

2/89

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Département de Génie Civil

[Handwritten signature]

THESE

Présentée à l'ECOLE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Pour Obtenir le Titre de :

Docteur d'Etat en Génie Civil

Par **Naceur Eddine HANNACHI**

Ingénieur Polytechnique Alger (80)

Magister Polytechnique Alger (82)

SUJET DE LA THESE

**RIGIDITES DE GAUCHISSEMENT ET DE TORSION
DE POUTRES A PROFIL MINCE OUVERT, APRES
FISSURATION DE FLEXION**

Thèse Soutenue le Septembre 89 devant le Jury :

Président : **M. A. CHARIF** Professeur E.N.P.

Examineurs : **M. J. BIAREZ** Professeur Ecole Centrale Paris

M. A. BALI Maitre de Conférences E.N.P.

M. L. YEZLI Maitre de Conférences E.P.A.U.

Invités : **M. A. CHAKER** Professeur U.S.T.H.B.

M. BELAZOUGUI Directeur C.G.S. Alger

Rapporteur : **M. B. FOURE** Chef de Service d'Etude des Structures

C.E.B.T.P. (Paris - FRANCE)

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Département de Génie Civil

THESE

Présentée à l'ECOLE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Pour Obtenir le Titre de :

Docteur d'Etat en Génie Civil

Par Naceur Eddine HANNACHI

Ingénieur Polytechnique Alger (80)

Magister Polytechnique Alger (82)

SUJET DE LA THESE

**RIGIDITES DE GAUCHISSEMENT ET DE TORSION
DE POUTRES A PROFIL MINCE OUVERT, APRES
FISSURATION DE FLEXION**

Thèse Soutenue le Septembre 89 devant le Jury :

Président : **M. .A CHARIF** Professeur E.N.P.

Examineurs : **M. J. BIAREZ** Professeur Ecole Centrale Paris

M. A. BALI Maitre de Conférences E.N.P.

M. L. YEZLI Maitre de Conférences E.P.A.U.

Invités : **M. A. CHAKER** Professeur U.S.T.H.B.

M. BELAZOUGUI Directeur C.G.S. Alger

Rapporteur : **M. B. FOURE** Chef de Service d'Etude des Structures

C.E.B.T.P. (Paris - FRANCE)

"L'expérience est la source unique de la vérité ; elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau".

R. POINCARÉ

A mes frères et soeurs,

À mon père,

A ma mère,

Petit témoignage de mon affection

*A la mémoire de mon cousin EL MAHDI,
Que son âme repose en paix.*

A Messieurs BONNEVILLE et FOURÉ
qui ont rendu fructueux, un chemin
pourtant long et difficile

remerciements

Cette recherche a été réalisée au laboratoire du Service d'Etude des Structures du C.E.B.T.P. à Paris, sous la direction de Monsieur B. FOURÉ, Responsable de la recherche au S.E.S.

Je tiens à lui témoigner tout particulièrement ma reconnaissance pour les conseils et les enseignements qu'il m'a donnés tout au long de nos travaux.

De ses qualités humaines, de sa grande expérience professionnelle, je garderais un souvenir indélébile.

Qu'il trouve en ces quelques mots, l'expression de ma plus profonde gratitude.

Mes respectueux remerciements vont à Monsieur BIAREZ, Professeur à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris et co-directeur de cette thèse, pour son aimable accueil dans cette grande école.

Que Messieurs les membres du Jury trouvent ici, l'expression de ma profonde gratitude pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Ma reconnaissance va également à Monsieur BONNEVILLE, Professeur à Lyon III qui assuré la direction de ma première post-graduation, Monsieur BELLABES, Monsieur R. HANNACHI, Monsieur TOUATI, lesquels, sans leurs encouragements, cette deuxième post-graduation n'aurait jamais eu lieu.

Qu'ils soient assurés de mon amicale sympathie.

Je remercie tout particulièrement Monsieur ABSI, Directeur Technique du C.E.B.T.P. et Professeur à l'E.C.P. pour m'avoir accueilli dans les laboratoires du C.E.B.T.P., pour le soutien et les encouragements qu'il m'a donnés.

J'exprime ma plus vive sympathie à tout le personnel du S.E.S. et mes camarades stagiaires, pour la fraternelle et chaleureuse amitié dont ils m'ont entourée.

A Monsieur TRINH, pour ses encouragements.

En témoignage de notre amitié, à mon ami HOANG.

Cette thèse a été dactylographiée par Mesdames BASSET et CHAUVEAU qu'elles soient remerciées pour leur gentillesse et pour leur patience.

J'exprime mes remerciements à Madame DIGONNAUX, et aux membres du centre de documentation de la F.N.B., pour leurs services très gentiment rendus.

A Madame BRONSART, dont l'aide a été efficace durant la réalisation des essais.

Je remercie le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Algérien pour l'octroi de la bourse d'études.

Tout particulièrement, je dédie ce travail à Mourad KHELLADI pour son aide précieuse, alors que la vie de cette thèse traversait un passage difficile.

Puisse cette thèse, être le premier jalon d'une coopération intense entre l'Ecole Centrale de Paris et l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger.

*

* *

PRESENTATION DE LA THESE

Pour mieux faciliter la compréhension des travaux réalisés dans cette thèse, ce manuscrit a été élaboré avec la structuration suivante :

PREMIERE PARTIE (Présentation de l'étude expérimentale)

Elle rapporte la réalisation et le but des essais $OE^{(*)}$, ainsi que la description des corps d'épreuve.

DEUXIEME PARTIE (Le domaine du comportement linéaire)

Elle présente une récapitulation concise de la théorie générale des poutres à profil mince ouvert en élasticité linéaire.

Nous y décrivons l'action séparée ou simultanée de l'effort normal, du moment de flexion, de l'effort tranchant ou ducouple de torsion. Par ailleurs, après un rappel des équations de la torsion mixte, nous proposons l'application de celles-ci aux deux familles d'essais envisagées dans le cadre de cette recherche :

- Essai $OE 1$, avec gauchissement gêné au voisinage de l'appui de flexion ;
- Essai $OE 2$, avec gauchissement libre au voisinage de l'appui de flexion.

Sur la base de divers calculs, nous proposons des conclusions très intéressantes concernant le calcul des profils minces ouverts en élasticité linéaire.

Nous y présentons aussi les résultats des essais OE dans le domaine linéaire, et leur comparaison au calcul.

(*) Référence du Contrat SETRA-C.E.B.T.P.

TROISIEME PARTIE (Comportement après fissuration : flexion)

Elle concerne les sollicitations et déformations en flexion simple, dans le domaine fissuré. Nous y vérifions la conservation de l'hypothèse de planéité des sections, malgré la présence d'une fissuration due à la flexion.

QUATRIEME PARTIE (Comportement en flexion-torsion après fissuration)

La recherche bibliographique qui y est réalisée, souligne l'originalité du thème traité. Elle a aussi permis de conclure quant au choix d'une démarche de résolution semi-empirique du problème. Sur la base de résultats d'essais, on y développe une méthode originale de calcul des rigidités de gauchissement et de torsion. La comparaison des résultats d'essais avec le calcul, confirme la validité des relations semi-empiriques proposées. En dernier lieu, nous y fournissons la synthèse des résultats obtenus dans le domaine fissuré, et leur application à la théorie de l'élasticité non linéaire.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIERES

RESUMES

INTRODUCTION

1ERE PARTIE : PRESENTATION DE L'ETUDE EXPERIMENTALE

1. - Corps d'épreuve
 - 1.1. - Formes et dimensions
 - 1.2. - Fabrication et conservation

2. - Caractéristiques mécaniques des matériaux
 - 2.1. - Armatures
 - 2.2. - Béton

3. - Réalisation des essais
 - 3.1. - Dispositif d'essai
 - 3.2. - Dispositions d'appui particulières à OE 2
 - 3.3. - Mesures
 - 3.4. - Procédure d'essai

4. - Observations concernant certains résultats de mesures
 - 4.1. - Symétrie ; précision et fiabilité de certaines mesures
 - 4.2. - rotations de torsion (domaine élastique non fissuré)

2EME PARTIE : DOMAINE DU COMPORTEMENT LINEAIRE

1. - Introduction (Synthèse bibliographique)

2. - Théorie des poutres à profil mince ouvert en élasticité linéaire
 - 2.1. - Action de l'effort normal, du moment fléchissant et de l'effort tranchant
 - 2.1.1. - Action de l'effort normal
 - 2.1.2. - Action du moment de flexion
 - 2.1.3. - Action de l'effort tranchant
 - 2.1.4. - Flèche totale

- 2.2. - Action du couple de torsion
 - 2.2.1. - Généralités
 - 2.2.2. - Torsion pure
 - 2.2.3. - Gauchissement général - Application à une section en double té
 - 2.2.4. - Gauchissement général - Théorie générale
 - A - Notions de coordonnée sectorielle et de pôle
 - B - Analogie entre la torsion non uniforme et la flexion
- 2.3. - Equations de la torsion mixte
 - 2.3.1. - Equations générales
 - 2.3.2. - Equation simplifiée
 - 2.3.3. - Conditions aux limites
- 2.4. - Mode d'analyse d'une poutre selon la valeur du rapport L/d
 - 2.4.1. - Définition de d : "longueur caractéristique"
 - 2.4.2. - Remarques sur les caractéristiques géométriques de la section
 - 2.4.3. - Solution du problème de torsion
- 3. - Présentation des résultats et confrontation aux calculs (domaine de l'élasticité linéaire)
 - 3.1. - Compléments
 - 3.1.1. - Inertie de torsion pure d'une section en double té non mince et d'épaisseur variable
 - 3.1.2. - Inertie de gauchissement compte-tenu de la variation d'épaisseur et des armatures
 - 3.1.3. - Inertie de torsion sectorielle compte-tenu des armatures
 - 3.1.4. - Récapitulation des grandeurs intervenant dans les rigidités
 - 3.2. - Comportement en flexion
 - 3.3. - Comportement en torsion seule
 - 3.3.1. - Rappel : Solution de l'équation de la torsion mixte
 - 3.3.2. - conditions aux limites expérimentales
 - 3.3.3. - comparaison des rotations mesurées et calculées

- 3.4. - Déformations dues au gauchissement gêné
 - 3.4.1. - Rappel : Calcul du bimoment, des contraintes et des déformations
 - 3.4.2. - Exploitation des mesures de déformations longitudinales des ailes
 - 3.4.3. - Comparaison des déformations mesurées et calculées
- 3.5. - Déformations dues aux cisaillements
 - 3.5.1. - Rappel : Calcul des contraintes de cisaillement et des déformations correspondantes
 - 3.5.2. - Interprétation des mesures de déformations ϵ_{45}
 - 3.5.3. - Comparaison des déformations mesurées et calculées

4. - Conclusion

===== 3EME PARTIE : COMPORTEMENT APRES FISSURATION : FLEXION =====

- 1. - Présentation générale
- 2. - Etat de déformation moyen
- 3. - Etat de fissuration moyen
- 4. - Comparaison au calcul
 - 4.1. - Déformations moyennes
 - 4.2. - Espacement et ouverture des fissures

===== 4EME PARTIE : COMPORTEMENT EN FLEXION-TORSION APRES FISSURATION =====

- 1. - Analyse bibliographique
 - 1.1. - Introduction
 - 1.2. - Les études antérieures
 - 1.3. - conclusions

2. - Comportement en torsion combinée à la flexion

2.0. - Généralités

2.1. - Influence des divers paramètres

2.1.1. - Rappels

2.1.2. - Les paramètres

2.2. - Comportement en torsion et flexion

2.2.1. - Expression des grandeurs liées au gauchissement
en élasticité non-linéaire

2.2.1.1. - Rappel de l'élasticité linéaire

2.2.1.2. - Généralisation au matériau non-linéairement
élastique

2.2.1.3. - Cas du béton armé - Béton tendu négligé

2.2.1.4. - Prise en compte du béton tendu

2.2.2. - Application aux poutres OE

2.2.2.1. - Position du centre de torsion

2.2.2.2. - Inertie de gauchissement

2.2.3. - Interprétation des mesures de déformations longitudinales ϵ

2.2.3.1. - Généralités

2.2.3.2. - Cas de OE 1 - Section $z = 0,125$ m et $z = 1,81$ m

2.2.3.3. - OE 1 - Autres sections et variation le long de
la poutre

2.2.3.4. - Cas de OE 2

2.2.3.5. - Centre de torsion et inertie de gauchissement
"expérimentaux"

