

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

12k
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
البيكنة
DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHEQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DEVELOPPEMENT D'ELEMENTS ET
ALGORITHMES DANS LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :

Mr. BARAKA

Etudié par :

M.K. BERRAH

R. BOUBENIDER

Dirigé par :

Mr. BARAKA

PROMOTION :

JUIN 1985

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

DEVELOPPEMENT D'ELEMENTS ET
ALGORITHMES DANS LA METHODE
DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :

Mr. BARAKA

Etudié par :

M.K. BERRAH

R. BOUBENIDER

Dirigé par :

Mr. BARAKA

PROMOTION :

JUN 1985

DEDICACES

A Anissa ,ma tante .
A mon père , à qui je dois tout .
A tous ceux qui me sont chers ,

Mounir

A la mémoire de ma mère .
A mon père à qui je dois tout .
A Tata .
A mes frères et soeurs .
A tous ceux qui me sont chers .

Rafik

REMERCIEMENTS

Qu'il nous soit permis de remercier notre maître Monsieur BARAKA pour nous avoir inspiré le sujet de notre travail, de nous avoir estimé capables de le mener à bien, qu'il trouve ici l'expression de notre respectueuse reconnaissance pour l'aide que nous avons toujours trouvée auprès de lui.

Nous remercions vivement Mesdames CHERID et MOHABBEDINE pour l'amitié et la serviabilité qu'elles nous ont toujours manifestées.

Nous remercions également tous les enseignants ayant participé à notre formation.

Nous remercions particulièrement Monsieur CHINOUN pour sa participation à la mise en forme de ce travail.

--*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*

S O M M A I R E

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

- HISTORIQUE DE LA M.E.F
- PRESENTATION DU SUJET

CHAPITRE 2 : PRESENTATION GENERALE DE LA M.E.F

- GENERALITES
- FORMULATION DES ELEMENTS
- ANALYSE GLOBALE : ASSEMBLAGE DES ELEMENTS

CHAPITRE 3 : STRUCTURE EN TREILLIS PLANE

- PROBLEME D'EQUILIBRE
- PROBLEME DE VALEURS PROPRES
- PROBLEME D'EVOLUTION
- ORGANIGRAMME GENERAL

CHAPITRE 4 : DEVELOPPEMENT D'ELEMENTS DANS " M.E.F "

- PRESENTATION DU PROGRAMME " M.E.F "
- METHODE DE CONSTRUCTION DES FONCTIONS D'INTERPOLATION
- INTEGRATION NUMERIQUE
- DEVELOPPEMENT DE DIVERS ELEMENTS

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

HISTORIQUE

Depuis une cinquantaine d'années, la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et de poutres.

Le comportement de chaque élément est représenté par une matrice de rigidité élémentaire grâce aux hypothèses de la R. D. M.

L'apparition des ordinateurs entraîne un développement rapide de la mécanique des structures entre 1950 et 1960.

Le concept d'élément fini est introduit par TURNER, CLOUGH, MARTIN, et TOPP en 1956.

Les bases théoriques de la méthode des éléments finis, reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation.

Des 1960, la méthode des éléments finis subit un essor rapide dans plusieurs directions :

- Reformulation, à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous la forme des résidus pondérés.
- Création d'éléments de haute précision (éléments à cotés curvilignes ou isoparamétriques).
- Utilisation de la méthode des éléments finis dans la résolution de problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : mécanique des fluides, thermique ...
- Construction d'une base mathématique de la méthode des éléments finis à partir de l'analyse fonctionnelle.

PACOURS BIBLIOGRAPHIQUE

A partir de 1967, trois éditions du livre de ZIENKIEWICZ paraissent.

A l'heure actuelle, seules sont disponibles en français des traductions des ouvrages de ZIENKIEWICZ ; la seconde édition de GALLAGHER, DE ROCKEY ETAL, de ABSI et d'IMBERT.

Les principaux programmes sont en mécanique des solides :

NASTAN, ASKA, SAP, MARC, ANSYS, TITUS, ADINA, concernant l'interaction sol-structure.

SHAKE, FLUSH (établis à l'université de BERKELEY CALIFORNIE).

1800

←----Structures hyperstatiques
←----Théorème de l'énergie

MAVIER 1819
MAXWELL 1864
CASTIGLIANO 1878

1900

←----Méthode d'approximation
←----Approximation par " élément fini "
←----Méthode matricielles

RITZ 1908
GALERKIN 1915
COURANT 1940

1955

←----Concept " d' élément fini "
 .Méthode des forces
 .Méthode des déplacements

ARGYRIS-DENKE 1955
ARGYRIS-TURNER 1956

HISTORIQUE DES METHODES MODERNES D'ANALYSE DES STRUCTURES .

SYNOPTIQUE DES PRINCIPAUX DEVELOPPEMENTS JUSQU'EN 1956 .

PRESENTATION DU TRAVAIL

Cette étude présente un programme modèle en langage FORTRAN de résolution de problèmes D'EQUILIBRE , DE VALEURS PROPRES et D'EVOLUTION relatifs aux structures en treillis planes .

Ce programme a donné lieu à un développement d'algorithmes divers de résolution de systèmes linéaires , d'inversion de matrice , de recherche de valeurs propres , d'intégration de systèmes d'équations différentielles . En outre , il nous a permis de nous initier aux principaux problèmes et algorithmes rencontrés dans un programme général d'éléments finis .

Par ailleurs , cette étude donne le développement d'éléments finis divers pour un programme général d'éléments finis (programme M E F de GOURI DHATT et GILBERT TOUZOT) résolvant des problèmes similaires .

Les éléments développés sont de complexité variable ; depuis l'élément de barre de treillis jusqu'à l'élément tridimensionnel (Hexaèdre à vingt noeuds) en passant par deux éléments de poutre l'un reflétant la R.D.M classique sans cisaillement , l'autre étant un élément fini sophistiqué tenant compte du cisaillement d'une manière propre à lui (différent du cisaillement R.D.M et ce, dans le but de faire une comparaison qui pourrait évaluer la validité de chacun d'eux dans divers situation .

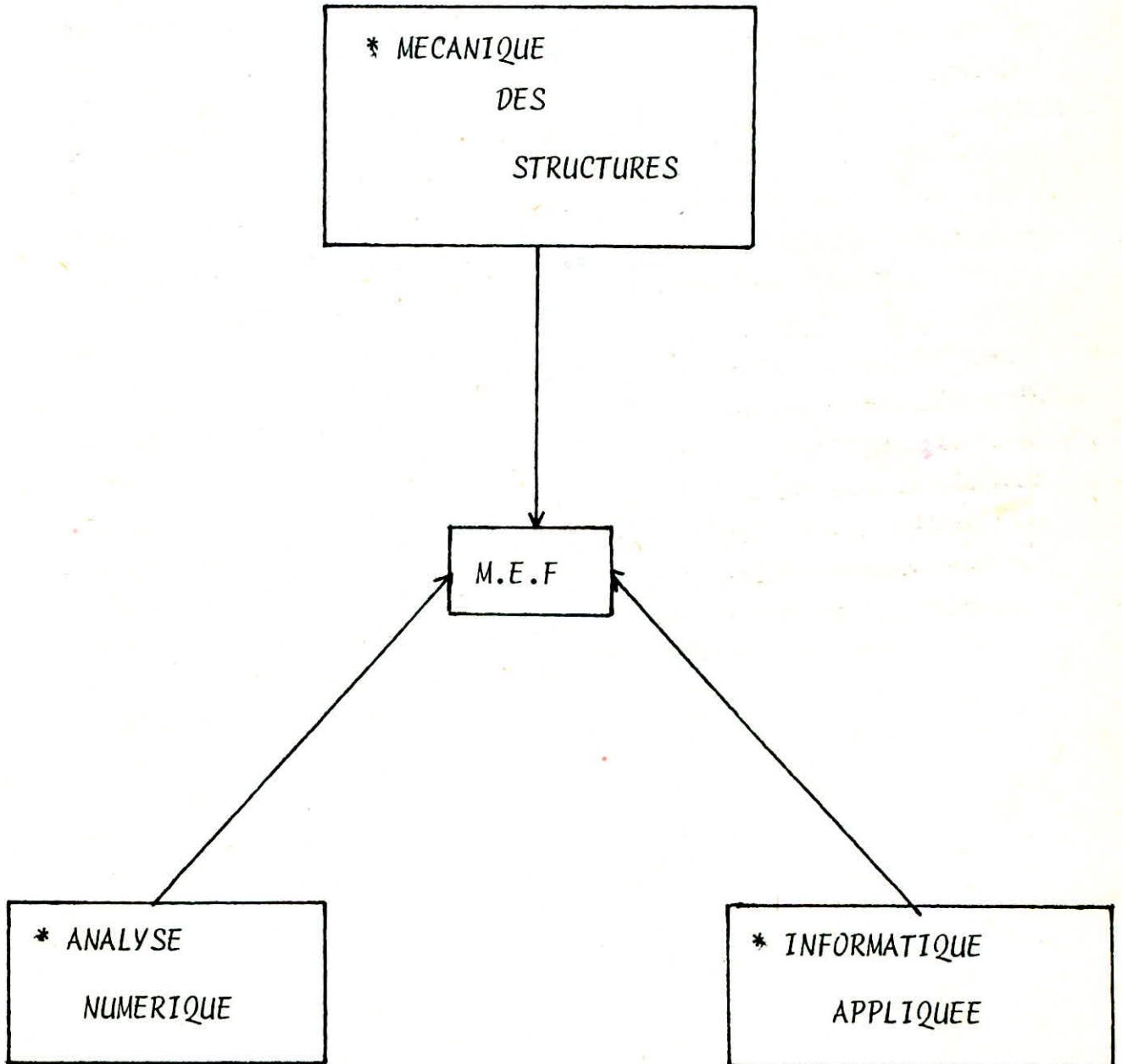
L'outil informatique utilisé est un mini-ordinateur de type :
VAX 11/750 .

* MECANIQUE
DES
STRUCTURES

M.E.F

* ANALYSE
NUMERIQUE

* INFORMATIQUE
APPLIQUEE



PRESENTATION GENERALE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

L'analyse des structures ou milieux continus peut se faire par différentes approches. Ainsi pour des cas géométriquement "simples" soumis à des chargements également "simples", l'étude peut être effectuée à l'aide de méthodes analytiques.

Alors que pour des structures géométriquement complexes, l'analyse statique ou dynamique ne se conçoit que numériquement. A ce titre, nous citerons deux classes de méthodes numériques :

a - Méthodes numériques de résolution d'équations différentielles

(ou plus exactement d'équations aux dérivées partielles lorsque le problème étudié est de nature bi-ou tridimensionnelle). et ce par approximation.

Nous citerons à ce sujet la méthode des différences finies par laquelle l'équation différentielle est approchée à l'aide de valeurs discrètes des variables en un certain nombre de points.

notons que ces méthodes ont connu un grand essor à l'occasion de l'apparition de l'ordinateur qui a accru dans de très larges mesures les possibilités de résolution d'équations aux dérivées partielles.

b - Méthode des éléments finis qui est une méthode de discrétisation du domaine à étudier. L'idée de base est la représentation analytique d'un milieu continu en le subdivisant en sous-domaines relativement petits de formes géométriquement simples ayant au plus en commun leurs frontières et tels que leur assemblage représente au mieux le solide réel.

Notons que chacun de ces éléments possède ses propres fonctions pour décrire contraintes et déplacements. Il est important que ces fonctions assurent la continuité du comportement dans l'ensemble du milieu.

Au sein de cette méthode, il existe plusieurs formulations conduisant essentiellement à la méthode des déplacements, méthode des forces ou méthodes hybrides et ce en fonction du choix concernant l'inconnu à approcher.

Pour notre part, nous avons opté pour la méthode des déplacements qui présente certains avantages par rapport aux autres (plus grande souplesse, facilité d'approche de déplacements admissibles, problèmes non linéaires).

Ainsi après décomposition de notre structure en un certain nombre d'éléments suivant un maillage adéquat . Vous considérerons les déplacements aux noeuds de ce maillage comme inconnues du problème et nous approcherons au sein de chaque élément le champ des déplacements par des fonctions d'interpolation aussi simples que possible (généralement polynomiales) assurant la continuité des déplacements généralisés (rotations , courbures éventuellement) à l'interface de deux éléments ou aux noeuds .

TYPE D'ELEMENTS

Les éléments les plus simples sont :

1-L'élément barre simple .

Il sert à décrire des poutres en treillis et des ossatures à deux ou à trois dimensions .

2-L'élément de plaque mince chargé dans son plan .

(C'est à dire placé dans des conditions de contraintes planes) .

Ces deux éléments de base de l'analyse par éléments finis peuvent être combinés pour représenter des tirants de raidissement par exemple . Ils doivent leur qualificatif " de base " à leur antériorité historique par rapport aux autres types d 'éléments dont nous citerons les éléments volumiques (coques , ...) .

APPLICATIONS

La méthode des éléments finis présente un éventail très large d'applications dans de diverses disciplines en raison de son caractère assez général d'analyse de milieu .

Cette méthode peut être utilisée aussi bien en structures qu'en hydraulique (mécanique des fluides) qu'en aéronautique ou que pour des problèmes de thermiques etc.....

PROGRAMMATION

L'aspect général de la méthode des éléments finis permet de concevoir un programme d'ordinateur unique, capable de résoudre tous les problèmes sus-cités. On peut décomposer la structure d'un tel programme en 4 parties essentielles:

1 -ENTREE DES DONNEES :

Définition de la géométrie, des matériaux, du chargement, des conditions aux limites.

2 -BIBLIOTHEQUE D'ELEMENTS

Génération des modèles mathématiques des éléments de la structure et des charges appliquées.

3 -RESOLUTION

Construction et résolution du modèle mathématique représentant le système entier.

4 -RESULTATS

Présentation des déplacements, contraintes...calculées.

FORMULATION DES ELEMENTS

Il existe deux classes générales de procédés de formulation des équations des éléments:

Les méthodes directes et les méthodes variationnelles.

1) LES METHODES DIRECTES

Nous examinerons une méthode distincte de formulation des équations forces-déplacements des éléments:

- La méthode directe.

La formulation des éléments par cette méthode se fait en combinant les trois systèmes d'équation de l'élasticité, à savoir :

- 1 - Equation d'équilibre
- 2 - Equation déformation-déplacements
- 3 - Lois de comportement du matériau

L'élasticité étant une partie nouvelle pour nous, il nous faut ouvrir une parenthèse pour présenter avec de plus amples détails ses équations.

* Présentation des équations différentielles de base de l'élasticité linéaire :

Pour un solide soumis à un chargement donné, la théorie de l'élasticité linéaire a pour objet l'étude des contraintes et des déformations qui en résultent en supposant que :

- Les déformations sont petites
- Lois de comportement reliant les contraintes aux déformations sont linéaires.

La théorie de l'élasticité peut se résumer aux trois ensembles d'équations suivants :

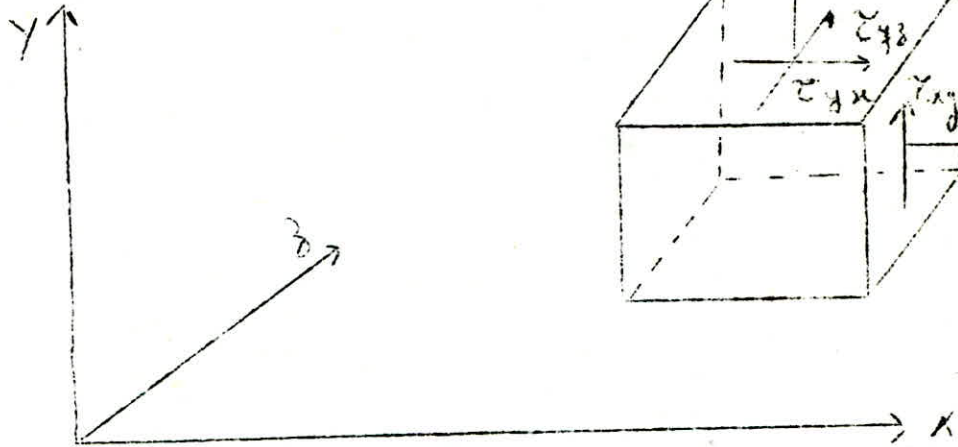
- Equations différentielles de l'équilibre
- Equations différentielles déformations-déplacements.
- Lois de comportement des matériaux.

La combinaison de toutes ces équations permet de former les équations différentielles régissant le comportement du solide.

1) Equations différentielles de l'équilibre :

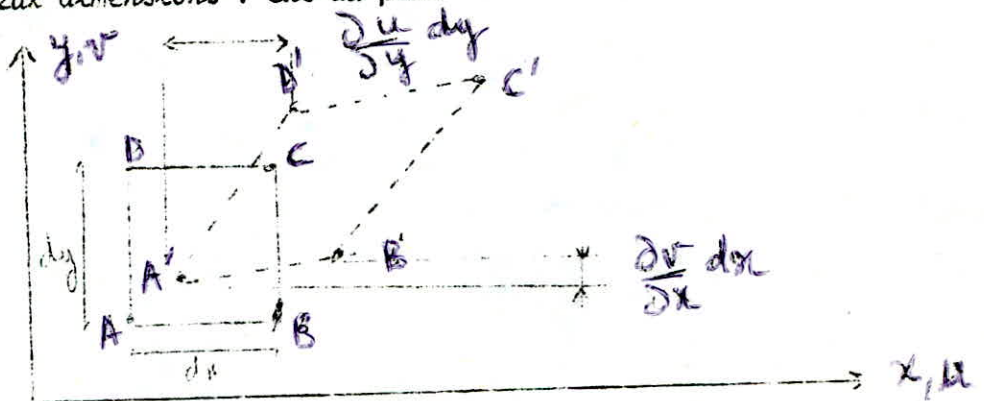
Pour un élément de volume, les trois conditions d'équilibre sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial (\rho X)}{\partial x} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial (\rho Y)}{\partial y} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial (\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho Y)}{\partial y} + Z = 0 \end{cases}$$



2) Equations déformations- déplacements

a) Cas à deux dimensions : cas du plan



$$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

déformation d'un rectangle élémentaire

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

γ_{xy} : Déformation tangentielle définie comme étant la déformation d'un angle qui est droit avant déformation.

Pour un problème à trois dimensions, il suffit de compléter les équations par les suivantes :

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

3) Equations de comportement de matériaux.

Elles caractérisent les propriétés mécaniques d'un matériau donné.

Ainsi lors de l'essai de traction simple d'une éprouvette cylindrique, la partie linéaire du diagramme contrainte-déformation s'exprime algébriquement par: $\sigma_x = E \epsilon_x$

(en supposant qu'il n'y a pas de déformations initiales auquel cas nous aurions: $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \epsilon_x^0$).

