

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Analyse des Coques Minces
à Symétrie Axiale
par la Méthode
des Eléments Finis

Proposé par :

Pr. B. TILIOUINE
M. DEMIDEM

Etudié par :

A. YAHIAOUI
K. SEMRA

Dirigé par :

Pr. B. TILIOUINE
M. DEMIDEM

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
«0»

وزارة التعليم العالي
Ministère de l'Enseignement Supérieur
«0»

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

»«

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Analyse des Coques Minces
à Symétrie Axiale
par la Méthode
des Eléments Finis

Proposé par :

Pr. B. TILIOUINE

Etudié par :

A. YAHIAOUI

K. SEMRA

Dirigé par :

Pr. B. TILIOUINE

PROMOTION : JUIN 1989

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَقُلْ رَبِّ اجْعَلْ لِي

عِلْمًا

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

D E D I C A C E S

- A la mémoire de mon père
- A ma mère
- A toute ma famille
- et
- A tous ceux qui me sont chers

K. SEMRA

- A la mémoire de mes grand-parents
- A mes parents
- A mes soeurs et frères
- A tous ceux qui me sont chers

A. YAHIAOUI

A tous nos amis et à tous ceux qui croient en dieu
et le craignent .

R E M E R C I E M E N T S

Nous remercions vivement notre professeur et promoteur M B. TILIOUINE pour nous avoir inspiré le sujet de notre travail de nous avoir estimé capable de le mener à bien et qui n'a ménagé aucun effort pour nous aider ,conseiller et diriger .

Nous remercions également à M M.DEMIDEM pour l'amitié et la serviabilité qu'il nous a manifesté .

Nos remerciements vont à tous ceux qui nous ont aidé dans l'élaboration de ce travail ,particulièrement le personnel du centre de calcul de l'ENP .

Que tous ceux qui ont contribué à notre formation trouvent ici , l'expression de nos profondes reconnaissances .

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
Ecole Nationale Polytechnique

Matériau: ..Genie..Civil....
Auteur: Pr..B..Tilouine.....
Ingénieur: A-YAHJADUI. S. K. SEMRA

مصلحة: الهندسة المدنية
موجه:
تصنيف: هندسة:

- الموضوع: دراسة القوقعات ذات تناظر محوري، باستعمال طريقة العناصر المحدودة.
الملخص: هذا المشروع يهدف الى اتمام برنامج آلي، يستخدم لتحليل الصفائح والقوقعات ذات تناظر محوري، باستعمال طريقة العناصر المحدودة، يسمح بتعيين المجاهيل الأساسية لهذه الهياكل تحت حملات ساكنة، وشروط تثبيت مختلفة.

Subject: ..Analyse...des...coques...à symétrie axiale par la méthode des éléments finis.

Résumé: Le présent projet a pour but l'élaboration d'un logiciel pour l'analyse des coques minces à symétrie axiale par la méthode des éléments finis, permettant la détermination des inconnues de base de ces structures sous chargement axisymétrique et différentes conditions de fixation.

Subject: Structural analysis of axi-symmetric shells by the finite element method

Abstract: The aim of this project is the development of a computer program for analysis of axi-symmetric thin shells under axi-symmetric loading, with different boundaries conditions

S O M M A I R E

INTRODUCTION

CHAPITRE I . THEORIE DES COQUES MINCES A SYMETRIE AXIALE

- I.1 Définition
- I.2 Hypothèses fondamentales
- I.3 Equations générales
- I.4 Théorie des cylindres et réservoirs
- I.5 Théorie des plaques annulaires

CHAPITRE II . ELEMENTS FINIS POUR LES COQUES DE REVOLUTION

Introduction

- II.1 Formulation par la méthode des déplacements
- II.2 critères de convergence
- II.3 Particularités de la méthode pour les coques de révolution

CHAPITRE III . DEVELOPPEMENT DE L'ELEMENT DE COQUE DE REVOLUTION

- III.1 Etapes de détermination de la matrice des raideurs
- III.2 Détermination de la matrice contrainte
- III.3 Vecteur charge élémentaire
 - 3.1 Introduction
 - 3.2 Charge surfacique

CHAPITRE IV . ORGANISATION DU LOGICIEL ELABORE

- IV.1 Introduction
- IV.2 Organigramme
- IV.3 Présentation détaillée du programme

CHAPITRE V . EXEMPLES ET APPLICATIONS

- V.1 Plaques annulaires avec diverses conditions aux limites
- V.2 Cylindre chargé radialement à son extrémité
- V.3 Réservoir cylindrique
- V.4 Dôme

CHAPITRE VI . CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Les coques constituent l'un des types de structures les plus difficiles à analyser. Pour notre part, nous considérerons uniquement le cas particulier des coques axisymétriques, qui permet un traitement simplifié adapté à cette géométrie.

En réalité il existe un grand nombre de problèmes d'étude du comportement des structures à symétrie axiale telles que les cuvettes sous pression, les corps et les têtes de fusées, les tours de refroidissement, les toits en forme de dôme, les réservoirs etc... où à la fois la géométrie et le chargement présentent une symétrie axiale.

On peut aisément étudier ce genre de problèmes par "la méthode des éléments finis". Cette méthode a été développée pour faciliter l'analyse des structures complexes, telles que celle mentionnée ci-dessus, qui sont trop compliquées pour être traitées par les techniques classiques de l'ingénieur, telles que l'approche de la mécanique des milieux continus.

Cette méthode est basée sur le concept que la structure réelle peut être idéalisée par un ensemble d'éléments finis, connectés entre-eux par des joints nodaux, dont le comportement peut être facilement compris.

CHAPITRE 1

THEORIE DES COQUES MINCES A SYMETRIE AXIALE

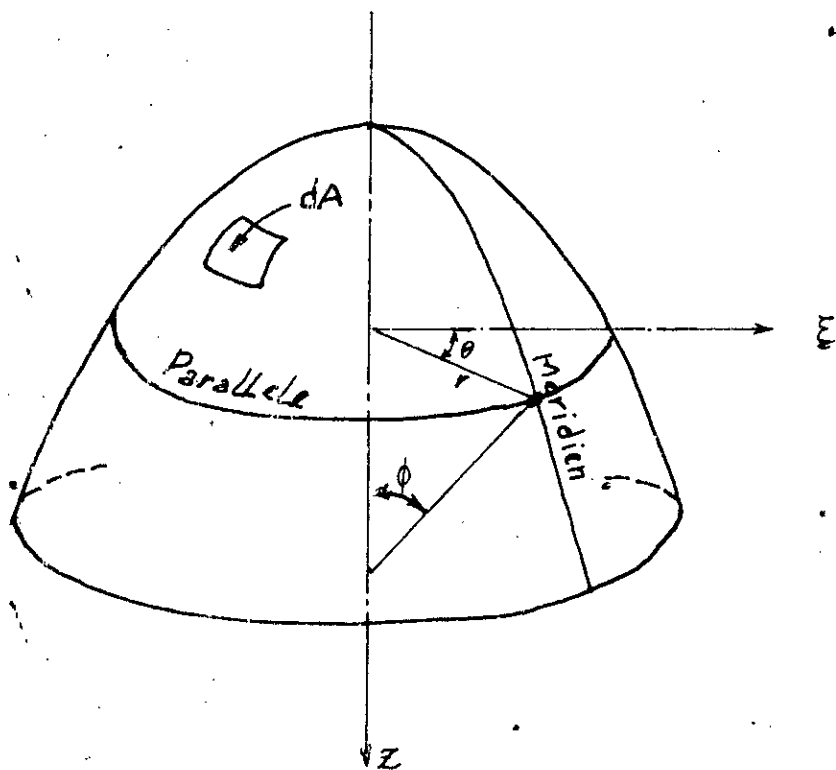
I-THEORIE DES COQUES MINCES AXI-SYMETRIQUES

I-1 DEFINITION

Une coque est un solide dont la géométrie est entièrement définie par la spécification de la forme de sa surface moyenne et de son épaisseur en chaque point :

Pour décrire la forme de la surface moyenne il est nécessaire de présenter quelques unes des propriétés géométriques importantes de la surface, une de ces propriétés peut être la symétrie axiale, on parle alors de surface de révolution.

Une surface de révolution est obtenue par rotation d'une courbe plane autour d'un axe situé dans le plan de cette courbe, cette dernière est appelée le "méridien" et son plan, le plan méridien. L'intersection de la surface avec des plans perpendiculaires à l'axe de révolution forme des cercles parallèles qu'on appelle les parallèles.



I-2 HYPOTHESES FONDAMENTALES:

- 1- L'épaisseur de la coque " t " est négligeable par rapport aux autres dimensions de la coque et par rapport aux rayons de courbure de la surface moyenne de la coque c'est à dire $t/R_{min} \ll 1$ par conséquent les termes $t/R \ll 1$.
- 2- Les éléments linéaires normaux à la surface moyenne avant déformation restent droit pendant la déformation et ne subissent ni extension ni contraction.
- 3- Les éléments normaux à la surface moyenne avant déformation restent normaux à la surface moyenne déformée.
- 4- La composante de contrainte normale à la surface moyenne est petite par rapport aux autres composantes de contrainte et peut être négligée dans les relations contrainte-déformations.
- 5- Les déplacements et les déformations sont petits, alors les quantités contenant des termes d'ordre supérieur sont négligées devant les termes de premier ordre dans les équations de déformations.
- 6- Le chargement et la géométrie présentent une symétrie axiale par rapport à l'axe de révolution de la coque.

I-3 EQUATIONS GENERALES

I-3-1 RELATIONS CONTRAINTES-EFFORTS:

Pour analyser les forces internes, on découpe dans la coque un élément infiniment petit délimité par deux paires de plans adjacents, perpendiculaires à la surface moyenne de la coque et qui contiennent ses courbures principales (fig I-1-a)

Les forces par unité de longueur des sections normales de la figure sont N_x et N_y

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot ds$$

$$ds = \theta \cdot (r_y - z) \cdot dz$$

$$ds = \frac{1}{r_y} \cdot (r_y - z) dz$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) \cdot dz \quad (I-1-a)$$

Par analogie on retrouve N_y

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \cdot dz \quad (I-1-a)$$

Les moments de flexion par unité de longueur des sections normales sont :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) \cdot dz$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \cdot dz$$

(I-1-b)

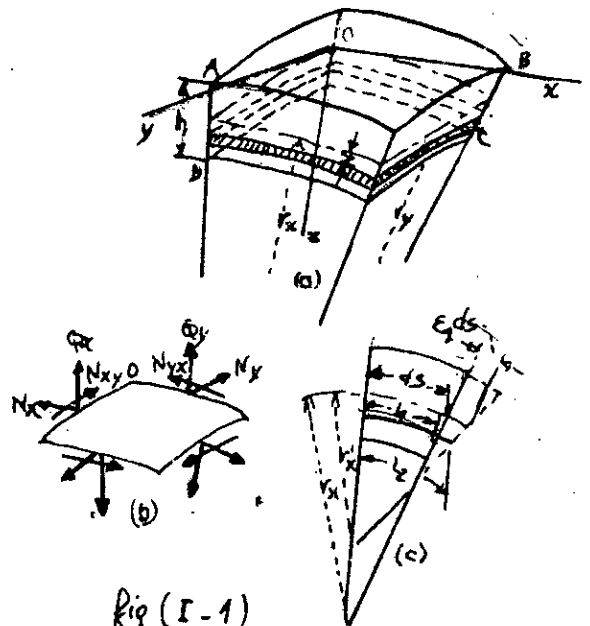


Fig (I-1)

I-3-2 RELATIONS DEPLACEMENTS-DEFORMATIONS:

Commençons par un cas simple, où pendant la flexion les faces latérales de l'élément ABCD tournent uniquement par rapport à leurs fibres d'intersection avec la surface moyenne. r'_x et r'_y étant les valeurs des rayons de courbure après déformation, les allongements unitaires sont :

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{dl_x}{l_x} = -\frac{z}{1-\frac{z}{r_x}} \cdot \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) \\ E_y &= \frac{dl_y}{l_y} = -\frac{z}{1-\frac{z}{r_y}} \cdot \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I-2-a)$$

En tenant compte du déplacement des côtés latéraux de l'élément parallèlement à eux-même du fait de la tension de la surface moyenne, E_1 et E_2 étant les allongements unitaires de la surface moyenne

$$E_x = \frac{l_2 - l_1}{l_1}$$

$$l_1 = ds \cdot \left(1 - \frac{z}{r_x} \right) \quad \text{et} \quad l_2 = ds \cdot \left(1 + E_1 \right) \left(1 - \frac{z}{r'_x} \right)$$

$$\text{donc } E_x = \frac{E_1}{1 - \frac{z}{r_x}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \cdot \left[\frac{1}{(1 - E_1) r'_x} - \frac{1}{r_x} \right] \quad (I-2-b)$$

Par analogie

$$E_y = \frac{E_2}{1 - \frac{z}{r_y}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r_y}} \cdot \left[\frac{1}{(1 - E_2) r'_y} - \frac{1}{r_y} \right]$$

En négligeant l'influence de E_1 et E_2 sur les courbures on obtient

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_1 - z \cdot \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) = E_1 - \chi_x \cdot z \\ E_y &= E_2 - z \cdot \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) = E_2 - \chi_y \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (I-2-c)$$

I-3-3 RELATIONS CONTRAINTES - DEFORMATIONS:

Dans le cas de l'état de contraintes tridimensionnel, les contraintes et les déformations sont reliées par la loi de HOOKE généralisée pour un matériau isotrope

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 1/E \cdot [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \epsilon_y &= 1/E \cdot [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \tau_{xz}/G \\ \epsilon_z &= 1/E \cdot [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \end{aligned} \quad (I-3)$$

E = Module d'élasticité de YOUNG

ν = Coefficient de POISSON

G = Module d'élasticité transversal

D'après les hypothèses 1, 4 et 6 on a

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$$

Les équations (I-3) deviennent :

$$\epsilon_x = 1/E \cdot [\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad (I-4)$$

$$\epsilon_y = 1/E \cdot [\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\epsilon_x + \nu\epsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\epsilon_y + \nu\epsilon_x]$$

(I-5)

En remplaçant ϵ_x et ϵ_y par les expressions (I-2-c) on a :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 - \gamma \cdot (\alpha_x + \nu\alpha_y)] \quad (I-6)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot [\epsilon_2 + \nu\epsilon_1 - \gamma \cdot (\alpha_y + \nu\alpha_x)]$$

En négligeant les quantités ∂/r_x et ∂/r_y et en remplaçant les expressions (I-6) dans les équations (I-1.a) et (I-1.b) nous avons :

$$N_x = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2)$$

$$N_y = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1)$$

(I-7)

$$M_x = -D \cdot (\chi_x + \nu \chi_y)$$

$$M_y = -D \cdot (\chi_y + \nu \chi_x)$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

D : c'est la rigidité de la coque à la flexion.

I-3-4 DEPLACEMENTS EN COORDONNÉES -POLAIRE

3-4-1 RELATIONS DEFORMATIONS-DEPLACEMENTS :

Dans le cas d'une déformation symétrique d'une coque, le faible déplacement d'un point peut se diviser en deux composantes : v suivant la tangente au méridien et w suivant la normale à la surface moyenne.

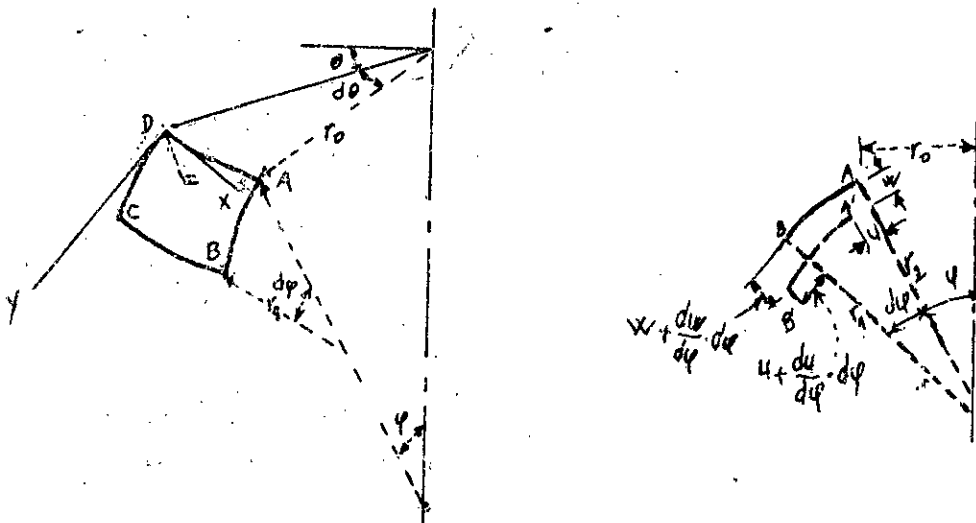


fig (I-2)

Soit un élément AB de la figure (I-2), on voit que l'augmentation de la longueur de l'élément due aux déplacements tangentiels u et $u + \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot d\varphi$ de ses extrémités est égale à $\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \cdot d\varphi$

Du fait des déplacements radiaux w des points A et B, la longueur de l'élément croît de $(r_1 + w) d\varphi - r_1 d\varphi = w \cdot d\varphi$

On peut négliger comme étant infiniment petit d'ordre supérieur, la variation de la longueur de l'élément due à la différence des déplacements radiaux des points A et B. Donc la variation totale de AB est $\frac{du}{d\varphi} \cdot d\varphi + w \cdot d\varphi$

$$\text{alors } E_{\varphi} = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{1}{r_1 \cdot d\varphi} \cdot \left(\frac{du}{d\varphi} \cdot d\varphi + w \cdot d\varphi \right)$$

$$E_{\varphi} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{du}{d\varphi} + \frac{w}{r_1} \quad (I-8)$$

Considérons un élément d'un parallèle, on voit que du fait des déplacements u et w , le rayon r_0 du parallèle augmente de $u \cdot \cos \varphi + w \cdot \sin \varphi$; la circonférence de celui-ci augmente proportionnellement à son rayon par suite:

$$E_{\theta} = \frac{1}{r_0} (u \cdot \cos \varphi + w \cdot \sin \varphi) \quad (I-9)$$

$$\text{Comme } r_0 = r_2 \cdot \sin \varphi$$

$$E_{\theta} = \frac{u}{r_2} \cotg(\varphi) + \frac{w}{r_2}$$

On considère la variation de courbure de l'élément de coque fig (I-2). Considérons les côtés supérieurs et inférieurs de cet élément, on sait que l'angle initial entre ces deux côtés est $d\varphi$. En raison du déplacement u , le long du méridien, le côté supérieur de l'élément tourne d'un arc u/r_1 par rapport à la perpendiculaire au

plan méridien. Du fait du déplacement w , le même côté tourne aussi d'un arc $dw/(r_1 \cdot d\varphi)$ par rapport au même axe. Par suite la rotation de ce côté de l'élément est:

$$\frac{u}{r_1} - \frac{dw}{r_1 \cdot d\varphi}$$

Pour le côté inférieur de l'élément, la rotation est:

$$\frac{u}{r_1} - \frac{dw}{r_1 \cdot d\varphi} + \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{u}{r_1} - \frac{dw}{r_1 \cdot d\varphi} \right) \cdot d\varphi \text{ donc } \chi_\varphi = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{d}{d\varphi} \cdot \left(\frac{u}{r_1} - \frac{dw}{r_1 \cdot d\varphi} \right) \quad (I-10)$$

(On néglige la déformation de la surface moyenne et l'on obtient la variation de courbure en divisant la variation d'angle par la longueur $r_1 \cdot d\varphi$ de l'arc)

Pour calculer la variation de courbure dans le plan perpendiculaire au méridien, on remarque qu'en raison de la symétrie de la déformation, chacun des côtés latéraux de l'élément de la coque fig (I-2) tourne dans son plan méridien d'un angle donné par (I-8).