2.2.4. - Effet du gauchissement sur la fissuration

2.2.5. - Interprétation du comportement d'ensemble

2.2.5.1. - Rotations de torsion

2.2.5.2. - Rigidité de torsion pour $(\overline{GK})_0$

2.2.5.3. - comparaison des déformations mesurées et calculées

2.2.6. - Déformations locales dues au cisaillement

2.3. - Conclusions relatives à la comparaison entre les mesures et le
calcul théorique

2.4. - Approche de calcul de la rigidité de torsion tangente à l'origine
d'une section en béton armé

2.4.1. - contribution des armatures à la rigidité de torsion

2.4.2. - Tentative de calcul de la rigidité de torsion à l'origine
(modèle proposé et formulation générale)

2.4.3. - Application aux essais OE et KE

2.5. - Proposition d'une loi de variation semi-empirique de la rigidité de torsion tangente d'un profil mince ouvert

2.5.1. - Introduction

2.5.2. - Loi de variation

2.6. - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

3. - Synthèse des résultats obtenus et applications à la théorie de l'élasticité non-linéaire

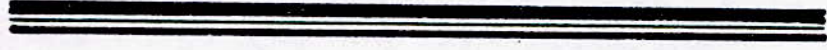
3.1. - introduction

3.2. - principales simplifications et hypothèses admissibles

3.3. - Transposition des résultats en élasticité non-linéaire

4. - Détermination des rigidités de torsion tangentes par une méthode graphique

Conclusion



NOTATIONS

NOTATIONS

Nota : La récapitulation qui suit ne contient que les notations essentielles.

MAJUSCULES

A	:	Aire de la section droite d'étude
A ₁	:	Aire réduite
A*	:	Aire limitée par le contour fermé (Γ)
B	:	Aire du béton seul
B _f	:	Aire du béton fissuré
B	:	Bimoment
C	:	Couple de torsion extérieur
C ₁	:	Partie du couple C équilibrée en torsion de Saint-Venant
C ₂	:	Partie du couple C équilibrée en gauchissement gêné
C	:	Centroïde de la section
C _t	:	Centroïde tangent
E	:	Module sécant du matériau
E _t	:	Module tangent du matériau
E _a	:	Module de déformation longitudinale de l'acier
E _b	:	Module de déformation longitudinale du béton
G	:	Centre de gravité
G _o	:	Module de déformation transversale
I	:	Moment d'inertie de flexion (/ à un axe)
I _p	:	Moment d'inertie polaire
J	:	Moment d'inertie de flexion d'une aile (/ à l'axe y)
K	:	Inertie de torsion pure
K ₁	:	Inertie de gauchissement
K ₂	:	Inertie de torsion sectorielle
L	:	Longueur de la poutre d'essai
L(s)	:	Moment statique sectoriel
M	:	Moment de flexion
M _u	:	Moment de flexion ultime
N	:	Effort normal
R _a	:	Raideur de torsion des armatures
S	:	Moment statique de la section considérée
S _m	:	Espacement moyen des fissures
T	:	Centre de torsion
T	:	Effort tranchant
V _M	:	Flèche due au moment de flexion M

V_T : Flèche due à l'effort tranchant T
W : Déplacement longitudinal

*

* *

minuscules

b : Largeur de la section
d : Longueur caractéristique
 $d\theta_1$: Rotation élémentaire correspondant à C_1
 $d\theta_2$: Rotation élémentaire correspondant à C_2
 du_{C1} : Flèche élémentaire provenant d'une rotation
 du_{C2} : Flèche élémentaire provenant d'une distorsion
e, e(s) : Epaisseur de la section
 f_c : Résistance à la compression du béton
 f_t : Résistance à la traction du béton
 g_i : Glissement de l'armature (i)
h : Hauteur de la section
 l_f : Longueur de flambement
l : Longueur d'essai de la poutre
r : Rayon de courbure
 r_i : Distance de l'armature (i) au centre de torsion T
s : Abscisse curviligne le long du contour de la section
 t_m : Ouverture moyenne des fissures au niveau de l'armature tendue
 x_m : Hauteur moyenne de la zone comprimée
 s_m : Ecart moyen entre deux fissures successives

*

* *

Lettres grecques

- $\Omega(s)$: Aire sectorielle (notée ω au § 2.2.4)
- ω : rotation de flexion
- Θ : Rotation de torsion
- $\delta\theta_i$: Rotation concentrée de l'armature (i)
- λ : Elancement mécanique
- ν : Coefficient de Poisson
- τ_{C1} : Contrainte de cisaillement due à la torsion pure C_1
- τ_{C2} : Contrainte de cisaillement due au couple C_2
- γ : Distorsion
- $\bar{\sigma}_N$: Contrainte normale produite par N
- $\bar{\sigma}_M$: Contrainten ormale correspondant à M
- ϵ_N : Déformation longitudinale engendrée par N

*

* *

- \bar{EA} : Rigidité normale
- \bar{EI} : Rigidité de flexion
- \bar{GK} : Rigidité de torsion
- \bar{EK}_1 : Rigidité de gauchissement

*

* *

Correspondance entre unités : 1 Inch = 25,4 mm
Kips = 4,45 kN
Ksi = 6,9 MPa

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La résolution du problème de l'état limite ultime de stabilité des éléments comprimés en béton armé ou précontraint se limite actuellement aux cas où n'interviennent que les contraintes et déformations dues à l'effort normal et au moment fléchissant.

Dans les problèmes de flambement en flexion composée déviée, quatre composantes de sollicitation sont à considérer :

- trois principales (l'effort normal et les deux moments de flexion)
- une secondaire (le couple de torsion).

Pour les éléments à section massive ou tubulaire, on peut négliger les déplacements dus au couple de torsion (qui accompagnent nécessairement, au second ordre, la flexion déviée), et il est alors assez aisé de généraliser les méthodes de calcul applicables au problème de flambement plan (Kavyrchine et Fouré : "Méthodes de calcul" Décembre 1978).

Dans le cas des poutres et poteaux dont la section est un profil mince ouvert (piles de ponts, grandes poutres préfabriquées, etc...), il n'est plus possible de négliger les effets de la torsion pour l'étude de la stabilité d'ensemble, plus particulièrement l'effet des rotations de torsion, même si les contraintes correspondantes restent faibles.

Il est donc nécessaire de porter attention, dans certaines sections, aux contraintes normales résultant de la superposition des effets de l'effort normal, des moments de flexion et du gauchissement gêné, et des contraintes de cisaillement résultant des efforts tranchants et de la torsion.

Les principaux problèmes qui se posent alors, pour l'évaluation des déplacements dus à la torsion, sont les suivants :

- le comportement du béton, du point de vue déformabilité hors du domaine linéaire, sous un état de contrainte biaxial de compression et de cisaillement (ce problème a déjà fait l'objet d'une recherche au C.E.B.T.P. par Fouré et Trinh) ;
- l'influence de la fissuration de flexion sur la rigidité de torsion (sous faible couple de torsion) et sur la répartition des contraintes de cisaillement ;
- la prise en compte du gauchissement gêné dans le domaine du comportement non linéaire avec fissuration.

Ce sont essentiellement les deux derniers points qui feront l'objet de la présente recherche (contrat de recherche OE - S.E.T.R.A.-C.E.B.T.P.).

*

* *

* * * * * RESUMÉS

المخلص

هذا البحث يكون لحساب معامل الجساءة للي (للالتواء) للقطاعات الرفيعة المفتوحة من الخرسانة المسلحة بالنسبة لأي قطاع ، بعد التشريح بالإلتهناء وبواسطة تقريب جديد يأخذ في الحساب تأثير مختلف المعاملات الثابتة الموجودة .
أمكن عمل طريقة خصوصية لتأخذ في الحساب إشتراك الحديد وتأثره على معامل الجساءة للإلتواء ، وكذلك تأثيره في حالة وجود الخرسانة والحديد معاً .

التجارب عملت على قطاعات مختلفة لتدرس تأثير الدوران نتيجة للي (الإلتواء) وعمل مقارنات بين الدراسة النظرية والدراسة العملية ، ووجدت أن الدراسة النظرية قريبة جداً من العملية .

هذا البحث يكون من نوعه الأول بالنسبة للتجارب العملية لدراسة مشاكل الإلتواء (الي) في وجود الشروع .

RESUME

Cette recherche est une contribution à l'évaluation des rigidités de gauchissement et de torsion d'une section mince ouverte en béton armé, de forme quelconque, après fissuration de flexion, par une approche nouvelle tenant compte de l'influence concomitante des différents paramètres existants.

Une attention particulière est donnée à l'évaluation de la contribution des armatures dans le terme rigidité, facteur déterminant d'une rigidité globale (béton et aciers) de ce matériau composite.

Des essais effectués sur des sections creuses, double t \bar{e} minces et rectangulaires minces, relativement aux rotations de torsion, déformations de cisaillement et déformations de gauchissement, concordent de façon satisfaisante avec les diverses relations semi-empiriques proposées, avantageusement par rapport aux théories "simplifiées" admises par les précédents auteurs.

Cette recherche est la première du genre, à aborder expérimentalement l'étude des problèmes de gauchissement gêné, hors du domaine linéaire, en présence de fissures dues à la flexion.

Mots-clés : Poutre - Béton armé - Béton précontraint - Elasticité linéaire - Elasticité non-linéaire - Etude expérimentale - Essai statique - Flexion-torsion - Fissuration - Profil ouvert - Section mince - Rigidité - Gauchissement.

SUMMARY

This research is a contribution to the evaluation of the twisting and torsional stiffnesses, after flexural cracking of a reinforced concrete beam, with thin walled open cross section of any shape. A new approach taking into account the simultaneous influence of the pertinent parameters is proposed.

Due to its major importance, a special attention is paid to the evaluation of the reinforcement contribution to the global stiffness of the composite material (concrete-steel).

Series of laboratory tests of R.C. beams with hollow, massive and I cross sections was performed. It was found that results like torsional rotations, shear and twisting deformations are in better agreement with the proposed semi-empirical formula, than with the simplified theories presented in previous works.

This is an original experimental research on the non-linear behaviour of R.C. beams submitted to torsion and restrained twisting after flexural cracking.

Key-words : Beam - Reinforced concrete - Prestressed concrete - Linear elasticity - Non-linear elasticity - Experimental research - Static-test - Bending-torsion - Cracking - Open profile - Thin walled cross-section - Stiffness - Twisting.

RESUMO

Esta pesquisa constitui uma contribuição à determinação das rigidezes ao empenamento e à torção, após fissuração por flexão, de seções esbeltas de concreto armado com perfil aberto e forma qualquer.

A apresenta se uma nova formulação que considera a influência simultânea dos diversos parâmetros envolvidos.

Face a seu papel fundamental dá - se especial atenção à contribuição dos armaduras à rigidez global do material composto concreto armado (concreto + aço).

Realizou - se uma série de ensaios de vigas de concreto armado de seção retangular vazada e maciça e em duplo - T, com medida de deformação de cisalhamento e empenamento e de rotação relativa de torção. Mostra - se que as relações semi-empíricas aqui propostas apresentam melhor concordância com os resultados experimentais que as das teorias simplificadas adotadas por autores precedentes.

Esta é a primeira pesquisa do gênero a abordar experimentalmente o estudo do problema de empenamento restringido no domínio não-linear e em presença de fissuras de flexão.

Palavras chaves : Vigas - Concreto Armado - Concrete Protendido - Elasticidade linear - Elasticidade não linear - Pesquisa experimental - Ensaios estáticos - Flexão-torção - Fissuração - Perfis abertos - Seção Esbelta - Rigidez - Empenamento.

