

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie - Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En Vue de l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat

S U J E T

A n a l y s e
Flexionnelle des Plaques Multicouches
par "Elements Finis Conformés"

Proposé par :

MM. TILIOUINE

DEMIDEM

Etudié par :

F. AISSAOUI

M. BENALLEGUE

Dirigé par :

MM. TILIOUINE

DEMIDEM

PROMOTION : Juin 1989

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie - Civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En Vue de l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat

S U J E T

Anal y s e Flexionnelle des Plaques Multicouches par " Elements Finis Conformés "

Proposé par :

MM. TILIOUINE

DEMIDEM

Etudié par :

F. AISSAOUI

M. BENALLEGUE

Dirigé par :

MM. TILIOUINE

DEMIDEM

PROMOTION : Juin 1989

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

وزارة التعليم العالي
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département : GENIE CIVIL.....
Promoteurs : MM. TILIOUINE et DEMIDEM
Elèves Ingénieurs : Ferroudja AISSAOUI.....
Mounira BENALLEGUE.....

الموضوع : تحليل إنحنائي لمصفائح متعددة الطبقات باستخدام « عناصر محدودة مطابقتة »

الملخص : يهدف هذا المشروع إلى إنجاز برنامج آلي موجه لتحليل انحنائي لمصفائح رقيقة متعددة الطبقات باستخدام «عناصر محدودة مطابقتة» وتوسيع مجال هذه النظرية إلى تصنيع التصرف الانحنائي لبلاط من الخرسانة المسلحة.

Sujet : Analyse flexionnelle des plaques multicouches par "Elements Finis Conformés".

Résumé : Le présent travail a pour objet d'élaborer un programme destiné à l'analyse flexionnelle des plaques multicouches, par "Elements Finis Conformés", et d'étendre cette théorie à la simulation du comportement en flexion des dalles en Béton Armé.

Subject : Development of a computer program for bending multi-layers plates analysis.

Abstract : The aim of the following research is to develop a computer program (or software) for bending thin multilayers plates analysis per "Compatible Finite Elements", and to extend this theory to simulate the behaviour in bending of reinforced concrete slabs.

DEDICACES .

A mes parents,
à mes frères et soeurs,
à mon neveu Sofiane,
à mes grands-parents,
à tous ceux qui me sont chers.

Ferroudja AISSAOUI .

A mes parents,
à mes deux frères,
à mes deux grands-mères,
à Khalid,
à tous ceux qui me sont chers..

Mounira BENALLEGUE .

R E M E R C I E M E N T S .

** Nous voulons exprimer ici notre reconnaissance à nos deux promoteurs, MM. TILIOUINE et DEMIDEM, pour leur précieux soutien, et pour les nombreuses heures qu'ils nous ont consacrées.

** Que l'ensemble des Professeurs de l'Ecole trouvent dans ce Projet le témoignage de notre gratitude pour la formation qu'ils nous ont donnée.

** Nos remerciements vont aussi à Youcef BENALLEGUE, qui n'a ménagé aucun effort pour nous aider à présenter ce travail, ainsi qu'à Khalid AOUN, Youcef BOUOUDENE, sans oublier MM. AREZKI et BOUKHENFOUF.

** Nous remercions également l'ensemble du personnel du Centre de Calcul, et de la "Périodique", pour leur efficace assistance.

SOMMAIRE

CHAPITRE I	INTRODUCTION GENERALE	1
	I-1/ Objet du travail.....	1
	I-2/ Importance de l'élément plaque dans la pratique.....	1
CHAPITRE II	THEORIE DES PLAQUES MINCES EN FLEXION	2
	II-1/ Définition.....	2
	II-2/ Hypothèses fondamentales.....	3
	II-3/ Etude de la flexion pure.....	4
	II-4/ Flexion des plaques chargés transver- salement.....	9
	II-5/ Methodes de résolution de l'équation gouvernante.....	13
	II-6/ Conclusion.....	23
CHAPITRE III	INTRODUCTION A LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	24
	III-1/ Concepts de base de la M-E-F.....	24
	III-2/ Evolution de la M-E-F.....	25
CHAPITRE IV	ELEMENT FINI RECTANGULAIRE CONFORME POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES	27
	IV-1/ Introduction.....	27
	IV-2/ Discrétisation d'une structure.....	28
	IV-3/ Choix d'élément d'ordre élevé: problème de continuité.....	29
	IV-4/ Matrice de rigidité élémentaire pour l'élément rectangulaire.....	31
	IV-5/ Vecteur charge élémentaire pour l'élé- ment rectangulaire.....	43
	IV-6/ Généralisation au domaine entier: règle d'assemblage.....	45
	IV-7/ La méthode des éléments finis con- sidérée comme une minimisation de l'énergie potentielle totale.....	47
	IV-8/ Critères de convergence.....	48

CHAPITRE V	ETUDE DES PLAQUES MULTICOUCHES	50
	V-1/ Cas général.....	52
	V-2/ Cas particulier:empilement des couches isotropes soumis à la flexion.....	55
CHAPITRE VI	APPLICATION AU CALCUL DES DALLES EN BETON ARME	61
	VI-1/ Modélisation en multicouches.....	61
	VI-2/ Modèle "Plaque orthotrope".....	66
	VI-3/ Théorie classique du B.A (C.C.B.A. 68)	67
CHAPITRE VII	ORGANISATION DU PROGRAMME PAR ELEMENT FINI	69
	VII-1/ Introduction.....	71
	VII-2/ Programmation.....	71
CHAPITRE VIII	APPLICATIONS	79
	VIII-1/ Exemples d'applications pour le cas des plaques homogènes - Interprétation des résultats.....	79
	VIII-2/ Exemples d'applications pour le cas des plaques en béton armé, selon les trois modèles - Interprétation des résultats.....	90
CHAPITRE IX	CONCLUSION	98

CHAPITRE PREMIER

Introduction Générale

I-1 OBJET DU TRAVAIL :

L'objet du présent travail consiste en l'analyse flexionnelle des plaques minces par la "Méthode des éléments finis", dans une perspective de simulation du comportement en flexion des dalles en béton-armé, par la théorie des plaques multicouches.

Dans ce qui suit, deux grandes parties sont successivement traitées:

-La première concerne l'analyse flexionnelle par "éléments finis" des plaques homogènes. L'élément adopté est un élément "conforme" rectangulaire à quatre degrés de libertés par noeud, prenant en compte le phénomène de gauchissement. Contrairement à l'élément "non conforme" rectangulaire à trois degrés de libertés, cet élément répond au critère de continuité des pentes.

-La deuxième partie consiste à étudier le comportement à la flexion des multicouches et d'étendre cette étude à celle des dalles en béton-armé.

I-2 IMPORTANCE DE L'ELEMENT PLAQUE DANS LA PRATIQUE :

Les plaques minces sujettes seulement à des petites flèches, représentent une classe extrêmement importante de problèmes qui ont un grand nombre d'applications pratiques.

Les dalles plates, les tabliers de ponts, les planchers, les dômes et réservoirs à parois minces, soumis à des pressions intérieures et extérieures, en sont des exemples frappants.

Tout particulièrement aujourd'hui, les structures à parois minces trouvent un champ d'application considérable, dans le développement moderne des constructions aéronautiques.

CHAPITRE II

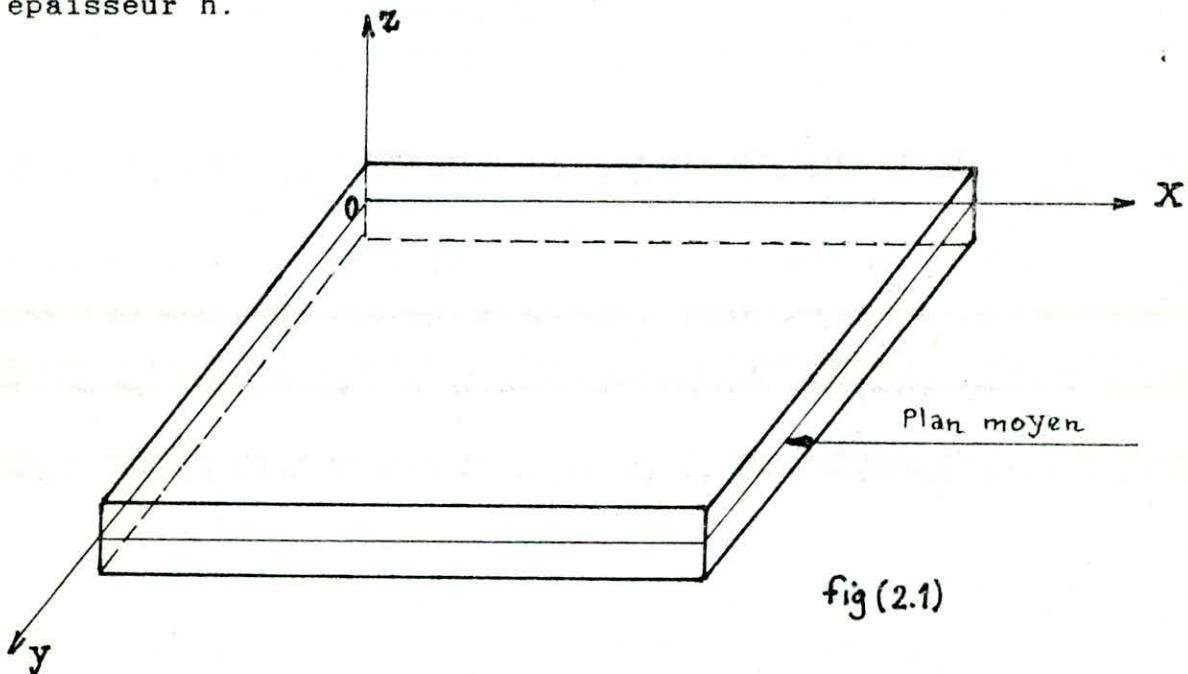
Théorie des plaques minces en flexion

II-1 DEFINITION :

Une plaque est un solide limité par deux plans parallèles et un contour fermé pour lequel existe un plan moyen.

Le plan moyen représente un plan de symétrie pour la plaque.

Par convention, le plan moyen (ou surface moyenne) sera le plan xy et l'axe oz correspondra à l'axe transversal selon l'épaisseur h .



Sous l'effet d'un chargement, il y a déplacement de chaque point du plan moyen.

Le déplacement selon l'axe oz est appelé "flèche" et est noté " w ".

Selon le mode de déformation, les plaques peuvent être classées en trois grandes catégories :

- * Plaques minces à petites flèches ($w \ll h$)
- * Plaques minces à grandes flèches ($w \# h$)
- * Plaques épaisses.

II-2 HYPOTHESES FONDAMENTALES :

II-2-1 Plaques minces à petites flèches: Théorie de KIRCHOFF ($h/L < 1/5$ et $w/h < 1/5$).

La minceur de la plaque justifie les hypothèses simplificatrices suivantes:

1/ Les forces extérieures peuvent être considérées comme appliquées au plan moyen, et normales à celui-ci (y compris le poids propre de la plaque).

2/ La contrainte σ_z sur tout élément parallèle au plan moyen peut être négligée par rapport à σ_x et σ_y ,
on aura donc $\sigma_z \approx 0$.

3/ Le plan moyen ne subit aucune contraction ni extension lors de la flexion de la plaque. Le déplacement d'un point du plan moyen se réduit donc à sa seule composante normale w appelée flèche de la plaque,

on aura donc $U_0=0$ et $V_0=0$.

4/ Une normale au plan moyen se transforme dans la déformation en une normale au plan moyen déformé,

on aura donc $\gamma_{yz}=0$ et $\gamma_{xz}=0$.

Cela revient à négliger l'effet de cisaillement transverse.

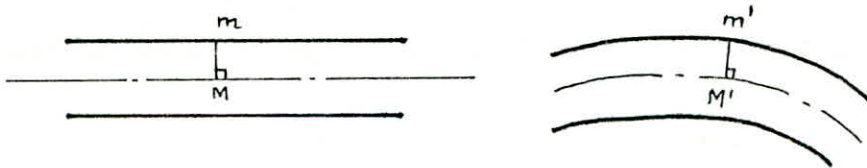


fig (2.2)

II-2-2 Plaques minces à grandes flèches : ($w/h < 1/5$)

L'hypothèse (3) n'est pas vérifiée, il existe donc une déformation du plan moyen (même sans effort normal extérieur).

Cette déformation est due à la flexion : couplage des effets de membrane et des effets de flexion.

II-2-3 Plaques épaisses : ($h/l > 1/5$)

Il n'existe pas de théorie de plaques épaisses, le problème n'est pas simple et leur étude doit être conduite à l'aide de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle.

Remarque :

Dans tout ce qui suit, on ne s'intéressera qu'aux problèmes des plaques minces à petites flèches.

II-3 ETUDE DE LA FLEXION PURE :

II-3-1 relations déformations -déplacements.

Selon les hypothèses faites, les relations déformations-déplacements se réduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_x = \delta u / \delta x & (a) \quad \epsilon_z = \delta w / \delta z = 0 \quad (d) \\ \epsilon_y = \delta v / \delta y & (b) \quad \gamma_{xz} = \delta w / \delta x + \delta u / \delta z = 0 \quad (e) \quad (1-1) \\ \gamma_{xy} = \delta u / \delta y + \delta v / \delta x & (c) \quad \gamma_{yz} = \delta w / \delta y + \delta v / \delta z = 0 \quad (f) \end{array} \right.$$

On se ramène donc à un état de contraintes planes :

-En intégrant l'équation (d) on obtient :

$$w = w(x, y)$$

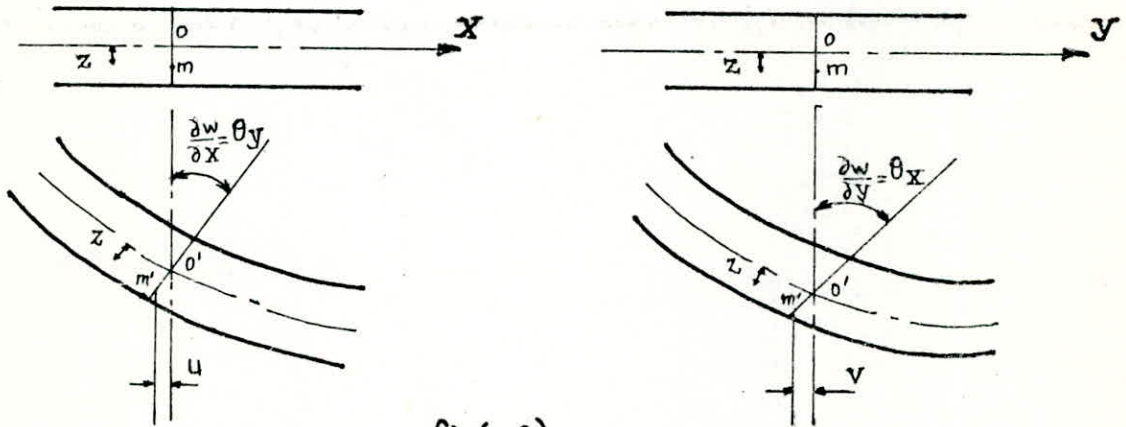
-En intégrant les équations (e) , (f) on obtient :

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + U_0(x, y)$$

$$v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + V_0(x, y) .$$

Mais selon l'hypothèse (3) $U_0=V_0=0$,et donc finalement :

$$u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{et} \quad v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-2)$$



fig(2.3)

En substituant les équations (1-2) dans les trois premières équations de (1-1) on obtient le tenseur de déformation suivant:

$$\begin{cases} \epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1-3)$$

$1/r_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k_x$; courbure du plan moyen dans le plan xz
 $1/r_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k_y$; courbure du plan moyen dans le plan yz
 $1/r_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = k_{xy}$; courbure du plan moyen dans le plan xy.

Remarque:

Une courbure étant considérée comme positive si elle est convexe vers le bas, et la flèche étant négative, cela explique les signes (-) des équations (1-3).

II-3-2 Relations contraintes-courbures

En utilisant les formules de la loi de Hooke généralisée pour un état plan de contraintes, on se ramène à des relations entre contraintes et courbures.

En effet:

$$\begin{cases} \epsilon_x = (\sigma_x - \mu_x \cdot \sigma_y) / E_x \\ \epsilon_y = (\sigma_y - \mu_y \cdot \sigma_x) / E_y \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \sigma_x = E_x \cdot \epsilon_x / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) + \mu_x \cdot E_y \cdot \epsilon_y / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \\ \sigma_y = E_y \cdot \epsilon_y / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) + \mu_y \cdot E_x \cdot \epsilon_x / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases}$$

En introduisant les courbures de la plaque on obtient:

$$\begin{cases} \sigma_x = -[E_x / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) * \delta^2 w / \delta x^2 + \mu_x \cdot E_y / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) * \delta^2 w / \delta x^2] \cdot z \\ \sigma_y = -[E_y / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) * \delta^2 w / \delta y^2 + \mu_y \cdot E_x / (1 - \mu_x \cdot \mu_y) * \delta^2 w / \delta y^2] \cdot z \quad (1-4) \\ \tau_{xy} = -2 \cdot G \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y \end{cases}$$

Avec:

E_x, E_y : Modules d'Young (dans le sens x et y).

μ_x, μ_y : Coefficients de Poisson dans les deux directions .

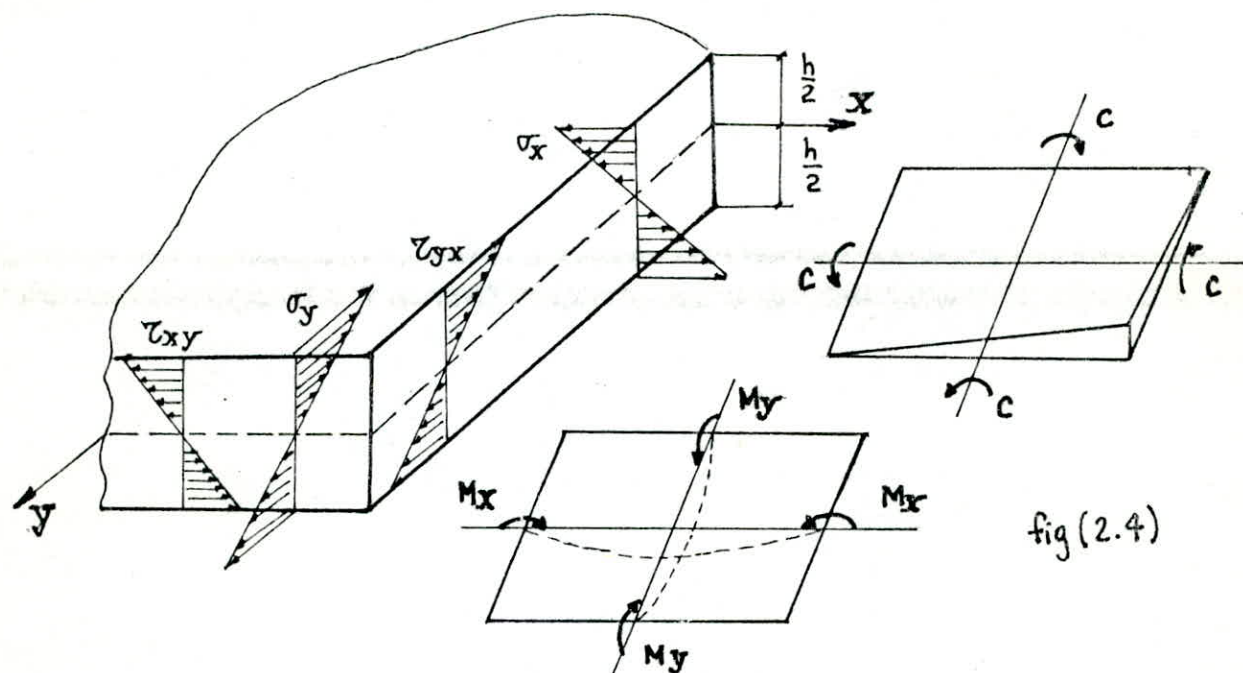
G : Module d'élasticité transversal .

Pour le cas d'un matériau isotrope:

$$E = E_x = E_y \quad \text{et} \quad G = E / 2(1 + \mu)$$

II-3-3 Efforts internes:

Les contraintes qui règnent sur l'épaisseur de la plaque produisent des moments de flexion, de torsion et des efforts tranchants par unité de longueur, qui sont appelés "contraintes généralisées"



Ces contraintes généralisées seront données par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_x \cdot dz \quad , \\ M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \sigma_y \cdot dz \quad , \\ M_{xy} = M_{yx} = C &= \int_{-h/2}^{+h/2} z \cdot \tau_{xy} \cdot dz \end{aligned}$$

En introduisant les équations (1-4) dans (1-5), il vient après intégration.

$$\begin{aligned} M_x &= -(D_x \cdot \delta^2 w / \delta x^2 + \mu_x \cdot D_y \cdot \delta^2 w / \delta y^2) \\ M_y &= -(D_y \cdot \delta^2 w / \delta y^2 + \mu_y \cdot D_x \cdot \delta^2 w / \delta x^2) \\ C &= -2 \cdot D_{xy} \cdot \delta^2 w / \delta x \cdot \delta y \end{aligned} \quad (1-6)$$

avec,

$$D_x = E_x \cdot h^3 / 12 (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \quad , \quad D_y = E_y \cdot h^3 / 12 (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \quad , \quad \text{et} \quad D_{xy} = G \cdot h^3 / 12$$

Dans le cas des plaques isotropes:

$$D_x = D_y = D, \quad \mu_x = \mu_y = \mu, \quad \text{et } D_{xy} = D.(1-\mu),$$

les relations (1-6) deviennent donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = -D.(\delta^2 w / \delta x^2 + \mu. \delta^2 w / \delta y^2) \\ M_y = -D.(\delta^2 w / \delta y^2 + \mu. \delta^2 w / \delta x^2) \\ C = -D.(1-\mu). \delta^2 w / \delta x \delta y \end{array} \right. \quad (1-7)$$

avec,

$D = E.h^3/12.(1-\mu^2)$: rigidité flexionnelle qui caractérise physiquement et géométriquement la plaque.

II-3-4 Représentation des contraintes par les efforts pour le cas isotrope:

D'après les relations (1-4) et (1-7), on obtient:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -E_x.z.(\delta^2 w / \delta x^2 + \mu. \delta^2 w / \delta y^2) / (1-\mu^2) \\ \text{"} &= -E_x.z.(-M_x/D) / (1-\mu^2) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \sigma_x = 12.M_x.z/h^3 = M_x.z/I.$$

En procédant de la même manière pour σ_y et τ_{xy} , il vient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = M_x.z/I \\ \sigma_y = M_y.z/I \\ \tau_{xy} = C.z/I \end{array} \right. \quad (1-8)$$

I: moment d'inertie d'une section normale de largeur unité de la plaque .

II-4 FLEXION DES PLAQUES CHARGÉES TRANSERSALEMENT :

II-4-1 Equation d'équilibre : Equation de LAGRANGE

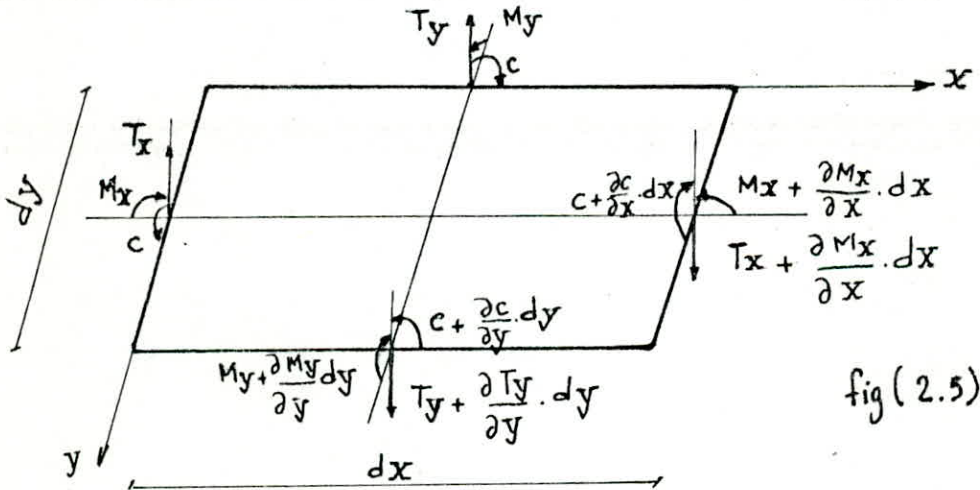
En plus des moments de flexion M_x, M_y et des moments de torsion C qui existent dans la flexion pure, il existe des forces de cisaillement verticales agissant sur les côtés de l'élément, quand la plaque est chargée transversalement.

