales et dans laquelle existent des ondes correspondant à des régimes TE ou TM très au-delà de la fréquence de coupure et rapidement atténués. A ces ondes atténuées peuvent correspondre des champs intenses qui entraînent des pertes élevées au voisinage de la discontinuité. Cette dernière peut être alors représentée par une capacité localisée venant en shunt.

On rencontre quelquefois un deuxième genre de discontinuité où la déformation intéresse le conducteur central.



Là aussi les calculs, effectués dans le même esprit que précédemment, montrent que la tension est continue alors que le courant dans l'onde principale subit un changement. Cette non-continuité est due, là aussi, à une capacité en dérivation.

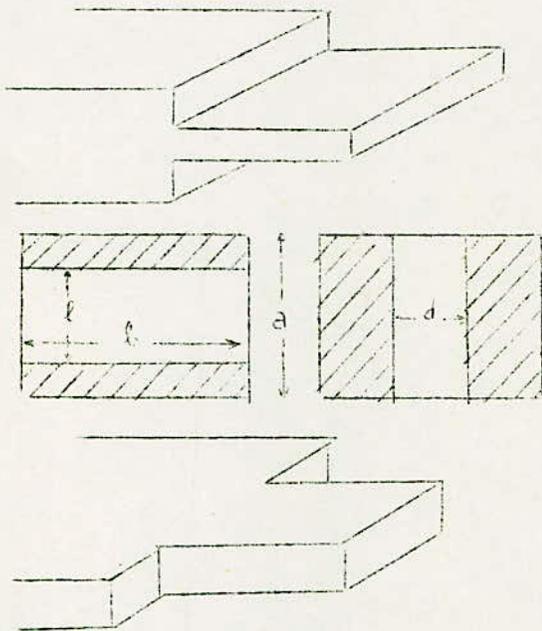
3-2 Cas d'un guide d'ondes

Comme pour les lignes coaxiales ce genre de problème se pose très souvent lorsqu'on désire soit joindre deux guides, soit changer d'impédance caractéristique à l'intérieur même du guide.

Une onde venant de la gauche arrive sur la discontinuité et, dans le cas général, on observe:

- des ondes réfléchies qui se propagent vers la gauche et qui correspondent à tous les types d'ondes susceptibles de se propager dans cette partie du guide;
- des ondes transmises qui se propagent vers la droite;
- des ondes atténuées ($\lambda > \lambda_c$) qui n'existent qu'au voisinage de la discontinuité.

3-2-1 Changement du côté a



Considérons le cas où la discontinuité n'affecte que les faces larges du guide. On aboutit, dans le plan du changement de section, à l'obtention d'un iris aux propriétés réactives. Comme le calcul est très ardu, on ne donnera que le résultat final, à savoir que la susceptance a pour valeur [20]:

$$B = j \frac{4a}{\lambda g} \text{Log} \frac{1}{\sin \frac{\pi l}{2a}}$$

3-2-2 Changement du côté b

Dans cette possibilité, le schéma équivalent est plus compliqué et la discontinuité est représentée par un iris

inductif dont la susceptance a pour valeur:

$$B = -j \frac{\lambda g}{b} \cotg^2 \frac{\pi d}{2b} \left[1 + \left(\frac{\pi d}{4\lambda} \right)^2 \right]^{-1}$$

3-3 Remarques sur ces discontinuités

Comme il a été dit, la discontinuité crée une perturbation dans son voisinage immédiat et que son influence est grandement affaiblie au-delà. L'effet de la distortion du champ électromagnétique résultant est représenté par une admittance équivalente.

Ces dernières sont de l'ordre de quelques dixièmes de micromicrofarad [2] (picofarad = 10^{-12} F), et sont rarement supérieures à 1 pF.

Pour notre étude, on supposera que leur influence peut être négligée pour les fréquences utilisées. Par contre si F est très grande, plus de quelques milliers de mégacycles, leur importance est considérable.

La fin du chapitre sur la conception d'un transformateur, à l'aide de données numériques, montrera la véracité de nos suppositions; de plus à l'aide des formules ci-dessus, il est visible B varie avec a.

B- ADAPTATION PAR TRANSFORMATEURS QUART-D'ONDE

IV - INTRODUCTION

Après les brefs rappels des paragraphes précédents sur la théorie des lignes de transmission, les discontinuités, la présente partie se propose l'étude de la transformation des impédances au moyen de lignes quart-d'onde.

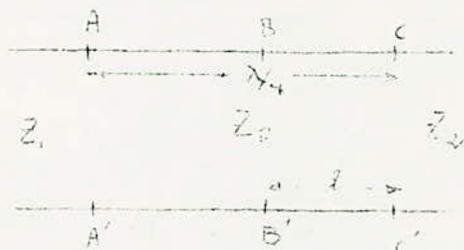
La méthode employée sera celle de l'analyse: connaissant le système étudié, on s'intéresse à ses performances, à ses défauts et, pour cela, on étudiera plus particulièrement sa bande passante.

Car tel est le but de cette étude: conception d'un transformateur de bande passante donnée.

V - THEORIE GENERALE

5-I Determination des impédances caractéristiques

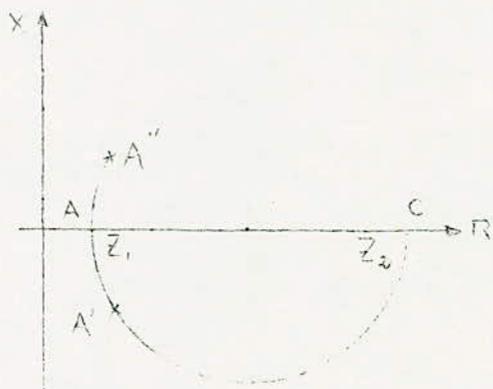
Il a été vu qu'une ligne de longueur $l = \lambda/4$ se comportait comme un transformateur d'impédance (§ 2-I-2).



Cela veut dire que, dans notre cas,
 $Z_0 = \sqrt{Z_1 Z_2}$ ou $\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{Z_2}{Z_0} = 1$

Dans le cas d'un tronçon unique utilisé pour l'adaptation, la ligne (2) vue à travers une longueur de ligne $BC=l$ élément de couplage entre Z_1 et Z_2 , présente l'impédance d'entrée:

$$Z_e = \frac{Z_2 + jZ_0 \operatorname{tg} \beta l}{Z_0 + jZ_2 \operatorname{tg} \beta l} Z_0$$



La représentation de Z_e dans le plan complexe donne lieu à un cercle coupant l'axe des réels en deux points Z_1 et Z_2 avec
 $Z_1 = \frac{Z_0^2}{Z_2}$

Le cercle est parcouru de C à A lorsque l varie de 0 à $\lambda/4$. Il a été ainsi réalisé une transition entre les deux lignes (1) et (2).

5-2 Influence de la fréquence

Lorsque la fréquence varie, la longueur du transformateur n'est plus la même et l'adaptation cesse d'être correcte: le système est très sélectif et dépend étroitement de f.

Lorsque la fréquence augmente d'une quantité df , la longueur d'onde correspondante diminue de $d\lambda$. En se référant à la figure précédente, on voit que la rotation devient supérieure à un demi-tour et le point représentatif A vient alors en A". De même, si la fréquence diminue, le point représentatif se déplace en A': la rotation étant inférieure à un demi-tour.

L'impédance obtenue présente alors une partie réelle et imaginaire variables et, par conséquent, l'adaptation n'est plus faite.

Cela nous amène à aborder le problème de la bande passante du transformateur, de sa sélectivité.

5-3 Sélectivité et bande passante

L'inconvénient majeur des lignes $\lambda/4$ simples est leur trop grande dépendance avec la fréquence. En effet de part et d'autre de leur fréquence de construction, leur fonctionnement s'altère. Ce sont des circuits à bande étroite.

Si la longueur d'onde varie, le T.O.S. qui était peu différent de 1 à l'adaptation, varie lui aussi. Il est possible de fixer une limite de valeurs de S pour que, compte tenu des deux lignes à adapter, le système soit utilisable dans toute la gamme comprise entre λ' et λ'' .

Diminuer le caractère sélectif revient à accroître cette gamme pour laquelle le T.O.S. reste dans une limite de variation convenable et désirée.

La détermination exact du rôle de la fréquence se fera par l'intermédiaire de (2-5) où on supposera que Z_1, Z_0, Z_2 ne varient pas avec f (cas où ce sont des résistances pures).

Une portion de ligne l ramène une impédance qui, elle, dépend de

la fréquence par l'intermédiaire de l'angle électrique $\theta = \beta l$
 Un accroissement de f a le même effet qu'un allongement de la longueur effective de la ligne.

Supposons un transformateur $\lambda/4$ à la fréquence f_0 , fermé sur une impédance Z . A la fréquence $f = f_0 + \Delta f$, il vient:

$$\Delta \lambda = c / \Delta f \quad \Delta \beta = \frac{2\pi \Delta f}{c} \quad \lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda \quad \beta = \beta_0 + \Delta \beta$$

$$\text{Soit } \beta l = \beta_0 l + \Delta \beta l = \frac{\pi}{2} + x \quad \text{avec } x = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta f}{f_0}$$

$$\text{D'où, soit } x = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \Delta \theta$$

Finalement, Z_1 prend la forme suivante:

$$Z_1' = Z_0 \frac{Z_2 \operatorname{tg} \Delta \theta - j Z_0}{Z_0 \operatorname{tg} \Delta \theta - j Z_1} \quad (5-1)$$

L'impédance ramenée à l'entrée de la ligne est donc Z_1' . On peut pour étudier l'influence de la fréquence, se fixer:

- soit un domaine de variation du T.O.S.

- soit une tolérance sur la valeur de Z_1'

a)- Le domaine de variation de S , comme vu précédemment, sera compris entre deux valeurs extrêmes. On démontre qu'il y a un lien entre S et f et ce par l'intermédiaire de:

$$S = 1 - \frac{\pi}{2} \frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{Z_2 + Z_1}} \frac{d\lambda}{\lambda_0} \quad (5-2) \quad [1-3]$$

L'adaptation sera d'autant plus sélective que l'écartement entre les valeurs extrêmes λ' et λ'' sera plus petit.

b)- En se fixant une tolérance sur la valeur de l'impédance Z_1' , on peut définir par la valeur correspondante de θ et f une largeur de bande du circuit.

5-3-I Détermination de la bande passante par le calcul

Il a été trouvé que x est fonction de f et de Δf . Généralement $x \ll 1$ et de ce fait $\operatorname{tg} \beta l = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) \approx -\frac{1}{x}$. A partir de (2-5), il s'ensuit que:

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_2 x - j Z_0}{Z_0 x - j Z_0}$$

Le coefficient de réflexion correspondant est alors:

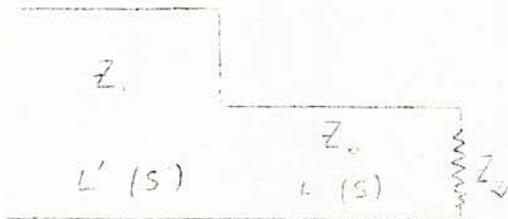
$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_I}{Z_1 + Z_I} \quad \text{soit} \quad \Gamma = \frac{x(Z_2 - Z_I)}{x(Z_1 + Z_2) - 2jZ_0} \quad (5-3)$$

Il a été supposé que $Z_I > Z_0$. On sait que dans ce cas, $Z_I - Z_2 - Z_0 - S$, sont reliés entre eux par :

$$Z_I = S \cdot Z_0 \quad \cdot \quad Z_2 = \frac{Z_0}{S}$$

En remplaçant ceci dans (5-3), il vient:

$$|\Gamma| = \frac{x(S - 1/S)}{\sqrt{x^2(S + 1/S)^2 + 4}} \quad (5-4)$$



S étant le T.O.S. dans la section adaptatrice(L), déterminons à présent le T.O.S. S' dans la ligne(L'). On posera S' sous la forme (puisque le T.O.S. est toujours supérieur à 1),

$$S' = 1 + \&$$

On sait que

$$S' = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 1 + \frac{2|\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 1 + \&$$

D'où

$$\& = \frac{2|\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

. En remplaçant $|\Gamma|$ par sa valeur, il vient pour $\&$

$$\& = \frac{2x(S - 1/S)}{\sqrt{x^2(S - 1/S)^2 + 4} - (S - 1/S)x} \quad (5-5)$$

L'étude de la relation (5-5), montre que:

- $\&$ dépend du T.O.S. propre de la ligne adaptatrice quart-d'onde,
- $\&$ dépend de x , représentant la variation de fréquence.

Pour nous ce sera surtout ce deuxième point qui retiendra notre attention car c'est de lui que dépendra la bande passante du système étudié.

L'analyse de ce résultat se fera en se fixant une valeur du T.O.S. toléré dans(L') et, à partir de S' , on en déduit x par l'intermédiaire de la quantité $\&$ correspondante. La valeur de x en fonction de $\&$, après transformations, est:

$$x^2 = \frac{4\&^2}{(s + \&)^2 (s - 1/s)^2 - (s + 1/s)^2 \&^2} \quad (5-6)$$

Pour une application pratique, on ne prendra que la racine positive; la largeur de bande étant en valeur absolue.

Connaissant S dans la ligne $\lambda/4(L)$ et S' dans (L') , on en déduit aisément x et par là, $\Delta f/f_0$.

Exemple: On veut adapter une résistance R à une ligne (L') d'impédance caractéristique R_1 à l'aide d'une ligne quart-d'onde d'impédance Z_0 . On a: $R=40\Omega$ et $R_1=1000\Omega$; d'où $Z_0=200\Omega$

Immédiatement, $S=Z_0/R=5$

Supposons que l'on veuille avoir un T.O.S. maximum $S'=1,5$; soit $\&=0,5$. En remplaçant S et $\&$ par leur valeur respective dans (5-6), il vient après extraction de la racine:

$x = 0,085$ comme $x = \pi/2 \Delta f/f_0$ et que $\Delta f = 3\Delta f$, il vient

$$\Delta f/f_0 = 4x/\pi = 10,6\%$$

5-3-2 Utilisation de l'Abaque de SMITH

Portons sur l'abaque le cercle $S=5$ centré en $(1,0)$.

Ici, il nous faut aborder le problème du changement de base sur un abaque de Smith. En effet, dès que le cercle S est tracé, l'abaque est normalisée à l'impédance de référence déjà choisie (ici Z_0) et il n'est plus question de l'utiliser sous une autre normalisation que Z_0 . Il faut "reconvertir" l'abaque.

