



Ecole Nationale Polytechnique  
Département d'Electrotechnique  
Laboratoire de Recherche en Electrotechnique



Mémoire de  
**Master en Electrotechnique**

Présenté par  
**CHERAITIA Khadidja**

Intitulé

**Calcul numérique de machines asynchrones  
à rotors massifs en régime linéaire**

Soutenu le 17 juin 2015 à l'ENP

**Membres du Jury d'examen**

Président	A. Boubakeur	Professeur à l'ENP
Rapporteur	K. Bouhrara	Maître de Conférences à l'ENP
Examineurs	M.O. Mahmoudi	Professeur à l'ENP
	A. Mekhaldi	Professeur à l'ENP

**ENP 2015**

## ملخص

في هذا العمل نطور حساب التحليلي D2 من آلة غير متزامنة ذات دوار صلب سلس. ويستند هذا الحساب على طريقة فصل المتغيرات لتحديد الأداء تحت ظروف ثابتة. لقد تحققنا من صحة النتائج النظرية التي تم الحصول عليها تحت نفس الافتراضات والظروف، وذلك بمقارنتها مع نتائج رمز على أساس العناصر المحددة. درسنا أيضا تأثير الميزات الكهربائية المغناطيسية و الهندسية الدوار الصلب على الأداء.

الكلمات المفتاحية: نمذجة تحليلية، طريقة العناصر المنتهية، آلة غير متزامنة، دوار صلب، اخاديد.

## Résumé :

Dans ce travail on développe un calcul numérique 2D d'une machine asynchrone à rotor massif. Ce calcul est basé sur la méthode des éléments finis afin de déterminer les performances en régime. Nous avons également étudié l'influence des paramètres électriques, magnétiques et géométriques du rotor sur les performances.

.

Mots clés : Modélisation analytique, méthode des éléments finis, Moteur asynchrone, rotor massif, rainures.

## Abstract :

In this work we develop a numerical calculation of a 2D solid rotor induction motor. This calculation is based on the finite element method to determine the performance regime. We also studied the influence of electrical, magnetic and geometric parameters of rotor performance.

Keywords: Analytical modeling, finite element method, asynchronous motor, solid rotor

# Contenu

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>4</b>
<b>CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES MACHINES ASYNCHRONES A ROTORS MASSIFS.....</b>	<b>6</b>
<b>I.1 INTRODUCTION .....</b>	<b>6</b>
<b>I.2 ROTOR MASSIF LISSE .....</b>	<b>6</b>
<b>I.3 ROTOR MASSIF RAINURE .....</b>	<b>6</b>
<b>I.4 Approche de la modélisation des machines asynchrones .....</b>	<b>7</b>
<b>I.4.1 Elaboration des équations de Maxwell .....</b>	<b>7</b>
<b>I.4.2 Lois constitutives des milieux .....</b>	<b>8</b>
<b>I.4.3 Relations de passage.....</b>	<b>9</b>
<b>I.4.4 Formulation A-V des équations de Maxwell.....</b>	<b>9</b>
<b>I.5 CONCLUSION.....</b>	<b>11</b>
<b>CHAPITRE 2 : CALCUL NUMERIQUE 2D DE MOTEURS ASYNCHRONES A ROTORS MASSIFS.....</b>	<b>12</b>
<b>II.1 MODELISATION NUMERIQUE.....</b>	<b>12</b>
<b>II.2 DEMARCHE ELEMENTS FINIS .....</b>	<b>12</b>
<b>II.2.1 Discrétisation géométrique .....</b>	<b>13</b>
<b>II.2.2 Approximation nodale.....</b>	<b>13</b>
<b>II.2.3 Matrice.....</b>	<b>15</b>
<b>II.3.1.1 Assemblage .....</b>	<b>16</b>
<b>II.3.1.3 Utilisation d'un logiciel éléments finis (FEMM) .....</b>	<b>16</b>
<b>II.3.2 Modèle du moteur par éléments finis.....</b>	<b>16</b>
<b>II.3.3 Calcul des performances électromagnétiques d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse</b>	<b>16</b>
<b>II.3.2.1 Grandeurs locales .....</b>	<b>16</b>
<b>II.3.2.2 Grandeurs globales .....</b>	<b>17</b>

<b>II.3</b>	<b>CONCLUSION :</b> .....	<b>18</b>
<b>CHAPITRE III : CALCUL NUMERIQUE 2D DE MACHINES A ROTOR MASSIF LISSE ET RAINURE</b> .....		<b>19</b>
<b>III.1</b>	<b>DIMENSIONS DE LA MACHINE ETUDIEE</b> .....	<b>19</b>
<b>III.2</b>	<b>DISTRIBUTION DU CHAMP MAGNETIQUE ET DE LA DENSITE DES COURANTS D'INDUIT</b> .....	<b>19</b>
<b>III.3</b>	<b>INFLUENCE DU TYPE DU ROTOR SUR LES PERFORMANCES DE LA MACHINE</b> .....	<b>24</b>
<b>III.3.1</b>	<b>ROTOR MASSIF EN ALUMINIUM</b> .....	<b>25</b>
<b>III.3.2</b>	<b>Conditions à vide</b> .....	<b>25</b>
<b>III.3.3</b>	<b>Conditions en rotor bloqué</b> .....	<b>25</b>
<b>III.3.4</b>	<b>Conditions en charge</b> .....	<b>26</b>
<b>III.4</b>	<b>ROTOR MASSIF RAINURE</b> .....	<b>26</b>
<b>III.4.1</b>	<b>Conditions à vide</b> .....	<b>27</b>
<b>III.4.2</b>	<b>Conditions en rotor bloqué</b> .....	<b>28</b>
<b>III.4.3</b>	<b>Conditions en charge (g=1%)</b> .....	<b>29</b>
<b>III.5</b>	<b>INFLUENCE DE LA GEOMETRIE SUR LES PERFORMANCES DU MOTEUR</b> ..	<b>30</b>
<b>III.5.1</b>	<b>Influence des rainures</b> .....	<b>30</b>
<b>III.5.2</b>	<b>Influence du nombre de rainures</b> .....	<b>31</b>
<b>III.5.3</b>	<b>Influence de la largeur des rainures</b> .....	<b>32</b>
<b>III.5.4</b>	<b>Influence de la hauteur des rainures</b> .....	<b>33</b>
<b>III.6</b>	<b>CONCLUSION</b> .....	<b>34</b>
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....		<b>35</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....		<b>36</b>

## Introduction Générale

Les processus industriels constituent une part importante de la consommation énergétique. Les moteurs électriques représentent une partie relativement importante de l'énergie électrique consommée. L'amélioration du rendement des moteurs électriques est très importante en termes d'efficacité énergétique et en particulier en ce qui concerne les moteurs de type asynchrone qui constituent près de 80% du parc des moteurs installés. Parmi les moteurs asynchrones, on a ceux à rotors massifs de construction simple donc à moindre coût, robuste, compacts, rustiques, de bonne tenue mécanique toutefois son inconvénient principal réside, hormis l'effet thermique, au niveau d'un rendement et d'un facteur de puissance relativement bas [4], [19], [20]. Grâce au développement de la technologie des convertisseurs de puissance il devient aisé d'appliquer la variation de vitesse aux moteurs asynchrones à rotors massifs pour les applications à grandes vitesses [18]. Notre objectif, dans le cadre de ce mémoire est de déterminer les performances de machines asynchrones à rotors massifs en fonction de la composition du matériau et de la géométrie rotoriques (cas des rainures au rotor) pour permettre, lors de travaux futurs au niveau du Laboratoire de Recherche en Electrotechnique de l'ENP, de déterminer les paramètres sur lesquels il faut agir dans le but d'augmenter son rendement sachant déjà que les rainures contribuent à guider les lignes de flux tout en permettant de réduire la résistance rotorique. Notre travail consiste en un calcul de la machine asynchrone à rotor massif basé sur une résolution numérique 2D.

Le mémoire de notre master comporte quatre chapitres.

Au premier chapitre, nous exposons les généralités sur la modélisation des machines asynchrones en régime statique.

Au second chapitre, nous effectuons un descriptif de la méthode de résolution basée sur les éléments finis.

Au niveau du troisième chapitre, en premier lieu, nous effectuons un calcul numérique 2D en régime linéaire d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse. La résolution des équations de Maxwell, dans les différentes régions de la machine étudiée, est effectuée en utilisant le code gratuit FEMM.

En second lieu, nous effectuons les mêmes calculs numériques mais en changeant dans une première étape les caractéristiques électriques et magnétiques du matériau rotorique.

En dernière étape, nous effectuons le calcul numérique d'une machine asynchrone à rotor massif rainuré en comparant les performances obtenus avec le cas d'un rotor massif lisse. Les résultats numériques obtenus sont aussi comparés à ceux issus du modèle analytique établi [22].

# Chapitre 1 : Généralités sur les machines asynchrones à rotors massifs

## I.1 Introduction

Les machines asynchrones s'emploient fortement dans l'industrie pour de nombreuses raisons qui sont principalement, la robustesse, la facilité de mise en œuvre et le faible coût.

La modélisation des convertisseurs électromagnétiques fait appel à la résolution des équations de Maxwell associées aux conditions d'interface et aux conditions aux limites. Suivant le type de problème et l'objectif recherché, la résolution de ces équations nécessite l'emploi de méthodes analytiques et/ou des méthodes numériques.