Puisque la normale au côté latéral droit de l'élément fait un angle $(\pi/2) - \cos \varphi \cdot d\theta$ avec la tangente à l'axe y , la rotation de ce côté dans son propre plan a une composante, par rapport à l'axe y , égale à:

$$\left(\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\varphi} \right) \cos \varphi \cdot d\theta$$

Ceci résulte d'une variation de courbure

$$\chi_\theta = \left(\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\varphi} \right) \cdot \frac{\cos \varphi}{r_2}$$

comme $r_2 = \frac{r_0}{\sin \varphi}$

$$\chi_\theta = \left(\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 \cdot d\varphi} \right) \cdot \frac{\cos \varphi}{r_0} \quad (I-11)$$

Donc les relations sont:

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{dU}{d\varphi} + \frac{w}{r_1}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{U}{r_2} \cos\varphi + \frac{w}{r_2}$$

(I-12)

$$\chi_{\varphi} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{U}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\varphi} \right)$$

$$\chi_{\theta} = \frac{\cos\varphi}{r_0} \cdot \left(\frac{U}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\varphi} \right)$$

3-4-2 RELATIONS CONTRAINTES DEFORMATIONS:

$$N_{\varphi} = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_{\varphi} + \nu \cdot \varepsilon_{\theta})$$

$$N_{\theta} = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_{\theta} + \nu \cdot \varepsilon_{\varphi})$$

(I-13)

$$M_{\varphi} = -D \cdot (\chi_{\varphi} + \nu \cdot \chi_{\theta})$$

$$M_{\theta} = -D \cdot (\chi_{\theta} + \nu \cdot \chi_{\varphi})$$

Pour simplifier les calculs il est plus commode d'exprimer les relations précédentes en fonction des coordonnées locales de l'élément de coque.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_{\theta} \\ \chi_s \\ \chi_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dU}{ds} + w \cdot R_s \\ (w \cos\varphi + U \sin\varphi) / r \\ -\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{U}{R_s} \right) \\ -\frac{\sin\varphi}{r} \cdot \left(\frac{dw}{ds} - \frac{U}{R_s} \right) \end{bmatrix}$$

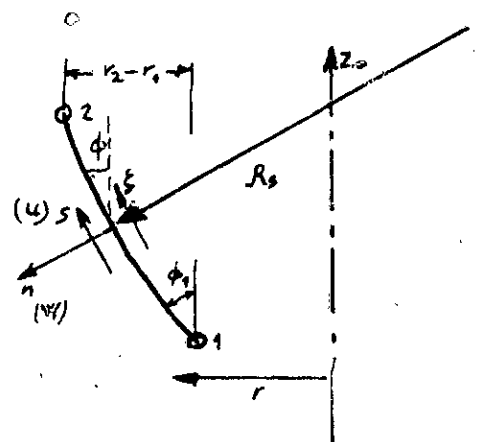


fig (I-3)

Dans ces expressions, l'angle ϕ est une fonction de s , à savoir :

$$\sin \phi = \frac{dr}{ds}$$

R_s est le rayon de courbure principal dans le plan méridien, alors que le deuxième rayon de courbure principal est donné par :

$$R_\theta = \frac{r}{\cos \phi} = r_2$$

Remarque :

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \phi \quad \text{donc} \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r_2} \tan \phi + \frac{w}{r_2} = \frac{u}{r} \sin \phi + \frac{w}{r} \cos \phi$$

Pour passer à l'élément droit il suffit de faire tendre R_s vers l'infini, on obtient alors les expressions suivantes :

$$\{E\} = \begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{du}{ds} \\ (w \cos \phi + u \sin \phi) / r \\ -\frac{d^2 w}{ds^2} \\ -\frac{\sin \phi}{r} \cdot \frac{dw}{ds} \end{bmatrix}$$

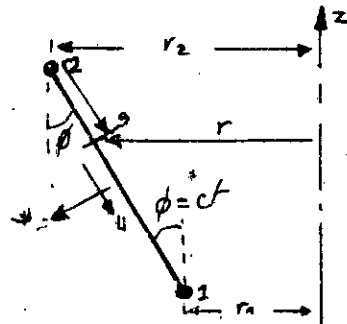


fig (I-4)

Les relations contraintes - déformations deviennent donc :

$$N_s = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\epsilon_s + \nu \epsilon_\theta)$$

$$N_\theta = \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_s)$$

(I-14)

$$M_s = -D \cdot (\chi_s + \nu \chi_\theta)$$

$$M_\theta = -D \cdot (\chi_\theta + \nu \chi_s)$$

I-3-5 EQUATIONS D'EQUILIBRES:

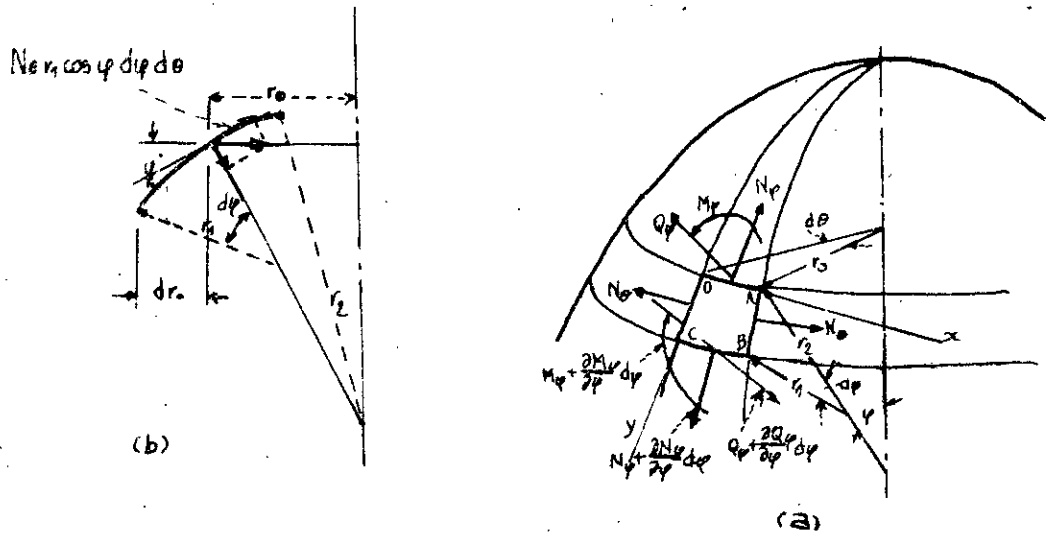


fig (I-5)

Considérons les conditions d'équilibre d'un élément découpé dans la coque par deux plans méridiens voisins et deux plans perpendiculaires à l'axe, figure (I-5).

L'intensité de la charge extérieure agissant dans le plan méridien se décompose, en cas de symétrie, en deux composantes Y et Z parallèles aux axes de coordonnées.

En multipliant ces composantes par la surface $r_1 \cdot r_2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$, on obtient les composantes de la charge extérieure agissant sur l'élément.

La somme des projections de toutes les forces sur la tangente au méridien (l'axe y) nous donne la 1^{re} équation:

$$\frac{d}{d\varphi} (N_{\varphi} \cdot r_0) - N_{\theta} \cdot r_1 \cdot \cos \varphi - Q_{\varphi} \cdot r_0 + Y \cdot r_1 \cdot r_0 = 0$$

La somme des projections sur l'axe z nous donne la 2^e équation:

$$N_{\varphi} \cdot r_0 + N_{\theta} \cdot r_1 \cdot \sin \varphi + \frac{d(Q_{\varphi} \cdot r_0)}{d\varphi} + Z \cdot r_1 \cdot r_0 = 0$$

Nous obtiendrons la troisième équation en considérant l'équilibre des moments de toutes les forces agissant sur

l'élément par rapport à la tangente au cercle parallèle figure (I-5.a) ce qui donne :

$$(M_{\varphi} + \frac{dM_{\varphi}}{d\varphi} d\varphi) (r_0 + \frac{dr_0}{d\varphi} d\varphi) d\theta - M_{\theta} r_1 \cos \varphi d\varphi d\theta - Q_{\varphi} r_2 \sin \varphi r_1 d\varphi d\theta = 0$$

Ce qui revient aussi à :

$$\frac{d}{d\varphi} (M_{\varphi} r_0) - M_{\theta} r_1 \cos \varphi - Q_{\varphi} r_1 r_0 = 0$$

Les équations d'équilibre sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (N_{\theta} r_0) - N_{\theta} r_1 \cos \varphi - Q_{\varphi} r_0 + Z r_1 r_0 &= 0 \\ N_{\varphi} r_2 + N_{\theta} r_1 \sin \varphi + \frac{d(Q_{\varphi} r_0)}{d\varphi} + Z r_1 r_0 &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} (M_{\varphi} r_0) - M_{\theta} r_1 \cos \varphi - Q_{\varphi} r_1 r_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I-15)$$

I-3-6 REDUCTION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE A DEUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU DEUXIEME ORDRE

Substituons les expressions des contraintes en fonction des déplacements dans les équations d'équilibre, pour obtenir trois équations à trois inconnues. L'effort tranchant peut être éliminé en substituant sa valeur tirée de la troisième équation dans les deux premières ; et nous obtenons deux équations à deux inconnues. Pour faciliter l'intégrale on fait le changement de variable suivant :

$$V = \frac{1}{r_1} \left(u + \frac{dw}{d\varphi} \right) \quad \text{et} \quad U = r_2 \cdot Q_{\varphi}$$

De la première équation d'équilibre :

$$N_{\varphi} = - Q_{\theta} \cotg \varphi = - \frac{1}{r_2} U \cotg \varphi \quad (I-16.a)$$

En considérant l'équilibre de la partie de coque située au dessus du parallèle défini par l'angle φ , si la coque n'est soumise à aucune charge :

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi + 2\pi r_0 Q_\varphi \cos \varphi = 0$$

De la deuxième équation :

$$Z = 0 \quad \text{et} \quad r_0 = r_2 \sin \varphi \quad \text{on a} :$$

$$N_\theta = -\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} (Q \cdot r_2) = -\frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} \quad (\text{I-16-b})$$

Mais savons que :

$$E\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} - \frac{W}{r_1} = \frac{1}{E \cdot h} (N_\varphi - \nu N_\theta) \quad (\text{I-17-a})$$

et

$$E\theta = \frac{1}{r_2} \cotg \varphi - \frac{W}{r_2} = \frac{1}{E \cdot h} (N_\theta - \nu N_\varphi) \quad (\text{I-17-b})$$

L'élimination de W nous donne :

$$\frac{dU}{d\varphi} - \nu \cotg \varphi = \frac{1}{E \cdot h} \left[(r_1 + \nu r_2) N_\varphi - (r_2 + \nu r_1) N_\theta \right] \quad (\text{I-17-c})$$

La différentiation de l'équation (17-b) donne :

$$\frac{dU}{d\varphi} \cotg \varphi - \frac{U}{\sin^2 \varphi} - \frac{dW}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{r_2}{E \cdot h} (N_\theta - \nu N_\varphi) \right] \quad (\text{I-17-d})$$

L'élimination de $\frac{dU}{d\varphi}$ de (16-a) et (16-b) donne :

$$U + \frac{dW}{d\varphi} = r_1 \cdot \nu = \frac{\cotg \varphi}{E \cdot h} \left[(r_1 + \nu r_2) N_\varphi - (r_2 + \nu r_1) N_\theta \right] - \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{r_2}{E \cdot h} (N_\theta - \nu N_\varphi) \right]$$

Substituons à N_φ et N_θ les expressions (16-a) et (16-b) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \frac{1}{r_1} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi - \frac{r_2}{r_1 \cdot h} \frac{dh}{d\varphi} \right] \cdot \frac{dU}{d\varphi} \\ & - \frac{1}{r_1} \left[\frac{r_2}{r_2} \cotg^2 \varphi - \nu - \frac{\nu}{h} \frac{dh}{d\varphi} \cotg^2 \varphi \right] \cdot U = E \cdot h \cdot \nu \end{aligned} \quad (\text{I-18})$$

Mais obtiendrons la seconde équation en faisant la même chose avec M_φ et M_θ et nous obtenons :

$$\frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \frac{1}{r_1} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi + 3 \frac{r_2}{r_1 h} \frac{dh}{d\varphi} \right] \frac{dV}{d\varphi} - \frac{1}{r_1} \left[V - \frac{3V \cotg \varphi}{h} \frac{dh}{d\varphi} + \frac{r_2}{r_2} \cotg^2 \varphi \right] \cdot V = -\frac{U}{D} \quad (I-19)$$

Par conséquent l'étude de la flexion d'une coque de révolution sous l'action des forces et des moments uniformément répartis le long du parallèle représentant le bord de ramène à l'intégration des deux équations précédentes.

Si l'épaisseur de la coque est constante les termes en $\frac{dh}{d\varphi}$ s'annulent et les dérivées des inconnues U et V ont, dans les deux équations, les mêmes coefficients. Posons alors :

$$L(\dots) = \frac{r_2}{r_1^2} \frac{d^2(\dots)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r_1} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_2}{r_1} \cotg \varphi \right] \frac{d(\dots)}{d\varphi} - \frac{r_1 \cotg^2 \varphi}{r_2 \cdot r_1} (\dots) \quad (I-20)$$

Les équations prennent la forme simplifiée suivante :

$$\left. \begin{aligned} L(U) + \frac{\nu}{r_1} U &= E \cdot h \cdot V \\ L(V) + \frac{\nu}{r_1} V &= -\frac{U}{D} \end{aligned} \right\} \quad (I-21)$$

De même, les équations de quatrième ordre pour chaque déplacement :

$$\begin{aligned} \text{et } LL(U) + \nu L\left(\frac{U}{r_1}\right) - \frac{\nu}{r_1} L(U) - \frac{\nu^2}{r_1^2} U &= -\frac{Eh}{D} \cdot U \quad (I-22-a) \\ LL(V) - \nu L\left(\frac{V}{r_1}\right) + \frac{\nu}{r_1} L(V) - \frac{\nu^2}{r_1} V &= -\frac{Eh}{D} \cdot V \quad (I-22-b) \end{aligned}$$

et qui se simplifient si le rayon de courbure est constant comme pour une coque conique ou sphérique ou une coque

annulaire, dans ce cas :

$$L\left(\frac{U}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1} L(U)$$

$$\text{En posant } \mu^4 = \frac{E \cdot h}{D} - \frac{\nu^2}{r_1^2}$$

L'équation (22-a) devient

$$LL(U) + \mu^4 U = 0$$

La résolution d'une telle équation est très complexe. En faisant les transformations et les changements de variables adéquats, TIMOSHENKO donne une solution sous forme de série de puissances pour un cas particulier de coques sphériques.

Donc il faudra donner des solutions analytiques pour chaque cas particulier.

CAS PARTICULIERS

- CYLINDRE ET RESERVOIR

- PLACQUE ANNULAIRE

I-5 THEORIE DES COQUE CYLINDRIQUES DE REVOLUTION CHARGEES SYMETRIQUEMENT PAR RAPPORT A LEURS AXES

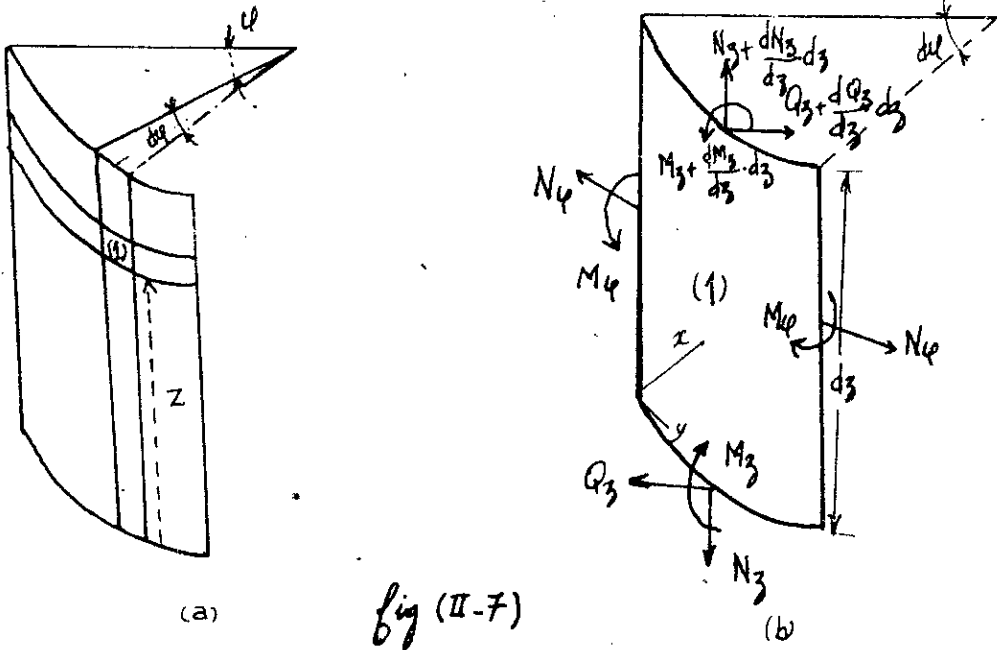


fig (II-7)

Considérons les conditions d'équilibre d'un élément, tel que l'indique la fig (II-7), on peut conclure que pour raison de symétrie que les efforts tranchants de membrane N_{34} et N_{43} sont nuls dans ce cas et que les forces N_4 sont constantes le long de la circonférence. Quant aux efforts tranchants transversaux, on peut dire également, pour la même raison, que seules les forces Q_3 ne s'annulent pas. De même pour les moments de torsions M_{34} et M_{43} sont nuls et les moments de flexions M_4 sont constants le long de la circonférence. Dans de telle conditions de symétrie les six équations d'équilibre devient trois équations qui sont :

(obtenues par projection des forces sur l'axe z et l'axe x et en prenant leurs moments par rapport à l'axe y et les pressions extérieures se réduisent aux pressions normales à la surface)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_z}{dz} \cdot r \cdot dz \cdot d\varphi &= 0 \\ \frac{dQ_z}{dz} \cdot r \cdot dz \cdot d\varphi + N_\varphi \cdot dz \cdot d\varphi + X \cdot r \cdot dz \cdot d\varphi &= 0 \\ \frac{dM_z}{dz} \cdot r \cdot dz \cdot d\varphi - Q_z \cdot r \cdot dz \cdot d\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(II-34)}$$

La première équation indique que les forces N_z sont constantes et nous les supposons nulles dans la suite de ce calcul. (On négligera, l'effet de ces forces sur la flexion).

Le système (II-34) devient donc :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_z}{dz} + \frac{1}{r} N_\varphi &= -X \\ \frac{dM_z}{dz} - Q_z &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(II-35)}$$

Ces deux équations contiennent trois inconnues : N_φ , Q_z et M_z . Pour résoudre le problème, nous considérerons les déplacements des points de la surface moyenne de la coque.

La composante v du déplacement suivant la direction circonférentielle s'annule pour raison de symétrie.

Nous n'avons donc à tenir compte que des composantes u et w suivant les directions des z et des x .

Les expressions relatives à ces déplacements deviennent alors :

$$E_z = \frac{du}{dz} \quad \text{et} \quad E_\varphi = -\frac{w}{r}$$

Appliquons alors la loi de HOOKE, nous avons :

$$\left. \begin{aligned} N_z &= \frac{E \cdot h}{(1-\nu^2)} (\epsilon_z + \nu \epsilon_\varphi) = \frac{E \cdot h}{(1-\nu^2)} \left(\frac{du}{dz} - \nu \frac{w}{r} \right) \\ N_\varphi &= \frac{E \cdot h}{(1-\nu^2)} (\epsilon_\varphi + \nu \epsilon_z) = \frac{E \cdot h}{(1-\nu^2)} \left(-\frac{w}{r} + \nu \frac{du}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-36})$$

De la première on obtient $\frac{du}{dz} = \nu \frac{w}{r}$

et de la seconde $N_\varphi = -E h \frac{w}{r}$ (II-37)

En considérant les moments de flexions nous voyons que, par raison de symétrie, il n'y a pas de variation de courbure en direction circonférentielle. La courbure dans la direction z est égale à $-\frac{d^2w}{dz^2}$

D'après les mêmes équations que pour les plaques, nous avons :

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \nu M_z \\ M_z &= -D \cdot \frac{d^2w}{dz^2} \\ D &= \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (\text{II-38})$$

D est la rigidité à la flexion de la coque.

Revenons maintenant aux équations (II-35), l'élimination de Q_z nous donne :

$$\frac{d^2M_z}{dz^2} + \frac{1}{r} N_\varphi = -X$$

D'où, en utilisant les équations (II-37) et (II-39), nous tirons :

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(D \cdot \frac{d^2w}{dz^2} \right) + \frac{E \cdot h}{r^2} w = X \quad (\text{II-39})$$

Comme les forces appliquées à l'extrémité $z=0$ produisent une flexion locale qui disparaît rapidement quand on s'éloigne de l'extrémité chargée, on a :

$$e^{\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) = 0$$

donc $C_1 = C_2 = 0$

et nous obtenons :

$$W = e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z) \quad (\text{II-43})$$

Nous pouvons déterminer les constantes C_3 et C_4 d'après les conditions à l'extrémité chargée :

$$(M_z)_{z=0} = -D \left(\frac{d^2 W}{dz^2} \right)_{z=0} = M_0$$

$$(Q_z)_{z=0} = \left(\frac{dM_z}{dz} \right)_{z=0} = -D \left(\frac{d^3 W}{dz^3} \right)_{z=0} = Q_0$$

En substituant à W l'expression (II-43), cette extrémité nous donne les conditions

$$C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D} (Q_0 + \beta M_0)$$

$$C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D}$$

L'expression finale de W est :

$$W = \frac{e^{-\beta z}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\sin \beta z - \cos \beta z) - Q_0 \cos \beta z]$$

La déformation est maximum à l'extrémité chargée où

$$(W)_{z=0} = \frac{-1}{2\beta^3 D} (\beta M_0 + Q_0) \quad (\text{II-44})$$

Cette déformation est négative parce que le sens de w a été pris positif vers l'axe du cylindre.
La pente à l'extrémité chargée s'obtient en différenciant

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=0} &= \frac{e^{-\beta z}}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \cos \beta z + Q_0 (\cos \beta z + \sin \beta z)]_{z=0} \\ &= \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 + Q_0) \end{aligned} \quad (\text{II-45})$$

Quant aux moments de flexion :

$$M_z = -D \frac{d^2 w}{dz^2}$$

$$M_z = \frac{e^{-\beta z}}{\beta} [\beta M_0 (\cos \beta z + \sin \beta z) + Q_0 \sin \beta z] \quad (\text{II-46})$$

$$\text{et } M_\varphi = \nu M_z \quad (\text{II-47})$$

I-6 RESERVOIR CYLINDRIQUE A PAROIS D'ÉPAISSEUR CONSTANTE

Soit un réservoir cylindrique, fig (II-9) soumis à la pression d'un liquide, l'équation (II-41) devient en substituant X par sa valeur $X = -\gamma(d-z)$ (II-48) où γ est le poids du liquide par unité de volume :

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + 4\beta^4 w = -\frac{\gamma(d-z)}{D} \quad (\text{II-49})$$

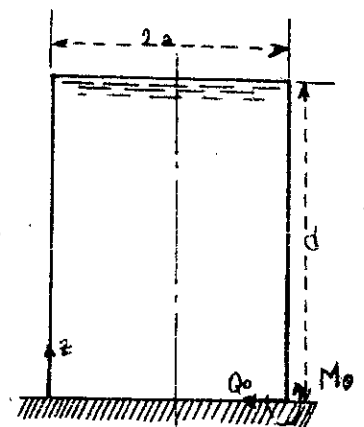


fig (II-9)

on a une solution particulière :

$$w_1 = -\frac{\gamma(d-z)}{4\beta^4 D} \quad (\text{II-50})$$

expression qui représente la dilatation radiale d'une coque cylindrique à bords libres sous l'action des contraintes en boucle.