Traçons le cercle $S'=1,5$ centré en $(1,0)$; il coupe l'axe des réels en deux points A_1 et B_1

Soient $A_1(0,67)$ et $B_1(1,5)$

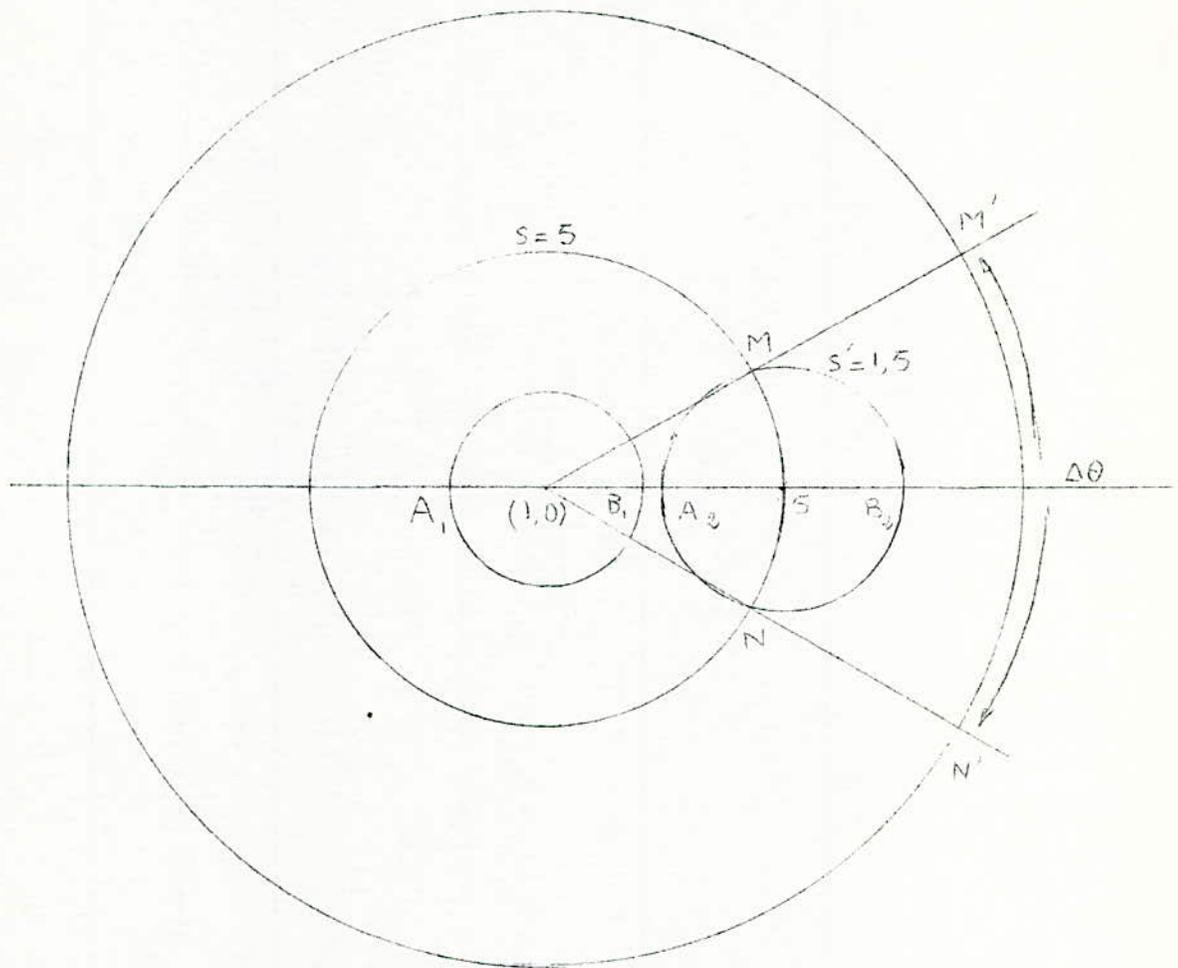
Le rapport de transformation se déduit de la manière suivante:

$$z_e = \frac{Z_1}{R_1} = S' \quad z'_e = \frac{Z_e}{Z_0} = z_e \frac{R_1}{Z_0} \quad \text{soit} \quad z'_e = S' \frac{R_1}{Z_0}$$

R_1/Z_0 est le rapport cherché; soit ici égal à 5

Les points A_1 et B_1 subissent une transformation qui les déplacent en A_2, B_2 tels que

$$A_2 = 0,67 \cdot 5 = 3,35 \quad B_2 = 1,5 \cdot 5 = 7,5$$



Le cercle $S' = 1,5$ doit passer par ces deux points et il coupe le cercle $S=5$ en deux points M et N . Si on joint ces derniers au centre de l'abaque $(1,0)$, les droites OM et ON coupent le grand cercle extérieur en deux points M' et N' permettant de déterminer la bande passante du transformateur.

En effet, pour le point M' : $\lambda/4\lambda_1 = s/\lambda_1 = 0,235$

pour le point N' : $\lambda/4\lambda_2 = s/\lambda_2 = 0,262$

Comme on a toujours $s = \lambda/4$ et qu'ici c'est λ qui varie et non s , il s'ensuit que :

$$f_1/f_0 = 4 \cdot 0,235 \quad f_2/f_0 = 4 \cdot 0,262 \quad \text{et} \quad \Delta f/f_0 = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$$

Finalement, après calculs, $\Delta f/f_0 = 10,8\%$, résultat peu différent de celui trouvé par le calcul.

Remarques

Si le T.O.S. dans (L) était égal à $S=2$, c'est à dire $R=40\Omega$ et $R_1=160\Omega$ et $Z_0=80\Omega$ avec toujours $S'=1,5$, la bande passante serait plus large, soit 35%. Ceci nous amène à la conclusion suivante: si le rapport R_1/R augmente, la largeur de bande correspondante du système diminue et inversement dans le cas contraire.

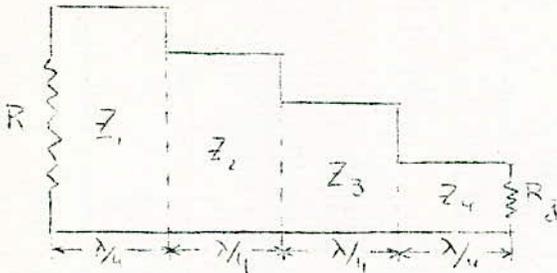
De plus, la largeur de bande s'accroît avec une diminution de la valeur tolérable de S dans (L). S doit être petit, cela veut dire qu'il ne faut pas passer brutalement de R à R_1 , mais par étapes progressives. Cela donnera de faibles valeurs de S tout au long du système adaptateur et par là, une plus grande largeur de bande passante.

C'est cette idée qui est mise en pratique pour la construction des transformateurs $\lambda/4$ à large bande: il est plus intéressant d'adapter des dipôles dont le T.O.S propre est peu élevé.

VI ADAPTATION A LARGE BANDE

6-I Systèmes de lignes en cascade

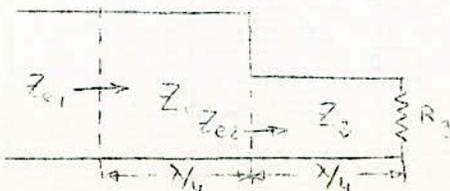
Sur les bases des remarques précédentes, une déduction logique est que, deux résistances ayant un grand rapport (R/R_1), se raient adaptées dans une plus large bande de fréquence par l'utilisation de sections de lignes $\lambda/4$ en cascade avec accroissement progressif de leurs impédances caractéristiques comme ci-dessous:



$$R > Z_1 > Z_2 > Z_3 > Z_4 > R_g$$

De cette façon, chaque section $\lambda/4$ aura un bas rapport d'impédances et la désadaptation totale pour une déviation de fréquence donnée serait moindre que celle obtenue avec une seule section $\lambda/4$.

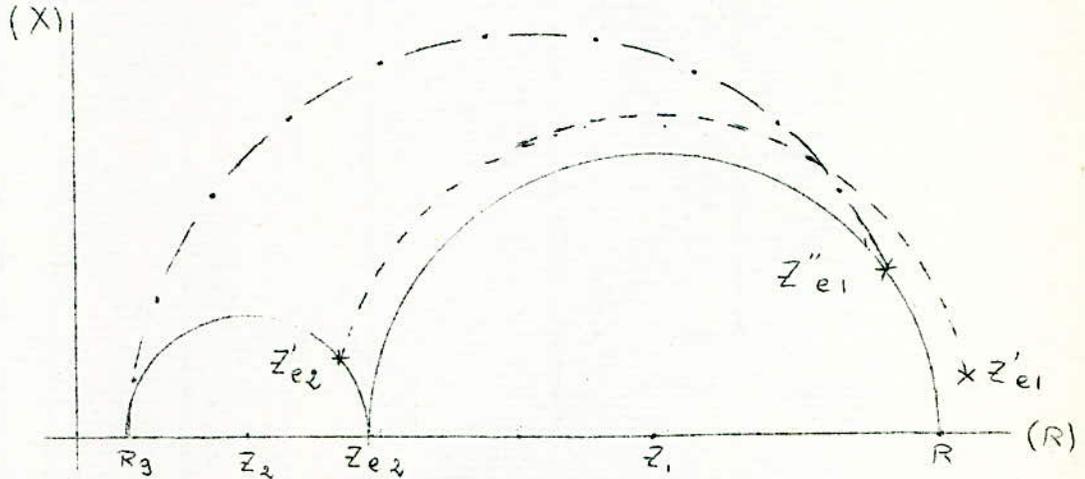
Examinons le cas de deux lignes en série Z_1 et Z_2 ; Z_{e1} et Z_{e2} étant les impédances d'entrée.



A partir de (2-6), il vient :

$$R_g \cdot Z_{eI} = Z_2^2 \quad \text{et} \quad R \cdot Z_{eI} = Z_{eI} \cdot Z_{e2} = Z_I^2$$

A la fréquence centrale où une adaptation exacte entre R et R_g est obtenue, la transformation des impédances à travers les deux lignes $\lambda/4$ est tracée ci-dessous dans le diagramme R-X. L'arc de cercle le



plus grand donne le lieu de l'impédance si elle était transformée que par une seule section $\lambda/4$.

Si la fréquence diminue, la section de ligne a une longueur inférieure à $\lambda/4$ initial: elle transforme R_g au point Z'_{e2} ; (Z_I) transforme Z'_{e2} le long du cercle pointillé en Z'_{eI} . L'effet de la modification de la longueur électrique des deux lignes a été de déplacer Z'_{e2} le long de l'axe réel mais a gardé Z'_{eI} au voisinage de R . Un même changement de fréquence dans une seule ligne $\lambda/4$, représentée par le tracé discontinu, produirait une impédance d'entrée Z''_{eI} et le point représentatif s'éloigne rapidement de R , comme il peut être constaté ci-dessus.

6-2 Avantages d'un tel système

L'avantage le plus évident a été montré précédemment: il permet une diminution du caractère sélectif d'un seul tronçon $\lambda/4$. Il présente aussi un grand intérêt du fait qu'il peut être possible de se fixer une largeur de bande désirée, tout en ayant un TOS tolérable.

Le seul problème est de déterminer le nombre de sections n (fonction du rapport R/R_g) et l'impédance caractéristique de chaque section de ligne.

6-3 Détermination des impédances Z_i

Le choix du nombre n se fait généralement d'une manière arbitraire et il est choisi entre 3 et 5. Pour les différentes impédances Z_i , le problème a été tranché par l'imposition de lois et formules empiriques. Ces dernières ne sont donc pas le fruit de calculs exacts mais plutôt de résultats vérifiés par la pratique.

Par contre, on **verra** plus loin dans la partie C : SYNTHÈSE GÉNÉRALE, que ces mêmes impédances peuvent être trouvées mathématiquement.

Dans le présent paragraphe, on se bornera à énumérer les diverses lois et formules rencontrées dans la littérature spécialisée.

ROUBINE [4] cite:

- la loi linéaire, telle que

$$(Z)_n - (Z)_{n-1} = C^{st} \quad (6-1)$$

- la loi dite de progression géométrique, par extension de (6-1):

$$(Z)_n = q(Z)_{n-1} \quad \text{avec } Z=Z_0 \quad q = \sqrt[n]{\frac{Z_n}{R_g}} \quad (6-2)$$
$$\text{et } (Z)_n = q^{n-\frac{1}{2}R_g}$$

- la loi dite binomiale telle que:

$$(Z)_n = q C_{p-1}^{n-1} (Z)_{n-1} \quad \text{avec } C_{p-1}^{n-1} = \frac{(p-1)!}{(n-1)!(p-n)!} \quad (6-3)$$

l'exposant de q est le coefficient binomial cité ci-dessus. On doit prendre dans ce cas:

$$q = 2^{n-1} \left[\frac{Z_n}{R_g} \right]^{1/2}$$

- HANSEN (travail non publié, cité dans [5]), a suggéré l'utilisation de section telles que:

$$\frac{\log R - \log Z_1}{I} = \frac{\log Z_1 - \log Z_2}{C_1^n} = \dots = \frac{\log Z_{n-1} - \log Z_n}{C_{n-1}^n} = \frac{\log Z_n - \log R_g}{I} \quad (6-4)$$

$I, C_1^n, \dots, C_{n-1}^n, I$ sont les coefficients du développement de $(a+b)^n$.

- REICH [6] cite une loi encore plus complexe où le rapport des impédances est donné par:

$$R/Z_1 = e^{a0} \quad Z_1/Z_2 = e^{a1} \quad Z_{n-1}/Z_n = e^{an-1} \quad Z_n/R_g = e^{an}$$

où les coefficients a sont définis par:

$$a_i \equiv \frac{b_i}{\sum_{i=0}^n b_i} \log(R/R_g) \quad (6-5)$$

et les b_i par la somme des coefficients du développement de $(c+d)^n$.

Les transformateurs dits 'binomials' donnent des bandes passantes plus larges que les autres et de ce fait sont les plus utilisés.

Comme il a été déjà dit, seule la pratique peut confirmer la justesse des relations citées sur la base de leurs performances.

VII ADAPTATION PAR GUIDES QUART-D'ONDES

Il a été montré que les guides d'ondes peuvent être assimilés à des lignes de transmission et en posséder toutes leurs propriétés. Cependant la relation fondamentale (2-6) prend une forme légèrement différente, quoique semblable.

7-1 Adaptation à bande étroite

Soient deux guides à adapter, d'impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 . Il nous faut considérer deux cas:

- où $a_1 \neq a_2$ (a =dimension électrique ou petit côté)
- où $b_1 \neq b_2$ (b =dimension magnétique ou grand côté)

1 - Dans ce premier cas le problème est simple et l'adaptation est réalisée lorsque:

$$a' = \sqrt{a_1 \cdot a_2} \quad (7-1)$$

où a' désigne le petit côté du guide adaptateur.

2 - Le deuxième cas est plus compliqué du fait que, si b varie, la longueur d'onde dans le guide varie elle aussi (λ étant fonction de b). Cependant par référence à (2-9), on montre que l'adaptation sera obtenue si:

$$\frac{b'}{\lambda_g} = \sqrt{\frac{b_1}{\lambda_{g1}} \frac{b_2}{\lambda_{g2}}} \quad (7-2)$$

où b' représente le grand côté du guide adaptateur.

Donc la relation (2-6) se dégénère en une relation en a' et b'

Il est alors possible de choisir arbitrairement: soit l'une , soit une combinaison de ces deux valeurs et on aboutit à une nouvelle relation entre les dimensions des 3 guides mis en présence. En utilisant la proportionnalité de leurs différences, il vient:

$$\frac{a' - a_I}{a_2 - a_I} = \frac{b' - b_I}{b_2 - b_I} \quad (7-3)$$

Mais, comme pour le cas des lignes $\lambda/4$ simples, la sélectivité est trop grande d'où une bande passante réduite. On est alors amené à utiliser une adaptation par guides en cascade et les résultats trouvés dans (§ 6-1) trouvent leur application dans de tels systèmes.

7-2 Adaptation à large bande

Comme pour les adaptateurs à n sections en cascade, il sera fait usage de lois et relations empiriques. Si on désigne par Z_n les différentes impédances caractéristiques et par Z_{en} les impédances d'entrée correspondantes à chaque tronçon, il est possible de les relier sous forme de méthodes (citées par SOUTHWORTH [7])

- linéaire: $Z_n = I + an$ a étant une constante. Par un choix adéquat des valeurs de a et de n, il est possible d'arriver à une quelconque impédance Z_n désirée, sachant que:

$$Z_n^2 = Z_{en} \cdot Z_{en-1}$$

- 'exponentielle': $Z_{en} = (I + a)^{n-1}$

- 'binomiale': le logarithme du rapport Z_{en}/Z_{en-1} est proportionnel aux coefficients du développement de $(I+a)^{n-1}$.

Certes le problème des guides est très peu différent de celui des lignes, mais ici il faut tenir compte des jonctions faisant intervenir des discontinuités.

De plus la réalisation pratique de tels transformateurs est plus difficile du fait de la petitesse des dimensions dues à leur étroite dépendance avec la fréquence utilisée.

C - SYNTHESE GENERALE DES TRANSFORMATEURS QUART-D'ONDE

VIII -REMARQUES GENERALES SUR LES METHODES DE SYNTHESE

====

On sait l'importance qu'a prise la théorie des réseaux ces dernières années: elle est aujourd'hui l'outil de base de la plupart des électroniciens. Une classe particulière des circuits à constantes réparties se montre utile dans la conception de réseaux d'adaptation et se prête à une synthèse complète: il s'agit du montage en cascade de lignes sans pertes, de même longueur. Les constantes de propagation des diverses lignes sont égales, seules leurs impédances caractéristiques diffèrent.

Le problème essentiel est de concevoir un système répondant à certaines spécifications. C'est, en général, beaucoup plus difficile que l'analyse pure de ce système donné. Pour les parties non linéaires, on peut combiner expériences et approximations successives. Pour les parties linéaires dépendant de paramètres invariables dans le temps, nous disposons de méthodes mathématiques qui nous permettent d'effectuer au moins partiellement la synthèse désirée.

La marche à suivre pour une telle étude est la suivante:

1/ - Etablir les relations caractéristiques d'une configuration donnée: déterminer une fonction mathématique qui permette de répondre aux conditions posées avec une précision satisfaisante et qui soit compatible avec les caractéristiques de transmission d'un réseau réel (Bande passante, coefficient de réflexion, taux d'onde stationnaire, courbe de réponse, ...). C'est l'approximation.

2/ - Réaliser la synthèse du circuit à lignes en cascade et établir le réseau correspondant. C'est la réalisation.

En d'autres termes, nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un circuit à lignes soit physiquement réalisable. Pour cela, on utilise avec profit les résultats de la synthèse des circuits électriques tels que filtres, quadripôles.