## I.2 Rotor massif lisse

Dans les machines asynchrones, les courants sont engendrés dans le rotor massif, ces courants induits par la variation du flux magnétique au niveau du rotor sont nommés « courants de Foucault », ces courants tourbillonnaires ont la particularité de s'annuler avant d'atteindre les extrémités du rotor.

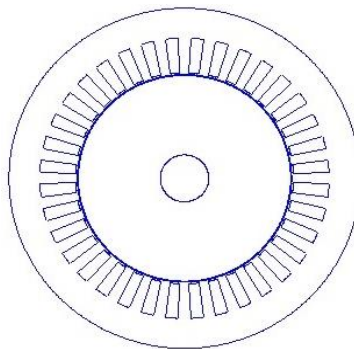


Figure 1 : Géométrie de la machine asynchrone à rotor massif lisse

## I.3 Rotor massif rainuré

La présence de rainures permet de mieux guider les courants induits parallèlement à l'axe de rotation, et ainsi diminuer les effets d'extrémité tout en augmentant la profondeur de pénétration des lignes de champ dans l'acier rotorique ainsi les pertes superficielles sont réduites, le facteur de puissance et le rendement sont améliorés [9], [10], [11]

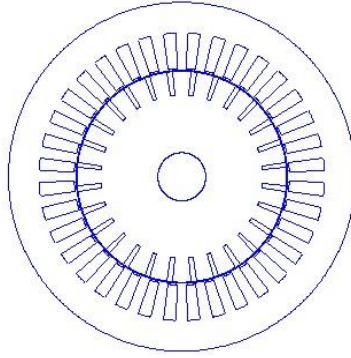


Figure 2 : Structure du rotor rainuré d'une machine asynchrone

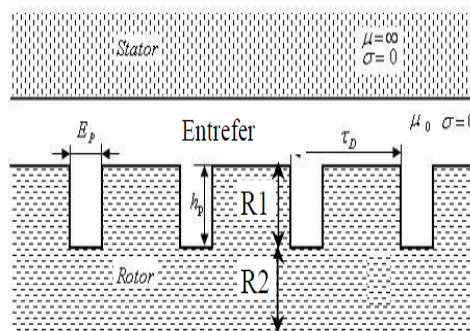


Figure 3 : Coupe d'un rotor rainuré d'une machine asynchrone

#### I.4 Approche de la modélisation des machines asynchrones

Pour modéliser des systèmes électromagnétiques on est amené à résoudre un système d'équations différentielles spatio-temporelles. En ayant recours à une discrétisation spatiale de type éléments finis et une discrétisation temporelle de type pas-à-pas, on aboutit à un système d'équations algébriques, dont les inconnues sont les valeurs nodales du potentiel vecteur et les courants.

##### I.4.1 Elaboration des équations de Maxwell

Dans les milieux continus, les phénomènes électromagnétiques sont décrits par quatre fonctions qui dépendent du temps et des coordonnées d'espace, à valeur dans  $R^3$ :

- Le champ électrique  $\vec{E}$  qui est de la dimension d'une force par unité de charge ou  $V.m^{-1}$  (Volts par mètre),
- L'induction magnétique  $\vec{B}$  qui est de la dimension d'une force par unité de courant ou T (Tesla),
- Le champ magnétique  $\vec{H}$ , en  $A.m^{-1}$  (Ampères par mètre),



Les équations de Maxwell, dans un référentiel lié au milieu étudié, sont comme suit :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I.2})$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

Où  $\rho$  et  $\vec{J}$  représentent la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant volumique [2].

En électrotechnique les fréquences mises en jeu sont de quelques Hz jusqu'à quelques dizaines de kHz, dans ces conditions l'hypothèse de quasi-stationnarité est valide et les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction. [2] Les équations de Maxwell deviennent :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.4})$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{I.6})$$

#### I.4.2 Lois constitutives des milieux

Les relations de Maxwell sont insuffisantes pour caractériser entièrement les champs électromagnétiques. Ce système doit être complété par l'ajout de relations décrivant les propriétés du milieu dans lequel les champs évoluent. Celle-ci sont appelées relations constitutives.

- Milieux magnétiques de perméabilité relative  $\mu_r$  :

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{I.7})$$

- Milieux conducteurs de conductivité électrique  $\sigma$  :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{I.8})$$

Où  $\vec{B}_r$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_r$ ,  $\sigma$  et  $\vec{J}_s$  représentent respectivement le vecteur induction magnétique rémanente, la perméabilité magnétique du vide, la perméabilité magnétique relative, la conductivité électrique et le vecteur densité de courant imposée par une source extérieure.

### I.4.3 Relations de passage

Les relations précédentes gouvernent l'évolution des grandeurs électromagnétiques dans chaque milieu continu, toutefois il est nécessaire d'y ajouter les règles qui décrivent le passage d'un milieu à l'autre (notés respectivement 1 et 2) de caractéristiques différentes.

Les relations de passage s'écrivent alors :

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j} \quad (\text{I.9})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (\text{I.10})$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (\text{I.11})$$

- L'équation (I.9) représente la discontinuité du champ magnétique tangentiel au passage d'une interface contenant une densité de courant surfacique  $\vec{j}$ .
- L'équation (I.10) traduit la continuité de l'induction magnétique normale au passage d'une interface séparant deux milieux de perméabilités magnétiques différentes.
- L'équation (I.11) indique la conservation du champ électrique tangentielle au passage d'une interface séparant deux milieux de conductivités électriques différentes. [2]

Où  $\vec{n}$  représente le vecteur normal sortant vis-à-vis à l'interface considérée.

### I.4.4 Formulation A-V des équations de Maxwell

L'équation (I.5) traduit le fait que le flux de l'induction est conservatif ; l'induction magnétique  $\vec{B}$  est alors le rotationnel d'un potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$ .

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}) \quad (\text{I.12})$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.13})$$

Où  $\vec{A}$  et V représentent le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique

Les équations précédentes mènent à :

$$\text{rot}(v \text{rot}(\vec{A})) = \vec{j} + \text{rot}(v \vec{B}_r) \quad (\text{I.14})$$

$$\text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (\text{I.15})$$

$$\vec{j} = \vec{j}_s + \sigma \left( -\text{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (\text{I.16})$$

Où  $\nu$  représente la réductivité magnétique qui est l'inverse de la perméabilité magnétique.

Les conditions de passage (I.9), (I.10) et (I.11) peuvent être exprimées en termes de potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  et scalaire  $V$  comme suit :

$$\vec{A}_1 = \vec{A}_2 \quad (\text{I.17})$$

$$-\left(\nu_{r1} \cdot \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} + \vec{n} \times \vec{B}_{1r}\right) + \left(\nu_{r2} \cdot \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} + \vec{n} \times \vec{B}_{2r}\right) = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{I.18})$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_1 - \vec{j}_2) = \vec{0} \quad (\text{I.19})$$

$$V_1 = V_2 \quad (\text{I.20})$$

Il est à noter que la machine étant composée de différents matériaux, on distingue deux cas:

- Les milieux dont la densité de courant volumique est imposée par les sources extérieures.

Comme dans le cas des conducteurs du stator, on a alors  $\vec{j} = \vec{j}_s$ .

- Les milieux dont la densité de courant volumique est induite par la variation du champ magnétique. Comme dans le cas des milieux massifs du rotor on a alors  $\vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . [2]

Les potentiels  $\vec{A}$  et  $V$  n'étant pas uniques, on effectue une transformation de jauge :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}(\varphi) \quad (\text{I.21})$$

$$V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\text{I.22})$$

Dans le but d'unifier la solution et d'assurer la stabilité de la convergence, on ajoute une condition supplémentaire qui est la jauge de Coulomb. Cette condition doit être vérifiée en tout point du milieu et sur ses frontières.

$$\text{div}(\vec{A}) = 0 \quad (\text{I.23})$$

Cette jauge permet de découpler partiellement  $\vec{A}$  et  $V$  lorsque les conductivités des matériaux de la machine sont constantes ; de l'équation (I.17) on trouve :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{I.24})$$

## I.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les aspects généraux de la modélisation des machines asynchrones, consistant particulièrement à résoudre les équations de Maxwell. Par ailleurs, lors de cette section on a établi les différents types de rotors des machines asynchrones. Nous nous intéressons au rotor massif.

## Chapitre 2 : Calcul numérique 2D de Moteurs Asynchrones à rotors massifs

### II.1 Modélisation numérique

Depuis une trentaine d'années, dans le domaine de l'électrotechnique, de nombreux travaux ont contribué à la mise au point de la méthode des éléments finis qui demeure la méthode numérique universelle. Aujourd'hui, cette méthode est couramment utilisée pour la modélisation des systèmes électromagnétiques. Elle permet la résolution des équations de Maxwell en tenant compte de la géométrie réelle des structures et des propriétés des matériaux. Dans le domaine de l'électrotechnique, elle permet de simuler, avec précision, des dispositifs en 2D ou en 3D.

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul numérique qui, ayant un profond caractère plus physique qu'abstrait, a été inventée plutôt par les ingénieurs que par les mathématiciens. Cette méthode a été appliquée pour la première fois dans des problèmes liés à l'analyse des contraintes et depuis, elle a été étendue. [22]

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation par une des méthodes d'approximation en physique (Méthode des résidus pondérés...) [23]. Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs, et que nous allons maintenant l'aborder.