Les valeurs de ces cisaillement T_x et T_y par unité de largeur sont:

$$T_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} . dz$$

$$T_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} . dz \quad (1-9)$$

Considérons un élément de la plaque ($dx \cdot dy$) sur lequel agit une charge répartie par unité de surface $q(x, y)$.



Projetons sur l'axe oz toutes les forces agissant sur l'élément ; on obtient l'équation d'équilibre suivante :

$$\delta T_x / \delta x . (dx \cdot dy) + \delta T_y / \delta y . (dy \cdot dx) + q \cdot dx \cdot dy = 0$$

$$d'où \quad \delta T_x / \delta x + \delta T_y / \delta y + q = 0 ,$$

en faisant de même pour les projections des moments sur les axes x et y , nous obtenons les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F/z = \delta T_x/\delta x + \delta T_y/\delta y + q = 0 \quad (a) \\ \Sigma M/x = -\delta C/\delta x - \delta M_y/\delta y + T_y = 0 \quad (b) \\ \Sigma M/y = \delta C/\delta y + \delta M_x/\delta x - T_x = 0 \quad (c) \end{array} \right. \quad (1-10)$$

Comme il n'y a pas de forces dans les directions x, y et pas de moments par rapport à l'axe z , les équations (1-10) définissent complètement l'équilibre de l'élément.

$$(b) \rightarrow T_y = \delta M_y/\delta y + \delta C/\delta x \rightarrow \delta T_y/\delta y = \delta^2 M_y/\delta y^2 + \delta^2 C/\delta x \delta y \quad (d)$$

$$(c) \rightarrow T_x = \delta C/\delta y + \delta M_x/\delta x \rightarrow \delta T_x/\delta x = \delta^2 M_x/\delta x^2 + \delta^2 C/\delta x \delta y \quad (e)$$

d'où en remplaçant (d) et (e) dans (a), on obtient

$$\delta^2 M_x/\delta x^2 + 2 \cdot \delta^2 C/\delta x \delta y + \delta^2 M_y/\delta y^2 = -q \quad (1-11)$$

Pour exprimer cette équation en fonction des flèches w de la plaque, nous supposons que les expressions données en (1-6) pour M_x, M_y et C relatives à la flexion pure, peuvent s'appliquer aux plaques chargées latéralement.

Cette hypothèse revient à négliger l'effet de l'effort tranchant T_x et T_y ainsi que la contrainte σ_z produite par la charge q .

En substituant les expressions (1-6) dans (1-11) on obtient l'équation gouvernante pour la déformée des plaques minces :

$$D_x \cdot \delta^4 w/\delta x^4 + 2 \cdot (D_1 + 2 \cdot D_{xy}) \cdot \delta^4 w/\delta x^2 \delta y^2 + D_y \cdot \delta^4 w/\delta y^4 = q \quad (1-12)$$

avec, $D_1 = (\mu_x \cdot D_y + \mu_y \cdot D_x)/2$.

Pour le cas des plaques isotropes, cette équation devient ;

$$\delta^4 w/\delta x^4 + 2 \cdot \delta^4 w/\delta x^2 \delta y^2 + \delta^4 w/\delta y^4 = q/D \quad (1-13)$$

ce qui peut s'écrire aussi: $\nabla^4 w = q/D$

où $\nabla^2 z$, désigne le Laplacien $\delta^2 z / \delta x^2 + \delta^2 z / \delta y^2$.

Cette équation est aussi appelée équation de LAGRANGE car elle fût dérivée en premier lieu par lui en 1811.

Le problème de la flexion d'une plaque par une charge latérale q , se ramène donc à l'intégration de l'équation (1-13).

Si dans un cas particulier, on trouve à cette équation une solution qui satisfasse aux conditions aux limites de la plaque:

-Les expressions (1-6) et (1-7) donneront les moments de flexion et torsion.

-Les expressions (1-8) donneront les contraintes normales et de cisaillement.

-Les expressions (d et e) donneront T_x et T_y .

II-4-2 conditions aux limites :

Le déplacement w doit satisfaire à l'équation de LAGRANGE et aux conditions aux limites sur le contour de la plaque.

II-4-2-1 bord encastéré:

Le long d'un bord encastéré :

- le déplacement latéral est nul.
- le plan tangent à la surface moyenne fléchie, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque.

Exemple:

Si le bord ($x=a$) est encastéré, alors les conditions le long de ce bord sont:

$$w(x=a)=0 \quad \text{et} \quad (\delta w / \delta x)_{(x=a)}=0$$

Ces conditions sont appelées :CONDITIONS GEOMETRIQUES.

II-4-2-2 bord simplement appuyé :

Le long d'un bord simplement appuyé (exemple pour $x=a$)

-Le déplacement latéral est nul .

-Le moment de flexion M_x est nul , car ce bord peut tourner librement autour de l'axe y :

On aura donc :

$$W_{(x=a)}=0 \quad \text{et} \quad \delta^2 W / \delta x^2 + \nu . \delta^2 W / \delta y^2 = 0$$

Ces conditions sont appelées : CONDITIONS MIXTES

II-4-2-3 bord libre :

Si le bord d'une plaque, par exemple, le bord ($x=a$) est entièrement libre, il ne subit aucun moment de flexion, ni de torsion ni d'effort tranchant, donc :

$$(M_x)_{(x=a)} = 0 \quad C_{(x=a)} = 0 \quad \text{et} \quad T_x_{(x=a)} = 0 .$$

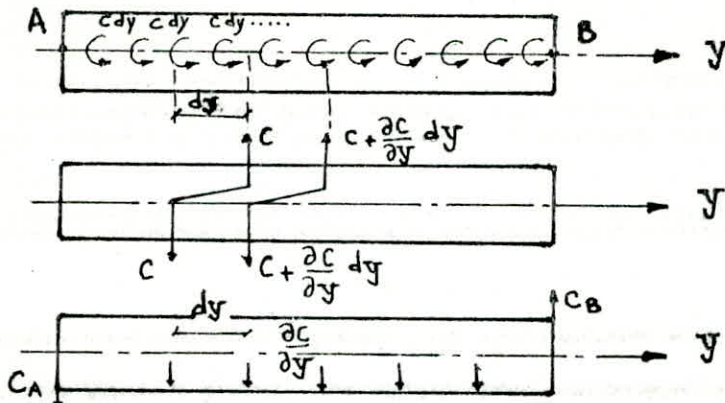
KIRSHOFF démontra que trois conditions aux limites sont surabondantes et que deux seulement suffisaient .

Il montra que les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion C et à l'effort tranchant T peuvent se remplacer par une seule .

Les forces horizontales produisant le couple de torsion $C dy$ agissant sur un élément dy du côté $x=a$, sont remplacées par deux forces verticales de grandeurs C , à une distance dy l'une de l'autre.

Si nous considérons deux éléments adjacents de ce côté, nous voyons que la répartition des moments de torsion C est statiquement équivalente à une répartition d'effort tranchant d'intensité :

$$T_x^I = (\delta C / \delta y)_{(x=a)}$$



fig(2.6)

Par conséquent les deux conditions relatives au moment de torsion C et à l'effort tranchant T le long du côté ($x=a$), se réduisent à :

$$T_x^* = T_x + T_x' = (T_x + \delta C / \delta y)_{(x=a)} = 0 .$$

En tenant compte des formules, exprimant M_x, T_x et C en fonction des courbures, il vient :

$$M_x(x=a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta^2 w / \delta x^2 + \mu . \delta^2 w / \delta y^2 = 0$$

$$T_x^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta^3 w / \delta x^3 + (2-\mu) . \delta^3 w / \delta x \delta y^2 = 0$$

Ces conditions sont appelées : CONDITIONS STATIQUES

II-5 METHODES DE RESOLUTION DE L'EQUATION GOUVERNANTE :

Il y'a plusieurs méthodes de calcul de l'équation différentielle de la plaque que l'on peut classer en deux groupes :

** 1^{er} groupe :

Dans la première étape on part de la fonction satisfaisant à l'équation fondamentale de la plaque , mais qui ne remplit que quelques-unes, ou aucune des conditions aux limites, puis dans l'étape suivante, on cherche une fonction complémentaire qui satisfierait, en commun avec la première, tant à l'équation générale de la plaque, qu'à toutes les conditions aux limites .

** 2^{ème} groupe :

On procède de manière inverse. Partant de la fonction qui satisfait aux conditions aux limites, mais pas à l'équation fondamentale, on cherche ensuite une fonction complémentaire telle que la fonction résultante $w(x,y)$ remplisse aussi l'équation fondamentale.

Parmi ces méthodes il y'a :

II-5-1 méthode de séries doubles de Fourier :

Une des solutions connues depuis très longtemps est celle de NAVIER, qui se sert des séries doubles de FOURRIER.

On développe la charge $p(x,y)$, appliquée à la plaque, en série double trigonométrique :

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin m\pi x/a \cdot \sin n\pi y/b \quad (1-14)$$

Les coefficients A_{mn} dépendent de la charge et sont de la forme :

$$A_{mn} = 4/ab * \int_0^a \int_0^b P(x,y) \cdot \sin m\pi x/a \cdot \sin n\pi y/b \cdot dx dy \quad (1-15)$$

Par exemple, pour une plaque simplement appuyée sur toute la périphérie, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} x=0, x=a & \Rightarrow w=0 \text{ et } \delta^2 w / \delta x^2 = 0 \\ y=0, y=b & \Rightarrow w=0 \text{ et } \delta^2 w / \delta y^2 = 0 \end{aligned} \quad (1-16)$$

Si les coordonnées ont leur origine au milieu de la largeur, l'expression du déplacement vertical peut être prise sous la forme :

$$w(x,y) = -1/2 * \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \sin m\pi x/a \cdot \sin n\pi y/b \quad (1-17)$$

Il suffit de reporter les développements de $w(x,y)$ et de $p(x,y)$ dans l'équation de LAGRANGE généralisée (1-13) pour trouver les coefficients w_{mn} .

II-5-2 Méthodes variationnelles :

On prend la fonction fondamentale sous la forme :

$$w(x,y) = \sum_n a_n \cdot f_n(x,y) \quad (1-18)$$

en choisissant les fonctions $f_n(x,y)$ de façon qu'elles satisfassent rigoureusement aux conditions aux limites de la plaque .

Les calculs se réduisent ainsi à la détermination des constantes dans l'équation (1-18) de manière à ce que l'équation générale de la plaque soit satisfaite au mieux .

On déterminera les constantes inconnues par exemple à l'aide de la méthode des moindres carrés, la méthode de RITZ du minimum d'énergie potentielle, celle de GOURSAT des variables complexes, la méthode de GALERKINEetc.

II-5-3 Méthodes par différences :

Le principe des méthodes par différences consiste à transformer l'équation différentielle de la plaque en une équation aux différences.

Sur la plaque on adopte un réseau aux intersections duquel les valeurs statiques cherchées s'expriment comme combinaison des différences de la déformée w .

Nous exprimerons de manière approchée, les dérivées de la fonction $w(x,y)$:

$$(\delta w / \delta x)_n = 1/2 * (w_{n+1} + w_{n-1}) / \Delta x \quad (1-19)$$

Ce qui signifie qu'au lieu de l'inclinaison de la ligne élastique au point étudié, nous définissons l'inclinaison de différences .

D'une manière analogue, nous obtiendrons les autres dérivées par rapport à x et, de même, à y .

En portant les dérivées ainsi exprimées dans l'équation fondamentale de la plaque pour n points du réseau, nous trouverons un système de n équations à n déplacements, avec w inconnus .

II-5-4 Méthodes directes de solution :

Ces méthodes sont fondées sur l'intégration directe de l'équation fondamentale de la plaque .

On cherche l'intégrale générale de l'équation fondamentale de la plaque en forme de série de MAURICE LEVY .

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin m\pi x/a \quad (1-20)$$

où Y_m n'est qu'une fonction de y .

Chaque terme de la série satisfait aux conditions aux limites ,

$$w=0 \quad \text{et} \quad \delta^2 w / \delta x^2 = 0 \quad \text{sur les bords appuyés } x=0 \text{ et } x=a .$$

Il nous reste seulement à déterminer $Y_m(y)$ sous une forme qui satisfasse tant aux conditions aux limites sur les bords non appuyés ($y=+b$, $y=-b$), qu'à l'équation de la plaque .

On exprime également le second membre de l'équation fondamentale de la plaque sous forme d'une série analogue .

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(y) \cdot \sin m\pi x/a$$

En remplaçant w et p dans l'équation fondamentale de la plaque par les expressions ci-dessus , on trouve une équation

différentielle linéaire ordinaire, de laquelle découle une équation caractéristique de la forme :

$$r^4 + 2.a_1.r^2 + a_2 = 0$$

la solution générale est de la forme :

$$Y_m(y) = Y_{m0}(y) + Y_{m1}(y) \quad (1-22)$$

où

$Y_{m0}(y)$: solution homogène de l'équation

$Y_{m1}(y)$: solution particulière .

Les constantes d'intégration se calculent ensuite à partir des conditions aux limites .

En remplaçant $Y_m(y)$ dans l'équation (1-20) on obtient la déformée w et, en dérivant cette expression, les valeurs des moments et efforts tranchants .

II-5-5 Solutions de MAURICE LEVY ; formulation générale :

Maurice Levy a étudié les solutions de l'équation de LAGRANGE

$$\nabla^4 w = p(x,y)/D$$

qui sont représentées par une série trigonométrique simple

$$w(x,y) = 1/D * \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) . \sin m\pi x/a \quad (1-23)$$

les solutions vérifient les conditions aux limites suivantes: 17

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \delta^2 w / \delta x^2 = 0 \quad \text{pour} \quad x=0 \quad \text{et} \quad x=a$$

elle conviennent donc pour une plaque rectangulaire simplement appuyée le long des deux bords opposés d'équation, $x=0$ et $x=a$.

On détermine $F_m(y)$ de manière à vérifier les deux autres bords .

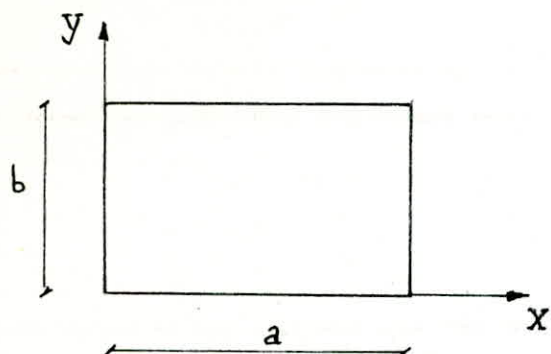


fig (2-7)

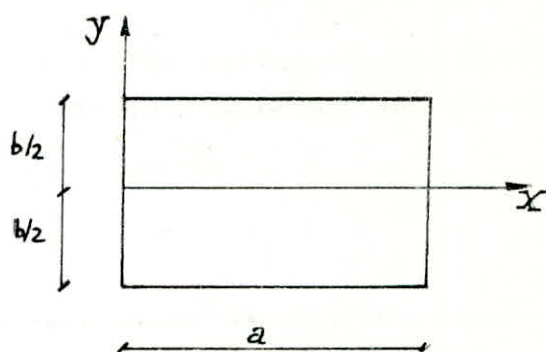


fig (2-8)

L'axe ox en général est choisi de façon que : $b_1=0$ et $b_2=b$ (fig 2-7), mais pour des raisons de symétrie (en particulier lorsque les conditions d'appui le long des deux cotés parallèles à ox sont identiques), il est souvent indiqué de choisir l'axe ox de façon que $b_1=-b/2$ et $b_2=+b/2$ (fig 2-8) .

Développons la densité de charge $p(x,y)$ en une série de sinus

$$P(x,y) = \sum_m P_m(y) \cdot \sin m\pi x/a \quad (1-24)$$

substituons les équations (1-23) et (1-24) dans l'équation gouvernante on obtient :

$$d^4 F_m/dy^4 - 2 \cdot (m\pi/a)^2 \cdot d^2 F_m/dy^2 + (m\pi/a)^4 \cdot F_m = P_m(y) \quad (1-25)$$

L'équation caractéristique de (1-25)

$$r^4 - 2 \cdot (m\pi/a)^2 \cdot r^2 + (m\pi/a)^4 = 0$$

donne deux racines: $r=m\pi/a$, $r=-m\pi/a$

en posant, $Y=m\pi y/a$, l'intégrale générale de (1-25) aura pour expression :

$$F_m(Y) = f(Y) + A_m \cdot \text{ch}(Y) + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}(Y) + C_m \cdot \text{sh}(Y) + D_m \cdot Y \cdot \text{ch}(Y)$$

avec :

$f(Y)$: intégrale particulière (à déterminer par la méthode de la variation de constante)

A_m, B_m, C_m et D_m : sont des constantes arbitraires, déterminées de manière que w satisfait les conditions aux limites .

Il suffit d'écrire chaque solution particulière ,

$$w_m = F_m(y) \cdot \sin(m\pi x/a) / D$$

en vérifiant les conditions aux limites envisagées le long des cotés , $y=b_1$ et $y=b_2$.

CONDITIONS AUX LIMITES : Par exemple bord $y=b_1$:

1°) bord simplement appuyé

$$M_y(x, b_1) = 0 \quad \text{et} \quad w_m(x, b_1) = 0$$

$F_m(y)$ doit donc vérifier :

$$F_m(b_1) = 0 \quad \text{et} \quad F''_m(b_1) = 0$$

2°) bord encastré:

$$w_m(x, b_1) = 0 \quad \text{et} \quad \delta w_m(x, y) / \delta y = 0$$

$F_m(y)$ doit donc vérifier :

$$F_m(b_1) = 0 \quad \text{et} \quad F'_m(b_1) = 0$$

3°) bord libre:

$$M(x, b_1) = 0 \quad M_{xy}(x, b_1) = 0 \quad \text{et} \quad Q_x(x, b_1) = 0$$

$F_m(y)$ doit donc vérifier :

$$F''(b_1) - v(m\pi/a)^2 \cdot F_m(b_1) = 0$$

et

$$F''(b_1) - (2-v) \cdot (m\pi/a)^2 \cdot F'_m(b_1) = 0$$

Il suffit de remplacer b_1 par b_2 pour trouver les conditions aux limites de $y=b_2$.

Les fonctions $F_m(y)$ doivent donc vérifier quatre conditions, deux le long de chacun des cotés $y=b_1$ et $y=b_2$, d'où on peut déterminer les constantes d'intégration A_m, B_m, C_m et D_m .

Ayant ainsi déterminé $w(x,y)$ sous la forme (1-23), les équations (1-7) donnent les moments fléchissants et le moment de torsion :

$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= \sum_m [(m\pi/a)^2 \cdot F_m(y) - v \cdot F''_m(y)] \cdot \sin m\pi x/a \\ M_y &= \sum_m [v \cdot (m\pi/a)^2 \cdot F_m(y) - F''_m(y)] \cdot \sin m\pi x/a \\ M_{xy} &= -(1-v) \sum_m [(m\pi/a) \cdot F'_m(y)] \cdot \cos m\pi x/a \end{aligned} \right. \quad (1-26)$$

PLAQUES RECTANGULAIRES SUR DIVERS CONDITIONS D'APPUIS

II-5-5-1 plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses côtés et uniformément chargée :

A cause de la symétrie des conditions d'appuis on choisit un système d'axes de façon que $b_1=b/2$ et $b_2=-b/2$ (fig:1-7).

Cette plaque est soumise à une densité de charge répartie:

$$P_m = \begin{cases} 4 \cdot P/m \cdot \pi & \text{si } m \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases} \quad (1-27)$$

dans ce cas, la fonction $F_m(y)$ est une fonction paire que l'on peut écrire sous la forme suivante:

$$F_m(y) = P_m \cdot (a/m\pi) \cdot (1 + A_m \cdot \text{ch}Y + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}Y)$$

en tenant compte des conditions aux limites,

$$F_m(b/2) = 0 \quad \text{et} \quad F''_m(b/2) = 0 .$$

on obtient les constantes A_m et B_m :

$$A_m = (2 + \beta \cdot \text{th}\beta) / 2 \cdot \text{ch}\beta$$

avec

$$\beta = (m\pi b / 2a)$$

nous obtenons ainsi la solution

$$w(x,y) = w_0(x) - 1/D \cdot \sum_m P_m \cdot (a/m\pi)^4 \cdot (A_m \cdot \text{ch}Y + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}Y) \cdot \sin m\pi x$$

$w_0(x)$: correspond à la flèche d'une plaque infiniment longue , de largeur (a) :

$$w_0 = -1/D \cdot \sum_m P_m \cdot (a/m\pi)^4 \cdot \sin m\pi x / a \quad (1-28)$$

De plus, on peut déterminer les moments de flexion et de torsion selon les équations (1-26).

II-5-5-2 plaque rectangulaire

*simplement appuyée pour: $x=0$, $x=a$

*libre pour: $y=b/2$, $y=-b/2$

A cause de la symétrie des conditions d'appui, on choisit un système d'axes de façon que $b_1=b/2$ et $b_2=-b/2$, et dans ce cas la fonction $F_m(y)$ est une fonction paire que l'on peut écrire sous la forme :

$$F_m = P_m \cdot (a/m\pi)^4 \cdot (1 + A_m \cdot \text{ch}Y + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}Y)$$

les conditions aux limites ,

$$F''_m(b/2) - \nu \cdot (m\pi/a)^2 \cdot F_m(b/2) = 0$$

$$F''_m(b/2) - (2-\nu) \cdot (m\pi/a)^2 \cdot F'_m(b/2) = 0$$

permettant de calculer les constantes A_m et B_m , nous trouvons :

$$A_m = [v/(1-v)] \cdot \frac{[(1+v) \cdot \text{sh}^\beta - (1-v) \cdot \beta \cdot \text{ch}^\beta]}{[(3+v) \cdot \text{sh}^\beta \cdot \text{ch}^\beta - (1-v) \cdot \beta]}$$

$$B_m = [v/(1-v)] \cdot \frac{[(1-v) \cdot \text{sh}^\beta]}{[(3+v) \cdot \text{sh}^\beta \cdot \text{ch}^\beta - (1-v) \cdot \beta]}$$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$W(x,y) = W_0(x) - 1/D \cdot \sum_m P_m \cdot (a/m\pi)^4 \cdot (A_m \cdot \text{ch}Y + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}Y) \cdot \sin m\pi x/a$$

$W_0(x)$ étant la fonction définie par (1-28).

De plus on peut déterminer les moments fléchissants et le moment de torsion selon les équations (1-26).