La clef du problème a été donnée en 1948 par RICHARDSON [8] quand il introduisit une transformation de fréquence changeant en fonctions rationnelles les fonctions transcendentes rencontrées. (Une fonction

transcendante étant une fonction non algébrique).

En 1955, COLLIN [3] démontra que, par un changement de variable, la fonction de transfert en puissance d'un générateur à une charge, à travers une chaîne de lignes, pouvait être représentée par un polynôme. C'est la fonction d'atténuation d'insertion.

En 1957, RIBLET [10] appliqua ces résultats et compléta la théorie générale du transformateur quart-d'onde en introduisant la notion de réalisabilité physique.

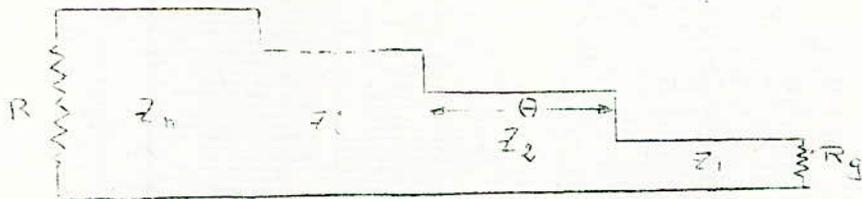
En 1965, CARLIN, à l'aide du théorème de Richards, donna une synthèse des circuits à lignes en cascade à partir de la matrice de répartition et montra leurs applications aux filtres et aux transformateurs $\lambda/4$. [11]

Pour cette étude, il a été fait une synthèse des différentes méthodes et les documents de travail ont été ceux de Collin, de Riblet, de Carlin, et d'ouvrages spécialisés sur la synthèse des réseaux électriques tels que: Weinberg [12], Kuh-Pederson [13], Tuttle [14].

La méthode suivie sera exposée dans le paragraphe ci-dessous.

I - INTRODUCTION A L'ETUDE

== =====



Le schéma ci-dessus est le dispositif le plus généralement utilisé dans la conception des transformateurs $\lambda/4$ à large bande.

Les chaînes de lignes adaptant R et R_g ne peuvent changer les niveaux d'impédances à la fréquence zéro, du fait que les lignes sont transparentes à cette fréquence. Par conséquent, le transformateur se comportera comme un filtre passe-bande entre les terminaisons prescrites; le changement d'impédance ne sera effectif qu'au voisinage de la fréquence pour laquelle la longueur des lignes atteint $\lambda/4$.

La synthèse générale sera faite en 3 grandes étapes:

1/- Explicitation de l'impédance d'entrée Z_e et les conditions qu'elle doit remplir;

2/- Recherche de la fonction mathématique appropriée et détermination du coefficient de réflexion à partir de celle-ci;

3/- Calcul des différentes impédances caractéristique Z_n et vérifications des résultats trouvés.

Le point le plus délicat est la construction de Γ car c'est de lui que découlent les Z_n correspondants.

En fin de ce présent chapitre on trouvera un exemple détaillé de calcul d'un transformateur mettant en pratique les résultats théoriques trouvés.

X - SYNTHESE GENERALE
= =====

10-I Le problème

Considérons une section de ligne de transmission, sans pertes, d'impédance caractéristique Z_0 , de constante de phase $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ et de longueur l .

La tension et le courant à l'entrée de cette ligne sont reliés linéairement à la tension et courant de sortie par:

$$\begin{aligned} V_e &= \cos\theta V_s + jZ_0 \sin\theta I_s \\ I_e &= j\sin\theta/Z_0 V_s + \cos\theta I_s \end{aligned} \quad (10-1)$$

on a posé $\theta = 2\pi/\lambda \cdot l$. θ s'appelle angle électrique.

Ainsi apparait la matrice d'impédance de l'élément de ligne dont le déterminant, conséquence de la réciprocité, est égal à l'unité.

$$\begin{bmatrix} V_e \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & j\sin\theta Z_0 \\ j\sin\theta/Z_0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \quad (10-2)$$

La généralisation pour n sections en cascade se fera par multiplication des matrices propres à chaque ligne. Le résultat, après transformations et regroupements trigonométriques, est trouvé être une matrice carrée dont le déterminant est égal à l'unité et dont les coefficients a_0, a_1, b_0, b_1 , sont réels et plus grand que zéro:

$$\left[\begin{array}{l} a_0 \cos^n \theta + a_2 \cos^{n-2} \theta + \dots \quad j \sin \theta (a_1 \cos^{n-1} \theta + a_3 \cos^{n-3} \theta + \dots) \\ j \sin \theta (b_1 \cos^{n-1} \theta + b_3 \cos^{n-3} \theta + \dots) \quad b_0 \cos^n \theta + b_2 \cos^{n-2} \theta + \dots \end{array} \right] \quad (10-3)$$

L'impédance d'entrée de la cascade, pour une terminaison R, est obtenue comme pour une seule section de ligne:

$$\begin{aligned} [Z_e] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta Z_0 \\ j \sin \theta / Z_0 & \cos \theta \end{bmatrix} [R] \\ Z_e &= \frac{\cos \theta R + j \sin \theta Z_0}{j \sin \theta / Z_0 + \cos \theta} = Z_0 \frac{\cos \theta R + j \sin \theta Z_0}{\cos \theta Z_0 + j \sin \theta R} \end{aligned} \quad (10-4)$$

La théorie ci-après développée renverse la question: il est plus intéressant, connaissant l'impédance d'entrée et R, de déterminer Z_0 .

La construction de Z_e rend possible l'utilisation des théorèmes généraux de la théorie des fonctions analytiques. Il nous suffira d'introduire la quantité complexe:

$$p = -j \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (10-5)$$

Richards, quant à lui, a choisi p tel qu'il soit nul pour un transformateur $\lambda/4$, soit pour $\theta = \pi/2$. Pour notre part on a dans ce cas $p = \infty$. Carlin a posé, pour son étude, $p = j \tan \beta l$.

Dans le système de transmission, λ variant de zéro à l'infini, p varie alors de $-\infty$ à $+\infty$. Donc p sera assimilable à une fréquence variable complexe et on posera $p = \sigma + i\omega$. La partie imaginaire est $\omega = \frac{\omega_0 l}{c_3}$ (ω_0 et c_3 sont respectivement la pulsation et la vitesse de propagation dans la ligne ou le guide).

A la lumière de ceci, la matrice (10-2) se transforme en:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & j \sin \theta Z_0 \\ j \sin \theta / Z_0 & \cos \theta \end{bmatrix} = j \sin \theta \begin{bmatrix} p & Z_0 \\ 1/Z_0 & p \end{bmatrix} \quad (10-6)$$

de ce fait,

$$Z_e = Z_0 \frac{pR + Z_0}{R + pZ_0} \quad (10-7)$$

L'impédance d'entrée d'une cascade de lignes serait alors, par utilisation de (IO-3):

$$Z_e = \frac{(p^n + s_2 p^{n-2} + \dots)R + (s_1 p^{n-1} + s_3 p^{n-3} + \dots)}{(s_1 p^{n-1} + s_3 p^{n-3} + \dots)R + (p^n + s_2 p^{n-2} + \dots)} \quad (IO-8)$$

Le calcul de Z_e par l'utilisation de p sous sa forme complexe, $p = \sqrt{\sigma} + i\omega$, montre que, chaque fois que la partie réelle de R est positive, aussi l'est celle de Z_e . Cela veut dire que Z_e est une fonction à partie réelle positive. On trouvera, en annexe [A], une définition mathématique d'une telle fonction et ses propriétés.

C'est là qu'intervient la condition nécessaire pour l'étude d'un transformateur $\lambda/4$, à savoir que:

Toutes les fonctions impédance de p , de la forme (IO-8), réalisées par une cascade de sections de lignes terminée par une résistance, doivent être des fonctions à partie réelle positive de p .

L'étude de la matrice (IO-6) montre que son déterminant est égal à $p^2 - I$, en négligeant les termes en $\sin\theta$. Par conséquent, le produit des deux polynômes de (IO-8) commençant par p^n moins le produit des polynômes restants est nécessairement égal à $R(p^2 - I)^n$ lorsqu'il y a n chaînes en cascade. Ce théorème forme la base du procédé de synthèse et est ainsi énoncé:

IO-I-I Théorème de synthèse

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction rationnelle de p à coefficients réels, écrite sous la forme

$$Z = \frac{m_1(p) + n_1(p)}{m_2(p) + n_2(p)}$$

avec m_1 et m_2 impair ou pair, n_1 et n_2 pair ou impair, soit l'impédance d'entrée d'une cascade de n sections de lignes terminée par R sont :

1/- Z doit être une fonction positive réelle de p ;

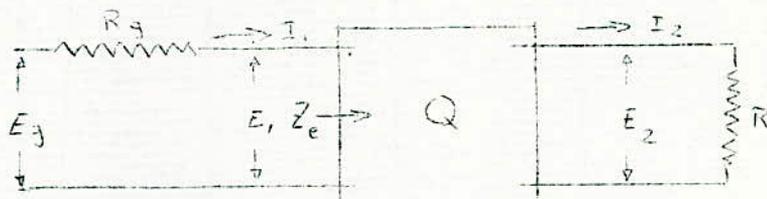
2/- $m_1(p)m_2(p) - n_1(p)n_2(p) = C(p^2 - I)^n$.

Dans le développement de notre étude il sera noté : p.r. pour indiquer que la fonction satisfait à la 1^{ère} condition. De plus on utilisera le fait que les racines (ou pôles) de Γ issu de Z sont comprises dans le demi-plan de gauche (voir annexe [A]) noté d.p.g. .

IO-I-2 Fonction atténuation d'insertion

La fonction atténuation d'insertion P_i est le rapport de la puissance utilisable du générateur d'impédance interne R_g à la puissance dissipée dans la charge R , à travers un quadripôle Q de paramètres généraux A, B, C, D .

Soit le circuit ci-dessous:



$$\begin{aligned} E_1 &= AE_2 + BI_2 \\ I_1 &= CE_2 + DI_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= RI_2 \\ I_1 &= I_2(CR + D) = \frac{E_g}{R_g + Z_e} \end{aligned}$$

Z_e étant l'impédance d'entrée de Q ; E_g étant la tension aux bornes de la source.

La puissance dissipée dans R est:

$$P_d = I_2^2 R = \left| \frac{I_1}{CR + D} \right|^2 = \left| \frac{E_g}{CRR_g + DR_g + AR + B} \right|^2 R$$

La puissance transmise est:

$$P_t = \left| \frac{E_g}{R + R_g} \right|^2 R$$

D'où la fonction atténuation $P_i = P_t / P_d$.

Ici nous avons traité le cas d'un quadripôle; en transplantant ceci dans le cas de lignes, Collin a montré que cette fonction peut toujours être représentée par un polynôme réel en $\cos\theta$. Il est ensuite aisé de faire la généralisation au cas de plusieurs lignes en série. Cela nécessite le calcul des matrices d'onde, des coefficients de réflexion et des coefficients de transmission. On trouvera, en annexe [B] la démonstration donnée par Collin et par R.N. Ghose [2].

Ces derniers arrivent à la conclusion que la fonction atténuation d'insertion cherchée pouvait se mettre sous la forme:

$$P_i = 1 + Q_{2n}(\cos\theta) \quad (IO-9)$$

où $Q_{2n}(\cos\theta)$ est un polynôme pair de degré $2n$ en $\cos\theta$.

Pour éviter les valeurs de P_i inférieures à l'unité, du fait des valeurs de $\cos\theta$, les racines du polynôme doivent être doubles de manière à choisir celles qui donneraient des quantités supérieures à 1 pour P_i . Ghose et Collin ont alors supposé que

$$P_i = 1 + Q_n^2(\cos\theta) \quad (10-10)$$

où Q_n est un polynôme pair ou impair en $\cos\theta$ et ils ont choisi, dans le dessein d'avoir une fonction qui se rapproche le plus de la réalité physique, le polynôme $Q_n(\cos\theta) = kT_n(\cos\theta/s)$.

T_n est un polynôme de Tchebycheff.

Le choix de ce dernier repose sur le concept de l'approximation d'une fonction et il est trouvé être qu'il permet l'obtention d'une réponse du système aussi près de la réalité que possible. On trouvera en annexe [B] de plus amples renseignements sur ces polynômes.

10-1-3 Le problème de l'approximation

L'une des qualités essentielles d'un réseau de transmission est de fournir un signal de sortie aussi fidèle que possible de celui d'entrée. Pour expliquer ce concept d'approximation, nous allons raisonner sur des circuits électriques, le principe étant le même pour notre transformateur.

Soit un système dont le signal de sortie a la même forme que le signal d'entrée mais est seulement retardé d'un temps t_0 . Si nous appelons $S(p)$ et $E(p)$ les transformées de Laplace, on peut écrire que la transmission est parfaite si:

$$S(p) = e^{-pt_0} E(p) \quad \text{soit} \quad N(p) = e^{-pt_0}$$

le module de $N(p)$ est $|N(p)|_{p=\sigma + i\omega} = 1$

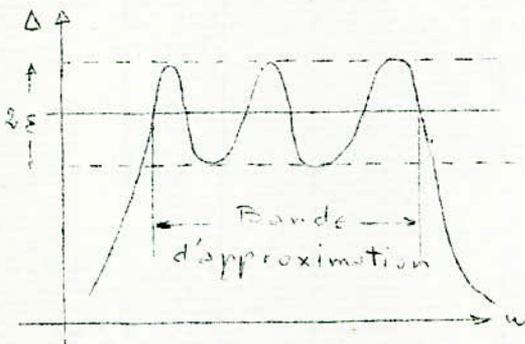
Une ligne de transmission idéale fermée aux deux bouts sur son impédance caractéristique peut réaliser une fonction de la forme ci-dessus. Cependant, une telle fonction n'est pas une fraction rationnelle, et par conséquent elle ne peut représenter un réseau à constantes localisées, comme il a été dit dans (10-1-1).

Nous devons donc, dans ce dernier cas, nous contenter d'une appro-

ximation. Nous devons donc chercher une fonction de réseau pouvant présenter des propriétés identiques à celles de $N(p)$: c'est un problème extrêmement difficile. Mais on simplifie l'étude en n'imposant qu'une ou deux conditions et l'approximation se ramène à des calculs un peu plus simples.

La question essentielle sera la détermination des paramètres de cette fonction rationnelle à partie réelle positive de sorte que la valeur maxima de la grandeur d'erreur soit la plus petite possible. La grandeur est définie comme suit:

$$\Delta(\omega) = (\text{fonction d'approximation}) - (\text{fonction approximée})$$



Dans l'exemple ci-contre, la courbe tracée est la meilleure pour approcher la droite voulue et désigne l'erreur et sert en même temps à la délimitation de la bande d'approximation.

Le lecteur se reportera avec profit sur les ouvrages spécialisés [12-13-14] pour de plus amples détails.

Généralement, les fonctions les plus utilisées sont celles faisant intervenir les polynômes de Bessel, de Butterworth, de Tchébycheff. On utilisera, pour notre part ces derniers et on dira avoir affaire à un transformateur de Tchébycheff. [9][19]

IO-I-4 Enoncé du problème

Comme il a été dit en introduction, notre problème est d'inverser le procédé courant, à savoir connaissant Z_0 déterminer Γ et par là Z_e .

Un rapport atténuation d'insertion étant connu, sous la forme (IO-10), comment peut-on procéder, étape par étape, à la détermination des différentes impédances Z_n qui aboutiront à la fonction requise?

La solution nécessitera l'utilisation:

- des matrices de la forme (IO-3),
- du théorème de synthèse pour la preuve d'une réalisabilité physique des Z_i , condition nécessaire pour une application pratique,
- de la fréquence complexe p , pour la construction de Γ .

IO-2 Solution du problème

Nous allons diviser cette solution en deux parties:

- 1/ - calcul de l'impédance d'entrée Z_e ;
- 2/ - calcul des impédances caractéristiques Z_n

IO-2-I Calcul de Z_e

Le rapport atténuation d'insertion est relié au coefficient de réflexion d'entrée par l'expression:

$$P_i = \frac{I}{I - |\Gamma|^2} \quad (IO-II)$$

en remplaçant P_i par sa valeur en $\cos\theta$, on en déduit $|\Gamma|^2$ correspondant:

$$|\Gamma|^2 = \frac{Q_n^2(\cos\theta)}{I + Q_n^2(\cos\theta)} \quad (IO-10)$$

La détermination de Γ se fera en remplaçant dans (IO-10) $\cos^2\theta$ par sa valeur en p

$$p = -j\cos\theta/\sin\theta \quad \text{d'où} \quad \cos^2\theta = \frac{p^2}{p^2 - I}$$

Puisque Z est une fonction réelle positive et que $\Gamma = Z-I/Z+I$, il vient $|\Gamma| \leq I$ pour toutes les valeurs de p dans le demi-plan de gauche. De ce fait, Γ peut ne pas avoir aucun pôle dans le demi-plan de droite.

