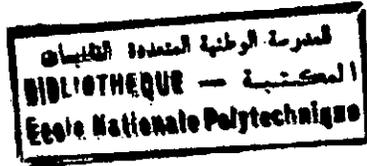


M0012/92A

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE AUX UNIVERSITES  
Ecole Nationale Polytechnique  
d'ALGER  
Département de Génie  
Mécanique



مدرسة متعددة التقنيات  
وزارة للجامعات  
بالجزائر

THÈSE

Présentée Pour l'Obtention  
de Magister

THEME

REPONSE DYNAMIQUE DUE A L'IMPACT  
DES MATERIAUX COMPOSITES FABRIQUES  
PAR L' E.N.P.C CHLEF

Presentée par : Mr BENHEDADA M.

SOUTENU DEVANT LE JURY :

Président : Mr CHARIF A. (Prof. E.N.P.)

Rapporteur. : Mr RECHAK S. (Prof. E.N.P.)

Examineurs : Mr BELKACEMI Y. (C.C. E.N.P.)

Mr BELHANECHÉ H. (C.C. E.N.P.)

Invités : Représentant E.N.P.C CHLEF

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE AUX UNIVERSITES  
Ecole Nationale Polytechnique  
d'ALGER  
Département de Génie  
Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة —  
RIBLIOTHEQUE —  
Ecole Nationale Polytechnique

مدرسة متعددة التقنيات  
وزارة للجامعات  
بالجزائر

## THESE

Présentée Pour l'Obtention  
de Magister

## THEME

REPONSE DYNAMIQUE DUE A L'IMPACT  
DES MATERIAUX COMPOSITES FABRIQUES  
PAR L' E.N.P.C CHLEF

Presentée par : Mr BENHEDADA M.

SOUTENU DEVANT LE JURY :

Président : Mr CHARIF A. (Prof. E.N.P.)

Rapporteur : Mr RECHAK S. (Prof. E.N.P.)

Examineurs : Mr BELKACEMI Y. (C.C. E.N.P.)

Mr BELHANECHÉ H. (C.C. E.N.P.)

Invités : Représentant E.N.P.C CHLEF

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à M<sup>r</sup> S.RECHAK pour son suivi et ses précieux conseils.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude aux responsables de l'E.N.P.C de Chlef et aux responsables de l'U.T.Compiègne pour m'avoir accueilli dans leurs départements.

Que messieurs les membres du jury trouvent ici mes sincères remerciements pour avoir accepté d'évaluer ce travail.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont rendues possible l'élaboration de ce travail.

## SOMMAIRE

### 1<sup>e</sup> PARTIE

1 _ INTRODUCTION .....	1
2 _ THEORIE DE STRATIFICATION.	
2-1 Introduction.....	4
2-2 Loi de HOOKE généralisée.....	4
2-3 Relation entre les contraintes et les déformations hors axes d'orthotropie.....	6
2-4 Théorie élastique du stratifié.....	9
2-5 Relation entre déplacement et déformation.....	9
2-6 Efforts et moments résultants.....	13
2-6-1 Efforts résultants.....	15
2-6-2 Moments résultants.....	16
2-6-3 Relations usuelles.....	17

### 2<sup>e</sup> PARTIE

### 3 \_ CHARACTERISATION.

3-1 Présentation des différents matériaux étudiés.....	18
3-2 Détermination de la fraction volumique des matériaux.....	19
3-3 technique expérimentale.....	20
3-4 Présentation des essais.....	20
3-4-1 Essais de traction.....	20
3-4-2 Moyens d'essai.....	22
3-5 Résultats et analyses.....	24
3-5-1 Courbe de charge de l'unidirectionnel.....	24
3-5-2 Courbe de charge du mat.....	27
3-5-3 courbe de charge de tissu.....	27
3-6 Résultats des essais de traction.....	32
3-7 Etude comparative entre les modeles de prévision théorique du module d'élasticité et les résultas expérimentaux .....	32
3-7-1 Pour le matériau mat.....	32
3-7-2 Pour le matériau unidirectionnel.....	37

3-7-3 Pour le matériau tissu.....	37
3-8 Essais de torsion.....	39
3-8-1 Moyens d'essais.....	39
3-8-2 Résultats d'essais.....	40

### 3<sup>e</sup> PARTIE

## 4 \_ REPONSE DYNAMIQUE

4-1 Méthodes expérimentales.....	41
4-1-1 Matériaux.....	41
4-1-2 Dispositif expérimental.....	41
4-2 Résultats expérimentaux.....	44
4-2-1 Cas fixe-fixe.....	44
4-2-2 Cas libre-libré.....	60
4-2-3 Cas d'encastrement.....	61
4-3 Analyse par éléments finis.....	60
4-4 Modèle numérique.....	82
4-4-1 Matrice de rigidité.....	82
4-4-2 Matrice masse.....	84
4-4-3 Force de contact.....	84
4-4-4 Méthode de NEWMARK implicite.....	89
4-4-5 Solution des équations couplées.....	93
4-5 Résultats expérimentaux et numériques.....	96

5 _ CONCLUSION.....	101
---------------------	-----

- Figure( 4-6 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-7 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas fixe -fixe du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-8 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 2 pour le cas fixe-fixe du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-9 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 3 pour le cas fixe-fixe du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-10 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas fixe-fixe du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-11 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas fixe-fixe du matériau mat
- Figure( 4-12 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 2 pour le cas fixe-fixé du matériau mat
- Figure( 4-13 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 3 pour le cas fixe-fixe du matériau mat
- Figure( 4-14 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas fixe-fixe du matériau mat
- Figure( 4-15 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-16 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 2 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-17 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 3 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-18 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-19 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas libre-libre du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-20 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 2 pour le cas libre-libre du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-21 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 3 pour le cas libre-libre du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-22 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas libre-libre du matériau unidirectionnel

- Figure( 4-23 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas libre-libre du matériau mat
- Figure( 4-24) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 2 pour le cas libre-libre du matériau mat
- Figure( 4-25 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 3 pour le cas libre-libre du matériau mat
- Figure( 4-26 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas libre-libre du matériau mat
- Figure( 4-27 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas encastré du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-28 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas encastré du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-29 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas encastré du matériau mat
- Figure( 4-30 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas encastré du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-31 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas encastré du matériau unidirectionnel
- Figure( 4-32 ) Réponse expérimentale de la jauge N $\frac{1}{2}$ 4 pour le cas encastré du matériau mat
- Figure( 4-33) Element plaque isoparamétrique 9 noeuds
- Figure( 4-34) Schema de test de pénétration
- Figure( 4-35) Courbe de charge pour (n=3/2)
- Figure( 4-36) Courbe de décharge pour (q=2.5)
- Figure( 4-37) Type de maillage pour un quart de plaque
- Figure( 4-38) Impact de la sphère sur la plaque
- Figure( 4-39 ) Réponse expérimentale et theorique de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-40 ) Réponse expérimentale et theorique de la jauge N $\frac{1}{2}$ 3 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-41 ) Réponse expérimentale et theorique de la jauge N $\frac{1}{2}$ 1 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)<sup>s</sup>
- Figure( 4-42 ) Réponse expérimentale et theorique de la jauge N $\frac{1}{2}$ 3 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)<sup>s</sup>

## T A B L E D E S T A B L E A U X

- Tableau (3-1) Résultats d'essais de traction des matériaux étudiés
- Tableau (3-2) Relevées expérimentales des propriétés mécaniques  
des matériaux composites étudiés
- Tableau (4-1) Relevées expérimentales des pics du matériaux tissu  
pour le cas "fixe-fixe"
- Tableau (4-2) Réponses dynamiques donnés par la jauge n°1 des trois  
matériaux étudiés
- Tableau (4-3) Réponses dynamiques donnés par la jauge n°3 des trois  
matériaux étudiés
- Tableau (4-4) Resultats expérimentaux des vitesses de propagation  
le long de l'axe ox
- Tableau (4-5) Resultats théoriques et experimentaux des vitesses de  
propagation pour les trois matériaux étudiés
- Tableau (4-6) Relevées expérimentales des pics du matériaux tissu  
pour le cas "libre-libre"

## INTRODUCTION

Les matériaux composites à fibres renforcées ont été employés avec succès comme matériaux de structure dans les avions, missiles et véhicules spatiaux dans les années récentes, et la performance de ces composites a montré leur supériorité par rapport aux métaux dans les applications demandant une rigidité élevée ainsi qu'un poids bas. Mais les inconvénients de ces composites sont marqués par leur pauvre résistance à l'impact. Plusieurs rapports concernant les réponses des composites pour différents types d'impacts ont besoin d'une meilleure compréhension du problème pour que la survie de ces composites puisse être améliorée.

Il est évident que l'impact produit des endommagements, et par conséquent réduit la rigidité des matériaux composites. Les modes d'endommagement introduisent des déformations locales permanentes, cassures des fibres, délaminage, etc... Tandis que les causes de ces endommagements sont toujours inconnues et peuvent être simples dans leur nature. En général, l'impact d'un objet mou peut donner une longue durée de contact et la réponse dynamique de la structure est importante.

L'impact d'un objet dur donne un temps de contact court et résulte dans la transmission initiale de l'énergie d'impact en une région locale de la structure. Cette énergie initiale va se propager dans le reste de la structure sous forme d'ondes de pression. Il est généralement connu que la cause de flexion soudaine doit être examinée du point de vue phénomène de propagation d'onde transitoire. Plusieurs méthodes analytiques [1-4], numériques [5-6] et expérimentales [7-8] ont été utilisées pour étudier le problème d'impact transitoire. La réponse d'une plaque stratifiée peut être analysée en utilisant ces méthodes pourvu que la charge appliquée soit prescrite.

Une loi classique de contact entre deux sphères fut dérivée par HERTZ [9]. Quand on laisse le rayon de l'une des deux sphères aller à l'infini, on obtient la loi de contact entre une sphère et un demi espace élastique. Plusieurs auteurs utilisent la loi Hertizienne de contact pour l'étude de l'impact sur les métaux et les composites [10]. Récemment YANG et SUN [11] ont performé des tests de pénétration statique sur les stratifiés de composite graphite/époxy, en utilisant des sphères métalliques de différentes tailles. Les deux auteurs trouvent que la lois Hertizienne n'est pas adéquate. En particulier ils ont trouvé que la signification permanente de pénétration existe et que l'énergie de dissipation remplace le processus d'impact et est responsable de l'endommagement local.

Le présent travail se propose d'étudier la réponse dynamique due à l'impact du matériau composite de l'entreprise nationale des plastiques et caoutchouc de CHLEF pour différents types de matériaux.

Une étude élastique du stratifié a été effectuée dans le chapitre 1. pour cela, l'étude de la couche élémentaire contribue à la connaissance approfondie des lois de comportements élastiques du composite sous sollicitations diverses. Dans la seconde partie relative à la théorie élastique du stratifié, la détermination des équations fondamentales est nécessaire.

Le chapitre 2 porte sur la caractérisation mécanique des matériaux composites élaborés par l'E.N.P.C de CHLEF. Il s'agit d'évaluer un certain nombre de paramètres mécaniques, tels que les modules d'élasticité en traction, le module de cisaillement et le coefficient de poisson pour les différents types de matériaux. Il s'agit aussi de comparer les valeurs de ces paramètres mécaniques obtenus expérimentalement à ceux prévus par les modèles théoriques existant dans la littérature.

Le chapitre 3 décrit l'étude expérimentale de l'impact sur les plaques polyster/verre en utilisant une bille sphérique en acier. Les réponses des jauges fixées sur les plaques ont été enregistrées sur un oscilloscope à mémoire.

Le chapitre 4 représente l'étude numérique par la méthode des éléments finis pour l'obtention des déformations dynamiques des plaques en composite. La prédiction des résultats a été constatée dans certain temps.

Dans le chapitre 5 nous avons dégagé les conclusions concernant l'ensemble de ce mémoire.

2-1 Introduction

La théorie de stratification porte sur le comportement mécanique des stratifiés constitués de plis fibres longues unidirectionnelles; on associe chaque pli les constantes mécaniques nécessaires aux calculs (module d'élasticité, coefficient de Poisson et module de cisaillement), et les paramètres géométriques tels que l'épaisseur et l'orientation du repère orthonormé lié la couche par rapport la direction principale du matériau stratifié.

Pour notre cas, on se basera au calcul du comportement élastique des plaques minces o la loi de HOOKE est valable.

2-2 Loi de HOOKE généralisée

Dans le repère lié au matériau, la loi de HOOKE généralisée reliant les contraintes aux déformations s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2-1)$$

Avec,

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$Q_{16} = G_{12}$$

Avec,

$E_{11}, E_{22}$  : Les modules de YOUNG dans les direction 1 et 2

$G_{12}$  : Le module de cisaillement

$\nu_{12}$  : Le coefficient de poisson

La 5<sup>eme</sup> constante élastique est en fonction des autres constantes et peut être déterminée du fait que la matrice [Q] est symétrique.

$$\nu_{12}.E_{11} = \nu_{21}.E_{22} \quad (2-7)$$

$$\nu_{21} = \nu_{12}.E_{22}/E_{11} \quad (2-8)$$

### 1-3 Relation entre contraintes et déformations hors axes d'orthotropie

En général, les axes principaux 1 et 2 ne coïncident pas avec les axes x et y (figure (2-1)) pour cela on utilise les relations de transformations décrites:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

La matrice de transformation [T] est donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

$$o \quad m = \cos\theta$$

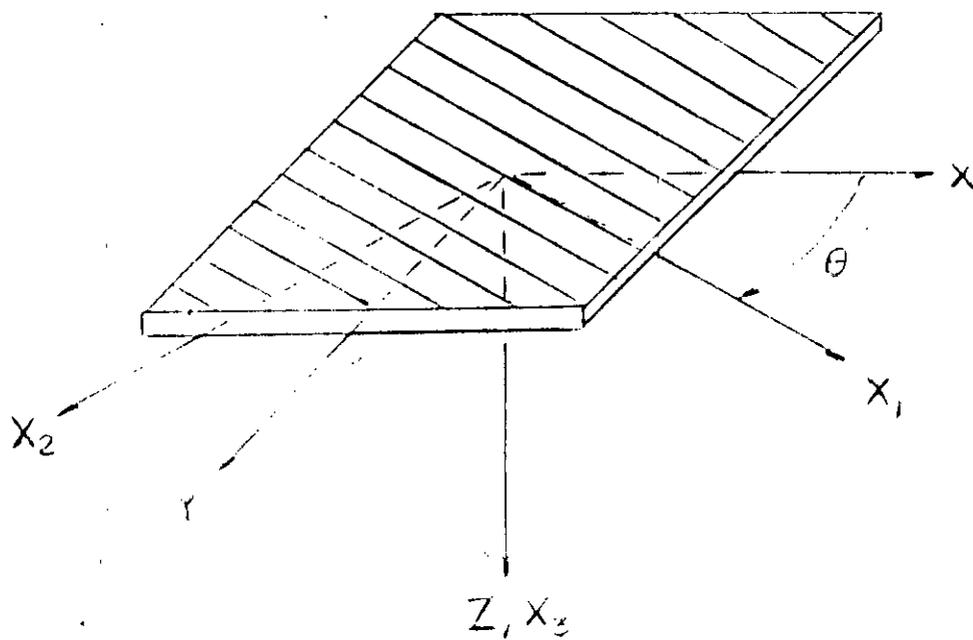
$$n = \sin\theta$$

Donc,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-11)$$

On obtient après avoir effectué des transformations intermédiaires

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$



(  $X_1, X_2, X_3$  ) Axes de référence d'un pli

(  $X, Y, Z$  ) Axes de référence d'un stratifié

Figure 2-1 ) Configuration off axis

$$\text{où, } [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

$$\text{On note, } [\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q][R][T][R]^{-1} \quad (2-14)$$

Matrice de rigidité hors axes d'orthotropie

Donc,

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

D'o les composantes de la matrice de rigidité  $[\bar{Q}]$  sont données par:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \cdot n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22} \cdot m^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m \cdot n^3 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m \cdot n^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \end{aligned} \quad (2-16)$$

$$\text{où, } m = \cos\theta \quad ; \quad n = \sin\theta$$

TSAI et PAGANO ont donné une autre écriture pour la matrice de rigidité  $[\bar{Q}]$ , dont les composantes sont écrites sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= u_1 + u_2 \cdot \cos(2\theta) + u_3 \cdot \cos(4\theta) \\
\bar{Q}_{22} &= u_1 - u_2 \cdot \cos(2\theta) + u_3 \cdot \cos(4\theta) \\
\bar{Q}_{12} &= u_4 - u_3 \cdot \cos(4\theta) \\
\bar{Q}_{16} &= -1/2 u_2 \cdot \sin(2\theta) - u_3 \cdot \sin(4\theta) \\
\bar{Q}_{26} &= -1/2 u_2 \cdot \sin(2\theta) - u_3 \cdot \sin(4\theta) \\
\bar{Q}_{66} &= u_5 - u_3 \cdot \cos(4\theta)
\end{aligned}
\tag{2-17}$$

Où les invariants  $U_i$  sont donnés par:

$$\begin{aligned}
U_1 &= (3 \cdot Q_{11} + 3 \cdot Q_{22} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) / 8 \\
U_2 &= (Q_{11} - Q_{22}) / 2 \\
U_3 &= (Q_{11} - Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) / 8 \\
U_4 &= (Q_{11} + Q_{22} + 6 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) / 8 \\
U_5 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) / 8
\end{aligned}
\tag{2-18}$$

#### 2-4 Théorie élastique du stratifié

Un stratifié est constitué par la superposition de plusieurs couches élémentaires de matériau composite appelée plis. Comme il a été déjà mentionné dans le paragraphe précédent un matériau orthotrope dans un état de contraintes planes est régi par la relation suivante:

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\} \tag{2-19}$$

On note cette équation pour la couche  $k$  comme suite:

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\varepsilon\}_k \tag{2-20}$$

#### 2-5 Relation entre déplacement et déformation

La relation qui relie les déformations aux déplacements en un point quelconque d'un stratifié, sera développée dans cette section en fonction des déplacements du plan médian du stratifié  $(u_0, v_0)$  et en fonction du déplacement dans la direction des  $Z(w)$ .

On considère une section d'un stratifié dans le plan X-Y figure(2-2) qui est déformée sous l'effet d'un certain chargement

On suppose que le point A du plan médian subit un déplacement  $U_0$  dans la direction X et que la ligne B A D reste droite et normale la déformée du plan médian, cela est équivalent négliger les déformations angulaires dans les plans X-Z, Y-Z qui sont:  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ . A partir de ces hypothèses on tire la relation donnant le déplacement dans la direction des X d'un point quelconque C situé sur la normale BAD

$$U_c = U_0 - Z_c \cdot \alpha \quad ( 2-21 )$$

o  $Z_c$  est la cte du point C sur l'axe Z mesuré partir du plan médian .

$\alpha$  est l'angle de déviation de la normale BAD par rapport sa position initiale, d'autre part, en utilisant la similitude des triangles.  $\alpha$  est aussi définie comme étant la section du plan médian par rapport l'axe Z

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x} \quad ( 2-22 )$$

Les déplacements de tout point de cte Z du stratifié s'écrit :

$$U = U_0 - Z \cdot \partial w / \partial x \quad ( 2-23 )$$

Le déplacement V dans la direction Y sera donné d'une façon analogue.

$$V = V_0 - Z \cdot \partial w / \partial y \quad ( 2-24 )$$

Introduisons les dformations:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial x} - Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V_0}{\partial y} - Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2 \cdot Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad ( 2-25 )$$

On peut également les écrire en fonction des déformations du plan médian  $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$  et  $\gamma_{xy}^0$  et les courbures de la plaque  $k_x, k_y$  et  $k_{xy}$  :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + Z \cdot k_x \\
 \epsilon_y &= \epsilon_y^0 + Z \cdot k_y \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + Z \cdot k_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{ 2-26 }$$

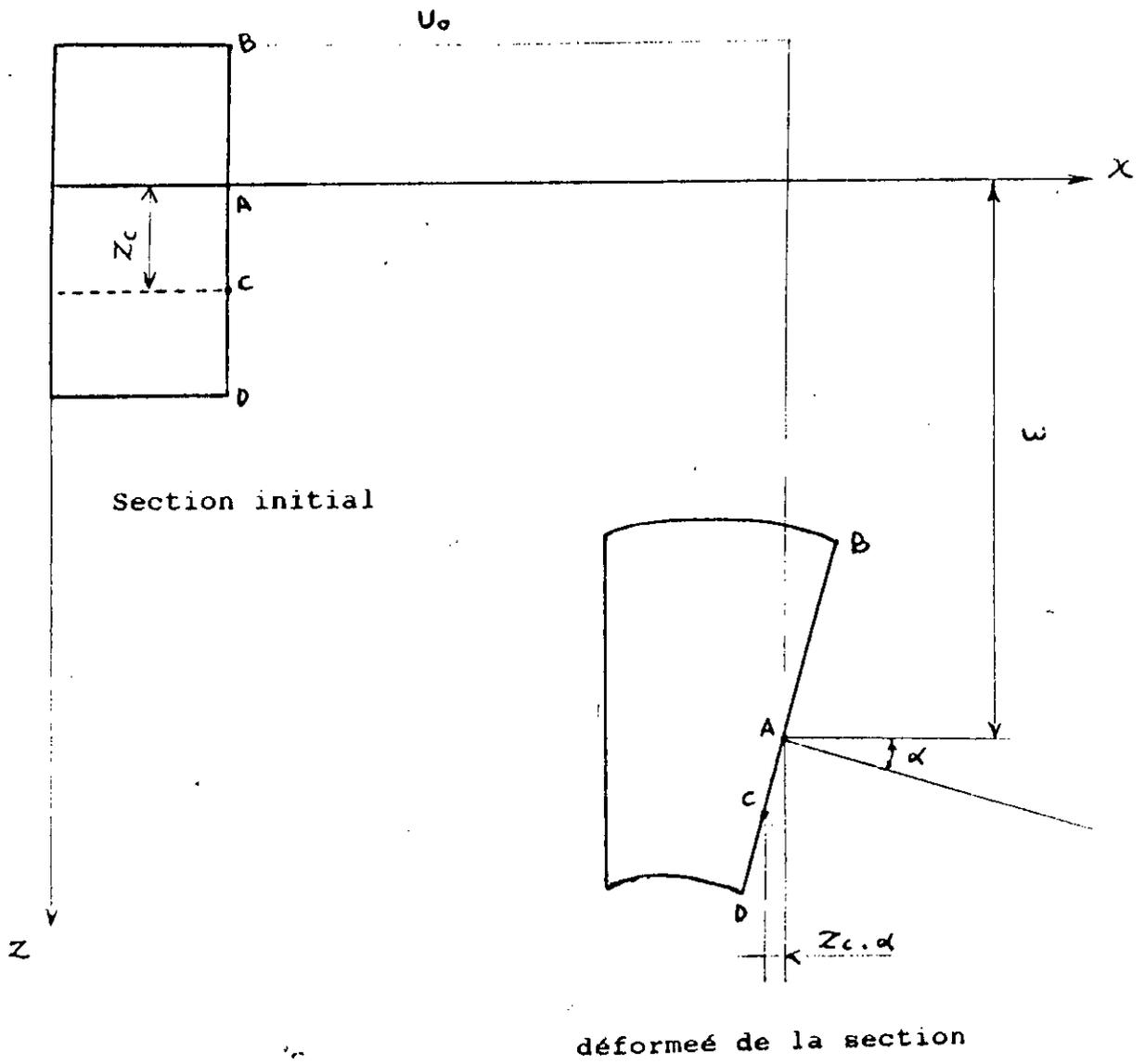
$$\begin{aligned}
 \epsilon_x^0 &= \partial u_0 / \partial x & k_x &= - \partial^2 w / \partial x^2 \\
 \epsilon_y^0 &= \partial v_0 / \partial y & k_y &= - \partial^2 w / \partial y^2 \\
 \gamma_{xy}^0 &= \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x & k_{xy} &= -2 \cdot (\partial^2 w / \partial x \partial y)
 \end{aligned}
 \tag{ 2-27 }$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

A partir des expressions ( 2-19 ) et ( 2-20 ) l'état de contrainte de la k<sup>eme</sup> couche peut s'écrire en fonction des déformations du plan médian, en fonction des courbures de la plaque, en fonction de la cte Z et en fonction des rigidités de la plaque :

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \cdot \{\epsilon^0\} + Z \cdot [\bar{Q}]_k \cdot \{k\}
 \tag{ 2-28 }$$



Figure( 2 - 2 ) Déformation du plan médian

## 2 - 5 Efforts et moments résultants

Les efforts et moments résultants forment un système statique équivalent au système de contraintes subit par le stratifié appliqué son plan médian figure( 2-3 ).

chaque effort résultant est défini comme étant la somme des contraintes que subit la face considérée suivant la direction Z

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \quad ( 2-29 )$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz$$

N = effort résultant par unité de largeur.

Les moments résultants sont données par :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x Z dz$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y Z dz \quad ( 2-30 )$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} Z dz$$

M : moment fléchissant d aux contraintes par unité de largeur

### 2-5-2 Les moments résultants

Sous forme matricielle la relation (2-30) s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (2-38)$$

La composition de cette intégrale en intégrant autour de chaque couche sera:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (2-39)$$

d'où

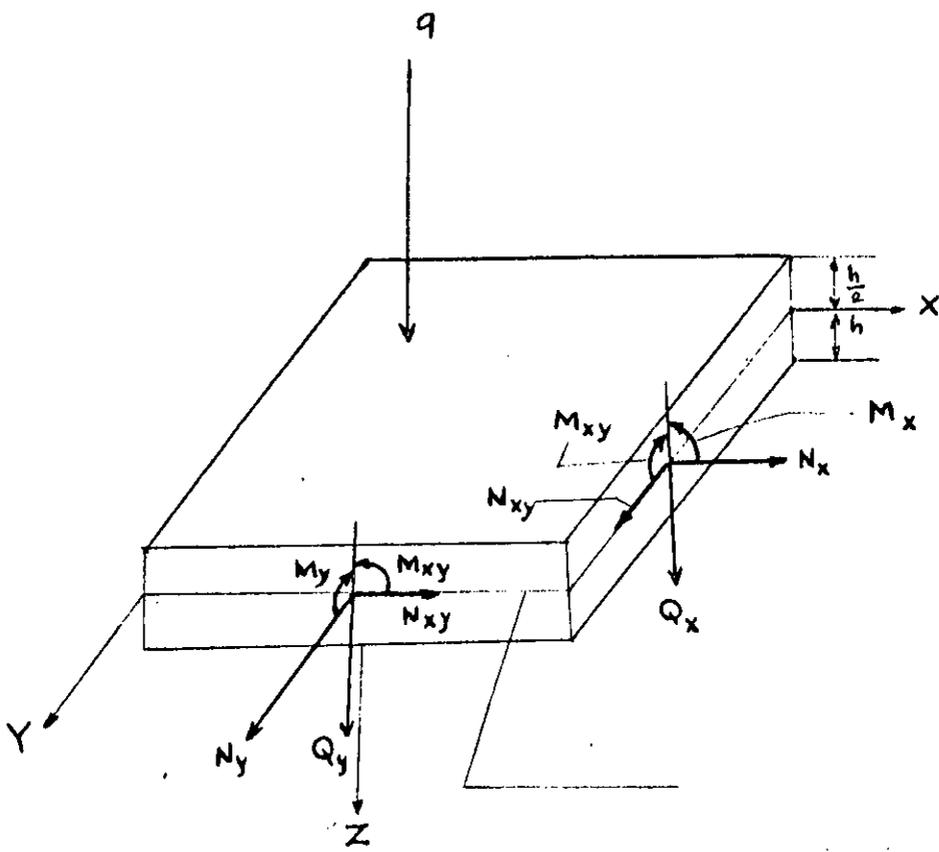
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^n \left[ \bar{Q}_k \cdot \{\epsilon^0\} \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \, dz + \bar{Q}_k \cdot \{k\} \cdot \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 \, dz \right] \quad (2-40)$$

Donc,

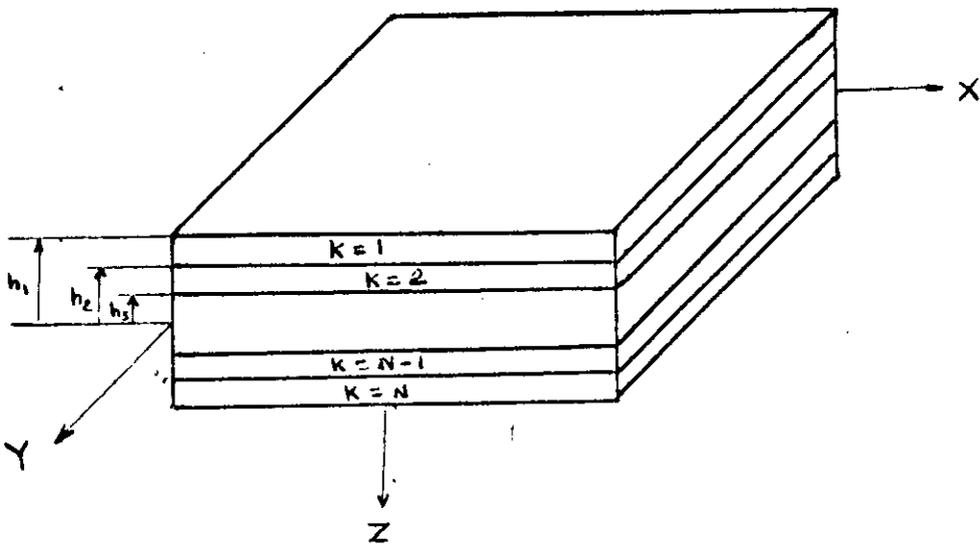
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-41)$$

Ou bien,  $[M] = [B] \{\epsilon^0\} + [D] \{k\} \quad (2-42)$

$$D_{ij} = 1/3 \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k \cdot (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2-43)$$



Figure( 2-3 ) Les contraintes résultantes d'un stratifié



Figure( 2-4 ) Géométrie descriptive d'un stratifié

### 2-5-1 Efforts résultants

Sous forme matricielle la relation ( 2-29 ) s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad ( 2-31 )$$

Si on décompose cette intégrale continue en intégrales autour de chaque couche on aura :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad ( 2-32 )$$

O,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^n \left[ \overline{[Q]}_k \cdot \{\epsilon^o\} \cdot \int_{h_{k-1}}^k dz + \overline{[Q]}_k \cdot \{k\} \cdot \int_{h_{k-1}}^k z dz \right] \quad ( 2-33 )$$

Donc,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad ( 2-34 )$$

Ou bien,  $[N] = [A](\epsilon^o) + [B](k)$  ( 2-35 )

Avec,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k \cdot (h_k - h_{k-1}) \quad ( 2-36 )$$

$$B_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^n (\overline{Q}_{ij})_k \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad ( 2-37 )$$

### 2-5-3 Relations usuelles

Si on combine les relations (2-35) et (2-42) on aura la relation constitutive de la plaque qui est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^o \\ k \end{array} \right\} \quad (2-44)$$

De la relation (2-35) on tire:

$$[c_{\frac{1}{2}}] = [A^{-1}]\{N\} - [A^{-1}][B]\{k\} \quad (2-45)$$

On substitue cette expression dans (2-42) on obtient:

$$\{M\} = [B][A^{-1}]\{N\} - \left[ [D] - [B][A^{-1}][B] \right] \{k\} \quad (2-46)$$

Pour simplification :

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A^{-1}] \\ [C^*] &= [B][A^{-1}] \\ [B^*] &= [A^{-1}][B] \\ [D^*] &= [D] - [B][A^{-1}][B] \end{aligned} \quad (2-47)$$

De (2-46) on obtient

$$\{k\} = [D^{*-1}]\{M\} - [D^{*-1}][C^*]\{N\} \quad (2-48)$$

En substituant cette expression dans (2-45) on obtient:

$$\{c_{\frac{1}{2}}\} = [B^*][D^{*-1}]\{M\} + \left[ [A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] \right] \{N\} \quad (2-49)$$

Sous forme matricielle:

$$\left\{ \begin{array}{c} c_{\frac{1}{2}} \\ k \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N \\ M \end{array} \right\} \quad (2-50)$$

$$\begin{aligned} [A'] &= [A^*] - [B^*][D^{*-1}][C^*] \\ [B'] &= [B^*][D^{*-1}] \\ [D'] &= [D^{*-1}] \\ [C'] &= [D^{*-1}][C^*] \end{aligned}$$

## CHAPITRE - 3

### C A R A C T E R I S A T I O N

#### 3-1 Présentation des différents matériaux étudiés

Les matériaux utilisés dans cette étude, représentent une variété de composites fabriqués par nos soins dans les ateliers de l'E.N.P.C de chlef à base de formulation de résine polyster renforcés des fibres de verre sous différentes natures.

Roving : Filaments continus  
Mat : Fibres courtes orientées aléatoirement  
Tissu : Trame 0° et chaîne 90°

Les Différentes plaques verre/résine préparées sont:

##### Type 1

Nature des fibres	Resine	Nombre de couches	Densité
Fibres de verre courtes orientées au hasard	Polyster	5 couches	400 g/m <sup>2</sup>

##### Type 2

Nature des fibres	Resine	Nombre de couches	Densité
Fibres de verre unidirectionnelles	Polyster	3 couches	400 g/m <sup>2</sup>

### Type 3

Nature des fibres	Resine	Nombre de couches	Densité
Fibres de verre tissu	Polyster	5 couches	400 g/m <sup>2</sup>

### Le Procédé de fabrication

Ces matériaux de composites ont été réalisés avec le procédé de moulage par contact.

