

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département d'automatique

Laboratoire de Commande des Processus



Thèse de Doctorat

Troisième Cycle en Automatique

Option :

Automatique des systèmes de conversion d'énergie

Présenté par :

Mohamed HAZERCHI

Master en Automatique de l'ENP

Intitulé :

Contribution à la commande et l'estimation d'état des systèmes décrits par des multi-modèles

Soutenu publiquement le : 17 Décembre 2018. Devant le jury composé de :

Mohamed Seghir BOUCHERIT	Professeur à l'ENP	Président
Rachid ILLOUL	MCA à l'ENP	Directeur de thèse
Mohamed TADJINE	Professeur à l'ENP	Examineur
Khalifa BENMANSOUR	Professeur à ES DAT	Examineur
Amirouche NAIT SEGHIR	Professeur à l'USTHB	Examineur

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département d'automatique

Laboratoire de Commande des Processus



Thèse de Doctorat

Troisième Cycle en Automatique

Option :

Automatique des systèmes de conversion d'énergie

Présenté par :

Mohamed HAZERCHI

Master en Automatique de l'ENP

Intitulé :

Contribution à la commande et l'estimation d'état des systèmes décrits par des multi-modèles

Soutenu publiquement le : 17 Décembre 2018. Devant le jury composé de :

Mohamed Seghir BOUCHERIT	Professeur à l'ENP	Président
Rachid ILLOUL	MCA à l'ENP	Directeur de thèse
Mohamed TADJINE	Professeur à l'ENP	Examineur
Khalifa BENMANSOUR	Professeur à ES DAT	Examineur
Amirouche NAIT SEGHIR	Professeur à l'USTHB	Examineur

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu, le tout puissant, pour m'avoir assisté et armé de patience afin d'accomplir ce modeste travail.

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué au Laboratoire de Commande des Processus LCP de l'Ecole Nationale Polytechnique sous la direction de Mr Rachid ILLOUL.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Rachid ILLOUL pour avoir accepté de diriger ce travail et pour les orientations qu'il m'a donné.

Je tiens à remercier très vivement les membres de jury, Les professeurs : Mohamed Seghir BOUCHERIT, Mohamed TADJINE, Khalifa BENMANSOUR, Amirouche NAIT SEGHIR, pour m'avoir fait l'honneur en acceptant de juger ce modeste travail.

Je tiens à remercier également tous les professeurs de département de l'automatique, et de l'Ecole Nationale Polytechnique.

DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

La mémoire de mon père رحمه الله

Ma mère, ma femme, mes sœurs et frères,

Mes amis : de l'enfance, de primaires d'Ain Serar et ben

Halima, du CEM de Telli Belakehal et de lycée Nadjah,

Mes amis : de l'Ecole Nationale Polytechnique, de l'IAP de

Boumerdes et de SONATRACH SP5 GR7.

Je dédie ce travail à tous ceux que j'aime

Mohamed HAZERCHI
28-09-2018 à Hassi R'mel

ملخص:

في هذه الأطروحة قمنا باستعمال أنظمة تاكاجي سوجينو Takagi-Sugeno الغامضة (الأنظمة متعددة النماذج) وذلك من أجل نمذجة والتحكم في الأنظمة اللاخطية و ملاحظة قيمة حالتها (إشارتها) الداخلية .

وقمنا بعرض طريقة منهجية مثلى من أجل الحصول على نموذج خطي تقريبي للنماذج اللاخطية, وقمنا بتحسين المتحكم الاعتيادي PDC بإضافة معوض قبلي pré-compensateur غامض من أجل ضمان تتبع جيد لإشارة المرجع. وقمنا أيضا بتصميم ملاحظات متعددة النماذج باعتبار الحالات الممكنة لاستعمال متغيرات التقرير التي يمكن قياسها والتي لا يمكن قياسها, واقترحنا تصنيف جديد من أجل ذلك .

ومن أجل اثبات نجاعة وفعالية تصميماتنا, اعتبرنا تمثيلات لمفاعل كيميائي من نوع CSTR في مناطق تشغيل مختلفة. كلمات مفتاحية: أنظمة تاكاجي سوجينو الغامضة, الأنظمة متعددة النماذج, المتحكم الاعتيادي PDC , ملاحظات متعددة النماذج.

Abstract:

In this thesis, we used the Takagi-Sugeno fuzzy systems (multiple models) to model, control and state estimation for nonlinear systems.

We presented in this thesis a systematic method of optimal linearization of nonlinear model. We improved the stabilizing conventional PDC with a fuzzy pre-compensator to ensure the set-point tracking, which is missing in the conventional PDC.

We designed fuzzy observers (multi-observers) by considering the possible cases of use of the premise variables are **measurable or unmeasurable**, we proposed a new classification for that.

We considered a chemical reactor CSTR as an application example to prove the effectiveness of our approach through simulations of this CSTR in different operating range.

Keywords: Takagi-Sugeno fuzzy systems, multiple models, conventional PDC, fuzzy observers.

Résumé:

Dans cette thèse, nous avons utilisé les systèmes de Takagi-Sugeno flous ou les multi-modèles pour modéliser, commander et estimer l'état d'un système non linéaire.

Nous avons présenté dans cette thèse une méthode systématique de linéarisation optimale à partir du modèle non linéaire. Nous avons amélioré la loi stabilisante PDC par la conception d'un pré-compensateur flou assurant la poursuite de référence ce qui était manquant dans la loi PDC conventionnelle. Nous avons conçu des multi-observateurs en considérant les cas possibles d'utilisation des variables de décision soient **mesurables** ou **non mesurables**, nous avons proposé une nouvelle classification pour cela.

Nous avons considéré un réacteur chimique CSTR comme un exemple d'application pour prouver l'efficacité de nos conceptions à travers des simulations de celui-ci dans différentes zone de fonctionnement.

Mots clés : les systèmes de Takagi-Sugeno flous, les multi-modèles, la loi PDC, les multi-observateurs.

Table des matières

Introduction générale.....	9
----------------------------	---

Chapitre I : Les systèmes de Takagi Sugeno flous

1. Introduction.....	15
2. Théorie de la logique floue.....	16
2.1. Définition.....	16
2.2. Ensemble flou.....	16
2.3. Fonction d'appartenance.....	17
2.4. Variable de décision ou de prémisse	18
2.5. Fuzzification	18
2.6. Moteur d'inférence	18
2.7. Defuzzification.....	18
2.8. La logique floue de Takagi-Sugeno (TS)	18
3. La modélisation floue et les modèles de Takagi-Sugeno (TS)	19
4. Structures multi-modèles.....	20
4.1. Structure découplée.....	20
4.2. Structure couplée ou modèle flou dynamique de Takagi-Sugeno.....	21
5. Obtention des modèles linéaires.....	22
5.1. la Méthode du secteur de la non linéarité (transformation polytopique convexe).....	22
5.2. L'identification à partir des données d'entrée / sortie	23
5.3. Linéarisation d'un modèle non linéaire analytique	24
6. Approximation avec les modèles flous de Takagi-Sugeno (TS)	29
7. Conclusion	30

Chapitre II : Stabilité des systèmes de TS flous

1. Introduction.....	32
2. Stabilité des systèmes	33
2.1. Définition	33
2.2. Stabilité globale au sens de Lyapunov	33
3. Les inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities LMIs)	34
3.1. Un ensemble convexe :.....	34

3.2. Une fonction convexe	34
3.3. Définition de LMI.....	35
3.4. La variable d'une LMI.....	35
3.5. Outils de simplification	35
4. Les problèmes classiques LMI.....	36
4.1. Problème de faisabilité de LMI	36
4.2. Problème de valeurs propres (EVP, Eigenvalue Problems)	37
4.3. Problème de valeurs propres généralisées (GEVP, Generalized Eigenvalue Problems)	37
5. Stabilité quadratique des systèmes TS flous (multi-modèles).....	37
6. Stabilité relaxée.....	38
7. Stabilisation des systèmes TS flous	40
7.1. La commande PDC	40
7.2. Procédure de conception de la commande PDC (mise sous forme LMI).....	43
7.3. Les lois de commande dérivées de la loi PDC	43
8. La poursuite de référence.....	44
9. Conclusion	46
 Chapitre III : Les observateurs de TS flous (les multi-observateurs) 	
1. Introduction	48
2. Principe et méthodologie	49
3. Observateur de Luenberger d'ordre plein	50
4. Les observateurs de TS flous.....	52
4.1. Classification existante	52
4.2. Classification basée sur la similarité des variables de prémisse	53
5. Les variables de prémisse de même nature	54
5.1. La même variable de prémisse mesurable	54
5.2. La même variable de prémisse non mesurable	56
5.3. La séparation de calcul régulateur/observateur	58
5.4. Placement des pôles de l'observateur	58
5.5. Procédure du calcul et linéarisation des conditions de la stabilité sous forme LMI.....	59
6. Variables de prémisse de natures différentes	60

6.1. Synthèse du système augmenté	60
6.2. Procédure de synthèse pour $B_t = B$	65
6.3. La séparation de calcul régulateur/observateur	66
7. Conclusion	66

Chapitre IV : Application : Réacteur chimique parfaitement agité (CSTR)

1. Introduction	68
2. Modélisation du CSTR par un modèle de TS flou (multi-modèle)	69
2.1. Description du processus chimique CSTR	69
2.2. Le modèle de TS flou (multi-modèle) du CSTR	70
2.3. Simulations	73
2.4. Interprétation des résultats	76
3. Synthèse de Commande du CSTR	76
3.1. Commande PDC amélioré du CSTR	76
3.2. Simulations	77
4. Le multi-observateur pour le CSTR	80
4.1. Synthèse du multi-observateur	80
4.2. Simulations	80
4.3. Commentaire	82
5. Conclusion	82
Conclusion générale	85
Références bibliographiques	89

Introduction générale

Introduction générale

Les systèmes industriels étant de plus en plus complexes, il est très souvent difficile voire impossible d'en avoir un modèle mathématique afin de mettre en œuvre une loi de commande ou une stratégie d'estimation d'état pour sa supervision et son diagnostic.

En automatique, le problème est d'avoir un modèle mathématique qui représente le mieux possible le processus industriel, et ce modèle doit être suffisamment simple pour élaborer une stratégie de commande ou de diagnostic.

En effet, la représentation non linéaire des systèmes offre plus de précision pour décrire des phénomènes physiques et les dynamiques des processus industriels, mais elle présente beaucoup de complexité et beaucoup de difficulté dans la phase de synthèse de la commande ou d'estimation d'état du système. Par ailleurs, la théorie de la commande linéaire a l'avantage de la simplicité et offre beaucoup de techniques systématiques, L'inconvénient majeur d'une telle approche est son aspect local dans l'espace de fonctionnement.

Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle et son adéquation avec une forme mathématiquement exploitable. Dans ce contexte, les automaticiens cherchent une approche permettant d'approximer le mieux possible le comportement non linéaire des processus par un modèle linéaire dans une large plage de fonctionnement avec un degré de précision acceptable, ce qui est faisable dans la théorie des systèmes flous, en général et en particulier dans l'approche des systèmes flous de Takagi-Sugeno [Tak 85].

L'approche multi-modèle s'inspire des travaux de Takagi-Sugeno [Tak 85] sur la commande floue. En effet, après avoir établi les règles "si prémisse alors conséquence", des degrés d'appartenance sont associés à chaque commande, la commande globale s'obtient en calculant le barycentre des commandes établies précédemment. Nous pouvons également citer les travaux de Jacob et al [Jac 91] qui ont présenté l'approche multi-experts, qui consiste en la combinaison de différents experts (un expert est un modèle décrivant le comportement local d'un système). L'ensemble de toutes ces

Introduction générale

techniques conduit à un modèle global d'un système qui est une combinaison de modèles valables localement.

L'approche multi-modèles a connu un intérêt certain depuis de nombreuses années, [Joh 92][Tan 92][Wan 96][Mur 97][Lo 03][Hua 07]. L'idée de cette approche est l'appréhension du comportement non linéaire d'un système par un ensemble de modèles locaux caractérisant le comportement du système dans différentes zones de fonctionnement.

Dans le cadre des multi-modèles, les systèmes étudiés se représentent sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI (Linear Time Invariant) valide dans une zone de fonctionnement.

L'avantage de cette approche découle du fait que, dans la plus part des cas, une conception d'un modèle qui englobe toute la complexité du système est souvent difficile à mettre en œuvre. En première étape, plusieurs auteurs ont tenté de reproduire des systèmes non linéaires sous forme de modèles linéaires par morceaux [M Joh 98], le résultat n'était guère satisfaisant car il en résulte une approximation discontinue du système due aux commutations entre les différents modèles linéaires.

Malheureusement, ces discontinuités peuvent être embarrassantes dans la majorité des applications industrielles [Akh 04]. Pour s'affranchir de cet obstacle, il est préférable d'assurer un passage progressif d'un modèle à un autre. On remplace les fonctions de commutation à front raide par des fonctions à pente douce, ce qui crée un chevauchement entre les zones de validité des modèles. Le problème de la discontinuité est ainsi écarté, et les fonctions de commutation deviennent des fonctions à dérivées continues dont la pente détermine la vitesse de passage d'un modèle à un autre [Cha 02].

En effet, les multimodèles facilitent l'extension de certains outils d'analyse développés dans le cadre des systèmes linéaires aux systèmes non linéaires et ce, sans avoir à effectuer d'analyse spécifique sur la non linéarité du système.

Les systèmes de TS flou (ou multimodèles) permettent de concevoir plusieurs types de lois de commande, on peut citer entre autres la plus familière et la plus classique, la loi PDC (Parallel Distributed Compensation), cette loi de commande a été conçu dans [Mur 97][Wan 95][Tan 98][Tan 01], elle a beaucoup de variété PPDC

Introduction générale

(Proportional PDC), OPDC (Output PDC), la commande PDC se base sur la synthèse d'un retour d'état local pour chacun des sous-modèles et le régulateur global est le résultat d'interpolation des lois de commande locales par des fonctions d'appartenance floues.

La loi de commande PDC assure la stabilité du multi-modèle, mais elle n'assure pas la poursuite de référence, et il y a peu de travaux qui traite de poursuite, on peut citer [Wan 95] [Tan 98].

Dans le cadre de cette thèse, nous avons amélioré un PDC pour garantir la stabilité et la poursuite simultanément pour le multi-modèle.

Un autre volet très important pour ce type de système, c'est la synthèse d'observateur ou plus précisément la synthèse de multi-observateur ou d'observateur de TS flou.

Généralement, la conception d'un multi-observateur se fait avec les mêmes formes, les mêmes fonctions d'appartenance, les mêmes variables de décision que le modèle TS flou associé, et ce afin de faciliter la tâche de conception et d'analyse de stabilité (pour le multi-modèle et pour le multi-observateur).

Dans la littérature, on trouve beaucoup de travaux qui s'orientent vers les multi-observateur, nous pouvons citer [Tan 98] [Tan 01] [Pat 98] [Ber 00].

R. J. Patton et al. [Pat 98] ont proposé un observateur de Luenberger flou dédié au diagnostic des défauts. Ils ont exprimé les conditions de stabilité de cet observateur sous forme de problème sous contrainte des valeurs propres.

Tanaka et al [Tan 98][Tan 01] ont proposé des théorèmes de stabilité des multi-modèles avec PDC et stabilisation via un multi-observateur plus une commande PDC. Ils ont considéré un système augmenté composé du multi-modèle et du multi-observateur (état + erreur d'estimation). Ils ont décrit la procédure de synthèse des gains du multi-observateur/PDC, en considérant deux cas pour les variables de décision ; mesurables ou non mesurables (estimables) pour les multi-modèles continus et discrets. Ils ont utilisé dans toutes les étapes de conception les outils LMI.

X. Ma et al. [Ma 98] ont conçu un observateur de TS flou en utilisant une fonction candidate de Lyapunov de type quadratique. Ils ont montré que le principe de séparation peut être appliqué pour la synthèse des gains du multi-observateur/PDC, ce que signifie que le calcul des gains peut se faire séparément pour le multi-observateur et le régulateur PDC, mais ce n'est valable que dans le cas où les variables de prémisse sont mesurables.

Introduction générale

Un état de l'art a été représenté dans [Fen 06], l'auteur a cité les plus importantes références et les grandes lignes de la théorie floue, y compris les observateurs flous.

Concernant les travaux qui s'intéressent aux variables de prémisse non mesurables, on peut citer les travaux de Bergsten et al. [Ber 02], qui ont proposé un multi-observateur à mode glissant avec des modèles locaux affines. Quelques travaux qui traitent le mêmes cas sont reportés dans [Ber 00] [Ich 09] [You 14]. Bergsten et Palm [Ber 00] ont proposé un multi-observateur de Thau-Luenberger.

Les auteurs de [Ich 10, 12] ont présenté de nouvelles conditions de stabilité d'observateur flou avec des variables de prémisse non mesurables. Les auteurs [Bou 04] ont proposé une commande adaptative via un observateur flou avec des variables de prémisse également non mesurables.

Nagy [Nag 10] a posé le problème du choix des variables de prémisse, il considère le cas où les sous-modèles linéaire locaux sont obtenus par transformation polytopique convexe où les fonctions d'appartenance sont non linéaires qui dépendent des états du système. Dans ce cas, il est impératif de poser le problème de la nature des variables de prémisse (mesurable ou non mesurable) pour la construction des modèles de Takagi-Sugeno flous (multi-modèles), et pour la conception d'un observateur de TS flou qui va être utilisé pour l'estimation d'état du système.

Lors de la stabilisation d'un multi-modèle via un multi-observateur, d'autres considérations doivent être prise en compte notamment si la variable de décision dépend de l'état du système, on est obligé d'avoir plus de rigueur pour synthétiser un multi-observateur car toute la conception dépend de l'état estimé.

Les points suivant sont abordé dans notre travail :

- La construction du **multi-modèle**.
- La conception de la loi de **commande** (PDC).
- La construction d'un **multi-observateur**.

Dans cette thèse, nous avons détaillé la classification des cas d'utilisation des variables de prémisse suivant qu'elles soient **mesurables** ou **non mesurables**. Car dans notre optique le problème principal est de savoir si nous utilisons les **mêmes** variables de prémisse ou **différentes** variables de prémisse pour : **le multi-modèle** et **le multi-observateur**.

Introduction générale

Cette thèse a été organisée comme suit :

Dans le premier chapitre nous avons présenté les modèles de Takagi-Sugeno flous ou multi-modèles ; leurs équations, leurs structures et les méthodes d'obtention d'un multimodèle, nous détaillons la méthode de linéarisation optimale d'un modèle non linéaire proposé par Teixeira et al [Tei 99].

Dans le deuxième chapitre nous étudions la notion de stabilité des multi-modèles et les outils d'analyse et de conception LMI, les méthodes de conception d'une loi de commande PDC et nous envisageons un PDC amélioré pour la poursuite.

Le troisième chapitre comporte les différents cas de conception d'un multi-observateur, et les différents cas de variables de prémisse. Dans ce chapitre nous avons proposé une correction du théorème de Tanaka et al. [Tan 98][Tan 01], sur la convergence d'un multi-observateur dans le cas des variables de prémisse non mesurables.

Le quatrième chapitre a été consacré à un exemple d'application académique fréquemment utilisé (le **CSTR** « **continuously stirred tank reactor** » réacteur chimique parfaitement agité) pour présenter les différentes étapes de cette étude, à savoir :

- L'étape de modélisation d'un système non linéaire par un multi-modèle.
- L'étape d'analyse de stabilité et commande par un PDC amélioré.
- L'étape de conception d'un multi-observateur.

Et cette thèse se termine par une conclusion générale, et des perspectives.

Chapitre I

Les systèmes de Takagi Sugeno flous

Chapitre I

Les systèmes de Takagi Sugeno flous

1. Introduction:

La modélisation représente une étape préliminaire et indispensable pour réaliser les objectifs de commande et de diagnostic des processus industriels. En effet, la notion de modèle est un point central dans le domaine de l'automatique, le choix de modèles appropriés s'avère capital. En outre, les caractéristiques des modèles utilisés doivent être combinées afin de profiter de leurs avantages respectifs.

Un modèle est une représentation formalisée des aspects importants qui caractérisent un phénomène physique. Il n'est qu'un reflet imparfait et simplifié de la réalité qu'il est censé représenter. Une bonne modélisation a pour but d'imiter d'une manière rigoureuse et fidèle le comportement d'un processus. Le choix d'un modèle peut être envisagé en fonction des connaissances à priori sur le système étudié.

La plupart des processus industriels sont de nature non linéaire complexe ce qui entraîne la difficile élaboration d'une loi de commande ou d'une stratégie de diagnostic. Par ailleurs, la théorie des systèmes linéaires comporte un large choix de solution pour la commande et l'observation des modèles linéaires, les chercheurs essaient de trouver des modèles linéaires simples pour décrire le comportement et la dynamique des systèmes non linéaires complexes, ce qui n'est pas simple à obtenir par des méthodes classiques.

Par ailleurs, la théorie floue comporte une stratégie très performante pour la commande et la modélisation des systèmes non linéaires, à savoir la modélisation de Takagi-Sugeno floue qui établit une synthèse entre la complexité des systèmes non linéaire et la simplicité des systèmes linéaire avec un degré de précision voulu. Ce type de modélisation permet de profiter de la simplicité de la théorie linéaire tout en maintenant la fidélité de la représentation non linéaire des systèmes.

Le modèle de TS flou a connu un engouement prononcé depuis la publication des travaux de Johansen et Foss [Joh 92]. Le principe de base de la modélisation de Takagi-Sugeno floue est

de représenter un système non linéaire par un ensemble de modèles locaux (linéaires ou affines) caractérisant le fonctionnement du système dans différentes zones de fonctionnement [Akh 04].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la manière d'obtenir une structure multi-modèle, les motivations qui nous ont poussé à choisir cette méthode de modélisation sont multiples : La structure multi-modèle permet de simplifier et d'étudier aisément la stabilité d'un système non linéaire, la synthèse des multi-observateurs est un apport indéniable pour la synthèse des correcteurs (constitué par exemple d'un retour d'état pour chaque modèle local).