Si on considère les zéros de $I + Q_n^2(\cos\theta)$, on ne s'intéressera qu'aux n zéros de l'expression comme étant une fonction de $\cos^2\theta$, à racines doubles.

Si, à présent, il est posé $p^2 = \cos^2\theta / \cos^2\theta - I$, il est visible que, pour chaque racine de $\cos^2\theta$, existent 2 racines p différentes par leur argument de 180°: elles sont opposées en signe. De ce fait, l'une d'elle doit se situer dans le demi-plan de gauche et ce sera celle que nous retiendrons. Les n racines de p de ce d.m.p.g. serviront alors à la construction de Γ .

Le développement du polynôme $Q_n^2(\cos\theta)$, de (IO-10), donne $|\Gamma|^2$ en fonction de $\cos\theta$ en ce qui concerne le dénominateur. Car, c'est ce dernier qui fournit les racines ou pôles de p.

En remplaçant $\cos^2\theta$ par p^2/p^2-1 , on aboutit à un polynôme $P(p)$ en p duquel on extrait les racines p_i ($i=1, 2, \dots, n$). On effectue alors une décomposition de la forme:

$$P(p) = (p-p_1')(p-p_2')(p-p_3') \dots (p-p_n')$$

Les racines p_i' étant doubles, le dénominateur prend la forme:

$$P(p) = (p-p_1)^2(p-p_2)^2(p-p_3)^2 \dots (p-p_n)^2$$

Cela permet d'obtenir, pour Γ un dénominateur tel que

$$P'(p) = (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3) \dots (p-p_n)$$

en remplaçant p par $-j\cos\theta/\sin\theta$, aura pour expression:

$$\Gamma = \frac{\&Q_n(\cos\theta)}{\cos^n\theta + \dots + j\sin\theta(\cos^{n-1}\theta + \dots)} \quad (10-13)$$

la constante $\&$ est déterminée par le fait que, pour une longueur de ligne nulle, Γ a pour valeur

$$\Gamma = \frac{R-I}{R+I} \quad \text{pour } \cos\theta=1 \text{ ou } p=\infty$$

Ceci étant fait, l'impédance d'entrée Z_e s'endéduit aisément, par la relation classique $Z_e = I + \Gamma / I - \Gamma$

Résumé

- étant donnée la fonction atténuation d'insertion, on construit sous la forme (10-12);
- le développement du dénominateur donne lieu à un polynôme en $\cos\theta$
- la transformation des termes en $\cos\theta$ en termes en p entraîne un polynôme en p duquel il faut extraire des racines. Ces dernières sont doubles et on ne gardera que celles du d.m.p.g. ;
- ceci permet, après recomposition en produit de facteurs de la forme $P(p)$, de construire le dénominateur de Γ ;
- la retransformation des termes en p en termes en $\cos\theta$, redonne la fonction Γ en $\cos\theta$ ou $\sin\theta$;

Il est nécessaire de passer par ces étapes pour pouvoir extraire les racines p_i et surtout d'obtenir $|\Gamma|$ à partir de $|\Gamma|^2$. Connaissant Γ , l'impédance d'entrée s'endéduit automatiquement. Le problème suivant est que, à l'aide de Z_e , déduire les Z_n correspondantes.

IO-2-2 Calcul des Z_n

Une fois Z_e déterminée, la première impédance caractéristique inconnue est aisément calculée en imposant à Z_e , la transformation inverse à (IO-7) où Z_0 sera choisie pour avoir la valeur de Z_e pour $p=1$. En effet $p=1$ suppose que l'on est dans le plan de l'impédance d'entrée, d'où $Z_e=Z_0$.

De ce fait le degré de la fonction impédance résultante sera d'un degré moindre que celui de Z_e . S'il était n , on obtient un degré $(n-1)$ du fait qu'il ne reste plus que $(n-1)$ sections à calculer.

Ce procédé est alors répété jusqu'à la fin et le théorème de synthèse nous assure que toutes les impédances caractéristiques ainsi trouvées sont réelles (des nombres positifs) et de ce fait réalisables physiquement.

Ci-dessus, il a été dit soumettre Z_e à la transformation inverse à (IO-7). Il serait plus commode, pour des applications pratiques, d'utiliser les matrices d'impédances de la forme (IO-3) laquelle sera obtenue de la substitution de (IO-13) dans $Z = I + \Gamma / I - \Gamma$. On aboutit alors à une matrice pour Z_e .

La résistance de charge R et la constante multiplicative pour le numérateur et le dénominateur, seront déduites de la condition que la matrice (IO-3) doit être égale à la matrice unité pour $\cos\theta = 1$ (longueur de ligne du transformateur nulle $\theta=0$).

Ceci posé la méthode d'extraction des différentes Z_n se fera de la sorte, dans le même esprit que pour la transformation inverse à (IO-6), :

- on multiplie (IO-3) soit à gauche, soit à droite, par l'inverse de la matrice (IO-2)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -j\sin\theta Z_0 \\ -j\sin\theta/Z_0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- on aura alors: soit la première, soit la dernière impédance caractéristique de la section de ligne. La seule condition à formuler est que la matrice résultante ait des éléments dont les degrés en $\cos\theta$ soient réduits d'une unité.

On verra, dans la partie 'Calcul et conception d'un transforma-

gal au rapport du plus grand coefficient de A divisé par le coefficient suivant en B. Soit $Z_I = R/Z_n$ si on applique le même procédé au produit de droite. En effet:

$$\begin{aligned} \text{gauche: } \cos\theta \frac{A}{R} + \sin^2\theta \frac{Z_I B}{R} &= \cos\theta \frac{A}{R} + \frac{Z_I B}{R} - \cos^2\theta \frac{Z_I B}{R} & Z_I = R/B \\ \text{droite: } \cos\theta \frac{A}{R} + \sin^2\theta \frac{B}{Z_n} &= \cos\theta \frac{A}{R} + \frac{B}{Z_n} - \cos^2\theta \frac{B}{Z_n} & Z_n = B \end{aligned}$$

soit en éliminant B : $Z_I \cdot Z_n = R$

IO-4 Vérification pour Γ

Il nous faut à présent montrer que la construction de Γ , pour éviter les pôles dans le demi-plan de droite, conduit à une fonction satisfaisant les conditions du théorème de synthèse.

1^{ère} condition

Comme Γ est analytique dans le demi-plan de droite, par construction, sa valeur est donnée par (IO-12) et, de cette façon $|\Gamma| \leq 1$ pour toutes les valeurs de p dans ce demi-plan. A partir de la relation entre Z et Γ , la partie réelle de Z est aisément trouvée être:

$$R_e Z = \frac{(1 + |\Gamma|)(1 - |\Gamma|)}{|1 - \Gamma|^2} = \frac{(1 - |\Gamma|^2)}{|1 - \Gamma|^2}$$

$|\Gamma|^2$ étant positif réel, il en sera de même pour Z.

2^{ème} condition

Si les termes en $\cos^2\theta$ dans (IO-10) sont remplacés par $\cos^2\theta = p^2/p^2 - 1$, $|\Gamma|^2$ peut être alors écrit sous la forme:

$$|\Gamma|^2 = \frac{P_1 - 1}{P_1} = \frac{P_n(p^2)}{(p^2 - 1)^n + P_n(p^2)} \quad (IO-15)$$

A présent si on transforme $|\Gamma|^2$ en Γ comme il a été dit plus loin, (IO-2-I), on trouvera que

$$\Gamma = \frac{Q_n(\cos\theta)}{\cos^n\theta + \dots + j\sin\theta(\cos^{n-1}\theta + \dots)} \quad (IO-16)$$

Les impédances Z obtenues à partir de la forme ci-dessus de peuvent se mettre sous une forme rationnelle de sommes de polynômes:

$$Z = \frac{m_1(p) + n_1(p)}{m_2(p) + n_2(p)} \quad (10-17)$$

C'est la forme requise par le théorème de synthèse. Puisque Z est positive réelle, tous les coefficients apparaissant dans Z sont de même signe. A partir de (10-17), sachant que $\Gamma = (Z-1)/(Z+1)$, Γ devient:

$$\Gamma = \frac{(m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)}{(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)}$$

A présent, puisque $p = -j \cos \theta / \sin \theta$, on multiplie Γ par son conjugué complexe pour avoir son module et il vient

$$|\Gamma|^2 = \frac{(m_1 - m_2)^2 - (n_1 - n_2)^2}{(m_1 + m_2)^2 - (n_1 + n_2)^2} \quad (10-18)$$

Cette équation est identique à (10-15). Si on fait la différence entre le dénominateur et le numérateur dans (10-15) et dans (10-18), on trouve:

pour (10-15) : $(p^2 - 1)^n$

pour (10-18) : $4 [m_1(p)m_2(p) - n_1(p)n_2(p)]$

Comme les deux équations sont égales et représentent une même grandeur, on a nécessairement:

$$m_1(p)m_2(p) - n_1(p)n_2(p) = C(p^2 - 1)^n$$

C'est bien la forme requise par la deuxième condition du théorème; C étant ici égal à $1/4$.

CONCLUSION

=====

Une solution générale de synthèse des transformateurs quart-d'onde a été donnée. Il a été montré que, pour avoir une largeur de bande maximum avec un minimum de tolérance, la fonction atténuation d'insertion doit être un polynôme de Tchébycheff. Une solution est toujours possible étant données les caractéristiques du polynôme utilisé (degré n, valeur de l'impédance de charge, du T.O.S. toléré, ...).

Le paragraphe suivant, à l'aide d'une application numérique, donne avec plus de détails la marche à suivre pour la conception d'un transformateur à réponse de Tchébycheff.

XI CALCUL ET CONCEPTION D'UN TRANSFORMATEUR A LARGE BANDE

Soit à calculer un transformateur quart-d'onde à large bande utilisé pour adapter une impédance caractéristique unité à une impédance de valeur : 0,440 ,dans un guide d'onde de longueur d'onde de coupure égale à 14,42cm.Ce transformateur est requis avoir un T.O.S. au plus égal à 1,05 dans la bande de fréquence 2600-3600 Mhz.La bande passante doit donc être de 1000 Mhz.

L'étude sera faite en plusieurs étapes,dont les trois plus importantes sont:

- 1/- détermination des Z_n ,
- 2/- calcul de la bande passante(par les deux méthodes),
- 3/- conception proprement dite.

II-I Détermination des Z_n

Nous sélectionnons une fonction atténuation d'insertion de la forme suggérée par Collin:

$$P_i = 1 + k^2 T_n^2 \left(\frac{\cos \theta}{s} \right) \text{ avec } \theta = 2\pi l / \lambda_g$$

La théorie précédente a montré que tous les zéros de cette fonction doivent se situer à l'intérieur de la bande de fréquence de bas TOS

La recherche des Z_i va elle aussi se faire en plusieurs étapes car il nous faut déterminer les différents paramètres intervenant dans P_i .

a)-détermination du nombre n

L'annexe[B]et plus particulièrement le paragraphe sur le choix des polynômes montre que $T_n(0)$ prend deux valeurs différentes selon l'indice n.En effet,si n est pair, $T_n(0)=1$ et cela conduit à une désadaptation entre générateur et charge;si n est impair, $T_n(0)=0$.Pour notre part on choisira n impair et égal à 3.

Il est possible de se rendre compte de la véracité de ce choix par l'application de la formule déjà citée(5-?)

$$\Gamma = 1 + \left(\frac{-1}{2} \right)^3 \frac{1-0,440}{1+0,440} \left(\frac{\Delta F}{F} \right)^3 = 1,08$$

avec $F = 3100\text{MHz}$ et $\Delta F = 1000\text{MHz}$. De ce fait, la fonction atténuation sera un polynôme de degré 3.

b) -détermination de l

La longueur de chaque section de ligne doit être choisie de sorte que pour le centre de la bande, on ait $\cos\theta=0$ ($l = \lambda/4$; $\theta = \pi/2$). De plus les longueurs doivent être d'égalles valeurs aux extrémités de la bande on doit avoir, du fait de la symétrie par rapport à $\pi/2$, $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2$ où $\theta_1 = \beta_1 l$ et $\theta_2 = \beta_2 l$.

Le calcul des λ_g se fera à partir de la bien connue formule:

$\lambda_g = \lambda / [1 - (\lambda/\lambda_c)^2]^{1/2}$ on a $\lambda_1 = 8,33\text{cm}$ et $\lambda_2 = 11,54\text{cm}$ d'où
après calculs $\lambda_{g1} = 10,15\text{cm}$ $\lambda_{g2} = 19,20\text{cm}$

On doit avoir de plus $\beta_{g1} l + \beta_{g2} l = \pi$ avec $\beta_{gi} = 2\pi/\lambda_{gi}$

d'où $\frac{2\pi l}{\lambda_{g1}} + \frac{2\pi l}{\lambda_{g2}} = \pi$ soit $l = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{g1} \lambda_{g2}}{\lambda_{g1} + \lambda_{g2}}$

Avec les valeurs ci-dessus trouvées, il vient:

$$l = \frac{19,2 \cdot 10,15}{2(19,2 + 10,15)} = 3,31 \text{ cm}$$

Ainsi le transformateur se composera de 3 sections de lignes de longueur individuelle : 3,31cm. Dans toute la suite de ce chapitre les longueurs d'ondes citées seront celles calculées ci-dessus.

c) -détermination de s

Le facteur s sera déterminé par le fait que, à l'extrémité de la bande, l'argument de $T_3(\cos\theta/s)$ doit être égal à l'unité. Connaissant $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, déterminons la valeur du θ_1 correspondant tel que $T_3(\cos\theta_1/s) = 1$ Sachant que $l = 3,31\text{cm}$, il vient:

$\theta_1 = \beta_1 l = 2\pi l/\lambda_{g1} = 117,4^\circ$ soit $\theta_1 = 62,6^\circ$ et $\cos\theta_1 = 0,46$
on remplace alors dans l'expression de $T_3(x)$ et il vient l'équation suivante en s : $0,4 - 1,38s^2 - s^3 = 0$

La solution de cette équation, à l'aide des formules entre les coefficients et les tables universelles (M. Boll) donne $s = 0,464$

d) -détermination de k

Le facteur k sera déterminé du fait qu'à la fréquence infinie la longueur du transformateur devient nulle et la fonction P_i est telle

qu'elle résulte uniquement de l'impédance R terminale.

On sait que le coefficient s'exprime dans ce cas par

$$\Gamma = \frac{R-R_g}{R+R_g} \quad \text{comme } P_i = \frac{I}{I - |\Gamma|^2}, \text{ il vient alors } P_i = \frac{(R+I)^2}{4R}$$

avec $R_g=I$, comme supposé en hypothèse. Il nous faut égaliser ce résultat à celui donné par $T_3(x)$ où on aura posé $\cos\theta=I$ ($l=0$),

$$\frac{(R+I)^2}{4R} = I + k^2 T_3^2(I/s) \quad \text{d'où } k^2 = \left[\frac{(R+I)^2}{4R} - I \right] T_3^{-2}(I/s)$$

avec $s=0,464$, $R=0,440$, $T_3(x)=4x^3-3x$, il vient $k^2=1,577 \cdot 10^{-4}$

II-I-I Calcul de Γ

Le coefficient de réflexion est relié à P_i par la relation

$$|\Gamma|^2 = \frac{P_i - I}{P_i} \quad \text{d'où } |\Gamma|^2 = \frac{k^2 T_3^2(\cos\theta/s)}{I + k^2 T_3^2(\cos\theta/s)}$$

Il nous suffit de remplacer chaque terme par sa valeur correspondante et, après développements, on trouve que:

$$|\Gamma|^2 = \frac{k^2 T_3^2(\cos\theta/s)}{(0,253 \cos^6\theta - 0,0817 \cos^4\theta + 0,0066 \cos^2\theta) + I}$$

Le calcul des racines du dénominateur en fonction de p se fera en substituant les valeurs en $\cos\theta$ par les correspondantes en p . On sait que $\cos^2\theta = p^2/p^2 - I$. Pour la commodité de résolution de l'équation trouvée il a été posé $P=p^2$ et le dénominateur se réduit à:

$$D = 1,260P^3 - 3,094 P^2 + 3,088 P - I$$

L'extraction des racines d'une telle équation peut se faire par l'utilisation des relations entre les racines et l'utilisation de Tables Numériques Universelles (M. Boll).