### II.2 Démarche éléments finis

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines ;
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine ;
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- Assemblage des matrices élémentaires ;
- Prise en compte des conditions aux limites ;
- Résolution du système d'équations.

### II.2.1 Discrétisation géométrique

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines. Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune. Pour notre cas le domaine d'étude est subdivisé en petits éléments de forme triangulaire et chaque triangle est repéré par ces trois sommets. Comme nous l'avons déjà indiqué, la méthode des éléments finis repose sur une discrétisation du domaine d'analyse selon un maillage. Dans notre cas il s'agit d'un maillage triangulaire.

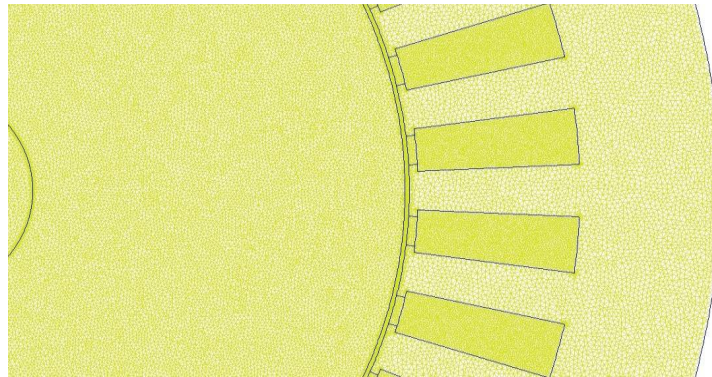


Figure 4: Maillage du moteur étudié

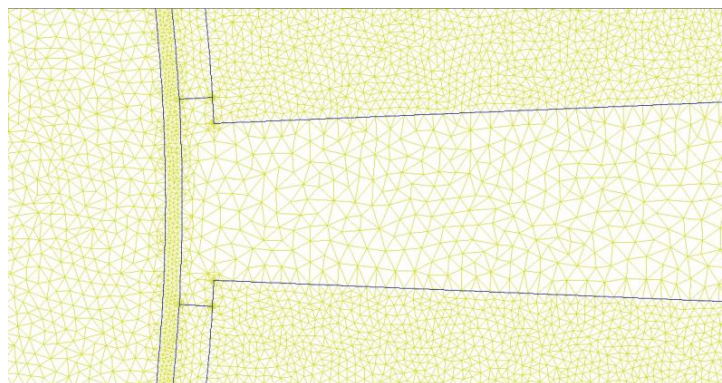


Figure 5: Zoom sur le maillage

### II.2.2 Approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation du champ des variables par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

L'interpolation nodale est construite à partir d'une approximation générale ; en général c'est une base polynomiale.

Les Bases polynomiales complètes peuvent être de :

- Une dimension :
  - Linéaire (1, x) : deux variables
  - Quadratique (1, x, x<sup>2</sup>) : trois variables
- Deux dimensions :
  - Linéaire (1, x, y) : trois variables
  - Quadratique (1, x, y, x<sup>2</sup>, x y, y<sup>2</sup>) : six variables
- Trois dimensions :
  - Linéaire (1, x, y, z) : quatre variables
  - Quadratique (1, x, y, z, x<sup>2</sup>, x y, y<sup>2</sup>, x z, z<sup>2</sup>, y z) : dix variable

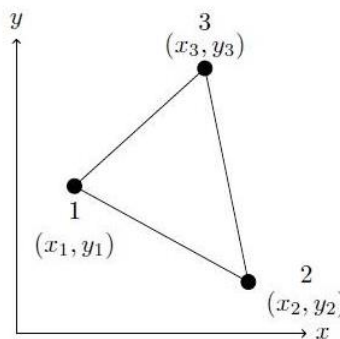


Figure 6 : Géométrie d'un élément fini

Les maillages du stator et du rotor sont indépendants l'un de l'autre et ne coïncident pas dans l'entrefer. Le potentiel vecteur magnétique A est approché par un polynôme du premier degré sous la forme :

$$A(x, y, t) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (\text{II.1})$$

Ou  $a_1, a_2, a_3$  sont des coefficients qui dépendent des coordonnées des sommets du triangle et des potentiels correspondants. L'induction à l'intérieur de chaque élément est constante, ainsi que la perméabilité magnétique.

Le potentiel en tout point de l'élément est parfaitement défini à partir des valeurs des potentiels en des trois sommets. [2]

$$\tilde{A}(x, y, t) = \sum_1^3 N_i(x, y)A_i(t) \quad (\text{II.2})$$

### II.2.3 Matrice

Cette opération traduit simplement que la forme quadratique associée à l'ensemble du domaine est la somme des formes quadratiques des sous-domaines. Elle consiste à « ranger » dans une matrice globale, les termes des matrices élémentaires. Sous forme matricielle la relation (II.2) peut s'écrire :

$$\tilde{A} = \langle N \rangle A_e \quad (\text{II.3})$$

Ou  $\langle N \rangle$  est un vecteur ligne dont les composantes sont les fonctions d'interpolation  $N_i (i = 1, 2, 3)$  et  $\{A_e\}$  est un vecteur colonne dont les composantes sont les potentiels vecteurs magnétiques aux nœuds  $A_i (i = 1, 2, 3)$ .

Entre deux éléments adjacents, nous ajoutons aux fonctions de forme les conditions suivantes et ceci dans le but d'assurer la continuité de la variable d'étude qui est dans notre cas le potentiel vecteur magnétique.

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i = j) \\ 0 & \text{si } (i \neq j) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Ces fonctions s'écrivent sous la forme suivante :

$$N_i = \frac{P_i + Q_i x + R_i y}{2\Delta_e} \quad (\text{II.5})$$

Les paramètres  $P_i$   $Q_i$   $R_i$  et  $\Delta_e$  sont des fonctions des coordonnées des nœuds.

$$P_i = x_k y_l - x_l y_k \quad (\text{II.6})$$

$$Q_i = y_k - y_l \quad (\text{II.7})$$

$$\Delta_e = \frac{1}{2} (P_i + P_k + P_l) \quad (\text{II.8})$$

Ou  $\Delta_e$  représente la surface de l'élément  $\langle e \rangle$ .

On obtient les composantes du gradient du potentiel vecteur magnétique.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial A}{\partial x} \\ \frac{\partial A}{\partial y} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

$$[D] = \frac{1}{2\Delta_e} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

L'équation de diffusion du champ magnétique sous forme matricielle s'écrit :

$$\sum_e \nu_e [S_e] \{A(t)\}_e + \sigma_e [T_e] \left\{ \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\}_e - [Q]_e \{J_e\} = 0 \quad (\text{II.11})$$



Ou  $e$  se réfère à un élément fini donné, et les matrices  $[S_e]$ ,  $[T_e]$  et  $[D_e]$  sont données respectivement par leurs éléments comme suit :

$$[S_e] = \Delta_e [D]^T [D] \quad (\text{II.12})$$

$$[T_e] = \frac{\Delta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

$$[Q_e] = \frac{\Delta_e}{3} [1 \ 1 \ 1] \quad (\text{II.14})$$

### II.3.1.1 Assemblage

Les règles d'assemblage sont définies par la relation :

$$D \approx \sum_{e=1}^{n_e} D_e \quad (\text{II.15})$$

### II.3.1.2 Conditions aux limites

Afin d'assurer l'unicité de la solution, des conditions aux limites sont associées aux champs sur le domaine d'étude. Ces conditions sont définies sur la frontière  $\Gamma$  du domaine qui peut se décomposer en deux parties : la frontière  $\Gamma_b$  relative à l'induction magnétique et la frontière  $\Gamma_h$  relative au champ magnétique.

### II.3.1.3 Utilisation d'un logiciel éléments finis (FEMM)

Un programme général doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Pour notre cas on utilisera le logiciel FEMM (Finite Element Method Magnetics) pour résoudre des problèmes de magnétostatique et d'électromagnétisme.

## II.3.2 Modèle du moteur par éléments finis

Considérons le moteur asynchrone à rotor massif à deux paires de pole alimenté par une source de courant triphasé équilibré de pulsation  $\omega$ , tournant à la vitesse angulaire supposée constante  $\Omega$ .

### II.3.3 Calcul des performances électromagnétiques d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse

#### II.3.2.1 Grandeurs locales

##### II.3.2.1.1 Induction magnétique

On définit les deux composantes de l'induction magnétique  $B_x$  et  $B_y$  du vecteur magnétique  $\vec{B}$  qui peuvent être déterminées en simple dérivation du potentiel vecteur comme suit :

$$B_x = \frac{\sum_{i=1}^3 R_i A_i}{2\Delta_i} \quad (\text{II.16})$$

$$B_y = \frac{\sum_{i=1}^3 Q_i A_i}{2\Delta_i} \quad (\text{II.17})$$

Le module B du vecteur induction magnétique est constant sur toute la surface de l'élément.

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (\text{II.18})$$

### II.3.2.2 Grandeurs globales

#### II.3.2.2.1 Flux magnétique

La détermination du flux embrassé par phase, à un instant t, est évaluée en évaluant en premier lieu le flux embrassé par encoche :

$$\Phi_e = L_u \iint_{S_{enc}} A(t) N_c dx dy \quad (\text{II.19})$$

Où  $N_c$  est le nombre du conducteurs par encoche, et  $S_{enc}$  est la section de l'encoche.