II-5-5-3 plaque rectangulaire

*simplement appuyée pour: $x=0$, $x=a$, $y=0$

*libre pour: $y=b$

La fonction $F_m(y)$ peut être écrite sous la forme :

$$F_m(y) = P_m \cdot (a/m\pi)^4 \cdot (1 + A_m \cdot \text{ch}Y + B_m \cdot Y \cdot \text{sh}Y + C_m \cdot \text{sh}Y + D_m \cdot y \cdot \text{ch}Y)$$

les conditions aux limites le long du côté $y=0$,

$$F_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad F''_m(0) = 0$$

montrent que A_m et B_m ont pour valeurs ,

$$A_m = 1 \quad \text{et} \quad B_m = 1/2$$

les conditions aux limites le long du côté $y=b$,

$$F''_m(b) - v \cdot (m\pi/a)^2 \cdot F_m(b) = 0$$

$$F'''_m(b) - (2-v) \cdot (m\pi/a)^2 \cdot F'_m(b) = 0$$

montrent que C_m et D_m ont pour valeurs ,

$$C_m = \frac{(3+v).(1-v).sh^{2\beta} - v.(1-v).\beta.sh^\beta + v.(1+v).(ch^\beta - 1) - 1/2(1-v)^2.\beta^2}{(1-v).[(3+v).sh^\beta.ch^\beta + (1-v).\beta]}$$

$$D_m = \frac{-1/2.(3+v).sh^{2\beta} + v.(ch^\beta - 1)}{(3+v).sh^\beta.ch^\beta + (1-v).\beta}$$

nous obtenons ainsi la solution :

$$W(x,y) = W_0(x) - 1/D \cdot \sum_m P_m \cdot (a/m\pi) - chY + Y/2 \cdot shY + C_m \cdot shY + D_m \cdot Y \cdot chY \cdot \sin m\pi x/a$$

$W_0(x)$: désignant la fonction définie par (1-28) . :

De plus on peut déterminer les moments fléchissants, et le moment de torsion comme définis dans les fonctions (1-26) .

II-6 CONCLUSION :

De ce qui précède, il est important de remarquer que la résolution des problèmes de flexion des plaques, qui conduit à écrire des équations aux dérivées partielles, ne peut être obtenue directement que dans les cas simples, lorsque la distribution des charges, les caractéristiques de la section et les conditions aux limites, peuvent être représentés facilement par des expressions mathématiques.

Si ces conditions deviennent complexes, la résolution exacte peut parfois devenir impossible, et les méthodes numériques sont alors les seuls moyens susceptibles d'être utilisés.

La M-E-F constitue un outil puissant pour résoudre ces équations.

CHAPITRE III

introduction a la Méthode des Eléments Finis

III-1 CONCEPTS DE BASE DE LA M-E-F :

Un grand nombre de structures utilisées par les ingénieurs sont composées d'une réunion de parties indépendantes reliées entre elles par des points. De telles structures sont dites "Structures treillis", les points sont communément appelés noeuds. Comme exemples nous avons les poutres continues et les cadres à plusieurs étages.

L'analyse de telles structures peut s'effectuer en considérant les 3 étapes suivantes:

- Le comportement de chaque partie indépendante est représenté par une matrice de rigidité élémentaire, construite grâce aux hypothèses de la R-D-M.

- A partir des matrices élémentaires, nous construisons la matrice de rigidité globale, avec laquelle nous établissons un système d'équations algébriques, en utilisant des conditions de continuité des déplacements et d'équilibre des forces aux noeuds.

- La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit à la détermination des déplacements de tous les noeuds de la structure.

- Cette dernière étape sera suivie de la substitution des valeurs calculées dans les équations permettant de trouver les contraintes.

En plus des structures treillis, les ingénieurs ont souvent besoin d'étudier des structures continues, telles que les poutres épaisses, les plaques et les dalles sujettes à la flexion, les murs de barrage, les plaques pliées et les coques.

La M-E-F représente l'extension des méthodes matricielles pour les structures treillis à l'étude des structures continues. Dans la M-E-F, les parties continues sont reliées uniquement par les noeuds. Cette méthode nécessite un grand nombre de calculs qui, à cause de leur nature répétitive, s'adaptent parfaitement à la programmation numérique et à la résolution par ordinateurs.

III-2 EVOLUTION DE LA M-E-F :

Les bases théoriques de la M-E-F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la Mécanique des Structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

C'est au début du XX^e siècle qu'ont été acquis des résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximations, puis COURANT (1940) établit les bases de la M-E-F en montrant que la résolution des problèmes de milieux continus est possible uniquement par la discrétisation du problème continu à l'aide des méthodes d'approximation adéquates.

Après la deuxième guerre mondiale, on assiste, dans l'industrie aéronautique, au développement des "Méthodes matricielles", permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes.

Parmi les contributions les plus importantes, nous citerons celles de LEVY (1947) et GARVEY (1951), pour la méthode des forces, et celle de LEVY (1953), pour la méthode des déplacements. En 1955, ARGYRIS présente une approche unifiée des méthodes de déplacements et l'année suivante, TURNER et CLOUGH publient une présentation systématique de la méthode des déplacements. Ces deux publications représentent véritablement le début de la M-E-F.

A partir de 1956, la M-E-F va connaître un développement intense, sous l'impulsion de l'industrie aérospatiale, et grâce à la disponibilité des premiers ordinateurs, et ce dans plusieurs directions:

- Reformulation, à partir de considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale des résidus pondérés.

- Création des éléments de haute précision et des éléments à côtés curvilignes ou isoparamétriques.

- Utilisation de la M-E-F dans la résolution des problèmes non linéaires, et non stationnaires, dans le domaine des structures, ainsi que dans d'autres domaines: Mécanique des Roches, Mécanique des Fluides, Thermiques, ...

- Construction d'une base mathématique de la M-E-F à partir de l'analyse fonctionnelle.

**Synoptique des principaux développements des méthodes d'analyses
des structures jusqu'en 1956**

1800

Structures hyperstatiques.....	NAVIER	1819
Théorèmes de l'énergie.....	MAXWELL	1864
	GASTIGLIANO	1878

1900

Méthodes d'approximation.....	RITZ	1908
	GALERKIN	1915
Approximation par "éléments finis"..	COURANT	1940
Méthodes matricielles.....	LEVY	1953
	GARVEY	

1955

Concept "d'élément fini"

- Méthode des forces.....	ARGYRIS	1955
- Méthode des déplacements....	TURNER	1956

CHAPITRE IV

**Élément fini rectangulaire conforme pour
l'étude de la flexion des plaques**

IV-1 INTRODUCTION :

Le concept de base de la M-E-F, comme celui de l'analyse matricielle des "structures treillis", consiste dans le fait que la structure peut être considérée comme un assemblage d'éléments indépendants.

Comme nous l'avons vu précédemment, cette subdivision en plusieurs éléments est naturelle pour les "structures treillis", alors que dans une structure continue, une subdivision finie correspondante naturelle n'existe pas, de telle sorte que la structure doit être artificiellement divisée en éléments, avant d'appliquer la méthode matricielle. Cette approximation peut être obtenue de la manière suivante :

- * Le milieu continu est divisé par des lignes, ou par des surfaces imaginaires, en un certain nombre d'éléments finis.

- * Les éléments sont supposés reliés entre eux en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières, appelés communément "noeuds". Les déplacements de ces points seront les inconnues de base du problème, exactement comme un simple calcul de structure.

- * On choisit une (ou des) fonction(s) permettant de définir de manière unique, le champ des déplacements à l'intérieur de chaque "élément fini", en fonction des déplacements de ces noeuds.

- * Les fonctions de déplacements définissent maintenant l'état des déformations sans ambiguïté, à l'intérieur d'un élément, en fonction des déplacements nodaux. Et compte tenu des propriétés élastiques du matériau, ces mêmes fonctions définissent l'état de contrainte en tout point de l'élément, et par conséquent sur ses frontières.

- * On détermine un système de forces concentrées aux noeuds qui équilibrent les contraintes s'exerçant aux frontières, et d'éventuelles forces réparties; il en résulte une relation de rigidité.

IV-2 DISCRETISATION D'UNE STRUCTURE :

Un corps déformable possède un nombre infini de points; en chacun de ceux-ci, on peut définir les forces extérieures, les contraintes, les déformations et les déplacements.

Dés lors, il est indispensable de substituer à la structure étudiée, un modèle mathématique composé d'un certain nombre d'éléments appelés "éléments finis", reliés entre eux en un nombre fini de points appelés noeuds.

Il y a un grand nombre d'éléments finis, chacun ayant ses avantages particuliers. Dans ce présent travail, nous opterons pour un élément fini rectangulaire linéaire.

L'énergie de déformation devra approcher le plus possible celle de la structure continue. Les interactions entre éléments sont introduites sous forme de forces et de déplacements généralisés.

Certaines structures, notamment les plaques et les coques, sont idéalisées par des éléments discrets, dont les liaisons mutuelles sont continues le long des interfaces.

L'idéalisation consiste à ne considérer que les liaisons nodales, c'est-à-dire en un nombre fini de points situés sur les bords des éléments.

Les forces qui assureront ainsi l'interaction des éléments aux noeuds, sont dites généralisées.

Lorsque le champ de déplacement assure en outre la continuité des déplacements aux interfaces, l'élément constitue un modèle de déplacement "pur ou conforme".

IV-3 CHOIX D'ÉLÉMENT D'ORDRE ÉLEVÉ : PROBLÈME DE CONTINUITÉ.

Dans la M-E-F, les éléments indépendants sont contraints de se déformer de façon bien spécifique.

Le choix d'un mode convenable de déformation pour les éléments doit être tel que toute la continuité de l'assemblage tende à être maintenue.

Pour la flexion des plaques, le déplacement latéral w du "plan médian" devra définir de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

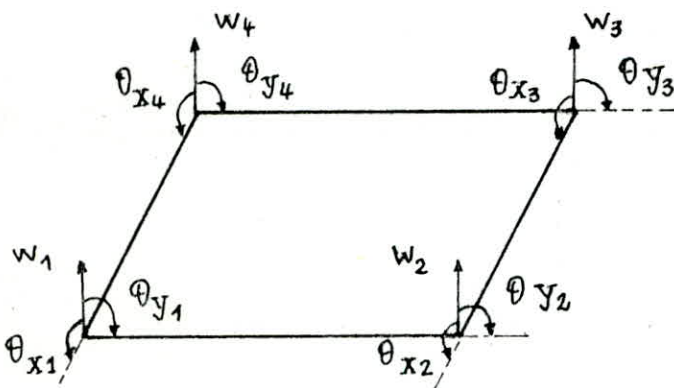
Pour que soit assurée la continuité des paramètres nodaux d'un élément à l'autre le long des côtés, il est pratique de représenter w par une expression polynômiale en (x,y) , et puisque son but est d'exprimer les déplacements de n'importe quel point $\{U(x,y)\}$ en termes de déplacements nodaux $\{\hat{U}\}$, elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément.

Jusqu'à présent, dans le cas de la flexion des plaques, l'élément choisi avait 3 degrés de liberté en chaque noeud :

w : Déformation latérale;

θ_x : Rotation autour de l'axe des x ;

θ_y : Rotation autour de l'axe des y .



L'élément avait alors un total de 12 degrés de liberté, ce qui conduisait à avoir 12 coefficients indéterminés dans le polynôme représentant w . Mais cette fonction permet une discontinuité de la pente normale le long de n'importe quel bord, elle n'est donc pas idéale, et elle est appelée "fonction non conforme".

Nous reverrons et développerons ce problème de non conformité dans l'étape concernant l'établissement de la matrice de rigidité élémentaire.

Un moyen de surmonter cette difficulté consiste à utiliser des éléments d'ordre plus élevé, donc à opter pour des polynômes d'ordre plus élevé pour les fonctions de déplacement.

Cela peut se faire de deux façons:

-La première consiste à donner des paramètres de déplacements additionnels aux noeuds situés sur les sommets.

-La seconde consiste à placer d'autres noeuds le long des côtés (en plus des noeuds aux sommets), en donnant à ceux-ci n'importe quel paramètre de déplacement.

L'avantage de ces éléments est que très peu d'entre eux sont nécessaires pour modéliser une structure. Cependant cela est réalisé au détriment de la simplicité du calcul.

Dans ce qui suivra, nous utiliserons, pour le calcul de la rigidité des éléments, la première solution, c'est-à-dire celle qui consiste à augmenter les degrés de liberté de chaque noeud.

Pour un assemblage d'éléments rectangulaires, cette méthode est pratique et licite lorsque la dérivée seconde mixte est prise comme l'un des paramètres nodaux.

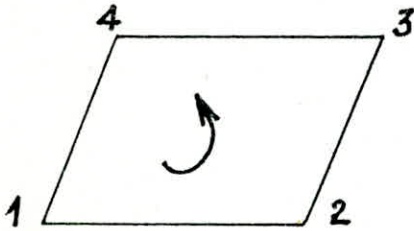
Nous augmenterons donc chaque noeud d'un degré de liberté qui sera le gauchissement " $\Gamma = \partial^2 w / \partial x \partial y$ ". Chaque élément aura donc 16 degrés de liberté, et la fonction polynomiale 16 coefficients indéterminés.

IV-4 MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE POUR L'ELEMENT RECTANGULAIRE :

Le calcul de la matrice de rigidité élémentaire suit 6 étapes de base.

**** Etape I :** choix d'un système de coordonnées convenable et numérotation des noeuds.

-La numérotation des noeuds se fera dans le sens trigonométrique.



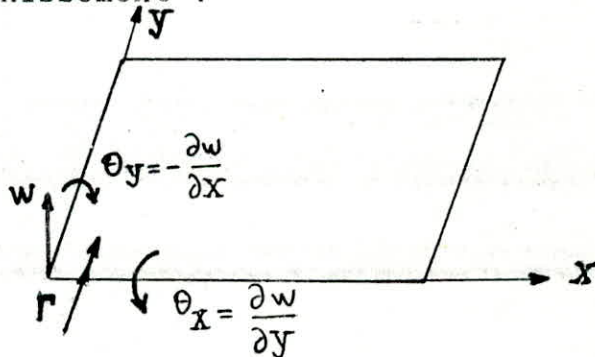
-On a 4 degrés de liberté pour chaque noeud, qui sont :

W : déplacement latéral .

θ_x : rotation autour de x .

θ_y : rotation autour de y .

Γ : gauchissement .



-Les directions positives adoptées seront définies :

>> vers le haut, pour les déplacements;

>> selon le sens trigonométrique, pour les rotations.

Le vecteur déplacement pour chaque noeud est alors :

$$\{\hat{U}_1\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \Gamma_1 \end{Bmatrix}$$

Les forces correspondantes en chaque noeud :

$$\{\hat{F}_1\} = \begin{Bmatrix} T_{1z} \\ M_{1y} \\ M_{1x} \\ M_{1\theta} \end{Bmatrix}$$

avec T_{1z} : force latérale transversale;
 M_{1y}, M_{1x} : moments de flexion;
 $M_{1\theta}$: moment gauchissement .

Donc pour un élément, on a 16 degrés de libertés, et par conséquent, la matrice de rigidité élémentaire est carrée, et d'ordre 16.

Le vecteur déplacement pour chaque élément est:

$$\{\hat{U}\}_e = \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \\ \hat{U}_4 \end{Bmatrix}$$

Le vecteur force pour chaque élément est:

$$\{\hat{F}\}_e = \begin{Bmatrix} \{\hat{F}_1\} \\ \{\hat{F}_2\} \\ \{\hat{F}_3\} \\ \{\hat{F}_4\} \end{Bmatrix}$$

** ETAPE II : choix de la fonction déplacement $f(x,y)$.

La fonction déplacement est choisie, comme le produit de deux champs de déplacement de forme cubique, de poutres en flexion afin de garantir la continuité, et de définir de façon unique les paramètres nodaux.

$$w(x,y) = (a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)(b_1 + b_2y + b_3y^2 + b_4y^3)$$

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}x^2y^2 + \alpha_{13}xy^3 + \alpha_{14}x^3y^2 + \alpha_{15}x^2y^3 + \alpha_{16}x^3y^3 \quad (3-1)$$

Cette fonction est aussi choisie de telle façon que l'isotropie soit préservée.

A partir de cette fonction on obtient les expressions suivantes pour les rotations ainsi que le gauchissement.

$$\theta_x = \delta w / \delta y = \alpha_3 + \alpha_5 + 2\alpha_6y + \alpha_8x^2 + 2\alpha_9xy + 3\alpha_{10}y^2 + \alpha_{11}x^3 + 2\alpha_{12}x^2y + 3\alpha_{13}xy^2 + 2\alpha_{14}x^3y + 3\alpha_{15}x^2y^2 + 3\alpha_{16}x^3y^2$$

$$\theta_y = -\delta w / \delta x = -(\alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y + 3\alpha_7x^2 + 2\alpha_8xy + \alpha_6y^2 + 3\alpha_{11}x^2y + 2\alpha_{12}xy^2 + \alpha_{13}y^3 + 3\alpha_{14}x^2y^2 + 2\alpha_{15}xy^3 + 3\alpha_{16}x^2y^3) \quad (3-2)$$

$$\Gamma = \delta^2 w / \delta x \delta y = \alpha_5 + 2\alpha_6x + 2\alpha_8y + 3\alpha_{11}x^2 + 4\alpha_{12}xy + 3\alpha_{13}y^2 + 6\alpha_{14}x^2y + 6\alpha_{15}xy^2 + 9\alpha_{16}x^2y^2$$

Avant de vérifier que cette fonction assure bien la continuité des flèches, des pentes et des gauchissements, montrons comment, pour l'élément à 12 degrés de liberté, la continuité des pentes n'est pas vérifiée.

En effet, pour cet élément, nous avons pour la fonction déplacement:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5xy + \alpha_6y^2 + \alpha_7x^3 + \alpha_8x^2y + \alpha_9xy^2 + \alpha_{10}y^3 + \alpha_{11}x^3y + \alpha_{12}xy^2$$

qui donne les expressions suivantes:

$$\vartheta_x = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2$$

$$\vartheta_y = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3)$$

Considérons par exemple le bord (1-4) où $x = cste = 0$

- Le déplacement latéral et les pentes, en chaque point de ce bord, sont donnés par:

$$w(0, y) = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3$$

$$\vartheta_x(0, y) = \alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2$$

$$\vartheta_y(0, y) = -(\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3)$$

- Aux extrémités de bord:

Noeud 1 (y=0):

$$w(0, 0) = w_1 = \alpha_1$$

$$\vartheta_x(0, 0) = \vartheta_{x1} = \alpha_3$$

$$\vartheta_y(0, 0) = \vartheta_{y1} = -\alpha_2$$

Noeud 4 (y=b):

$$w(0, b) = w_4 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3$$

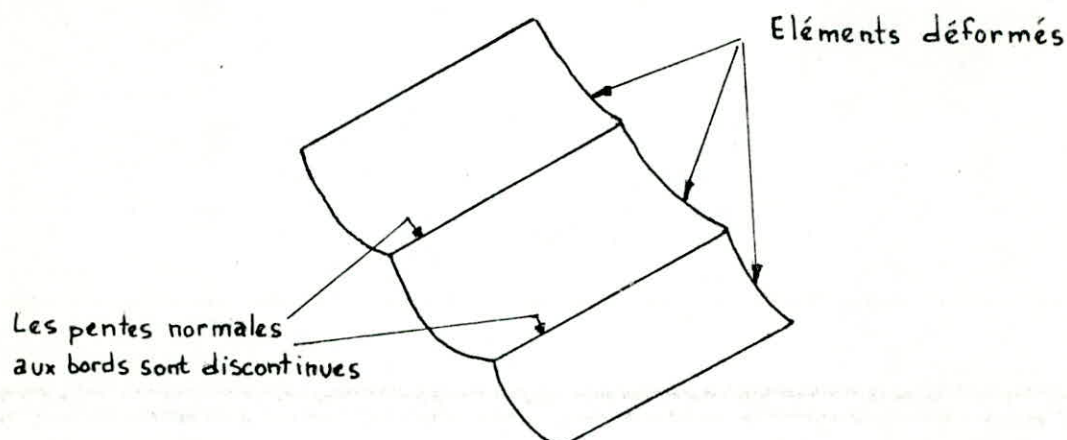
$$\vartheta_x(0, b) = \vartheta_{x4} = \alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2$$

$$\vartheta_y(0, b) = \vartheta_{y4} = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3)$$

Ainsi on ne dispose seulement que de six équations pour obtenir les huit coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12}$), qui ne peuvent donc être déterminés.

Mais on remarque que w et ϑ_x contiennent les mêmes quatre coefficients ($\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10}$), et que puisque quatre des conditions sur la frontière se rapportent à w et ϑ_x , on a alors un nombre suffisant d'équations pour calculer ces quatre coefficients. On peut donc exprimer ϑ_x et w d'une façon unique.

Quand à ϑ_y , il contient les quatre autres coefficients ($\alpha_2, \alpha_3, \alpha_8, \alpha_{12}$), alors qu'il ne reste que deux équations, qui seront donc insuffisantes pour leurs déterminations. La rotation ϑ_y n'est donc pas définie de façon unique. On dit qu'elle est discontinue le long de ces bords.



A cause de cela, la fonction choisie n'est pas idéale, et elle est appelée "fonction non conforme", comme cela a été mentionné plus haut.

Remarque:

On a seulement considéré ci-dessus le cas du bord (1-4) où $x=0$. Cependant, la conclusion est généralement vraie et une discontinuité de la pente normale peut exister le long de n'importe quel bord.

- Vérifions maintenant la conformité de la nouvelle fonction de déplacement munie de 16 coefficients. Nous procédons de la même manière que précédemment:

On considère le bord (1-4):

- Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord sont donnés par:

$$w(0, y) = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_8 y^2 + \alpha_{10} y^3$$

$$\vartheta_x(0, y) = \alpha_3 + 2\alpha_8 y + 3\alpha_{10} y^2$$

$$\vartheta_y(0, y) = -(\alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{13} y^3)$$

$$\Gamma(0, y) = \alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_8 y + 3\alpha_{13} y^2$$

- Aux extrémités de bord:

Noeud 1 (y=0):

$$\begin{aligned} w(0,0) &= w_1 = \alpha_1 \\ \vartheta_x(0,0) &= \vartheta_{x1} = \alpha_3 \\ \vartheta_y(0,0) &= \vartheta_{y1} = -\alpha_2 \\ \Gamma(0,0) &= \Gamma_1 = \alpha_5 \end{aligned}$$

Noeud 4 (y=b):

$$\begin{aligned} w(0,b) &= w_4 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_8 b^2 + \alpha_{10} b^3 \\ \vartheta_x(0,b) &= \vartheta_{x4} = \alpha_3 + 2\alpha_8 b + 3\alpha_{10} b^2 \\ \vartheta_y(0,b) &= \vartheta_{y4} = -(\alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{13} b^3) \\ \Gamma(0,b) &= \Gamma_4 = \alpha_5 + 2\alpha_8 + 2\alpha_9 b + 3\alpha_{13} b^2 \end{aligned}$$

On dispose de 8 équations pour obtenir les 8 coefficients inconnus ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{13}$). Le nombre d'équations étant égal au nombre d'inconnues, $w, \vartheta_x, \vartheta_y$ et Γ seront donc définis de façon unique.

On dira alors que la fonction w est une "fonction conforme".

Ecrire les équations (3-1) et (3-2) sous forme matricielle peut être résumé par l'équation générale:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ \Gamma \end{Bmatrix} = \{U(x,y)\} = [f(x,y)].\{\alpha\} \quad (3-3)$$

$[f(x,y)]$: Fonction reliant le déplacement d'un noeud de coordonnées (x,y) aux 16 coefficients α

$\{\alpha\}$: Vecteur colonne des coefficients inconnus.

On aura:

$$[f(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 3x^2y^2 & 2xy^3 & 3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6xy^2 & 9x^2y^2 \end{bmatrix}$$

**** ETAPE III** : Exprimer l'état de déplacement en chaque point, en fonction des déplacements nodaux - Calcul des fonctions d'interpolation.

A partir de la matrice $[f(x,y)]$, on construit une matrice $[A]$ qui lie les déplacements nodaux aux coefficients inconnus, en remplaçant chaque noeud par ses coordonnées et en plaçant les blocs selon la numérotation adoptée.