1^{ere} PARTIE

**PRESENTATION
DE L'ETUDE EXPERIMENTALE**

1^{ere} PARTIE

PRESENTATION DE L'ETUDE EXPERIMENTALE

Après une étude préliminaire qui avait pour but de montrer comment se posent les problèmes et de faire le point de la bibliographie à ce sujet, on a réalisé deux essais de poutres à section en double-té mince soumises à un faible couple de torsion (inférieur à celui qui créerait des contraintes atteignant la résistance à la traction du béton). Ce couple est appliqué seul pour l'étude dans le domaine élastique linéaire ; il est exercé après l'application d'un moment de flexion, et pour divers niveaux de celui-ci, pour l'étude de l'influence de la fissuration. Il faut bien noter qu'il s'agit toujours de la fissuration due aux contraintes normales longitudinales ; le niveau des contraintes de cisaillement est toujours inférieur à celui où apparaîtraient des fissures inclinées.

1. - Corps d'épreuve

1.1. - Formes et dimensions

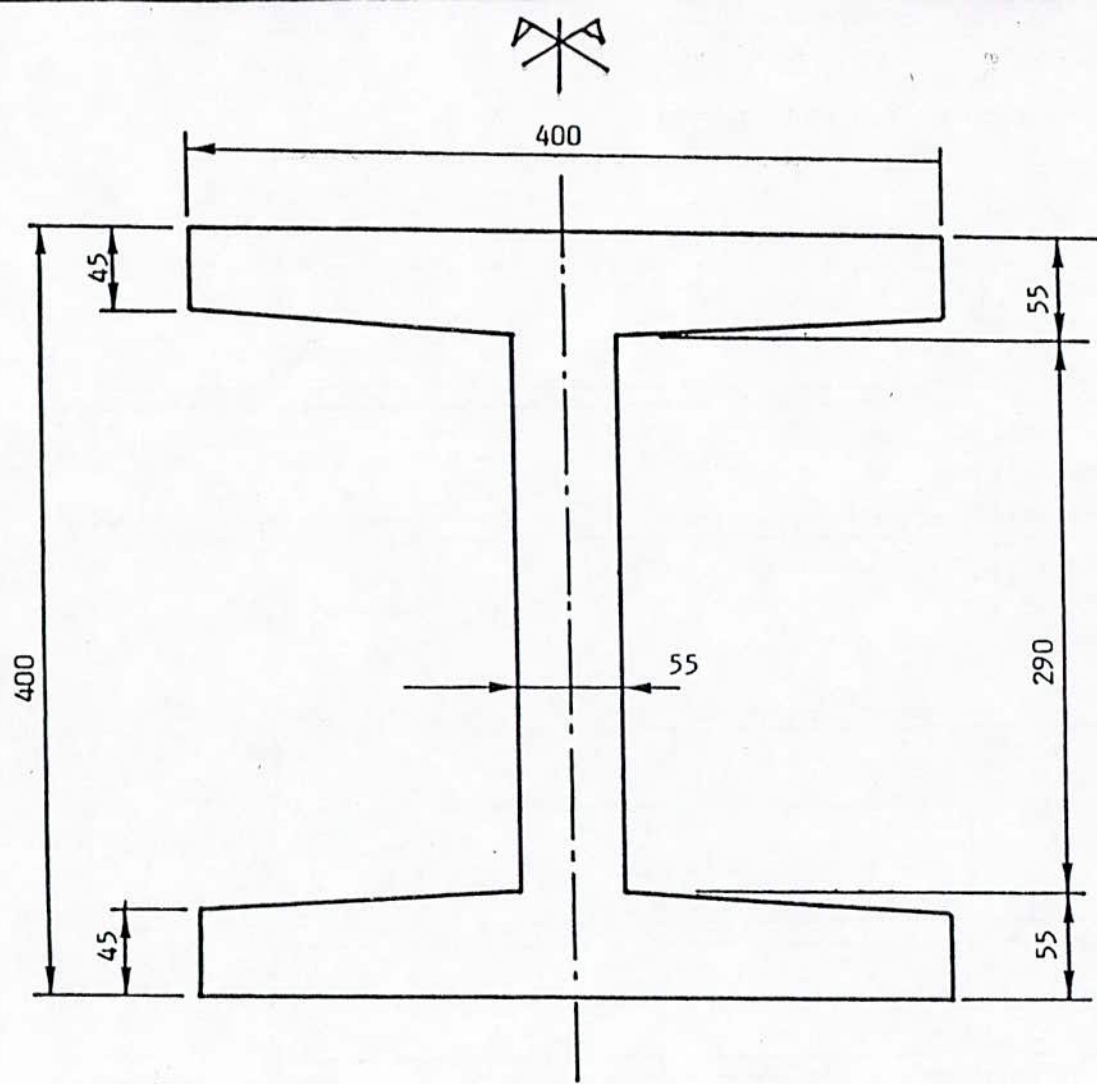
Les corps d'épreuve repérés OE 1 et OE 2 sont deux poutres de même section en double té symétrique de dimensions hors-tout 0,40 m x 0,40 m et d'épaisseur 45 à 55 mm (figure 1). Elles ont 5,20 m de longueur totale et sont munies de deux porte-à-faux de 0,65 m encadrant une travée centrale de 3,90 m de portée (figure 2). Elles possèdent toutes les deux un raidisseur central, mais leurs abouts sont différents, selon qu'on gêne ou qu'on libère le gauchissement. Dans le premier cas, OE 1, l'about est de section carrée pleine 0,40 m x 0,40 m sur une longueur de 0,73 m environ, à partir de chaque extrémité.

Dans le second cas, OE 2, où l'on veut laisser libre le gauchissement à l'appui, l'about de la poutre (entre l'appui et chaque extrémité) a la même section en double té que la partie courante, mais les ailes sont coupées à 0,54 m de l'extrémité ; des dispositions complémentaires sont prévues au point de vue ferrailage et conditions d'appui, pour libérer au maximum le gauchissement.

Le coffrage est en bois, appuyé intérieurement sur des gabarits noyés dans le béton (voir détails à l'Annexe 1) et raidi extérieurement par des profilés métalliques. La mesure des dimensions réelles des sections droites montre qu'on a obtenu, en moyenne, les cotes théoriques au millimètre près.

1.2. - Ferrailage

Le ferrailage de la zone courante (fig. 1) comprend des armatures longitudinales constituées de deux lits supérieur et inférieur symétriques de 5 Torsid \emptyset 10 chacun, dans les ailes, filant sur toute la longueur de la poutre, et de 6 barres \emptyset 4 crantées réparties sur la hauteur de l'âme et filantes sur toute la longueur. Le rôle de ces dernières est de contrôler l'ouverture des fissures dans l'âme.