2. Théorie de la logique floue :

2.1. Définition :

La logique floue est une logique qui substitue à la logique binaire une logique fondée sur des variables pouvant prendre, outre les valeurs « vrai » ou « faux » toutes les valeurs intermédiaires entre « vrai » et « faux ». (Citation: cf. supra)

2.2. Ensemble flou:

La notion d'ensemble flou permet de définir une appartenance graduelle d'un élément à une classe, c'est-à-dire que l'élément appartient plus ou moins fortement à cette classe. Un ensemble flou peut être vu comme une généralisation du concept de sous ensemble ordinaire (sous-ensemble Booléen) dont la fonction d'appartenance prend seulement les deux valeurs 0 et 1 contrairement à un ensemble flou dont la fonction d'appartenance prend des valeurs dans l'intervalle $[0,1]$.

Mathématiquement on peut définir l'appartenance de l'élément x à l'ensemble ordinaire A comme suit :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Et l'appartenance de l'élément x à l'ensemble flou B comme suit :

$$\mu_B(x) \in [0,1]$$

Et on dit que l'élément x appartient à l'ensemble flou B avec certain degré d'appartenance dans l'intervalle $[0,1]$, et on appelle $\mu_B(x)$ la fonction d'appartenance de l'élément x à l'ensemble flou B .

2.3.Fonction d'appartenance :

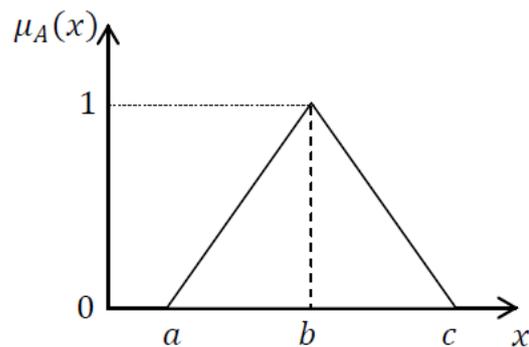
Une fonction d'appartenance est une description mathématique d'un ensemble flou pour faciliter le traitement numérique des variables linguistiques. Elle est notée généralement $\mu_i(x(t))$.

La fonction $\mu_i(x(t))$ est dite aussi fonction d'activation, elle détermine le degré d'activation du i^{eme} modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant au modèle global. Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions dépendent généralement du vecteur d'état $x(t)$. Elle peut être représentée par plusieurs formes; on peut citer entre autres :

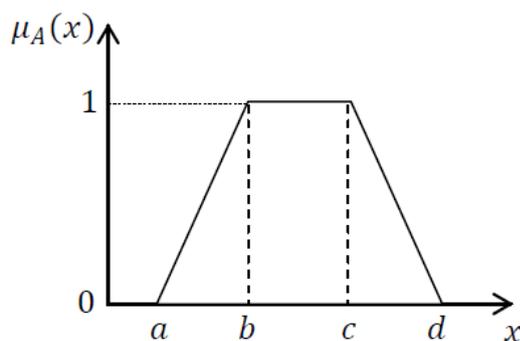
Les formes triangulaires, trapézoïdales, sigmoïdales, gaussiennes...

Les fonctions d'appartenance doivent satisfaire la propriété de convexité :

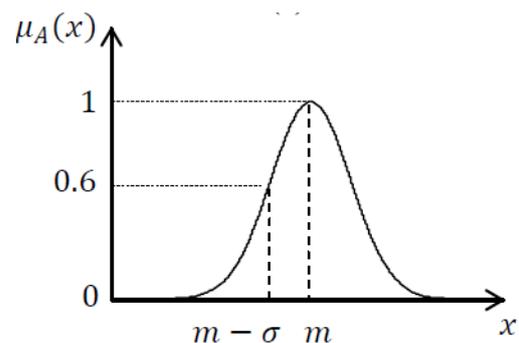
$$\sum_1^r \mu_i(x(t)) = 1 \quad \text{et} \quad 0 < \mu_i(x(t)) < 1 \quad (\text{I.2})$$



(a) : Forme triangulaire



(b) : Forme trapézoïdale.



(c) : Forme gaussienne.

Figure I.1. Les fonctions d'appartenance

2.4. Variable de décision ou de prémisse :

C'est la variable qui décide le degré d'appartenance à un ensemble flou. Elle peut être mesurable par exemple : signal d'entrée ou signal de sortie, non mesurable ou estimable par exemple l'état du système.

2.5. Fuzzification :

C'est le passage des variables d'entrées physiques à des variables linguistiques floues pour pouvoir activer les règles qui sont exprimées à l'aide de variables linguistiques associées à des ensembles flous.

2.6. Moteur d'inférence :

Le moteur d'inférence est un processus qui utilise la partie floue issue de la fuzzification dans la base des règles floues pour générer une nouvelle partie floue, à l'aide des techniques de raisonnement flou.

On peut dire que le moteur d'inférence transforme les variables floues d'entrée en variables floues de sortie en se basant sur la base des règles floues.

2.7. Defuzzification :

C'est la transformation de la partie floue issue de l'inférence en une grandeur numérique, pour cela, on utilise plusieurs méthodes, on peut citer entre autres la méthode de centre de gravité :

Où h_i la fonction de pondération, et u Le résultat de la defuzzification, cette méthode nous donne :

$$u = \frac{\sum_1^r h_i u_i}{\sum_1^r h_i} \quad (I.3)$$

2.8. La logique floue de Takagi-Sugeno (TS) :

La logique floue de Sugeno ou Takagi-Sugeno est une approximation d'une fonction non linéaire $y(t)$ par une fonction polynomiale ou linéaire, dans ce cas, les conclusions des règles floues (**Si-Alors**) soit données par une fonction linéaire, polynomiale, qui est en général fonction des variables d'entrées, les règles sont alors de la forme suivante :

Si $\theta_1(t)$ est M_1^i et $\theta_2(t)$ est M_2^i et et $\theta_p(t)$ est M_p^i **Alors:**

$$y^i(t) = f_i(\theta(t)) \quad i = 1 \dots N \quad (I.4)$$

Où $\theta(t)$ est le vecteur de variables de décision, M^i les ensembles flous et N nombre des règles floues.

3. La modélisation floue et les modèles de Takagi-Sugeno (TS) :

Les multi-modèles à état couplé ou les modèles flous de Takagi-Sugeno [Tak 85] sont également appelés modèles flous dynamiques de TS [Cao 95] [Cao 97]. Ce modèle est basé sur l'utilisation d'un ensemble de règles floues pour décrire un système global non linéaire en termes d'un ensemble de modèles linéaires locaux interpolés par des fonctions d'appartenance floue [Fen 06].

Cette méthode de modélisation floue offre une approche très efficace pour la description des systèmes non linéaires complexes et réduit considérablement le nombre de règles en matière de modélisation des systèmes non linéaires d'ordre supérieur [Cao 97], [Fan 96], [Jon 00], [Tan 01], [Yin 98], [Zen 00] [Sug 99]. Plus important encore, les modèles flous de T-S fournissent une base pour le développement d'approches systématiques pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires et la synthèse d'une loi de commande à base de la puissante théorie de la logique floue et des techniques de commande classique [Fen 06].

Les modèles flous de TS sont constitué de règles floues de type **Si-Alors** où la première partie représente **les conditions du point de fonctionnement**, et sa partie conséquence est un modèle local linéaire ou affine qui représente le système non linéaire dans ce point de fonctionnement, la i^{eme} règle floue est de la forme :

Si $\theta(t)$ est M_i Alors:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ \dot{y}_i(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad (I. 5)$$

Avec $\theta(t)$ la variable de décision M_i le i^{eme} ensemble flou. $x(t) \in R^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ le vecteur de commande, $A_i \in R^{n \times n}$ la matrice dynamique locale, $B_i \in R^{n \times m}$ la matrice d'entrée.

En utilisant la méthode de centre de gravité, Le système global sera donné par l'équation :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_1^r h_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_1^r h_i(\theta(t))} \quad (I. 6)$$

$$y = \frac{\sum_1^r h_i(\theta(t)) (C_i x(t))}{\sum_1^r h_i(\theta(t))} \quad (I. 7)$$

Si on prend :

$$\omega_i(\theta(t)) = \frac{h_i(\theta(t))}{\sum_1^r h_i(\theta(t))} \quad (\text{I.8})$$

On va avoir l'expression suivante pour $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{I.9})$$

$$y(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) C_i x(t) \quad (\text{I.10})$$

$\omega_i(\theta(t))$: est la fonction d'appartenance (Ou de pondération) du i^{eme} ensemble flou qui vérifie la propriété de la convexité suivante:

$$0 < \omega_i(\theta(t)) < 1 \quad \text{ET} \quad \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) = 1$$

r : est le nombre d'ensembles flous (nombre des modèles linéaires locaux).

4. Structures multi-modèles

4.1. Structure découplée

La structure découplée, ou multi-modèles à état découplé, sont des multi-modèles proposés par Filev [Fil 91] où les sous-modèles possèdent chacun un vecteur d'état indépendant (figure I.2).

Ils sont régis par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \quad (\text{I.11})$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) \quad (\text{I.12})$$

Le vecteur d'état sera donné par:

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) x_i(t) \quad (\text{I.13})$$

Et la sortie globale sera donnée par :

$$y(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) C_i x_i(t) \quad (\text{I.14})$$

La structure du multi-modèle découplé, quant à elle, introduit une certaine flexibilité dans l'étape de modélisation. Elle permet en effet d'introduire des sous-modèles dont les vecteurs d'état peuvent être de dimensions différentes et se démarque ainsi des structures des multi-modèles classiquement utilisées [Orj 08].

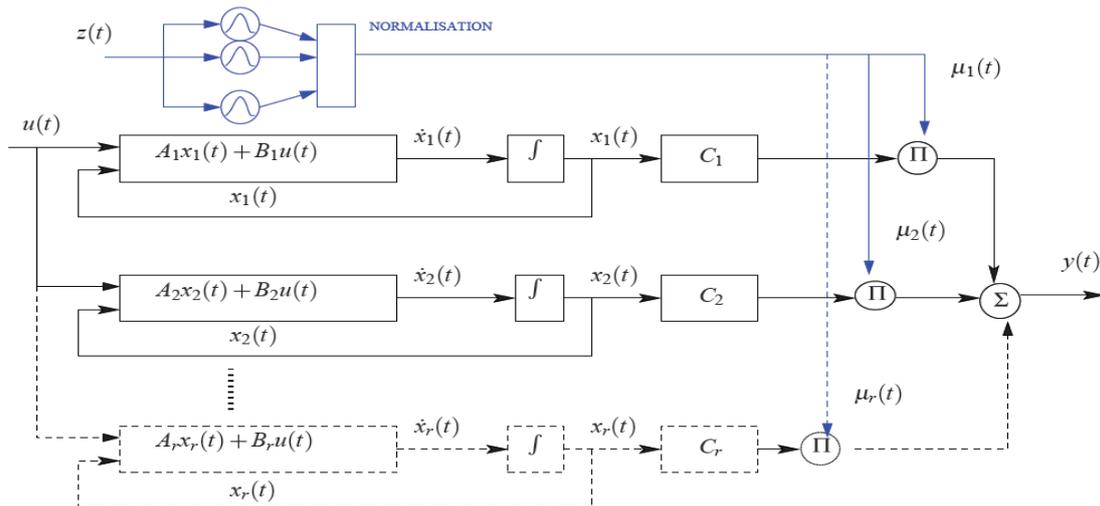


Figure I.2. La structure multi-modèle découplée

4.2. Structure couplée ou modèle flou dynamique de Takagi-Sugeno

Ils sont appelés multi-modèles à état couplé, ou modèles flous de Takagi-Sugeno est la structure la plus utilisée que ce soit pour l'analyse de la stabilité, la commande ou la synthèse des observateurs flou [Akh 04]. Dans cette structure, les sous modèles partagent un état commun (figure I.3), Ils sont régis par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{I.15}$$

$$y(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) C_i x(t) \tag{I.16}$$

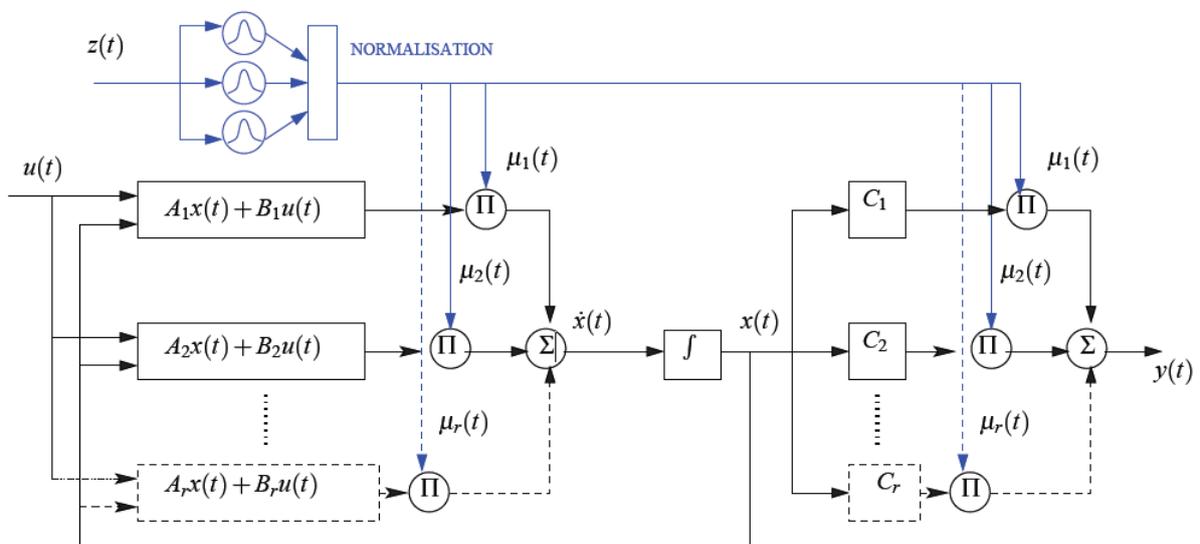


Figure I.3. La structure multi-modèle couplée

5. Obtention des multi-modèles

Nombreux sont les travaux de recherche dédiés à la modélisation des systèmes non linéaires par une approche multi-modèle. En effet, il n'y a pas de méthodologie spécifique capable de conduire à une représentation multi-modèle unique d'un système. Dans tous les cas, l'élaboration d'un multi-modèle soulève trois problèmes majeurs, à savoir :

1. Le choix de la variable caractéristique (la variable de décision $\theta(t)$) du système permettant d'indexer les fonctions de pondération.
2. La décomposition de l'espace de fonctionnement du système en un nombre fini de zones de fonctionnement (c'est-à-dire un nombre fini de modèles locaux qui le composent). Cette étape s'accompagne éventuellement d'une optimisation des fonctions poids associées à chaque zone.
3. La détermination de la structure du multi-modèle et l'identification paramétrique de chaque Sous-modèle. [Orj 08]
4. le choix de la méthode d'obtention du multi-modèle

Le vrai problème des systèmes flous est de savoir comment obtenir les modèles linéaires locaux, dans la littérature, il existe trois façons d'obtenir ces modèles.

5.1. Méthode de la transformation polytopique convexe (non linéarité par secteur):

Cette méthode suppose une bonne connaissance des limites des fonctions non linéaires pour représenter le système non linéaire dans un intervalle compact. En outre, les sous-matrices ne représentent pas les véritables dynamiques locales (matrice d'état) du système ce qui signifie qu'on perd la notion de localité des modèles élémentaire [Nag 10]. Cette méthode introduit beaucoup de conservatisme.

Exemple :

Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (\text{I. 17})$$

Avec $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ ce système peut être représenté exactement par le système flou suivant :

Le sous modèle de la règle 1 :

Si z_1 est égal à -1 donc :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x \quad \text{et} \quad y = x_1 \quad (\text{I. 18})$$

Le sous modèle de la règle 2 :

Si z_1 est égal à 1 donc :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x \quad \text{et} \quad y = x_1 \quad (\text{I.19})$$

Dans le modèle de TS flou précédent on a pris la variable de prémisse $Z_1 = x_2$ les deux ensemble flous seront :

$$Z_1^1 = \text{"environ - 1"}$$

$$Z_1^2 = \text{"environ + 1"}$$

Les fonctions d'appartenance seront :

$$w_{11} = \frac{1 - Z_1}{2}, \quad w_{12} = \frac{1 + Z_1}{2} \quad (\text{I.20})$$

La représentation complète est donnée comme suit :

$$\frac{1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.21})$$

$$\frac{1 - x_2}{2} x_1 + \frac{1 + x_2}{2} x_1 = x_1 = y \quad (\text{I.22})$$

Ce modèle de TS flou est une représentation exacte du système non linéaire décrit par l'équation (I. 17).

5.2. L'identification à partir des données d'entrée / sortie:

Cette méthode est très intéressante, elle considère le système non linéaire comme une boîte noire, et utilise des données **entrée / sortie** sur plusieurs plage de fonctionnement pour identifier les sous-modèles avec différentes méthodes d'identification et des méthodes d'optimisation numérique.

Cette méthode réduit l'identification des systèmes non linéaires à l'identification des sous-systèmes définis par des modèles locaux linéaires et leurs fonctions d'activation.

Généralement la construction d'un multi-modèles à partir des entrées/sorties exige [Oud 08] :

- La définition d'une structure de multi-modèles
- La définition des fonctions d'appartenance
- L'estimation des paramètres des fonctions d'activation et des modèles locaux

-L'évaluation des performances du multi-modèle

Pour l'estimation des paramètres, plusieurs méthodes d'optimisation numérique peuvent être utilisées, selon les informations disponibles a priori. Elles sont généralement basées sur la minimisation d'une fonction de l'écart entre la sortie estimée du multi-modèle $y_m(t)$ et la sortie mesurée du système $y(t)$. Le critère le plus utilisé est le critère qui minimise l'erreur quadratique entre la sortie réelle et la sortie estimée :

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t, \theta)^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(y_m(t) - y(t))^2 \quad (I.23)$$

Où N est l'horizon d'observation et θ est le vecteur de paramètres des modèles locaux ainsi que des fonctions d'activation.

Les méthodes de minimisation du critère $J(\theta)$ s'appuient, le plus souvent, sur un développement limité du critère $J(\theta)$ autour d'une valeur particulière du vecteur des paramètres θ , et d'une procédure itérative pour la correction progressive de la solution. Si l'on note k l'indice d'itération de la méthode de recherche et $\theta(k)$ la valeur de la solution à l'itération k , la mise à jour de l'estimation s'effectue de la manière suivante [Oud 08]:

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \eta D(k) \quad (I.24)$$

Où η représente un facteur d'ajustement permettant de régler la vitesse de convergence vers la solution. $D(k)$ est la direction de recherche dans l'espace paramétrique. Selon la façon dont $D(k)$ est calculée, on distingue différentes méthodes d'optimisation numérique dont les principales sont [Oud 08]:

- Algorithme de Levenberg-Marquardt,
- Algorithme du gradient
- Algorithme de Newton,
- Algorithme de Gauss-Newton.

5.3. Linéarisation d'un modèle non linéaire analytique:

La linéarisation d'un modèle non linéaire est la méthode la plus simple permettant de générer un modèle linéaire ou affine approximant le modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement. Cette méthode se base sur le développement en série de Taylor d'un modèle non linéaire existant.

Notons que dans ce cas, le nombre de modèles locaux dépend de la précision de modélisation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation. Ces dernières doivent satisfaire les propriétés de convexité.

Considérons le système non linéaire suivant [Haz 16] :

$$\dot{x} = F(x, u) = f(x) + g(x)u \quad (\text{I. 25})$$

$$y(t) = H(x) \quad (\text{I. 26})$$

La linéarisation du système non linéaire précédent par les séries de Taylor autour d'un point quelconque $p_0 = (x_0, u_0)$ donne le système linéarisé suivant:

$$\dot{x} = A x(t) + B u(t) + D_i \quad (\text{I. 27})$$

$$y(t) = C x(t) + E_i \quad (\text{I. 28})$$

Avec:

$$A = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{p_0}, \quad B = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{p_0} \quad \text{et} \quad C = \left. \frac{\partial H(x, u)}{\partial x} \right|_{p_0} \quad (\text{I. 29})$$

Les termes additifs D_i et E_i sont donnés comme suit :

$$D_i = F(x, u) - A x(t) - B u(t) \quad (\text{I. 30})$$

$$E_i = H(x) - C x(t) \quad (\text{I. 31})$$

Cette linéarisation classique autour d'un point quelconque ne donne pas un modèle linéaire mais un modèle affine avec un terme additif constant ce qui empêche l'exploitation de ce modèle, sauf dans le cas particulier où le point $p_0 = (0,0)$ est un point d'équilibre, dans ce cas particulier on aura :

$$\begin{cases} \dot{x} = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (\text{I. 32})$$

Pour cette raison, Teixeira et al [Tei 99] ont essayé de trouver une méthode systématique pour la construction d'un multi-modèle avec des modèles locaux strictement linéaires, et qui approxime au maximum la dynamique du système non linéaire.

Méthode de linéarisation optimale [Tei 99]:

Considérons le système non linéaire suivant:

$$\dot{x} = F(x, u) = f(x) + g(x)u \quad (\text{I. 33})$$

Où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions non linéaires.