Les caractéristiques des constituants du matériau étudié sont:

#### a- Résine polyster

Densité : 1200 Kg/m<sup>3</sup>

Module d'élasticité en traction : 4.3 Gpa

#### b- Fibre de verre

Qualité: verre (E)

Densité: 2600 Kg/m<sup>3</sup>

Longueur de fibre courte : 50 mm

Module d'élasticité en traction : 72 Gpa

### 3-2 Détermination de la fraction volumique des matériaux étudiés

Les échantillons de matériau composite sont découpés de différents endroits d'une plaque puis pesés avant et après vaporisation de la résine dans une étuve à 600½c. Les fibres résultantes ont été pesées afin de déterminer leur fraction massique.

La fraction massique est déterminée par la formule suivante:

$$V_f = \frac{m_f}{m_f + (m_c - m_f) \left( \frac{\rho_f}{\rho_c} \right)} \quad ( 3-1 )$$

$m_f$  : Masse de fibre

$m_c$  : Masse du matériau composite

$\rho_f$  : Masse volumique des fibres

$\rho_c$  : Masse volumique du matériau composite

Cinq essais ont été effectués en découpant les échantillons dans des différents stratifiés. Les résultats sont les suivants:

$V_f$  : 31%  $\pm$  0.9 pour mat

$V_f$  : 23%  $\pm$  0.7 pour l'unidirectionnel

$V_f$  : 56%  $\pm$  0.5 pour tissu

### 3-3 Technique expérimentale

Dans ce paragraphe, nous présenterons les éprouvettes utilisées et les essais réalisés dans le cadre de cette étude.

La détermination des caractéristiques mécaniques est une étape importante dans toute étude du comportement mécanique, elle est fondée sur des essais d'éprouvettes de géométrie simple sollicitées en traction et en torsion .

Les résultats de ces essais permettent d'évaluer les modules élastiques, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillements.

Les éprouvettes ont été découpées sur des plaques de dimensions 500 x 500 x 3 mm<sup>3</sup> à l'aide d'une scie diamantée .

### 3-4 Présentation des essais

#### 3-4-1 Essais de traction

Ces essais permettent de déterminer le module de YOUNG longitudinal  $E_{11}$ , transversal  $E_{22}$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$ .

La préparation des éprouvettes se fait par collage des talons de verre /résine préimprégnés formés de trois couches étagées.

Le collage se fait sous pression à chaud de 6 bars pendant une heure et demi à température de 120°C figure 3-2

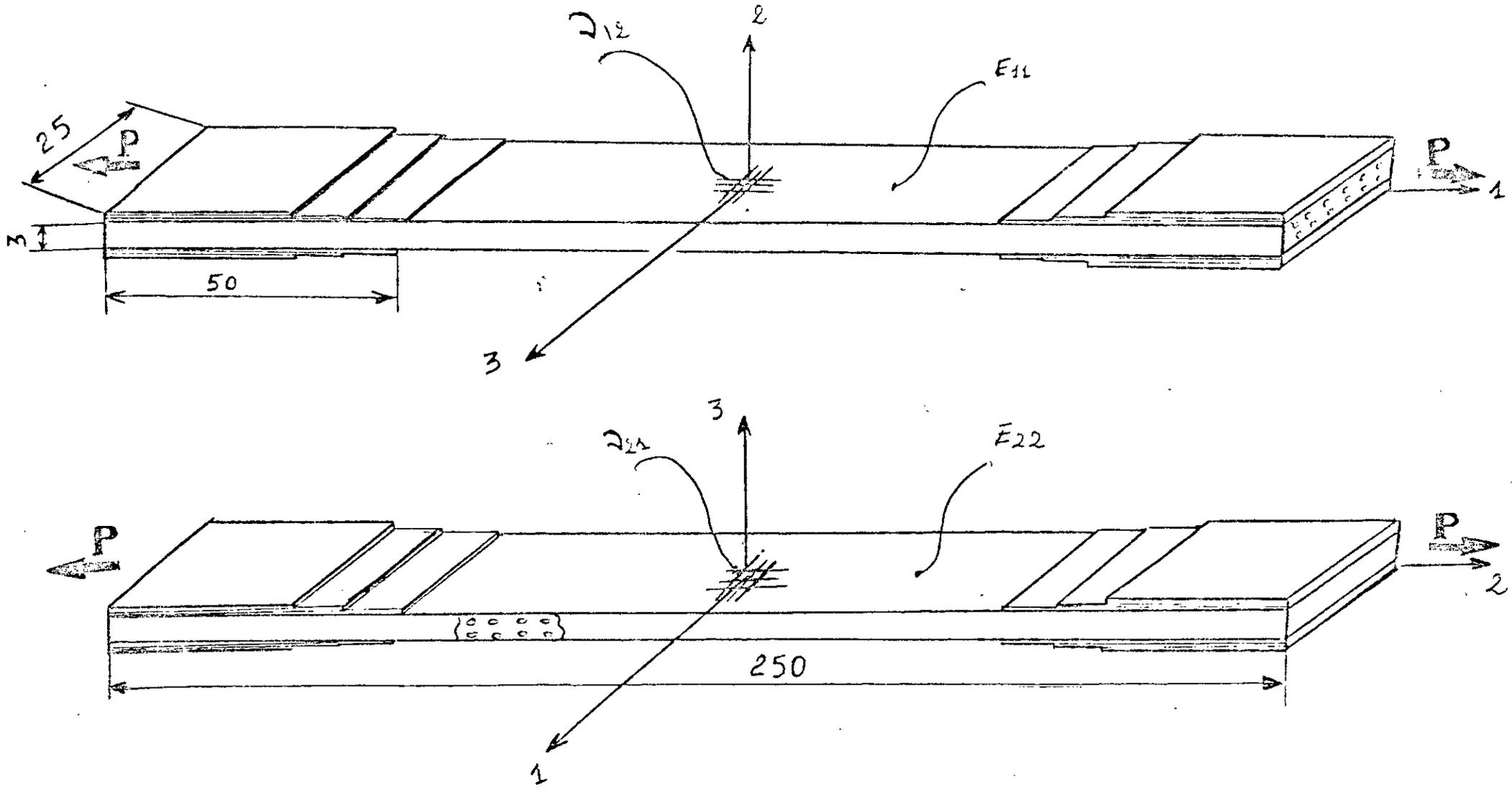


Figure C 3-1 ) Epruvette de traction

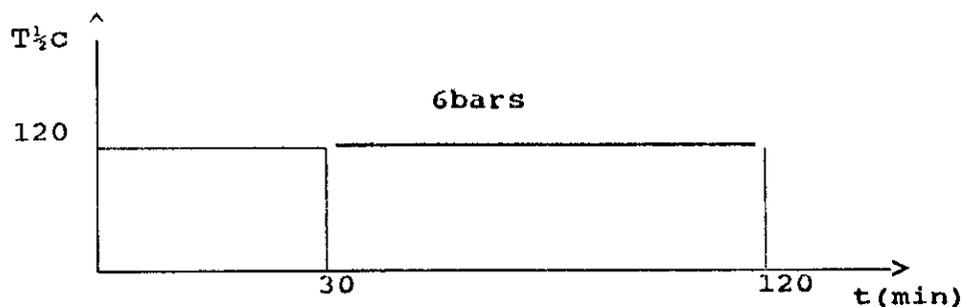


Figure 3-2 cycle de collage des mors

Les talons permettent d'éviter la concentration des contraintes au niveau des mors figure 3-1 suivant la capacité de la machine .

#### 3-4-2 Moyens d'essai

Les essais de traction sont assurés par une machine hydraulique de type INSTRON N 1186 proposant une vitesse de déplacement constante , avec une cellule de force de 10 KN disponible à l'université de technologie de compiègne en FRANCE. Pour nos essais on adopte une vitesse de 2mm/min .La machine d'essais est reliée à un enregistreur graphique donnant la courbe de charge-temps, la courbe charge-déplacement peut tre obtenue en connaissant la vitesse de sollicitation et la vitesse de déroulement de papier de l'enregistreur.

La liaison entre la machine d'essai et l'éprouvette est réalisée par l'intermédiaire de deux mors réglables permettant l'alignement de l'éprouvette dans le sens de traction .

La technique d'extensométrie utilisée est assurée par des jauges de déformation de type rosette. Ces jauges sont reliées à un système d'acquisition qui peut sauvegarder les résultats sur une disquette magnétique figure 3-3

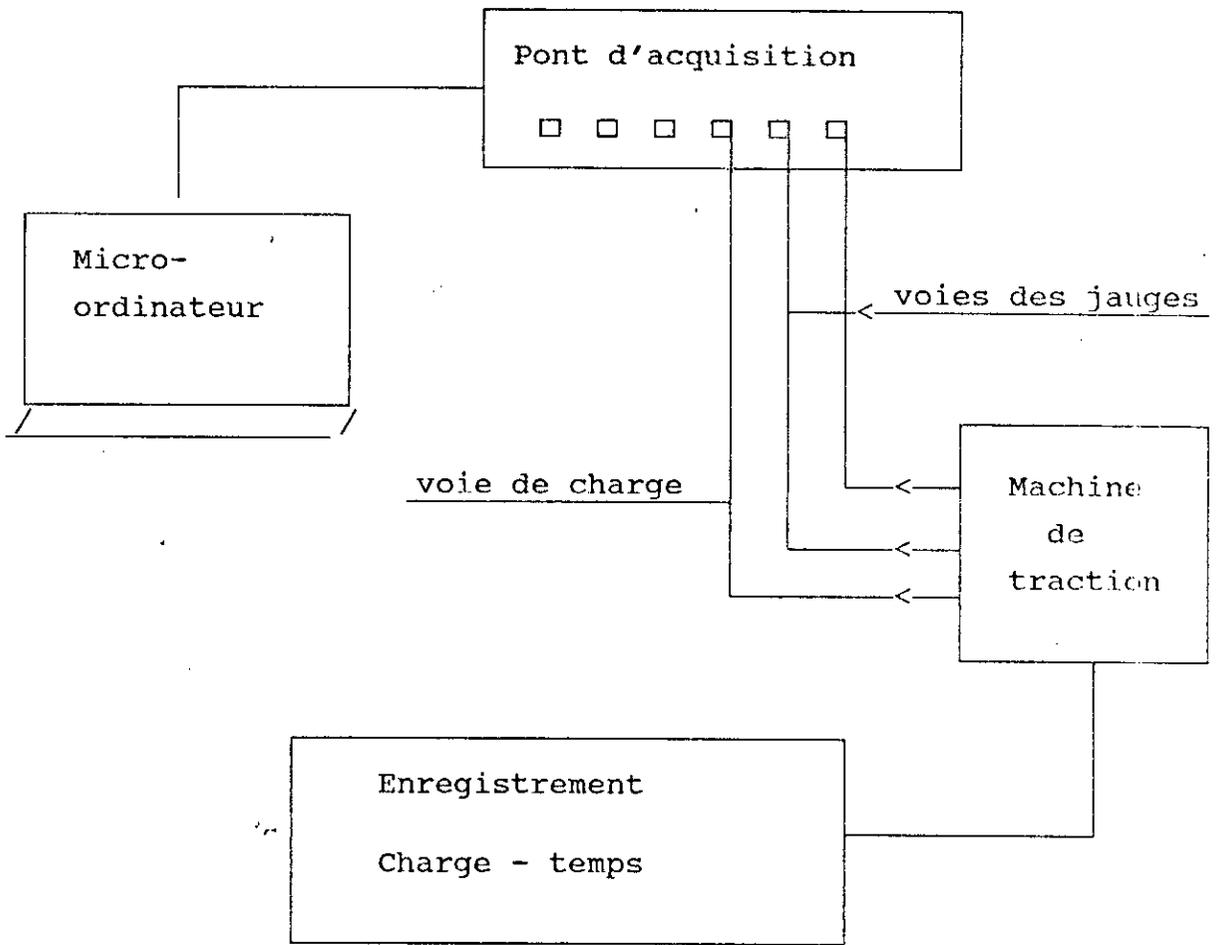


Figure ( 3-3 ) Schema type de la chaine d'essai de traction

### 3-5 Résultats et analyses

#### 3-5-1 Courbe de charge pour l'unidirectionnel

La première analyse de ces courbes montre deux zones bien distinctes différenciées par des pics figure 3-4

##### Zone 1 OA

C'est la partie linéaire de la courbe où les préruptures sont absentes, ces deux phénomènes sont dus au fait que toutes les déformations produites sont élastiques. Néanmoins, on constate que la courbe commence par une courbure de rayon important qui se termine par se redresser pour devenir linéaire jusqu'à la charge de 1700 daN figure 3-5

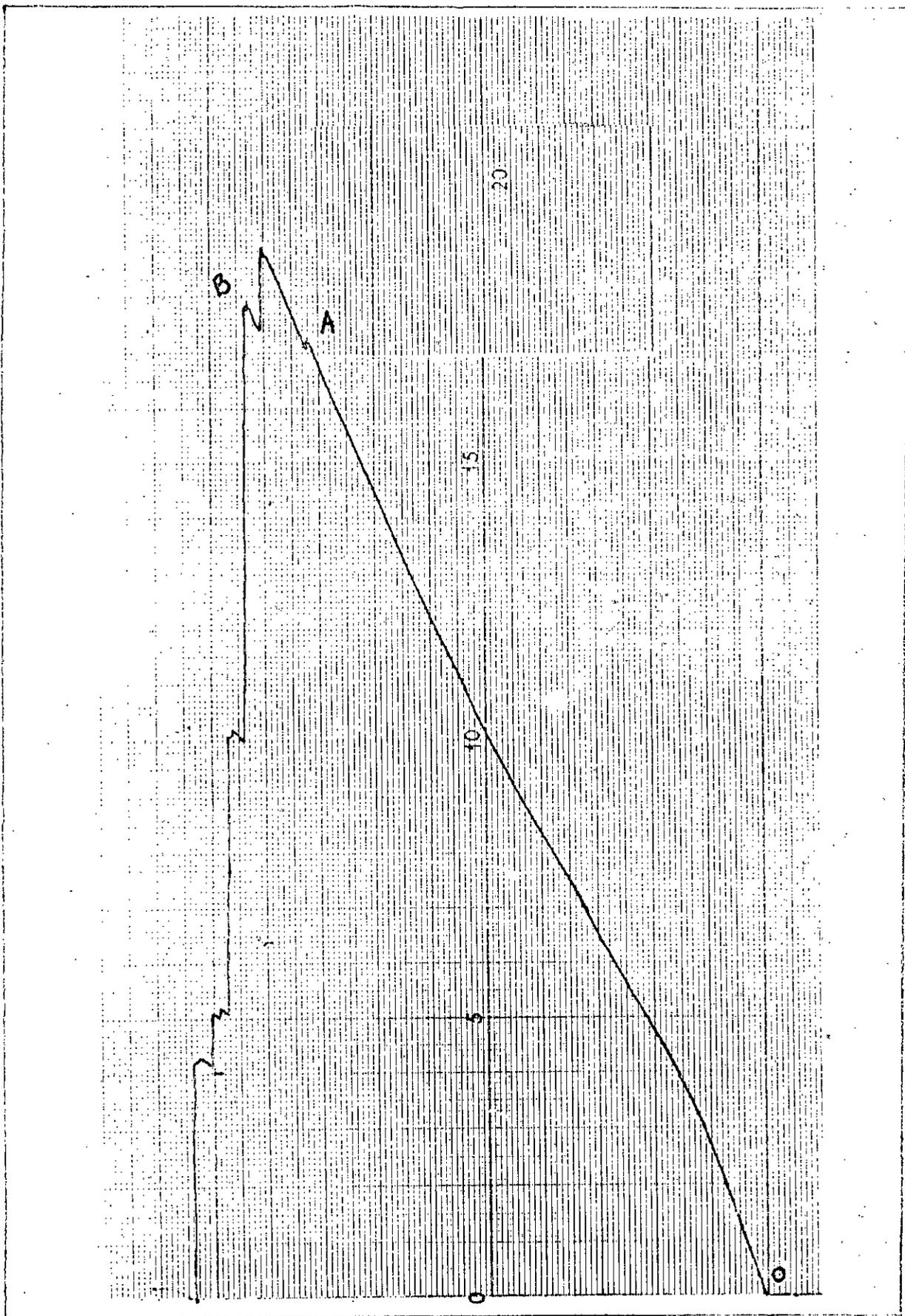
ce phénomène de courbure est dû probablement au montage (alignement des mors )

##### Zone 2 AB

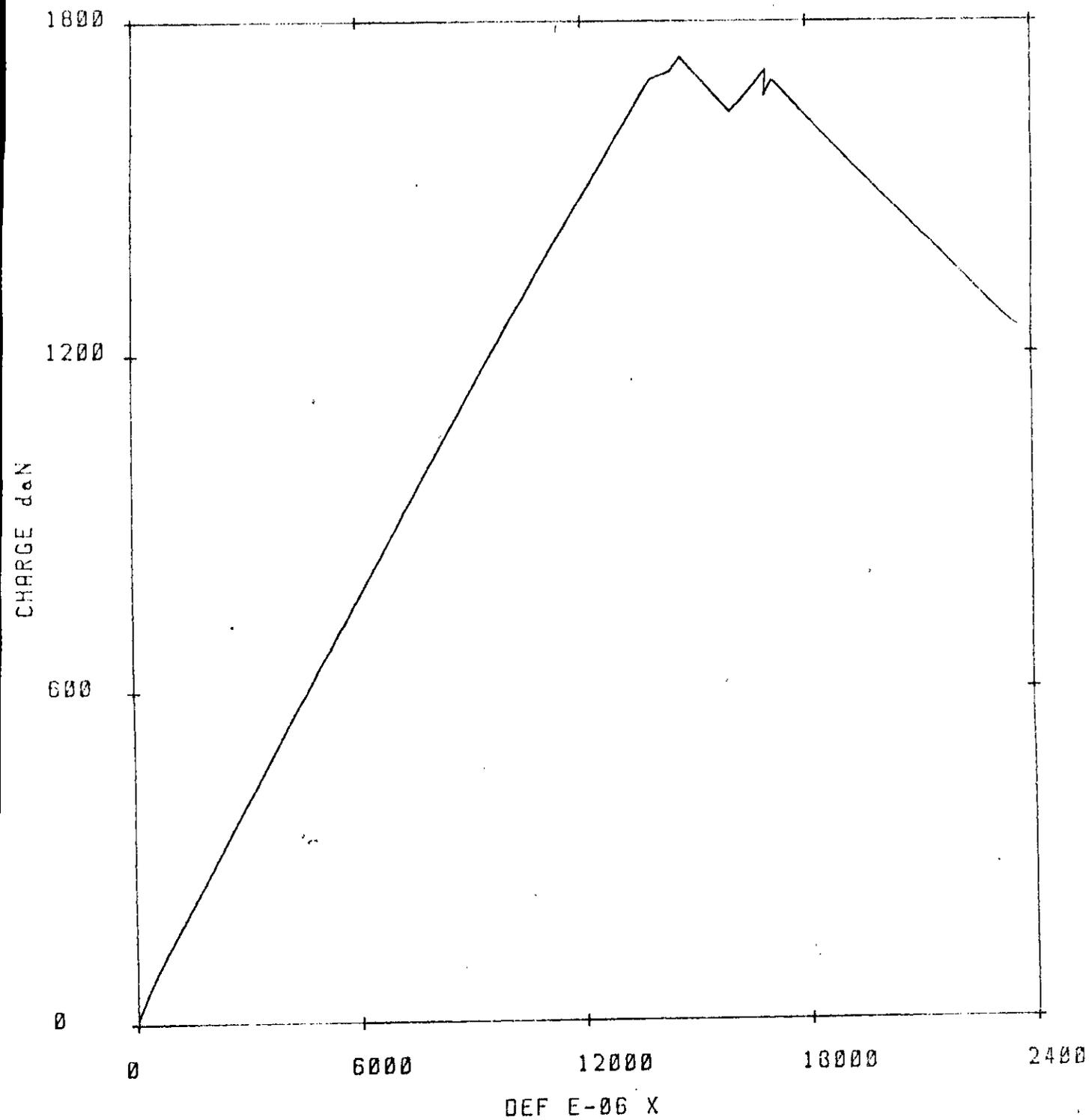
Le début de cette zone est caractérisé par la naissance de pics qui expliquent les préruptures des fibres ou le matériau perd un peu de sa résistance par le découpage des fibres par partie.

Le matériau reçoit une chute durant chaque découpage des fibres restantes

Cela est dû à la différence de résistance existante entre les fibres et aussi à la répartition non uniforme de la charge sur la section transversale de l'éprouvette causée par l'existence des micro bulles d'air réparties sur la surface .



Figure( 3-4 ) - courbe de charge du matériau unidirectionnel



Figure(3-5) Courbe charge - déformation pour l'unidirectionnel

### 3-5-2 Courbe de charge pour le mat

Le mat présente un comportement linéaire figure 3-6 montre que la charge maximale de 557 daN correspond à la rupture finale de l'éprouvette ce qui en résulte que le mat perd sa résistance brusquement et ceci par raison de dispersion au hasard de ces fibres courtes.

On constate un léger changement de pente qui est dû au montage.  
figure 3-7

### 3-5-3 Courbes de charge pour le tissu

Le même phénomène de changement de courbure se répète dans les trois types de matériaux .Ceci nous permet d'affirmer l'existence de défauts existants dans le montage.

Les courbes de tissu présentent toujours un pic avant la rupture finale.figure 3-8 cela est dû au lachement des talons aux niveaux des mors .Ce pic apparaît où la charge est égale à 730daN avant la charge maximale 975 daN où la rupture est finale  
figure 3-9

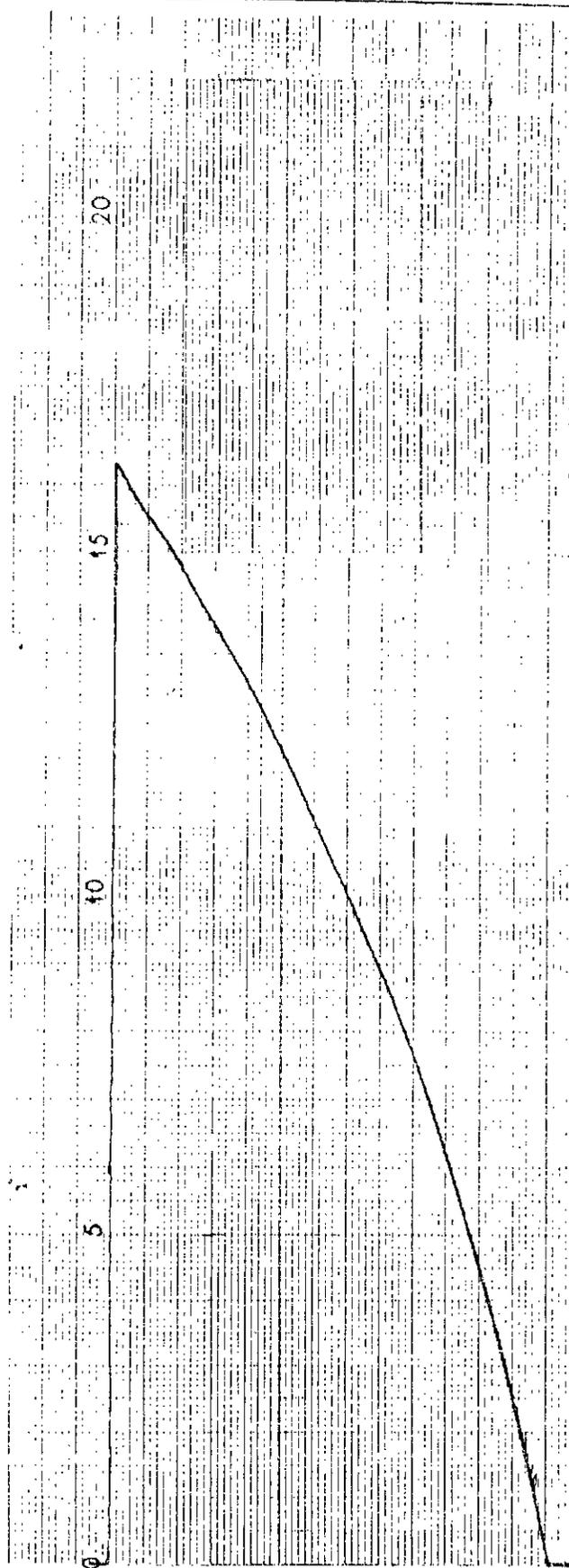


Figure 3-6 ) courbe de charge du matériau mat

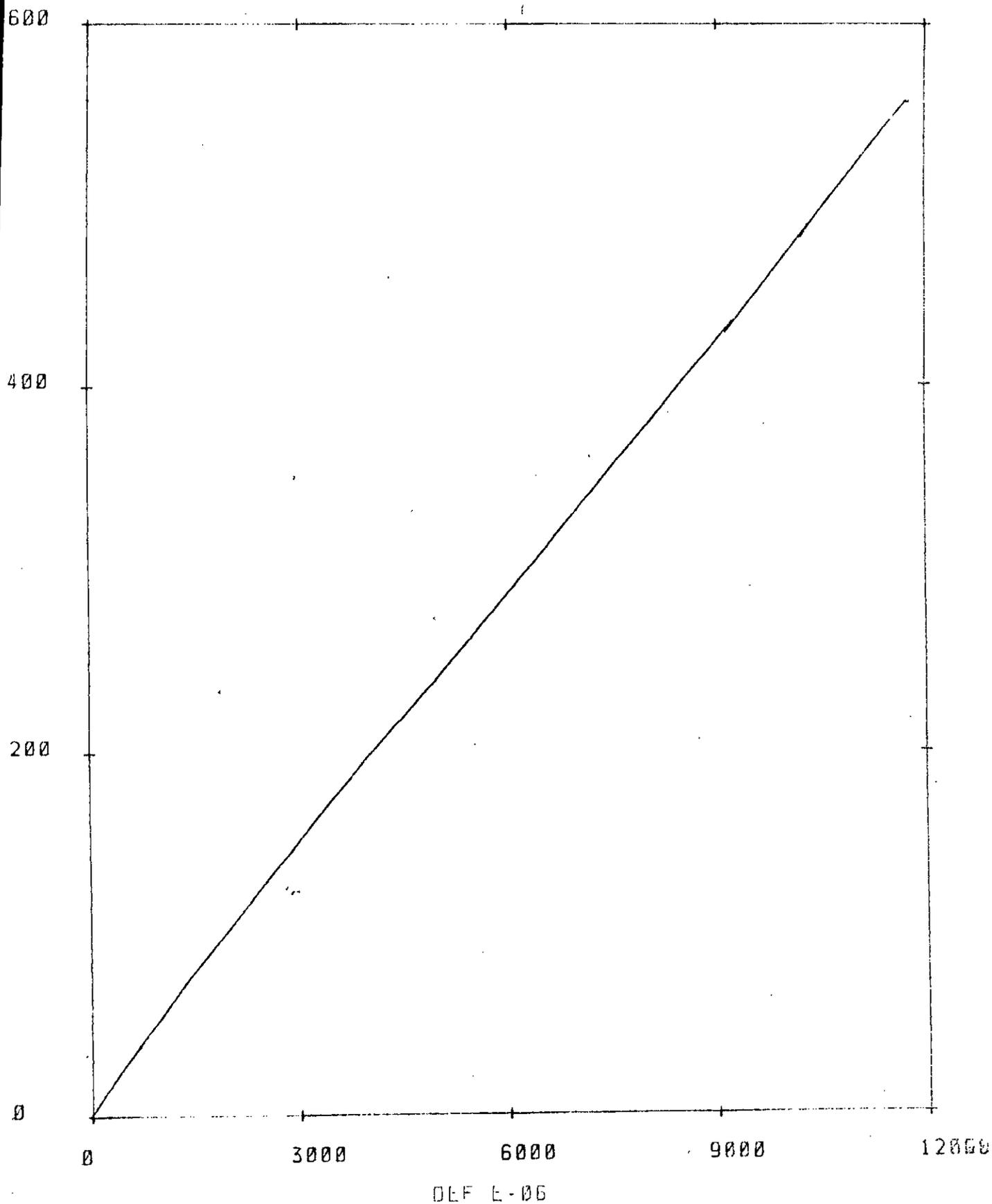
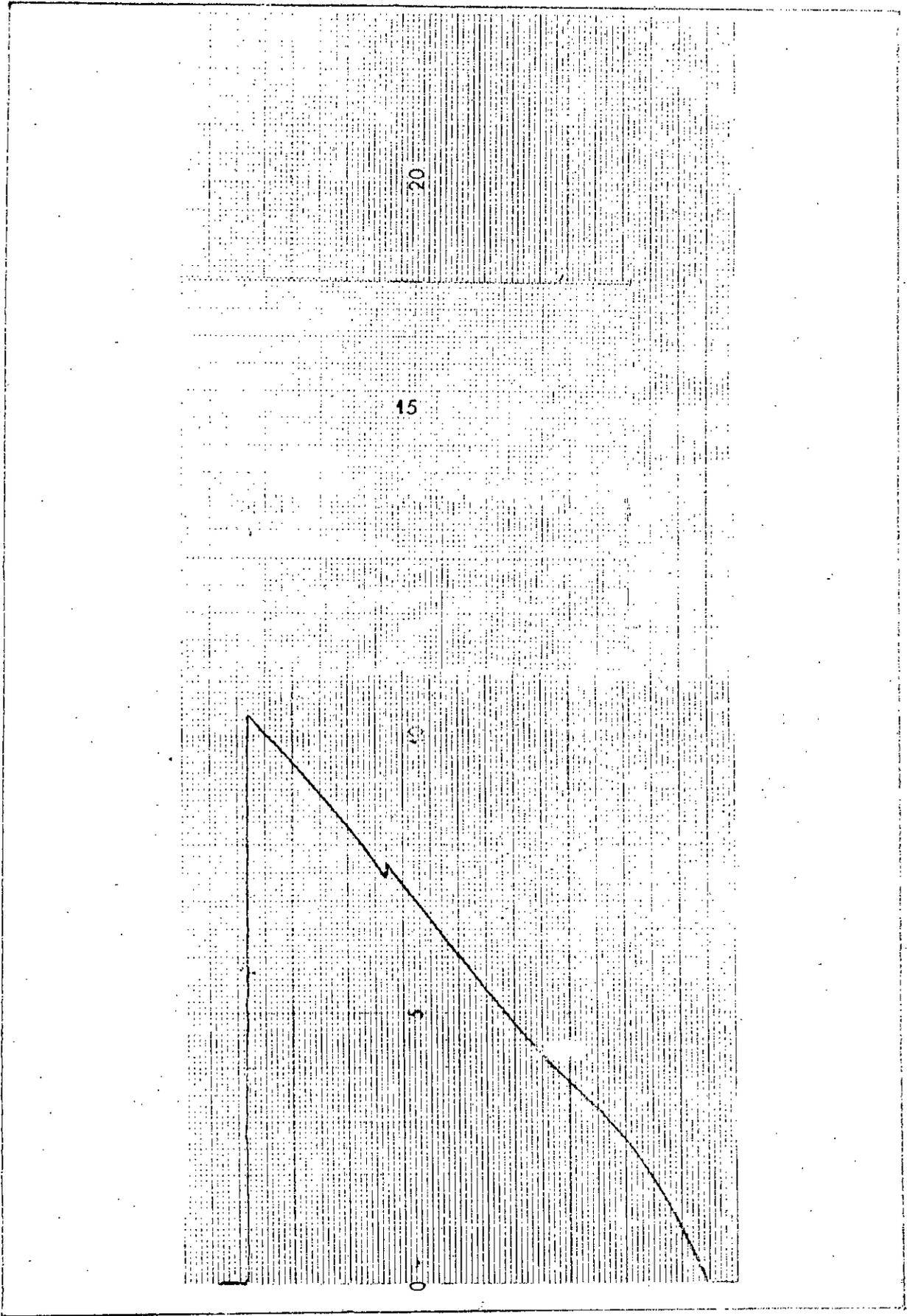


Figure (3-7) Courbe charge - déformation pour le mat



Figure( 3-8 ) courbe de charge du matériau tiré

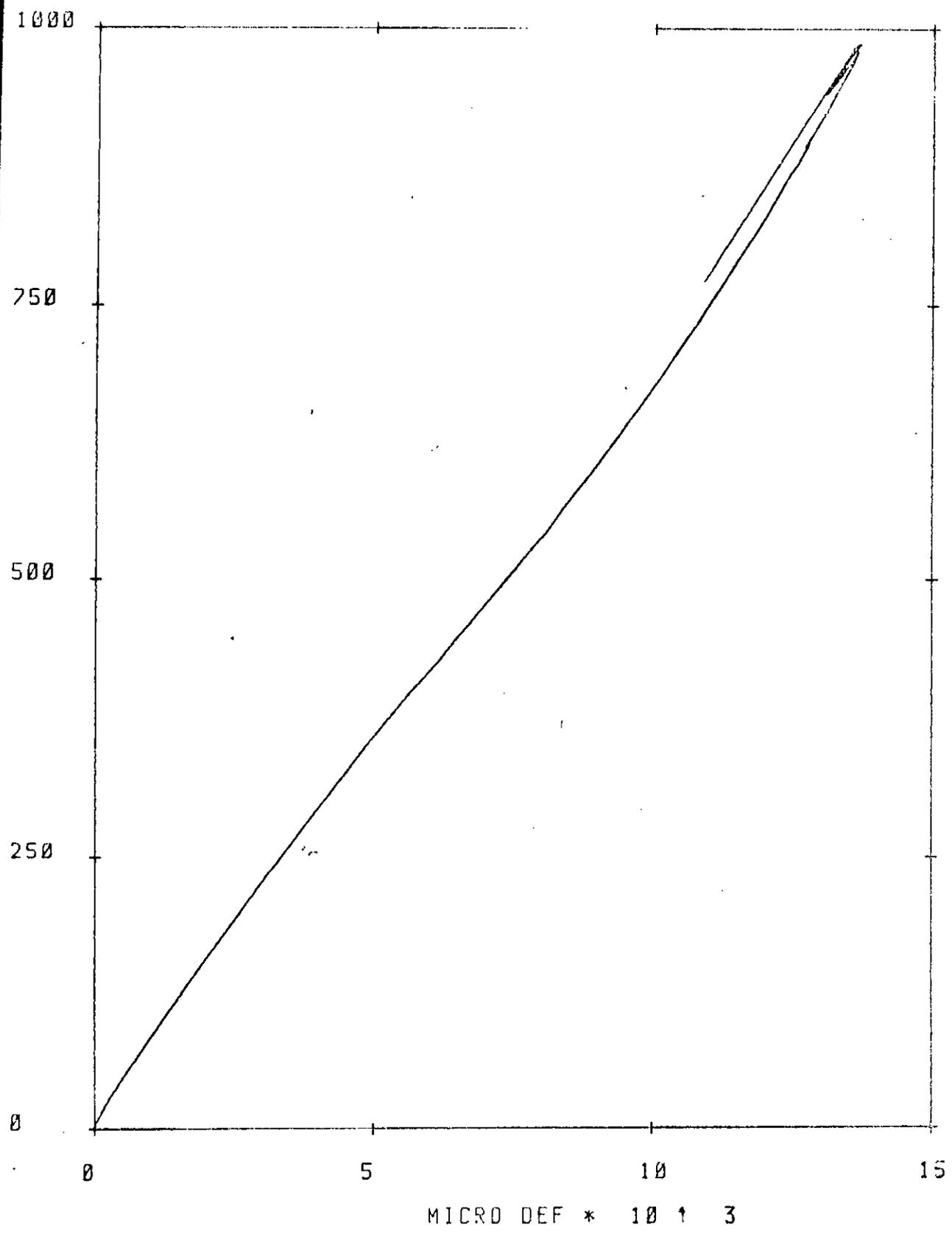


Figure (3.9) Courbe charge - déformation pour le tissu

### 3-6 Résultats des essais de traction

Les résultats des essais de traction qui ont été menés sur les éprouvettes fig(3-10)(3-11)(3-12) sont regroupés dans le tableau suivant:

	mat	unidirectionnelle	tissu
$E_x$ (MPa)	7533	15160	8400
$\nu_{xy}$	0.37	0.39	0.31
$\sigma_r$ (MPa)	100.23	214	126.5

Tableau (3-1) Résultats des essais de traction des matériaux étudiés

### 3-7 Etude comparative entre les modèles de prévision théorique du module d'élasticité et les résultats expérimentaux

#### 3-7-1 pour le matériau mat

Parmi les différentes propositions d'équations théoriques du module d'élasticité dans le cas d'une anisotropie bidimensionnelle rencontrées dans la bibliographie, nous avons choisi en fonction des paramètres expérimentaux dont nous disposons les équations les plus simples pour comparer aux résultats expérimentaux.