Les cotes sont en mm

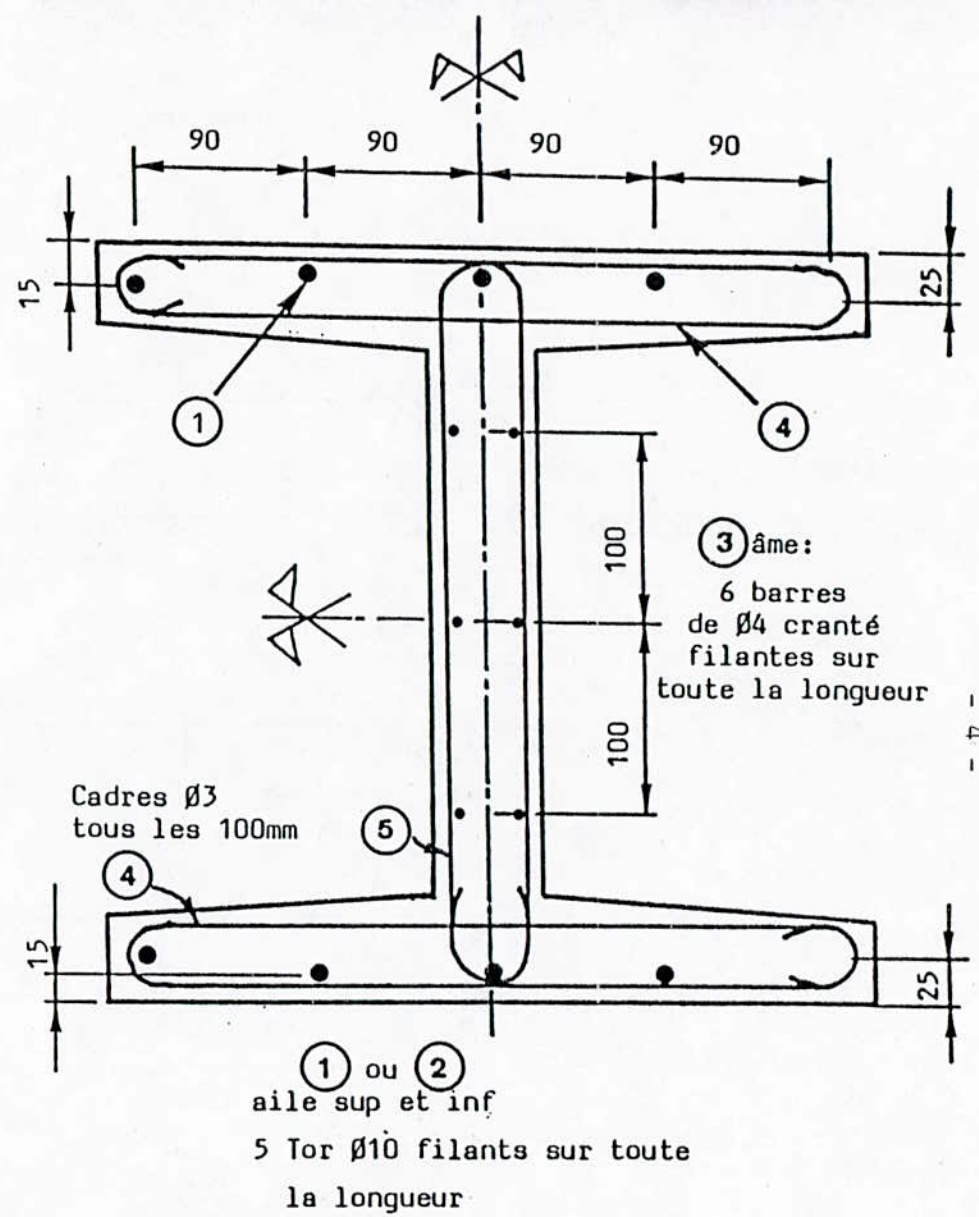


FIG 1 : Section courante OE1 et OE2

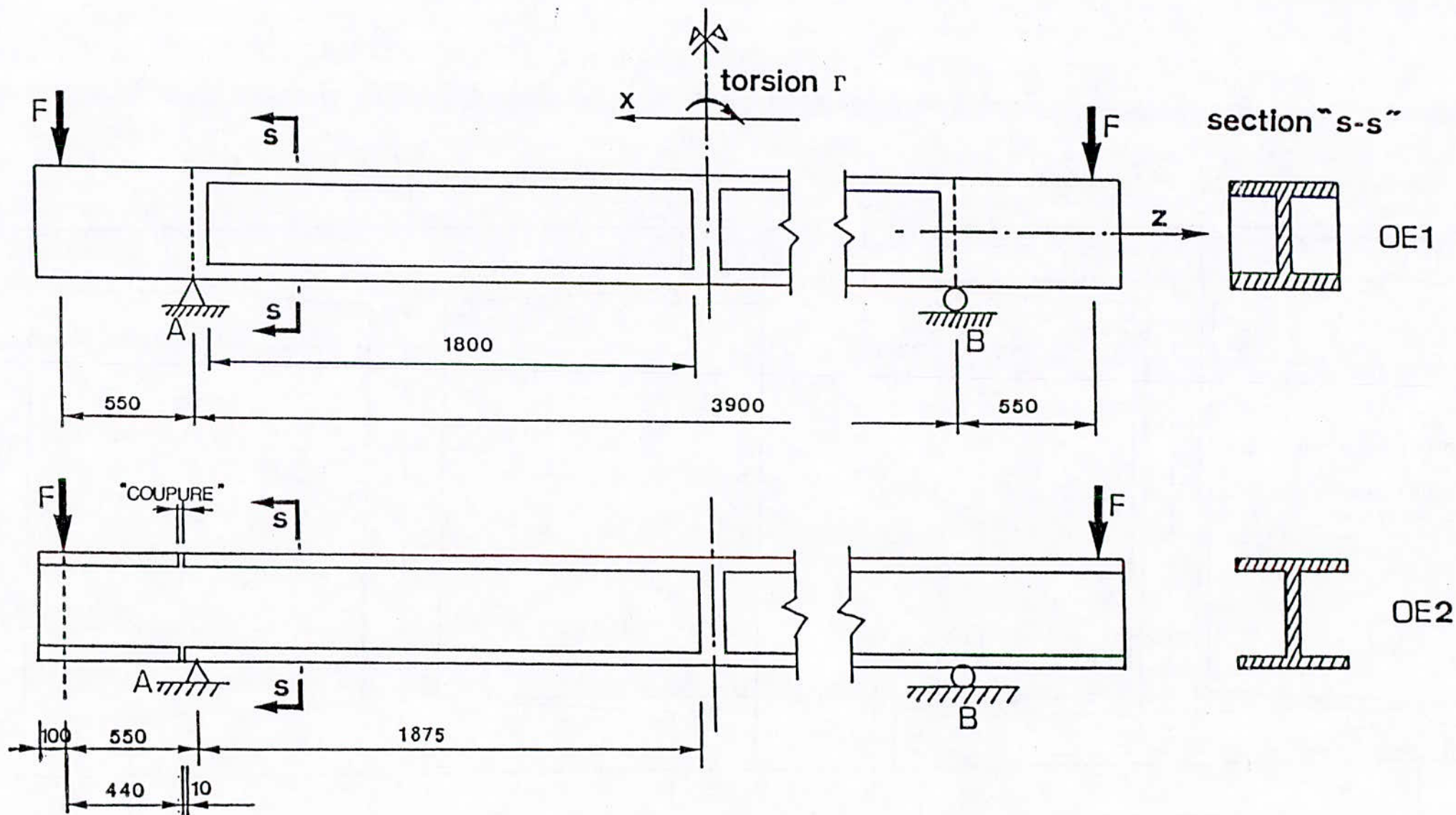


FIGURE 2 - Essais OE 1 et OE 2 ; Vue d'ensemble

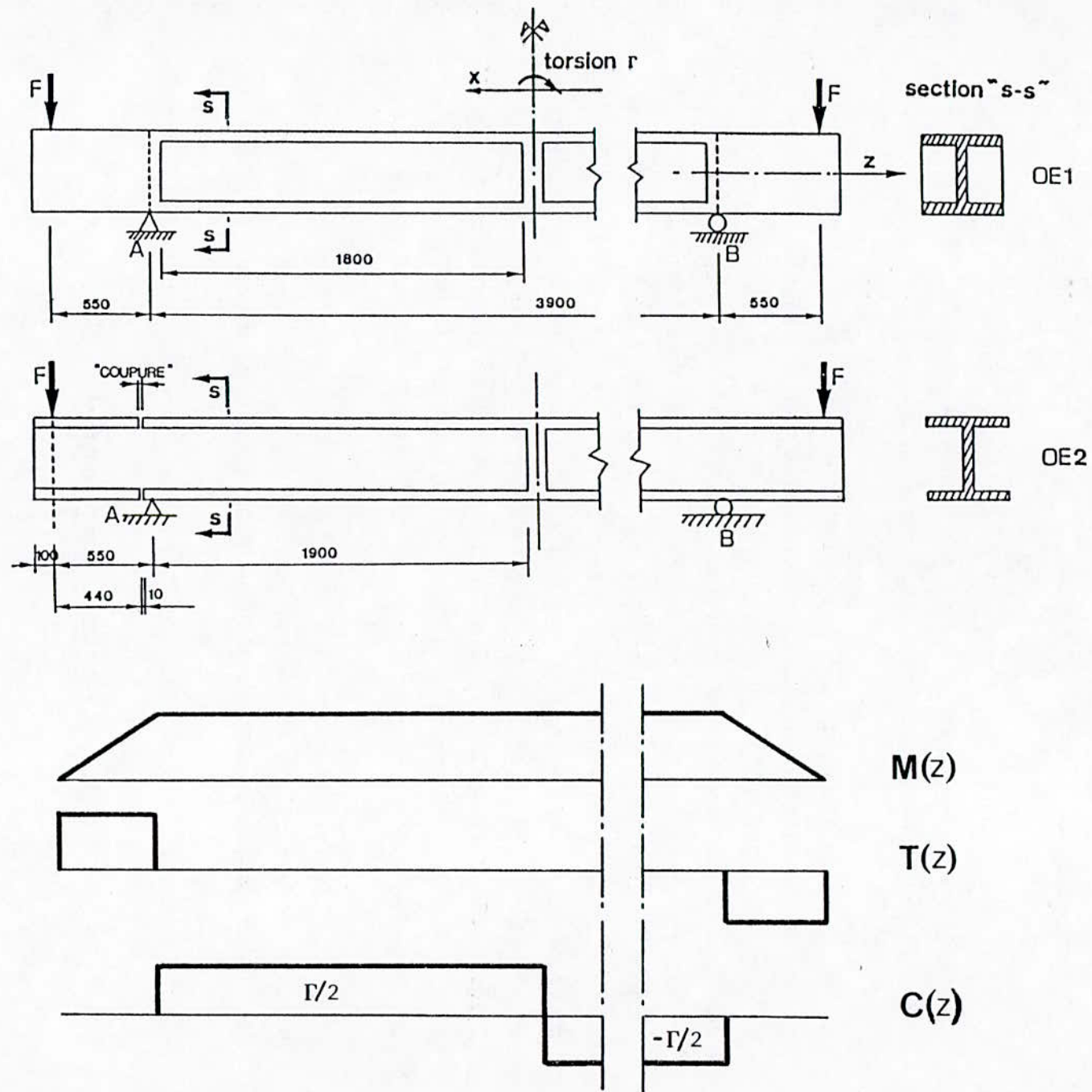


FIG 2 bis : Essais OE1 et OE2 ; Sollicitations appliquées.

Par ailleurs, on dispose aussi des armatures transversales qui correspondent au minimum nécessaire pour éviter que le corps d'épreuve ne présente une rupture fragile en torsion pure : il s'agit de cadres $\emptyset 3$ à l'espacement uniforme de 0,10 m.

Aux abouts, la poutre OE 1 présente une armature transversale renforcée pour la résistance à l'effort tranchant, mais le ferrailage ne présente pas de particularité notable.

Pour la poutre OE 2, les dispositions particulières consistent, d'une part à prévoir une coupure complète du béton des ailes, à environ 0,10 m de l'appui de flexion, vers l'about, et d'autre part à y rendre négligeable l'adhérence des armatures longitudinales des ailes supérieure et inférieure (sauf l'armature centrale au niveau de l'âme), par interposition d'une gaine plastique enduite de graisse sur toute la longueur de ces barres entre la coupure et l'extrémité de la poutre. Les armatures comprimées ne sont pas toutes nécessaires pour la résistance à la flexion ; on a cependant renforcé la zone comprimée par collage d'une plaque d'acier large de 55 mm et épaisse de 2 mm au droit de l'âme. Les armatures tendues sont, bien sûr, nécessaires ; elles sont parfaitement ancrées par soudage sur une plaque d'acier prenant appui sur l'extrémité de l'aile supérieure.

L'effort tranchant n'étant équilibré que par l'âme, il a fallu prévoir un ferrailage transversal assez dense. Au niveau de la coupure, les armatures longitudinales de l'âme apportent un supplément de résistance.

On trouvera à l'Annexe 1 les dispositions détaillées de ferrailage.

1.3. - Fabrication et conservation

Le béton utilisé avait la composition suivante :

ciment CPJ 45.....	430 kg/m ³
sable 0/0,5 mm.....	441 kg/m ³
sable 0,5/1,6 mm.....	163 kg/m ³
graviers 1,6/2,5 mm.....	113 kg/m ³
graviers 2,5/5 mm.....	913 kg/m ³
eau.....	225 l/m ³

	âge (jours)	f_{cj} (MPa)	E_{ij} (MPa)	ϵ_{b1} (‰)	f_{tj} (MPa)				
					fléxion	fendage			
OE1	30	44.7			2.45				
		45.2			2.95				
					3.05				
	42	47.5			30800		2.65	2.30	3.45
		47.5			32000		2.55	3.00	3.70
		49.0						3.05	3.90
OE2	64	52.2			3.30				
		54.4			3.30				
					3.50				
	72	55.9			34300		2.65	3.20	3.25
		57.6			33500		2.30	3.25	3.55
								3.55	3.70

Tableau 1 : Caractéristiques du béton mesuré sur éprouvettes

Age des corps d'épreuve au moment des essais:

OE1 : 40 à 43 jours ; OE2 : 68 à 70 jours.

Il s'agit d'un béton à petits granulats, très proche d'un micro-béton. Les affaissements du béton frais, mesurés au cône d'Abrams étaient 6,5 cm pour OE 1 et 6 cm pour OE 2.

On bétonne d'abord l'aile inférieure dont le coffrage de la face supérieure est amovible^{*}; on ferme celui-ci puis on bétonne l'âme et l'aile supérieure. Le tout est réalisé avec une même gâchée de béton.

Les poutres sont conservées en cure humide jusqu'à l'âge de 14 jours. Puis elles sont conservées à l'air, dans des conditions thermo-hygrométriques relativement peu variables.

2. - Caractéristiques mécaniques des matériaux

2.1. - Armatures

Les armatures longitudinales sont en acier Torsid \emptyset 10 à palier de plasticité pour les barres principales placées dans les ailes, en acier tréfilé cranté \emptyset 4 pour les armatures réparties dans l'âme.

Les caractéristiques mécaniques ont été mesurées par l'essai de traction des échantillons de chaque diamètre prélevés dans les barres ayant été utilisées pour les deux poutres. Les valeurs moyennes obtenues sont les suivantes (en MPa) :

	Torsid \emptyset 10	Tréfilé cranté \emptyset 4
nombre d'échantillons	4	3
limite d'élasticité f_e ou $f_{0,2}$	525	500
contrainte de rupture f_r	600	540
module E_a	195000	215000

2.2. - Béton

On a réalisé des essais de compression sur des éprouvettes cylindriques normalisées \emptyset 160 mm, dont certains avec enregistrement de la courbe contraintes-déformations, des essais de fendage sur le même type d'éprouvettes et des essais de flexion sur des prismes 70 x 70 x 350 mm.

Les résultats obtenus figurent au tableau I :

- résistance en compression	f_{cj}
- module de déformation à l'origine	E_{ij}
- abscisse du sommet de la courbe contraintes-déformations	ϵ_{b1}
- résistance à la traction (avec le facteur 0,6 habituel dans l'évaluation des résultats des essais de flexion).	f_{tj}

Pour une résistance f_{cj} assez élevée, on constate que le module E_{ij} est plutôt faible : ceci provient de l'utilisation de granulats de petites dimensions.

A l'âge du béton correspondant à l'essai des corps d'épreuve, on peut estimer que les caractéristiques du béton des éprouvettes étaient les suivantes (avec une incertitude notable pour le module, puisqu'on ne dispose que de deux mesures) :

	âge (j)	f_{cj} (MPa)	E_{ij} (MPa)	f_{tj} (MPa)
OE 1	42	48	31 500	2,9
OE 2	69	55	34 000	3,3

D'autre part, certaines des mesures de déformation locale des corps d'épreuve sous charge ont permis d'évaluer le module à l'origine E_{b0} et le coefficient de Poisson ν_0 du béton des corps d'épreuve (voir 3.3.). On a obtenu les valeurs suivantes :

	E_{bo} (MPa)	ν_o
OE 1	36 000	0,185
OE 2	37 000	0,185

Les valeurs de module plus élevées peuvent s'expliquer par un durcissement plus rapide du béton de la poutre, en épaisseur 50 mm, par rapport aux éprouvettes de diamètre 160 mm.