La linéarisation avec les séries de Taylor autour d'un point de fonctionnement $p_0 = (x_0, u_0)$ donne :

$$F(x, u)|_{p_0} = F(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{p_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{p_0} (u - u_0) + \text{Termes d'ordre supérieur} \quad (\text{I. 34})$$

$$\text{Où :} \quad F(x_0, u_0) = f(x_0) + g(x_0)u_0 \quad (\text{I. 35})$$

Si on suppose que le point de fonctionnement $p_0 = (x_0, u_0)$ est un point d'équilibre, on aura donc :

$$F(x_0, u_0) = 0 \quad \text{Et} \quad \dot{x} = 0 \quad (\text{I. 36})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieurs, le modèle linéarisé de (I.34) au point d'équilibre $p_0 = (x_0, u_0)$ est :

$$F(x, u)|_{p_0} = F(x_0, u_0) + \frac{\partial F(x, u)}{\partial x}|_{p_0}(x - x_0) + \frac{\partial F(x, u)}{\partial u}|_{p_0}(u - u_0) \quad (\text{I. 37})$$

$$F(x, u)|_{p_0} = F(x_0, u_0) + A(x - x_0) + B(u - u_0) \quad (\text{I. 38})$$

On note :

$$\delta x = (x - x_0) \quad \text{et} \quad \delta u = (u - u_0) \quad (\text{I. 39})$$

Finalement le modèle obtenu par linéarisation est donnée par l'équation suivante:

$$F(x, u)|_{p_0} = F(x_0, u_0) + A \delta x + B \delta u \rightarrow \dot{x}|_{p_0} = F(x_0, u_0) + A \delta x + B \delta u \quad (\text{I. 40})$$

On constate que ce modèle linéarisé (I. 38) n'est strictement linéaire qu'au point d'équilibre $p_0 = (0,0)$ (à l'origine), en ce point spécial, on aura le modèle linéaire suivant :

$$\dot{x} = A x + B u \quad (\text{I. 41})$$

Dans le cas général, le résultat de la linéarisation par séries de Taylor est un modèle affine qui possède donc des termes additifs.

Cas général

Dans cette section, nous voulons obtenir un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement quelconque.

Soit $p_0 = (x_0, u_0)$ un point de fonctionnement quelconque, le modèle linéarisé obtenu précédemment par la série de Taylor (en négligeant les termes supérieurs) est donné comme suit :

$$F(x, u)|_{p_0} = F(x_0, u_0) + A(x - x_0) + B(u - u_0) \quad (\text{I. 42})$$

Par développement on aura :

$$F(x, u)|_{p_0} = Ax + Bu - (Ax_0 + Bu_0 - F(x_0, u_0)) \quad (\text{I. 43})$$

Le terme d'offset $-(Ax_{op} + Bu_{op} - F(x_{op}, u_{op})) \neq 0$ en général.

Ce terme additif change le modèle linéaire en un modèle affine, ce qui complique les étapes suivantes d'analyse de stabilité, de synthèse des lois de commande et de conception d'observateur d'état.

Les travaux de Teixeira et Zak présenté dans [Tei 99] traitent ce problème de linéarisation et approxime le modèle non linéaire par un modèle linéaire avec sa matrice dynamique locale A_i et la matrice de commande locale B_i tel qu'au voisinage du point p_0 et $\forall u$ on aura :

$$F(x, u)|_{p_0} = (f(x) + g(x)u)|_{p_0} \cong (A_i x + B_i u)|_{p_0} \quad \forall u \quad (\text{I. 44})$$

$$(f(x_0) + g(x_0)u = A_i x_0 + B_i u) \quad \forall u \quad (\text{I. 45})$$

De (I.44) et (I.45) on peut prendre la matrice de commande suivante:

$$g(x_0)u = B_i u \quad (\text{I. 46})$$

Donc on aura le problème d'optimisation suivant :

On cherche une matrice A_i tel qu'au voisinage de x_0 on aura:

$$f(x) \approx A_i x \quad (\text{I. 47})$$

Avec :

$$f(x_0) = A_i x_0 \quad (\text{I. 48})$$

Soit a_i^T la i^{eme} ligne de la matrice A_i ; pour des raisons de développement nous présentons la condition (I.47) comme suit :

$$f_i(x) \approx a_i^T x \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{I. 49})$$

Et l'équation (10) sera :

$$f_i(x_0) = a_i^T x_0 \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{I. 50})$$

Où $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la i^{eme} composant de $f_i(x)$.

Nous développons en série de Taylor le côté droit de l'équation (I.49) au voisinage de x_0 et en négligeant les termes supérieurs on trouve :

$$f_i(x_0) + \nabla^T f_i(x_0)(x - x_0) \approx a_i^T x \quad (\text{I. 51})$$

Ou $\nabla f_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est l'opérateur gradient de f_i évalué à x (vecteur colonne), donc en utilisant l'équation (I.50), l'équation (I.51) sera :

$$\nabla^T f_i(x_0)(x - x_0) \approx a_i^T(x - x_0) \quad (\text{I. 52})$$

Tel que x appartient au voisinage de x_0 , dans ce cas, on est obligé de chercher a_i^T qui approxime au maximum $\nabla^T f_i(x_0)$ et satisfait la contrainte $f(x_0) = A_i x_0$.

Soit le critère suivant :

$$E = \frac{1}{2} \| (\nabla^T f_i(x_0) - a_i) \|_2^2 \quad (\text{I. 53})$$

On aura donc un problème d'optimisation sous contrainte de la forme suivante :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min}_{a_i}(E) \\ \text{avec } f(x_0) = A_i x_0 \end{array} \right\} \quad (\text{I. 54})$$

On note que le problème (I. 54) est un problème d'optimisation convexe avec contrainte, cela signifie que la condition nécessaire du premier ordre pour le minimum de E est aussi suffisante [Cho 96] (chapitre 21).

Les conditions du premier ordre de (I.53) sont les suivantes :

$$\nabla_{a_i}(E) + \lambda \nabla_{a_i}(a_i^T x_0 - f_i(x_0)) = 0 \quad (\text{I. 55})$$

$$f_i(x_0) = a_i^T x_0 \quad (\text{I. 56})$$

Avec λ multiplicateur de Lagrange.

∇_{a_i} : signifie que la dérivation se fait par rapport à a_i . Après dérivation de (I.55) on obtient :

$$a_i - \nabla f_i(x_0) + \lambda x_0 = 0 \quad (\text{I. 57})$$

En considérant le cas ou $x_0 \neq 0$, en multipliant (I.57) par x_0^T et en remplaçant l'équation (I.56) dans (I.57) on aura :

$$\lambda = \frac{x_0^T \nabla f_i(x_0) - f_i(x_0)}{\|x_0\|^2} \quad (\text{I.58})$$

En remplaçant λ donné par (I.58) dans l'équation (I.57) on obtient la formule finale suivante :

$$a_i^T = \nabla f_i^T(x_o) + \frac{f_i(x_o) - x_o^T \nabla f_i(x_o)}{\|x_o\|^2} x_o \quad (I.59)$$

6. Propriété d'approximation universelle avec les modèles flous de TAKAGI SUGENO :

Un système flou peut être vu comme une fonction d'entrée/sortie multi-dimensionnelle :

$$y = f(x) \quad (I.60)$$

Beaucoup de chercheurs [Tan 01][Yin 98][Zen 00] [X Wan 92] ont montré qu'avec suffisamment des règles floues on peut approximer n'importe quelle fonction réelle continue par un système de TS flou avec le degré de précision voulu.

Le théorème suivant montre que le système flou :

$$f(x) = \frac{\sum_{k=1}^r \bar{y}_k \left[\prod_{i=1}^n a_i^k \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^k}{\sigma_i^k}\right)^2\right) \right]}{\sum_{k=1}^r \left[\prod_{i=1}^n a_i^k \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^k}{\sigma_i^k}\right)^2\right) \right]} \quad (I.61)$$

Dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Defuzzification avec la méthode de centre de gravité
- Inférence avec l'opérateur produit (prod)
- Fuzzification singleton
- Fonction d'appartenance gaussienne

Ce système peut approximer n'importe quelle fonction non linéaire dans l'intervalle U avec un degré de précision voulu.

Théorème

Pour n'importe quelle fonction réelle continue g dans un ensemble compact $U \subset \mathbb{R}^n$ et une constante positive $\epsilon > 0$ avec un degré de précision voulu. Il existe un système flou f de la forme (I.61) tel que :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f - g| < \epsilon \quad (I.62)$$

7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les grandes lignes concernant la modélisation de Takagi-Sugeno floue ou multi-modèles, ce type de modélisation possède l'avantage de modéliser un système non linéaire complexe par des modèles simples linéaires interpolés par des fonctions d'appartenance floues sur les différentes plages de fonctionnement.

Ceci permet d'exploiter la riche théorie des systèmes linéaire, en commande par la conception des lois de commande de retour d'état flous (PDC) se basant sur des modèle linéaires et en observation et diagnostic par la conception des multi-observateur ou observateur de TS flou.

Le grand problème dans les systèmes de TS flous (multimodèle) est d'avoir des modèles locaux linéaires assurant localement les dynamiques du système global ; pour remédier à ce problème nous présentons une méthode systématique de linéarisation optimale proposé par Teixeira et al, cette méthode donne des modèles locaux linéaires suffisamment fidèles.

Nous avons vu que les systèmes de TS flous peuvent être considérés comme des approximateurs universels, ainsi n'importe quelle fonction non linéaire continue peut être approximé par un modèle de Takagi-Sugeno flou dans un intervalle d'évolution bien défini et avec le degré de précision voulu.

Chapitre II

Stabilité des systèmes de TS flous

Chapitre II

Stabilité des systèmes de TS flous

1. Introduction

La stabilité des systèmes TS flous (multi-modèles) a été largement étudiée dans le domaine de l'automatique et des mathématiques, L'analyse de la stabilité des modèles flous est généralement basée sur la méthode directe de Lyapunov, avec une fonction candidate de Lyapunov de type quadratique dans le cas le plus courant [Tan 92][Mur 97][Tan 01][Cha 02a], quelques travaux considèrent des fonctions non quadratique [M Joh 98][Cha 02b][Tan 03].

D'autre part, il existe dans la littérature beaucoup de travaux qui traitent le problème de la stabilisation des systèmes de TS flous via une loi de commande stabilisante. La loi de commande la plus pratique et la plus classique est la loi de commande PDC (parallel distributed compensation) [Wan 95][Wan 96], qui est un retour d'état flou (un ensemble de retours d'état élémentaires interpolés entre eux pour donner une loi PDC assurant la stabilité globale du modèle TS flous). Il existe plusieurs variantes de la loi PDC.

La synthèse de loi PDC se fait à travers la résolution d'un ensemble de conditions de stabilité mises sous forme LMI (Linear Matrix Inequality) [Wan 95][Tan 98].

Les notions de LMIs se retrouvent dans nombreux travaux depuis plusieurs années.

On peut considérer que la première LMI a été donnée en 1890 quand Lyapunov montra que la stabilité du système autonome :

$$\dot{x} = Ax \tag{II. 1}$$

est équivalente à l'existence d'une matrice symétrique définie positive telle que :

$$A^T P + P A < 0 \tag{II. 2}$$

Il a montré qu'il est possible de résoudre analytiquement ce problème.

En 1994, Nesterov et al [Nes 94] ont trouvé une solution pour résoudre les LMIs de manière efficace en utilisant des méthodes basées sur les points intérieurs. Boyd et al [Boy 94] ont

présenté dans leurs livre « *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* » l'historique et les détails des outils LMI.

2. Stabilité des systèmes :

La plupart des définitions de la stabilité des systèmes concernent la stabilité asymptotique globale au sens de Lyapunov de l'origine (le point 0) d'un système dynamique décrit comme suit :

$$\dot{x} = f(x) \text{ avec } x(0) = x_0 \quad f(x_e) = 0 \quad (\text{II. 3})$$

Où, f est une fonction qui décrit les dynamiques du système, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système.

2.1. Définition :

Soit le point d'équilibre x_e tel que $f(x_e) = 0$

Le point d'équilibre x_e est marginalement stable si :

$$\forall t > 0, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \|x(0) - x_e\| < \alpha \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \epsilon$$

Dans le cas contraire x_e est instable.

2.2. Stabilité globale au sens de Lyapunov :

Théorème :

Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système (II.3). Soit : $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0 \quad (\text{II. 4})$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{II. 5})$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (\text{La fonction } V(x) \text{ est radialement non bornée})$$

Alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

3. Les inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities **LMIs**)

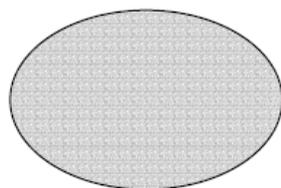
Lorsqu'on veut étudier les systèmes de TS flous (les multi-modèles) on est obligé d'aborder la notion de LMI (Linear Matrix Inégalité) ou inégalités matricielles linéaires. Ces dernières sont des outils très importants pour l'analyse de la stabilité des systèmes de TS flous, pour la synthèse des différentes lois de commande et pour la conception des différents observateurs d'état de TS flous (multi-observateurs).

Beaucoup de problèmes d'optimisation dans la théorie de la commande peuvent être formalisés avec des LMI. Pour analyser et résoudre ces LMI, on est conduit à utiliser des techniques d'analyse convexe [Boy 94].

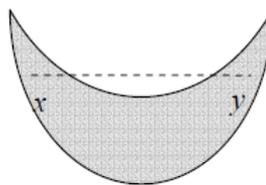
3.1. Ensemble convexe :

Soit un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, E est un ensemble convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in E$$



(a) Convexe



(b) Non convexe

Figure II.1. Propriété de convexité

3.2. Fonction convexe :

Soit une fonction $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ où E est un ensemble convexe, alors f est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Les premiers pas dans le domaine des LMIs reviennent aux travaux de Lyapunov sur la stabilité du système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (\text{II. 6})$$

Ce système est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive P vérifiant l'inégalité suivante :

$$A^T P + P A < 0 \quad (\text{II. 7})$$

L'inégalité précédente (II. 7) est ce qu'on appelle maintenant l'inégalité de Lyapunov, qui est une forme spéciale de LMI.

On note que l'inégalité de Lyapunov est la première LMI utilisée en analyse de stabilité des systèmes dynamiques.

Une LMI peut présenter plusieurs variétés de contraintes convexes. En automatique on exploite les LMIs pour décrire les problèmes de stabilité et de commande sous forme de contraintes d'inégalité matricielle convexe (ex : Cas de la stabilité quadratique au sens de Lyapunov).

3.3. Définition des LMI :

On appelle **LMI** (linear matrix inequality) une inégalité matricielle sous la forme suivante [Boy 94]:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{II. 8})$$

Avec $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur qui est la variable considérée.

$F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices symétriques. $i = 1, 2, \dots, m$. m est donné.

L'inégalité $F > 0$ veut dire que F est définie positive.

On dit que la LMI (II. 8) est une contrainte convexe par rapport à x c.-à-d.:

L'ensemble $\{x | f(x) > 0\}$ est convexe.

3.4. Cas où la variable d'une LMI est une matrice :

Dans la définition précédente nous voyons que la variable est un vecteur x , mais peut avoir des matrices comme variables dans les LMI, nous pouvons prendre comme exemple l'inégalité de Lyapunov où :

$$A^T P + P A < 0 \quad (\text{II. 9})$$

La matrice A est donnée et la matrice P est la variable.

3.5. Outils de simplification :

Souvent pour les multi-modèles, les problèmes de stabilité et de commande sont obtenus avec des inégalités matricielles non linéaires, pour les reformuler sous forme de LMI, on utilise des techniques mathématiques comme les changements de variables, le complément de Schur et d'autres techniques.

-Propriété de regroupement :

On peut regrouper plusieurs LMIs en une seule LMI bloc diagonale :

$$(\mathbf{F}(x)_1 > \mathbf{0}, \mathbf{F}(x)_2 > \mathbf{0}, \mathbf{F}(x)_3 > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}(x)_n > \mathbf{0}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{F}(x)_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \mathbf{F}(x)_n \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{II. 10})$$

-Le complément de Schur : [Boy 94]

Soient trois matrices $Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x . Les LMIs suivantes sont équivalentes :

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x) > 0 \quad (\text{II. 11})$$

$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{II. 12})$$

Le complément de Schur permet de transformer la première condition non linéaire en la seconde qui est linéaire.

-Contraintes quadratiques convexes : la contrainte sur la norme $\|Z(x)\| < 1$, où $Z(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est affine par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^m$ et est représentée par :

$$\begin{pmatrix} I_m & Z(x) \\ Z(x)^T & I_n \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{II. 13})$$

4. Les problèmes classiques LMIs

Dans la littérature, Il existe quelques problèmes classiques LMIs.

4.1. Problème de faisabilité de LMI :

Le problème LMI (**MLIP**), est le problème de la faisabilité de la LMI $F(x) > 0$, il s'agit de trouver un vecteur x_f (faisable) vérifiant la contrainte convexe LMI $F(x) > 0$

Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-F(x) < t.I \quad (\text{II. 14})$$

Si la valeur minimale de t est négative, le problème est réalisable.

On dit qu'on a résolu la LMI c.-à-d. qu'on a résolu la MLIP correspondant.

4.2. Problème des valeurs propres (EVP, Eigenvalue Problems) :

Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique sous une contrainte de type LMI :

$$\text{Minimiser } \lambda \text{ sous les contraintes } \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{II. 15})$$

4.3. Problème des valeurs propres généralisées (GEVP, Generalized Eigenvalue Problems) :

Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices, par rapport à une contrainte LMI :

Minimiser λ

$$\text{Sous les contraintes : } \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{II. 16})$$

Ces problèmes d'optimisation convexe peuvent être résolus par différents types de méthodes [Boy 94] [Kha 02] :

- Méthode des plans sécants
- Méthode de l'ellipsoïde
- Méthode du type simplexe
- Méthode des points intérieurs

5. Stabilité quadratique des systèmes TS flous (multi-modèles)

Il existe de nombreux travaux qui traitent le problème de la stabilité du système TS flou [Tan 92] [Mur 97] [Tan 01] et beaucoup d'approches proposées reposent sur des fonctions candidates de Lyapunov quadratiques [Joh 92] [Tan 92] [Mur 97]. D'autres travaux utilisent des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux [M Joh 98]. Il existe dans la littérature

quelques travaux qui considèrent des fonctions de Lyapunov non quadratiques [Cha 02b] [Tan 03]. .

Nous considérons le système de TS flou suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) A_i x(t) \quad (\text{II. 17})$$

Considérons la fonction quadratique classique de Lyapunov donnée par:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (\text{II. 18})$$

Le problème de la stabilité du système (II. 17) revient à la recherche d'une matrice symétrique définie positive P commune qui garantit la stabilité asymptotique globale du multi-modèle, car même si tous les sous modèles sont stables (les valeurs propres des matrices A_i sont toutes à partie réelle négative), le multi-modèle (l'interpolation de sous-modèles) n'est pas nécessairement stable [Tan 01].

Théorème 1 [Tan 98]:

Le système TS flou (le multi-modèle) décrit par l'équation (II.17) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive commune P tel que les LMIs suivantes soient vérifiées :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II. 19})$$

Les matrices A_i sont données

Le théorème (1) concerne la stabilité en boucle ouverte.

6. Stabilité relaxée

Nous constatons que la condition suffisante de l'existence d'une matrice symétrique définie positive P commune à tous les sous-modèles est indispensable pour assurer la stabilité asymptotique du multi-modèle global. Cependant, si le nombre de modèles locaux est grand, il peut être difficile de trouver une matrice commune qui garantisse la stabilité des multi-modèles. De plus, ces contraintes sont souvent très conservatrices. Dans beaucoup de cas, une matrice symétrique et définie positive commune n'existe pas, alors que le multi-modèle est stable [Tan 01] [Cha 00].

Soit le multi-modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (\text{II. 20})$$

Avec la loi de commande :

$$u(t) = - \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) K_j x(t) \quad (\text{II. 21})$$

Le système en boucle fermée sera donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (\text{II. 22})$$

$$\text{Avec } \omega_i(\theta(t)) \cap \omega_j(\theta(t)) \neq \emptyset \quad (\text{II. 23})$$

On prend :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (\text{II. 24})$$

Si le nombre des sous-modèles est assez grand, on considère le théorème de stabilité relaxée suivant :

Théorème 2 [Tan 01] stabilité relaxée:

On suppose que le nombre de règles activées à chaque instant t est inférieur ou égale à s , où $1 < s \leq r$. Le système de TS flou décrit par l'équation (II. 22) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive P et une matrice semi-définie positive Q tel que :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s - 1)Q < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (\text{II. 25})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - Q \leq 0 \quad \forall i < j \quad (\text{II. 26})$$

Pour surmonter le problème du conservatisme de l'approche quadratique (fonction de Lyapunov quadratique), de nombreux travaux ont été développés afin d'établir des conditions de stabilité relaxant certaines des contraintes précédentes. Par exemple, Jo-hanson et al [M Joh 98] considèrent une fonction de Lyapunov quadratique par morceaux.

Chadli et al [Cha 02b] ont présenté d'autres conditions de stabilité en utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques (quadratique par morceau) de la forme :

$$V(x(t)) = \text{Max}\{ V_1(x(t)), V_2(x(t)), \dots, V_r(x(t))\} \quad (\text{II. 27})$$

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t) \quad P_i = P_i^T > 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{II. 28})$$

Théorème 3 [M Joh 98] [Cha 02a] :

Le système multi-modèle (II.17) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe des matrices symétriques et définies positives P_i pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et des scalaires positifs τ_{ijk} , vérifiant les inégalités suivantes :

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^r \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0 \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, r\} \quad (\text{II. 29})$$

$$P_j > 0, \tau_{ijk} > 0 \quad (\text{II. 30})$$

Jadbabaie [Jad 99] utilise une fonction de Lyapunov non quadratique. Chai et al [Chai 98] ont proposé des conditions de stabilité asymptotique dépendantes de la nature de l'entrée et de la dynamique de la sortie.

Quelques travaux ont porté sur la réduction du pessimisme des conditions de stabilité quadratique des multi-modèles en utilisant des fonctions de Lyapunov polyquadratiques [M Joh 98] [Cha 02a] [Cha 02b] de forme suivante :

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) P_i x(t) \quad (\text{II. 31})$$

7. Stabilisation des systèmes TS flous :

La loi de commande la plus utilisée pour les systèmes de TS flous, c'est la loi PDC que nous allons la détailler dans ce qui suit.

7.1. La commande PDC :

Considérons le système TS flou suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{II. 32})$$

$$y(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) C_i x(t) \quad (\text{II. 33})$$

La loi de commande PDC du système TS flou (II.32) est un retour d'état flou, où pour chaque sous modèle on définit un retour d'état et un gain local, l'interpolation (l'aspect flou) entre les sous régulateurs se fait à travers une fonction de pondération floue.

La **Loi de commande PDC (Parallel Distributed Compensation)** [Wan 95] [Tan 98][Wan 96] est donc donnée par :

$$u(t) = - \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) K_j x(t) \quad (\text{II. 34})$$

Où r est le nombre des sous-modèles.