Le calcul de l'intégrale est appliqué à tous les éléments appartenant à l'encoche en question :

$$\Phi_e(t) = L_u \sum_{e \in \text{encoche}} n_e A_{moy} \Delta_e \quad (\text{II.20})$$

Où  $A_{moy}$  est la valeur moyenne du potentiel vecteur magnétique, soit :

$$A_{moy}(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 A_i \quad (\text{II.21})$$

Le flux embrassé par phase est obtenu en sommant les flux embrassés par les encoches aller et retour :

$$\Psi(t) = \sum_{\text{encoche aller}} \Phi_e - \sum_{\text{enches retour}} \Phi_e \quad (\text{II.22})$$

#### II.3.2.2.2 Couple électromagnétique

On peut déterminer le couple électromagnétique par plusieurs méthodes :

- Par la puissance :

Dans ce cas le calcul du couple électromagnétique se fait par la puissance transmise à travers l'entrefer

$$T_{em} = \frac{P_{Trans}}{\Omega} \quad (\text{II.23})$$

- Par le tenseur de Maxwell :

Pour ce cas on doit passer par le tenseur de Maxwell et pour cela on doit choisir une surface cylindrique C de rayon  $R_g$  situé dans l'entrefer de la machine :

$$II.2 T_{em} = \frac{R_g L_u}{\mu_0} \int_C \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial \theta} d\theta \quad (II.24)$$

### II.3 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons vu deux approches différentes pour le calcul des performances électromagnétique d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse.

La première approche est la méthode analytique consistant en la résolution des équations de Maxwell en coordonnées polaires. En assumant plusieurs hypothèses simplificatrices. Cette approche est rapide et efficace pour les géométries simples et le fonctionnement en régime linéaire.

La deuxième approche consiste en la méthode numérique par éléments finis en utilisant le logiciel FEMM. Cette méthode permet de prendre en compte des phénomènes physiques spécifiques au moteur étudié et peut être appliquée à toute géométrie mais en contrepartie le temps de calcul est important

## Chapitre III : Calcul numérique 2D de machines à rotor massif lisse et rainuré

### III.1 Dimensions de la machine étudiée

La machine utilisée possède un stator de forme cylindrique, à l'origine il est fabriqué pour un moteur asynchrone à cage d'écureuil commercialisé par ELECTRO-INDUSTRIELS à Fréha (Azazga). Les différents paramètres qui caractérisent cette machine sont résumés dans le Tableau 1:

Tableau 1: Dimensions du moteur étudié

Paramètres	Symboles	Unité	Valeur
Rayon du noyau	$R_1$	mm	10
Rayon externe du rotor	$R_2$	mm	43.85
Rayon d'alésage du stator	$R_3$	mm	44.25
Rayon externe d'encoches statoriques	$r_4$	mm	59.765
Rayon interne d'encoches statoriques	$r_3$	mm	45.05
Entrefer	$e$	mm	0.4
Rayon externe du stator	$R_{ext}$	mm	72.5
Longueur de la machine	$L_u$	mm	110
Largeur d'encoche	$c$	°	5,2
Largeur d'isthme d'encoche	$d$	°	3,6
Nombre d'encoches	$N_e$	/	36
Nombre de conducteurs par encoche	$N_c$	/	37
Perméabilité relative du rotor	$\mu_{r1}$	/	200
Perméabilité relative du noyau	$\mu_{r2}$	/	30
Conductivité du rotor	$\sigma_1$	S/m	$5,35 \cdot 10^6$
Conductivité du noyau	$\sigma_2$	S/m	$1,5 \cdot 10^6$
Courant maximum par phase	$I_m$	A	5
Tension maximum par phase	$V_m$	V	220
Fréquence	$f$	Hz	50
Résistance au stator	$R_s$	$\Omega$	3,4
Nombre de paire de pôles	$p$	/	2

### III.2 Distribution du champ magnétique et de la densité des courants d'induit

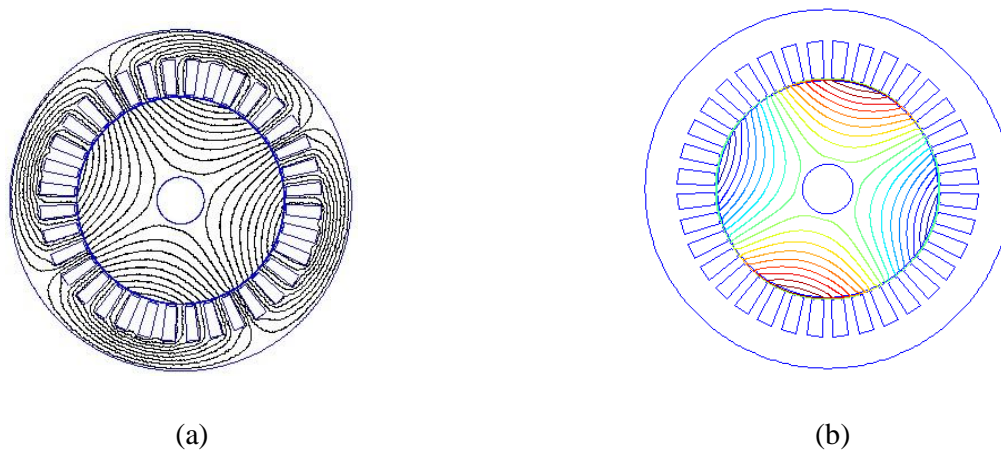
#### III.3.1 Conditions à vide

Au synchronisme, la vitesse de rotation du rotor approche celle des courants statoriques, la variation de l'induction étant nulle la production de courant induit cesse, on constate alors une densité de courant approximant du zéro (figure 20). Toutefois la fréquence de rotation du

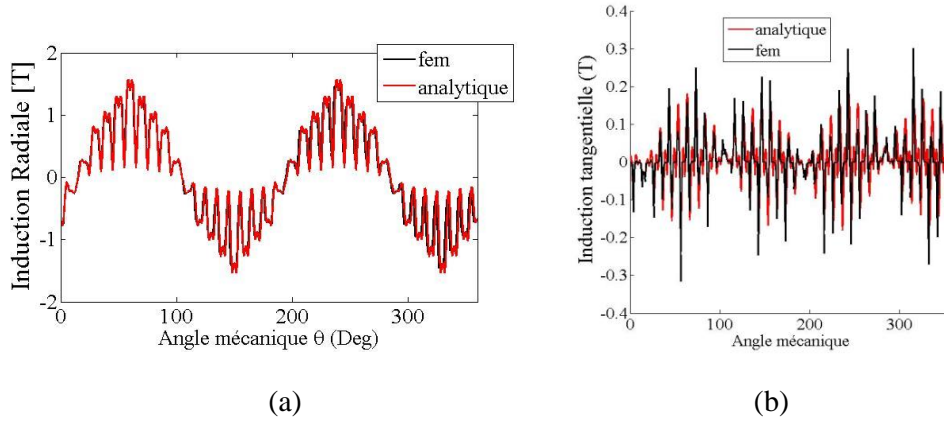
rotor étant relativement faible, la profondeur de pénétration des lignes d'induction est importante et atteint presque le noyau.

Nous avons tracé les graphes des composantes radiales et tangentielles de l'induction magnétique pour une valeur de rayon 44.05 mm c'est-à-dire au milieu de l'entrefer. On constate que l'induction magnétique tangentielle est faible par rapport à la composante radiale. L'induction magnétique radiale est nulle pour  $(\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4 \text{ et } 7\pi/4)$  correspondant à la ligne neutre entre chaque deux pôles successifs par contre la composante tangentielle de l'induction est insignifiante à ces positions-là. Pour chaque pôle (par exemple le pôle nord de 0 à  $\pi/2$ ) on observe les 9 pics de l'induction magnétique radiales dus aux 9 encoches par pôle, ceci représente l'effet de denture.

Les figures 7 indiquent bien que les lignes de champ ont le même sens et la même pénétration au rotor par les deux méthodes. En ce qui concerne les formes d'ondes des composantes de l'induction tangentielle et radiale et la densité de courant (figures 8 et 9) on observe une parfaite concordance des deux méthodes analytique et numérique (fem).