On obtient

$$\{U\}_e = [A]\{\alpha\}.$$

MATRICE $[A]$:

$$\begin{array}{l}
 N_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right. \\
 N_2 \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad a \quad 0 \quad a^2 \quad 0 \quad 0 \quad a^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad a \quad 0 \quad 0 \quad a^2 \quad 0 \quad 0 \quad a^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad -2a \quad 0 \quad 0 \quad -3a^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2a \quad 0 \quad 0 \quad 3a^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right. \\
 N_3 \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad a \quad b \quad a^2 \quad ab \quad b^2 \quad a^3 \quad ab^2 \quad ab^2 \quad b^3 \quad ab^3 \quad ab^3 \quad ab^3 \quad ab^3 \quad ab^3 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad a \quad 2b \quad 0 \quad a^2 \quad 2ab \quad 3b^2 \quad a^3 \quad 2ab^2 \quad ab^2 \quad 2ab^2 \quad 3ab^2 \quad 3ab^2 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad -2a \quad -b \quad 0 \quad -3a^2 \quad -2ab \quad -b^2 \quad 0 \quad -3ab^2 \quad -2ab^2 \quad -b^3 \quad -3ab^2 \quad -2ab^2 \quad -3ab^2 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2a \quad 2b \quad 0 \quad 3a^2 \quad 4ab \quad 3b^2 \quad 6ab^2 \quad 6ab^2 \quad 9ab^2 \end{array} \right. \\
 N_4 \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad 0 \quad b \quad a^2 \quad 0 \quad b^2 \quad a^3 \quad 0 \quad 0 \quad b^3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 2b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3b^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad -b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -b^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -b^3 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2b \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3b^2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

De ce système d'équations, on peut exprimer le vecteur colonne des coefficients inconnus en fonction des déplacements nodaux:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{U\}_e,$$

d'où on peut exprimer le déplacement en n'importe quel point, en fonction des déplacements nodaux:

L'équation (3-3) devient:

$$\{U\} = [f(x,y)][A]^{-1}\{\hat{U}\}_e = [N]_e\{\hat{U}\}_e \quad (3-4)$$

Avec $[N]_e = [f(x,y)][A]^{-1}$, fonction de forme où d'interpolation de dimension (4,16).

$$[N]_e = [[N]^1, [N]^2, [N]^3, [N]^4]$$

L'inversion de $[A]$ peut être faite numériquement, mais pour pouvoir obtenir une expression explicite de la matrice de rigidité élémentaire, pour plus d'efficacité numérique (allègement du programme et gain de calcul), nous avons effectué cette inversion algébriquement, comme suit.

Après avoir posé $a=1$ et $b=1$, nous avons inversé $[A]$ numériquement, et par la suite nous avons introduit les variables $1/a, 1/b, 1/a^2, 1/b^2, 1/ab \dots$ dans $[A]^{-1}$ de façon à ce que:

$$[A][A]^{-1} = [I] = \text{Matrice identité.}$$

MATRICE $[A]^{-1}$:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-3/a^2$	0	$2/a$	0	$3/a^2$	0	$1/a^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-3/b^2$	$-2/b$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$3/b^2$	$-1/b$	0	0
$2/a^3$	0	$-1/a^2$	0	$-2/a^3$	0	$-1/a^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-3/a^2$	0	$-2/a$	0	$3/a^2$	0	$-1/a$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$3/b^2$	$-2/b$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-3/b^2$	$-1/b$
$2/b^3$	$1/b^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2/b^3$	$1/b^2$	0	0
0	$2/a^3$	0	$1/a^2$	0	$-2/a^3$	0	$1/a^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$9/a^2b$	$6/a^2b$	$-6/a^2b$	$4/ab$	$-9/a^2b$	$-6/a^2b$	$-3/ab^2$	$2/ab$	$9/a^2b$	$-3/a^2b$	$+3/ab^2$	$1/ab$	$-9/a^2b$	$3/a^2b$	$6/a^2b$	$2/ab$
0	0	$-2/b^3$	$1/b^2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2/b^3$	$1/b^2$
$-6/a^3b$	$-4/a^3b$	$3/a^2b$	$-2/a^2b$	$6/a^3b$	$4/a^3b$	$3/a^2b$	$-2/a^2b$	$-6/a^3b$	$2/a^3b$	$-3/a^2b$	$-1/a^2b$	$6/a^3b$	$-2/a^3b$	$-3/a^2b$	$-1/a^2b$
$-6/a^3b$	$-3/a^2b$	$4/a^3b$	$-2/a^2b$	$6/a^3b$	$3/a^2b$	$2/ab^3$	$-1/a^2b$	$-6/a^3b$	$3/a^2b$	$-2/ab^3$	$-1/a^2b$	$6/a^3b$	$-3/a^2b$	$-4/ab^3$	$-2/ab^2$
$4/a^3b$	$2/a^2b$	$-2/a^3b$	$1/a^2b$	$-4/a^3b$	$-2/a^2b$	$-2/ab^3$	$1/a^2b$	$4/a^3b$	$-2/a^2b$	$2/a^3b$	$1/a^2b$	$-4/a^3b$	$2/a^2b$	$2/a^2b$	$1/a^2b$

* ETAPE IV : relier les déformations $\{\epsilon(x,y)\}$ en chaque point aux déplacements $\{U(x,y)\}$ et donc aux déplacements nodaux $\{\hat{U}\}_e$.

L'état de déformation en chaque point peut être représenté par 3 composantes.

- La courbure de la plaque dans le plan xz: $-\delta^2 w / \delta x^2$
- La courbure de la plaque dans le plan yz: $-\delta^2 w / \delta y^2$
- La torsion $:-\delta^2 w / \delta x \delta y$

Remarque:

Les moments internes M_x et M_y agissent chacun sur deux côtés de l'élément, il en est de même pour les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} , mais puisque M_{xy} est égal à M_{yx} , on peut considérer que l'un des deux, par exemple M_{xy} , agit sur les quatre côtés, cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur des déformations.

L'état de déformation dans l'élément est donc représenté par:

$$\{\epsilon(x,y)\} = \begin{Bmatrix} -\delta^2 w / \delta x^2 \\ -\delta^2 w / \delta y^2 \\ -2\delta^2 w / \delta x \delta y \end{Bmatrix}$$

En remplaçant w par son expression polynômiale, on obtient une équation qui peut être écrite sous la forme:

$$\{\epsilon(x,y)\} = [Q] \{\alpha\}$$

avec:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & -2y^2 & 0 & -6xy^2 & -2y^3 & -6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -2x^2 & -6xy & -2x^3 & -6x^2y & -6xy^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -8xy & -6y^2 & -12xy & -12xy^2 & -18xy^2 \end{bmatrix}$$

En remplaçant $\{\alpha\}$ par $[A]^{-1} \{\hat{U}\}_e$, on obtient la relation suivante déformations-déplacements nodaux:

$$\{\epsilon(x,y)\} = [Q][A]^{-1} \{\hat{U}\}_e = [B] \{\hat{U}\}_e \quad (3-5)$$

$$\text{avec } [B] = [Q][A]^{-1}$$

**** ETAPE V :** relier les contraintes internes $\{\sigma(x,y)\}$ aux déformations et donc aux déplacements nodaux $\{\hat{U}\}_e$.

Les relations entre contraintes et déformations, c'est-à-dire entre moments et courbures, sont données, comme il a été déjà vu dans la théorie de la flexion des plaques, par les relations suivantes :

$$\begin{cases} M_x = -(D_x \delta^2 w / \delta x^2 + \mu_x D_y \delta^2 w / \delta y^2) \\ M_y = -(D_y \delta^2 w / \delta y^2 + \mu_y D_x \delta^2 w / \delta x^2) \\ C = -2D_{xy} \delta^2 w / \delta x \delta y \end{cases}$$

Ces trois équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\{\sigma(x,y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ C \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} D_x & \mu_x D_y & 0 \\ \mu_y D_x & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\delta^2 w / \delta x^2 \\ -\delta^2 w / \delta y^2 \\ -2\delta^2 w / \delta x \delta y \end{Bmatrix}$$

c.a.d

$$\{\sigma(x,y)\} = [D] \{\epsilon(x,y)\} ,$$

définissant ainsi la matrice $[D]$ symétrique, car $\mu_x D_y = \mu_y D_x$.

Pour la cas isotrope:

$$[D] = \begin{bmatrix} D & D\mu & 0 \\ D\mu & D & 0 \\ 0 & 0 & D/2(1-\mu) \end{bmatrix} = \text{Matrice d'élasticité.}$$

En remplaçant $\{\epsilon(x,y)\}$ par $[B]\{\hat{U}\}_e$, on relie les contraintes en n'importe quel point aux déplacements nodaux par:

$$\{\sigma(x,y)\} = [D][B] \cdot \{\hat{U}\}_e = [H] \cdot \{\hat{U}\}_e \quad (3-6)$$

avec:

$$[H] = [D][B]$$

**** ETAPE VI :** relier les forces nodales aux déplacements nodaux $\{\hat{U}\}_e$ et, de là, obtenir la matrice de rigidité de l'élément $[K]_e$.

Nous utilisons le principe des travaux virtuels:

Imposons un déplacement virtuel $\delta\{\hat{U}\}_e$ aux noeuds arbitraires de l'élément, le principe est d'égaliser le travail extérieur et de l'énergie de déformation interne.

- Le travail extérieur produit lors du déplacement virtuel $\delta\{\hat{U}\}_e$ est :

$$W_{ext} = \delta\{\hat{U}\}_e^T \cdot \{\hat{F}\}_e$$

- L'énergie de déformation interne est :

$$W_{int} = \int_{V_e} \delta\{\epsilon(x,y)\}^T \cdot \{\sigma(x,y)\} dV$$

En considérant l'équation (3-5), elle devient :

$$W_{int} = \int_{V_e} \delta\{\hat{U}\}_e^T \cdot [B]^T \cdot [D][B] \cdot \{\hat{U}\}_e dV_e$$

En égalisant W_{ext} et W_{int} , on obtient :

$$\delta\{\hat{U}\}_e^T \cdot \{\hat{F}\}_e = \delta\{\hat{U}\}_e^T \cdot \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \cdot \{\hat{U}\}_e,$$

ce qui donne

$$\{\hat{F}\}_e = \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \cdot \{\hat{U}\}_e$$

analogue à

$$\{\hat{F}\}_e = [K]_e \cdot \{\hat{U}\}_e$$

d'où par identification

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV$$

avec $[B]^T = [A^{-1}]^T [Q]^T$

$$d'où \quad [K]_e = \int_{V_e} [A^{-1}]^T [Q]^T [D] [Q] [A^{-1}] dV.$$

Les matrices $[A^{-1}]^T$ et $[A^{-1}]$ ne contenant que des constantes, on peut les sortir de l'intégrale, on obtient donc

$$[K]_e = [A^{-1}]^T \cdot \int_{V_e} [Q]^T [D] [Q] dV [A^{-1}]$$

En posant

$$[R] = \int_{V_e} [Q]^T [D][Q] dV \quad (3-7)$$

$[K]_e$ devient comme un produit de trois matrices

$$[K] = [A^{-1}]^T [R][A^{-1}] \quad (3-8)$$

Pour le cas spécifique d'un élément rectangulaire pour la flexion des plaques, on remplace l'expression générale ($\int_{V_e} dV$) par l'expression ($\int_0^b \int_0^a dx dy$).

L'expression (3-7), sous le signe "Somme", peut être calculée et intégrée explicitement sans trop de difficultés.

Nous avons en premier lieu calculé le produit $[Q]^T[D][Q]$ et nous l'avons intégré en deuxième lieu.

La matrice $[R]$ ne dépend donc que de μ, D, a et b , et finalement l'expression explicite de $[K]_e$ est obtenue suivant la formule (3-8).

Matrice $[K]$:

A1 E1 F1 G1 H1 I1 J1 K1 L1 M1 N1 O1 P1 Q1 R1 S1
B1 T1 U1 I1 V1-K1 W1-M1 X1 O1 Y1-Q1 Z1 S1 A2
C1-B2 -J1 K1 C2-D2-N1 O1 E2-F2 R1-S1 G2-H2
D1-K1-W1-D2 I2 O1-Y1 F2 J2-S1 A2 H2 K2
A1 E1-F1-G1 P1 Q1-R1-S1 L1 M1-N1-O1
B1-T1-U1-Q1 Z1-S1-A2-M1 X1-O1-Y1
C1-B2-R1 S1 G2-H2 N1-O1 E2-F2
D1 S1-A2 H2 K2-O1 Y1 F2 J2
SYMETRIQUE A1-E1-F1 G1 H1-I1-J1 K1
B1 T1-U1-I1 V1-K1-W1
C1 B2 J1 K1 C2 D2
D1-K1 W1 D2 I2
A1-E1 F1-G1
B1-T1 U1
C1 B2
D1

Avec :

$$A1=72*D/25*a*b+156*D*(b/a^3+a/b^3)/35$$

$$E1=78*D*a/35*b^2+22*D*b^2/35*a^3+D*(6/25+6*\mu/5)/a$$

$$F1=-78*D*b/35*a^2-22*D*a^2/35*b^3-D*(6/25+6*\mu/5)/b$$

$$G1=11*D*b^2/35*a^2+11*D*a^2/35*b^2+D*(1/50+1*\mu/5)$$

$$H1=-72*D/25*a*b-156*D*b/35*a^3+54*D*a/35*b^3$$

$$I1=-22*D*b^2/35*a^3+27*D*a/35*b^2-D*(6/25+6*\mu/5)/a$$

$$J1=13*D*a^2/35*b^3-78*D*a/35*a^2-6*D/25*b$$

.....

Remarques :

Pour s'assurer de l'exactitude des termes de $[K]_e$, il a fallu :

1- Calculer $[K]_e^I$ numériquement, en utilisant pour le calcul de la double intégrale, la méthode des trapèzes.

2- Calculer $[K]_e^{II}$ établie analytiquement.

3- Procéder à leur comparaison, en établissant la différence de leurs termes.

Le plus grand écart entre deux termes étant de l'ordre de 10^{-8} , les termes explicites de $[K]_e$ établis analytiquement sont donc corrects.

IV-5 VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE POUR L'ELEMENT RECTANGULAIRE :

Afin de pouvoir calculer les forces nodales statiquement équivalentes aux chargements repartis sur les frontières de l'élément, on impose un déplacement virtuel $\delta\{\hat{U}\}_e$ arbitraire aux noeuds de l'élément, puis on égalise l'expression des travaux intérieurs et extérieurs.

- Travail effectué par les forces nodales directement appliquées aux noeuds = somme des produits de chaque composante des forces par le déplacement correspondant :

$$\delta\{\hat{U}\}_e^T \cdot \{\hat{F}\}_e \quad (a)$$

- Travail intérieur effectué par les contraintes et les chargements répartis $\{q\}$, obtenu par intégration sur le volume de l'élément :

$$\int_{V_e} \delta \{ \epsilon(x,y) \}^T \cdot \{ \sigma(x,y) \} dV - \int_{V_e} \{ \hat{U} \}^T \cdot \{ q \} \cdot dV$$

ou encore

$$\int_{V_e} \delta \{ \hat{U} \}^T \cdot ([B]^T \{ \sigma(x,y) \} - [N]^T \{ q \}) dV \quad (b)$$

En égalant (a) et (b) on obtient :

$$\delta \{ \hat{U} \}^T \cdot \{ \hat{F} \} = \delta \{ \hat{U} \}^T \cdot \left(\int_{V_e} ([B]^T \{ \sigma(x,y) \} - [N]^T \{ q \}) dV \right)$$

Comme cette relation est valable pour n'importe quel déplacement virtuel, elle entraîne l'égalité des matrices par lesquelles sont multipliés ces déplacements, on a donc :

$$\{ \hat{F} \} = \int_{V_e} ([B]^T \{ \sigma(x,y) \} - [N]^T \{ q \}) dV$$

et comme pour un comportement linéaire élastique

$$\{ \sigma(x,y) \} = [D][B] \cdot \{ \hat{U} \}$$

on obtient:

$$\{ \hat{F} \} = \left(\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right) \{ \hat{U} \} - \int_{V_e} [N]^T \{ q \} dV$$

$$\{ \hat{F} \} = [K] \cdot \{ \hat{U} \} - \int_{V_e} [N]^T \{ q \} dV \quad (c)$$

Or l'on sait aussi que :

$$\{ \hat{F} \} = [K] \cdot \{ \hat{U} \} - \{ \hat{F} \}^q \quad (d)$$

avec

$[K] \cdot \{ \hat{U} \}$: Forces engendrées par le déplacement des noeuds.

$\{ \hat{F} \}^q$: Forces nodales statiquement équivalentes à une charge $\{q\}$, répartie, s'exerçant sur l'élément.

Par identification de (c) et (d) on obtient:

$$\{ \hat{F} \}^q = \int_{V_e} [N]^T \{ q \} dV \quad (3-9)$$

Dans notre cas, cette intégrale généralisée se ramène à une intégrale surfacique, le vecteur charge $\{q\}$ a une seule composante suivant l'axe Oz, et la matrice $[N]^T$ est une matrice de dimension (16-1) :

$$[N]^T = [A^{-1}]^T [P]^T$$

avec

$$[P] = (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3y^2, x^2y^3, x^3y^3)$$

L'expression (3-9) devient donc

$$\{\hat{F}\}_e^q = [A^{-1}]^T \cdot q \cdot \int_0^b \int_0^a [P]^T dx dy \quad (3-10)$$

Après intégration, on obtient le vecteur de forces nodales suivant :

$$\{\hat{F}\}_e^q = (q \cdot a \cdot b / 4) \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ b/6 \\ -a/6 \\ ab/36 \\ 1 \\ b/6 \\ a/6 \\ -ab/36 \\ 1 \\ -b/6 \\ a/6 \\ ab/36 \\ 1 \\ -b/6 \\ -a/6 \\ -ab/36 \end{array} \right\}$$

IV-6 GENERALISATION AU DOMAINE ENTIER - REGLE D'ASSEMBLAGE :

Dans les paragraphes précédents, le principe des travaux virtuels a été appliqué à un élément isolé, et l'on a introduit le concept de force nodale équivalente.

Le principe de l'assemblage est basé sur la méthode conventionnelle de l'équilibrage direct de ces forces nodales.

Les raisonnements des paragraphes précédents peuvent s'appliquer directement au milieu continu entier. En effet l'équation (3,4) peut s'interpréter comme s'appliquant cette fois à la structure entière, à savoir :

$$\{U\} = [\bar{N}] \{\hat{U}\}$$

où $\{\hat{U}\}$ regroupe les déplacements de tous les points nodaux et où,

$\bar{N}_i = N_i^e$: lorsque le point considéré est intérieur à l'élément e , et i est un point associé à cet élément,

$\bar{N}_i = 0$: si le point ne figure pas dans l'élément.

On donnera de la matrice $[B]$ une définition semblable. On est alors en mesure d'appliquer le principe des travaux virtuels à toute la structure, et le travail virtuel extérieur associé à un déplacement virtuel quelconque de tous les noeuds $\delta\{U\}$ devient :

$\delta\{\hat{U}\}^T \cdot \{\hat{F}\}$, cependant que le travail virtuel intérieur a pour expression :

$$\int_V \delta\{\epsilon(x,y)\}^T \{\sigma(x,y)\} dV - \int_V \delta\{U\}^T \{q\} dV,$$

l'intégration étant cette fois effectuée sur tout le domaine.

En effectuant la substitution de ,

$$\delta\{U\} \text{ par } [\bar{N}] \delta\{\hat{U}\} \quad \text{et de} \quad \delta\{\epsilon(x,y)\} \text{ par } [\bar{B}] \delta\{\hat{U}\}$$

et en tenant compte de la relation contraintes-déformations $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$ on obtient immédiatement, en égalant les travaux virtuels intérieur et extérieur ,

$$[K] \{\hat{U}\} - \{\hat{F}\}_q = \{\hat{F}\}$$

Il vient, pour l'expression de la matrice de raideur,

$$[K] = \int_V [\bar{B}]^T \cdot [D] \cdot [\bar{B}] \cdot dV$$

l'intégrale étant prise sur tout le domaine.

Si l'on considère, cependant, la relation entre $[B]$ et $[B]$, il est évident que :

$[K] = \sum [K]_e$, où les termes provenant de chaque élément ont été évalués individuellement, conformément aux méthodes explicitées ci-dessus.

On peut facilement montrer qu'il en va de même pour les diverses composantes des forces qui interviennent.

Finalement, d'après ce que nous venons de décrire, on peut prévoir que l'assemblage comportera deux étapes :

- Construction de la matrice de rigidité élémentaire $[K]_e$ et du vecteur force élémentaire $\{\hat{F}\}_e$ de chaque élément.

- Addition des matrices et des vecteurs élémentaires.

IV-7 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS CONSIDEREE COMME UNE MINIMISATION DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE :

Le principe des travaux virtuels utilisé dans les paragraphes précédents, a permis de satisfaire aux conditions d'équilibre dans les limites imposées par la distribution des déplacements choisie initialement.

C'est seulement dans le cas où l'égalité des travaux virtuels était réalisée pour toutes les variations arbitraires de déplacements (en n'imposant que les conditions aux frontières), qu'alors l'équilibre serait achevé.

Le principe des travaux virtuels peut être reposé d'une manière différente, en termes variationnels pour caractériser l'équilibre, en effet :

$$\pi = U - W \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \pi : \text{énergie potentielle totale} \\ U : \text{énergie de déformation interne} \\ W : \text{travail des forces extérieures} \end{array}$$

$$\text{ou } U = \int_V 1/2 \{ \epsilon \}^T [D] \{ \epsilon \} dV \quad \text{et} \quad W = \{ \hat{U} \}^T \{ \hat{F} \}$$

on obtient donc

$$\pi = 1/2 \{ \hat{U} \}^T [K] \{ \hat{U} \} - \{ \hat{U} \}^T \{ \hat{F} \}.$$

Or la minimisation de l'énergie potentielle totale correspond à l'équilibre des systèmes. Donc la solution du problème continu est une fonction $\{ \hat{U} \}$ qui rend π stationnaire, ce qui signifie que sa "variation" correspondant à des petits changements $\delta \{ U \}$ de la fonction inconnue doit être nulle et donc $\delta \pi = 0$.

$$\delta \pi = 0 \quad \{ \delta \hat{U} \}^T ([K] \{ \hat{U} \} - \{ \hat{F} \}) = 0$$

$$[K] \{ \hat{U} \} - \{ \hat{F} \} = 0$$

Cette relation ne constitue rien d'autre que la traduction de cette variation par rapport à l'ensemble des déplacements limités à un nombre fini de paramètres $\{ \hat{U} \}$.

On montre que dans le domaine élastique, non seulement l'énergie potentielle totale est stationnaire, mais qu'en plus elle est minimale : Le processus des éléments finis consiste donc en la recherche d'un tel minimum, dans la limite d'un type imposé de champ de déplacements. Mathématiquement, cela revient à poser le problème en termes de résolution d'un système d'équations simultanées.

IV-8 CRITERES DE CONVERGENCE :

Si le nombre des paramètres $\{ \hat{U} \}$ définissant le déplacement augmente indéfiniment, on pourra alors obtenir une approximation de plus en plus précise de l'ensemble des conditions d'équilibre.

Donc, plus le nombre de degrés de liberté sera élevé, plus la solution obtenue sera proche de la solution exacte, qui est celle qui réalise l'équilibre complet, à condition que les déplacements tendent à la limite vers les déplacements réels. On pourrait donc en déduire les conditions nécessaires de convergences du processus des éléments finis qui sont :

Complétude :

Un élément fini est dit complet quand il permet la définition d'un champ de déplacement réel aussi fidèlement que possible. Cette condition doit s'appliquer d'une part aux états de déformations nulles, c'est à dire aux modes rigides, et d'autre part aux états de déformations élastiques, on peut donc en déduire les deux critères suivants :

Critère 1 :

La fonction de déplacement doit être choisie telle qu'elle ne permette pas la déformation d'un élément lorsque les déplacements de ces noeuds sont la conséquence d'un mouvement de corps rigides.

Critère 2 :

La forme de la fonction de déplacement doit être choisie de telle manière que si ses déplacements nodaux sont compatibles avec un état de déformation constante, on puisse réellement obtenir ces déformations constantes dans tout l'élément.

Compatibilité - Critère 3 :

Un élément fini est dit compatible quand il permet la définition d'un champ compatible c'est à dire assure une continuité C^1 (déplacements et leurs dérivées premières continues) pour les problèmes de flexion.

Ce critère suppose donc une certaine continuité des déplacements lorsque l'on passe d'un élément à un autre.