$\omega_j(\theta(t))$ La fonction de pondération. $\theta(t)$ la variable de décision.

K_j Les gains locaux des sous-régulateurs.

$x(t)$ L'état global du système.

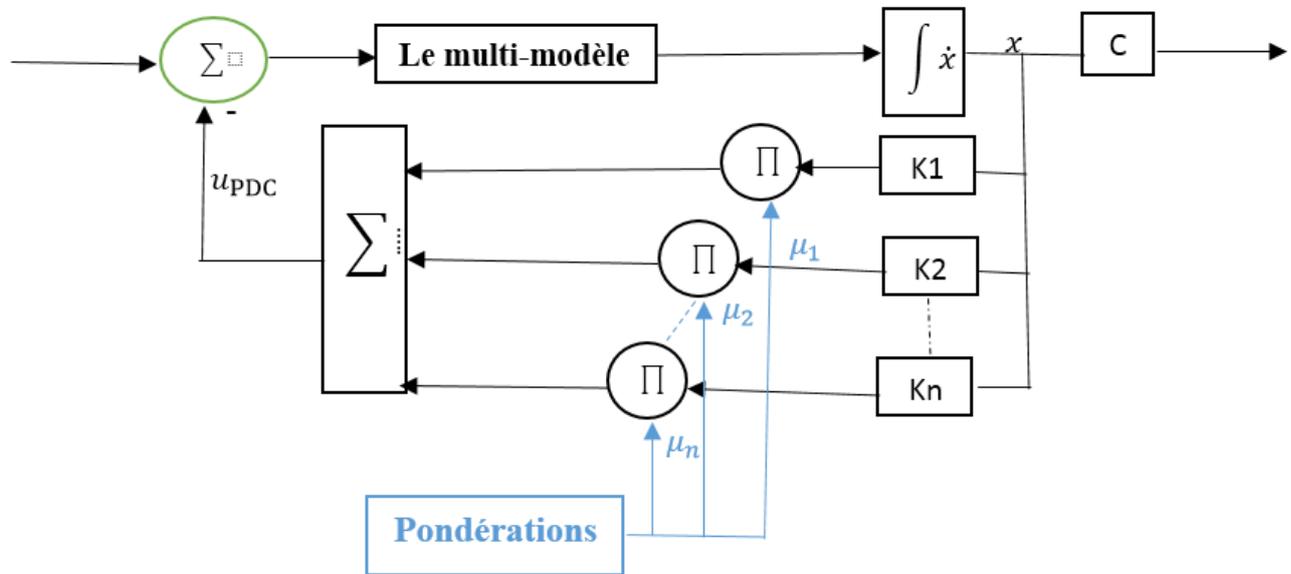


Figure II.2. Technique de la commande PDC

Cette loi de commande est fréquemment utilisée pour les modèles TS flous.

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) \left(A_i x(t) - B_i \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) K_j x(t) \right) \quad (\text{II. 35})$$

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) B_i K_j x(t) \quad (\text{II. 36})$$

On multiplie l'équation par la somme :

$$\sum_1^r \omega_j(\theta(t)) = 1 \quad (\text{II. 37})$$

On obtient

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) B_i K_j x(t) \quad (\text{II. 38})$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) B_i K_j x(t) \quad (\text{II. 39})$$

On aura

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (\text{II. 40})$$

$$\text{Avec } \omega_i(\theta(t)) \cap \omega_j(\theta(t)) \neq \emptyset \quad (\text{II. 41})$$

On prend :

$$A_i - B_i K_j = G_{ij} \quad (\text{II. 42})$$

L'équation (II. 40) sera de la forme suivante:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) G_{ij} x(t) \quad (\text{II. 43})$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) \frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} x(t) \quad (\text{II. 44})$$

Théorème 4 [Tan 98]:

Le système décrit par l'équation (II.44) est asymptotiquement globalement stable s'il existe une matrice définie positive $P > 0$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (\text{II. 45})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) < 0 \quad \forall i < j \quad (\text{II. 46})$$

7.2. Procédure de conception de la commande PDC (mise sous forme LMI ou linéarisation):

On rappelle que les variables recherchés sont les gains K_i et la matrices définie positive P tel que [Haz 16]:

$$\mathbf{1^{ere} condition} \Leftrightarrow (A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i) < \mathbf{0} \quad (\text{II. 47})$$

$$\mathbf{2^{eme} condition} \Leftrightarrow \left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right)^T P + P \left(\frac{A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i}{2} \right) < \mathbf{0} \quad (\text{II. 48})$$

En multipliant à gauche et à droite les deux inégalités précédentes par $X = P^{-1}$ on aura :

$$\mathbf{1^{ere} condition} \Leftrightarrow X(A_i - B_i K_i)^T + (A_i - B_i K_i)X < \mathbf{0} \quad (\text{II. 49})$$

$$\mathbf{2^{eme} condition} \Leftrightarrow X(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)^T + ((A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)X < \mathbf{0} \quad (\text{II. 50})$$

Par développement:

$$XA_i^T - XK_i^T B_i^T + A_i X - B_i K_i X < \mathbf{0} \quad (\text{II. 51})$$

$$XA_i^T - XK_j^T B_i^T + XA_j^T - XK_i^T B_j^T + A_i X - B_i K_j X + A_j X - B_j K_i X < \mathbf{0} \quad (\text{II. 52})$$

On constate que les inégalités précédentes ne sont pas linéaires, pour remédier à ce problème on fait le changement de variable :

$$M_i = K_i X \quad (\text{II. 53})$$

Finalement on obtient les LMIs suivantes en X et M_i :

$$-XA_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i > \mathbf{0} \quad (\text{II. 54})$$

$$-XA_i^T - A_i X - XA_j^T - A_j X + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i \geq \mathbf{0} \quad (\text{II. 55})$$

Les gains des retours locaux de la commande PDC seront donnés par :

$$P = X^{-1}, K_i = M_i P \quad (\text{II. 56})$$

7.3. Les lois de commande dérivées de la loi PDC :

▪ La loi de commande PPDC :

La loi de commande PPDC ou (Proportional PDC) est une loi dérivée de la loi PDC proposée par [Li J. 00], elle est donnée par :

$$u(t) = - \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) k_i K x(t) \quad (\text{II. 57})$$

$k_i \in \mathbb{R}$: est le gain scalaire propre au i^{eme} sous modèle.

$K \in \mathbb{R}^{p \times n}$: est le gain du retour d'état commun à tous les sous-modèles.

p : est le nombre des entrées (dimension du vecteur de la commande). r : est le nombre des sous modèles.

L'avantage de cette loi de commande est de réduire le nombre des inconnues de $(p \times n \times r)$ pour le PDC ordinaire à $(r + p \times n)$ inconnues pour cette loi.

- **La loi de commande augmentée de terme** $\sum_1^r \frac{\partial \omega_i(\theta(t))}{\partial t} K_i x(t)$

Cette loi de commande prend en considération la variation de la fonction d'appartenance elle est donnée par :

$$u(t) = - \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) K_i x(t) - \sum_1^r \frac{\partial \omega_i(\theta(t))}{\partial t} K_i x(t) \quad (\text{II. 58})$$

Cette loi de commande nécessite une fonction d'appartenance continûment dérivable, mais permet de réduire le conservatisme des conditions de stabilité quadratique [Tan 01] [Cha 02a].

8. La poursuite de référence:

Beaucoup des travaux de recherche se sont occupés de la commande des systèmes décrits par des multi-modèles (des systèmes de TS flous). La plupart de ces travaux ont proposé des stratégies de commande stabilisantes, ce qui assure une stabilité locale ou globale, exponentielle ou asymptotique, mais il y a peu de travaux qui traitent le problème de la poursuite de référence ou de trajectoire. Dans ce contexte, une approche se basant sur une combinaison de la commande à mode glissant et la commande PDC pour les modèles TS a été proposée par Chang et al [Chan 02], d'autres travaux ont été reportés dans [Zha 01][Tse 01].

Dans cette section, on considère ce problème de suivi de référence par la conception d'une loi de commande stabilisante et qui assure en même temps une bonne poursuite de référence.

Pour cet objectif, on a considéré une loi de commande PDC améliorée composée d'une loi PDC (parallel distributed compensation) conçue précédemment dans ce chapitre:

$$u_{PDC}(t) = \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) (-K_j x(t)) \quad (\text{II. 59})$$

Et un pré-compensateur flou [Haz 16].

$$u_{pc}(t) = \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) (N_j y_{ref}(t)) \quad (\text{II. 60})$$

Ce pré-compensateur est une approximation obtenue en calculant le gain N_j pour chaque sous modèle en négligeant les interactions entre eux. N_j sera donc calculé exactement comme pour un système linéaire.

La loi PDC améliorée proposée sera donnée comme suit :

$$u(t) = \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) (-K_j x(t) + N_j y_{ref}(t)) \quad (\text{II. 61})$$

Où les K_j sont les gains de la loi PDC, ils sont calculés par la résolution des LMI (II. 54) (II. 55) (II. 56).

Les gains locaux N_j du pré-compensateur sont calculés par la formule suivante [Haz 16]:

$$N_j = -(C(A_j - BK_j)^{-1}B)^{-1} \quad (\text{II. 62})$$

Et finalement $y_{ref}(t)$ est la référence désirée.

▪ **Procédure de calcul des gains de pré-compensateur :**

On considère le système SISO suivant :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{II. 63})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{II. 64})$$

On définit le retour d'état avec pré-compensateur :

$$u(t) = -Kx(t) + Ny_{ref}(t) \quad (\text{II. 65})$$

Dans le régime permanent $\dot{x}(t) = 0$ et on veut $y(t) = y_{ref}(t)$, donc on aura :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) = 0 \quad (\text{II. 66})$$

$$y(t) = Cx(t) = y_{ref}(t) \quad (\text{II. 67})$$

En remplaçant la commande (II. 65) dans l'équation (II. 66) on aura :

$$(A - BK)x(t) + BNy_{ref}(t) = 0 \quad (\text{II. 68})$$

$$x(t) = -(A - BK)^{-1}BNy_{ref}(t) \quad (\text{II. 69})$$

En remplaçant $x(t)$ dans l'équation (II. 67) on obtient :

$$y_{ref}(t) = -C(A - BK)^{-1}BN y_{ref}(t) \quad (\text{II. 70})$$

De l'équation (II. 70) , la condition pour que $y(t) = y_{ref}(t)$ sera:

$$-C(A - BK)^{-1}BN = I \quad (\text{II. 71})$$

On suppose que la matrice $(-C(A - BK)^{-1}B)$ est inversible, d'où le gain du pré-compensateur sera donné par :

$$N = (-C(A - BK)^{-1}B)^{-1} \quad (\text{II. 72})$$

9. Conclusion :

Nous avons envisagé dans ce chapitre la stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno flous (ou multi-modèles) au sens de Lyapunov par une fonction de Lyapunov candidate de type quadratique qui sera utilisée par la suite pour la stabilisation du système flou grâce à un régulateur PDC. La stabilisation du système de TS flou implique la stabilisation du système non linéaire qu'il représente.

La stabilisation du système flou se fait à travers la conception d'une commande PDC conçue par la formulation des conditions de stabilité de ce système sous forme LMI, ce qui est résolu par des outils d'optimisation convexe.

La résolution des LMI donne une matrice **définie positive P** et l'ensemble des vecteurs gains du régulateur **PDC**.

Généralement, la loi de commande PDC assure la stabilité et non pas la poursuite de référence, cette dernière est peu étudiée dans le domaine des systèmes TS flous. Pour cela nous avons amélioré le PDC conventionnel par un pré-compensateur flou afin d'assurer simultanément la stabilité et la poursuite de référence. Ce pré-compensateur flou est calculé pour chaque sous modèle en négligeant les interactions. Le calcul des gains des pré-compensateurs élémentaires se fait comme dans le cas linéaire.

Chapitre III

Les observateurs de TS flous
(les multi-observateurs)

Chapitre III

Les observateurs de TS flous (les multi-observateurs)

1. Introduction :

Les observateurs d'état sont des capteurs logiciels très performants utilisés par les automaticiens pour estimer tout ou une partie du vecteur d'état dont la mesure est difficile ou impossible pour des raisons techniques ou économiques.

Les observateurs d'état trouvent leur intérêt dans plusieurs domaines et notamment en commande des systèmes, en supervision et en diagnostic des défauts.

La construction d'un observateur d'état s'appuie sur un modèle mathématique représentant le comportement dynamique du système. Selon la dynamique de l'observateur, on distingue deux types d'observateurs : Linéaire ou non linéaire.

Comme connu, les observateurs linéaires ne sont valables que localement. S'il est nécessaire d'obtenir un observateur précis sur une large plage de fonctionnement, on se tourne naturellement vers le formalisme non linéaire. Le passage du linéaire au non linéaire nécessite l'utilisation d'outils théoriques très différents.

Pour remédier à ce problème, beaucoup de chercheurs se sont orientés vers la théorie de la logique floue ou modèle flou de Takagi-Sugeno pour concevoir des observateurs de TS flous ou multi-observateurs.

Dans la littérature, on trouve beaucoup de travaux qui traitent de l'approche TS floue (ou multi-modèles) et des observateurs flous (ou multi-observateur) [Tan 98] [Tei 99] [You 14] [Ich 09]. La plupart de ces travaux s'intéressent à l'obtention de modèles élémentaires locaux, la forme des fonctions d'appartenance, les intervalles de fonctionnement, leur choix et leur partition. Parmi la plus importante notion rencontrée dans la théorie floue, nous avons les variables de prémisse (décision), ces dernières sont des facteurs prépondérants dans la conception des modèles de TS flous et dans la synthèse des observateurs flous, car elles décident de l'interpolation des modèles locaux et définissent donc l'approximation et l'équivalence entre le modèle non linéaire et le modèle TS flou (le multi-modèle) associé.

On distingue deux types de variable de prémisse :

-Mesurable : par exemple la commande ou la sortie

-Non mesurable : comme les états non accessibles

On présente par la suite quelques travaux qui s'occupent des observateurs flous avec des variables de prémisses mesurables et non mesurables :

La plupart des travaux de recherche considèrent deux cas de variables de prémisses (mesurables ou non mesurables) [Tan 98] [Akh 04] [Ich 09], dans le **cas mesurable**, on utilise des variables de prémisses mesurables pour le multi-modèle et pour le multi-observateur, et dans le **non mesurable**, on utilise des variables de prémisses mesurables pour le multi-modèle et des variables de prémisses non mesurables pour le multi-observateur.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une nouvelle classification concernant l'utilisation des variables de prémisses pour le système augmenté composé de l'état du multi-modèle et de l'erreur d'estimation d'état. Cette classification prend en considération la nature des variables de prémisses (similaires ou différentes) pour l'observateur flou et pour le multi-modèle.

2. Principe et méthodologie

La connaissance de l'état d'un système est d'une grande importance que ce soit pour la synthèse d'une loi de commande ou bien pour l'élaboration d'une stratégie de diagnostic et de détection de défauts. Cependant en pratique il est parfois très difficile d'accéder aux états des procédés, car les mesures sont difficiles à effectuer à cause de capteurs trop onéreux ou même totalement inexistantes.

Un observateur d'état est un algorithme basé sur la connaissance des modèles décrivant le comportement du procédé et utilisant des mesures acquises sur le procédé afin de reconstruire les mesures manquantes. Le but de l'observateur est de fournir à chaque instant la valeur du vecteur d'état ou une évaluation de celui-ci. De façon générale, on considère que l'on dispose toujours des équations d'état du système. Le cas trivial consiste à réaliser une implantation en boucle ouverte comme illustré sur la figure suivante :

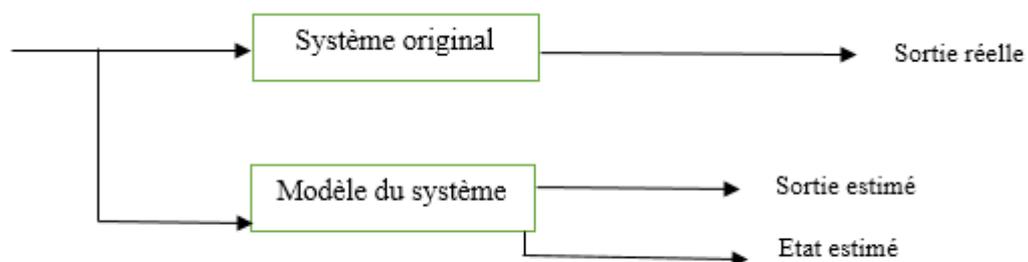


Figure III.1. Reconstructeur d'état en boucle ouverte

Le schéma en boucle ouverte peut être valable à deux conditions : La première suppose que le système réel débute avec des conditions initiales connues, la seconde suppose l'absence de toute perturbation ou de bruit dans le système. Ces conditions n'étant jamais réunies, le schéma d'évaluation du vecteur d'état du système en boucle ouverte n'est pas envisageable. Quand un événement non prévisible survient dans le système, nous n'avons à notre disposition que sa répercussion sur la sortie mesurée. C'est pourquoi la conception d'un observateur doit prendre en considération la mesure du système, cette solution est illustrée sur la figure suivante (**Figure III.2**):

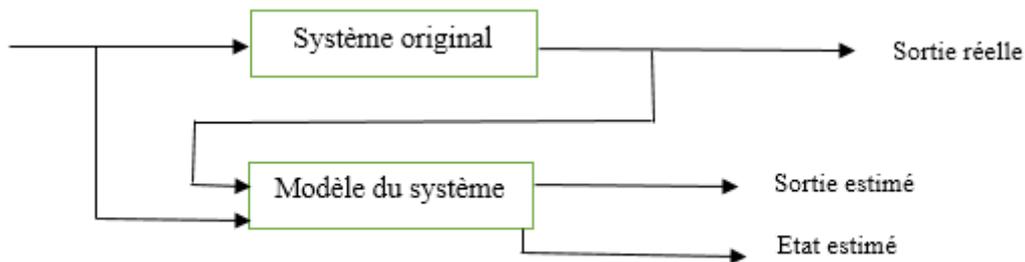


Figure III.2. Reconstructeur d'état en boucle fermée

L'observation se fait en deux phases : La première est une étape d'estimation et la seconde est une étape de correction. L'estimation se fait par le calcul des grandeurs d'état à l'aide de modèles proches du système, et la correction se fait par la soustraction entre les états estimés et ceux mesurés (erreur d'estimation) multiplié par un gain. Ce gain régit la dynamique et la robustesse de cet observateur, son choix est donc important et doit être adapté aux propriétés du système dont on veut observer les états.

A partir de ce schéma de principe pour les observateurs, nous pouvons mettre en œuvre toutes sortes d'observateurs, leurs différences se situant uniquement dans la synthèse de la matrice de gain. A présent, nous allons présenter l'observateur de Luenberger d'ordre plein et les différents types de multi-observateurs de Luenberger (observateurs flous de Takagi-Sugeno) selon la mesurabilité des variables de prémisse utilisées.

3. Observateur de Luenberger d'ordre plein :

Cette estimation d'état utilise les sorties mesurées du système, ses entrées et son modèle. Lorsqu'un système est complètement observable, la reconstruction d'état peut être effectuée.

Soit le système défini par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ le vecteur d'entrée, $y(t)$ le vecteur de sortie, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$,

A , B et C représentent les matrices du modèle du système de dimensions appropriées.

L'idée de base d'observateur d'ordre plein est de calculer le vecteur de l'erreur d'estimation de la sortie pour le réinjecter à l'entrée de l'observateur.

Les équations dynamiques définissant l'observateur sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (\text{III. 2})$$

La synthèse de l'observateur revient donc à calculer la matrice de gain L . L'erreur d'estimation de l'état est égale à :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{III.3})$$

En dérivant on obtient :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (\text{III. 4})$$

En remplaçant \dot{x} et $\dot{\hat{x}}$ par leurs expressions, on obtient :

$$\dot{e}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (\text{III. 5})$$

$$\dot{e}(t) = A(x(t) - \hat{x}(t)) - LC(x(t) - \hat{x}(t)) \quad (\text{III. 6})$$

$$\dot{e}(t) = [A - LC](x(t) - \hat{x}(t)) \quad (\text{III. 7})$$

$$\dot{e}(t) = (A - LC) e(t) \quad (\text{III. 8})$$

On constate donc que la dynamique de l'erreur dépend de la matrice L . Pour que l'erreur tende asymptotiquement vers zéro, lorsqu'aucun défaut n'est appliqué au système, il faut choisir L de façon à ce que les valeurs propres de la matrice dynamique de l'erreur ($A - LC$) soient à partie réelle négative. En fait, la synthèse de ce type d'observateur revient à un placement de pôles.

4. Les observateurs de TS flous

Dans cette thèse, nous allons présenter deux classification pour l'utilisation des variables de prémisses ; une classification existante dans la littérature et l'autre proposée dans le cadre de cette thèse.