Pour notre part, il est trouvé, après extraction des racines carrées que:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{+} (1,03 + j0,35) \\ p_2 &= \sqrt{+} (0,77) \\ p_3 &= \sqrt{-} (1,03 - j0,35) \end{aligned}$$

Il a été vu dans la partie théorique, que seules les racines comprises dans le demi-plan de gauche doivent être retenues; cela veut dire que pour nous, on ne retiendra que les racines négatives.

Ainsi, le dénominateur de $|\Gamma|^2$ peut être exprimé d'une manière plus simple, en produits de facteurs. En tenant compte que chaque racine est double, le dénominateur de Γ se déduit aisément de celui de $|\Gamma|^2$ par extraction de la racine carrée et on a:

$D = (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)$; par remplacement des p_i par leur valeur il vient

$$D = p^3 + 2,84 p^2 + 2,79 p + 0,92I$$

La fonction Γ est alors, en tenant compte du terme supplémentaire au numérateur issu de la transformation précédente, en p ,

$$\Gamma = \frac{\&k T_3(\cos\theta/s) (p^2-I)^{3/2}}{p^3 + 2,84 p^2 + 2,79 p + 0,92I}$$

La théorie a montré que la valeur de la constante multiplicative $\&$ est uniquement déterminée par la condition $\Gamma = R-I/R+I$ pour $p = \infty$ ou $\cos\theta = I$. Lorsque $p \rightarrow \infty$, le numérateur de Γ tend vers la quantité $\&k T_3(I/s)$ (rapport de deux quantités infinies)

Sachant que $k^2 = I,577 \cdot 10^{-4}$, $k = 0,0125$, $T_3(I/0,464) = 33,55$
 $R = 0,440$ $\Gamma = R-I/R+I = 0,388$, il vient $\& = 0,92I$ puisque on a $\& = \Gamma/kT_3(I/s)$

Il nous faut à présent exprimer Γ en fonction de $\cos\theta$ seulement et cela se fera en remplaçant p par $\cos\theta/(\cos\theta-I)^{1/2}$. La transformation donne lieu pour Γ à:

$$\Gamma = \frac{\&k T_3(\cos\theta/s) (p^2-I)^{3/2} [-j \sin\theta (\cos^2\theta - I)]}{\cos\theta (-3,79 \cos^2\theta + 2,79) - j \sin\theta (3,76 \cos^2\theta - 0,92I)}$$

Le développement du numérateur, après remplacement de p par sa valeur; de k d' $\&$ et de $T_3(\cos\theta/0,464)$ par leurs quantités correspondantes, il vient

$$\&k T_3(\cos\theta/s) = 0,92I(0,503 \cos^2\theta - 0,08I \cos\theta)$$

Il faut signaler le fait que le terme $(p^2-I)^{3/2}$ provient du remplacement de $\cos^3\theta$ par $p^3/(p^2-I)^{3/2}$.

Finalement l'expression finale de Γ est:

$$\Gamma = \frac{0,92I \cos\theta(0,503 \cos^2\theta - 0,08I)}{\cos\theta(-3,79 \cos^2\theta + 2,79) - j \sin\theta(3,76 \cos^2\theta - 0,92I)}$$

II-I-2 Calcul de Z_e

Ayant ainsi déterminé Γ , l'impédance d'entrée s'endéduit immédiatement de la simple relation

$$Z_e = \frac{-I + \Gamma}{I - \Gamma} \quad \text{il suffit de remplacer, haut et bas, par sa valeur}$$

$$N = \cos\theta(-3,327 \cos^2\theta + 2,716) + j \sin\theta(-3,76 \cos^2\theta + 0,92I)$$

$$D = \cos\theta(-4,254 \cos^2\theta + 2,865) + j \sin\theta(-3,76 \cos^2\theta + 0,92I)$$

Ainsi Z_e est égale au rapport de ces deux quantités. L'étude de N et de D montre que les parties imaginaires sont égales. Cela nous assure sur le fait que le transformateur ayant un coefficient de réflexion symétrique a été réalisé.

La construction de la matrice impédance correspondante, selon (10-14), donne lieu à:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\cos\theta}{R_1}(-3,327 \cos^2\theta + 2,716) & j \sin\theta(-3,76 \cos^2\theta + 0,92I) \\ j \frac{\sin\theta}{R_1}(-3,76 \cos^2\theta + 0,92I) & \cos\theta(-4,254 \cos^2\theta + 2,865) \end{bmatrix} = [Z_e]$$

Z_e a été transcrite sans tenir compte de facteur multiplicatif. R et ce terme seront justement déterminés par le fait que, pour $\cos\theta = 1$ (longueur électrique nulle), la matrice impédance doit devenir égale à la matrice unité.

Pour R_1 , on doit le prendre égal à $R_1 = 0,611$ de sorte que:

$$-\frac{\cos\theta}{0,611}(3,327 \cos^2\theta - 2,716) = -\cos\theta(5,442 \cos^2\theta - 4,442)$$

$$-j \frac{\sin\theta}{0,611}(3,762 \cos^2\theta - 0,92I) = -j \sin\theta(6,154 \cos^2\theta - 1,507)$$

La constante multiplicative sera prise égale à 0,72I de sorte que

$$-j\sin\theta(3,762\cos^2\theta - 0,921) \cdot 0,72I = -j\sin\theta(2,710\cos^2\theta - 0,664)$$

$$-\cos\theta(4,254\cos^2\theta - 2,865) \cdot 0,72I = -\cos\theta(3,064\cos^2\theta - 2,064)$$

Il est alors visible que, pour $\cos\theta = 1$ ($\sin\theta = 0$) on obtient bien la matrice unité.

II-I-3 Calcul des Z_n

La théorie a montré que la multiplication de Z_e à gauche par la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -j\sin\theta Z_I \\ -j\sin\theta/Z_I & \cos\theta \end{bmatrix}$$

donne une matrice $[Z]'$. Dans cette dernière, Z_I doit être choisi de telle sorte que les coefficients de la plus grande puissance de $\cos\theta$ doivent disparaître.

On effectuera ce même calcul pour les deux autres impédances Z_2 et Z_3 . A chaque instant on multiplie la matrice restante par celle donnée ci-dessus.

Pour Z_I , il est trouvé:

$$\cos^2\theta(5,442\cos^2\theta - 4,442) + \sin^2\theta Z_I(6,154\cos^2\theta - 1,507)$$

$$\text{soit } 5,442 - 6,154Z_I = 0 \quad \text{d'où } \underline{Z_I = 0,884}$$

Quand cet élément du transformateur est enlevé, la matrice résultante est, après avoir remplacé Z_I par sa valeur, :

$$\begin{bmatrix} 2,34\cos^2\theta - 1,335 & j\sin\theta(1,17\cos\theta) \\ j\sin\theta(3,52\cos\theta) & 1,74\cos^2\theta - 0,749 \end{bmatrix}$$

Comme précédemment, la multiplication à gauche permet de déterminer Z_2 ; il est trouvé:

$$2,34 - 3,52Z_2 = 0 \quad \text{d'où } \underline{Z_2 = 0,668}$$

Après avoir oté Z_2 , le transformateur restant a une matrice:

$$\begin{bmatrix} 0,998\cos\theta & -j\sin\theta 0,498 \\ j\sin\theta 2,01 & 1,02\cos\theta \end{bmatrix}$$

la valeur correspondante de Z_3 après multiplication à gauche est:

$$0,998 - 2,01Z_3 = 0 \quad \text{d'où } \underline{Z_3 = 0,496}$$

Finalement il est possible de résumer et de dire que le transformateur à large bande de 1000Mhz, susceptible de fournir un T.O.S. tolérable de 1,05, a 3 sections de ligne de même longueur et d'impédances respectives:

$$Z_1 = 0,884 \quad Z_2 = 0,668 \quad Z_3 = 0,496$$

Il faut préciser que toutes ces impédances sont normalisées par rapport à R_g (qui lui même devient donc égal à 1). De plus il faut préciser que les longueurs d'onde données sont celles dans le guide et non celles à l'air libre.

Il est nécessaire de faire remarquer que, si on remplace Z_3 par sa valeur dans la matrice restante on obtient la matrice unité; cela fournit une vérification quant à la justesse de nos résultats.

Après cette longue partie de calculs détaillés, nous allons étudier la bande passante du système et la comparer avec nos hypothèses.

II-2 Calcul de la bande passante

La méthode utilisée sera celle nécessitant l'emploi de l'Abaque de Smith, comme il a été montré dans (5-3-2).

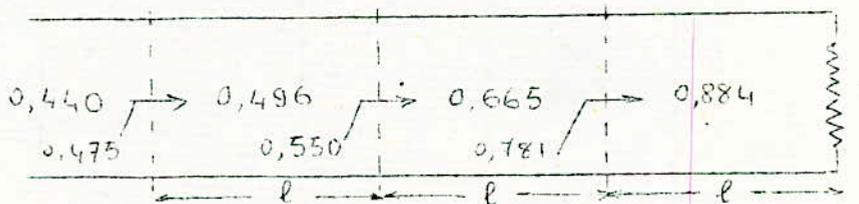
Les différents rapports de transformation sont:

$$Z_2/Z_3 = 0,668/0,884 = 0,75 \quad Z_1/Z_2 = 0,496/0,668 = 0,74$$

Avant de calculer les T.O.S. dans chaque section, il nous faut déterminer les impédances d'entrée de chaque tronçon à l'aide de la classique formule (2-6). On trouve que:

$$Z_{e3} = 0,781 \quad Z_{e2} = 0,550 \quad Z_{e1} = 0,475$$

On a supposé pour cela que chaque ligne a une longueur $\lambda/4$ à la fréquence centrale, et le schéma du transformateur est alors:



Les valeurs des différents T.O.S. s'endéduisent aisément :

$$S_1 = 1/0,884 = 1,13 \quad S_2 = 0,781/0,668 = 1,17 \quad S_3 = 1,11$$

Le T.O.S. final est de $S_0 = 0,475/0,440 = 1,065$
Comme pour l'étude d'un transformateur simple, il nous faut déterminer les nouvelles intersections des cercles de T.O.S. correspondants.

$$S_2 = 1,17 \begin{pmatrix} 0,86 \\ 1,17 \end{pmatrix} \cdot 0,75 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,645 \\ 0,877 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = 1,11 \begin{pmatrix} 0,90 \\ 1,11 \end{pmatrix} \cdot 0,74 \cdot 0,75 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,487 \\ 0,637 \end{pmatrix}$$

Il nous a été imposé un T.O.S. maximum tolérable de $S=1,05$; donc

$$S_0 = 1,05 \begin{pmatrix} 0,95 \\ 1,05 \end{pmatrix} \cdot 0,74 \cdot 0,75 \cdot 0,9 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,47 \\ 0,52 \end{pmatrix}$$

le facteur 0,9 est issu du rapport $Z_0/Z_I = 0,440/0,496 = 0,9$

Tout ceci reporté sur l'abaque permet le calcul de la bande passante; tous les cercles des différents T.O.S. devant passer par les points ci-dessus déterminés.

Il vient, après avoir tracé les deux droites qui couperont le grand cercle extérieur,

$$\text{point M : } s/\lambda_I = 0,206 \qquad \text{point N : } s/\lambda_2 = 0,282$$

$$\text{d'où } \Delta f/F_0 = 4(0,282 - 0,206) = 30,4 \%$$

a)- Il serait intéressant de voir quelle serait la valeur de cette bande si on n'utilise qu'une seule section de ligne pour adapter R et I = R_g; on aurait $Z_0 = 0,665$, le T.O.S. serait égal à $S=1/0,665=1,5$ et le rapport de transformation de $Z_0/Z_I = 0,440/0,665 = 0,66$
D'où, en tenant compte de la condition que $S_0 \leq 1,05$,

$$S_0 = 1,05 \begin{pmatrix} 0,95 \\ 1,05 \end{pmatrix} \cdot 0,66 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,627 \\ 0,690 \end{pmatrix}$$

Il vient, après report sur l'abaque,

$$\text{point M' } s/\lambda_I = 0,236 \qquad \text{point N' } s/\lambda_2 = 0,262$$

$$\text{d'où } \Delta f/F_0 = 4(0,262 - 0,236) = 10,4 \%$$

b)- Il serait aussi intéressant de calculer la bande théorique, comme prévue par les hypothèses:

- directement, en faisant:

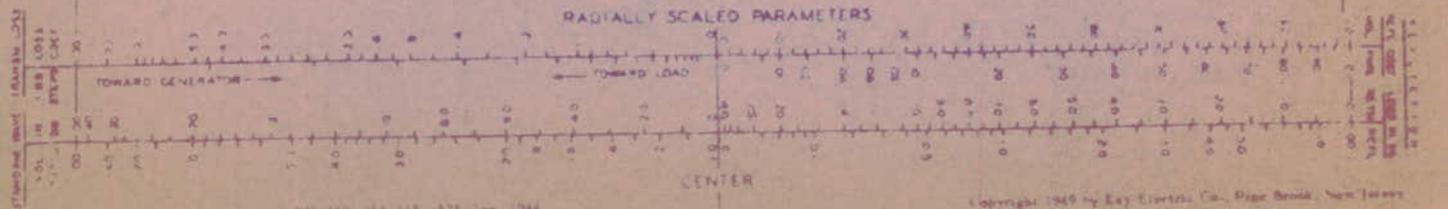
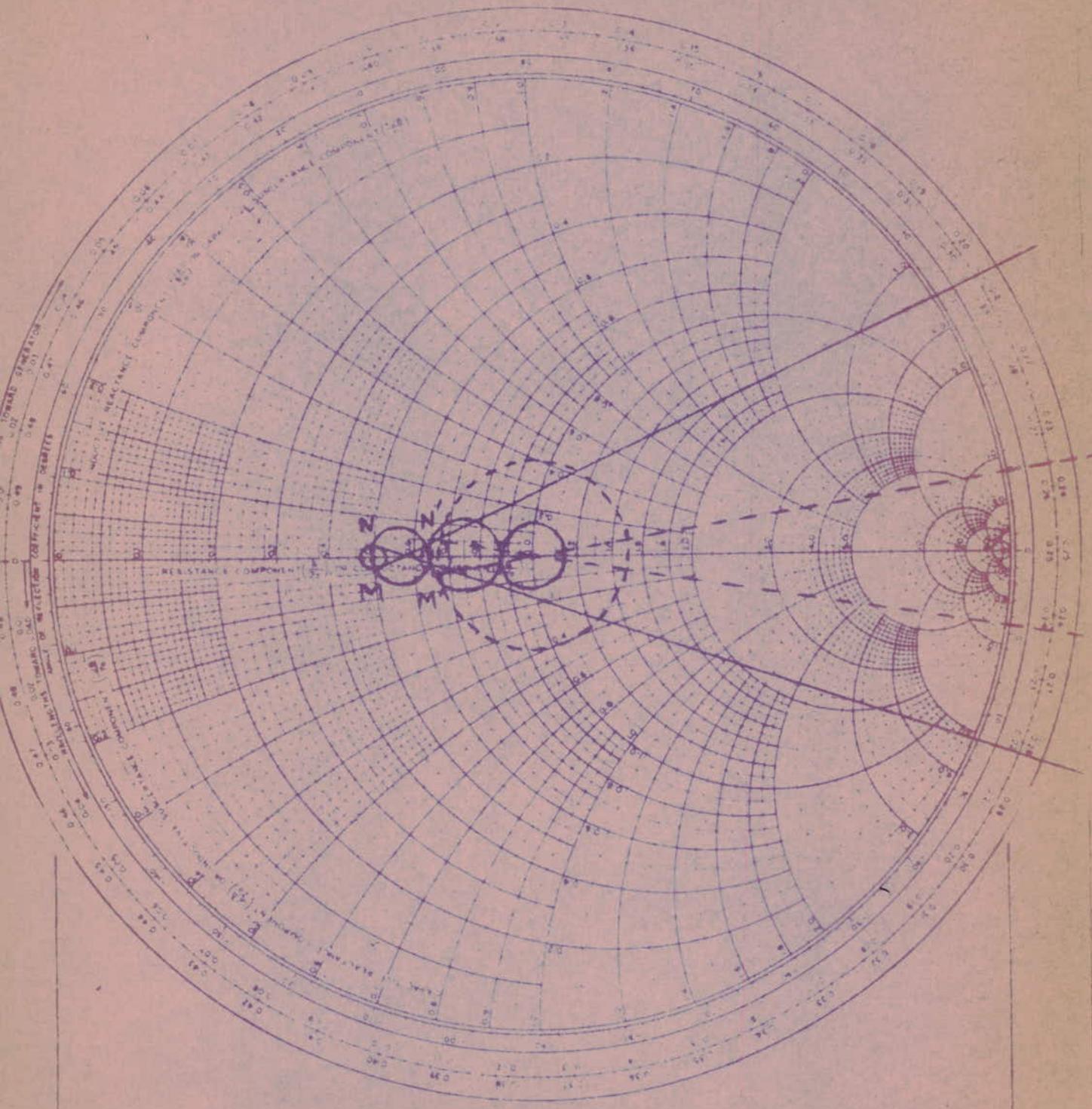
$$\frac{\Delta f}{F_0} = \frac{f_2 - f_1}{F_0} = \frac{3600 - 2600}{3100} = 32,3 \%$$

- à l'aide de x et de & du paragraphe (5-3-I):

$$\& = 0,05 \quad S = 1,11 \quad \text{d'où } x = 0,238 \quad \text{soit } \Delta f/F_0 = 30,4 \%$$

NAME	TITLE	DWG. NO.
SMITH CHART Form 736-N	GENERAL RADIO COMPANY, WEST CONCORD, MASSACHUSETTS	DATE

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES



Il peut être constaté que les résultats diffèrent de peu et que la bande passante du transformateur ainsi calculé est 3 fois plus large que celle pour une seule section.

