

20/93

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**COMMANDE ADAPTATIVE
DIRECTE DES SYSTEMES
MULTIVARIABLES**

Proposé par :
R.ILLOUL

Etudié par :
A. NAITSEGHIR
A. BOUZIDA

Dirigé par
R.ILLOUL

PROMOTION
JUIN 1993

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi El-Harrach - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**COMMANDE ADAPTATIVE
DIRECTE DES SYSTEMES
MULTIVARIABLES**

Proposé par :

R.ILLOUL

Etudié par :

A.NAITSEGHIR

A.BOUZIDA

Dirigé par

R.ILLOUL

PROMOTION

JUIN 1993

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

A ma famille dont
l'amour, la générosité et la compréhension
ont été déterminants pour le bon
déroulement de mon travail. Je lui serai
éternellement reconnaissant.

Aziz.

A ma mère.

A ma famille.

A tous mes amis.

Amirouche.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

R E M E R C I E M E N T S

Nous tenons à adresser nos vifs remerciements à notre promoteur M. ILLOUL pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée tout au long de notre travail et pour ses remarques, suggestions et critiques constructives.

Nos remerciements vont également à Messieurs les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en évaluant notre travail et surtout pour la compréhension qu'ils nous ont témoigné.

Nous n'oublierons pas d'exprimer notre reconnaissance à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin par leur expérience et leurs conseils judicieux.

Que tous les enseignants qui ont contribué à notre formation reçoivent l'expression de notre profonde gratitude.

S O M M A I R E

I	INTRODUCTION	1
	1 Introduction.....	2
	2 Commande Adaptative.....	3
	3 Les différentes technique de la commande adaptative.....	5
	1 Commande adaptative en boucle ouverte.....	5
	2 Commande adaptative en boucle fermée.....	7
	1 Commande adaptative à modèle de référence.....	8
	2 Commande auto-ajustable.....	8
	3 Principe d'équivalence certaine.....	10
	4 Systèmes Multivariables.....	
	5 Présentation du Mémoire.....	11
II	ALGORITHMES D'ADAPTATION PARAMETRIQUE	13
	1 Introduction.....	14
	2 Algorithmes d'adaptation.....	
	1 Algorithme Du Gradient Simple.....	15
	2 Algorithme des Moindres Carrés Récursif.....	17
	3 Estimation dans le cas stochastique.....	20
III	COMMANDE ADAPTATIVE MONOVARIABLE	22
	1 Introduction.....	23
	2 Structure du modèle.....	
	3 Commande adaptative à erreur de prédiction minimale..	24
	1 Introduction.....	
	2 Synthèse de la loi de commande.....	25
	3 Commande adaptative avec les moindres carrés	31
	recursifs.....	
	4 Commande adaptative à variance minimale.....	
	1 Introduction.....	
	2 Loi de commande.....	
	5 Simulation.....	39
	6 Conclusion.....	43
IV	COMMANDE ADAPTATIVE MULTIVARIABLE	65
	1 Introduction.....	66
	2 Représentation du procédé.....	
	3 L'interacteur.....	68
	4 Commande à erreur de prédiction minimale.....	72
	5 Commande à variance minimale.....	80
	1 Introduction.....	
	2 Synthèse de la loi de commande.....	
	1 Variance minimale simple.....	81
	2 Variance minimale généralisée.....	86
	6 Simulation.....	94
	7 Conclusion.....	98
V	CONCLUSION GENERALE	122
	ANNEXE A Forme prédictive monovariable.....	125
	ANNEXE B Forme prédictive multivariable.....	128
	REFERENCES	132

CHAPITRE I

I N T R O D U C T I O N

I.1. Introduction:

Depuis une trentaine d'années on note une activité incessamment croissante dans le domaine de la commande adaptative et de ses applications.

La motivation réelle de la commande adaptative est d'apporter une solution au contrôle des procédés dont le comportement dynamique est partiellement ou totalement inconnu et éventuellement variable dans le temps.

En effet, dans ces situations, les méthodes classiques de commande n'aboutissent pas aux performances désirées en boucle fermée, et conduisent à une détérioration de la robustesse du régulateur.

En automatique, il est difficile de donner une définition précise à l'adaptation, cependant, le sens retenu est de dire qu'un régulateur est adaptatif s'il peut modifier son comportement en réponse à des changements dans la dynamique du procédé ou des perturbations [2]. Cette modification doit se faire d'une manière automatique, sans intervention externe.

Le régulateur adaptatif, est défini par son aptitude à maintenir un certain niveau de performance préalablement choisi.

Beaucoup de travaux ont été fait en ce qui concerne la commande adaptative des procédés monovariables, alors que peu a été fait sur la commande adaptative des systèmes multivariables. Ceci est du sans doute, au fait que les systèmes multivariables présentent un certain nombre de difficultés spécifiques aux, et que l'extension du monovariante au multivariante n'est pas évidente.

Afin de contribuer à la commande de ces systèmes, nous avons développé, dans le cadre de notre travail, deux stratégies (algorithmes) de commande adaptative directe. Nous avons étudié en premier lieu le cas des systèmes monovariables, puis nous avons fait une extension au cas multivariable.

Après avoir donné un aperçu sur le principe de la commande adaptative, son degré d'avancement dans le cas multivariable, nous rappelons dans ce qui suit, les différentes approches de la commande adaptative.

I.2. Commande à contre-réaction et commande adaptative:

La contre réaction est introduite pour réduire l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler. Mais en fait, les perturbations affectant un système de commande sont de deux types [21]:

- Les perturbations agissant sur les variables à réguler.
- Les perturbations paramétriques agissant sur les performances du système de commande.

Les perturbations paramétriques rassemblent les variations de dynamique, de gain statique ou de retard. Un régulateur classique (à paramètres fixes) n'étant pas conçu pour tenir compte de ce type de perturbations, le comportement en boucle fermée se trouve alors détérioré. C'est à ce niveau qu'intervient la boucle d'adaptation, pour permettre de maintenir les performances désirées.

La structure de base d'un schéma adaptatif est montré par la figure (I-1).

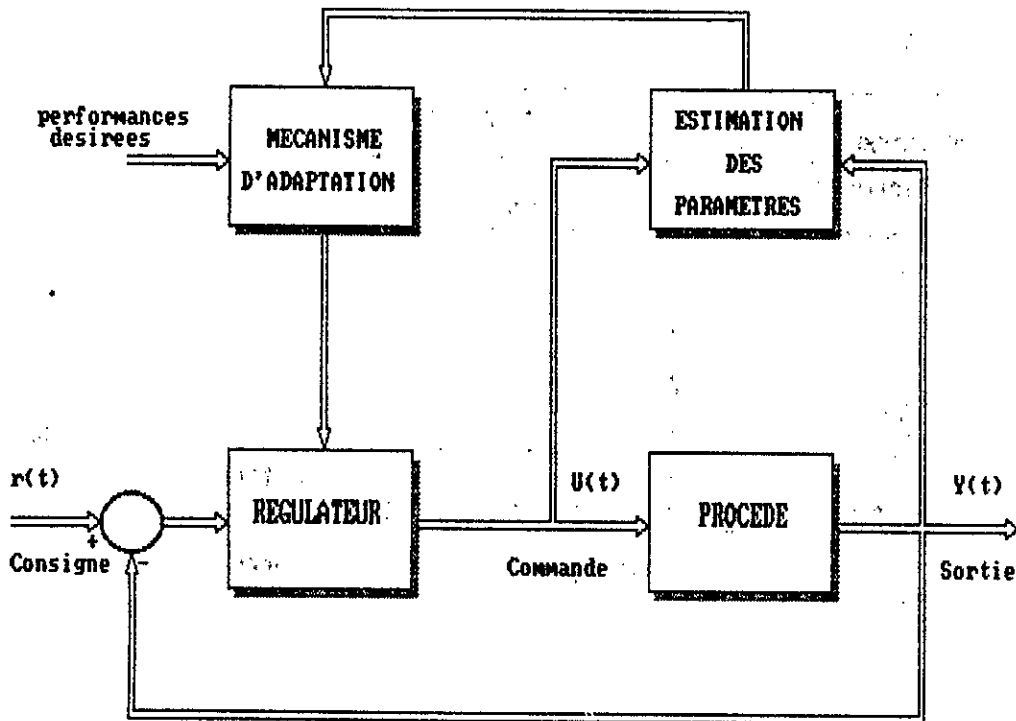


Figure I-1 : Structure de base d'un schéma de commande adaptative.

Cette structure est constituée de deux boucles de régulation. On retrouve la boucle classique à contre réaction comportant le procédé et le régulateur à paramètres ajustables. La seconde boucle permet de réajuster en ligne les paramètres du régulateur en fonction d'un certain indice de performance [21]. Cet indice regroupe les objectifs désirés.

Un schéma de commande adaptatif comprend :

- Une boucle à contre réaction, qui diminue l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler.

- Une boucle d'adaptation pour diminuer l'effet des perturbations paramétriques agissant sur le procédé lui même,

tout en gardant les objectifs fixés.

Les deux boucles permettent au régulateur de répondre à tous les types de perturbations pouvant affecter l'ensemble du système de commande.

I.3. Les différentes techniques de la commande adaptative:

On trouve dans la littérature plusieurs formes de la commande adaptative.

I.3.1 Commande adaptative en boucle ouverte:

La commande adaptative a été introduite initialement en boucle ouverte. L'adaptation se fait en fonction de variables auxiliaires. Dans ce cas il n'y a pas de mesure sur les performances de la boucle fermée [2].

Le "Gain programmé" est un exemple de la commande adaptative en boucle ouverte. Dans cette approche, le bloc d'adaptation contient une table de gains disponibles utilisée par le régulateur pour un changement du gain du processus.

Le schéma illustratif de cette approche est montré dans la figure (I-2).

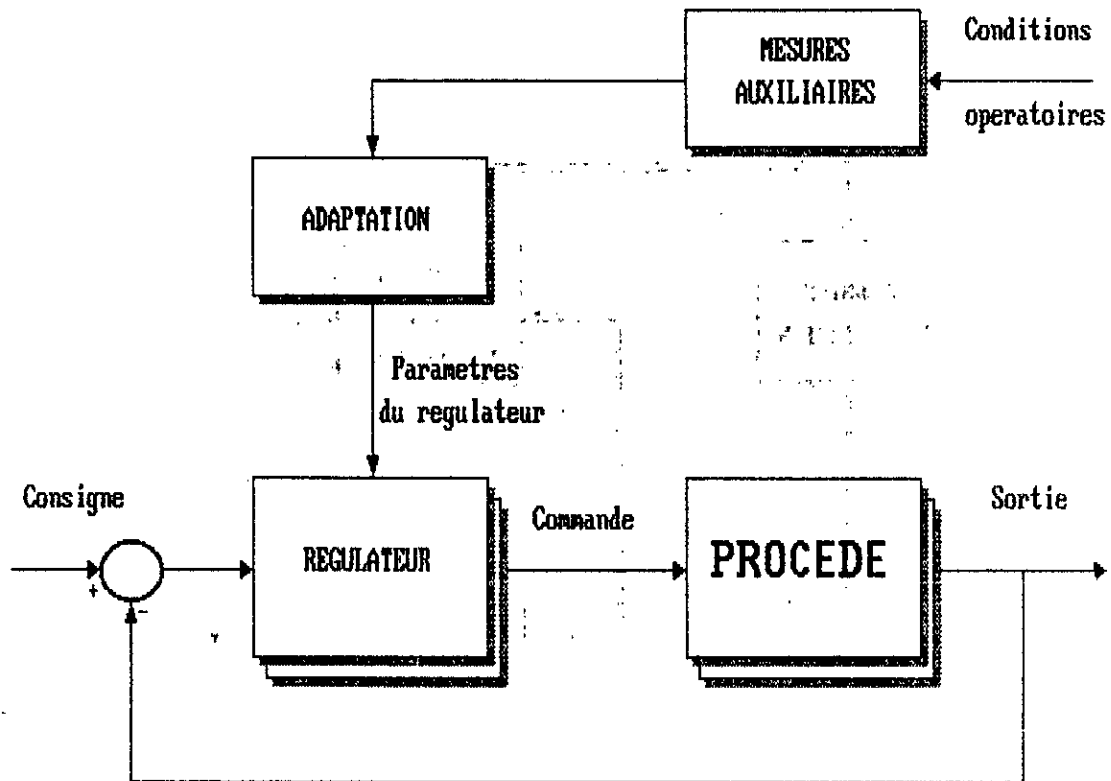


Figure 1-2 : Schéma de commande adaptative à gain programmé.

Cette approche nous garantit une adaptation par rapport aux variables auxiliaires, mais ne permet pas de contrôler totalement l'effet de perturbations paramétriques.

Les résultats de ces schémas peuvent être bons, dans le cas où les variables auxiliaires sont suffisamment reliées aux caractéristiques dynamiques du procédé, mais les performances se détériorent rapidement si ces relations changent au cours du temps.

Un autre problème du gain programmé réside dans l'évaluation des variables auxiliaires. Cette opération peut nécessiter des

capteurs additionnels.

Nous notons que dans ces schémas, il n'y a pas de boucle de contre réaction sur la mesure des performances du système.

I.3.2 Commande adaptative en boucle fermée:

La majorité des études théoriques et pratiques ont été développées à partir de schémas de commande adaptative en boucle fermée. Il existe deux types de schéma de commande adaptative:

- La commande adaptative directe (ou implicite).
- La commande adaptative indirecte (ou explicite).

Le premier cas ne comporte qu'une seule étape à chaque pas d'échantillonnage, les paramètres du régulateur sont directement ajustés en fonction des mesures d'erreur de performances. Dans ces schémas, on identifie en fait, implicitement le procédé mais réparamétriser en terme du régulateur. Dans le second cas, l'adaptation se fait en deux étapes, les paramètres du modèle du procédé sont estimés en première phase puis dans une deuxième phase les paramètres du régulateur sont calculés à partir des paramètres estimés.

La deuxième méthode nécessite un volume de calcul plus important, mais son domaine d'application est beaucoup plus large. A titre d'exemples, nous allons présenter deux schémas de commande adaptative, l'un directe et l'autre indirect.

I.3.2.1 Commande adaptative à modèle de référence:

L'indice de performance, dans cette approche, est la sortie du procédé. L'indice de performance désiré est la sortie du modèle de référence. L'ajustement des paramètres du régulateur se fait de telle manière que l'erreur entre la sortie du modèle et celle du procédé devient petite.

Le schéma bloc du système est montré par la figure (I-3).

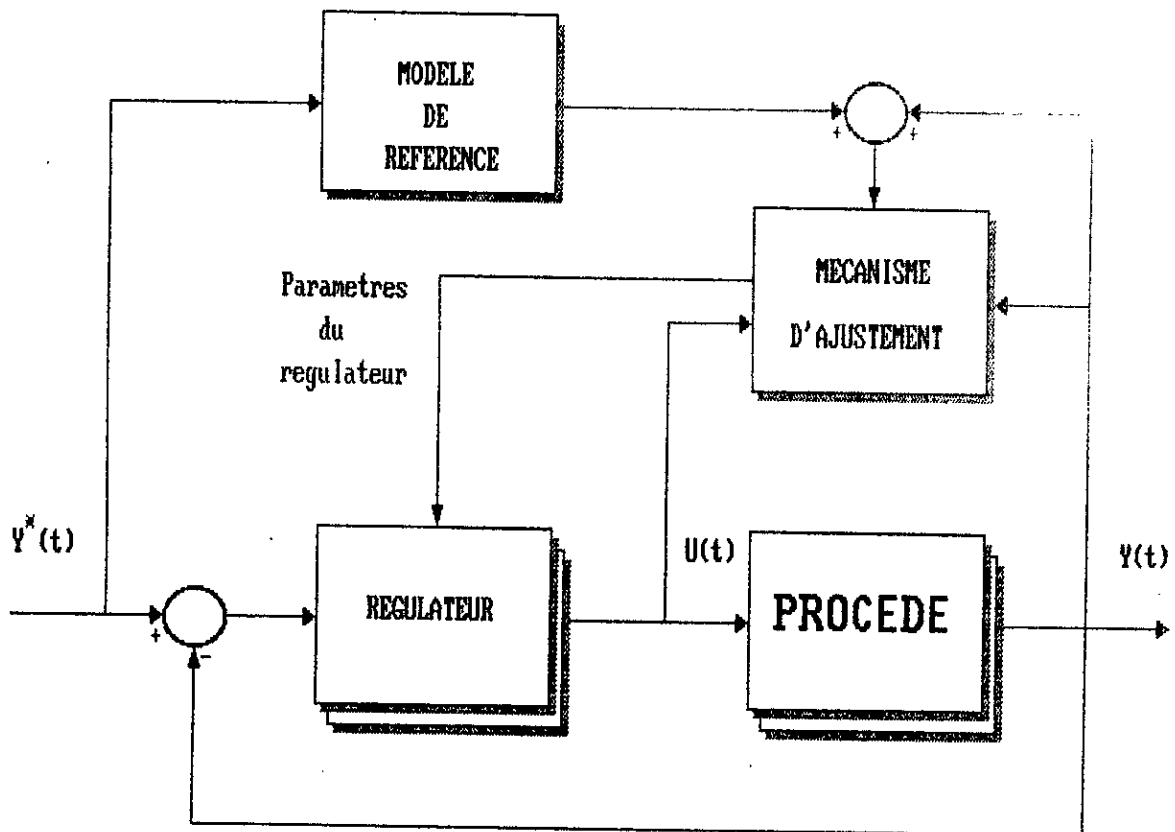


Figure I-3: Commande adaptative à modèle de référence.

I.3.2.2 Commande auto-ajustable:

Le schéma bloc d'un tel système est représenté par la figure (I-4). Ce schéma est couramment utilisé lorsque les

caractéristiques du procédé sont inconnus et variants, éventuellement avec le temps.

Le modèle du procédé est estimé en ligne, et les paramètres du régulateur sont ajustés à partir de ce modèle.

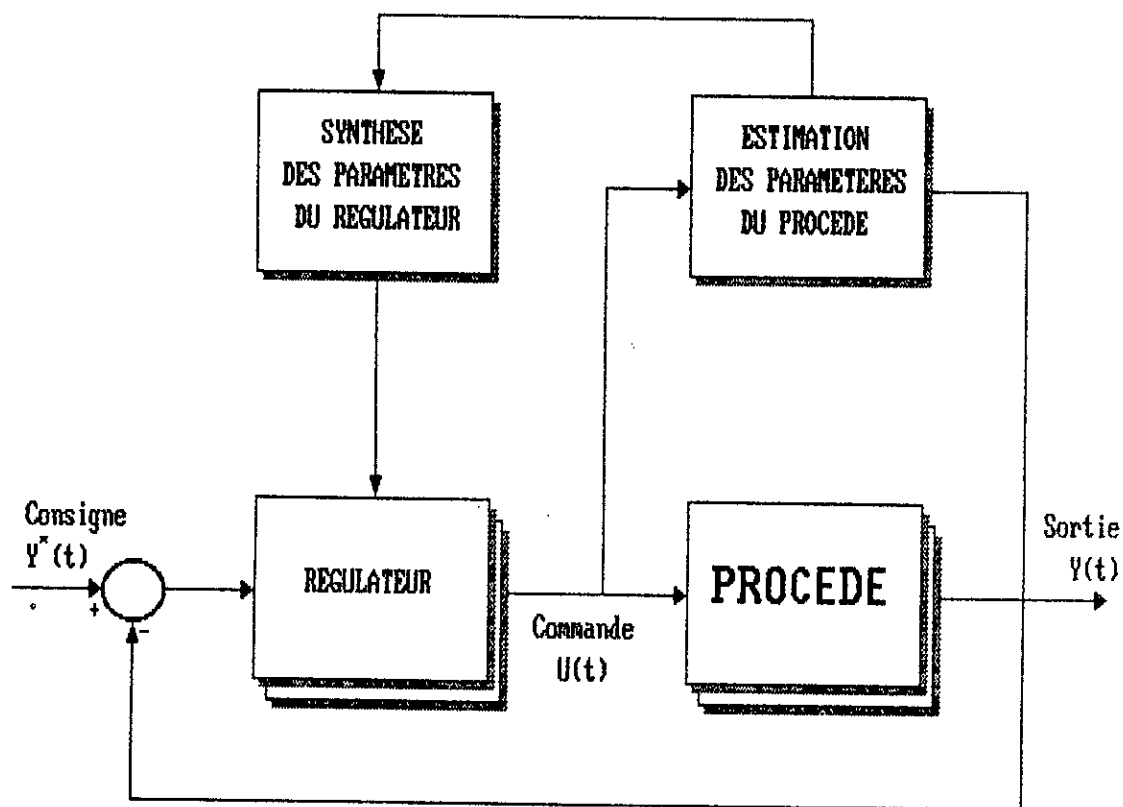


Figure 1-4: Commande auto-ajustable.

Cette construction représente la commande auto-ajustable explicite (explicit self-tuning control), du fait que les paramètres du procédé sont estimés. Il est, cependant, possible de réparamétriser le modèle en termes des paramètres du régulateur, de façon à ce que les paramètres du régulateur soient

estimés directement. C'est la commande auto-ajustable implicite (implicit self-tuning control) [3].

I.3.3 Le principe d'équivalence certaine:

Dans la commande adaptative à modèle de référence ou auto-ajustable, les paramètres du procédé ou du régulateur sont estimés en ligne. Le principe d'équivalence certain permet d'utiliser les estimés comme s'ils étaient de vrais paramètres [2][Astrom 89]. C'est à dire que les incertitudes sur les estimés ne sont pas considérées. Il est quand-même à noter que si ces incertitudes sont connues, elles peuvent être utilisées pour modifier le régulateur.

I.4 Généralités sur le multivariable:

Un système linéaire multivariable est caractérisé par plusieurs entrées et plusieurs sorties. Chaque sortie est influencée par toutes les entrées et toutes les sorties.

Les zéros (instables ou infinis) sont beaucoup plus gênants que les pôles instables pour synthétiser une commande.

Les zéros finis en multivariable sont les racines des numérateurs de la forme de Smith Mac Millan de la matrice de transfert. Les zéros sont aussi les fréquences qui rendent singulière la matrice de transfert $T(z)$.

La structure infinie correspond aux zéros infinis et leur multiplicité. On dira que $T(z)$ possède un zéro à l'infinie d'ordre k quand $T(1/w)$ possède un zéro d'ordre k en $w=0$. Dans le cas monovariable, l'ordre du zéro à l'infini, est égal au retard

du système.

Dans la commande adaptative, des connaissances à priori sur le système à commander doivent être clarifiées pour calculer la loi de commande. Dans le cas monovarié, un entier, d , qui représente le retard du système, est souvent supposé connu à priori.

L'extension du retard en multivarié correspond à une matrice polynomiale appelée Intéracteur.

Les premiers concepts et analyses des propriétés de l'intéracteur ont été présentés dans Wolovich et Falb(76) [26].

Depuis l'intéracteur a joué un rôle important dans la commande des systèmes multivariés.

La connaissance de l'intéracteur ne peut pas être déduite seulement des informations qu'on a sur le système. C'est pour cette raison que la commande adaptative en multivarié n'est pas une extension naturelle du monovarié.

I.5 Présentation du mémoire:

L'objectif de ce travail est de développer une technique moderne de commande des systèmes linéaires discrets monovariés et multivariés, à savoir la commande adaptative. Cette technique vient pour compenser l'incapacité des méthodes classiques à répondre aux perturbations paramétriques.

Dans le chapitre II, nous présenterons une partie importante de la commande adaptative, qui est l'estimation des paramètres.

Deux principaux algorithmes, utilisés pour l'estimation en ligne, seront présentés:

- Méthode du gradient (ou de projection).
- Méthode des moindres carrés récursifs.

Le chapitre III, sera consacré à l'étude de la commande adaptative des systèmes monovariabiles. Deux stratégies de commande y seront développées; la commande à erreur de prédiction minimale et la commande à variance minimale.

L'extension de la commande adaptative aux systèmes multivariabiles, fera l'objet du quatrième chapitre. Nous présenterons une notion importante à la commande des systèmes multivariabiles, qui est l'intéacteur. Puis nous appliquerons les deux méthodes étudiées au chapitre III.

CHAPITRE II
ALGORITHMES D'ADAPTATION
PARAMETRIQUE

II.1. Introduction:

Le calcul de la commande et l'estimation des paramètres du modèle du procédé, ou ceux du régulateur, sont deux tâches séparées. La synthèse de l'algorithme d'estimation paramétrique se fait donc indépendamment de la méthode de commande choisie.

Dans ce chapitre, nous présentons deux algorithmes d'adaptation paramétriques, à savoir:

- L'algorithme du gradient simple.
- L'algorithme des moindres carrés récursif.

Ces algorithmes sont utilisés pour l'estimation en temps réel des paramètres inconnus et éventuellement variables dans le temps du modèle du processus ou du régulateur.

II.2. Algorithme d'adaptation paramétrique:

Considérons le système décrit par le modèle déterministe suivant :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad (\text{II.1})$$

où A et B sont des polynômes en q^{-1} d'ordre n et m respectivement. q^{-1} est l'opérateur retard défini par :

$$q^{-1}y(t) = y(t-1)$$

Nous introduisons le vecteur des paramètres:

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]^T$$

et le vecteur de mesures

$$\phi(t-1) = [-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-m)]^T$$

Le modèle (II.1) est réécrit sous la forme de régression :

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta \quad (\text{II.2})$$

A chaque pas d'échantillonnage, la nouvelle estimation des paramètres du modèle, sera obtenu en minimisant un critère d'erreur. Le calcul récursif de θ sera obtenu par une expression générale de la forme:

$$\begin{pmatrix} \text{nouvelle} \\ \text{estimation} \\ \text{des paramètres} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{estimation} \\ \text{precedente} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{gain} \\ \text{d'adaptation} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{fonction} \\ \text{des mesures} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{fonction} \\ \text{de l'erreur} \\ \text{de prediction} \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Le gain d'adaptation paramétrique est calculé suivant l'approche considérée.

II.2.1. Algorithme du gradient simple (ou de projection):

Considérons le modèle décrit par l'équation (II.2)

$$y(t) = \phi^T(t-1)\theta$$

Le critère quadratique à minimiser à chaque pas est:

$$J(t) = [y(t) - \varphi^T(t-1)\theta(t-1)]^2 \quad (\text{II.4})$$

Les estimés des paramètres seront calculés par:

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \alpha \varphi(t-1) \quad (\text{II.5})$$

où α est choisi de manière à avoir:

$$\begin{aligned} y(t) &= \varphi^T(t-1)\theta(t) \\ y(t) &= \varphi^T(t-1)\theta(t-1) + \alpha \varphi^T(t-1)\varphi(t-1) \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Ce qui donne:

$$\alpha = \frac{1}{\varphi^T(t-1)\varphi(t-1)} [y(t) - \varphi^T(t-1)\theta(t-1)] \quad (\text{II.7})$$

La formule de calcul des paramètres θ sera alors:

$$\theta(t) = \theta(t-1) + \frac{\varphi(t-1)}{\varphi^T(t-1)\varphi(t-1)} [y(t) - \varphi^T(t-1)\theta(t-1)] \quad (\text{II.8})$$

C'est l'algorithme de "Kaczmarz" [2].

Les données sont générées par l'équation (II.2).

Pour éviter le problème de la division par zéro, qui surgit quand $\varphi(t)$ est nul, l'algorithme de projection est modifié dans la pratique de la manière suivante:

$$\theta(t) = \theta(t-1) + a(t) \frac{\varphi(t-1) [y(t) - \varphi^T(t-1) \theta(t-1)]}{c + \varphi^T(t-1) \varphi(t-1)} \quad (\text{II.9})$$

où $c > 0$ et $0 < a(t) < 2$.

$a(t)$ est une constante de gain calculée par:

$a(t) = 1$ si θ_{n+1} , calculer avec $a(t) = 1$, $\neq 0$

$a(t) = \gamma$ sinon

avec $\varepsilon < \gamma < 2 - \varepsilon$, $\gamma \neq 1$ et $0 < \varepsilon < 1$.

La convergence globale de cet algorithme a été démontrée dans [14].

Cet algorithme a la propriété d'avoir un gain d'adaptation scalaire ne tendant pas vers zéro. Il est donc utilisé pour l'identification et la régulation adaptative de systèmes stationnaires ou à paramètres variables dans le temps.

Il possède l'avantage de la simplicité, d'où une mise en oeuvre plus simple, mais sa convergence est très lente.

En pratique, il est utilisé pour les systèmes dont les paramètres varient lentement dans le temps.

II.2.2. Algorithme des moindres carrés récursif:

La structure du modèle est celle donnée par l'équation (II.1).

De la même manière qu'au paragraphe précédent, nous utilisons le modèle sous la forme de régression donné par l'équation (II.2)

$$y(t) = \varphi^T(t-1) \theta$$

Le critère d'estimation va consister en la minimisation de l'erreur de sortie:

$$J_N(t) = \sum_{k=t-N}^t [y(t) - \varphi^T(t-1) \theta(t)]^2 \quad (\text{II.10})$$

N étant le nombre de mesures disponibles.

Pour trouver la solution récursive du problème on fait appel au lemme d'inversion matricielle. Les estimés satisfont les équations récursives:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(t-1) + K(t) [y(t) - \varphi^T(t-1) \theta(t-1)] \\ K(t) &= \frac{p(t-1) \varphi(t-1)}{1 + \varphi^T(t-1) p(t-1) \varphi(t-1)} \\ p(t) &= p(t-1) - \frac{p(t-1) \varphi(t-1) \varphi^T(t-1) p(t-1)}{1 + \varphi^T(t-1) p(t-1) \varphi(t-1)} \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

P(t): Matrice de covariance.

K(t): est le gain d'adaptation.

L'algorithme est initialisé par un choix adéquat de p(0). On la prend souvent sous la forme p(0) = αI . où α est une grande valeur (10⁴) si on ne dispose pas d'information initiale sur les paramètres. Ceci permet d'opérer un changement rapide sur les paramètres $\theta(t)$ initiaux. Par contre, si on dispose de l'estimation initiale des paramètres on prend α petit (≤ 1).

Dans le cas où le procédé est invariant dans le temps, la capacité d'adaptation est choisie décroissante et s'annulant exponentiellement de manière à ce que l'estimation reste

insensible aux nouvelles données, quand les paramètres ont convergé vers leurs vraies valeurs.

En pratique, on préfère un algorithme qui poursuit les variations non brusques des paramètres. Une capacité d'adaptation plus importante doit être maintenue tout au long de l'estimation. Plusieurs techniques permettent d'y parvenir. Nous citons deux principales méthodes les plus utilisées :

- Facteur d'oubli variable avec trace constante.
- Gain décroissant avec trace constante.

Nous présentons, dans ce qui suit la première méthode.

Le gain d'adaptation est exprimé par:

$$K(t) = \frac{p(t-1)\varphi(t-1)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \varphi^T(t-1)p(t-1)\varphi(t-1)} \quad (\text{II.12})$$

$$p(t) = [p(t-1) - K(t)\varphi^T(t-1)p(t-1)]/\lambda_1(t)$$

$\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ sont des facteurs introduits pour permettre de fixer un compromis entre la précision de l'estimation et la capacité de poursuite des paramètres dans le cas des systèmes variants dans le temps.

$\lambda_2(t)$ est fixé à 1, $\lambda_1(t)$ est calculé de manière à assurer:

$$\text{tr } P(t) = \text{tr } P(t-1) = \text{tr } P(0) = n.GI$$

n: nombre de paramètres.

GI: gain initial.

Dans ce cas P et K ne tendent pas vers zéro.

Les valeurs typiques de $\lambda_1(0)$ sont de 0.95 pour les variations rapides à 0.99 pour les variations lentes.

Nous pouvons interpréter $P(0)$ comme une précision de l'estimation initiale.

II.3 Estimation dans le cas stochastique:

Dans le cas où le système est stochastique, l'estimation avec les moindres carrés devient biaisée. Une possibilité d'éviter ce problème, est de modéliser la corrélation de l'erreur et d'estimer les paramètres qui la décrivent [2].

Considérons le modèle:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{II.13})$$

Où A , B et C sont des polynômes en q^{-1} .

$\{e(t)\}$ est un bruit blanc

Les paramètres du polynôme C décrivent la corrélation de la perturbation. Ce modèle ne peut pas être converti en un modèle de régression car $\{e(t)\}$ n'est pas connue. Cependant un modèle de régression peut être obtenu par une approximation convenable.

Le vecteur des paramètres sera:

$$\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l]$$

et le vecteur des mesures

$$\varphi(t) = [-y(t), \dots, -y(t-n+1); u(t), \dots, u(t-m+1); \\ e(t), \dots, e(t-l+1)]^T$$

avec $\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\theta(t-1)$

$e(t)$ est alors approximée par l'erreur de prédiction. Le modèle peut être approximé par :

$$y(t) = \varphi^T(t-1)\theta \quad (\text{II.14})$$

et l'algorithme, donné par (II.12) est alors appliqué. La méthode obtenue est appelée: Moindres Carrées Étendue (MCE).

CHAPITRE III
COMMANDE ADAPTATIVE
MONOVARIABLE

III.1 Introduction:

Nous présentons, dans ce chapitre, la commande des systèmes linéaires monovariables, dont les paramètres sont inconnus ou variables dans le temps. L'approche adoptée, est de combiner une technique d'estimation des paramètres, en ligne, avec une stratégie de commande, ce qui donne des régulateurs auto-ajustable ou régulateurs adaptatifs.

Nous nous proposons de faire la synthèse de deux stratégies de commande, combinées avec les deux techniques d'adaptation paramétrique, présentées au chapitre précédent.

La première stratégie, consiste en la commande à erreur de prédiction minimale, la seconde est la commande à variance minimale. Ces stratégies sont liées aux hypothèses faites sur les zéros du système échantillonné et aux objectifs de la commande.

L'extension de ces stratégies, aux systèmes multivariable, sera analysée dans le 4^{ème} chapitre.

III.2 Structure du modèle:

La classe des modèles considérée, peut être représentée, dans le domaine temporel, par l'équation:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + v(t) \quad (\text{III.1})$$

avec $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$

$B(q^{-1}) = 1 + b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}$, $b_0 \neq 0$.

où

d : retard du système discretisé (=retard pur, qui est nombre entier de la période d'échantillonnage, +1).

$u(t)$ et $y(t)$ sont l'entrée et la sortie du procédé.

q^{-1} est l'opérateur retard.

$v(t)$ représente la perturbation (entrée non mesurable). Elle est modélisée en pratique par:

$$v(t) = C(q^{-1}) \cdot e(t)$$

où $C(q^{-1})$ est un polynôme, décrivant la corrélation de la perturbation, donné par:

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

$e(t)$ est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance constante.

Le modèle obtenu est connu sous le nom du "Modèle Auto-Regressif à moyenne Mobile et entrée exogène (ARMAX). Ce modèle est à la base de la synthèse de la plupart des lois de commande linéaire et de techniques d'identification. Sa nature discrète, le rend facilement utilisable numériquement, et il est capable de représenter le comportement de la majorité des procédés. L'utilisation de ce modèle peut nous réaliser une bonne performance.

III.3 Commande adaptative à erreur de prédiction minimale:

III.3.1 Introduction:

L'idée de base de cette stratégie est la suivante:

Etant donné le modèle, qui prédit la sortie future du système basée sur les sorties et les entrées (commandes) passées et actuelles, il faut trouver l'entrée ou action dans le présent de façon à amener la sortie future du système à la valeur désirée.

L'approche directe de la commande adaptative, nécessite qu'on réarrange le modèle du procédé de manière à ce qu'il soit exprimé

en termes des paramètres de la loi de commande (ou du régulateur).

III.3.2 Synthèse de la loi de commande:

Nous considérons dans ce paragraphe, la commande dans un environnement déterministe ($v(t)=0$). Le modèle entrée sortie, donné par l'équation (III.1), devient:

$$\bar{A}(q^{-1})y(t) = q^{-d} \bar{B}(q^{-1})u(t) \quad (\text{III.2})$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{A}(q^{-1}) &= 1 + \bar{a}_1 q^{-1} + \dots + \bar{a}_n q^{-n} \\ \bar{B}(q^{-1}) &= \bar{b}_0 + \bar{b}_1 q^{-1} + \dots + \bar{b}_m q^{-m} \quad , \quad \bar{b}_0 \neq 0 \end{aligned}$$

Dans cette stratégie, certaines connaissances sur le procédé à commander sont à connaître à priori, à savoir:

a- Le retard d .

b- des bornes supérieures de \bar{n} et \bar{m} .

Le procédé doit satisfaire à la condition:

c- $B(\alpha)$ doit avoir tous ses zéros en dehors du cercle unité.

C'est à dire que le procédé est à phase minimale.

Ces conditions sont nécessaires pour assurer que la commande $\{u(t)\}$ et la sortie $\{y(t)\}$ restent bornées. La raison d'être de la condition (c) sera justifiée par la suite.

Le système est alors remplacé par le modèle:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) \quad (\text{III.3})$$

où $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont deux polynômes d'ordre n et m

respectivement.

Comme la loi de commande dépend des paramètres à d-pas de prédiction, nous convertissons le modèle à la forme prédictive, où le pas de prédiction est égal au retard d, pour faciliter la commande directe.

Nous réparamétrisons le modèle en fonction du régulateur, pour cela, nous utilisons l'identité:

$$1 = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (\text{III.4})$$

$$\text{où } F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{d-1} q^{-(d-1)}$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n-1} q^{-(n-1)}$$

Nous obtenons la forme:

$$y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (\text{III.5})$$

où

$$\alpha(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n-1} q^{-(n-1)}$$

$$\beta(q^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{m+d-1} q^{-(m+d-1)} \quad ; \quad \beta_0 \neq 0$$

Le passage de la forme normale à la forme prédictive est donnée en annexe "A" en prenant:

$$- \phi(t) = y(t)$$

$$- P(q^{-1}) = P_n(q^{-1}) / P_d(q^{-1}) = 1$$

$$- C(q^{-1}) = 1$$

L'objectif de la commande est:

étant donné une séquence de sortie désirée $\{Y^*(t)\}$, trouver une loi de commande adaptative pour accomplir la stabilité en boucle fermée et annuler l'erreur de poursuite.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y^*(t)] = 0 \quad (\text{III.6})$$

Le modèle décrit par l'équation (III.5) est réécrit sous la forme vectorielle suivante:

$$y(t+d) = \varphi^T(t) \theta(t) \quad (\text{III.7})$$

où: θ et φ sont les vecteurs de paramètres et d'observation respectivement:

$$\varphi(t) = [y(t), \dots, y(t-n+1), u(t), \dots, u(t-m-d+1)]^T$$

$$\theta(t) = [\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \dots, \beta_{m+d-1}]^T$$

Ils sont de dimension $(n+m+d)$. L'erreur de poursuite est alors définie par :

$$\begin{aligned} e(t+d) &= y(t+d) - y^*(t+d) \\ &= \varphi^T(t) \theta - y^*(t+d) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Si on peut choisir $\{u(t)\}$ de façon à satisfaire:

$$\varphi^T(t) \theta = y^*(t+d) \quad (\text{III.9})$$

il est évident que l'erreur $e(t+d)$ sera identiquement nulle. Autrement dit, la loi de commande correspondante est obtenue en posant la prédiction à d -pas, de la sortie, égale à la sortie désirée $y^*(t+d)$.

Les paramètres de θ étant inconnus et/ou variables dans le temps, ils sont alors estimés à chaque pas. Les estimés sont utilisés dans la loi de commande, comme s'ils étaient de vrais

paramètres "principe de l'équivalence certaine" I.3.3.

L'équation précédente devient alors :

$$\phi^T(t)\theta(t) = Y^*(t+d) \quad (\text{III.10})$$

où $\theta(t)$ désigne une estimation de θ à l'instant t .

Nous utilisons l'algorithme simple du gradient II.1 donné par :

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(t-1) + a(t) \frac{\phi(t-d)}{c + \phi^T(t-d)\phi(t-d)} \cdot \varepsilon(t) \\ \varepsilon(t) &= y(t) - \phi^T(t-d)\theta(t-1) \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

avec $0 < a(t) < 2$; $c > 0$

La loi de commande adaptative sera alors donnée par l'égalité (III.10). De cette équation, l'expression de la commande sera :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\theta_{n+1}(t)} [-\theta_1(t)y(t) - \dots - \theta_n(t)y(t-n+1) - \theta_{n+2}(t)u(t-1) \\ &\quad \dots - \theta_{n+m+d}(t)u(t-m-d+1) + y^*(t+d)] \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

cette loi ne s'applique qu'aux procédés ayant des zéros asymptotiquement stables (condition "c").

Si nous gardons l'expression du prédicteur, donnée en Annexe "A" par (A.9), l'expression de la commande deviendra :

$$u(t) = \frac{Y^*(t+d) - G(q^{-1})}{F(q^{-1})B(q^{-1})} \quad (\text{III.13})$$

Nous remarquons tout de suite que l'existence de $u(t)$, fini qui assure les objectifs définis, est liée à la position des racines de $B(z^{-1})$ par rapport au cercle unité. C'est pour cette

raison que $B(z^{-1})$ doit avoir ces racines à l'intérieur du cercle unité (condition "c"). Autrement dit le système doit, obligatoirement, être à phase minimale.

Pour calculer $u(t)$, $Y^*(t+d)$ doit être disponible à l'instant t . La sortie de référence Y^* est engendrée par un modèle de référence. Sa fonction de transfert est déterminée à partir des performances souhaitées (temps de réponse, dépassement, temps d'établissement).

La fonction de transfert du modèle de référence est: $B_r(q^{-1})/A_r(q^{-1})$. La commande $u(t)$ doit réaliser cette fonction de transfert entre la consigne $r(t)$ et la sortie réelle du procédé y . Néanmoins, cela n'est pas possible car le retard d ne peut être éliminé ou compensé. La trajectoire à suivre est modifiée par

$$y^*(t) = q^{-d} \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad (\text{III.14})$$

d'où la nécessité de connaître d (condition (a)).