3. - Réalisation des essais

3.1. - Dispositif d'essai

Ce dispositif est le même, à quelques détails près, que celui utilisé dans la série d'essais antérieure sur des poutres à section rectangulaire de différentes longueurs (figures 3 et 4). La poutre est posée sur deux appuis munis d'un couteau à une extrémité, d'un rouleau à l'autre, distants de 3,90 m, et sollicitée en flexion par deux vérins verticaux agissant avec un porte-à-faux de 0,55 m aux extrémités. Les forces de flexion sont appliquées de telle sorte que leur excentricité éventuelle par rapport au plan moyen vertical de la poutre n'engendre un couple de torsion que dans les porte-à-faux et pas dans la portée centrale de la poutre et qu'il n'y ait pas d'interaction torsion-flexion due à la rotation de torsion.

Le couple de torsion est appliqué dans la partie médiane de la poutre, par l'intermédiaire d'un cadre métallique serré par des tiges précontraintes sur le gabarit du corps d'épreuve. Deux vérins verticaux exerçant des forces égales et opposées (avec des bras de levier égaux et opposés par rapport au plan moyen vertical de la poutre) agissent de part et d'autre de la poutre, en appliquant leurs efforts sur le cadre par l'intermédiaire de leviers réducteurs. Cette réduction est nécessaire du fait que les forces maximales à appliquer sont très inférieures à la capacité normale des plus petits vérins de haute qualité disponibles. Le coefficient de réduction est ici égal à 0,200. La mesure de ces deux forces et des bras de levier permet de connaître exactement le couple appliqué.

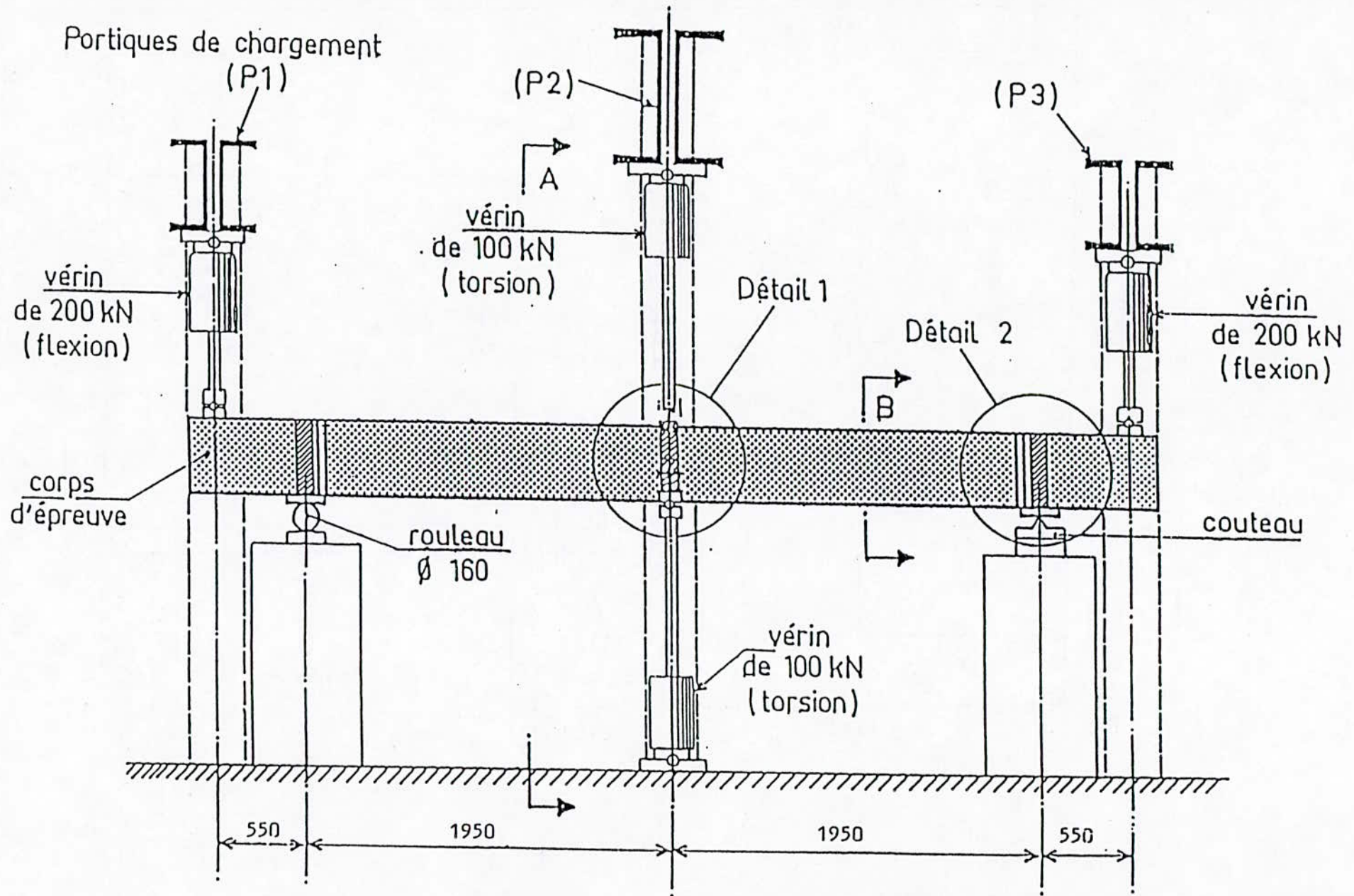


FIG 3 : Elévation latérale d'ensemble du dispositif d'essai

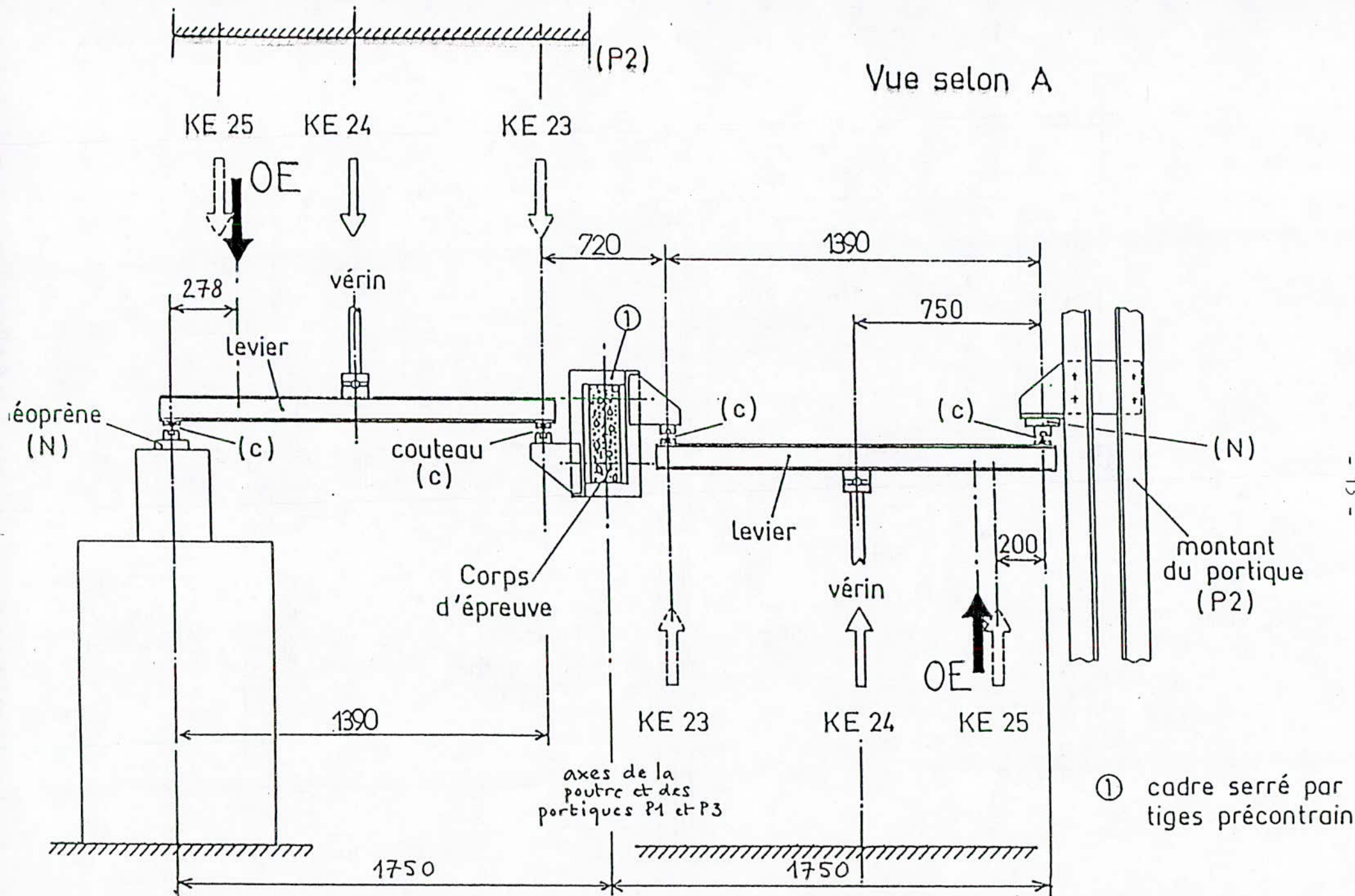


FIG 4 : Dispositif d'essai; détail 1: leviers de chargement

Les appuis de flexion réalisent aussi l'encastrement en torsion à l'aide d'un bras triangulé serré par des tiges précontraintes sur le gabarit noyé dans le béton de la poutre (figure 5). A l'autre extrémité, ce bras porte sur un dynamomètre qui permet de contrôler, par mesure de la réaction d'appui, que le degré d'encastrement est le même aux deux extrémités de la poutre, donc son comportement symétrique par rapport à la section médiane. Les conditions d'appui à la base du dynamomètre sont telles que la liberté de rotation en flexion est respectée. Ce dispositif s'oppose au soulèvement, lorsqu'on applique la torsion seule.

Les photographies des figures 6 et 7 illustrent l'ensemble du dispositif.

3.2. - Dispositions d'appui particulières à OE 2

Outre les dispositions prises dans la poutre pour éviter que les deux ailes de la section, dans les parties en porte-à-faux où le couple de torsion est nul, s'opposent au gauchissement des ailes de la partie courante entre appuis (cf. 2.1.1.), il fallait aussi éviter que les dispositions d'appui elles-mêmes s'opposent au gauchissement de l'aile inférieure.

Pour ce faire, on a adopté les dispositions qui suivent. Conformément au schéma de principe de la figure 8, la poutre repose sur la plaque supérieure rigide de l'appui de flexion (couteau ou rouleau) par l'intermédiaire d'une plaque d'acier inoxydable et de petits plots de téflon $27,5 \times 27,5 \text{ mm}^2$ (16 plots répartis sur une surface totale d'environ $150 \times 120 \text{ mm}^2$). La stabilité vis-à-vis d'un glissement d'ensemble est assurée par un axe vertical en acier, soudé sur une plaque solidaire de la poutre au bétonnage, axe qui pénètre dans l'alésage d'une butée solidaire de la plaque supérieure de l'appui de flexion.