Figures 7 : Lignes de champ en conditions à vide  $g=0.0001$  par la méthode numérique fem (a) et analytique (b)



Figures 8: Composantes de l'induction radiale (a) et tangentielle (b) au milieu de l'entrefer en conditions à vide

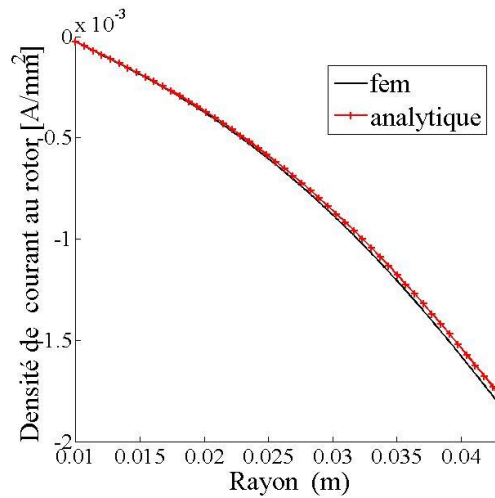
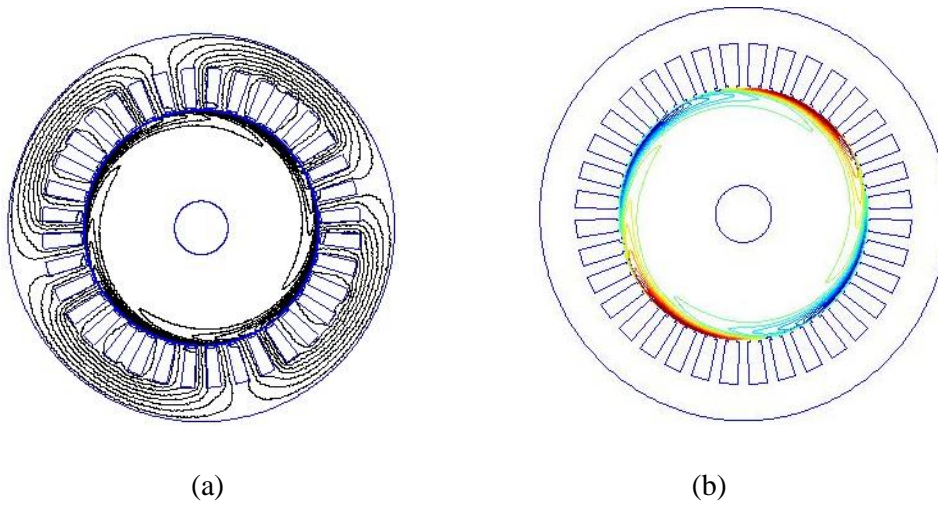


Figure 9: Densité de courant en conditions à vide

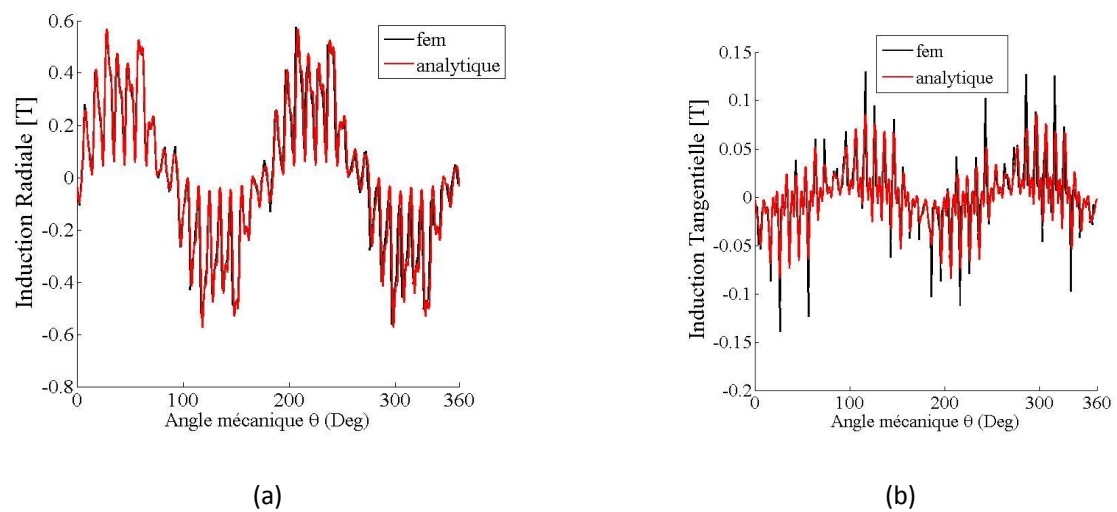
### III.3.2 Conditions de rotor bloqué ( $g=1$ )

Au démarrage, en cause de l'effet de peau les lignes d'induction se limitent à la surface du rotor avec une pénétration relativement faible qui approxime quelques micromètres (figure 10). Le rotor étant bloqué, la variation d'induction magnétique conduit à l'induction de courants de Foucault d'amplitude maximale et ainsi une densité de courant relativement élevée. Néanmoins, les valeurs des composantes de l'induction sont inférieures à ceux obtenues à vide. On constate particulièrement le décroissement de l'induction radiale.

Au niveau des formes d'ondes des inductions radiales et tangentielles (figure 11) on constate une concordance entre les résultats analytiques et numériques, de même pour la densité de courant (figure 12).



Figures 10: Lignes de champ en condition à rotor bloqué par la méthode numérique fem (a) et la méthode analytique (b)



Figures 11: Composantes de l'induction magnétique radiale (a) et tangentielle (b) au milieu de l'entrefer en conditions rotor bloqué

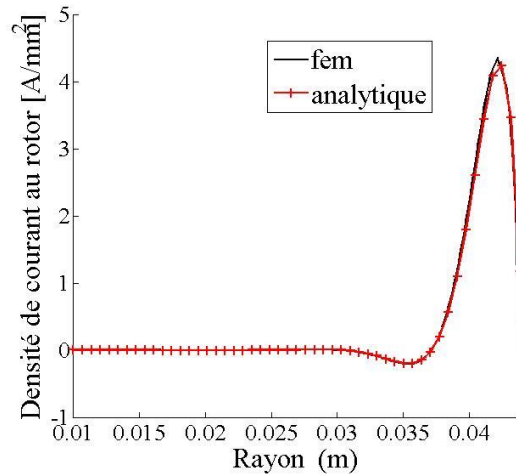
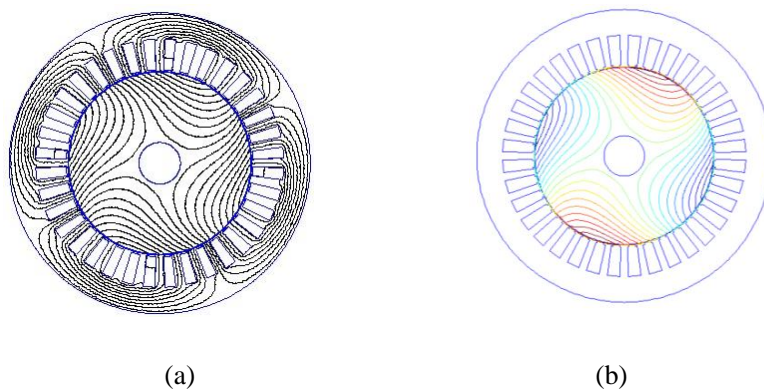


Figure 12: densité de courant en conditions rotor bloqué

### III.3.3 Conditions en charge pour $g=0.01$

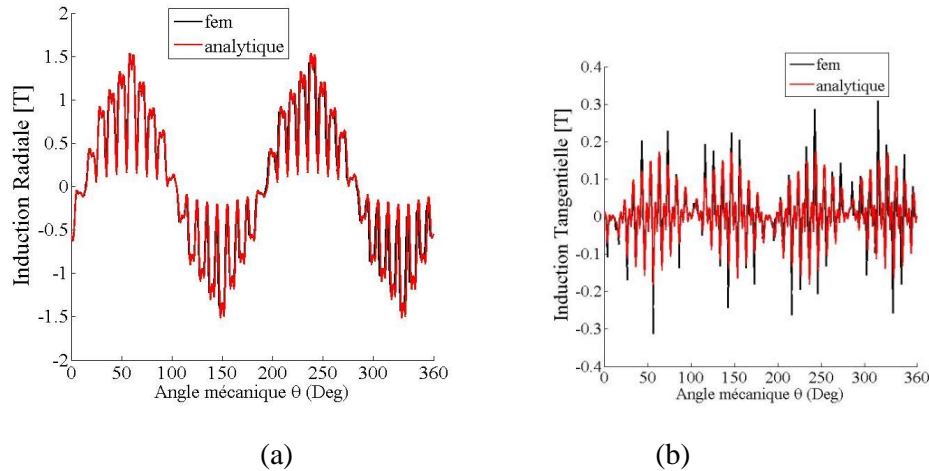
En régime linéaire le glissement étant faible la fréquence de rotation du rotor aussi on a alors une profondeur de pénétration considérable, et la densité de courant n'est pas négligeable néanmoins ces résultats restent inférieure à ceux à vide. Pour ce qui des résultats numériques et analytiques il y'a une parfaite concordance en ce qui s'agit de la densité de courant et des composantes radiales et tangentielles de l'induction.

En fonctionnement en charge, lorsque le glissement diminue la profondeur de pénétration des lignes de champ s'accroît, la densité de courant diminue et l'amplitude de l'induction magnétique radiale augmente.



Figures 13: Lignes de champ en charge ( $g=1\%$ ) par la méthode numérique fem (a) et analytique (b)





Figures 14: Composantes de l'induction radiale (a) et tangentielle (b) en charge ( $g=1\%$ ) au milieu de l'entrefer

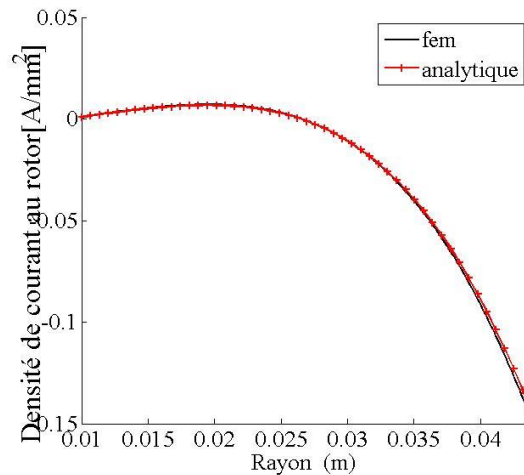


Figure 15: Densité de courant en charge ( $g=1\%$ )

### III.3 Influence du type du rotor sur les performances de la machine

Le moteur asynchrone à rotor massif a fait l'objet de plusieurs études. Ces dernières indiquent un couple de démarrage maximal mais qui se dégrade aux faibles glissements pour des raisons de caractéristiques électriques et magnétiques. A cela s'ajoute des facteurs géométriques du rotor qui influencent fortement sur les performances de ce moteur.