Dans la pratique, l'algorithme fonctionne si $\theta_{n+1}(t)$, paramètre qui correspond à l'estimation de β_0 , est différent de zéro. Pour éviter la déviation par zéro, il faut assurer que ce paramètre ne tend pas vers zéro. La constante du gain $\underline{a}(t)$ dans l'algorithme d'estimation est calculé comme c'est indiqué au chapitre précédent.

Le schéma bloc relatif à cette commande est donné par la figure suivante:

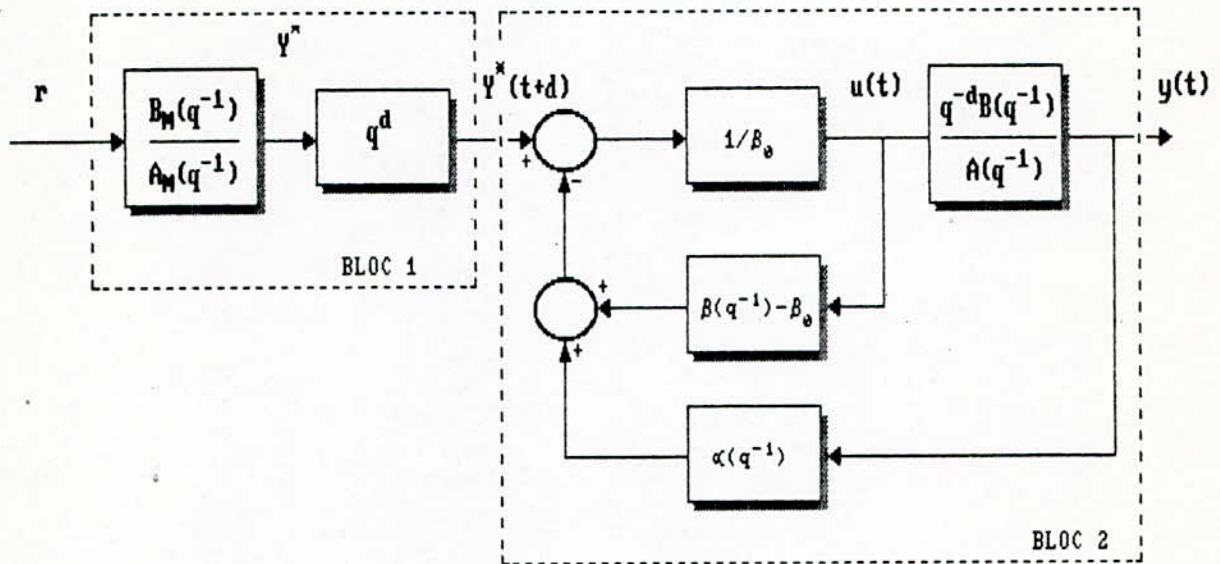


FIGURE III.1

On montre facilement que la fonction de transfert du bloc 1 est égale à q^{-d} , c'est à dire que

$$y(t) = q^{-d}y^*(t+d) = y^*(t) \tag{III.15}$$

avec cette commande, on voit bien que $y(t)$ suit parfaitement $y^*(t)$: La fonction de transfert du système en boucle fermée est:

$$y(t) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \tag{III.16}$$

Ce qui est l'objectif de la commande.

III.3.3 Commande adaptative avec les moindres carrés recursifs:

L'algorithme de commande précédent devient:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \theta(t-1) + K(t) [y(t) - \varphi^T(t-d)\theta(t-1)] \\ K(t) &= P(t-1) \frac{\varphi(t-d)}{(1 + \varphi^T(t-d)P(t-1)\varphi(t-d))} \\ P(t) &= P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t-d)\varphi^T(t-d)P(t-1)}{1 + \varphi^T(t-d)P(t-1)\varphi(t-d)}\end{aligned}\quad (\text{III.17})$$

avec

$$P(0) = \alpha I \quad ; \quad 0 < \alpha < \infty$$

La loi de commande reste la même, elle est donnée par :

$$\varphi^T(t)\theta(t) = y^*(t+d)$$

III.4 Commande à variance minimale:III.4.1 Introduction:

Dans cette section, nous présentons la commande à variance minimale généralisée. Cette approche inclut le signal de référence ainsi qu'une pondération sur la commande de telle façon que la poursuite et la régulation soient assurées. Ce qui entraîne la minimisation des variances de la commande et de l'erreur de poursuite.

III.4.2 Loi de commande:

Considérons le système décrit par le modèle ARMAX (III.1)

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{III.18})$$

où

$y(t)$, $u(t)$ et $e(t)$ sont respectivement la sortie, la commande et la perturbation du système à l'instant t .

Les connaissances à priori sur le système sont:

- Le retard
- Une borne supérieure des degrés de chaque polynôme

On suppose que tous les zéros du polynôme $C(\alpha)$ sont situés à l'extérieur du disque unité. C'est à dire que C doit être stable. Par contre le polynôme $B(\alpha)$ peut avoir des zéros à l'intérieur du disque unité. C'est à dire que le système peut être à phase non minimale.

La structure du régulateur dépend du choix du critère à minimiser. Le critère considéré dans notre cas est le suivant:

$$J = E[\phi^2(t+d) / t] \quad (\text{III.19})$$

Le régulateur minimise ainsi la variance d'une sortie auxiliaire $\hat{Y}(t)$, non pas celle de la sortie seulement comme dans le cas de la commande à variance minimale simple.

La sortie auxiliaire a la forme suivante:

$$\phi(t+d) = P(q^{-1})y(t+d) - R(q^{-1})y^*(t+d) + Q(q^{-1})u(t) \quad (\text{III.20})$$

où

$$P(q^{-1}) = \frac{P_N(q^{-1})}{P_D(q^{-1})}$$

$y^*(t)$ est le signal de référence.

P , Q et R sont des fonctions de transfert choisies par l'utilisateur pour l'amélioration des caractéristiques de réponse et la minimisation des fluctuations causées par les perturbations.

Les signaux $y^*(t+d)$ et $u(t)$ dans le critère (III.4.2) sont des informations disponibles à l'instant $t+d$, mais le premier terme ne l'est pas. D'où la nécessité de sa prédiction.

Soit la prédiction de la variable:

$$\phi_y(t) = P(q^{-1}) y(t) \quad (\text{III.21})$$

Le prédicteur $\hat{\phi}_y(t+d)$ est dérivé dans l'annexe A. Il est donné par (A.9):

$$\hat{\phi}_y(t+d/t) = \frac{F(q^{-1}) B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + \frac{G(q^{-1})}{c(q^{-1}) P_D(q^{-1})} y(t) \quad (\text{III.22})$$

avec

$$P(q^{-1}) = \frac{P_N(q^{-1})}{P_D(q^{-1})}$$

De l'équation (A.8) $\hat{\phi}_y(t+d)$

peut être exprimé par:

$$\phi_y(t+d) = \frac{F(q^{-1}) B(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1}) P_D(q^{-1})} y(t) + F(q^{-1}) e(t+d) \quad (\text{III.23})$$

L'erreur de prédiction est:

La sortie auxiliaire sera:

La sortie auxiliaire sera d'après (III.20)

$$\begin{aligned} e(t+d/t) &= \phi_y(t+d) - \hat{\phi}_y(t+d) \\ &= F(q^{-1}) e(t+d) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

$$\begin{aligned} \phi(t+d) &= \hat{\phi}_y(t+d/t) + Q(q^{-1}) U(t) \\ &\quad - R(q^{-1}) y^*(t+d) \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

$$\begin{aligned} \phi(t+d) &= \phi_y(t+d) - R(q^{-1}) y^*(t+d) + Q(q^{-1}) u(t) - \hat{\phi}_y(t+d/t) \\ &\quad - R(q^{-1}) y^*(t+d) + Q(q^{-1}) u(t) + F(q^{-1}) e(t+d) \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

le prédicteur $\hat{\phi}(t+d/t)$ de la sortie auxiliaire sera alors

$$\hat{\phi}(t+d/t) = \hat{\phi}_y(t+d/t) - R(q^{-1}) y^*(t+d) + Q(q^{-1}) u(t) \quad (\text{III.26})$$

la sortie auxiliaire est alors

$$\phi(t+d) = \hat{\phi}(t+d/t) + F(q^{-1}) e(t+d) \quad (\text{III.27})$$

en substituant (III.27) dans (III.19) nous obtenons

$$\begin{aligned} J &= E[(\hat{\phi}(t+d/t) + F(q^{-1}) e(t+d))^2] \\ &= E[(\hat{\phi}(t+d/t))^2] + E[(F(q^{-1}) e(t+d))^2] + 2E[F(q^{-1}) \hat{\phi}(t+d/t) e(t+d)] \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul, du fait que le bruit $e(t)$ est supposé blanc. L'indice de performance (III.19) devient:

$$J = \hat{\phi}(t+d/t)^2 + E[e(t+d/t)^2] \quad (\text{III.28})$$

La loi de commande qui minimisera J sera celle qui annulera le prédicteur $\hat{\phi}(t+d/t)$.

De (III.22) et (III.26)

$$\hat{\phi}(t+d/t) = \frac{B(q^{-1})F(q^{-1}) + Q(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})P_p(q^{-1})} y(t)$$

soit en multipliant par le polynôme $C(q^{-1})$

où

$$C(q^{-1})\hat{\phi}(t+d/t) = [E(q^{-1}) + Q(q^{-1})C(q^{-1})]u(t) + \frac{G(q^{-1})}{P_D(q^{-1})}y(t) - C(q^{-1})R(q^{-1})y^*(t+d)$$

$$E(q^{-1}) = B(q^{-1})F(q^{-1})$$

L'expression de la commande optimale $u_0(t)$ est obtenue en annulant (III.29):

$$U_0(t) = \frac{C(q^{-1})R(q^{-1})y^*(t+d) - \frac{G(q^{-1})}{P_D(q^{-1})}y(t)}{E(q^{-1}) + Q(q^{-1})C(q^{-1})} \quad (\text{III.30})$$

Une autre forme de $u_0(t)$ est obtenue en annulant (III.26)

$$U_0(t) = \frac{R(q^{-1})y^*(t+d) - \hat{\phi}_y(t+d/t)}{Q(q^{-1})} \quad (\text{III.31})$$

C'est la loi de commande qui inclut le signal de référence $y^*(t)$.

Cette stratégie de commande doit être combinée avec une méthode d'estimation paramétrique adéquate pour donner un régulateur auto-ajustable.

En posant $P=1$, et $Q=0$ dans (III.30) nous obtenons la commande à variance minimale.

Le système en boucle fermée peut être représenté par la figure suivante:

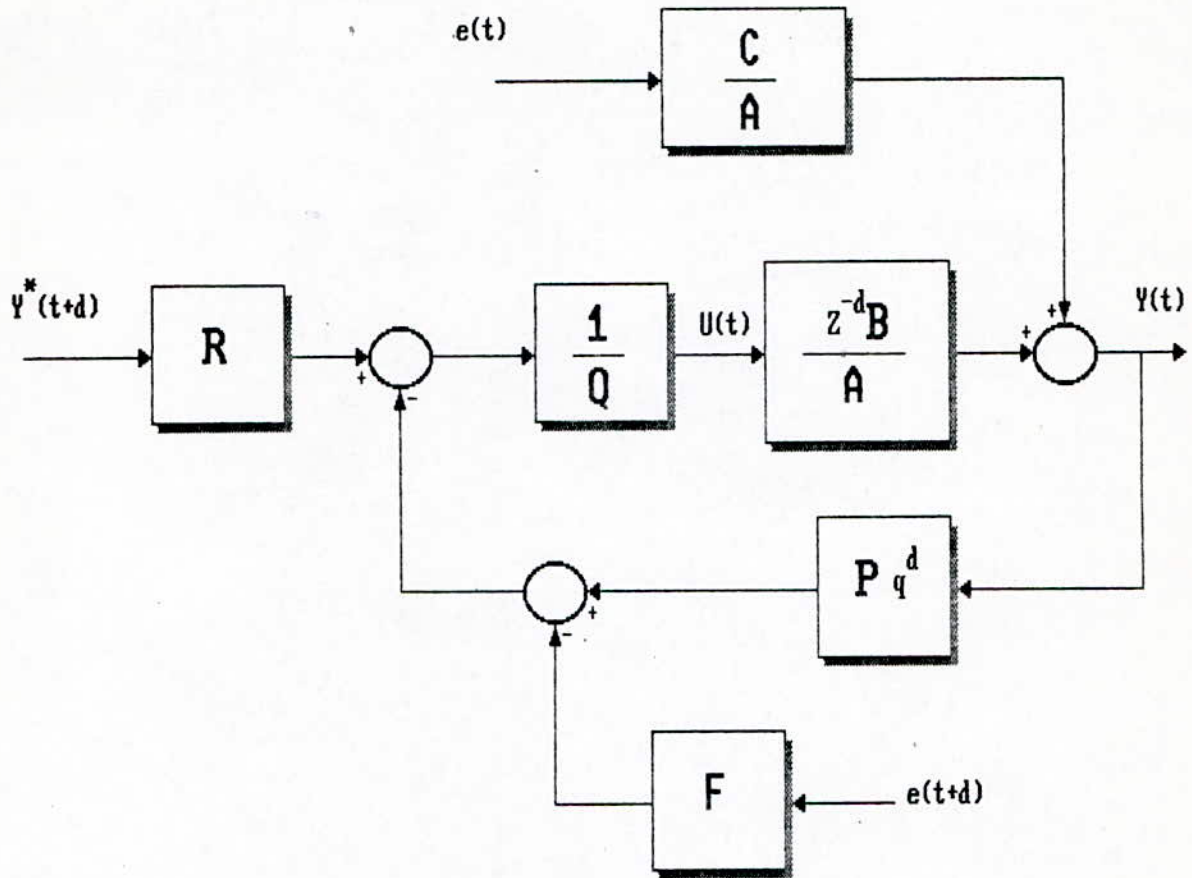


Figure III.2

Des équations (III.18), (III.24), (III.31) et (A.3) nous pouvons obtenir, en résolvant suivant la sortie $y(t)$

$$y(t) = \frac{B F + Q C}{P B + Q A} e(t) + \frac{B}{P B + Q A} R y^*(t) \quad (\text{III.32})$$

et en résolvant suivant la commande $u(t)$ on aura

$$u(t) = \frac{-G(q^{-1})/P_p(q^{-1})}{P(q^{-1})B(q^{-1}) + Q(q^{-1})A(q^{-1})} e(t) + \frac{A(q^{-1})}{P(q^{-1})B(q^{-1}) + Q(q^{-1})A(q^{-1})} R(q) \quad (\text{III.33})$$

Ces deux dernières équations nous donnent les propriétés du système en boucle fermée suivant les termes de la sortie $y(t)$ et la commande $u(t)$.

L'existence de $y(t)$ et de $u(t)$ bornées est liée aux zéros du polynôme $PB+QA$. Le système est alors stable en boucle fermée si ce polynôme est stable.

L'algorithme:

En développant $C(q^{-1})$ dans (III.22), nous avons:

$$\hat{\phi}_y(t+d/t) = E(q^{-1})u(t) + \frac{G(q^{-1})}{P_D(q^{-1})}y(t) - c_1\hat{\phi}_y(t+d-1/t-1) - \dots \quad (\text{III.34})$$

on définit une variable intermediaire, $y_D(t)$ qu'on calcul à chaque itération, sachant que $P_D(q^{-1})$ est de la forme $1+P_D^0 q^{-1} + \dots$

$$y_D(t) = \frac{y(t)}{P_D(q^{-1})}$$

L'equation précédente devient

$$\hat{\phi}(t+d/t) = \hat{X}(t) \theta(t) \quad (\text{III.35})$$

où le vecteur d'observation $X(t)$ est:

$$\hat{X}(t) = [U(t), U(t-1), \dots, Y(t)/P_D, Y(t-1)/P_D, \dots, \hat{\phi}_y(t+d-1/t-1), \dots, \hat{\phi}_y(t+d-nc/t-nc)]^T$$

et le vecteur des paramètres θ

$$\theta(t) = [e_0, e_1, \dots, g_0, g_1, \dots, -c_1, -c_2, \dots, -c_{nc}]^T$$

comme méthode d'estimation paramétrique, on choisit la méthode

des moindres carrés étendue. Donnée par:

$$\theta(t) = \theta(t-1) + K(t) [\phi_y(t) - \hat{X}^T(t-d)\theta(t-1)]$$

$$K(t) = \frac{p(t-1)X(t-d)}{\beta + X^T(t-d)p(t-1)X(t-d)}$$

$$p(t) = [p(t-1) - K(t)X^T(t-d)p(t-1)]/\beta$$

avec $\beta \in [0.95, 0.99]$ facteur d'oubli.

Nous obtenons l'algorithme suivant:

Etape 1:

Lire la nouvelle sortie $Y(t)$.

Etape 2:

Former le vecteur d'observations $X(t)$.

Etape 3:

Estimer les paramètres $\theta(t)$ par MCE.

Etape 4:

Calculer la commande $u_o(t)$ par (III.30) ou bien par (III.31).

Etape 5:

Incrémenter t et aller en 1.

C'est l'algorithme généralisé du régulateur auto-ajustable de l'approche directe.

Les paramètres inconnus du système ne sont pas identifiés. Cependant les paramètres du modèle de prédiction sont utilisés directement pour le calcul de la commande. Nous remarquons que cette méthode nous évite de résoudre l'équation de Diophantine qui est souvent introduite dans la commande indirecte.

III.5. Simulation:A. Résultats de simulation avec l'algorithme de commande à erreur de prédiction:

Considérons le système donné par:

$$A(q^{-1})=1-1.086 q^{-1}+0.2636 q^{-2}$$

$$B(q^{-1})=0.1387 q^{-1}+0.0889 q^{-2}$$

Le système est stable et à phase minimale, la trajectoire à suivre est générée par le modèle suivant:

$$A_r(q^{-1})=1-0.9048 q^{-1}$$

$$B_r(q^{-1})=0.09516 q^{-1}$$

la référence $r(t)$ est un signal carré d'amplitude 1 et de période 200.

-Simulation en utilisant l'algorithme du gradient:

La figure III-1 montre la sortie du système et la trajectoire à suivre, $a(t)$ est choisi égale à 1, c est choisi égale à 1 également. Les paramètres initiaux sont choisis nuls sauf β_0 ($\beta_0=1$). La sortie du système suit, après un transitoire dû à l'identification des paramètres du régulateur, bien la trajectoire de référence. L'évolution de la commande est montrée par la figure III-2.

Maintenant nous introduisons une variation sur les paramètres pour illustrer la capacité de poursuite de l'algorithme. A l'instant $t^1=180$, nous changeons les paramètres de A et de B

$$A(q^{-1})=1-1.2 q^{-1}+0.35 q^{-2}$$

$$B(q^{-1})= q^{-1}-0.6 q^{-2}$$

puis les paramètres reprennent leurs valeurs à l'instant $t_2=350$. Le modèle à suivre étant le même, la sortie du système est montrée par la figure III-4. l'effet de la variation est remarqué aux instants t_1 et t_2 . le régulateur reagit bien à l'effet de ces changements et maintient la poursuite après une légère variation à ces instants la variation sur les paramètres est montrée sur la figure III-6.

-Simulation en utilisant l'algorithme des moindres carrées récursifs:

On refait la même procédure et avec le même système en utilisant les moindres carrées récursifs pour l'estimation des paramètres. le gain initiale de l'algorithme est choisi égale à 1000. la figure III.9 montre la convergence rapide des paramètres estimés. la sortie du système, après un transitoire, est parfaitement identique à la trajectoire de référence (Figure III-4). la sortie du système dans ce cas est beaucoup plus sensible aux variations introduites sur les paramètres la convergence est plus rapide que dans le cas précédant.

B. Résultats de simulation avec l'algorithme de commande à variance minimale:

Le système considéré est le suivant:

$$A(q^{-1})=1-1.7q^{-1}+0.72q^{-2}=(1-0.8q^{-1})(1-0.9q^{-1})$$

$$B(q^{-1})=0.8+0.4q^{-1}$$

$$C(q^{-1})=1-0.7371q^{-1}+0.1653q^{-2}$$

Le retard $d=1$.

La variance de la perturbation, $v=0.025$

Les zéros du polynôme $A(\alpha)$ sont: $\alpha_1=1.25$ et $\alpha_2=1.11$. Le système est donc stable en boucle ouverte .

Les zéros de $B(\alpha)$ sont $\alpha=-2$, Le système est à phase minimale.

Le signal de référence est généré par le modèle, de second ordre, suivant:

$$A_n(q^{-1})=1-0.94q^{-1}$$

$$B_n(q^{-1})=0.095q^{-1}$$

Le signal de référence est donné par l'équation:

$$y^*(t)=B_n(q^{-1})/A_n(q^{-1}).r(t)$$

où $r(t)$ est un signal carré d'amplitude égale à un et de période de 50.

La sortie, y , et la commande u sont représentées dans la figure (III-13-1), Nous remarquons l'existence d'un régime transitoire dû à la méconnaissance au début des paramètres du système.

Après ce transitoire la sortie suit bien le modèle.

Dans la figure (III-13-2) a, b et c nous avons représenté l'évolution des paramètres du régulateur. Nous avons utilisé, comme méthode d'identification, la méthode des moindres carrés récursive avec facteur d'oubli. Cet algorithme d'estimation est choisi du fait que le système stationnaire (à paramètres invariants) et qu'on ne possède aucune connaissance à priori sur ces paramètres.

Dans cet exemple nous avons choisi $Q=0$ du fait que le système est à phase minimale.

Pour vérifier la robustesse de notre algorithme, nous allons considérer deux cas de figure, à savoir les systèmes instables

en BO et les systèmes à phase non minimale.

Soit le système :

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.036q^{-1} + 0.2636q^{-2} = (1 - 0.587q^{-1})(1 - 0.449q^{-1})$$

$$B(q^{-1}) = 0.8 + 0.4q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 - 0.7371q^{-1} + 0.1653q^{-2}$$

Ce système est stable et à phase minimale. Les figures (III-13) a et b représentent la sortie, avec le même signal de référence que dans l'exemple précédent, et la commande.

Dans les figures (III-14) a, b et c nous présentons l'évolution des paramètres du régulateur. Nous remarquons que la sortie poursuit bien la référence et que^{les} paramètres convergent.

En premier lieu nous déstabilisons le système à $t=40$; où le polynôme A devient: $A(q^{-1}) = 1 - 2q^{-1} + 0.99q^{-2} = (1 - 0.9q^{-1})(1 - 1.1q^{-1})$. D'où le pôle instable $z=1.1$. L'évolution de la sortie et de la commande sont présentées dans les figures (III-15) a et b. Nous remarquons qu'après un léger transitoire, la sortie poursuit bien le signal de référence.

Dans les figures (III-16) a, b et c nous présentons l'évolution des paramètres du régulateur. après un certain temps, à partir du changement à $t=40$, ces paramètres convergent vers leur nouvelle valeurs; et assurent la poursuite du modèle.

L'algorithme d'estimation utilisé est l'algorithme des moindres carrés récursif à trace constante. Nous avons choisi $\text{trace}(p)=600$, p étant la matrice de covariance.

En second lieu, nous déstabilisons B de manière à rendre le système à phase non minimale.

à l'instant $t=40$ le polynôme B devient :

$$B(q^{-1})=0.31+0.58q^{-1}$$

Nous choisissons $Q(q^{-1})=0.5-0.13q^{-1}$. Ce choix n'est pas aléatoire, car un autre choix peut nous mener à une instabilité en BF.

La sortie et la commande du système sont représentées dans les figures (III-17) a et b. Dans les figures (III-18) a, b et c nous remarquons l'évolution des paramètres après changement.

III.6 Conclusion

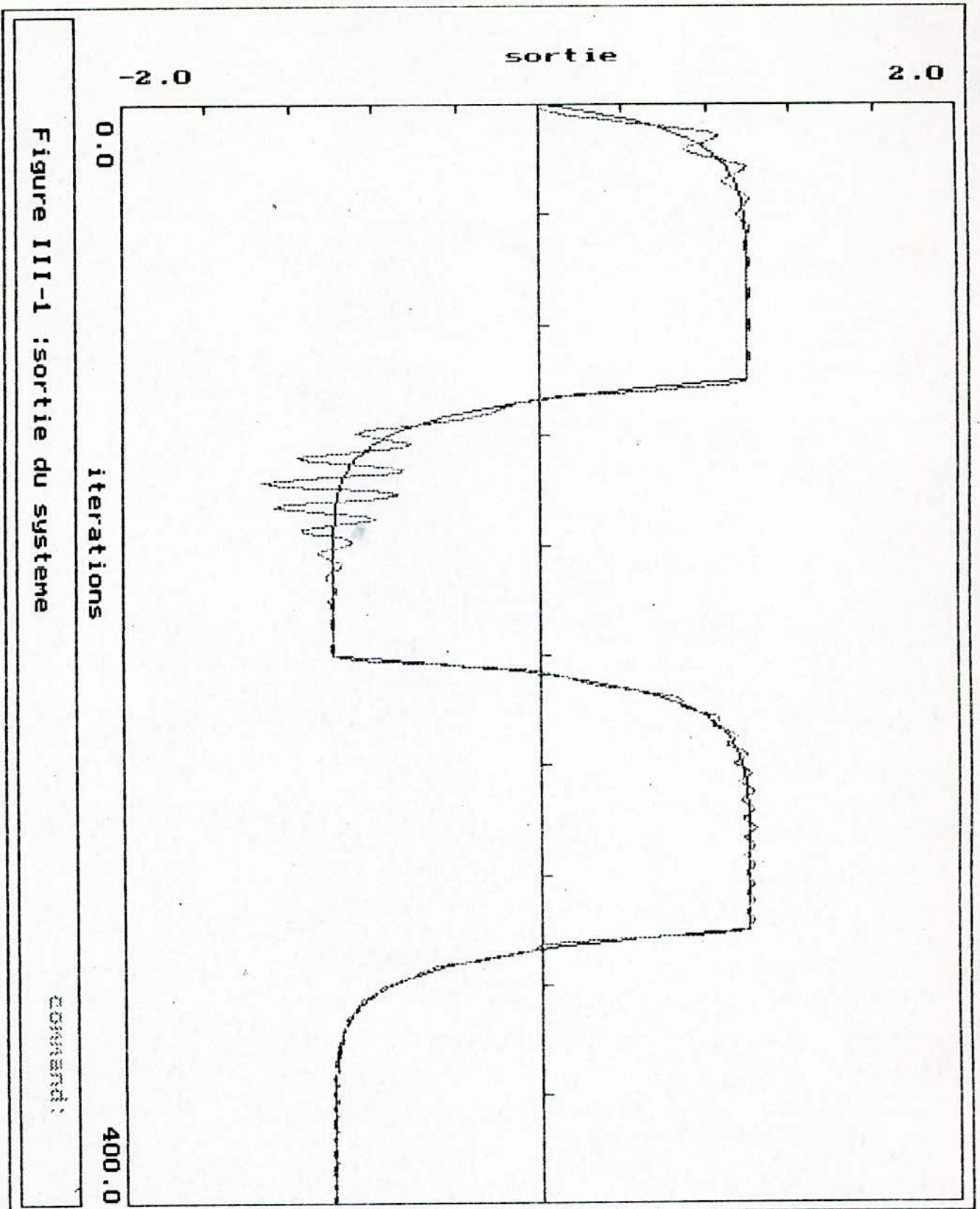
Le premier algorithme présenté dans ce chapitre est d'une grande performance, son application est limitée aux systèmes à phase minimale. L'utilisation de l'algorithme d'estimation des moindres carrés récursifs nous donne une convergence rapide et des résultats meilleurs.

Le deuxième algorithme assigne les pôles du système en boucle fermée, les zéros du polynôme $(B+QC)C$. Dans le cas où le système est à phase minimale Q est choisi identiquement nul. La stabilité du système est assurée lorsque le polynôme C est stable (B étant stable). Pour les systèmes à phase non minimale, un choix approprié de la pondération Q s'impose; ce qui nous oblige à avoir plus d'informations sur le système (connaissances a priori de la zone de variation de B).

La commande adaptative à variance minimale est une commande robuste. En effet, lors de l'application d'une action déstabilisante, et ce par l'intermédiaire d'un changement des paramètres du polynôme A , en guise de variation de ceux-ci, on a obtenu des résultats satisfaisants (Figure III-15).

D'autre part, en rendant le système à phase non minimale, par

déstabilisation du polynôme B , on a eu des résultats acceptables par un choix adéquat de la pondération Q .