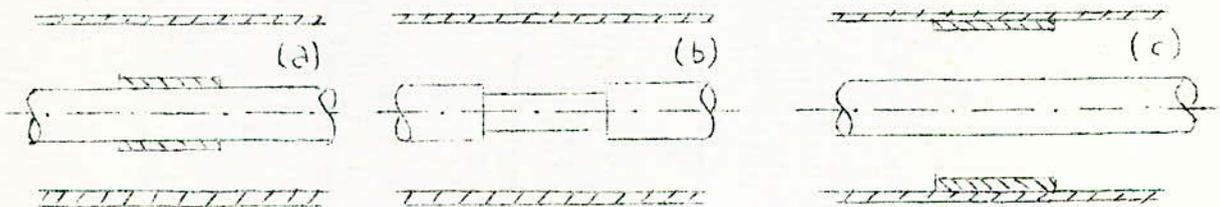
Ainsi a été obtenue une synthèse générale concernant l'étude d'un transformateur à large bande et l'application numérique précédente a permis une meilleure compréhension de la méthode employée.

II-4 Conception proprement dite

Le transformateur se présentera sous forme d'une cascade de 3 lignes coaxiales ou de 3 guides d'onde. Chacune de ces deux possibilités présente ses difficultés propres et tout dépendra de la technique utilisée.

II-4-1 Structure en lignes coaxiales

Il est bien connu que l'impédance caractéristique dépend du conducteur central; donc il est possible de la modifier en jouant sur le diamètre de ce conducteur. On obtient alors les structures ci-après:



La solution a) est la plus employée: on glisse une bague sur le conducteur interne. Pour ce faire on utilisera la formule donnant l'impédance caractéristique d'un coaxial:

$Z_0(\Omega) = 138/\sqrt{\epsilon} \cdot \log D/d$ ϵ étant la constante diélectrique de l'isolant; D et d étant les diamètres des conducteurs.

Il est aussi possible de jouer sur le conducteur extérieur (c)

Le transformateur final est alors une série de trois montages tels que ci-dessus.

II-4-2 Structure en guides d'onde

Le problème dans ce cas est plus complexe, bien que le plus courant car l'obtention d'impédances différentes est plus difficile. On

sait que l'impédance caractéristique est donnée par la formule:

$$Z_0(\Omega) = \frac{2 a/b}{\sqrt{1 - (\lambda/2b)^2}} 376,8$$

Pour notre cas, on gardera b constant (car c'est de lui que dépend la fréquence de coupure qui doit rester la même pour tous les guides), et on variera le petit côté a . Il est visible que la Z_0 correspondante est aisément déduite.

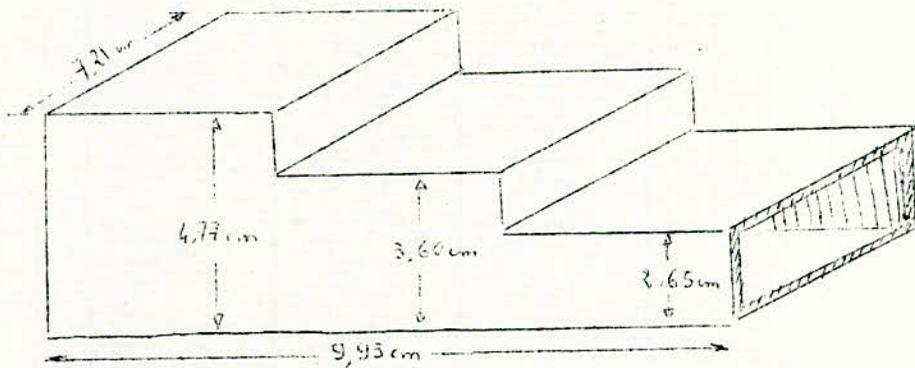
Nous allons à présent calculer les différents petits côtés a_i , connaissant Z_i . Nous allons supposer que les impédances ont été normalisées à 1000 ; donc $Z_1=884\Omega$ $Z_2=668\Omega$ et $Z_3=496\Omega$.

D'où, connaissant $\lambda_{g1}=10,15$ cm $\lambda_{g2}=19,2$ cm $\lambda_c=2b=14,42$ cm il vient, après calculs, à la fréquence centrale:

$$a_i = Z_i b / 2.377.1,75$$

Soit $a_1=4,77$ cm $a_2=3,60$ cm $a_3=2,65$ cm

Finalement le transformateur total a l'aspect ci-dessous:

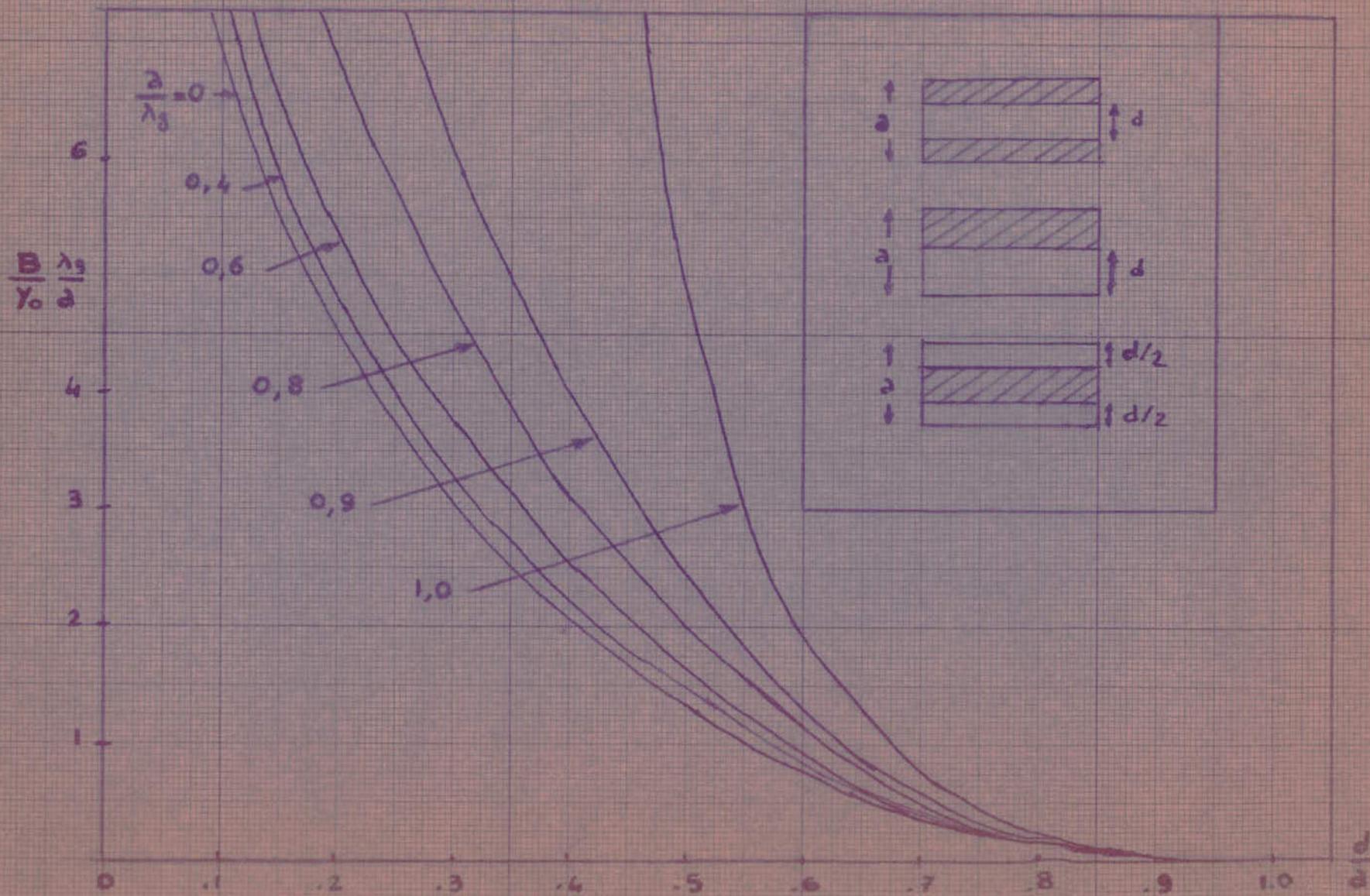


On utilisera pour guide initial le guide standard RG-48U, en laiton; RG-75U, en aluminium. Les puissances maximales pouvant être transmises sont de 2,0 à 3,2 mégawatts; l'atténuation théorique pour 100 pieds (30,47m) est de 1,102 à 0,752 db, pour le premier guide; et de 0,94 à 0,641 db pour le deuxième.

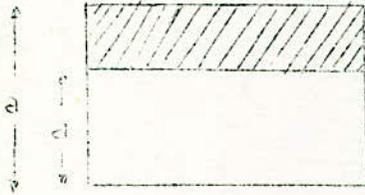
Il est visible que pour notre étude ces atténuations sont très faibles. Avec toutes les données ci-dessus exposées, il est possible de concevoir un transformateur pratiquement. On peut à présent s'intéresser aux discontinuités et déterminer leurs valeurs.

SUSCEPTANCE DES IRIS CAPACITIFS DANS UN GUIDE

(d'après 'The Microwave Engineer's Handbook')



Pour ce faire, on se servira des courbes donnant les susceptances d'un diaphragme à l'intérieur d'un guide, données par The Microwave Engineers' Handbook [15]. Il nous faut calculer d/a comme il est montré ci-contre.



On a 2 iris, entre Z_1-Z_2 et entre Z_2-Z_3 ; pour le premier on a

$$d_1 = 3,6 \text{ d'où } d_1/a_1 = 0,71$$

$$d_2 = 2,65 \text{ d'où } d_2/a_2 = 0,73$$

Le lecteur se reportera à la courbe ci-jointe, sachant que $a/\lambda_g = 0,28$ et que $\lambda_g/a = 3,5$ et il est vu que la valeur de $B\lambda_g/Y_0 a$ est de 0,35 soit $B/Y_0 = 0,1$

En conclusion on peut affirmer qu'il est possible de négliger les réactances de discontinuités.

XII Détermination des Z_n : 2^{ème} méthode

Au cours des paragraphes X et XI nous avons vu la détermination des Z_n selon la méthode de Riblet; à présent une deuxième méthode est exposée: c'est celle de Collin.

Ce dernier, pour obtenir une réponse de Tchébycheff, égale les coefficients de même puissance de $\cos\theta$ dans les deux expressions ci-après $A_{II}A_{II}^+R$ et $1+k^2T_n^2(\cos\theta/s)$. Donc le procédé rejoint le précédent en ce sens qu'il faut développer les termes en $\cos\theta$ mais cette méthode risque de devenir fastidieuse dès que n dépasse 3.

Nous allons, pour une meilleure compréhension utiliser cette méthode à notre exemple précédent et déterminer les différentes Z_n .

Pour un transformateur à 3 sections, Collin donne le résultat suivant pour Z_I :

$$\frac{R - I}{\operatorname{tg}^2 \theta_0} = Z_I^2 + 2\sqrt{RZ_I} - \frac{R}{Z_I^2} - \frac{2\sqrt{R}}{Z_I}$$

où θ_0 est la valeur de θ au zéro de $T_3(\cos\theta/0,464)$ dans l'intervalle $0 < |\cos\theta| < 0,464$. Les valeurs de Z_2 et de Z_3 sont données par la relation déjà citée $Z_i Z_{n+1-i} = R$ soit $Z_I Z_3 = R$ et $Z_2 = R$

Pour notre exemple, on a $\cos\theta_0 = 0,403$ par l'équation $T_3(\cos\theta/s) = 0$

d'où $\text{tg}\theta_2 = 2,27$. En remplaçant ces résultats dans l'expression donnée il vient l'équation ci-dessous: (avec $R=0,440$)

$$Z_I^4 + 1,33Z_I^3 + 0,108Z_I^2 - 1,33Z_I - 0,440 = 0$$

C'est une équation de degré 4 et sa résolution n'est pas aisée. On a contourné cette difficulté en faisant une simple vérification: on a remplacé Z_I par $0,884$ et il a été constaté que cette valeur est solution de l'équation; donc $Z_I = 0,884$. A partir de là, il vient :

$$0,884 \cdot Z_3 = 0,440 \text{ d'où } Z_3 = 0,497 \quad Z_2^2 = 0,440 \text{ d'où } Z_2 = 0,665$$

Il peut être constaté que ces valeurs sont identiques à celles trouvées précédemment.

Collin en déduit alors la fonction atténuation en termes de θ_2 et son expression est:

$$P_i = I + \frac{(R - I)^2}{4R} \frac{(\sec^2\theta_2 \cos^2\theta - I)^2 \cos^2\theta}{\text{tg}^4\theta_2}$$

A l'aide de cette formule, on peut alors tracer la variation de P_i en fonction de θ pour notre transformateur, sachant que $R=0,440$, $\cos\theta_2=0,403$ et $\text{tg}\theta_2=2,27$ il vient