Dans ce but nous établirons une comparaison des performances électromagnétiques entre le moteur en question à rotor en Acier et à rotor en Aluminium. En deuxième lieu, nous déterminerons les performances électromagnétiques d'un moteur asynchrone à rotor massif

rainuré par la méthode numérique et nous établirons une comparaison des performances de ce moteur avec le moteur à rotor massif lisse.

### III.3.1 Rotor massif en Aluminium

On compare les résultats obtenus précédemment avec un rotor en Aluminium ayant les caractéristiques électriques et magnétiques suivantes :

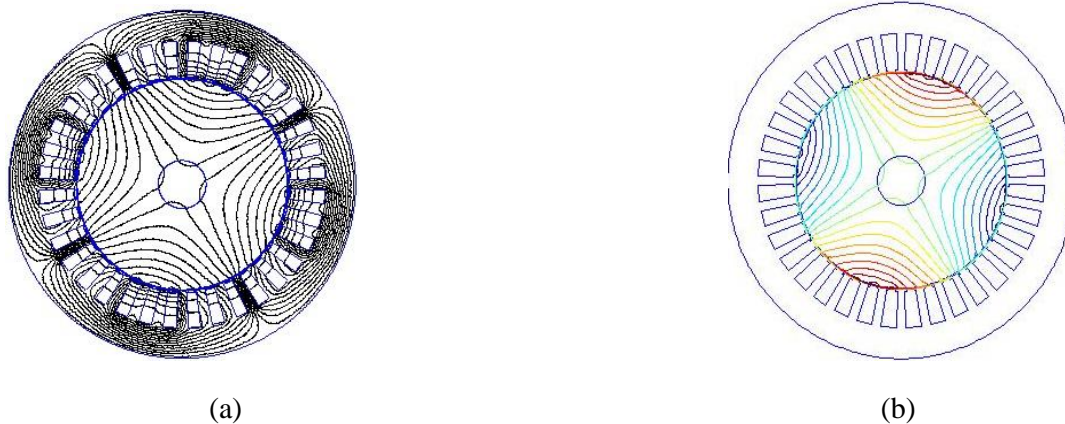
$$\sigma = 28.5 \text{ MS.m}^{-1}$$

$$\mu_r = 1$$

Dans la méthode analytique nous avons utilisé 78,3 et 3 pour les harmoniques n, m et k, et pour la méthode numérique nous avons utilisé 153130 nœuds et 305358 éléments.

### III.3.2 Conditions à vide

Au synchronisme, les lignes de champ pénètrent profondément le rotor et en grand nombre. Les méthodes analytiques et numériques présentent la même allure pour les lignes de champ (figures 16)



Figures 16: lignes de champ à vide

### III.3.3 Conditions en rotor bloqué

Au démarrage la profondeur de pénétration des lignes de champ en utilisant un rotor en Aluminium est plus élevée qu'en utilisant un rotor en Acier, ceci est dû aux caractéristiques électromagnétiques du matériau. Il y'a une cohérence entre les deux méthodes analytique et numérique pour les résultats : lignes de champ (Figures 17)

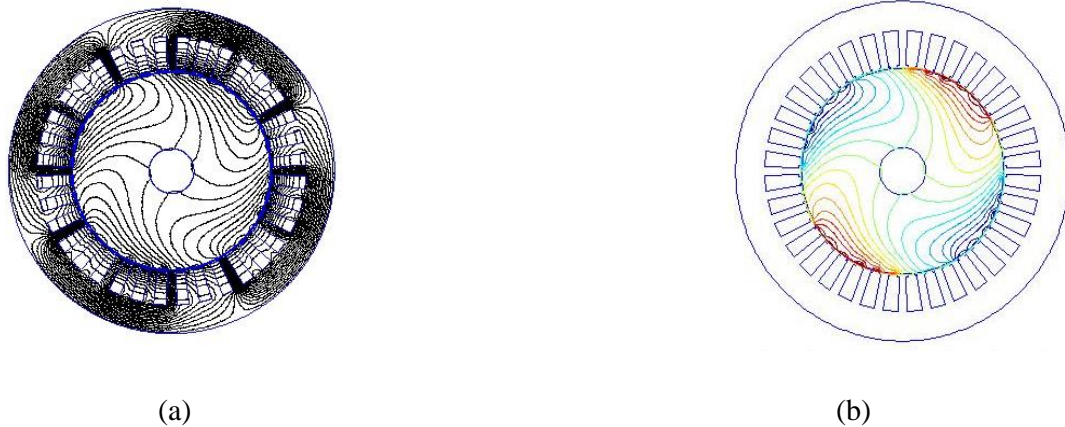


Figure 17 : lignes de champ pour  $g=1$  par la méthode numérique (a) et analytique (b)

### III.3.4 Conditions en charge

Pour un glissement de 1% les lignes de champ pénètrent complètement le rotor et se limitent au noyau.



Figures 18 : lignes de champ en charge par la méthode fem (a) et analytique (b)

### III.4 Rotor massif rainuré

Le rotor rainuré présente une géométrie très complexe. L'analyse des courants et des champs induits dans le rotor dépend de plusieurs facteurs liés aux paramètres géométriques, électriques et magnétiques.

Le rainurage modifie considérablement la réluctance du circuit magnétique constitué par le fer le long de la rainure et par l'air à travers l'encoche. Les rainures augmentent cette réluctance et par conséquent, améliorent les performances du moteur.

Le rotor rainuré présente 28 rainures de largeur de  $3^\circ$  et de hauteur de 10 mm

### III.4.1 Conditions à vide

A vide les lignes de champ pénètrent le rotor profondément, les valeurs des composantes de la densité de flux magnétique ainsi que la densité de courant sont supérieurs à ceux obtenus par un rotor lisse.

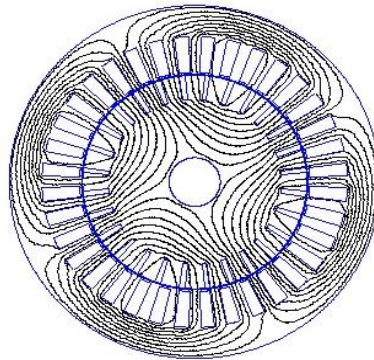
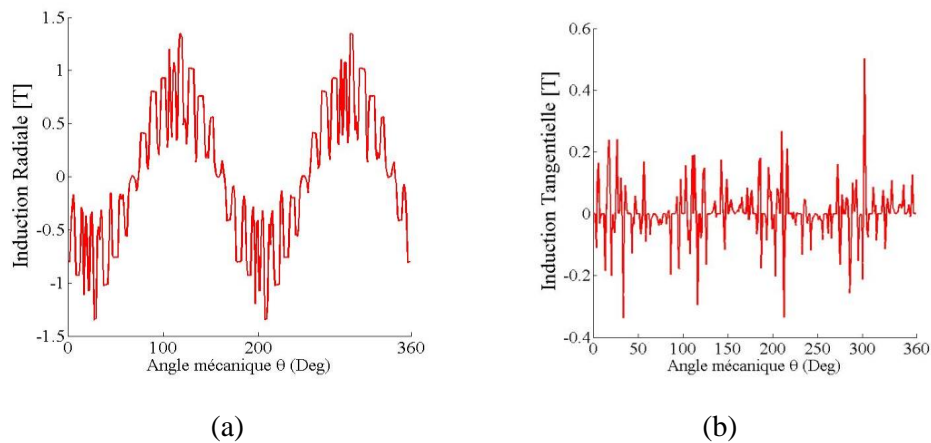


Figure 19: Lignes de champ à vide



Figures 20: Composantes radiale (a) et tangentielle (b) de l'induction magnétique dans l'entrefer

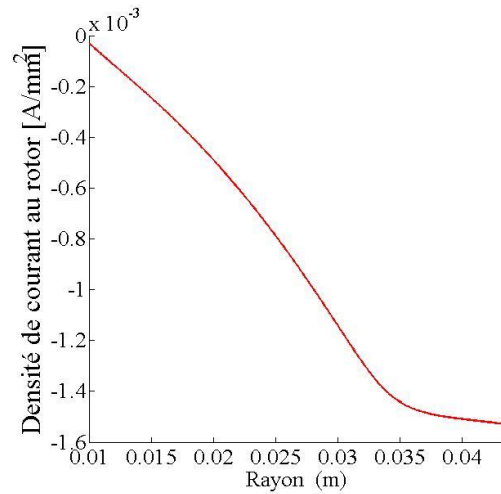


Figure 21: Densité de courant à vide

### III.4.2 Conditions en rotor bloqué

Au démarrage, les lignes de champ contournent les rainures et pénètrent le rotor en se limitant au rayon interne du rotor. Les valeurs des composantes de l'induction magnétique sont inférieures à ceux obtenus à vide.