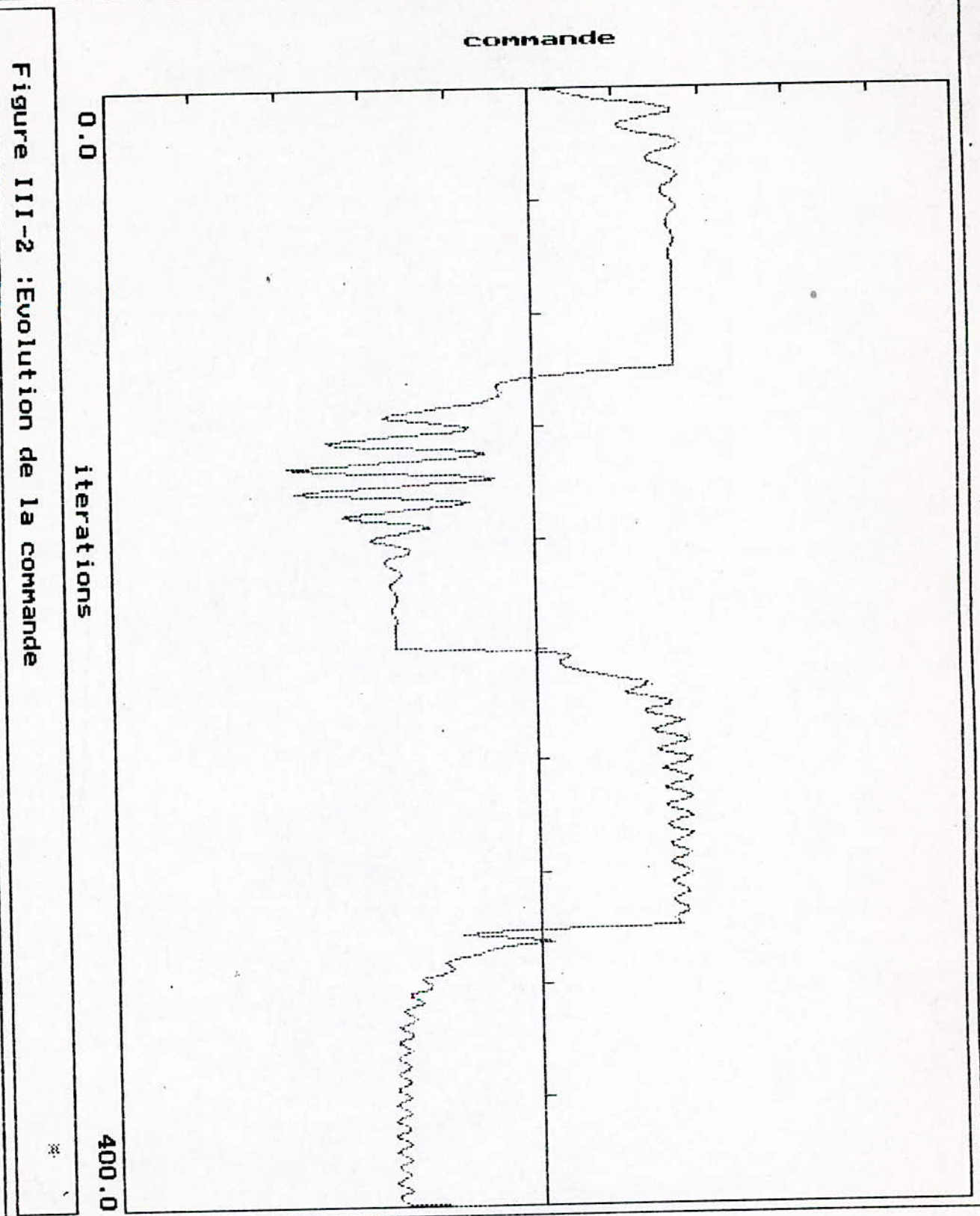


Figure III-2 : Evolution de la commande

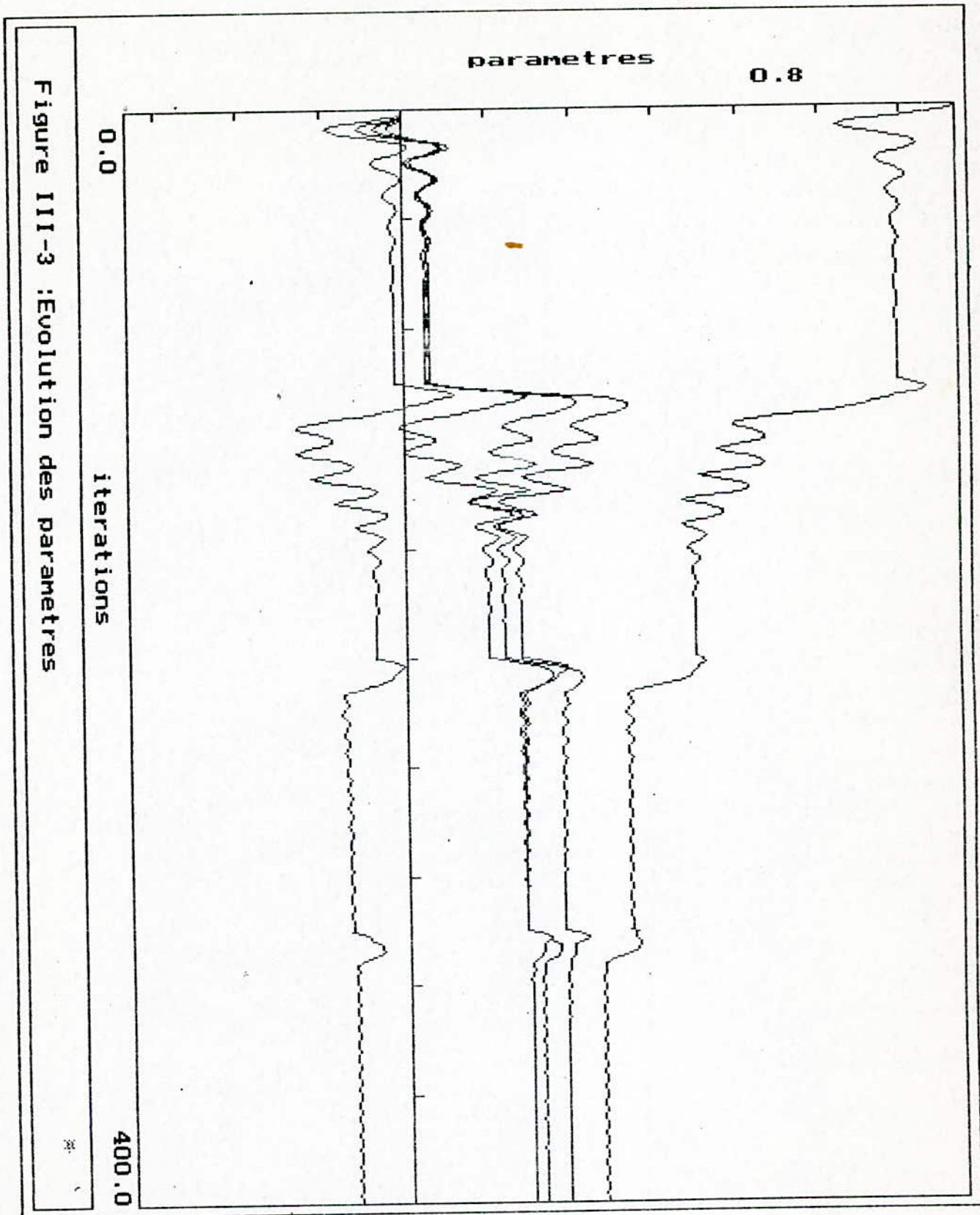


Figure III-3 : Evolution des parametres

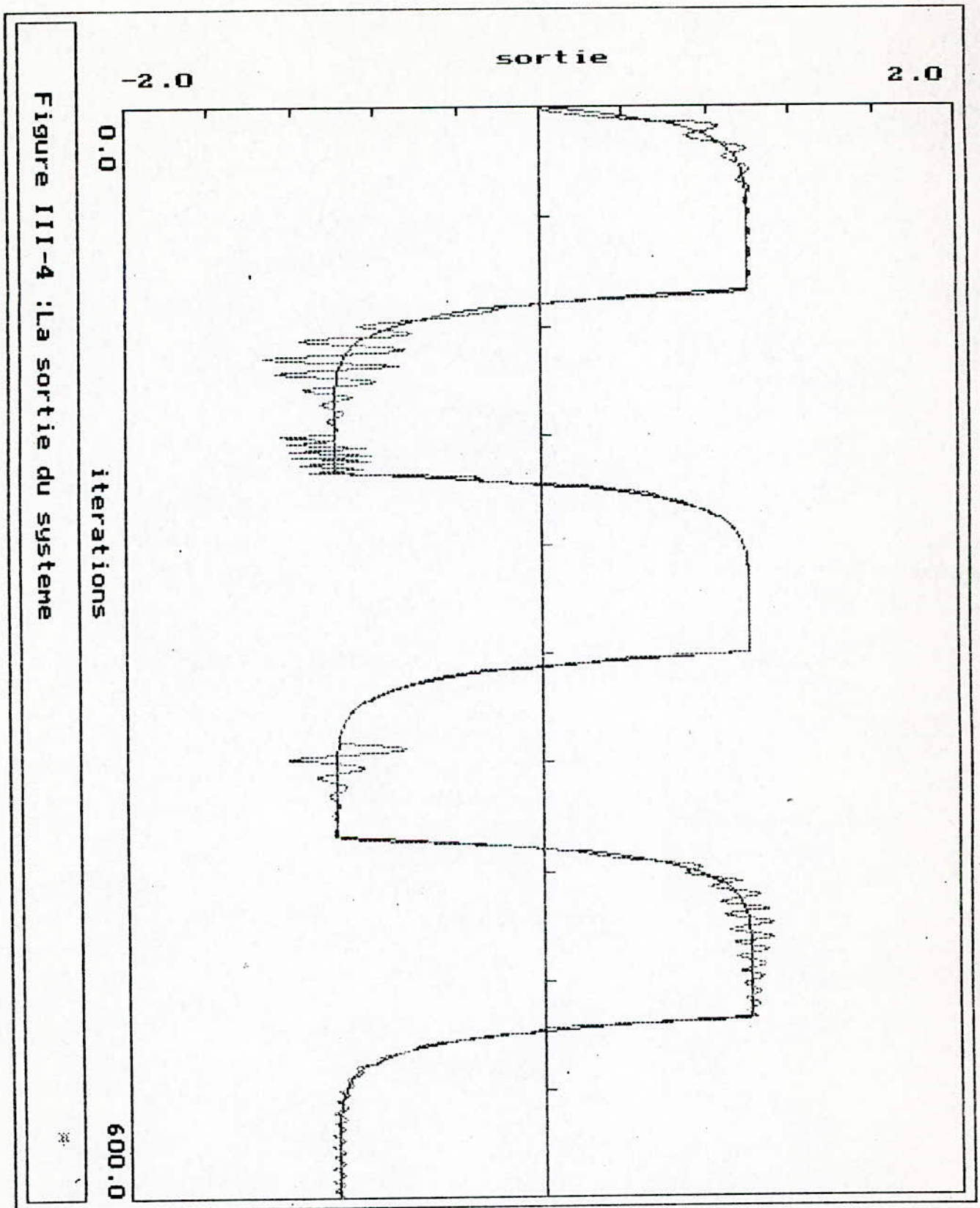


Figure III-4 : La sortie du systeme

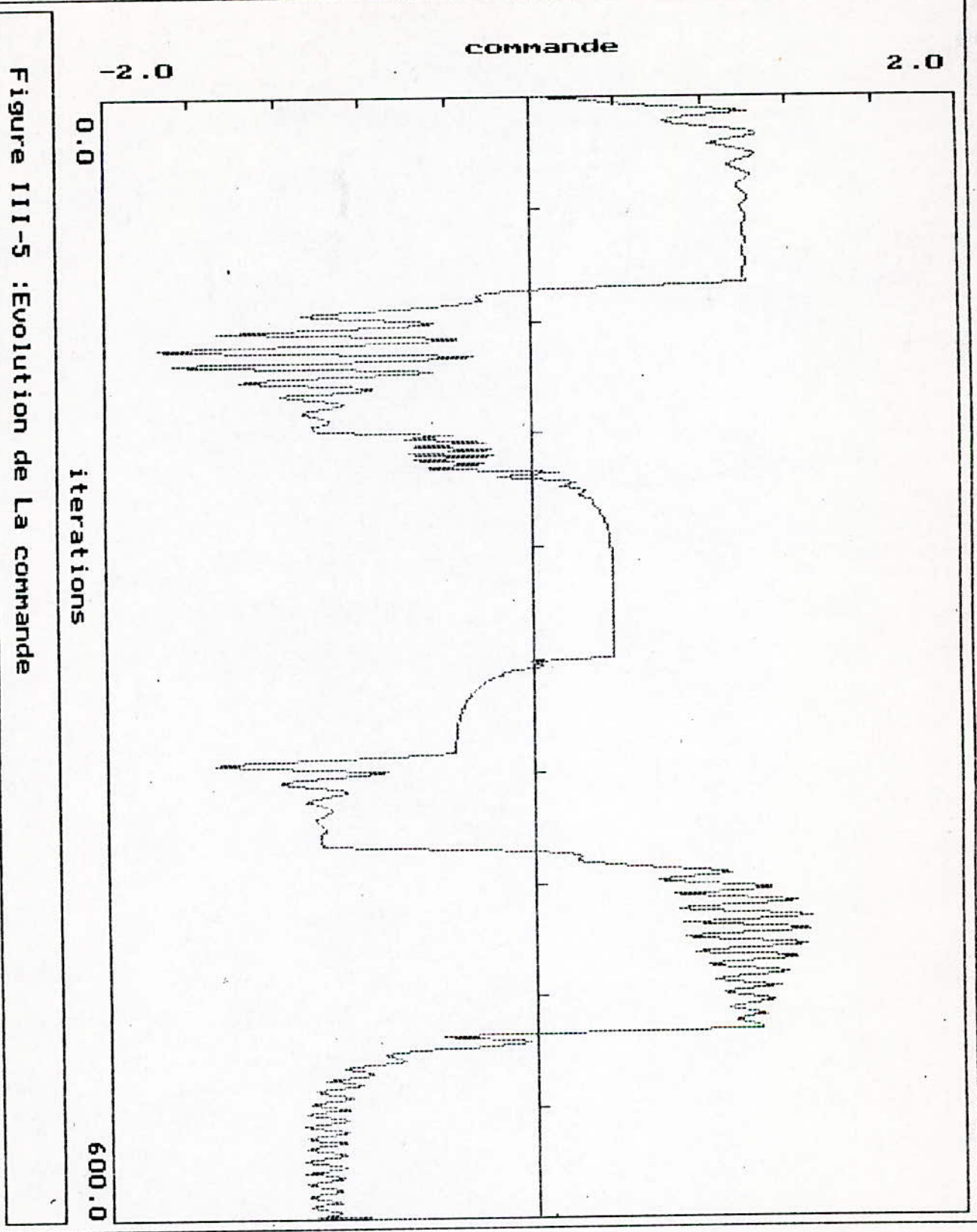


Figure III-5 : Evolution de La commande

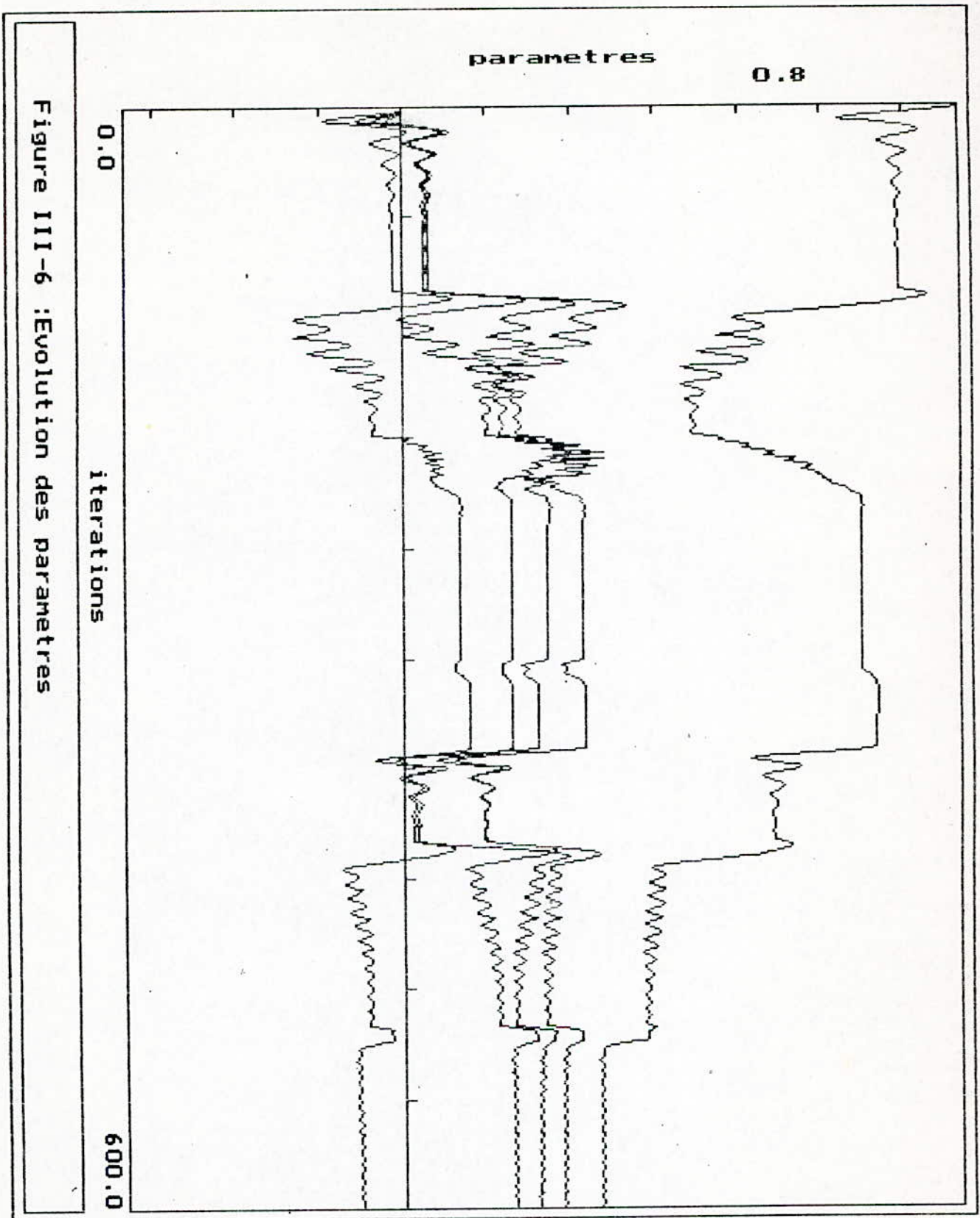


Figure III-6 : Evolution des parametres

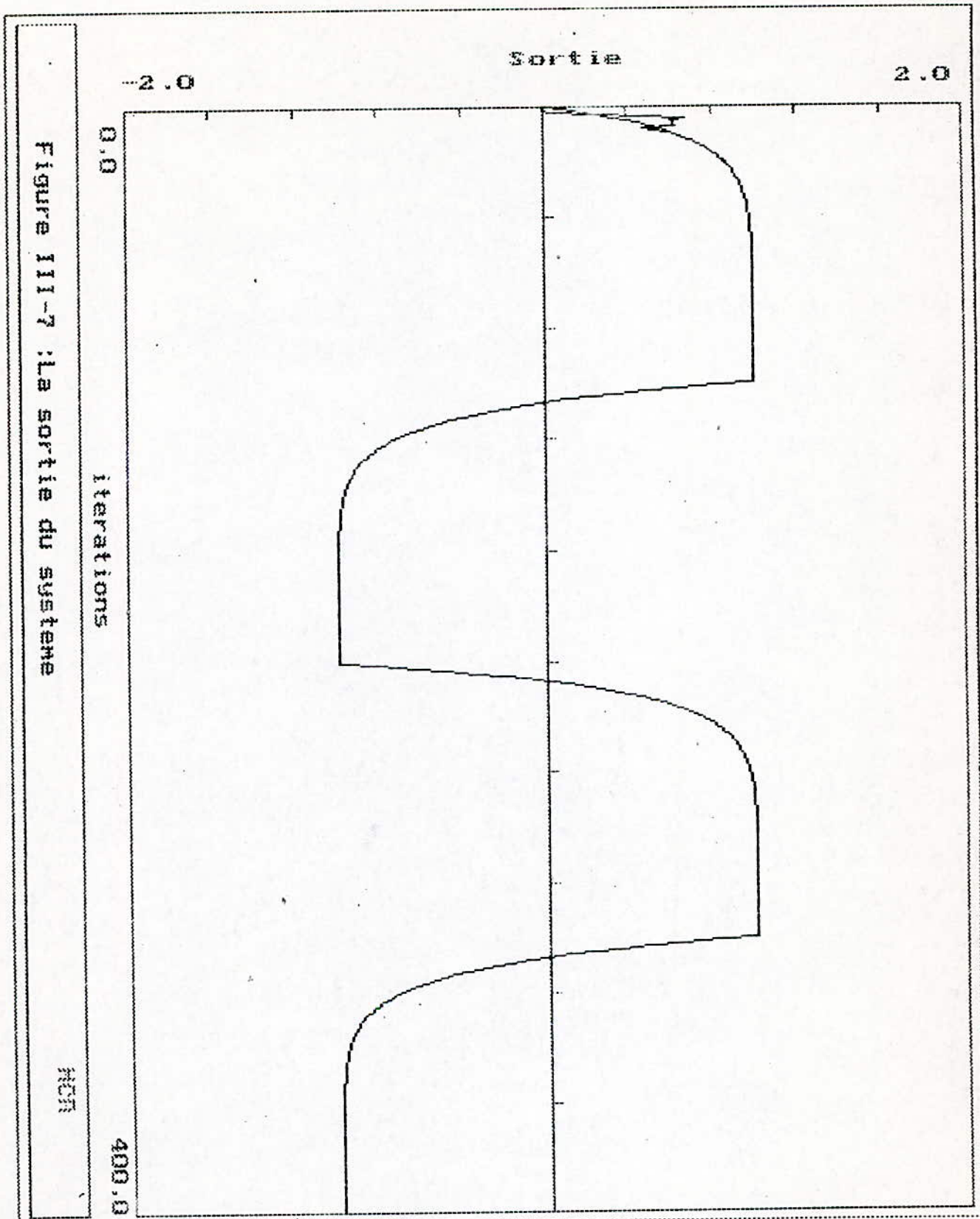


Figure 111-7 : La sortie du systeme

MCN

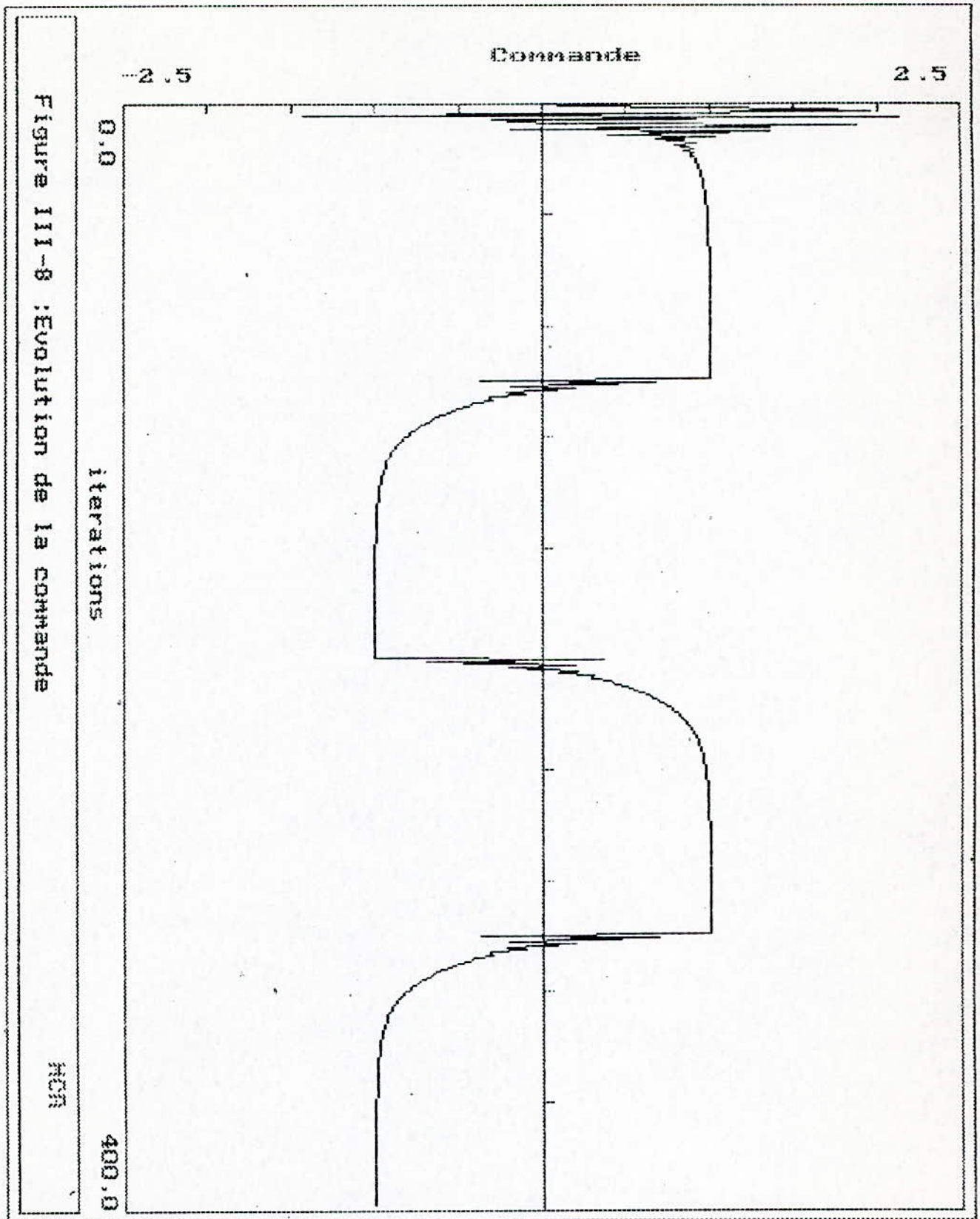


Figure III-8 : Evolution de la commande

MCA

Parametres 1.0

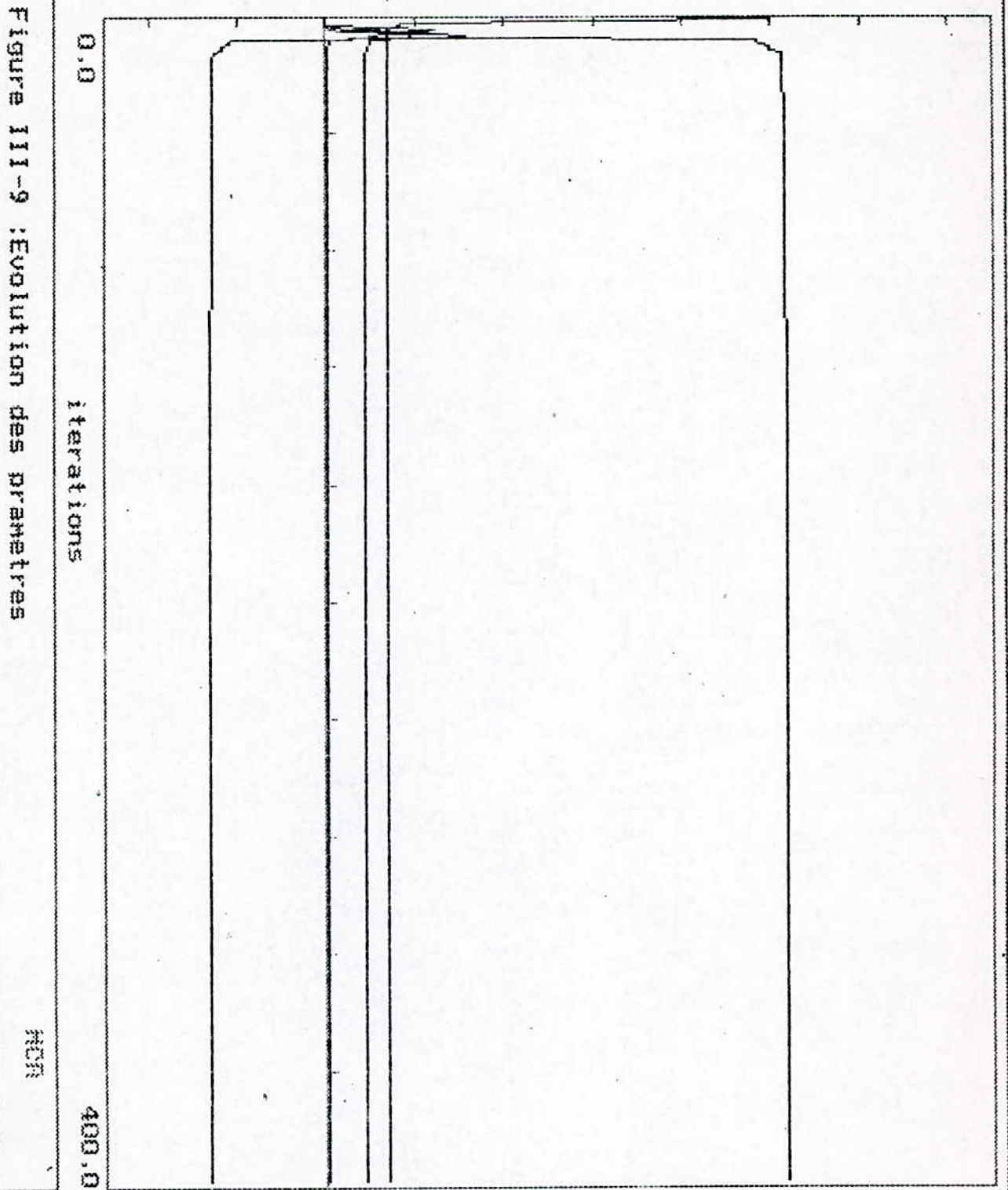


Figure III-9 : Evolution des parametres

RCM

Figure III-10 : la sortie du systeme

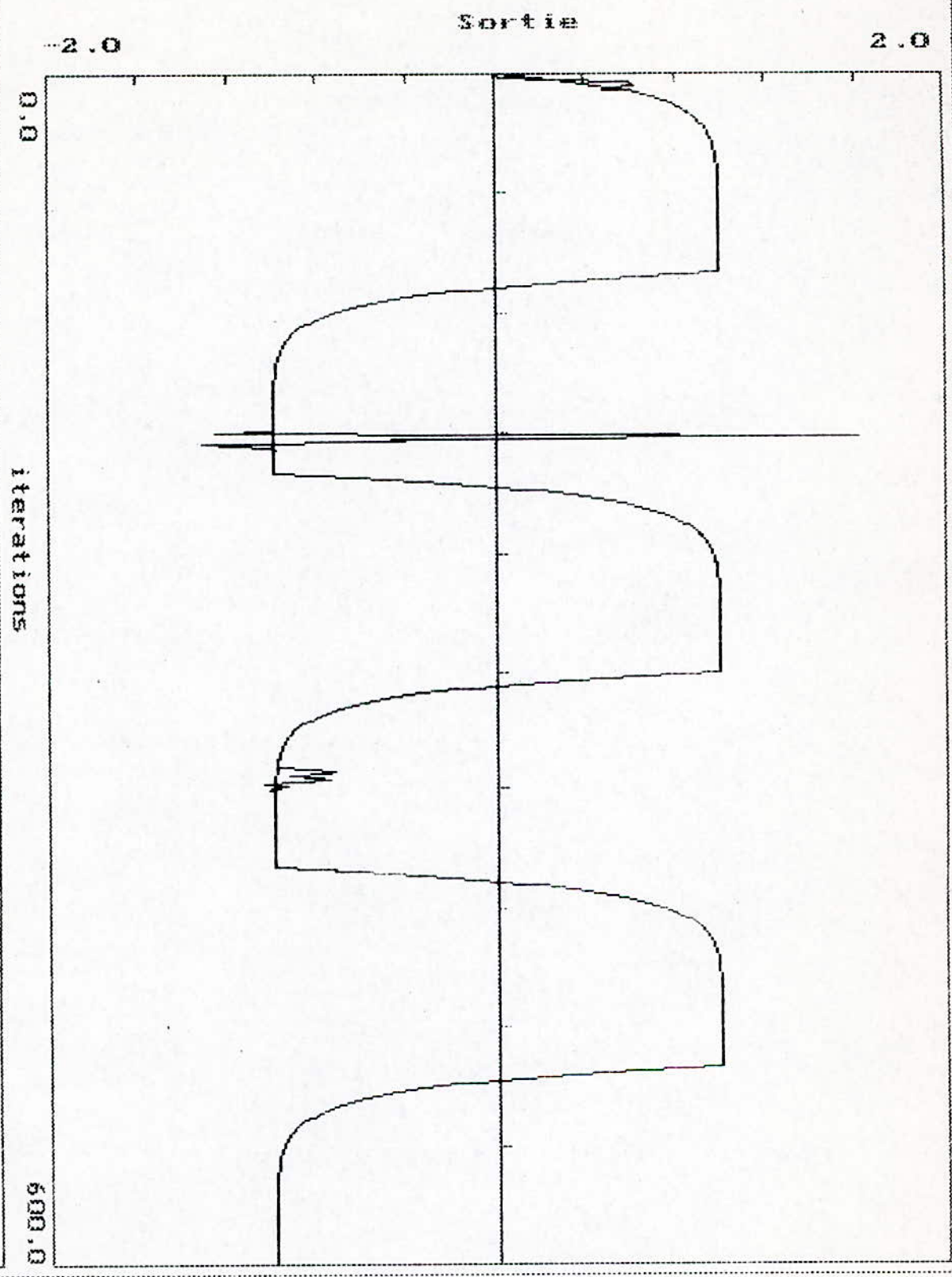
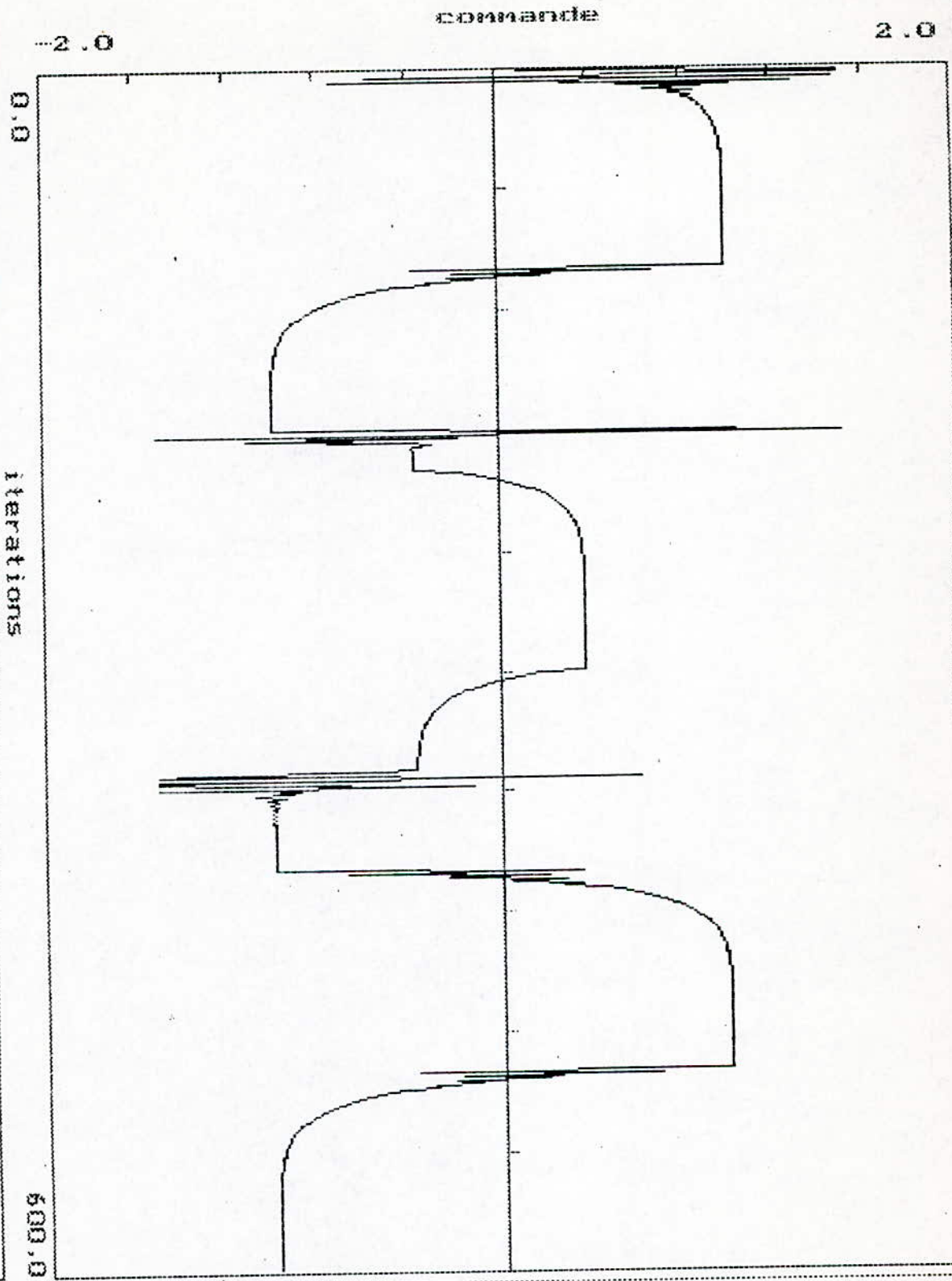


Figure III-11 : Evolution de la commande



Parametres

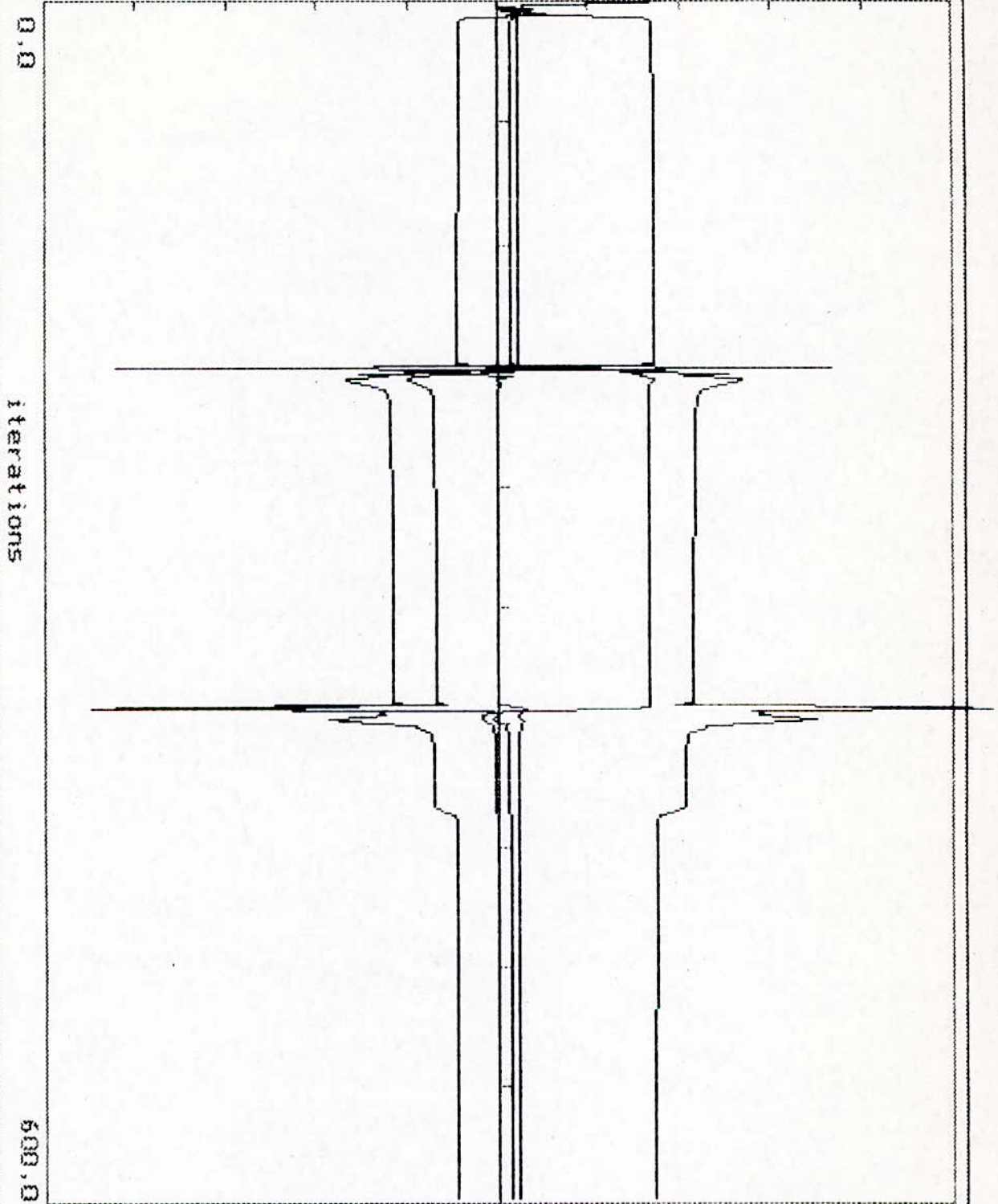
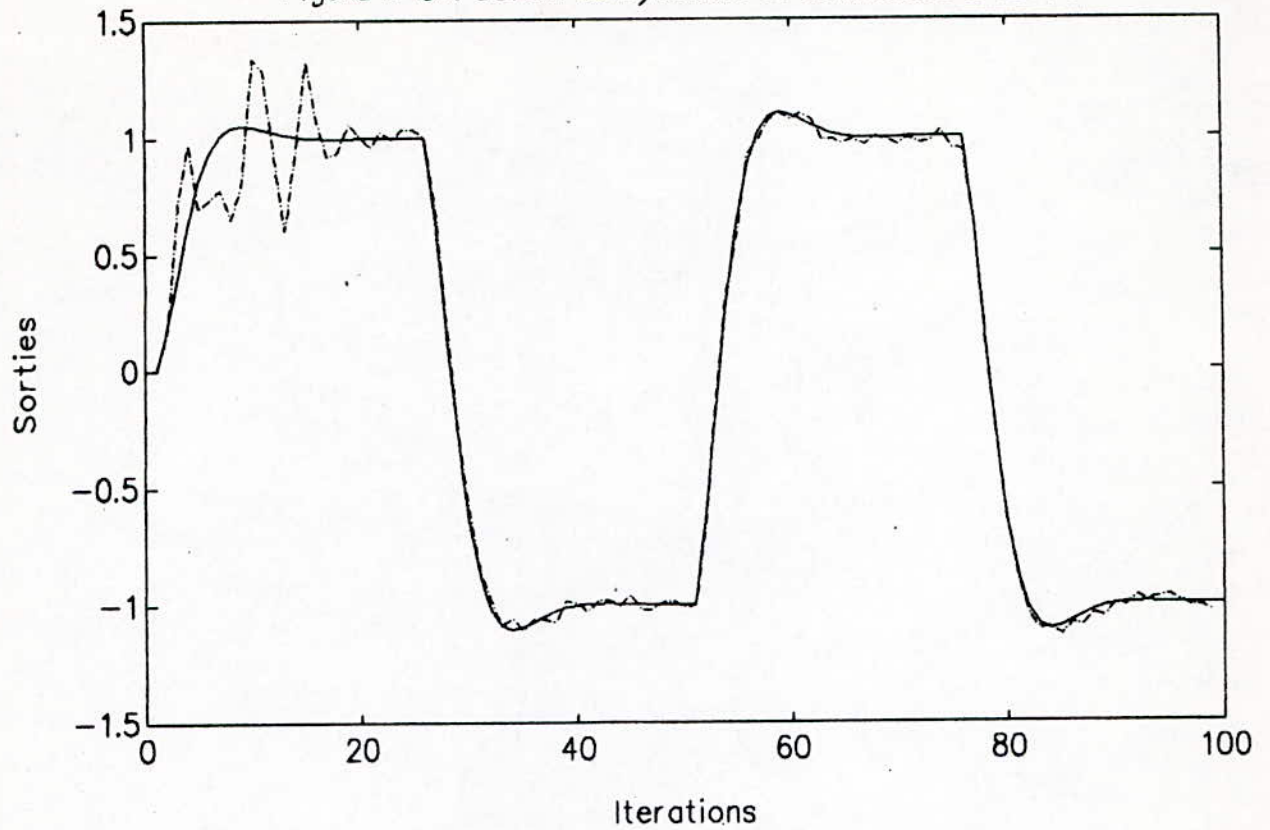


Figure 111-12 : Evolution des parametres

RDM

Figure 11-131: Sortie du systeme et du modele a suivre



Evolution de la commande

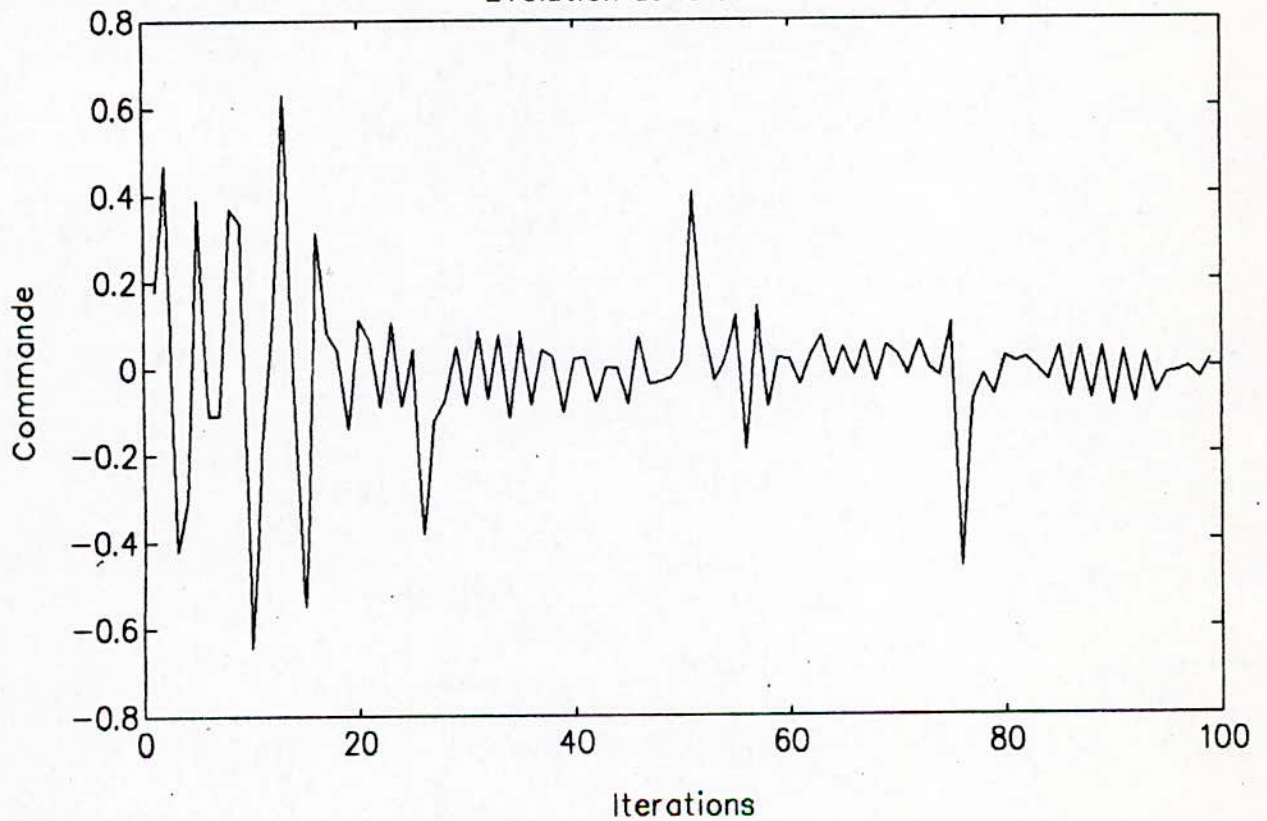
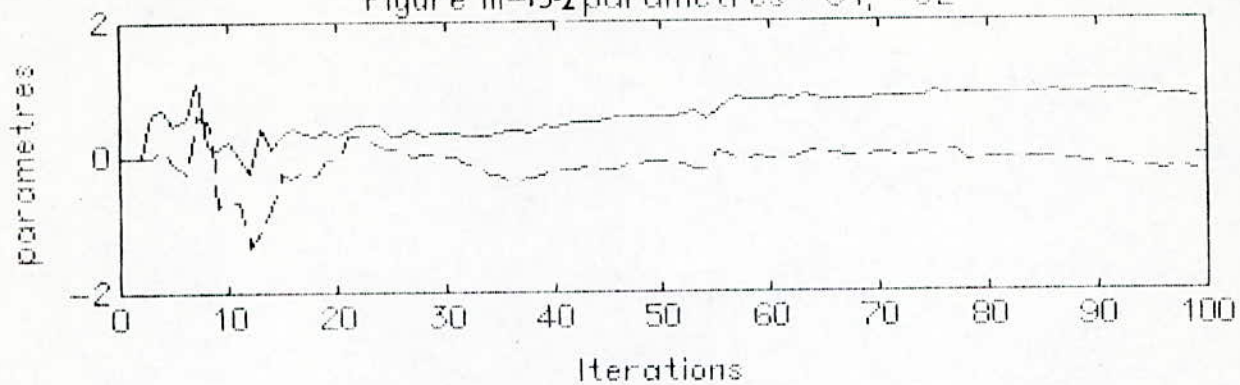
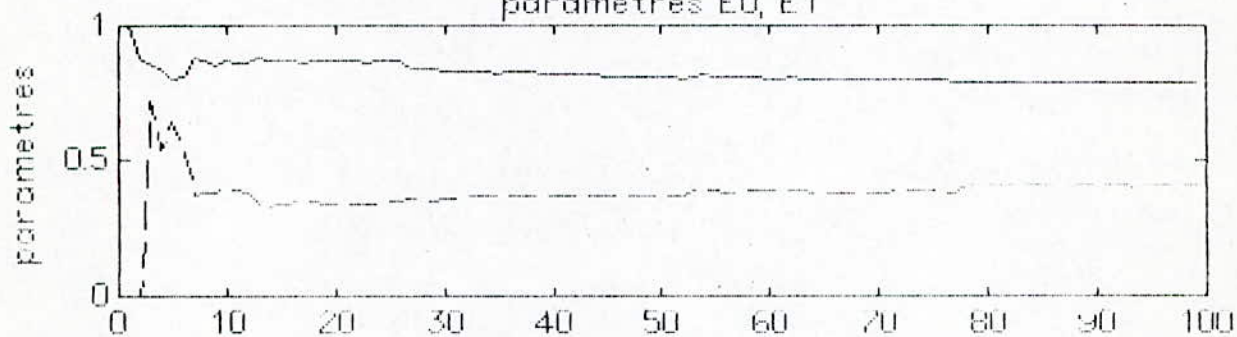