CHAPITRE V

Etude des plaques multicouches

V-1 INTRODUCTION :

On voit apparaitre de plus en plus des associations de matériaux divers qui, par leurs propriétés individuelles, contribuent à donner, par une sorte de synthèse, des résultats difficiles ou impossibles à atteindre sous forme d'une matière homogène et continue.

Ces matériaux sont dits "Matériaux Composites" et ont de tout temps été utilisés par l'homme: bois et torchis sont des matériaux composites.

Dans le domaine du bâtiment et des travaux publics, leurs applications sont nombreuses, telles que:

- Les cellules d'habitations,
- Les cheminées d'usines,
- Coffrages; moules à béton,
- Couvertures diverses (coupoles, hublots...)
- piscines,
- Panneaux de façades,
- Profilés,
- Cloisons, portes, mobilier, sanitaire,
- restauration des structures...

Mais l'étude sous charges de telles associations (évaluation des contraintes et des déplacements) devient un problème complexe.

-Dans ce chapitre, nous citerons des relations permettant de déterminer les propriétés mécaniques d'une plaque multicouche soumise aux divers sollicitations, à partir des propriétés de chacune de ses couches, et nous montrerons que cela aboutit à une formulation homogénéisée, c'est-à-dire à des lois de comportement formellement identique à celles qui caractérisent le comportement des plaques homogènes classiques.

Comme conséquence pratique de cette homogénéisation, il devient possible de déterminer les caractéristiques équivalentes dont la connaissance est nécessaire lors de l'entrée des données dans un logiciel de calcul utilisant des éléments finis de plaques homogènes.

EQUATIONS GENERALES

V-2 CAS GENERAL :

V-2-1 Relation contrainte-déformation d'une couche anisotrope.

Vu les trois plans de symétrie qui existent pour les éléments prismatiques, et l'état de contraintes plan de nos éléments, la matrice d'élasticité (dite de rigidité) s'écrit:

*par rapport aux axes principaux d'orthotropie

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{où } E_{ij} = E_{ji} \quad (5-1)$$

*par rapport aux axes X-Y faisant l'angle θ avec les axes d'orthotropie

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où } \bar{E}_{ij} = f(E_{ij}, \theta) \quad (5-2)$$

Cas d'une couche orthotrope:

On appelle matériau orthotrope, un matériau élastique, homogène, présentant en tout point deux symétries du comportement mécanique, chacune par rapport à un plan, les deux plans étant orthogonaux. Dans ce cas les axes principaux d'orthotropie et les axes X-Y coïncident.

On montre alors que la matrice d'élasticité se réduit à:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x / (1 - \nu_x \nu_y) & \nu_y E_y / (1 - \nu_x \nu_y) & 0 \\ \nu_y E_x / (1 - \nu_x \nu_y) & E_y / (1 - \nu_x \nu_y) & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5-3)$$

de plus, la symétrie de la matrice, de la loi de comportement ci-dessous entraîne les égalités: $\nu_y E_x = \nu_x E_y$.

V-2-2 Comportement de la multicouche soumise à des sollicitations.

Définition: Une multicouche représente un empilement de couches différentes dont l'assemblage est supposé parfait.

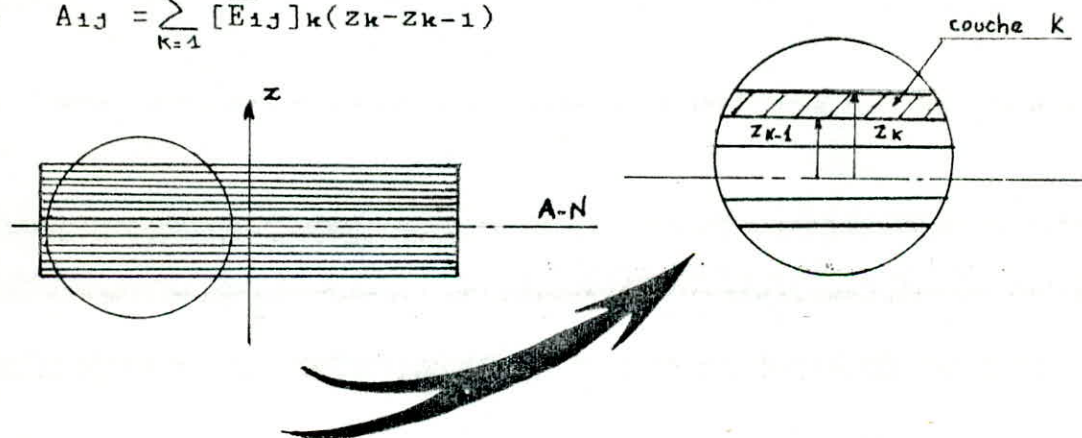
*Comportement en membrane:

Le stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan, qui sont, N_x, N_y, T_{xy} .

En procédant de la même manière que pour le cas de pièce homogène, on aboutit à la loi de comportement en membrane du stratifié rendu "homogène" sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \quad (5-4)$$

avec $A_{ij} = \sum_{k=1}^n [\bar{E}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1})$



Il est important de noter que ce flux d'efforts normaux engendre des distorsions angulaires, étant donné les propriétés d'anisotropie sous l'angle qualitatif (angle formé par les axes X-Y et les axes d'orthotropie) des couches constituant le stratifié.

Ce couplage disparaît si le stratifié est équilibré, c'est-à-dire outre la symétrie miroir, il présente autant de plis faisant avec la direction X l'angle $+\theta$ que de plis faisant l'angle $-\theta$, les plis étant identiques.

***Comportement en flexion:**

Le stratifié est soumis, dans ce cas aux moments M_x, M_y et M_{xy} . Pour chaque couche les moments s'écrivent sous la forme:

$$M_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad , \quad M_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz \quad \text{et} \quad M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$

et compte tenu de la relation (5-2) permettant d'exprimer, dans le repère X-Y, les contraintes dans une couche en fonction des déformations de cette dernière, le moment M_x s'écrit alors:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n^{\text{e}} \text{couche}} \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{E}_{11}^k \epsilon_x + \bar{E}_{12}^k \epsilon_y + \bar{E}_{13}^k \gamma_{xy}) \cdot z \cdot dz \right\}$$

et en fonction des courbures cela devient:

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{E}_{11}^k (z^2 \delta^2 w / \delta x^2) + \bar{E}_{12}^k (z^2 \delta^2 w / \delta y^2) + \bar{E}_{13}^k (z^2 \delta^2 w / \delta x \delta y)) dz \right\}$$

après intégration on obtient

$$M_x = \sum_{k=1}^n \left\{ \bar{E}_{11}^k \cdot \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \bar{E}_{12}^k \cdot \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \bar{E}_{13}^k \cdot \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \right\}$$

soit encore,

$$M_x = D_{11} \cdot \delta^2 w / \delta x^2 + D_{12} \cdot \delta^2 w / \delta y^2 + D_{13} \cdot 2 \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y$$

$$\text{avec } D_{1j} = - \sum_{k=1}^n \bar{E}_{1j}^k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3) / 3$$

en procédant de manière analogue avec M_y et M_{xy} , on obtient sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^2 w / \delta x^2 \\ \delta^2 w / \delta y^2 \\ 2 \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y \end{Bmatrix} \quad (5-5)$$

$$\text{avec } D_{1j} = -1/3 \sum_{k=1}^n [\bar{E}_{1j}]_k \cdot (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

c'est la loi de comportement en flexion du stratifié rendu "homogène".

Il est important de souligner qu'une plaque stratifiée peut fléchir sous l'action des sollicitations de membranes: en effet, si la symétrie miroir n'est pas respectée, il y a couplage entre les deux comportements.

L'écriture suivante, dans laquelle les coefficients B_{ij} sont les coefficients de couplage, résume dans ce cas le comportement global:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{0x} \\ \epsilon_{0y} \\ \gamma_{0x} \\ \delta^2 w / \delta x^2 \\ \delta^2 w / \delta y^2 \\ 2 \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y \end{Bmatrix} \quad (5-6)$$

avec $B_{ij} = -1/2 \sum_{k=1}^n [\bar{E}_{ij}]^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$

et lorsque la symétrie miroir existe, le comportement en membrane est indépendant du comportement en flexion c-à-d $[B]=[0]$.

V-3 CAS PARTICULIER : EMPILEMENT DE COUCHES ISOTROPES SOUMIS A LA FLEXION .

V-3-1 Loi de comportement en flexion.

On appelle matériau isotrope, un matériau linéairement élastique, homogène pour lequel les axes d'orthotropie et les axes X-Y coïncident, et qui présente des propriétés mécaniques identiques dans toutes les directions.

Comme montré précédemment, pour une couche isotrope, la relation contraintes-déformation s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{E} & \mu \cdot \bar{E} & 0 \\ \mu \cdot \bar{E} & \bar{E} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\mu) \cdot \bar{E} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (5-7)$$

où $\bar{E} = E/(1-\mu^2)$

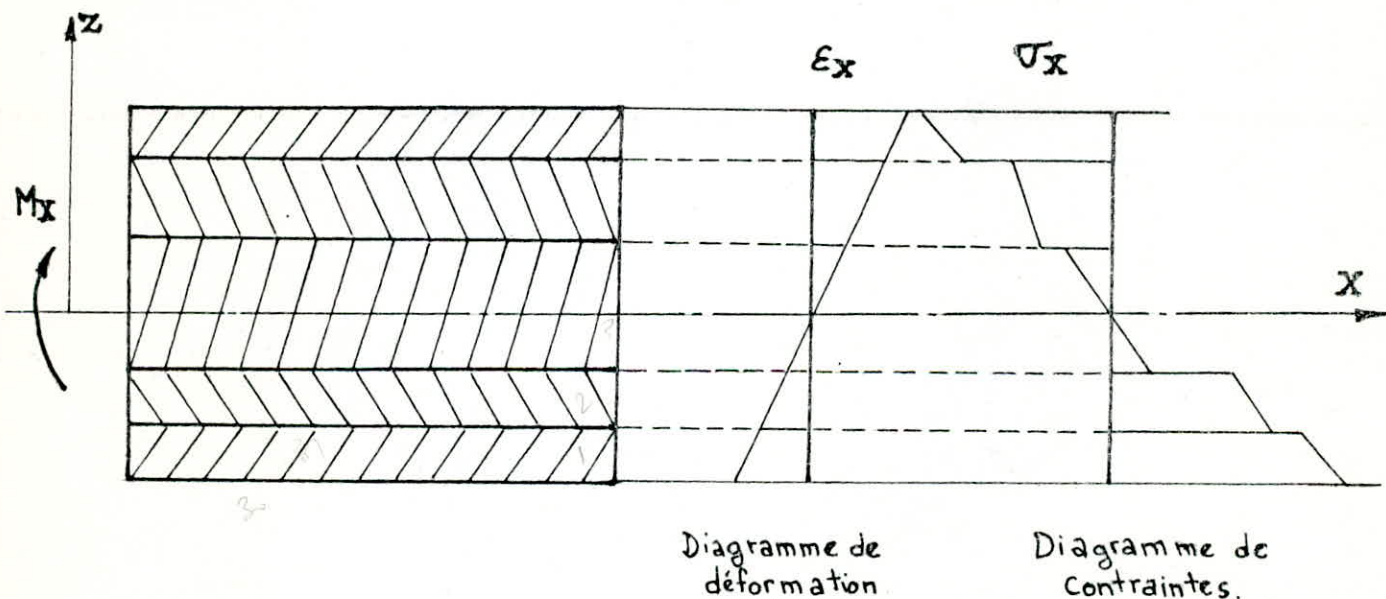
et la loi de comportement en flexion du stratifié à couches isotropes rendu "homogène" s'écrit alors:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta^2 w / \delta x^2 \\ \delta^2 w / \delta y^2 \\ 2. \delta^2 w / \delta x \delta y \end{Bmatrix} \quad (5-8)$$

avec

$$\begin{aligned} D_{11} &= -1/3. \sum_{k=1}^n [\bar{E}]^k. (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ D_{12} = D_{21} &= -1/3. \sum_{k=1}^n [\mu \bar{E}]^k. (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ D_{33} &= -1/3. \sum_{k=1}^n [1/2. (1-\mu). \bar{E}]^k. (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (5-9)$$

****Représentation des diagrammes de contraintes et de déformations dans une section courante d'une multicouche:**



La continuité $(\epsilon_x)_i = (\epsilon_x)_j$ au passage des lignes d'interfaces entre les phases i et j entraîne:

$$\frac{(\sigma_x - \mu_i \sigma_y)_i}{E_i (1 - \mu_i^2)} = \frac{(\sigma_x - \mu_j \sigma_y)_j}{E_j (1 - \mu_j^2)}$$

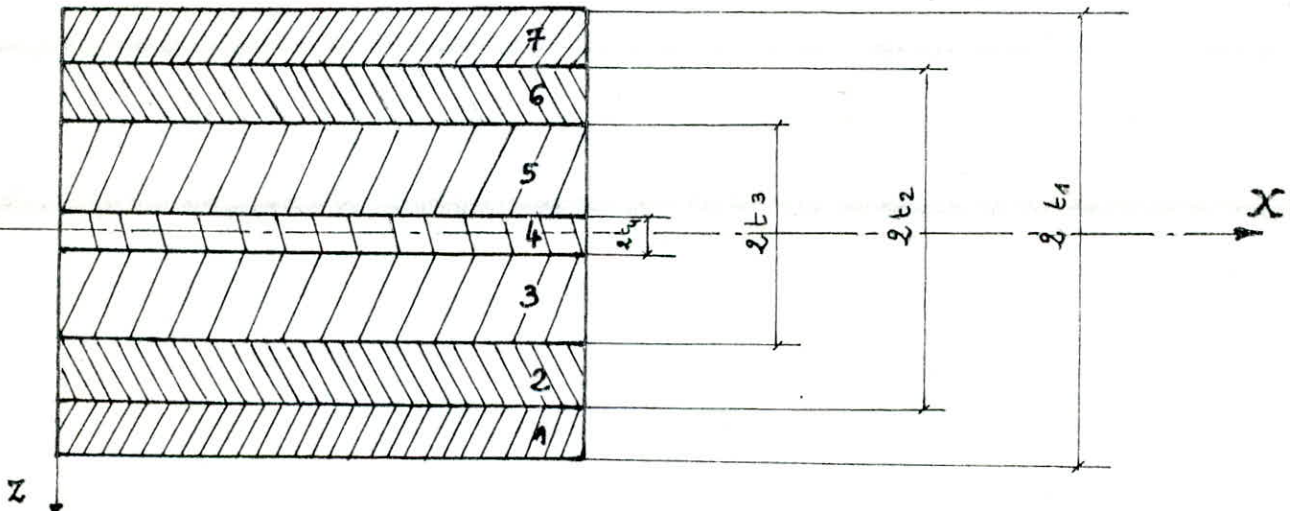
ainsi on constate une discontinuité des contraintes normales dans la proportion du rapport des expressions $E.(1-\mu^2)$.

Remarque: On peut montrer qu'un empilement de couches isotropes constituant une multicouche se comporte comme un matériau "homogène isotrope".

En effet, deux couches contigües présentant des propriétés d'isotropie, assurent la continuité des déplacements, et des déformations aux interfaces, et cette particularité empêchera tout glissement relatif des couches, et ainsi, le comportement d'ensemble sous l'action de sollicitations de flexion est identiquement équivalent à celui d'une pièce homogène isotrope et les équations traduisant l'équilibre y sont applicables.

Un exemple de démonstration sera donné au paragraphe suivant.

V-3-2 Equation gouvernante d'une multicouche à couches isotropes symétrique.



Dans chaque couche la relation déformation- courbure s'exprime

$$\text{par, } \begin{cases} \epsilon_x^{(i)} = -z_1 \cdot \delta^2 w / \delta x^2 \\ \epsilon_y^{(i)} = -z_1 \cdot \delta^2 w / \delta y^2 \\ \gamma_{xy}^{(i)} = -2 \cdot z_1 \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y \end{cases}$$

et la loi de Hooke par,

$$\begin{cases} \sigma_x^{(i)} = E_1 \cdot (\epsilon_x^{(i)} + \nu_1 \cdot \epsilon_y^{(i)}) / (1 - \nu_1^2) \\ \sigma_y^{(i)} = E_1 \cdot (\epsilon_y^{(i)} + \nu_1 \cdot \epsilon_x^{(i)}) / (1 - \nu_1^2) \\ \tau_{xy}^{(i)} = E_1 \cdot \gamma_{xy}^{(i)} / 2 \cdot (1 + \nu_1) \end{cases}$$

en fonction des courbures, le tenseur des contraintes devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(i)} = -z_i \cdot \frac{E_1}{1-\mu_1} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \mu_1 \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right) \\ \sigma_y^{(i)} = -z_i \cdot \frac{E_1}{1-\mu_1} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \mu_1 \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right) \\ \tau_{xy}^{(i)} = -z_i \cdot \frac{E_1}{1+\mu_1} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \right) \end{array} \right.$$

L'expression des moments résultants, sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_i \int_{h_i} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}^{(i)} \cdot z \cdot dz$$

et donc,

$$M_x = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{h_i} \sigma_x^{(i)} \cdot z \cdot dz = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\int_{-t_i}^{+t_i} \sigma_x \cdot z \cdot dz - \int_{-t_{i+1}}^{+t_{i+1}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \right] + \int_{-t_{n+1}}^{+t_{n+1}} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

en substituant l'expression de $(\sigma_x^{(i)})$, l'expression du moment M_x devient :

$$M_x = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\left(\frac{\delta^2 W + \mu_1 \delta^2 W}{\delta x^2 \delta y^2} \right) \left(\frac{E_1}{1-\mu_1^2} \right) \left(\int_{-t_i}^{+t_i} -z^2 dz + \int_{-t_{i+1}}^{+t_{i+1}} z^2 dz \right) + \frac{E_{n+1}}{1-\mu_{n+1}^2} \int_{-t_{n+1}}^{+t_{n+1}} -z^2 \left(\frac{\delta^2 W + \mu_{n+1} \delta^2 W}{\delta x^2 \delta y^2} \right) dz \right]$$

$$M_x = \left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \left(-\frac{1}{3} z^3 \Big|_{-t_i}^{+t_i} + \frac{1}{3} z^3 \Big|_{-t_{i+1}}^{+t_{i+1}} \right) \left(\frac{\delta^2 W + \mu_1 \delta^2 W}{\delta x^2 \delta y^2} \right) - \frac{E_{n+1}}{1-\mu_{n+1}^2} \left(\frac{1}{3} z^3 \Big|_{-t_{n+1}}^{+t_{n+1}} \right) \left(\frac{\delta^2 W + \mu_{n+1} \delta^2 W}{\delta x^2 \delta y^2} \right) \right]$$

et donc

$$M_x = -\frac{2}{3} \left[\sum_{i=1}^n \frac{E_1(t_i^3 - t_{i+1}^3)}{1 - \mu_1^2} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \mu_1 \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right) + \frac{E_{n+1} \cdot t_{n+1}^3}{1 - \mu_{n+1}^2} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \mu_{n+1} \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right) \right] \quad (5-10)$$

le même raisonnement donne l'expression de M_y et M_{xy} :

$$M_y = -\frac{2}{3} \left[\sum_{i=1}^n \frac{E_1(t_i^3 - t_{i+1}^3)}{1 - \mu_1^2} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \mu_1 \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right) + \frac{E_{n+1} \cdot t_{n+1}^3}{1 - \mu_{n+1}^2} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \mu_{n+1} \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} \right) \right] \quad (5-10)'$$

$$M_{xy} = -\frac{2}{3} \left[\sum_{i=1}^n \frac{E_1(1 - \mu_1)(t_i^3 - t_{i+1}^3)}{1 - \mu_1^2} + \frac{E_{n+1}(1 - \mu_{n+1})t_{n+1}^3}{1 - \mu_{n+1}^2} \right] \frac{\delta^2 W}{\delta x \delta y} \quad (5-10)''$$

et à partir des trois équations d'équilibre, découle l'expression suivante:

$$\left(\frac{\delta^2 M_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 M_y}{\delta y^2} + 2 \cdot \frac{\delta^2 M_{xy}}{\delta x \delta y} \right) = -q \quad (5-11)$$

q étant une densité de chargement.

Remplaçons M_x, M_y, M_{xy} dans l'expression (5-11) par leurs expressions données par (5-10), (5-10)' et (5-10)'' :

$$\begin{aligned} & \frac{-\delta^4 W}{\delta x^4} \left[\frac{2}{3} \left(\sum_{i=1}^n \frac{E_1(t_i^3 - t_{i+1}^3)}{1 - \mu_1^2} + \frac{E_{n+1} \cdot t_{n+1}^3}{1 - \mu_{n+1}^2} \right) \right] - \frac{\delta^4 W}{\delta y^4} \left[\frac{2}{3} \left(\sum_{i=1}^n \frac{E_1(t_i^3 - t_{i+1}^3)}{1 - \mu_1^2} + \frac{E_{n+1} \cdot t_{n+1}^3}{1 - \mu_{n+1}^2} \right) \right] \\ & - \frac{2\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2} \left[\frac{2}{3} \left(\sum_{i=1}^n \frac{E_1(t_i^3 - t_{i+1}^3)\mu_1 + E_{n+1} \cdot t_{n+1}^3 \cdot \mu_{n+1}}{1 - \mu_1^2} + \sum_{i=1}^n \frac{E_1(1 - \mu_1)(t_i^3 - t_{i+1}^3)}{1 - \mu_1^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{E_{n+1}(1 - \mu_{n+1}) \cdot t_{n+1}^3}{1 - \mu_{n+1}^2} \right) \right] = -q \end{aligned}$$

erreur
elle précède
voir d'abord
page suivante

CHAPITRE VI

Application au calcul des dalles en béton armé

d'où en simplifiant on aura,

$$\frac{2}{3} \left[\sum_{i=1}^n \frac{E_i(t_i^3 - t_{i+1}^3) + E_{n+1} \cdot t_{n+1}^3}{1 - \mu_i^2} \right] \cdot \left(\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \frac{2 \cdot \delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} \right) = q \quad (5-12)$$

ce qui revient à écrire,

$$\left(\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \frac{2 \cdot \delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} \right) = \frac{q}{D_t} \quad (5-13)$$

avec,

$$D_t = \frac{2}{3} \left[\sum_{i=1}^n \frac{E_i(t_i^3 - t_{i+1}^3) + E_{n+1} \cdot t_{n+1}^3}{1 - \mu_i^2} \right] \quad (5-14)$$

sous forme du double Laplacien, elle s'écrit:

$$\nabla^4 w = q/D_t$$

analogue à l'équation différentielle gouvernante, pour la flexion de plaque isotrope ($\nabla^4 w = q/D$).

D_t sera alors la rigidité flexionnelle équivalente de la multicouche.

Nous voyons donc que l'étude d'un empilement de couches isotropes se ramène bien à celle d'une seule couche isotrope ayant des propriétés mécaniques équivalentes.

Remarque: L'expression de D_t est identiquement équivalente à D_{11} , premier élément de la matrice d'élasticité dans le cas de la symétrie miroir.

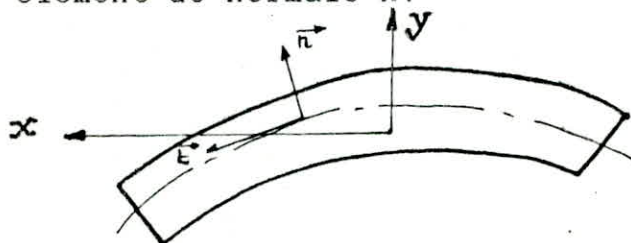
VI-1 MODELISATION EN MULTICOUCHES :

L'acier étant considéré comme un matériau isotrope, et le béton comme un matériau macroscopiquement isotrope, tous deux ayant des propriétés voisines, l'application de la théorie de multicouche consiste en la modélisation de l'association acier-béton d'une dalle en B-A, par un empilement de couches isotropes (les barres étant assimilées à une plaque d'acier d'épaisseur équivalente), dont le comportement d'ensemble se rapproche de celui d'une pièce isotrope.