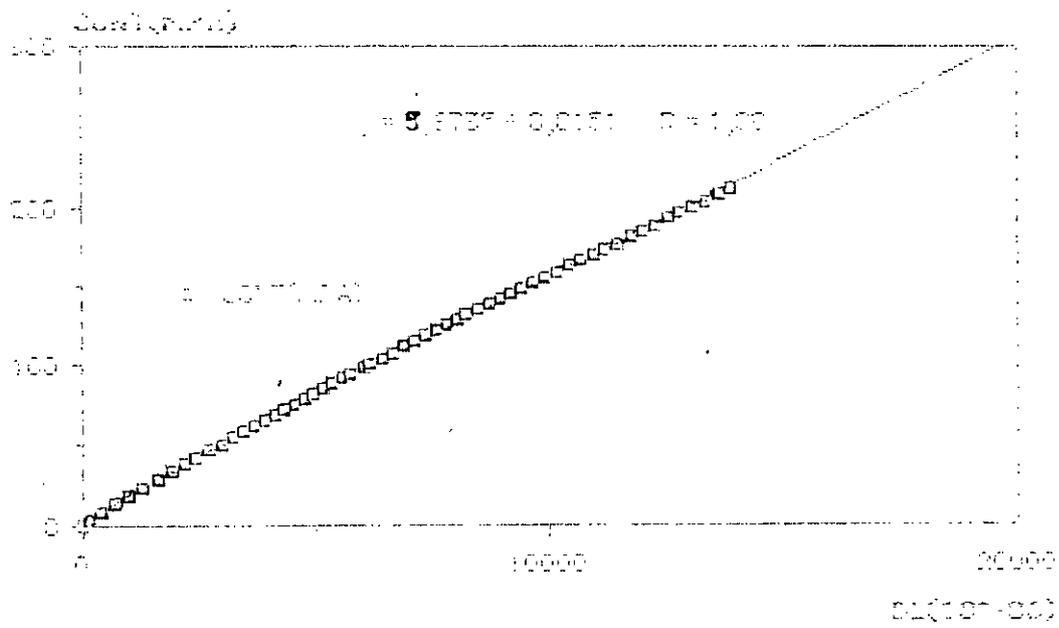
Le modèle le plus simple de prévision du module d'élasticité d'un composite à renfort mat est celui de COX.

$$E_c = E_f \cdot V_f / 3 \quad (3-2)$$

Tsai et PAGANO ont développé une expression simple de prévision du module d'élasticité d'un composite à renfort mat :

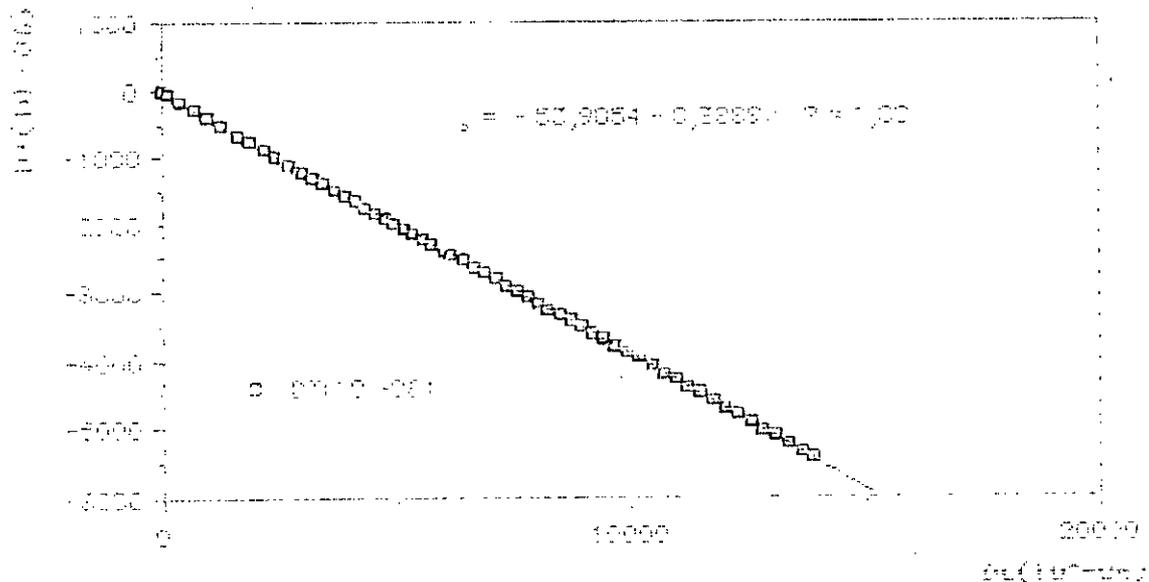
$$E_c = 3/8 E_f \cdot V_f + (1-V_f) \cdot E_m \quad (3-3)$$

2047 . SUP.=211,6MPa (30)



Figure( 3-10 a) courbe contrainte-déformation longitudinale

'DET MAX=13595,350 (30)



Figure( 3-10 b) courbe déformation long.-déformation trans.  
 Figure( 3.10 c) Résultats d'aquisition de l'unidirectionnel

MP4

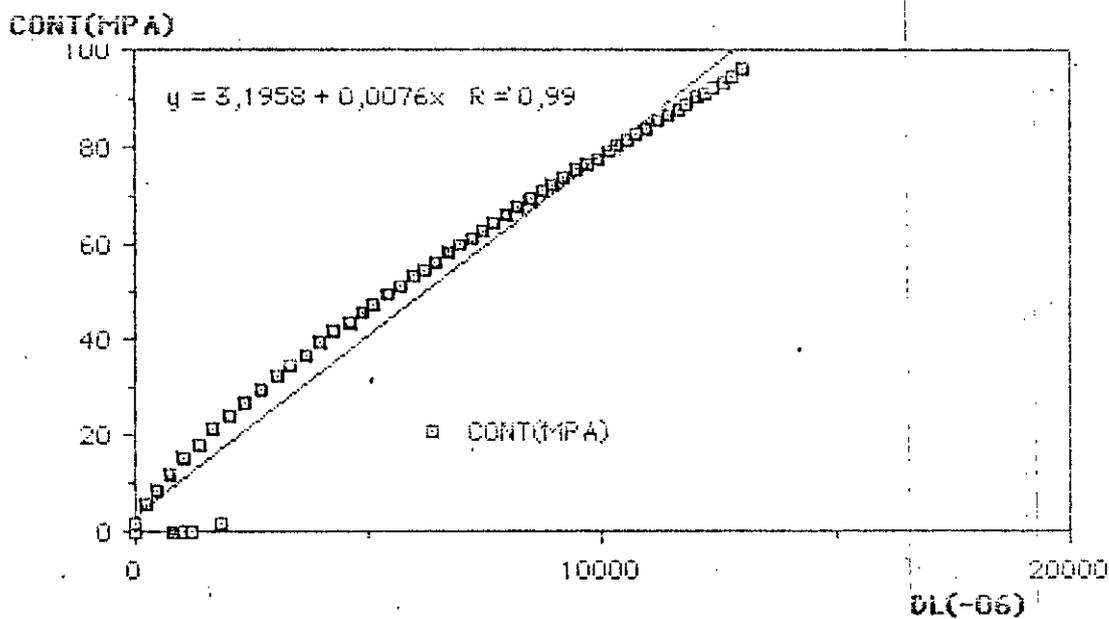


Figure 3-11 a) courbe contrainte-déformation longitudinale

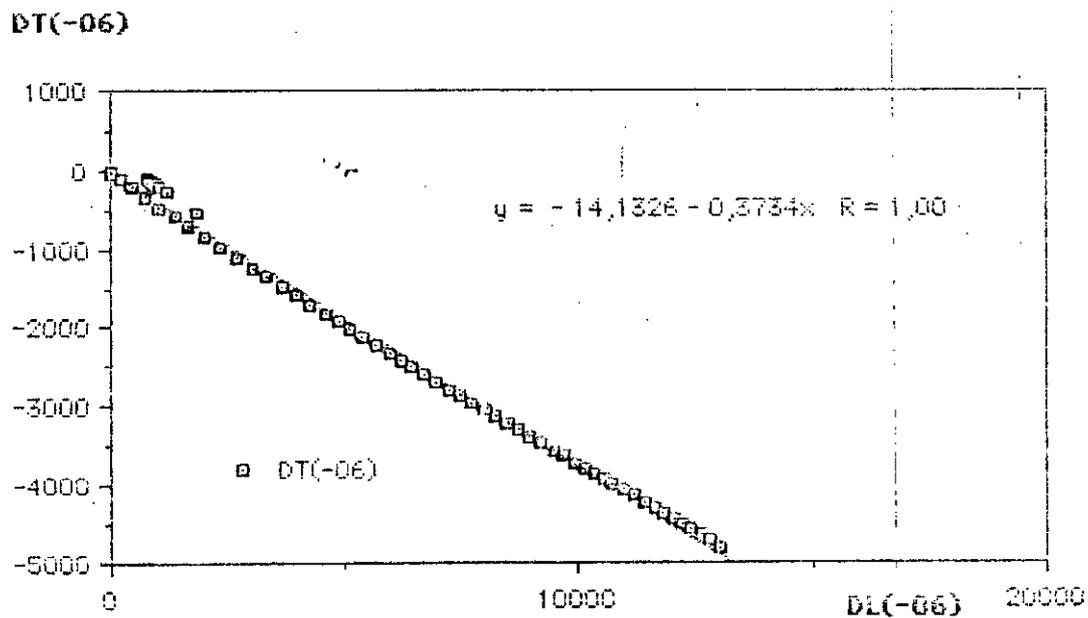
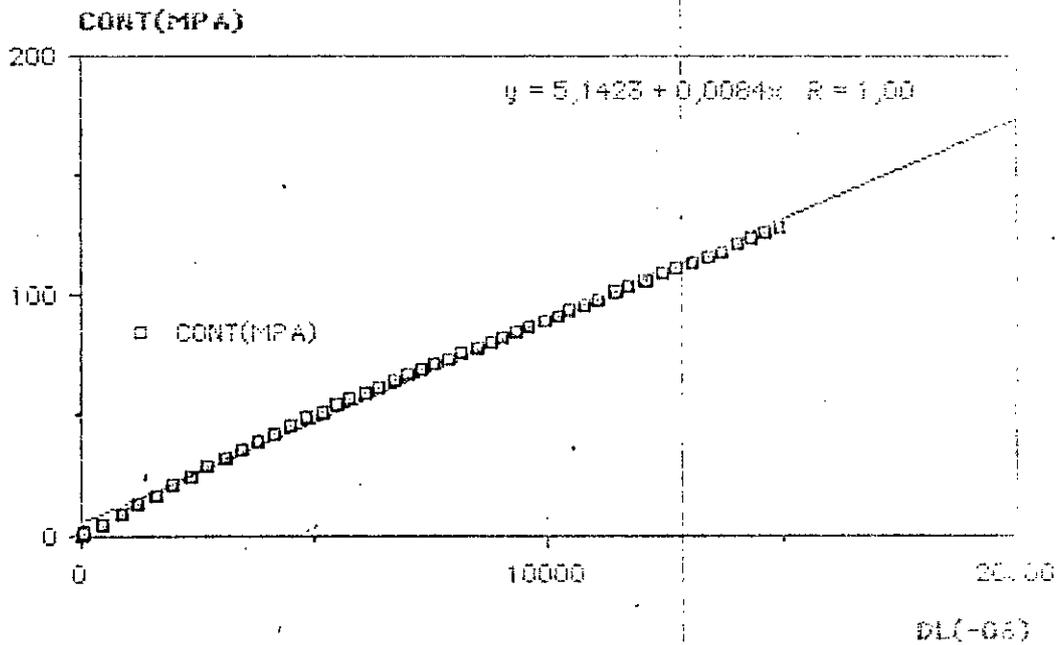


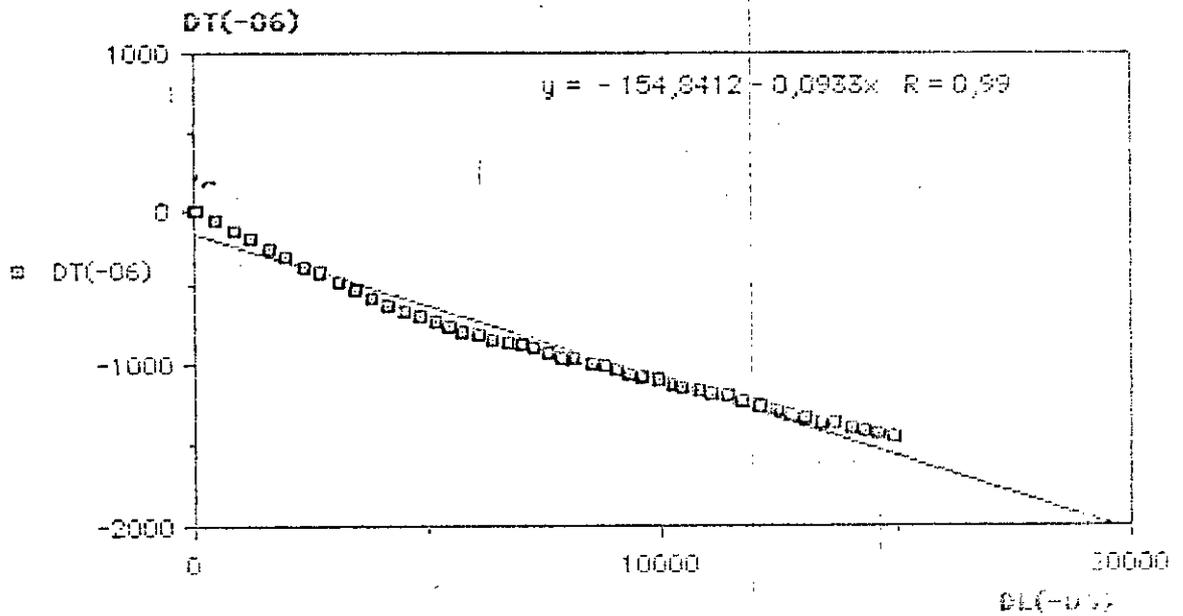
Figure 3-11 b) courbe déformation long.-déformation trans.

Figure 3-11 c) Résultats d'acquisition de mat

TP3"



Figure( 3-12 a) courbe contrainte-déformation longitudinale



Figure( 3-12 b) courbe déformation long.-déformation trans.

Figure( 3-12 c) Résultats d'aquisition de tissu

Avec,

$E_f$  : module d'élasticité des fibres

$E_m$  : module d'élasticité de la résine

$V_f$  : fraction volumique des fibres

Ces expressions ont été formulées dans le cas d'une sollicitation de traction .

Pour les composites mat/polyster :

$$E_m = 4300 \text{ MPA}$$

$$E_f = 72000 \text{ MPA}$$

En utilisant le modele de COX, les résultats sont:

$E_c$ théorique(MPA)	$E_c$ expérimental (MPA)
7440	7533.33

En utilisant le modele de TSAI- PAGANO, ON trouve:

$E_c$ théorique(MPA)	$E_c$ expérimental (MPA)
11337	7533.33

La différence existante entre l'étude expérimentale et le modèle de COX et qui est très remarquable dans le modèle de TSAI-PAGANO est due au:

- a- Etat d'éprouvette.
- b- montage de l'expérience.

### 3-7-2 pour le matériau unidirectionnel

Il s'agit d'une relation déduite de la loi des mélanges appliquée à l'unidirectionnel :

$$E_{11} = E_f \cdot V_f + (1 - V_f) E_m \quad (3-4)$$

Les paramètres de littérature du composite verre / polystyrene unidirectionnel sont:

$$E_f = 72000 \text{ MPA}$$
$$E_m = 4300 \text{ MPA}$$

Les résultats pour le module d'élasticité en traction sont les suivants:

$E_c$ théorique (MPa)	$E_c$ expérimental (MPa)
19871	15160

D'après le résultat du tableau, on constate que dans l'unidirectionnel, l'écart entre le module d'élasticité théorique et celui de l'expérimental est remarquable, ce qui nécessite de refaire plusieurs essais en prenant en considération l'état du montage et l'état d'éprouvette au cours de la mise en oeuvre.

### 3-7-3 Matériau tissu

Pour déterminer le module d'élasticité en traction du stratifié, nous utilisons l'expression générale reliant les contraintes aux déformations.

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

L'éprouvette soumise seulement à un effort de traction donc,  $M = 0$

pas de courbure de l'éprouvette

donc,  $k = 0$

On obtient alors :

$$[N] = [A][\epsilon] \quad (3-6)$$

En développant les équations on obtient :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Avec,  $N_x \neq 0 ; N_y = N_{xy} = 0$

Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

Pour ce stratifié on constate que les termes  $A_{61} = A_{62} = 0$ , ainsi on obtient :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

ou bien :

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11} \cdot \epsilon_x + A_{12} \cdot \epsilon_y \\ 0 &= A_{21} \cdot \epsilon_x + A_{22} \cdot \epsilon_y \\ 0 &= \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (3-10)$$

On tire :

$$N_x = (A_{11} - A_{12}^2/A_{22}) \cdot \epsilon_x \quad (3-11)$$

Soit H l'épaisseur du stratifié, alors :

$$N_x = \sigma_x \cdot H \quad (3-12)$$

d'o :

$$\epsilon_x = \sigma_x/E_x = 1/H \cdot (A_{11} - A_{12}^2/A_{22}) \quad (3-13)$$

de la même manière on peut écrire que :

$$\epsilon_y = \sigma_y/E_y = 1/H \cdot (A_{22} - A_{12}^2/A_{11}) \quad (3-14)$$

On obtient :

$$\nu_{xy} = -\epsilon_y/\epsilon_x = A_{12}/A_{22} \quad ( 3-15 )$$

Dans le cas du stratifié (0/90)<sub>s</sub> la prévision théorique donne :

$$E_x = 8950 \text{ MPa}$$

Le module d'élasticité obtenu avec un renfort tissé est inférieur à celui que l'on obtient en superposant deux unidirectionnels croisés à 90°. Cela est dû à la courbure des fibres du fait de l'opération de tissage qui rend le pli tissé plus déformable que les deux unidirectionnels croisés sous une même sollicitation.

### 3-8 Essai de torsion

#### 3-8-1 Moyens d'essai

Cet essai a été effectué sur un pendule de torsion existant au niveau de laboratoire du division polymère de l'U.T.C en FRANCE . cet appareil a été mis en marche en utilisant des pressions pneumatiques pour éliminer des frottements en élevant le disque tournant .

La lecture du couple (M,  $\theta$ ) et l'utilisation de la relation ci-dessous nous ont permis de calculer le module de cisaillement  $G_{12}$  des matériaux composites

$$G_{12} = \frac{M.L}{b.h^3.\theta B(c)} \quad ( 3-16 )$$

$$B(c) = 32.c^2/\pi^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\eta^4} + \frac{1-2c}{\eta \pi} \cdot \text{th} \left( \frac{\eta \pi}{2c} \right) \right] \quad ( 3-17 )$$

$$\text{Avec} \quad c = \frac{b}{h} \left( \frac{G_{13}}{G_{12}} \right)^{1/2} \quad ( 3-18 )$$

M : Couple de torsion

$\theta$  : Angle de torsion

b : Largeur de l'éprouvette

h : épaisseur de l'éprouvette

L : longueur entre mors

B(c) : paramètre d'anisotropie

On supposera que  $G_{12} = G_{13}$  donc  $c = b/h$   
 Cette simplification est généralement adoptée pour les matériaux composites unidirectionnels.

### 3-8-2 Résultats d'essai de torsion

Les résultats d'essai de torsion sont présentés dans la table suivante:

	Mat	unidirectionnel	tissu
Gxy(GPa)	3.29	2.1	3.7

Les caractéristique mécanique des différents matériaux étudiés sont présentées dans la table suivante:

	mat	unidirectionnelle	tissu
$E_x$ (GPa)	75.33	151.60	84.00
$E_y$ (GPa)	43.3	8.90	47.5
Gxy(GPa)	3.29	2.1	3.7
$\nu_{xy}$	0.37	0.39	0.31

Tableau(3-2) Relevées expérimentales des propriétés mécaniques des matériaux composites étudiés

## CHAPITRE 4

### REPONSE DYNAMIQUE

#### 4-1 Méthode expérimentale

##### 4-1-1 matériau

Trois plaques de matériau composites de différentes structures telles que mat, tissu et unidirectionnel ont été utilisées. Quatre jauges ont été placées sur ces plaques à différentes distances du point d'impact pour la détermination de la reponse dynamique .figure 4-1

Les dimensions des plaques dépendent des conditions aux limites qui sont les suivantes:

152 x 94 mm<sup>2</sup> pour le cas d'une plaque fixe-fixe

182 x 94 mm<sup>2</sup> pour le cas d'une plaque libre-libre

167 x 94 mm<sup>2</sup> pour le cas d'une plaque encastrée

##### 4-1-2 Dispositif expérimental

Le schéma expérimental est représenté sur la figure 4-2 il contient :

- Un pendule formé d'une bille d'acier de diamètre de 15mm provoquant l'impact à des vitesses allant jusqu'à 4 m/s.
- Un pont d'extensométrie est utilisé pour l'obtention du voltage proportionnel aux déformations.
- Un oscilloscope enregistrant les réponses données par les jauges.

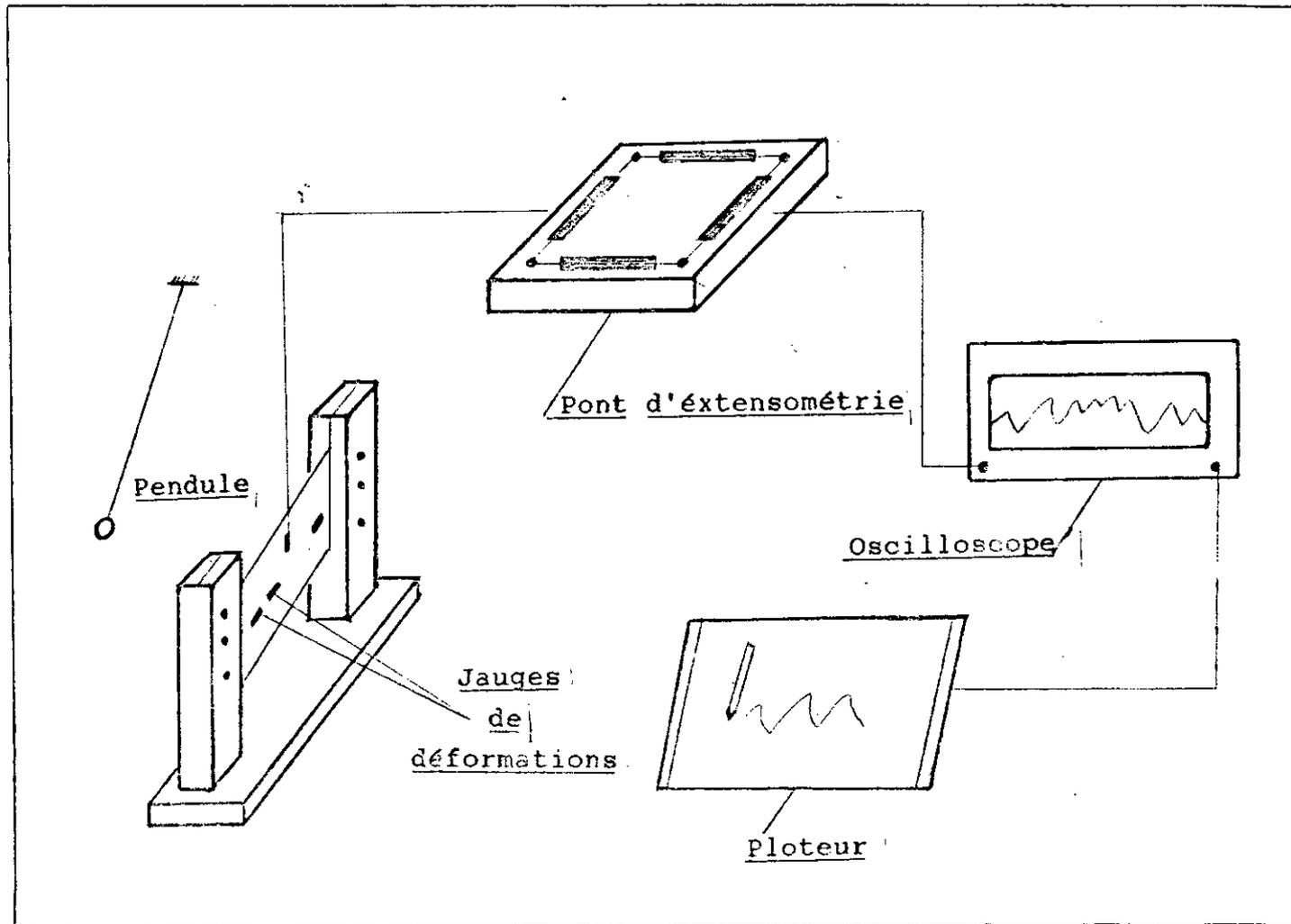
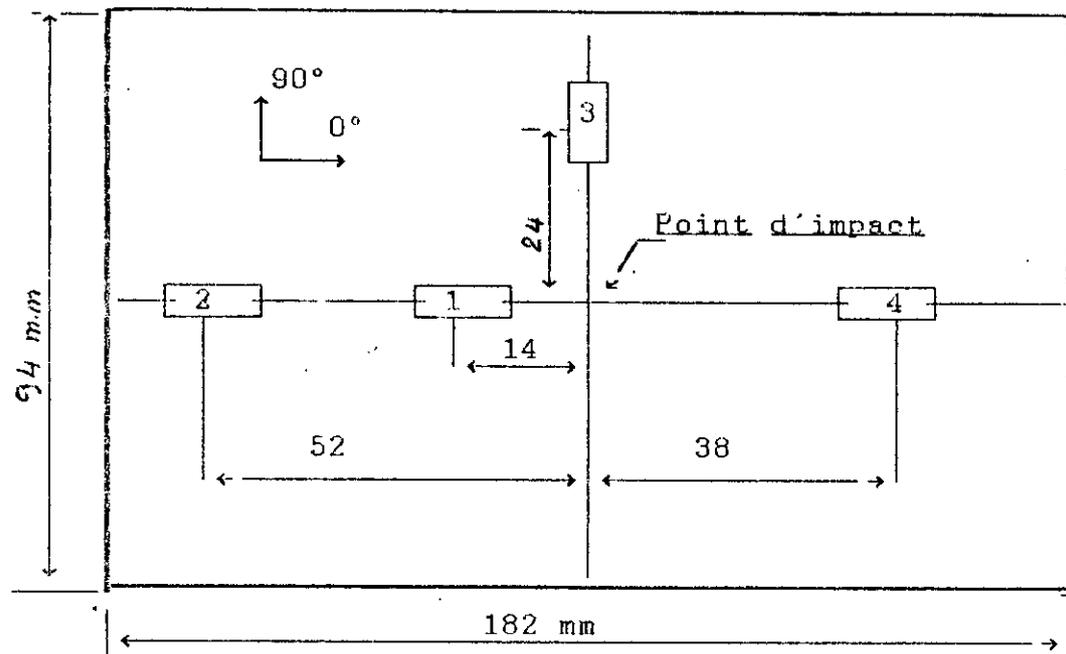


Figure (4-2) Chaîne d'acquisition pour l'obtention des déformations dynamiques



Figure( 4-1) Positions des jauges par rapport au point d'impact

## 4-2 Resultats expérimentaux

### 4-2-1 Cas fixe-fixe

#### a) Variation des déformations

Dans l'analyse des conditions aux limites fixe-fixe on constate qu'il s'agit d'un accroissement de déformations causé par la naissance des contraintes provoquées par les ondes réfléchies. Figures (4-3), (4-4), (4-5) et (4-6) ceci est confirmé dans les trois matériaux étudiés. figures (4.7-14)

Le tableau 4-1 représente les résultats du matériau tissu.

N <sup>o</sup> de jauge	L(mm)	1 <sup>o</sup> Pic	2 <sup>o</sup> pic	Pic max
		def( $\mu\epsilon$ )	def( $\mu\epsilon$ )	def( $\mu\epsilon$ )
1	14	193	355	535
2	52	52	239	361
3	24	260	390	600
4	38	161	348	652

Tableau 4-1 Relevées expérimentales des pics du matériau tissu pour le cas fixe-fixe

Dans les tableaux ci-dessus,

L : la distance entre le point d'impact et la jauge en question.

def( $\mu\epsilon$ ): les micro-déformations correspondent aux sommets des premiers pics successifs.

Si on prend par exemple le deuxième pic comme référence, on observe les grandeurs des réponses des jauges situées dans le mme axe (jauges 1,2,4 ) dépendent des distances qui les séparent du point d'impact.

Il est bien évident qu'il existe un déphasage dans le temps entre les jauges. par exemple, le premier a lieu à  $17\mu s$ ,  $25\mu s$ , et  $35\mu s$  pour les jauges 1, 4, et 3 respectivement.

Un autre fait, est la relation existante entre la réponse

dynamique et le module d'élasticité.

Si l'on observe par exemple, les déformations dynamiques données par la jauge n.1 située à 14mm le long de l'axe ox du point d'impact, les premiers pics sont de l'ordre de  $580\mu\epsilon$ ,  $193\mu\epsilon$ , et  $180\mu\epsilon$  pour les matériaux unidirectionnels, tissu(0/90) et le mat respectivement. ceci est proportionnel aux modules d'élasticités  $E_{xx}$  suivant la direction ox. Le tableau 4-2 montre les valeurs des pics des trois différentes configurations.

Matériau	E <sub>xx</sub> (Gpa)	Pic1	Pic2	Pic max
		def( $\mu\epsilon$ )	def( $\mu\epsilon$ )	def( $\mu\epsilon$ )
Mat	75	180	190	375
Tissu	84	193	355	535
Unidirectionnel	151.6	580	700	730

Tableau 4-2 Réponses données de la jauge n.1 des trois matériaux étudiés

Si l'on observe maintenant les déformations dues au choc enregistrées par la jauge n°3, le mme phénomène est observé à savoir une déformation plus importante pour le matériau "tissu"(0/90).

Le tableau 4-3 montre la relation entre le module d'élasticité  $E_{yy}$  et les déformations maximales enregistrées le long de l'axe oy.

Matériau	E <sub>y</sub> (Gpa)	Pic1	Pic2	Pic max
		def(με)	def(με)	def(με)
tissu	47.5	260	392	600
Mat	43.3	250	240	250
Unidirectionnel	8.9	230	200	230

Tableau 4-3 relevées expérimentales de la jauge n.3 des matériaux étudiés

La vitesse de propagation d'onde est une autre quantité à déterminer expérimentalement. On mesure alors la distance entre deux jauges successives et on enregistre le temps mis par l'onde pour traverser ces deux jauges, et à partir de la relation :

$$C = L / t \quad (4-1)$$

o C : vitesse de propagation

L : La distance entre deux jauges

t : Le déphasage dans le temps

On calcule la vitesse de propagation pour les trois configurations de matériaux composites.

Les résultats expérimentaux des trois matériaux sont regroupés dans le tableau suivant:

matériau	tissu	Mat	unidirectionnel
Cx10 <sup>2</sup> m/s	59.2	63.3	95

Tableau 4-4 résultats expérimentaux des vitesses de propagations le long de l'axe ox.