Substituons l'expression (II-50) à $f(z)$ dans l'expression (II-48) et nous obtenons la solution complète de l'équation (II-49)

$$w = e^{\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z) - \frac{\gamma(d-z)a^2}{Eh}$$

Dans la plus part des cas pratiques, l'épaisseur de paroi "h" est petite, à la fois devant le rayon et devant la hauteur "d" du réservoir, et nous pouvons considérer la coque comme infiniment longue, les constantes C_1 et C_2 sont alors nulles et nous obtenons :

$$w = e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z) - \frac{\gamma(d-z)a^2}{Eh} \quad (\text{II-51})$$

Comme toujours C_3 et C_4 sont déterminées à partir des conditions aux limites. Si nous supposons le fond encastré sur une fondation parfaitement rigide, les conditions aux limites sont :

$$(w)_{z=0} = C_3 - \frac{\gamma d a^2}{Eh} = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{\gamma d a^2}{Eh}$$

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=0} = \left[-\beta C_3 \cdot e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z) + \beta C_4 e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) + \frac{\gamma a^2}{Eh} \right]_{z=0}$$

$$\beta (C_4 - C_3) + \frac{\gamma a^2}{Eh} = 0 \Rightarrow C_4 = C_3 - \frac{\gamma a^2}{Eh \beta}$$

$$C_4 = \frac{\gamma a^2}{Eh} \left(d - \frac{1}{\beta} \right)$$

L'expression (II-51) devient :

$$w = -\frac{\gamma a^3 d}{E \cdot h} \left[1 - \frac{z}{d} - \theta(\beta z) - \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \xi(\beta z) \right] \quad (\text{II-52})$$

avec $\theta(\beta z) = e^{-\beta z} \cos \beta z$
 et $\xi(\beta z) = e^{-\beta z} \sin \beta z$

Comme $M_z = -D \frac{d^2 w}{dz^2}$

$$M_z = -\frac{2\beta^2 \gamma a^3 D \cdot d}{E \cdot h} \left[-\xi(\beta z) + \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \theta(\beta z) \right]$$

$$M_z = \frac{\gamma \cdot a \cdot d \cdot h}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \left[-\xi(\beta z) + \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \theta(\beta z) \right] \quad (\text{II-53})$$

et $M_y = \nu \cdot M_z \quad (\text{II-54})$

et $N_y = -E \cdot h \cdot \frac{w}{a}$

$$N_y = \gamma \cdot a \cdot d \left[1 - \frac{z}{d} - \theta(\beta z) - \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \xi(\beta z) \right] \quad (\text{II-55})$$

Le moment de flexion est maximum au fond du réservoir

$$(M_z)_{z=0} = \left(1 - \frac{1}{\beta d}\right) \cdot \frac{\gamma \cdot a \cdot d \cdot h}{\sqrt{12} (1 - \nu^2)} \quad (\text{II-56})$$

I-1 THEORIE DES PLAQUES CIRCULAIRES MINCES

I-1-1 EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA FLEXION SYMETRIQUE DES PLAQUES CIRCULAIRES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

Puisque la charge appliquée à la plaque est une distribution axisymétrique, alors la surface fléchie du plan moyen est aussi axisymétrique.

Soit O , l'origine des coordonnées radiales au centre de la plaque non fléchie et soit r , les distances radiales des points du plan moyen et w , leurs flèches dirigées vers le bas.

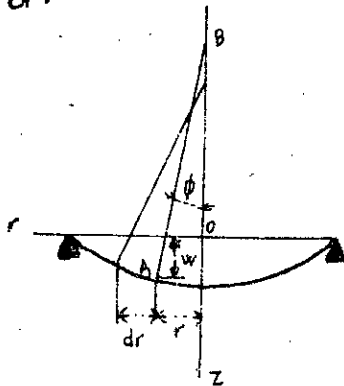
La pente de la flèche sera

$$-\varphi = -\frac{dw}{dr}$$

et les courbures de la surface moyenne dans la section diamétrale

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr} \quad (\text{II-1})$$

fig (II-1)



Du fait de la symétrie on peut conclure que $\frac{1}{r_n}$ est une des courbures principales. L'autre courbure principale est située dans la section normale à AB et au plan rz .

$$\frac{1}{r_e} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{\varphi}{r} \quad (\text{II-2})$$

Connaissant les expressions des courbures principales on peut déterminer les valeurs correspondantes des moments flechissants

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \quad (\text{II-3})$$

$$M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (\text{II-4})$$

où $D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}$ est la rigidité de la plaque à la flexion.

M_r et M_t représentent les moments par unité de longueur M_r agit le long des sections circulaires et M_t le long de la section diamétrale.

Les équations (II-3) et (II-4) ne comportent qu'une seule variable w ou φ , qu'on peut déterminer en considérant un élément de la plaque en équilibre

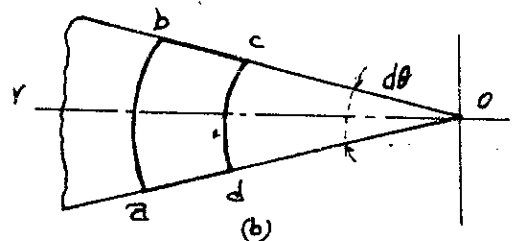
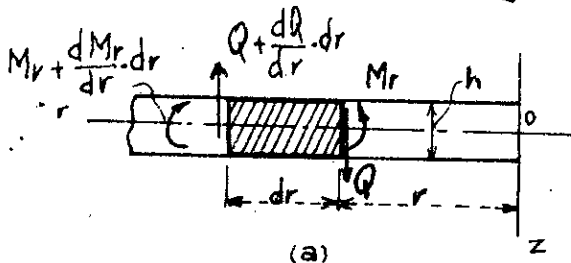


fig (II-2)

Soit un élément abcd découpé dans la plaque par les sections cylindriques ab et cd et deux sections diamétrales ad et bc.

Le couple agissant sur cd est :

$$M_r \cdot r \cdot d\theta \quad (\text{II-5})$$

Le couple correspondant sur ab est :

$$(M_r + \frac{dM_r}{dr} \cdot dr) (r + dr) d\theta \quad (\text{II-6})$$

Du fait de la symétrie, les couples agissant sur les côtés ad et bc sont tous deux égaux à $M_t \cdot dr$ et donnent un couple résultant

$$M_t \cdot dr \cdot d\theta \quad (\text{II-7})$$

En raison de la symétrie, on peut conclure que les efforts tranchants qui agissent sur l'élément, disparaissent sur les sections diamétrales de la plaque, ils ne persistent que sur les sections cylindriques telles que cd et ab.

Soit Q la force de cisaillement par unité de longueur de la section cylindrique de rayon r , la force de cisaillement totale sur le côté cd de l'élément est $Q \cdot r \cdot d\theta$ et la force correspondante sur ab est :

$$\left[Q + \left(\frac{dQ}{dr} \right) \cdot dr \right] (r + dr) d\theta \quad (\text{II-8})$$

En négligeant la faible différence entre les efforts tranchants sur les faces opposées de l'élément, on peut affirmer que ces forces créent dans le plan $r\theta$ un couple égal à :

$$Q \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \quad (\text{II-9})$$

En faisant la somme des moments (II-5), (II-6), (II-7) et (II-9) avec les signes convenables et en négligeant le moment produit par la charge extérieure, comme étant un infiniment petit d'ordre supérieur, on obtient l'équation d'équilibre de l'élément abc d :

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} \cdot dr \right) (r + dr) d\theta - M_r \cdot r \cdot d\theta - M_t \cdot dr \cdot d\theta + Q \cdot r \cdot d\theta \cdot dr = 0 \quad (\text{II-10})$$

En négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur on a :

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} \cdot dr - M_t + Q \cdot r = 0 \quad (\text{II-11})$$

En remplaçant M_r et M_t par leurs valeurs, l'équation (II-11) devient :

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = - \frac{Q}{D} \quad (\text{II-12})$$

$$\text{ou} \quad \frac{d^3 W}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 W}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dW}{dr} = - \frac{Q}{D} \quad (\text{II-13})$$

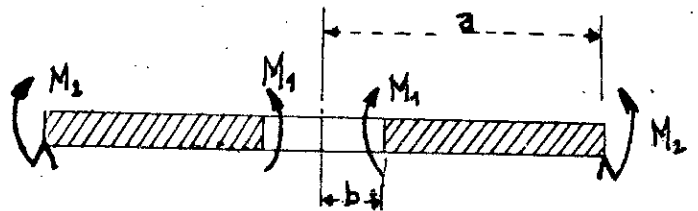
L'effort tranchant Q se calcule facilement dans chaque cas particulier de plaque circulaire symétriquement chargée, en disant la charge distribuée dans le cercle de rayon r pour $2\pi r$, on détermine alors la pente φ et la flèche w de la plaque à partir des équations (II-12) et (II-13) dont l'intégration est plus simple si on les écrit sous la forme:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot \varphi) \right] = - \frac{Q}{D} \quad (\text{II-14})$$

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dw}{dr}) \right] = \frac{Q}{D} \quad (\text{II-15})$$

- 2 Prenons l'exemple de plaque circulaire avec trous concentriques.
 2-1- Étudions la flexion d'une plaque soumise à deux moments M_1 et M_2 uniformément répartis le long des contours intérieur et extérieur :

fig (II-3)



Dans ce cas l'effort tranchant disparaît et l'équation (II-15) s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (r \left(\frac{dw}{dr} \right)) \right] = 0 \quad (\text{II-16})$$

En intégrant cette équation 2 fois nous avons :

$$\varphi = - \frac{dw}{dr} = C_1 \cdot \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad (\text{II-17})$$

$$w = - C_1 \cdot \frac{r^2}{4} - C_2 \log \frac{r}{a} + C_3 \quad (\text{II-18})$$

Les constantes d'intégration se déterminent à l'aide des conditions aux limites.

En substituant (II-17) dans (II-3) nous avons :

$$M_r = D \left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \nu \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \right) \right] \quad (\text{II-19})$$

Pour $r = b$, le moment est égal à M_1 et pour $r = a$, il est égal à M_2 .

Ainsi en remplaçant r par b puis par a on a :

$$M_1 = D \left[\frac{C_1}{2} (1+\nu) - \frac{C_2}{b^2} (1-\nu) \right]$$

$$M_2 = D \left[\frac{C_1}{2} (1+\nu) - \frac{C_2}{a^2} (1-\nu) \right]$$

donc

$$C_1 = \frac{2(a^2 M_2 - b^2 M_1)}{(1+\nu)(a^2 - b^2)D} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{a^2 b^2 (M_2 - M_1)}{(1-\nu)(a^2 - b^2)D} \quad (\text{II-20})$$

Pour déterminer la constante C_3 nous devons tenir compte des flèches aux contours :

On sait que pour $r = a$, $w = 0$ d'où :

$$C_3 = \frac{C_1 \cdot a^2}{4} = \frac{a^2 (a^2 M_2 - b^2 M_1)}{2(1+\nu)(a^2 - b^2)D} \quad (\text{II-21})$$

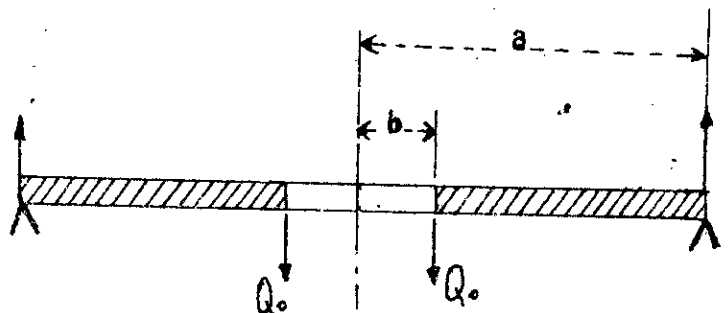
Finalement on trouve les expressions de la pente et de la flèche

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{a^2 M_2 - b^2 M_1}{(1+\nu)(a^2 - b^2)D} r + \frac{a^2 b^2 (M_2 - M_1)}{(1-\nu)(a^2 - b^2)D} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{II-22})$$

$$w = \frac{a^2 M_2 - b^2 M_1}{2(1+\nu)(a^2 - b^2)D} (a^2 - r^2) - \frac{a^2 b^2 (M_2 - M_1)}{(1-\nu)(a^2 - b^2)D} \log \frac{r}{a} \quad (\text{II-23})$$

2-2- Étudions la flexion d'une plaque soumise à des efforts tranchants Q_0 uniformément répartis le long du contour intérieur

fig (II-4)



L'effort tranchant par unite de longueur d'une circonférence de rayon r est :

$$Q = \frac{Q_0 b}{r} = \frac{P}{2\pi r}$$

avec $P = 2\pi b Q_0$, la charge totale appliquée au contour interieur de la plaque.

En remplaçant dans l'équation (II-15) et en intégrant on obtient:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{P \cdot r}{8\pi D} (2 \log \frac{r}{a} - 1) - C_1 \cdot \frac{r}{2} - \frac{C_2}{r} \quad (\text{II-24})$$

$$W = \frac{P r^2}{8\pi D} (\text{Log} \frac{r}{a} - 1) - C_1 \frac{r^2}{4} - C_2 \log \frac{r}{a} + C_3 \quad (\text{II-25})$$

Les constantes d'intégration se déterminent à partir des conditions aux limites.

Pour $r = a$ on a $w = 0$

Et puisque la plaque est simplement appuyée :

$$-D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0$$

$$\text{et} \quad -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = 0$$

Ce qui nous donne les expressions des constantes

$$C_1 = \frac{P}{4\pi D} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{2b^2}{a^2-b^2} \log \frac{b}{a} \right)$$

$$C_2 = - \frac{(1+\nu) \cdot P \cdot a^2 \cdot b^2}{(1-\nu)(a^2-b^2) \cdot 4\pi D} \cdot \log \frac{b}{a} \quad (\text{II-26})$$

$$C_3 = \frac{P a^2}{8\pi D} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{b^2}{a^2-b^2} \log \frac{b}{a} \right)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dw}{dr} = \frac{P \cdot r}{8\pi D} \left[2 \log \frac{r}{a} - \frac{2}{1-\nu} + \left(\frac{2b^2}{a^2-b^2} + \frac{2(1+\nu)a^2 b^2}{(1-\nu)(a^2-b^2)r^2} \right) \log \frac{b}{a} \right] \quad (\text{II-27})$$

$$W = \frac{P \cdot r^2}{8\pi D} \left[\log \frac{r}{a} - \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} + \frac{b^2}{a^2-b^2} \log \frac{b}{a} + \frac{2(1+\nu)a^2 b^2}{r^2(1-\nu)(a^2-b^2)} \log \frac{b}{a} \cdot \log \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} - \frac{b^2}{a^2-b^2} \log \frac{b}{a} \right) \right] \quad (\text{II-28})$$

à la limite pour b infiniment petit, $b^2 \log \frac{b}{a}$ tend vers zéro, on a alors :

$$W = \frac{P}{8\pi D} \left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (a^2 - r^2) + r^2 \log \frac{r}{a} \right] \quad (\text{II-29})$$

ce qui, coïncide avec la flèche de la plaque sans trou et chargée en son centre, pour conséquent un très petit trou au centre de la plaque ne modifie pas la flèche de cette dernière.

2-3- Plaque annulaire encastée, chargée à son bord intérieur transversalement

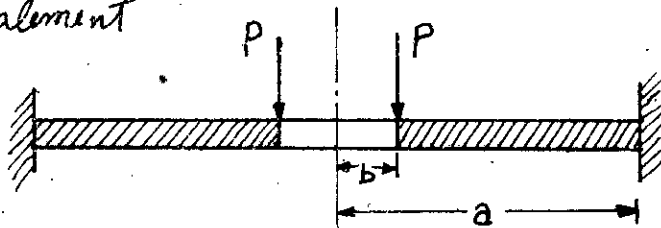


fig (II-5)

En ajoutant à la solution précédente (II-23) du premier problème (1) avec $M_2 = 0$ et M_1 défini par :

$$\frac{P \cdot a \cdot b}{D} \beta_1 + \frac{M_1 \cdot a}{D} A_1 = 0$$

avec
$$\beta_1 = \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{b^2}{a^2 - b^2} \right) \log \frac{a}{b}$$

$$A_1 = \frac{(1-\nu)a^2 + (1+\nu)b^2}{(1-\nu^2)(a^2 - b^2)}$$

Nous obtenons la solution relative à la plaque encastée le long du bord extérieur ($r=a$)

le moment d'encastement le long du bord $r=a$ a donc pour valeur

$$M_1 = -P \cdot b \cdot \frac{\beta_1}{A_1} \quad (\text{II-30})$$

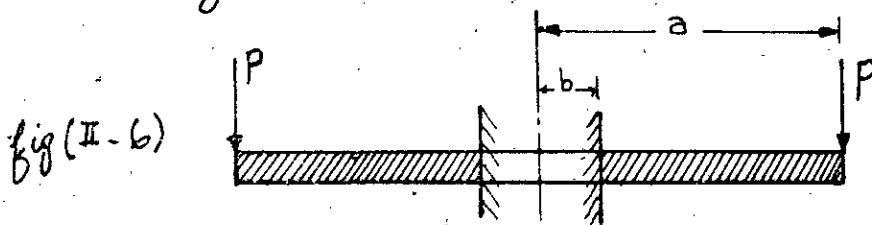
La flèche le long du bord libre $r=b$ a pour valeur

$$w(b) = - \frac{P a b^2}{4D} \cdot K \cdot \left[1 - 4 \left(\frac{a}{b} \right) \cdot \frac{\beta_1^2}{K A_1} \right]$$

Comme $Q = - 2\pi b P$

$$w(b) = \frac{Q a b}{8\pi D} K \left[1 - 4 \left(\frac{a}{b} \right) \frac{\beta_1^2}{K A_1} \right] \quad (\text{II-31})$$

4-Cas où la plaque est encastree le long du bord interieur et chargee à son bord exterieur



$$M_2 = - P \cdot a \cdot \frac{\beta_2}{A_2}$$

et

$$w(a) = - \frac{P a^2 b}{4D} K \cdot \left[1 - 4 \left(\frac{b}{a} \right) \frac{\beta_2^2}{K A_2} \right]$$

Comme $Q = - 2\pi a P$

$$\text{on a : } w(a) = \frac{Q a b}{8\pi D} K \cdot \left[1 - 4 \left(\frac{b}{a} \right) \frac{\beta_2^2}{K A_2} \right] \quad (\text{II-33})$$

avec :

$$\beta_2 = \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} \right) \ln \frac{a}{b}$$

$$A_2 = \frac{(1+\nu) a^2 + (1-\nu) b^2}{(1-\nu^2) \cdot (a^2 - b^2)}$$

CHAPITRE 2

ELEMENTS FINIS POUR LES COQUES DE REVOLUTION

II-ELEMENTS FINIS POUR LES COQUES DE REVOLUTION

II-0-INTRODUCTION:

La méthode des éléments finis est basée sur le concept, que la structure réelle, ou le milieu continu, peut être idéalisée par un ensemble d'éléments finis, connectés entre-eux par des points nodaux situés sur leurs frontières, ceci pour simplifier l'analyse de la structure, qui ne peut être analysée par les techniques simples de l'ingénieur.

Les déplacements de ces points nodaux sont les inconnues de base du problème.