Néanmoins, nous pensons que quelques hypothèses sont nécessaires à établir :

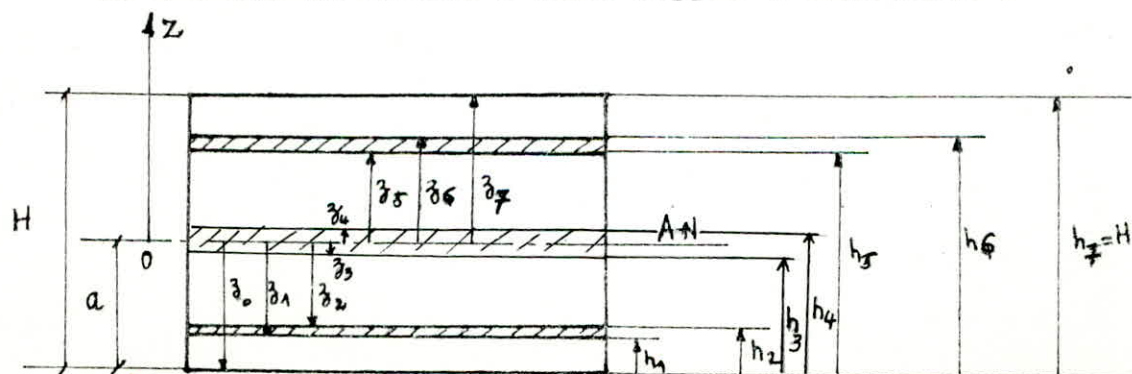
- Le collage des couches entre elles est supposé parfait, dans le domaine linéaire, il en découle :

- * la continuité des déplacements aux interfaces des couches en contact.
- * qu'il y a identité de déformations dans le plan d'un élément de normale \vec{n} .



- Le béton ne se comportant pas de la même manière en traction qu'en compression, il faudra pour cela, introduire des caractéristiques propres au béton tendu.

VI-1-1 Cas de dalles à deux nappes d'armatures :



-Il est nécessaire de supposer une couche fictive centrale (4) ,d'épaisseur nulle,pour pouvoir appliquer les formules précédentes.

-Comme signalé précédemment,nous introduisons un module d'élasticité E_{bt} ,ainsi qu'un coefficient de Poisson μ_{bt} ,que nous définirons plus loin.

$$\text{Dans ce cas: } \frac{E_1}{1-\mu_1^2} = \frac{E_3}{1-\mu_3^2} = \frac{E_{bt}}{1-\mu_{bt}^2}$$

$$\text{et } \frac{E_5}{1-\mu_5^2} = \frac{E_7}{1-\mu_7^2} = \frac{E_b}{1-\mu_b^2}$$

$$\text{et } \frac{E_2}{1-\mu_2^2} = \frac{E_6}{1-\mu_6^2} = \frac{E_a}{1-\mu_a^2}$$

en utilisant les équations (5-9), on calcule les coefficients d'élasticité:

$$D_{11} = \frac{1}{3} \left[\begin{aligned} & (z_0^3 - z_1^3 + z_2^3 - z_3^3) \cdot \frac{E_{bt}}{1-\mu_{bt}^2} + (z_1^3 - z_2^3) \cdot \frac{E_a}{1-\mu_a^2} + (z_5^3 - z_6^3) \cdot \frac{E_b}{1-\mu_b^2} \\ & + (z_4^3 - z_5^3 + z_6^3 - z_7^3) \cdot \frac{E_b}{1-\mu_b^2} \end{aligned} \right] \quad (a)$$

$$D_{12} = \frac{1}{3} \left[\begin{aligned} & (z_0^3 - z_1^3 + z_2^3 - z_3^3) \cdot \frac{\mu_{bt} E_{bt}}{1-\mu_{bt}^2} + (z_1^3 - z_2^3) \cdot \frac{\mu_a E_a}{1-\mu_a^2} + (z_5^3 - z_6^3) \cdot \frac{\mu_b E_b}{1-\mu_b^2} \\ & + (z_4^3 - z_5^3 + z_6^3 - z_7^3) \cdot \frac{\mu_b E_b}{1-\mu_b^2} \end{aligned} \right] \quad (b)$$

$$D_{33} = \frac{1}{6} \left[\begin{aligned} & (z_0^3 - z_1^3 + z_2^3 - z_3^3) \cdot \frac{(1-\mu_{bt}) E_{bt}}{1-\mu_{bt}^2} + (z_1^3 - z_2^3) \cdot \frac{(1-\mu_a) E_a}{1-\mu_a^2} + (z_5^3 - z_6^3) \cdot \frac{(1-\mu_b) E_b}{1-\mu_b^2} \\ & + (z_4^3 - z_5^3 + z_6^3 - z_7^3) \cdot \frac{(1-\mu_b) E_b}{1-\mu_b^2} \end{aligned} \right]$$

Dans le cas présent, où la couche (6) est une couche d'acier, il suffit de remplacer respectivement E_b et μ_b , par E_a et μ_a .

Dans ces équations, les côtes z sont mesurées par rapport à l'axe neutre qui est repéré par la grandeur "a" (voir figure), et par conséquent, les côtes z s'écrivent:

$$z_0 = -a$$

$$z_1 = h_1 - a$$

$$z_2 = h_2 - a$$

$$z_3 = h_3 - a$$

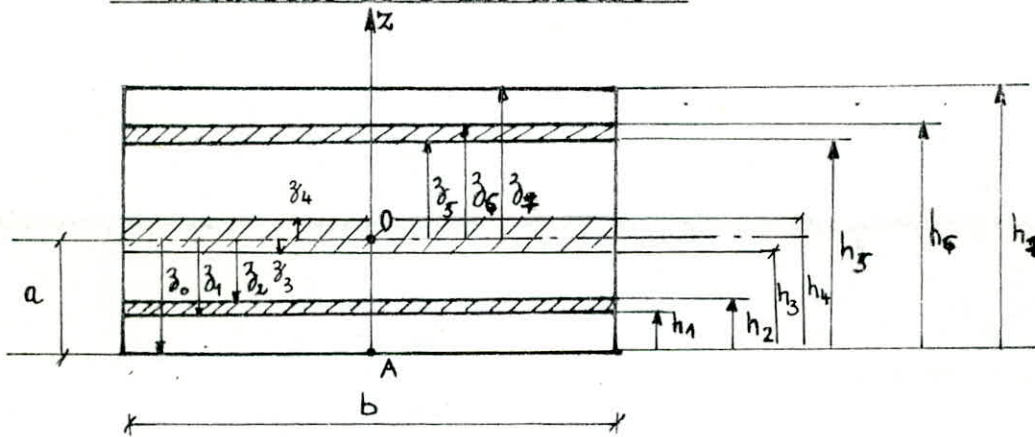
$$z_4 = h_4 - a$$

$$z_5 = h_5 - a$$

$$z_6 = h_6 - a$$

$$z_7 = h_7 - a$$

**** Recherche de l'axe neutre :**



On note par "S", la section droite de la multicouche représentée sur la figure. Soit A, l'origine arbitraire définissant des ordonnées notées Z. Soit O, origine des z, appelée centre élastique, défini tel que:

$$\int_S E_1 \cdot z \cdot ds = 0$$

et le point "o" est tel que : $\int_S E_1 \cdot (Z - a) \cdot ds = 0$

donc
$$\int_S E_1 \cdot Z \cdot ds = \int_S E_1 \cdot a \cdot ds$$

d'où le centre élastique cherché est tel que:

$$a = \frac{\int_S E_1 \cdot Z \cdot ds}{\int_S E_1 \cdot ds}$$

avec,

$$\int_s E_i . Z . ds = b \left[\int_0^{h_1} E_1 y dy + \int_{h_1}^{h_2} E_2 y dy + \int_{h_2}^{h_3} E_3 y dy + \int_{h_3}^{h_4} E_4 y dy + \int_{h_4}^{h_5} E_5 y dy \right. \\ \left. + \int_{h_5}^{h_6} E_6 y dy + \int_{h_6}^{h_7} E_7 y dy \right]$$

$$" " = b/2 \left[E_1 h_1^2 + E_2 (h_2^2 - h_1^2) + E_3 (h_3^2 - h_2^2) + E_4 (h_4^2 - h_3^2) + E_5 (h_5^2 - h_4^2) \right. \\ \left. + E_6 (h_6^2 - h_5^2) + E_7 (h_7^2 - h_6^2) \right]$$

$$" " = b/2 \left[E_{bt} (h_1^2 - h_2^2 + h_3^2) + E_a (h_2^2 - h_1^2) + E_b (h_5^2 - h_4^2 + h_7^2 - h_6^2) \right]$$

et,

$$\int_s E_i . ds = b \left[E_{bt} (h_1 - h_2 + h_3) + E_a (h_2 - h_1) + E_b (h_5 - h_4 + h_7 - h_6) \right]$$

d'où,

$$a = \frac{1}{2} \left[\frac{E_{bt} (h_1^2 - h_2^2 + h_3^2) + E_a (h_2^2 - h_1^2) + E_b (h_5^2 - h_4^2 + h_7^2 - h_6^2)}{E_{bt} (h_1 - h_2 + h_3) + E_a (h_2 - h_1) + E_b (h_5 - h_4 + h_7 - h_6)} \right]$$

comme $h_3 = h_4 = a$, cette équation se ramène à une équation du second degré en a , de la forme :

$$A . a^2 + B . a + C = 0$$

avec,

$$A = (E_{bt} - E_b)$$

$$B = 2 \left[E_{bt} (h_1 - h_2) + E_b (h_5 - h_6 + h_7) + E_b (h_6 - h_5) + E_a (h_2 - h_1) \right]$$

$$C = E_{bt} (h_2^2 - h_1^2) + E_b (h_6^2 - h_5^2 - h_7^2) + E_b (h_5^2 - h_6^2) + E_a (h_1^2 - h_2^2)$$

VI-1-2 Cas de dalles a une seule nappe d'armatures:

Ce cas se ramène au cas étudié précédemment, en remplaçant la couche supérieure d'acier par une couche de béton, et donc les résultats des expressions (a), (b) et (c) sont directement exploitables.

VI-1-3 Calcul des contraintes :

Le calcul de la flèche w se fait sur les bases suivantes: rendre la multicouche homogène, par calcul des coefficients d'élasticité équivalents, puis appliquer la même théorie que pour une pièce homogène, avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = D_{11} \\ \mu \cdot D = D_{12} \\ (1-\mu) \cdot D/2 = D_{33} \end{array} \right.$$

Dans ces conditions, après avoir déterminé w , les formules suivantes sont toujours applicables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(i)} = -z_1 \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \mu_1 \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \\ \sigma_y^{(i)} = -z_1 \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \mu_1 \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \\ \tau_{xy}^{(i)} = -z_1 \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \end{array} \right.$$

où, E_1 et μ_1 , sont les coefficients d'élasticité d'une couche, et donc sous forme matricielle, cela se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{array} \right\} = -z_1 \begin{bmatrix} E_1 & \mu_1 \cdot E_1 & 0 \\ \mu_1 \cdot E_1 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(1-\mu_1) \cdot E_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 w / \delta x^2 \\ \delta^2 w / \delta y^2 \\ 2 \delta^2 w / \delta x \delta y \end{array} \right\}$$

or,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^2 w / \delta x^2 \\ \delta^2 w / \delta y^2 \\ 2 \cdot \delta^2 w / \delta x \delta y \end{array} \right\} = [Q] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\hat{U}\}$$

$$\implies [\sigma_z^{(i)}] = -z_1 \cdot [E] \cdot [Q] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\hat{U}\} = -z_1 \cdot [H]_1 \cdot \{\hat{U}\}$$

et en fixant la valeur de z_1 au niveau d'une couche, cette expression donnera la valeur de la contrainte à ce niveau.

Après avoir déterminé w , les formules

**** Calcul de z_1 :**

Les contraintes seront calculées pour les aciers tendus et comprimés ainsi que pour les fibres supérieures du béton comprimé.

$z_a = (z_1 + z_2)/2$ - niveau des aciers tendus.

$z'_a = (z_5 + z_8)/2$ - niveau des aciers comprimés.

$z'_b = z_7$ - niveau de la fibre extrême du béton comprimé.

Des exemples d'application seront donnés plus loin.

VI-2 MODELE "PLAQUE ORTHOTROPE" :

Dans ce qui a précédé, la matrice d'élasticité a été calculée pour le cas des plaques homogènes.

Pour pouvoir appliquer au B-A, les mêmes règles qui ont servi au calcul de cette matrice, il est nécessaire d'homogénéiser la section. Pour cela, la section d'acier d'aire A, est remplacée par une section équivalente, d'aire $n.A$, et l'inertie par mètre linéaire $H^3/12$ de la section, devient:

$$I_x = I_{bx} + (n-1)I_{Ax}$$

$$I_y = I_{by} + (n-1)I_{Ay}$$

avec,

I_{Ax}, I_{Ay} : Inerties des barres d'acier disposées sur 1 ml, dans les sens respectifs X, et Y.

I_{bx}, I_{by} : Inerties, dans les sens respectifs X, et Y, de la partie du béton comprimé, et ce pour maintenir en vigueur les hypothèses du B-A.

$n = E_A/E_b$: Coefficient d'équivalence.

Les termes de la matrice d'élasticité deviennent donc :

$$D_x = \frac{E_b}{1-\mu_b^2} \left[I_{bx} + (n-1)I_{Ax} \right] \quad , \quad D_y = \frac{E_b}{1-\mu_b^2} \left[I_{by} + (n-1)I_{Ay} \right]$$

$$D_{xy} = \frac{1-\mu_b}{2} \sqrt{D_x} \cdot \sqrt{D_y} \quad \text{et} \quad D_1 = \mu_b \cdot \sqrt{D_x} \cdot \sqrt{D_y}$$

il s'agit d'une formulation en flexion de plaques orthotropes.

Pour illustrer cela, prenons, comme précédemment, le cas de dalles carrées, appuyées simplement, et chargées uniformément.

La matrice d'élasticité se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x = D_y = D = \frac{E_b}{1-\mu_b^2} \left[I_b + (n-1)I_A \right] \\ D_1 = \mu_b \cdot D \\ D_{xy} = \frac{1-\mu_b}{2} \cdot D \end{array} \right.$$

VI-3 THEORIE CLASSIQUE DU B.A : (C.C.B.A 68)

Cette partie est consacrée à la détermination des contraintes normales, au centre de la dalle. Il y a lieu de noter que l'hypothèse consistant à négliger le béton tendu, reste valable uniquement dans les calculs relatifs, à la détermination des contraintes normales, ou des armatures.

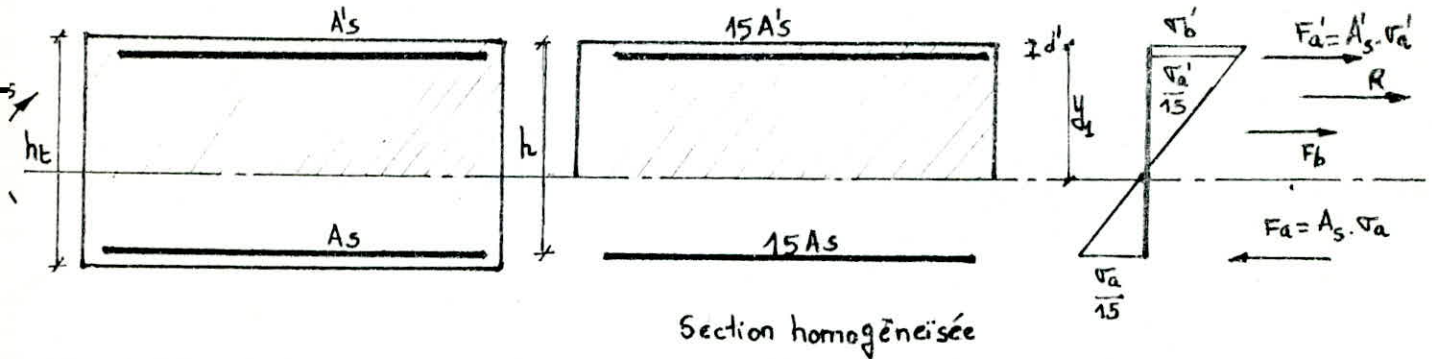
- Calcul des contraintes normales pour une plaque rectangulaire en flexion simple :

Données :

- * Dimensions géométriques de la section.
- * Sections A_s et A_s' des armatures.
- * Moment sollicitant M_s .
- * Contraintes limites σ_b' et σ_s .

Inconnues :

- * Contrainte maximum du béton $\sigma_b'_{max}$.
- * Contrainte σ_a des armatures tendues.
- * Contrainte σ_a' des armatures comprimées (éventuellement)



** Equation de l'axe neutre :

$$b.y_1/2 + 15(A_s + A_s').y_1 - 15(A_s.h + A_s'.d') = 0$$

** Inertie I_h de la section homogène réduite / à l'axe neutre :

$$I_h = b.y_1^3/3 + 15A_s'(y_1 - d')^2 + 15A_s(h - y_1)^2$$

** Contrainte maximale du béton sur la fibre la plus comprimée :

$$\sigma_b = (M_s / I_h).y_1$$

** Contraintes des armatures tendues :

$$\sigma_a = 15(M_s / I_h).(h - y_1)$$

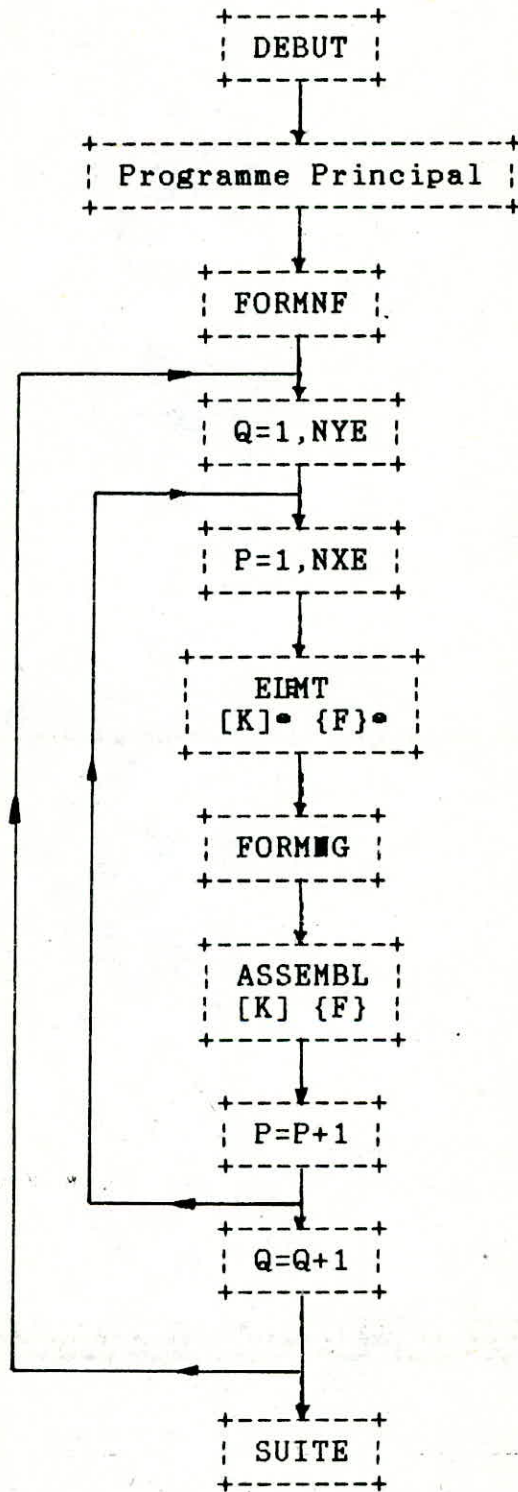
** Contraintes des armatures comprimées :

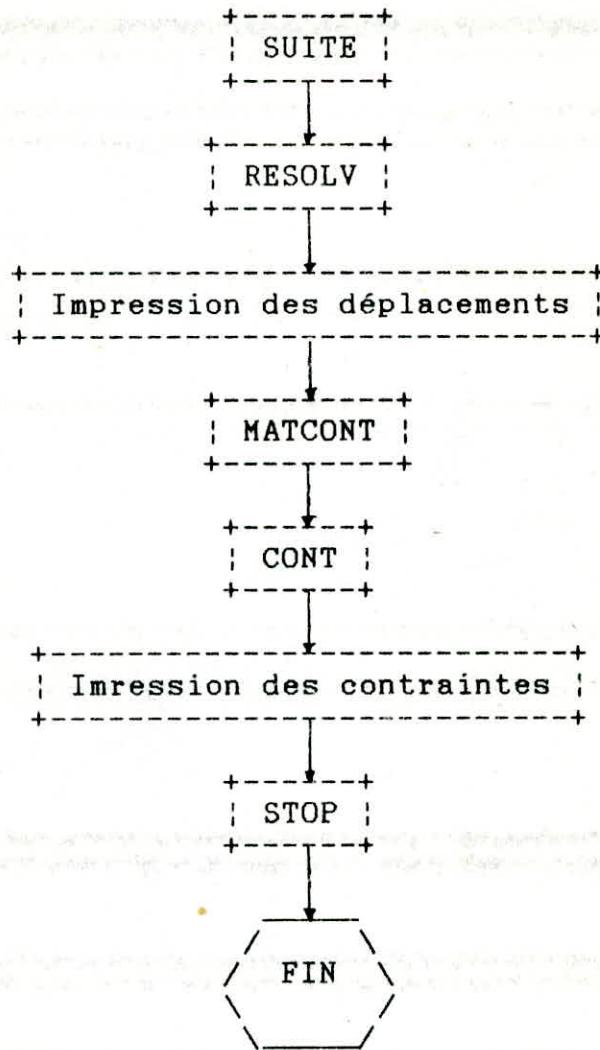
$$\sigma_a' = 15(M_s / I_h).(y_1 - d')$$

CHAPITRE VII

Organisation du programme par élément fini

ORGANIGRAMME :





VII-1 INTRODUCTION :

Mathématiquement, la M-E-F revient à poser le problème en terme de résolution d'un système d'équations simultanées, écrit sous la forme :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

où :

[K] : matrice de rigidité globale.

{U} : vecteur déplacement inconnu.

{F} : vecteur force global.

VII-2 PROGRAMMATION :

On peut distinguer deux parties essentielles:

- * Module de génération des données.
- * Module de résolution et d'exploitation des résultats.

Les données sont construites principalement d'informations sur les noeuds (nombre de noeuds total, nombre de noeuds restreints, numéro des noeuds réstreints, conditions d'appuis, conditions de chargement...), et sur les éléments (nombre d'éléments suivant la direction X et la direction Y, la taille de l'élément, caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux.

VII-2-1 Entrée des données :

Pour qu'on puisse résoudre le problème, le module d'entrée des données doit transmettre toutes les informations nécessaires aux autres parties du programme, de façon à permettre la constitution de tous les tableaux qui sont utilisés par la suite.

Dans notre cas, l'un des trois sousroutines LECO, LECMULT ou LECHOMOG est concerné (suivant le cas étudié), et afin de distinguer chacun des trois cas, un codage est nécessaire :

COD =-1 ---> Subroutine LECO (cas de plaque constituée
d'un seul matériau).
COD =0 ---> Subroutine LECMULT (cas d'une plaque multi-
couche).
COD =1 ---> Subroutine LECHOMOG (cas d'une dalle en B.A
rendue homogène).

Chacun de ces trois sous-routines permet l'introduction des caractéristiques géométriques et mécaniques des matériaux, ainsi que le calcul de la matrice d'élasticité [D].

VII-2-2 Assemblage des matrices [K] et des vecteurs {F}.

La règle d'assemblage que nous exposons est une règle simple et efficace, dans laquelle le risque d'erreur par introduction des données est minimisé, la seule contrainte étant le sens de parcours, car il est très important de choisir un sens de parcours pour la numérotation des noeuds et des éléments.

On adoptera une numérotation par étage, de gauche à droite.

* Subroutine FORMNF.