En ce qui concerne l'appui de torsion (schéma de la figure 9), le bridage de la triangulation sur la poutre en béton se fait par appui au niveau des ailes avec interposition de plots associant néoprène, téflon et acier inoxydable ; de cette façon, on équilibre le couple de torsion par un couple de forces horizontales, sans s'opposer au gauchissement (déformation longitudinale) des ailes. Pour éviter de créer une flexion locale des ailes, l'effort tranchant dû à la réaction verticale d'appui à l'extrémité du bras triangulé

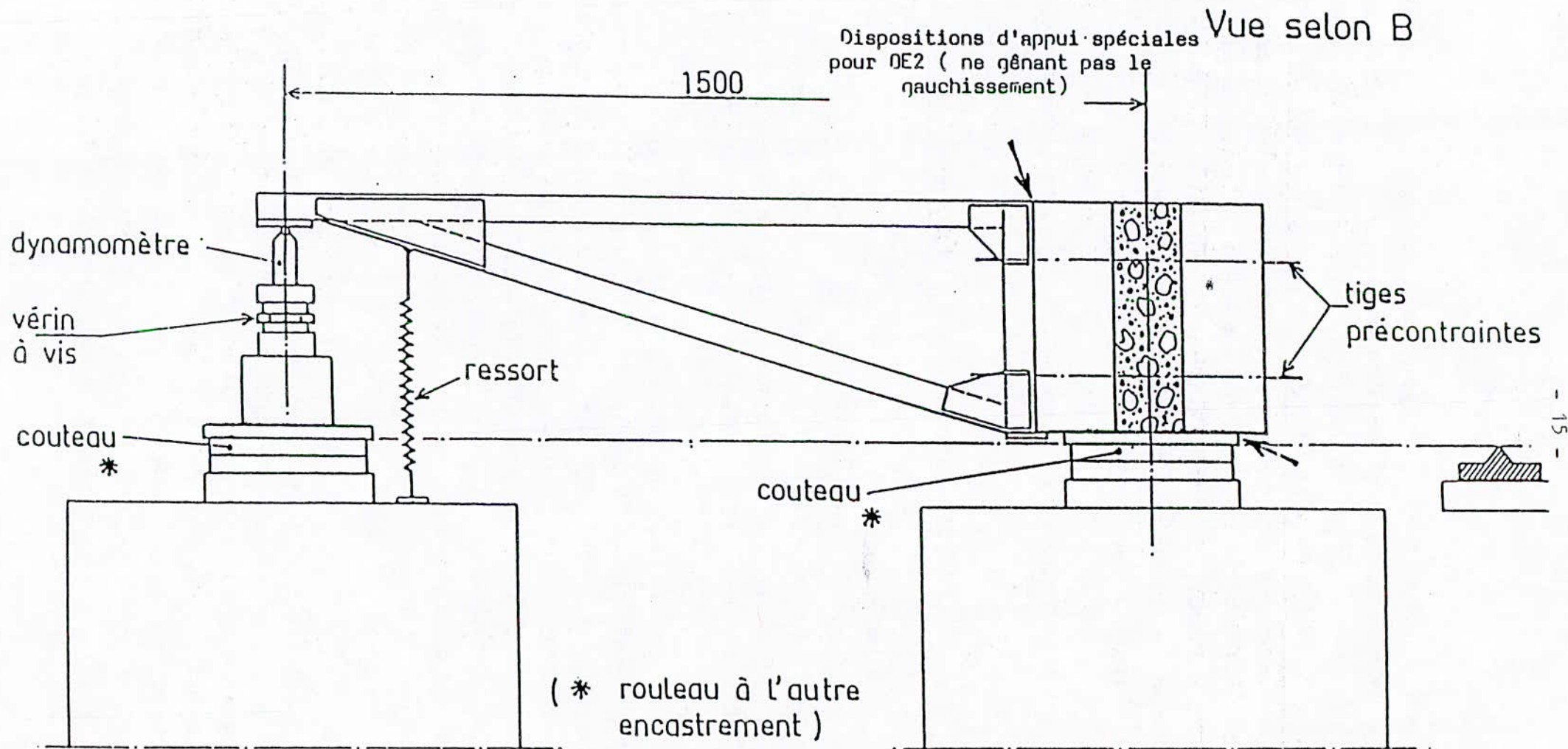


FIG 5 : Dispositif d'essai; détail 2 : encastrement en torsion

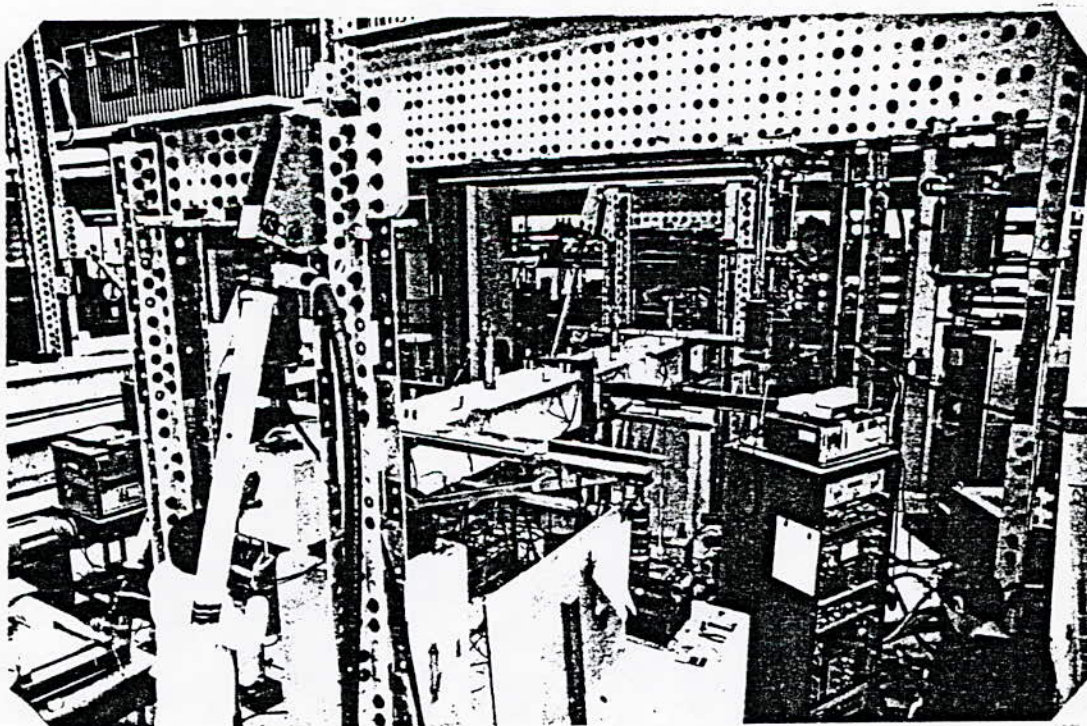
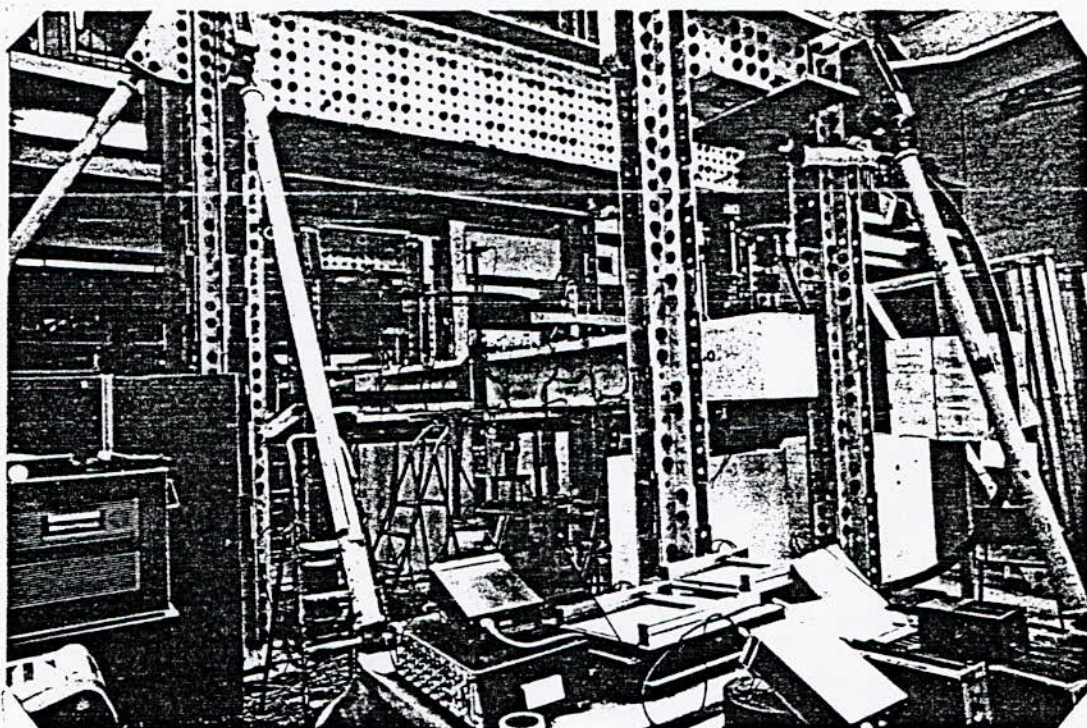


FIG. 6 - Vue d'ensemble du dispositif d'essai OE 1

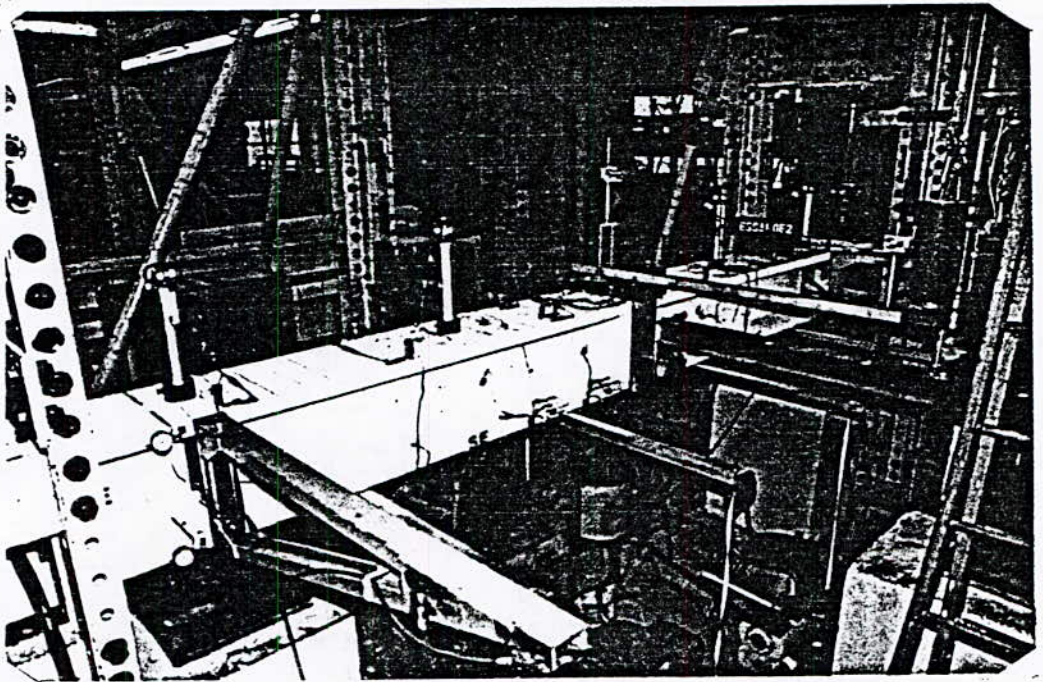
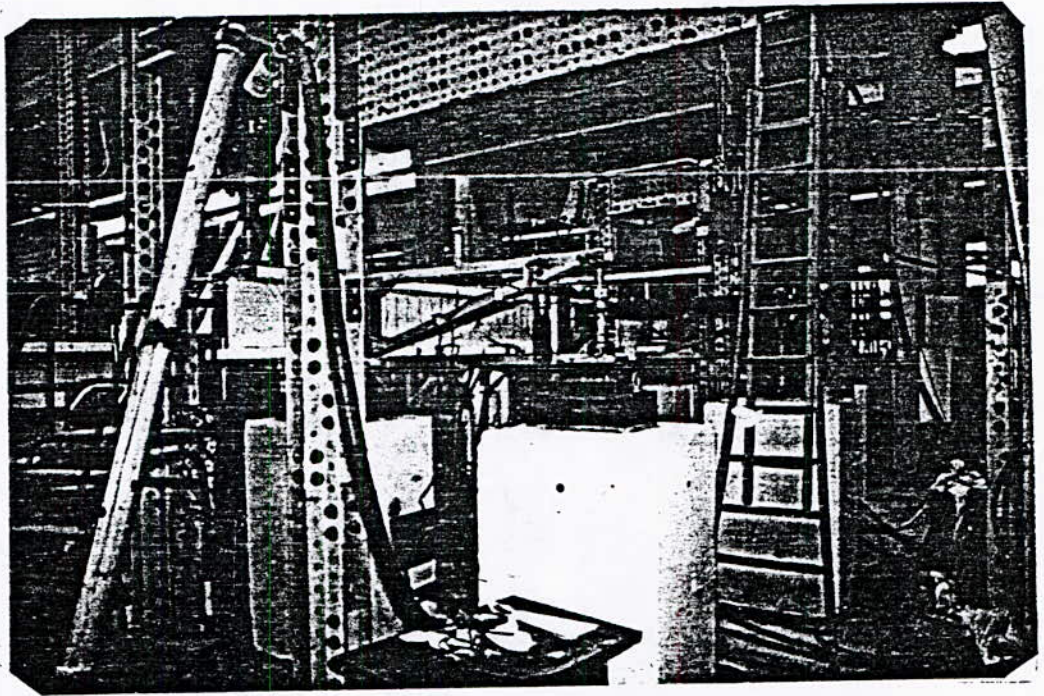