Pour pouvoir approximer de façon satisfaisante le comportement de la structure réelle, on choisit des fonctions, permettant de définir de manière unique, le champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément, c'est à dire que les déplacements et les déformations en un point quelconque de l'élément seront exprimés en fonction des déplacements nodaux à l'aide de ces fonctions, qui sont appelées fonctions de forme. Ces déformations définissent maintenant, en tenant compte des propriétés élastiques du matériau, en tout point de l'élément, le champ de contrainte et par conséquent sur ses frontières.

Le chargement réel de la structure est remplacé par un ensemble de charges équivalentes aux nœuds, (équivalentes dans le sens où le travail effectué par ces charges en un point quelconque de la structure est égal au travail du chargement réel).

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis il faut vérifier les deux conditions suivantes:

1 - La compatibilité des déplacements

Après déformation, les éléments ayant des nœuds en commun

doivent toujours se rencontrer en ces nœuds.

2 - L'équilibre

En chaque nœuds les forces internes doivent équilibrer les forces externes.

II-1-FORMULATION PAR LA METHODE DES DEPLACEMENTS

Les différentes formulations de la méthode des éléments finis conduisent à :

- La méthode du déplacement
- La méthode de la force
- La méthode mixte

Nous avons choisi la méthode des déplacements pour sa simplicité et sa facilité à la programmation, cette méthode est basée sur le principe suivant :

Pour chaque élément les relations basées sur les propriétés élastiques du matériau et une approximation raisonnable du champ de déplacement et de la déformation intérieurs de l'élément donnent les forces nodales (équivalentes) en fonction des déplacements nodaux. Ces équations algébriques s'écrivent sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\{F^e\} = [K^e] \cdot \{\delta^e\} \quad (a)$$

où $\{F^e\}$ et $\{\delta^e\}$ sont les vecteurs forces et déplacement aux nœuds et $[K^e]$ est la matrice de raideur de l'élément.

Pour l'ensemble de la structure, la matrice des raideurs globale est obtenue par superposition (addition) des matrices élémentaire étendues.

La relation force - déplacement pour l'ensemble de la structure s'écrit alors :

$$\{F\} = [K] \cdot \{\delta\} \quad (b)$$

La matrice $[K]$ est la matrice des raideurs globale. Elle est symétrique est ceci n'est nullement le fait du hasard,

mais découle du principe de la conservation de l'énergie, (théorème de réciprocité de Maxwell - Betti).

Cette matrice $[K]$ est aussi singulière et ne peut être inversée et pour lever cette indétermination il faut introduire les conditions aux limites, c'est à dire substituer les déplacements des appuis par leurs valeurs qui sont généralement nulles de manière à empêcher le mouvement de corps solide de la structure, ainsi les déplacements sont déterminés de façon unique par les forces.

La détermination des contraintes ou des efforts internes se fait de manière analogue à celle des déplacements, en remplaçant le vecteur second membre par le vecteur des déplacements nodaux, et la matrice des valeurs par la matrice contrainte, c'est à dire :

$$\{\sigma\} = [H]\{\delta\}$$

où $[H]$ est la matrice "contrainte", reliant les efforts aux déplacements.

II-2-CRITERES DE CONVERGENCE:

La donnée des fonctions de forme vient à limiter le nombre de degrés de liberté - en réalité infini - du système, donc c'est une approximation que l'on effectue sur les déplacements réels et pour que soit garantie la convergence vers le résultat correct il faut que la fonction de déplacement représente le champ de déplacement aussi fidèlement que possible. La convergence de la méthode peut se résumer en trois critères

CRITERE 1

La fonction de déplacement choisie doit être telle qu'elle ne permette pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements de ses nœuds sont la conséquence d'un

mouvement de corps solide.

CRITERE 2

La forme de la fonction de déplacement doit être choisie de telle manière que, si ses déplacements nodaux sont compatibles avec un état de déformation constante, on puisse réellement obtenir ces déformations constantes dans tout l'élément.

En toute rigueur, les deux critères précédents n'ont eu fait à être satisfaits qu'à la limite, lorsque la taille de l'élément tend vers zéro. Néanmoins, la vérification de ces critères pour des éléments de taille finie conduit à une amélioration sensible des résultats.

CRITERE 3

Les fonctions de déplacement doivent être choisies de telle manière que les déformations aux interfaces des éléments soient finies, c'est à dire qu'on suppose une certaine continuité des déplacements lorsque l'on passe d'un élément à son autre.

Et puisque les déformations sont exprimées en fonction des déplacements et de leurs dérivées n^{ème}, il faut que les fonctions de forme et leurs dérivées à l'ordre n soient continues. Dans le cas de l'élément de coque axisymétrique les déformations sont définies par les dérivées premières et secondes des déplacements dans ce cas les déplacements et leurs dérivées premières doivent assurer la continuité sur tout l'élément.

II-3-PARTICULARITES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR LES COQUES DE REVOLUTION

Les principaux changements nécessaires pour appliquer cette technique aux coques de révolution soumises à un chargement axisymétrique se résument en un changement dans le concept de nœuds et le développement de la matrice des raideurs $[k]$ pour un type d'élément différent.

Les joints nodaux sont évidemment remplacés par des lignes nodales qui sont des cercles tels que le montre la figure (II-a).

Les déplacements de la coque peuvent être approximatés par trois composantes de déplacement (deux translations et une rotation) en chaque nœud u_i , w_i et β_i tel que le montre la figure (II-a).

Les charges équivalentes correspondantes (deux forces et un moment) sont aussi montrées sur la figure. Ces dernières sont distribuées sur la circonférence de la coque c'est à dire qu'elles sont exprimées par unité de longueur.

Le premier avantage de cette modification, prenant avantage de la symétrie axiale, est le remplacement d'un très grand nombre de joints nodaux ayant chacun généralement six degrés de liberté, par un nombre relativement petit de cercles nodaux ayant chacun trois degrés de liberté. La diminution de la taille des matrices et des vecteurs à manipuler est évidente.

L'utilisation de nœuds circulaires nécessite l'introduction d'un élément différent qui est le segment de coque entre deux nœuds adjacents.

Plusieurs degrés de raffinement dans l'approximation de la géométrie de l'élément de coque sont possibles, nous utiliserons l'élément "tronconique" qui remplit une précision acceptable et une simplicité relative pour la programmation.

Les étapes de la détermination de la matrice des raideurs $[K]$ et de la matrice contrainte $[H]$, reliant les efforts aux déplacements seront exposés dans le chapitre suivant.

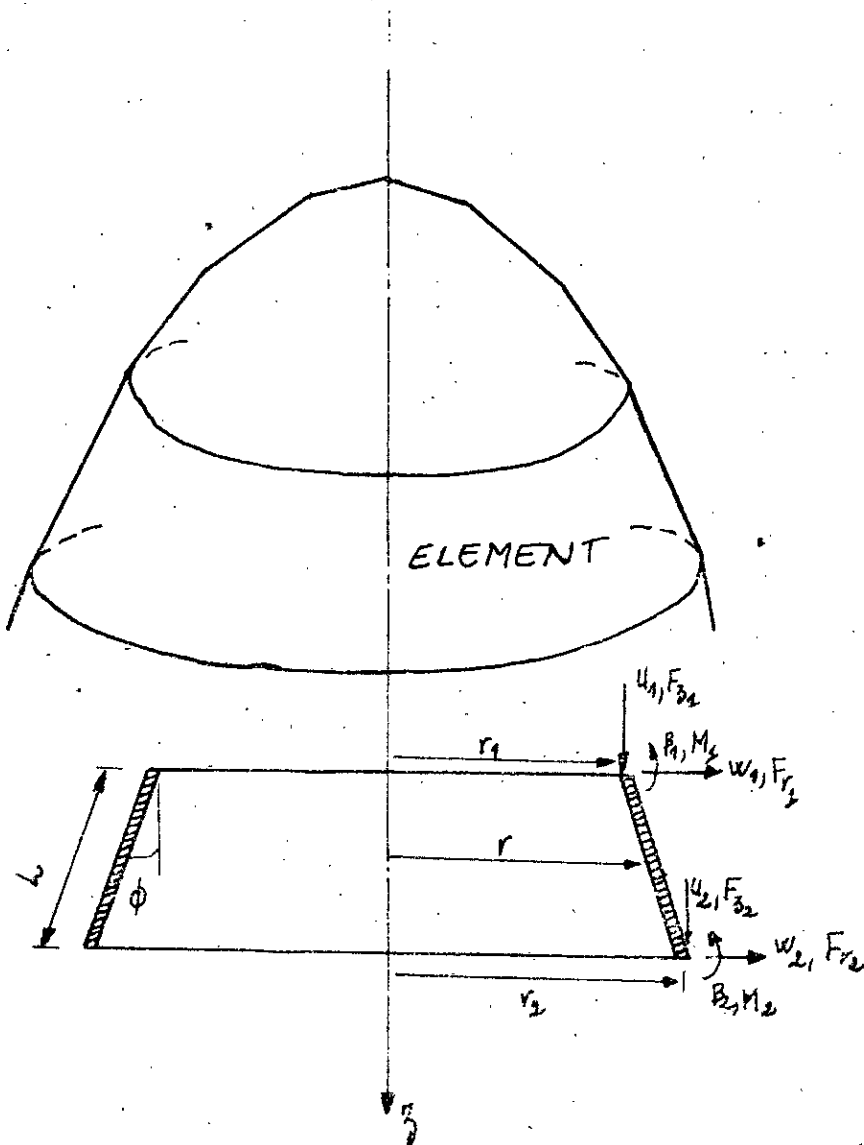


fig (II.a) : idéalisation d'une coque par éléments tronconiques

CHAPITRE 3

DEVELOPPEMENT DE L'ELEMENT DE COQUE AXI-SYMETRIQUE

III DEVELOPPEMENT DE L'ELEMENT DE COQUE TRONCONIQUE

INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons parlé des particularités de la méthode des éléments finis pour l'analyse des coques à symétrie axiale et des avantages de la discrétisation de ces coques en éléments tronconiques avec deux nœuds circulaires. Dans ce chapitre tel que son titre l'indique nous aborderons les étapes de développement de ce type d'élément, de sa matrice des raideurs, de sa matrice contrainte et du vecteur chargement extérieur.

II-1 ETAPES DE CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE D'UN ELEMENT FINI TRONCONIQUE

Les différentes étapes à suivre pour déterminer la matrice des raideurs élémentaires sont :

1-1 - Choisir un système de coordonnées et numéroté les nœuds :
Puisque la coque est modélisée par une série d'éléments tronconiques il est commode d'utiliser un système de coordonnées cylindriques (r, z) .

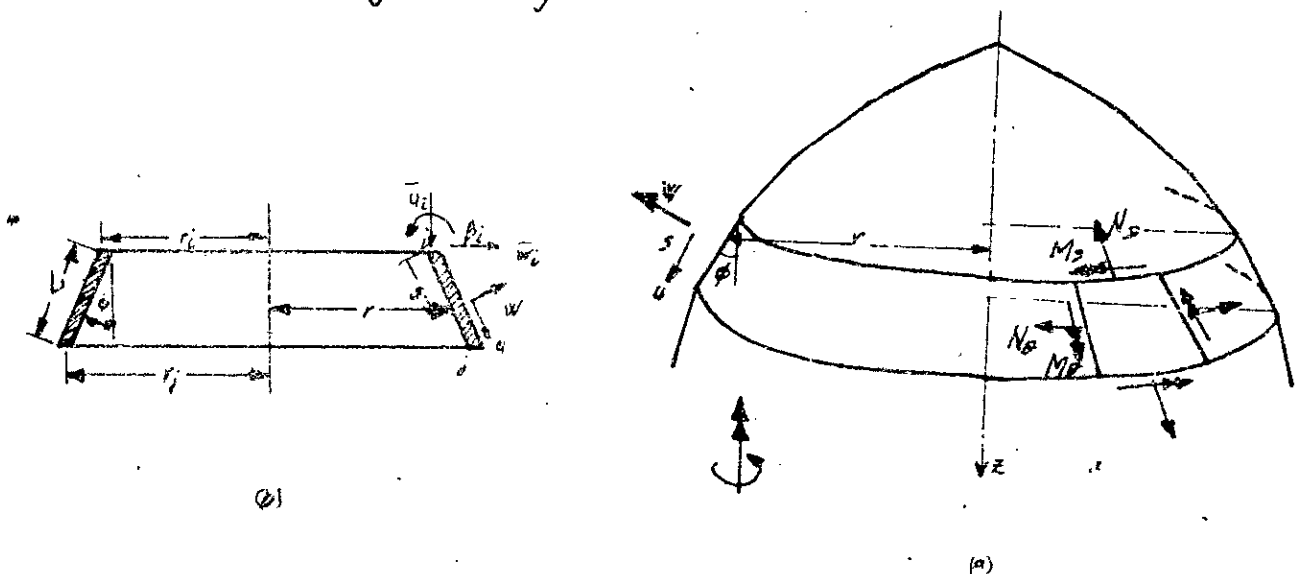


fig (III-1) : Élément de coque à symétrie axiale ayant deux nœuds circulaires

En considérant le nœud 1, fig (III-1), on peut écrire le vecteur déplacement de la façon suivante :

$$\{\delta_1\} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-1})$$

où \bar{u} est le déplacement axial et \bar{w} le déplacement radial dans le système de coordonnées global et β , la rotation.

Les forces correspondantes au nœud 1 sont :

$$\{F_1\} = \begin{bmatrix} F_{z1} \\ F_{r1} \\ M_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III-2})$$

où F_z est la force axiale
 F_r est la force radiale
 M est le moment méridien

Les vecteurs complets pour les déplacements et les forces pour l'élément s'écrivent :

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \beta_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F^e\} = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{z1} \\ F_{r1} \\ M_1 \\ F_{z2} \\ F_{r2} \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

Ainsi, chaque élément de coque axisymétrique a six degrés de liberté et donc la matrice complète des raideurs de l'élément $[K^e]$ sera une matrice carrée d'ordre six.

$$\{F^e\} = [K^e] \cdot \{\delta^e\} \quad (\text{III-5})$$

1-2 - Choisir une fonction de déplacement $f(r, z)$ qui définit le déplacement $[\delta(r, z)]$ en chaque point de l'élément :

A cause de l'inclinaison ϕ de l'élément par rapport à l'axe z de la coque, il est plus commode d'écrire la fonction de déplacement de l'élément en fonction de ses coordonnées locales (r, s) et ceci pour avoir des expressions simples des fonctions de forme. Puisqu'il y a six degrés de liberté par élément et pour satisfaire la continuité de $u(A)$, $\frac{dw}{ds}$, $w(s)$, $\frac{dw}{ds}$ et $\frac{d^2w}{ds^2}$, on doit prendre six coefficients dans le polynôme représentant le modèle de déplacement. Les équations (III-6) donnent un ensemble convenable de relations dans lesquelles u varie linéairement avec s et w est une fonction cubique de s .

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot s \quad (III-6)$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 \cdot s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3$$

$$\frac{dw}{ds} = \alpha_4 + 2\alpha_5 s + 3\alpha_6 s^2$$

La troisième équation s'obtient en dérivant la deuxième. En écrivant les équations sous forme matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \frac{dw}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2s & 3s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (III-7)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$[\delta(r, s)] = [f(r, s)] \cdot [\alpha] \quad (III-8)$$

1-3 - Exprimer l'état des déplacements $[\delta(r, s)]$ dans l'élément en fonction des déplacements modaux $[\delta^e]$

Dans cette étape on remplace les coordonnées modales (r, s) par leur valeur dans l'équation (III-8) et en résolvant cette dernière on obtient une relation donnant les coefficients $\{a\}$ par exemple au nœud 1, $s = 0$ et au nœud 2, $s = L$.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 & u_2 &= a_1 + a_2 L \\ w_1 &= a_3 \text{ (a) et} & w_2 &= a_3 + a_4 L + a_5 L^2 + a_6 L^3 \text{ (b)} \quad \text{(III-9)} \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 &= a_4 & \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 &= a_4 + 2a_5 L + 3a_6 L^2 \end{aligned}$$

En écrivant ces équations sous la forme matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ -\left(\frac{dw}{ds}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad \text{(III-10)}$$

ou bien $\{\delta^e\} = [A] \cdot \{a\}$

Pour obtenir $\{a\}$ en fonction de $\{\delta^e\}$ il suffit d'inverser la matrice $[A]$, mais il est plus rapide d'obtenir $\{a\}$ par substitution, vu que a_1 , a_3 et a_4 sont déjà connus par les équations (III-9-a), on pourra obtenir a_2 , a_5 et a_6 en remplaçant les premiers dans les équations (III-9-b)

$$a_2 = (u_2 - u_1) / L$$

$$a_5 = -\frac{2}{L} \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 + \frac{3}{L^2} (w_2 - w_1)$$

$$a_6 = \frac{1}{L^2} \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 + \frac{1}{L^2} \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 - \frac{2}{2L^3} (w_2 - w_1)$$

Sous la forme matricielle on a

$$\{a\} = [A^{-1}] \cdot \{\delta^e\}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix} \{ \delta^e \} \quad (\text{III-13})$$

D'une façon plus détaillée on a :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \beta_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-14})$$

A l'aide de l'équation (III-7) on a :

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta & \Delta^2 & \Delta^3 \end{bmatrix} \cdot \{ \alpha \} \quad (\text{III-15})$$

On peut maintenant écrire l'équation donnant les déplacements locaux de l'élément u et w en fonction des déplacements modaux globaux de l'élément $\{ \delta^e \}$, cela se fait en remplaçant $\{ \alpha \}$ par sa valeur de l'équation (III-14) dans l'équation (III-15) et les déplacements modaux locaux pour les déplacements modaux globaux donnés par (III-13)

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [\Psi(A)] \cdot [A^{-1}] \cdot [R] \cdot \{ \delta^e \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ W_1 \\ P_1 \\ U_2 \\ W_2 \\ P_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(III-16)

où $\lambda = \cos \varphi$ et $\mu = \sin \varphi$

Après multiplication on obtient :

$$\begin{aligned}
 (1-\rho) \cos \varphi & & (1-\rho) \sin \varphi & & 0 & & P \cos \varphi & & P \sin \varphi & & 0 \\
 -(1-3\rho^2+2\rho^3) \sin \varphi & - & (1-3\rho^2+2\rho^3) \cos \varphi & & \lambda(\rho-2\rho^2+\rho^3) & & (3\rho^2-2\rho^3) \sin \varphi & & (3\rho^2-2\rho^3) \cos \varphi & & \lambda(-\rho^2+\rho^3)
 \end{aligned}$$

(III-17)

où $\rho = \frac{5}{2}$

1-4 - Relier les déformations $\{E(r, s)\}$ en chaque point de l'élément aux déplacements et donc aux déplacements modaux $\{\delta^e\}$:

$$\{E(r, s)\} = \begin{bmatrix} E_s \\ E_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & 0 \\ \frac{\sin \phi}{r} & \frac{\cos \phi}{r} \\ 0 & -\frac{d^2}{ds^2} \\ 0 & -\frac{\sin \phi}{r} \cdot \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \quad (\text{III-18})$$

Remplaçons u et w par leurs valeurs à partir de l'équation (III-17) et calculons les différentiations par l'équation (III-18), nous obtenons alors la matrice reliant les déformations aux déplacements modaux, que nous appellerons $[B]$.

$$\text{Donc } \{E(r, s)\} = [B] \cdot \{\delta^e\}$$

et puisque $p = \frac{s}{L}$ alors $ds = L \cdot dp$ et $\frac{d}{ds} = \frac{1}{L} \cdot \frac{d}{dp}$

La matrice $[B]$ est le produit d'une matrice 4×2 et d'une matrice 2×6 donc c'est une matrice 4×6 , dont les éléments seront exposés à la page suivante.

1-5 - Relier les contraintes internes $[\sigma(r, s)]$ aux déformations $\{E(r, s)\}$ et aux déplacements modaux $\{\delta^e\}$

La relation entre les déformations et les contraintes se fait à l'aide de la matrice d'élasticité qui a été développée au premier chapitre.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} = \frac{E \cdot t}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{12} & \frac{\nu E^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu E^2}{12} & \frac{E^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_s \\ E_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{III-19})$$

ou bien $\{\sigma(r, s)\} = [D] \{E(r, s)\}$
 t est l'épaisseur de la coque.