D'une manière générale pour un problème à 3 dimensions les tenseurs contraintes et déformations sont reliés entre eux par la loi de HOOKE s'écrivant matriciellement dans ce cas comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

où λ et μ sont les coefficients de LAMÉ t.g

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E : module de Young

ν : coefficient de Poisson

- pour un milieu à deux dimensions
 - dans un état de contraintes planes

$$\begin{cases} \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

on a

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \lambda & -\nu & 0 \\ -\nu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

- dans un état de déformation planes

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \\ \epsilon_z = 0 \end{cases}$$

on a

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

- dans un problème à symétrie de révolution

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}$$

On peut combiner les systèmes d'équations qui précèdent pour obtenir des équations différentielles dont la solution exacte satisfait à toutes les conditions requises.

Ces équations sont les équations différentielles d'équilibre et de compatibilité

Remarque

Théorème d'unicité de la théorie de l'élasticité :

"Si en chaque point de la frontière, soit les forces superficielles, soit les déplacements sont spécifiés, alors pour des forces de volume données il ne peut exister qu'une distribution des contraintes et des déformations dans le corps considéré".

La solution satisfaisant à toutes les conditions d'équilibre et de compatibilité, au sein du corps et sur ses frontières, constitue cette solution unique (il est valable pour tout milieu hyperélastique).

Il est important en analyse par éléments finis de conserver à l'esprit le théorème de l'unicité, car si une représentation par éléments finis parvenait à vérifier toutes les conditions d'équilibre et de compatibilité, alors on aurait accédé à la solution exacte et par conséquent tout affinage du maillage ne pourrait apporter aucune amélioration des résultats.

Or un procédé de résolution numérique quel qu'il soit (différences finies, éléments finis, représentation en série) s'améliore lorsqu'on affine le maillage et ceci est dû au fait que toutes les méthodes numériques existant présentent des lacunes dans la satisfaction d'au moins une condition élémentaire sur la solution exacte.

En ce qui concerne la méthode des éléments finis, il existe certaines méthodes de formulation d'éléments qui tendent à rassembler toutes les lacunes d'un élément dans une seule catégorie par exemple la non satisfaction des équations d'équilibre tout en s'attachant à respecter les conditions de continuité de déplacements.

Lorsque cette opération est possible, il est démontré que les solutions numériques obtenues présentent d'intéressantes propriétés de convergences et l'on connaît le signe de l'erreur commise sur l'énergie de déformation ce qui présente un grand intérêt dans l'évaluation de la précision d'une solution approchée.

-Présentation des différentes étapes de la méthode directe :

La méthode directe de formulation des équations de rigidité ($F = KU$) d'un élément se compose des étapes suivantes :

a - On exprime le champ Δ des déplacements en fonctions d'un nombre fini de variables, de préférence les degrés de liberté aux noeuds de l'élément. $\{u\}$

b - On exprime le champ ϵ des déformations de l'élément en fonction des degrés de liberté en dérivant le champ des déplacements conformément aux équations déformations-déplacements.

c - On introduit la loi intrinsèque du matériau qui permet d'établir une relation entre σ et ϵ

d - On construit les équations décrivant les forces $\{F\}$ aux noeuds de l'élément en fonction du champ de contraintes d'où la relation entre $\{F\}$ et $\{u\}$.
On obtient ainsi les équations de rigidité de l'élément.

Remarques concernant la méthode directe :

Cette méthode est d'une application limitée, et il est difficile de l'appliquer à la formulation d'éléments complexes ou à des phénomènes spéciaux.

Limites de la méthode directe:

Nous citerons à ce titre :

- La détermination du niveau de continuité inter-éléments.

(Déplacements u et v continus, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ continues ?).

- - Problèmes des charges réparties : recours à la réduction des efforts.

METHODES VARIATIONNELLES

Les méthodes variationnelles, ou de l'énergie, constituent en mécanique des structures une approche puissante, très utilisée pour formuler les équations des éléments.

Il existe différents principes variationnels.

1-PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

Le principe des travaux virtuels constitue le fondement des principes variationnels (principe classique des énergies potentielles et complémentaires stationnaires,....).

En réalité, le principe des travaux virtuels constitue en lui même un moyen de formulation des équations d'éléments finis.

Les formes les plus courantes sont celles des déplacements virtuels et des forces virtuelles qui mènent respectivement aux principes classiques de l'énergie potentielle stationnaire et de l'énergie complémentaire stationnaire.

DEPLACEMENTS VIRTUELS

Considérons un corps en équilibre sous des forces de volume et des forces extérieures subissant un déplacement fictif dont le champ peut être décrit par des composantes δu , δv , δw en chaque point.

Ce déplacement devra être cinématiquement admissible c'est à dire exprimable par des fonctions continues des coordonnées de l'espace satisfaisant aux conditions cinématiques de frontières là où elles existent.

exemple :



admissible



non admissible

Le principe des déplacements virtuels stipule que dans un déplacement virtuel $\delta \Delta$, la somme de la variation de potentiel δV des forces appliquées et de la variation δU de l'énergie de déformation interne est égale à zéro.

$$\delta U + \delta V = 0$$

$$\delta U = \int_{vol} \sigma \delta \epsilon \, d(vol) \quad \delta V = - [u^A] \{ F \}$$

Soit le vecteur inconnu des déplacements généralisés "a", à l'intérieur de l'élément on fait une interpolation.

$$\{ u \} = [N] \{ a \} \quad \text{matrice des fonctions d'interpolation.}$$

- par application des équations déformations-déplacements adéquates:

$$\{ \epsilon \} = [L] \{ u \} \quad \text{où } L : \text{matrice opérateur différentiel}$$

D'où

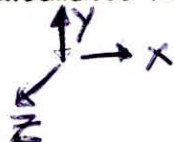
$$\{ \epsilon \} = [L] [N] \{ a \}$$

en posant :

$$[B] = [L] [N]$$

$$\{ \epsilon \} = [B] \{ a \}$$

Appliquons le principe des déplacements virtuels au cas assez général où il existe des forces de volume:



$$\{ \delta U \} = [N] \{ \delta a \}$$

$$\{ \delta \epsilon \} = [B] \{ \delta a \}$$

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \} \quad \text{où } D : \text{matrice élastique}$$

Nous ne considérerons pour l'instant que des forces F_i concentrées aux noeuds.

La variation de potentiel des forces aux noeuds dû aux déplacements virtuels

$\{ \delta a \}$ de ces noeuds est :

$$\delta V = - \{ \delta a \} \{ F \}$$

La variation de l'énergie de déformation s'écrit sous la forme générale:

$$\delta U = \int_V \sigma \delta \epsilon \, dV$$

σ = tenseur contraintes

ϵ = tenseur déformations

En élasticité linéaire :

$$\delta U = \int_V 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

D'après l'équation (1) : comme $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$
 $\{\varepsilon\} = [B] \{a\}$

$$\delta U = \int_V \delta a \{K\} \{a\} dV$$

comme : $\delta = [D] \{\varepsilon\} = [D] [B] \{a\}$
 et $\delta \varepsilon = [B] \delta a$

$$\delta U = \int_V \delta a \{ [B]^t [D] [B] \} \{a\} dV$$

D'où la matrice de rigidité :

$$K = \int_V [B]^t [D] [B] dV$$

Occupons nous maintenant de la variation d'énergie potentiel des forces extérieures :

Pour tenir compte des forces de volume il faut compléter la variation d'énergie potentielle des forces appliquées δV par l'intégrale :

Comme $-\int_V \delta u \{X\} dV$; travail des forces de volume $X = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$
 $\delta V = -\int_V \delta u \{F\} dV - \int_V \delta u \{X\} dV$
 on a $\delta u = [N] \delta a$ on a $\delta u = [N] \delta a$ on a $\delta u = [N] \delta a$

Donc :

$$\delta V = -\int_V \delta a \{N^t\} \{F\} dV - \int_V \delta a \{N^t\} \{X\} dV$$

Comme $X = -[P] \{\ddot{u}\}$ } $\rightarrow X = -[P][N] \{\ddot{a}\}$

D'où $\{F_{inertie}\} = \int_V [N^t] \{X\} dV$: vecteur des forces d'inertie de l'élément

On obtient donc :

$$\{F_{inertie}\} = -\int_V [N^t] [P] [N] \{\ddot{a}\} dV$$

D'où la matrice de masse :

$$[m] = \int_V [N^t] [P] [N] dV$$

Enfin le théorème des travaux virtuels s'écrit de la manière suivante:

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (2)$$

$$\delta U = \int_V \delta a \{ [B]^t [D] [B] \} a \, dV$$

$$\delta V = + \int_V \delta a \{ [N]^t [S] [N] \} a \, dV - \int_V \delta a \{ F \}$$

L'équation (2) s'écrit donc comme suit :

$$\int_V \delta a \{ [B]^t [D] [B] \} a \, dV + \int_V \delta a \{ [N]^t [S] [N] \} a \, dV - \int_V \delta a \{ F \}$$
$$\int_V [B]^t [D] [B] \{ a \} \, dV + \int_V [N]^t [S] [N] \{ a \} \, dV = \{ F \}$$

C'est à dire :

$$[K] \{ a \} + [m] \{ \ddot{a} \} = \{ F \}$$

d'une matrice de transport

- 18 -

ANALYSE GLOBALE: ASSEMBLAGE DES ELEMENTS

Comme il existe trois formes de relations forces-déplacements ou noeuds d'un élément fini nous pourrons distinguer trois grandes classes de méthodes pour construire les équations d'une représentation globale par éléments finis.

Les trois formes de relations forces-déplacements sont :

1 -Equation de rigidité $\{F\} = [K] \{ \Delta \}$
[K]: matrice de rigidité de l'élément.

2 -Equation de souplesse:

Il n'est recommandé d'écrire des équations de souplesse que pour des éléments appuyés de manière stable, car dans le cas contraire les charges provoqueraient un déplacement rigide d'amplitude infinie.

$$\{ \Delta \} = [f] \{ F \}$$

On peut écrire autant d'équations de souplesse pour un élément qu'il existe pour lui d'ensembles de conditions d'appui stable et isostatiques.

Les équations de souplesse pour éléments appuyés hyperstatiquement ne sont pas commodes pour l'assemblage.

3 -Equation mixte forces-déplacements

$$\begin{Bmatrix} F_f \\ F_s \\ \Delta_f \end{Bmatrix} = [\Omega] \begin{Bmatrix} F_s \\ \Delta_s \end{Bmatrix}$$

[Ω] matrice de transport

$\begin{Bmatrix} F_f \\ \Delta_f \end{Bmatrix}$ caractéristique d'une extrémité

$\begin{Bmatrix} F_s \\ \Delta_s \end{Bmatrix}$ autre extrémité

Par analogie les trois classes de méthodes sont :

a -Méthode des déplacements (ou des rigidités)

b -Méthode des forces (ou de souplesses)

c -Méthode mixte

Nous retiendrons pour étude la méthode des déplacements qui est la plus simple et la plus puissante dans laquelle les déplacements nodaux jouent le rôle des inconnues.

En vertu de cette méthode, l'assemblage des matrices de rigidités élémentaires se fait en chaque noeud de la structure entière au moyen des conditions d'équilibre et permet l'obtention d'une matrice de rigidité globale de la structure à l'état libre :

$$\{F\} = [K_{\text{global}}] \{\Delta\}$$

A ce stade la structure est à l'état libre, c'est à dire que nous n'avons pas introduit de conditions aux limites ou conditions d'appuis, donc la résolution du système

$$[K] \{\Delta\} = \{F\} \quad (1)$$

ne peut se faire en raison des mouvements de corps rigides qui ne sont pas bloqués ce qui rend la matrice de rigidité globale singulière.

Ceci nous oblige donc à déterminer une matrice de rigidité de la structure à l'état lié, qui elle tient compte des conditions aux limites et permet la résolution du système (1)

Finalement les principales étapes de la méthode des éléments finis sont :

- 1) Idéalisations de la structure à étudier.
- 2) Discrétisation au moyen d'un maillage pour lequel les déplacements aux noeuds seront inconnus.
- 3) Calcul de la matrice de rigidité de chaque élément ayant fait au préalable un choix de fonctions d'interpolation.
- 4) Assemblage
- 5) Introduction des conditions limites
- 6) Résolution.

ETUDE D'UNE STRUCTURE PLANE EN TREILLIS PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

(2 degrés de liberté / noeud)

Toute l'étude de notre structure se fera en élasticité linéaire, ce qui se traduira algébriquement par l'obtention de systèmes linéaires : ce résultat est principalement dû au choix d'analyse en petites perturbations, et du choix de la loi rhéologique linéaire de HOOKE pour le comportement du matériau constitutif.

Nous étudierons pour notre treillis les trois cas de problèmes numériques liés à l'étude d'une structure par la méthode des éléments finis, à savoir :

- 1) Problème d'équilibre : $[K] \{ \Delta \} = \{ F \}$
- 2) Problème de valeurs critiques : $[M] \{ \ddot{\Delta} \} + [K] \{ \Delta \} = 0$
- 3) Problème d'évolution : $[M] \{ \ddot{\Delta} \} + [C] \{ \dot{\Delta} \} + [K] \{ \Delta \} = \{ F \}$
 $\{ \Delta \}$: vect. déplacements nodaux.

Remarques

- 1) La matrice de rigidité est indépendante des déplacements car l'étude se fait dans le domaine élastique linéaire.
- 2) La matrice de rigidité est symétrique et est définie positive.
- 3) La matrice de masse utilisée est cohérente.
- 4) La matrice de masse est symétrique et définie semi-positive.
- 5) Matrice d'amortissement C :
elle caractérise l'amortissement d'une structure en mouvement.
Elle n'est pas simple à définir, on considérera un amortissement proportionnel : $C = \alpha M$

1 - PROBLEME D'EQUILIBRE (OU DE VALEURS LIMITES)

Il consiste à calculer le vecteur déplacement dans un cas stationnaire.

Pour un système discret, les équations sont :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

F : vecteur sollicitation (forces appliquées et réaction)

U : vecteur déplacements nodaux inconnus.

K : matrice de rigidité.

Il s'agit donc de l'étude statique de notre structure.

Elle se fera par la méthode matricielle des déplacements.

Notre structure sera décomposée en noeuds et en barres. Un élément sera une barre comprise entre deux noeuds.

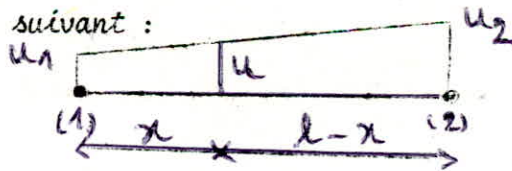
Les inconnus à approximer par des fonctions d'interpolation sont les déplacements dont on considérera une variation linéaire le long de l'élément. Un tel champ de déplacement reproduit exactement le champ R.D.M sans charge en travée (réparties).

Nota : L'hyperstaticité intérieure ou extérieure du système n'intervient à aucun moment dans notre étude.

Le champ de déplacement choisi est le suivant :

$$u = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2$$

- u_1 et u_2 : déplacements nodaux.



D'où la matrice de fonction d'interpolation :

$$[N] = \left[1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \right] ; u = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

et par suite, on obtient la matrice de rigidité élémentaire suivante :

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega$$

Les fonctions d'interpolation N peuvent être définies sur l'élément de référence, qui, dans ce cas est le suivant.



Cette fonction étant le "polynôme complet" du 1er degré peut être construite automatiquement par un programme par la méthode dite du P_n inverse (cas du programme M.E.F.).

La base polynomiale est

$$\{P\} = \{1 \quad \xi\}$$

$$\langle N \rangle = \langle P \rangle * [P_n]^{-1}$$

Dans ce cas les noeuds géométriques sont les noeuds d'interpolation.

- Noeud 1 : élément de $P_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ car $\xi = -1$
- Noeud 2 : élément de $P_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ car $\xi = 1$

$$\text{D'où } P_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [P_n]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle N \rangle = \{1\} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \left[\frac{1-\xi}{2} \quad \frac{1+\xi}{2} \right]$$

Cette méthode est valable pour tout élément de LAGRANGE.

L'élément ainsi défini présente plusieurs inconvénients.

1) Son erreur est importante : $E \sim \frac{h^2}{8} \text{Max} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|$

Pour des charges en travée même constantes (Problème des cheminées), les efforts axiaux ne seront bien représentés qu'avec des éléments assez petits.

2) Seule (u) est continu à la frontière de l'élément mais $\frac{\partial u}{\partial x}$ l'est à l'intérieur.

On pourra l'améliorer de 2 manières :

a - Augmenter le nombre de noeuds intérieurs en prenant un polynôme de LAGRANGE de degré plus élevé (on assure ainsi la continuité de $\frac{\partial u}{\partial x}$).

b - Rajouter un degré de liberté aux noeuds, polynôme d'HERMITE du 3ème degré (cela assure la continuité).

Calculons à présent, la matrice de rigidité pour l'élément formulé isoparamétriquement :

$$K = \int B^T D B \det J d\xi dS, \text{ avec } \det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{l}{2}$$

$$B = [B_1 \ B_2] \text{ avec } B_1 = \frac{\partial N_1}{\partial x} \text{ et } B_2 = \frac{\partial N_2}{\partial x}$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \Rightarrow B_1 = \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{l} = -\frac{1}{l}$$

(1/det J)

$$N_2 = \frac{1+\xi}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{l} = \frac{1}{l}$$

$$\delta'_{ox} \quad K = EA \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} \frac{l}{2} d\xi$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ceci est le résultat obtenu par intégration exacte.

En général, il sera plus simple et plus intéressant d'intégrer numériquement; à 1 point on aurait :

- coordonnée du point d'intégration (dans le repère de référence) = 0
- poids du point d'intégration = 2

Un point de GAUSS intègre exactement le polynôme de degré $2*n-1=2*1-1=1$

En application pour notre cas, on obtient

$$K = EA \sum_1 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{2}{l} \cdot 2 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

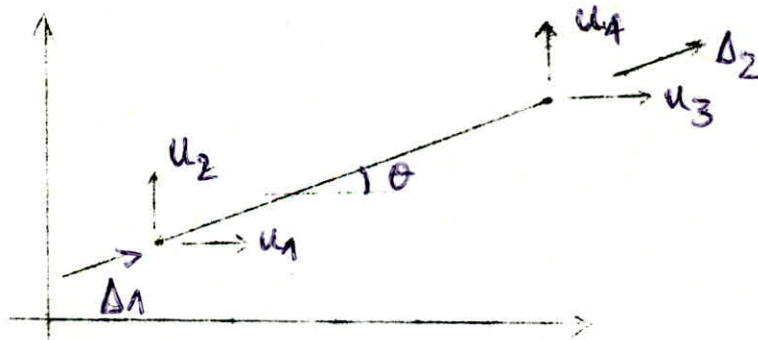
Notons que cette matrice a été obtenue dans le repère local de l'élément qui est porté par sa longueur.