FIG. 7 - Vue d'ensemble du dispositif d'essai OE 2

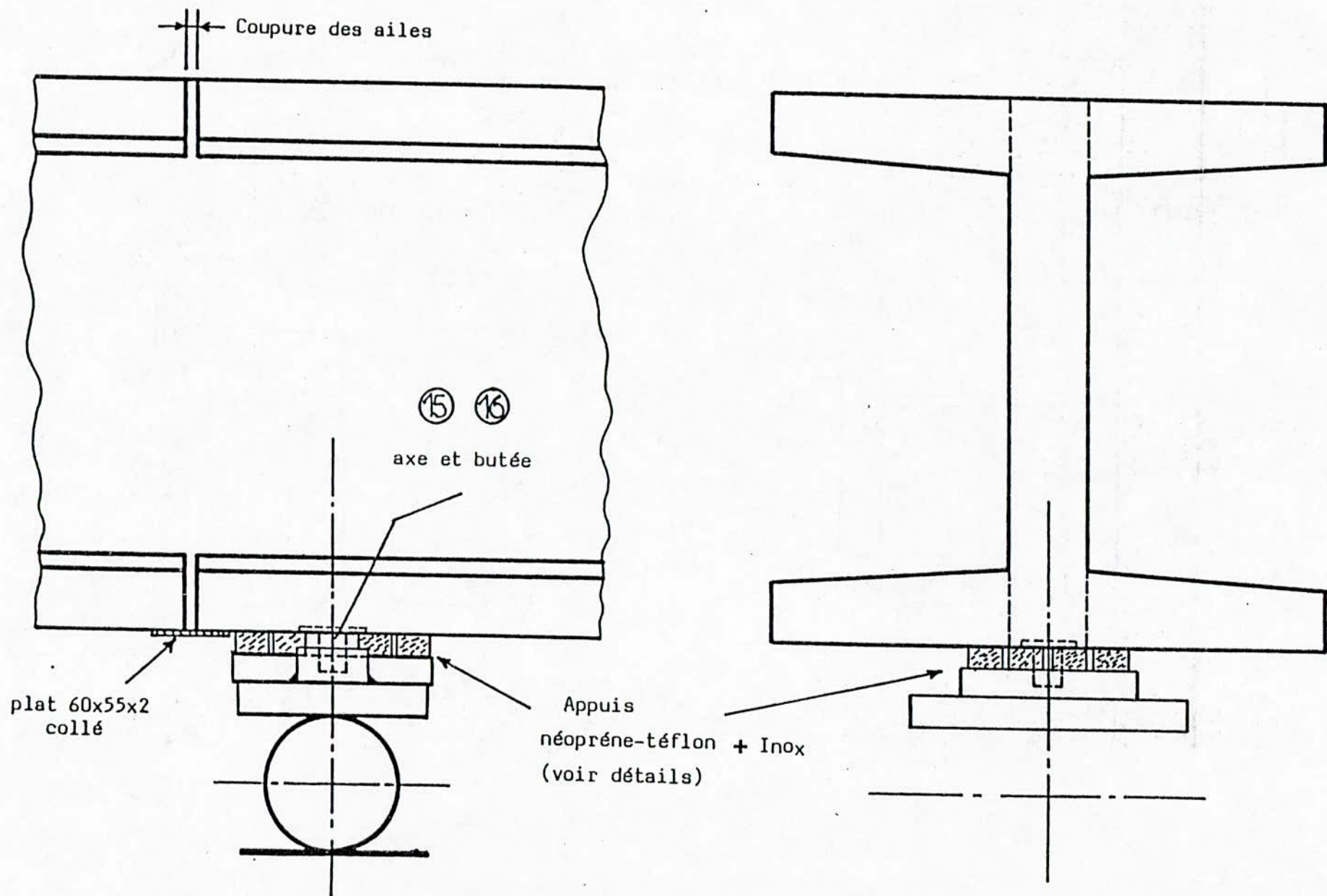
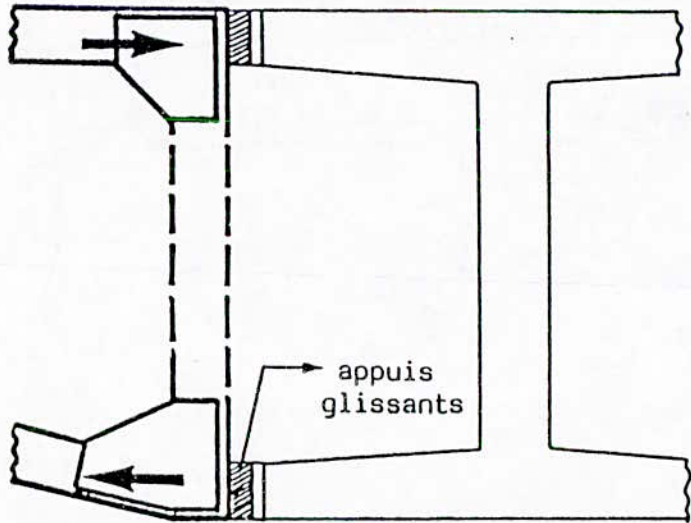
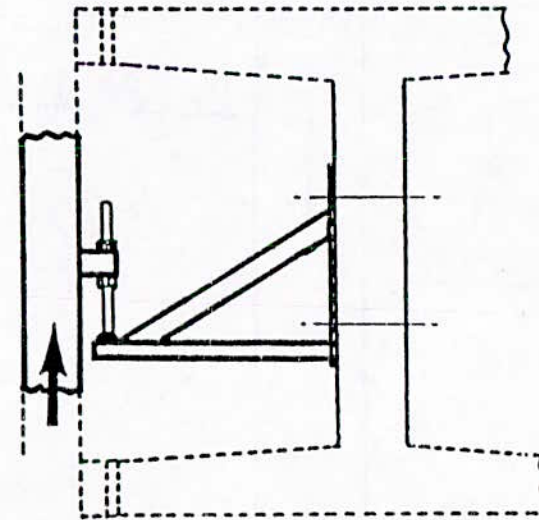


FIG 8 : Essai OE2; Appui limitant la gêne de la distorsion



Equilibre du couple



Equilibre de l'effort tranchant

FIGURE 9 - EQUILIBRE DU COUPLE ET DE L'EFFORT TRANCHANT

est reporté sur l'âme de la poutre en béton par l'intermédiaire d'une petite triangulation annexe (voir aussi la photographie de la figure 10).

On trouvera les dessins détaillés de diverses parties du dispositif à l'Annexe 1.

3.3. - Mesures

Outre la mesure des forces appliquées par l'intermédiaire de la mesure de la pression d'huile dans les vérins à frottement négligeable, on a réalisé un nombre très important de mesures de déplacements et de déformations (175 pour OE 1, 183 pour OE 2). En raison de la symétrie, une demi-travée est particulièrement instrumentée ; on ne répète dans l'autre que les mesures les plus importantes. On trouvera à l'Annexe 2 le détail de l'implantation de toutes les mesures.

Mesure des rotations de torsion :

Elles sont effectuées dans neuf sections le long de la poutre distantes de 0,475 m ou 0,50 m : la section médiane, les sections sur appui et deux sections intermédiaires par demi-travée. Dans une section, on utilise un clinomètre à jauges, ou l'association de deux capteurs mesurant le déplacement linéaire des extrémités d'un "bras" transversal solidaire de la poutre, à une distance de 1 m de part et d'autre de l'axe de celle-ci. Sur appuis et dans la section médiane, les deux moyens de mesure coexistent aux fins de recoupement.

Mesure des déformations longitudinales dues à la flexion :

Deux sections symétriques par rapport à la section médiane et distantes de celle-ci d'environ 1,10 m sont équipées sur toute leur hauteur ; la position de ces sections est approximativement celle où le moment de flexion a sa valeur moyenne sur la portée compte tenu du poids propre. Les déformations longitudinales y sont mesurées à divers niveaux, par divers moyens :

- sur les armatures tendues à l'aide de jauges de 6 mm de longueur active collées avant le bétonnage et réparties sur les différentes

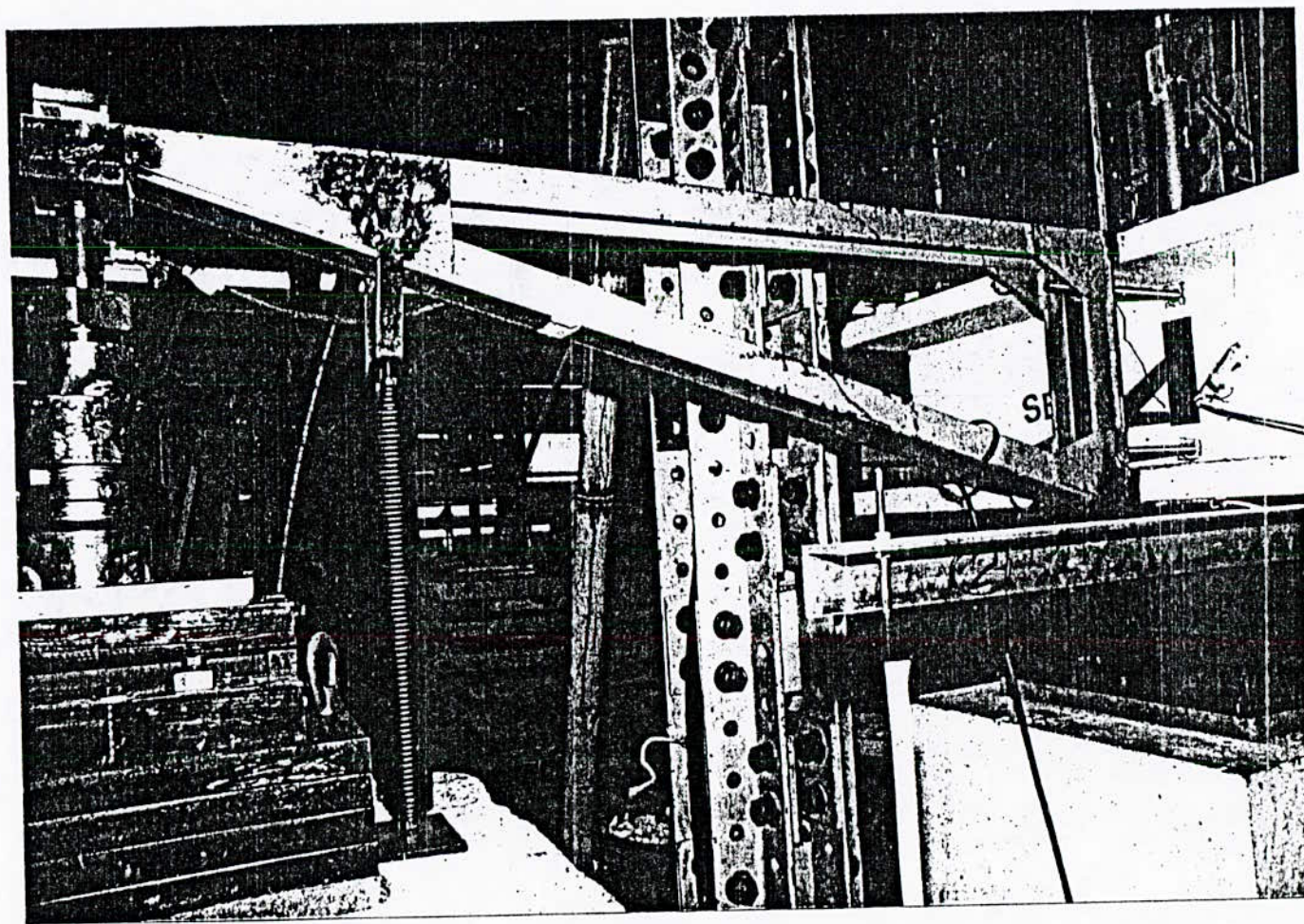


FIG. 10 - Vue de détail de l'appui du dispositif d'équilibre du couple de torsion à l'appui (OE 2).