4.1. Classification existante :

Dans la littérature, on considère deux cas de variables de prémisses [Tan 01] [Akh 04] [Ich09] lors la construction et stabilisation d'un modèle de TS flou (multi-modèle) via un observateur de TS flou (multi-observateur):

A. variables de prémisses mesurables :

Dans ce cas, on utilise la même variable de prémisses mesurable pour :

- Le modèle de TS flou (multi-modèle)
- L'observateur de TS flou (multi-observateur)

B. variables de prémisses non mesurables :

Dans ce cas, on utilise :

- une variable de prémisses mesurable pour le modèle de TS flou (multi-modèle).
- Une variable de prémisses non mesurable pour l'observateur de TS flou (multi-observateur)

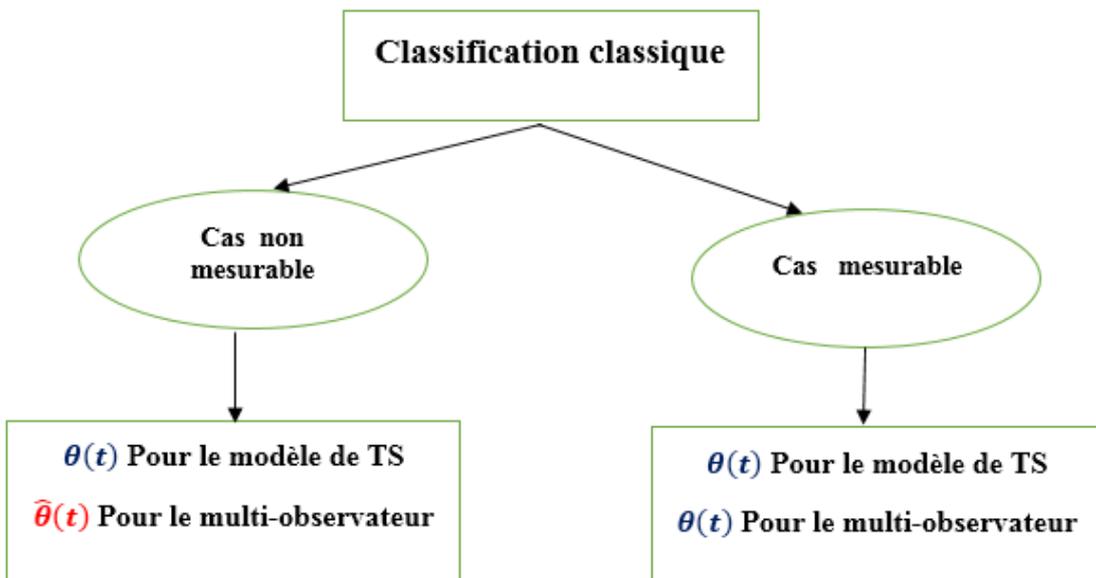


Figure III. 3. Classification classique des variables de prémisses

4.2. Classification basée sur la similarité des variables de prémisse [Haz 18]:

Dans cette section on présente une nouvelle classification pour les variables de prémisse comme suit :

On désigne par nature des variables de prémisse la mesurabilité de la variable, elle est donc soit mesurable, soit non mesurable.

A. Utilisation de variables de prémisse de même nature

⇒ La même variable de prémisse **mesurable** pour:

- Le modèle de TS flou (multi-modèle)
- L'observateur de TS flou (multi-observateur)

⇒ La même variable de prémisse **non mesurable** pour:

- Le modèle de TS flou (multi-modèle)
- L'observateur de TS flou (multi-observateur)

B. Utilisation de variables de prémisse de nature différente :

- une variable de prémisse **mesurable** pour le modèle de TS flou (multi-modèle)
- Une variable de prémisse **non mesurable** pour l'observateur de TS flou (multi-observateur)

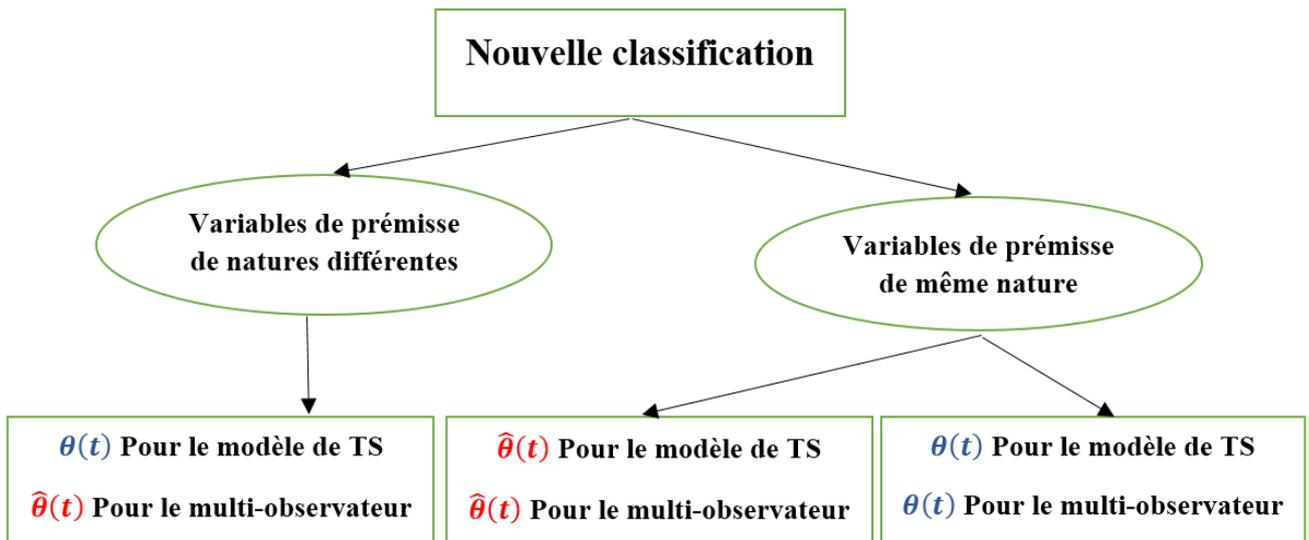


Figure III. 4. Classification basée sur la similarité des variables de prémisse

5. Variables de prémisses de même nature

Dans ce cas, nous avons deux possibilités, des variables de prémisses de même nature, les tous mesurable ou les tous non mesurable.

5.1. Même variables de prémisses mesurables :

Dans ce cas, nous considérons la même variable de prémisses mesurable $\theta(t)$ pour :

- Le modèle de TS flou (multi-modèle) décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{III. 9})$$

- Et pour l'observateur de TS flou (multi-observateur) :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (\text{III. 10})$$

$$\hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \quad (\text{III. 11})$$

Où $C = [0 \ 1]$ est la matrice sortie

$\hat{y}(t)$ est la sortie estimée

L_i sont les gains locaux

- La loi de commande PDC, qui dépend du vecteur d'état, est donnée par :

$$u(t) = \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) (-K_j \hat{x}(t)) \quad (\text{III. 12})$$

Les équations en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) \left(A_i x(t) + B_i \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) (-K_j \hat{x}(t)) \right) \quad (\text{III. 13})$$

On a:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t) - e(t) \quad (\text{III. 14})$$

L'équation (III. 13) peut être réécrite:

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) \left(A_i x(t) - B_i \sum_{j=1}^r \omega_j(\theta(t)) K_j (x(t) - e(t)) \right) \quad (\text{III. 15})$$

Après développement de l'équation (III. 15) on aura:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) (B_i K_j) e(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 16})$$

Les équations de la dynamique de l'erreur d'estimation :

L'erreur d'estimation est donnée par l'équation:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (\text{III. 17})$$

En dérivant, on trouve:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \quad (\text{III. 18})$$

La dynamique de l'erreur d'estimation sera donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) \\ & + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \end{aligned} \quad (\text{III. 19})$$

$$\dot{e}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i - L_i C) (x(t) - \hat{x}(t)) \quad (\text{III. 20})$$

Finalement l'erreur d'estimation sera donné par:

$$\dot{e}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i - L_i C) e(t) \quad (\text{III. 21})$$

Note : On note que toutes les paires (A_i, C) doivent être observables.

Théorème : [Tan 98, Pat 98, et Ma 98] l'erreur d'estimation décrit par l'équation (III. 21) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive \mathbf{P} telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$(A_i - L_i C)^T P + P(A_i - L_i C) < \mathbf{0} \quad i \in 1, 2, \dots, r \quad (\text{13})$$

Le système augmenté :

On considère le système augmenté $\dot{\mathbf{X}}_a(t)$ décrit par :

$$\dot{\mathbf{X}}_a(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 22})$$

Des équations (III. 16) (III. 21) on peut écrire :

$$\dot{X}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) G_{ij} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 23})$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C \end{pmatrix} \quad (\text{III. 24})$$

En développant l'équation (III. 23) on arrivera à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X}_a(t) = & \sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(t)) G_{ii} X_a(t) \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\theta(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) X_a(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 25})$$

Théorème 2 [Tan 98]:

Le système augmenté $X_a(t)=[x(t) ; e(t)]$ décrit par l'équation (III. 25) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que les conditions suivantes soient vérifiées $i, j = 1, \dots, r$:

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad \forall i, \quad (\text{III. 26})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) < 0 \quad \forall i < j \quad (\text{III. 27})$$

5.2. Même variable de prémisses non mesurable :

Dans ce cas, nous considérons le même variable de prémisses non mesurable $\hat{\theta}(t)$ pour :

- Le modèle de TS flou (multi-modèle) décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{III. 28})$$

- Et pour l'observateur de TS flou (multi-observateur) :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_1^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (\text{III. 29})$$

$$\hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \quad (\text{III. 30})$$

Où $C = [0 \ 1]$ est la matrice de sortie.

$\hat{y}(t)$ est la sortie estimée.

L_i sont les gains locaux de l'observateur.

- La loi de commande PDC, qui dépend du vecteur d'état, il est donné par :

$$u(t) = \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) (-K_j \hat{x}(t)) \quad (\text{III. 31})$$

De point de vue mathématique, le changement de $\theta(t)$ par $\hat{\theta}(t)$ dans les équations de la section précédente ne change rien, nous faisons donc le même développement et nous trouverons le résultat suivant :

Equations de La boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) \left(A_i x(t) + B_i \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) (-K_j \hat{x}(t)) \right) \quad (\text{III. 32})$$

On a :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t) - e(t) \quad (\text{III. 33})$$

L'équation (16) sera donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) \left(A_i x(t) - B_i \sum_{k=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) K_j (x(t) - e(t)) \right) \quad (\text{III. 34})$$

Après le développement de l'équation (III. 34) on aura :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) \omega_j(\theta(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) (B_i K_j) e(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 35})$$

L'erreur d'estimation avec une variable de prémisse non mesurable $\hat{\theta}(t)$ sera donné par :

$$\dot{e}(t) = \sum_1^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) (A_i - L_i C) e(t) \quad (\text{III. 36})$$

Pour la stabilité de cet observateur, nous arrivons à la même conclusion que dans le cas précédent car les variables de prémisse sont de même nature.

Proposition [Haz 18] :

L'observateur de TS flou décrit par les équations (III. 29) (III. 30) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$(A_i - L_i C)^T P + P(A_i - L_i C) < 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, r\} \quad (\text{III. 37})$$

Le système augmenté :

Nous considérons le système augmenté $\dot{X}_a(t)$ décrit par :

$$\dot{X}_a(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 38})$$

De les équations (III. 35)(III. 36) on peut écrire :

$$\dot{X}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) G_{ij} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III. 39})$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C \end{pmatrix} \quad (\text{III. 40})$$

En développant l'équation (III. 39), nous arriverons à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{X}_a(t) = & \sum_{i=1}^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) G_{ii} X_a(t) \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j}^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) X_a(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 41})$$

Théorème 2:

Le système augmenté $X_a(t)=[x(t) ; e(t)]$ décrit par l'équation (III. 41) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice P commune définie positive telle que les conditions suivantes soient vérifiées $i, j = 1, \dots, r$:

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad \forall i, \quad (\text{III. 42})$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) < 0 \quad \forall i < j \quad (\text{III. 43})$$

5.3.La séparation de calcul régulateur/observateur :

A travers les développements mathématiques effectués dans la section précédente, on conclut que dans le cas où on utilise la même nature des variables de prémisse (soit mesurable ou non) [Haz 18], nous pouvons effectuer les calculs des gains de régulateur et d'observateur séparément.

5.4. Placement des pôles de l'observateur :

Dans la conception des observateurs, nous devons prendre en considération la dynamique de l'observateur par rapport à la dynamique du système de manière à ce que la dynamique de l'observateur soit plus rapide que la dynamique du système. Pour assurer cette condition, nous allons placer judicieusement les pôles de l'observateur.

Pour cela, nous considérons $S(\alpha, \beta)$ une région du plan complexe limité par un cercle de centre $(0,0)$ de rayon β et la droite verticale d'abscisse $-\alpha$ avec $\alpha > 0$.

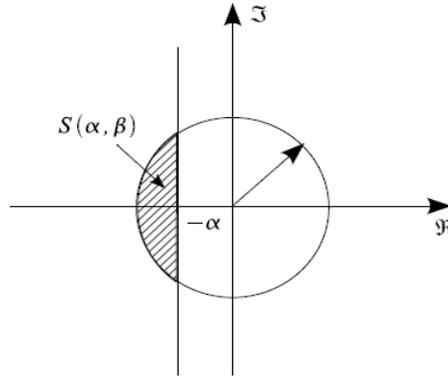


Figure III.5: région de placement de pôles

Corolaire [Pat 98] : Tous les observateurs locaux ont des valeurs dans la région $S(\alpha, \beta)$ s'il existe une matrice commune définie positive telle que les conditions suivantes soient vérifiées $i = 1, \dots, r$:

$$\begin{pmatrix} -\beta P & (A_i - L_i C)^T P \\ P(A_i - L_i C) & -\beta P \end{pmatrix} < 0 \tag{III. 44}$$

$$(A_i - L_i C)^T P + P(A_i - L_i C) + 2\alpha P < 0 \tag{III. 45}$$

5.5. Procédure de calcul et linéarisation des conditions de stabilité sous forme de

LMI:

Pour résoudre les conditions (III.44 et III.45), nous les transformons en conditions sous forme LMI comme suit :

On rappelle que :

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{III. 46}$$

Les conditions précédentes seront :

$$\begin{pmatrix} -\beta P & A_i^T P - C^T L_i^T P \\ P A_i - P L_i C & -\beta P \end{pmatrix} < 0 \tag{III. 47}$$

$$A_i^T P - C^T L_i^T P + P A_i - P L_i C + 2\alpha P < 0 \tag{III. 48}$$

On fait le changement de variable suivant:

$$P L_i = M_i \tag{III. 49}$$

En appliquant le changement de variable aux inégalités (III. 47) et (III. 48), on aura les LMIs en P et M_i :

$$\begin{pmatrix} -\beta P & A_i^T P - C^T M_i^T \\ P A_i - M_i C & -\beta P \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III. 50})$$

$$A_i^T P - C^T M_i^T + P A_i - M_i C + 2\alpha P < 0 \quad (\text{III. 51})$$

Finalement les gains seront calculés par:

$$L_i = P^{-1} M_i \quad (\text{III. 52})$$

6. Variables de prémisses de natures différentes [haz 18]:

6.1. Synthèse du système augmenté :

- **Dynamique de l'état du système $\dot{x}(t)$ en fonction $x(t)$ et de l'erreur d'estimation $e(t)$:**

Le modèle de TS flou (le multi-modèle) est donné par:

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (\text{III. 53})$$

La loi de commande est donnée par:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) (-K_i \hat{x}(t)) \quad (\text{III. 54})$$

Le système en boucle fermée sera donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) \left(A_i x(t) - B_i \sum_{k=1}^r \omega_k(\hat{\theta}(t)) K_k \hat{x}(t) \right) \quad (\text{III. 55})$$

Et l'observateur de TS flou (multi-observateur) sera donné par:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_1^r \omega_i(\hat{\theta}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (\text{III. 56})$$

On définit l'erreur d'estimation comme suit:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \Rightarrow \hat{x}(t) = x(t) - e(t) \quad (\text{III. 57})$$

On remplace $\hat{x}(t)$ dans (III. 55) par sa valeur (III. 57) on trouve :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) - B_i \sum_{k=1}^r \omega_k(\hat{\theta}(t)) K_k (x(t) - e(t))) \quad (\text{III. 58})$$

Finalement la boucle fermée sera donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) (A_i - B_i K_k) x(t) \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) (B_i K_j) e(t) \quad (\text{III. 59}) \end{aligned}$$

- **La dynamique de l'erreur d'estimation $\dot{e}(t)$ en fonction de l'état du système $x(t)$ et l'erreur d'estimation $e(t)$:**

La dynamique de l'erreur d'estimation sera donnée par: $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) (A_j \hat{x}(t) \\ & + B_j u(t) + L_j (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (\text{III. 60}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) A_i x(t) - \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) A_j \hat{x}(t) + \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) B_i u(t) \\ & - \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) B_j u(t) - \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) L_j C e(t) \quad (\text{III. 61}) \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (III.61) par la somme convexe donnée par l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(t)) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) = 1 \quad (\text{III. 62})$$

Et en utilisant équation $\hat{x}(t) = x(t) - e(t)$ on aura donc:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) A_i x(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) A_j x(t) \\ & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) B_i u(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) B_j u(t) \\ & + \sum_{j=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) A_j e(t) - \sum_{j=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) L_j C e(t) \quad (\text{III. 63}) \end{aligned}$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) (A_i - A_j) x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) (B_i - B_j) u(t)$$

$$+ \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t))(A_j - L_j C)e(t) \quad (\text{III. 64})$$

En remplaçant le régulateur $u(t)$ par son équation (III. 54) :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))(A_i - A_j)x(t) + \sum_{j=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t))(A_j - L_j C)e(t) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))(B_i - B_j) \sum_{k=1}^r \omega_k(\hat{\theta}(t))(-K_k \hat{x}(t)) \end{aligned} \quad (\text{III. 65})$$

Le vecteur d'état estimé est donné par: $\hat{x}(t) = x(t) - e(t)$ donc :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))(A_i - A_j)x(t) + \sum_{j=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t))(A_j - L_j C)e(t) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))(B_i - B_j) \sum_{k=1}^r \omega_k(\hat{\theta}(t))(-K_k(x(t) - e(t))) \end{aligned} \quad (\text{III. 66})$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))(A_i - A_j)x(t) + \sum_1^r \omega_j(\hat{\theta}(t))(A_j - L_j C)e(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))\omega_k(\hat{\theta}(t))(B_i - B_j)K_k x(t) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))\omega_k(\hat{\theta}(t))(B_i - B_j)K_k e(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 67})$$

Nous multiplions l'équation (III.67) par les sommes convexes suivantes, afin d'avoir la même forme de somme triple:

$$\sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(t)) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) = 1$$

L'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation sera exprimé en fonction de $x(t)$ et $e(t)$ comme suit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t))\omega_j(\hat{\theta}(t))\omega_k(\hat{\theta}(t))(A_i - A_j)x(t)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) (B_i - B_j) K_k \mathbf{x}(t) \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) (A_j - L_j C) \mathbf{e}(t) \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) (B_i - B_j) K_k \mathbf{e}(t) \tag{III. 68}
 \end{aligned}$$

L'équation finale de $\dot{e}(t)$ sera:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r (\omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t))) \omega_k(\hat{\theta}(t)) [A_i - A_j - (B_i - B_j) K_k] \mathbf{x}(t) \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r (\omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t))) \omega_k(\hat{\theta}(t)) [A_j - L_j C + (B_i - B_j) K_k] \mathbf{e}(t) \tag{III. 69}
 \end{aligned}$$

A. Le système augmenté:

Nous multiplions l'équation (III. 59) par la somme convexe suivante :

$$\sum_{j=1}^r \omega_j(\hat{\theta}(t)) = 1$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) (A_i - B_i K_k) \mathbf{x}(t) \\
 & + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) (B_i K_k) \mathbf{e}(t) \tag{III. 70}
 \end{aligned}$$

Finalement, nous allons avoir le système augmente avec la dynamique d'état $\dot{\mathbf{x}}(t)$ et la dynamique de l'erreur d'estimation $\dot{\mathbf{e}}(t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) \mathbf{G}_{ijk} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{pmatrix} \tag{III. 71}$$

On prend:

$$\dot{\mathbf{X}}_a(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{pmatrix} \tag{III. 72}$$

$$\mathbf{G}_{ijk} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_k & B_i K_k \\ A_i - A_j - (B_i - B_j) K_k & A_j - L_j C + (B_i - B_j) K_k \end{pmatrix} \quad (\text{III. 73})$$

$$\dot{\mathbf{X}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) \mathbf{G}_{ijk} \mathbf{X}_a(t) \quad (\text{III. 74})$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_a(t) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_i(\hat{\theta}(t)) \mathbf{G}_{iji} \mathbf{X}_a(t) \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{i < k} \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) \left(\frac{\mathbf{G}_{ijk} + \mathbf{G}_{kji}}{2} \right) \mathbf{X}_a(t) \end{aligned} \quad (\text{III. 75})$$

Proposition: stabilité du système augmenté [Haz 18]:

Le système augmenté $\mathbf{X}_a(t) = [x(t); e(t)]$ décrit par l'équation d'état (III.75) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice commune définie positive \mathbf{P} telle que les conditions suivantes soient vérifiées, avec $i, j, k = 1, \dots, r$:

$$\mathbf{G}_{iji}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{iji} < \mathbf{0} \quad \forall i, \forall j \quad (\text{III. 76})$$

$$\left(\frac{\mathbf{G}_{ijk} + \mathbf{G}_{kji}}{2} \right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\frac{\mathbf{G}_{ijk} + \mathbf{G}_{kji}}{2} \right) < \mathbf{0} \quad \forall j, i < k \quad (\text{III. 77})$$

Commentaire:

Cette proposition est mentionnée initialement sous forme :

- *théorème 11-CFS (Continuous Fuzzy System)* dans l'article [Tan 98], "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs"
- *théorème 20* dans le livre de Kazuo Tanaka and al. [Tan 01] intitulé "Fuzzy Control Systems Design and Analysis".