Figure III-13-2 parameters -C1, -C2



parameters E0, E1



parameters G0, G1

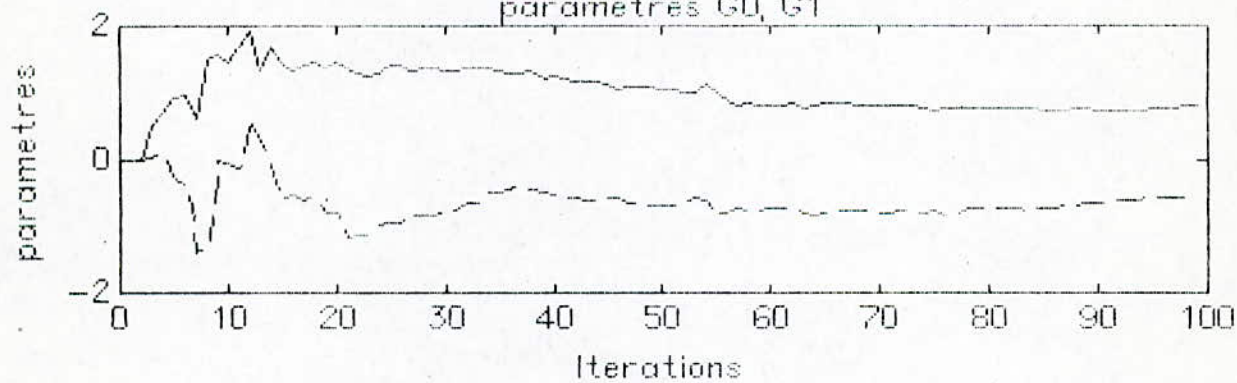
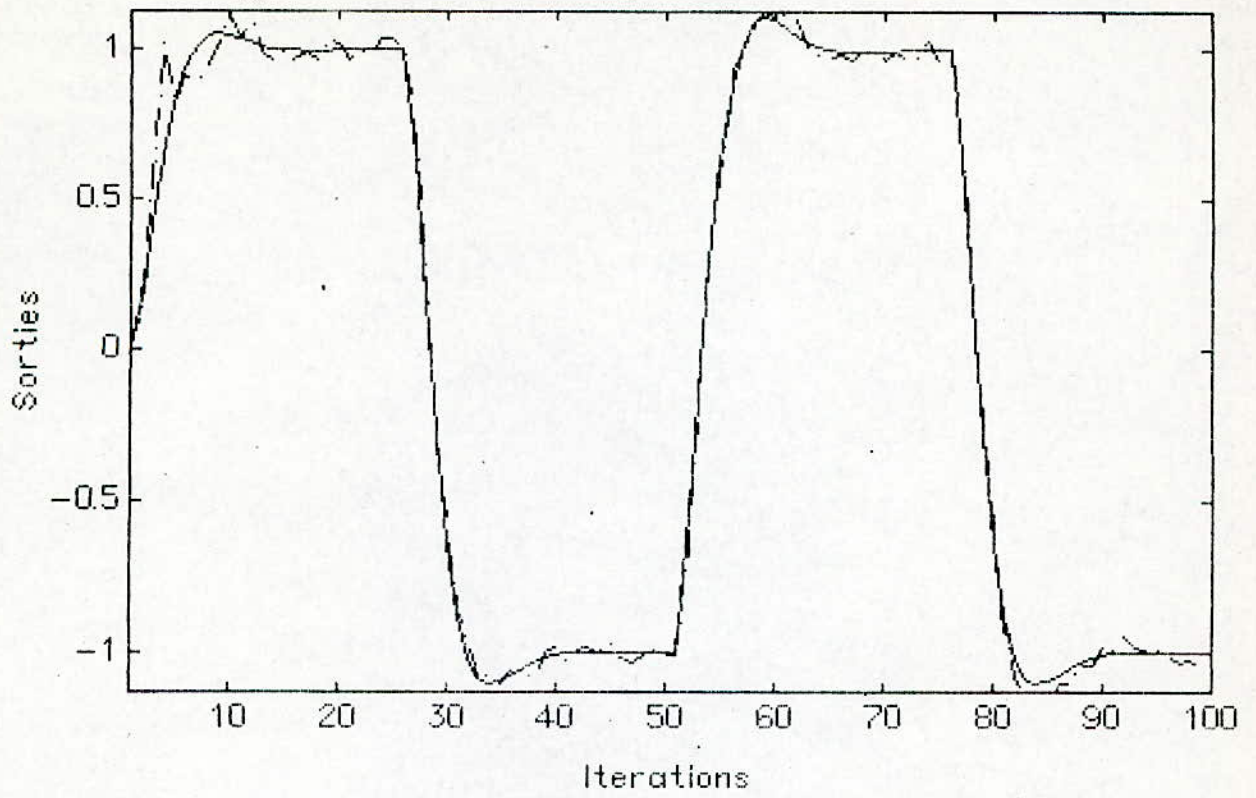
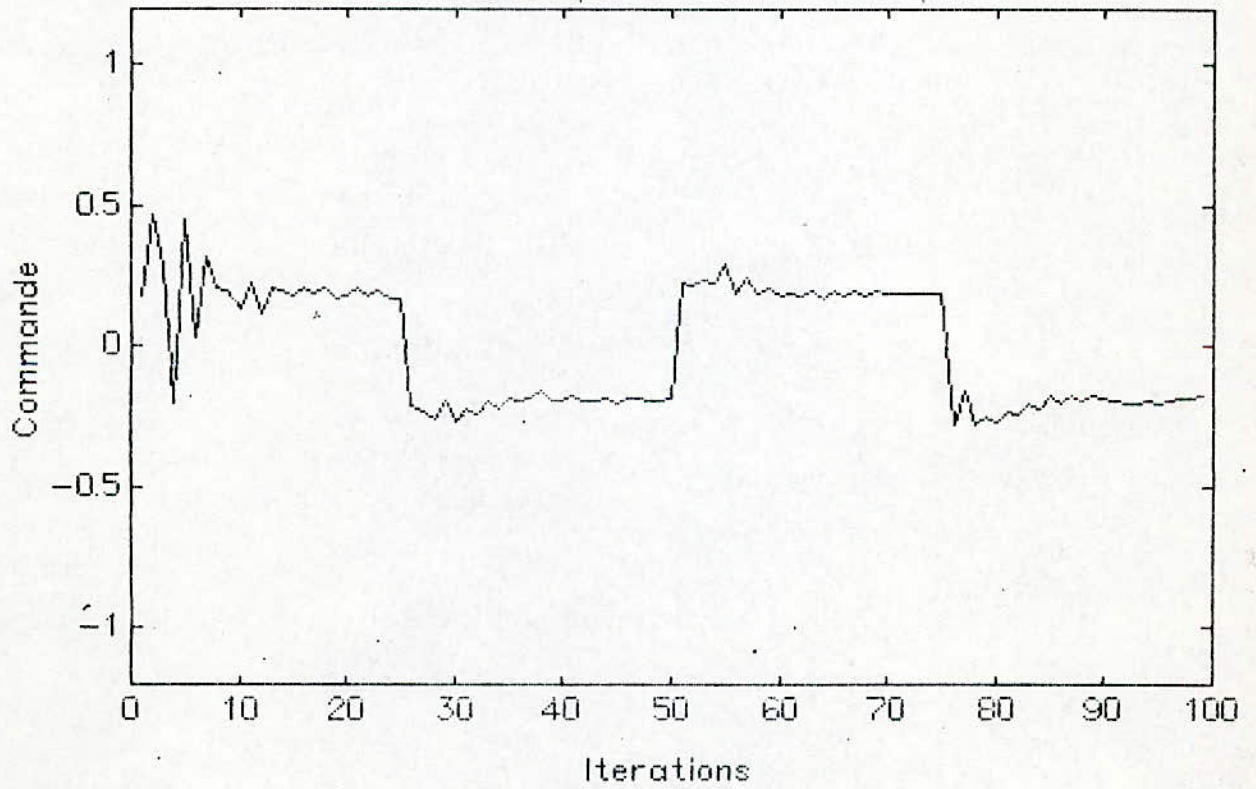


Figure III-13 : Sortie du systeme et du modele a suivre



Evolution de la commande



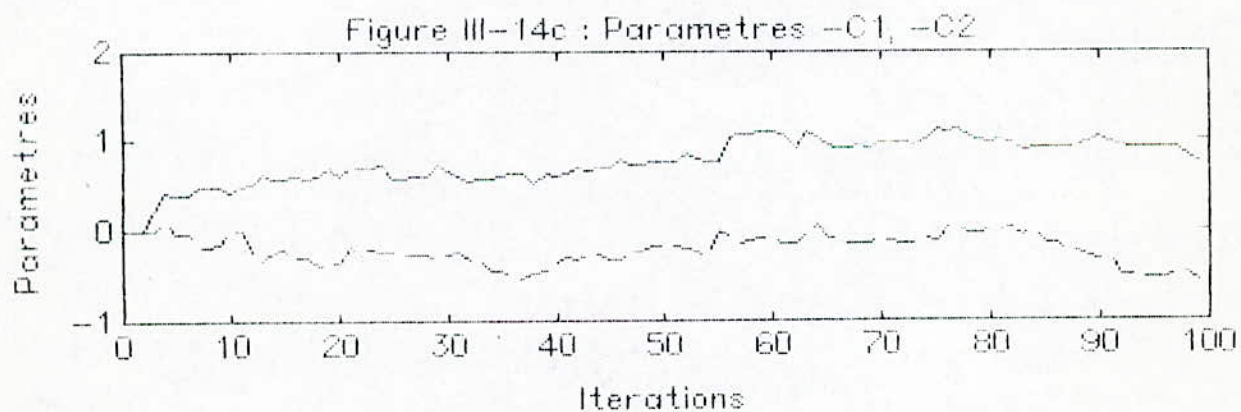
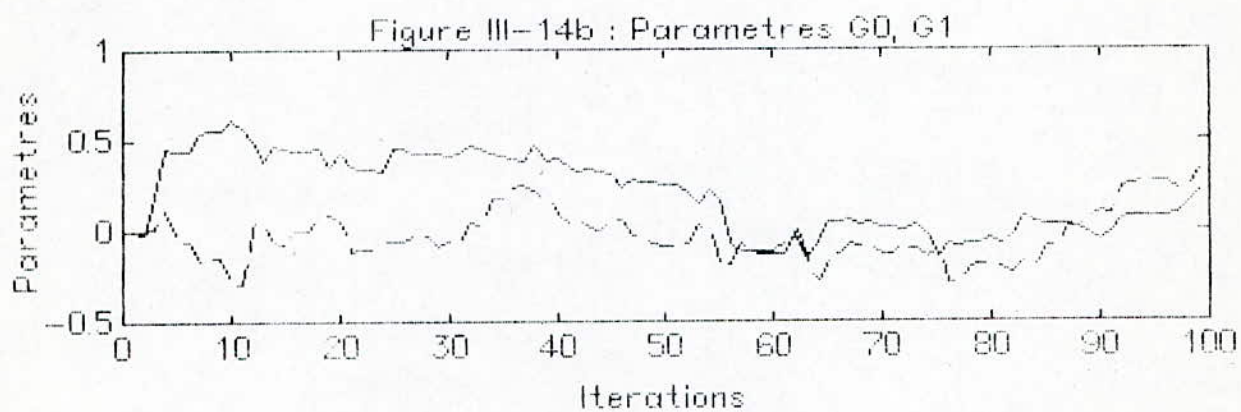
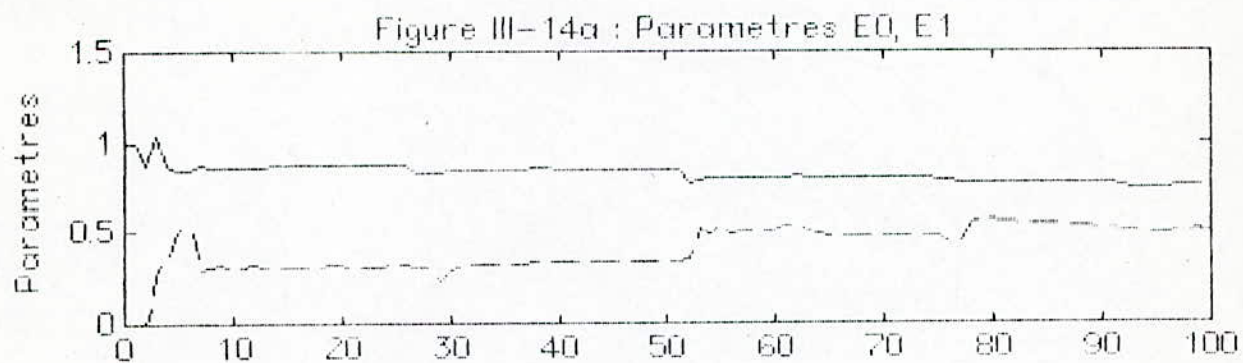


Figure III-15a: a1 et a2 variables "destabilisation"

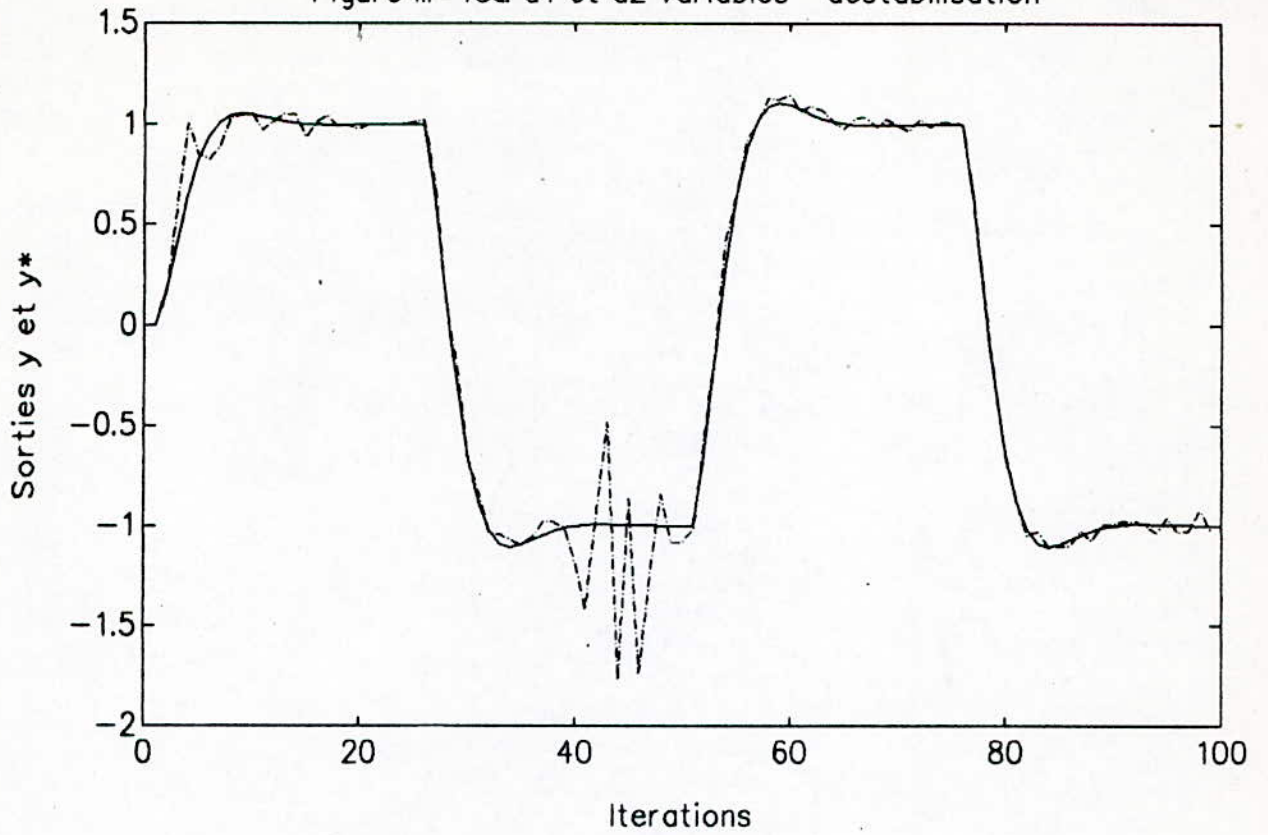
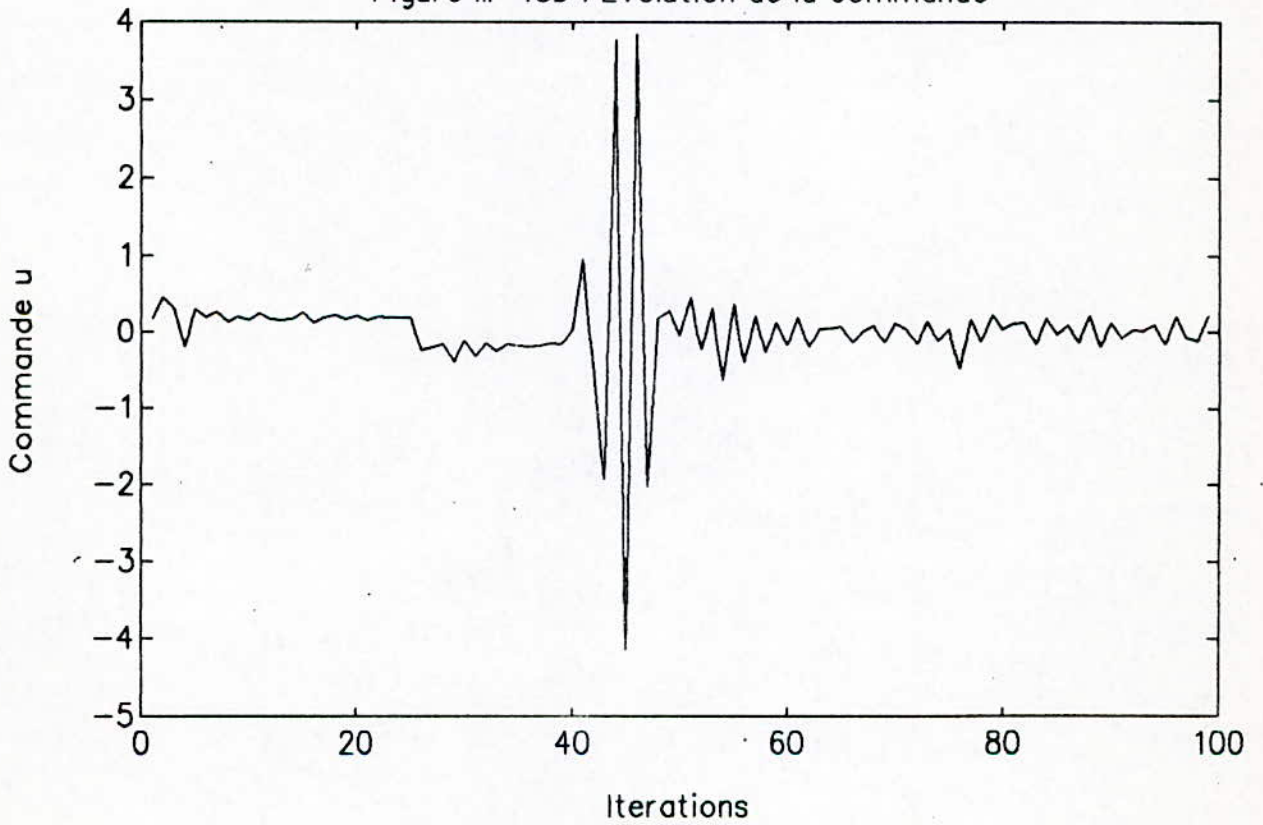


Figure III-15b : Evolution de la commande



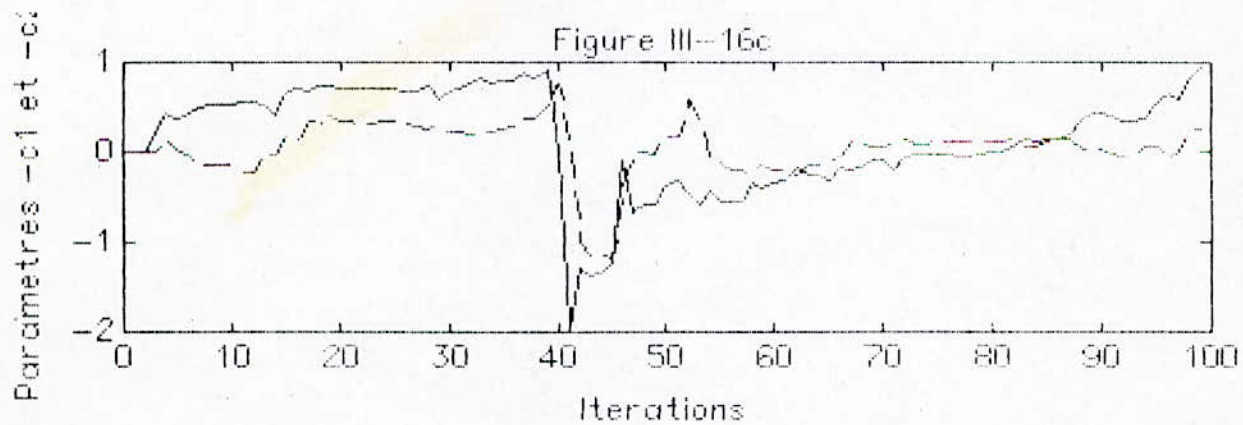
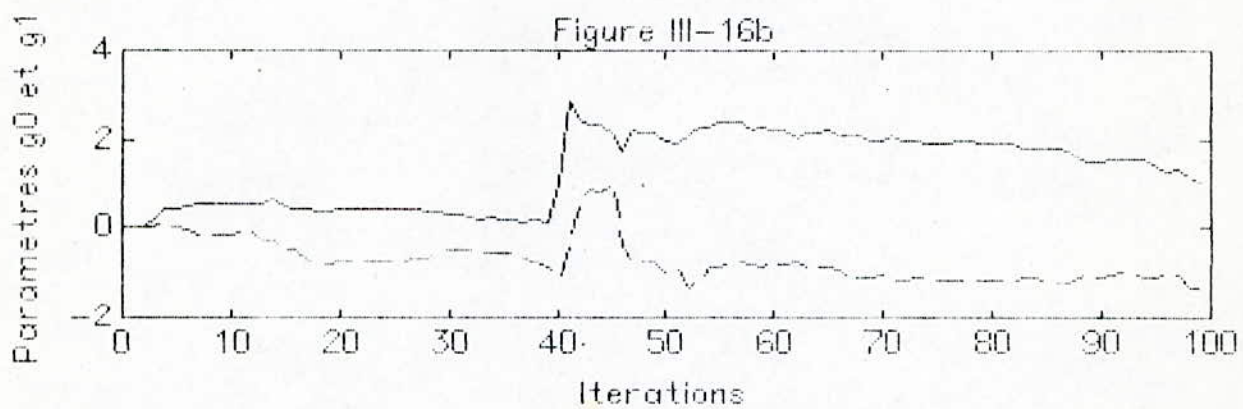
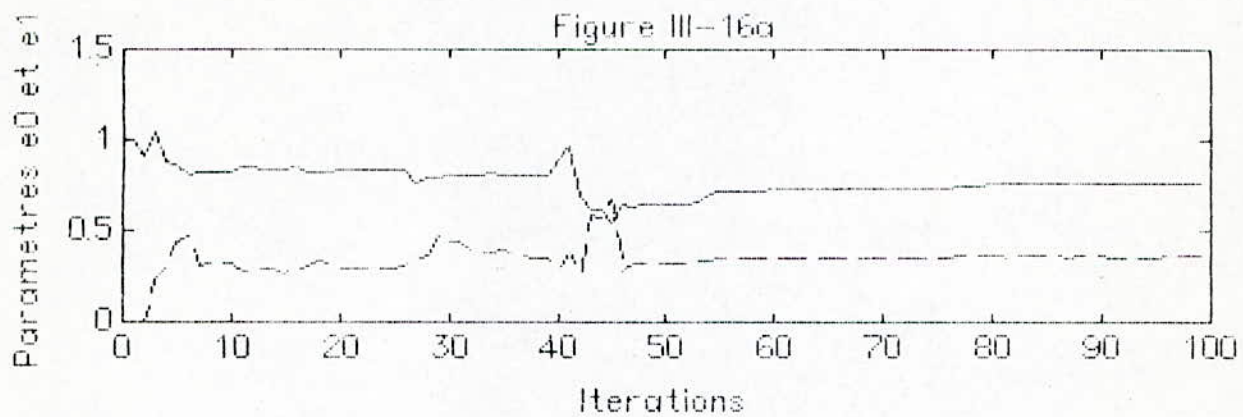


Figure III-17a : b0 et b1 variables "systeme a phase non minimale"

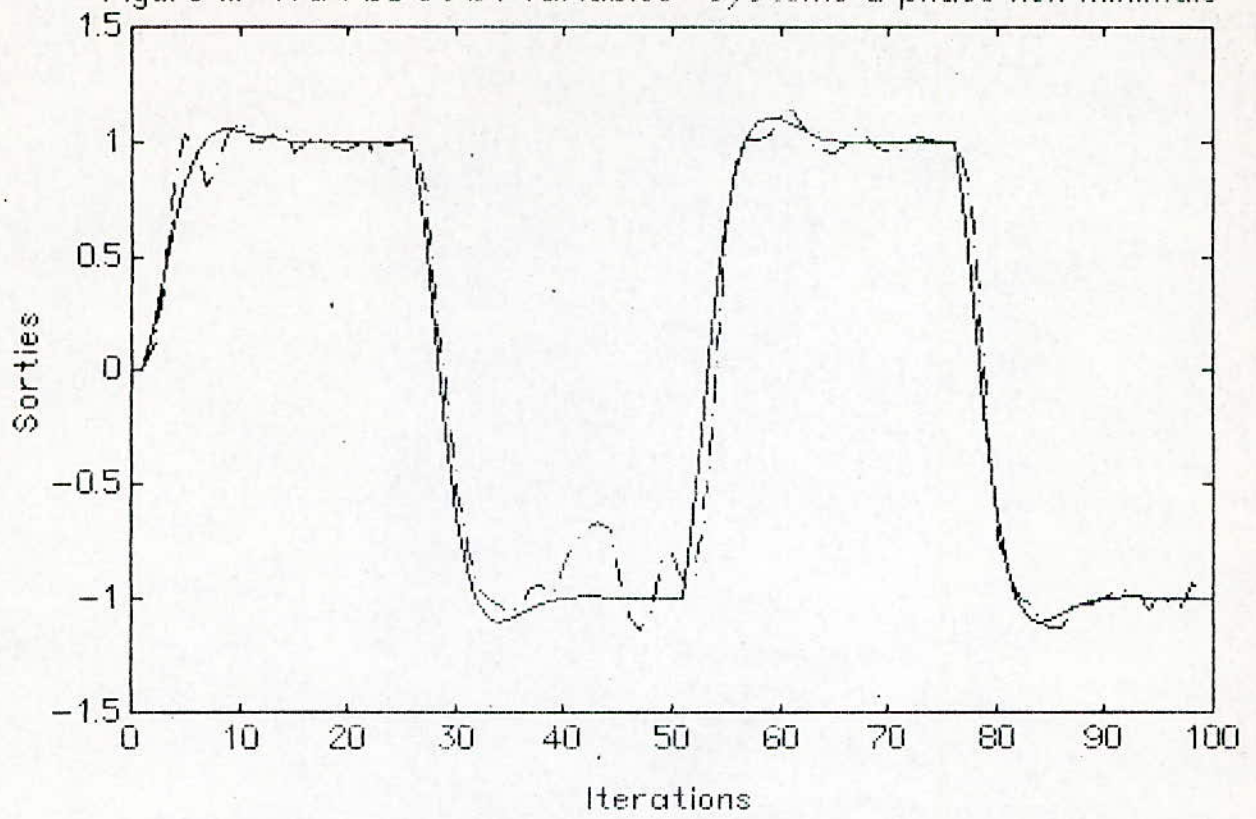
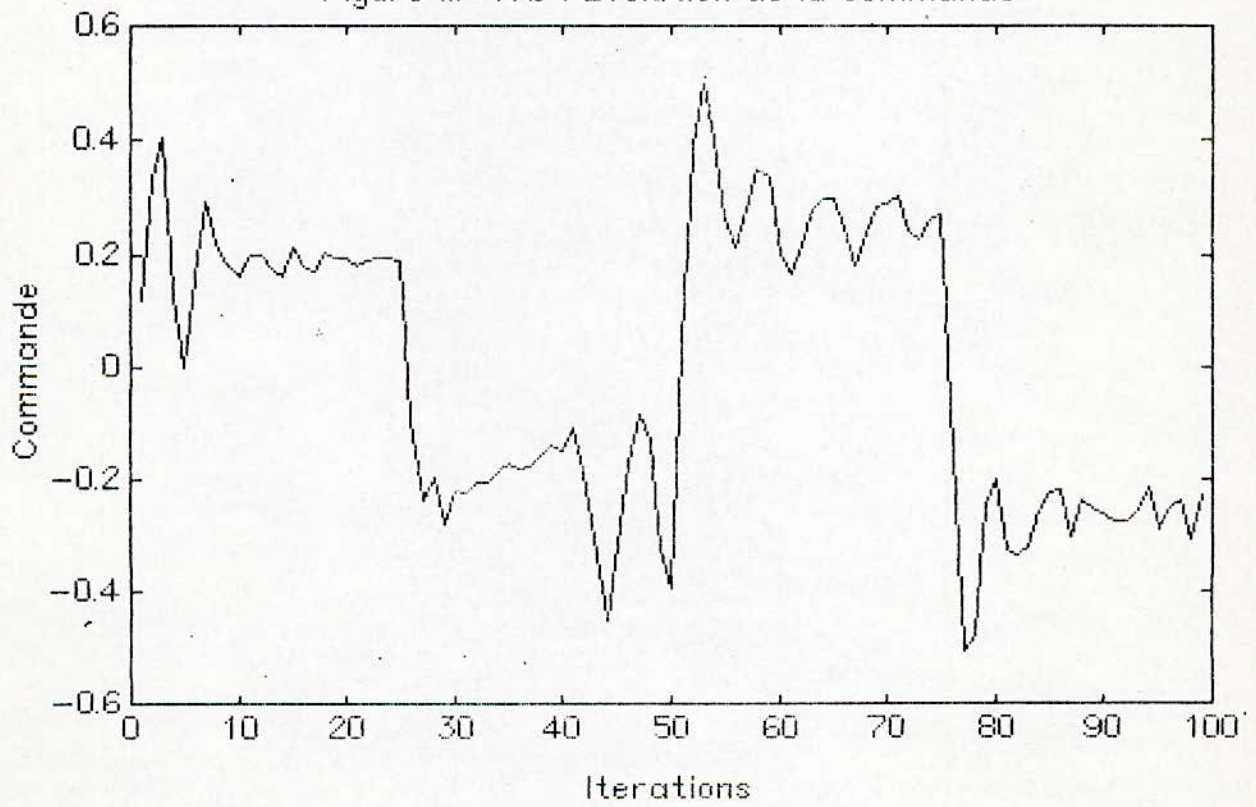
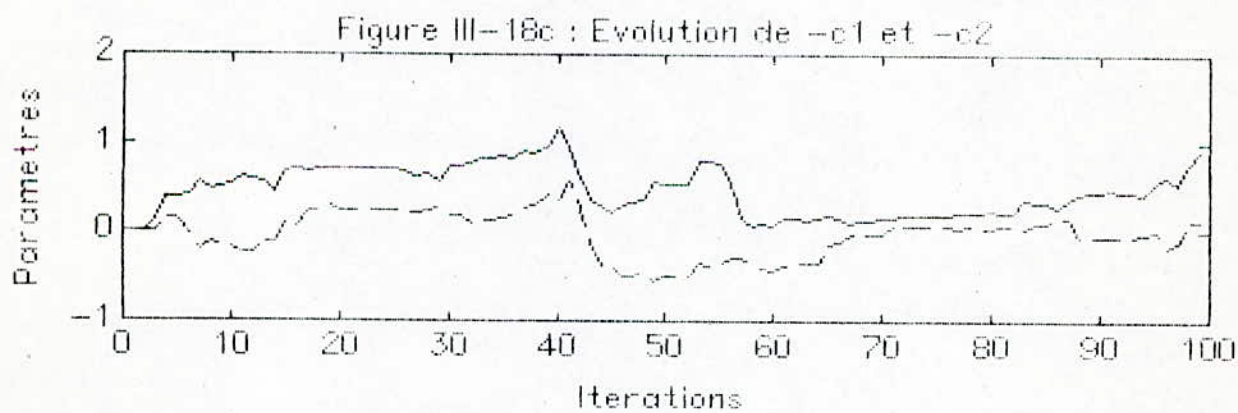
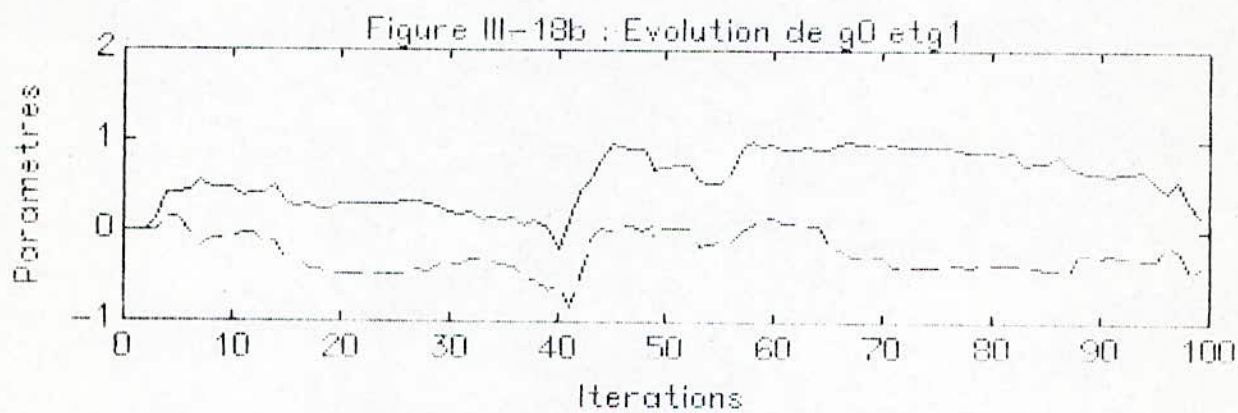
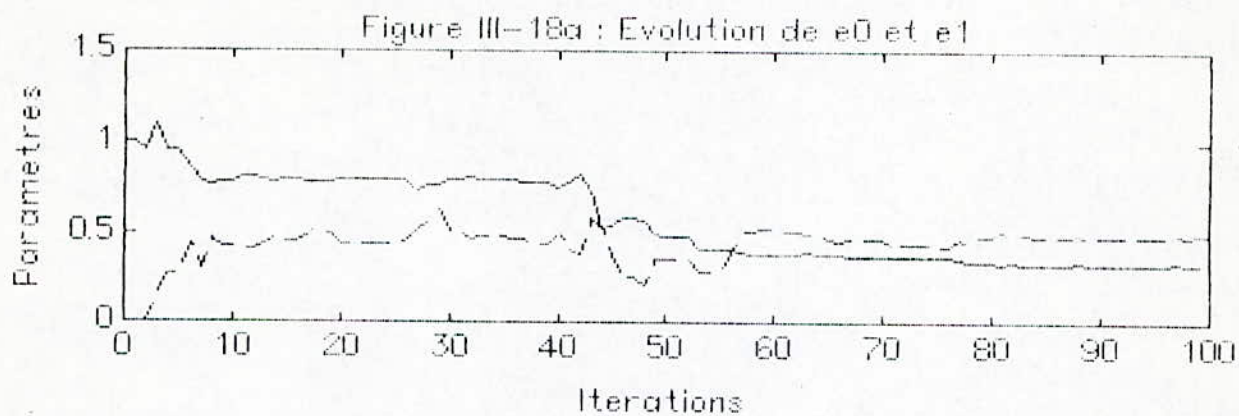


Figure III-17b : Evolution de la commande





CHAPITRE IV
COMMANDE ADAPTATIVE
MULTIVARIABLE

IV .1 Introduction:

Dans ce chapitre, nous considérons l'extention des stratégies de commande adaptative, présentées dans le chapitre précédant, aux systèmes multivariables. L'extension directe, présente des difficultés. Une des raisons majeures de ces difficultés est que le type des informations à priori, exigées pour la synthèse de la commande, ne sont pas apparents, dans le cas multivariable, comme elle l'est dans le cas monovariable. Excepté, le cas particulier, où le procédé est découplable par retour d'état, et éventuellement à minimum de phase.

Une des informations, les plus requises, est l'intéracteur. Une méthode de calcul de ce dernier sera présentée par la suite. Nous analyserons, en première partie, deux algorithmes de commande adaptative directe, pour les procédés à minimum de phase, tout en minimisant la connaissance à priori, nécessaire sur le procédé. En deuxième partie, nous développerons un algorithme plus général, dans la mesure où il permet de commander des procédés à non minimum de phase, tout en tenant compte de certaines contraintes sur le procédé.

IV .2 Représentation du procédé

Le modèle du procédé, que nous considérons, est une généralisation du modèle ARMAX donné par (III.1), soit:

$$A(q^{-1})Y(t) = B(q^{-1})U(t) + C(q^{-1})E(t) \quad (\text{VI.3.1})$$

avec $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ et $C(q^{-1})$ sont des matrices polynômiales

données par:

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} A_{11}(q^{-1}), & \dots & , A_{1m}(q^{-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1}(q^{-1}), & \dots & , A_{mm}(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$B(q^{-1}) = \begin{bmatrix} q^{-d_{11}}B_{11}(q^{-1}), & \dots & , q^{-d_{1r}}B_{1r}(q^{-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q^{-d_{m1}}B_{m1}(q^{-1}), & \dots & , q^{-d_{mr}}B_{mr}(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$C(q^{-1}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q^{-1}), & \dots & , C_{1m}(q^{-1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{m1}(q^{-1}), & \dots & , C_{mm}(q^{-1}) \end{bmatrix}$$

A_{ij} , B_{ij} et C_{ij} sont des polynômes en q^{-1} de la forme:

$$A_{ij}(q^{-1}) = 1 + a_{ij}^1 q^{-1} + \dots + a_{ij}^{n_{ij}} q^{-n_{ij}}$$

$$B_{ij}(q^{-1}) = b_{ij}^0 + b_{ij}^1 q^{-1} + \dots + b_{ij}^{m_{ij}} q^{-m_{ij}}, \quad b_{ij}^0 \neq 0$$

$$C_{ij}(q^{-1}) = 1 + c_{ij}^1 q^{-1} + \dots + c_{ij}^{l_{ij}} q^{-l_{ij}}$$

d_{ij} représente le retard existant entre la $i^{\text{ème}}$ sortie (y_i) et la $j^{\text{ème}}$ entrée (u_j).

$\{U(t)\}$ et $\{Y(t)\}$ représentent le vecteur d'entrée et le vecteur de sortie, de dimension r et m respectivement.

Nous considérons, dans tout ce qui suit pour la simplification, que le nombre d'entrées est égale au nombre de sorties ($r=m$).

IV.3 L'interacteur

Nous considérons le système multivariable décrit par le modèle ARMA suivant :

$$A(q^{-1})Y(t) = B(q^{-1})U(t) \quad (\text{IV.3.2})$$

où $A(q^{-1})$ et $b(q^{-1})$ sont des matrices polynomiales données par (IV.1) $Y(t)$ et $U(t)$ représentent le vecteur de sortie, de dimension $[m \times 1]$, et le vecteur de commande (d'entrée), de dimension $[p \times 1]$, respectivement.

La transformée en z de la sortie, $Y(z)$, peut s'exprimer en fonction de la transformée en z de l'entrée, $U(z)$, par:

$$\begin{aligned} Y(z) &= T(z) U(z) \\ T(z) &\triangleq A(z^{-1})^{-1} B(z^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{IV.3.3})$$

$T(z)$ est la matrice de transfert du système échantillonné. $T(z)$ est supposée strictement propre, c'est à dire qu'il existe entre chaque entrée et chaque sortie un retard au moins égale a un.

La matrice de transfert, $T(z)$, satisfait:

$$\det T(z) \neq 0 \quad \text{pour tout } z.$$

Nous rappelons que dans le cas des systèmes monovariables, la structure du retard du système était transparente. En effet, on choisissait simplement le retard d tel que le coefficient b_0 de $B(q^{-1})$ ne soit pas nul. Ceci est dû au fait que dans le monovariante il existe une fonction scalaire $\xi = q^d$ tel que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z) A(z^{-1})^{-1} B(z^{-1}) = k \quad (\text{IV.3.4})$$

où k est un scalaire non nul.

En multivariable, la structure du retard de la matrice de transfert a la forme d'une matrice polynomiale $\xi(q)$ appelée Intéreacteur.

D'après [26] : étant donnée une matrice de transfert strictement propre et commandable, alors l'intéreacteur existe toujours et satisfait :

- 1 . $\det \xi(q) = q^{\bar{m}}$, où \bar{m} est un entier.
- 2 . $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)T(z) = K$, où K est une matrice non singulière.

Dans le cas général, $\xi(z)$ a la forme suivante :

$$\xi(z) = H(z) \cdot D(z) \tag{IV.3.5}$$

où

$$D(z) = \text{diag} [z^{f_1}, \dots, z^{f_m}]$$

$$f_i \geq d_i = \min_j d_{ij}, \quad 1 \leq j \leq m$$

d_{ij} est le retard entre la $j^{\text{ième}}$ entrée et la $i^{\text{ième}}$ sortie

$H(z)$ est une matrice unimodulaire de la forme :

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ h_{21}(z) & 1 & & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & & \\ h_{m1}(z) & h_{m2}(z) & & & 1 \end{bmatrix} \tag{IV.3.6}$$

où

$h_{ij}(z)$ est divisible par z ou bien nul.

Nous avons alors :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)T(z) = K \quad ; \quad K \text{ est non singulière.}$$

- Méthode de calcul de l'intéracteur :

Dans ce qui suit nous allons présenter une méthode de calcul de l'intéracteur présentée dans [26]

1- On définit la première ligne, $\xi(z)_1$, de $\xi(z)$ par

$$\xi(z)_1 = [z^{d_1} \ 0 \ \dots \ 0] \quad (\text{IV.3.7})$$

d_1 est obtenu de telle sorte à avoir :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)_1 T(z) = \xi_1 = \tau_1 \quad (\text{IV.3.8})$$

2- De la même manière, on calcul la seconde ligne, $\xi(z)_2$, par :

$$\xi(z)_2 = [0 \ z^{d_2} \ \dots \ 0] \quad (\text{IV.3.9})$$

de tel façon à avoir :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)_2 T(z) = \xi_2 = \tau_2 \quad (\text{IV.3.10})$$

a- Si τ_2 et ξ_1 sont linéairement dépendants, c'est à dire que $\tau_2 = \alpha^1 \xi_1$ avec $\alpha^1 \neq 0$, alors on cherchera un entier d^1_2 de telle sorte à avoir :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi^1(z)_2 T(z) = \xi^1_2 \quad (\text{IV.3.11})$$

ξ^1_2 non nul

et

$$\xi^1(z)_2 = z^{\alpha_1^1} [(0 \ z^{\alpha_2} \ 0 \ \dots \ 0) - \alpha_1^1 \xi(z)_1] \quad (\text{IV.3.12})$$

b- Si ξ^1_2 est linéairement indépendant avec ξ_1 , alors on pose:

$$\xi(z)_2 = \xi^1(z)_2. \quad (\text{IV.3.13})$$

nous avons dans ce cas

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)_2 T(z) = \xi_2^1 \quad (\text{IV.3.14})$$

Cependant, si ξ^1_2 et ξ_1 sont linéairement dépendants, soit $\xi^1_2 = \alpha^2_1 \xi_1$, alors on cherchera un entier d^2 , de telle sorte à avoir

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi^2(z)_2 T(z) = \xi_2^2 \quad (\text{IV.3.15})$$

$$\xi_2^2 \text{ non nul.}$$

et

$$\xi^2(z)_2 = z^{\alpha_2^2} [\xi^1(z)_2 - \alpha_1^2 \xi(z)_1] \quad (\text{IV.3.16})$$

c- Si ξ^2_2 et ξ_1 sont linéairement indépendants, nous poserons:

$$\xi(z)_2 = \xi^2(z)_2. \quad (\text{IV.3.17})$$

sinon on refait la procédure jusqu'à ce qu'on trouve un vecteur ξ^1_2 linéairement indépendant avec ξ_1 .

Ce vecteur existera toujours du, fait que:

$$\det T(z) \neq 0 \text{ pour tous } z \text{ et que } d_i \geq 1, i=1, \dots, m$$

3- Les lignes suivantes de l'interacteur ξ sont obtenus avec la même méthode.

A l'étape i , on cherchera $\xi(z)_i$ de manière à avoir les vecteur $\xi(z)_1, \xi(z)_2, \dots, \xi(z)_m$ linéairement indépendants.

Finalement, on obtiendra la matrice interagteur:

$$\xi(z) = \begin{pmatrix} \xi(z)_1 \\ \xi(z)_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi(z)_m \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.18})$$

qui vérifie l'équation (IV.3.4), puisqu'on aura

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z) T(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \xi(z)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi(z)_m \end{pmatrix} T(z) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_m \end{pmatrix} = K \quad (\text{IV.3.19})$$

K est non singulière puisque $\xi(z)_i$, $i=1, \dots, m$ sont calculés de telle façon à avoir tous les ξ_i linéairement indépendants.