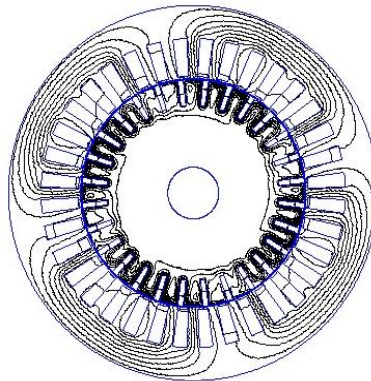
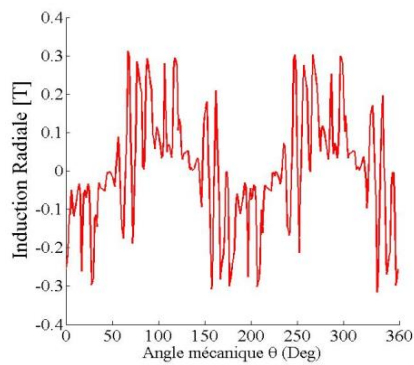
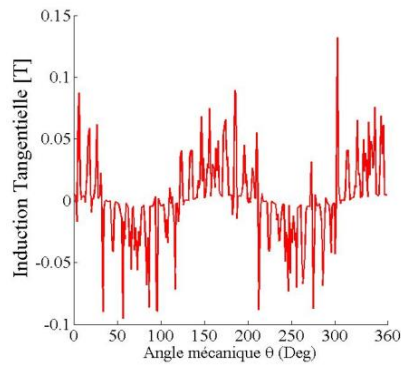


Figure 22: Lignes de champ en rotor bloqué  $g=1$



(a)



(b)

Figures 23: Composantes radiale (a) et tangentielle (b) de l'induction magnétique dans l'entrefer

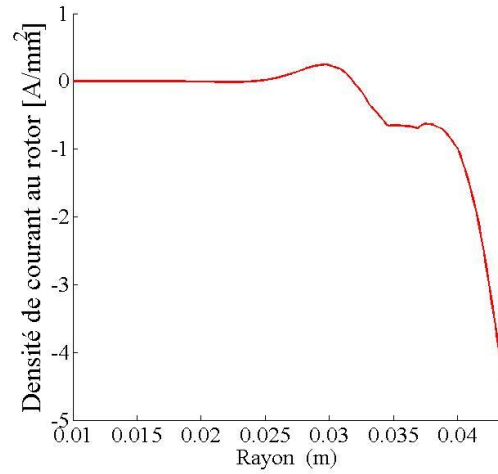


Figure 24: Densité de courant à rotor bloqué

### III.4.3 Conditions en charge ( $g=1\%$ )

En charge les lignes de champ pénètrent aussi profondément le rotor qu'à vide, les composantes de la densité de flux magnétique sont considérables et la densité de courant est relativement faible.

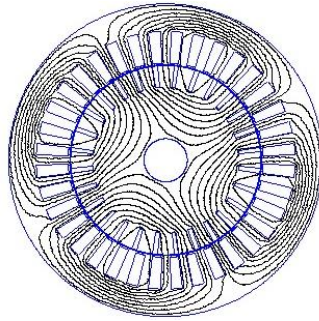


Figure 1: Lignes de champ en charge

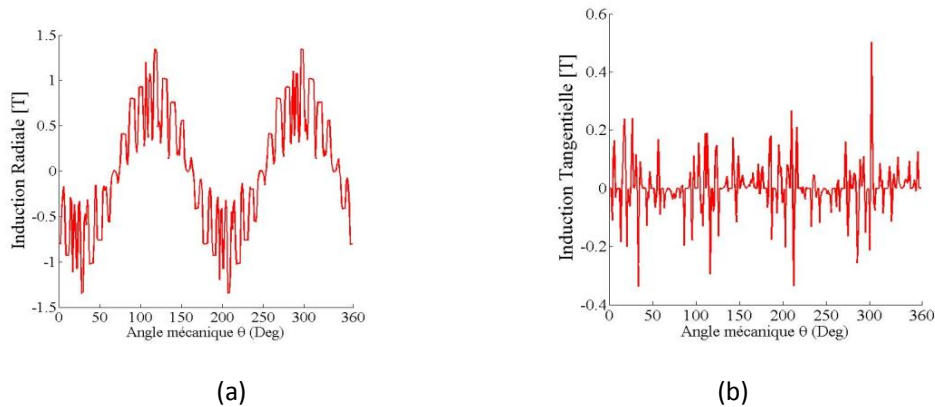


Figure 2: Composantes radiale (a) et tangentielle (b) de l'induction magnétique dans l'entrefer en charge

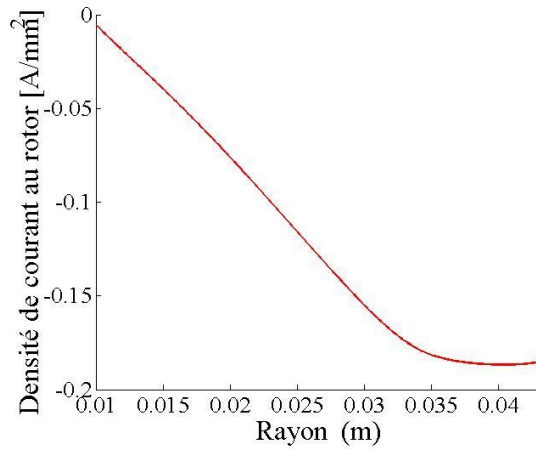


Figure 3: Densité de courant en charge

### III.5 Influence de la géométrie sur les performances du moteur

Pour étudier l'influence de la géométrie du rotor sur les performances électromagnétiques, nous avons utilisé 5 rotors en Acier dont un lisse et 4 rainurés comme suit :

Tableau 2: Dimensions des rotors utilisés

Rotor	Rayon du rotor $R_2$	Largeur de la rainure [ $^\circ$ ] $r$	Hauteur de la rainure [mm] $H_r$	Nombre de rainures $N_r$
RL	43.85	-	-	-
RR1	43.85	3	10	28
RR2	43.85	3	10	32
RR3	43.85	6	10	28
RR4	43.85	3	5	28

#### III.5.1 Influence des rainures

L'ajout de rainures au rotor massif permet d'améliorer les performances électromagnétiques. En effet dans la figure 22 le courant développé par le moteur à rotor rainuré RR1 est nettement meilleur que celui du rotor lisse RL. De même pour le couple électromagnétique.

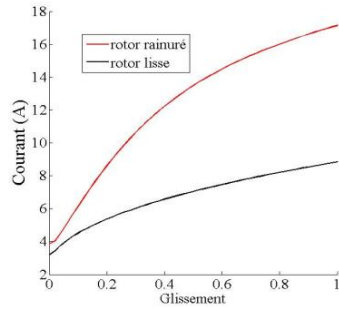


Figure 4 : Influence des rainures sur le courant

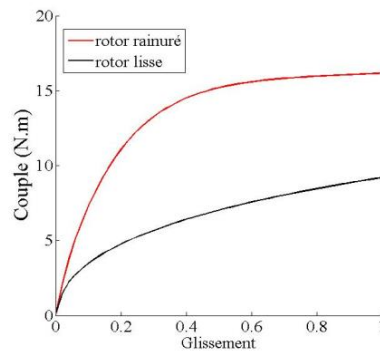


Figure 5: Influence des rainures sur le couple

### III.5.2 Influence du nombre de rainures

Les figures 24, 25 montrent que les caractéristiques courant-glissement et couple-glissement sont d'autant meilleur que le nombre de rainures est grand.

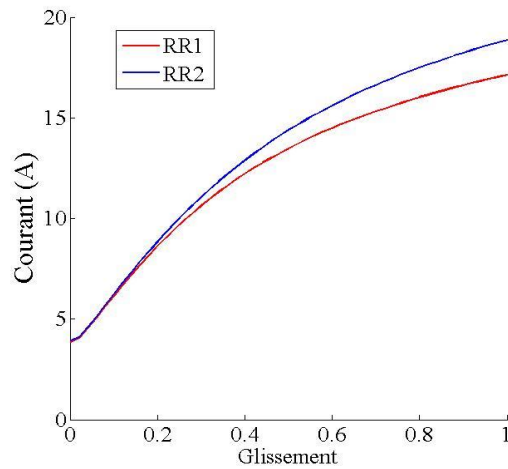


Figure 6: Influence du nombre de rainures sur le courant



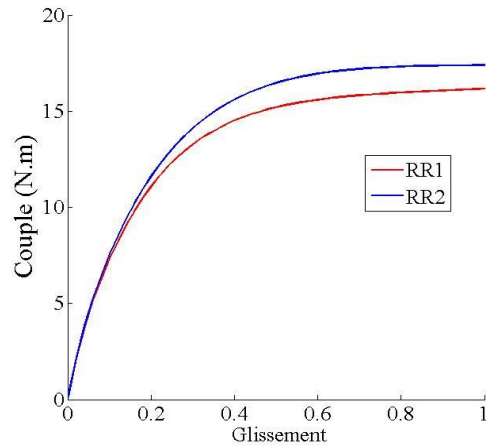


Figure 7: Influence du nombre de rainures sur le couple

### III.5.3 Influence de la largeur des rainures

On peut constater que la largeur de la rainure influe légèrement sur les caractéristiques courant-glissement et couple-glissement. (Figure 26 et 27).