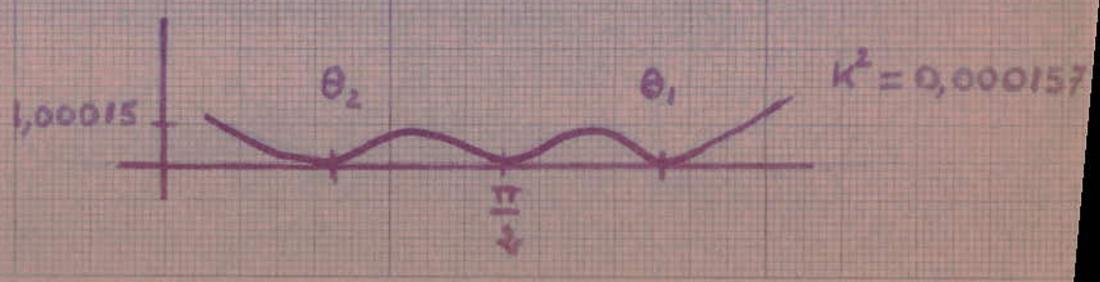
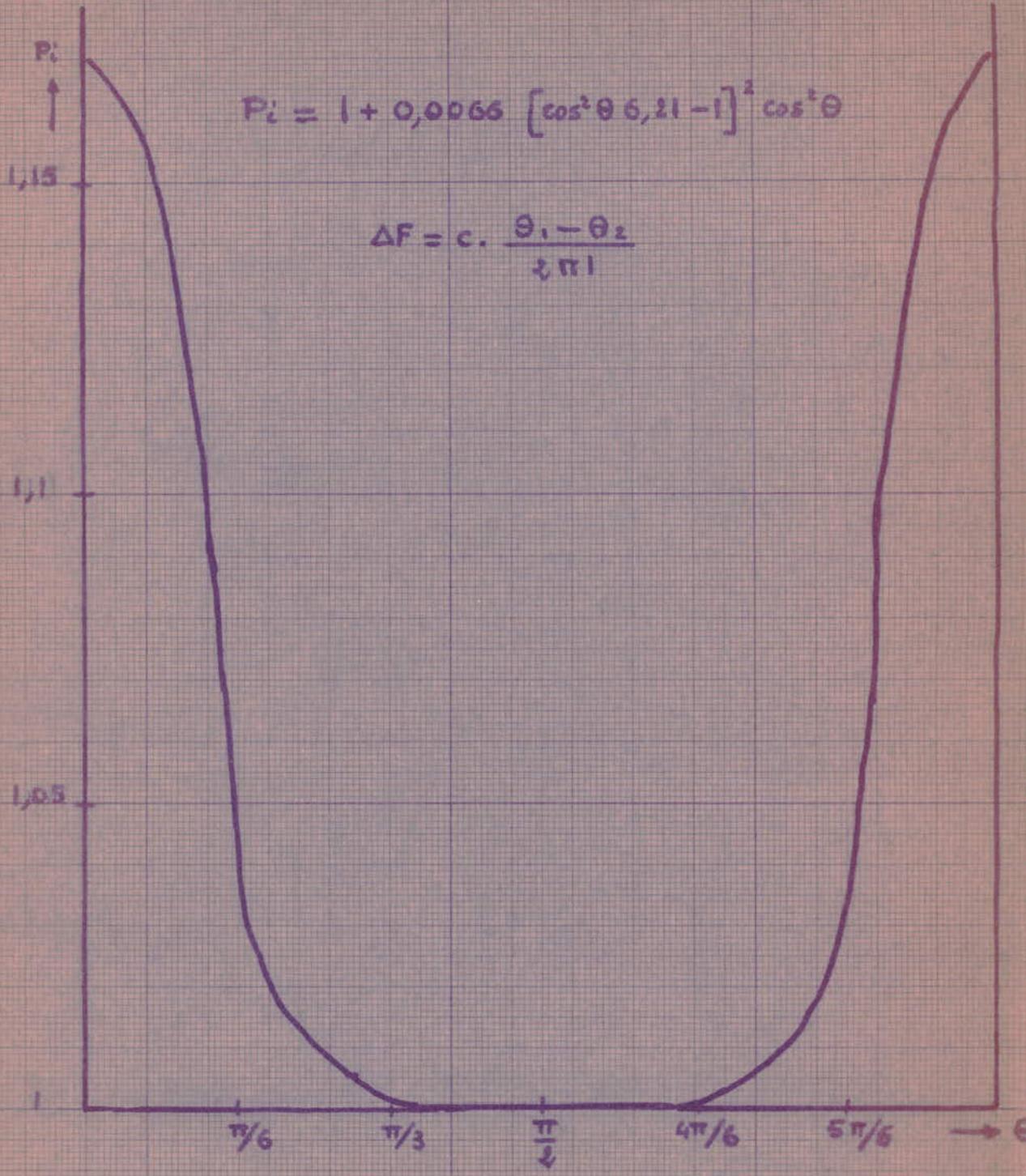
$$P_i = I + 0,0066 (6,2I \cos^2 - I)^2 \cos^2\theta$$

On obtient la courbe de variation ci-jointe et il peut être constaté que c'est la courbe d'affaiblissement d'un filtre passe-bande. Il est possible de vérifier que la bande passante est de l'ordre de 1350MHz en faisant $\Delta F = c(\theta' - \theta'') / 2\pi l$.

Certes cette courbe est purement théorique mais elle permet d'avoir une allure générale de la fonction P_i ; il peut être constaté qu'au voisinage de l'axe des θ , la fonction a l'allure du polynôme de degré 3 de Tchébycheff: elle subit 2 ondulations de part et d'autre de $\theta = \pi/2$ (voir les courbes $T_n(x)$ en annexe B). On peut dire qu'en ce sens la synthèse est complète et elle nous a permis l'étude et la conception d'un transformateur large bande à résonance déterminée.

Ces deux méthodes, quoique très semblables ont le seul désavantage d'être d'une application numérique fastidieuse, comme il a pu être constaté; néanmoins les résultats sont excellents et c'est cela le principal pour notre étude.

COURBE DE VARIATION DE P_i



APPLICATION DES TRANSFORMATEURS QUART-D'ONDE

=====

Jonction à large bande d'un guide rectangulaire à un guide circulaire. Transformateur de mode et d'impédances.

Comme il peut être deviné c'est une application très intéressante et elle est extraite d'un article paru dans Microwave Théory and Techniques (Stuhly (13)).

Les transformateurs connectant des guides rectangulaires à des guides circulaires sont très utilisés dans les systèmes de transmission, les composants aériens, les instruments de mesure, ... Les transitions conventionnelles, telles que passage progressif, transformateur diélectrique, donnent une adaptation satisfaisante à l'intérieur d'une bande de fréquence d'un maximum de 10 à 15% seulement.

Certains systèmes nécessitent des transformateurs de mode et d'impédances pour être introduits entre les G.R. et les G.C. Ces transformateurs doivent fournir de très faibles réflexions à l'intérieur d'une bande de fréquence plus large.

On exposera ci-après la théorie d'un tel transformateur, le G.R. transmettant le mode TE_{01} et le G.C. le mode TE_{11} . La théorie ne sera pas très rigoureuse en ce sens quelle est approximative.

Le guide rectangulaire a des dimensions dans un rapport 2 à 1. Les rapports des impédances caractéristiques sont usuellement à l'intérieur d'un intervalle de 2 à 4. Les caractéristiques large bande du transformateur dépendent principalement des dimensions du G.C. En effet ces dernières déterminent la fréquence de coupure, l'impédance caractéristique et ses variations.

Pour obtenir la condition de travail optimum, le G.C. est choisi de sorte que les longueurs d'onde de coupure pour les deux modes fondamentaux soient égales. Ainsi le rapport des impédances caractéristiques des 2 guides est égal à 2 et est indépendant de la fréquence:

$$\lambda_{c,II}^H = \lambda_{c,OI}^H \quad Z_{0(c)}/Z_{0(r)} = 2 = c^t$$

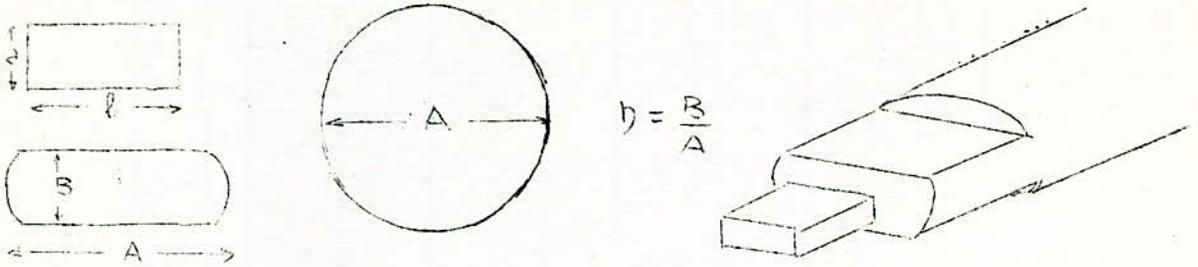
On sait que pour le mode TE_{01} dans un G.R., on a $\lambda_c = 2b$; et que pour le mode TE_{11} dans un G.C., on a $\lambda_c = 1,71 A$
d'où: $A = 2b/1,71$ où b = grand côté du G.R.
 $A =$ diamètre du G.C.

Donc on peut utiliser un transformateur d'impédance, de rapport 2, et il servira en même temps de transformateur de modes.

Le problème a été résolu par l'emploi de tronçons de G.C. tronqués, par analogie aux transformateurs étudiés précédemment. Il nous faut connaître comment l'impédance caractéristique et la longueur d'onde de coupure du guide tronqué dépendent des dimensions, ici de $n=B/A$ (voir page suivante signification de n).

Le problème est tranché comme suit et ce d'une manière approximative:

- on suppose que λ_c du guide tronqué est égale à celle du G.R. ayant la même surface transversale et la hauteur égale à celle du G.C. tronqué. Ceci donne une expression pour la λ_c du guide tronqué:



$$\lambda_c/A = \sqrt{1-n^2} + 1/n \arcsin n$$

La détermination de l'impédance Z_0 est beaucoup plus difficile et là aussi, on utilise une méthode approximative: on assimile que l'impédance Z_0 du guide tronqué, normalisée à celle du G.R., est une fonction du rapport $n = B/A$:

$$Z_0(\text{tr})/Z_0(\text{r}) = f(n)$$

On sait que pour $n=1$, $A=B$, le rapport est égal à 1 (on est dans le plan du G.C. et on a vu que $Z_0(\text{r})/Z_0(\text{r}) = 1 \implies Z_0(\text{tr})/Z_0(\text{r}) = 1$)

Comme il a été dit au début cette étude est très sommaire car une étude plus rigoureuse présenterait des difficultés telles que: déformations causées par les discontinuités.

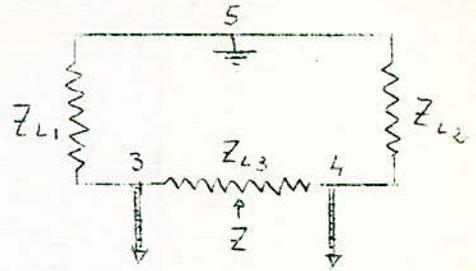
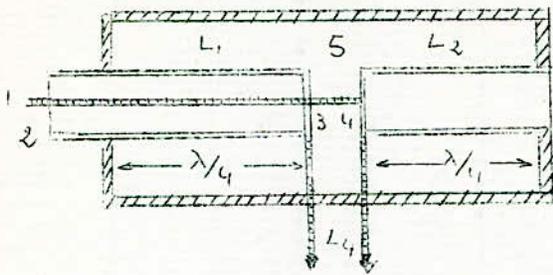
L'auteur de l'article a fait une étude sur la variation du TOS à l'entrée du transformateur et il est montré qu'il ne dépasse pas 1,1. De plus le transformateur étudié se compose de 4 sections $\lambda/4$ de guides circulaires tronqués et la longueur totale est de 35mm pour une bande de fréquence s'étalant de 8 à 12 Ghz.

PASSAGES SYMETRIQUE-DISSYMETRIQUE "BALUN"

Les passages (ou transformateurs) symétrique-dissymétrique et inversement (soit passages S-D et D-S), sont destinés à relier un élément symétrique à un élément dissymétrique et inversement, de façon qu'il n'y ait pas déséquilibre de l'élément symétrique par rapport à la terre. Ils permettent, par exemple de relier un émetteur ou un récepteur VHF à une antenne symétrique au moyen d'une ligne coaxiale au lieu d'une ligne bifilaire.

On utilise pour cela les propriétés transformatrices des lignes. On distingue alors des passages à bande étroite et des passages à large bande utilisant des lignes $\lambda/4$. Ces systèmes sont aussi appelés Balun, du terme américain 'Balanced-Unbalanced'.

Un passage S-D ou D-S à large bande est constitué par 2 lignes coaxiales L_1 et L_2 , de longueurs $l_1 = l_2 = \lambda/4$ et d'impédances Z_1 et Z_2 . Le schéma ci-après est donné par Liot [1]. Le conducteur interne de la ligne coaxiale L_2 se continue à l'intérieur du conducteur interne de la section L_1 et va se fixer à l'extrémité du conducteur interne de la section L_2 . L'écartement entre 3 et 4, aussi petit que possible (déterminé par la puissance mise en jeu dans le passage), est par exemple compris entre 3 et 10mm; un écartement exagéré aurait pour effet d'introduire une réactance inductive $+jX$ en série avec une section du passa-



ge, d'où un certain déséquilibre.

La figure de droite donne le schéma équivalent, vu de la ligne symétrique L_1 . On voit que l'impédance d'entrée Z comprend, en parallèle l'impédance Z_{L3} de la ligne coaxiale L_3 et les impédances en série Z_{L1} et Z_{L2} , données par les expressions :

$$Z_{L1} = Z_1 \operatorname{tg} 2\pi l_1 / \lambda \quad Z_{L2} = Z_2 \operatorname{tg} \pi l_2 / \lambda$$

$$Z = \frac{(Z_{L1} + Z_{L2}) Z_{L3}}{Z_{L1} + Z_{L2} + Z_{L3}}$$

Lorsque $l_1 = l_2 = \lambda/4$ $Z_{L1} = Z_{L2} = \infty$ et $Z = Z_{L3}$

A partir des expressions de Z_{L1} et Z_{L2} , on peut vérifier que Z varie peu de part et d'autre de λ , c'est à dire que le passage peut être utilisé dans une bande de fréquence assez large. De plus, Z varie d'autant moins avec λ que l'impédance caractéristique des sections L_1, L_2 est plus élevée.

En conclusion, on peut affirmer que dans le cas d'une bande large par rapport à la fréquence centrale, il faudra choisir des sections de lignes d'impédance caractéristique élevée.

Ces systèmes trouvent leurs principales applications dans les transferts d'énergie dans les centres d'émission. Un document du Centre Radioélectrique de Pontoise (citant un article de Proc. of The IRE), donne quelques exemples de baluns tels qu'ils sont utilisés.

XIV - CONCLUSION

=== =====

Une étude sur la théorie générale des transformateurs quart-d'onde à large bande vient d'être donnée. Certes ce ne peut être qu'une approche car c'est un domaine trop vaste et parfois trop théorique pour pouvoir être traité avec si peu de détails. Aussi n'ai-je donné que la méthode qui, actuellement, et à ma connaissance, est la plus connue: celle de Collin-Riblet. J'ai cru bien faire, pour compléter une partie ardue en équations, en joignant un calcul et une conception d'un transformateur qui pourrait être d'une réalisabilité physique assez facile.

Il est à signaler que l'étude et surtout la théorie des transformateurs à large bande est très récente, puisque le premier document date de 1955 et que, malheureusement tous les autres n'ont pas encore été édités mais simplement parus sous forme d'articles dans des revues spécialisées (Microwave Théorie and Techniques).

Pour ma part c'est posé le problème de cette recherche fondamentale de documents et la bibliothèque de l'E.N.P.A. ne possède aucun livre, exception faite du 'Ghose' reprenant les travaux de Collin, traitant de cette question. Tous les livres d'hyperfréquences consultés ne donnent que des notions générales sur les transformateurs à bande étroite et presque rien pour le sujet qui m'intéressait.

Puis s'est posé pour moi la difficulté de traduction, la majorité des livres consultés étant américains, et ce n'est qu'à partir de cette année que l'on voit certains articles traduits en français (article de Carlin dans l'Onde Electrique)

Certes mon étude s'est bornée aux transformateurs $\lambda/4$ seulement. Il existe d'autres procédés d'adaptation et pour mémoire, on trouve: adaptation par guides spéciaux en U et H, par vis plongantes distantes de $\lambda/4$, par obstacles localisés fixes ou mobiles, etc...

Juin 1957

ANNEXE A

FONCTIONS A PARTIE REELLE POSITIVE

Définition :

Soit une fonction $\omega(p)$ de la variable complexe $p = x + jy$. On dit que $\omega(p)$ est une fonction à partie réelle positive (en abrégé f.p.r.), si l'on a :

$$\begin{aligned} \omega(p) \text{ réel} & \text{ pour } p \text{ réel} \\ \operatorname{Re}[\omega(p)] \geq 0 & \text{ si } \operatorname{Re}(p) \geq 0 \end{aligned}$$

Dans cette annexe, on ne s'intéressera qu'aux fonctions rationnelles puisque ce sont elles que l'on rencontre dans la synthèse des transformateurs. On aura la fonction $Z(p)$ de la forme :

$$Z(p) = P(p)/Q(p)$$

où P et Q sont deux polynômes en p de degré n et m . On notera auparavant, que si $Z(p) = u + jv$, $1/Z(p) = u - jv / u^2 + v^2$, c'est à dire que $1/Z(p)$ est aussi une fonction à partie réelle positive.

Appelons p_i ($i=1, 2, \dots, n$), un des pôles de $Z(p)$, c'est à dire un des zéros de $Q(p)$. Nous pouvons écrire le développement de Laurent correspondant sous la forme :

$$Z(p) = \frac{B_r}{(p-p_i)^r} + \dots + \frac{B_1}{(p-p_i)} + A_0 + A_1(p-p_i) + \dots$$

Dans le voisinage de p_i , seul le premier terme prédomine et alors

$$Z(p) \simeq B_r / (p-p_i)^r$$

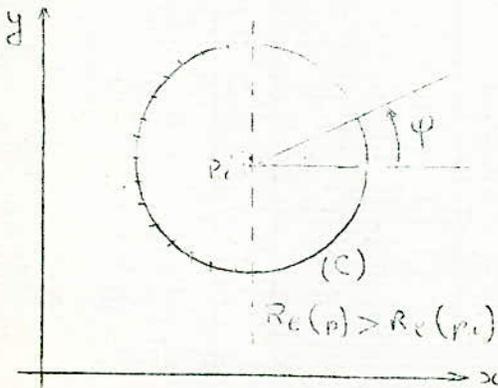
Si la forme polaire est utilisée, et si on pose $(p-p_i) = \rho e^{j\varphi}$

et $B_r = k e^{j\psi}$, il vient $Z(p) \simeq k / \rho^r \cdot e^{j(\psi - r\varphi)}$ (I)

d'où on obtient :

$$\operatorname{Re}[Z(p)] \simeq k / \rho^r \cdot \cos(\psi - r\varphi) \quad (2)$$

Supposons à présent que $\operatorname{Re}(p_i) > 0$



Il est toujours possible de trouver un demi-cercle (C), de centre p_i et de rayon ρ tel que, sur C, on ait :

$$0 < \operatorname{Re}(p_i) < \operatorname{Re}(p) \quad (3)$$

Soit, d'après $(p-p_i) = \rho e^{j\varphi} \implies \cos\varphi > 0$ sur C

Les relations (I) et (3) entraînent simultanément que $\cos(\psi - r\varphi) \geq 0$,

c'est à dire que, nécessairement, puisque $\cos\varphi > 0$,

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad r = 1$$

Mais, avec ces hypothèses, où

$$\operatorname{Re}[Z(p)] \simeq k / \rho \cos\varphi \quad \text{et si on choisit}$$

$\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, on obtient $\operatorname{Re}[Z(p)] < 0$ et $\operatorname{Re}(p) > 0$, ce qui est contraire à la définition donnée plus haut.