IV.4 Commande adaptative à erreur de prédiction minimale:

L'algorithme de la commande adaptative directe étudié dans le cas monovariante, peut être utilisé par une extension au cas multivariable tout en gardant la simplicité de l'algorithme.

Nous considérons, dans cette approche, le système multi-entrée multi-sortie dans un environnement déterministe, décrit par la forme ARMA:

$$A(q^{-1})Y(t) = B(q^{-1})U(t) \quad (\text{IV.4.1})$$

$$A(q^{-1}) = \text{diag}[A_1(q^{-1}), \dots, A_m(q^{-1})]$$

$$A_i(q^{-1}) = 1 + a_{i1}q^{-1} + \dots + a_{in_i}q^{-n_i}$$

$$B(q^{-1}) = [\dots q^{d_{ij}} B_{ij}(q^{-1})]$$

$$\text{avec } i=1, \dots, m, j=1, \dots, m.$$

$$B_{ij}(q^{-1}) = b_{ij}^0 + b_{ij}^1 q^{-1} + \dots + b_{ij}^n q^{-n}$$

$$\text{avec } b_{ij}^0 \neq 0 \quad \forall i, \forall j$$

Le modèle considéré est simple, L'interacteur est supposé diagonale avec des éléments différents (c'est à dire que toutes les sorties ne sont pas influencées par le même retard).

De la même manière qu'en monovariable, le modèle est réarrangé pour être exprimé sous la forme prédictive, en utilisant les m identité suivantes:

$$I = A_i(q^{-1})F_i(q^{-1}) + q^{-d_i}G_i(q^{-1}) \quad (\text{IV.4.2})$$

avec

$$F_i(q^{-1}) = 1 + f_1^i q^{-1} + \dots + f_{d_i-1}^i q^{-(d_i-1)}$$

$$G_i(q^{-1}) = g_0^i + g_1^i q^{-1} + \dots + g_n^i q^{-n}$$

où

$$d_i = \min_{1 \leq j \leq m} (d_{ij}), \quad i=1, \dots, m$$

Le nouveau système (modèle) est de la forme:

$$\bar{Y}(t) = \alpha(q^{-1})Y(t) + \beta(q^{-1})U(t) \quad (\text{IV.4.3})$$

avec :

$$\alpha(q^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n-1} q^{-(n-1)}$$

$$\beta(q^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_m q^{-m}$$

où

$$\alpha_i(q^{-1}) = G_i(q^{-1})$$

$$\beta_{ij}(q^{-1}) = F_i(q^{-1}) b_{ij}(q^{-1}) q^{d_i - d_{ij}}$$

et

$$\bar{Y}(t) \triangleq \xi(q) Y(t)$$

$$\text{avec } \xi(q) = \begin{pmatrix} q^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q^{d_m} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4.4})$$

Les hypothèses sur les processus concernés par cet algorithme, sont:

a- Comme au monovariante, la connaissance du retard (degré de la fonction de transfert) est équivalente à la connaissance a priori de l'interacteur. Celui-ci joue le rôle du retard du système multivariable. Dans notre cas cela revient à la connaissance des

a- $d_i, i=1, \dots, m$

b- Une borne supérieure de l'ordre de chaque polynôme est connue.

c- Le système satisfait la condition: (*)

a tous ces racines à l'intérieur du cercle unité $|z| < 1$.

Cette condition provient de la stabilité du système en boucle fermée, le système en boucle fermée est caractérisé par:

$$\det \begin{bmatrix} z^{-(d_{11}-d_1)} B_{11}(z^{-1}), & \dots, & z^{-(d_{1m}-d_1)} B_{1m}(z^{-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ z^{-(d_{m1}-d_1)} B_{1m}(z^{-1}), & \dots, & z^{-(d_{mm}-d_m)} B_{mm}(z^{-1}) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (*)$$

L'équation (IV.4.1) du système

$$A(q^{-1}) Y(t) = B(q^{-1}) U(t) \quad (\text{IV.4.5})$$

$$Y(t) = A^{-1}(q^{-1}) B(q^{-1}) U(t)$$

et la boucle de réaction définie par

$$\bar{Y}(t) = \bar{Y}^*(t); \text{ pour } t > d \quad d = \max_{1 \leq i \leq m} d_i \quad (\text{IV.4.6})$$

$$\text{avec } \bar{Y}^*(t) = \xi(q) Y^*(t)$$

Finalement l'équation du système en boucle fermée est:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t) &= \bar{Y}^*(t) \\ A(q^{-1}) Y(t) - B(q^{-1}) U(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.4.7})$$

Ce système peut se mettre sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \xi(q) & 0 \\ A(q^{-1}) & -B(q^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi(q) Y^*(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4.8})$$

Le système en boucle fermée est stable si:

$$\det \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ A(z^{-1}) & -B(z^{-1}) \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{IV.4.9})$$

pour $|z| > 0$. C'est à dire que $\det \xi(z) \cdot \det B(z^{-1}) \neq 0$. pour $|z| > 0$ (condition C).

L'objectif de la commande est d'avoir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [Y_i(t) - Y_i^*(t)] = 0; \quad i=1, \dots, m \quad (\text{IV.4.10})$$

Comme en monovariable, $\bar{y}^*(t)$ est supposée connue à l'instant t , c'est équivalent à la connaissance de $y^*(t+d)$ à l'instant $t+d$.

L'équation (IV.4.3) peut se mettre sous la forme:

$$\bar{Y}_i(t) = \theta_{0i}^T \cdot \Phi(t) \quad , \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m \quad (\text{IV.4.11})$$

où θ_{0i} est le vecteur des paramètres des polynômes $\alpha_i(q^{-1})$ et $\beta_{i1}(q^{-1}) \dots \beta_{in}(q^{-1})$.

avec:

$$\Phi_i(t) = [Y_i(t), \dots, Y_i(t-(n-1)), U^T(t), \dots, U^T(t-(m_i+d_i-1))]^T$$

On définit l'erreur de prédiction pour chaque ligne par :

$$\begin{aligned} e_i(t+d_i) &= Y_i(t+d_i) - Y_i^*(t+d_i) \\ &= \Phi_i^T(t) \theta_{0i} - Y_i^*(t+d_i) \end{aligned} \quad (\text{IV.4.12})$$

Pour avoir une poursuite parfaite de la trajectoire de référence, ce qui est l'objectif de la commande, il suffit de choisir la commande $U(t)$ de façon à avoir:

$$\theta_{0i}^T \Phi_i(t) = Y_i^*(t+d_i) \quad ; \quad i=1, \dots, m \quad (\text{IV.4.13})$$

Par les hypothèses faites sur le système, il existe une unique solution $U(t)$, des équations (IV.4.13), car la matrice qui est multipliée par $U(t)$ est non singulière.

Comme c'est déjà mentionné, cette stratégie de commande suppose que les différentes sorties désirées $Y_i^*(t+d_i)$ sont connues à priori à l'instant t .

Il est à noter que le modèle de référence, doit être choisi de la classe des modèles admissibles (c'est à dire que la structure du modèle de référence soit compatible avec celle du procédé à commander).

pour calculer la commande $U(t)$ on a besoin des paramètres θ_i^i , $i=1, \dots, m$. Comme ces termes sont inconnus, il faut donc les estimer, Pour cela nous utilisons l'algorithme décrit au chapitre précédent, donné par:

$$\theta_i(t) = \theta_i(t-1) + \frac{a(t)\phi_i(t-d_i)}{[1 + \phi_i^T(t-d_i)\phi_i(t-d_i)]} \cdot e_i(t) \quad (\text{IV.4.14})$$

$$e_i(t) = Y_i(t) - \phi_i(t-d_i)\theta_i(t-1)$$

Cet algorithme est appliqué pour chaque ligne. La loi de commande est donnée par la relation:

$$\bar{Y}_i^*(t) = \theta_i^T(t)\phi_i(t), \quad 1 \leq i \leq m \quad (\text{IV.4.15})$$

$\hat{\theta}_i(t)$ est un vecteur de dimension $(n_i + m(m_i + d_i))$, il dépend des $\hat{\theta}_i(0)$ $Y_i(\tau)$ pour $0 < \tau \leq t$, et $U(\tau)$ $0 \leq \tau \leq t - d_i$.

Il est difficile de garantir l'existence de la solution de (IV.4.15). Il faut que la matrice des coefficients de $U(t)$ soit non singulière, cela est assuré par :

1- Les paramètres initiaux $\hat{\theta}_i(0)$ sont choisis de telle manière à satisfaire les hypothèses faites sur le système.

2- $\hat{a}(t)$ est choisi comme suit:

$$\zeta < \hat{a}(t) < 2 - \zeta \text{ ou } 0 < \zeta < 1.$$

Cette stratégie de commande, assigne la boucle fermée les pôles et les zéros du modèle à suivre. Si on considère que $Y^*(t)$ est donnée par un modèle de référence de fonction de transfert $T_M(z^{-1})$ d'entrée $r(t)$.

La stratégie de commande correspond à une stratégie d'imposition des pôles et des zéros. Le système en boucle fermée possède les pôles et les zéros données par $T_M(z^{-1})$.

La figure IV.1 montre clairement la structure de la commande.

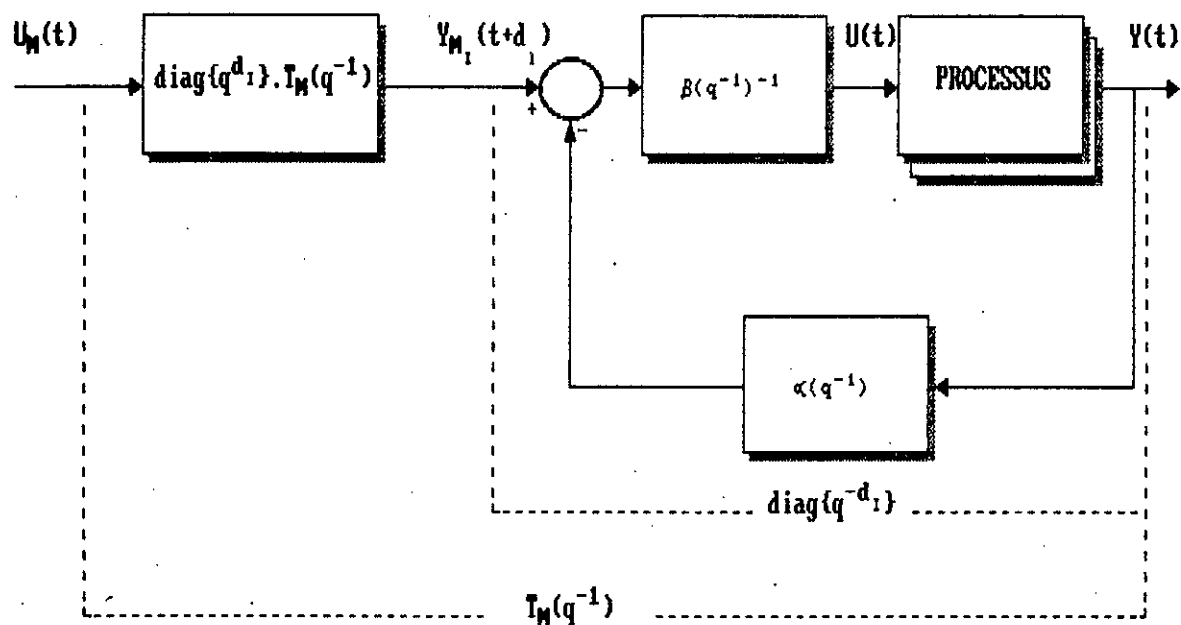


Figure IV-1

Le prédicteur est donné par les équations (IV.4.4) et (IV.4.7)

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}(t) &= \alpha(q^{-1}) Y(t) + \beta(q^{-1}) U(t) \\
 \text{avec } \bar{Y}(t) &= \bar{Y}^*(t) \\
 &= \xi(q) Y^*(t) \\
 &= \xi(q) T_M(q^{-1}) r(t)
 \end{aligned}
 \tag{IV.4.16}$$

où

$$\begin{aligned}
 \beta(q^{-1}) U(t) &= \bar{Y}(t) - \alpha(q^{-1}) Y(t) \\
 \text{alors } U(t) &= \beta^{-1}(q^{-1}) \bar{Y}(t) - \beta^{-1}(q^{-1}) \alpha(q^{-1}) Y(t)
 \end{aligned}$$

soit

$$U(t) = \beta^{-1}(q^{-1}) \xi(q^{-1}) Y^*(t) - \beta^{-1}(q^{-1}) \alpha(q^{-1}) Y(t) \tag{IV.4.17}$$

d'où le schéma bloc de la figure IV.1.

IV.5 Commande à variance minimale:

IV.5.1. Introduction:

Dans cette section nous présentons l'extension de l'algorithme du paragraphe (III.4), commande à variance minimale, aux systèmes multivariables.

Nous développerons deux approches:

La première est l'extension de la commande à variance minimale simple au multivariable, qui est obtenu en minimisant la variance du vecteur sortie. Cette méthode ne peut être appliquée que pour les systèmes à phase minimale.

La seconde approche est l'extension de la méthode de Clarke et Gawthrop [7] au multivariable. La structure du régulateur est obtenue en minimisant la variance d'une sortie auxiliaire . Cette méthode est plus générale car elle peut être appliquée aux systèmes à phase non minimale, ainsi que pour des signaux de références variables.

IV.5.2 Synthèse de la loi de commande

Considérons le système multivariable décrit par le modèle ARMAX suivant:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{IV.5.1})$$

où

$y(t)$ est le vecteur sortie du processus de dimension m .

$U(t)$ est le vecteur des commandes de dimension r .

$e(t)$: vecteur des perturbations.

Nous supposons que ces perturbations sont des séquences indépendantes de moyenne nulle et de matrice de covariance

$E\{e(t)e^T(t)\}=r_0$, où r_0 est une matrice diagonale car

$E\{e_i(t)e_j(t)\}=0$ si $i \neq j$

Les hypothèses sur le système à commander sont:

- L'intéracteur est diagonal et égale à $q^d I$. Ce qui veut dire que le système est supposé découplable par retour d'état et que ses sorties sont influencées avec un même retard d connu.

- A , B et C sont des matrices polynomiales dont une borne supérieure est supposée connue pour chacune.

- B_0 non singulière.

- Les racines de $\det C(\alpha)$ sont situées à l'extérieur du disque unité. (C est stable)

IV.5.2.1 Variance minimale simple:

L'objectif de la présente approche est la minimisation de la variance de la sortie $y(t)$, suivant la commande $u(t)$.

Soit la minimisation du critère:

$$J = E \{ y^T(t+d) y(t+d) \} \quad (\text{IV.5.2})$$

C'est une généralisation du régulateur à variance minimale

monovariante d'ASTROM [3].

En plus des suppositions précédentes, le système doit être à phase minimale. c'est à dire que tous les zeros de $\det B(\alpha)$ soient situés à l'extérieur du disque unité.

La loi de commande est déduite en utilisant le prédicteur au sens

des moindres carrés $\hat{y}(t+d/t)$, qui prédit à l'instant t , la sortie à $t+d$ en utilisant les données précédentes $\{y(t), y(t-1), \dots; u(t), u(t-1), \dots\}$. Le prédicteur $\hat{y}(t+d/t)$ est dérivée dans l'annexe B, d'après (B.9)

$$\hat{y}(t+d/t) = \tilde{C}(\tilde{q}^{-1}) [\tilde{G}(\tilde{q}^{-1}) y(t) + \tilde{F}(\tilde{q}^{-1}) B(\tilde{q}^{-1}) u(t)] \quad (\text{IV.5.3})$$

De (B.8) la sortie $y(t+d)$ peut être exprimée par:

$$y(t+d) = \tilde{C}(\tilde{q}^{-1}) [\tilde{G}(\tilde{q}^{-1}) y(t) + \tilde{F}(\tilde{q}^{-1}) B(\tilde{q}^{-1}) u(t)] + F(\tilde{q}^{-1}) e(t+d) \quad (\text{IV.5.4})$$

l'erreur de prédiction est

$$\begin{aligned} e(t+d) &= y(t+d) - \hat{y}(t+d) = F(\tilde{q}^{-1}) e(t+d) \\ &= e(t+d) + F_1 e(t+d-1) + \dots + F_{d-1} e(t+1) \end{aligned} \quad (\text{IV.5.5})$$

La sortie peut s'écrire

$$y(t+d) = \hat{y}(t+d/t) + F(\tilde{q}^{-1}) e(t+d) \quad (\text{IV.5.6})$$

en substituant cette équation dans le critère (IV.4.2) nous obtenons

$$J = E \{ \|\hat{y}(t+d/t) + F(\tilde{q}^{-1}) e(t+d)\|^2 \}$$

puisque $F(\tilde{q}^{-1})$ est incorrélaté avec $\hat{y}(t+d)$, donc on peut mettre cette équation sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 J &= E \{ \|\hat{y}(t+d)\|^2 \} + E \{ \|F(q^{-1})e(t+d)\|^2 \} \\
 &= \|\hat{y}(t+d)\|^2 + E \{ \|F(q^{-1})e(t+d)\|^2 \}
 \end{aligned}
 \tag{IV.5.7}$$

La loi de commande qui minimisera J sera celle qui annulera le prédicteur $\hat{y}(t+d)$. La loi de commande optimale est alors obtenue en annulant (IV.5.3) soit

$$\tilde{G}(q^{-1})y(t) + \tilde{E}(q^{-1})u(t) = 0 \tag{IV.5.8}$$

où

$$\tilde{E}(q^{-1}) = \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})$$

soit

$$u(t) = -\tilde{E}^{-1}(q^{-1})\tilde{G}(q^{-1})y(t) \tag{IV.5.9}$$

Après convergence, cette loi de commande rend la sortie $y(t+d) = F(q^{-1})e(t+d)$. Qui représente une moyenne mobile d'ordre $d-1$ des perturbations.

La variance de la sortie est donc minimisée asymptotiquement [5]. Les pôles du système en boucle fermée correspondent aux zéros de $\det C(\alpha)$. C'est pour cette raison que le polynôme C doit être stable. D'autre part, de l'équation (IV.5.8) $B(\alpha)$ doit être à phase minimale, cela pour éviter une instabilité de la commande.

- Stabilité en boucle fermée

des équations (IV.5.1) et (IV.5.8) nous pouvons écrire le

système sous la forme:

$$T(\alpha) \begin{bmatrix} y(t+d) \\ -u(t) \\ -e(t+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(q^{-1}) & B(q^{-1}) & C(q^{-1}) \\ -q^{-d}\tilde{G}(q^{-1}) & \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1}) & 0 \\ -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t+d) \\ -u(t) \\ -e(t+d) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y(t+d) \end{bmatrix} \quad (IV.5.10)$$

La matrice $T(\alpha)$ a été utilisée par Borisson [5] pour l'analyse de la stabilité. En effet le système est stable en boucle fermée si la sortie et la commande reste bornées. Ceci est possible si le déterminant correspondant à ces deux variables est stable. C'est à dire que ses racines en α soient situées à l'extérieur du disque unité. soient les racines de

$$\det \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ -\alpha^d \tilde{G}(\alpha) & \tilde{F}(\alpha) B(\alpha) \end{bmatrix} = \det C(\alpha) \cdot \det B(\alpha)$$

Ce qui nous amène à dire que le système est stable lorsque les polynômes C et B le sont.

L'algorithme

Pour cette approche, variance minimale simple, nous remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'estimer les coefficients

de la moyenne mobile de la perturbation, $C(q^{-1})e(t)$. Car on est en train de traiter un problème de régulation où on impose que la sortie s'annule quelque soit les perturbations.

Nous définissons le vecteur d'observation $X(t)$ par :

$$X(t) = [Y^T(t), Y^T(t-1), \dots; U^T(t), U^T(t-1), \dots]^T$$

et la matrice des paramètres θ par :

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m] = [\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{E}_0, \tilde{E}_1, \dots]^T$$

où le vecteur colonne θ_i est donné par :

$$\theta_i = [g_{i1}^0, \dots, g_{im}^0, g_{i1}^1, \dots, g_{im}^1, \dots; e_{i1}^0, \dots, e_{im}^0, e_{i1}^1, \dots, e_{im}^1, \dots]$$

Pour l'estimation des paramètres du régulateur, nous utilisons la méthode des moindres carrés récursifs (MCR) définie comme suit:

$$\theta_i(t+1) = \theta_i(t) + K(t) [y_i(t) - X^T(t-d)\theta_i(t)] \quad (\text{IV.5.11})$$

$$i=1, \dots, m$$

où

$$K(t) = \frac{p(t)X(t-d)}{\beta + X^T(t-d)p(t)X(t-d)}$$

$$p(t+1) = \{ p(t) - K(t) [\beta + X^T(t-d)p(t)X(t-d)] K^T(t) \} / \beta$$

β est un facteur d'oubli tel que $\beta \in [0.95, 1]$.

Les paramètres réels θ sont remplacés par leur estimés $\hat{\theta}(t)$ dans la loi de commande. Cela en utilisant "le principe de l'équivalence certaine".

Nous obtenons l'algorithme suivant:

Etape 1:

Lire la nouvelle sortie $y(t)$.

Etape 2:

Former le vecteur d'observation $\hat{X}(t)$.

Etape 3:

Estimer les paramètres $\theta(t)$ par l'algorithme MCR

Etape 4:

Calculer la nouvelle commande $u(t)$ par (IV.5.9).

Etape 5:

Incrémenter t et aller en 1.

IV.5.2.2 Variance minimale généralisée:

Comme dans le cas monovarié, l'objectif de la présente approche est la minimisation de la variance d'une sortie auxiliaire $\phi(t)$ donnée par :

$$\phi(t+d) = P(q^{-1})Y(t+d) - R(q^{-1})Y^*(t+d) + Q(q^{-1})U(t) \quad (\text{IV.5.12})$$

Le critère s'écrira donc :

$$J = E\{\|\phi(t+d)\|^2\} \quad (\text{IV.5.13})$$

La commande obtenue est une généralisation de la commande à variance minimale simple étudiée précédemment. Elle réalise un compromis entre la minimisation de la variance de l'erreur de poursuite et la minimisation de la variance de la commande $U(t)$. En outre cette commande permettra de traiter certains procédés à phase non minimale, cela en choisissant convenablement les matrices P , R et Q .

La loi de commande optimale est déduite en utilisant le prédicteur optimale au sens des moindres carrés, $\hat{Y}(t+d/t)$, qui

à l'instant t prédit la sortie à $t+d$ en utilisant les données précédentes :

$$\{Y(t), Y(t-1), \dots; U(t), U(t-1), \dots\}.$$

Le prédicteur $\hat{Y}(t+d)$ et la sortie réelle $Y(t+d)$ sont données dans l'annexe B :

$$\hat{y}(t+d/t) = \tilde{C}^{-1}(q^{-1}) [\tilde{G}(q^{-1})y(t) + \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t)]$$

$$y(t+d) = \tilde{C}(q^{-1}) [\tilde{G}(q^{-1})y(t) + \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t)] \\ + F(q^{-1})e(t+d)$$

Le vecteur sortie auxiliaire sera :

$$\phi(t+d) = P(q^{-1})Y(t+d) + Q(q^{-1})U(t) - R(q^{-1})Y^*(t+d) \quad (\text{IV.5.14})$$

Le prédicteur à $t+d$ est :

$$\hat{\phi}(t+d/t) = P(q^{-1})\hat{Y}(t+d) + Q(q^{-1})U(t) - R(q^{-1})Y^*(t+d) \quad (\text{IV.5.15})$$

Ce qui peut être formulé, en remplaçant $\hat{Y}(t+d)$ et $Y(t+d)$ par leur expressions données précédemment, par :

$$\phi(t+d) = \hat{\phi}(t+d/t) + e'(t+d) \quad (\text{IV.5.16})$$

où l'erreur de prédiction est

$$e' = \sum_{i=0}^{d-1} p_i e(t+d-i) \quad (\text{IV.5.17})$$

$E(t+d)$ est donnée par (IV.5.5).

Cette erreur est incorréllée avec $\hat{\phi}(t+d/t)$. Le critère considéré peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
J &= E\{\phi^2(t+d)\} = E\{\|\hat{\phi}(t+d/t) + \hat{e}(t+d)\|^2\} \\
&= E\{\hat{\phi}^2(t+d/t)\} + E\{\hat{e}^2(t+d)\} \quad (\text{IV.5.18}) \\
&= \hat{\phi}^2(t+d/t) + E\{\hat{e}^2(t+d)\}
\end{aligned}$$

La loi de commande de commande qui minimise J sera celle qui annulera le prédicteur $\hat{\phi}(t+d/t)$.

Tenant compte de (B.9) et (B.10) nous pouvons mettre (IV.5.14) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(t+d/t) &= \sum_{j=0}^{d-1} P_j \tilde{C}^{-1}(q^{-1}) [\tilde{G}_{d-j}(q^{-1}) Y(t) + \tilde{E}_{d-j}(q^{-1}) U(t-j)] \\
&\quad + Q(q^{-1}) U(t) - R(q^{-1}) Y^*(t+d) \quad (\text{IV.5.19})
\end{aligned}$$

Nous introduisons les matrices polynomiales \tilde{E}' , \tilde{G}' et \tilde{H} :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}'(q^{-1}) &= \sum_{j=1}^{d-1} P_j q^{-j} \tilde{E}_{d-j} + \tilde{C}(q^{-1}) Q(q^{-1}) \\
\tilde{G}'(q^{-1}) &= \sum_{j=1}^{d-1} P_j \tilde{G}_{d-j} \\
\tilde{H}(q^{-1}) &= \tilde{C}(q^{-1}) R(q^{-1})
\end{aligned} \quad (\text{IV.5.20})$$

En prémultipliant (IV.5.19) par $\tilde{C}^{-1}(q^{-1})$ on obtient :

$$\tilde{C}(q^{-1}) \hat{\phi}(t+d/t) = \tilde{G}'(q^{-1}) Y(t) + \tilde{E}' U(t) - \tilde{H}(q^{-1}) Y^*(t+d) \quad (\text{IV.5.21})$$

Cette prémultiplication n'est possible que si P et \tilde{C}^{-1} sont commutables. C'est pour cette raison que nous supposons que $P(q^{-1})$ est un polynôme et non pas une matrice polynomiale. la résolution de cette équation suivant $U(t)$ nous donne la loi de commande optimale:

$$\begin{aligned} \tilde{G}'(q^{-1})Y(t) + \tilde{E}'(q^{-1})U(t) - \tilde{H}(q^{-1})Y^*(t+d) &= 0 \\ U(t) = \tilde{E}^{-1'}(q^{-1}) [\tilde{H}(q^{-1})Y^*(t+d) - \tilde{G}'(q^{-1})Y(t)] \end{aligned} \quad (\text{IV.5.22})$$

Cette loi de commande n'est pas unique, du fait que \tilde{F} et \tilde{G} ne le sont pas. Elle doit être combinée avec une méthode d'estimation paramétrique adéquate.

En posant $P=1$ et $Q=0$ dans (IV.5.22), on retrouve la commande à variance minimale simple.

Analysons la stabilité du système en boucle fermée. En considérant le cas où $P=1$ et $Y^*(t)=0$, nous obtenons l'équation du système en boucle fermée, à partir des équations (IV.5.1), (IV.5.20), (IV.5.22) et (B.9):

$$\begin{bmatrix} A(q^{-1}) & B(q^{-1}) & C(q^{-1}) \\ -q^{-d}\tilde{G}(q^{-1}) & \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1}) + \tilde{C}(q^{-1})Q(q^{-1}) & 0 \\ -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t+d) \\ -u(t) \\ -e(t+d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y(t+d) \end{bmatrix}$$

qu'on peut mettre sous la forme:

$$\begin{bmatrix} A(q^{-1}) & B(q^{-1}) \\ -q^{-d}\tilde{G}(q^{-1}) & \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t+d) \\ -U(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} e(t+d) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(q^{-1}) \begin{bmatrix} Y(t+d) \\ -U(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} e(t+d) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La stabilité du système est déterminée par la matrice $T(q^{-1})$. En

effet, les modes instables correspondent aux zéros instable de l'équation $\det T(\alpha)$, c'est à dire les racines α qui verfient $|\alpha| < 0$.

Soit de l'équation:

$$\det \begin{bmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ -\alpha^d \tilde{G}(\alpha) & \tilde{F}(\alpha) B(\alpha) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.5.25})$$

Ce déterminant peut se mettre sous la forme:

$$\det(\tilde{F} B + \tilde{C} Q) \cdot \det(A + B(\tilde{F} B + \tilde{C} Q)^{-1} \cdot (\tilde{C} - \tilde{F} A)) = 0 \quad (\text{IV.5.26})$$

Dans le cas scalaire, on retrouve la condition:

$$\det(B + QA) = 0$$

Si $Q=0$, la variance minimale simple est obtenue et la condition de stabilité précédente devient:

$$\det(\tilde{F} B) \cdot \det[A + B(\tilde{F} B)^{-1} (\tilde{C} - \tilde{F} A)] = \det B \cdot \det C \quad (\text{IV.5.27})$$

Comme nous l'avons précisé précédemment le système en boucle fermée sera stable si B est stable.

Si $Q \neq 0$, il est possible de stabiliser le système globale, dans certains cas, par un choix approprié de Q.

Une analyse exacte de la stabilité est difficile. En prenant $Q = \lambda I$ on peut dire que:

- Si A est instable et B à phase minimale, alors nous pouvons stabilisé le système en choisissant λ suffisamment petit.

- Si A est stable est B à phase non minimale alors la stabilité en boucle fermée est obtenue en prenant λ assez grand.

Car pour λ grand on a :

$$\begin{aligned} \det(\tilde{F} B + \tilde{C} \lambda) &\approx \det(\tilde{C} \lambda) \\ \det(A + B(\tilde{F} B + \tilde{C} \lambda)^{-1} \cdot (\tilde{C} - \tilde{F} A)) &\approx \det(A) \end{aligned}$$

La stabilité est alors assurée [19].

L'algorithme:

Nous développons l'équation (IV.5.21) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(t+d) &= \tilde{G}'(q^{-1}) Y(t) + \tilde{E}'(q^{-1}) U(t) - \tilde{H}(q^{-1}) \\ &+ [1 - C_{11}(q^{-1})] \hat{\Phi}_1(t+d/t) - \sum_{j=1}^m C_{1j}(q^{-1}) \hat{\Phi}_j(t+d/t) \end{aligned} \quad (\text{IV.5.28})$$

L'équation (IV.5.16) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_j(t+d) &= \tilde{G}'(q^{-1}) Y(t) + \tilde{E}'(q^{-1}) U(t) - \tilde{H}(q^{-1}) + \epsilon_i(t+d) \\ &+ [1 - C_{11}(q^{-1})] \hat{\Phi}_1(t+d/t) - \sum_{j=1}^m C_{1j}(q^{-1}) \hat{\Phi}_j(t+d/t) \end{aligned} \quad (\text{IV.5.29})$$

Nous définissons le vecteur d'observation X par :

$$X(t) = [Y^T(t), Y^T(t-1), \dots, U^T(t), U^T(t-1), \dots, Y^{*T}(t+d), Y^{*T}(t+d-1), \dots] \quad (\text{IV.5.30})$$

et La matrice des paramètres θ par :

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m] = [G_0, G_1, \dots, E_0, E_1, \dots, -H_0, -H_1, \dots]^T$$

Où le vecteur $\hat{\Phi}_1$ est donné par :

$$\theta_i = [g_{i1}^0, \dots, g_{im}^0, g_{i1}^1, \dots, g_{im}^1, \dots, e_{i1}^0, \dots, e_{im}^0, e_{i1}^1, \dots, e_{im}^1, \dots, h_{i1}^0, \dots, h_{im}^0, h_{i1}^1, \dots, h_{im}^1, \dots]$$

$$i=1, \dots, m \quad (\text{IV.5.31})$$

La sortie auxiliaire (IV.5.29) sera :

$$\phi_i(t+d) = X(t)\theta_i + \epsilon_i(t+d) + [1 - C_{ii}(q^{-1})]\hat{\phi}_i(t+d/t) - \sum_{j \neq i} C_{ij}(q^{-1})\hat{\phi}_j(t+d/t)$$

$$(\text{IV.5.32})$$

Ce qui montre que $\hat{\phi}$ est corrélé avec X. Les estimés obtenus par les moindres carrés récursifs sont biaisés. toute fois, du fait

que la commande U(t) est calculer de manière à annuler $\hat{\phi}$, les deux derniers termes dans (IV.5.29) disparaissent.

La loi de commande est calculée de (IV.5.21)

$$E_0 U(t) = \left(\sum_{i \geq 0} H_1 Y^*(t-i) - \sum_{i \geq 0} G_1 Y(t-i) + \sum_{i \geq 1} F_1 U(t-i) \right) \quad (\text{IV.5.33})$$

à t+d en utilisant les données précédentes.

Les paramètres θ sont estimés par la méthode des moindres carrés étendue définie comme suit:

$$\theta_i(t+1) = \theta_i(t) + K(t) [y_i(t) - X^T(t-d)\theta_i(t)] \quad (\text{IV.5.34})$$

$$i=1, \dots, m$$

$$K(t) = \frac{p(t)X(t-d)}{\beta + X^T(t-d)p(t)X(t-d)}$$

$$p(t+1) = \frac{1}{\beta} \{ p(t) - K(t) [\beta + X^T(t-d)p(t)X(t-d)] K^T(t) \}$$

β est un facteur d'oubli. $\beta \in [0.95, 1]$.

L'algorithme est le suivant:

Etape 1:

Lire la nouvelle sortie $Y(t)$ et le signal à suivre $Y^*(t+d)$.

Etape 2:

Calculer la sortie auxiliaire donnée par:

$$\phi(t) = Y(t) - RY^*(t) + QU(t-d)$$

Etape 3:

Former le vecteur des données $X(t)$ donné par (IV.5.30).

Etape 4:

Estimer les paramètres θ .

Etape 5:

Calculer la nouvelle commande $U(t)$ donnée par (IV.5.33).

Etape 6:

Incrémenter t et aller en 1.

IV.6. Simulations:A-Résultats de simulation avec l'algorithme de commande adaptative à erreur de prédiction minimale:

Nous présentons des résultats de simulation sur un modèle d'une machine à papier, pour illustrer les performances des algorithmes implémentés.

Le modèle du système est donné par:

$$Y(t) + A_1 Y(t-1) = B_0 U(t-1)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.09101 & 0.0088 \\ -0.8061 & -0.77089 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0.8988 & -0.00459 \\ 19.390 & 0.88052 \end{bmatrix}$$

Ce modèle est stable et à phase minimale. La matrice interacteur est diagonale.

Le modèle à suivre est donné par:

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} -0.8296q^{-1} + 0.1353q^{-2} & 0 \\ 0 & 0.06725q^{-1} + 0.01976q^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -0.6886q^{-1} + 0.04978q^{-2} & 0 \\ 0 & 0.05247q^{-1} + 0.01976q^{-2} \end{bmatrix}$$

La consigne est:

$$r_1(t) = 5 * (\sin(0.63*t) + \sin(0.74*t)).$$

$$r_2(t) = 5 * \{ \sin(0.78 * t) + \sin(1.17 * t) \}.$$

La figure IV-1-1 montre le comportement de l'algorithme présenté au paragraphe IV.3. Y_1 et Y_2 sont les deux sorties et U_1, U_2 les commandes. Comme on peut le constater, l'algorithme donne de bon résultats. La sortie Y_2 suit la référence après un régime transitoire un peu plus long que celui de la sortie Y_1 , ceci est dû aux couplages du système. Les figures IV-3 montre l'évolution des paramètres. L'algorithme d'estimation utilisée est celui des moindres carrés récursifs. Le gain initial est pris égal à 100I.

L'utilisation de cet algorithme a permis la convergence rapide des paramètres estimés.

Nous présentons, pour mieux voir les capacités de l'algorithme, les résultats des simulations sur le modèle d'un four. Le système est donné par:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.917 & 0.0846 \\ 0.131 & -0.915 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 2.06 & -0.0746 \\ -0.108 & -0.0192 \end{bmatrix}$$

Le modèle à suivre est le même que précédemment.

Ce système est stable et à phase minimale. Les figures IV-1-4 représentent les réponses des sorties du procédé commandé. Les limitations sur la commande à appliquer sont:

$$U_{max} = [15 \ 15]^T$$

$$U_{min} = [-15 \ -15]^T$$

L'évolution des entrées U1 et U2 est montrée par les figures IV-3-2. Les paramètres du régulateur sont représentés par les figures IV-3-6.

B-Résultats de simulation avec l'algorithme de commande à variance minimale:

-Variance minimale simple:

Le système simulé est celui de la machine à papier présenté plus haut. Mais avec perturbations, soit:

$$Y(t) + A1 Y(t-1) = B0 U(t-1) + e(t).$$

avec $E\{ e^T(t) e(t) \} = \text{diag} \{ 0.01, 0.01 \}$

Les zéros de $\det A(o)$ sont $o_1 = 1.23$ et $o_2 = 1.05$; les sorties y_1 et y_2 et les commandes u_1 et u_2 , générées par l'algorithme, sont présentées dans les figures IV.2.1a, IV.2.1b.

Les figures IV.2.2a. et IV.2.2b montrent l'évolution des paramètres du régulateur. Nous remarquons qu'après un transitoire de reconnaissance des paramètres, les deux sorties suivent une moyenne mobile de la perturbation. la variance de la sortie est alors minimisée et les paramètres convergent. La méthode d'identification utilisée est celle des moindres carrés récursifs.

- Variance minimale généralisée:

Le système considéré est le suivant:

$$Y(t) + A_1 Y(t-1) = B_0 U(t-1) + C_1 e(t-1) + e(t).$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.98 & 0 \\ -0.01 & -0.98 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0.012 & -0.012 \\ -0.023 & 0.023 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.7 \\ -0.9 & 0.2 \end{bmatrix}$$

la matrice de covariance des perturbations est:

$$E\{ e^T(t) e(t) \} = \text{diag} \{ 0.01, 0.01 \}$$

Le système, en boucle ouverte, est stable et à phase minimale.

Nous choisissons $P=R=1$. Nous constatons que la sortie Y_2 présente un pic à $t=10$ ceci est dû au couplage (figure IV-2-3) car à cet instant la référence change d'état et passe de zero à deux. D'autre part la sortie Y_2 suit bien la référence après convergence des paramètres. L'évolution de ces derniers est présentée par les figures IV-2-5.

IV.7. Conclusion:

Nous avons présenté dans cette partie l'extension des algorithmes de commande, étudiés dans le chapitre précédent, aux systèmes multivariables.

Les résultats de simulation présentés ont montré les capacités des deux algorithmes développés.

La première technique est appliquée aux systèmes découplables et à zéros stables. La connaissance de l'interacteur est réduite à p entiers. Les simulations faites sur le modèle du four et de la machine à papier nous permettent de justifier la convergence de l'algorithme pour la classe des systèmes considérés.

La seconde technique a été appliquée aux systèmes à phase minimale. Le régulateur auto-ajustable obtenu par cette stratégie est efficace du fait qu'il peut ajuster les paramètres permettant de calculer la commande tout en gardant la poursuite du modèle de référence.

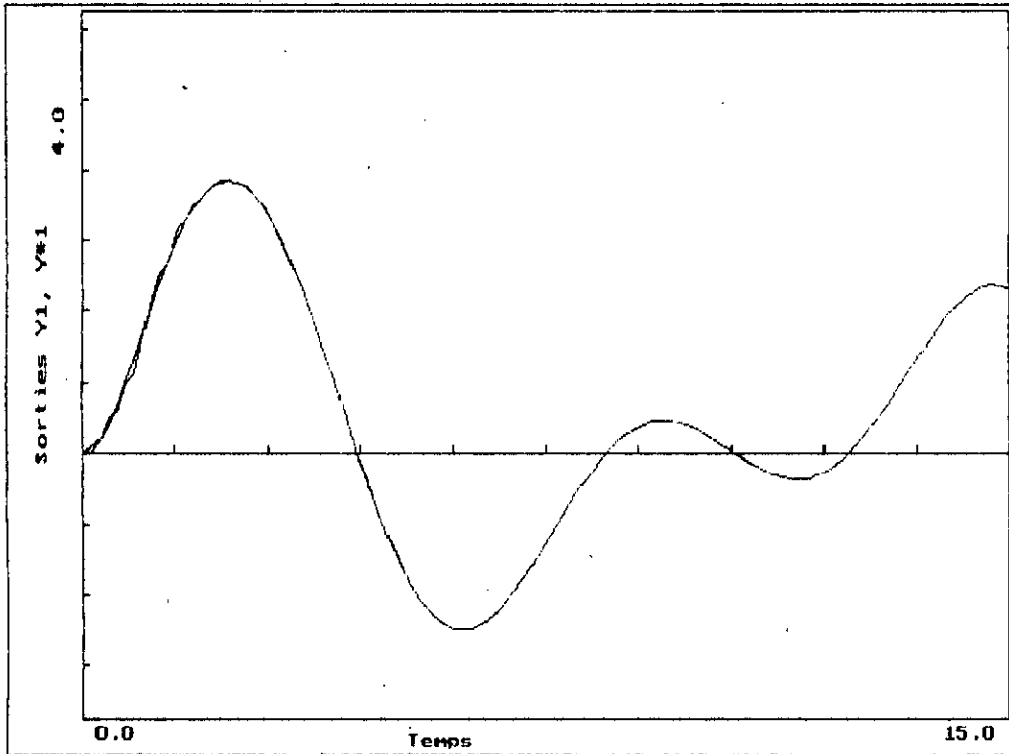


Figure IV-1-1a. Réponse de la sortie Y1.