-47-

[B] =

$(-\cos\phi/L)$	$(-\sin\phi)/L$	0	$(\cos\phi)/L$	$(\sin\phi)/L$	0
$(1-p) \cdot (\cos\phi \sin\phi)/r$ $-(1-3p^2+2p^3)/2r$ $\times \sin 2\phi$	$(1-p)(\sin^2\phi)/r$ $+(1-3p^2+2p^3)$ $\times \cos^2\phi/r$	$L(p-2p^2+p^3)/r$ $\times \cos\phi$	$p \sin\phi \cos\phi/r$ $-\sin\phi \cos\phi$ $\times (3p^2-2p^3)/r$	$p \sin^2\phi$ $+(3p^2-2p^3)/r$ $\times \cos\phi$	$L(-p^2+p^3)$ $\times \cos\phi$
$(-6+12p)/L^2$ $\times \sin\phi$	$(6-12p)/L^2$ $\times \cos\phi$	$(4-6p)/L$	$(6-12p)/L^2$ $\times \sin\phi$	$(-6+12p)/L^2$ $\times \cos\phi$	$(2-6p)/L$
$(6p-6p^2)/r \cdot L$ $\times \sin^2\phi$	$(6p-6p^2)/r \cdot L$ $\times \sin\phi \cdot \cos\phi$	$(-1+p-3p^2)/r$ $\times \sin\phi$	$(6p-6p^2)/r \cdot L$ $\times \sin^2\phi$	$(-6p+6p^2)/r \cdot L$ $\times \sin\phi \cdot \cos\phi$	$(2p-3p^2)/r$ $\times \sin\phi$

(III-20)

En remplaçant $\{E(r, s)\}$ par sa valeur de l'étape (4) on a :

$$\{\sigma(r, s)\} = [D] \cdot [B] \cdot \{\delta^e\}$$

Puisque $[D]$ est une matrice 4×4 et $[B]$ une matrice 4×6 alors le produit $[D] \cdot [B]$ donne une matrice 4×6 .

1-6 - Remplacer les contraintes $\{\sigma(r, s)\}$ par des forces modales statiquement équivalentes $\{F^e\}$, relier ces forces modales aux déplacements modaux $\{\delta^e\}$

On utilise le principe de travaux virtuels pour déterminer l'ensemble des charges modales équivalentes aux contraintes internes. La condition d'équivalence s'écrit comme suit :
Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges modales doit être égal au travail interne total des contraintes. On choisit un ensemble arbitraire de déplacements modaux représenté par le vecteur $\{\delta^{*e}\}$ où :

$$[\delta^{*e}]^T = [\{\delta_1^{*e}\} \quad \{\delta_2^{*e}\} \quad \{\delta_3^{*e}\} \quad \dots \quad \{\delta_n^{*e}\}]$$

Le travail extérieur W_{ext} des forces modales est donné par :

$$W_{ext} = \{\delta^{*e}\}^T \cdot \{F^e\}$$

Si les déplacements arbitrairement imposés produisent des déformations $\{E(r, s)^*\}$ aux points de l'élément ou les contraintes réelles sont les $\{\sigma(r, s)\}$, alors le travail interne par unité de volume est donné par :

$$W_{int} = \{E(r, s)^*\}^T \cdot \{\sigma(r, s)\}$$

$$(dW_{int} = \sigma \cdot E \cdot dV)$$

et le travail interne total est obtenu en intégrant sur le volume total de l'élément c'est à dire :

$$\int_V W_{int} d(Vol) = \int_V \{E(r, s)^*\}^T \cdot \{\sigma(r, s)\} d(Vol)$$

On sait par l'équation (III-20) que les déformations en chaque point de l'élément sont exprimées en fonction des déplacements nodaux par

$$\{E(r, s)\} = [B]\{\delta^e\}$$

D'où les déplacements virtuels étant imposés, les déformations correspondantes s'expriment par :

$$\{E(r, s)^*\} = [B]^T \cdot \{\delta^{*e}\}$$

De plus, l'équation (III-22) relie les contraintes réelles dans l'élément aux déplacements nodaux par :

$$\{\sigma(r, s)\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

Donc on peut remplacer par leurs valeurs ces expressions dans l'équation des travaux virtuels par le travail interne et on obtient :

$$\int_V W_{int} d(Vol) = \int_V [B]^T \{\delta^{*e}\} [D][B]\{\delta^e\} d(Vol)$$

$$\text{et } W_{ext} = [\delta^{*e}]^T \{F^e\}$$

Finalement, on égalise W_{ext} et W_{int} . Puisque le principe de base des déplacements virtuels est valable pour n'importe quel système de déplacements appliqué, on peut choisir ce dernier comme on veut. Dans le cas présent il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité.

On obtient alors :

$$\{F^e\} = \int_V [B]^T [D][B] d(Vol) \cdot \{\delta^e\} \quad (\text{III-21})$$

$$\{F^e\} = [K^e] \cdot \{\delta^e\}$$

$$\text{donc } [K^e] = \int_V [B]^T [D][B] d(Vol)$$

Posons :

$$a = \frac{\cos \phi}{L}$$

$$b = \sin \phi / L$$

$$c_1 = L \cdot (-p - 2p^2 + p^3) \cdot \cos \phi / r$$

$$f_1 = L \cdot (-p^2 + p^3) \cdot \cos \phi / r$$

$$a_2 = (12p - 6) / L^2 \cdot \sin \phi$$

$$b_2 = (6 - 12p) / L^2 \cdot \cos \phi$$

$$c_2 = (4 - 6p) / L$$

$$d_2 = (6 - 12p) / L^2 \cdot \sin \phi$$

$$e_2 = (12p - 6) / L^2 \cdot \cos \phi$$

$$f_2 = (2 - 6p) / L$$

$$a_3 = (6p - 6p^2) / r \cdot L \cdot \sin^2 \phi$$

$$b_3 = (6p - 6p^2) \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi / r \cdot L$$

$$f_3 = (2p - 3p^2) \cdot \sin \phi / r$$

$$a_4 = (1-p) \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi / r - (1 - 3p^2 + 2p^3) \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi / r$$

$$b_4 = (1-p) \sin^2 \phi / r + (1 - 3p^2 + 2p^3) \cdot \cos^2 \phi / r$$

$$d_4 = p \cdot \sin \phi \cos \phi / r - (3p^2 - 2p^3) \cos \phi \sin \phi / r$$

$$e_4 = p \cdot \sin^2 \phi / r + (3p^2 - 2p^3) \cdot \cos^2 \phi / r$$

La matrice [B] devient :

$$[B] = \begin{bmatrix} a & b & 0 & -a & -b & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix}$$

Donc la matrice [H] = [D][B] peut s'écrire :

$$[H] = \begin{bmatrix} a + v \cdot a_1 & b + v \cdot b_1 & v c_1 & v d_1 - a & v e_1 - b & v \cdot f_1 \\ v a + a_1 & v b + b_1 & c_1 & d_1 - a \cdot v & e_1 - b \cdot v & f_1 \\ T \cdot (a_2 + v \cdot a_3) & T \cdot (b_2 + v \cdot b_3) & T \cdot (c_2 + v \cdot c_3) & T \cdot (d_2 + v \cdot d_3) & T \cdot (e_2 + v \cdot e_3) & T \cdot (f_2 + v \cdot f_3) \\ T \cdot (a_3 + v \cdot a_2) & T \cdot (v b_2 + b_3) & T \cdot (v c_2 + c_3) & T \cdot (v d_2 + d_3) & T \cdot (e_3 + v \cdot e_2) & T \cdot (f_3 + v \cdot f_2) \end{bmatrix}$$

L'intégration sera prise sur la surface de l'élément, son épaisseur t n'entre pas en compte ici, car les contraintes sont exprimées en résultantes (forces et moments par unité de longueur).
Donc la matrice des raideurs élémentaire est donnée par :

$$[K^e] = \int_{\text{aire}} [B]^T [D] [B] d(\text{aire})$$

En se rapportant à la figure (1-a) pour un tronç de cône
aire = $2\pi r \cdot s \rightarrow d(\text{aire}) = 2\pi r ds = 2\pi r L dp$
puisque "s" varie de 0 à L donc p varie de 0 à 1
alors :

$$[K^e] = 2\pi L \int_0^1 [B]^T [D] [B] r dp$$

En exprimant r en fonction de p c'est à dire $r = r_1 + Lp \sin \phi$

$$[K^e] = 2\pi L \int_0^1 [B]^T [D] [B] (r_1 + Lp \sin \phi) dp$$

Ensuite il faut effectuer la multiplication et l'intégration terme à terme.

Les éléments du double produit $[B]^T [D] [B]$, seront exposés dans les pages suivantes et l'intégration sera effectuée numériquement à cause de la complexité des éléments de la matrice.

1-7- Etablir la matrice "contrainte" reliant les contraintes et les déplacements nodaux

Il a déjà été établi dans l'étape (5) que :

$$\{\sigma(r, s)\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (\text{III-22})$$

$$\{\sigma(r, s)\} = [H]\{\delta^e\}$$

donc $[H] = [D][B]$

Cette matrice est appelée la matrice contrainte, c'est une matrice 4×6 , ses éléments seront exposés dans la page suivante.

Posons :

$$b_{11} = a_1^2 + a_2^2 + (a_3^2 + a_2^2) \cdot T + 2V \cdot (a_1 a_2 + T \cdot a_3 a_2)$$

$$b_{12} = a(b_1 + Vb_2) + a_1(Vb_1 + b_2) + T \cdot [(b_2 + Vb_3) \cdot a_2 + a_3 \cdot (Vb_2 + b_3)]$$

$$b_{13} = (aV + a_1) \cdot c_1 + [a_2 \cdot (c_2 + Vc_3) + a_3 \cdot (Vc_2 + c_3)] \cdot T$$

$$b_{14} = a(Vd_1 - a) + a_1(d_1 - aV) + T \cdot [a_2 \cdot (d_2 + Vd_3) + a_3 \cdot (Vd_2 + d_3)]$$

$$b_{15} = a(Ve_1 - b) + a_1(e_1 - bV) + T \cdot [a_2 \cdot (e_2 + Ve_3) + a_3 \cdot (Ve_2 + e_3)]$$

$$b_{16} = Va_1 f_1 + a_2 f_1 + T \cdot [a_2 \cdot (f_2 + Vf_3) + a_3 \cdot (Vf_2 + f_3)]$$

$$b_{22} = b^2 + b_1^2 + (b_2^2 + b_3^2) \cdot T + 2 \cdot V \cdot [bb_1 + T \cdot (b_3 b_2)]$$

$$b_{23} = bVc_1 + b_1 c_1 + T \cdot [b_2 \cdot (c_2 + Vc_3) + b_3 \cdot (c_3 + Vc_2)]$$

$$b_{24} = b \cdot (Vd_1 - a) + b_1(d_1 - aV) + T \cdot [b_2 \cdot (d_2 + Vd_3) + b_3 \cdot (Vd_2 + d_3)]$$

$$b_{25} = b \cdot (Ve_1 - b) + b_1(e_1 - bV) + T \cdot [b_2 \cdot (e_2 + Ve_3) + b_3 \cdot (Ve_2 + e_3)]$$

$$b_{26} = b \cdot (Vf_1) + b_1 f_1 + T \cdot [b_2 \cdot (f_2 + Vf_3) + b_3 \cdot (f_3 + Vf_2)]$$

$$b_{33} = c_1^2 + c_2^2 + T \cdot c_3^2 + 2 \cdot V \cdot T \cdot c_3 \cdot c_2$$

$$b_{34} = c_1 \cdot (d_1 - aV) + T \cdot c_2(d_2 - Vc_3) + T \cdot c_3(Vd_2 + c_3)$$

$$b_{35} = c_1 \cdot (e_1 - bV) + T \cdot [c_2(e_2 + Ve_3) + c_3 \cdot (Ve_2 + e_3)]$$

$$b_{36} = c_1 f_1 + T \cdot [c_2(f_2 + Vf_3) + c_3 \cdot (Vf_2 + f_3)]$$

$$b_{44} = a^2 + d_1^2 + T \cdot [d_2^2 + d_3^2] + 2V \cdot (T \cdot d_3 \cdot d_2 - a d_1)$$

$$b_{45} = a(Ve_1 + b) + (-bV + e_1) \cdot d_1 + T \cdot [d_2 \cdot (e_2 + Ve_3) + d_3 \cdot (f_2 + Vf_3)]$$

$$b_{46} = -a f_1 \cdot V + d_1 f_1 + T \cdot [d_2(Ve_2 + e_3) + d_3(Vf_2 + f_3)]$$

$$b_{55} = +b^2 + e_1^2 + T \cdot (e_2^2 + e_3^2) - 2 \cdot V \cdot [b \cdot e_2 + T \cdot e_2 \cdot e_3]$$

$$b_{56} = -bV f_1 + e_1 f_1 + T \cdot [(f_2 + Vf_3) \cdot e_2 + e_3 \cdot (Vf_2 + f_3)]$$

$$b_{66} = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + 2 \cdot T \cdot V \cdot f_2 \cdot f_3$$

$$[B]^T \cdot [D] \cdot [B] = \frac{E \cdot t}{(1 - \nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ & & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ & & & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ & & & & b_{55} & b_{56} \\ & & & & & b_{66} \end{bmatrix}$$

SYMETRIQUE

III-2 CAS PARTICULIERS

Nous présentons ici les matrices de raideur intégrées pour les cas particuliers $\phi = 0$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$.

2.1 COQUE CYLINDRIQUE DE REVOLUTION: $\phi = 0^\circ$

La matrice des raideurs de l'élément cherchée $[k^e]$ et la matrice contrainte $[H]$ peuvent être obtenues de deux façons: En remplaçant l'angle ϕ par 0 dans la matrice $[B]$ de l'équation (III-20), puis en faisant le double produit $[B]^T [D] [B]$ et intégrer.

Ou bien en retournant au début et prendre $\phi = 0$, équation (III-17) puis effectuer les étapes qui suivent.

Choisissons la première façon:

$$[B] = \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-3p^2+2p^3}{r} & \frac{L(p-2p^2+p^3)}{r} & 0 & \frac{(3p^2-2p^3)}{r} & \frac{L(-p^2+p^3)}{r} \\ 0 & \frac{(6-12p)}{L^2} & \frac{(4-6p)}{L} & 0 & \frac{(-6+12p)}{L^2} & \frac{(2-6p)}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice des raideurs de l'élément $[k^e]$ est:

$$[k^e] = \int_{\text{aire}} [B]^T [D] [B] d(\text{aire})$$

$$[k^e] = 2\pi \int_0^1 [B]^T [D] [B] L \cdot r \cdot dp$$

r ne dépend pas de l'abscisse s , il est constant

En fin on trouve

$$[k^e] = 2\pi \frac{E \cdot t}{(1-\nu^2)} [K]$$

Les éléments de $[K]$ sont exposés à la page suivante

$$k_{11} = \frac{r}{L}$$

$$k_{12} = -\frac{V}{2}$$

$$k_{22} = \frac{13}{35} \cdot \frac{L}{r} + \frac{r \cdot L^2}{L^3}$$

$$k_{13} = \frac{V \cdot L}{12}$$

$$k_{34} = -\frac{r}{L}$$

$$k_{23} = -\frac{11}{210} \cdot \frac{L^2}{r} - \frac{r \cdot L^2}{2 \cdot L^2}$$

$$k_{15} = -\frac{V}{2}$$

$$k_{16} = -\frac{V \cdot L}{12}$$

$$k_{25} = \frac{9}{70} \cdot \frac{L}{r} - \frac{r \cdot L^2}{L^3}$$

$$k_{24} = \frac{V}{2}$$

$$k_{34} = -\frac{V \cdot L}{12}$$

$$k_{33} = \frac{1}{105} \cdot \frac{L^3}{r} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r \cdot L^2}{L}$$

$$k_{45} = \frac{V}{2}$$

$$k_{46} = \frac{V \cdot L}{12}$$

$$k_{35} = -\frac{13}{420} \cdot \frac{L^2}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot L^2}{L^2}$$

$$k_{55} = \frac{13}{35} \cdot \frac{L}{r} + \frac{r \cdot L^2}{L^3}$$

$$k_{56} = \frac{11}{210} \cdot \frac{L^2}{r} + \frac{r \cdot L^2}{2 \cdot L^2}$$

$$k_{36} = -\frac{1}{140} \cdot \frac{L^3}{r} + \frac{1}{6} \cdot \frac{r \cdot L^2}{L}$$

$$k_{66} = \frac{1}{105} \cdot \frac{L^3}{r} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r \cdot L^2}{L}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix}$$

SYMETRIQUE

Et la matrice $[H] = [D][B]$ devient:

$$[H] = \begin{bmatrix} -1/L & \frac{V}{r} \cdot (1 - 3p^2 + 2p^3) & \frac{VL}{r} (p - 2p^2 + p^3) & 1/L & \frac{V}{r} (3p^2 - 2p^3) & \frac{LV}{r} (-p^2 + p^3) \\ -V/L & (1 - 3p^2 + 2p^3)/r & \frac{L}{r} \cdot (p - 2p^2 + p^3) & V/L & \frac{1}{r} (3p^2 - 2p^3) & \frac{L}{r} \cdot (-p^2 + p^3) \\ 0 & -\frac{L^2}{12} (-6 + 12p)/L^2 & -\frac{L^2}{12} \cdot (-4 + 6p)/L & 0 & -\frac{L^2}{12} (6 - 12p)/L^2 & -\frac{L^2}{12} (-2 + 6p) \\ 0 & -\frac{VL^2}{12} (-6 + 12p)/L^2 & -V \frac{L^2}{12} (-4 + 6p)/L & 0 & -\frac{VL^2}{12} (6 - 12p)/L^2 & -\frac{L^2}{12} (-2 + 6p) \end{bmatrix}$$

Ainsi lorsqu'on a obtenu les déplacements modaux, on peut déterminer les efforts internes en chaque point de l'élément. Le point considéré est défini par la valeur de p ($p = \frac{x}{L}$) égal à 0 au nœud 1 et à 1 au nœud 2 et variant linéairement entre ces deux bornes.

Donc au nœud 1, $p = 0$
et au nœud 2, $p = 1$

$$\begin{bmatrix} N_{s1} \\ N_{\theta 1} \\ M_{s1} \\ M_{\theta 1} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \cdot [H]_{p=0} \cdot \{\delta^e\}$$

$$\begin{bmatrix} N_{s2} \\ N_{\theta 2} \\ M_{s2} \\ M_{\theta 2} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \cdot [H]_{p=1} \cdot \{\delta^e\}$$

2-2 PLAQUE PLATE CIRCULAIRE : $\phi = 90^\circ$

La figure (III-3) montre un élément type pris dans une plaque plate.

Le rayon $r = r_1 + L \cdot p$

où r_1 est le rayon du premier nœud.

De la même manière qu'avec l'exemple du cylindre on obtient la matrice [B]

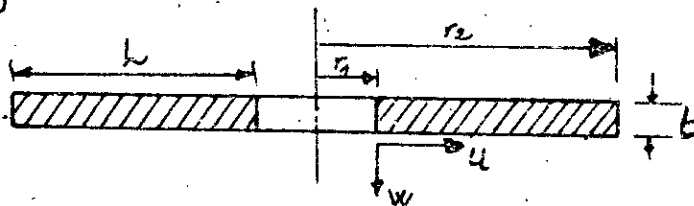


Fig (III-3) 55.