Les différents éléments d'une même structure n'auront pas nécessairement les mêmes repères locaux. Ce qui nous amène à définir pour une structure donnée un repère global par rapport auquel nous définirons toutes les matrices de rigidité élémentaires.

La matrice de rigidité élémentaire dans le repère global s'obtient à partir de la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local d'après la relation suivante :

$$[K]_{\text{Global}} = [T]^T \times [K]_{\text{local}} \times [T]$$

Où $[T]$ est une matrice de passage, liant les deux repères



$$\begin{cases} \Delta_1 = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta \\ \Delta_2 = u_3 \cos \theta + u_4 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \{u\}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Notons que la matrice T n'est pas la seule relation mathématique possible entre L et u .

C'est cependant la seule énergétiquement correcte car on a alors la relation duale entre forces pour avoir les mêmes travaux virtuels dans les deux systèmes d'axes.

$$F = T^T \underset{\text{(locaux)}}{F}$$
$$\begin{bmatrix} F_{x^1} \\ F_{y^1} \\ F_{x^2} \\ F_{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

L'énergie de déformation d'un système s'écrit de la manière suivante :

$$U_m = \frac{1}{2} \{\delta f\}^T [K] \{\delta f\}$$

dans le repère local, on aura :

$$U_m = \frac{1}{2} \{\delta f\}^T [K] \{\delta f\} = \frac{1}{2} \{u\}^T \underbrace{[T]^T [K] [T]}_{K \text{ global}} \{u\}$$

ayant déterminé toutes les matrices de rigidité élémentaires dans le repère global, il s'agit de les assembler au moyen des conditions d'équilibre en chaque noeud. Nous obtiendrons ainsi la matrice de rigidité globale de la structure à " l'état libre ".

Pour une structure à n noeuds et à raison de 2 degrés de liberté par noeud, on obtiendra à ce stade un système de $2*n$ équations; dont le nombre d'inconnues est certainement inférieur à $2*n$ en raison des conditions aux limites (conditions d'appuis) qui doivent être au moins au nombre de 3 indépendantes dans le plan (6 dans l'espace) pour éviter les déplacements d'ensemble analogues à ceux d'un corps rigide.

Ceci nous amène donc à déterminer une matrice de rigidité de la structure liée, qui elle, tient compte des conditions limites et qui est d'ordre inférieur.

Structure liée = Structure libre + conditions d'appuis.

Cette matrice liée est obtenue à partir de la matrice à l'état libre par un réarrangement et une décomposition en sous-matrices

Nota : La matrice liée est une sous-matrice de la matrice libre.

Partant de K à l'état libre et en isolant les lignes et les colonnes correspondant aux déplacements imposés, on aboutira à la décomposition suivante :

$$\begin{bmatrix} P \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Où Δ : matrice de déplacements inconnus de la structure liée.

P : matrice (ou vecteur) des forces appliquées connues correspondant aux déplacements inconnus.

R_0 : matrice (ou vecteur) réactions inconnues.

0 : matrice des déplacements imposés (nuls) correspondant à la matrice

K_{11} : matrice de rigidité de la structure liée.

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} P = [K_{11}] \times \Delta = 0 & \Delta = [K_{11}]^{-1} P \\ R_0 = [K_{21}] \times \Delta \end{cases}$$

Remarque : K singulière, K_{11} inversible.

La résolution du système $[K] * U = F$ (avec K matrice de rigidité de la structure à l'état libre) nécessiterait donc un réarrangement de K comme pré-cité, ce qui est fastidieux du point de vue calcul automatique.

Pour remédier à ce problème, nous avons préféré introduire les conditions aux limites par l'intermédiaire de la méthode du terme diagonal dominant dont le principe est le suivant :

Les conditions aux limites $U_i = \bar{U}_i$ seront introduites en remplaçant :

$-K_{ii}$ par $K_{ii} + \alpha$: α étant un nombre très grand par rapport à tous les K_{ij} .

$-F_i$ par $\alpha \bar{U}_i$

On obtiendra donc :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{ni} & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \alpha \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

L'équation (i) devient alors : $\alpha U_i + \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j = \alpha \bar{U}_i$
 pour α suffisamment grand on obtient : $U_i + \left(\sum_{j=1}^n K_{ij} U_j \right) \frac{1}{\alpha} = \bar{U}_i$

D'où $U_i \approx \bar{U}_i$

Il existe d'autres méthodes (terme diagonal unitaire) plus difficile à programmer.

Après résolution du système par la méthode de GAUSS qui est une méthode directe et compétitive en raison du petit nombre d'opérations qu'elle nécessite $N^3/3$ addition, $N^3/3$ multiplication pour un système de $N \times N$, et obtention du vecteur déplacement. Nous pourrions déterminer les valeurs des réactions d'appuis et des efforts internes dans chaque barre.

CONCLUSION : La résolution de notre problème se fait en passant par les étapes suivantes :

- Construction des matrices de rigidité élémentaires.
- Assemblage au moyen des conditions d'équilibre.
- Introduction des conditions aux limites.
- Résolution du système linéaire (obtention de U)
- Détermination des réactions et des efforts internes, des contraintes et des déformations.

Remarque

Pour des programmes d'éléments finis importants certaines propriétés de la matrice de rigidité peuvent faciliter dans une très large mesure les problèmes de stockage et d'espace mémoire sur machine. Elles sont essentiellement :

- Matrice bande (conditionnée par la numérotation) et creuse.
- Symétrie.

- DEFORMATIONS ET CONTRAINTES DANS LES BARRES :

Dans le cas particulier étudié, on pourra déduire les contraintes facilement à partir des forces aux nœuds.

Dans le cas général : $\sigma = D \varepsilon = DB u$
 en axes locaux : $\sigma = E \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$

en axes globaux : $\sigma = E \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$

avec $\cos \theta$ et $\sin \theta$ défini explicitement.

Remarque : Dans le cas général, σ ne sera pas continu à la frontière si $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ ne l'est pas.

- MODES DE L'ELEMENT

Cherchons les valeurs propres de K :

$K * X = \lambda * X$
 avec $K = E A/L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

On trouve immédiatement par la méthode du déterminant (ou de l'équation caractéristique) par exemple :

$\lambda_1 = 0$ et $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ d'où mode rigide

$\lambda_2 = 2 E A/L$ et $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ d'où mode élastique

Ce dernier mode est soit de traction soit de compression (suivant normalisation).

L'énergie du premier mode est nulle puisque celui-ci n'affecte pas la déformation de l'élément, en effet

Energie = $1/2 X^t K X$

comme $K X = \lambda X$ d'où énergie = $1/2 X^t \lambda X$

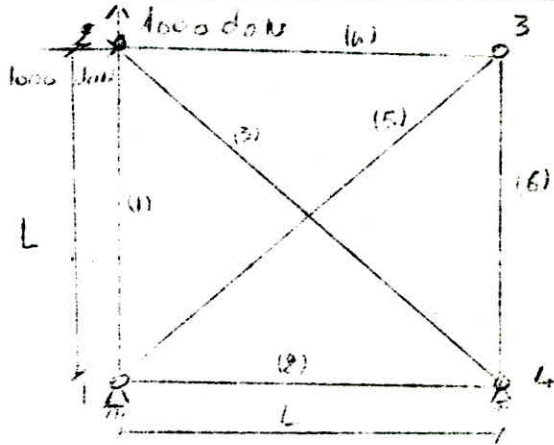
ayant affaire à un mode rigide $\lambda = 0$ d'où énergie = 0

La matrice de rigidité globale aura des modes rigides si les conditions minimales d'appui ne sont pas imposées.

Exemple :

Élément	Nœuds de l'élément		Area des Sections (cm ²)	longueur (cm)	Module d'élasticité E (dyn/cm ²)
1	1	2	10	100	$E = 2,1 \cdot 10^6$
2	1	4	10	100	$E = 2,1 \cdot 10^6$
3	1	3	10	$100\sqrt{2}$	$E = 2,1 \cdot 10^6$
4	2	3	10	100	$E = 2,1 \cdot 10^6$
5	2	4	10	$100\sqrt{2}$	$E = 2,1 \cdot 10^6$
6	3	4	10	100	$E = 2,1 \cdot 10^6$

Nœuds	Déplacements	
	H (cm)	V (cm)
1	0,001	0,00
2	$0,128 \cdot 10^{-1}$	$0,686 \cdot 10^{-2}$
3	$0,101 \cdot 10^{-1}$	$-0,265 \cdot 10^{-2}$
4	0,00	0,00



Élément	Q_1 (dyn)	Q_2 (dyn)	Q_3 (dyn)	Q_4 (dyn)	ϵ (dilat./m)	E
1	0	$-0,44 \cdot 10^4$	0	$0,44 \cdot 10^4$	164,22	$6,8676 \cdot 10^5$
2	0	0	0	0	0	0
3	$-0,558 \cdot 10^3$	$-0,558 \cdot 10^3$	$0,558 \cdot 10^3$	$0,558 \cdot 10^3$	78,8792	$3,7562 \cdot 10^5$
4	$0,558 \cdot 10^3$	0	$-0,558 \cdot 10^3$	0	55,776	$2,656 \cdot 10^5$
5	$0,442 \cdot 10^3$	$-0,442 \cdot 10^3$	$-0,442 \cdot 10^3$	$0,442 \cdot 10^3$	62,542	$2,9782 \cdot 10^5$
6	0	$-0,558 \cdot 10^3$	0	$0,558 \cdot 10^3$	55,776	$2,656 \cdot 10^5$



PROBLEMES DE VALEURS CRITIQUES
OU DE VALEURS PROPRES.

THEORIE DU PROBLEME

Ce problème est d'ordre dynamique par opposition au précédent (problème d'équilibre) qui lui est d'ordre statique. Il est régi par l'équation suivante :

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (1) \text{ qui traite des mouvements libres non amortis}$$

d'une structure.

Où :

\ddot{U} : vecteur accélération

U : vecteur déplacement

M : matrice de masse globale

K : matrice de rigidité globale (à l'état libre)

L'équation (1) s'écrit :

$$(K - \omega^2 M)U = 0$$

La recherche des solutions non banales de ce système nous amène à la recherche de valeurs propres et de vecteurs propres. Elles sont obtenues par :

$$\det (K - \omega^2 M) = 0$$

Il existe plusieurs méthodes numériques de recherches de valeurs propres.

En pratique

Pour le cas de notre projet nous nous sommes proposés deux méthodes de résolution :

- a) Méthode des puissances inverses .
- b) Méthode des puissances itérées.

Nous avons eu l'occasion de voir à travers notre travail que ce qui est vrai théoriquement ne l'est pas de manière évidente lorsque l'on passe à l'application.

Aussi, permettrons-nous de présenter nos constatations à ce sujet.

- a) En ce qui concerne la méthode des puissances inverses. $KX = \lambda MX$

Elle est basée sur un problème de recherche d'itérés successifs par résolution de systèmes linéaires.

Les étapes de cette méthode sont :

- (1) - Se donner un vecteur initial
- (2) - Le normaliser
- (3) - Déterminer le vecteur correspondant par résolution de systèmes linéaires (par GAUSS)

A la convergence la valeur propre tend vers $\frac{\lambda}{\|x\|}$

Cependant un shifting de K s'impose dès le départ car K est relative à la structure libre.

On se donne donc un paramètre de shifting a et l'on substitue $(K - aM)$ à K ainsi, on aura palier au problème de la singularité de K .

La valeur propre recherchée $(Kx = \lambda Mx)$ sera obtenue à partir de celle intermédiaire $((K - aM)x = \bar{\lambda} Mx)$ par translation

$$\bar{\lambda} = \lambda - a \implies \lambda \text{ recherché} = \bar{\lambda} + a$$

Le résultat à l'application est le suivant :

pour but a $\lambda = 2a$?

Donc il a fallu introduire les conditions aux limites sur K pour éviter à passer par l'étape de shifting.

Le réarrangement de la matrice K a donné des résultats concluants.

Bien entendu pour chacune des méthodes utilisées, on se contentera de la recherche de la plus petite valeur propre, car au - delà la précision des résultats se perd de plus λ petit $\implies T$ grand.

En ce qui concerne la méthode des puissances itérées.

Cette méthode a pour principal inconvénient, la recherche de matrice inverse. Car l'équation de départ de la méthode doit être

$$(A - \lambda I)U = 0$$

Pour notre cas A est un produit d'inverse de K par M .

De plus cette méthode donne la plus grande valeur propre donc la plus petite période ce qui ne nous intéresse pas. Donc pour avoir la plus grande période donc la plus petite période nous devons faire une recherche de λ par cette méthode et ce en composant la matrice dynamique de la structure $K^{-1}M$

$$KX = \lambda MX \Rightarrow (K^{-1}M - (\frac{\lambda}{a})I)X = 0$$

à ce stade l'étape de shifting s'impose également donc nous devons substituer $(K - aM)$ non singulière à K ce qui nous donne :

$$((K - aM)^{-1}M - \frac{\lambda}{a}I)X = 0$$

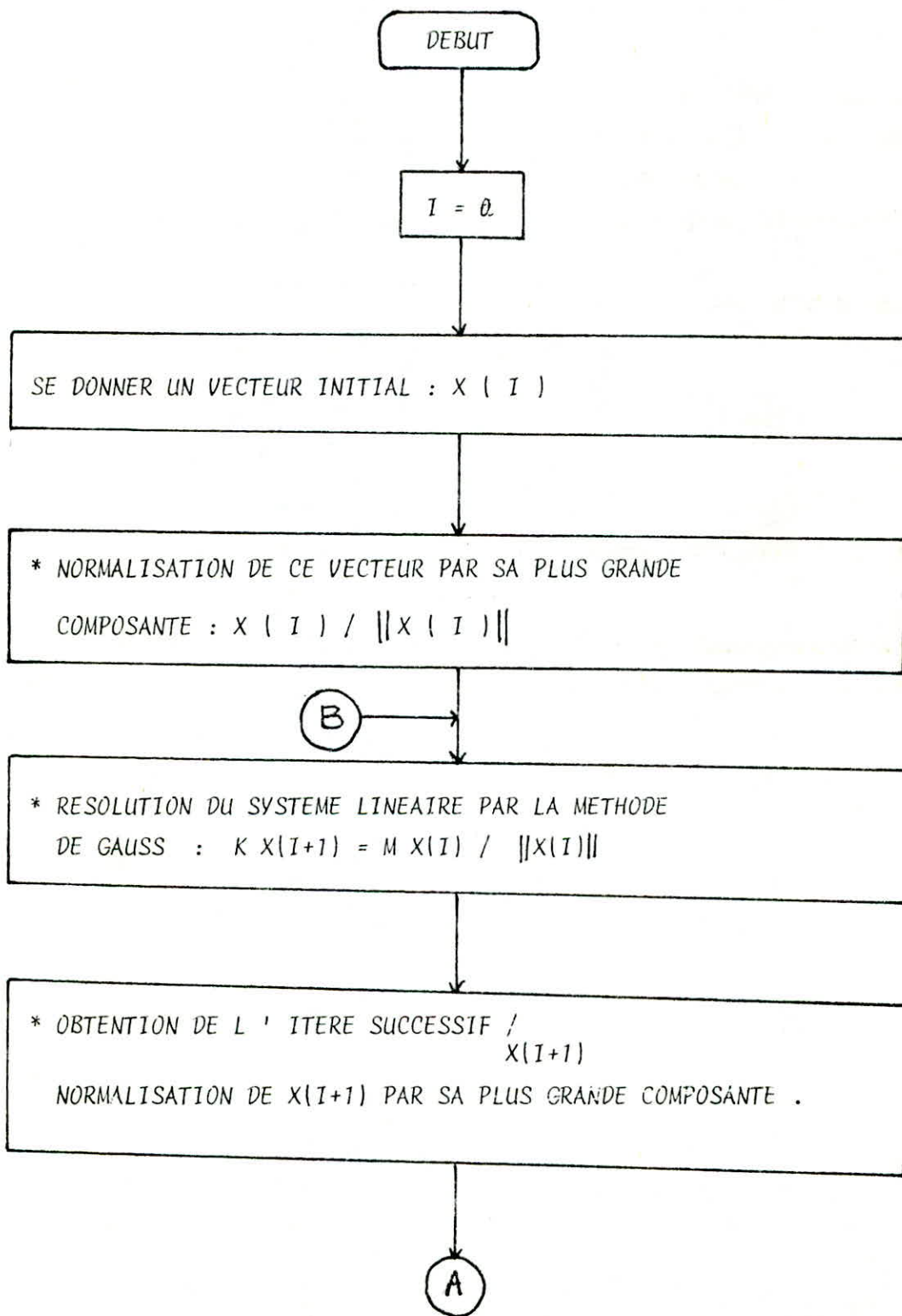
$$\lambda \text{ recherché} = \frac{1}{a} + a$$

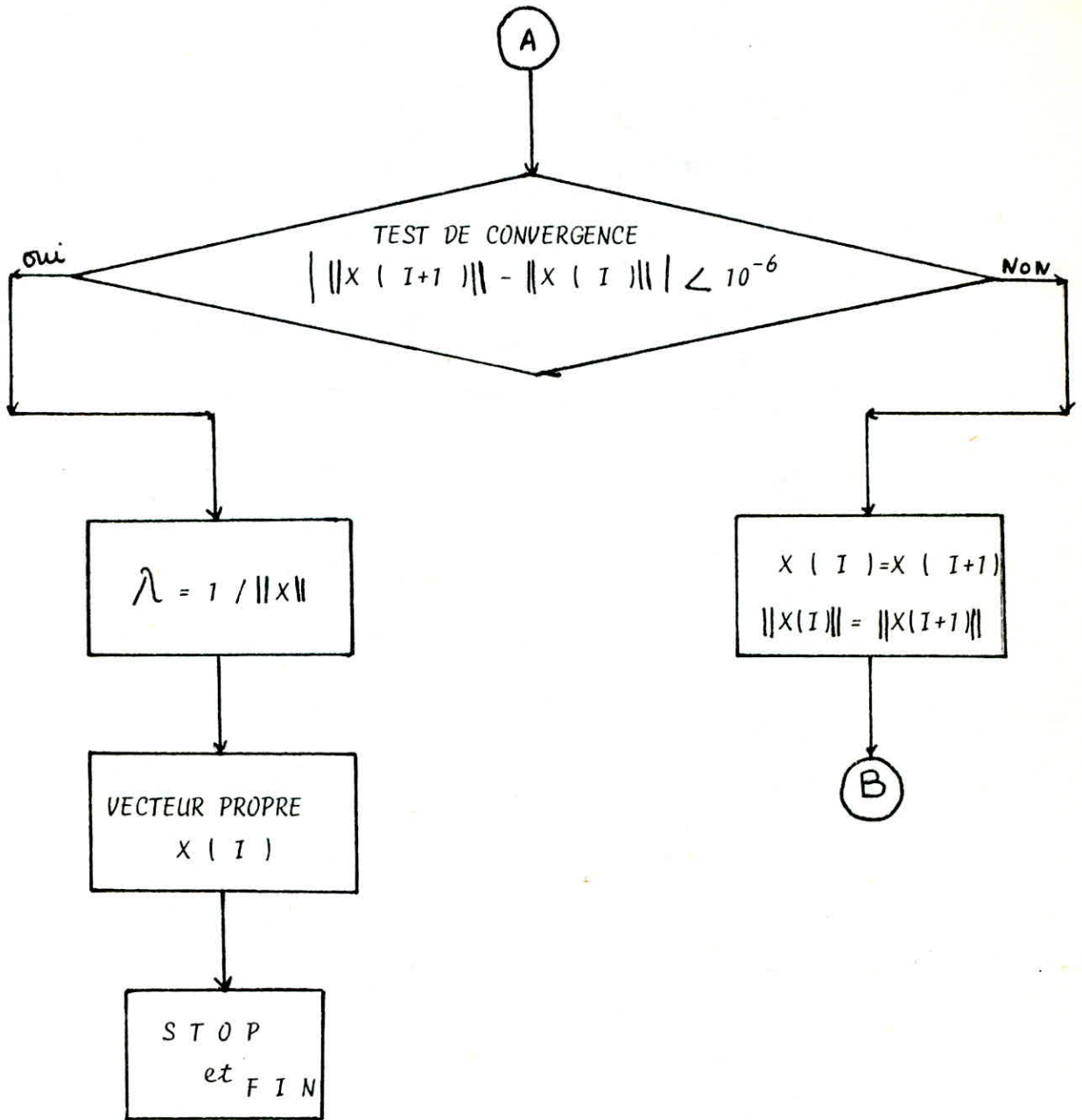
Les résultats n'ont pas été satisfaisants, nous avons obtenu pour tout paramètre de shifting a un λ recherché ≈ 0 .