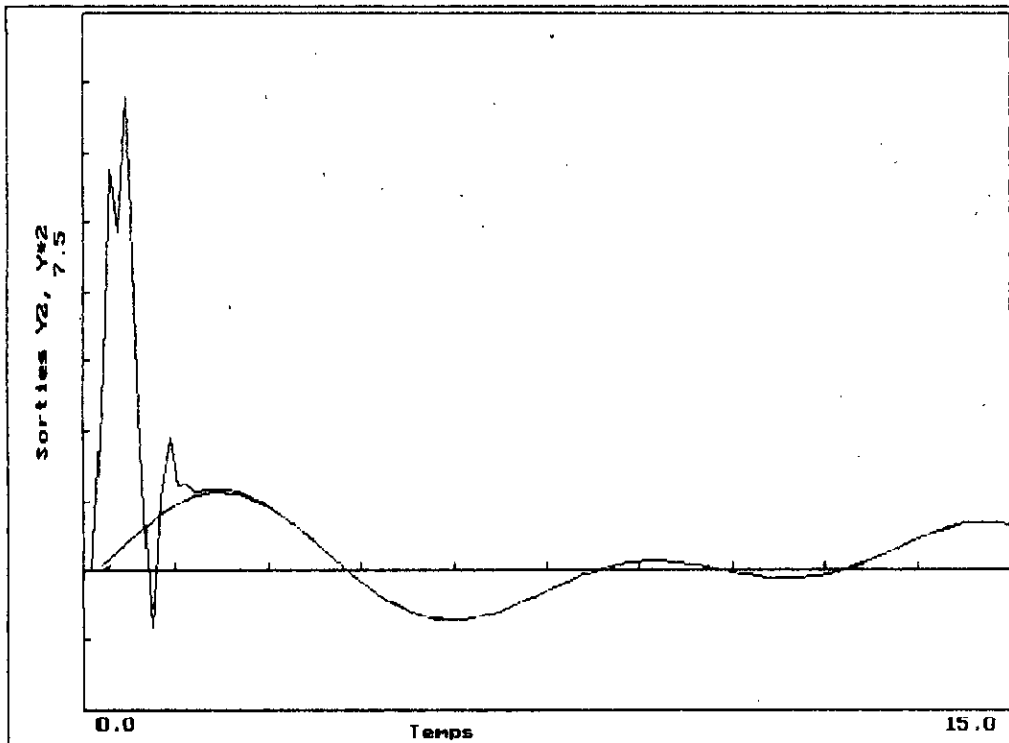


Figure IV-1-1b. Réponse de la sortie Y2.

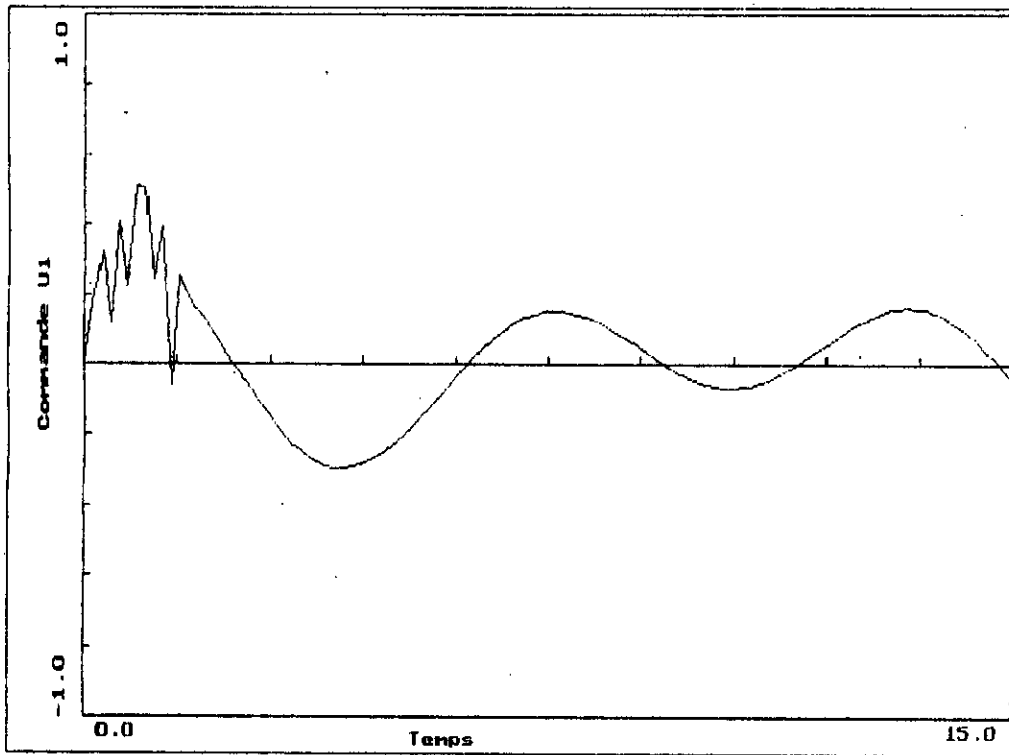


Figure IV-1-2a. Evolution de la commande U1.

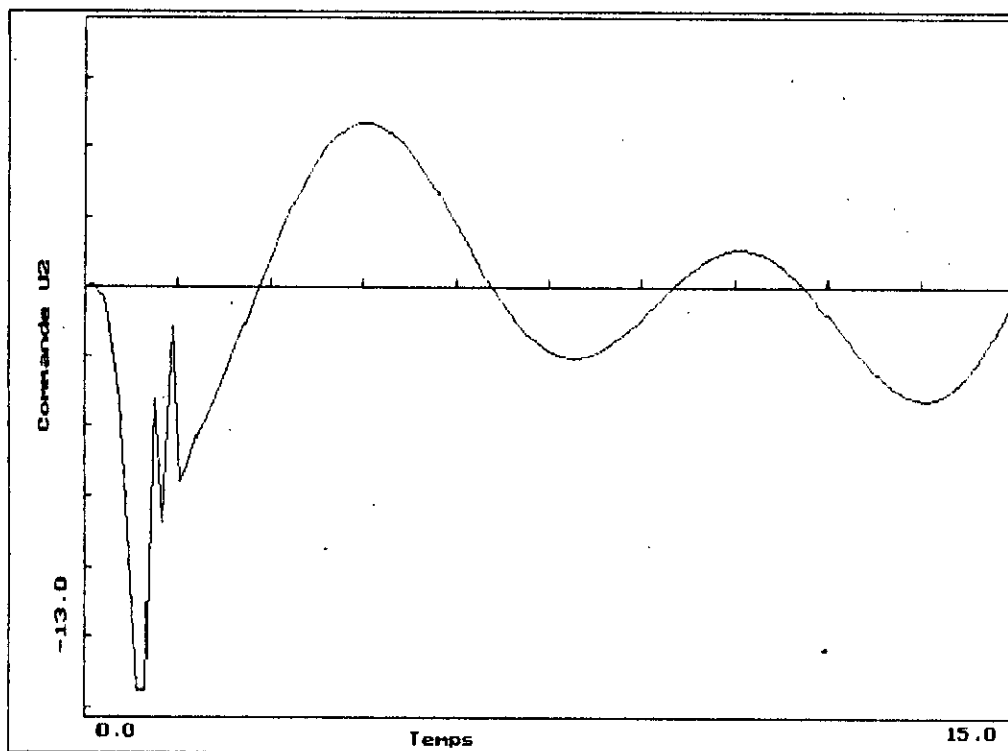


Figure IV-1-2b. Evolution de la commande U2.

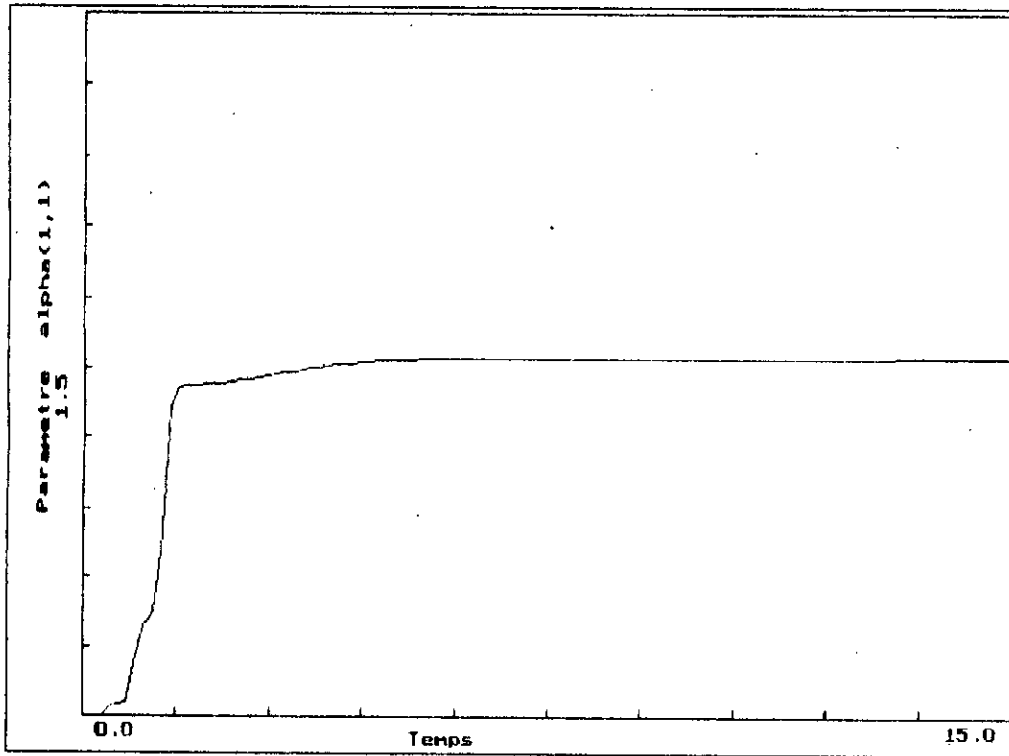


Figure IV-1-3a,. Evolution du paramètre alpha(1,1).

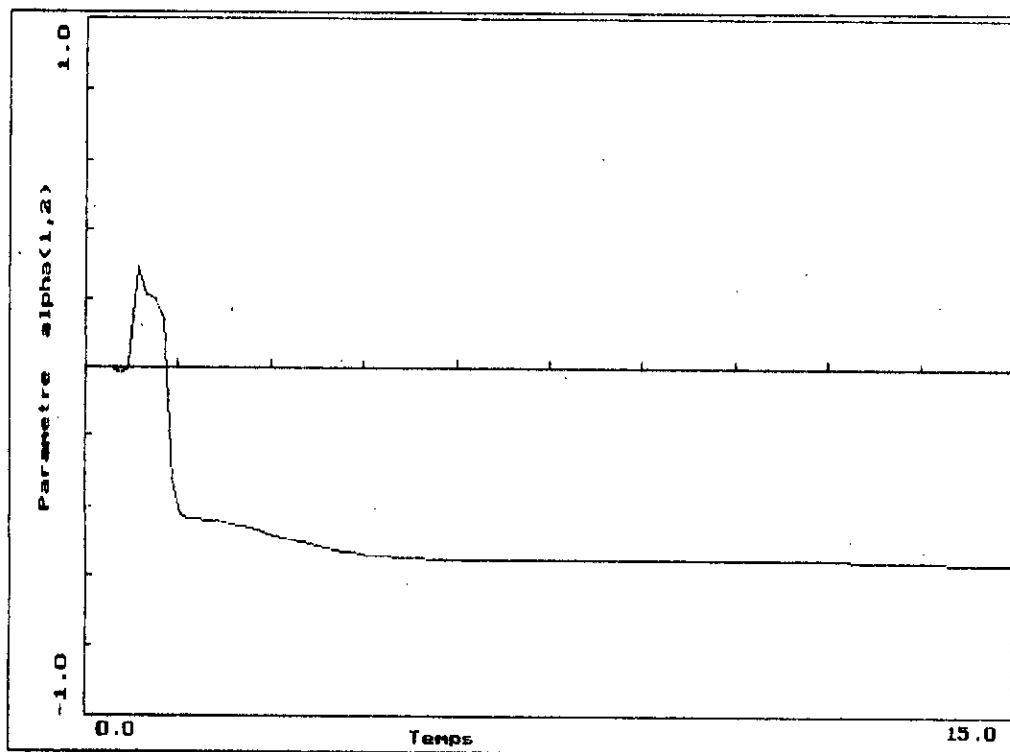


Figure IV-1-3a,. Evolution du paramètre alpha(1,2).

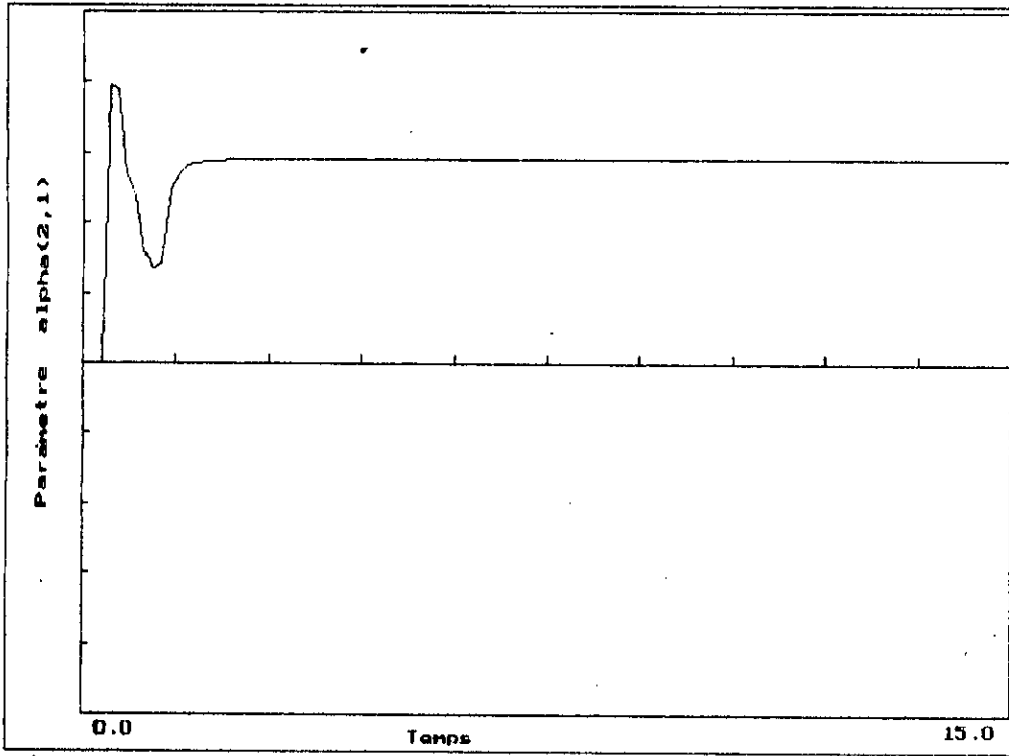


Figure IV-1-3a,. Evolution du paramètre $\alpha(2,1)$

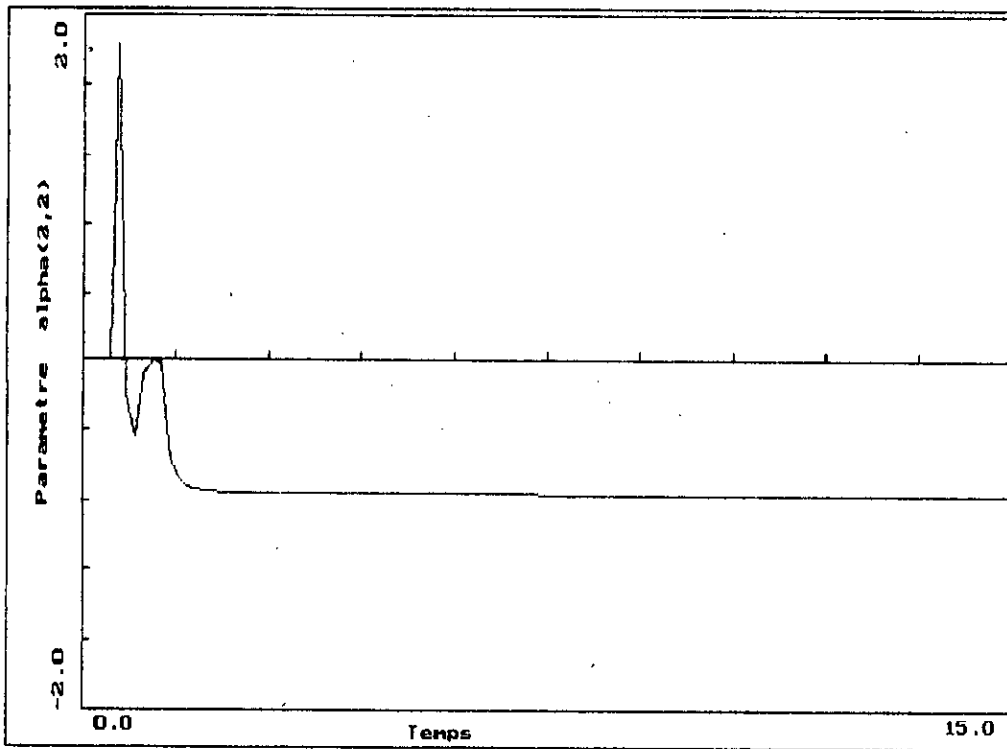


Figure IV-1-3a,. Evolution du paramètre $\alpha(2,2)$.

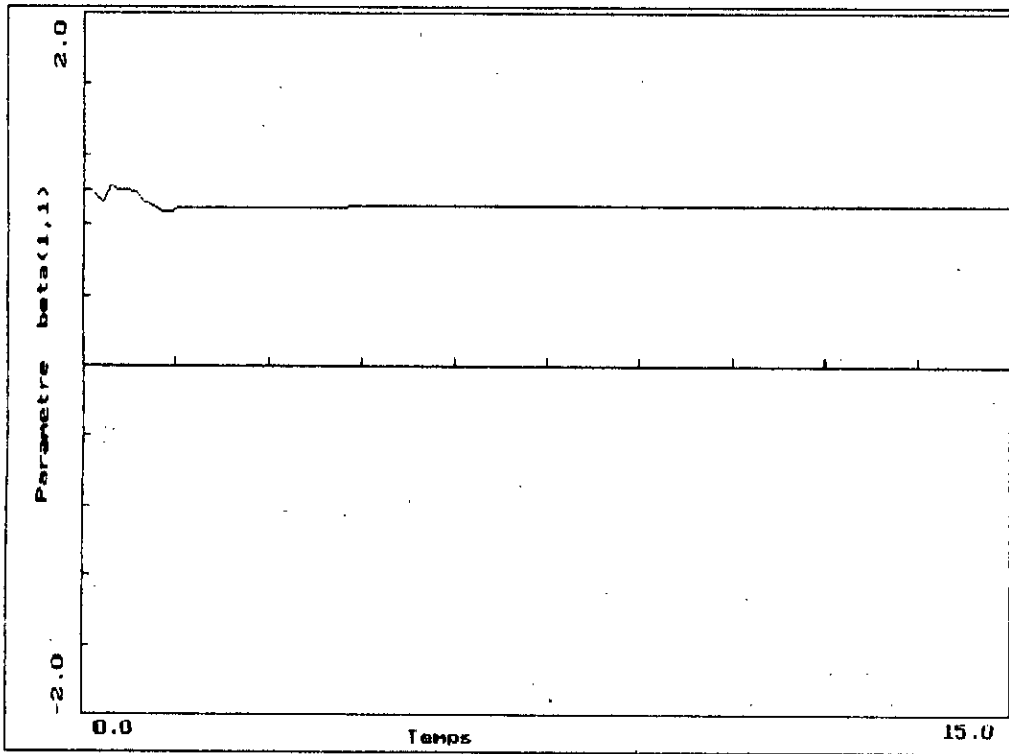


Figure IV-1-3b₁. Evolution du paramètre $\beta(1,1)$.

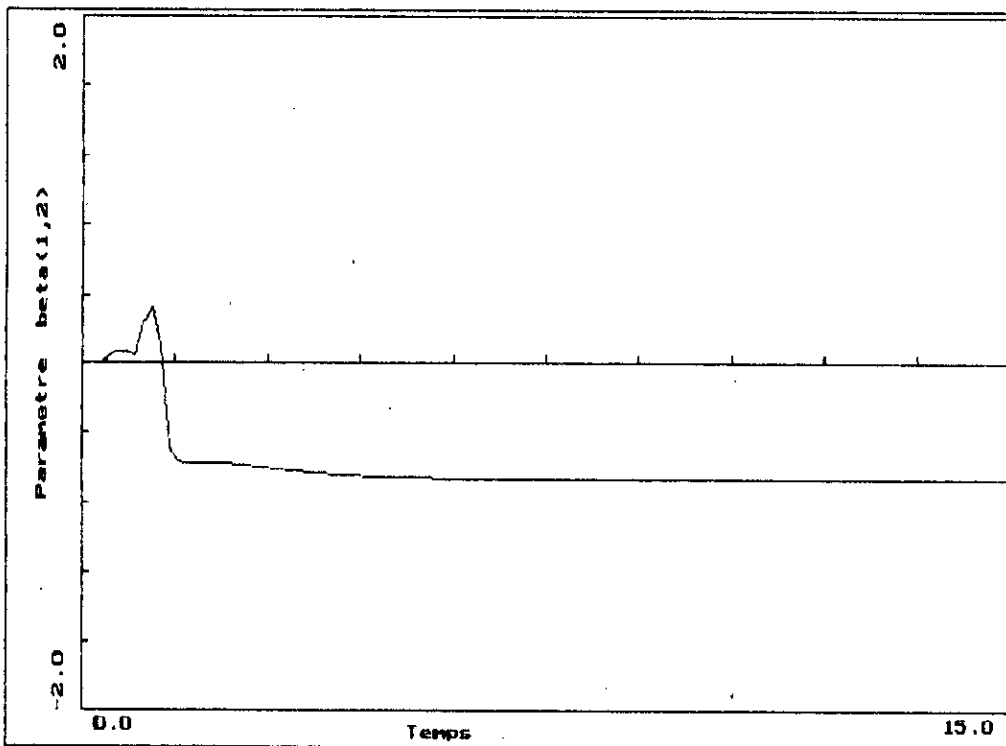


Figure IV-1-3b₂. Evolution du paramètre $\beta(1,2)$.

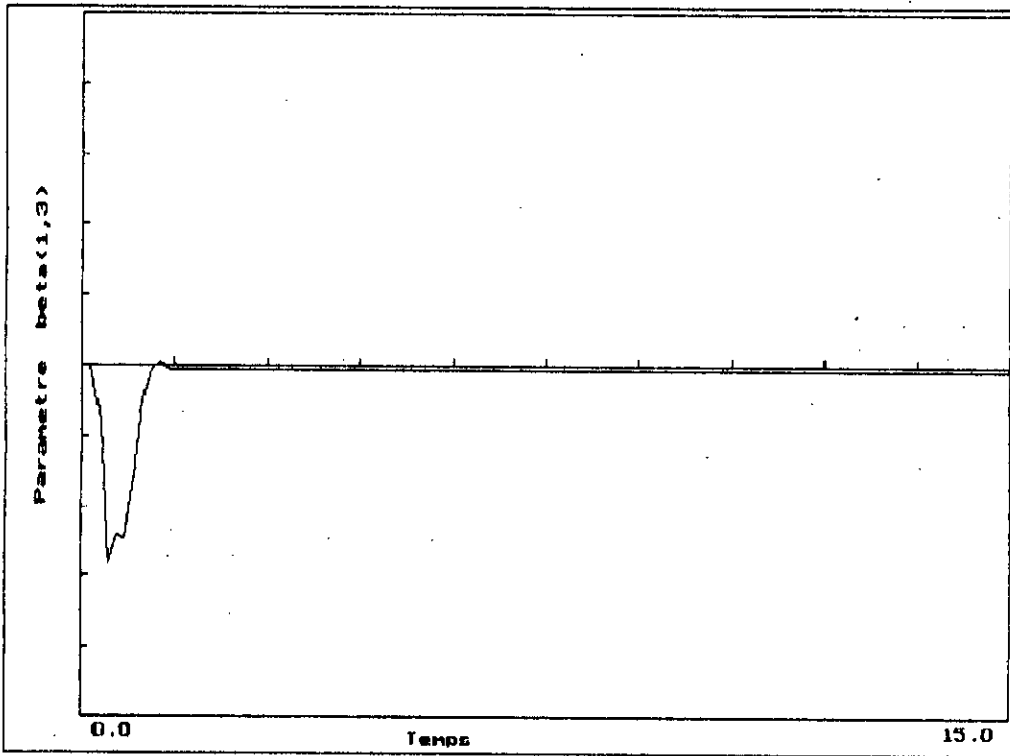


Figure IV-1-3b,. Evolution du paramètre $\beta(1,3)$.

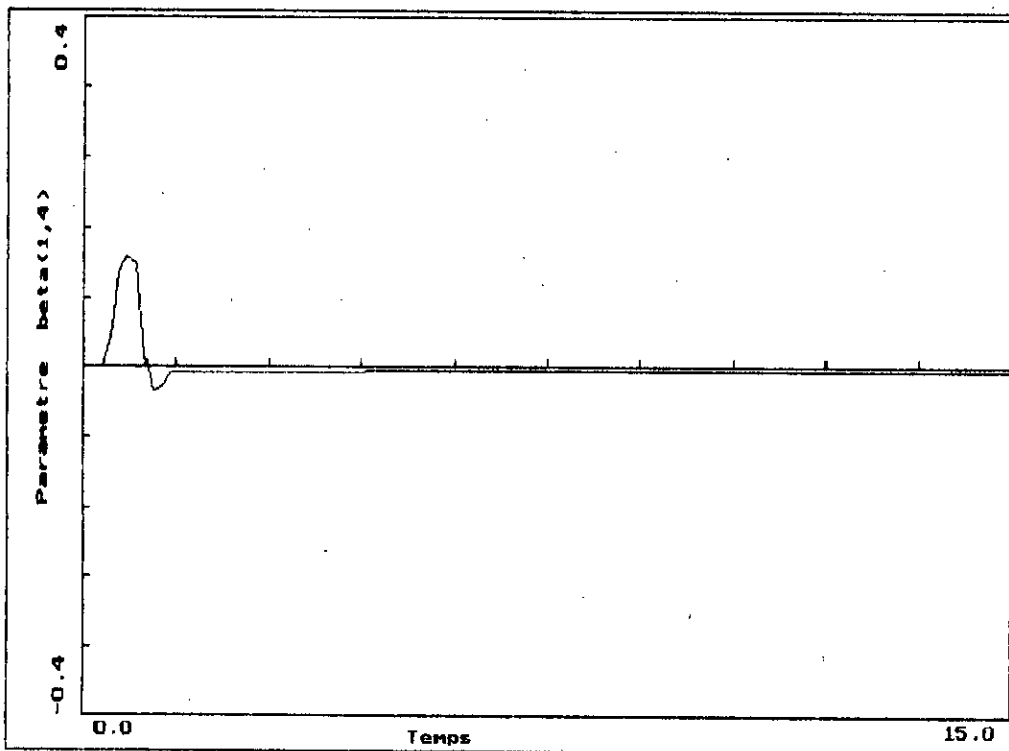


Figure IV-1-3b,. Evolution du paramètre $\beta(1,4)$.

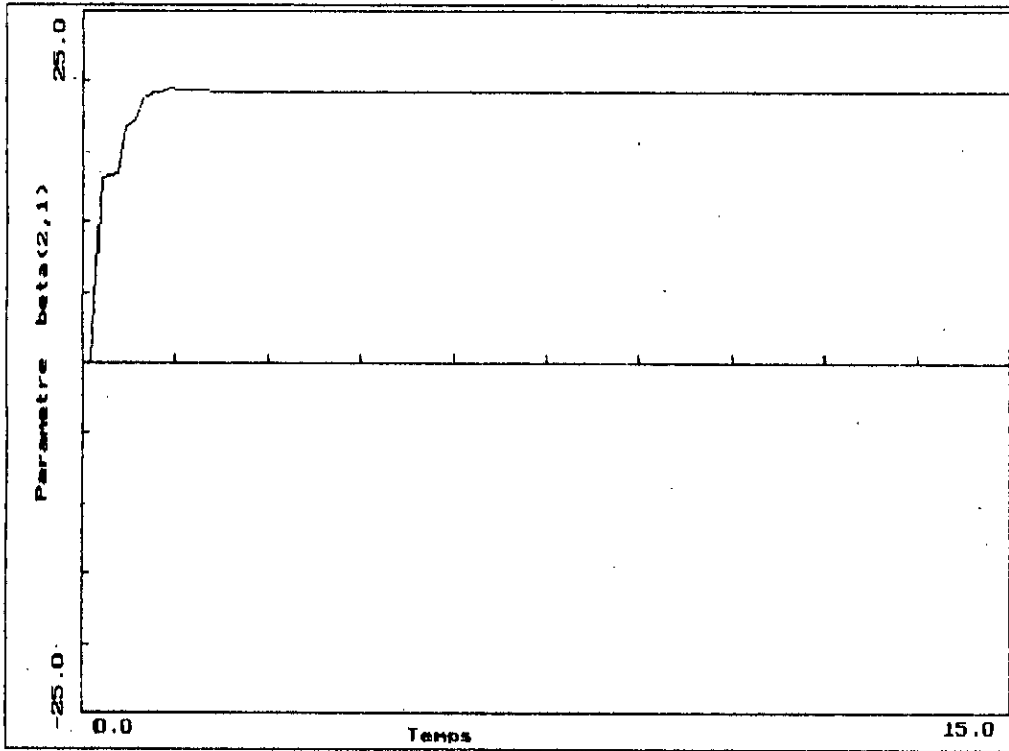


Figure IV-1-3c, . Evolution du paramètre $\beta(2,1)$.

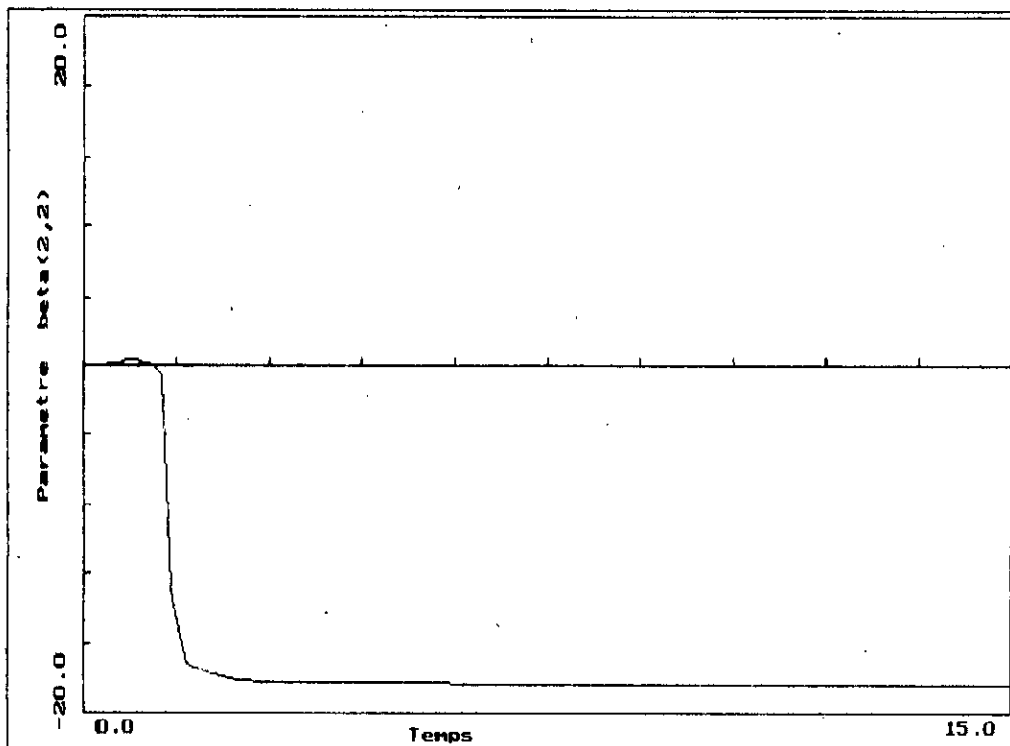


Figure IV-1-3c, . Evolution du paramètre $\beta(2,2)$.

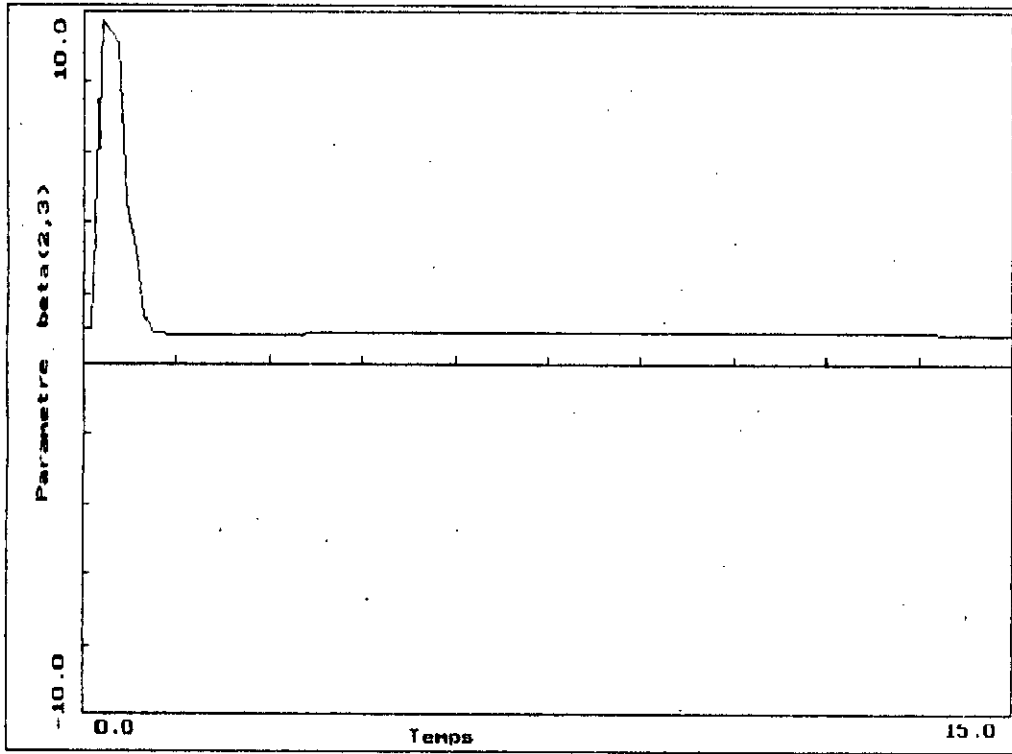


Figure IV-1-3c,. Evolution du paramètre $\beta(2,3)$.

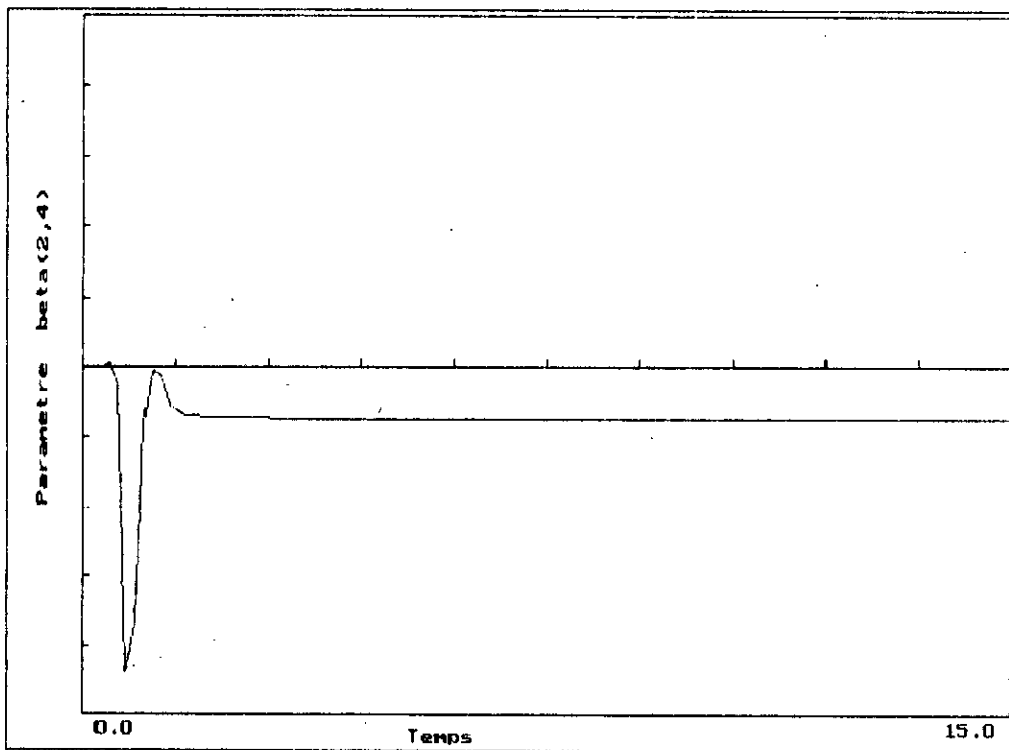


Figure IV-1-3c,. Evolution du paramètre $\beta(2,4)$.

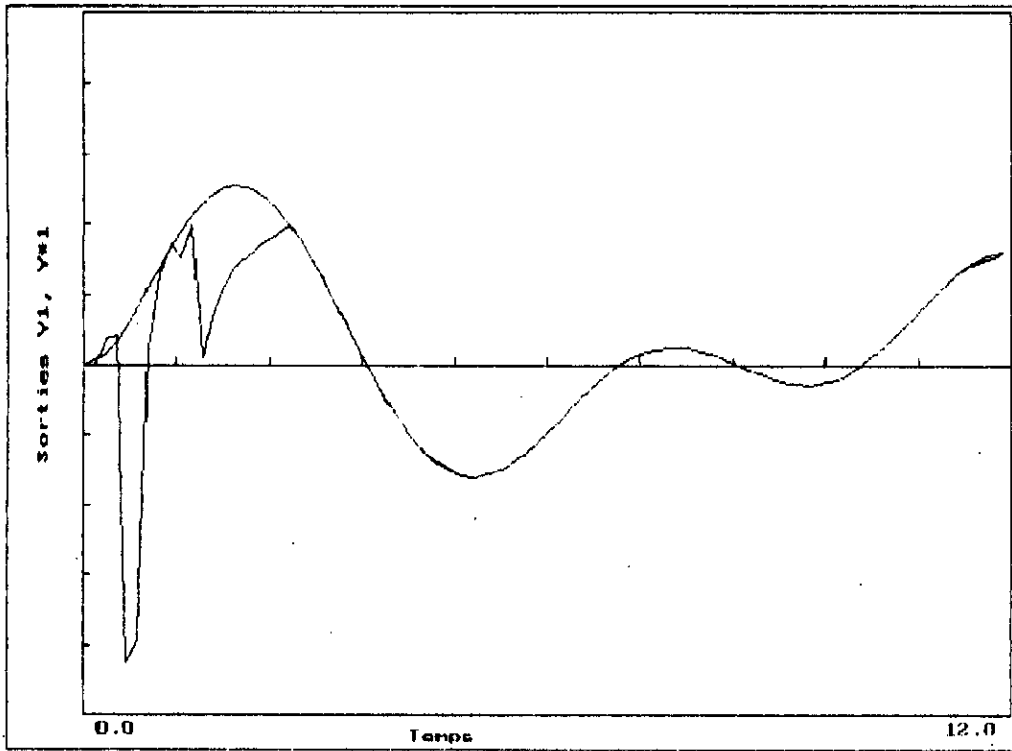


Figure IV-1-4a. Réponse de la sortie Y1.

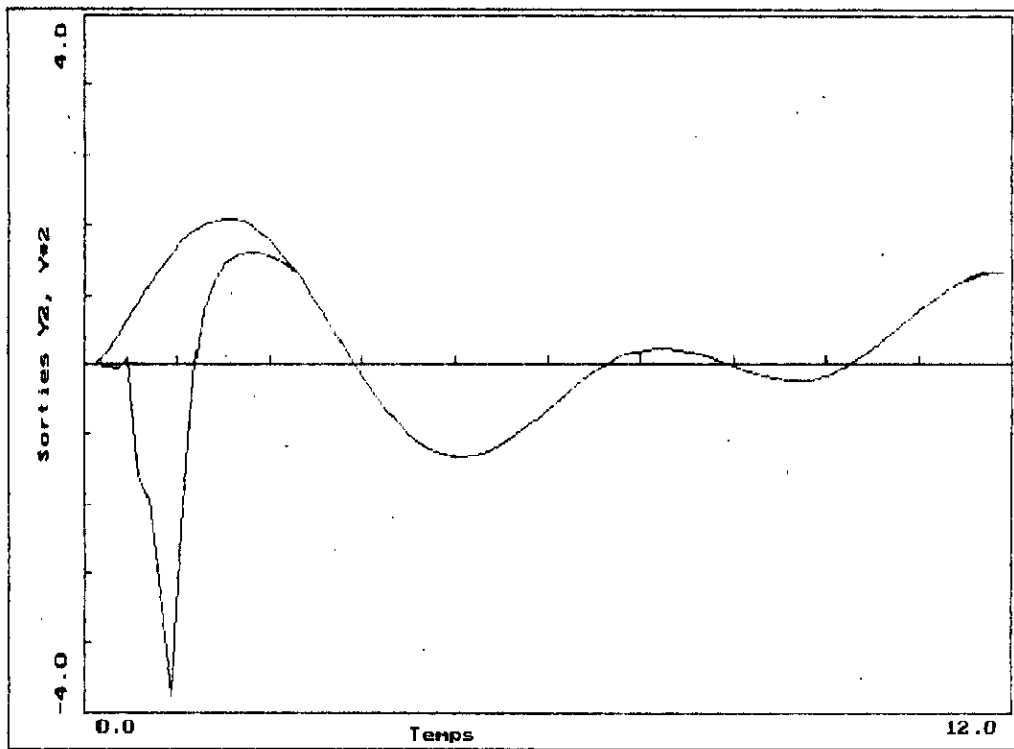


Figure IV-1-4b. Réponse de la sortie Y2.