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 \\ 0 & \frac{(1-p)}{r} & 0 & 0 & p/r & 0 \\ \frac{1}{L^2}(-6+12p) & 0 & -\frac{1}{L}(-4+6p) & \frac{1}{L^2}(6-12p) & 0 & -\frac{1}{L}(-2+6p) \\ \frac{1}{L}(-6p+6p^2) & 0 & (1-4p+3p^2) & \frac{1}{L}(6p-6p^2) & 0 & \frac{(-2p+3p^2)}{r} \end{bmatrix}$$

De même pour $[H] = [D].[B]$ on a :

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} + \frac{v(1-p)}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{L} + \frac{vp}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{v}{L} + \frac{(1-p^2)}{r} & 0 & 0 & \frac{v}{L} + \frac{p}{r} & 0 \\ \frac{E^2}{12L^2}(-6+12p) + \frac{vE^2}{12L}(-6p+6p^2) & 0 & -\frac{E^2}{12L}(-4+6p) + \frac{vE^2}{12r}(1-4p+3p^2) & \frac{E^2}{12L^2}(6-12p) + \frac{vE^2}{12L}(6p-6p^2) & 0 & -\frac{E^2}{12L}(-2+6p) + \frac{vE^2}{12r}(-2p+3p^2) \\ \frac{vE^2}{12L^2}(-6+12p) + \frac{E^2}{12L}(-6p+6p^2) & 0 & -\frac{vE^2}{12L}(-4+6p) + \frac{E^2}{12r}(1-4p+3p^2) & \frac{vE^2}{12L^2}(6-12p) + \frac{E^2}{12L}(6p-6p^2) & 0 & -\frac{vE^2}{12L}(-2+6p) + \frac{E^2}{12r}(-2p+3p^2) \end{bmatrix}$$

La matrice des raideurs élémentaire $[k^e]$ est :

$$[k^e] = 2\pi \int_0^1 [B]^T [D] [B] L r dp, \text{ puisque } r = r_1 + Lp$$

$$[k^e] = 2\pi L \int_0^1 [B]^T [D] [B] (r_1 + Lp) dp$$

Enfin on trouve

$$[k^e] = 2\pi \cdot \frac{E \cdot E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k_{11} & & & k_{16} \\ & \dots & & \\ & & k_{ii} & \\ & & & \dots & k_{66} \end{bmatrix}$$

Symétrique

Avec

$$k_{11} = \frac{t^2}{12L^2} \left[6 - 60x - 216x^2 - 144x^3 + (18x^2 + 108x^3 + 108x^4) R_2 - (24x^3 + 48x^4) R_3 + 9x^4 R_4 + (36x^2 + 72x^3 + 36x^4) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{12} = 0$$

$$k_{13} = \frac{-t^2}{12L} \left[4 + 54x + 12x^2 + 72x^3 - (15x^2 + 63x^3 + 54x^4) R_2 + (14x^3 + 24x^4) R_3 - 4,5x^4 R_4 - (6x + 30x^2 + 42x^3 + 18x^4) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{14} = -k_{11}$$

$$k_{15} = 0$$

$$k_{16} = \frac{t^2}{12L} \left[4 - 18x - 90x^2 - 72x^3 + (6x^2 + 45x^3 + 54x^4) R_2 - (10x^3 + 24x^4) R_3 + 4,5x^4 R_4 + (12x^2 + 30x^3 + 18x^4) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{21} = \left[-1,5 - \nu - \frac{x}{L} + 0,5x^2 R_2 + (1 + 2x + x^2) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{23} = 0$$

$$k_{24} = 0$$

$$k_{26} = 0$$

$$k_{25} = \left[0,5 + x - 0,5 - x^2 R_2 - (x + x^2) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{33} = \frac{t^2}{12} \left[-7 - \nu - 40x - 72x^2 - 36x^3 + (11x^2 + 36x^3 + 27x^4) R_2 - (8x^3 + 12x^4) R_3 + 2,25x^4 R_4 + (1 + 8x + 22x^2 + 24x^3 + 9x^4) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{34} = 0$$

$$k_{35} = 0$$

$$k_{36} = \frac{t^2}{12} \left[-1 - 20x - 54x^2 - 36x^3 + (5,5x^2 + 27x^3 + 27x^4) R_2 - (6x^3 + 12x^4) R_3 + 2,25x^4 R_4 + (2x + 11x^2 + 18x^3 + 9x^4) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{44} = k_{11}$$

$$k_{45} = 0$$

$$k_{46} = -k_{11}$$

$$k_{55} = \left[0,5 + \nu - x + 0,5x^2 R_2 + x^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$k_{56} = 0$$

$$k_{66} = \frac{t^2}{12} \left[3 + \nu - 4x - 36x^2 - 36x^3 + (2x^2 + 18x^3 + 27x^4) R_2 - (4x^3 + 12x^4) R_3 + 2,25x^4 R_4 + (4x^2 + 12x^3 + 9x^4) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right]$$

$$x = \frac{r_1}{L}$$

$$R_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2}$$

$$R_3 = \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_1^3}$$

$$R_4 = \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_1^4}$$

III-3 VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE:

31 INTRODUCTION

Les sollicitations extérieures d'un élément (ou structure) sont de deux sortes :

- Concentrées en des points (généralement aux nœuds)
- Réparties sur l'élément

La détermination du vecteur chargement pour le premier cas est simple, elle consiste à correspondre à chaque degré de liberté la charge qui lui est appliquée.

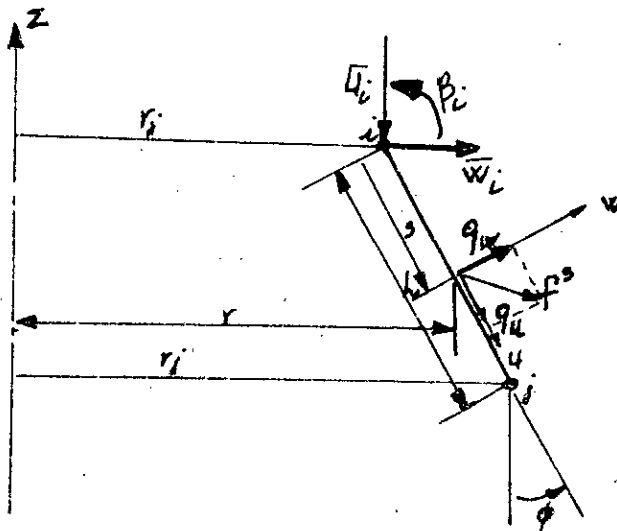
Alors que pour le deuxième cas, on doit remplacer les charges réparties par des charges ponctuelles équivalentes appliquées aux nœuds. Pour cela il faut que le travail du chargement réel soit égal au travail des forces nodales équivalentes.

Deux formes de charges réparties sont possibles :

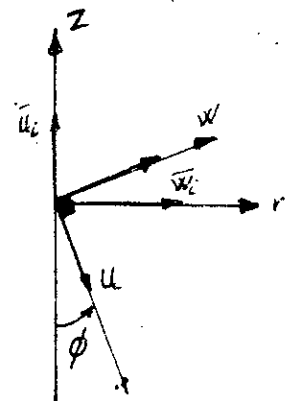
- Charges surfaciques
- Charges volumiques

3-2 CHARGES SURFACIQUE:

Soit une charge de surface $\{f^s\}$ de composante q_u et q_w dans le repère local, comme le montre la figure



$$\{f^s\} = \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix}$$



$$r = r_i + h \cdot p \cdot \sin \phi \quad \text{et} \quad p = \frac{z}{L}$$

Le travail dû à un déplacement virtuel sera :

$$W(r, z) = (q_u \cdot du + q_w \cdot dw) \cdot ds$$

On intègre sur la surface où la charge est répartie

$$W(r, z) = \int_s \begin{Bmatrix} du \\ dw \end{Bmatrix}^T \cdot \{f^s\} \cdot ds$$

$$W(r, z) = \{d\delta\}^T \cdot [A^{-1}]^T \int_s [\Psi(s)]^T \{f^s\} ds$$

et le travail des forces modales équivalentes $\{F_e^s\}$ est :

$$W_{F_e^s} = \{d\delta\}^T \cdot \{F_e^s\}$$

L'égalisation des deux travaux nous donnera donc :

$$\{F_e^s\} = [A^{-1}] \int_s [\Psi(s)]^T \{f^s\} ds$$

$$[N] = [\Psi(s)] \cdot [A^{-1}] \Rightarrow [N]^T = [A^{-1}]^T \cdot [\Psi(s)]^T$$

$$\text{donc } \{F_e^s\} = \int_s [N]^T \{f^s\} ds$$

$$\text{comme } ds = 2\pi r ds$$

$$\text{donc } \{F_e^s\} = 2\pi \int_0^L [N]^T \{f^s\} r ds$$

$$\text{le produit } [N]^T \{f^s\} = [N]^T \cdot \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} q_u \cdot (1-p) \\ q_w \cdot (1-3p^u + 2p^s) \\ L \cdot q_w \cdot (p - 2p^2 + p^3) \\ q_u \cdot (p) \\ q_w \cdot (3p^u - 2p^s) \\ L \cdot q_w \cdot (-p^u + p^s) \end{bmatrix}$$

Nous étudierons deux cas de charges réparties :

- charge répartie sur une forme
- charge répartie triangulaire

Dans le cas de charge uniforme l'intégration donne :

$$A = L \cdot p \quad L dp = ds \quad \text{et} \quad r = r_1 + L p \sin \phi$$

r_1 étant le rayon du premier nœud de l'élément

$$\{F_e^s\} = 2\pi \int_0^L [N]^T \{f^s\} r ds = 2\pi L \int_0^1 [N]^T \{f^s\} (r_1 + L p \sin \phi) dp$$

$$\{F_e^s\} = 2\pi \cdot L \begin{bmatrix} q_u \left(\frac{r_1}{2} + \frac{L}{6} \sin \phi \right) \\ q_w \left(\frac{r_1}{2} + \frac{3L}{20} \sin \phi \right) \\ q_w \left(\frac{Lr_1}{12} + \frac{L^2}{30} \sin \phi \right) \\ q_u \left(\frac{r_1}{2} + \frac{L}{3} \sin \phi \right) \\ q_w \left(\frac{r_1}{2} + \frac{7L}{20} \sin \phi \right) \\ -q_w \left(\frac{Lr_1}{12} + \frac{L^2}{20} \sin \phi \right) \end{bmatrix}$$

Dans le cas du chargement triangulaire on obtient après intégration

$$\{F_e^s\} = 2\pi L \begin{bmatrix} q_u \left[Z_1 \left(\frac{r_1}{6} + \frac{L}{6} \sin \phi \right) + L \left(\frac{1}{6} r_1 + \frac{L}{12} \sin \phi \right) \right] \\ q_w \left[Z_1 \left(\frac{r_1}{2} + \frac{3L}{20} \sin \phi \right) + L \left(\frac{3r_1}{20} + \frac{2L}{30} \sin \phi \right) \right] \\ L^2 q_w \left[Z_1 \left(\frac{r_1}{12L} + \frac{L^2}{30} \sin \phi \right) + \left(\frac{17r_1}{60} + \frac{13L}{60} \sin \phi \right) \right] \\ q_u \left[Z_1 \left(\frac{r_1}{2} + \frac{L}{3} \sin \phi \right) + L \left(\frac{r_1}{3} + \frac{L}{4} \sin \phi \right) \right] \\ q_w \left[Z_1 \left(\frac{r_1}{2} + \frac{7L}{20} \sin \phi \right) + L \left(\frac{7r_1}{20} + \frac{4L}{15} \sin \phi \right) \right] \\ -L^2 q_w \left[Z_1 \left(\frac{r_1}{12L} + \frac{\sin \phi}{20} \right) + \left(\frac{r_1}{20} + \frac{L}{30} \sin \phi \right) \right] \end{bmatrix}$$

où r_1 et z_1 sont les coordonnées du premier nœud de l'élément

Dans où l'une des charges q_u et q_w est uniforme il suffit de combiner convenablement les deux vecteurs donnés ci-dessus

CHAPITRE 4

ORGANISATION DU LOGICIEL ELABORE

IV ORGANISATION DU LOGICIEL ELABORE:

IV-1-INTRODUCTION

L'aspect général de la méthode des éléments finis permet de concevoir un programme d'ordinateur, capable de résoudre tous les problèmes sus-cités (plaques, cylindres, tôles etc...).

On peut décomposer la structure d'un tel programme en quatre parties essentielles qui sont:

a. Entrée des données :

Définition de la géométrie (rayon r , hauteur z , épaisseur t), des matériaux (E, ν), du chargement (nodal, concentré) et conditions aux limites.

b. Bibliothèque d'élément :

Évaluation des matrices des raideurs élémentaires $[K^e]$ et du vecteur chargement $\{f^e\}$ en cas de charges réparties.

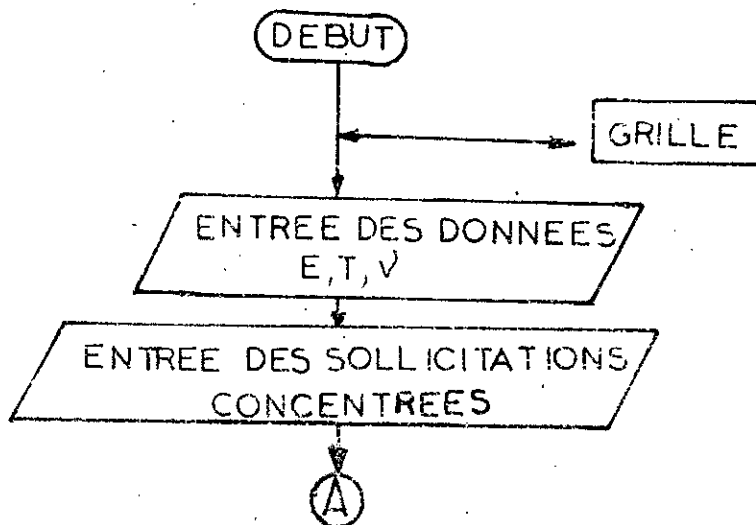
c. Résolution :

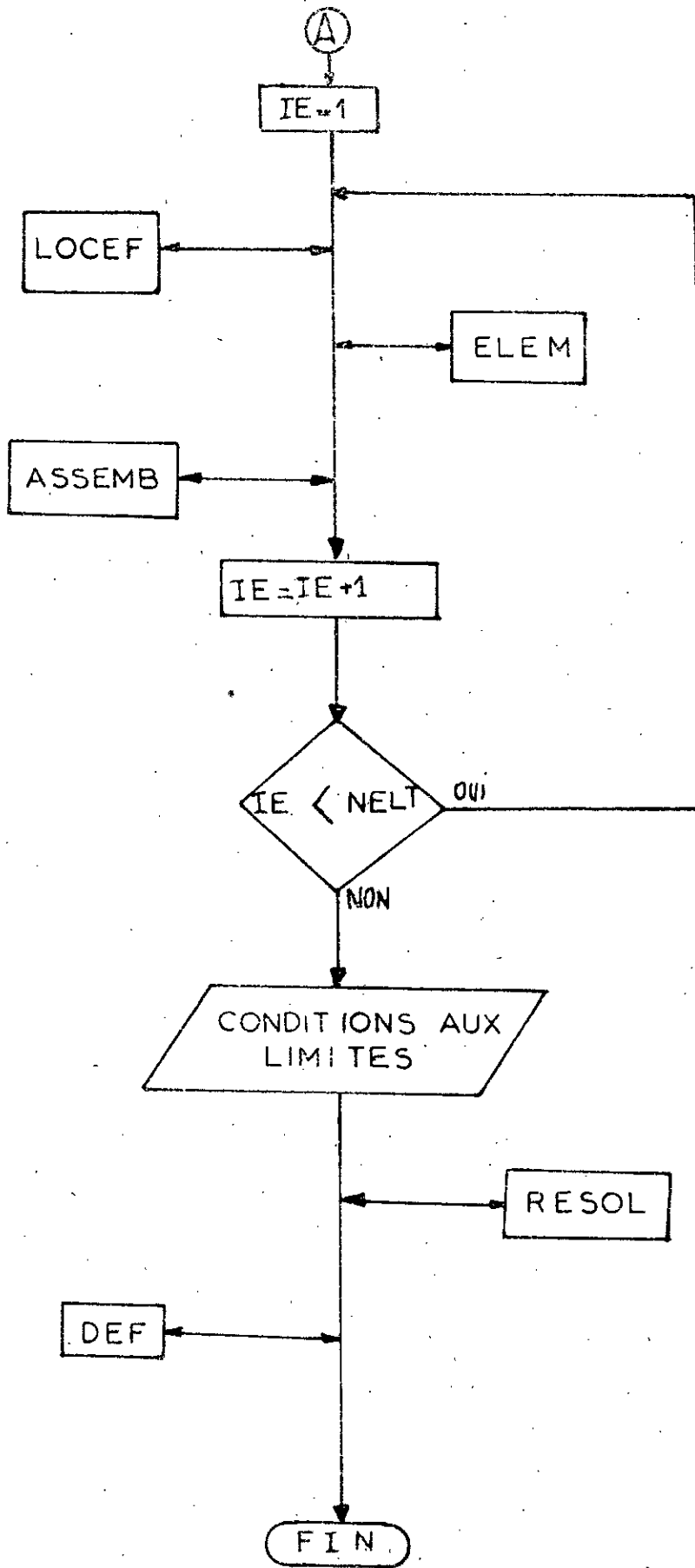
Construction et résolution du modèle mathématique représentant le système entier.

d. Résultats :

Présentation des déplacements, contraintes ou efforts internes par unité de longueur, calculés.

IV-2-ORGANIGRAMME:





IV-3-PRESENTATION DETAILLEE DU PROGRAMME:

Il se compose d'un programme principal, faisant appel à six sous-programmes (chacun ayant sa fonction spécifique qu'on indiquera ci-après).

3-1-PROGRAMME PRINCIPAL:

Il est utilisé pour l'introduction des données et l'impression de celles-ci (pour la vérification) par exemple:

- Les paramètres physiques (caractéristiques géométriques et mécaniques de la coque comme l'épaisseur, le module de YOUNG, le coefficient de POISSON ...)
- Il fait appel aux différents sous-programmes.
- Les sollicitations modales (concentrées)
- Les sollicitations surfaciques (q_u et q_w)
- Les conditions aux limites:

LES CONDITIONS AUX LIMITES:

Il existe plusieurs méthodes pour introduire les conditions aux limites dans le système d'équations.

1-METHODE DU TERME DIAGONAL DOMINANT:

Cette méthode consiste à additionner aux termes diagonaux de la matrice des raideurs globale $[K]$ correspondantes aux déplacements fixés un grand nombre (d) égal à 10^{30} , c'est à dire remplacer K_{ii} par $K_{ii} + d$ et F_i par $d \bar{u}_i$.

Nous avons donc

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} + d & \dots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ d \bar{u}_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

L'équation s'écrit :

$$d \cdot u_i + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j \right) = d \cdot \bar{u}_i$$

Comme $k_{ij} \ll d$ on peut alors dire que

$$d \cdot u_i \approx d \cdot \bar{u}_i \text{ de là, } u_i \approx \bar{u}_i$$

- ceci n'est valable que si

$$d \cdot \bar{u}_i \gg \sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot u_j$$

Nous choisissons cette méthode parce qu'elle est très simple à programmer.

2-METHODE DU TERME UNITE SUR LA DIAGONALE:

Elle consiste à remplacer les termes diagonaux de la matrice $[k]$ correspondants aux déplacements fixés par l'unité et remplacer le reste des lignes et des colonnes correspondantes par des zéro c'est à dire modifier pour chaque relation $u_i = \bar{u}_i$ le vecteur $\{F\}$, pour la matrice $[k]$ tels que :

$$F_j = F_j - k_{ji} \cdot \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n \quad j \neq i$$

$$F_i = \bar{u}_i$$

$$k_{ij} = k_{ji} = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad j \neq i$$

$$k_{ii} = 1$$

on a :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1,i-1} & 0 & k_{1,i+1} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i-1,1} & \dots & k_{i-1,i-1} & & k_{i-1,i+1} & \dots & k_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ k_{i+1,1} & \dots & k_{i+1,i-1} & & k_{i+1,i+1} & \dots & k_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{n,i-1} & 0 & k_{n,i+1} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - k_{1i} \bar{u}_i \\ \vdots \\ F_{i-1} - k_{i-1,i} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i \\ F_{i+1} - k_{i+1,i} \bar{u}_i \\ \vdots \\ F_n - k_{ni} \bar{u}_i \end{bmatrix}$$

3- LA METHODE DE SUPPRESSION DES EQUATIONS:

Elle consiste à restructurer la matrice de sorte à éliminer les lignes et les colonnes correspondantes aux déplacements fixés.

32 SOUS-PROGRAMMES:

3-2-1- SOUS-P:GRILLE

Ce sous-programme consiste à lire le nombre total d'éléments et le nombre total de nœuds ensuite de lire les coordonnées r et z de chaque nœud et de les stocker dans la table de coordonnées globale appelée CORG, qui est imprimée pour la vérification.

Cette table se présente sous la forme suivante :

		Nœuds					
		1	2	3	4	---	n_n
Coord	r	r_1	r_2	r_3	r_4	---	r_n
	z	z_1	z_2	z_3	z_4	---	z_n

n_n : nbre de nœuds Totale.

La deuxième partie de ce sous-programme, consiste en la création d'une table de connectivité qui définit chaque élément par la liste des numéros de ses nœuds. Cette table se présente sous la forme ci-dessous :

		Elements					
		1	2		e		n_e
Nœuds	1				i_1		
	2				i_2		
	3				i_3		
		
	n_n				i_n		

n_e = nbre d'éléments Totale.

Exemple : Choisissons un exemple de coque avec 4 éléments et 5 nœuds voir fig (III-1)

Table de coordonnées :

		Nœuds				
		1	2	3	4	5
Coord	r	2,0	4,0	5,5	6,5	6,5
	z	0,0	2,0	4,0	6,0	8,0

Table de connectivités :

		Elements			
		1	2	3	4
Nœuds	1	1	2	3	4
	2	2	3	4	5

3-2-2 - SOUS-P: LOCEF

Lors de l'étude de l'élément on a considéré trois degrés de liberté par nœud, l'élément ayant deux nœuds, soit au total six degrés de liberté par élément.

La matrice de rigidité élémentaire est d'ordre 6×6 .

Donc lors il est indispensable d'introduire un vecteur KLOC afin de localiser les degrés de liberté pour chaque nœud.