À l'introduction des conditions aux limites sur K par réarrangement les résultats ont été concluants et concordent avec ceux donnés par la méthode de la puissance inverse.

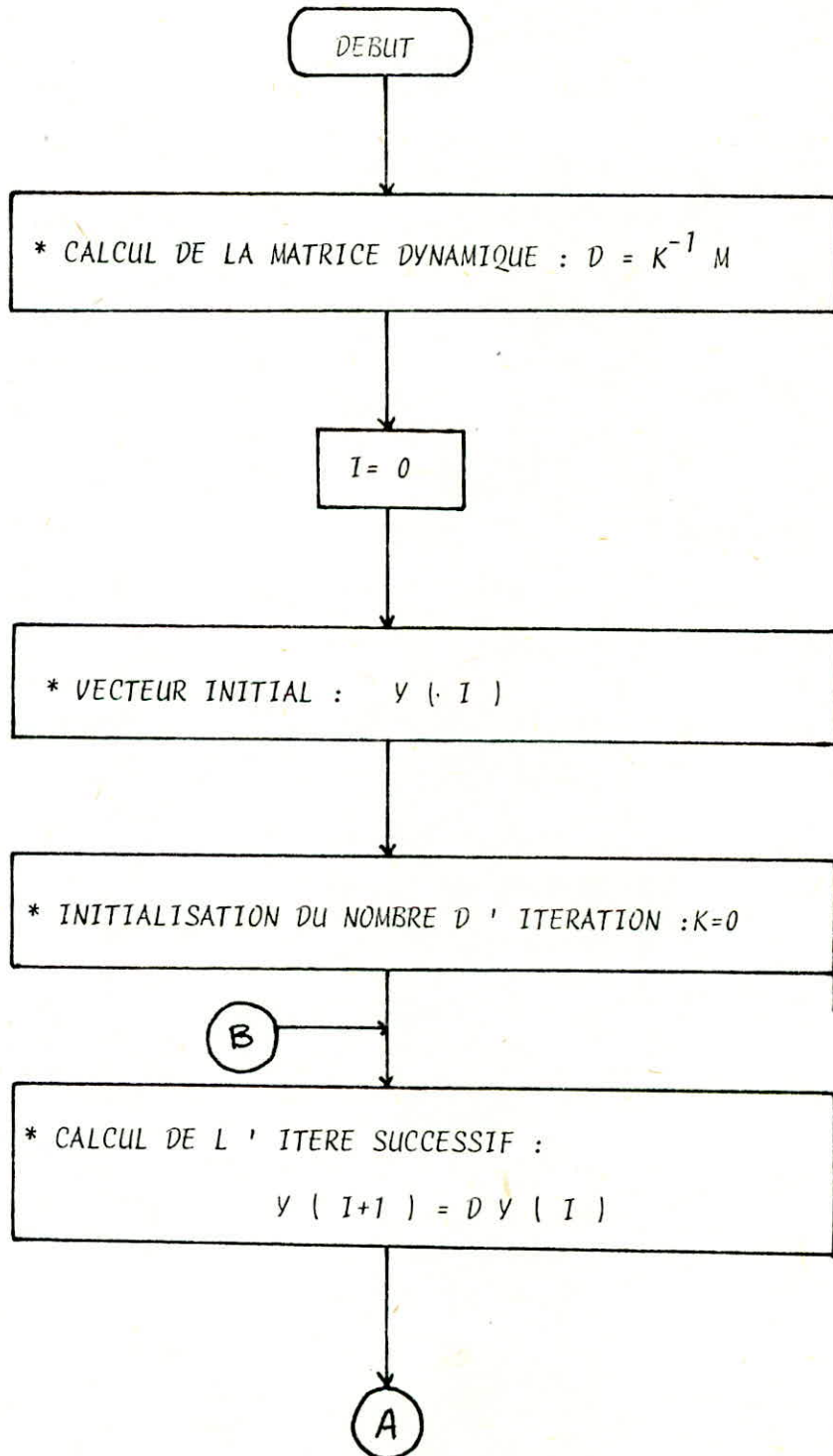
METHODE DES PUISSANCES INVERSEES

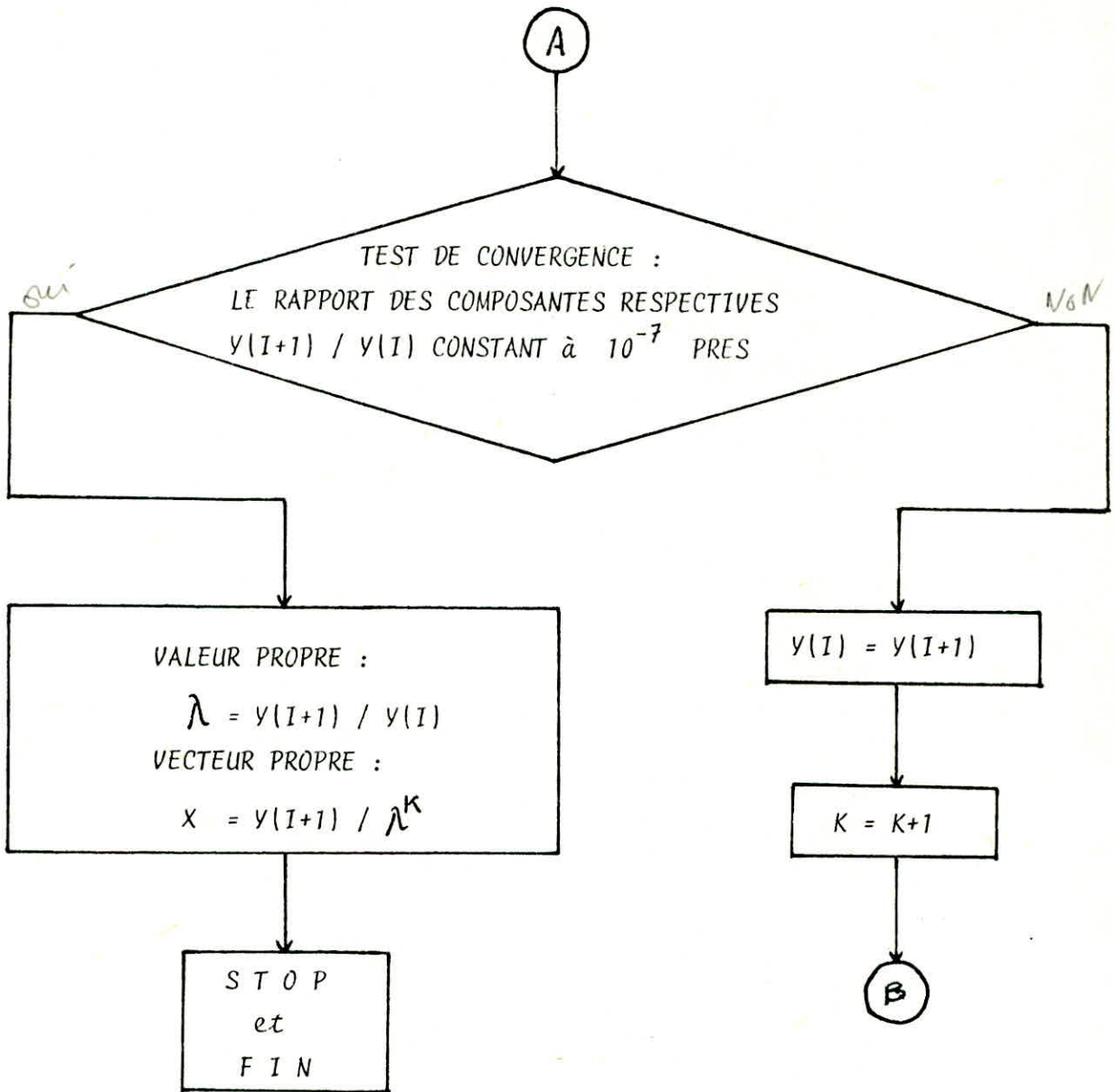
$$(K X = \lambda M X)$$



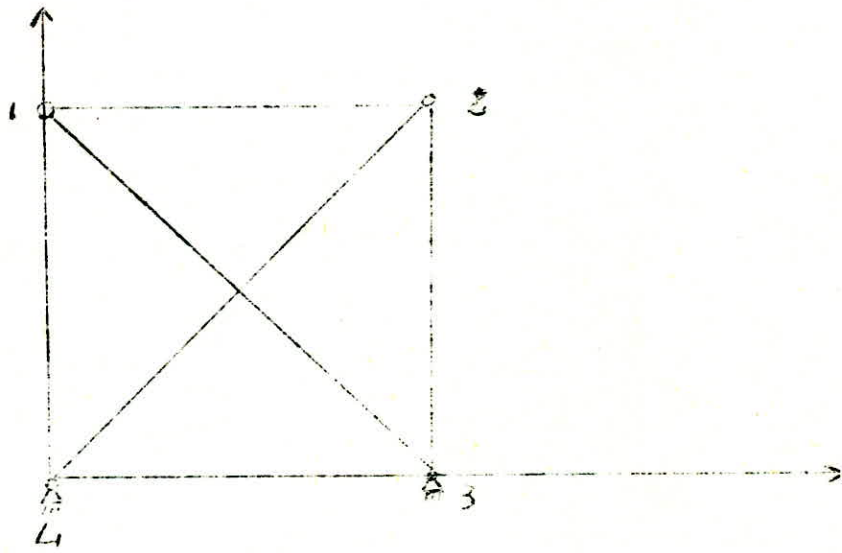


METHODE DES PUISSANCES ITEREES
(CALCUL DE LA PREMIERE VALEUR PROPRE)





Exemple :



- Calcul de λ_1 1^{er} valeur propre et du 1^{er} vecteur propre :

* Méthode des puissances itérées :

$\lambda_1 = 10673,9$; vecteur propre

- nombre d'itérations = 6

$$\begin{pmatrix} 1,07659 \\ 0,232771 \\ 1,07659 \\ -0,232771 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* Méthode des puissances inverses :

$\lambda_1 = 10673,2$; vecteur propre

$$\begin{pmatrix} 0,336054 \cdot 10^{-6} \\ 0,215607 \cdot 10^{-4} \\ 0,336054 \cdot 10^{-6} \\ -0,215607 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEME DE PROPAGATION OU DE VALEURS INITIALES
(Egalement appelé problème d'évolution)

I - Présentation générale du problème :

Il consiste à évaluer le déplacement en fonction de la position et du temps $u(x,t)$ pour $t > t_0$ dans un système non stationnaire pour lequel les déplacements initiaux sont connus ($u(x,t_0)$: connu, et éventuellement $\dot{u}(x,t_0)$).

Ce problème se pose aussi bien pour les systèmes discrets que continus.

Pour notre part, nous étudierons un cas discret linéaire pour lequel l'équation s'écrit : (système d'équations)

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F(t) \quad \text{pour } t > t_0$$

avec les conditions initiales suivantes:

$$t = t_0$$

$$\{u\} = \{u_0\} \quad \text{et} \quad \{\dot{u}\} = \{\dot{u}_0\}$$

Le système étudié étant linéaire, les termes $[K]$: matrice de rigidité,

$[M]$: matrice de masse, $[C]$: matrice d'amortissement, $\{F\}$: vecteur sollicitation sont indépendants de u .

Remarque:

Le problème d'évolution dépend des conditions aux limites et initiales.

II - Méthode de résolution :

Nous opterons pour une méthode d'intégration directe des systèmes de second ordre qui est celle des : DIFFERENCES FINIES CENTRALES.

Considérons les approximations suivantes (en D.F.C) :

$$\left\{ \begin{aligned} u_t &= \frac{u_{t+\Delta t} - 2u_t + u_{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} \\ \dot{u}_t &= \frac{u_{t+\Delta t} - u_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \end{aligned} \right.$$

De plus $U_{t-\Delta t}$ est évalué en éliminant $U_{t+\Delta t}$ des deux équations précédentes

$$U_{t-\Delta t} = U_t - \Delta t \ddot{U}_t \rightarrow \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_t$$

En remplaçant \ddot{u}_t et \ddot{u}_t par leurs expressions dans l'équation initiale, nous obtenons après arrangement :

$$\left[M + \frac{\Delta t^2 C}{2} \right] U_{t+\Delta t} = (\Delta t)^2 \left[-K U_t + F_t \right] + 2 M U_t - \left[M - \frac{\Delta t^2 C}{2} \right] U_{t-\Delta t}$$

Partant des conditions initiales nous pourrions avoir les valeurs $U_{t+\Delta t}$ (1) par résolution d'un système linéaire.

Nous voyons que la méthode des différences finies est EXPLICITE car $U_{t+\Delta t}$ (qui est recherché) ne figure pas dans le second membre de l'équation (1).

Remarques :

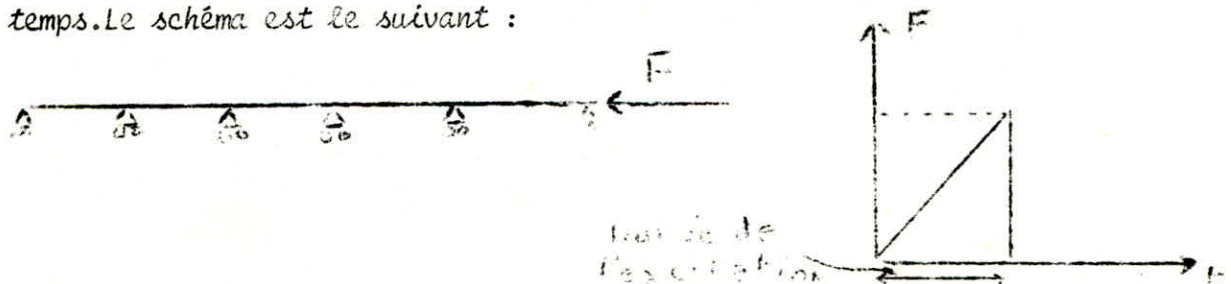
1) L'incrément de temps Δt doit être assez petit afin de réduire les erreurs d'approximation.

De plus la stabilité de la solution n'est assurée que pour Δt inférieur à une valeur Δt_c liée à la plus petite période caractéristique de résonance du système étudié.

2) L'amortissement proportionnel choisi $C = \alpha M$ n'est pas conforme à la réalité car α ne doit pas être le même pour tous les modes.

III - Exemples (Application)

Les exemples étudiés sont relatifs au cas d'une poutre continue soumise à une impulsion d'extrémité pour laquelle l'effort varie linéairement avec le temps. Le schéma est le suivant :



Ce qui correspond dans notre programme à l'étude de la partie FONCTION (non ACCELEROGRAMME).

Avant d'entamer le détail des exemples, présentons tout d'abord quelques difficultés rencontrées lors de l'exécution du programme :

1) La non inversibilité de la matrice de masse pour la structure

Ceci est dû au fait que pour une structure à n noeuds, la matrice de masse est d'ordre 2n car deux degrés de liberté par noeud et pour une poutre continue horizontale, il existe des zéros au niveau des lignes et des colonnes correspondant aux degrés de liberté verticaux, ce qui entraîne la singularité de M. Pour pallier à cet inconvénient, nous avons pensé placer 1.E-10 à la place des termes diagonaux nuls, ce qui lève le problème de la non inversibilité de M et qui rend le programme exécutable.

2) Introduction des conditions aux limites.

L'équation de départ est la suivante :

$$[M] \{U\} + [C] \{U\} + [K] \{U\} = \{F\}$$

L'introduction des conditions aux limites sur K et F par la méthode du terme diagonal dominant ne donne pas de résultats satisfaisants du fait que ces deux termes se retrouvent en second membre dans l'équation transformée (1) et par conséquent l'introduction de ALPHA = 1.E20 donne des résultats énormes là où ils devraient être nuls ce qui est aberrant.

Par contre l'introduction aux limites dans l'équation transformée (1) par la méthode du terme unité sur la diagonale donne des résultats satisfaisants. Cette méthode consiste à modifier pour chaque relation $u_i = \bar{u}_i$ (=0 dans notre cas) le vecteur second membre puis la matrice $[M + \Delta/2 C]$.

$$[A]U = \{B\} \quad B : \text{vecteur second membre.}$$

$$[A] = [M] + \Delta/2 [C]$$

$$B_j = D_j - A_{j0} \bar{u}_i \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, n \\ j \neq i \end{cases}$$

$$B_i = \bar{u}_i = 0$$

$$A_{ij} = A_{ji} = 0 \quad \begin{cases} j \neq i \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$A_{ii} = 1$$

Exemples traités

1) Poutre à dix travées d'un mètre chacune avec $E = 10000 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$
et $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$.

a) pour : Un incrément de temps de $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
Une durée d'excitation de $0,1 \text{ s}$
 $F = 10 \cdot 1000t$

Instabilité.