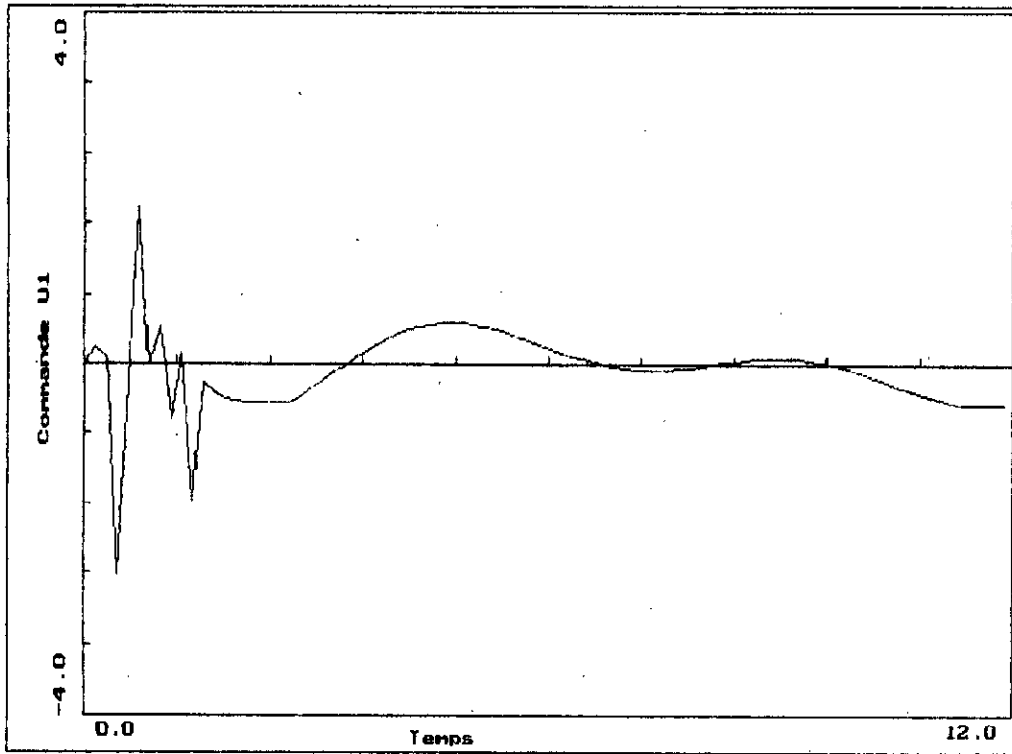


Figure IV-1-5a. Evolution de la commande U1.

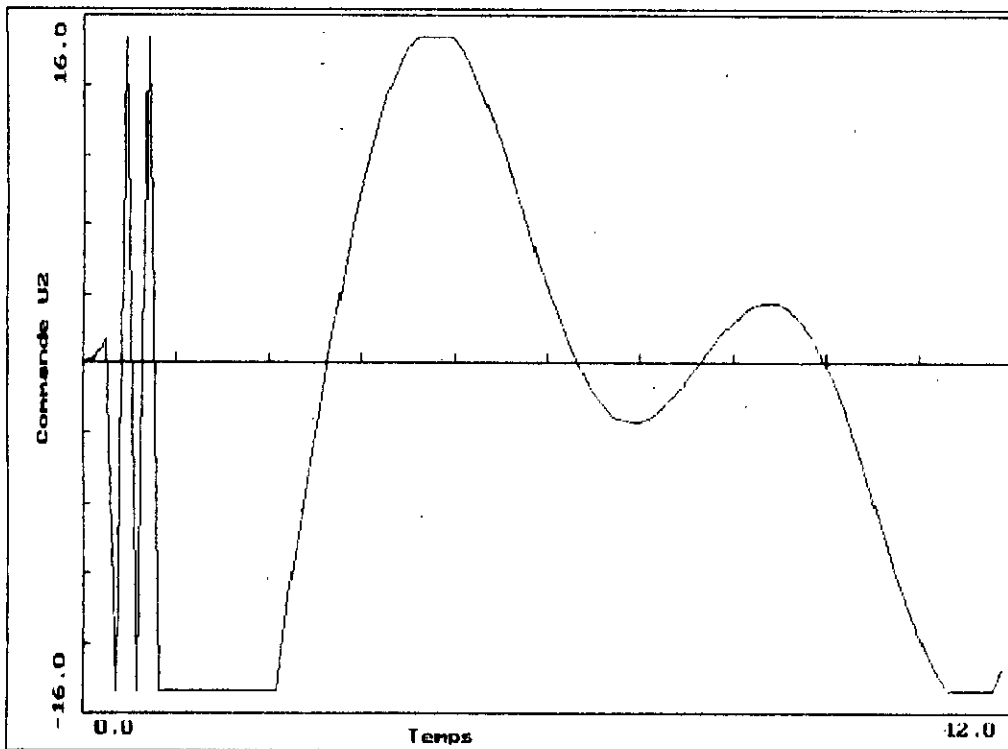


Figure IV-1-5b. Evolution de la commande U2.

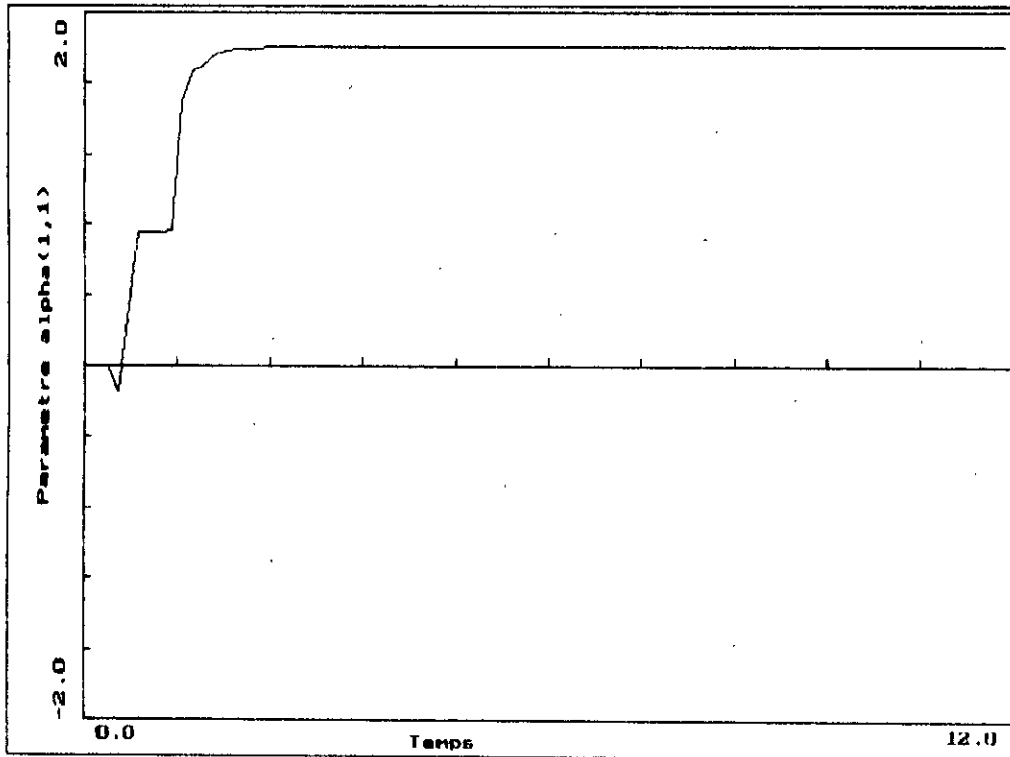


Figure IV-1-6a₁. Evolution du paramètre $\alpha(1,1)$.

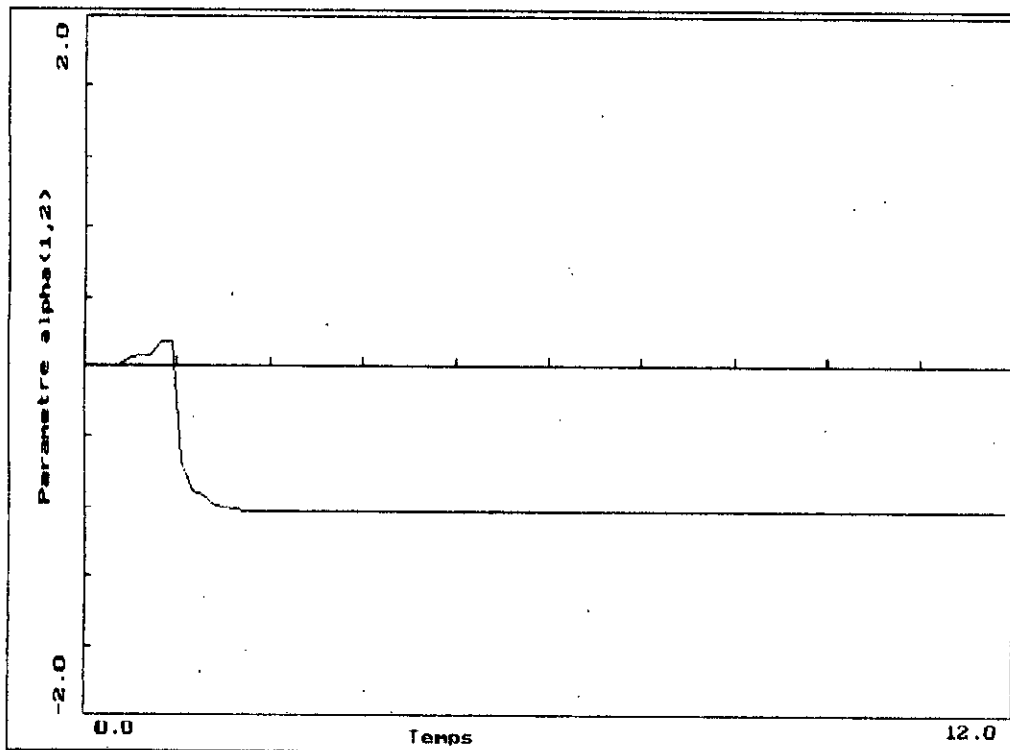


Figure IV-1-6a₂. Evolution du paramètre $\alpha(1,2)$.

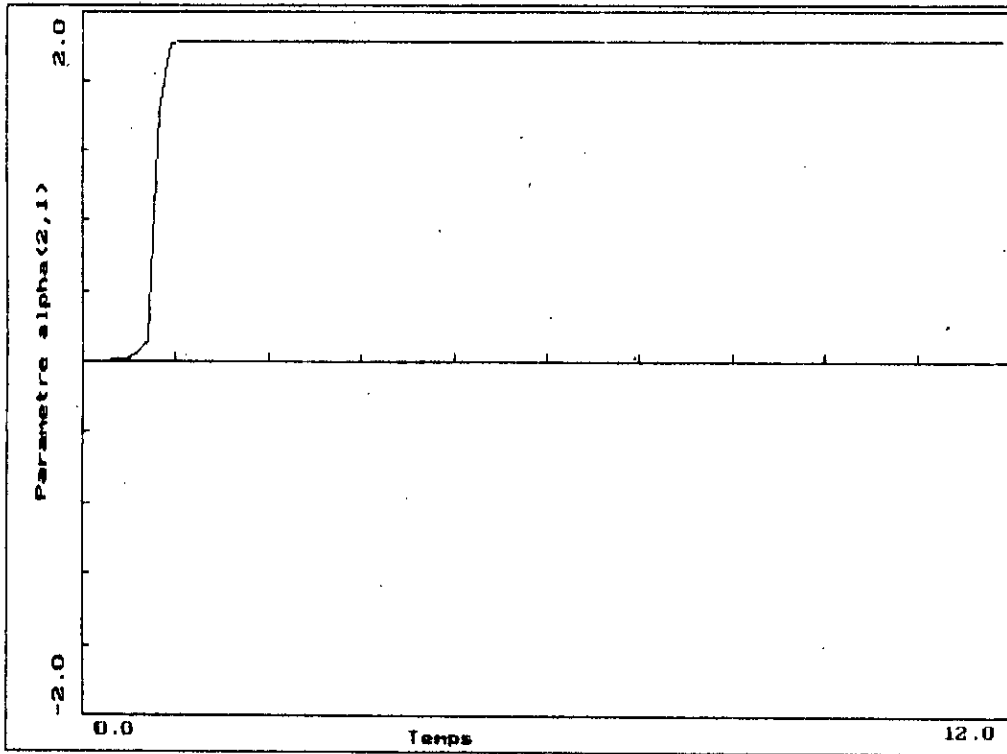


Figure IV-1-6a,. Evolution du paramètre $\alpha(2,1)$.

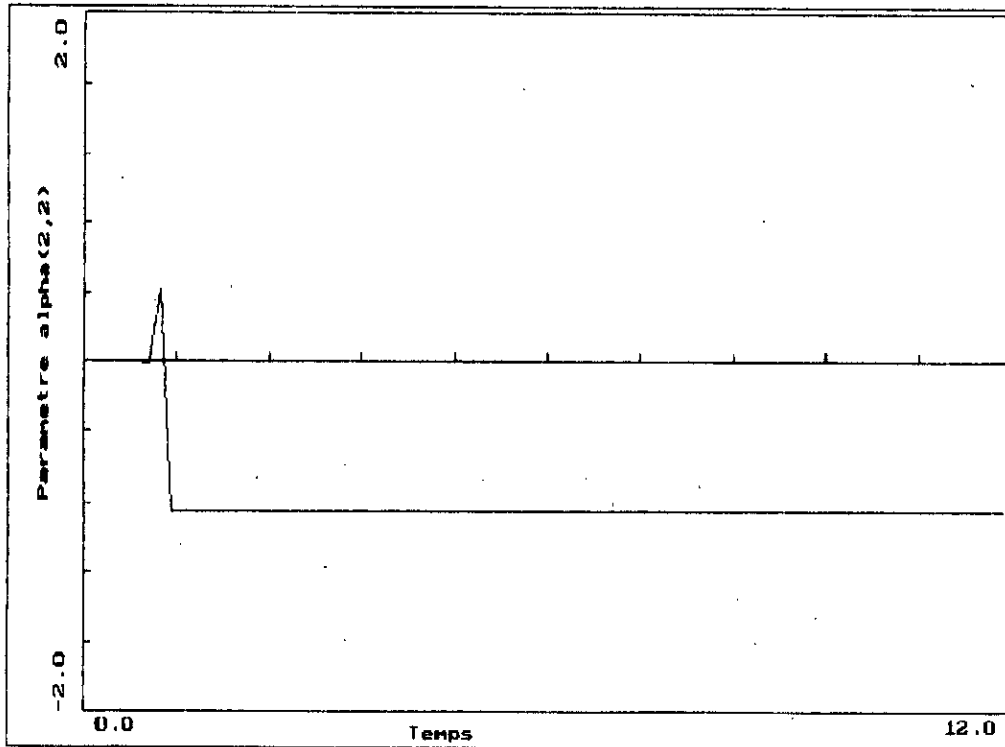


Figure IV-1-6a,. Evolution du paramètre $\alpha(2,2)$.

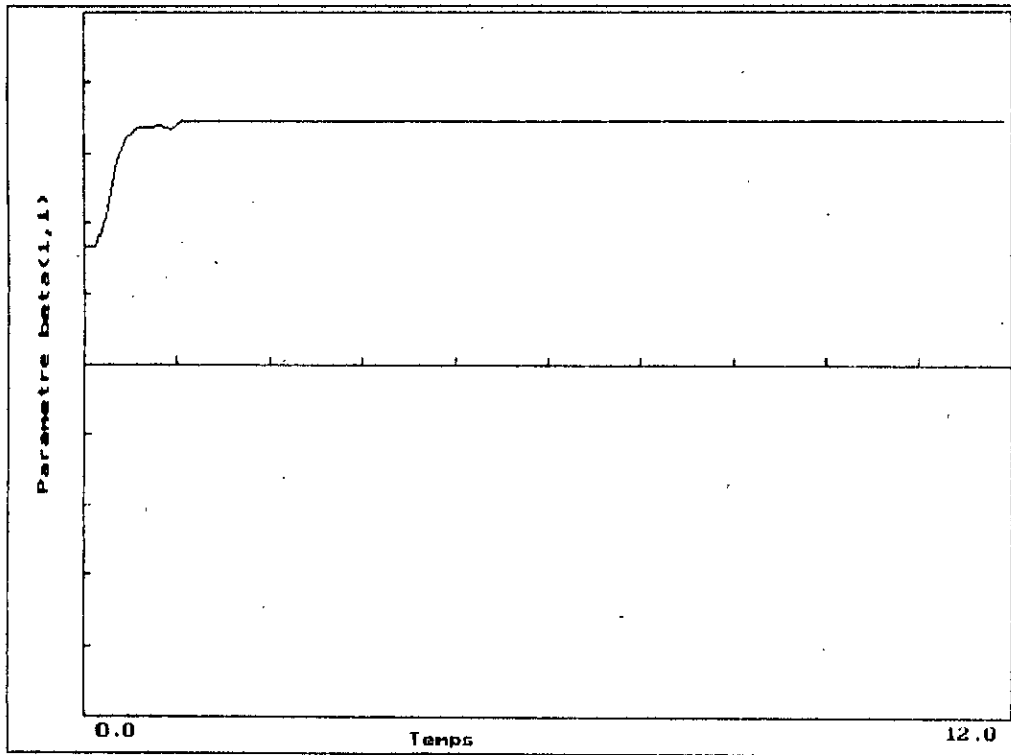


Figure IV-1-6b₁. Evolution du paramètre $\beta(1,1)$.

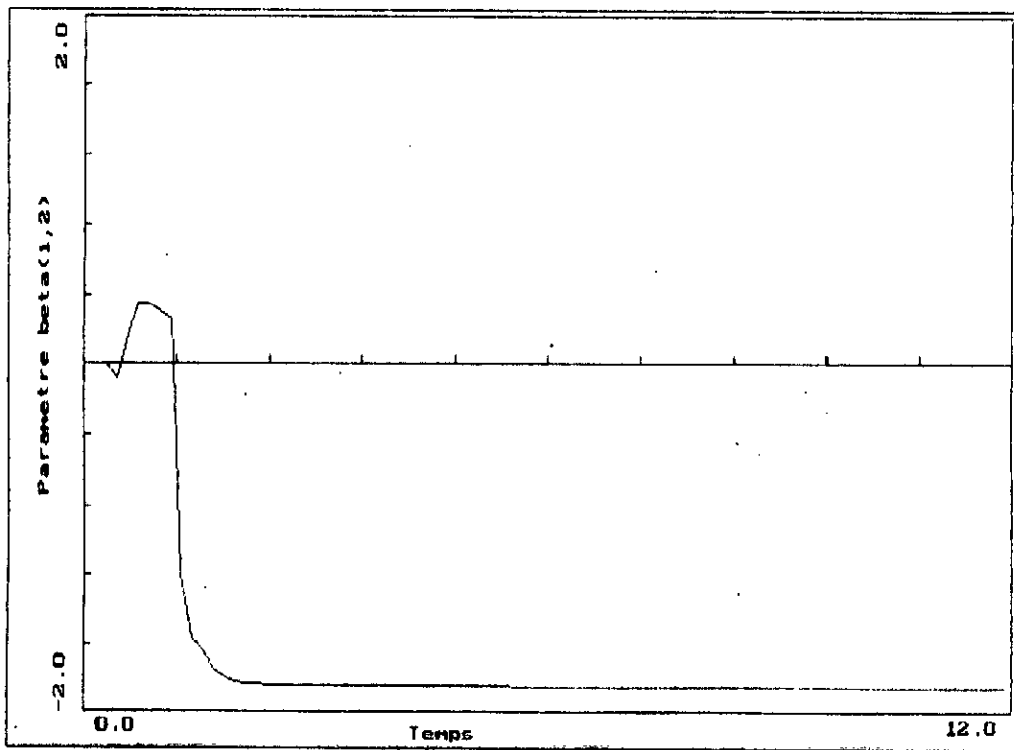


Figure IV-1-6b₂. Evolution du paramètre $\beta(1,2)$.

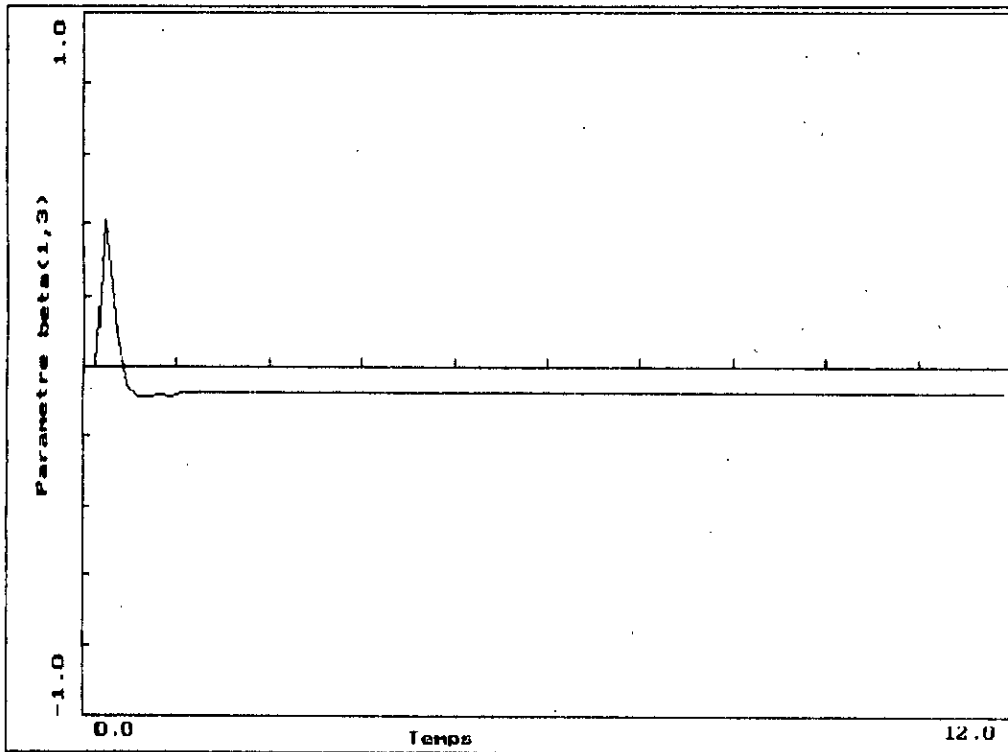


Figure IV-1-6b₁. Evolution du paramètre $\beta(1,3)$.

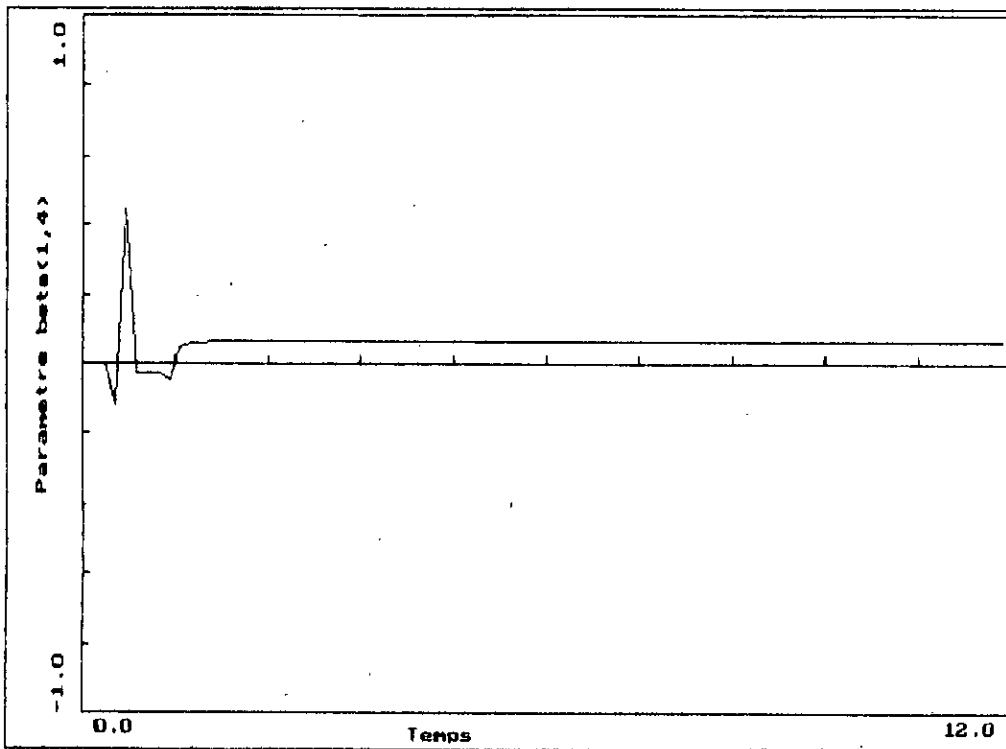


Figure IV-1-6b₂. Evolution du paramètre $\beta(1,4)$.

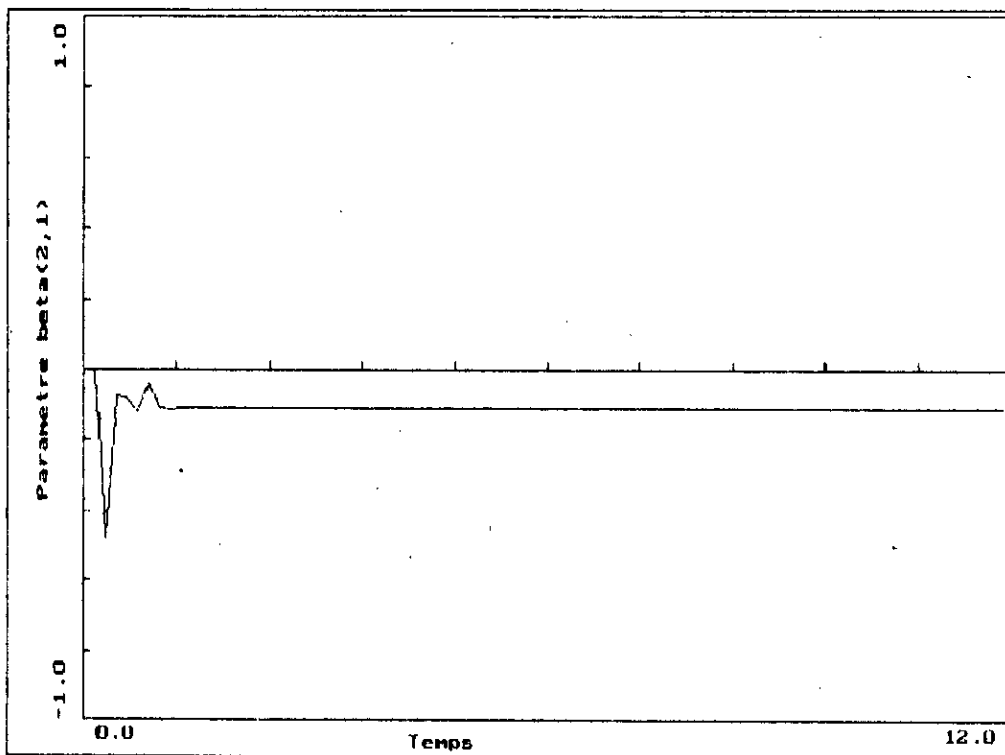


Figure IV-1-6b₁. Evolution du paramètre $\beta(2,1)$.

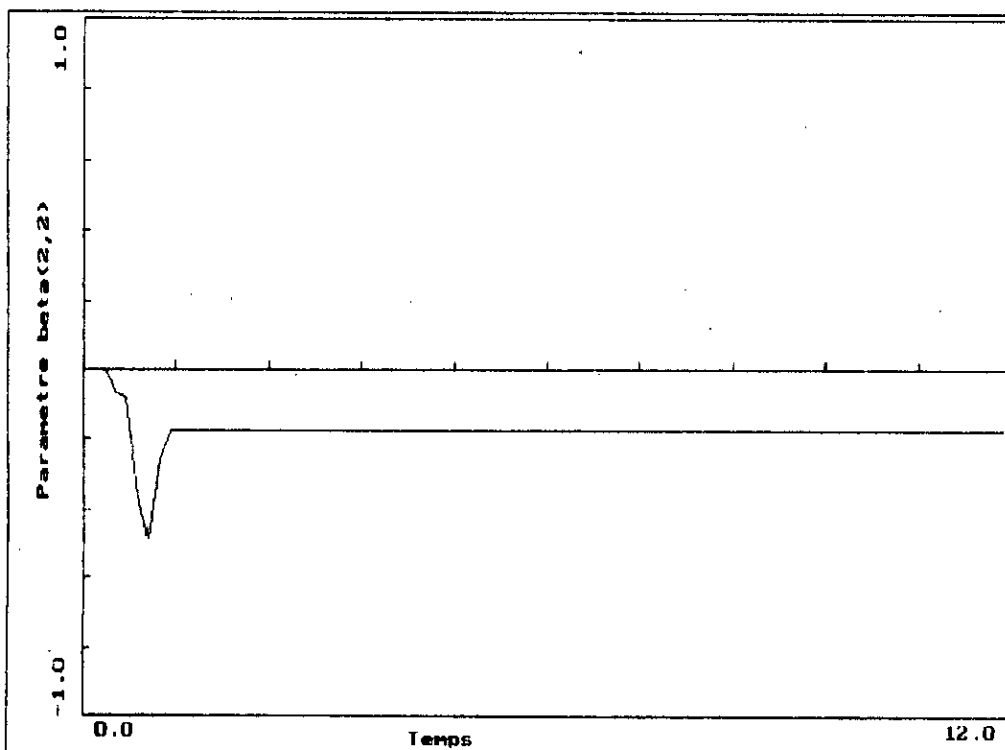


Figure IV-1-6b₂. Evolution du paramètre $\beta(2,2)$.

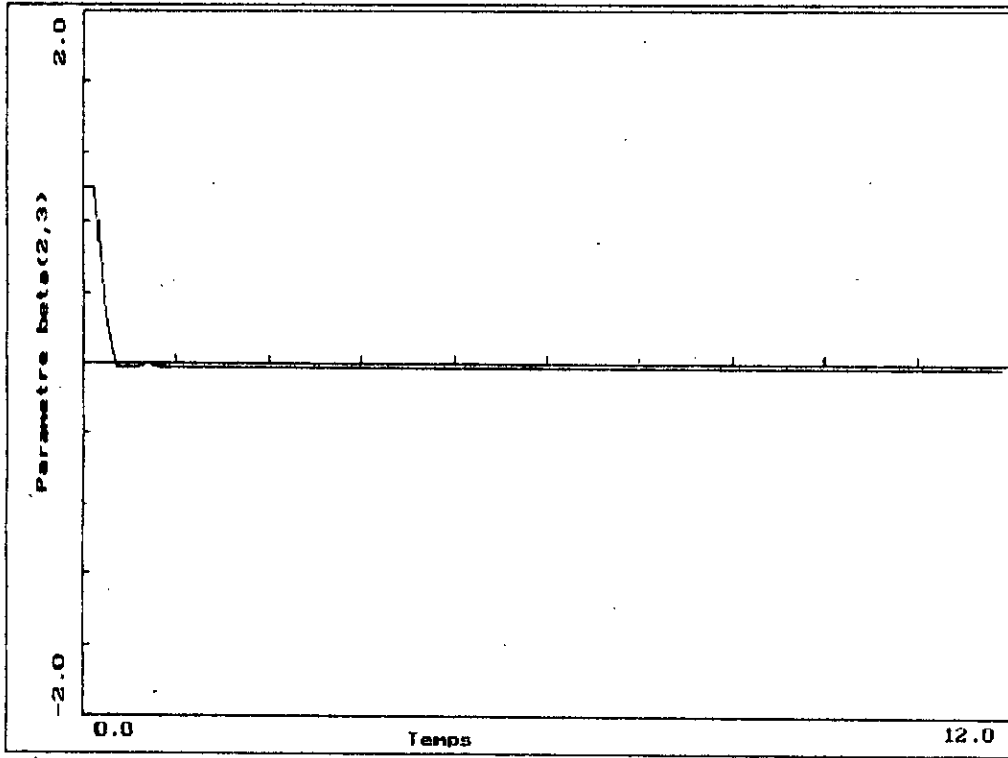


Figure IV-1-6b,. Evolution du paramètre $\beta(2,3)$.

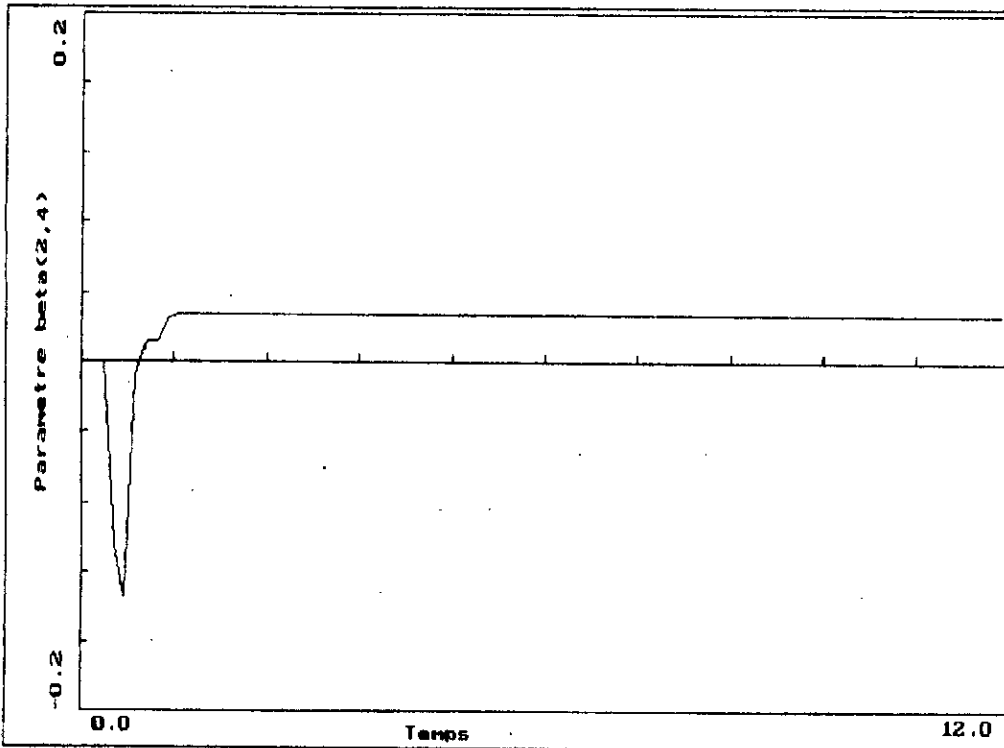


Figure IV-1-6b,. Evolution du paramètre $\beta(2,4)$.

Figure IV-2-1a : Sorties du systeme multivariable

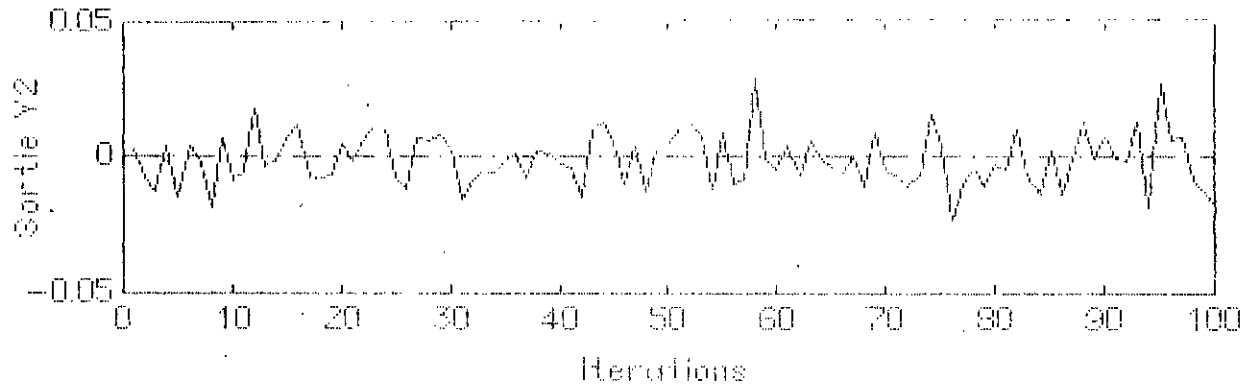
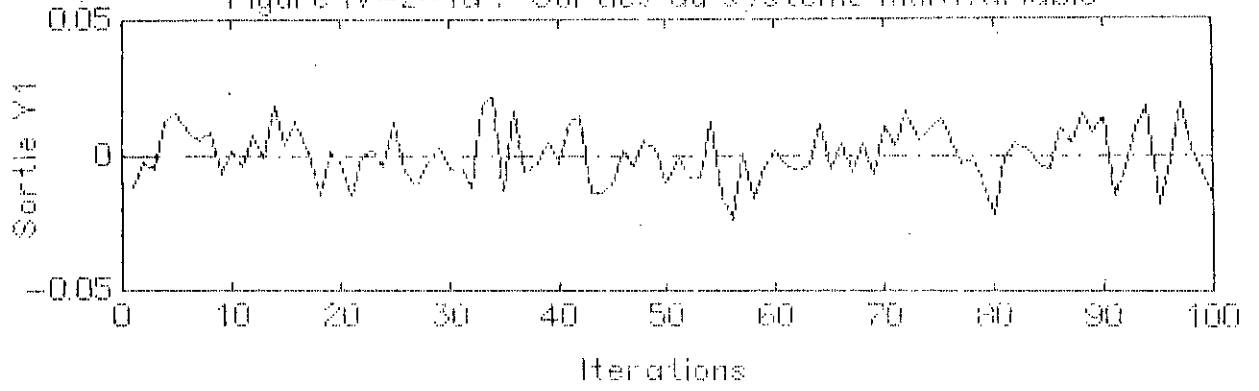
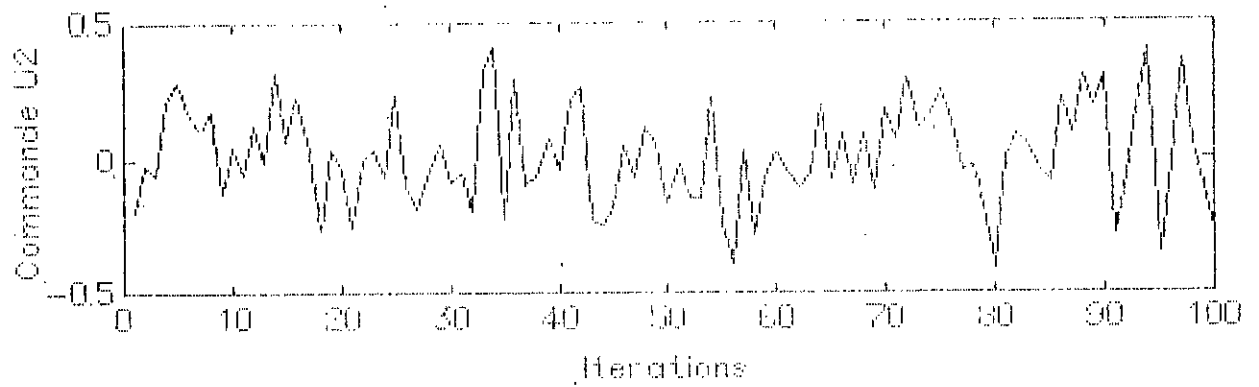
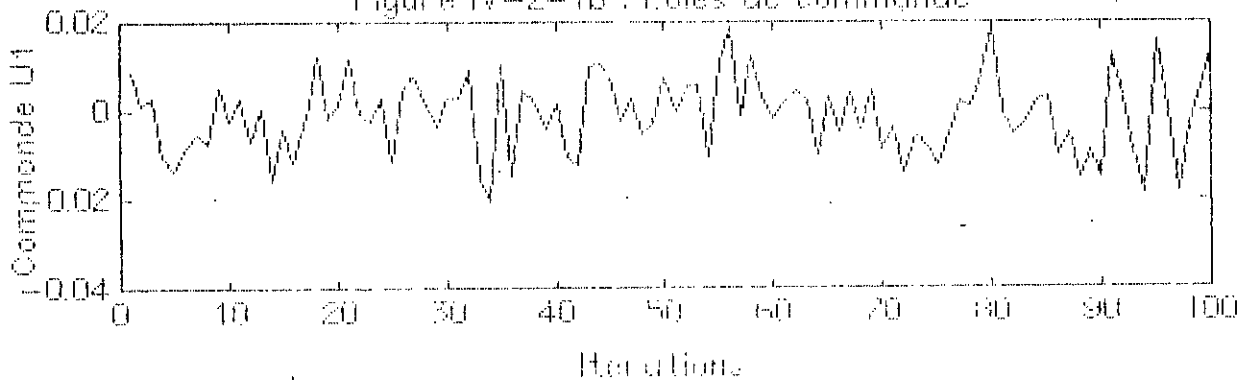