En prenant toujours l'exemple de la figure (III-1), définissons pour chaque élément la table de localisation qui donne la position de chaque terme $\{u_n\}$ dans $\{U\}$:

		Nœuds	
		1	2
Elements	1	1	2
	2	2	3
	3	3	4
	4	4	5

$$\{u_1\} = \{u_1^1, u_2^1\} = \{u_1, u_2\}$$

$$\text{LOCE}(1) = \{1, 2\}$$

$$\{u_2\} = \{u_1^2, u_2^2\} = \{u_2, u_3\}$$

$$\text{LOCE}(2) = \{2, 3\}$$

3-2-3- SOUS-P: ASSEMB

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale $[K]$ et du vecteur global des sollicitations $\{F\}$ à partir des matrices élémentaires $[k^e]$ et des vecteurs élémentaires des sollicitations $\{f\}$

3-2-3-1 PRINCIPE D'ASSEMBLAGE:

Il comporte deux étapes :

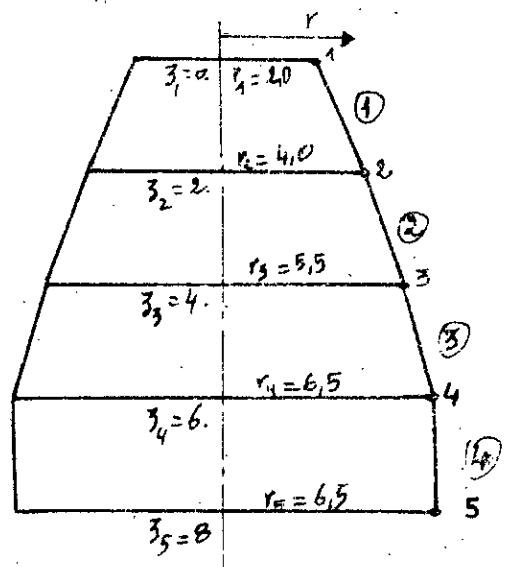
- Construction de la matrice élémentaire étendue $[k^e]$ et du vecteur étendu $\{F^e\}$ de chaque élément fig (II-1)
- Addition des matrices étendues et des vecteurs étendus, fig (II-1-(b))
- Pour faire l'addition on utilise la table de localisation qui a déjà été définie pour localiser le numéro du degré de liberté i de chaque nœud de chaque élément.

3-2-3-2 ALGORITHME DE L'ASSEMBLAGE:

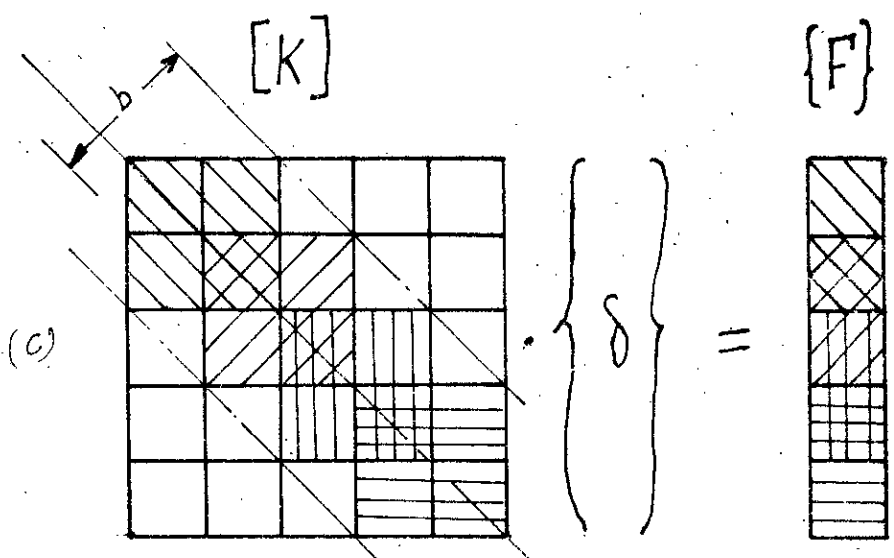
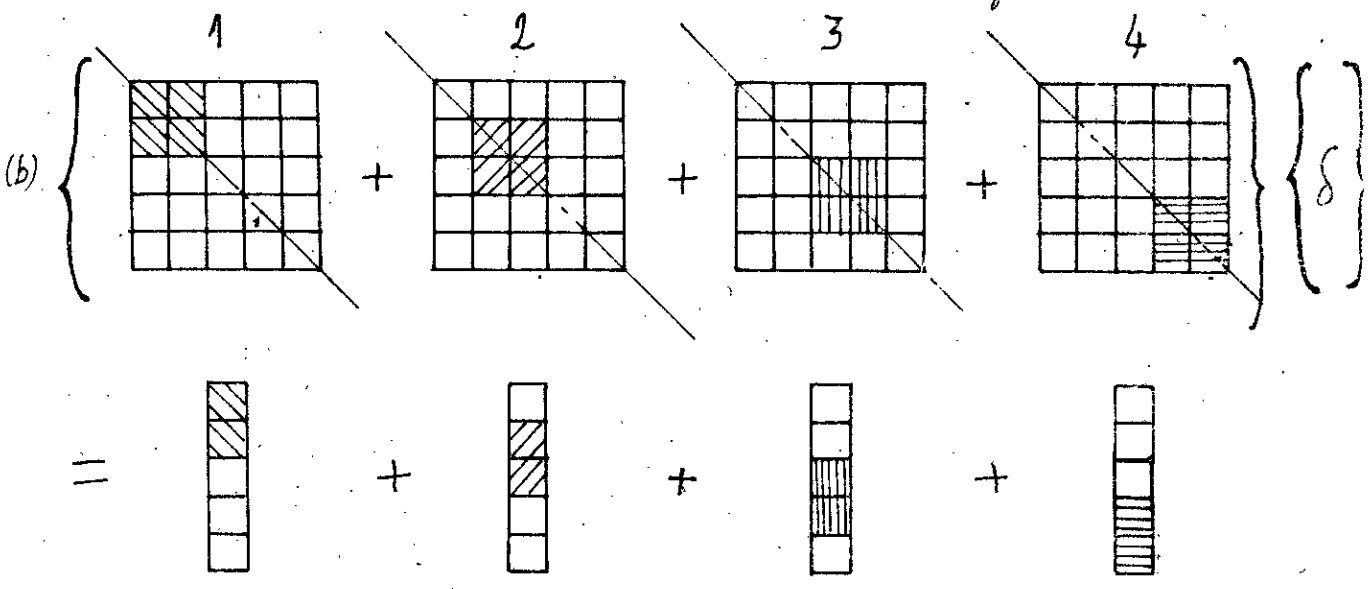
- Initialiser les termes $[K]$ et $\{F\}$ à zéro
- Pour chaque élément e :
 - Ajouter chaque terme f_i du vecteur élémentaire des sollicitations au terme F_I du vecteur global.
c.à.d. $F_I = F_I + f_i$ $i = 1, 2, \dots$ nombre de degrés de liberté par élément
- où $I = LOCE(i)$
- Ajouter chaque terme k_{ij} de la matrice élémentaire étendue au terme K_{IJ} de la matrice globale
c.à.d. $K_{IJ} = K_{IJ} + k_{ij}$
où $I = LOCE(i)$ $i = 1, 2, \dots$ n^{bre} de d.l par élément
 $J = LOCE(j)$ $j = 1, 2, \dots$ n^{bre} de d.l par élément

3-2-3-3 EXEMPLE:

Preons un exemple de coque avec 4 éléments, 5 noeuds et un degré de liberté par noeud.



(a)



Fig(IV-1) 48

Dans la méthode des éléments finis la résolution du système d'équations $[K]\{\delta\} = \{F\}$ est très importante.

Il existe deux catégories de méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires.

- Les méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée.
- Les méthodes directes qui conduisent à la solution en un nombre d'opérations déterminé.

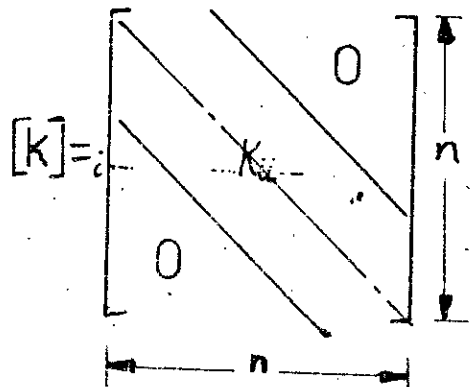
Dans cette catégorie nous citerons la méthode d'élimination de Gauss, la méthode de Gauss-Seidel, la méthode de Cholesky, la méthode de Gauss par bande etc...

Voilà que nous avons un système $[K]\{\delta\} = \{F\}$ avec $[K]$ une matrice bande symétrique avec une largeur de bande relativement petite, nous avons opté pour la méthode de Gauss par bande symétrique, car c'est une méthode qui permet un gain d'espace mémoire considérable du fait qu'on stocke uniquement les éléments de la diagonale et de la demi-bande.

L'autre avantage de cette méthode est la réduction du nombre d'opérations effectuées, voire un gain de temps important. Le nombre d'opérations est égal à $\frac{n \cdot b}{3}$, alors qu'il est égal à $\frac{n^3}{3}$ dans la méthode de Gauss, (b étant la largeur de demi-bande).

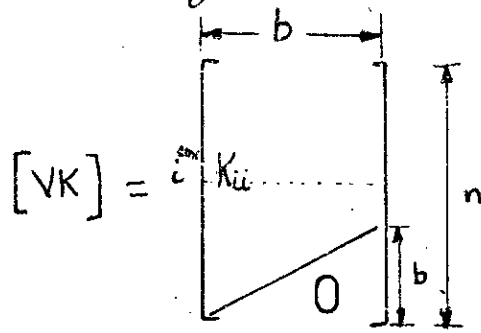
Principe de la méthode :

Nous avons une matrice ayant la structure ci-contre.



Au cours de l'assemblage cette matrice est réduite et stockée

dans une table rectangulaire de la manière suivante :



$$K_{IJ} = VK_{ij} \quad n \begin{cases} i = I \\ j = J - I + 1 \\ 1 \leq I \end{cases}$$

- Il faut stocker $n(b+1)$ éléments réels incluant $b(b+1)/2$ valeurs nulles, ensuite la résolution se fait par le procédé de triangularisation de Gauss, tout en tenant compte que la matrice est redressée.

3-2-5- SOUS- P: ELEM

Il est utilisé pour le calcul de la matrice de raideur élémentaire par intégration numérique (méthode de Simpson) du double produit $[B]^T [D] [B]$ qui est donné explicitement en fonction des caractéristiques mécaniques et physiques de l'élément.

En plus de la matrice élémentaire, ce sous-programme calcule le vecteur force correspondant aux charges réparties.

3-2-6- SOUS- P: DEF

C'est un sous-programme qui est appelé après la résolution du système, il calcule les déformations et les efforts internes à partir des déplacements, à l'aide des relations.

$$\{E\} = [B] \{\delta\} \quad \text{et} \quad \{\sigma\} = [H] \{\delta\}$$

CHAPITRE 5

EXEMPLES

ET

APPLICATIONS

Dans ce chapitre on applique l'élément étudié à plusieurs exemples pratiques :

1. Plaques annulaires
 - a. Chargée transversalement à son bord intérieur et articulée à son bord extérieur
 - b. Chargée transversalement à son bord intérieur et encastree à son bord extérieur
 - c. Chargée transversalement à son bord extérieur et encastree à son bord intérieur
2. Cylindre encastree à sa base et chargé radialement à son extrémité
3. Reservoir cylindrique vertical plein d'eau et encastree à sa base
4. Dôme sphérique encastree à sa base, présentant une ouverture à son sommet et chargé par un moment uniformément réparti sur ce bord

Des graphes sont présentés pour comparer les résultats du logiciel élaboré aux résultats théoriques

On présente aussi des tableaux donnant l'erreur relative et le temps d'exécution pour différents maillages.

EXEMPLE DE PLAQUE ANNULAIRE ARTICULEE AU BORD EXTERIEUR
 AVEC CHARGE VERTICALE CONCENTREE AU BORD INTERIEUR

MODULE DE YOUNG (E)= 13400.0 (t/cm²)
 COEFFICIENT DE POISSON (V)= 0.300
 EPAISSEUR (T)= 1.000 (cm)

SOLLICITATION SURFACIQUE (qz) = 0.00000E+00
 SOLLICITATION SURFACIQUE (qr) = -0.00000E+00

BORD EXTERIEUR R2 = 15 cm
 BORD INTERIEUR R1 = 5 cm

NOEUD : 1
 SOLLICITATION AU D.L 1 = 0.10000E+01 (t)

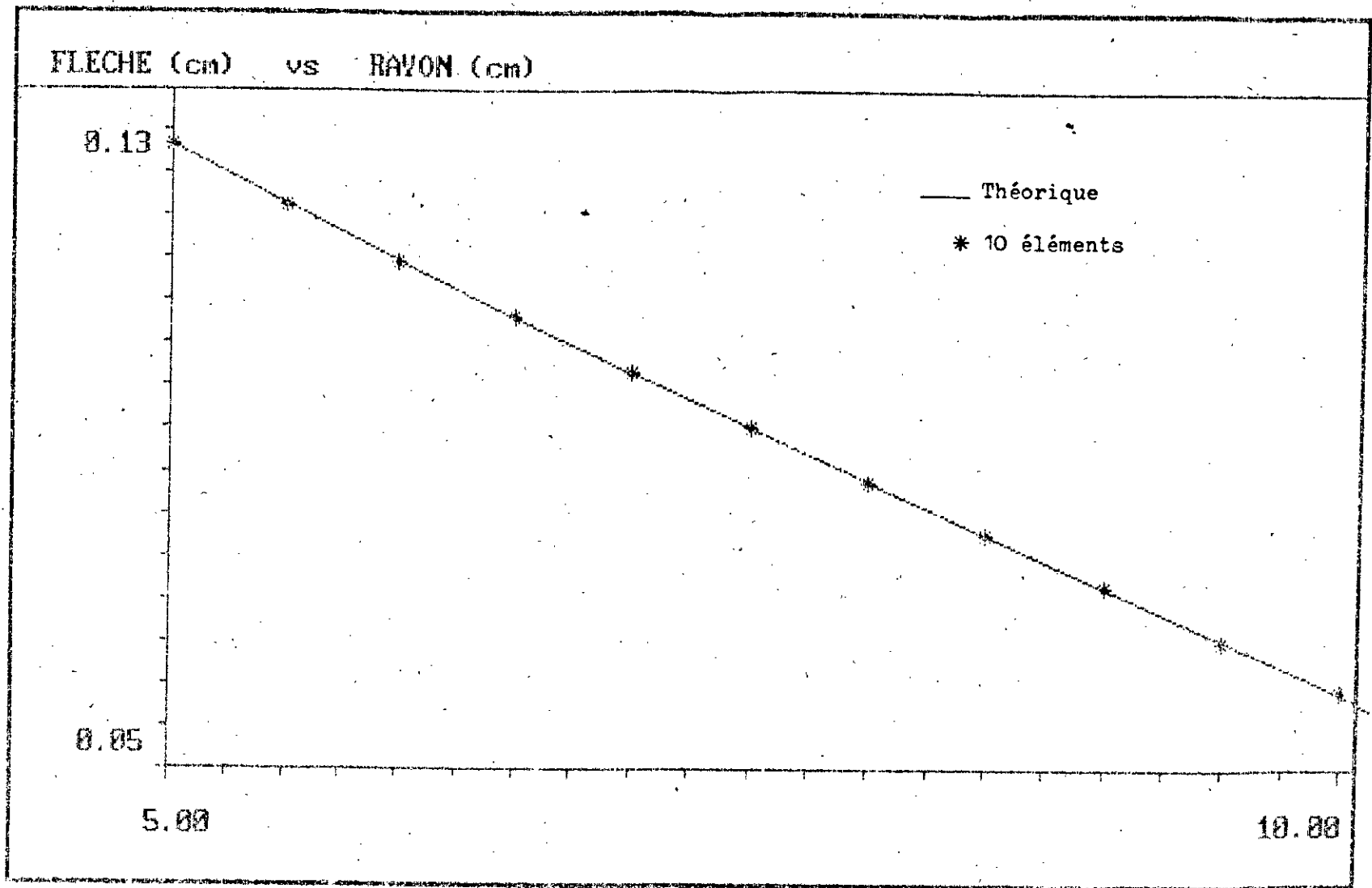
W max : fleche maximale (cm)
 M(s) max : moment meridien maximal (t.cm/cm)

! NBRÉ D ELTS !	W max	! ERREUR % !	M(s)max	! ERREUR % !
! 2 !	! 0.1230685E+00 !	! -0.099 !	! 0.35979570E+00 !	! 0.228 !
! 5 !	! 0.1231855E+00 !	! -0.048 !	! 0.31592815E+00 !	! 0.078 !
! 10 !	! 0.1231910E+00 !	! -0.0004 !	! 0.29759020E+00 !	! 0.016 !
! 20 !	! 0.1231915E+00 !	! -0.00 !	! 0.29406005E+00 !	! 0.004 !
! THEORIQUE !	! 0.1231915E+00 !	! %%% !	! 0.29291717E+00 !	! %%% !

TEMPS D EXECUTION

! NBRÉ D ELTS !	ELAPSED TIME	CPU TIME
! 2 !	! 00:00:09.30 !	! 0:00:03.14 !
! 5 !	! 00:00:11.77 !	! 0:00:07.67 !
! 10 !	! 00:00:28.50 !	! 0:00:14.93 !
! 20 !	! 00:01:13.17 !	! 0:00:30.08 !

-13-



FLECHE D'UNE PLAQUE ANNULAIRE CHARGE A SON BORD INTERIEUR

MOMENT (t cm/cm) vs RAYON (cm)

0.30

0.00

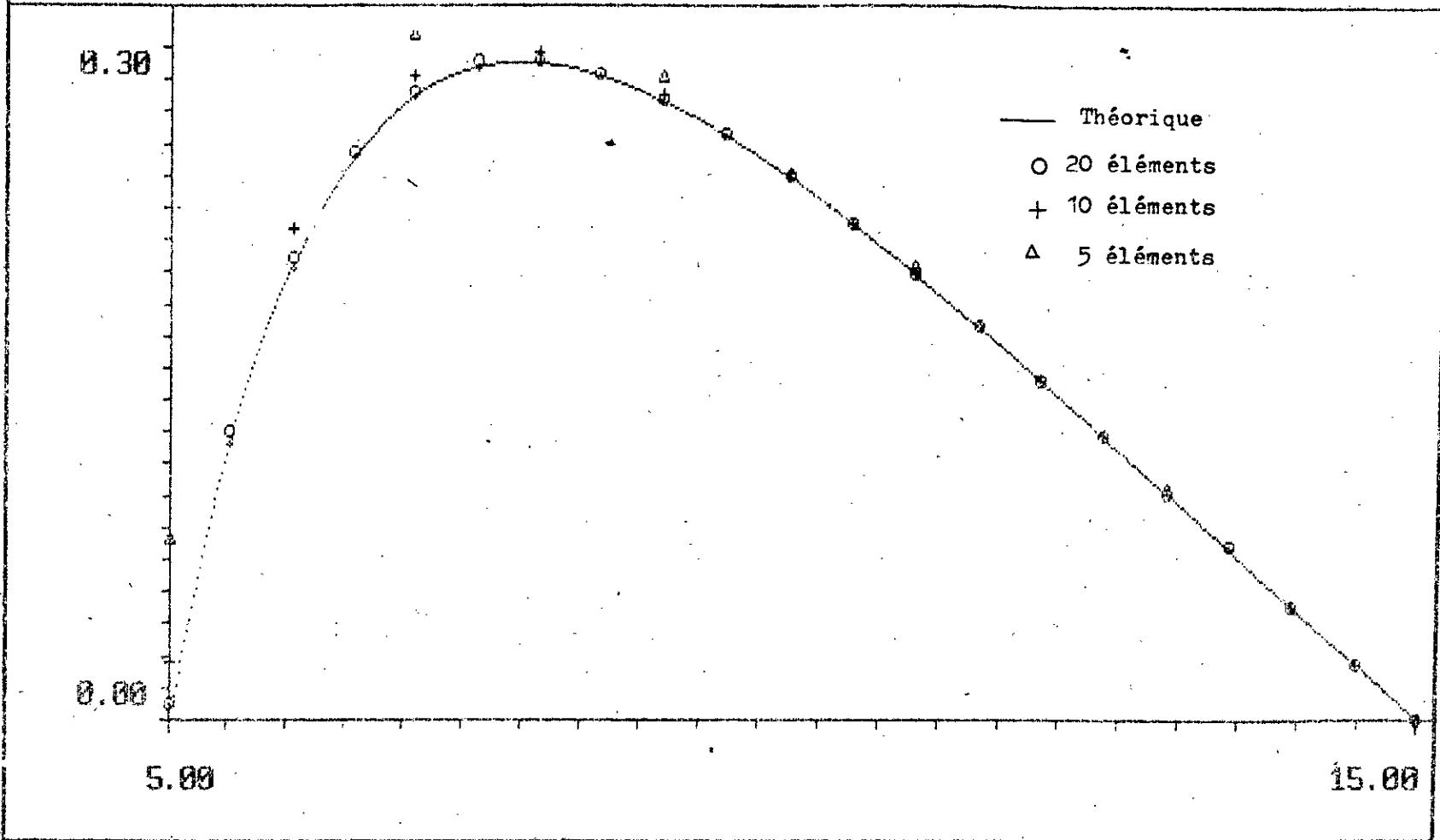
5.00

15.00

- Théorique
- 20 éléments
- + 10 éléments
- △ 5 éléments

COURBE DU MOMENT MERIDIEN DE FLEXION D'UNE PLAQUE ANNULAIRE

-14-



EXEMPLE DE PLAQUE ANNULAIRE ENCASTREE AU BORD EXTERIEUR
 AVEC CHARGE VERTICALE CONCENTREE AU BORD INTERIEUR

=====
 MODULE DE YOUNG (E) = 13400.0 (t/cm²)
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0.300
 EPAISSEUR (T) = 1.000 (cm)

SOLLICITATION SURFACIQUE (qz) = 0.00000E+00
 SOLLICITATION SURFACIQUE (qr) = 0.00000E+00

BORD EXTERIEUR R2 = 15 cm
 BORD INTERIEUR R1 = 5 cm

NOEUD : 1
 SOLLICITATION AU D.L 1 = 0.10000E+02

W max : flèche maximale (cm)
 M(s) max : moment meridien maximal (t.cm/cm)

! NBRE D'ELTS !	W max	! ERREUR % !	M(s)max	! ERREUR % !
! 2 !	! 0.2889591E-01 !	! -.0042 !	! 0.8902634E+00 !	! +.544 !
! 5 !	! 0.2889702E-01 !	! -.0025 !	! 0.8862350E+00 !	! +.0892 !
! 10 !	! 0.2889711E-01 !	! -.0003 !	! 0.8856420E+00 !	! +.0222 !
! 20 !	! 0.2889712E-01 !	! -.0000 !	! 0.8854942E+00 !	! +.0055 !
! THEORIQUE !	! 0.2889712E-01 !	! %%% % !	! 0.8854451E+00 !	! %%% % !