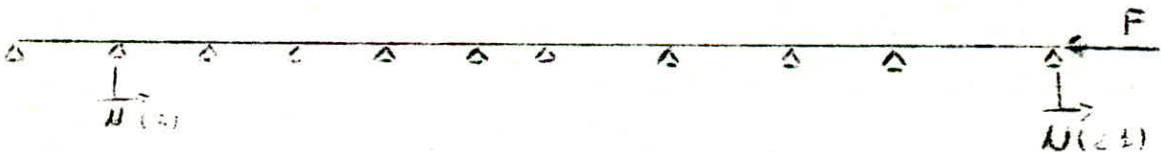
b) pour : Un incrément de temps de $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
Une durée d'excitation de $0,1 \text{ s}$
 $F = 100t$

Obtention de résultats moins énorme que pour le cas (a) mais prouvant néanmoins qu'ils sont non significatifs.

c) pour : Un incrément de temps de $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
Une durée d'excitation de $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$
 $F = 100t$

Obtention de résultats plausibles et exploitables.

Pour ce cas nous avons fait une représentation graphique des déplacements de deux noeuds extrêmes $u(3)$ et $u(21)$.



2) Poutre à dix travées de 10 mètres chacune.

Nous avons préféré éviter de considérer pour les exemples traités

E (métal : acier) et ρ (acier) car les résultats obtenus sont trop petits et de là inexploitable.

Pour $E = 1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ et $\rho = 2 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$.

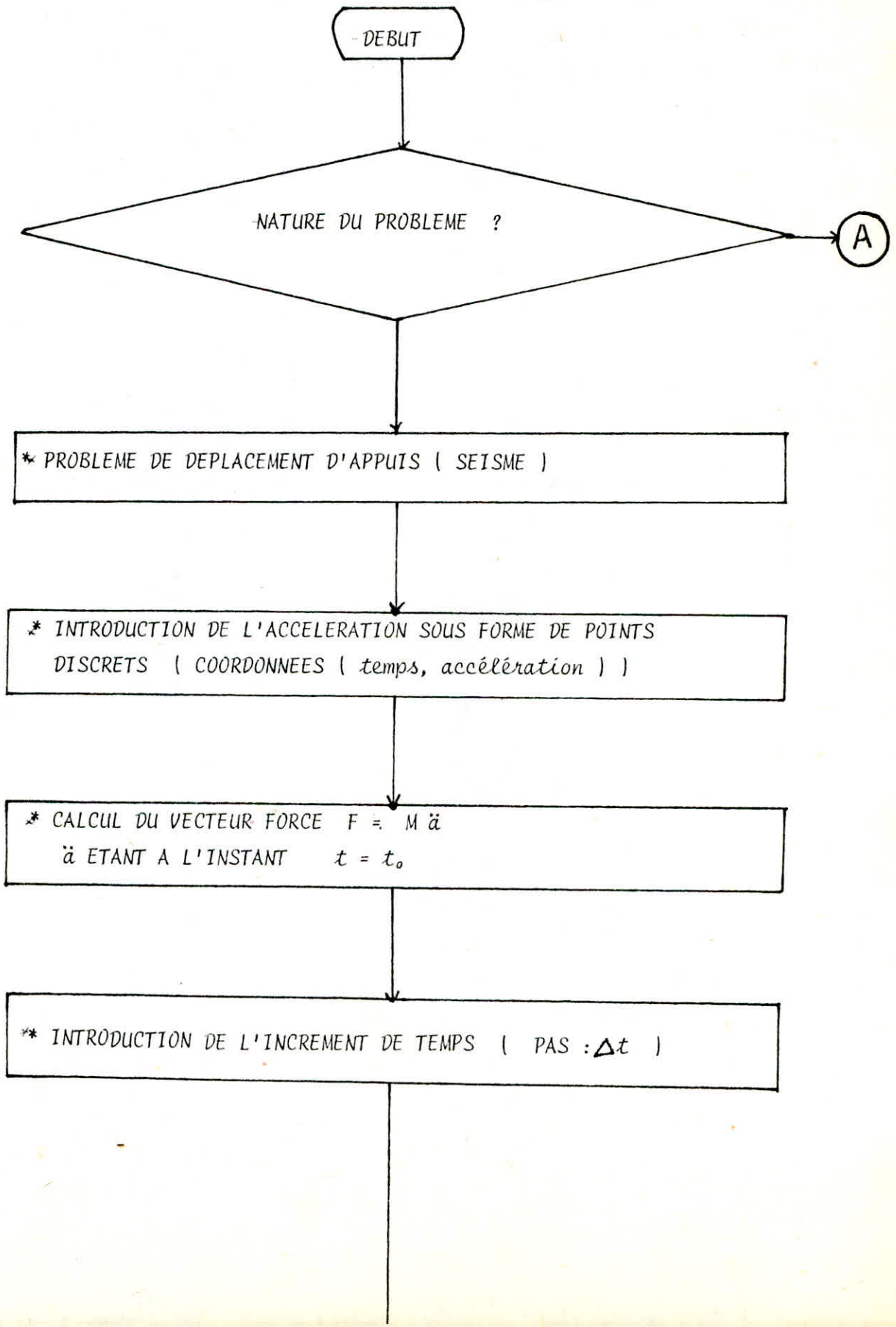
Nous avons observé des résultats analogues pour (a) et (b) pour le cas (c), les résultats étaient acceptables et analogues à ceux de l'exemple 1 sauf que la durée de travail est plus longue en raison de la longueur de la poutre.

Ce que l'on entend par résultats analogues c'est que les allures de $u(3)$ et $u(21)$ se retrouvent dans les deux exemples (mais à des temps différents bien entendu).

Nous avons prévu deux versions l'une traitant de problèmes particuliers (FONCTION ou ACCELEROGRAMME) l'autre à caractère plus générale consistant en l'introduction d'un vecteur sollicitations qu'il s'agira de multiplier à chaque incrément de temps par un coefficient ayant une variation linéaire par tronçon (dents de scie) dans le temps .

ORGANIGRAMME DU PROBLEME D'EVOLUTION :

$$M \ddot{u} + c \dot{u} + K u = F_t$$



* CONSTRUCTION DE LA MATRICE D' AMORTISSEMENT
 (AMORTISSEMENT PROPORTIONNEL $C = \alpha M$)

* INTRODUCTION DES CONDITIONS INITIALES :
 VECTEURS u_0 ET \dot{u}_0 (AU TEMPS $t = t_0$)

* DETERMINATION DU VECTEUR \ddot{u}_0 PAR DU SYSTEME LINEAIRE :
 $M \ddot{u}_0 = F_0 - C \dot{u}_0 - K u_0$

* CALCUL DU VECTEUR $u(t_0 - \Delta t)$:
 $u(t_0 - \Delta t) = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \Delta t^2 / 2 \ddot{u}_0$

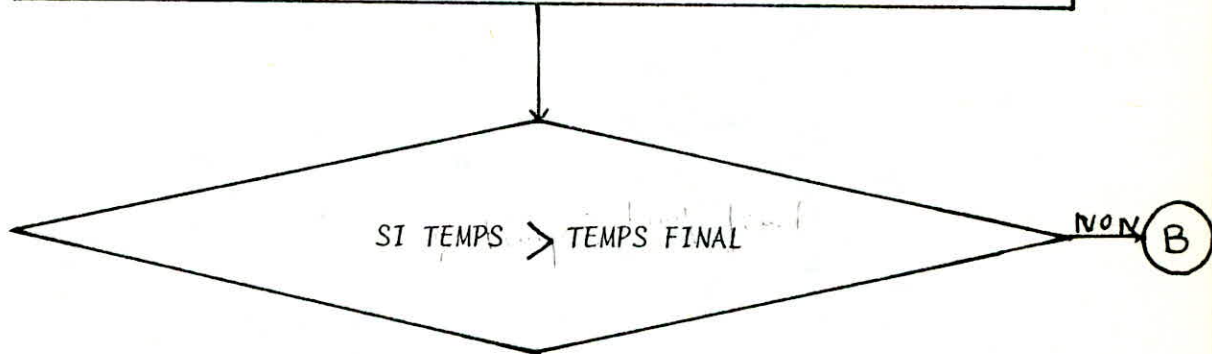
Ⓢ →

* CALCUL DU SECOND MEMBRE :
 $(\Delta t)^2 (-K u(t) + F(t)) + 2 M u(t) - (M - \Delta t / 2 C) u(t - \Delta t)$

* RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE : (après introduction des CAL)
 $(M + \Delta t / 2 C) u(t + \Delta t) = \text{SECOND MEMBRE}$

* IMPRESSION DES RESULTATS :
TEMPS = TEMPS + Δt
VECTEUR DEPLACEMENT $u(t_0 + \Delta t)$

* PERMUTATION (pour l'itération suivante) :
 $u(t)$ DEVIENT $u(t - \Delta t)$
 $u(t + \Delta t)$ DEVIENT $u(t)$



oui
STOP
et
FIN

(B)

* FAIRE UNE INTERPOLATION LINEAIRE A PARTIR DES DONNEES DE L'ACCELEROGRAMME ET CALCULER LA NOUVELLE ACCELERATION , ET NOUVEAU VECTEUR FORCE (avec conditions aux limites)

forces horizontales : voir le programme

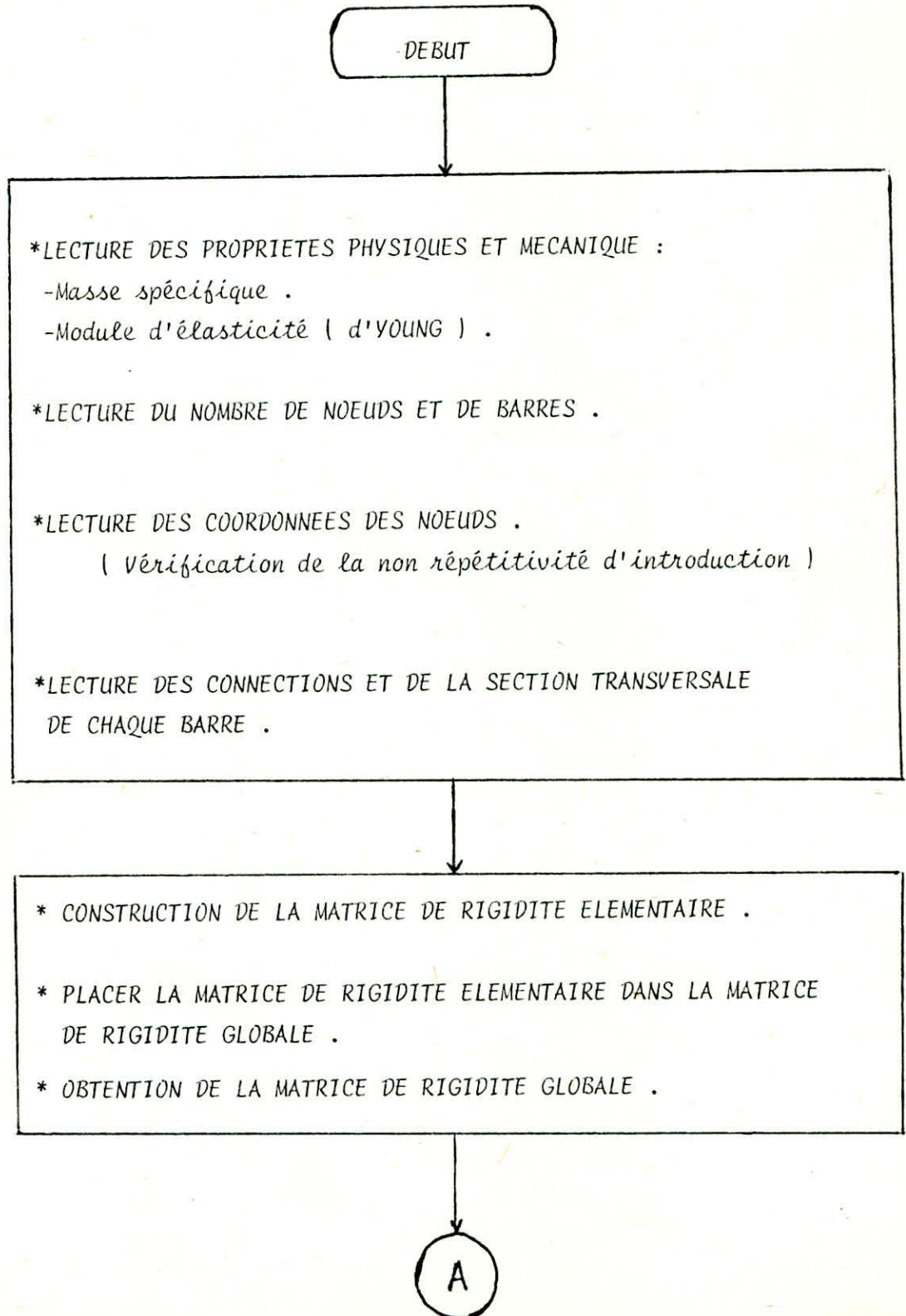
(C)

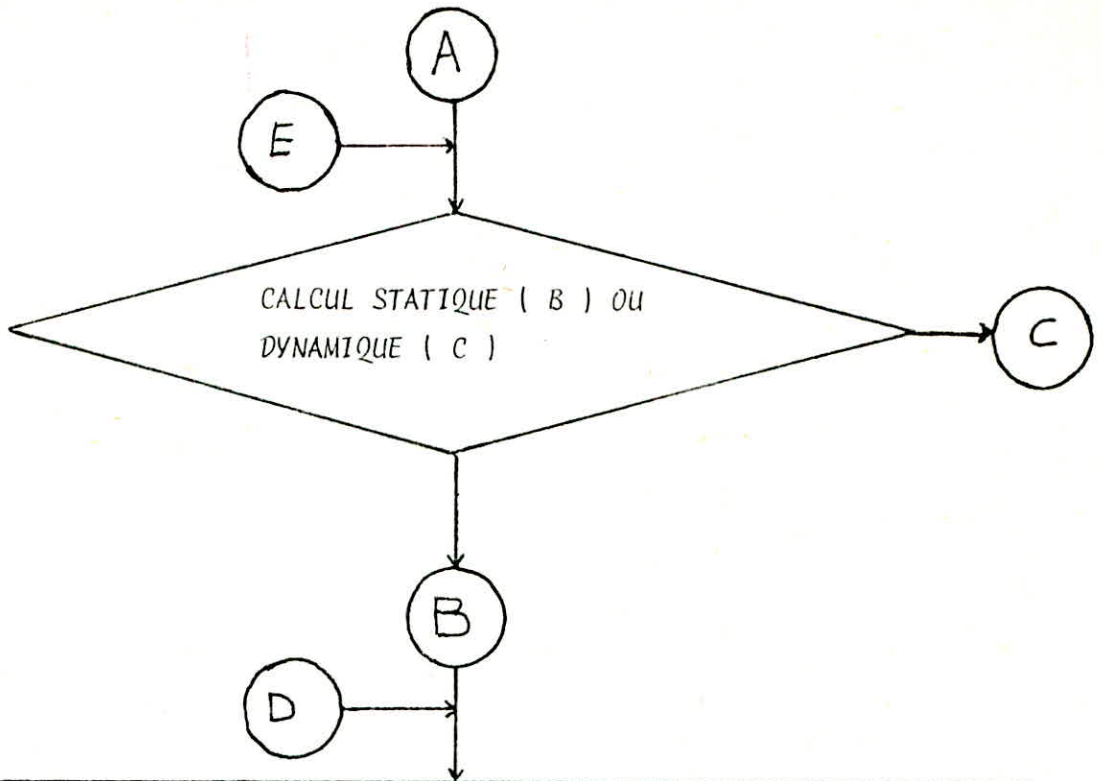
(A)

* CAS DE FONCTION

*LE PROBLEME EST ANALOGUE AU PRECEDENT SAUF QUE LE CALCUL DU VECTEUR FORCE SE FAIT PAR L'INTERMEDIAIRE D'UNE " FUNCTION "

ORGANIGRAMME GENERAL DU PROGRAMME TREILLIS





INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

- Lecture du nombre de conditions aux limites .
- Lecture de l'indice du déplacement imposé (nul) .
- Introduction du terme diagonal dominant ($ALPHA = + 10^{20}$) .

INTRODUCTION DES CONDITIONS D'APPUI ELASTIQUES
(EVENTUELS)

- Lecture du nombre d'appuis élastiques .
- Lecture de l'indice J et de la rigidité R de chaque appui .
- Ajouter R à l'élément d'indice (J , J) de la matrice de rigidité globale .

* INTRODUCTION DU VECTEUR SOLLICITATIONS CONCENTREES :
(F)

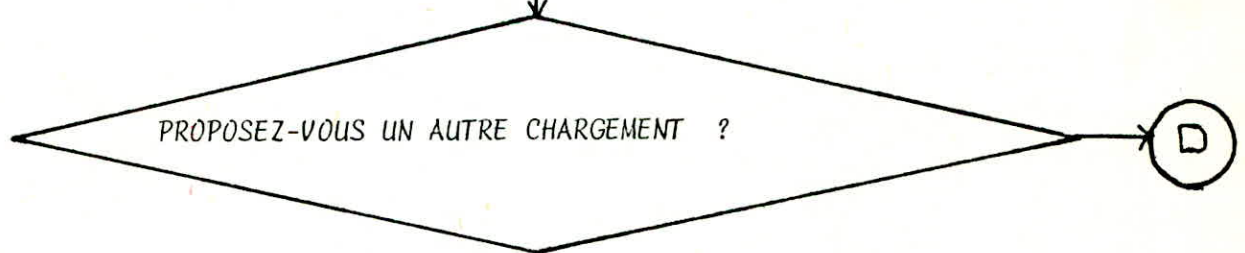
* RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE :
 $K * U = F$
* IMPRESSION DE U

CALCUL DES REACTIONS (RESIDUS)
-Rappel de la matrice de rigidite globale
-Produit $K * U$
-Réactions (résidus) : $K * U - F$

CALCUL DES FORCES D'EXTREMITES DANS CHAQUE BARRE
-Construction de la matrice de rigidité élémentaire .
-Produit : Matrice de rigidité élémentaire * Vecteur déplacements élémentaire
 (K_e) * (u_e)

CALCUL DE L'INTENSITE DE L'EFFORT NORMAL DANS CHAQUE BARRE .