D'autre part la vitesse de propagation d'onde est calculée à partir de la relation suivante :

$$C = (E/\rho)^{0.5} \quad (4-2)$$

$\sigma$  ,  $E$  : le module d'élasticité

$\rho$  : la masse volumique

pour notre cas :  $E = E_x$

$$\rho = V_f \rho_f + (1 - V_f) \rho_m$$

$\sigma$ ,  $V_f$  : La fraction volumique des fibres

$\rho_f$  : La masse volumique des fibres

$\rho_m$  : La masse volumique de la résine

Les résultats théoriques sont représentés sur le tableau 4-6.

Matériau	tissu	Mat	unidirectionnel
$V_f$	56	31	23
$\rho_f$ (kg/m <sup>3</sup> )	2600	2600	2600
$\rho_m$ (kg/m <sup>3</sup> )	1200	1200	1200
$E_x$ (Gpa)	84	75.33	151.6
$C$ (m/s) $\times 10^2$	65	67	99
$C_{exp}$ (m/s) $\times 10^2$	59.2	63.3	95
% Erreur	8.9	5.5	4

Tableau 4-5 Résultats théoriques des vitesses de propagation

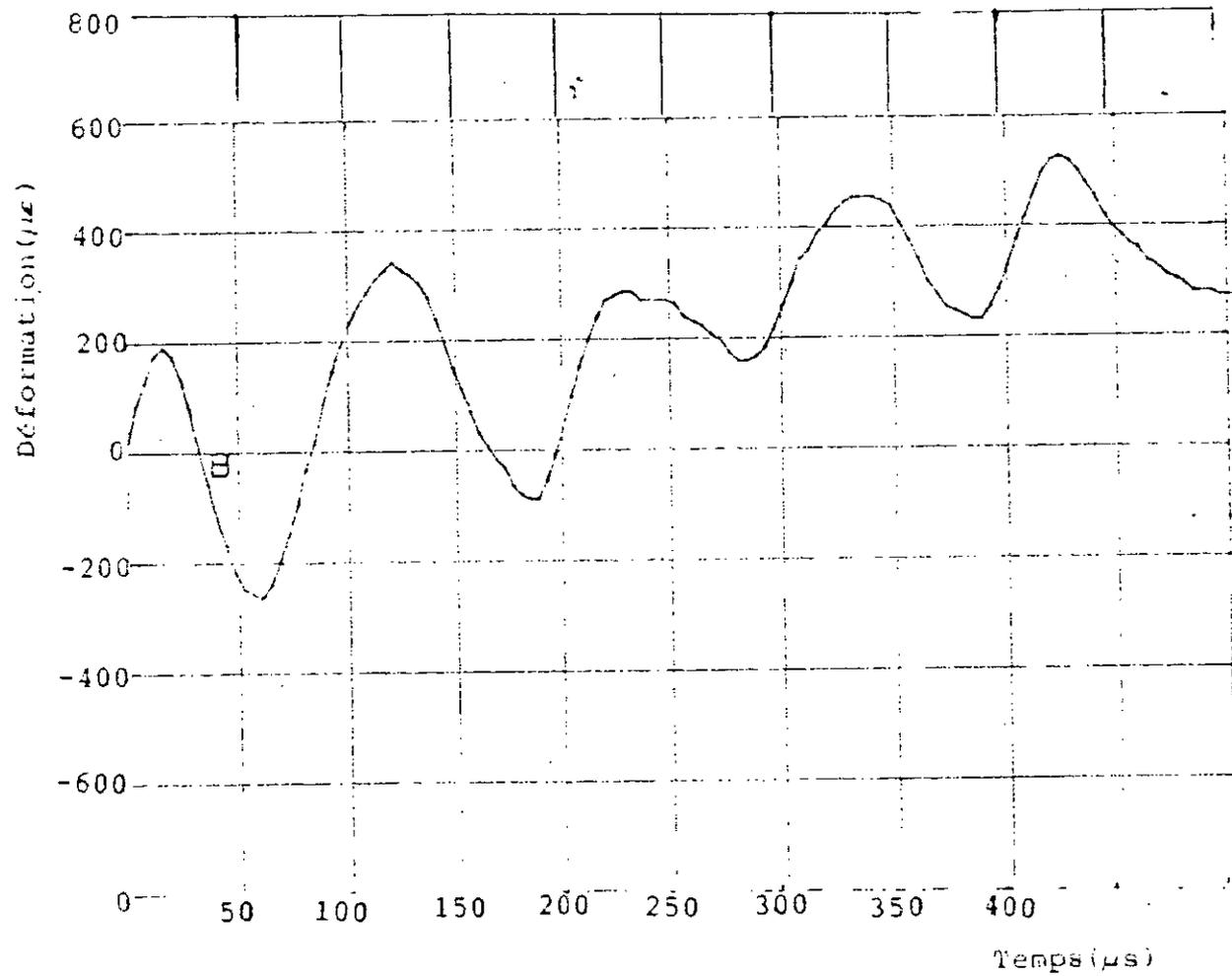
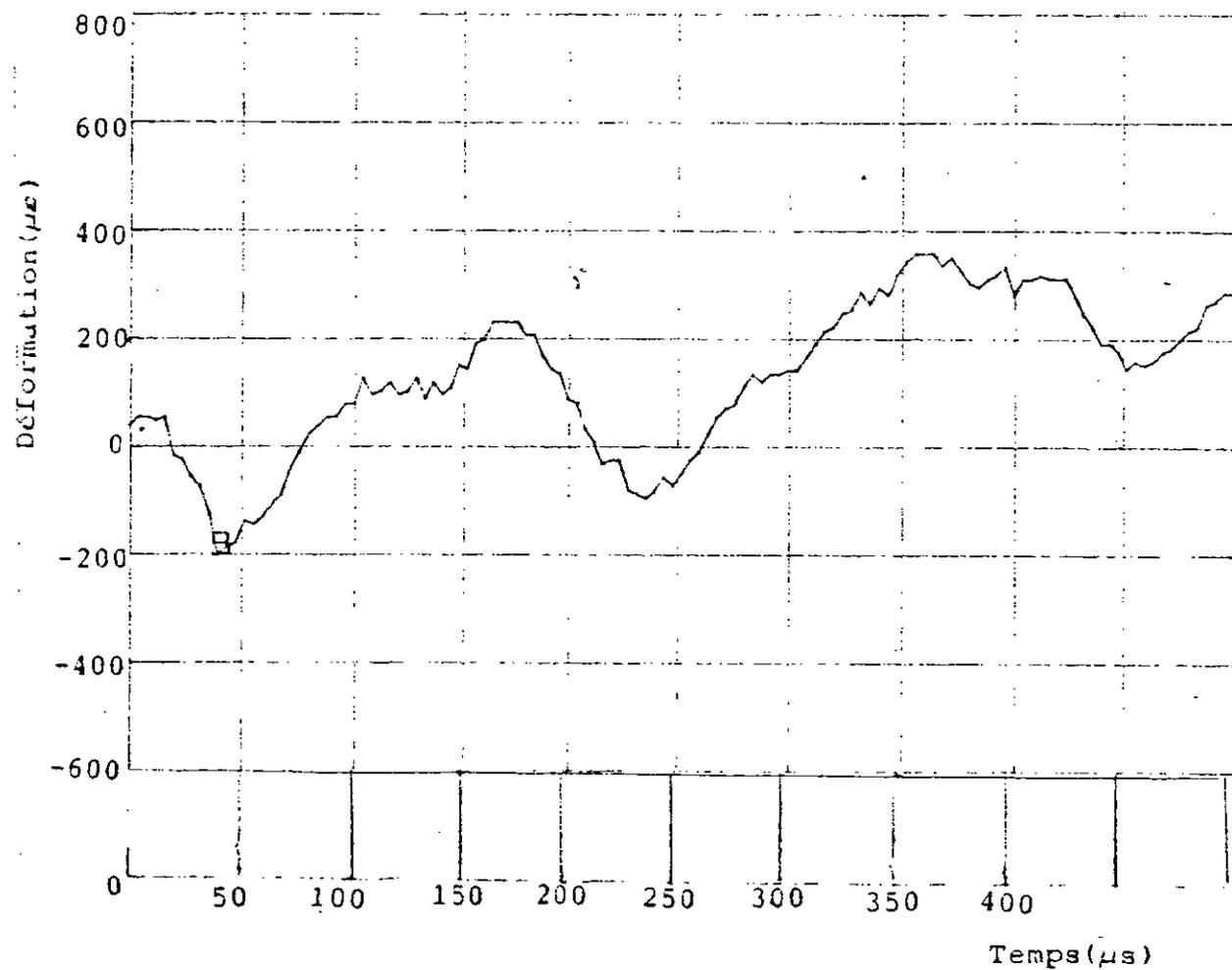


Figure ( 4-3 ) Réponse expérimentale de la jauge N°1 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)



Figure(4-4) Réponse expérimentale de la jauge N° 2 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)s

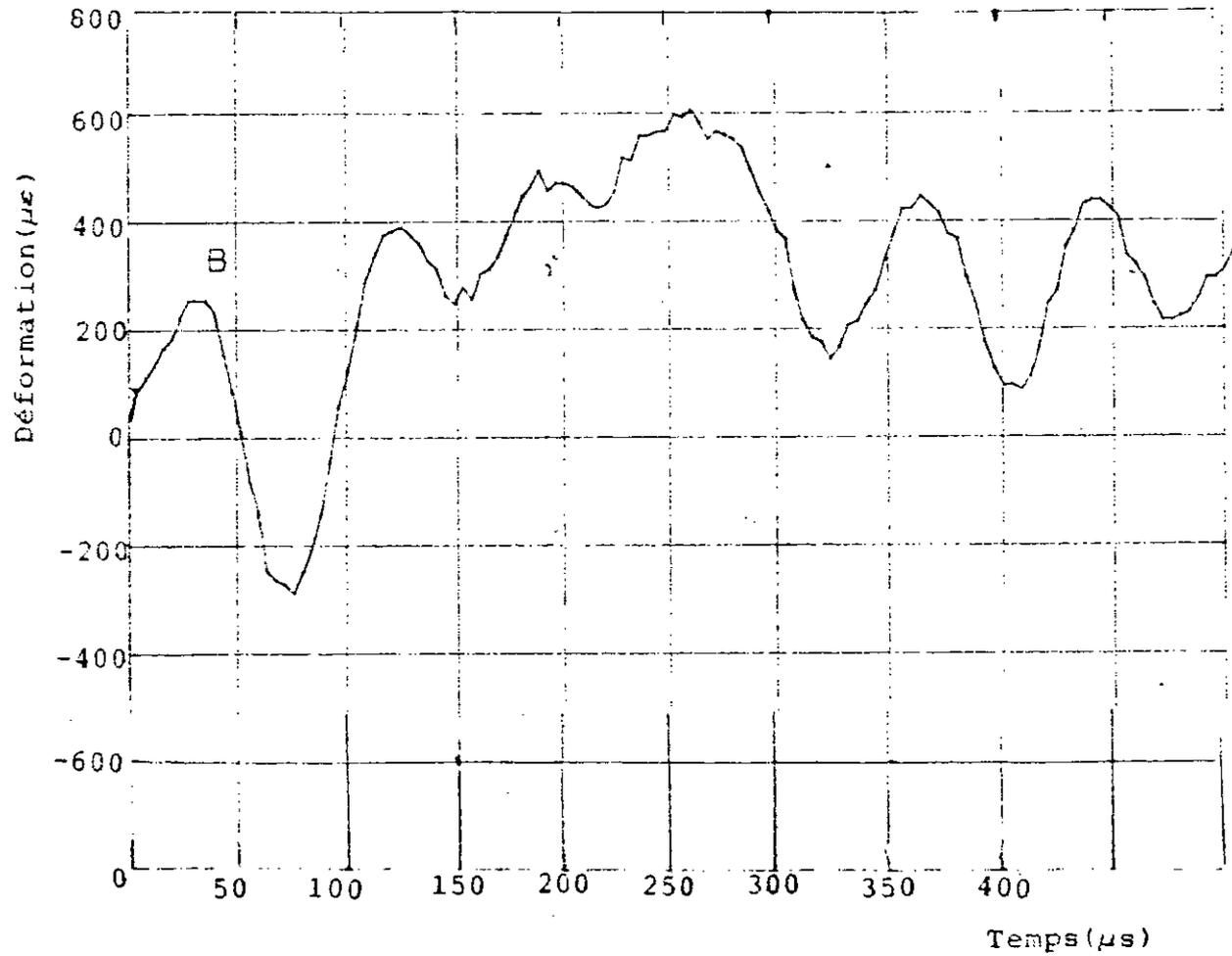


Figure (4-5) Réponse expérimentale de la jauge N°3 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)

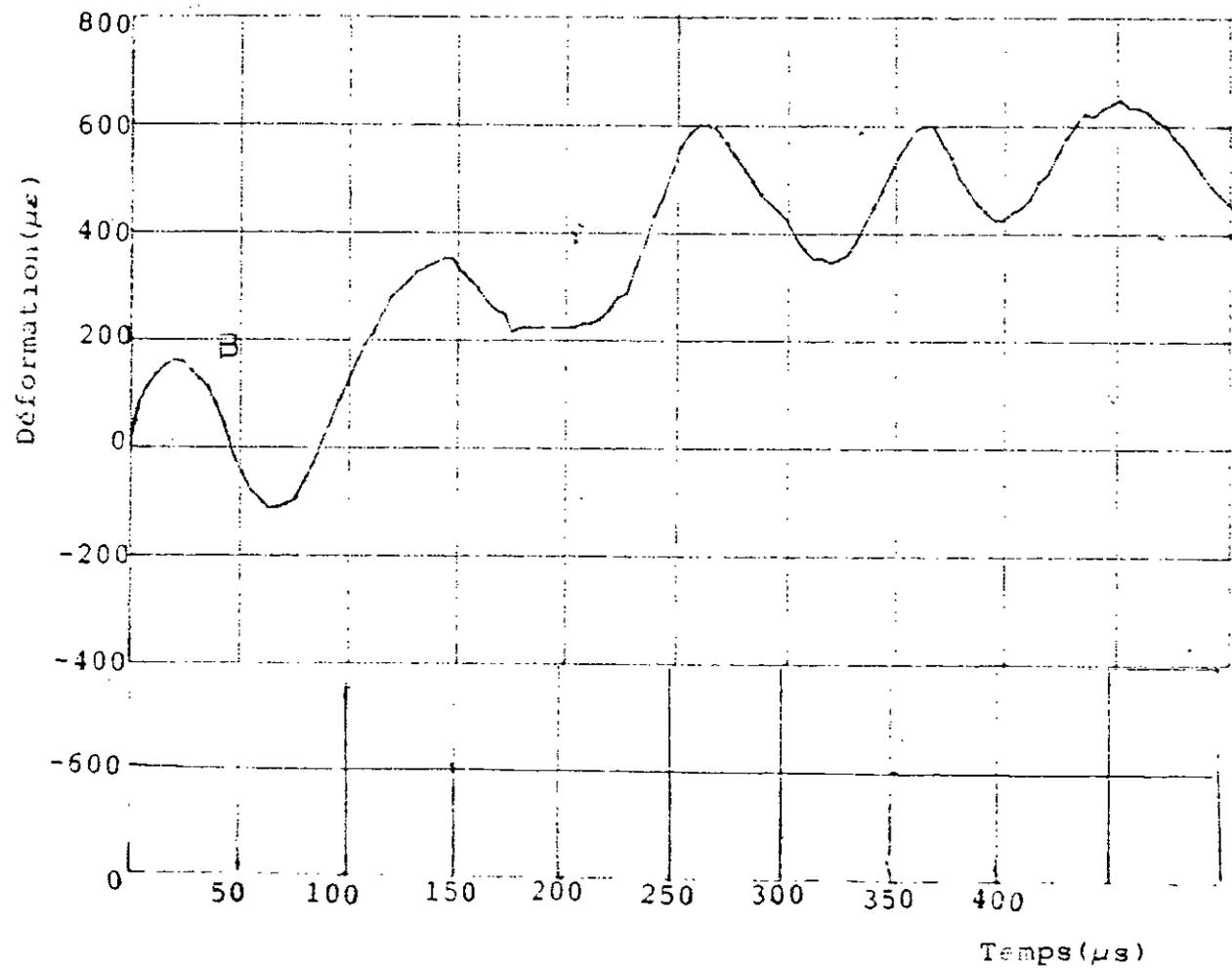


Figure ( 4-6 ) Réponse expérimentale de la jauge N° 4 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)s

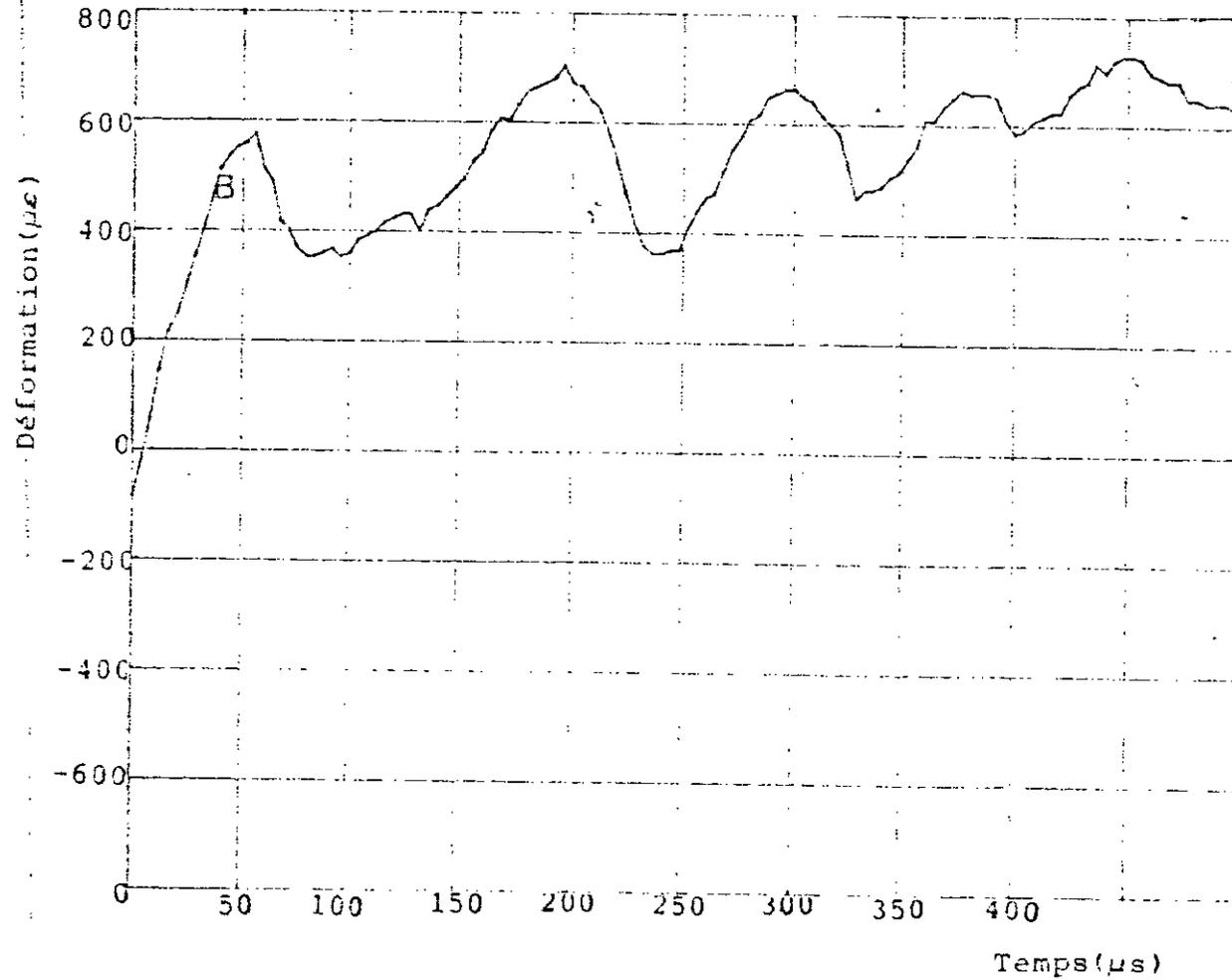
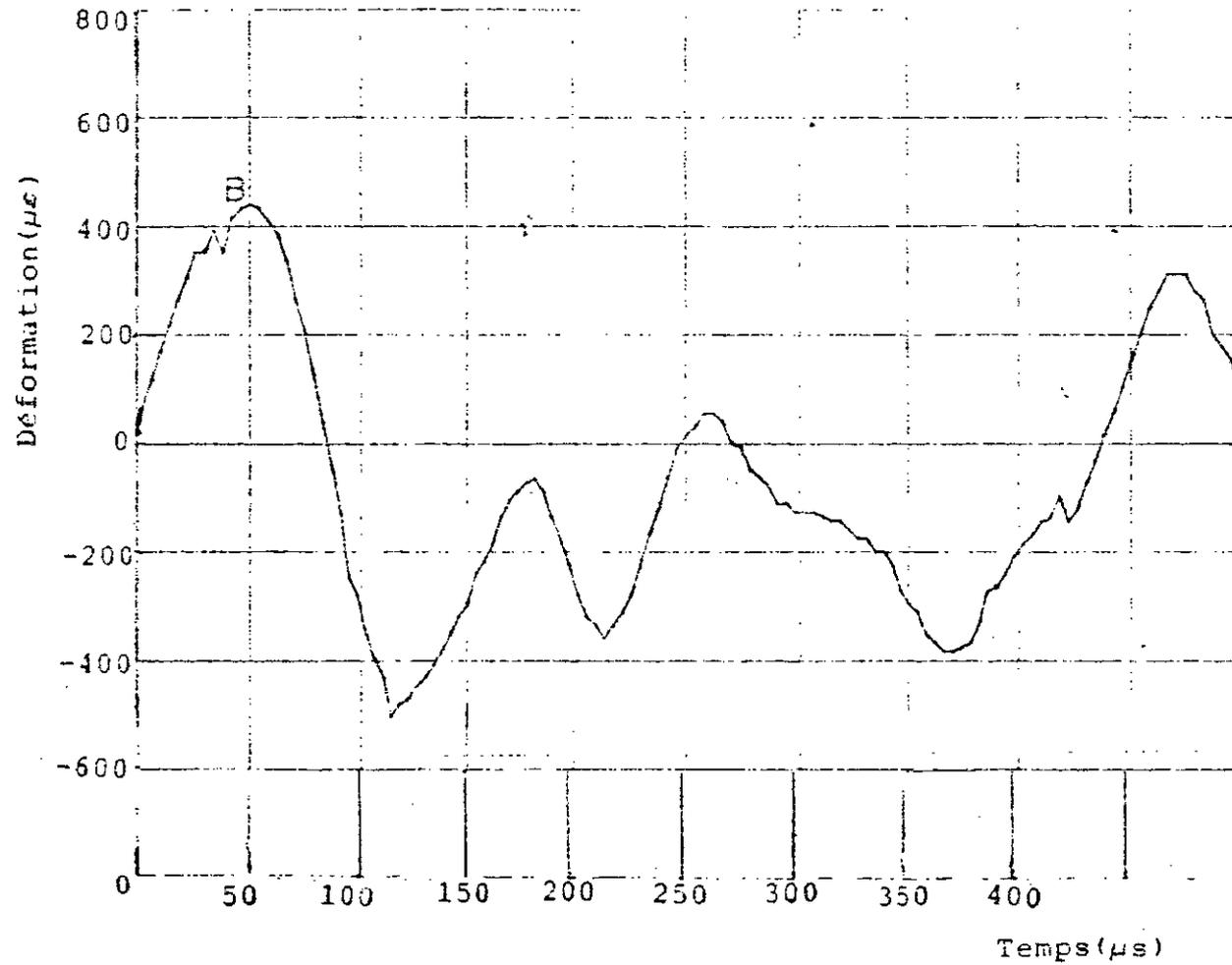


Figure ( 7-7 ) Réponse expérimentale de la jauge N°1 pour le cas fixe-fixe du matériau unidirectionnel



Figure( 4-3 ) Réponse expérimentale de la jauge N°2 pour le cas fixe-fixe du matériau unidirectionnel

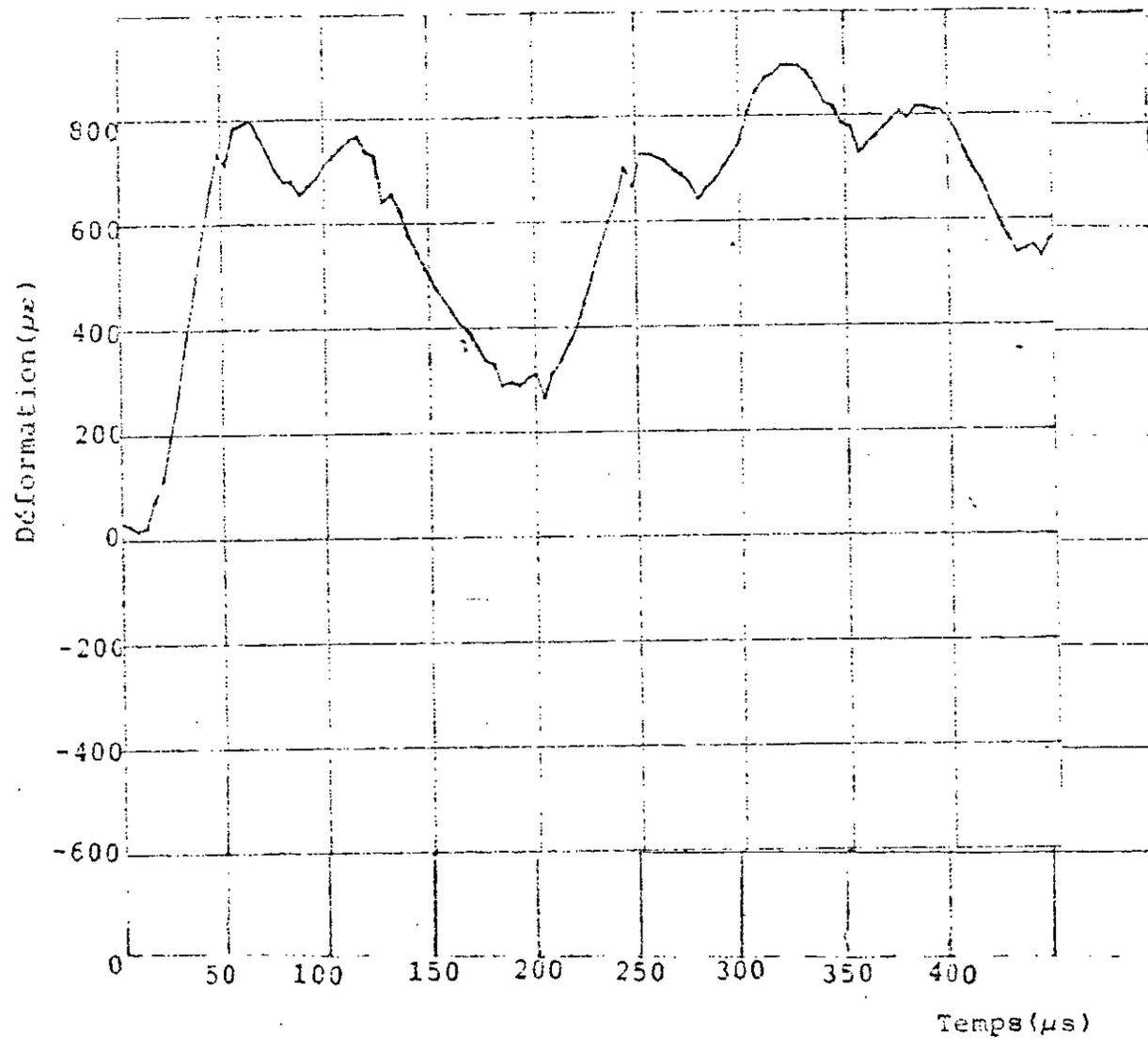


Figure C (4-10) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas fixe-fixe du matériau unidirectionnel

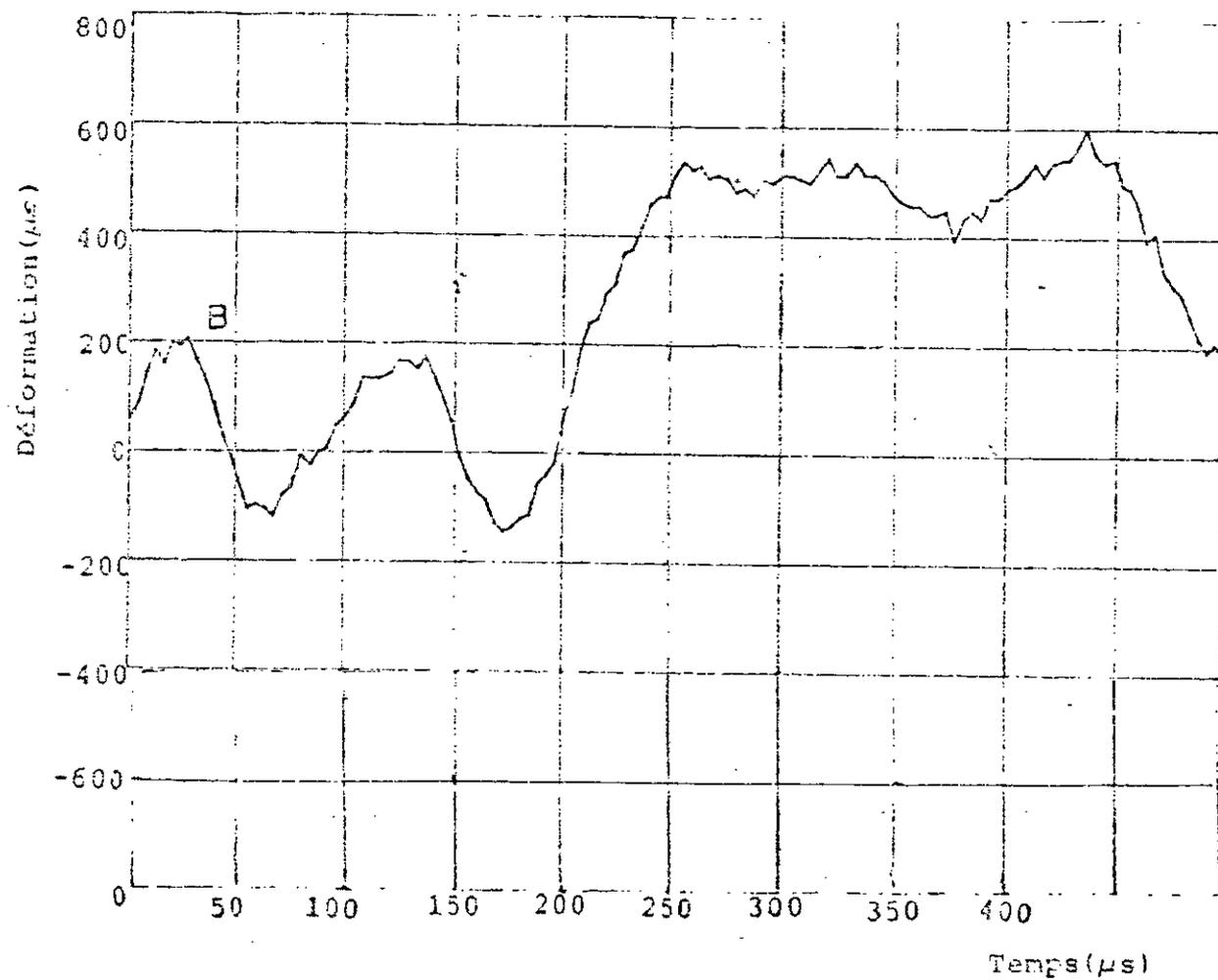


Figure (4-11) Réponse expérimentale de la jauge N°1 pour le cas fixe-fixe du matériau mat