Mais le théorème proposé dans ces ouvrages cités comporte une faute d'indexation pour j, i et s tel que :

Les conditions de stabilité doivent être vérifiées pour $\forall j, i < s$ et pas pour $\forall i, j < s$, ce qui veut dire que la permutation des indices dans le théorème doit être faite entre i et s ($\mathbf{G}_{ijs}, \mathbf{G}_{sji}$) et ne pas entre j et s ($\mathbf{G}_{ijs}, \mathbf{G}_{isj}$)

Cas spécial :

Si on a $B_i = B$ le système augmenté sera :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \omega_i(\theta(t)) \omega_j(\hat{\theta}(t)) \omega_k(\hat{\theta}(t)) \begin{pmatrix} A_i - BK_k & BK_k \\ A_i - A_j & A_j - L_j C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.78})$$

6.2. Procédure de synthèse pour $B_i = B$:

Dans l'étape suivante, nous développons la condition de stabilité (III.76) dans notre proposition, pour la mettre sous forme LMI. La même procédure est valable pour la condition (III.77) :

$$\begin{pmatrix} A_i - BK_i & BK_i \\ A_i - A_j & A_j - L_j C \end{pmatrix}^T P + P \begin{pmatrix} A_i - BK_i & BK_i \\ A_i - A_j & A_j - L_j C \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.79})$$

Nous constatons que cette condition n'est pas linéaire par rapport aux inconnues P et K_k

Nous devons donc la mettre sous une forme LMI explicite :

Nous prend une nouvelle variable $X = P^{-1}$, en multipliant l'équation (57) à droite et à gauche par X

Nous trouvons:

$$X \begin{pmatrix} A_i^T - K_i^T B^T & A_i^T - A_j^T \\ K_i^T B^T & A_j^T - C^T L_j^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_i - BK_i & BK_i \\ A_i - A_j & A_j - L_j C \end{pmatrix} X < 0 \quad (\text{III.80})$$

$$\begin{pmatrix} X A_i^T - X K_i^T B^T & X(A_i^T - A_j^T) \\ X K_i^T B^T & X A_j^T - X C^T L_j^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_i X - BK_i X & BK_i X \\ (A_i - A_j) X & A_j X - L_j C X \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.81})$$

Nous voyons que les termes $BK_i X$ et $L_j C X$ ne sont pas linéaires par rapport aux inconnues, pour avoir une forme LMI linéaire, nous faisons le changement de variable suivant :

$$M_i = K_i X \text{ ET } N_j = L_j C X.$$

Finalement, nous aurons la première condition sous forme LMI en X et M_i :

$$\begin{pmatrix} X A_i^T - M_i^T B^T + A_i X - M_i X & X(A_i^T - A_j^T) + B M_i \\ M_i^T B^T + (A_i - A_j) X & X A_j^T - N_j^T + A_j X - N_j \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{III.82})$$

Nous pouvons faire la même procédure de calcul pour la deuxième condition de stabilité et pour le cas général $B_i \neq B$ pour avoir la forme LMI.

6.3. Séparation du calcul régulateur/observateur :

Nous voyons que dans le cas où nous utilisons la même nature de variables de prémisse (soient mesurables ou non), nous pouvons faire les calculs des gains de régulateur et d'observateur séparément.

Mais dans le cas des variables de prémisse de natures différentes, la séparation de calculs n'est plus valable, à cause de termes de couplage régulateur/observateurs dans la matrice du système augmenté.

7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons détaillé les procédures de stabilisation d'un multi-modèle via un multi-observateur/PDC en considérant trois cas d'utilisation des variables de prémisse, et nous montrons que pour le choix des variables de prémisse, il faut prendre en compte essentiellement la nature des variables de prémisse.

Nous avons présenté donc dans ce chapitre une nouvelle classification basée sur la nature des variables de prémisse :

- Soit elles sont toutes les deux de même nature (les deux mesurables ou les deux non mesurables)
- Soit elles sont de natures différentes

Nous avons prouvé que le principe de séparation [Ma 98] de calcul des gains du multi-observateur/PDC n'est pas applicable dans le cas où on utilise des variables de prémisse différentes pour le multi-modèle et pour le multi-observateur, et que ce principe est applicable dans le cas où on utilise les mêmes variables de prémisse pour le multi-modèle et pour le multi-observateur, quelle que soit leur nature (les deux mesurable ou les deux non mesurable).

Nous avons prouvé que, dans le cas où on utilise les mêmes variables de prémisse pour le multi-modèle et pour le multi-observateur, les conditions de convergence et de stabilité du multi-observateur/PDC sont les mêmes quelle que soit la nature des variables de prémisse (toutes les deux mesurables ou non mesurables).

Nous avons montré que le théorème traitant le cas non mesurable proposé par Tanaka et al [Tan 98] [Tan 01] comporte une faute d'indexation des matrices du système augmenté, cette faute a été corrigée dans ce chapitre, ce théorème est largement cité dans les travaux qui s'intéressent à la synthèse des observateurs de Takagi-Sugeno flous (les multi-observateurs)

Chapitre IV

Application : Réacteur chimique
parfaitement agité (CSTR)

Chapitre IV

Application : Réacteur chimique parfaitement agité (CSTR)

1. Introduction :

La commande et l'observation des systèmes non linéaires a fait l'objet de nombreux travaux de recherche dans le domaine de l'automatique et de la régulation des processus industriels à cause du fonctionnement non linéaire de la plupart des processus industriels.

Généralement les lois de commande linéaires possèdent une validité locale par rapport la plage de fonctionnement ou par rapport aux conditions de fonctionnement.

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté les multi-modèles (les modèles flous de Takagi-Sugeno) comme une solution performante pour surmonter le problème de changement de la dynamique du système non linéaire dans les différentes plages de fonctionnement. Les étapes suivantes ont été suivies pour élaborer la commande et l'estimation d'état d'un système non linéaire:

- **Modélisation du système non linéaire par un modèle de Takagi-Sugeno (multi-modèle).**
- **Commande non linéaire floue (PDC Parallel Distributed Control amélioré)**
- **Multi-observateur (Observateur flou de Takagi-Sugeno)**

Les étapes sont :

⇒ **Construction d'un multimodèle (un modèle flou de Takagi-Sugeno)**

- Nous choisissons judicieusement les points de fonctionnement (leurs nombres et leurs positions dans la plage de fonctionnement) selon les performances désirées et les caractéristiques physiques du processus industriel.

- Nous obtenons des modèles locaux linéaires par la méthode de linéarisation optimale présentée dans le **chapitre 1**
- Nous choisissons la (ou les) variable de prémisse (décision) ; mesurables ou non mesurables
- Nous choisissons les fonctions d'appartenance : leurs formes et leurs limites (distribution)
- En vue de sa validation, nous faisons une comparaison du multi-modèle construit avec le système non linéaire.

⇒ **Synthèse d'une loi de commande :**

- Dans notre cas, nous avons conçu une loi de commande PDC (parallel distributed control) avec un pré-compensateur flou pour assurer le suivi de trajectoire de manière satisfaisante.
- Pour le PDC ; nous avons utilisé la même variable de prémisse pour le multi-modèle et pour les fonctions d'appartenance.

⇒ **Synthèse d'un multi-observateur (Observateur flou de Takagi-Sugeno) :**

- Pour le multi-observateur ; nous avons utilisé la même variable de prémisse pour le multi-modèle et pour les fonctions d'appartenance

2. Modélisation du CSTR par un modèle de TS flou (multi-modèle)

2.1. Description du processus chimique CSTR :

Pour cette application, nous considérons un CSTR (continuous stirred tank reactor); qui est souvent rencontré dans la littérature car il possède des caractères typiquement non linéaires. Le modèle est construit sous les hypothèses suivantes :

-une mixture parfaitement homogène.

-une température interne homogène dans tout le réacteur.

-la densité du mélange et le volume de réacteur sont constants (débit d'entrée = débit de sortie)

-la concentration et la température à la sortie sont les mêmes que celles du réacteur.

Nous considérons un CSTR non linéaire à deux états internes [Pra 08], avec une réaction exothermique irréversible du premier ordre $A \rightarrow B$ régie par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{C}_A = \frac{q_f}{V} (C_0 - C_A) - K_0 C_A e^{\frac{-E}{RT}} \\ \dot{T} = \frac{q_f}{V} (T_0 - T) - \frac{\rho_c P_{cp} q_c}{V \rho c_p} \left\{ 1 - e^{\left(\frac{h_A}{q_c \rho c_p} \right)} \right\} (T - T_C) - \frac{(-\Delta H) K_0 C_A}{\rho c_p} e^{\frac{-E}{RT}} \end{cases} \quad (\text{IV. 1})$$

Nous considérons la loi d'Arrhenius $k(t) = \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)$ pour décrire la dynamique de la réaction :

Avec :

$T_c(t)$: Température de la jaquette de refroidissement (la variable de commande).

$C_A(t)$: Concentration du réactif A dans le réacteur CSTR.

$T(t)$: Température du CSTR.

2.2. Le modèle de TS flou (multi-modèle) du CSTR

Pour construire les modèles locaux du système, nous avons choisi Cinq (5) points de fonctionnement qui ne sont pas nécessairement des points d'équilibre.

La variable de commande est la température de refroidissement $T_c(t) = u(t)$ qui est choisie comme variable de décision (de prémisse).

Cinq (5) ensembles flous avec des fonctions d'appartenance de type triangulaire équidistantes (Figure IV. 1), sont choisis de manière à couvrir la plage de fonctionnement.

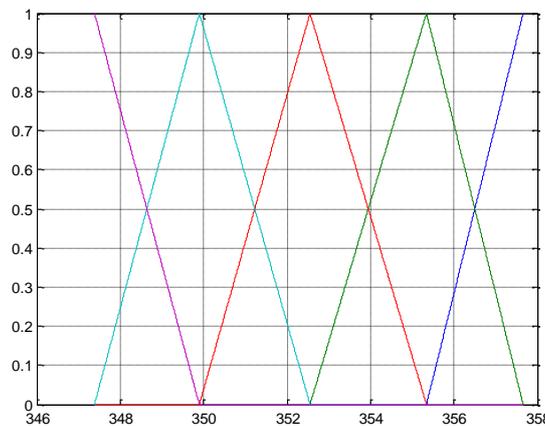


Figure IV. 1: Fonctions d'appartenance triangulaire

Le modèle d'état est donné par :

$x_1 = C_A$: Concentration du A dans le CSTR

$x_2 = T$: Température du CSTR

$u = T_c$: Température de la jaquette de refroidissement

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1 - 7.2 * 10^{10} x_1 \exp\left(-\frac{10^4}{x_2}\right) \\ \dot{x}_2 = 350 - x_2 + 14.4 * 10^{12} x_1 \exp\left(-\frac{10^4}{x_2}\right) + 1.029(u - x_2) \end{cases} \quad (\text{IV. 2})$$

Nous mettons les équations du CSTR (IV. 2) sous la forme :

$$F(x, u) = f(x) + g(x)u \quad (\text{IV. 3})$$

Où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions non linéaire.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2(x) \end{pmatrix} \quad (\text{IV. 4})$$

Avec :

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - x_1 - 7.2 * 10^{10} x_1 \exp\left(-\frac{10^4}{x_2}\right) \\ f_2 &= 350 - x_2 + 14.4 * 10^{12} x_1 \exp\left(-\frac{10^4}{x_2}\right) - 1.029 x_2 \end{aligned} \quad (\text{VI. 5})$$

$$g_2(x) = g = 1.029 \quad (\text{IV. 6})$$

La linéarisation obtenue en prenant le premier terme de la série Taylor dans un point de fonctionnement $p_i(x_i, u_i)$ est donnée par:

$$f(x) \approx \tilde{A}x + \Delta A \quad (\text{IV. 7})$$

Notre objectif est d'avoir une approximation linéaire de la fonction $f_i(x)$ qui correspond à la i^{eme} ligne de la matrice A :

$$f(x) \approx Ax \quad (\text{IV. 8})$$

Soit a_i^T la i^{eme} ligne de la matrice A , et pour des raisons de développement on présente la condition (IV. 8) comme suit :

$$f_i(x) \approx a_i^T x \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, n \quad (IV. 9)$$

La formule de Teixeira et al [Tei 99] obtenue dans le chapitre I est rappelée :

$$a_i^T = \nabla f_i^T(x_o) + \frac{f_i(x_o) - x_o^T \nabla f_i(x_o)}{\|x_o\|^2} x_o \quad (IV. 10)$$

Tableau IV. 1: Les valeurs des points de fonctionnement :

	concentration	température	température de refroidissement
point N°1	x1 = 0.0729	x2= 445.2692	u =357.6641 °K
point N°2	x1=0.0795	x2= 443.4566	u =355.3455 °K
point N°3	x1=0.0885	x2= 441.1475	u =352.5558 °K
point N°4	x1=0.0989	x2= 438.7763	u =349.9006 °K
point N°5	x1=0.1110	x2= 436.3091	u =347.3867 °K

Tableau IV. 2 : les données du CSTR :

les variables du processus	Les valeurs numériques
débit de refroidissement (q_c)	103 l/min
débit du CSTR (q)	100 l/min
concentration d'alimentation (d'entrée) (C_0)	1 mol/l
chaleur de la réaction ($-\Delta H$)	$-2 * 10^5$ cal/mol
température d'alimentation (d'entrée) (T_0)	350 °K
volume CSTR (V)	100 l
coefficient de transfert de chaleur (hA)	$7 * 10^5$ cal/(min K)
énergie d'activation (E/R)	10^4 K
densité de liquide (ρ, ρ_c)	10^3 g/l
chaleur spécifique (c_p, c_{pc})	1 cal/(g K)
constante de la réaction k_0	$7.2 * 10^{10} \text{min}^{-1}$

Les matrices dynamiques locales sont données respectivement comme suit : avec les indices des matrices correspondent au point de fonctionnement

$$A_1 = \begin{pmatrix} -12.5861 & 0.0023 \\ 2317.2 & -1.2397 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -11.2962 & 0.0023 \\ 2059.2 & -1.2356 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -10.1091 & 0.0023 \\ 1821.8 & -1.2313 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -9.0077 & 0.0023 \\ 1601.5 & -1.2268 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -7.9734 & 0.0023 \\ 1394.7 & -1.2220 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.029 \end{pmatrix}$$

Soit le multi-modèle suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_1^r \omega_i(\theta(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (\text{IV. 11})$$

Avec la loi de commande :

$$u(t) = - \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) K_j x(t) \quad (\text{IV. 12})$$

2.3. Simulations

Pour les simulations, nous avons utilisé la méthode numérique de Runge Kutta pour résoudre les équations (IV. 2) et (IV. 11) du modèle non linéaire et son multimodèle équivalent, avec la commande commune (IV. 12) et un pas d'échantillonnage égale à 0.1 min . La variable d'entrée est la température de refroidissement de la jaquette.

Ces simulations montrent l'équivalence entre le modèle non linéaire CSTR et son multi-modèle.

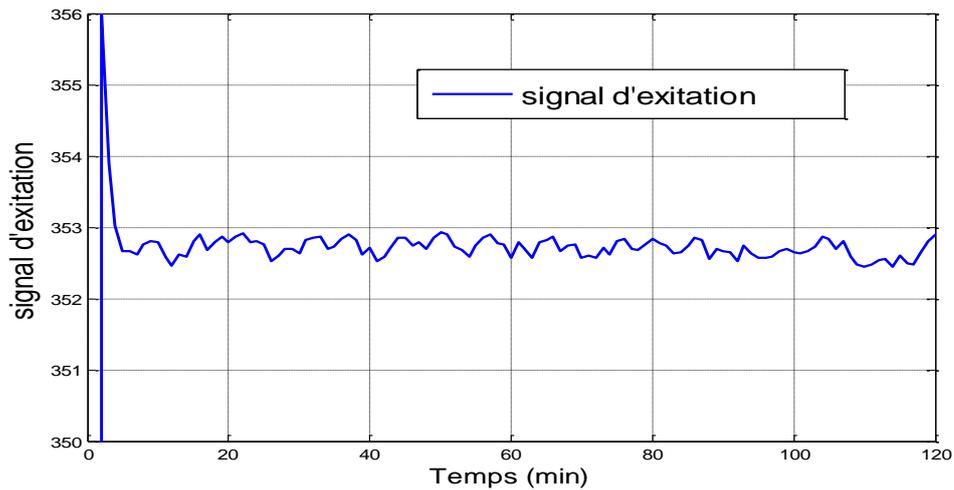


Figure IV. 2. Signal d'excitation (Température de refroidissement (K))

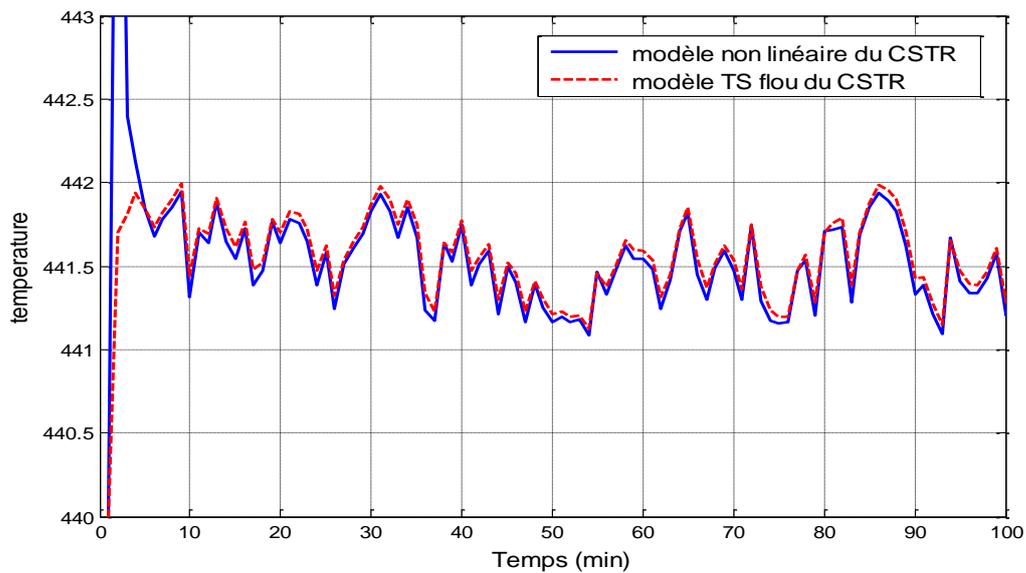


Figure IV. 3. Comparaison des sorties "Température (K)"

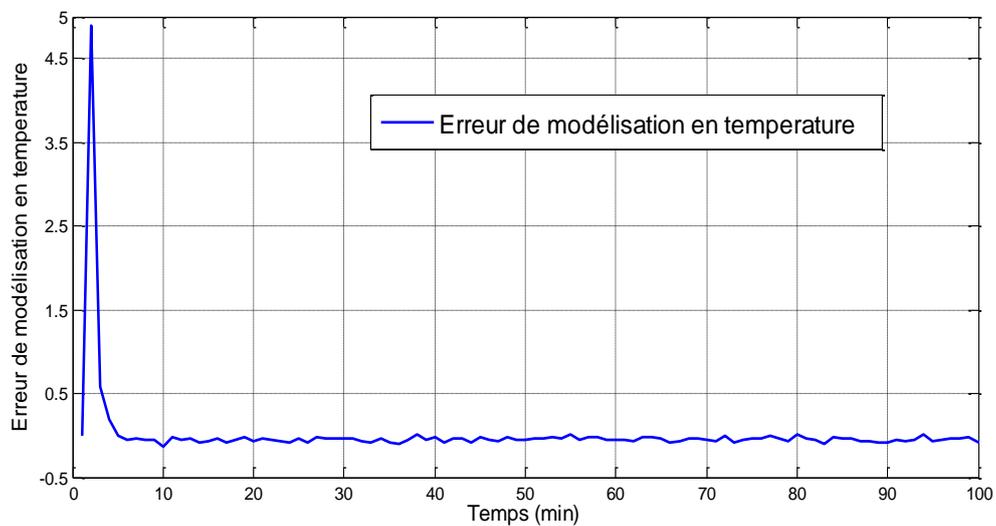


Figure IV. 4. Erreur de modélisation en Température(K)

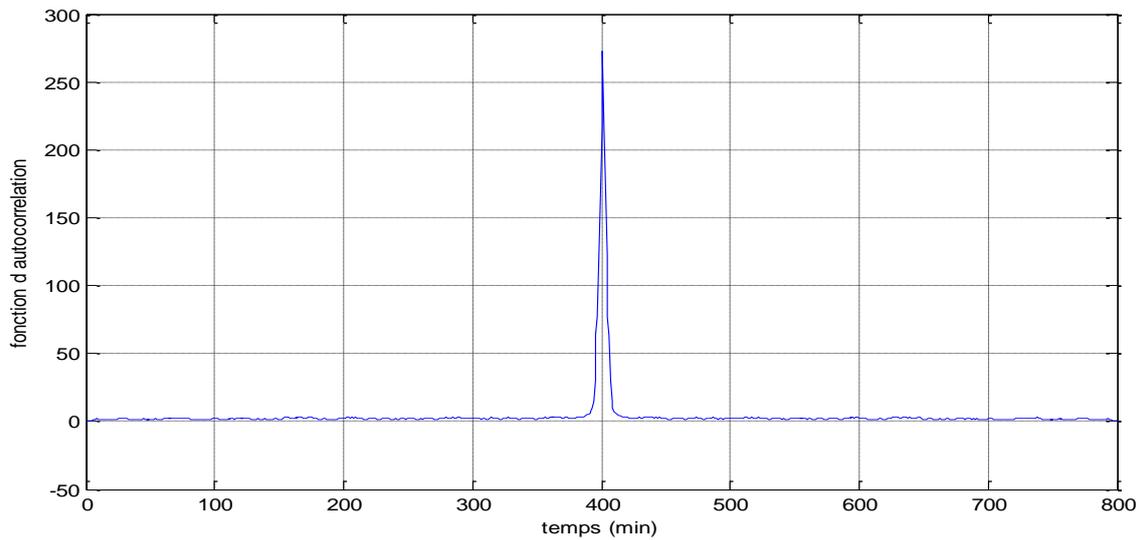


Figure IV. 5. La fonction d'autocorrélation de l'erreur de modélisation en température

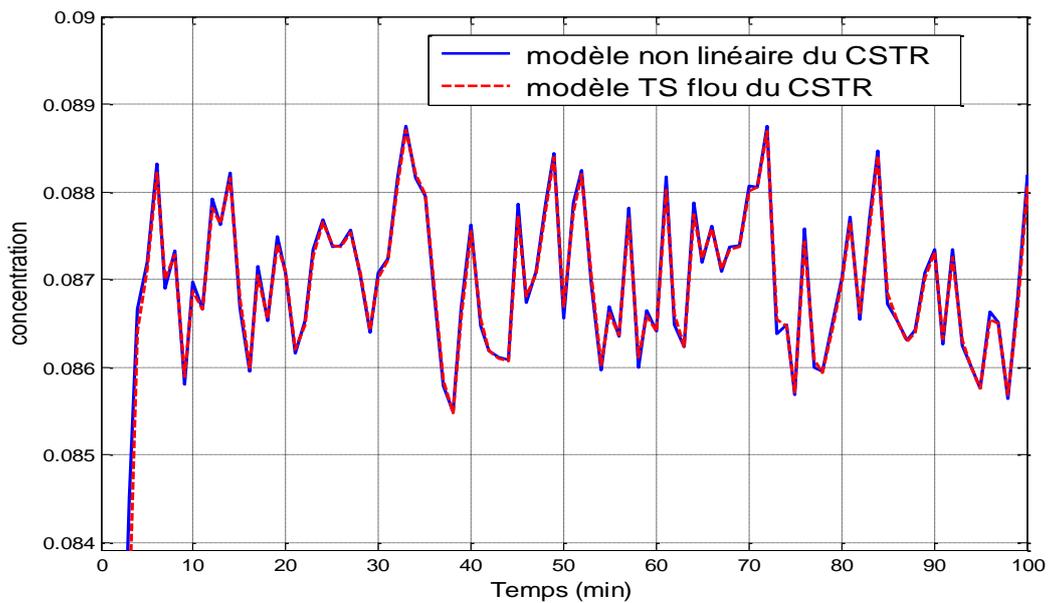


Figure IV. 6. Comparaison des concentrations (mol/l)