CALCUL DES CONTRAINTES ET DEFORMATIONS
IMPRESSION DE : σ, ϵ



H



STOP
et
FIN

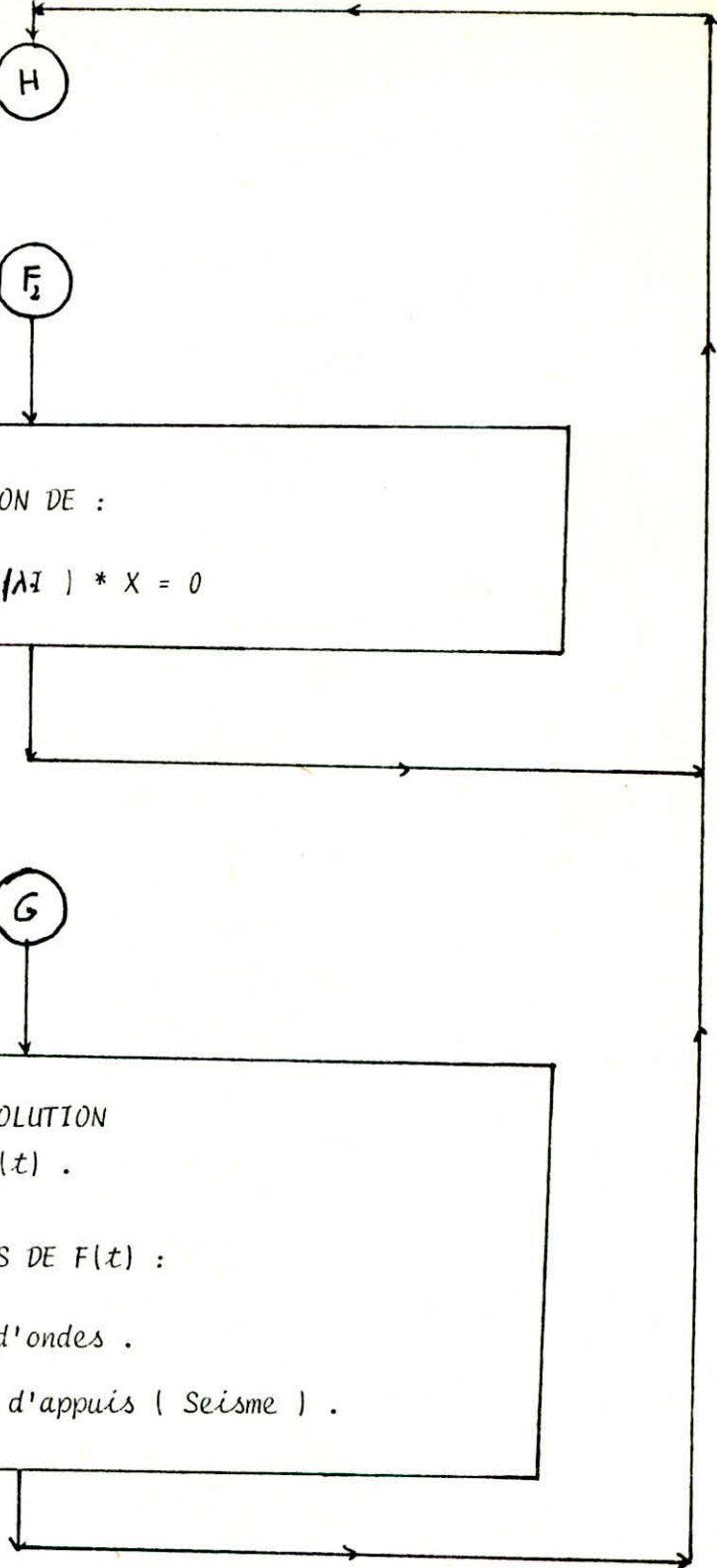
H

F₂

RESOLUTION DE :
 $(\bar{K}^{-1} * M - 1/\lambda I) * X = 0$

G

PROBLEME D'EVOLUTION
* VERSION GENERALE DE $F(t)$.
* VERSIONS PARTICULIERES DE $F(t)$:
- Propagation d'ondes .
- Déplacements d'appuis (Seisme) .



PRESENTATION DU PROGRAMME M.E.F

Le programme M.E.F dans lequel nous allons développer certains éléments est un programme Franco-Canadien établi par GOURI DHATT et GILBERT TOUZOT, écrit en langage FORTRAN.

Il traite des problèmes variés concernant des domaines différents : élasticité linéaire ou non, fluide, problèmes harmoniques etc....

En outre, il inclue les possibilités suivantes :

- Problèmes à une, deux ou trois dimensions.
- Nombre de degré de liberté différent en chaque noeud.
- Matrices élémentaires et globales symétriques ou non symétriques.
- Problèmes linéaires ou non linéaires.
- Problèmes stationnaires ou non stationnaires.
- Problèmes des valeurs critiques (propres).

En ce qui concerne les problèmes de taille importante, le programme crée des tables dans une mémoire secondaire (fichier sur disque) et n'amène en mémoire centrale qu'une partie de chaque table à un instant donné.

Le programme est structuré de la manière modulaire suivante :

1) ORGANISATION DES DONNEES

-Création des tables de coordonnées et connectivités.

Création de tables contenant des paramètres connus liés à des éléments ou noeuds (propriétés élémentaires et propriétés nodales).

2) OPERATIONS CORRESPONDANT A CHAQUE ELEMENT

-Détermination des coordonnées et poids des points d'intégration.

-Calcul des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées.

-Calcul de la matrice jacobienne, de son inverse et de son déterminant.

-Construction des matrices et vecteurs élémentaires.

3) OPERATIONS D'ASSEMBLAGE

4) RESOLUTION

Décomposition et résolution d'un système d'équations linéaires.

5) IMPRESSION DES RESULTATS

1) Le bloc " COOR " lit les coordonnées des noeuds et le nombre de degré de liberté de chaque noeud . Après vérifications , il crée les tables " VCORG " (coordonnées des noeuds) , et " KDLNC " (nombre de degré de liberté de chaque noeud) .

2) Le bloc " COND " lit les conditions aux limites et crée les tables " KNEQ " (numéro d'équation de chaque degré de liberté) et " VDIMP " (la valeur des degrés de liberté imposés) .

3) Le bloc " ELEM " lit les connectivités puis il crée la table " KLD " .

Il existe d'autres blocs fonctionnels de M.E.F qui sont des blocs d'exécution des opérations d'éléments finis .

Ils utilisent les tables construites par les blocs de lecture des données :

- Bloc " LIAM " assemble puis résout le système correspondant .
- Bloc " NLIN " assemble puis résout le système correspondant à un problème non linéaire .
- Etc.....

BLOCS FONCTIONNELS DESTINES A LA LECTURE ET L'ORGANISATION DES DONNEES

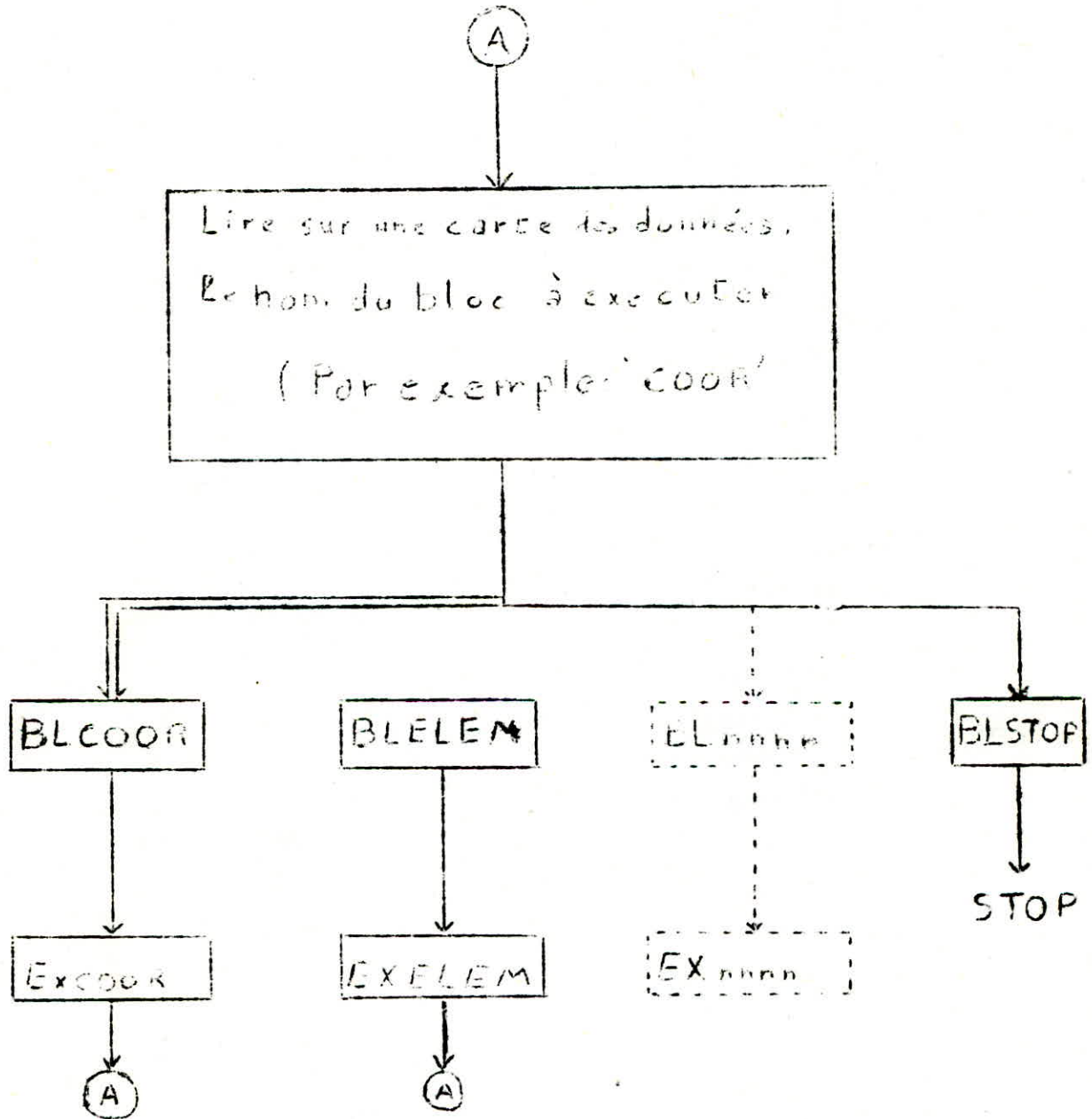
NOM	FONCTION
IMAG	Impression de toutes les données
COMT	Lecture et impression des commentaires
COOR	Lecture des coordonnées des noeuds
DLPN	Lecture du nombre de degré de liberté par noeuds
COND	Lecture des conditions aux limites
PRND	Lecture des propriétés nodales
PREL	Lecture des propriétés élémentaires
ELEM	Lecture des connectivités
SOLC	Lecture des sollicitations concentrées

BLOCS FONCTIONNELS D'EXECUTION

NOM	FONCTION
S O L R	Assemblage de sollicitations réparties
L I N M	Résolution d'un problème avec stockage en mémoire centrale
L I N D	Résolution d'un problème avec stockage sur disque
N L I M	Résolution d'un problème non linéaire
E V O L	Résolution d'un problème non stationnaire x
V A L P	Calcul des valeurs propres et vecteurs propres

ENCHAINEMENT DES DIFFERENTS BLOCS

Le programme principal enchaîne l'exécution des blocs fonctionnels sous le contrôle de l'utilisateur, en appelant les sous-programmes correspondant à chaque bloc :



Le sous-programme BLnnnn exécute les opérations préliminaires suivantes du bloc "nnnn" :

- Définition des numéros logiques des fichiers sur disque utilisés par le bloc, en prenant éventuellement des valeurs par défaut.
- Lecture des paramètres de contrôle nécessaires en particulier pour déterminer la taille des tables du bloc, en utilisant éventuellement des valeurs par défaut.
- Création de nouvelles tables nécessaires en utilisant la technique d'allocation pseudo-dynamique.
- Appellation du sous-programme EXnnnn qui exécute toutes les opérations que doit effectuer le bloc fonctionnel "nnnn".

METHODE DE CONSTRUCTION DES FONCTIONS D'INTERPOLATION (Méthode du P N I N V)

Le programme N.E.F utilise pour la construction des fonctions d'interpolation la méthode dite du P N inverse.

Avant de détailler cette méthode passons en revue une notion essentielle.

ELEMENT DE REFERENCE

Dans le but de simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe et dans le but de formuler un élément fini réel de manière intrinsèque (indépendant de l'orientation des axes), on introduit la notion d'élément de référence qui est un élément très simple réperé dans un espace de référence qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique bijective.

repere de reference: repere reel

$$\xi = (\xi, \eta) \quad \tau: \xi \longrightarrow \begin{matrix} x = x(\xi) \\ x = x(\xi, \eta, \eta_j, \dots) \end{matrix} \quad x = (x, y)$$

x_i, x_j , coordonnées des noeuds géométriques appartenant à l'élément.

doit être choisie de manière à présenter les propriétés suivantes:

- Bijective
- Les noeuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux noeuds géométriques de l'élément réel.
- Chaque portion de frontière de l'élément de référence correspond à une portion de frontière de l'élément réel.

$$\tau = \xi \longrightarrow x(\xi) = [N(\xi)] \{x_n\}$$

$\{x_n\}$: coordonnées des noeuds géométriques de l'élément réel

$$\begin{cases} x(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{x_n\} \\ y(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{y_n\} \end{cases}$$

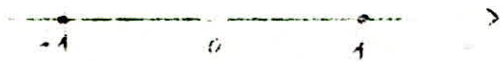
$N(\xi)$ = fonctions de transformations géométriques

Remarques

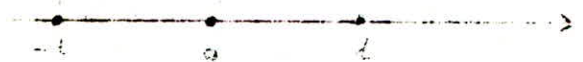
- Les éléments de référence sont parfois appelés éléments parents .
- La transformation géométrique $\tilde{\tau}$ peut être interprétée comme un simple changement de variables $x \rightarrow \xi$
- $\tilde{\tau}$ peut être considéré comme un système de coordonnées locales lié à chaque élément.

Exemple d'éléments de référence

a - à une dimension :



Linéaire (2 nœuds)



quadratique (3 nœuds)

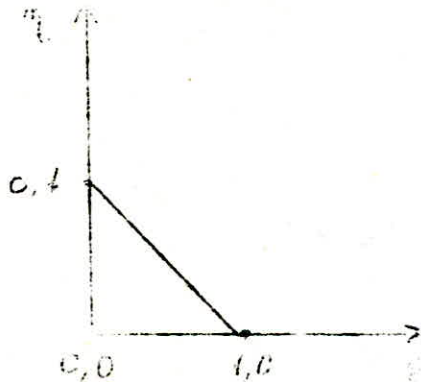


Cubique (4 nœuds)

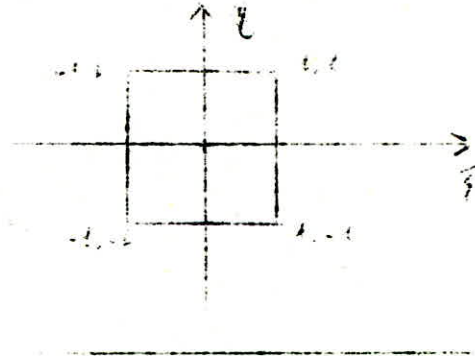
b - Éléments de référence à 2 dimensions:

Il existe des éléments triangulaires, des éléments carrés.

Éléments triangulaires



Éléments carrés



MATRICE JACOBIENNE

L'existence de deux repères différents l'un de référence, l'autre réel nécessite une matrice jacobienne le passage d'un repère à l'autre. Toutes les expressions qui impliquent des dérivées en X, Y, Z sont transformées en dérivées en ξ, η, ζ grâce à la matrice jacobienne.

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \\ \partial/\partial\zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial\xi} & \frac{\partial Y}{\partial\xi} & \frac{\partial Z}{\partial\xi} \\ \frac{\partial X}{\partial\eta} & \frac{\partial Y}{\partial\eta} & \frac{\partial Z}{\partial\eta} \\ \frac{\partial X}{\partial\zeta} & \frac{\partial Y}{\partial\zeta} & \frac{\partial Z}{\partial\zeta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial X \\ \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Z \end{Bmatrix}$$

SINGULARITE DE LA MATRICE JACOBIENNE

La singularité de la matrice jacobienne en un point de l'élément de référence implique que la transformation n'est pas bijective. Cette singularité apparaît lorsque l'on déforme beaucoup l'élément de référence

APPROXIMATION SUR UN ELEMENT DE REFERENCE

$$(A) u_{ex}(x) \approx u(x) = \langle N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \langle N(x) \rangle \{u_n\}$$

On considère n noeuds d'interpolation sur un domaine V (confondus ou non avec les noeuds géométriques).

Sur chaque élément nous utilisons l'approximation nodale (1).

$$x \in V$$

u_1, u_2, \dots, u_n sont des valeurs de u_{ex} aux n noeuds d'interpolation de l'élément (appelées également variables nodales).

$N(x)$: fonction d'interpolation sur l'élément réel.

Substituons à l'approximation sur l'élément réel, l'approximation sur l'élément de référence correspondante.

$$u_{ex}(\xi) \approx u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\}$$

avec $X(\xi) = [N(\xi)] \{x_n\}$

$N(\xi)$: fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

$\{u_n\}$: variables nodales de l'élément.

Remarque :

Les fonctions $N(\xi)$ sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel V.

Ces fonctions peuvent donc être utilisées pour tous les éléments possédant le même élément de référence. caractérisé par :

- sa forme
- ses noeuds géométriques
- ses noeuds d'interpolation

Par contre les fonctions $N(x)$ dépendent des coordonnées des noeuds de l'élément.

PROPRIETES DE LA FONCTION APPROCHEE :

$u(x)$ et $u_{ex}(x)$ coïncident en tous les noeuds d'interpolation.

$$u_{ex}(\xi_i) = u(\xi_i) = u_i = \langle N_1(\xi_i) \ N_2(\xi_i) \ \dots \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

$$N_j(\xi_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

METHODE GENERALE DE CONSTRUCTION (P N I U V)

a) Choix de la base polynomiale.

$$U(\xi) = \langle P_1(\xi) \ P_2(\xi) \ \dots \ \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \end{Bmatrix} = \langle P(\xi) \rangle \{a\}$$

$\langle P(\xi) \rangle$: constitue la base polynomiale de l'approximation.

Nous utilisons autant que possible des bases polynomiales complètes.