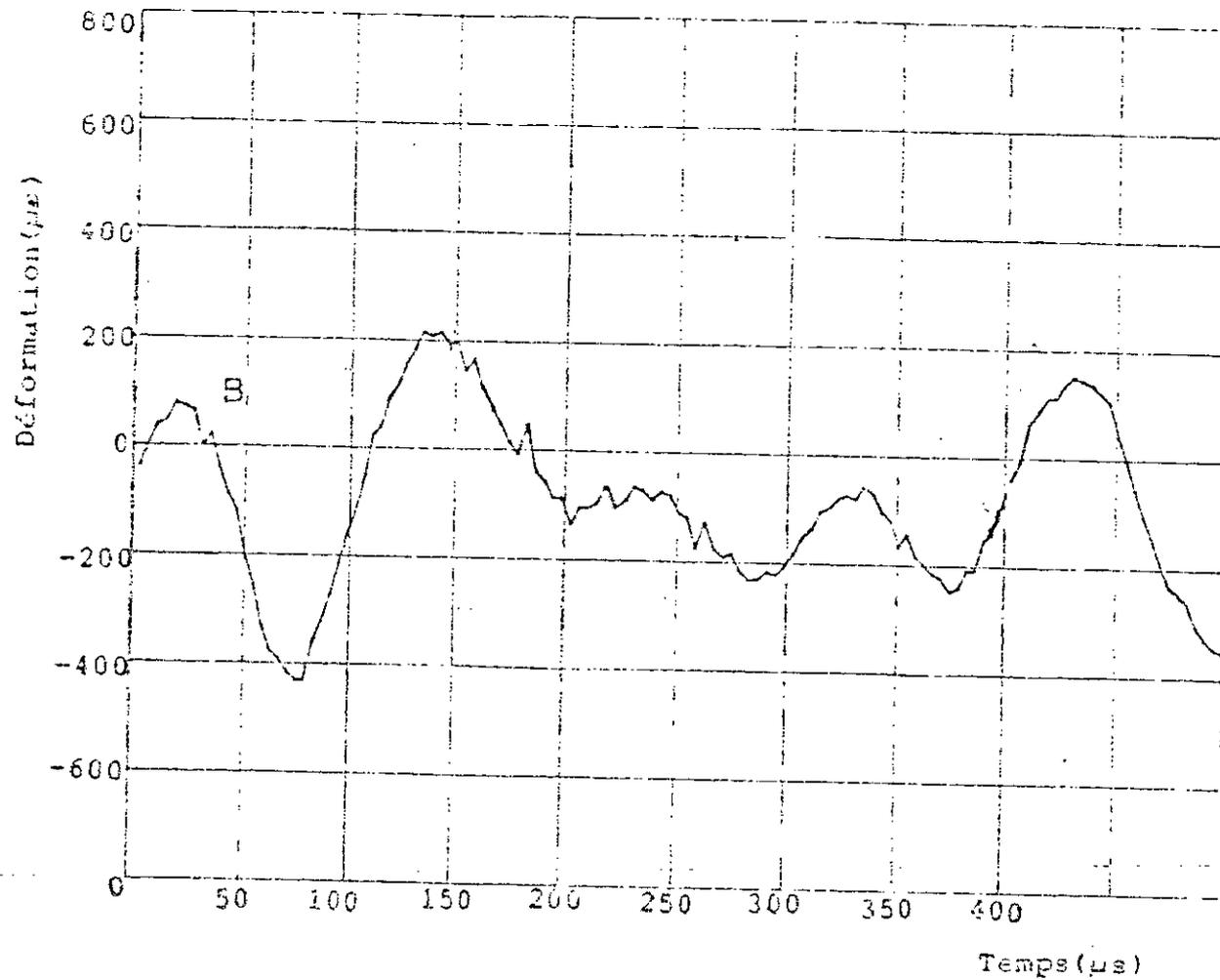


Figure (4.12) Réponse expérimentale de la jauge N°2 pour le cas fixe-fixe du matériau mat

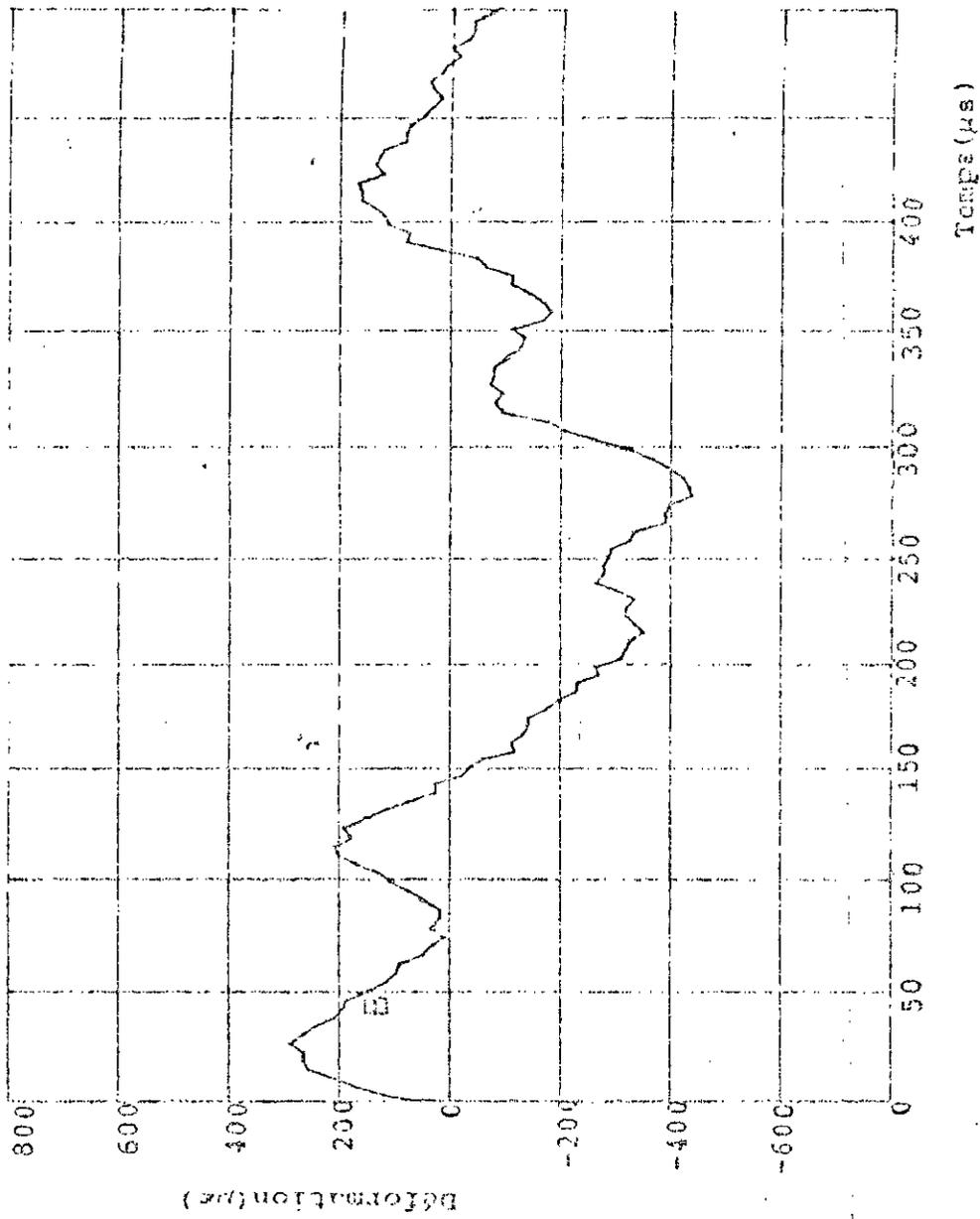
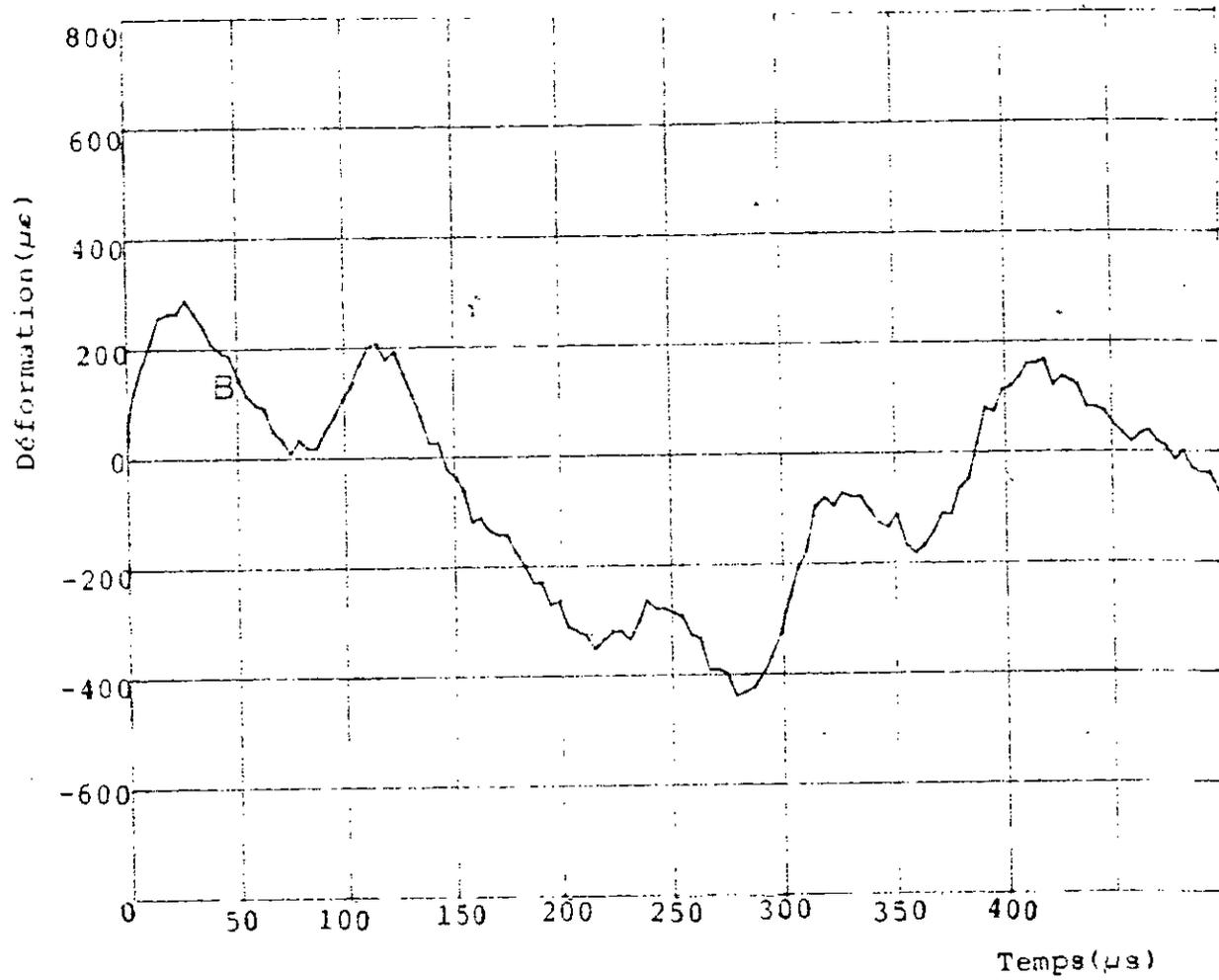
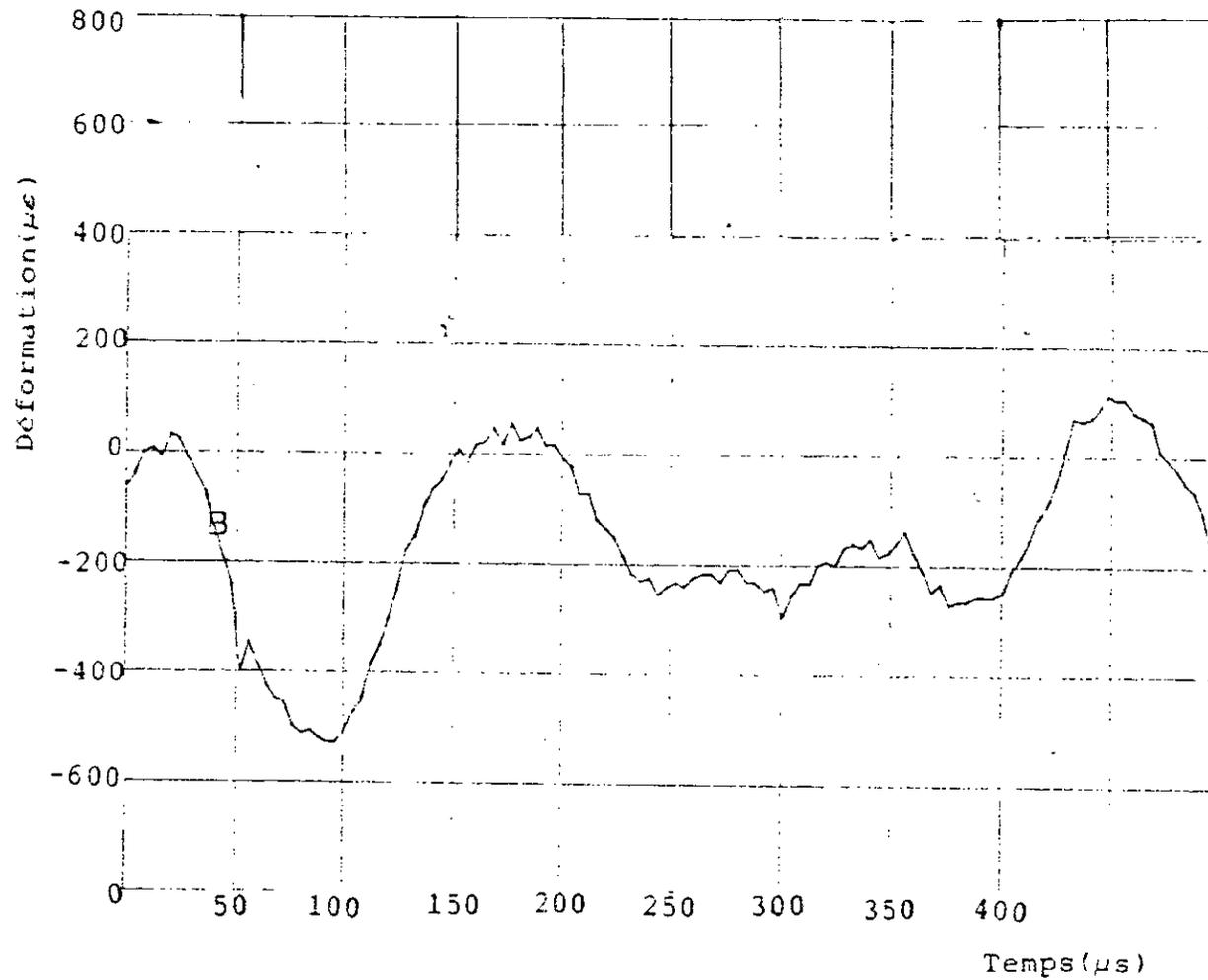


Figure 1-13 Réponse expérimentale de la jauge N°3 pour le cas fixe-fixe du matériau mat



Figure( 4-13 ) Réponse expérimentale de la jauge N°3 pour le cas fixe-fixe du matériau mat



Figure( 4-14 ) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas fixe -fixe du matériau mat

L'écart existant entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques est de l'ordre de 4% pour l'unidirectionnel, de 5.5% pour le mat et de 8.9% pour le matériau tissu. Néanmoins on constat que la vitesse de propagation est inversement proportionnelle à la fraction volumique des fibres de verre. Donc on peut déterminer le module d'élasticité à partir de la vitesse de propagation et la masse volumique du matériau sans passé par l'endommagement de l'éprouvette.

#### 4-2-2 Cas libre-libre.

Dans ce cas, on remarque une décroissance des déformations causée par les ondes réfléchies et les ondes incidentes qui sont de signes opposés. Ceci explique la nature des propagations des ondes. figures(4-15 )à(4-26). Le tableau 4-7 représente les résultats du matériau tissu pour le cas libre-libre comme l'indique le tableau 4-6.

N° de jauge	L(mm)	1 <sup>e</sup> Pic	2 <sup>e</sup> Pic	Pic max
		def( $\mu\epsilon$ )	def( $\mu\epsilon$ )	def( $\mu\epsilon$ )
1	14	830	800	830
2	52	110	70	110
3	24	380	260	380
4	38	200	150	200

Tableau 4-6 Relevées expérimentales des pics du matériau tissu pour le cas libre-libre

La vitesse de propagation d'onde dans ce cas est la même que celle calculée dans le cas des conditions "fixe-fixe". Un petit écart a été constaté entre les deux cas, cela est dû au montage. Les résultats expérimentaux des trois matériaux sont regroupés dans le tableau suivant:

matériau	tissu	Mat	unidirectionnel
$cx10^2/m/s$	55.4	60.2	87.8

Tableau 4-7 résultats expérimentaux des vitesses de propagations le long de l'axe cx.

#### 4-2-3 cas d'encastrement

On a utilisé cette condition aux limites pour vérifier les deux cas précédents .

Les figures 4-27 à 4-29 montrent les déformations dues au choc enregistrées par la jauge n.4 située entre le point d'impact et l'encastrement de la plaque. Une nette augmentation est observée pour les trois configurations de matériaux .

Les figures 4-30 à 4-32 montrent les déformations dues au choc enregistrées par la jauge n.1 située entre le point d'impact et le côté libre. Contrairement à la jauge n.4, une décroissance dans le temps des déformations est nettement visible.

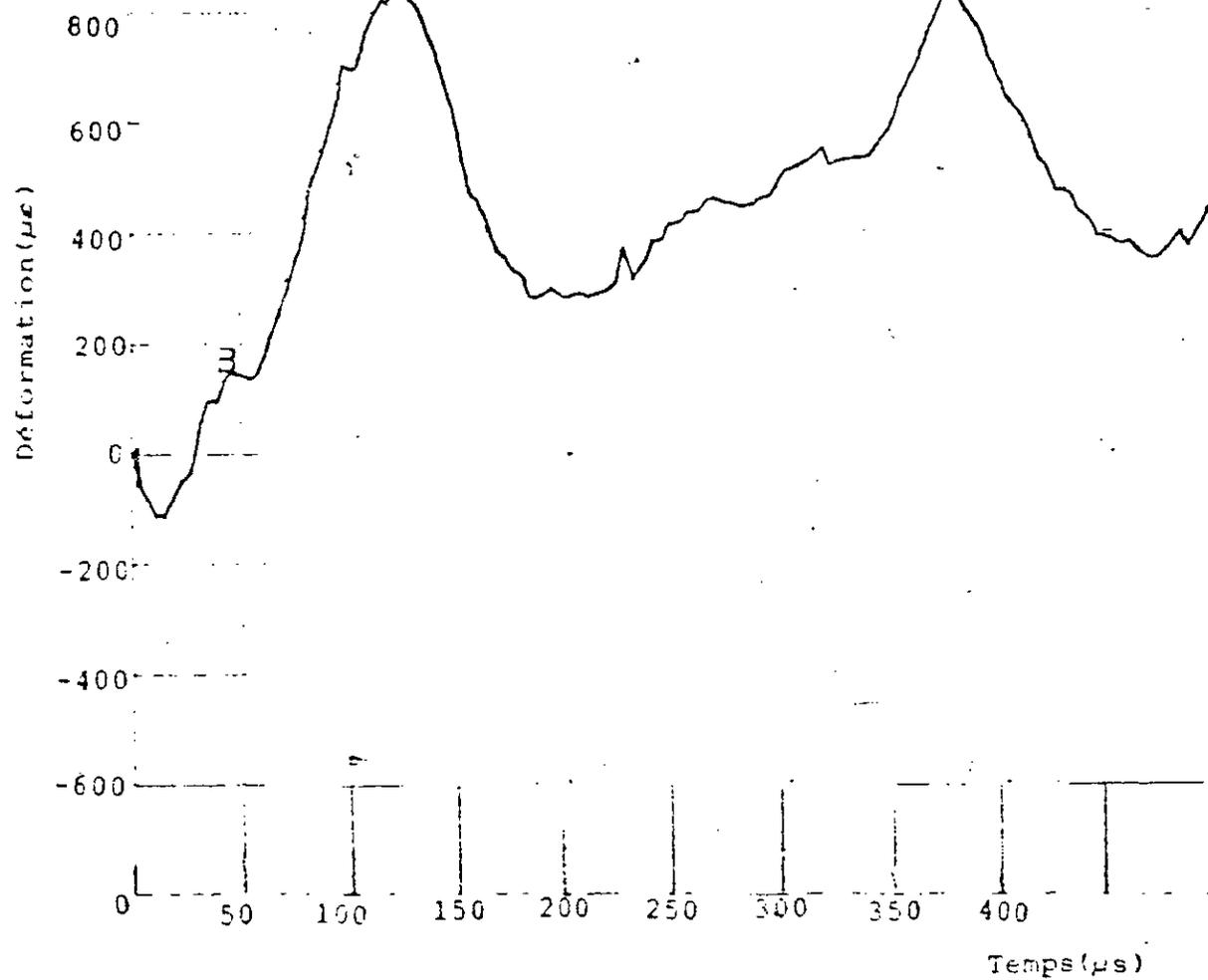
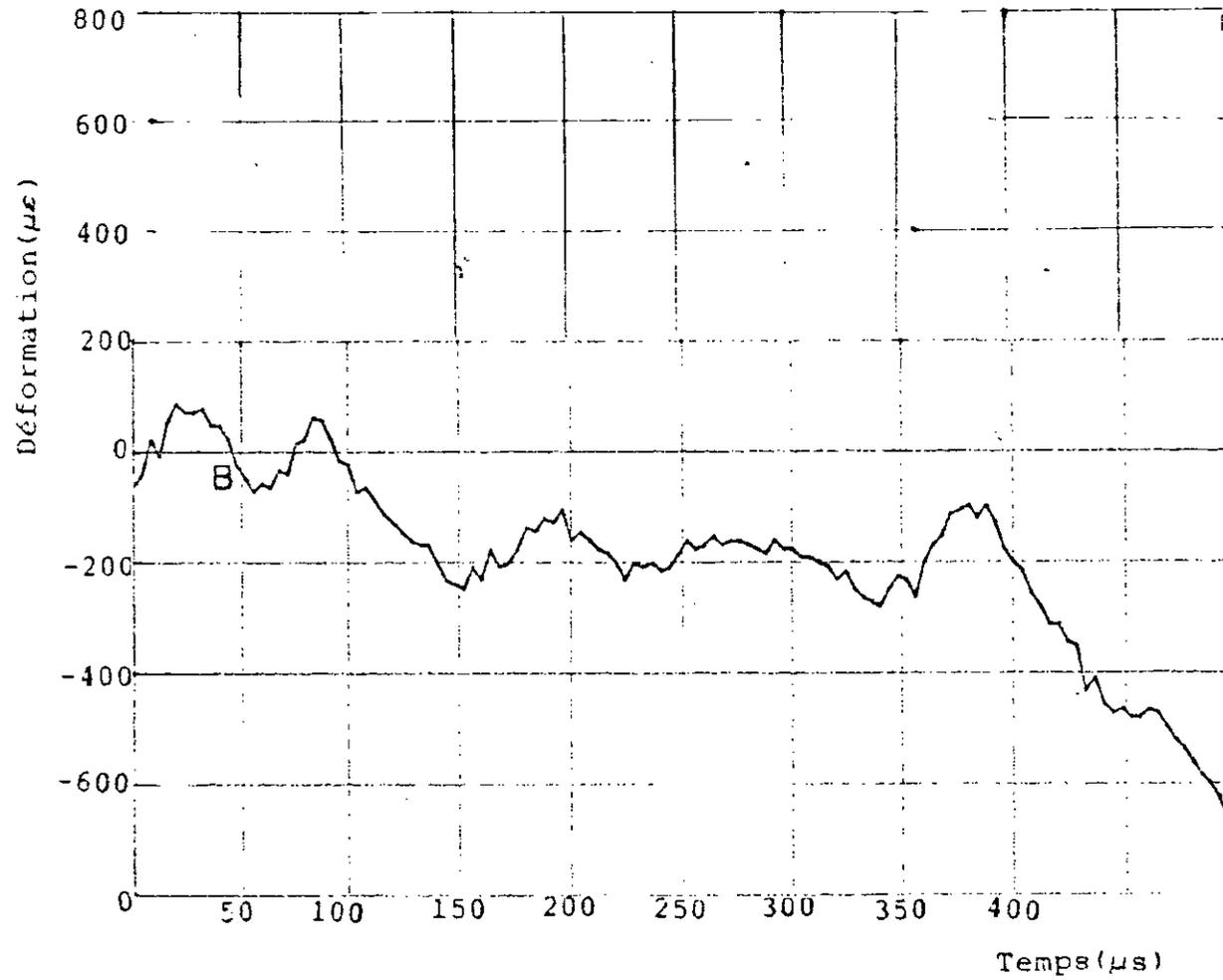


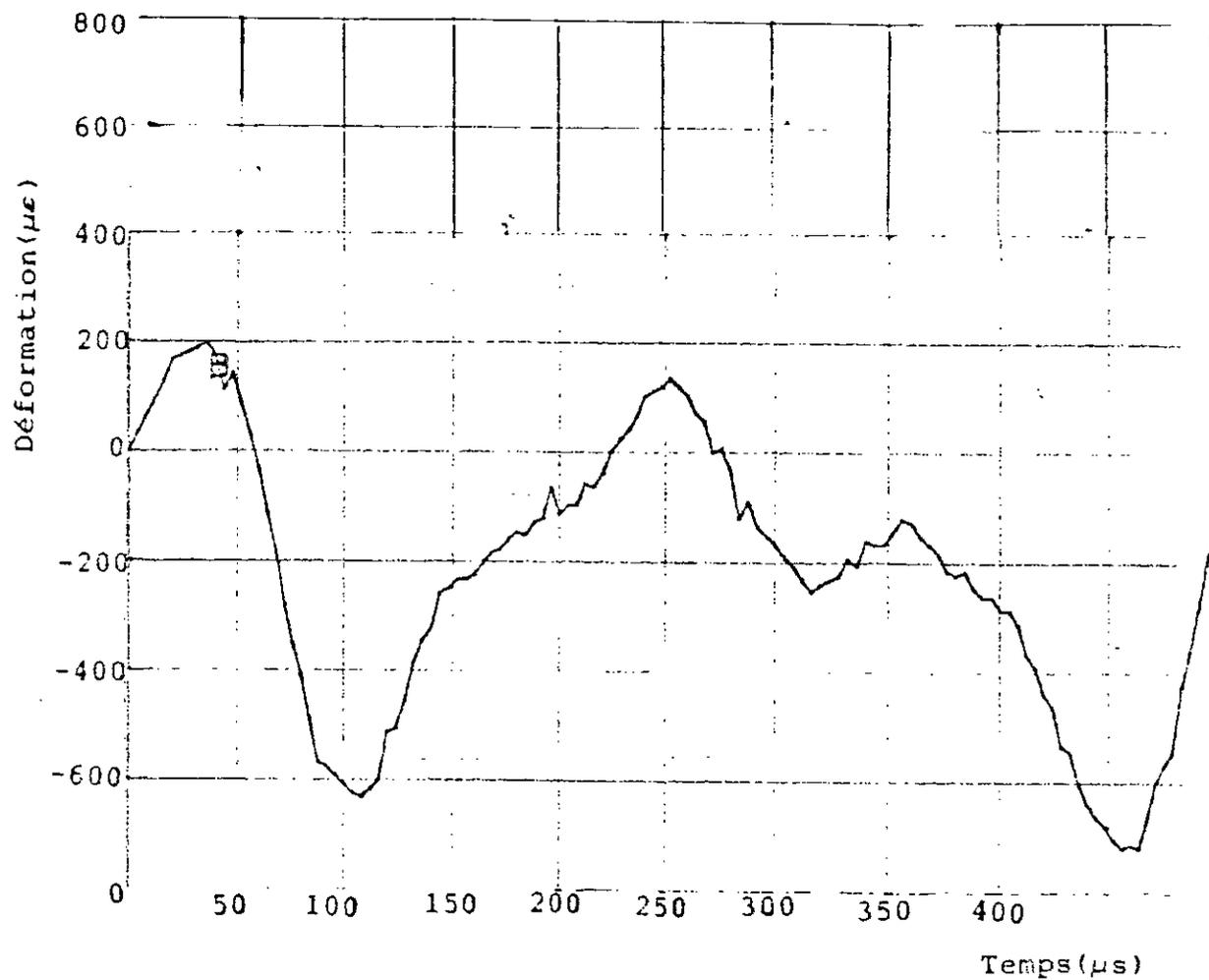
Figure (4-15) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas  
libre-libre du matériau (0/90)s



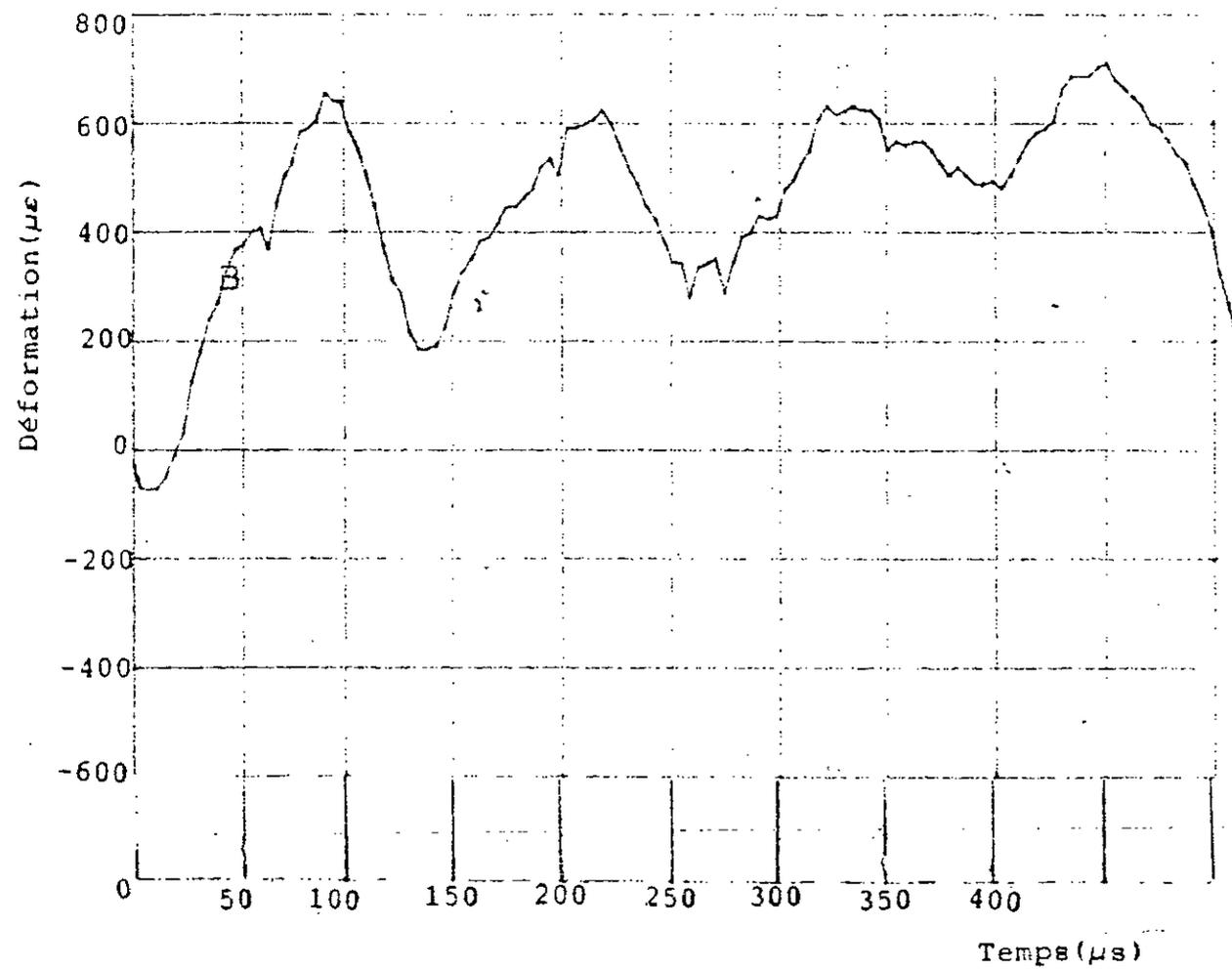
Figure( 4-15 ) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)s



Figure( 4.17 ) Réponse expérimentale de la jauge N° 3 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)s

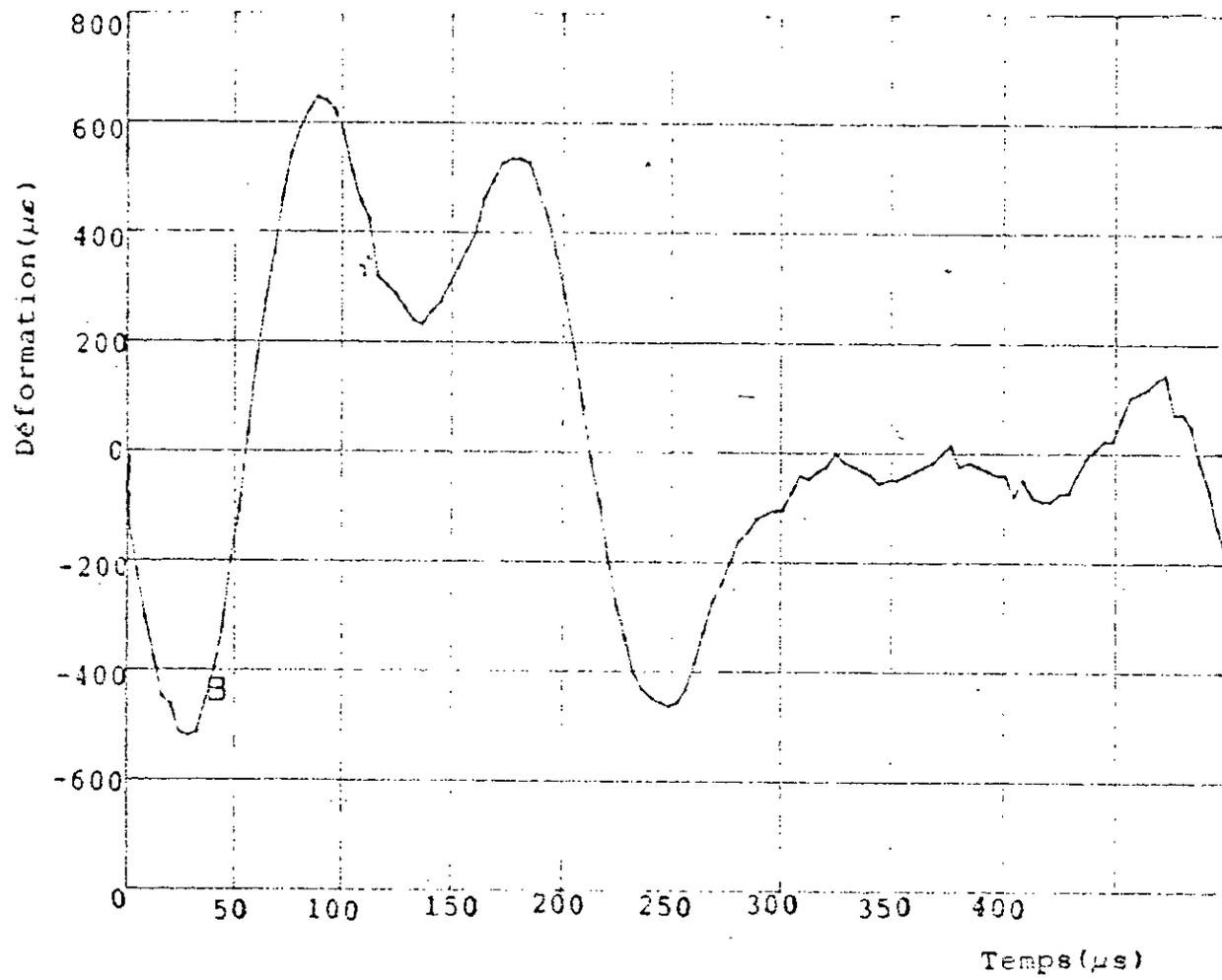


Figure(4-18) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas libre-libre du matériau (0/90) $\pi$