Figure IV-2-1b : Loies de commande



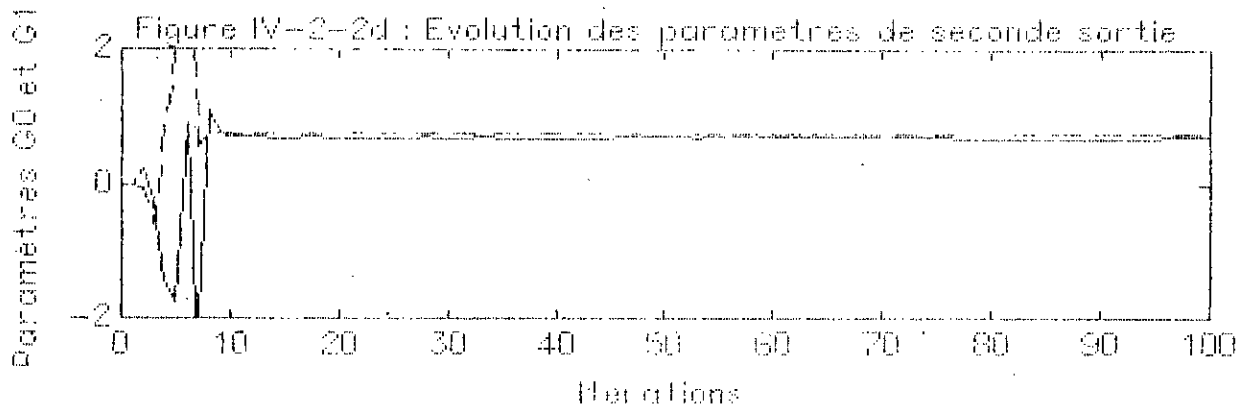
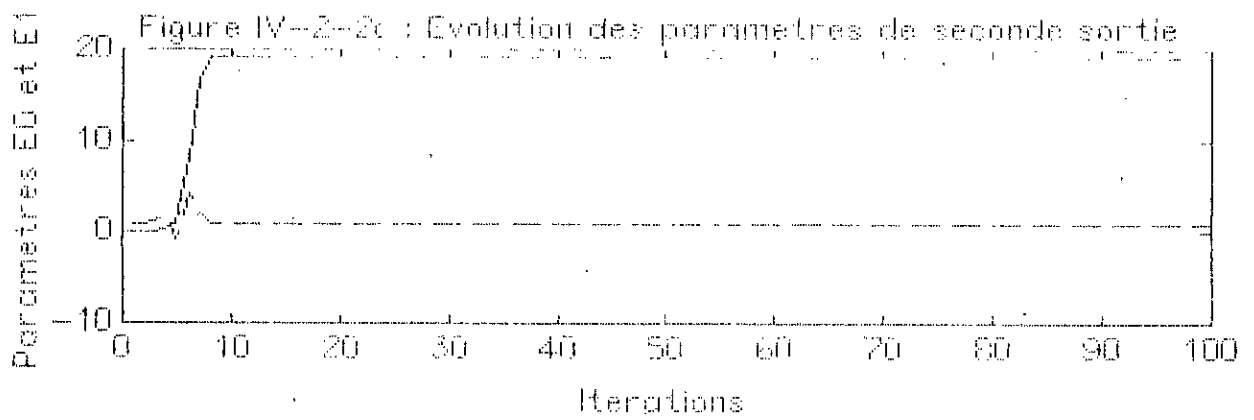
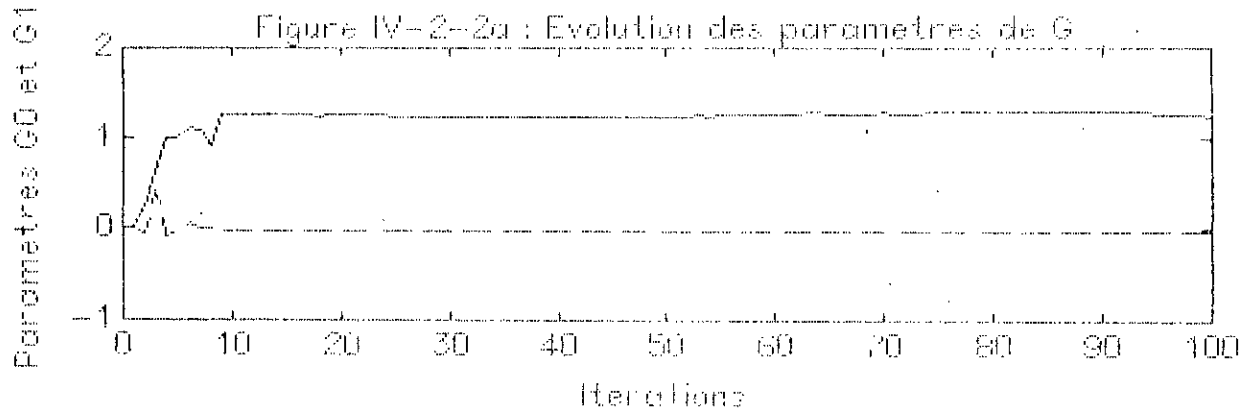
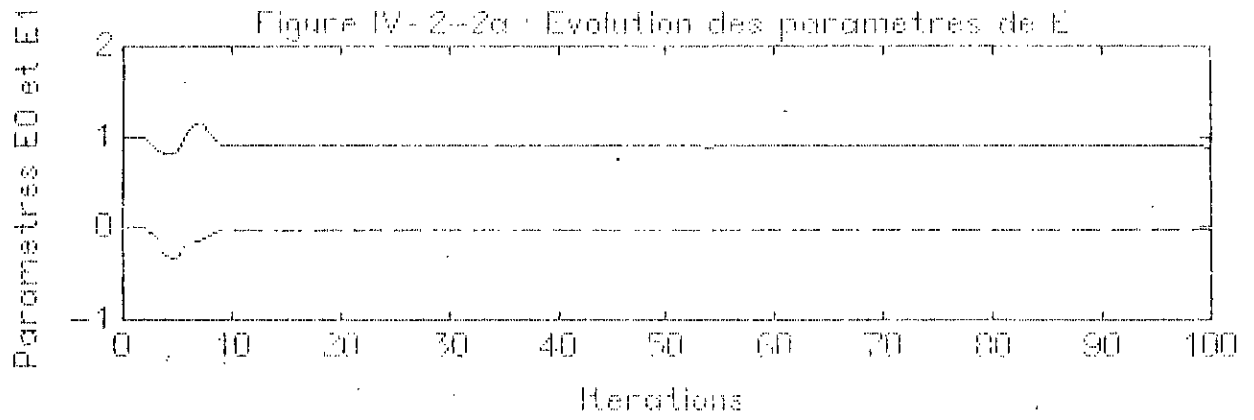


Figure IV-2-3a : Sortie Y1 et reference Y1*

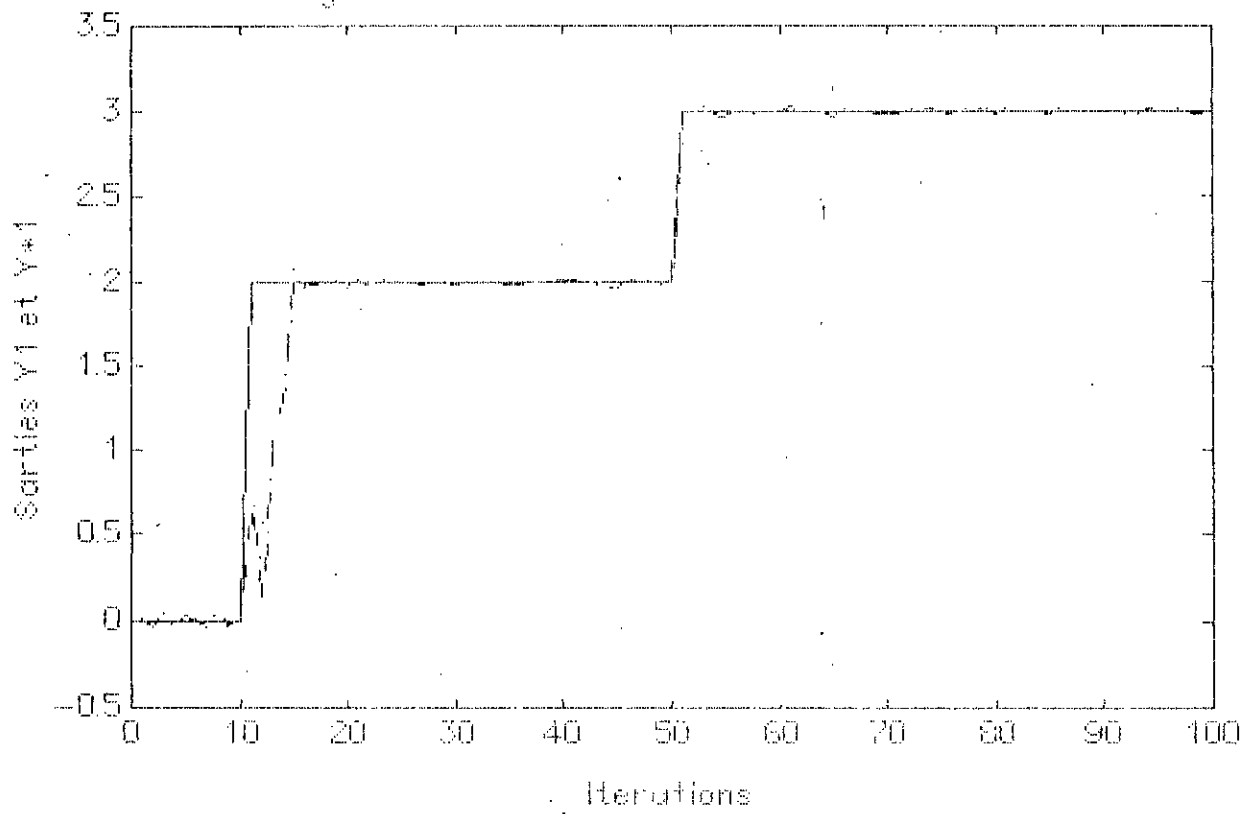


Figure IV-2-3b : Commande U1

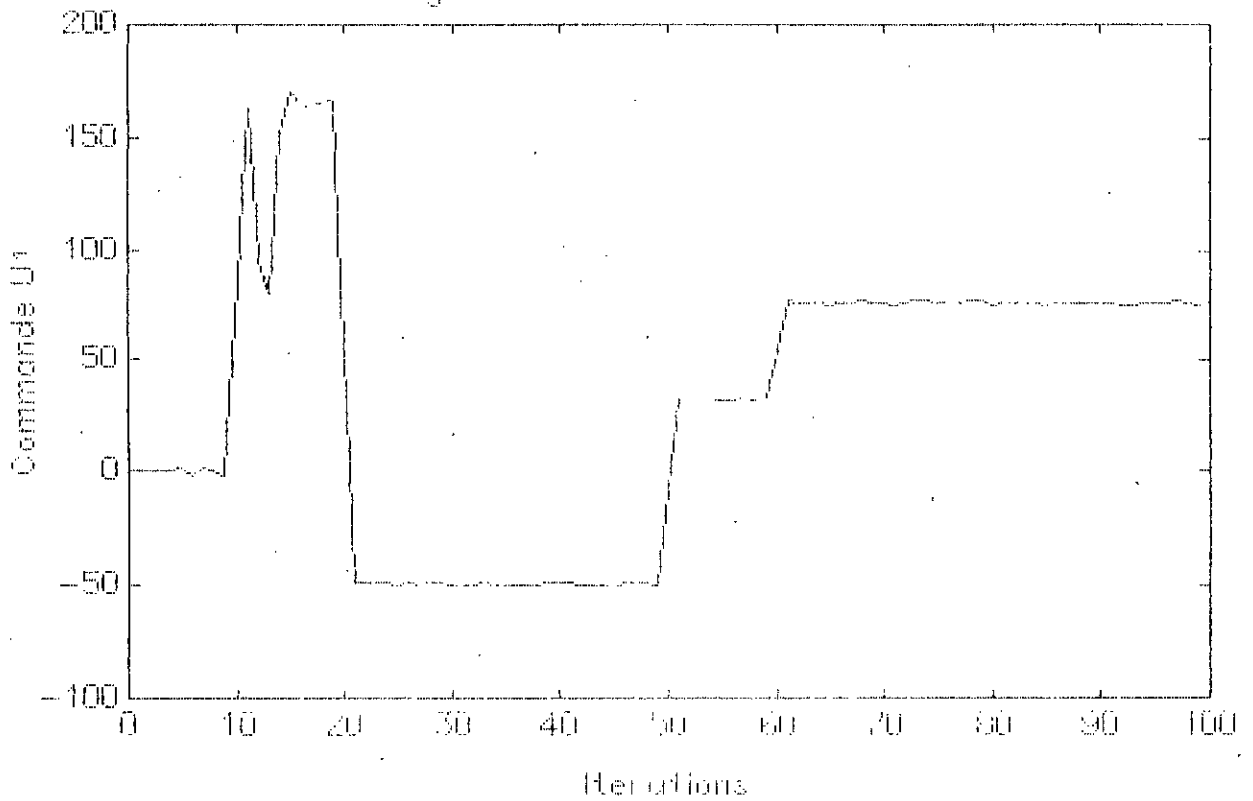


Figure IV-2-4a : Sortie Y2 et reference Y*2

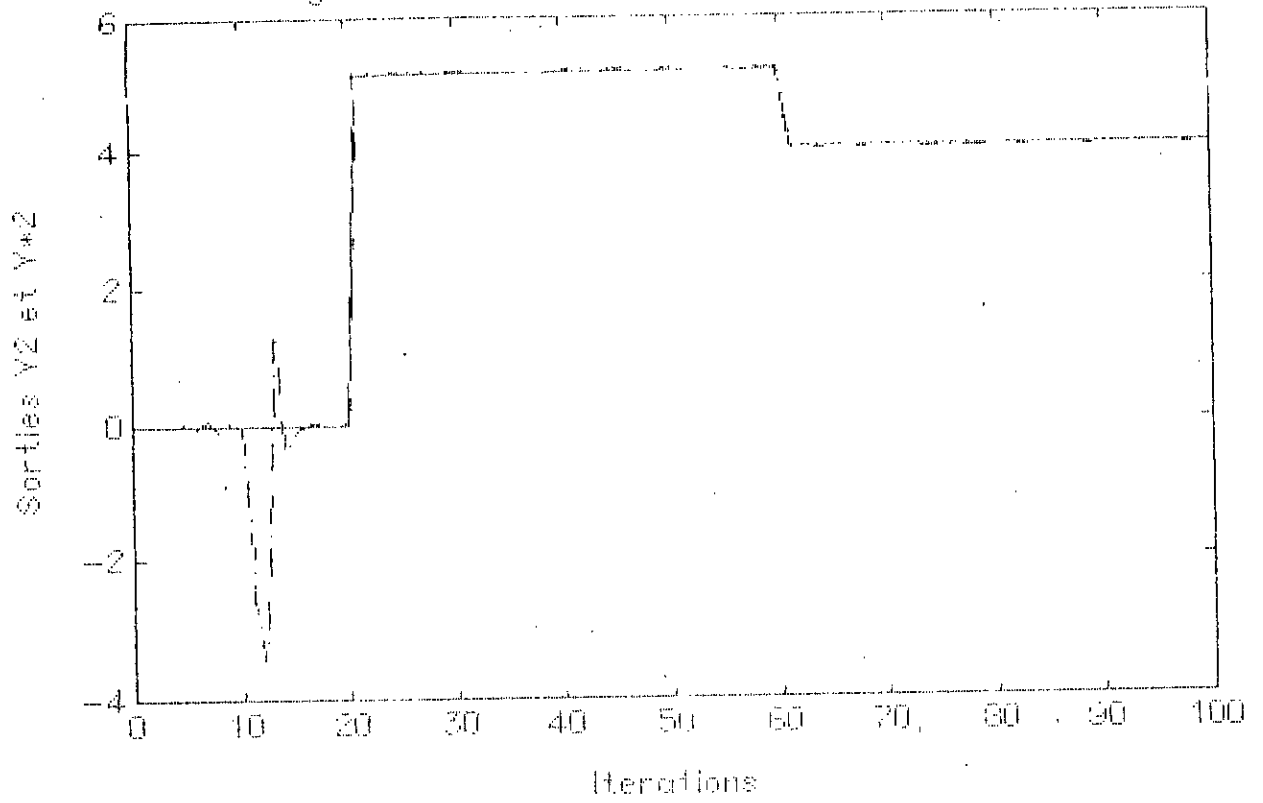
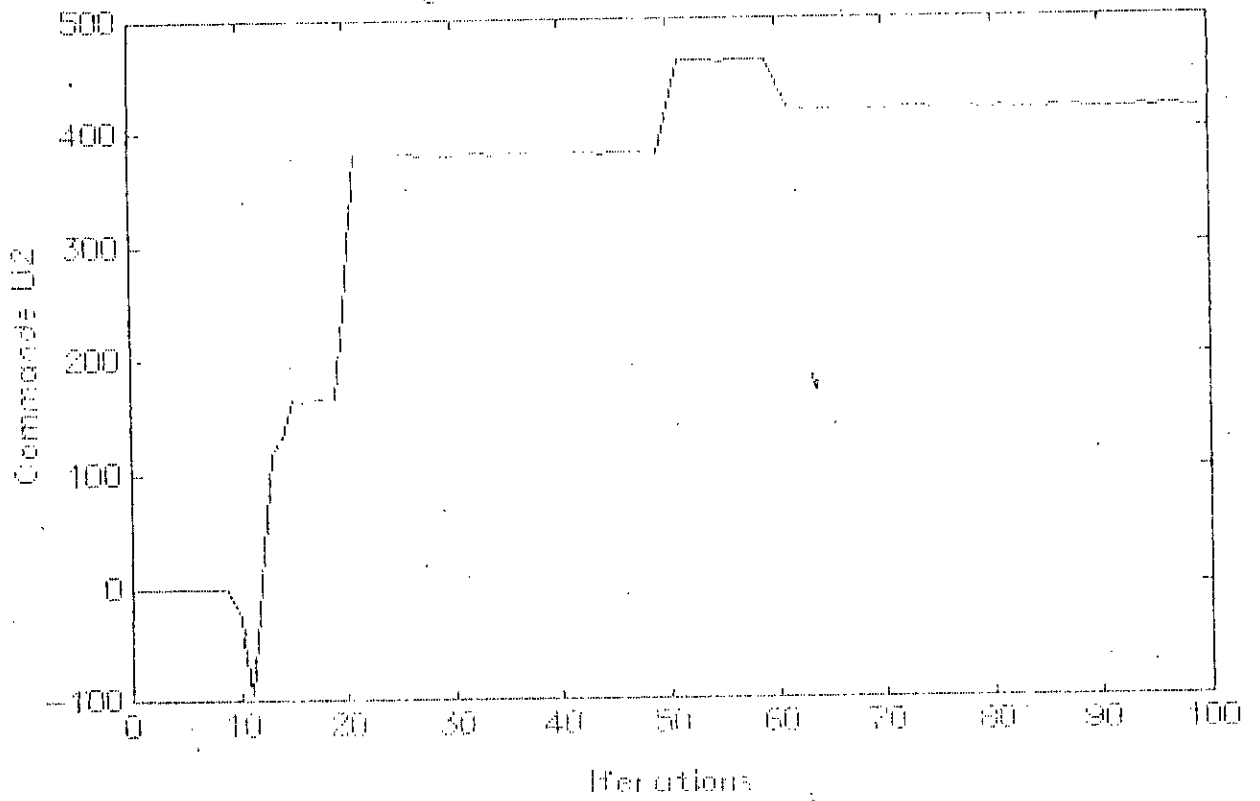


Figure IV-2-4b : Commande U2



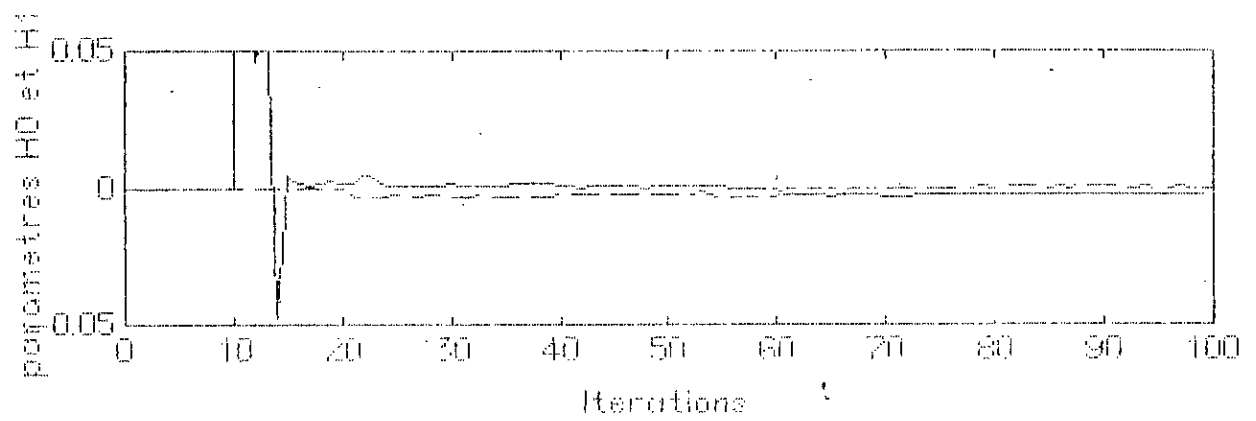
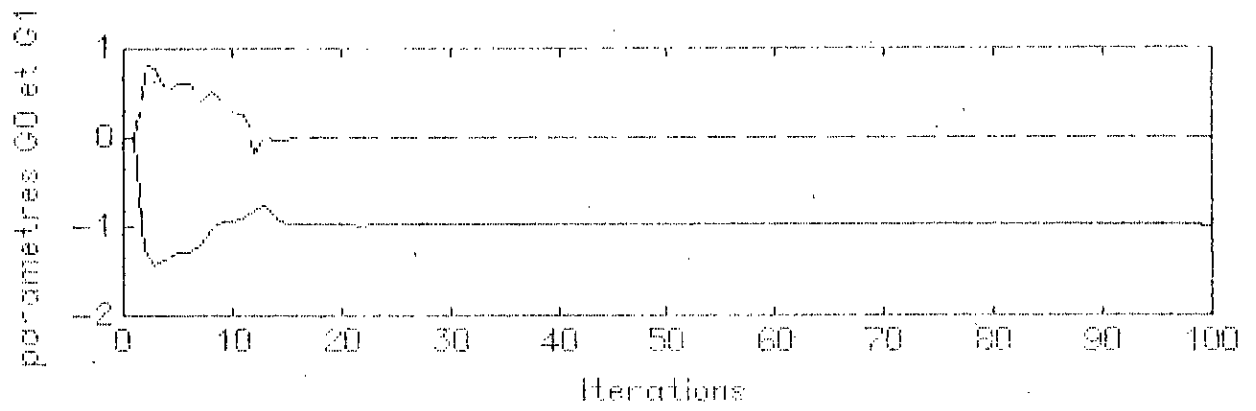
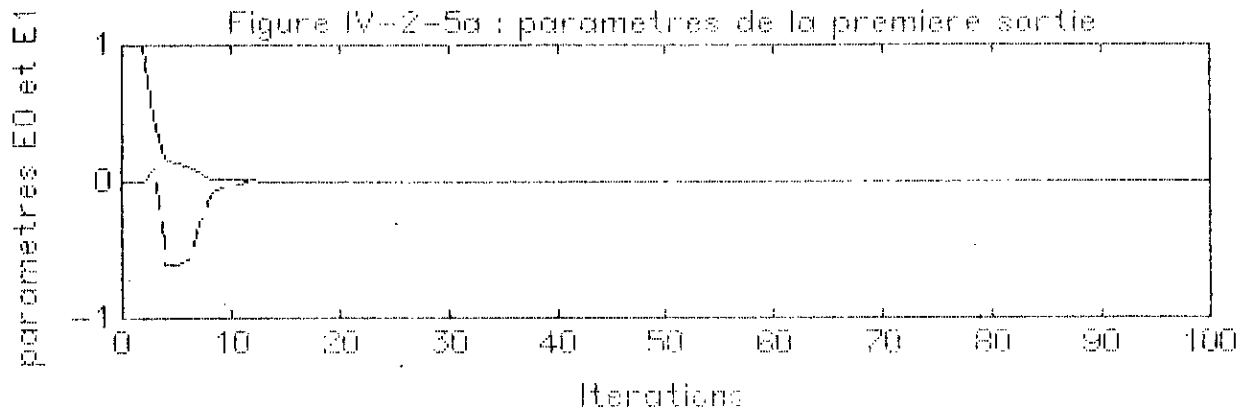
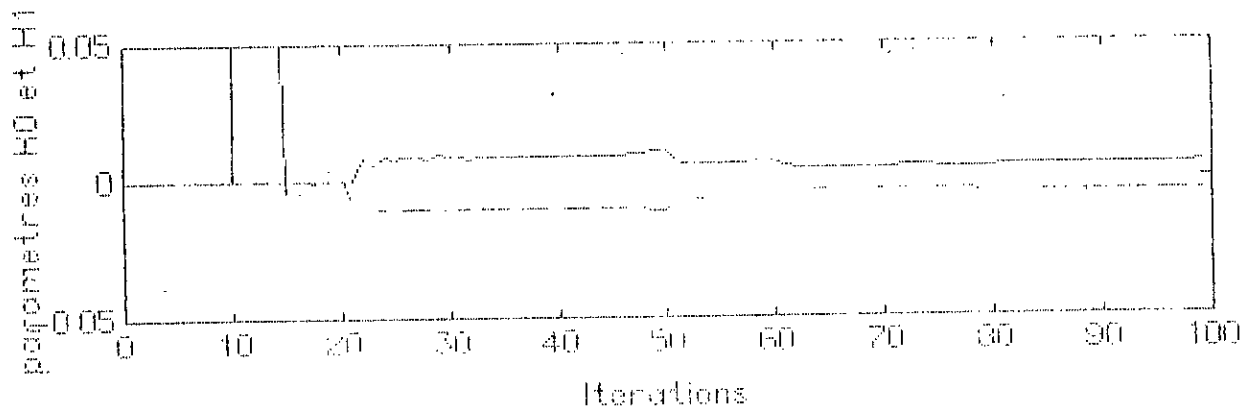
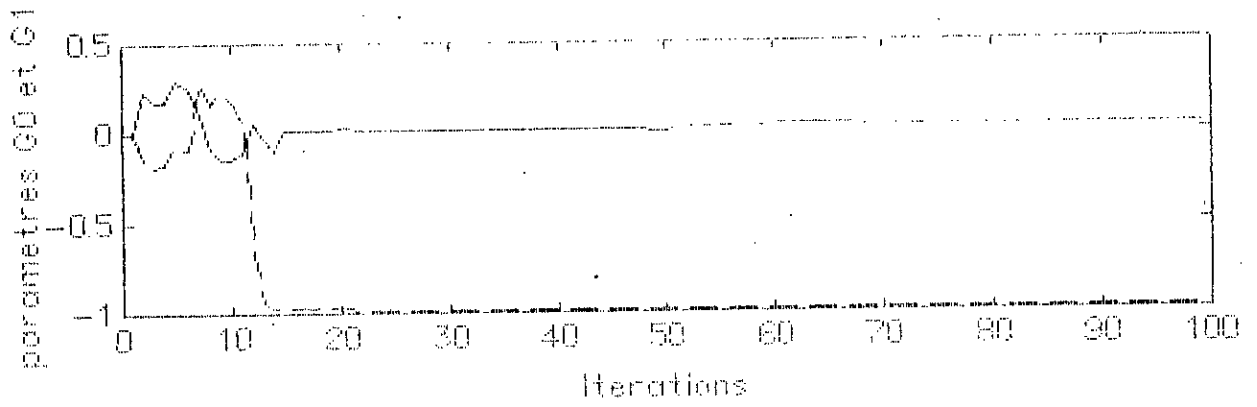
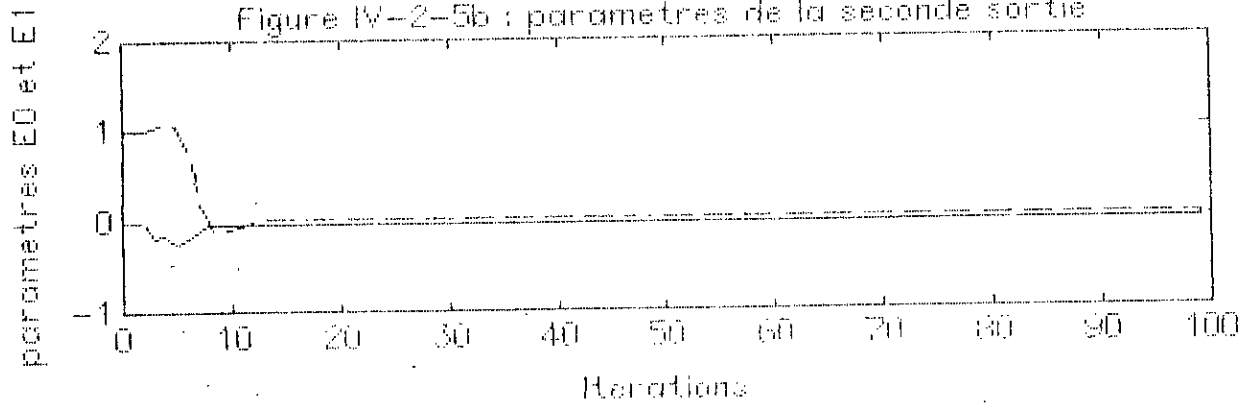


Figure IV-2-5b : parametres de la seconde sortie



CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail nous avons présenté l'approche directe de la commande adaptative multivariable.

En premier lieu nous avons développé deux stratégies de commande appliquées aux systèmes monovariabiles:

-Commande à erreur de prédiction minimale.

-Commande à variance minimale.

La première technique a montré, sous des conditions appropriées, que l'algorithme converge. Ce dernier est d'une structure très simple. Les résultats obtenus montrent l'existence d'une loi de commande stable réalisant une erreur de poursuite nulle. Cependant, le domaine de cet algorithme est très restreint. Son application se limite aux systèmes à phase minimale.

La seconde technique est plus générale vu qu'elle peut être appliquée au processus soumis à des perturbations aléatoires, ainsi qu'aux systèmes à phase non minimale, sous réserve du choix d'une bonne pondération.

En second lieu, nous avons considéré l'extension de ces deux stratégies à la commande des systèmes multivariables. Dans ce cas la connaissance à priori de la matrice interacteur est obligatoire. Le fait que sa détermination n'est pas évidente constitue un obstacle pour la commande de ces systèmes.

Dans la stratégie à erreur de prédiction minimale, nous avons considéré l'interacteur diagonale avec des éléments diagonaux différents. Le procédé doit être découplable par retour d'état, et à phase minimale. Les résultats obtenus montrent la

convergence de l'algorithme. Ce qui assure une erreur de poursuite nulle.

Dans la stratégie à variance minimale, on a considéré une extension simple vu que l'intéracteur est supposé égal à $q^d I$. L'application de cette stratégie nécessite que le modèle de perturbation soit à phase minimale (C instable). Dans le cas où le système est à phase non minimale, un choix adéquat de la pondération est déterminant pour la convergence de l'algorithme. Dans la cas des systèmes multivariables, ce choix est problématique, surtout lorsque le système est instable en boucle ouverte (A instable).

Le domaine de la commande adaptative multivariable des systèmes à phase non minimale et fortement couplés (possédant une matrice intéacteur non diagonale) demeure peut exploré. Son étude est à envisager.

ANNEXE A
FORME PREDICTIVE MONOVARIABLE

Considérons, le système donné par l'équation (III)

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{A.1})$$

En utilisant l'équation (III.4.4) dans (A.1) on obtient

$$A(q^{-1})P_D(q^{-1})\phi_y(t) = P_N(q^{-1})b(q^{-1})u(t-d) + P_N(q^{-1})C(q^{-1})e(t) \quad (\text{A.2})$$

Introduisons l'identité polynomiale suivante:

$$\frac{C(q^{-1})P_N(q^{-1})}{A(q^{-1})P_D(q^{-1})} = F(q^{-1}) + q^{-d} \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})P_D(q^{-1})} \quad (\text{A.3})$$

obtenue par la division du polynôme $P_N.C$ sur le polynôme $A.P_D$ jusqu'à l'ordre d .

$$F(q^{-1}) = f_0 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{d-1} q^{-(d-1)}$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n_d-1} q^{-(n_d-1)}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (A.2) par $F(q^{-1})$ on obtient:

$$F(q^{-1})A(q^{-1})P_D(q^{-1})\phi_y(t) = F(q^{-1})P_N(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) + F(q^{-1})P_N(q^{-1})C(q^{-1})e(t) \quad (\text{A.4})$$

En introduisant l'identité (A.3) dans l'équation (A.4) on aboutit

à :

$$[C(q^{-1})P_N(q^{-1}) - q^{-d}G(q^{-1})]\phi_y(t) = F(q^{-1})P_N(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) + F(q^{-1})P_N(q^{-1})C(q^{-1})e(t) \quad (\text{A.5})$$

En réarrangeant cette équation on obtient:

$$C(q^{-1})P_N(q^{-1})[\phi_y(t) - F(q^{-1})e(t)] = q^{-d}G(q^{-1})\phi_y(t) + F(q^{-1})P_N(q^{-1})B(q^{-1})u(t) \quad (\text{A.6})$$

 $\phi_y(t+d)$ sera donné par :

$$\phi_y(t+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})P_N(q^{-1})}\phi_y(t) + \frac{F(q^{-1})B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t) + F(q^{-1})e(t+d) \quad (\text{A.7})$$

Utilisons (III.4.4) l'équation (A.7) devient:

$$\phi_y(t+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})P_D(q^{-1})}y(t) + \frac{F(q^{-1})B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t) + F(q^{-1})e(t+d) \quad (\text{A.8})$$

Le prédicteur est alors donné par:

$$\hat{\phi}_y(t+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})P_D(q^{-1})}y(t) + \frac{F(q^{-1})B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t) \quad (\text{A.9})$$

ANNEXE B
FORME PREDICTIVE MULTIVARIABLE

Considérons l'équation (IV.4.1) décrivant le système multivariable:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{B.1})$$

Utilisant l'identité matricielle:

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (\text{B.2})$$

où

$$\begin{aligned} F(q^{-1}) &= I + F_1q^{-1} + \dots + F_{d-1}q^{-(d-1)} \\ G(q^{-1}) &= G_0 + G_1q^{-1} + \dots + G_{n_s-1}q^{-(n_s-1)} \end{aligned}$$

De plus, à cause de la non commutativité de la multiplication matricielle, nous introduisons deux matrices polynomiales $\tilde{F}(q)$ et $\tilde{G}(q)$ qui vérifient l'égalité [Borisson]:

$$\tilde{F}(q^{-1})G(q^{-1}) = \tilde{G}(q^{-1})F(q^{-1}) \quad (\text{B.3})$$

avec $\det \tilde{F}(q) = \det F(q)$ et $\tilde{F}(0) = I$

L'existence de \tilde{F} et de \tilde{G} n'est pas unique. Nous définissons la matrice polynomiale $\tilde{C}(q)$ par:

$$\tilde{C}(q^{-1}) = \tilde{F}(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}\tilde{G}(q^{-1}) \quad (\text{B.4})$$

Pour qui la relation:

$$\tilde{C}(q^{-1})F(q^{-1}) = \tilde{F}(q^{-1})C(q^{-1}) \quad (\text{B.5})$$

est vérifiée.

En prémultipliant (B.1) par $F^-(q)$ on obtient:

$$\tilde{F}(q^{-1})A(q^{-1})y(t) = q^{-d}\tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t) + \tilde{F}(q^{-1})C(q^{-1})e(t) \quad (B.6)$$

En introduisant (B.4) et (B.5) dans (B.6) on obtient:

$$[\tilde{C}(q^{-1}) - q^{-d}\tilde{G}(-1)]y(t) = q^{-d}\tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t) + \tilde{C}(q^{-1})F(q^{-1})e(t)$$

Nous réarrangeons cette équation de manière à obtenir la sortie à $t+d$

$$\tilde{C}(q^{-1})y(t+d) = \tilde{G}(q^{-1})y(t) + \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t) + \tilde{C}(q^{-1})F(q^{-1})e(t+d) \quad (B.7)$$

L'idée maintenant est de séparer les perturbations en deux parties, perturbations passées jusqu'à l'instant t et perturbations futures. Pour cela nous considérons l'inverse de $C^-(q)$

$$[\tilde{C}(q^{-1})]^{-1} = \frac{\text{adj } \tilde{C}(q^{-1})}{\det \tilde{C}(q^{-1})}$$

\det de $C^-(q)$ étant un polynôme d'ordre n et $\text{adj } C^-(q)$ est de degré inférieur à n , soit inférieur au degré de $\det C^-(q)$. D'où:

$$[\tilde{C}(q^{-1})]^{-1} = I + (\cdot)q^{-1} + (\cdot)q^{-2} + \dots$$

de (B.7)

$$y(t+d) = \tilde{C}^{-1}(q^{-1}) [\tilde{G}(q^{-1})y(t) + \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t)] + F(q^{-1})e(t+d)$$

$$= \tilde{C}^{-1}(q^{-1}) [\tilde{G}(q^{-1})y(t) + \tilde{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t)] + e(t+d) + \dots + F_{d-1}e(t+1)$$

(B.8)

Le prédicteur optimale à d pas est alors

$$\hat{y}(t+d/t) = \bar{C}(q^{-1}) [\bar{G}(q^{-1})y(t) + \bar{F}(q^{-1})B(q^{-1})u(t)] \quad (\text{B.9})$$

à cause de la forme de l'indice de performance, nous avons besoin de prédire $\hat{y}(t+j/t)$ lorsque $0 < j \leq d$. Le seul point de différence pour la prédiction avec (B.9) est de remplacer dans (B.1) $q^{(t-d)}$ par $q^{(t+j-d)}$. Le prédicteur à j pas sera alors:

$$\hat{y}(t+j/t) = \bar{C}(q^{-1}) [\bar{G}_j(q^{-1})y(t) + \bar{E}_j(q^{-1})u(t)] \quad , 0 < j \leq d \quad (\text{B.10})$$

$$= y(t+j) \quad , j \leq 0.$$

où

$$\begin{aligned} \bar{C}(q^{-1}) &= \bar{F}_j(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-j}G_j(q^{-1}) \\ \bar{E}_j(q^{-1}) &= \bar{F}_j(q^{-1})B(q^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

R E F E R E N C E S

- [11] K. J. ASTROM (1983)
 "Theory and applications of adaptive control. A survey"
 Automatica, vol 19, N°5, pp 471-486
- [12] K. J. ASTROM, B. WITTENMARK (1989)
 "Adaptive control"
 Addison-Wesley publishing company
- [13] K. J. ASTROM and B. WITTENMARK (1973)
 "on self tuning regulators"
 Automatica, vol 9, pp 185-199
- [14] M. M. BAYOUMI and L. MO (1989)
 "Consistent parameter estimation in adaptive control for MIMO systems"
 Int., J. control, vol 50 N° 3, pp 1001-1012
- [15] U. BORISSON (1979)
 "Self tuning regulator for a class of multivariable systems"
 Aut., 15 pp 209-215
- [16] V. V. CHALAM (1987)
 "Adaptive control systems"
 Marsel dekker, inc
- [17] D. W. CLARK, P. J. GAWTHROP and D. PHIL (1975)
 "self tuning controller"
 IEE, vol 122, N°9, pp 929-934
- [18] D. W. CLARK, P. J. GAWTHROP and D. PHIL (1979)
 "Self tuning controller "
 IEE, vol 126, N°6, pp 633-640
- [19] J. M. DION et LUC DUGARD (1986)
 "Commande adaptative multivariable: quelques résultats théoriques et pratiques"
 APII vol 20, N°4
- [10] J. M. DION, L. DUGARD, J. NGUYEN MINH (1990)
 "Quelques développements sur la commande adaptative multivariable"
 APII, 1990, 24 pp 145-170
- [11] L. DUGARD, G. C. GOODWIN and X. XIANYA (1984)
 "The role of the interactor matrix in multivariable stochastic adaptive control"
 Automatica, vol 20 N°5, pp 701-709

- [12] L. DUGARD and J.M. DION (1985)
 "Direct adaptive control for linear multivariable systems"
 Int. J. control vol 42 N° 6 pp 1251-1281
- [13] P.J. GAWTHROP, B.A.D. PHIL (1977)
 "Some interpretations of the self tuning controller"
 IEE vol 124 N° 10
- [14] G.C. GOODWIN, P.J. RAMADGE and P.E. CAINES (1980)
 "Discrete-time multivariable adaptive control"
 IEEE trans. Aut. control, 25 pp 449-456
- [15] G. GOODWIN, P.J. RAMADGE and P.E. CAINES (1981)
 "Discrete time stochastic adaptive control"
 SIAM. J. Control and optimisation Vol 19 N°6
- [16] G.C. GOODWIN and K.S. SIN (1984)
 "Adaptive filtering, prediction and control"
 New York Prentice Hall
- [17] K. ICHIKAWA (1987)
 "Multivariable adaptive control as a natural extension of SISO - adaptive control"
 INT. J. control, Vol 48, N°6, 1987
- [18] M. KINNAERT, R. HANUS (1987)
 Journal A., Vol 29 N°9
- [19] H.N. KOIVO (1980)
 "A multivariable self-tuning controller"
 Automatica, Vol 16, pp 351 - 358
- [20] I.D. LANDAU et D.L. DUGARD (1986)
 "Commande adaptative, aspects pratiques et théoriques"
 Masson, Paris.
- [21] I.D. LANDAU (1988)
 "Identification et commande des systèmes"
 Hermes, Paris
- [22] SHI JUN LANG, XUNG -YUAN GU and TIAN-YOUCHAI (1986)
 "A multivariable generalized self-tuning controller with decoupling design"
 IEEE, Trans. Auto. Control. Vol A.31 N°5
- [23] K. NAJIM (1982)
 "Commande adaptative des processus industriels"
 Masson, Paris

- [24] H. NICHOLSON and B.H. SWANICK (1981)
"Self-tuning and adaptive control : Theory and applications"
IEE CONTROL ENGINEERING SERIES
- [25] V. PERTERKA (1984)
"Predictor-based self-tuning control"
Automatica, Vol 20, N°1 pp 39-50
- [26] W.A. WOLOVICH et P.L. FALD (1976)
"Invariants and canonical forms under dynamic compensation"
SIAM. J. CONTROL OPTIMISATION Vol 14, N°6, pp 48--1008