Exemples de bases polynomiales complètes et incomplètes :

Dimension ' Degré du polynome ' Nombre de d.d.l ' Base

	Dimension	Degré du polynome	Nombre de d.d.l	Base
complete	1	1	2	$\langle 1 \ \xi \rangle$
	1	2	3	$\langle 1 \ \xi \ \xi^2 \rangle$
	2	1	3	$\langle 1 \ \xi^2 \ \xi^3 \rangle$
	2	2	6	$\langle 1 \ \xi^2 \ \xi^3 \ \xi^4 \ \xi^5 \ \xi^6 \rangle$
incomplete	2	2	4	$\langle 1 \ \xi^2 \ \xi^3 \ \xi^4 \rangle$ (bc. linéaire)
	3	3	8	$\langle 1 \ \xi^3 \ \xi^4 \ \xi^5 \ \xi^6 \ \xi^7 \ \xi^8 \ \xi^9 \ \xi^{10} \rangle$ (Tri. linéaire)

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle \{a\} : \text{approximation globale}$$

$$U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\} : \text{approximation nodale}$$

Relation entre variables généralisées et variables nodales :

En chaque noeud d'interpolation de coordonnées $\{ \xi_i \}$

$$U(\xi) = u_i = u_n(\xi_i)$$

$$u(\xi_i) = u_i = \langle P(\xi_i) \rangle \{a\}$$

$$u(\xi_n) = u_n = \langle P(\xi_n) \rangle \{a\}$$

$$\begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) & \dots & P_n(\xi_1) \rangle \\ \langle P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_n(\xi_2) \rangle \\ \langle P_1(\xi_3) & P_2(\xi_3) & \dots & P_n(\xi_3) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle P_1(\xi_m) & P_2(\xi_m) & \dots & P_n(\xi_m) \rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$\{\mu_n\} = [P_n] \{a\}$$

$$\Rightarrow \{a\} = [P_n]^{-1} \{\mu_n\}$$

$$\Rightarrow \langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$$

-Résumé des opérations de construction de N

- Choix de la base polynomiale $\langle P(\xi) \rangle$

- Evaluation de la matrice nodale $[P_n] = [P_j(\xi_i)]$ $i, j = 1, 2, \dots, n$

- Inversion de la matrice nodale $[P_n]$

- Calcul de N : $\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$

Conditions à remplir par les fonctions représentant le comportement des éléments :

- 1) Les fonctions choisies doivent être continues au sein de l'élément ainsi qu'au passage des frontières entre les éléments.
- 2) Les équations forces-déplacements découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subi un déplacement d'ensemble rigide.
- 3) Les fonctions supposées doivent permettre la représentation de valeurs uniformes pour toutes les contraintes ou déformation.

DIFFERENTS TYPES D'ELEMENTS

ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES

Principe et propriétés :

Deux types d'interpolation interviennent dans la construction d'un élément fini, l'interpolation géométrique et l'interpolation des déplacements .

Définition

Un élément est dit isoparamétrique quand il est basé sur des interpolations identiques pour sa géométrie et son champ de déplacement.

Propriétés

1 - Continuité inter éléments:

Si les fonctions d'interpolations satisfont les conditions de continuité requises pour l'élément parent (de référence) alors ces conditions de continuité seront également satisfaites pour l'élément isoparamétrique. Cette propriété est évidente s'il y a unicité de la transformation géométrique.

2 - Complétude :

Les états de déformation constante sont correctement représentés dans les éléments isoparamétriques si la condition suivante est respectée : $\sum N_i = 1$

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (\text{linéaire})$$

$$\begin{aligned} u = \sum N_i u_i &= a_1 \sum N_i + a_2 \sum N_i x_i + a_3 \sum N_i y_i \\ &= a_1 \sum N_i + a_2 x + a_3 y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum N_i = 1$$

ELEMENT SUB PARAMETRIQUE

Si l'ordre des polynomes $P(\xi)$ est inférieur à celui de $M(\xi)$. (Élément de haute précision type HERMITE ou LAGRANGE)

ELEMENT SUPER PARAMETRIQUE

Dans le cas contraire.

INTEGRATION NUMERIQUE

Le programme M.E.F utilise l'intégration numérique par la méthode de GAUSS. Le calcul des matrices de rigidité par intégration explicite ne peut être effectué que pour les éléments les plus simples.

Par ailleurs, l'intégration exacte peut soulever de sérieuses difficultés pour certains types de problèmes, c'est le cas d'éléments d'ordre élevé, ou isoparamétriques courbes où l'intégration numérique doit être utilisée.

METHODE DE GAUSS

Dans cette méthode, on ne se donne pas à priori la position des points d'intégration mais on détermine cette position de façon à minimiser l'erreur. n points de GAUSS intègrent exactement un polynome de degré $2n-1$.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

w_i : poids de GAUSS (Coefficients de pondération)

x_i : coordonnées des points d'intégration

CHOIX DU NOMBRE DE POINTS D'INTEGRATION

Le choix du nombre de points d'intégration dépend du type d'élément utilisé et de la matrice élémentaire que l'on construit (rigidité ou masse).

L'expérience a montré que l'intégration réduite peut donner de meilleurs résultats que l'intégration exacte.

Cependant il existe pour chaque type d'élément, un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel la matrice de rigidité reste singulière malgré l'introduction des conditions aux limites.

Pour un élément quadrilatéral isoparamétrique à 8 noeuds, il faut un minimum de 2X2 points d'intégration pour calculer la matrice de rigidité et 3X3 points pour calculer la matrice de masse.

DEVELOPPEMENT DE DIVERS ELEMENTS

Cette partie de notre travail consiste en l'enrichissement de la bibliothèque du programme M.E.F en établissant des sous-programmes relatifs à cinq différents éléments qui sont :

- 1- Elément de barre (treillis bidimensionnel)
- 2- Elément de barre (treillis unidimensionnel)
calcul par intégration numérique.
- 3- Elément de barre de flexion (cas R.D.M).
- 4- Elément de barre avec cisaillement transverse.
- 5- Elément tridimensionnel pour mécanique du solide.

Et en le passage de quelques exemples prouvant leur bon fonctionnement et mettant en relief leurs performances.

Il est à noter que la bibliothèque du programme M.E.F contient déjà:

- 1- Un élément isoparamétrique à 8 noeuds pour élasticité plane.
- 2- Un élément quadratique pour les problèmes harmoniques anisotropes.

Organisation du calcul des matrices élémentaires par intégration numérique:
Les différentes étapes sont :

- 1) Opérations communes à tous les éléments de même type (ayant 1 m élément de référence).
 - Calcul des coordonnées $\{x\}$ et des poids w_n (points d'intégration).
 - Calcul de N et \bar{N} et de leurs dérivées en $\{x\}$
- 2) Opérations nécessaires pour calculer la matrice $[K]$ de chaque élément.
 - Initialiser $[K]$ à zéro
 - Pour chaque point d'intégration:
 - . Calculer la matrice jacobienne $[J]$ à partir des dérivées en des fonctions \bar{N} et des coordonnées des noeuds de l'élément, $[J]^{-1}$ et $\det J$.
 - . Calculer les dérivées de N en x à partir des dérivées en $\{x\}$
 - . Construire les matrices $[B]$ et $[D]$
 - . Accumuler dans $[K]$: le produit $[B]^t [D] [B] \det J w_n$.

- 3) Opérations nécessaires pour calculer la matrice de masse $[m]$:
- Initialisation à zéro.
 - Pour chaque point d'intégration :
 - .Calculer la matrice jacobienne et son déterminant.
 - .Accumuler dans $[m]$ le produit $\{N\} \langle N \rangle \det J W_n$
- 4) Opérations nécessaires pour calculer le vecteur sollicitation $\{f\}$ correspondant à v_r constant :
- Initialiser $\{f\}$ à zéro
 - Pour chaque point d'intégration ξ_r :
 - .Calculer la matrice jacobienne et son déterminant.
 - .Accumuler dans $\{f\}$ le produit $\{N\} v_r \det J W_n$.

Pour chaque type d'élément "nn", un seul sous-programme ELEM nn contrôle les calculs de toutes les matrices et vecteurs élémentaires. Il existe une variable de contrôle ICODE spécifiant quelle opération élémentaire est requise ainsi :

- ICODE = 1 Initialisation des paramètres caractéristiques de ce type d'éléments (nombre de nœuds, de degré de liberté, de points d'intégration).
- ICODE = 2 Exécution des opérations liées à un élément de référence donné et indépendantes de la géométrie réelle : calcul des fonctions d'interpolation N et de leurs dérivées en ξ aux points d'intégration.
- ICODE = 3 Calcul de la matrice de rigidité.
- ICODE = 4 Calcul de la matrice tangente pour les problèmes non linéaires.
- ICODE = 5 Calcul de la matrice de masse
- ICODE = 6 Calcul du vecteur résidu.
- ICODE = 7 Calcul du vecteur des sollicitations.
- ICODE = 8 Calcul et impression des gradients.

Soulignons qu'un sous-programme élémentaire n'exécute qu'une opération à la fois définie par la valeur de ICODE.

1 - ELEMENT DE BARRE (Treillis bidimensionnel)

Cet élément ayant été préalablement étudié dans le programme relatif aux structures treillis planes, il sera introduit de manière explicite dans la bibliothèque du programme M.E.F.

2 - ELEMENT DE BARRE (Treillis unidimensionnel).

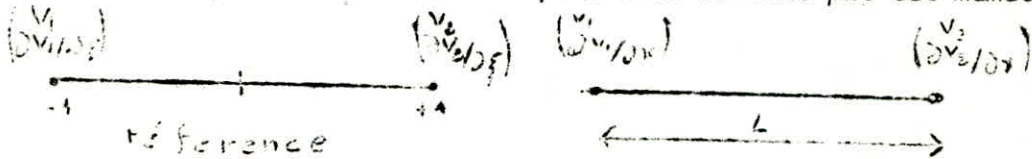
Cet élément est le même que le précédent, mais son calcul se fait par intégration numérique.

L'élément de référence choisi est l'élément unidimensionnel linéaire.



ELEMENT DE BARRE DE FLEXION SANS CISAILLEMENT PAR LA METHODE DU P N I N V

L'élément étudié est du type HERMITE du troisième degré et de ce fait, la méthode doit être quelque peu modifiée car les variables nodales dans le repère de référence et dans le repère réel ne sont pas les mêmes.



$$v_1 (\text{référence}) = v_1 (\text{réel})$$

$$v_2 (\text{référence}) = v_2 (\text{réel})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial v_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \xi} &= \frac{\partial v_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned} \right\}$$

Modification à apporter:

Facteur multiplicatif = det J.

Notons que l'élément n'est pas isoparamétrique car les fonctions d'interpolation et les fonctions de transformations géométriques ne sont pas les mêmes.

Ordre des polynômes $\bar{N}(\xi)$ ordre des polynômes $N(\xi)$

D'où élément subparamétrique.

Détermination des fonctions d'interpolation :

base polynomiale $\langle P \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \xi^2 \quad \xi^3 \rangle$

$$[P_n] = \begin{bmatrix} \langle P(-1) \rangle \\ \langle \frac{\partial P}{\partial \xi}(-1) \rangle \\ \langle P(1) \rangle \\ \langle \frac{\partial P}{\partial \xi}(1) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & +1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$


$$[P_n]^{-1} = 1/4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle N \rangle = \langle P \rangle [P_{11}]^{-1} = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle$$

avec :

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3) \\ N_2 = \frac{1}{4} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_3 = \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3) \\ N_4 = \frac{1}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{cases}$$

Les fonctions de transformations géométriques \bar{N} restent identiques à celles de l'élément linéaire (à 2 d d l)


$$\bar{N} = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\}$$

A partir de là, il est possible d'évaluer la matrice permettant le passage du repère de référence au repère local.

$$\{u(\xi)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L/2 \end{bmatrix} \{u(x)\}$$

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] dx$$

$$[K] = EI \int_{-L}^L \begin{bmatrix} \frac{7}{L}(\frac{z}{L} + \frac{z}{L}) \\ \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z}{L}(\frac{z}{L} + \frac{z}{L}) \\ \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \\ \frac{z}{L} \end{bmatrix} dz$$

$$\frac{EI}{L} \left(\frac{7}{L}\right) \left(\frac{z}{L} + \frac{z}{L}\right) = \frac{EI}{L} \frac{d^2 N_1}{dz^2} = \frac{d^2 N_1}{dz^2}$$

$$\frac{EI}{L} \left(\frac{z}{L}\right) \left(\frac{z}{L}\right) = \frac{EI}{L} \frac{d^2 N_2}{dz^2} = \frac{d^2 N_2}{dz^2}$$

$$\frac{EI}{L} \left(\frac{z}{L}\right) \left(\frac{z}{L} + \frac{z}{L}\right) = \frac{EI}{L} \frac{d^2 N_3}{dz^2} = \frac{d^2 N_3}{dz^2}$$

$$\frac{EI}{L} \left(\frac{z}{L}\right) \left(\frac{z}{L}\right) = \frac{EI}{L} \frac{d^2 N_4}{dz^2} = \frac{d^2 N_4}{dz^2}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dz^2} & \frac{d^2 N_2}{dz^2} & \frac{d^2 N_3}{dz^2} & \frac{d^2 N_4}{dz^2} \end{bmatrix}$$

$$\{ \epsilon = [B] \} \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \text{ correct} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \end{Bmatrix}$$

$$\langle N_1 \rangle \left(\frac{z}{L}\right) N_2 \quad \langle N_3 \rangle \left(\frac{z}{L}\right) N_4$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{z}{L} \end{bmatrix} \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle$$

Transferring the functions d'interpolation:

- Calcul de la première colonne :

$$K_1 = \frac{2EI}{L^3} \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \xi^3 \\ (-\frac{3}{4} \xi + \frac{9}{4} \xi^3) \frac{L}{2} \\ -\frac{3}{4} \xi^2 \\ (\frac{3}{2} \xi + \frac{9}{2} \xi^3) \frac{L}{2} \end{bmatrix} d\xi$$

$$K_1 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 \\ 3L \\ -6 \\ 3L \end{bmatrix}$$

- Calcul de la deuxième colonne :

$$K_2 = \frac{2EI}{L^3} \int_0^L \begin{bmatrix} (-\frac{3}{4} \xi + \frac{9}{4} \xi^3) \frac{L}{2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} d\xi$$

$$K_2 = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3L \\ 2L^2 \\ -3L \\ L^2 \end{bmatrix}$$

- On obtient après calcul, la matrice suivante :

$$[K] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

- Vérification de la matrice de rigidité de l'élément de poutre en flexion (R.D.M) par l'intégration numérique.

2 points de GAUSS :

$$[K] = \frac{6EI}{L^3} \sum_{i=1}^2 w_i \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \xi_i \\ \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi_i) \\ -\frac{3}{4} \xi_i \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \xi_i & \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi_i) - \frac{3}{4} \xi_i \end{bmatrix}$$

- $i=1$: $\xi_1 = -0,57735$, $w_1 = 1$

- $i=2$: $\xi_2 = 0,57735$, $w_2 = 1$

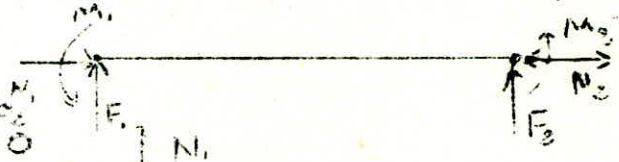
- Le résultat obtenu est exactement le même que par l'intégration exacte.

* Note: Cette matrice de rigidité a été obtenue

- Pour un élément unitaire conventionnel en repère local.

- Proposons nous maintenant de déterminer la matrice de rigidité élémentaire dans le plan, mais en Eci ajoutant les termes relatifs à l'effort normal:

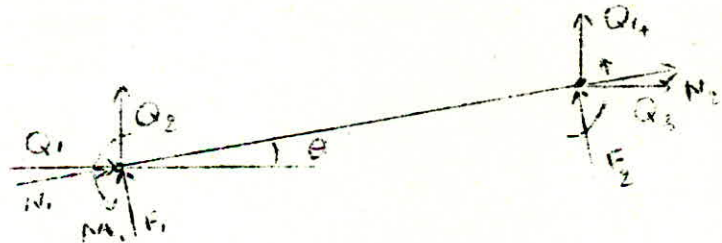
- D'où la matrice de rigidité élémentaire en repère locale est la suivante:



$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} N_1 \\ F_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ F_2 \\ M_2 \end{matrix}$$

- Plaçons l'élément précédent à son repère locale dans le plan et déterminons la matrice de passage [T] :

$$\begin{cases} F_1 = Q_2 \cos \theta - Q_1 \sin \theta \\ N_1 = Q_1 \cos \theta + Q_2 \sin \theta \end{cases}$$



- d'où la matrice de passage [T] est :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- D'où la matrice de rigidité dans le plan est :

$$[K] = [T]^T [K'] [T]$$

On pose : $\begin{cases} a = L \cos \theta \\ b = L \sin \theta \end{cases}$

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{(EAa^2 + 12EIb^2)}{L^3} & \frac{(EA - 12EI)ab}{L^2} & -\frac{6EIb}{L^2} & -\frac{(EAa^2 + 12EIb^2)}{L^3} & \frac{12EIab}{L^3} & -\frac{6EIa}{L^2} \\ \frac{(EA - 12EI)ab}{L^2} & \frac{6EIa}{L^2} & \frac{(12EI - EA)ab}{L^2} & \frac{(EAa^2 + 12EIb^2)}{L^3} & -\frac{12EIab}{L^3} & \frac{6EIa}{L^2} \\ -\frac{6EIb}{L^2} & \frac{6EIa}{L^2} & \frac{6EIb}{L^2} & -\frac{12EIab}{L^3} & \frac{6EIa}{L^2} & -\frac{6EIb}{L^2} \\ \frac{(EAa^2 + 12EIb^2)}{L^3} & \frac{(EA - 12EI)ab}{L^2} & -\frac{12EIab}{L^3} & \frac{(EAa^2 + 12EIb^2)}{L^3} & -\frac{12EIab}{L^3} & \frac{6EIa}{L^2} \\ \frac{12EIab}{L^3} & -\frac{12EIab}{L^3} & \frac{6EIa}{L^2} & -\frac{12EIab}{L^3} & \frac{6EIa}{L^2} & -\frac{6EIb}{L^2} \\ \frac{6EIa}{L^2} & -\frac{6EIb}{L^2} & -\frac{6EIb}{L^2} & \frac{6EIa}{L^2} & -\frac{6EIb}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}$$

Symétrique

- De la même manière la matrice de masse :

$$[M] = \rho A L \begin{pmatrix} \frac{13b^2}{35} + \frac{a^2}{3} & -\frac{4ab}{105} & -\frac{11bL}{210} & \frac{9b^2}{70} + \frac{a^2}{6} & \frac{4ab}{105} & \frac{13bL}{420} \\ -\frac{4ab}{105} & \frac{13a^2}{35} + \frac{b^2}{3} & \frac{11aL}{210} & \frac{4ab}{105} & \frac{9a^2}{70} + \frac{b^2}{6} & -\frac{13aL}{420} \\ -\frac{11bL}{210} & \frac{11aL}{210} & \frac{L^2}{105} & -\frac{13bL}{420} & \frac{13aL}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ \frac{9b^2}{70} + \frac{a^2}{6} & \frac{4ab}{105} & -\frac{13bL}{420} & \frac{9a^2}{70} + \frac{b^2}{6} & -\frac{13aL}{420} & \frac{11bL}{210} \\ \frac{4ab}{105} & \frac{9a^2}{70} + \frac{b^2}{6} & \frac{13aL}{420} & -\frac{13aL}{420} & -\frac{13aL}{420} & \frac{11bL}{210} \\ \frac{13bL}{420} & -\frac{13aL}{420} & -\frac{L^2}{140} & \frac{11bL}{210} & -\frac{11aL}{210} & \frac{L^2}{105} \end{pmatrix}$$

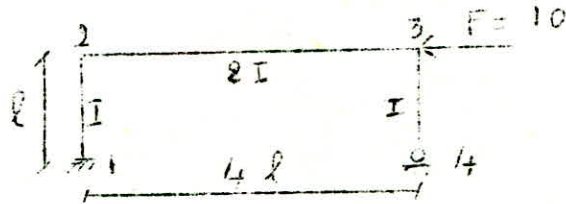
Symétrique.