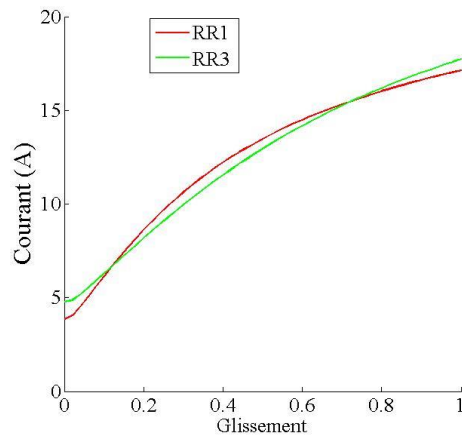


Figure 8: Influence de la largeur des rainures sur le courant

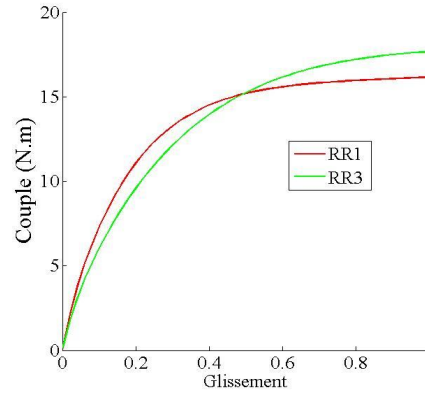


Figure 9: Influence de la largeur des rainures sur le couple

### III.5.4 Influence de la hauteur des rainures

Les figures 28,29 montrent que les caractéristiques couple-glisement et courant-glisement sont d'autant meilleures que les rainures rotoriques sont profondes.

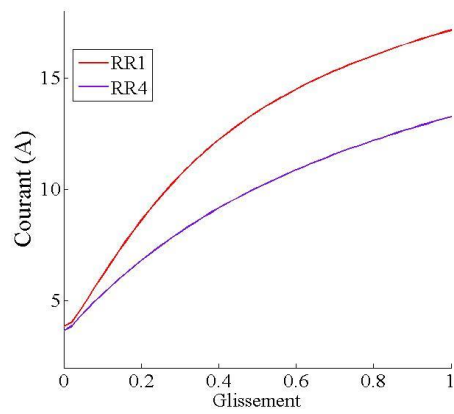


Figure 10: Influence de la hauteur des rainures sur le courant

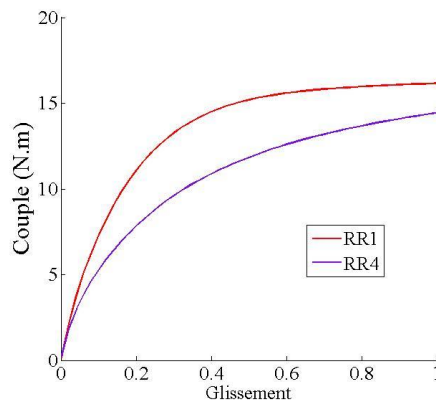


Figure 11: Influence de la hauteur des rainures sur le couple

### III.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons déterminé les performances électromagnétiques de deux moteurs asynchrones à rotor massif lisse en Aluminium et à rotor massif rainuré en Acier. Nous avons comparé les résultats obtenus entre un moteur à rotor en Aluminium et un rotor en Acier. Le 1<sup>er</sup> rotor est plus conducteur que celui en Acier par contre le champ magnétique est plus faible. En effet, Les performances électromagnétiques du moteur étudié dépendent des caractéristiques électriques et magnétiques du matériau, donc il y'a un compromis entre un champ fort et un bon conducteur. En plus des caractéristiques électriques et magnétiques du rotor, viennent les caractéristiques géométriques du rotor pour influencer sur ses performances, en effet le rotor rainuré présente un meilleur courant et couple. De plus la géométrie des rainures influence sur ces dernières caractéristiques.

La comparaison entre les deux méthodes indique une bonne cohérence, on a alors la même allure pour les composantes tangentielles et radiales de l'induction magnétique et la densité de courant.

La méthode analytique s'avantage à celle numérique par le temps de calcul, qui est relativement important pour la méthode des éléments finis.

## Conclusion Générale

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire est la modélisation 2D d'un moteur asynchrone à rotor massif par la méthode analytique et la méthode numérique en utilisant le logiciel FEMM.

La méthode analytique est préconisée pour la compréhension de certains phénomènes physiques et la prédiction des performances électromagnétiques de la machine de façon rapide simple et suffisamment précise. Cependant cette méthode ne s'applique que pour des géométries simples et se limite aux moteurs à rotor lisse.

La méthode numérique basée sur les éléments finis permet la résolution de l'équation de diffusion du champ pour n'importe quelle géométrie néanmoins le temps de résolution est beaucoup plus important.

La comparaison des résultats issus des méthodes analytique et numérique, appliquées aux différentes machines à rotors massifs étudiées, montre une bonne concordance des résultats obtenus sous les mêmes conditions. Les caractéristiques électriques et magnétiques et les facteurs géométriques du matériau utilisé pour la construction du rotor influencent les performances électromagnétiques de type de machine étudiée. Dans ce but nous avons comparé les grandeurs globales en utilisant les deux méthodes de résolution citées précédemment en considérant deux types de matériaux pour le rotor massif ; le premier en acier et le second en Aluminium.

Cela nous permet de conclure qu'un rotor composite acier massif avec une couche superficielle en Aluminium est plus performant qu'un moteur asynchrone à rotor massif en acier.

## Références Bibliographiques

- [1]. R. Ibtouen, "Etude d'un moteur d'induction à rotor massif lisse pour différentes largeurs d'entrefer", thèse de Magister, ENP, Mai 1984, Alger.
- [2]. M. Zaim " Contribution à la conception des machines asynchrones à rotor massif ", thèse de doctorat, ENP, novembre 1989, Alger.
- [3]. T.Yang, L.Zhou, W.Jiang," Calculation of eddy current losses in a solid rotor induction motor by finite element analysis", IEEE International Conference on Electrical Machines and Systems pp. 3656 – 3659, October 2008.
- [4]. J. Hupponen "High-speed solid rotor induction machine electromagnetic calculation and design", thèse de doctorat de l'université de technologie de Finlande, Décembre 2004.
- [5]. <http://www.femm.info/wiki/HomePage>.
- [6]. Y. Amara, "Modélisation pour le dimensionnement des machines électriques. Application à des machines spéciales", Mémoire en vue d'obtention l'habilitation à diriger des recherches, septembre 2012, Havre.
- [7]. M. Hachemi, R. Abdessemed, "Experimental study of the influence of the rotor dimensions on the performances of solid rotor asynchronous motor", Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Applications of Electrical Engineering, Prague, Czech Republic, March 12-14, 2006 (pp102-108).
- [8]. R. Amimer,"Calcul numérique des performances en régime saturé d'un moteur asynchrone à rotor massif lisse", mémoire de magister, ENP, novembre 2004, Alger.
- [9]. S.L. H, Shuangxia Niu, W.N. Fu, "A novel solid-rotor induction motor with skewed slits in radial and axial directions and its performance analysis using finite element method", IEEE Transactions on Superconductivity, vol.20, NO. 3, June 2010.
- [10]. Kyung-Seo Kim, Sung-Hoon Byun 'Auto-Measurement of Induction Motor Parameters', 226 Journal of Electrical Engineering & Technology, Vol. 1, No. 2, pp. 226~232, 2006.
- [11]. Ali Emadi, "Energy-Efficient Electric Motors", Third Edition, John C. Andrea 2004.
- [12]. R. Kechroud, "Contribution à la modélisation des machines électriques par la méthode des éléments finis associée aux multiplicateurs de Lagrange", thèse de Doctorat d'Etat, ENP, avril 2002, Alger.
- [13]. K. Boughrara, F.Dubas, R.Ibtouen,"2-D Analytical prediction of eddy currents, circuit model parameters, and steady-state performances in solid rotor induction motors",IEEE Transactions on Magnetics, vol.50, no.12, December 2014.
- [14]. K. Boughrara, N.Takorabet, R.Ibtouen, O.Touhami,F.Dubas,"Analytical analysis of cage rotor induction motors in healthy, defective and broken bars conditions",IEEE Transactions on Magnetics,, vol.51, no. 2, February 2015.
- [15]. R. Ibtouen, R.Kechroud, O.Touhami, S.Mekhtoub,"Complex finite element analysis of a solid rotor induction motor",IEEE International Electrical Machines and Drives Conference, vol3, pp. 1606-1610, June 2003.
- [16]. R.Ibtouen, "Cours sur le calcul analytique d'une machine asynchrone à rotor massif", ENP, Alger.
- [17]. Sarma, Mulukutla S, "Current-density distribution in solid-rotor induction motor" (1979), Electrical and Computer Engineering Faculty Publications, Paper 9. <http://hdl.handle.net/2047/d20003733>.
- [18]. Thierry LUBIN, "Méthode de résolution des EDP par séparation de variables", Université de Lorraine, Nancy, France.
- [19]. Stanely J.Farlow, "Partial Differential Equations for Scientists and Engineers", Dover Publications, INC New York, 1982.
- [20]. Peter P.SILVESTER, Ronald. Ferrari, "Finite element for electrical engineers", Third Edition, 1996.
- [21]. Magdalena Salazar-Palma, Luis-Emilio García-Castillo, and Tapan K. Sarkar, "The Finite Element Method In Electromagnetics", European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS 2000, Barcelona, 11-14 September 2000.
- [22]. Pojet de Fin d'étude Bounar Amina, Cheraitia Khadidja, calcul analytique des machines asynchrones à rotors massifs.ENP 2015