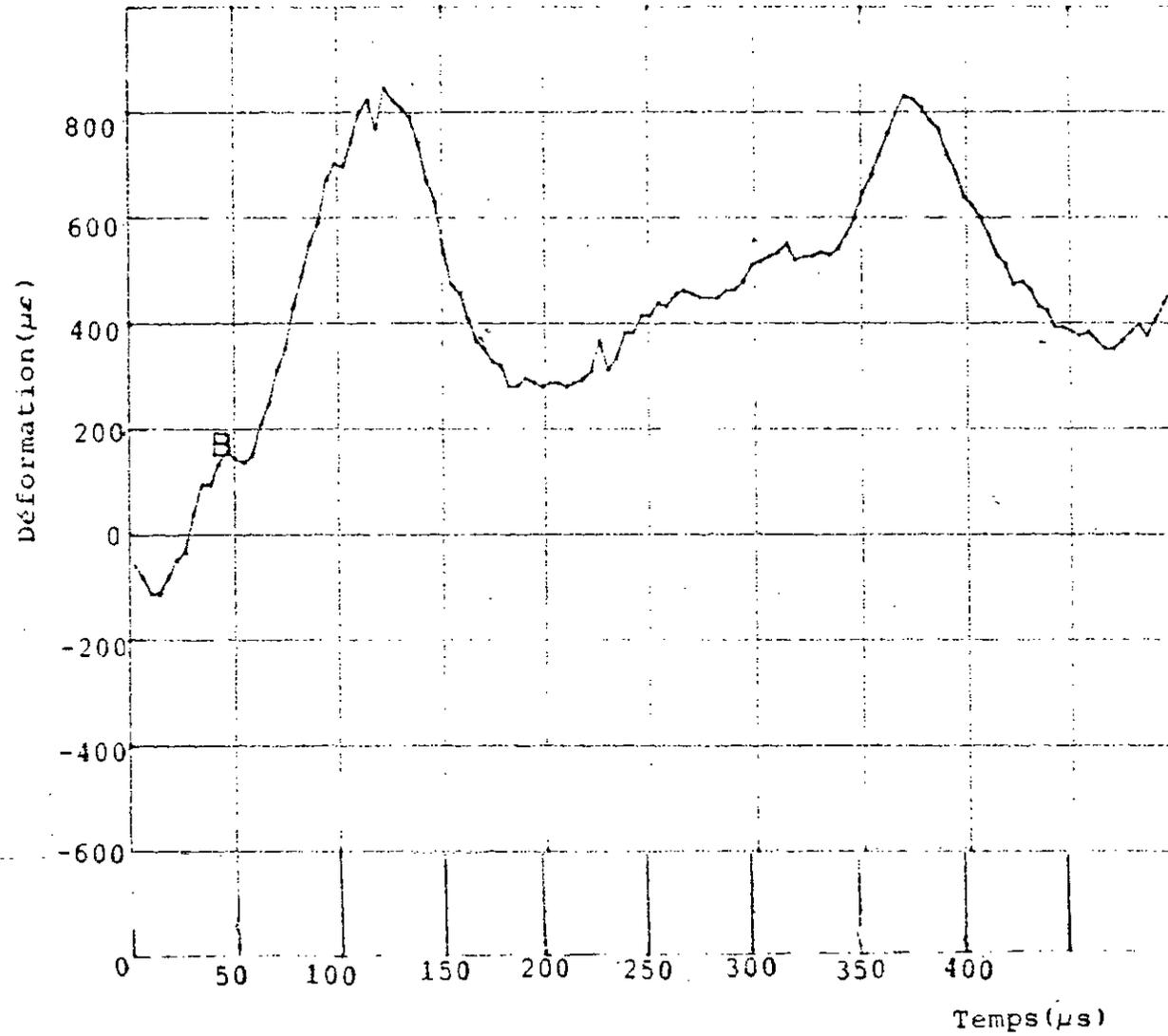


Figure(4-20) Réponse expérimentale de la jauge N°2 pour le cas libre-libre du matériau unidirectionnel

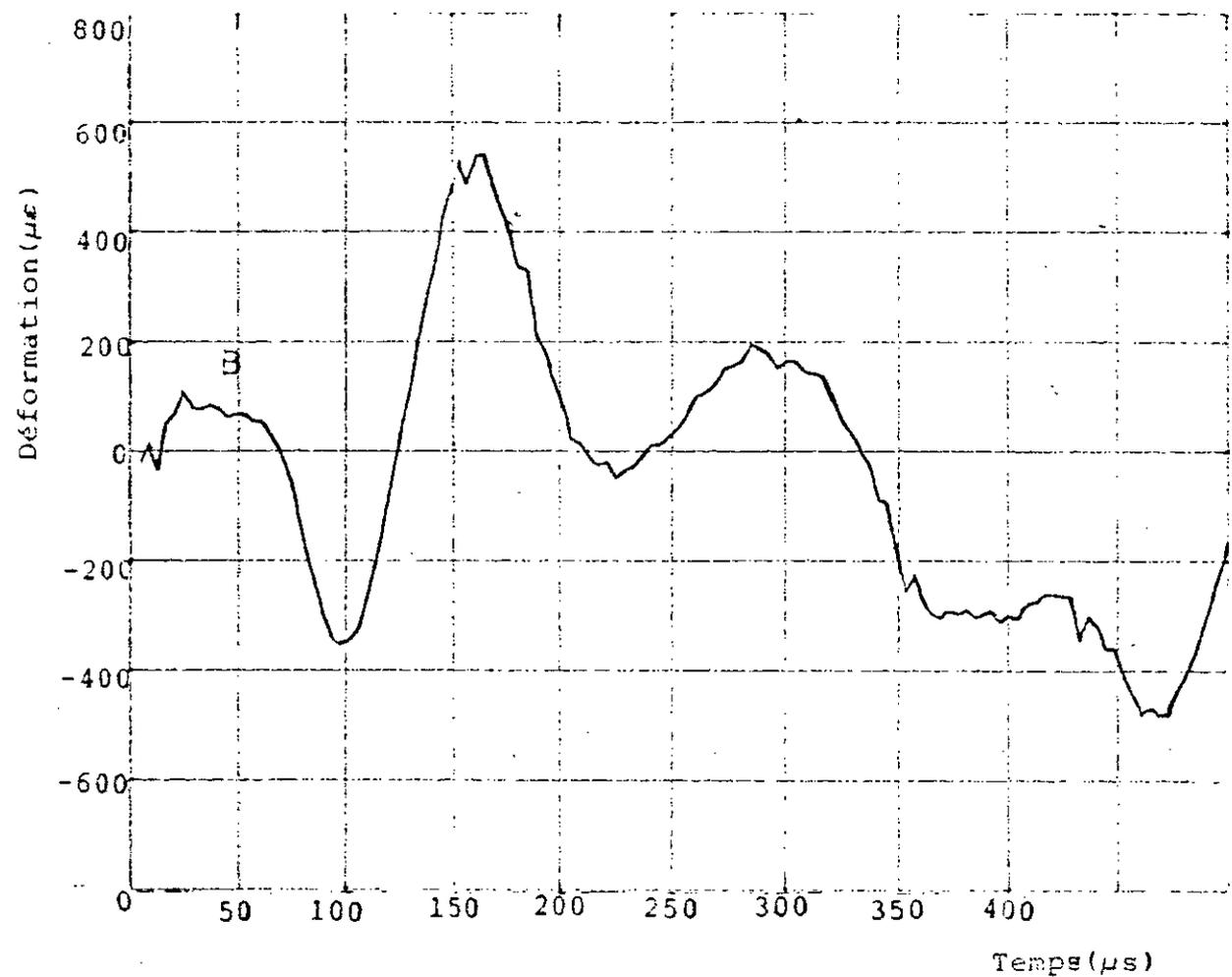
67



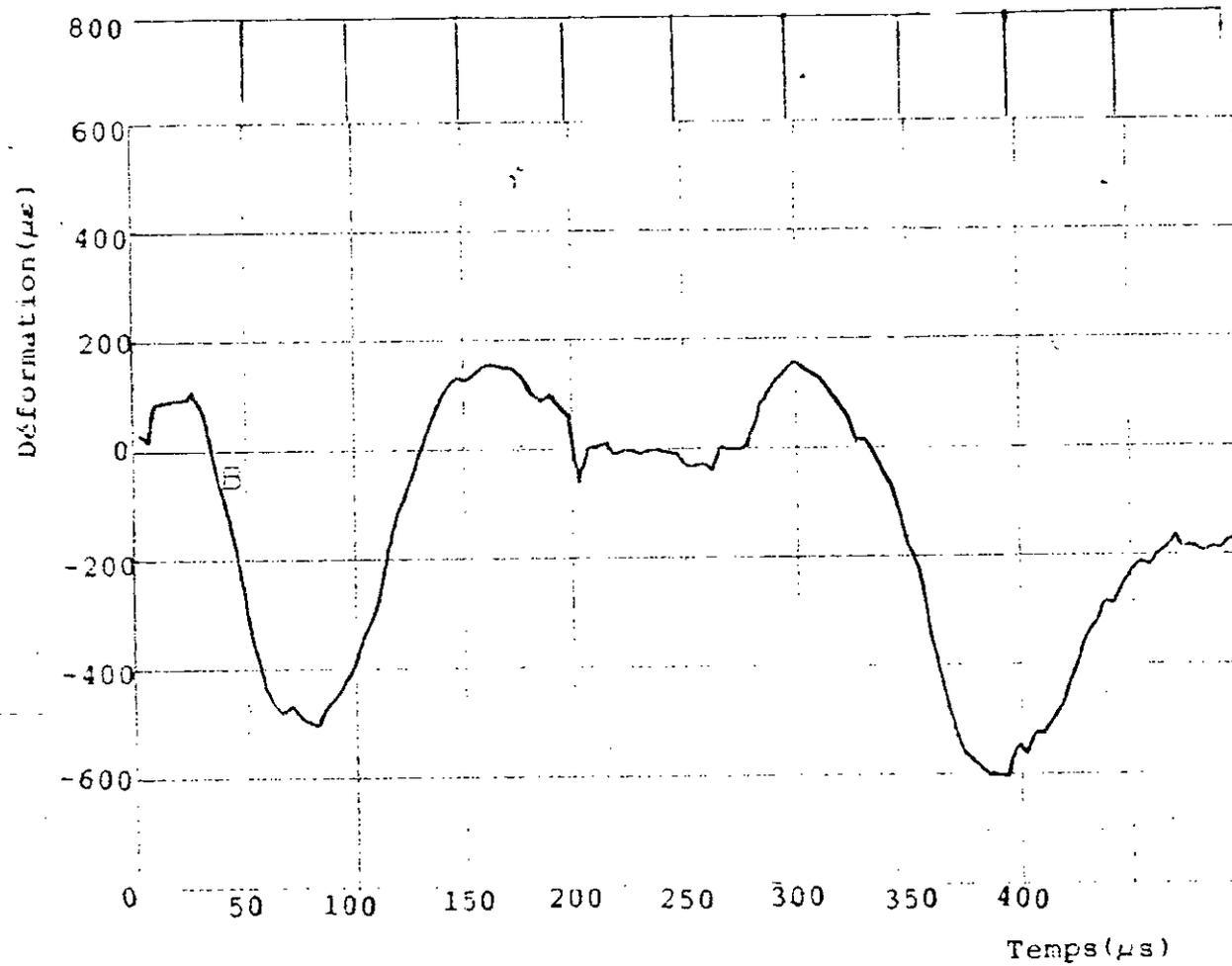
Figure(4-21) Réponse expérimentale de la jauge N°3 pour le cas libre-libre du matériau unidirectionnel



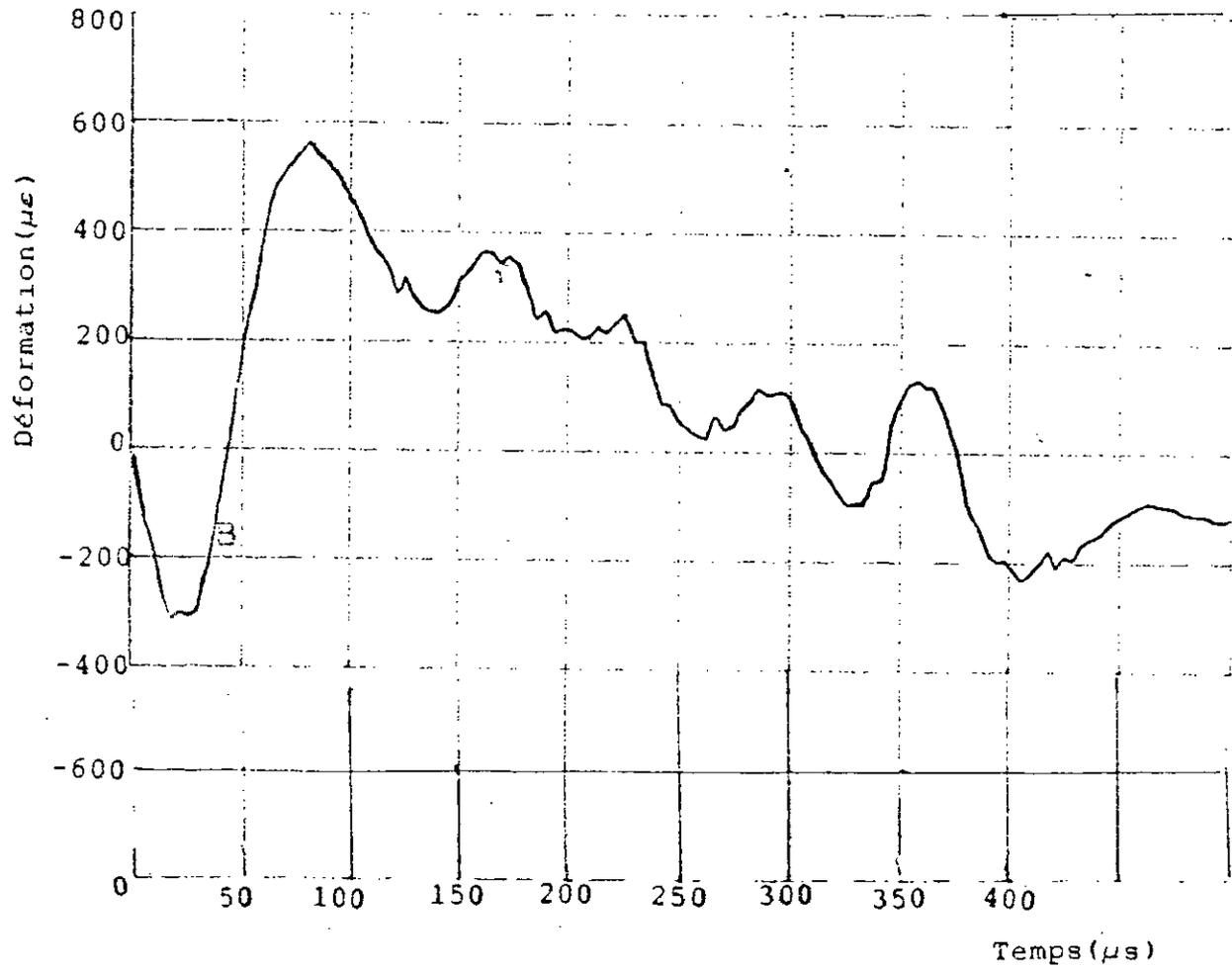
Figure( 4-22 ) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas libre-libre du matériau unidirectionnel



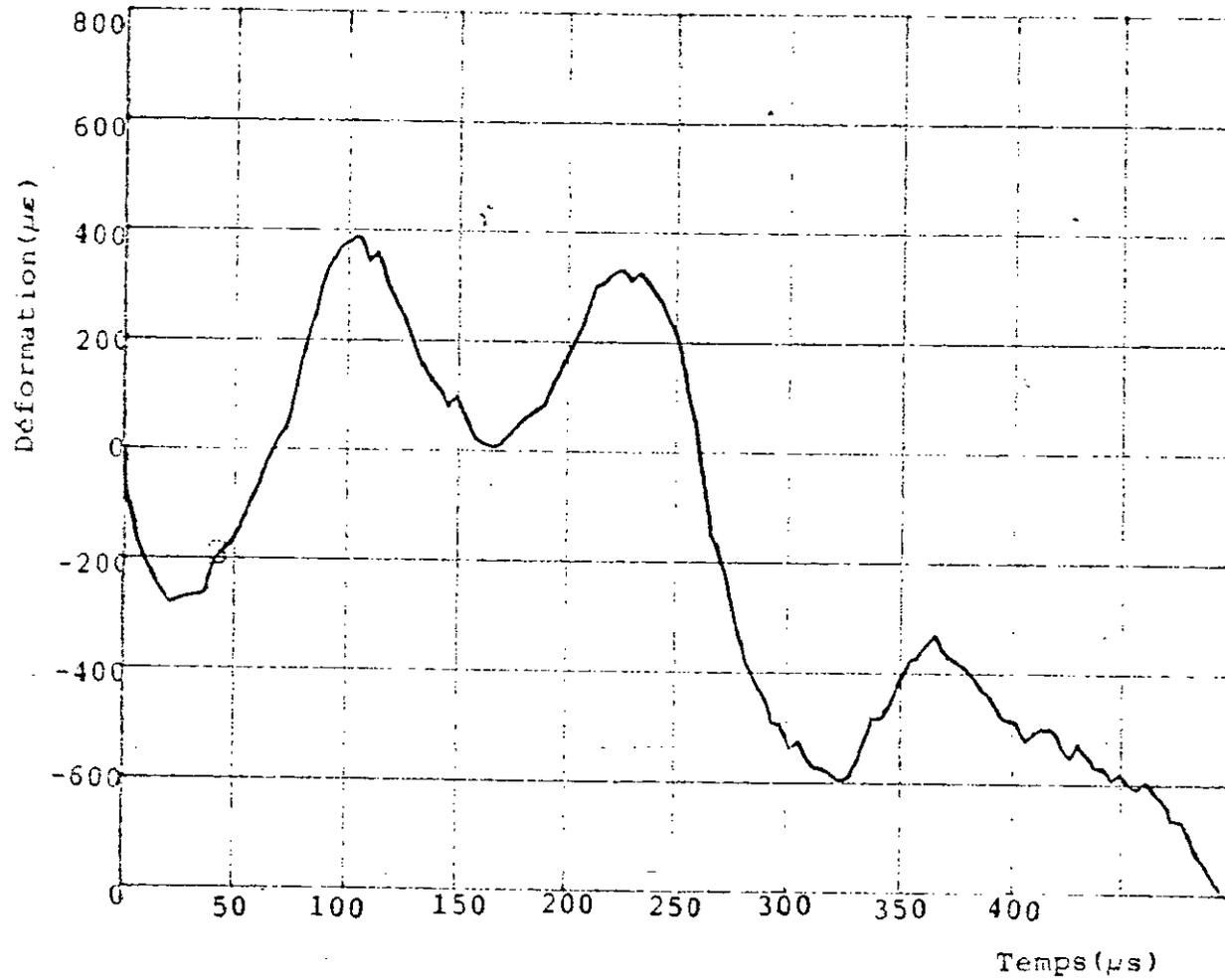
Figure( 4-23 ) Réponse expérimentale de la jauge N°1 pour le cas libre-libre du matériau mat



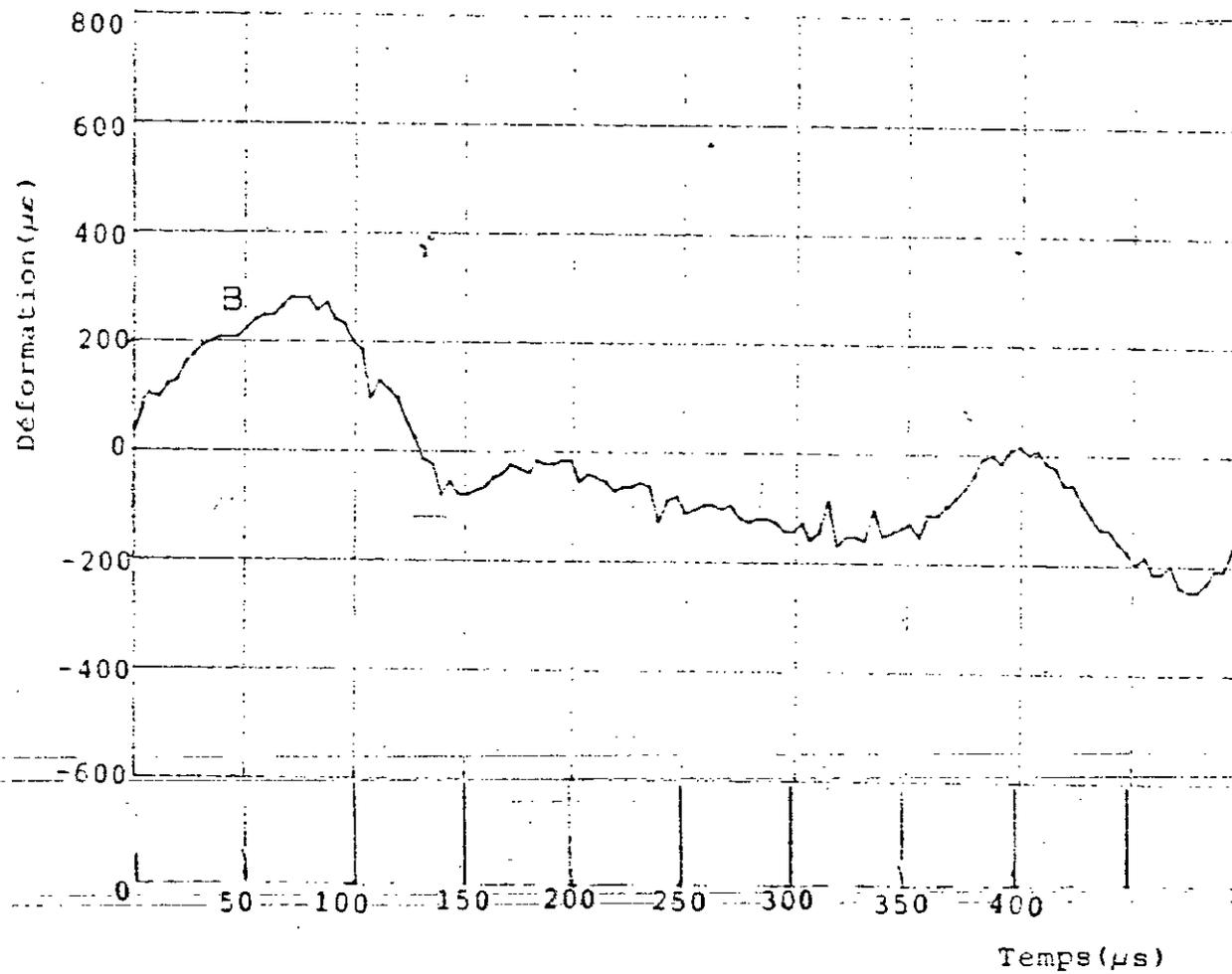
Figure(4-24) Réponse expérimentale de la jauge N°2 pour le cas libre-libre du matériau mat



Figure( 4-25 ) Réponse expérimentale de la jauge N°3 pour le cas libre-libre du matériau mat



Figure( 4-26 ) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas libre-libre du matériau mat



Figure( 4-27 ) Réponse expérimentale de la jauge N°1 pour le cas encasté du matériau (0/90)s

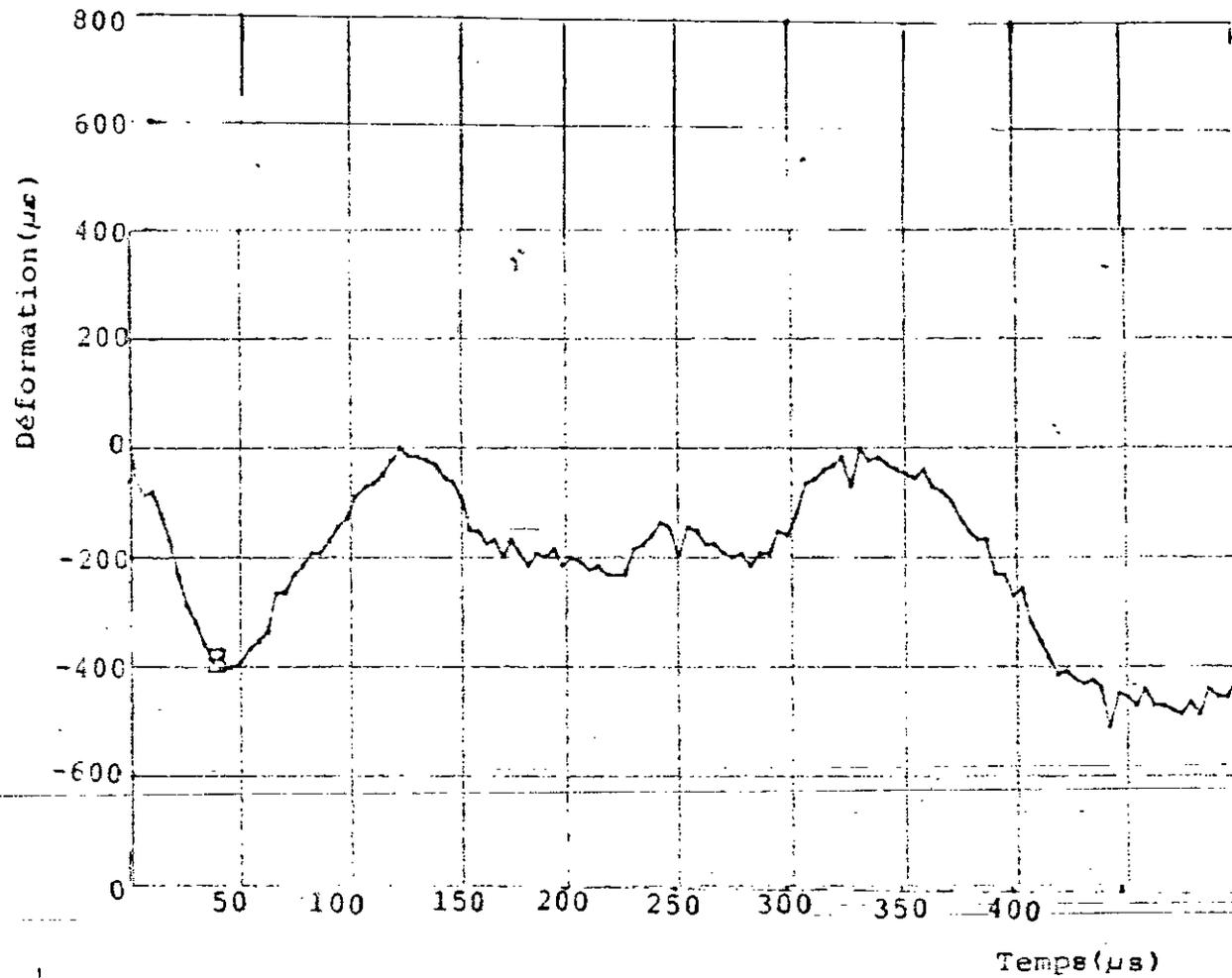


Figure (4-28) Réponse expérimentale de la jauge N°1 pour le cas encastré du matériau unidirectionnel

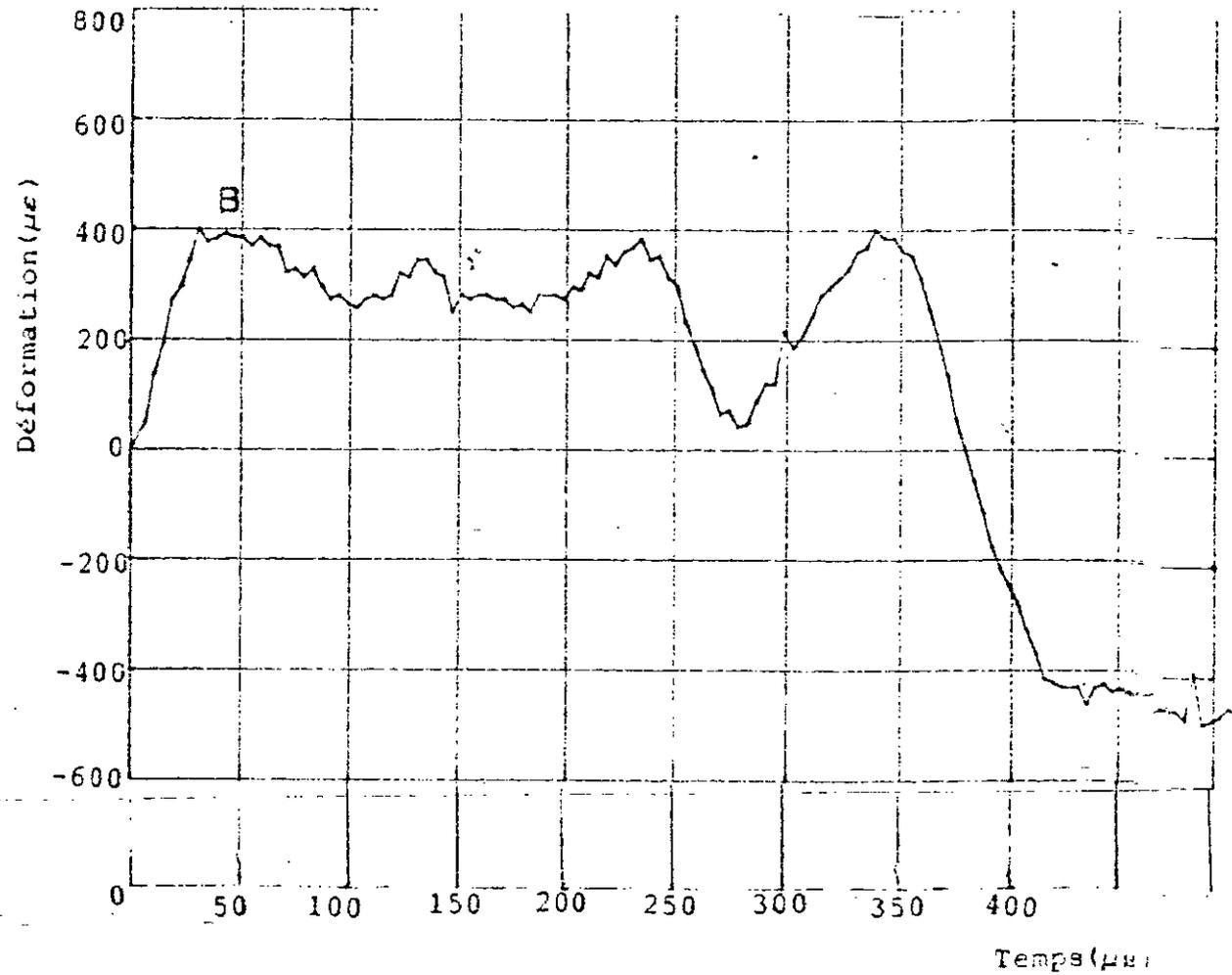


Figure (4-29) Réponse expérimentale de la jauge N° 1 pour le cas  
encasturé du matériau mat