Exemple:

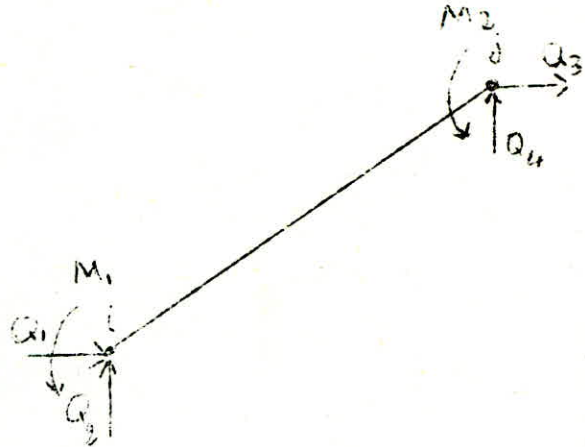
$$I = 6 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$A_1 = A_2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 150 \text{ cm}^2$$



Nœuds	COORDONNÉES	
	X (cm)	Y (cm)
1	0	0
2	0	300
3	1200	300
4	1200	0



Elements	Connections		Q_1	Q_2	M_1	Q_3	Q_4	M_2
1	1	2	$0,7746 \cdot 10^4$	$0,1256 \cdot 10^4$	$-0,1691 \cdot 10^4$	$-0,141 \cdot 10^4$	$-0,1256 \cdot 10^4$	$-0,831 \cdot 10^3$
2	2	3	$0,7746 \cdot 10^4$	$0,1256 \cdot 10^4$	$0,831 \cdot 10^3$	11	11	$6,676 \cdot 10^3$
3	3	4	$-0,225 \cdot 10^4$	11	$-0,676 \cdot 10^3$	$0,225 \cdot 10^4$	$-0,1256 \cdot 10^4$	0

ELEMENT DE BARRE AVEC CISAILLEMENT TRANSVERSE

On étudie la poutre à cisaillement transverse (ou poutre DE TIMOSHENKO) qui est différente du cas résistance des matériaux (ou poutre de BERNOUILLI) du fait de la non dépendance des degrés de liberté de cisaillement et de flexion (w et θ) qui se traduit par la non planéité de la section après déformation et de la non perpendicularité de cette section avec la fibre moyenne. Ceci étant évidemment en contradiction avec l'hypothèse de BERNOUILLI faite en R.D.M. Pour notre étude, on choisira l'élément isoparamétrique à 3 noeuds pour lequel le champ de déplacement est parabolique.



Dans ce cas $\theta \neq \frac{dw}{dx}$

Les degrés de liberté étant indépendants, les fonctions d'interpolation des deux types seront indépendantes.

Les fonctions d'interpolation sont donc vu le choix de l'élément :

- parabolique pour w
- parabolique pour θ

et valent :

$$N_1 = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) \quad N_2 = (1 - \xi) \left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \quad N_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)$$

Nous avons de ce fait :

$$w(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i w_i$$

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_i$$

Les valeurs des N_i sont trouvées par la méthode du P_n inverse.

Ainsi la base polynomiale dans le cas présent est :

$$\langle P \rangle = \left\langle 1, \xi, \xi^2 \right\rangle$$

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P_n]^{-1} = 1/2 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

D'où les fonctions d'interpolation :

$$N = \langle P \rangle [P_n]^{-1}$$

Nous avons une continuité de dérivée (C^1) sur le noeud milieu mais pas nécessairement aux noeuds de coin.

MATRICE JACOBIENNE :

L'élément choisi étant isoparamétrique, la géométrie de la barre est définie par les mêmes fonctions d'interpolation :

$$x = \sum N_i x_i$$

On a :

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3$$

$$J = \left(-\frac{1}{2} + \xi\right) x_1 - 2\xi x_2 + \left(\frac{1}{2} + \xi\right) x_3 = \frac{x_3 - x_1}{2} + \xi(x_1 + x_3 - 2x_2)$$

Pour notre élément, le noeud intermédiaire étant placé exactement au milieu, le jacobien aura pour valeur :

$$J = (x_3 - x_1) / 2 = l/2$$

Si le noeud intermédiaire n'avait pas été placé au milieu le jacobien aurait été différent de $l/2$, notons à ce sujet que lorsque $l/4 \leq x_2 \leq 3l/4$, le déterminant du jacobien ne s'annule pas sur l'élément.

Déformations-contraintes :



$$\{\epsilon\} = [B] \{a\}$$

$$\text{avec } \{a\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$\{\epsilon\}$ étant le vecteur déformations généralisées.

La déformation généralisée est définie de telle manière que le produit par les contraintes généralisées redonne le travail des forces intérieures.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \int EI \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx}_{\text{énergie de Flexion}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int G S r \psi^2 dx}_{\text{énergie de cisaillement}} \end{aligned}$$

avec $\psi = \theta - \frac{\partial w}{\partial x}$: angle de distorsion.

$$\begin{Bmatrix} M \\ T \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon \end{Bmatrix}$$

D étant la matrice d'élasticité $= \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GSr \end{bmatrix}$

On retrouve bien l'énergie

Si : Section réduite

La matrice B s'écrit dans ce cas :

$$[B] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & N_1 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & N_2 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & N_3 \end{array} \right]$$

En ce qui concerne l'intégration numérique, 2 points de GAUSS ont été utilisés :

ELEMENT TRIDIMENSIONNEL

La méthode des éléments finis permet la résolution de problème d'élasticité à trois dimensions.

Cependant les problèmes tridimensionnels sont plus complexes et plus coûteux que les autres types de problèmes, et nécessitent l'utilisation d'éléments isoparamétriques élaborés (Hexaèdre à 20 noeuds, etc.....).

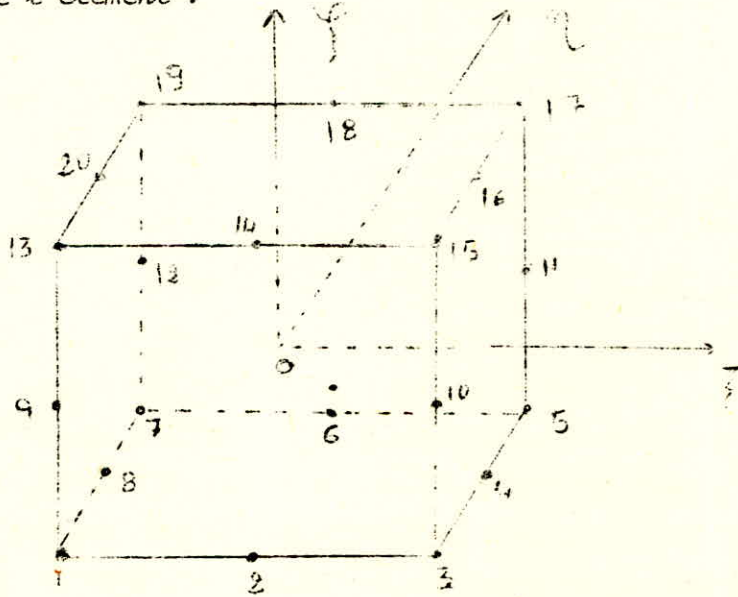
En outre, les maillages d'éléments tridimensionnels entraînent un nombre important de degrés de liberté et nécessitent des programmes permettant une génération automatique des différents noeuds (cas du M.E.F).

Enfin, notons que le temps de résolution est augmenté de manière significative par rapport aux problèmes tridimensionnels du fait de l'importance des matrices de rigidité.

L'élément programmé est un hexaèdre isoparamétrique à 20 noeuds : 4 noeuds principaux et 12 noeuds additionnels de mi-côté ce qui correspond à un total de 60 degrés de liberté.

Le calcul des caractéristiques de cet élément (matrices de rigidité, ...) se fait par intégration numérique en utilisant généralement $3 \times 3 \times 3 = 27$ points de GAUSS. Toutefois il est possible d'utiliser une intégration réduite $2 \times 2 \times 2 = 8$ points qui allège dans de larges mesures la complexité des calculs. Cet élément est recommandé dans le cas de structures massives à frontières courbes.

Représentation de l'élément :



$n = 20$

La base polynomiale est :

$$P = \langle 1, x, y, z, x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^2z, xyz, y^2z, xz^2, yz^2, z^3 \rangle$$

La matrice B dans ce cas est :

$$[B] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u & v & w \end{matrix} & \\ \begin{matrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ 0 \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \partial/\partial y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial z & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} & \begin{matrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_x z \\ \gamma_x z \\ \gamma_y z \end{matrix} \end{matrix}$$

EXEMPLES ET COMPARAISONS

Dans cette partie, nous allons à travers quelques exemples mettre en relief les performances des éléments développés et faire une comparaison entre quelques un d'entre eux vis à vis de la solution exacte.

1^{er} partie :

Ainsi, dans une première partie on passera un exemple commun à trois éléments qui sont respectivement, l'élément isoparamétrique à 8 noeuds pour élasticité plane, l'élément de poutre en flexion et l'élément de poutre avec cisaillement transverse et ce, pour d'une part mettre en évidence l'importance des déplacements dus au cisaillement et d'autre part comparer les deux éléments de poutre à la solution exacte de l'élasticité. Quant à l'exemple, il s'agit d'une poutre console (modèle très utilisé) composée de cinq éléments pour laquelle on fera varier la portée (10 m, 5 m et 1 m) et le mode de chargement : couple (moment fléchissant) puis effort tranchant.

Présentation des résultats :

1^{er} cas de chargement :



Poutre en élasticité plane (élément isoparamétrique à 8 noeuds)



Poutre en éléments de flexion unidimensionnels.



Poutre en éléments avec cisaillement transverse.



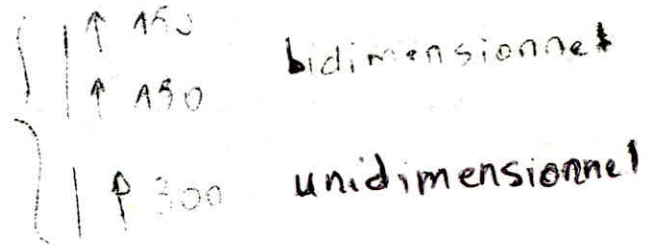
La comparaison porte sur le déplacement vertical d'extrémité .

Portée	élément 9 Euler-Bernoulli	élément flexion RDM	élément cisaillement
10,00m	$w(26) = 100$	$w(6) = 100$	$w(11) = 100$
5,00m	$w(13) = 25$	$w(6) = 25$	$w(11) = 25$
1,00m	$w(26) = 1$	$w(6) = 1$	$w(11) = 1$

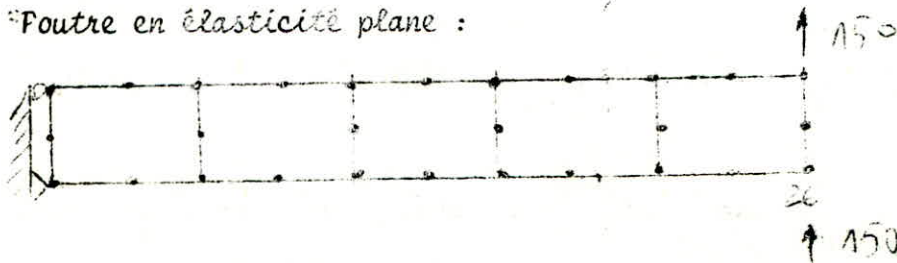
Nous constatons que sous l'application d'un couple équivalent à un moment fléchissant, les valeurs des déplacements pour une portée variable sont rigoureusement identiques pour les trois éléments comparés ce qui est un résultat attendu car le moment fléchissant n'affecte pas les caractéristiques élémentaires .

2^{ème} cas de chargement :

Effort tranchant :



Poutre en élasticité plane :



Poutre en flexion (R.D.M)



Poutre à cisaillement transverse :



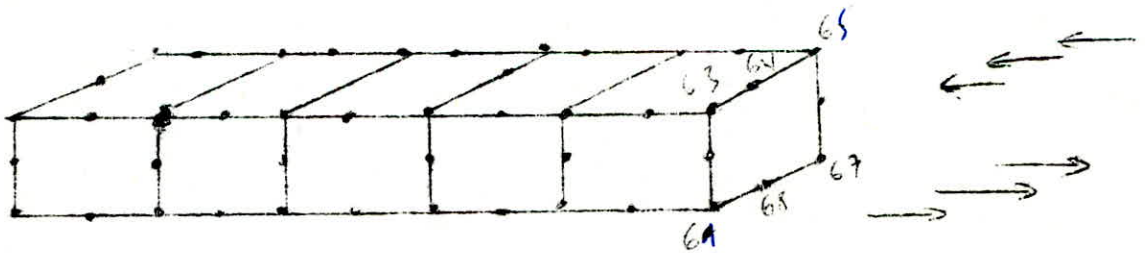
Portée	Element à 8 noeuds	basse de flexion	basse de cisail-
10,00m	$v(2) = 107,28$	$w(6) = 100$	$w(11) = 103$
5,00m	$v(2) = 13,98$	$w(6) = 12,5$	$w(11) = 14$
1,00m	$v(2) = 1,03$	$w(6) = 0,1$	$w(11) = 0,4$

Dans cet exemple , l'influence du cisaillement s'illustre de maniere manifeste et augmente avec la diminution de la portée .

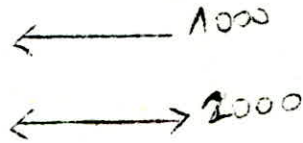
Nous pouvons également constater que l'élément avec cisaillement transverse se rapproche d'avantages de la solution exacte (solution élasticité) que celui de flexion R.D.M .

2^{ème} partie :

Dans cette deuxieme partie , on passera l'exemple d'une poutre console de 10 m de portée constituée de cinq éléments tridimensionnels (hexaedre à 20 noeuds) chargée successivement par un couple puis par un effort tranchant .



1^{er} cas de chargement : *Compl*



$$\left\{ \begin{array}{l} F_{63} = F_{65} = \frac{1000}{6} \\ F_{61} = F_{67} = \frac{1000}{6} \\ F_{64} = F_{68} = \frac{4 \cdot 1000}{6} \end{array} \right.$$

Déplacement du noeud 68 $u = 21,535$ (horizontal)
 $v = 105,93$ (vertical)

Pour l'élément à 8 noeuds : $u = 20$
 $v = 100$

2^{ième} cas de chargement

effort tranchant

La répartition est

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{61} = T_{67} = 25 \\ T_{63} = T_{65} = 25 \\ T_{68} = T_{64} = 100 \end{array} \right.$$

Déplacement du noeud 68 $u = 15,70$
 $v = 112,15$

Déplacement pour l'élément à 8 noeuds : $u = 14,98$
 $v = 102,28$

C O N C L U S I O N

Notre travail nous a confronté dans sa première partie (élaboration du programme treillis) à différents types de problèmes : EQUILIBRE , VALEURS CRITIQUES et EVOLUTION , nécessitant le développement d'algorithmes divers . Les principales difficultés que l'on a rencontrées sont relatives au problème de valeurs critiques pour lequel il était nécessaire de faire un réarrangement de matrices (opération fastidieuse) afin d'obtenir des résultats .

Quant à la deuxième partie , concernant le développement d'éléments dans le programme M E F , nous avons été confrontés à des problèmes similaires à l'exception du problème non stationnaire (évolution) qui n'est traité dans M E F que pour des problèmes de fluide ne nécessitant pas de termes de matrice d'amortissement pour lesquels il aurait fallu développer des algorithmes (NEUMARK-WILSON) .

En ce qui concerne la comparaison des deux éléments de poutre , celle-ci a montré que l'élément avec cisaillement transverse se rapprochait mieux de la solution exacte (solution élasticité) que l'élément de poutre en flexion (R.D.M).

Notons que toute notre étude s'est faite en élasticité linéaire . Enfin , notre travail nous a permis d'apprécier la puissance de la méthode des éléments finis et son vaste champ d'application . Par ailleurs , le programme M E F , de part sa structure modulaire , présente des facilités de développement d'éléments variés qu'il serait souhaitable d'exploiter .

SUGGESTIONS

Nous aimerions formuler des suggestions à deux niveaux :

- 1- Compléments (ou amélioration) à apporter aux programmes M E F :
-Prévoir dans les sous-programmes élémentaires des sous-programmes calculant le produit matriciel $D * B$, ce qui permettra l'obtention directe des contraintes à partir des déplacements nodaux . .

-Prévoir le cas des chargements surfaciques car le programme M E F n'étudie que les chargements nodaux et volumiques .

-Séparer les blocs ponctuels des blocs élémentaires , ceci peut avoir un intérêt considérable dans les cas non linéaire .

2-Liste d'éléments qu'il serait intéressant de développer :

- Poutre en grand déplacements (non linéarité) .
- Treillis tridimensionnel .
- Plaque .
- Coque mince .

BIBLIOGRAPHIE

1. J.ROBINSON, ANALYSE MATRICIELLE A USAGE DE L'INGENIEUR 1971
2. G.DHATT ET G.TOUZOT, UNE PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS, 1979
3. H.GALLAGHER, INTRODUCTION AUX ELEMENTS FINIS, 1976
4. J.F.IMBERT, ANALYSE DES STRUCTURES PAR ELEMENTS FINIS, 1979
5. E.ABSTI, METHODE DE CALCUL NUMERIQUE EN ELASTICITE, 1978
6. M.ALBIGES, RESISTANCE DES MATERIAUX APPLIQUEE , 1983
7. B.DEMIDOVICH , ELEMENTS DE CALCUL NUMERIQUE, 1979