Cette sous-routine se charge de numérotter les degrés de liberté actifs, et d'annuler les degrés de liberté inactifs, et ce pour chaque noeud (dans l'ordre de leur numérotation).

Ces informations sont stockées dans un tableau appelé [NF]

$$[NF] = [NN * NODOF]$$

NN : Nombre total de noeuds.

NODOF : Nombre de degrés de liberté par noeuds.

* Subroutine FORMG.

Dans cette sous-routine, pour chaque élément, un vecteur de localisation élémentaire est défini.

Ce vecteur {G} permet de positionner chaque degré de liberté des noeuds de l'élément dans le repère global.

Il permet donc un transfert de chaque terme k_{ij} de la matrice de rigidité élémentaire en K_{IJ} de la matrice de rigidité globale, et également le transfert de chaque terme f_i de $\{F\}_e$ en F_I de $\{F\}$.

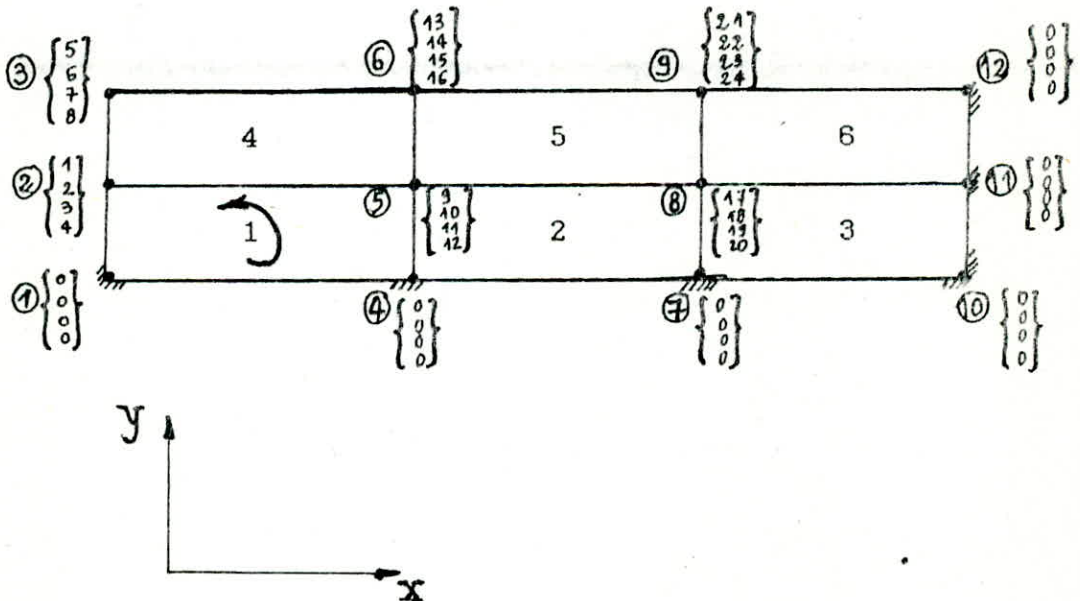
$$\{G\} = [1 * \text{DOF}]$$

DOF : Nombre de degrés de liberté par éléments.

Lors de notre détermination de $[K]$ on a choisi un sens bien déterminé. Il est donc important de spécifier pour chaque élément, son premier noeud, le deuxième, troisième et quatrième (dans le sens trigonométrique) qui seront déduits automatiquement.

Exemple :

Déroulement des deux sous-routines FORMNF et FORMG, pour la détermination des informations concernant les degrés de liberté actifs et leurs localisations dans le repère global.



Pour [NF] nous aurons :

N ^o	W	θ_x	θ_y	Γ
1	0	0	0	0
2	1	2	3	4
3	5	6	7	8
4	0	0	0	0
5	9	10	11	12
[NF]= 6	13	14	15	16
7	0	0	0	0
8	17	18	19	20
9	21	22	23	24
10	0	0	0	0
11	0	0	0	0
12	0	0	0	0

Pour {G}, en respectant le sens trigonométrique :

Numéro de l'élément	Vecteur {G} ^T de chaque élément
1	{ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 9 10 11 12 1 2 3 4 }
2	{ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 17 18 19 20 9 10 11 12 }
3	{ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 17 18 19 20 }
4	{ 1 2 3 4 9 10 11 12 13 14 15 16 7 6 7 8 }
5	{ 9 10 11 12 17 18 19 20 21 22 23 24 13 14 15 16 }
6	{ 17 18 19 20 0 0 0 0 0 0 0 0 0 21 22 23 24 }

*** Subroutine ELEMENT.**

Ce sous-programme contient la matrice de rigidité, élémentaire explicite [K]_e et le vecteur charge élémentaire {F}_e. En tenant compte de la symétrie de la matrice, l'autre moitié est déduite automatiquement.

*** Subroutine ASSEMBL :**

Est utilisé pour l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires donnant ainsi la matrice de rigidité globale [K] et le vecteur force global {F}.

Comme l'opération de localisation exige l'introduction des conditions aux frontières et qu'elle affecte la valeur zéro au degrés de liberté inactifs, seuls les degrés de liberté actifs sont numérotés, et il n'est donc plus nécessaire de passer par l'opération d'expansion des matrices de rigidités élémentaires pour effectuer l'assemblage.

L'opération d'assemblage se fera donc par un simple transfert de chaque terme k_{ij} des matrices de rigidités élémentaires en K_{IJ} de la globale, ainsi que les termes f_i en F_I , grâce au vecteur localisation élémentaire {G} dont les composantes nulles sont automatiquement éliminées.

L'assemblage s'effectue comme suit

Pour tout $G(i) \neq 0$ et pour tout $G(j) \neq 0$ faire :

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{l} K_{IJ} = K_{IJ} + k_{ij} \\ I = G(i) \quad i = 1, \text{DOF} \\ J = G(j) \quad j = 1, \text{DOF} \end{array} \right.$$

$$\text{et} \left\{ \begin{array}{l} F_I = F_I + f_i \end{array} \right.$$

$$\text{où} \left\{ \begin{array}{l} I = G(i) \quad i = 1, \text{DOF} \end{array} \right.$$

*** Prise en compte des conditions aux limites.**

La prise en compte des conditions aux frontières peut se faire de plusieurs manières.

1- Méthode du terme diagonal dominant :

La matrice [K] est assemblée sans tenir compte des conditions aux limites; puis chaque relation $U_1 = \bar{U}_1$ est introduite en remplaçant

- K_{11} par $K_{11} + \alpha$; α étant un très grand nombre par rapport à tous les K_{1j} .
- F_1 par $\alpha \cdot U_1$.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{11} & \dots & K_{11} + \alpha & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{n1} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \alpha U_1 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

l'équation de la i ème ligne s'écrit :

$$\alpha \cdot U_1 + \left(\sum_{j=1}^n K_{1j} \cdot U_j \right) = \alpha \cdot \bar{U}_1$$

et qui admet une solution approchée : $U_1 \approx \bar{U}_1$

$$\text{si } \alpha \cdot \bar{U}_1 \gg \sum_{j=1}^n K_{1j} \cdot U_j$$

cette méthode est simple à programmer (car il suffit de remplacer ou de changer les deux termes K_{11} et F_1), mais peut poser des problèmes numériques quand la matrice de rigidité [K] est mal conditionnée, et lorsque certaines composantes du vecteur {U} sont grandes.

2- Méthode du terme unité sur la diagonale :

Pour chaque déplacement imposé $U_1 = \bar{U}_1$, on modifie le vecteur {F} et la matrice [K] de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} K_{1j} = K_{j1} = 0 & F_j = F_j - K_{j1} \cdot \bar{U}_1 \\ K_{11} = 1 & F_1 = U_1 \\ \text{pour } j=1, n \text{ et } j \neq 1 & \text{pour } j=1, n \text{ et } j \neq 1 \end{array}$$

le système devient donc

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & \dots & K_{1,1-1} & 0 & K_{1,1+1} & \dots & K_{1n} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 K_{i-1,1} & \dots & K_{i-1,1-1} & 0 & K_{i-1,1+1} & \dots & K_{i-1,n} \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 K_{i+1,1} & \dots & K_{i+1,1-1} & 0 & K_{i+1,1+1} & \dots & K_{i+1,n} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 K_{n,1} & \dots & K_{n,1-1} & 0 & K_{n,1+1} & \dots & K_{n,n}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 \vdots \\
 U_{i-1} \\
 U_i \\
 U_{i+1} \\
 \vdots \\
 U_n
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1 - K_{11} \cdot U_1 \\
 \vdots \\
 F_{i-1} - K_{i-1,1} \cdot U_1 \\
 U_i \\
 F_{i+1} - K_{i+1,1} \cdot U_1 \\
 \vdots \\
 F_n - K_{n,1} \cdot U_1
 \end{Bmatrix}$$

La programmation de cette méthode est délicate, mais ne pose pas les problèmes numériques de la précédente.

3- Méthode de suppression des équations :

Elle consiste à restructurer la matrice $[K]$ de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés U_1 .

Cette méthode a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système, et par conséquent elle réduit l'espace mémoire réservé au stockage de la matrice.

La technique de restructuration de $[K]$, $\{U\}$ et $\{F\}$ correspondant à $U_1 = \bar{U}_1$, consiste en la suppression de la ligne (i) et de la colonne (i) .

Conclusion :

Nous opterons pour la 3^{ème} méthode, pour les raisons suivantes.

a) Comme la technique d'assemblage choisit exige l'introduction de conditions aux limites avant même d'assembler la matrice de rigidité globale, et que seuls les degrés de liberté actifs sont pris en considération, cela favorise implicitement l'utilisation de la 3^{ème} méthode.

b) De plus, vu la dimension de la matrice de rigidité globale qui devient importante à partir d'un certain maillage, la manipulation de cette matrice se complique, la méthode choisie permet d'augmenter le champ d'action par suppression d'équations inutiles.

VII-2-3 Résolution du system $[K] \{U\} = \{F\}$.

* Subroutine RESOLV :

Permet la résolution du système $\{F\} = [K] \{U\}$, $\{F\}$ et $[K]$ étant obtenus après l'assemblage et l'application des conditions aux limites.

Pour notre cas, on a utilisé l'algorithme de résolution de CHOLESKY, car il est recommandé pour la résolution des systèmes à matrices symétriques définies positives, afin de diminuer le nombre d'opérations à exécuter, et donc le temps de calcul.

VII-2-4 Calcul des contraintes.

* Subroutine MATCONT :

Ce sous programme est utilisé pour le calcul de la matrice de contraintes élémentaire $[H]$ donnée explicitement en fonction des caractéristiques géométriques de la plaque.

* Subroutine CONT :

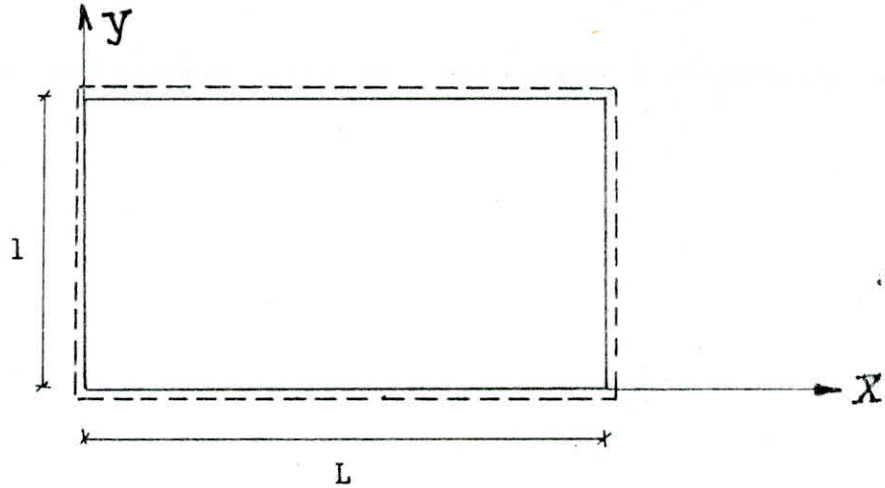
Une fois que les déplacements sont déterminés et la matrice $[H]$ calculée, ce sous programme permet de trouver les contraintes, pour chaque élément.

CHAPITRE VIII

Applications

VIII-1 Exemples d'applications pour le cas des plaques homogènes.

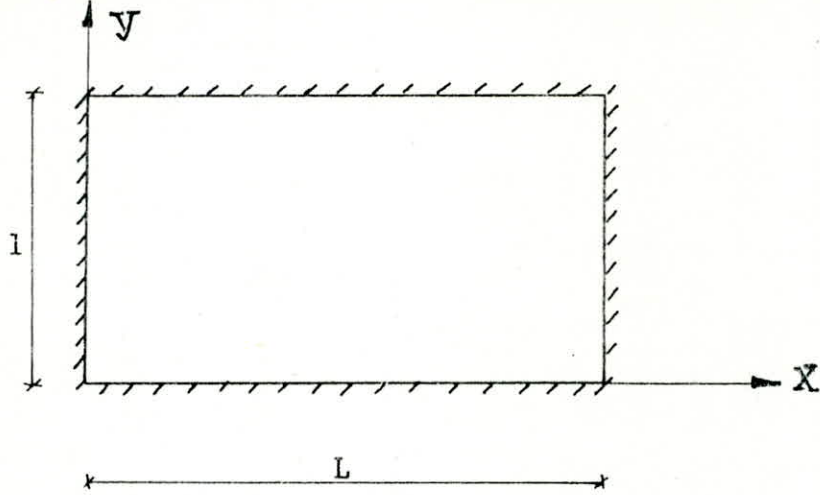
 * PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE SUR LE POURTOUR *



$u=0.3$
 $L/l=1.0$
 charge uniforme

maillage	flèche		contraintes	
	$W(q \cdot a^4/D)$ $X=a/2; Y=b/2$	erreur (%)	$MX=MY(q \cdot b^2)$ $X=a/2; Y=b/2$	erreur (%)
2x2	0.00412270	1.49 <i>972</i>	0.05720	19.41
4x4	0.00406533	0.08 <i>391</i>	0.04922	2.76
8x8	0.00406253	0.01 <i>977</i>	0.04816	0.54
10x10	0.00406242	0.01 <i>945</i>	0.04806	0.33
12x12	0.00406239	0.01 <i>935</i>	0.04800	0.21
SOL EXACTE	0.00406200	////	0.04790	////

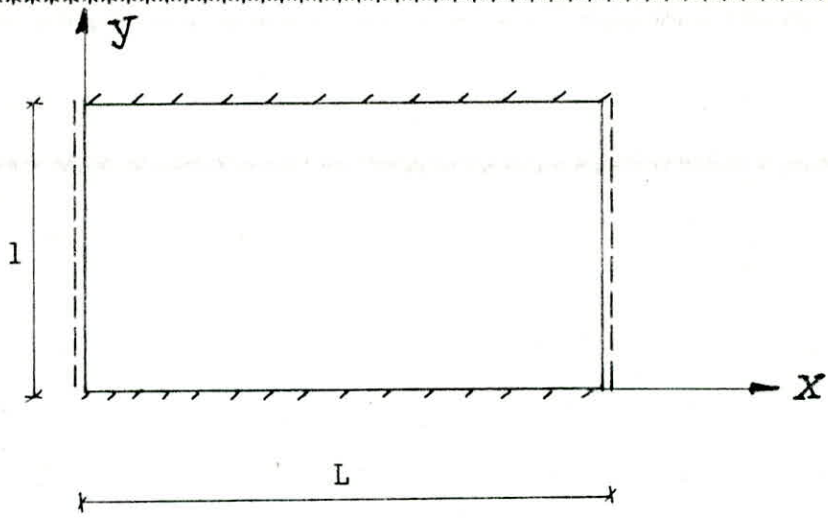
 * PLAQUE ENCASTREE SUR LE POURTOUR *



$u=0.3$
 $L/l=1.0$
 charge uniforme

mail.	flêche		contraintes			
	$W(q \cdot a^4/D)$ $X=a/2; Y=b/2$	erreur (%)	$MX=MY(q \cdot b^2)$ $X=a/2; Y=b/2$	erreur (%)	$MY(q \cdot b^2)$ $X=a/2; Y=0$	erreur (%)
2x2	0.00132479	5.14	0.04133	78.92	-0.035511	30.78
4x4	0.00126487	0.39	0.02510	8.66	-0.046446	9.46
8x8	0.00126522	0.41	0.02330	0.87	-0.047965	6.50
10x10	0.00126527	0.42	0.02318	0.35	-0.050542	1.48
12x12	0.00126530	0.42	0.02309	0.04	-0.050766	1.04
SOL EXA.	0.00126000	////	0.02310	////	-0.051300	////

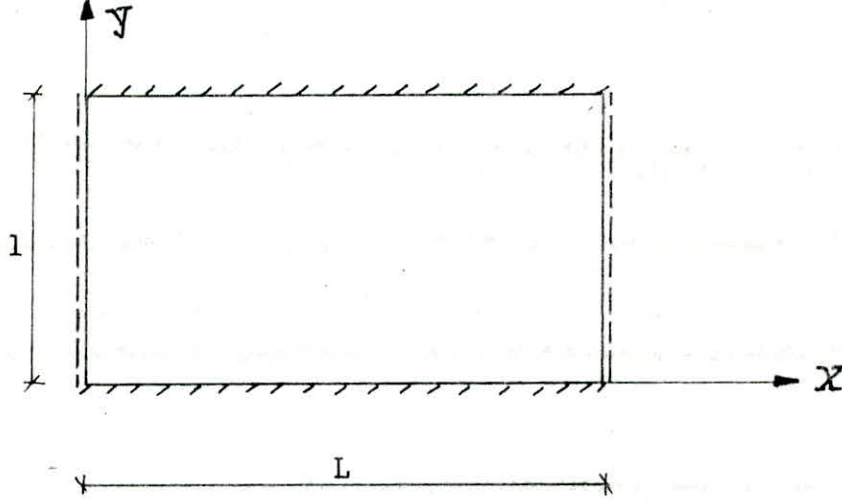
 * PLAQUE AVEC 2 BORDS APPUYES ET 2 BORD ENCASTRES *



u=0.3
 L/l=1.0
 charge uniforme

aillage	flèche		contraintes				
	W(q.a4/D)	erreur (%)	MX(q.a2)	erreur (%)	MY(q.a2)	MY(q.a2)	erreur (%)
	X=a/2; Y=b/2		X=a/2; Y=b/2		X=a/2; Y=b/2	X=a/2; Y=0	
2x2	0.00194334	1.22	0.03280	34.43	0.05228	-0.05793	16.89
4x4	0.00193649	0.86	0.02545	4.30	0.03668	-0.06268	10.07
8x8	0.00191700	0.16	0.02456	0.66	0.03394	-0.06760	3.01
10x10	0.00191766	0.12	0.02449	0.37	0.03369	-0.06839	1.88
12x12	////////	////	////////	////	////////	////////	////
JL EXAC	0.00192000	////	0.024400	////	0.03320	-0.06970	////

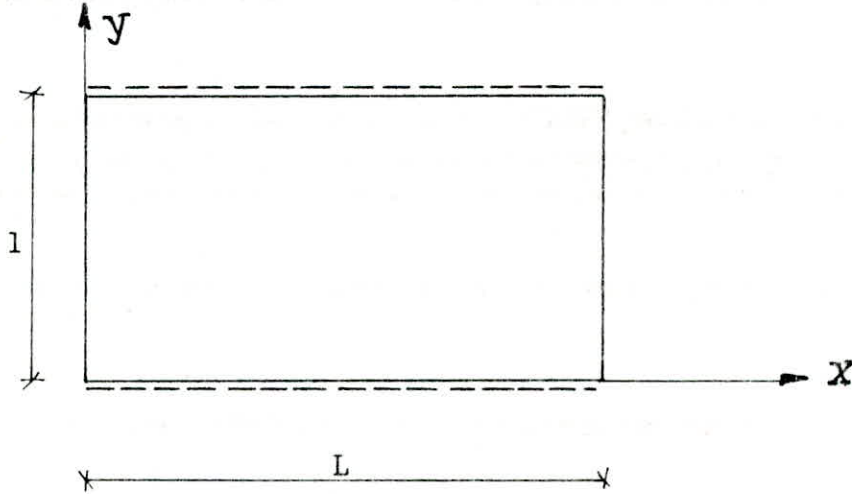
 * PLAQUE AVEC 2 BORDS APPUYES ET 2 BORD ENCASTRES *



$u=0.3$
 $L/l=1.5$
 charge uniforme

aillage!	flèche		contraintes				
	$W(q \cdot a^4/D)$	erreur	$MX(q \cdot a^2)$	erreur	$MY(q \cdot a^2)$	$MY(q \cdot a^2)$	erreur
	$X=a/2; Y=b/2$	(%)	$X=a/2; Y=b/2$	(%)	$X=a/2; Y=b/2$	$X=a/2; Y=0$	(%)
2x2	0.00545605	2.75	0.07597	29.86	0.07575	-0.09330	64.67
4x4	0.00531753	0.14	0.06073	3.81	0.04894	-0.09193	6.39
8x8	0.00532550	0.29	0.05896	0.79	0.04650	-0.09868	1.09
10x10	0.00532606	0.30	0.05878	0.48	0.04629	-0.10130	0.63
12x12	////////	////	////////	////	////////	////////	////
DL EXAC	0.00531000	////	0.058500	////	0.04600	-0.10490	////

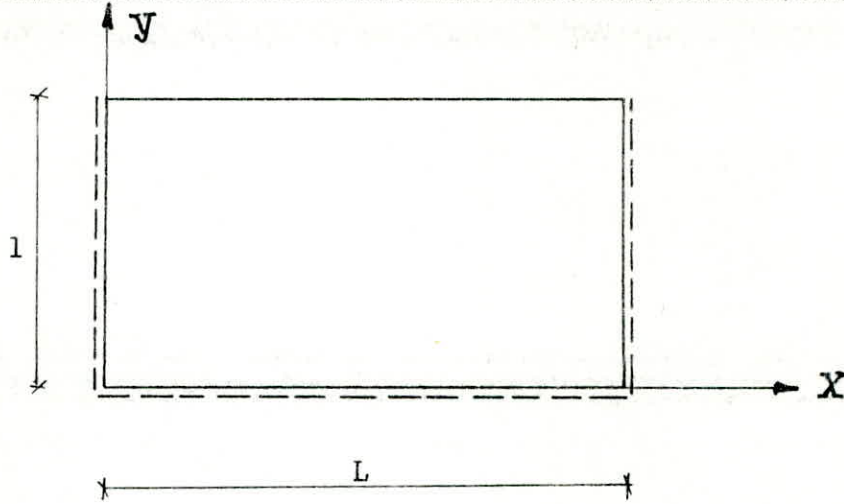
 * PLAQUE AVEC DEUX BORDS APPUYES ET DEUX BORDS LIBRES *



$u=0.3$
 $L/l=1.0$
 charge uniforme

maillage	flèche		contraintes			
	$W(q.a^4/D)$ $X=a/2; Y=b/2$! erreur! ! (%)	$MX(q.b^2)$ $X=a/2; Y=b/2$! erreur! ! (%)	$MY(q.b^2)$ $X=a/2; Y=b/2$! erreur! ! (%)
2x2	0.0130208	0.53	0.14580	18.02	0.04375	61.44
4x4	0.0130208	0.53	0.13020	6.29	0.03906	44.13
8x8	0.0130208	0.53	0.12630	3.10	0.03789	39.81
10x10	0.0130208	0.53	0.12580	2.69	0.03775	39.30
2x12	0.0130208	0.53	////////	////	////////	////
EXACTE	0.0130900	////	0.12250	////	0.02710	////