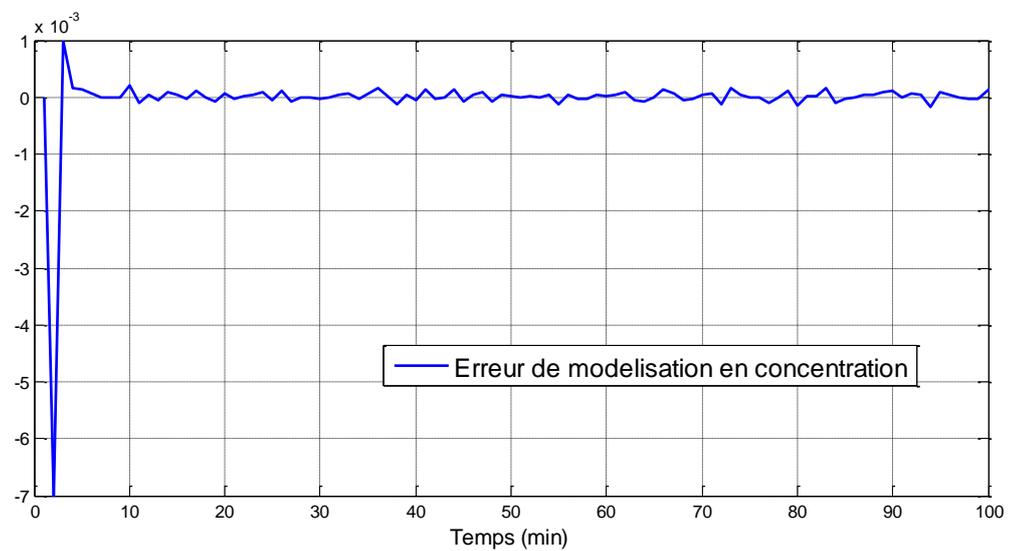


Figure IV 7. Erreur de modélisation "Concentration (mol/l)"

2.4. Interprétation des résultats :

A travers les simulations du modèle non linéaire du CSTR et le modèle TS flou correspondant (multi-modèle), nous voyons que le multi-modèle est très représentatif du CSTR non linéaire comme la montre les figures précédentes. Les figures (IV.6) et (IV.7) montrent l'erreur de modélisation de la concentration, qui est environ de $2 * 10^{-4}$, et les figures (IV.3), (IV.4) montrent la similarité des dynamiques des modèles avec une erreur de modélisation en température égale à $0.03 \text{ }^\circ\text{C}$ ce qui est négligeable. De plus, le teste de validation du multi-modèle par la méthode de blanchissement de l'erreur (figure IV.5) à travers la fonction d'autocorrélation de l'erreur de modélisation montre clairement la validité du multi-modèle pour représenter le CSTR non linéaire.

3. Synthèse de la commande du CSTR

3.1. Commande PDC amélioré du CSTR

Il y'a beaucoup de travaux qui considèrent le PDC comme un régulateur stabilisant pour les systèmes de TS flous mais il y'a peu de travaux qui s'intéressent à la poursuite des références. Dans ce travail et afin d'améliorer les performances de la poursuite de trajectoire, nous proposons un régulateur PDC avec un pré-compensateur flou N donné par:

$$N = \sum_{j=1}^r \omega_j(\theta(t)) (N_j) \quad (\text{IV. 13})$$

Les pré-compensateurs locaux N_i sont calculés séparément avec la formule (II.62):

$$N_i = -(C(A_i - BK_i)^{-1}B)^{-1} \quad (\text{IV. 14})$$

Avec les gains de retours d'état obtenus par la résolution des équations (II. 54) (II. 55) (II.56).

Le régulateur PDC amélioré avec le pré-compensateur sera donc :

$$u(t) = \sum_1^r \omega_j(\theta(t)) (-K_j x(t) + N_j y_{ref}) \quad (\text{IV. 15})$$

Le pré-compensateur ajouté compense l'erreur statique et améliore la performance de la poursuite de consigne.

Les valeurs numériques des gains de retour d'état des sous-modèles sont calculées en utilisant l'outil d'optimisation de « Matlab tools box YALMIP » [Lof 04].

Les gains de retour d'état des sous-modèles sont:

$$k_1 = (2468.785 \quad - 0.938)$$

$$k_2 = (2252.259 \quad - 0.935)$$

$$k_3 = (2001.518 \quad - 0.930)$$

$$k_4 = (1770.766 \quad - 0.926)$$

$$k_5 = (1556.667 \quad - 0.922)$$

Les gains du pré-compensateur sont :

$$N_1 = 0.27029, \quad N_2 = 0.27028, \quad N_3 = 0.27027, \quad N_4 = 0.27026, \quad N_5 = 0.27026]$$

La matrice symétrique définie positive commune est :

$$P = \begin{pmatrix} 38.7810 & 0.0185 \\ 0.0185 & 0.9424 \end{pmatrix}$$

3.2. Simulations

Pour vérifier les capacités de poursuite de notre stratégie, on a appliqué deux types de signal de référence :

-Reference de type échelon de température

-Reference de type échelon multiple de température

Le traitement du problème de régulation de poursuite dans toute la plage de fonctionnement est une question critique pour le système CSTR avec sa dynamique non linéaire.

Notre méthode traite ce problème d'une façon très efficace dans tout l'intervalle de fonctionnement. Les figures (IV.8...13) montrent les réponses du modèle TS flou et le modèle non linéaire du CSTR pour les références choisies avec un régulateurs PDC amélioré:

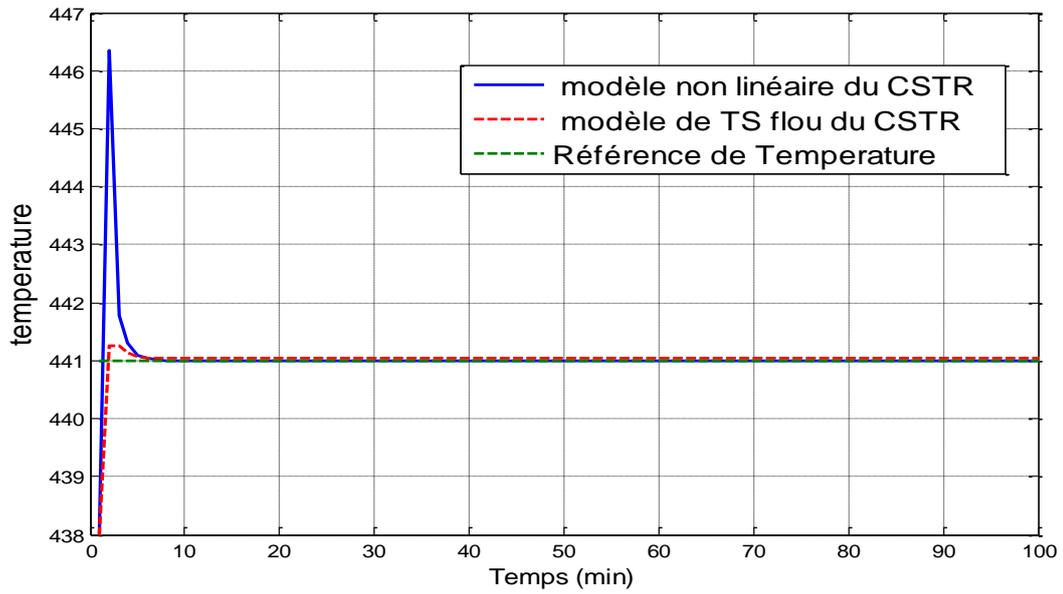


Figure IV. 8. Réponse à un échelon de température (K)

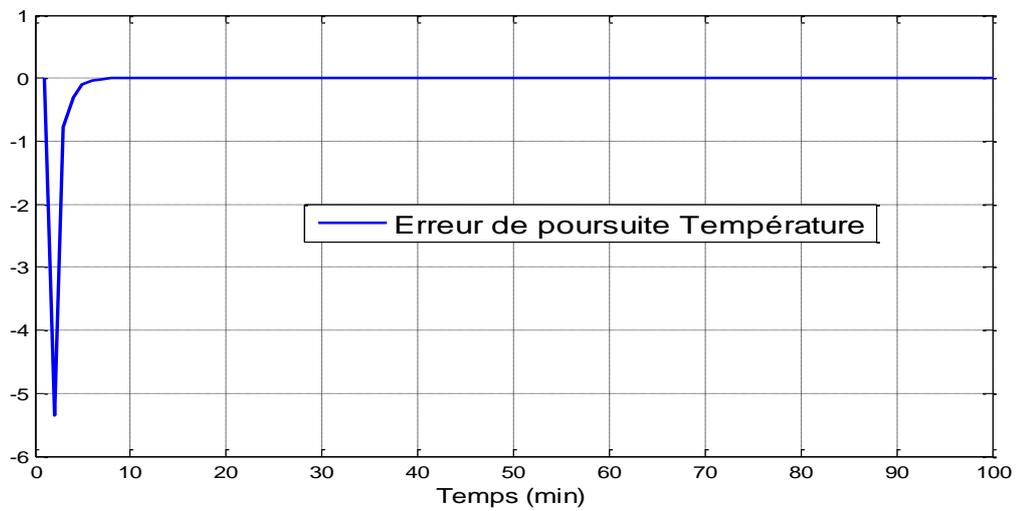


Figure IV. 9. Erreur de poursuite en température (K)

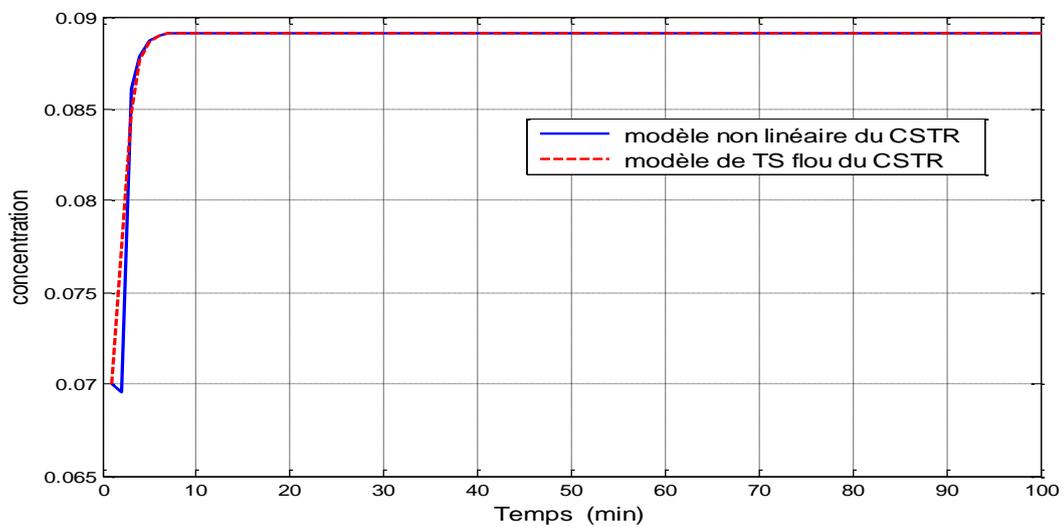


Figure IV. 10. Réponse en Concentration (mol/l)

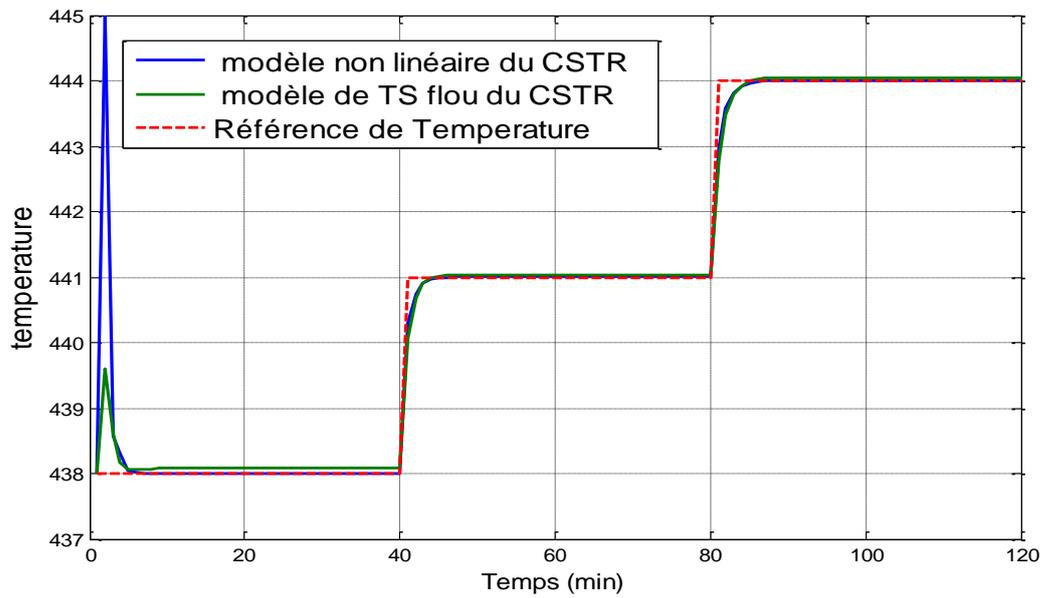


Figure IV. 11. Réponse à un échelon multiple de température (K)

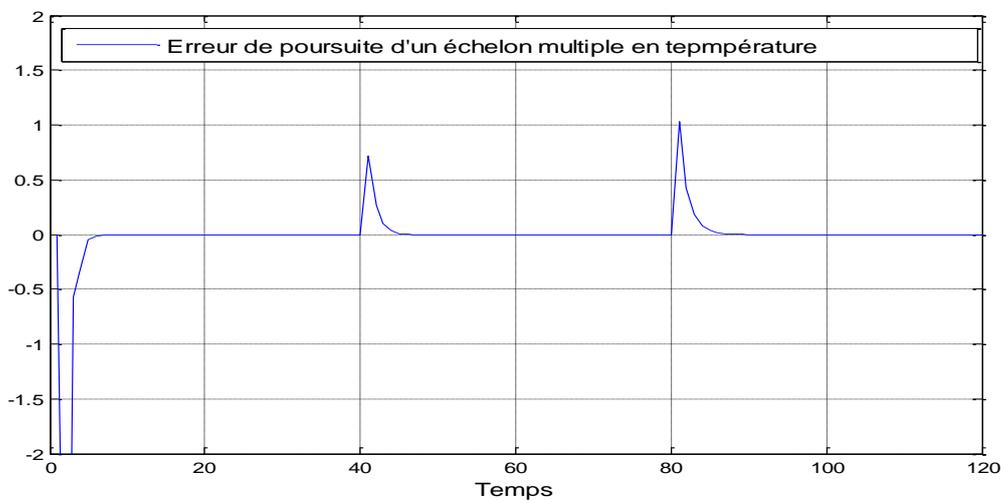


Figure IV. 12. Erreur de poursuite d'un échelon multiple de température (K)

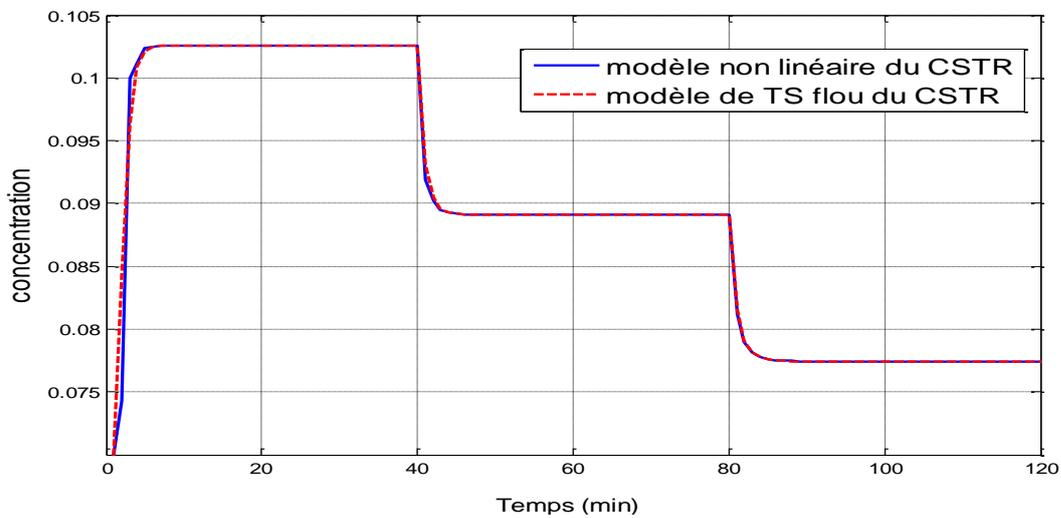


Figure IV. 13. Réponse en concentration (mol/l)

4. Le multiobservateur pour le CSTR

4.1. Synthèse du multi-observateur :

On a conçu un multi-observateur pour estimer le vecteur d'état d'un CSTR non linéaire commandé par un régulateur PDC amélioré.

Les LMIs (III. 50) (III. 51) et (III.52) sont résolus par « YALMIP solver » de MATLAB [Lof 04].

On rappelle que les LMIs du PDC et du multi-observateur sont résolus séparément dans notre cas. Le vecteur de sortie est $C = [0 \ 1]$, et $S(\alpha, \beta) = S(4, 8)$, la matrice symétrique définie positive est :

$$P' = \begin{pmatrix} \mathbf{0.003486} & \mathbf{-0.797833} \\ \mathbf{-0.797833} & \mathbf{263.406768} \end{pmatrix}$$

Les gains du sous-observateur sont: $L_1 = (0.03576 \quad -3.66016)^T$

$$L_2 = (0.03195 \quad -2.96146)^T$$

$$L_3 = (0.02720 \quad -2.10425)^T$$

$$L_4 = (0.02295 \quad -1.28804)^T$$

$$L_5 = (0.01924 \quad -0.55928)^T$$

4.2. Simulations

La capacité d'estimation du vecteur d'état pour le CSTR est montrée à travers les simulations suivantes:

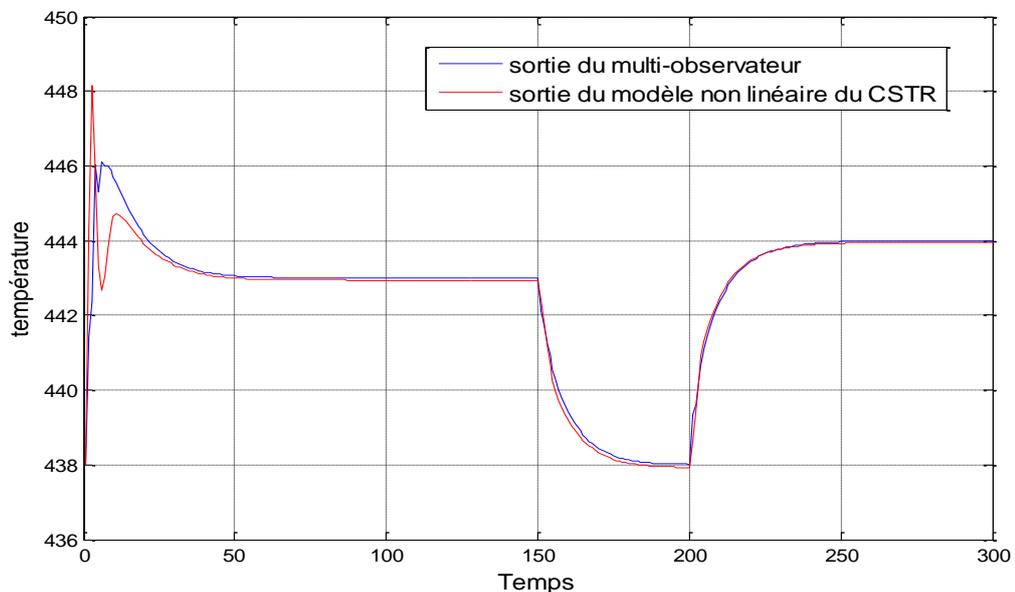


Figure IV. 14. Comparaison sortie du CSTR et sortie estimé (multi-observateur) (K)

Les résultats (IV.14....16) montre clairement les performances de notre multi-observateur pour différents points de fonctionnement et prouve l'efficacité du multi-observateur pour estimer le vecteur d'état qui peut être utilisé par la suite à la commande ou au diagnostic du CSTR.