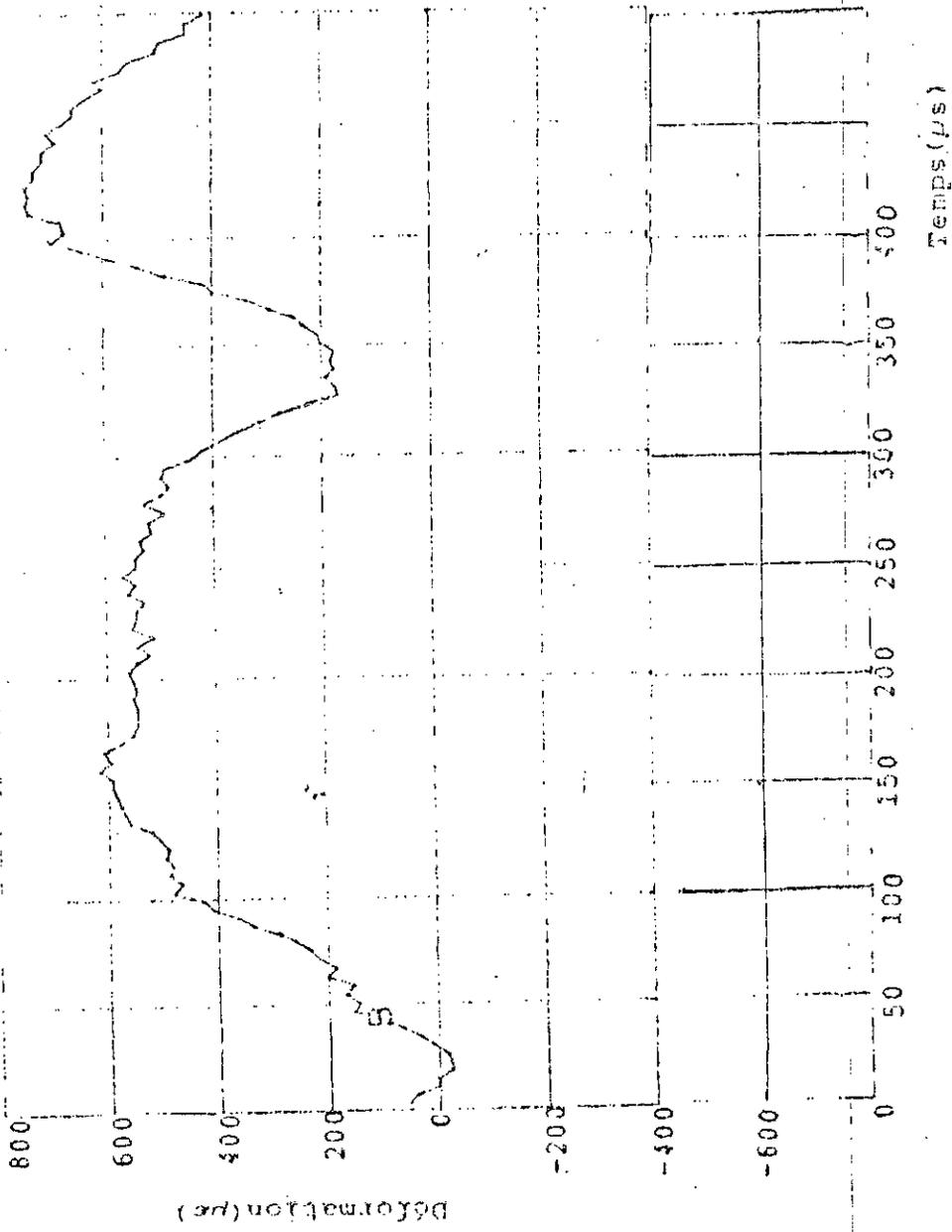
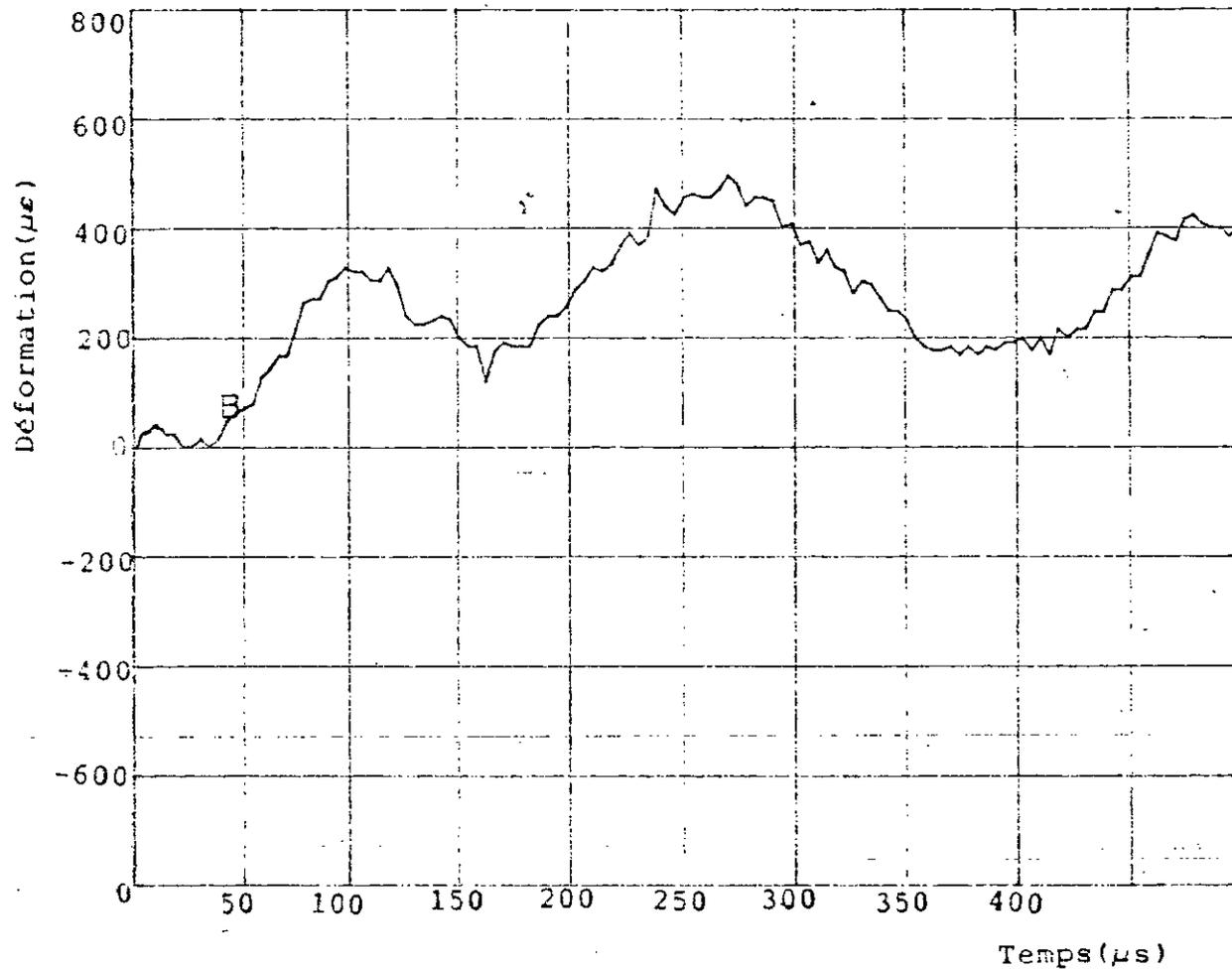
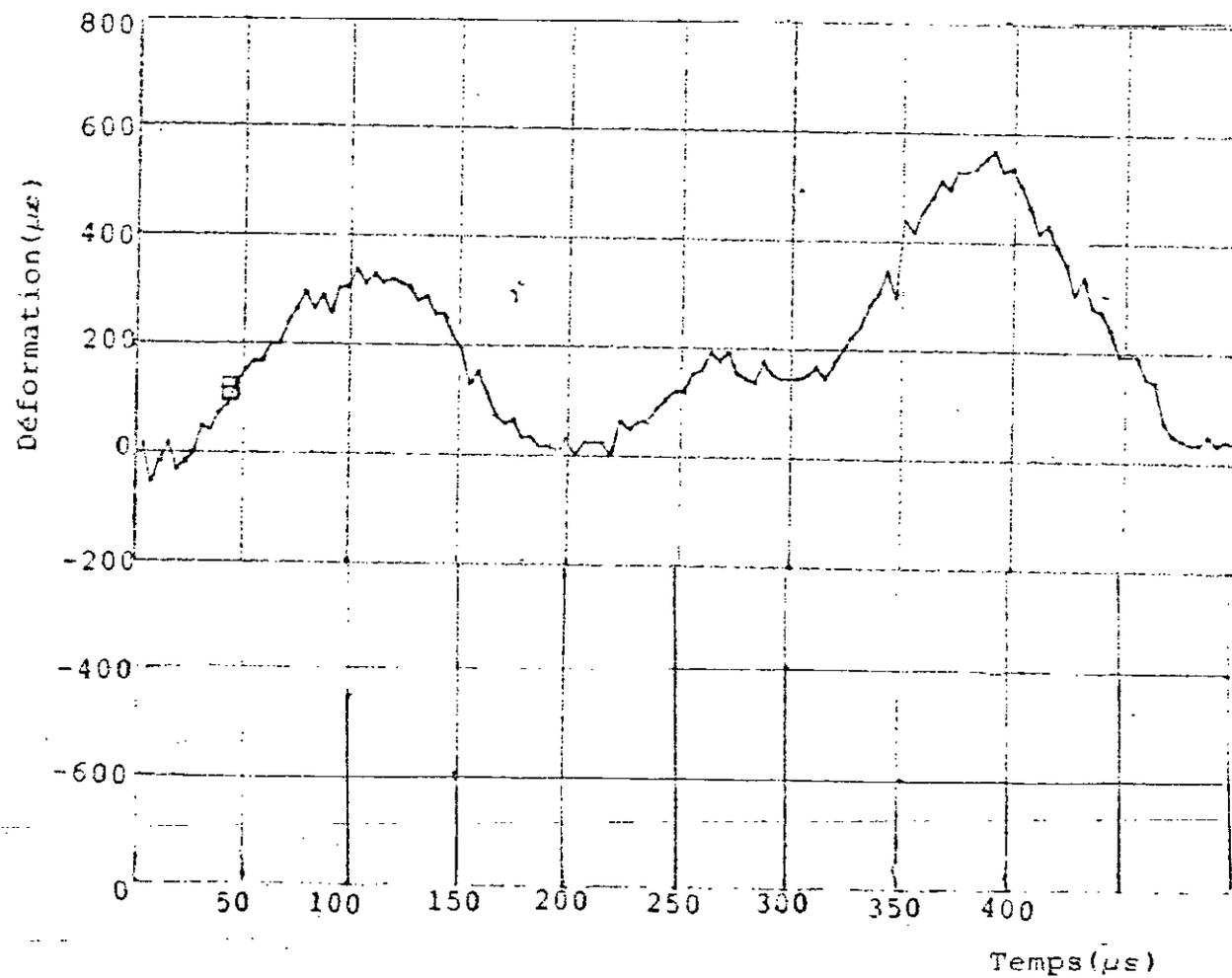


Figure (4-30) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas encastéré du matériau (0/90)F



Figure(4-31) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas encastré du matériau unidirectionnel



Figure( 4-32 ) Réponse expérimentale de la jauge N°4 pour le cas  
encasturé du matériau mat

#### 4-3 Analyse par éléments finis

Les éléments utilisés dans cette analyse sont : les éléments plaques isoparamétriques à 9 noeuds figure(4-33) qui sont développés par YANG [17], leur développement est basé sur la théorie de stratification de WHITENEY et PAGANO [18] . Chaque noeud admet cinq degrés de liberté  $U_0, V_0, W, \theta_x$  et  $\theta_y$  . Trois déplacements  $u_0, v_0$  et  $w$  du plan médian dans les directions  $x, y$  et  $z$  respectivement et deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  des sections transversales perpendiculaires aux axes  $x$  et  $y$  respectivement. Par conséquent les degrés de liberté  $U_0$  et  $v_0$  sont négligés dans les problèmes de choc transversal.

les éléments plaques isoparamétriques ont été développés en utilisant les fonctions de formes suivantes:

$$S_i = (1/4)(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) + (1/4)(1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (4-3)$$

pour les noeuds extrêmes

pour les noeuds ou  $\xi = 0$  et  $\eta = \pm 1$

$$S_i = (1/2)(1-\xi^2)(\eta_0+\eta^2) \quad (4-4)$$

pour les noeuds ou  $\xi = \pm 1$  et  $\eta = 0$

$$S_i = (1/2)(\xi_0+\xi^2)(1-\eta^2) \quad (4-5)$$

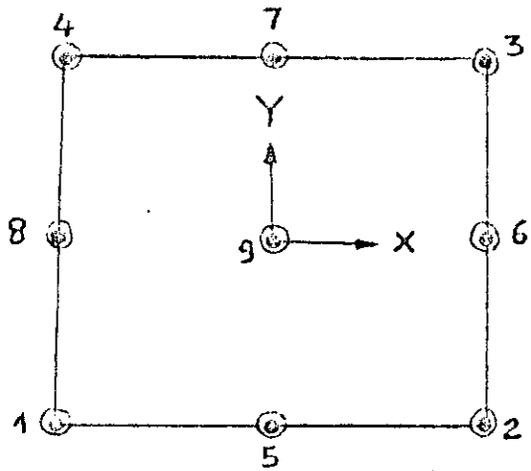
pour le noeud central

$$S_i = (1/2)(1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (4-6)$$

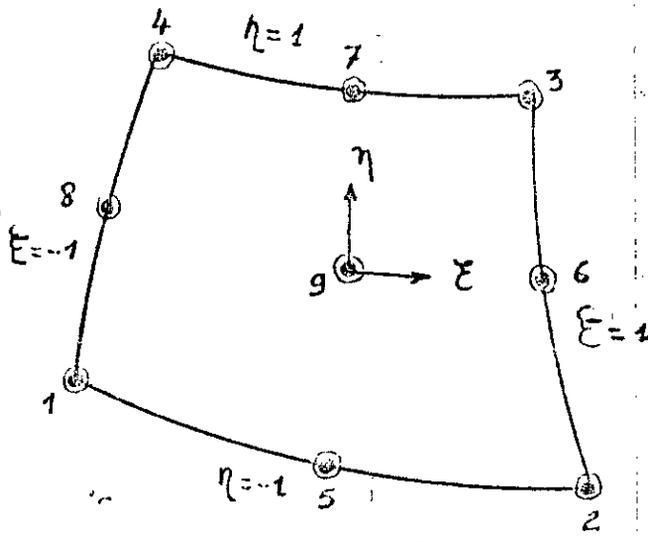
Dans ces fonctions de formes  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées locales normalisées et

$$\xi_0 = \xi \cdot \xi_1 \quad \text{et} \quad \eta_0 = \eta \cdot \eta_1 \quad (4-7)$$

où  $\xi_1$  et  $\eta_1$  sont des coordonnées naturelles des noeuds i .



A) Element non déformé



B) Element déformé

Figure( 4-33) Element plaque isoparamétrique à 9 noeuds

#### 4-4 Modèle numérique

L'équation générale du mouvement s'écrit comme suit :

$$[M] \{ \ddot{q} \} + [K] \{ q \} = \{ F \} \quad (4-10)$$

où  $[M]$  et  $[K]$  sont la matrice de masse et matrice de rigidité respectivement .

$\{ \ddot{q} \}$  et  $\{ q \}$  sont les accélérations et déplacements nodaux  
 $\{ F \}$  est l'effort de contact dépendant du temps

L'équation (4-10) est couplée avec le mouvement de l'impacteur

$$m_b \ddot{q} = - F \quad (4-11)$$

où  $m_b$  : la masse de l'impacteur

Le processus de résolution sera explicité dans le paragraphe 4-4-5

##### 4-4-1 Matrice de rigidité

Dans la formulation isoparamétrique, on définit une transformation  $f$  bijective de l'élément réel à l'élément de référence. Cette transformation sera identique pour la géométrie (coordonnées des noeuds) et les déplacements et sera égale à l'interpolation nodale ( $s$ )

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n s_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n s_i(\xi, \eta) y_i$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = f \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

où  $f$  : est une transformation géométrique et bijective.

Avec,  $x_i, y_i$  sont les coordonnées des noeuds  $i$  de mme,

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n s_i(\xi, \eta) u_i ; \quad v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n s_i(\xi, \eta) v_i$$

o  $n$  = le nombre de noeuds .

Pour déterminer la rigidité de l'élément isoparamétrique , nous transformons l'expression de :

$$K^e = \int \int_{(\Omega)} B_i^T(x, y) D B_i(x, y) dx dy$$

du repère réel  $(x, y)$  au repère de référence  $(\eta, \xi)$  moyennant la matrice jacobienne  $[J]$

$$J = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n s_{i, \xi} x_i & \sum_{i=1}^n s_{i, \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n s_{i, \eta} x_i & \sum_{i=1}^n s_{i, \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

o la quantité  $x, \xi$  représente  $\partial x / \partial \xi$

la matrice élémentaire de rigidité devient,

$$K^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_i^T D B_i \det J d\xi d\eta \quad (4-14)$$

avec,  $B_i$  est la matrice associée au noeud  $i$

$$B_i = \begin{bmatrix} s_{i, x} & 0 \\ 0 & s_{i, y} \\ s_{i, y} & s_{i, x} \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

$$\text{Avec, } s_{i, x} = s_{i, \xi} \xi, x + s_{i, \eta} \eta, x$$

$$s_{i, y} = s_{i, \xi} \xi, y + s_{i, \eta} \eta, y \quad (4-16)$$

$$\text{et } dx dy = \det J d\xi d\eta$$

#### 4-4-2 Matrice masse

Avec le mme raisonnement fait pour [k], La matrice masse élémentaire sera:

$$M^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \det J d\xi d\eta \quad (4-17)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'élément

#### 4-4-3 Force de contact

La résolution de l'équation (4-10) nécessite la connaissance de la force  $f(t)$ , c'est la force de contact dynamique lors du choc. la connaissance de cette dernière d'une façon expérimentale est très difficile si ce n'est pas impossible. on se contente alors de la déterminer d'une façon quasi-statique.

Le contact entre deux corps en général, et entre une sphère et une plaque a été étudié en premier par HERTZ [9]. cette loi relie la force de contact  $F(t)$  à la pénétration  $\alpha$  donnée par:

$$F = K \alpha^{3/2} \quad (4-18)$$

où

$$K = \frac{4}{3} (R_s)^{1/2} \left[ \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} - \frac{1 - \nu_t^2}{E_t} \right]^{-1} \quad (4-19)$$

Dans la relation (4-2)  $R_s$  est rayon de la sphère et  $E_s$ ,  $\nu_s$  et  $E_t$ ,  $\nu_t$  sont les modules de YOUNG et les coefficients de Poisson du sphère et de la plaque respectivement .

La validité de la puissance 3/2 donnée par l'équation (4-1) est vérifiée par WILLIS [12].

Le coefficient  $K$  de la loi de contact modifiée s'écrit :

$$K = \frac{4}{3} (R_s)^{1/2} \left[ \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} - \frac{1}{E_2} \right]^{-1} \quad (4-20)$$

Celui-ci est utilisé par SUN [13] pour évaluer l'énergie d'endommagement des matériaux composites par l'impact .

Dans cette équation  $R_s$ ,  $\nu_s$ ,  $E_s$  sont le rayon, le coefficient de Poisson et le module de YOUNG de l'impacteur respectivement.

$E_2$  est le module de YOUNG transversal par rapport à la direction des fibres .Le coefficient  $K$  a été déterminé expérimentalement par

#### 4-4-2 Matrice masse

Avec le mme raisonnement fait pour [k], La matrice masse élémentaire sera:

$$M^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \det J d\xi d\eta \quad (4-17)$$

où  $\rho$  est la masse volumique de l'élément

#### 4-4-3 Force de contact

La résolution de l'équation (4-10) nécessite la connaissance de la force  $f(t)$ , c'est la force de contact dynamique lors du choc. la connaissance de cette dernière d'une façon expérimentale est très difficile si ce n'est pas impossible. on se contente alors de la déterminer d'une façon quasi-statique.

Le contact entre deux corps en général, et entre une sphère et une plaque a été étudié en premier par HERTZ [9]. cette loi relie la force de contact  $F(t)$  à la pénétration  $\alpha$  donnée par:

$$F = K \alpha^{3/2} \quad (4-18)$$

où

$$K = \frac{4}{3} (R_s)^{1/2} \left[ \frac{1 - \nu_s}{E_s} + \frac{1 - \nu_t}{E_t} \right]^{-1} \quad (4-19)$$

Dans la relation (4-2)  $R_s$  est rayon de la sphère et  $E_s, \nu_s$  et  $E_t, \nu_t$  sont les modules de YOUNG et les coefficients de Poisson du sphère et de la plaque respectivement .

La validité de la puissance 3/2 donnée par l'équation (4-1) est vérifiée par WILLIS [12].

Le coefficient  $K$  de la loi de contact modifiée s'écrit :

$$K = \frac{4}{3} (R_s)^{1/2} \left[ \frac{1 - \nu_s}{E_s} + \frac{1}{E_2} \right]^{-1} \quad (4-20)$$

Celui-ci est utilisé par SUN [13] pour évaluer l'énergie d'endommagement des matériaux composites par l'impact .

Dans cette équation  $R_s, \nu_s, E_s$  sont le rayon, le coefficient de Poisson et le module de YOUNG de l'impacteur respectivement.

$E_2$  est le module de YOUNG transversal par rapport à la direction des fibres .Le coefficient  $K$  a été déterminé expérimentalement par

SUN [14].

En tenant compte des déformations permanentes, l'équation

$$F = F_m \left( \frac{\alpha - \alpha_o}{\alpha_m - \alpha_o} \right) \quad (4-21)$$

proposée par CROOK [15] est utilisée pour la modélisation de déchargement o

$F_m$  : L'effort maximum ou le déchargement commence.

$\alpha_o$  : La pénétration permanente dans le cycle de déchargement

$\alpha_m$  : la pénétration maximale

L'équation (4-4) peut tre écrite sous la forme :

$$F = S (\alpha - \alpha_o)^2 \quad (4-22)$$

où, 
$$S = \frac{F_m}{(\alpha_m - \alpha_o)^2} \quad (4-23)$$

Actuellement, YANG et SUN [16] proposent une valeur critique de pénétration  $\alpha_{cr}$ .

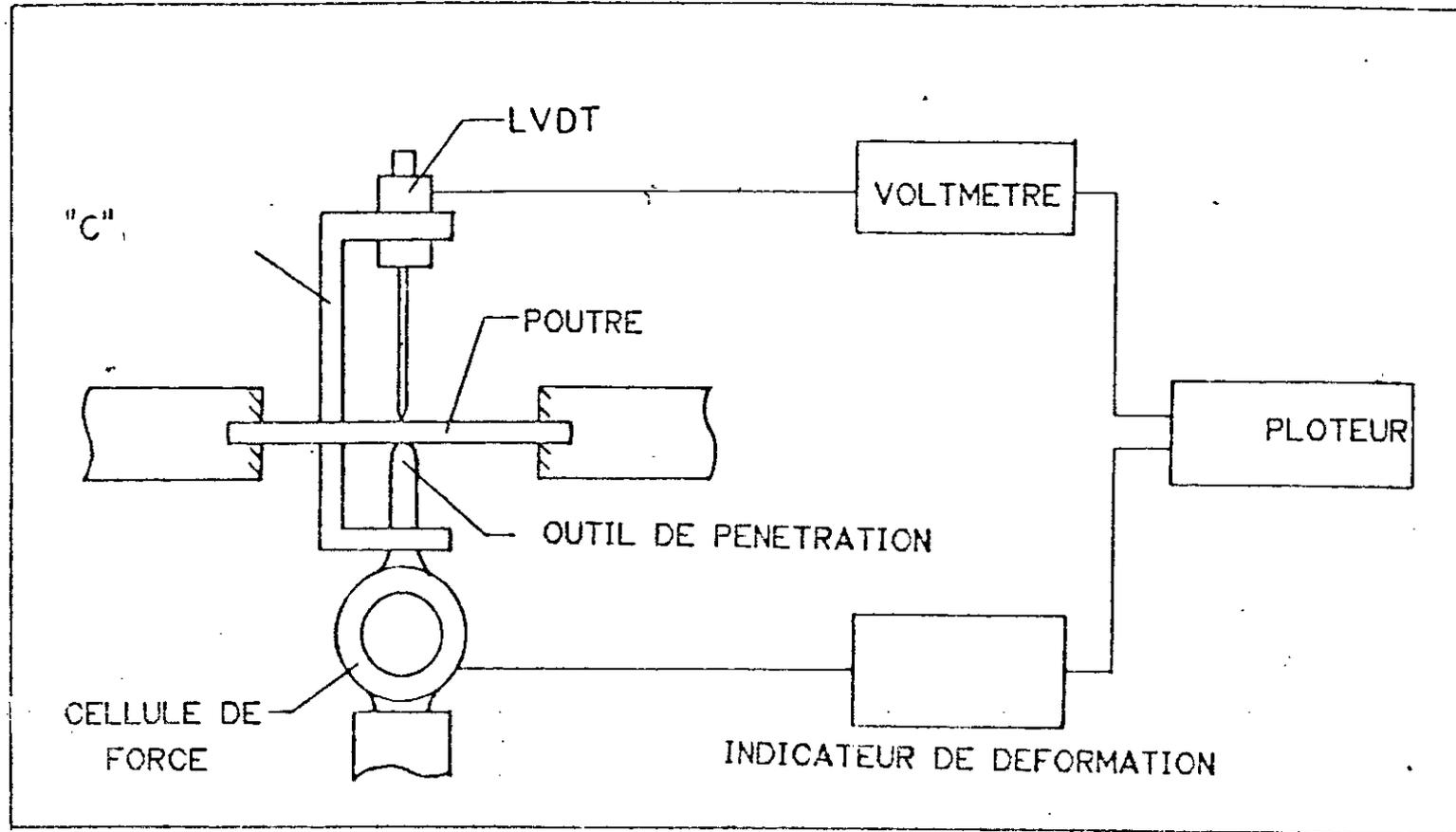
$$\alpha_{cr} = \frac{K}{S} \quad (4-24)$$

cette valeur est une constante de matériau donné et grandeur de pénétrateur donné .

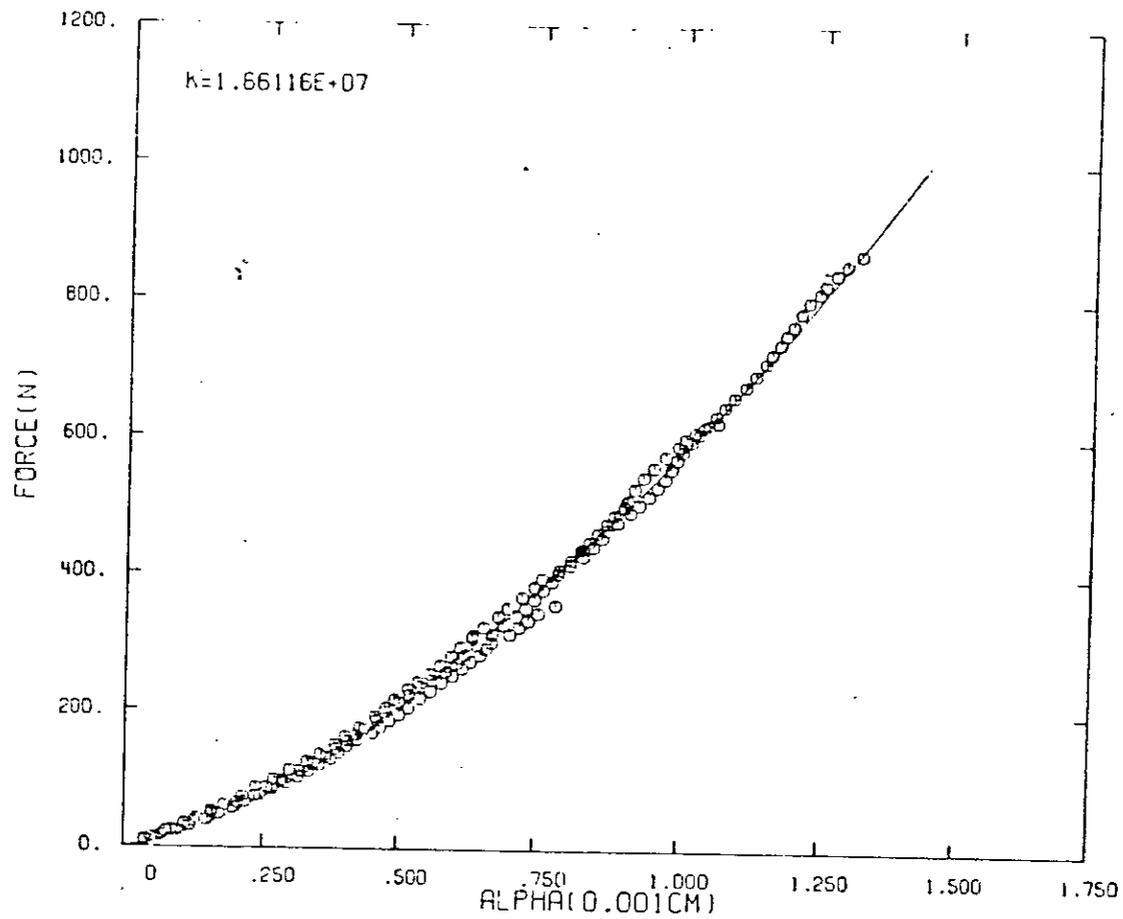
Il est constaté aussi que  $q = 2/5$  pour le déchargement est valable et la relation entre  $\alpha_o$  et  $\alpha_m$  devient :

$$\frac{\alpha_o}{\alpha_m} = 1 - \left( \frac{\alpha_{cr}}{\alpha_m} \right)^{2/5} \quad \text{pour } \alpha > \alpha_{cr} \quad (4-25)$$
$$\alpha_o = 0 \quad \text{pour } \alpha_m \leq \alpha_{cr}$$

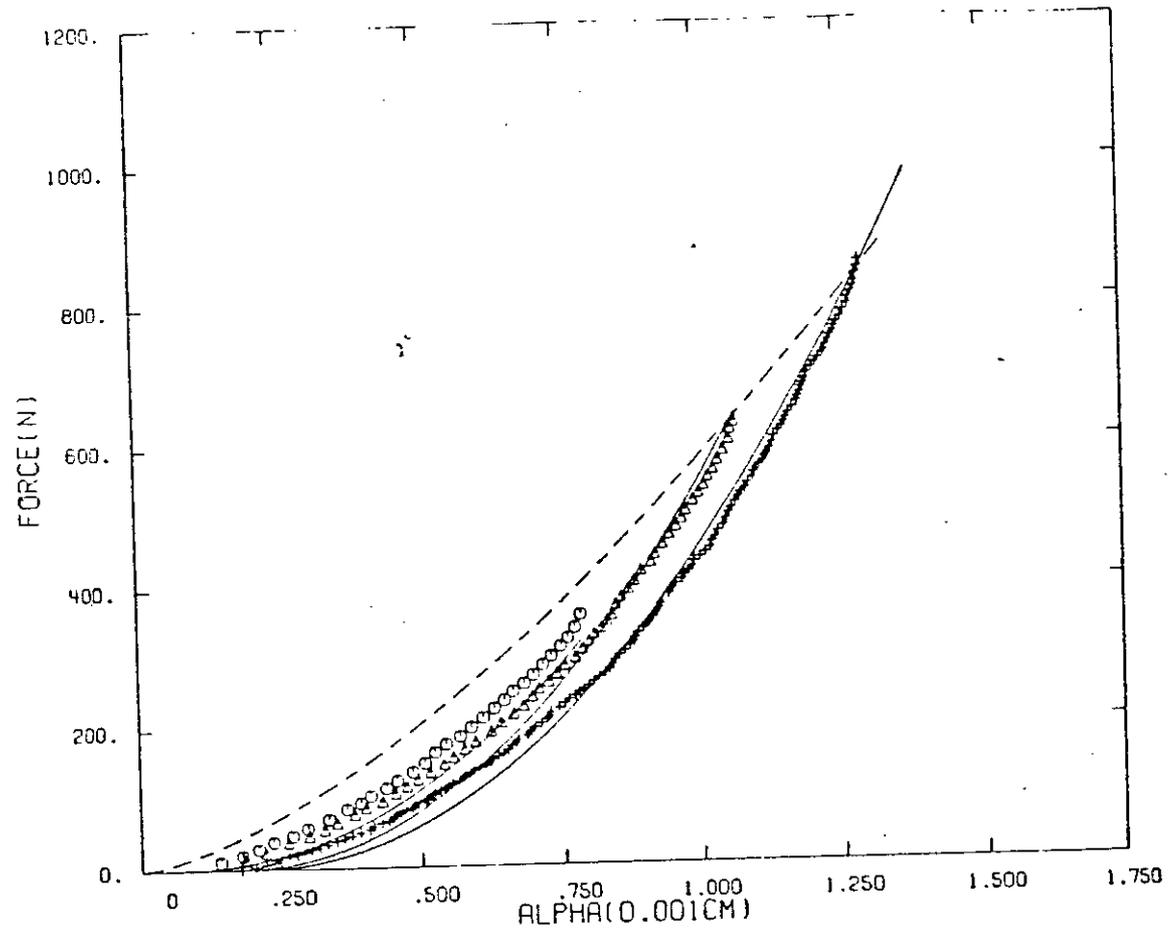
Ainsi, les lois de pénétration sont déterminées statiquement. La figure(4-34) représente schématiquement le montage pour la mesure de la force de contact. Le modèle expérimental est constitué d'un transducteur différentiel à variable liniaire(LVDT) connecté à une cellule de charge à l'aide d'un (C) de manière à enregistrer seulement le déplacement relatif entre l'outil de pénétration et la plaque en composite. La charge est générée par un système pneumatique. L'outil de pénétration est une bille en acier ayant le mme diamètre que celle utilisée dans les expériences de choc. La relation force-pénétration pour les cycles de chargement et de



Figure( 4-34 ) Schema de test de pénétration



Figure( 4-35 ) Courbe de charge pour ( $n=3/2$ )



Figure( 4-36 ) Courbe de décharge pour (q=2.5)

l'instant  $t=0$

$$\dot{q}_0 = M^{-1}(F_0 - Kq_0) \quad (4-27)$$

L'algorithme de la methode de Newmark implicite a été développé par Hughes et Liu [21] o les termes sont écrits sous forme des valeurs prédicteur - correcteur

$$q_{n+1} = q_{n+1}^p + \Delta t \beta \dot{q}_{n+1} \quad (4-28)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1}^p + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1} \quad (4-29)$$