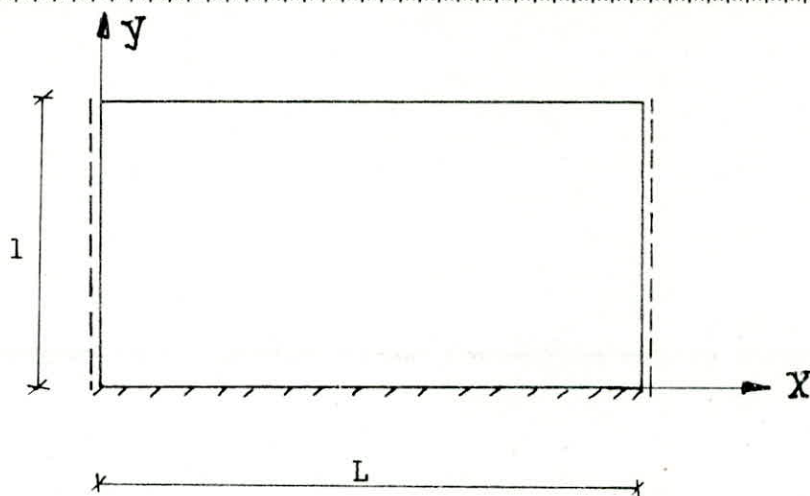
 * PLAQUE AVEC 3 BORDS APPUYES ET 1 BORD LIBRE *



$u=0.3$
 $L/l=1.2$
 charge uniforme

-aillage!	flèche		contraintes				
	$W(q \cdot a^4/D)$	erreur	$MX(q \cdot a^2)$	erreur	$MY(q \cdot a^2)$	$MX(q \cdot a^2)$	erreur
////////	$X=a/2; Y=b$	(%)	$X=a/2; Y=b/2$	(%)	$X=a/2; Y=b/2$	$X=a/2; Y=b$	(%)
2x2	0.00955060	17.52	0.07927	14.88	0.047040	0.1068	6.80
4x4	0.00951829	17.80	0.07008	1.56	0.042560	0.09424	5.76
8x8	0.00951618	17.82	0.06829	1.03	0.041650	0.09137	8.63
10x10	0.00951609	17.82	0.06809	1.32	0.041540	0.09103	8.97
12x12	////////	////	////////	////	////////	////////	////
DL EXAC	0.01158000	////	0.06900	////	0.036000	0.10000	////

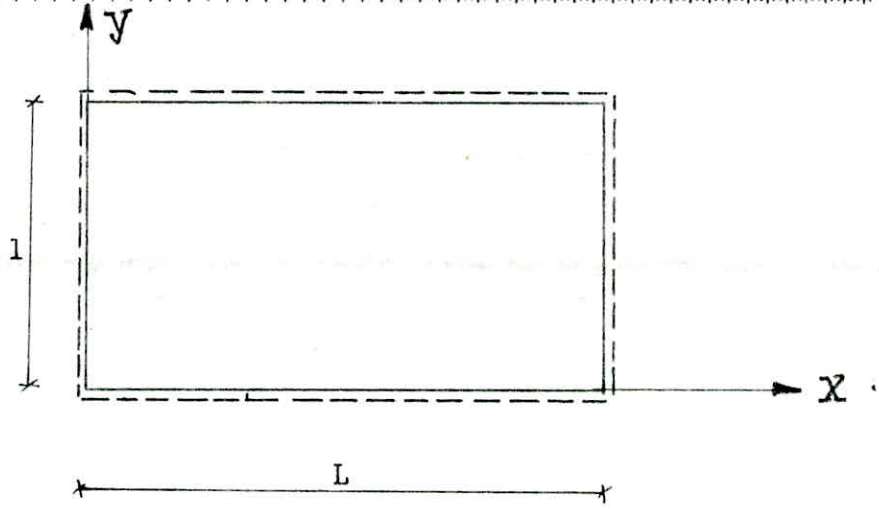
 * PLAQUE AVEC DEUX BORDS APPUYES , UN BORD ENCASTRE ET UN BORDS LIBRE



$u=0.3$
 $L/l=1.0$
 charge uniforme

maillage	flèche		contraintes			
	$W(q.a^4/D)$ $X=a/2; Y=b$	erreur (%)	$MX(q.b^2)$ $X=a/2; Y=b$	erreur (%)	$MY(q.b^2)$ $X=a/2; Y=0$	erreur (%)
2x2	0.00926628	18.00	0.10430	7.30	-0.08616	27.60
4x4	0.00926582	18.00	0.09177	5.59	-0.10650	10.50
8x8	0.00926581	18.00	0.08890	8.54	-0.11440	3.86
10x10	0.00926580	18.00	0.08856	8.89	-0.11550	2.94
12x12	////////	18.00	////////	////	////////	////
SOL EXACTE	0.01130000	////	0.09720	////	-0.11900	////

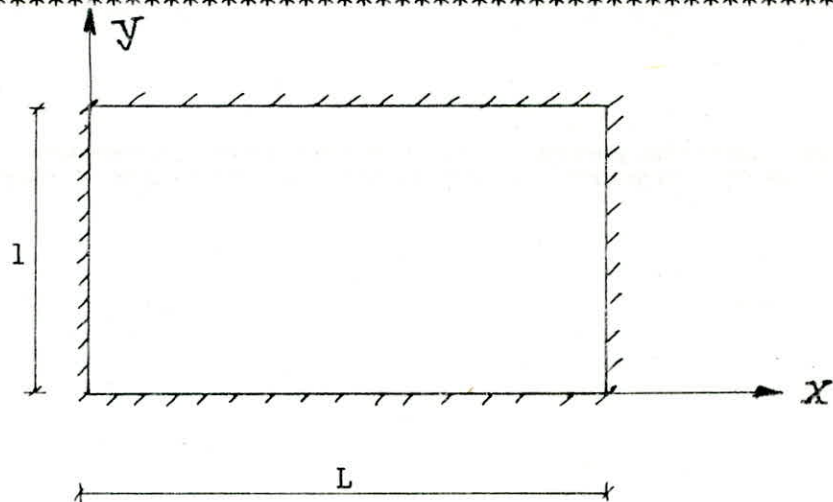
 * PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE SUR LE POURTOUR *



charge concentrée appliquée au centre

maillage	flèche		contraintes	
//////////	$W(p.a^2/D)$	erreur	$MX=MY(p.b^2)$	erreur
//////////	$X=a/2; Y=b/2$	(%)	$X=a/2; Y=b/2$	(%)
2x2	0.0110779	4.50	0.79260	////////
4x4	0.0114714	1.11	1.09000	////////
8x8	0.0115687	0.27	1.38400	////////
10x10	0.0115803	0.17	1.47800	////////
12x12	0.0115866	////	1.55400	////////
SOL EXACTE	0.0116000	////	////////	////////

 * PLAQUE ENCASTREE SUR LE POURTOUR *



$$u=0.3$$

$$L/l=1.0$$

charge concentrée appliquée au centre

maillage	flèche		contraintes	
	$W(p, a^2/D)$ $X=a/2; Y=b/2$	erreur (%)	$MX=MY(p, b^2)$ $X=a/2; Y=b/2$	erreur (%)
2x2	0.00529918	5.37	0.66130	////////
4x4	0.00548433	2.07	0.08825	////////
8x8	0.00557971	0.36	1.17000	////////
10x10	0.00559138	0.15	1.26300	////////
12x12	0.00559771	0.04	1.33900	////////
SOL EXACTE	0.00560000	////	////////	////////

INTERPRETATION DES RESULTATS

A travers ces quelques applications, nous avons mis en évidence l'efficacité de l'élément conforme rectangle à quatre degrés de liberté par noeud.

Du point de vue de la précision et de la convergence, les résultats sont très satisfaisants.

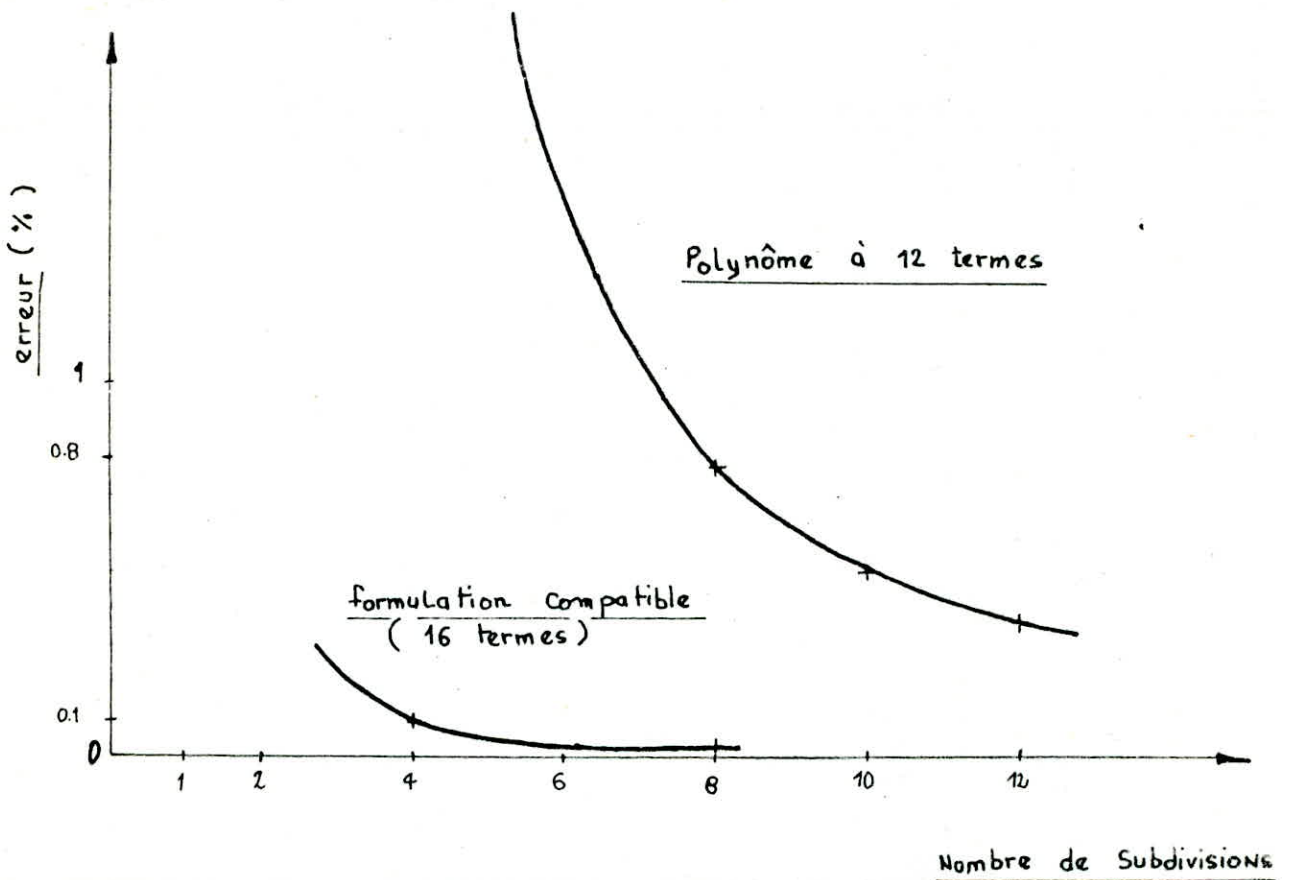
La convergence et la précision sont démontrées de façon encore plus saisissante dans le cas de dalles, aux diverses conditions de charges et d'appuis symétriques.

Avec un maillage de 8 X 8 éléments, la plus grande erreur est de l'ordre de 0,4 %. Dans tous les cas, la convergence a lieu d'une façon monotone pour toutes les subdivisions.

Cependant, les résultats obtenus pour le cas de dalles présentant une dissymétrie dans les conditions d'appui accusent une moins bonne précision.

Nous pensons pouvoir interpréter ceci par le fait que la spécification de $\delta^2w/\delta x\delta y$ en tant que paramètre nodal est toujours possible, mais la loi de comportement de ce dernier étant totalement inconnue, il devient difficile, pour le cas d'appuis dissymétriques, de formuler, le plus fidèlement possible, les conditions aux frontières concernant le gauchissement. Celui-ci, par nature, réduit la souplesse de la structure et l'empêche d'approcher l'allure exacte de la déformée.

Mais pour les problèmes pratiques qui se posent à l'ingénieur, dans la plupart des cas, on peut dire que cet élément peut être utilisé avec grand succès : une étude comparative avec la formulation à 12 termes destinée à l'élément plaque nous en a fourni la preuve (Voir figure ci-dessous).



* Comparaison numérique *

Plaque carrée appuyée simplement et chargée uniformément

VIII-2 Exemples d'application pour le cas des plaques en béton armé.

Le coefficient d'Young fictif E_{bt} de calcul, est défini par :

$$E_{bt} = E_b/N, \quad N \text{ étant un coefficient à déterminer.}$$

EXEMPLE N°1:

DONNEES: *****
 * * Portée:L(m)-----4 *
 * * Hauteur:ht(cm)-----14 *
 * * Enrobage:d'(cm)-----2 *
 * * Charge:q(kg/cm2)-----4500 *
 * * Moment sollicitant:Ms(kg.m/ml)-----3045.6 *
 * * As(cm2)-----10.98(14T10) *
 * * A's(cm2)-----0.0 *
 * * σ_b (kg/cm2)-----137 *
 * * σ_a (kg/cm2)-----2800 *

RESULTATS:

	CONTRAINTES DES ACIERS TENDUS σ_a (kg/cm2)	CONTRAINTES DES ACIERS COMPRIMES σ_a' (kg/cm2)	CONTRAINTES MAX DE COMP DU BETON σ_b' max (kg/cm2)
multicouches N=15	2663.0	/////	112.8
erreur %	0.32	/////	6.70
homog réduite	2691.0	/////	121.8
sol C.C.B.A.68	2671.6	/////	120.9

EXEMPLE N°2:

DONNEES: *****
 * * Portée:L(m)-----8 *
 * * Hauteur:ht(cm)-----30 *
 * * Enrobage:d'(cm)-----2 *
 * * Charge:q(kg/cm2)-----3500 *
 * * Moment sollicitant:Ms(kg.m/ml)-----9475.2 *
 * * As(cm2)-----13.57(12T12). *
 * * A's(cm2)-----0.0 *
 * * σ_b (kg/cm2)-----137 *
 * * σ_a (kg/cm2)-----2800 *

RESULTATS:

	CONTRAINTES DES ACIERS TENDUS σ_a (kg/cm2)	CONTRAINTES DES ACIERS COMPRIMES σ_a' (kg/cm2)	CONTRAINTES MAX DE COMP DU BETON σ_b' max (kg/cm2)
multicouches N=24	2793.0	/////	79.91
erreur %	0.22	/////	6.67
homog réduite	2807.0	/////	86.24
sol C.C.B.A.68	2786.8	/////	85.62

EXEMPLE N°3:

DONNEES: *****
 * * Portée:L(m)-----6 *
 * * Hauteur:ht(cm)-----25 *
 * * Enrobage:d'(cm)-----2 *
 * * Charge:q(kg/cm2)-----4500 *
 * * Moment sollicitant:Ms(kg.m/ml)-----6852.6 *
 * * As(cm2)-----12.56(16T10) *
 * * A's(cm2)-----0.0 *
 * * σ_b (kg/cm2)-----137 *
 * * σ_a (kg/cm2)-----2800 *

RESULTATS:

	CONTRAINTE DES ACIERS TENDUS σ_a (kg/cm2)	CONTRAINTE DES ACIERS COMPRIMES σ_a' (kg/cm2)	CONTRAINTE MAX DE COMP DU BETON σ_b' max (kg/cm2)
multicouches N=21	2654.0	/////	81.99
erreur %	0.46	/////	6.80
homog réduite	2686.0	/////	88.60
sol C.C.B.A.68	2666.4	/////	87.97

EXEMPLE N°4:

DONNEES: *****
 * * Portée:L(m)-----6 *
 * * Hauteur:ht(cm)-----14 *
 * * Enrobage:d'(cm)-----2 *
 * * Charge:q(kg/cm2)-----4000 *
 * * Moment sollicitant:Ms(kg.m/ml)----6091.2 *
 * * As(cm2)-----22.62(10T12). *
 * * A's(cm2)-----20.36(9T12) *
 * * σ_b (kg/cm2)-----137 *
 * * σ_a (kg/cm2)-----2800 *

RESULTATS:

	CONTRAINTES DES ACIERS TENDUS σ_a (kg/cm2)	CONTRAINTES DES ACIERS COMPRIMES σ_a' (kg/cm2)	CONTRAINTES MAX DE COMP DU BETON σ_b' max (kg/cm2)
multicouches N=7	2652.0	1531.0	130.0
erreur %	0.02	20.56	5.11
homog réduite	2672.0	1279.0	137.9
sol C.C.B.A.68	2652.5	1269.9	137.0

EXEMPLE N°5:

DONNEES: *****
 * * Portée:L(m)-----8 *
 * * Hauteur:ht(cm)-----20 *
 * * Enrobage:d'(cm)-----2 *
 * * Charge:q(kg/cm2)-----4000 *
 * * Moment sollicitant:Ms(kg.m/ml)----10828.8 *
 * * As(cm2)-----27.7(9T14) *
 * * A's(cm2)-----11.31(10T12) *
 * * σ_b (kg/cm2)-----137 *
 * * σ_a (kg/cm2)-----2800 *

RESULTATS:

	! CONTRAINTE DES ! ! ACIERS TENDUS ! ! σ_a (kg/cm2) !	! CONTRAINTE DES ! ! ACIERS COMPRIMES ! ! σ_a' (kg/cm2) !	! CONTRAINTE MAX ! ! DE COMP DU BETON ! ! σ_b' max (kg/cm2) !
! multicouches ! ! N=7 !	! 2532.0 !	! 1792.0 !	! 128.1 !
! erreur % !	! 0.29 !	! 18.19 !	! 4.97 !
! homog réduite !	! 2543.0 !	! 1527.0 !	! 135.7 !
! sol C.C.B.A.68 !	! 2524.6 !	! 1516.2 !	! 134.8 !

EXEMPLE N°6:

DONNEES: *****
 * * Portée:L(m)-----10 *
 * * Hauteur:ht(cm)-----25 *
 * * Enrobage:d'(cm)-----2 *
 * * Charge:q(kg/cm2)-----4000 *
 * * Moment sollicitant:Ms(kg.m/ml)----16920.0 *
 * * As(cm2)-----27.7(16T16). *
 * * A's(cm2)-----11.31(10T12) *
 * * σ_b (kg/cm2)-----137 *
 * * σ_a (kg/cm2)-----2800 *

RESULTATS:

	! CONTRAINTE DES ! ! ACIERS TENDUS ! ! σ_a (kg/cm2) !	! CONTRAINTE DES ! ! ACIERS COMPRIMES ! ! σ_a' (kg/cm2) !	! CONTRAINTE MAX ! ! DE COMP DU BETON ! ! σ_b' max (kg/cm2) !
! multicouches ! ! N=7 !	! 2641.0 !	! 1913.0 !	! 128.8 !
! erreur % !	! 0.10 !	! 17.73 !	! 4.87 !
! homog réduite !	! 2657.0 !	! 1637.0 !	! 136.4 !
! sol C.C.B.A.68 !	! 2638.3 !	! 1624.9 !	! 135.4 !

INTERPRETATION DES RESULTATS

Par référence aux solutions données par le calcul classique du béton armé, on relève ce qui suit.

1)- la méthode numérique du modèle "plaque orthotrope" donne des résultats très satisfaisants, vu qu'elle préconise les mêmes règles et les mêmes hypothèses que celles qui sont destinées au calcul du béton armé.

2)- l'application de l'étude des multicouches à la simulation du comportement en flexion des dalles en B.A., nous amène à faire les constatations suivantes :

21)- Pour les aciers tendus, plus on néglige le béton tendu¹, plus la contrainte σ_a augmente (elle augmente tout en dépassant la solution de référence C.C.B.A. 68) . Pour $E_{bt} = 0$, l'erreur est de l'ordre de 17 % par excès, vu la différence dans les comportements due à la simulation des barres d'armatures par une plaque d'acier équivalente. La solution exacte est atteinte pour un coefficient de YOUNG fictif E_{bt} de calcul pour le béton tendu égal à

= $E_b / 7$ ----> pour les sections avec aciers comprimés.

= E_b / N ----> pour les sections sans acier comprimé , N étant compris entre 15 et 24. Pour ces coefficients, la plus grande erreur atteinte est de l'ordre de 0,4 % .

22)- Pour les aciers comprimés, plus on néglige le béton tendu, plus on se rapproche par excès de la solution exacte . Pour $E_{bt} = 0$, l'erreur est alors de l'ordre de 17 %.

1)-Ayant posé $E_{bt} = E_b / N$, négliger le béton tendu revient à tendre N vers l'infini.

23)-Pour le béton comprimé, plus on néglige le béton tendu, plus on se rapproche par défaut de la solution exacte. En d'autres termes, plus les sollicitations augmentent, plus il devient dangereux de tenir compte du béton tendu. Pour $E_{bt} = 0$, l'erreur est de l'ordre de 4 %.

CHAPITRE IX

Conclusion

Les caractéristiques propres aux éléments finis de flexion des plaques minces procurent des formulations fiables et précises pour des modèles fondés sur les déplacements, et donc sur l'énergie potentielle totale.

La formulation à 16 termes provenant d'une interpolation polynômiale de L'HERMITE représente une formulation rigoureuse par minimisation de l'énergie potentielle totale.

A travers les applications qui ont précédé, nous avons mis en lumière la précision et le degré de convergence que cette formulation peut atteindre. Une étude comparative menée entre cette fonction, et une autre destinée à l'élément rectangulaire qui est le polynôme à 12 termes, a montré à son tour la performance remarquable de l'élément conforme qui présente la compatibilité inter-éléments.

D'autre part, dans notre travail, la simulation du comportement en flexion des dalles en béton armé, a été l'application principale de l'étude des multicouches. Cette modélisation constitue une des méthodes destinées à l'amélioration de la compréhension du comportement du béton armé. Il y a lieu de préciser que le travail effectué dans cette perspective est destiné à la vérification des contraintes normales des aciers, et du béton en flexion simple. Les cas étudiés ont permis de cerner globalement le problème.

Ici encore, les résultats sont comparés à d'autres solutions théoriques et numériques, et l'on voit que l'on arrive à obtenir de bons résultats, moyennant certaines hypothèses nécessaires.

Les résultats convaincants obtenus nous permettent d'étendre cette approche à des cas de figures compliquées, pratiquement impossibles à étudier par la méthode classique du béton armé, tels que :

- Conditions d'appui diverses.
- Chargements complexes.
- Formes géométriques sophistiquées des sections.
- Propriétés mécaniques non homogènes.

- * * * * *

BIBLIOGRAPHIE

1)- O U V R A G E S

- BARES, R. : -Calcul des dalles et des parois.
- BOUMAH RAT, M.
et GOURDIN, A. : -Méthodes numériques appliquées.
- CHARON, P. : -Le calcul et la vérification des ouvrages en
B.A. (Règles C.C.B.A 68)
-Exercices de B.A avec leurs solutions.
- COURBON, J. : -Plaques minces élastiques.
- DHATT et TOUZOT : -Une présentation de la M.E.F.
- GALLAGHER, R.H. : -Introduction aux Eléments Finis.
- IMBERT, J.F. : -Analyse des structures par Eléments finis.
- L'HERMITE, R. : -Le flambage des arcs et des plaques.
- ROCKY, K.C. : -Introduction à la Méthode des Eléments Finis.
- Techniques de l'Ingénieur (divers numéros).
- TIMOSHENKO, S. : -Theory of plates and shells.
- UGURAL, A.C. : -Stresses in plates and shells.
- WANG : -Calcul des structures par les méthodes
numériques et matricielles.
- YANG, T.Y. : -Finite Element Structural Analysis.
- ZIENKIEWICZ, O.C. : -La méthode des Eléments Finis appliquée à
l'art de l'ingénieur.
- GAY, D. : -Matériaux Composites.

2)- T R A V A U X

- ALDJANOV. : -Notes de cours "M-M-C".
- BOUABDELLAH
et MOUSSAQUI : -Analyse flexionnelle des plaques par la
M.E.F.(Projet de Fin d'Etudes (juin 1988).)
- DEMIDEM, M. : -Notes de cours "Méthodes numériques".