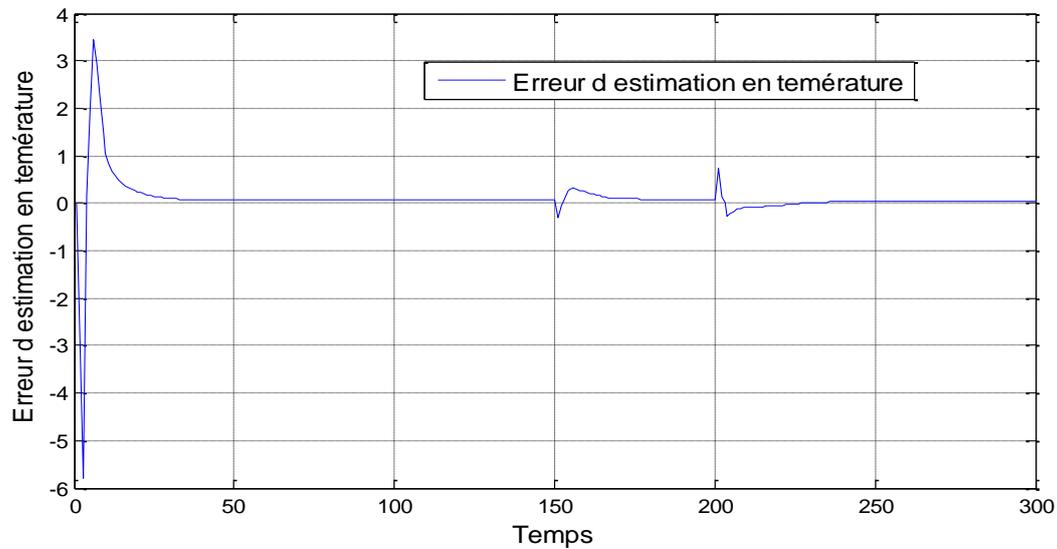


Figure IV. 15. Erreur d'estimation en température (K)

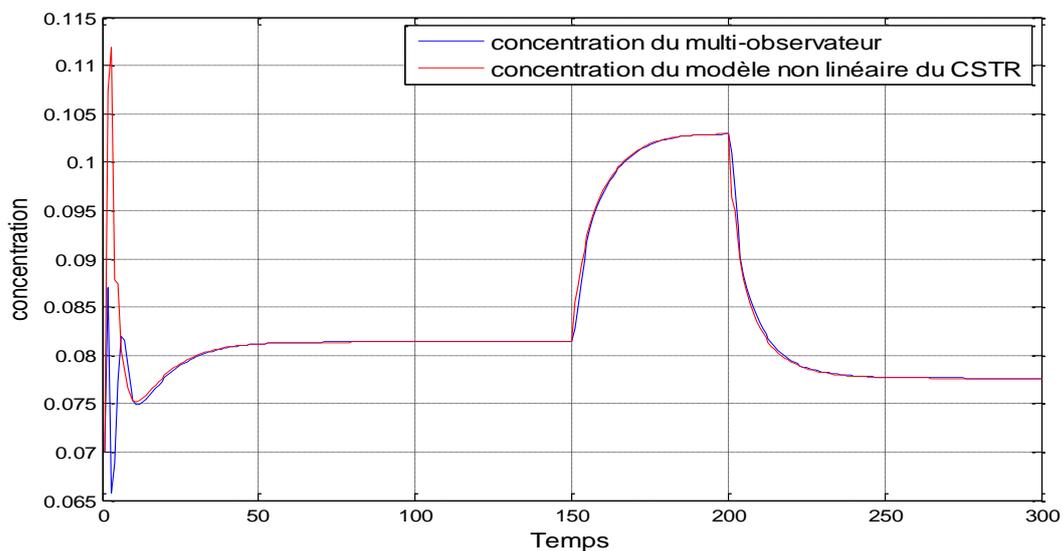


Figure IV. 16. Estimation de la concentration (mol/l)

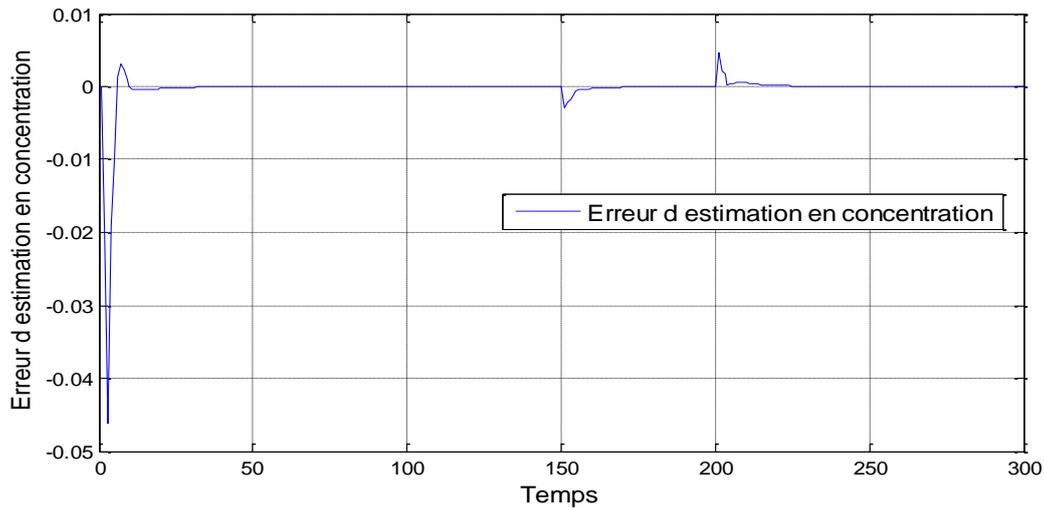


Figure IV.17. Erreur d'estimation en concentration (mol/l)

4.3. Commentaire

A travers les résultats des simulations, nous constatons que l'erreur d'estimation de température est très petite ($< 0.05 K$) ce qui prouve la capacité d'estimation du multi-observateur.

5. Conclusion

Le système non linéaire présente beaucoup de problèmes en commande et en observation à cause de sa dynamique complexe. Ce travail garantit les mêmes performances dans toute la plage de fonctionnement lors des changements des conditions de fonctionnement. Ce travail présente une méthode systématique et simple pour la modélisation TS floue, une commande PDC améliorée et un multi-observateur en utilisant la théorie des systèmes de Takagi-Sugeno flous.

La partie modélisation commence par la construction des modèles locaux en utilisant la méthode de Teixeira et al. La linéarisation se fait en des points de fonctionnement convenablement choisis, les sous-modèles locaux seront par la suite utilisés pour la synthèse de lois de commande avancées, la commande PDC améliorée se calcule par la résolution d'un ensemble de LMI assurant les conditions de stabilité du système TS flou et par conséquent son équivalent non linéaire. Nous avons conçu un multi-observateur pour estimer le vecteur d'état de

système non linéaire qui peut être utilisé dans le diagnostic. Les mêmes modèles TS flou, les mêmes variables de prémisse et les mêmes fonctions d'appartenance sont utilisées dans toutes les étapes de conception. Tous les problèmes de stabilité sont mis en termes de LMI. Les simulations montrent que nos stratégies sont performantes.

Nous notons que la loi de commande PDC amélioré que nous avons proposé dans cette thèse n'est pas robuste aux erreurs de modélisation.

Conclusion générale

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons entrepris une étude sur les systèmes de Takagi-Sugeno flous ou multi-modèles pour modéliser, commander et estimer l'état d'un système non linéaire. Dans ce contexte notre travail se divise comme suit :

Etape modélisation, nous avons montré comment représenter un système non linéaire par un multi-modèle, l'obtention d'un multi-modèle peut se faire de trois façons :

En utilisant la transformation polytopique convexe, qui n'est pas applicable à tous les systèmes, et nécessite la connaissance des bornes supérieures et inférieures de certains fonctions non linéaires, ce qui est généralement non disponible, avec ce type de modélisation on perd la notion de localité des sous-modèles et on introduit beaucoup de conservatisme.

L'identification d'un multi-modèle à partir des données entrée/sortie, ce type du multi-modèle nécessite des connaissances a priori et ne donne pas la forme la plus exploitable en automatique.

La linéarisation d'un modèle non linéaire est la méthode la plus simple, mais la linéarisation classique présente certaines insuffisances, cette méthode génère généralement un modèle affine et donc non linéaire. On a présenté dans cette thèse une méthode systématique de linéarisation optimale [Tei 99] à partir du modèle non linéaire, cette méthode est assez simple, et conserve la notion de localité des sous-modèles.

La partie commande de cette thèse comporte différentes méthodes d'analyse de stabilité des multi-modèles et de stabilisation par une loi de commande PDC détaillée dans le deuxième chapitre, notre contribution dans la partie commande consiste en l'amélioration des performances de la loi stabilisante PDC par la conception d'un pré-compensateur flou assurant la poursuite de référence ce qui était absent dans la loi PDC conventionnelle.

Conclusion générale

Le troisième volet de thèse, concerne l'estimation d'état d'un multi-modèle, notre contribution dans cette partie consiste en la proposition d'une nouvelle classification pour les différents cas possibles d'utilisation des variables de décision en tenant compte de leur nature.

A la suite de la contribution dans cette partie, Nous proposons une correction d'un théorème relatif à la stabilité d'un système augmenté pour la synthèse d'un **multi-observateur/ PDC** proposé par Tanaka et al. [Tan 98][Tan 01].

Dans la littérature, les travaux de conception des **multi-observateurs/PDC** considèrent les cas suivants [Tan 98][Tan 01] :

Premier cas (mesurable): ils utilisent des variables de prémisses mesurables pour le multi-modèle et pour le multi-observateur.

Deuxième cas (non mesurable): ils utilisent des variables de prémisses mesurables pour le multi-modèle et des variables de prémisses non mesurables pour le multi-observateur

-Notre contribution consiste en la prise en compte de la nature des variables de prémisses:

Variables de prémisses de mêmes natures :

Si nous utilisons des variables de prémisses de même nature (mesurable ou estimable) pour le multi-modèle et pour le multi-observateur, nous arrivons aux mêmes conditions de stabilité du système augmenté dans les deux cas (mesurables ou estimables) car les variables de prémisses ne sont pas prises en compte pour les conditions de stabilité du système multi-modèle en général.

Variables de prémisses de différentes natures :

Si nous utilisons des variables de prémisses de différente nature, c'est-à-dire si nous prenons une variable de prémisses mesurable pour le multi-modèle et une variable de prémisses non mesurable pour le multi-observateur, nous revenons à la condition de convergence du théorème de Tanaka [Tan 98][Tan 01] revu et corrigé dans le chapitre trois.

Conclusion générale

Les résultats d'analyse et de synthèse dans cette thèse, se basent essentiellement sous des formulations des problèmes d'optimisations convexes des LMIs. Celles-ci présentent l'avantage d'avoir un coût de calcul raisonnable et le résultat obtenu correspond à un minimum global unique, ce qui exclut l'existence d'un minimum local de la fonction à optimiser.

Nous avons considéré un réacteur chimique CSTR comme exemple d'application, et on a prouvé l'efficacité de nos conceptions à travers des simulations de ce CSTR dans différentes zone de fonctionnement, les simulations montrent clairement la capacité de la méthode de modélisation choisi, les performances de régulateur PDC amélioré et les performances du multi-observateur conçu.

Comme perspective, nous se proposons d'étendre nos méthodes de synthèse des multi-modèles incertains, de concevoir des lois de commande plus robuste et d'appliquer ces résultats à des processus chimiques réels. Nous allons exploiter les multi-observateurs au diagnostic des défauts des systèmes industriels.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [Akh 04] A. Akhenak, “Conception d’observateurs non linéaires par approche multimodèles : application au diagnostic” Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Décembre 2004.
- [Ber 00] P. Bergsten, R. PALM. “Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems”. In 9th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, San Antonio, Texas, USA, 2000.
- [Ber 02] P. Bergsten, R. Palm, and D. Driankov, “Observers for Takagi–Sugeno Fuzzy Systems”, IEEE Tra. On System, Man, and Cybernetics -Part B: Cybernetics, vol. 32, no. 1, pp. 114-121, February 2002.
- [Bou 04] R. Boukezzoula, S. Galichet, and L. Foulloy “Observer-based fuzzy adaptive control for a class of nonlinear systems: Real-time implementation for a robot wrist” IEEE Trans. Control Syst. Technol., vol. 12, no. 3, pp. 340–351, May 2004.
- [Boy 94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. “Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory”, SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 15. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [Cao 95] S. G. Cao, N. W. Rees, and G. Feng “Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy global models,” Fuzzy Sets Syst., vol. 75, pp. 47–62, 1995.
- [Cao 97] S. G. Cao, N. W. Rees, and G. Feng, “Analysis and design for a class of complex control systems-Part II: Fuzzy controller design,” *Automatica*, vol. 33, pp.1029–1039, 1997.
- [Cha 00] Chadli, M., Maquin, D., & Ragot, J. “Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems” of: Proceedings of IEEE International Conference on Systems Man and Cybernetics, SMC. Nashville, United-States, pp. 3514-3519, October 2000
- [Cha 02] Chadli M., Didier Maquin, José Ragot, “Output stabilisation in multiple model approach to modelling” *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, Scotland, September 2002.
- [Cha 02a] Chadli M.: “Stabilité et commande de systemes decrits par des multi-modèles ” these de doctorat de l’INPL, France, 2002.
- [Cha 02b] Chadli M., D. Maquin, J. Ragot, “Nonquadratic stability analysis of Takagi-Sugeno models” IEEE Conference on Decision and Control, vol. 2, pp. 2143-2148, 2002.
- [Chai 98] J. S. Chai, S. Tan, Q. Chan et C. C. Hang, “A general fuzzy control scheme for nonlinear processes with stability analysis” Fuzzy Sets and Systems, vol. 100, no.1, pp. 179-195, 1998.

- [Chan 02] Chang, W, Bae Park, J., Joo, Y. H, and Chen, G., “Design of robust fuzzy model-based controller with sliding mode control for SISO nonlinear systems” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 125, no. 1, pp. 1-22, 2002.
- [Cho 96] E. K. P. Chong and S. H. Zak, “An Introduction to Optimization” New York: Wiley, 1996.
- [Fen 06] Gang Feng: “A Survey on Analysis and Design of Model-Based Fuzzy Control Systems” *IEEE Transaction on fuzzy system*, vol. 14, no. 5, pp.676-697, October 2006.
- [Fan 96] C. Fantuzzi and R. Rovatti, “On the approximation capabilities of the homogeneous Takagi-Sugeno model,” in *Proc. 5th IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems*, New Orleans, LA, pp. 1067–1072, 1996.
- [Fil 91] Filev, D. “Fuzzy modeling of complex systems” *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 5, no 3, pp.281–290, 1991.
- [Haz 16] Hazerchi Mohamed, Illoul Rachid “Nonlinear Control Based on TS Fuzzy with systematic method based on Taylor series” *Mediterranean Journal of Measurement and Control*, vol. 12, no. 3, pp. 619-626, 2016.
- [Haz 18] Hazerchi Mohamed, Illoul Rachid: “Premise Variables Cases for LMI based TS Fuzzy Observers” *International Journal of Control and Automation*, vol. 11, no. 2, pp.75-88, 2018.
- [Hua 07] D. Huang et S. K. Nguang. “Static output feedback controller design for fuzzy systems: An ILMI approach” *Information Sciences*, vol. 177, pp. 3005–3015, 2007.
- [Ich 12] Ichalal D., Marx B., Ragot J. et Maquin D. “Advances in observer design for Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables” In *20th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Barcelona, Spain. 2012.
- [Ich 10] Ichalal D., Marx B., Ragot J. et Maquin D. “State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables” *IET Control Theory & Applications*, vol 4, no 5, pp. 897-908, 2010.
- [Ich 09] Ichalal D. “Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno” thèse de doctorat, Nancy university INPL, France, 2009.
- [Jac 91] R. A. Jacobs, M. I. Jordan, J. S. Nowlan et G. E. Hinton, “Adaptive of local experts” *Neural Computation* vol. 6, pp. 181-214, 1991.
- [Jad 99] A. Jadbabaie, “A reduction in conservatism in stability and L_2 Gain analysis of T-S fuzzy systems via Linear matrix inequalities” *IFAC. 14th triennial World congress*, Beijing, P.R. China. pp. 285-289, 1999.
- [Joh 92] T. A. Johansen, A. B. Foss, “Nonlinear local model representation for adaptive systems” *IEEE International Conference on Intelligent control and instrumentation*, vol. 2, pp. 677-682, 1992.

- [Joh 00] T. A. Johansen, R. Shorten, and R. Murray-Smith, "On the interpretation and identification of dynamic Takagi–Sugeno models," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 3, pp. 297–313, Jun. 2000.
- [Kha 02] H. K. Khalil, "Nonlinear system" Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J. 07458, third edition 2002.
- [Li J. 00] Li J., Wang H. O., Newmann D., Tanaka K. "Dynamic Parallel Distributed Compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems; an LMI approach", *information science*, no. 123, pp. 201-221, 2000.
- [Lo 03] J. C. Lo et M. L. Lin. "Robust h nonlinear control via fuzzy static output feedback". *IEEE Trans. Circuits Systems Part I*, vol. 50, 2003.
- [Lof 04] J. Lofberg: "YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB" *IEEE International Conference on Robotics and automation*, New Orleans, LA, USA, 2004.
- [Ma 98] X. J. Ma, Z. Q. Sun, and Y. Y. He., "Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer", *IEEE Trans. Fuzzy Sys.*, vol. 6, No. 1, pp. 41-51. 1998.
- [M Joh 98] M. Johansson, A. Rantzer et K. Arzen, "Piecewise quadratic stability for affine Sugeno systems" *IEEE International Conference on Fuzzy Systems Proceedings, IEEE World Congress on Computational Intelligence*, vol. 1, pp. 55-60, 1998.
- [Mur 97] R. Murray-Smith and T. A. Johansen. "Multiple model approaches to modelling and control" Taylor and Francis, 1997.
- [Nag 10] Anca Maria Nagy Kiss, "Analysis and synthesis of multi-model for Diagnosis. Application to a WWTP", thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2010.
- [Nes 94] Nesterov Y. and Nemirovski A. "Interior point polynomial methods in convex programming: theory and applications" SIAM, PA, Philadelphia, 1994.
- [Orj 08] Rodolfo Orjuola "Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles" thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2008.
- [Oud 08] Mohammed Oudghiri: " Commande multi-modèles tolérante aux défauts : Application au contrôle de la dynamique du véhicule automobile" these de doctorat de l'université de Picardie Jules Verne, France, 2008.
- [Pat 98] R.J Patton, J. Chen, C. J. Lopez-Toribio, "design a fault diagnosis scheme using TS-fuzzy observer" *Proc. Of the 37th IEEE Conference on Decision Control Tampa, Florida USA*, pp 84-89, December 1998.
- [Pra 08] J. Prakash, R. Senthil, "Design of observer based nonlinear model predictive controller for a continuous stirred tank reactor" *Journal of Process Control*, vol.18, pp. 504-514, 2008.

[Sug 99] M. Sugeno, "On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 7, no. 2, pp.201–224, Apr. 1999.

[Tak 85] T. Takagi, M. Sugeno. "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control". Conference on Systems, Man and Cybernetics, 15, 1985.

[Tan 92] K. Tanaka, M. Sugeno. "Stability analysis and design of fuzzy control Systems", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, no.2, pp. 135-156. 1992.

[Tan 98] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs". *IEEE TRA. ON FUZZY SYSTEMS*, vol. 6, no. 2, May 1998.

[Tan 01] K. Tanaka, Hua O. Wang, "Fuzzy Control Systems Design and Analysis; A Linear Matrix Inequality Approach", John Wiley Sons, Inc. New York, ISBN: 0-471-22459-6, 2001.

[Tan 01a] Tanaka, K., Hori, T., & Wang, H. O. "New parallel distributed compensation using time derivative of membership functions; fuzzy lyapunov approach" In Proc of CDC Orlando, Florida, pp. 3942-3947, 2001.

[Tan 03] Tanaka, K., Hori, T., & Wang, H. O. "A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems" *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol.11, no.4, pp. 582-589, 2003.

[Tei 99] Marcelo C. M. Teixeira and Stanislaw H. Zak, "Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models", *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 2, pp. 133-142, April 1999.

[Tse 01] Tseng, C., Chen, B., and Uang, H. J., "Fuzzy tracking Control Design for nonlinear Dynamic systems via T-S fuzzy model" *IEEE Trans., Fuzzy, Sys.* vol. 9 no 3, pp. 381-392, 2001.

[Wan 95] Wang, H. O., K. Tanaka and M. Griffin, "Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model" *Proc. Fuzz IEEE/IFES*, pp. 531-538, 1995.

[Wan 96] Wang, H. O., Tanaka, K., & Griffin, M.F. "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol.4, no.1, 14-23, 1996.

[X Wan 92] L. X. Wang and J. M. Mendel, "Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least squares learning" *IEEE Trans.Neural Netw.*, vol. 3, no. 5, pp. 807–814, Sep. 1992.

[You 14] T. Youssef, M. Chadli, H.R. Karimi, M.Zelmat. "Design of unknown inputs proportional integral observers for TS fuzzy models", *Neurocomputing*, vol. 123, pp. 156-165, 2014.

[Yin 98] H. Ying, "General SISO Takagi–Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol.6, no. 4, pp. 582–587, Nov. 1998.

[Zha 01] Zhang, J. M., LI, R. H., and Zhang, P. A., “Stability Analysis and systematic design of fuzzy control systems” *Fuzzy Set and Systems*. No 120, pp.65-72, 2001.

[Zen 00] K. Zeng, N. Y. Zhang, and W. L. Xu, “A comparative study on sufficient conditions for Takagi–Sugeno fuzzy systems as universal approximators,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 6, pp. 773–780, Dec.2000.

Tavaux effectués dans le cadre du doctorat :

Hazerchi Mohamed, Illoul Rachid “Nonlinear Control Based on TS Fuzzy with systematic method based on Taylor series” *Mediterranean Journal of Measurement and Control*, vol. 12, No. 3 (2016), pp. 619-626.

Hazerchi Mohamed, Illoul Rachid: “Premise Variables Cases for LMI based TS Fuzzy Observers” *International Journal of Control and Automation*, Vol. 11, No. 2 (2018), pp.75-88.

Hazerchi Mohamed, Illoul Rachid: “Tracking PDC controller for CSTR” 3rd International Conference on Control, Engineering & Information Technology (CEIT 2015), Tlemcen, may 2015 Algeria.

Hazerchi Mohamed, Illoul Rachid: “PD-like fuzzy controller for a nonlinear CSTR” International Conference on Applied Automation and Industrial Diagnostics (ICAAID 2015), Djelfa on March 2015, Algeria.

M. Boudjellal, R. Illoul, and **M. Hazerchi: “State Estimation and Fault Reconstruction for a Nonlinear CSTR: A Comparative Study”** International Conference on Applied Automation and Industrial Diagnostics (ICAAID 2017), Djelfa on September 2017, Algeria.

Hazerchi Mohamed, Illoul Rachid: “TS fuzzy observers; Measurable and unmeasurable premise variable cases” The third International Conference on Electrical Engineering and Control Applications (ICEECA 2017) Constantine, Algeria.