TEMPS D EXECUTION

! NBRE D ELETS !	ELAPSED TIME	! CPU TIME !
! 2 !	! 00:00:11.86 !	! 0:00:03.29 !
! 5 !	! 00:00:22.06 !	! 0:00:07.86 !
! 10 !	! 00:00:37.67 !	! 0:00:15.36 !
! 20 !	! 00:00:59.52 !	! 0:00:30.51 !

EXEMPLE DE PLAQUE ANNULAIRE ENCASTREE AU BORD INTERIEUR
 AVEC CHARGE VERTICALE CONCENTREE AU BORD EXTERIEUR

=====
 MODULE DE YOUNG (E)= 13400.0 (t/cm²)
 COEFFICIENT DE POISSON (V)= 0.300
 EPAISSEUR (T)= 1.000 (cm)

SOLLICITATION SURFACIQUE (qz) = 0.00000E+00
 SOLLICITATION SURFACIQUE (qr) = 0.00000E+00

BORD EXTERIEUR R2 = 15 cm
 BORD INTERIEUR R1 = 5 cm

NOEUD : 1
 SOLLICITATION AU D.L 1 = 0.10000E+02 (t)

U max : flèche maximale (cm)
 M(s) max : moment meridien maximal (t.cm/cm)

! NBRE D'ELTS !	U max	! ERREUR %!	M(s)max	! ERREUR % !
! 2 !	! 0.3503066E-01 !	! -.4112 !	! 0.1723666E+01 !	! -14.210 !
! 5 !	! 0.3516931E-01 !	! -.0171 !	! 0.1931896E+01 !	! -3.8485 !
! 10 !	! 0.3517489E-01 !	! -.0017 !	! 0.1985187E+01 !	! -1.194 !
! 20 !	! 0.3517530E-01 !	! -.0003 !	! 0.2007375E+01 !	! -.8944 !
! THEORIQUE !	! 0.3517531E-01 !	! %%%%	! 0.2009172E+01 !	! %%%%

TEMPS D EXECUTION

! NBRE D EELTS !	ELAPSED TIME	CPU TIME
! 2 !	! 00:00:06.25 !	! 0:00:03.07 !
! 5 !	! 00:00:14.39 !	! 0:00:07.60 !
! 10 !	! 00:00:42.31 !	! 0:00:15.05 !
! 20 !	! 00:01:08.11 !	! 0:00:30.49 !

EXEMPLE D UN CYLINDRE CHARGE
 RADIALEMENT A SON EXTREMITÉ ET ENCASTRE A SA BASE

MODULE DE YOUNG (E) = 10000000.0 kg/cm²
 COEFFICIENT DE POISSON (V) = 0.300
 EPAISSEUR (T) = 0.010 cm

SOLLICITATION SURFACIQUE (qr) = 0.000000E+00
 SOLLICITATION SURFACIQUE (qz) = 0.000000E+00

NOEUD : 1
 SOLLICITATION AU D.L 2 = 0.31416E+02 kg

W : déplacement horizontal
 BETA : rotation
 M(s) : moment meridien

! NBRE D ELETS !	W max	!ERREUR %!	M(s) max	!ERREUR % !
! 9	! 0.2814661E-02	! -2.07 !	-0.5651133E-01	! +1.33 !
! 14	! 0.2861441E-02	! -0.45 !	-0.5759035E-01	! +3.27 !
! 24	! 0.2871244E-02	! -0.15 !	-0.5635041E-01	! +1.04 !
! 45	! 0.2873512E-02	! -0.03 !	-0.5589219E-01	! +0.22 !
! THEORIQUE -	! 0.2874257E-02	! %%%%	-0.5576870E-01	! %%%%

TEMPS D'EXECUTION

! NBRE D ELETS !	ELAPSED TIME	CPU TIME
! 9	! 00:00:27.50	! 0:00:12.12 !
! 14	! 00:00:44.34	! 0:00:19.36 !
! 24	! 00:01:26.36	! 0:00:31.73 !
! 45	! 00:03:07.05	! 0:00:58.15 !

- 78 -

MOMENT lbf in/in vs COTE Z(in)

0.06

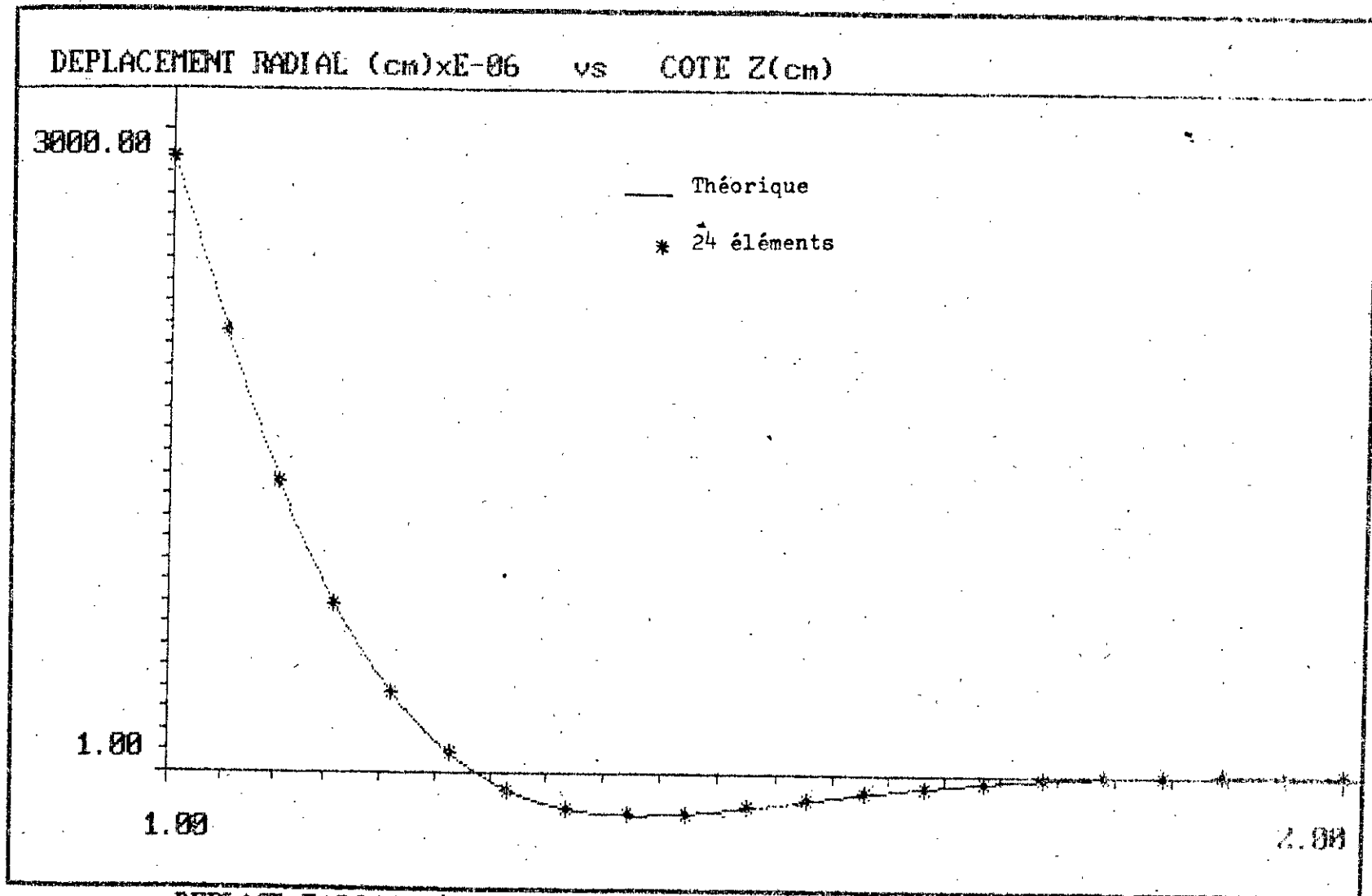
0.00

1.00

2.00

- Théorique
- △ 9 éléments
- + 14 éléments
- 24 éléments

MOMENT MERIDIEN D'UN CYLINDRE CHARGE RADIAL A SON EXTREMITÉ



DEPLACT RADIAL D'UN CYLINDRE CHARGE RADIALI A SON EXTREMITÉ

-79-

EXEMPLE D'UN RESEVOIR CYLINDRIQUE PLEIN D'EAU
 =====

MODULE DE YOUNG (E)= 10000000. (t/in2)
 COEFFICIENT DE POISSON (V)= .25
 EPAISSEUR (T)= 14. (in)
 RAYON (R)= 360. (in)
 HAUTEUR (H)= 312. (in)

SOLLICITATION SURFACIQUE (qz) = 0.00000E+00
 SOLLICITATION SURFACIQUE (qr) = 0.36130E-01

W max : flèche maximale (in)
 M(s) max : moment meridien maximal (t.in/in)

NBRE D ELETS	W max	!ERREUR % !	M(s)max	ERREUR % !
8	.6280836E-02	-.4862	13928.54	-.2421
22	.6280877E-02	-.4856	13961.41	-.00673
29	.6280877E-02	-.4856	13962.29	-.00043
THEORIQUE	.6311528E-02	%%%%%	13962.35	%%%%%

TEMPS D EXECUTION

NBRE D ELETS	ELAPSED TIME	CFU TIME
8	00:00:59.68	0:00:12.08
22	00:01:53.13	0:00:34.09
29	00:03:02.13	0:00:42.70

DEPLACT HORIZI (in) vs COTE Z(in).

650.00

— Théorique
+ 22 éléments

0.05

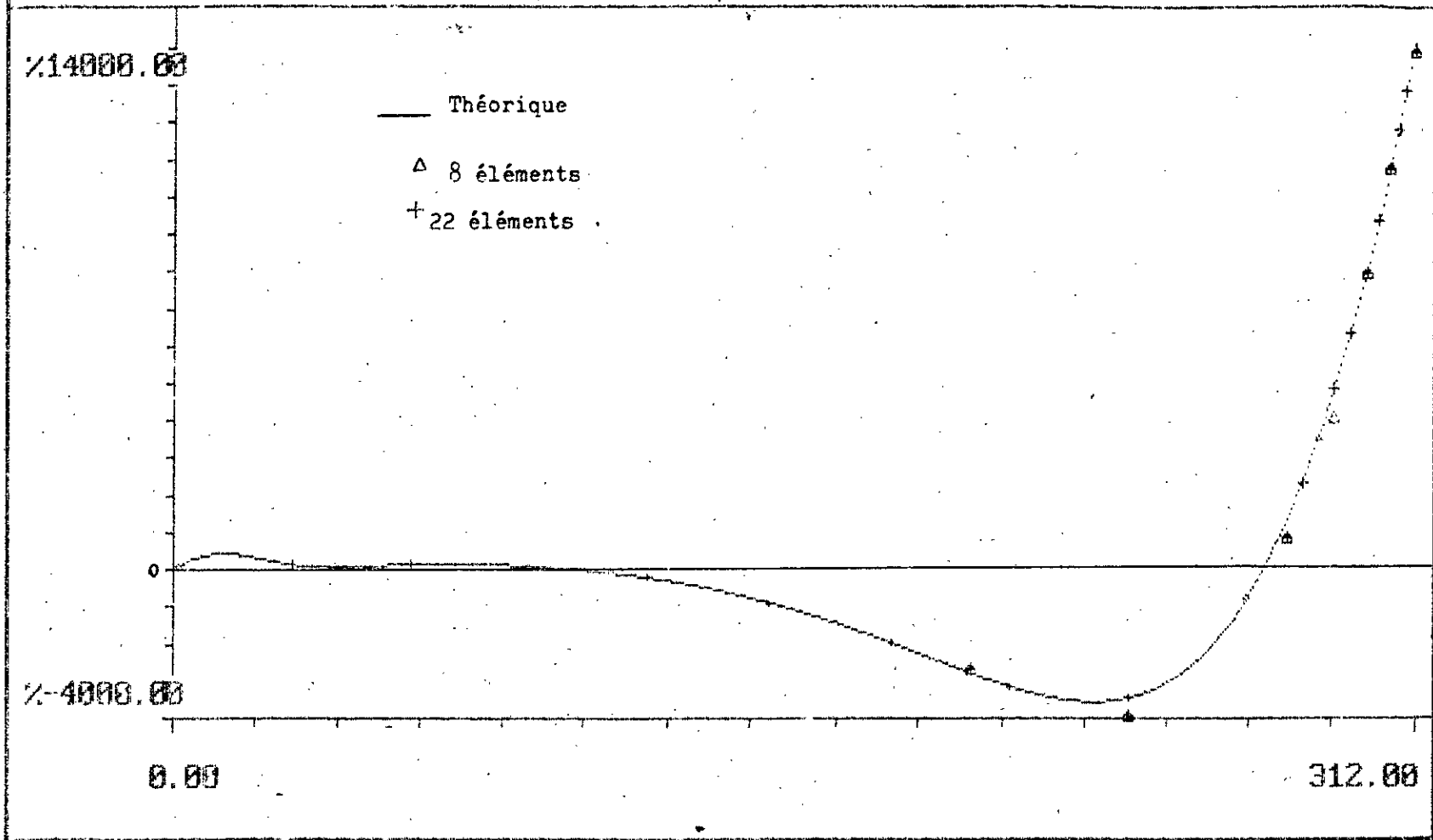
1.00

307.00

DEPLACT HORIZONTAL DES PAROIS D'UN RESERVOIR REMPLI D'EAU

-81-

MOMENT (t. in /in) vs PROFONDEUR Z(in)



MOMENT MERIDIEN D' UN RESERVOIR PLEIN D' EAU

EXEMPLE D'UN DOME PRESENTANT UNE
 OUVERTURE A SA PARTIE SUPERIEURE
 SOUMIS A UN MOMENT, A SON BORD
 ET ENCASTRE A SA BASE

=====

MODULE DE YOUNG (E)= 10000000.00 (kg/cm²)
 COEFFICIENT DE POISSON (v)= 0.33
 EPAISSEUR (T)= 1.00 (cm)

SOLLICITATION SURFACIQUE (qr)= 0.00
 SOLLICITATION SURFACIQUE (qz)= 0.00

NOEUD : 1
 SOLLICITATION AU DDL 3 (Ms)= 1.00 (kg.cm/cm)

W : déplacement horizontal
 Ms : moment meridien

! NBRE D ELTS !	W max	! ERREUR %!	M(s)max	! ERREUR %!
! 14 !	0.1588081E-04	! -0.08 !	-0.1006298E+01	! +0.63 !
! 28 !	0.1588927E-04	! -0.02 !	-0.1001757E+01	! +0.17 !
! 56 !	0.1589129E-04	! -0.01 !	-0.1000463E+01	! +0.04 !
! THEORIQUE !	0.1589000E-04	! %%%%	-0.1000000E+01	! %%%%

TEMPS D EXECUTION

! NBRE D EELTS !	ELAPSED TIME	! CPU TIME !
! 14 !	00:00:34.55	! 0:00:26.89 !
! 28 !	00:01:13.06	! 0:00:53.52 !
! 56 !	00:04:05.93	! 0:01:50.88 !

CONCLUSION

ET

RECOMMENDATIONS

1. CONCLUSION

La méthode des éléments finis s'est avérée être un outil très puissant dans l'analyse des structures complexes. Les coques étant un type de structures des plus complexes leur analyse structurelle par la méthode des éléments finis s'avère une nécessité.

L'étude des coques de révolution par cette technique est considérablement simplifiée grâce à l'utilisation de l'élément "tronc de cône". L'utilisation de cet élément s'est accompagnée par l'introduction du concept de lignes modales remplaçant celui des joints modaux.

Parmi les avantages de ce changement citons l'absence du problème de continuité aux interfaces des éléments et une diminution importante du nombre de données et du temps d'exécution du logiciel élaboré.

Les exemples traités montrent l'excellent accord entre la théorie et les résultats numériques, spécialement dans le cas de plaques et des cylindres où la modélisation par éléments tronconiques reproduit exactement la géométrie de la structure réelle, ce qui permet d'obtenir des résultats très satisfaisants avec un nombre d'éléments relativement faible. Dans le cas des domes, il faut affiner le maillage de manière plus poussée afin de reproduire avec précision la configuration réelle de la structure.

Nous attirons l'attention du lecteur qu'un examen de la littérature spécialisée a montré que les relations et les matrices utilisées pour le développement des matrices des "raideurs" et "contraintes" sont entachées d'erreurs (résultats erronés

et conventions de signes incompatibles avec les expressions exactes...)
 Une application systématique des résultats proposés par ces auteurs conduirait inévitablement à une mauvaise appréciation du comportement réel de ces structures, voire à des dégâts structurels relativement considérables.

2. RECOMMANDATIONS

Dans le cadre de ce travail nous avons considéré uniquement le cas des coques de révolution soumises à un chargement axisymétrique, cependant l'élément utilisé c'est à dire l'élément tronconique peut être également utilisé pour l'analyse des coques soumises à un chargement non symétrique.

Dans ce cas la matrice des raideurs élémentaire devient une matrice 8×8 au lieu de 6×6 . Le chargement non symétrique introduit un cisaillement et un déplacement dans la direction circonferentielle ce qui conduit l'addition d'une ligne et d'une colonne à la matrice de rigidité à chaque nœud de l'élément.

Les déplacements de l'élément de coque sont écrits sous forme de séries de Fourier de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U &= U(\rho) \cdot \sum \cos n\theta & W &= W(\rho) \cdot \sum \cos n\theta \\ \beta &= \beta(\rho) \cdot \sum \cos n\theta & V &= V(\rho) \cdot \sum \sin n\theta \end{aligned}$$

où V représente le déplacement dans la direction circonferentielle.

La matrice de rigidité devient une fonction de n et peut être comme suit :

$$[K] = [K]_{n=0} + [K]_{n=1} + [K]_{n=2} + \dots$$

Les charges agissant sur la structure sont également écrites en séries de Fourier

$$F_z = \sum F_{zn} \cdot \cos n\theta$$

$$M = \sum M_n \cdot \cos n\theta$$

$$F_r = \sum F_{rn} \cdot \cos n\theta$$

$$Q = \sum Q_n \cdot \sin n\theta$$

où Q est l'effort tranchant dans la direction circonférentielle.
Le terme $n=0$ correspond au cas de chargement symétrique

La solution du cas général non symétrique consiste à écrire les charges appliquées sous la forme de séries de Fourier et déterminer les déplacements pour chaque terme de la série

$$\{F\}_{n=0} = [K]_{n=0} \{\delta\}_{n=0}$$

$$\{F\}_{n=1} = [K]_{n=1} \{\delta\}_{n=1}$$

etc ...

Pour chaque valeur de n , les matrices de raideur élémentaires sont assemblées comme il a été déjà fait pour le cas de chargement symétrique ($n=0$). Les déplacements sont déterminés en additionnant les composantes de déplacement correspondant à $n=0, 1, 2, \dots, n$

Cette procédure devient évidemment nécessaire s'il faut que n soit grand pour représenter d'une façon adéquate le chargement par des séries de Fourier

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ S. TIMOSHENKO
Théorie des plaques et coques
- /2/ J. COURBON
Plaques minces élastiques
- /3/ O.C ZIENKIEWICZ
The finite element method in engineering science
- /4/ L. ROCKEY
Introduction à la méthode des éléments finis
- /5/ G. DHATT ; G. TOUZOT
Une présentation de la méthode des éléments finis
- /6/ P.E. GRAFTON and D.R. STROME
Analysis of axis-symmetric shells by the direct stiffness method