Ceci nous amène à dire que l'hypothèse $\text{Re}(p_i) > 0$ est absurde. En rapprochant ce résultat de celui disant que $1/Z(p)$ est aussi f.p.r., on voit que les polynômes ne peuvent avoir des zéros dans le demi-plan de droite, soit $x_i \leq 0$. Cela veut dire qu'il faut prendre les racines p_i négatives: $\text{Re}(p) < \text{Re}(p_i)$.

Les zéros de $P(p)$ ou $Q(p)$ ne peuvent qu'être, réels négatifs, imaginaires purs conjugués, ou nuls.

Les lecteurs, pour plus amples détails, se reporteront avec profit aux ouvrages spécialisés Kaufmann [16], Weinberg [12], Kuh-Péderson [13].

ANNEXE B

FONCTION ATTENUATION D'INSERTION

=====

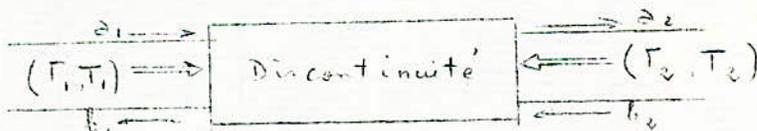
Cette annexe a pour but la démonstration que la fonction atténuation d'insertion peut être représentée par un polynôme en $\cos\theta$, dans l'idée donnée par Collin et Ghose.

La démonstration se fera en 5 étapes:

- 1/- calcul des matrices d'onde pour une section de ligne,
- 2/- calcul de la matrice de jonction de deux sections de ligne,
- 3/- calcul de la matrice pour une cascade de sections de ligne,
- 4/- polynôme d'atténuation d'insertion,
- 5/- intérêt du choix des polynômes de Tchébycheff.

I- Matrice d'onde d'une section de ligne

Supposons une discontinuité à l'intérieur d'une ligne de transmission, schématisée comme ci-dessous:



Pour une onde incidente venant de la gauche, le coefficient de réflexion (Γ_I) et le coefficient de transmission (T_I) sont reliés par la relation ci-dessous;

$$T_I = 1 + \Gamma_I \quad (1)$$

Les ondes incidentes et réfléchies, vues aux plans extrêmes de l'obstacle, sont reliés à Γ_I , Γ_2 , et T_I, T_2 par:

$$\begin{aligned} b_I &= \Gamma_I a_I + T_2 b_2 \\ a_2 &= T_I a_I + \Gamma_2 b_I \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} b_I \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_I & T_2 \\ T_I & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_I \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Si la matrice est écrite sous forme des quantités d'entrées et de sorties, il vient:

$$\begin{bmatrix} a_I \\ b_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Le calcul des éléments A_{ij} se fera aisément à partir de (2) et on en déduit que:

$$A_{II} = I/T_I \quad A_{I2} = -\Gamma_2/T_I \quad A_{2I} = \Gamma_I/T_I \quad A_{22} = T_2 - [\Gamma_I \Gamma_2 / T_I] \quad (4)$$

où:

$$\Gamma_I = b_I/a_I (b_2=0) \quad \Gamma_2 = a_2/b_2 (a_I=0) \quad T_I = a_2/a_I (b_2=0) \quad T_2 = b_I/b_2 = T_I (a_2=0)$$

L'égalité de T_I et de T_2 découle du théorème de réciprocité. Pour une cascade de connexions, les quantités de sortie d'une section sont celles d'entrée de la section voisine. Ainsi la matrice générale A sera le produit des matrices individuelles A_i . En outre, le coefficient de transmission général sera toujours égal à l'inverse de l'élément A_{II} de la matrice A .

Il est bien connu, si les amplitudes sont toutes normalisées, que $a_i a_i^+$ est égal à la puissance transportée par l'onde d'amplitude a_i ; par analogie avec la théorie des circuits, on désigne par:

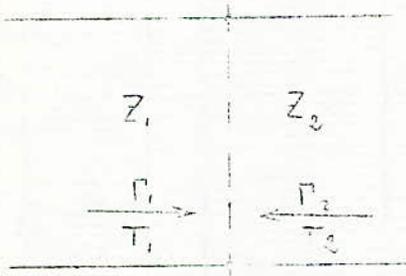
I/T le rapport d'insertion de tension (Insertion Voltage Ratio)

I/TT^+ le rapport d'atténuation d'insertion de puissance (Power Loss Ratio).

2- Matrice d'onde d'une jonction de deux lignes

Soit à présent une jonction de 2 lignes d'impédances caractéristiques Z_I et Z_2 différentes; de ce fait $T_I \neq T_2$. Il est possible de normaliser les amplitudes en les divisant par la racine carrée de Z_0 de la ligne de transmission appropriée.

Soit la jonction ci-dessous schématisée:



Les coefficients Γ_I et T_I sont donnés, en regardant de la gauche vers la droite, par:

$$\Gamma_I = \frac{Z_2 - Z_I}{Z_2 + Z_I}, \quad T_I = I + \Gamma_I = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_I}$$

lorsque on regarde de la droite,

$$\Gamma_2 = \frac{Z_I - Z_2}{Z_I + Z_2} = -\Gamma_I \quad T_2 = \frac{2Z_I}{Z_2 + Z_I} \neq T_I$$

Les expressions générales de (4) permettent d'écrire alors

$$A_{II} = I/T_I = Z_2 + Z_I / 2Z_2 \quad A_{I2} = \Gamma_I/T_I = Z_2 - Z_I / 2Z_2 \quad A_{2I} = A_{I2}$$

$$A_{22} = T_2 - \Gamma_I \Gamma_2 / T_I = (T_2 T_I + \Gamma_I^2) / T_I = A_{II} \quad (5)$$

De ce fait,

$$\begin{bmatrix} a_I \\ b_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{II} & A_{I2} \\ A_{2I} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = I/T_I \begin{bmatrix} I & \Gamma_I \\ \Gamma_I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} a_I \\ b_I \end{bmatrix} = I/2Z_2 \begin{bmatrix} Z_2 + Z_I & Z_2 - Z_I \\ Z_2 - Z_I & Z_2 + Z_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

D'une manière identique, il est aisé de voir que la matrice pour une ligne de longueur électrique θ , à partir des quantités d'entrée et

de sortie est:

$$\begin{bmatrix} a_I \\ b_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j\theta} & 0 \\ 0 & e^{-j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A la lumière de ces résultats, il est possible à présent d'écrire la matrice de jonction de 2 lignes et d'une ligne de longueur électrique θ , par multiplication des matrices (6) et (7) :

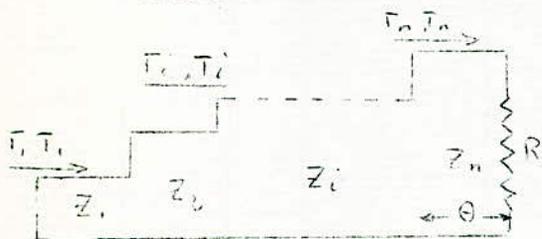
$$A = I/2Z_2 \begin{bmatrix} (Z_2 + Z_I)e^{j\theta} & (Z_2 - Z_I)e^{-j\theta} \\ (Z_2 - Z_I)e^{j\theta} & (Z_2 + Z_I)e^{-j\theta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A = I/2 \begin{bmatrix} (I + Z_I/Z_2)e^{j\theta} & (I - Z_I/Z_2)e^{-j\theta} \\ (I - Z_I/Z_2)e^{j\theta} & (I + Z_I/Z_2)e^{-j\theta} \end{bmatrix} = I/2 \left[A' + Z_I/Z_2 B' \right]$$

où

$$A' = \begin{bmatrix} e^{j\theta} & e^{-j\theta} \\ e^{j\theta} & e^{-j\theta} \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} e^{j\theta} & -e^{-j\theta} \\ -e^{j\theta} & e^{-j\theta} \end{bmatrix}$$

3- Matrice d'onde pour une cascade de n sections



A la vue de la figure ci-contre, la matrice générale A d'un transformateur de n sections de ligne de longueur électrique θ , se déduit de l'application du résultat (8) et le résultat, cité par Ghose est alors:

$$A = \frac{I}{2^{n+1}} \left[\prod_{i=1}^n \left(A' + \frac{Z_{i-1}}{Z_i} B' \right) \right] \left[A_0 + \frac{Z_n}{R} B_0 \right] \quad (10)$$

où:

- Z_{i-1} pour $i=1$ est l'impédance d'entrée de la cascade;
- les matrices A_0 et B_0 sont données par (voir (9) pour $\theta = 0$),

$$A_0 = \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

Le développement de ces produits de matrices laisse prévoir des termes tels que $A^n, B^n, A^m B^{n-m}, B^m A^{n-m}, B^p A^m B^{n-m-p}, \dots$. Ces termes sont eux mêmes multipliés par A_0 ou B_0 . La matrice obtenue est carrée à éléments A_{ij} . Il faut ajouter que le développement donne des termes en \sin et \cos compte tenu des termes, en fonctions hyperboliques de θ . L'élément A_{II} de la matrice générale sera la somme de tous les éléments du produit de la première rangée et première colonne de chaque produit de matrice.

Collin pour sa part a cité quelques développements sous forme de produits AB et suivant leurs indices respectifs.

4- Polynôme atténuation d'insertion

Il est bien connu que la puissance absorbée par la charge, à tra-

vers les n sections du transformateur est $(A_{II}A_{II}^+R)^{-1}$ puisque I/A_{II} est le coefficient de transmission. A_{II}^+ est la quantité conjuguée de A_{II} . Il a été supposé que l'onde incidente a une amplitude de unité.

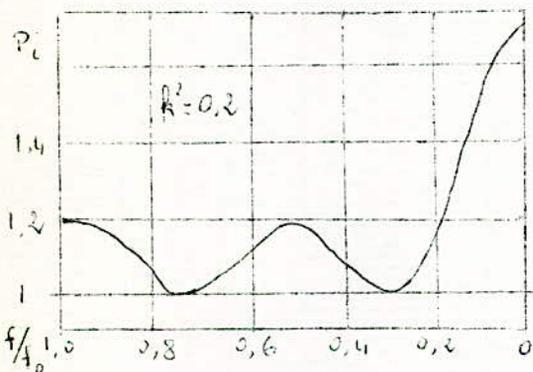
On définit le rapport atténuation d'insertion par $P_i = A_{II}A_{II}^+R$.

A partir de (10) il est vu que le polynôme représentant P_i est une fonction paire de $\cos\theta$ et est symétrique par rapport au point $\theta=0$ ($\cos\theta = 1$). En ce point, chaque section a une longueur nulle et l'impédance d'entrée est R ; P_i est alors égal à $(R+I)^2/4R$, puisque le coefficient $T_I = 2R/(R+I)$ et que $A_{II} = I/T_I$.

C'est un polynôme de degré $2n$.

5-Choix du polynôme

Le polynôme est symétrique, du point de vue fréquentiel, par rapport à $f=f_0$ où $\theta=\pi/2$. Dire que la fonction est de degré $2n$ en $\cos\theta$, cela suggère que la performance optimum sera obtenue si le polynôme a n doubles zéros dans la bande passante et telle que la fonction atteigne le même maximum entre les zéros.



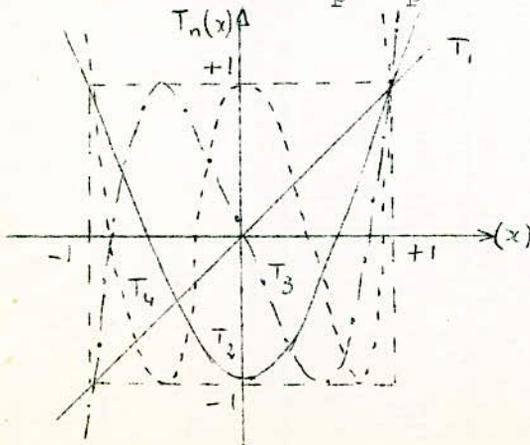
La figure ci-contre, donne une variation classique de la fonction atténuation en fonction de la fréquence; on a choisi pour cela un polynôme de Tchébycheff de degré 4 (Ghose pp 353). La fonction se présente alors sous la forme:

$$P_i = I + k^2 T_n^2(\cos\theta/s)$$

Il est visible que $I+k^2$ est la valeur maximale de P_i dans la bande passante.

Les polynômes de Tchébycheff sont choisis pour leurs propriétés suivantes

- ils oscillent entre $+I$ et $-I$ et tous les zéros compris entre $-I$ et $+I$
 - ils sont égaux à l'unité aux n valeurs de θ données par $\cos\theta = (\cos\theta_p)x_i/x_p$ $i=1,2,\dots,n$ où x_i est un zéro de $T_n(x)$
- En ces points, toute la puissance incidente est transmise à la charge.
- le bord de la bande passante est obtenu lorsque $T_n(x) = T_n(I) = I$ ou $\cos\theta = s = (\cos\theta_p)/x_p$ où $\cos\theta_p$ est la valeur de $\cos\theta$ au zéro x_p .



Voici à présent quelques variations de quelques polynômes données par [17]:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= I & T_2(x) &= 2x^2 - I \\ T_1(x) &= x & T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + I \end{aligned}$$

L'utilité de ces polynômes est très grande et de ce fait sont aussi utilisés dans le calcul des filtres passe-bande et tout système dont l'étude nécessite une courbe de réponse. Pour d'amples détails sur ces calculs, se référer à [11].

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - Liot : Les lignes de transmission et filtres THF (Dunod)
- 2 - R.Ghose : Microwave Circuit Théory and Analysis (M.G.Hill)
- 3 - Raoult : Les ondes centimétriques (Masson)
- 4 - Roubine : Lignes et antennes (Revue de l'optique - ONET)
- 5 - Lepage et Seely : Général network analysis (M.G.Hill)
- 6 - Reich-Skalnik-Ordung : Microwave théory and techniques
Microwave principles (Van Nostrand Séries)
- 7 - Soutworth : Principles and applications of microwave transmission
- 8 - Richards : Resistor transmission-line circuits
Proc IRE vol 37 n°2 Fébruary 1948 pp 217-219
- 9 - Collin : Théory and design of wide-band multisection quarter-wave
transformers
ProcIRE vol 43 n°2 Fébruary 1955 pp 179-185
- 10 - Riblett : Général synthesis of quarter-wave impedance transformers
IRE MTT vol MTT-5 n°1 January 1957 pp 36-43
- 11 - Carlin : Methodes modernes de synthèse des réseaux de lignes de
transmission
L'Onde Electrique n°478 Janvier 1967 pp 8-19
- 12 - Weinberg : Network analysis and synthesis (M.G.Hill)
- 13 - Kuh - Pederson : Synthèse des réseaux électriques (Dunod)
Principles of circuit synthesis (M.G.Hill)
- 14 - Tuttle : Network synthesis (J.Wiley & Sons)
- 15 - The microwave engineers' hanbook (Horizon House)
- 16 - Kaufman : Les fonctions de la variable complexe (Gautiers-Villar)
- 17 - Angot : Compléments de mathématiques (Collection du CNET)
- 18 - Stuchly - Kreszewski : Wide-bandrectangular to circular mode and
impédance transformer
IEE MTT May 1965 vol MTT 13 n°3
- 19 - Matthei : Short-step Chebyshev impedance transformer
IEE MTT vol MTT 14 n°8 August 1966
- 20 - Cours de M.Zerguerras
- 21 - Goudet : Les ondes centimétriques (Masson)