Les valeurs prédicteurs sont donnés par:

$$q_{n+1}^p = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2/2(1 - 2\beta)\ddot{q}_n \quad (4-30)$$

$$\dot{q}_{n+1}^p = \dot{q}_n + \Delta t(1-\gamma)\ddot{q}_n \quad (4-31)$$

$q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}$ : valeurs correcteurs

$q_{n+1}^p, \dot{q}_{n+1}^p$ : valeurs prédicteurs

Les accélérations ont été obtenues par la forme (6)

$$\ddot{q}_{n+1} = (q_{n+1} - q_{n+1}^p) / (\beta \Delta t^2) \quad (4-32)$$

(1)  $i=0$  conteur d'itération

(2) entrer la phase predicteur

$$q_{i+1} = q_{n+1}^p \quad (4-33)$$

$$\dot{q}_{i+1} = \dot{q}_{n+1}^p \quad (4-34)$$

$$\ddot{q}_{i+1} = 0 \quad (4-35)$$

(3) Résoudre le problème statique effectif

$$K^* \Delta q^i = r^i \quad (4-36)$$

o, la matrice de rigidité effective est:

$$K^* = M/(\beta \Delta t^2) + K$$

et le vecteur force résiduel est donné par:

$$r^i = F_{n+1} - M \dot{q}_{n+1}^i - K q_{n+1}^i \quad (4-37)$$

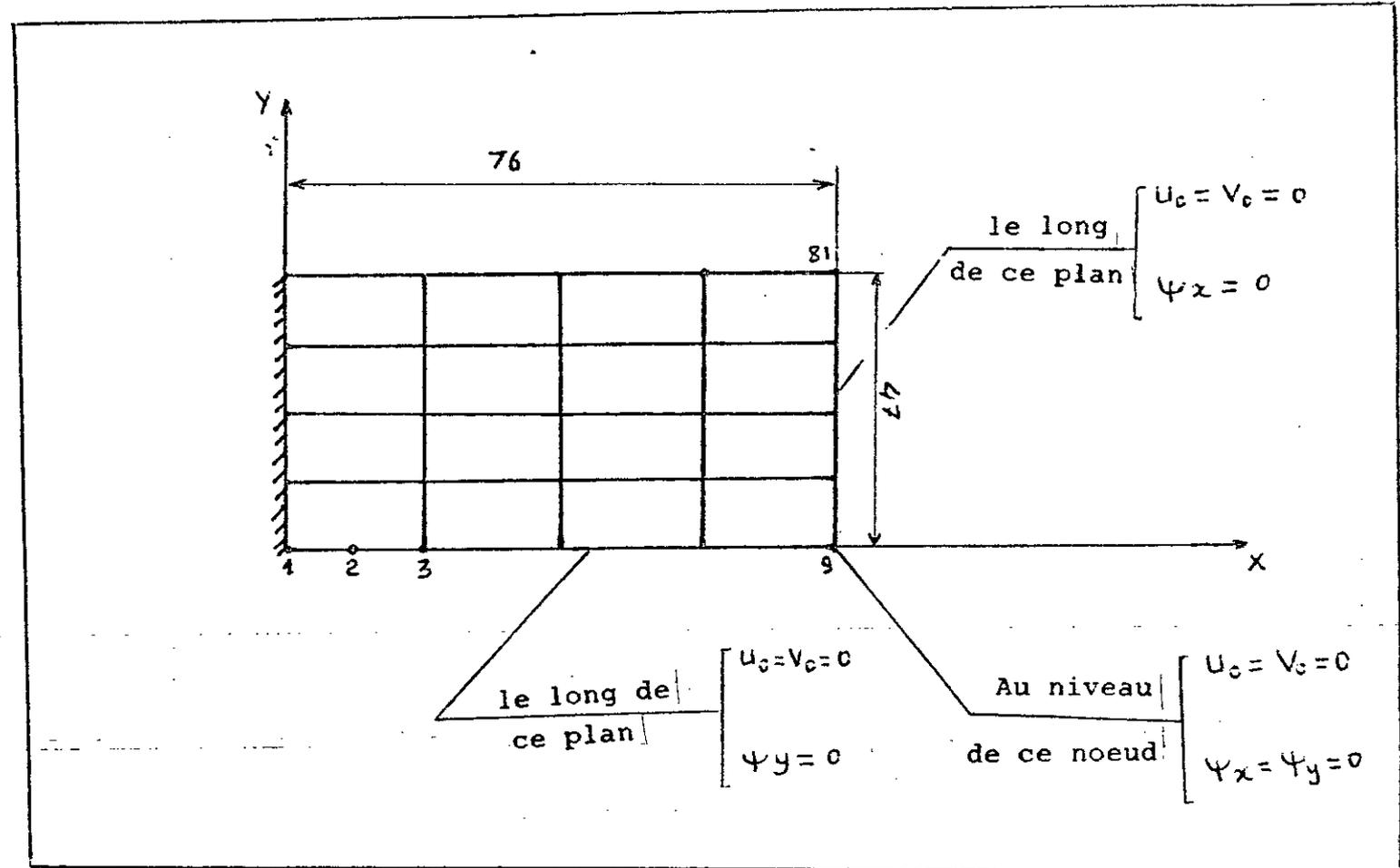


Figure (4-37) Type de maillage pour un quart de plaque

(4) exécution de la phase correcteur

$$q_{n+1}^{i+1} = q_{n+1}^i + \Delta q^i \quad (4-38)$$

$$\dot{q}_{n+1}^{i+1} = (q_{n+1}^{i+1} - q_{n+1}^p) / (\beta \Delta t^2) \quad (4-39)$$

$$\dot{q}_{n+1}^{i+1} = \dot{q}_{n+1}^p + \Delta t \gamma \dot{q}_{n+1}^{i+1} \quad (4-40)$$

(5) Si la convergence n'est pas satisfaisante  $i=i+1$  et  
goto (3)

(6) Solution à l'instant  $t_{n+1}$

$$q_{n+1} = q_{n+1}^{i+1} \quad (4-41)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1}^{i+1} \quad (4-42)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_{n+1}^{i+1} \quad (4-43)$$

Pour utiliser l'incrément de temps suivant :  $n = n+1$  goto (1)

#### 4-4-5 Solution des équations couplées

La solution des équations de mouvement de la plaque et de la bille est faite en utilisant la même procédure de la méthode de NEWMARK

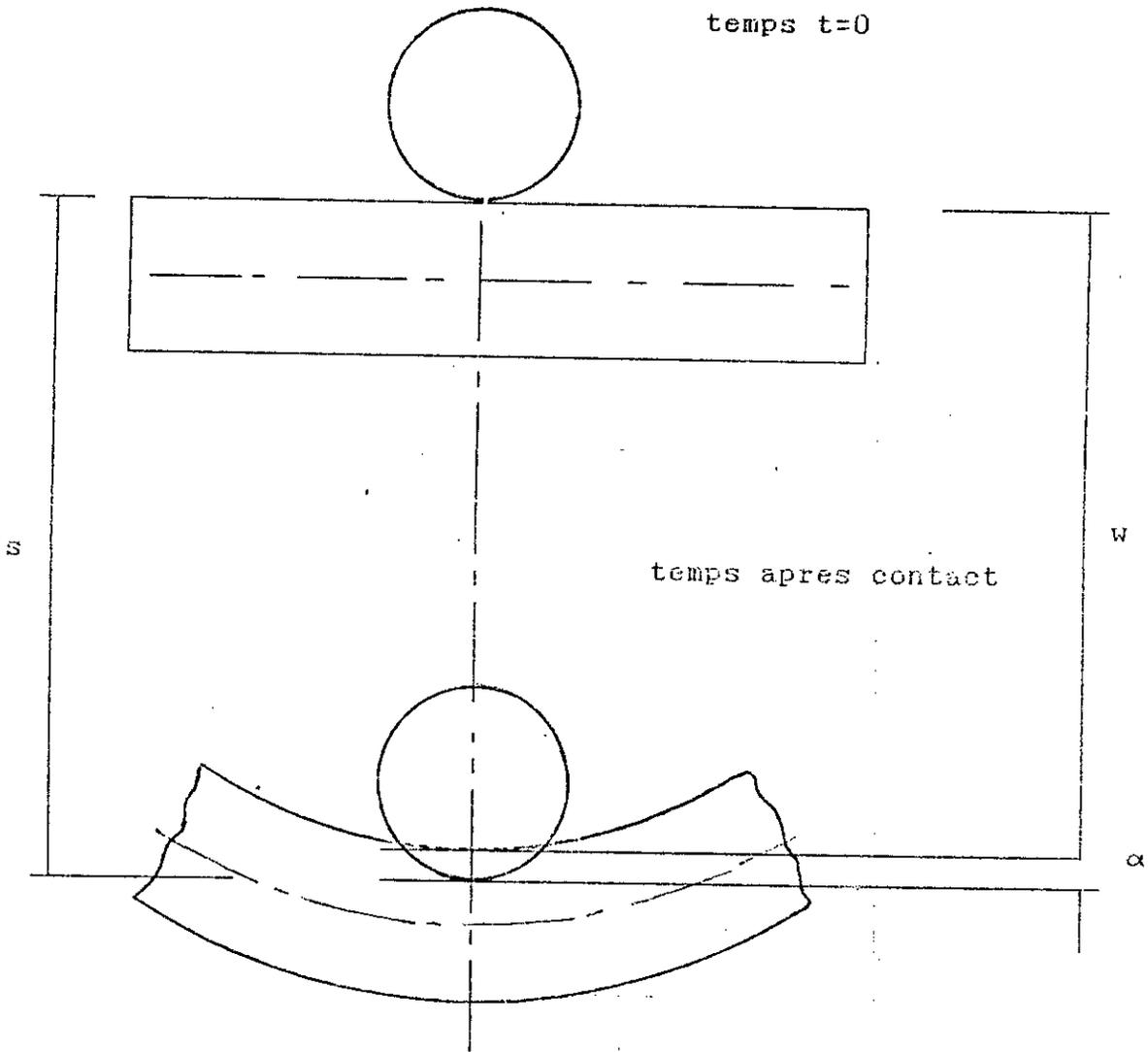


figure ( 4-38 ) Impact de la sphère sur la plaque

selon la figure ( 4-38 ),

$$\alpha = s - w(x_0, y_0)$$

( 4-44 )

L'équation du mouvement durant la pénétration est donnée par:

$$m_b \dot{s}^* = -k[s - w(x_0, y_0)]^{3/2} \quad (4-45)$$

o,  $m_b$  est la masse de l'impacteur.

Le mouvement de la bille est nonlinéairement couplé avec celle de la plaque, les équations 4-44 et 4-45 ont été résolues simultanément par la procédure suivante:

- (1)  $i=0$  contre d'itérations
- (2) entrer la phase prédicteur

$$s_{n+1} = s_{n+1}^p = s_n + \Delta t \dot{s}_n + \Delta t^2 (1 + 2\beta) \ddot{s}_n / 2 \quad (4-46)$$

$$\dot{s}_{n+1} = \dot{s}_{n+1}^p = \dot{s}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{s}_n \quad (4-47)$$

$$q_{n+1} = q_{n+1}^p = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 (1 - 2\beta) \ddot{q}_n / 2 \quad (4-48)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1}^p = \dot{q}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{q}_n \quad (4-49)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = 0 \quad (4-50)$$

$$\dot{s}_{n+1}^* = - (k/m_b) [s_{n+1}^* - w_{n+1}]^{3/2} \quad (4-51)$$

$$F_{n+1}^* = - m_b \ddot{s}_{n+1} \quad (4-52)$$

- (3) Résoudre le problème statique effectif

$$K^* \Delta q^1 = r^1 \quad (4-53)$$

o, la matrice de rigidité effective est:

$$K^* = M / (\beta \Delta t^2) + K \quad (4-54)$$

et le vecteur force résiduel est donné par:

$$r^i = F_{n+1} - M \dot{q}_{n+1}^i - Kq_{n+1}^i \quad (4-55)$$

(4) exécution de la phase correcteur

$$q_{n+1}^{i+1} = q_{n+1}^i + \Delta q^i \quad (4-56)$$

$$\dot{q}_{n+1}^{i+1} = (q_{n+1}^{i+1} - q_{n+1}^p) / (\beta \Delta t^2) \quad (4-57)$$

$$\ddot{q}_{n+1}^{i+1} = \ddot{q}_{n+1}^p + \Delta t \gamma \dot{q}_{n+1}^{i+1} \quad (4-58)$$

$$s_{n+1}^{i+1} = s_{n+1}^p + \Delta t^2 \beta \ddot{s}_{n+1}^{i+1} \quad (4-59)$$

$$\ddot{s}_{n+1}^{i+1} = -(k/m_b) [s_{n+1}^{i+1}]^{3/2} \quad (4-60)$$

$$F_{n+1}^{i+1} = -m_b \ddot{s}_{n+1}^{i+1} \quad (4-61)$$

(5) Si la convergence n'est pas satisfaisante  $i=i+1$  et goto (3)

(6) Solution à l'instant  $t_{n+1}$

$$q_{n+1} = q_{n+1}^{i+1} \quad (4-62)$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_{n+1}^{i+1} \quad (4-63)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_{n+1}^{i+1} \quad (4-64)$$

$$s_{n+1} = s_{n+1}^{i+1} \quad (4-65)$$

$$\dot{s}_{n+1} = \dot{s}_{n+1}^{i+1} = \dot{s}_{n+1}^p + \Delta t \gamma \ddot{s}_{n+1}^{i+1} \quad (4-66)$$

$$\ddot{s}_{n+1} = \ddot{s}_{n+1}^{i+1} \quad (4-67)$$

Pour utiliser l'incrément de temps suivant :  $n = n+1$   
goto (1)

#### 4-5 Résultats expérimentaux et numériques

Les déformations dynamiques sont obtenues à partir du matériau (0/90)<sub>s.o</sub> les caractéristiques mécaniques sont:

$$E1 = 151.60 \text{ Gpa}$$

$$E2 = 8.9 \text{ Gpa}$$

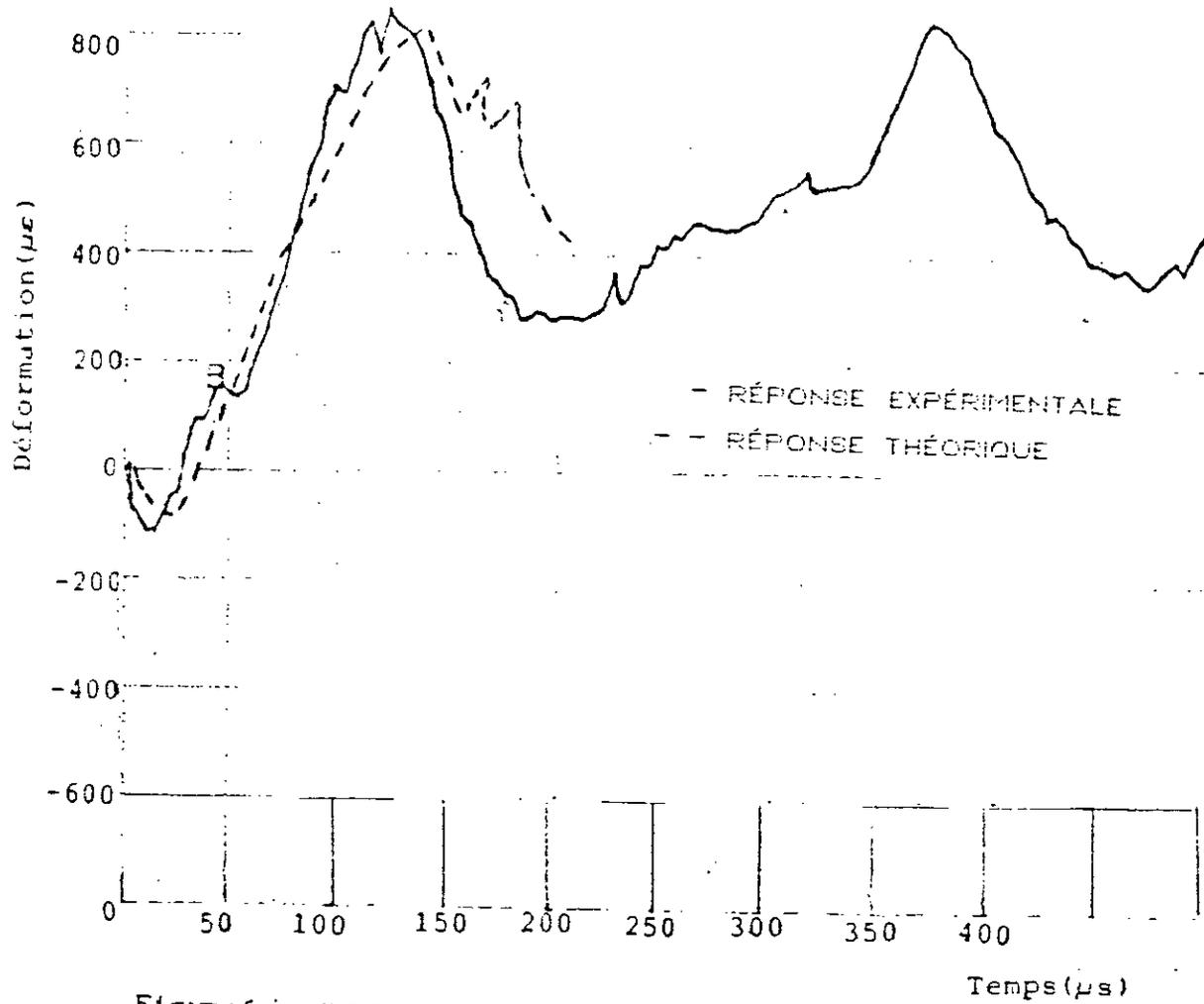
$$G12 = 2.1 \text{ Gpa}$$

$$\nu_{12} = 0.39$$

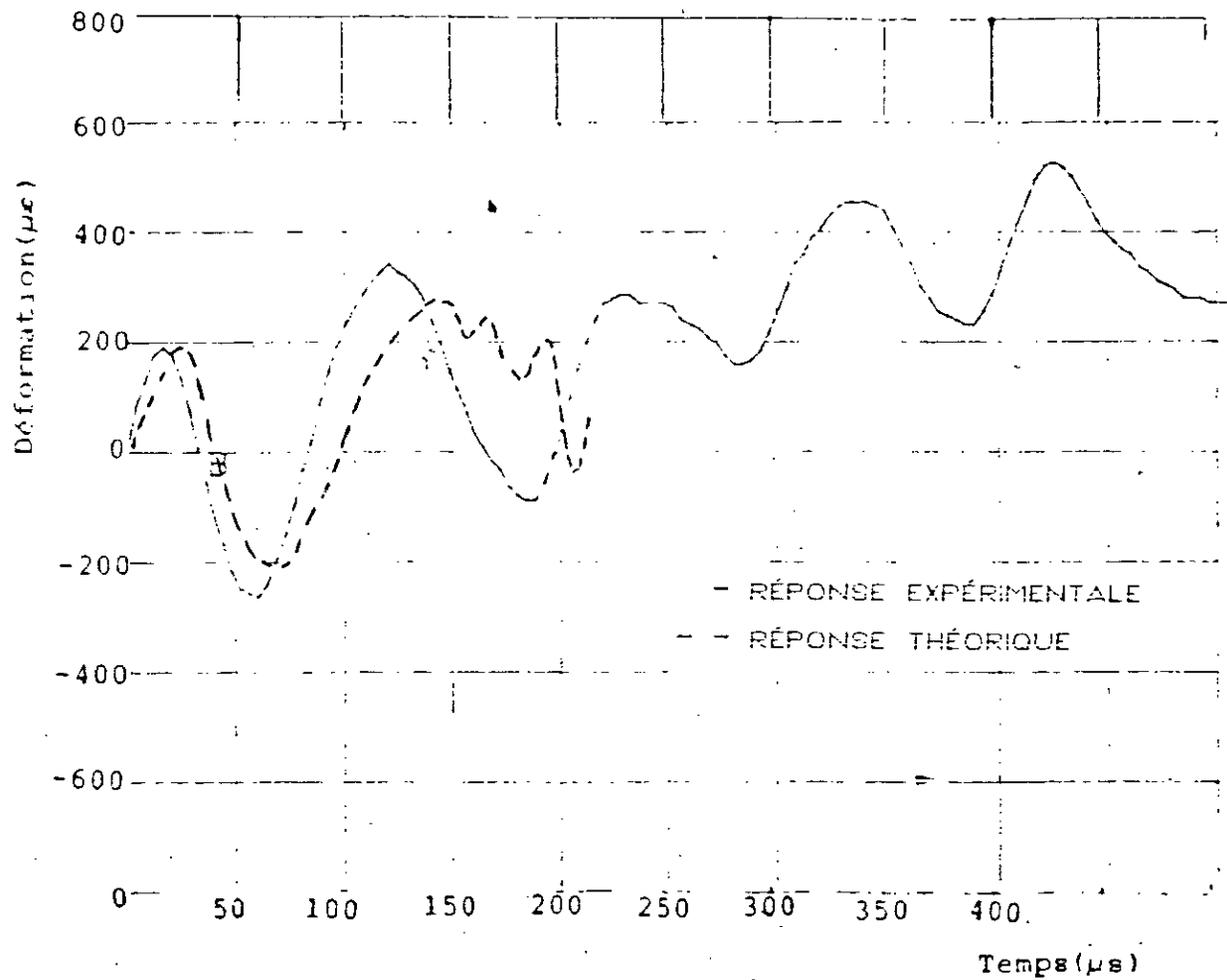
Deux types de conditions aux limites "fixe-fixe" et "libre-libre" ont été considérés. Le quart de la plaque est modélisé par 16 éléments, soit 81 noeuds. L'incrément de temps optimal qui assure la convergence est  $0.2 \mu\text{s}$ . Les figures (4-39) à (4-40) montrent les déformations dynamiques suivant l'axe  $ox$  représentées par la jauge n.1 et les figures 4-41 et 4-42 montrent les déformations dynamiques suivant l'axe  $oy$  représentés par la jauge n.3.

La solution donnée par la méthode des éléments finis est les résultats expérimentaux sont proches. Néanmoins on constate des oscillations après  $150 \mu\text{s}$  causées par les ondes produites par les conditions aux limites .

16



Figure(4-33) Réponse expérimentale et théorique de la jauge N°1 pour le cas libre-libre du matériau (0/90)s



Figure(4-40) Réponse expérimentale et théorique de la jauge N°1  
pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)s

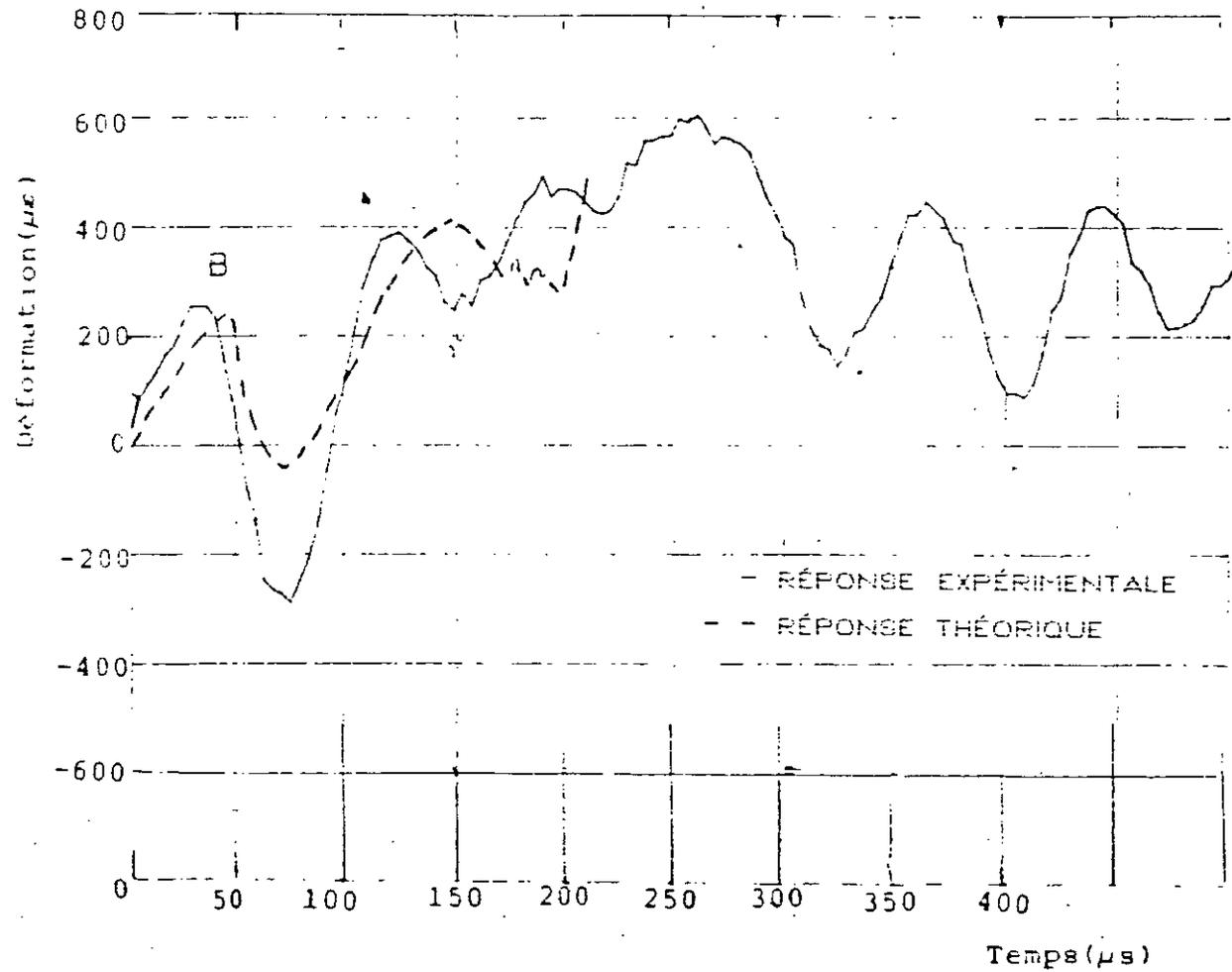
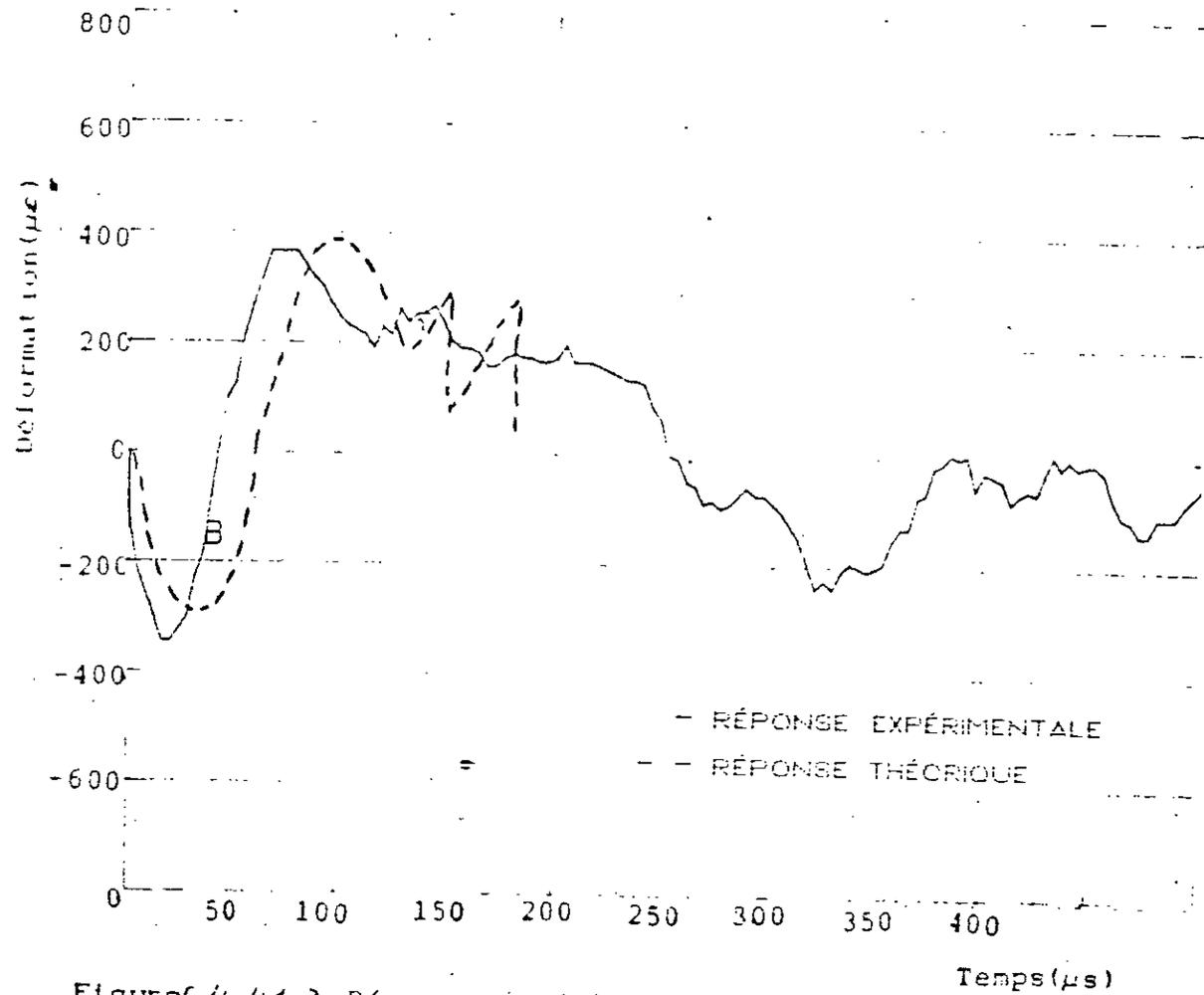


Figure (4-42) Réponse expérimentale et théorique de la jauge N° 3 pour le cas fixe-fixe du matériau (0/90)s



Figure( 4-41 ) Réponse expérimentale et théorique de la jauge N°3  
pour le cas libre-libre du matériau (10/90)

## C O N C L U S I O N

Dans cette étude nous nous sommes proposés d'étudier la réponse dynamique due à l'impact des matériaux composites fabriqués par l'E.N.P.C de Chlef.

En premier, nous avons réalisé des essais de caractérisation pour ces matériaux tel que, le mat, l'unidirectionnel et le tissu. Cette caractérisation a permis l'obtention des propriétés mécaniques telles que: le module d'élasticité, le coefficient de poisson et le module de cisaillement. Les propriétés mécaniques ainsi déterminées expérimentalement sont comparées à certaines méthodes analytiques et plus particulièrement au modèle théorique de Cox où le pourcentage d'erreur est 2.1% .

Les résultats de caractérisations nous mènent à conclure que l'unidirectionnel résiste plus dans les sollicitations de traction et que le tissu résiste plus dans les sollicitations de torsion. En deuxième, on s'est intéressé à la simulation expérimentale et numérique de la réponse dynamique due au choc.

Pour ce fait, un dispositif expérimental a été mis au point. Les déformations dynamiques sont obtenues alors à différentes positions par rapport au point d'impact et à des vitesses allant jusqu'à 4m/s pour des plaques de trois matériaux (unidirectionnel, tissu et mat) . Le modèle numérique utilisé est basé sur la méthode des éléments finis avec des éléments types à 9 noeuds où chaque noeud comprend 5 degrés de liberté. A cause de la symétrie, seul le quart de la plaque a été modélisé par 16 éléments . La résolution des équations est faite par la méthode intégrale de Newmark avec l'utilisation d'une force de contact.

L'étude de la convergence montre que 0.2  $\mu$ s est l'incrément de temps optimal. Les déformations dynamiques obtenues expérimentalement et numériquement sont proches avec une déviation au delà du temps de contact.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] MOON F.C.

"A critical survey of wave propagation and impact in composite material" NASA CR - 121226 1973

[2] SUN C. T.

"Propagation of shock waves in anisotropic composite plates" Journal of composite materials vol 7 1973 pp. 366-382

[3] MOON F. C.

"Wave surface due to impact on anisotropic plates", Journal of composite materials vol 6 1972

[4] CHOW T. C.

"On the propagation of flexural waves in orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load " Journal of composite materials , vol 5 1971 pp 306-319

[5] SUN C. T. and HUANG S. N.

" Transverse impact problems by higher order beam finite element " computers & structures vol 5 1975 pp 297-303

[6] KIM B. S. and MOON F. C.

" impact induced stress waves in an anisotropic plate " A.I.A.A. journal vol 17 no 10 , 1979 pp 1126-1133

[7] DANIEL I. M. LIBER T. and LABEDZ R. H.

" wave propagation in transversely impacted composite laminates" Experimental mechanics, January 1979 pp 9-16

[8] TAKEDA, N. SEIRAKOWSKI, R.L and MALVERN, L.E.

"wave propagation experiments on ballistically impacted composite laminates ", journal of composite materials, vol 15, 1981, pp 157-174

[9] TIMOSHENKO, S.

" Theory of elasticity " MC GRAW HILL, NEW YORK, 3rd edition pp 409-420, 1970

[10] GOLDSMITH, W.

" Impact ", EDWARD ARNOLD, LONDON 1960

[11] YANG, S.H. and SUN, C.T.

" Indentation law for composite laminates ", ASTM.STP787, 1982, pp 425-449

[12] WLLIS, J.R.

" Contact of anisotropic bodies ", journal of mechanics and physics of solids, vol 14, 1966, pp 163-176

[13] SUN, C.T.

"An analytical method for evaluation of impact damage energy of laminated composites ", ASTM.STP617, 1977, pp 427-440

[14] SUN C.T. and CHATTOPADHAY, S.

" Dynamic response of anisotropic laminated plates under initial stress to impact of a mors ", journal of applied mechanics, vol 42, 1975, pp 693-698

[15] CROOK, A.W.

" A study of some impact between metal bodies by a piezoelectric method " proceedings of royal society, LONDON A212, pp 337-345, 1952

[17] YANG, S.H.

"Static and dynamic contact behavior of composite laminates" ,phd Dissertation, Purdue university, 1981

[18] WHITENEY, J.M. and PAGANO, N.J.

" Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", journal of applied mechanics, vol 37, 1970 pp 1031-1036

[19] BATH, K.L. and WILSON, E.L.

" Numerical methods in finite element analysis " Prentic-Hall, 1976

[20] ZIENKIEWICZ, O.C.

" The finite element method " MC. GRAW-HILL, book company. 1977.

[21] HUGHES, T.J.R and LIU, W.K.,

"Implicit-explicit finite elements in transient stability theory ".J.App. Mech., 45,pp.375-378, 1978

[22] RECHAK, S.

"Effect of adhesive layers on impact damage and dynamic response in composite laminates." Ph.D. Thesis, Purdue university, 1986