- barres de façon à "couvrir" une zone longue de 150 mm et, après fissuration, à donner une valeur moyenne représentative de l'allongement moyen des armatures compte tenu des fissures et du béton non fissuré entre celles-ci ;
- sur les faces supérieure et inférieure, à l'aide de jauges de 120 mm de longueur active, collées sur le béton, qui donnent de bonnes indications, avant la fissuration, permettant de remonter à la valeur du module de déformation du béton. Sur la face inférieure, toujours comprimée, ces mesures restent valables après la fissuration. De plus, combinées avec celles des jauges transversales, elles permettent d'évaluer le coefficient de Poisson ;
 - sur l'âme, à l'aide de bases d'extensomètre mécanique de 200 mm de longueur qui permettent de poursuivre les mesures au-delà de la fissuration (l'extensomètre est déplacé manuellement de base en base, mais la mesure est électrique et transcrite sur une imprimante).

Mesures de déformations longitudinales dues à la gêne du gauchissement :

Ces mesures sont placées principalement dans des sections proches de la section médiane pour OE 2, de la section médiane et des sections d'appui pour OE 1, dans une seule demi-travée. Dans ces sections, on mesure les déformations des ailes supérieure et inférieure, au-dessus et au-dessous, à diverses distances du bord de celles-ci. Des mesures complémentaires, uniquement au-dessus de la face supérieure et au-dessous de la face inférieure et proches du bord de celles-ci, permettent d'étudier quelques autres sections de la même demi-travée ou de vérifier le comportement symétrique de l'autre demi-travée.

Les mesures sont faites à l'aide de jauges de 60 mm de longueur active sur l'aile inférieure toujours comprimée, à l'aide d'"extensomètres à lame fléchie" (base 100 mm, mesure électrique) sur la face supérieure de l'aile supérieure ou d'un extensomètre mécanique de 100 mm de base, à lecture directe, sur la face inférieure à l'aide supérieure, afin de poursuivre les mesures après la fissuration.

Mesures des déformations locales dues aux contraintes de cisaillement :

Ces mesures sont effectuées à l'aide de jauges de 30 mm de longueur active collées sur le béton avec une inclinaison de 45° par rapport à l'axe longitudinal de la poutre. Elles sont placées dans trois sections d'une demi-travée, une voisine de l'appui, la deuxième proche de la section médiane. Pour OE 1, la troisième section se trouve à une distance de l'appui égale à 0,975 m de telle sorte que cela corresponde théoriquement à la section où le couple équilibré par le gauchissement gêné est nul, les contraintes de cisaillement résultant donc de la torsion pure. Pour OE 2, la troisième section de mesures se trouve à une distance de l'appui égale à 1,20 m, ce qui correspond approximativement à la section où les couples équilibrés en torsion pure et en gauchissement gêné sont égaux.

Chaque section est équipée de jauges à mi-hauteur de l'âme (sur chaque face de celle-ci), au milieu de la face supérieure de l'aide supérieure et de la face inférieure de l'aile inférieure. Dans la troisième section, on a de plus des jauges sur les faces externes et internes des ailes à une distance de 115 mm de part et d'autre du plan de l'âme.

La photographie de la figure 11 montre un certain nombre des points de mesures de déformation locale sur la poutre OE 2.

Mesure de l'ouverture des fissures :

Cette ouverture est mesurée dans l'aile supérieure dans toute la travée, le long de trois lignes : l'une dans l'axe de la face supérieure, les deux autres sur les faces latérales, à 20 mm plus bas que la face supérieure soit approximativement au niveau des armatures tendues. Sous l'effet de la flexion, on effectue les mesures sur toute la travée ; sous l'effet du couple de torsion maximal relatif à chaque phase (voir 3.4.) on limite les mesures à des zones de 0,45 m de longueur à partir du raidisseur médian pour OE 2, à ces zones plus celles de même longueur comptées à partir des blocs d'about pour OE 1.

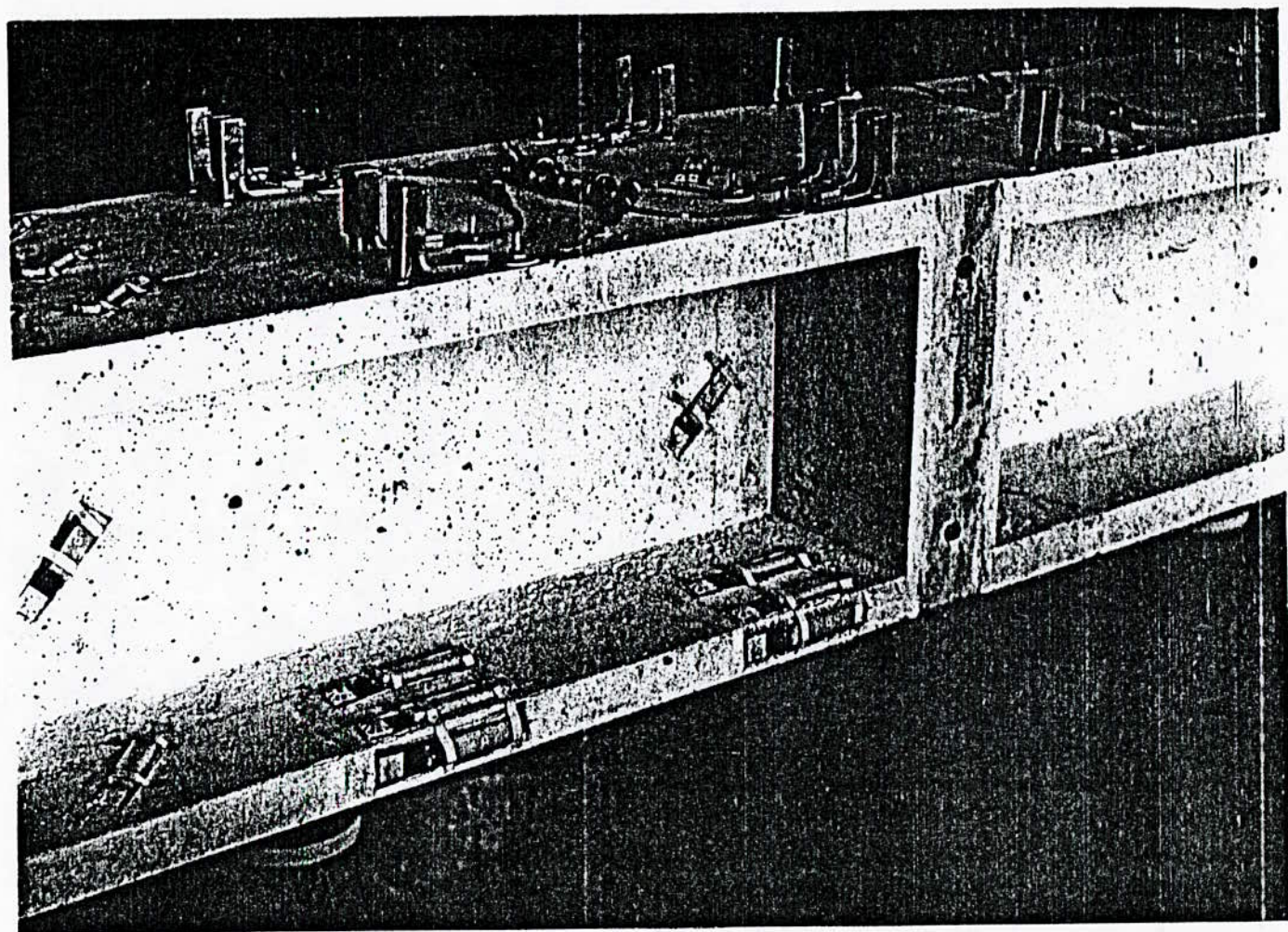


FIG. 11 - Vue de détail des points de mesure près du milieu de la poutre OE 2

Dans l'essai OE 2, on a mesuré aussi la variation d'épaisseur des "coupures" des ailes, aux bords de celles-ci.

Enregistrements graphiques et photographiques :

On enregistre en continu la rotation de torsion mesurée par le clinomètre médian en fonction du couple de torsion appliqué.

Les fissures sont soulignées par un tracé au feutre, avec une couleur différente à chaque phase de l'essai (voir 3.4.) et des photographies sont prises.

3.4. - Procédure d'essai

On réalise d'abord quatre cycles de chargement en torsion pure, par paliers, le couple maximal étant tel que la contrainte normale de traction maximale due à la gêne du gauchissement soit égale à environ 70 % de la résistance à la traction f_t .

On réalise ensuite quatre cycles de flexion pure, le moment maximal étant tel que la contrainte maximale de traction (y compris l'effet du poids propre) soit égale à 60 % environ de la résistance f_t . Pour OE 2, la fissuration s'est produite accidentellement pendant le premier cycle, par suite d'une erreur d'échelle dans la mesure de la force de flexion.

Puis on augmente le moment de flexion de façon à réaliser la fissuration, en s'arrêtant à un niveau correspondant approximativement à la moitié du moment qui provoque la plastification des armatures tendues (Phase A). La flèche correspondante dans la section médiane étant alors maintenue constante, on applique la torsion par paliers jusqu'à l'atteinte du couple qui engendre une contrainte maximale de traction due au gauchissement gêné égale à $0,66 f_t$ (selon le calcul de la poutre non fissurée).

On réalise ainsi successivement trois phases correspondant aux valeurs suivantes du moment de flexion rapporté au moment de plastification et de la contrainte de traction dans le béton due à la torsion (rapportée à la résistance à la traction) :

phase	flexion	torsion
	M/M_p	τ_b/f_t
A	50 %	66 %
B	75 %	62 %
C	95 %	58 %

A chaque palier de torsion, la rotation est, en principe maintenue constante (*). Pour l'essai OE 1, ceci a été réalisé grâce à un asservissement électronique de la pression d'huile dans les vérins à la mesure de la rotation; pour OE 2, par suite d'une défaillance de l'asservissement, on a simplement fermé le circuit d'huile (volume constant) ce qui n'a pas assuré le maintien de la rotation avec une aussi bonne précision.

A chaque étape de l'essai, on effectue l'ensemble des mesures automatisées. On effectue les mesures d'extensomètre mécanique de 200 mm de base, le tracé et la mesure d'ouverture des fissures à l'atteinte de chacun des trois niveaux de flexion A, B et C. Pour chacune de ces phases, on effectue de plus les mesures d'extensomètre mécanique de 100 mm de base et certaines mesures d'ouverture de fissures à l'étape où le couple de torsion est maximal.

4. - Observations concernant certains résultats de mesures

4.1. - Symétrie ; précision et fiabilité de certaines mesures

La symétrie du comportement des deux demi-travées par rapport à la section médiane a été très bonne pour OE 1, un peu moins satisfaisante pour OE 2. Dans les deux cas, on interprétera les résultats en raisonnant sur le comportement moyen des deux demi-travées.

(*) Pendant les cycles préliminaires dans le domaine élastique, sans fissuration, le couple de torsion était maintenu constant.

Les déformations locales dues au cisaillement et à la gêne du gauchissement sont très petites (de l'ordre d'une dizaine ou de quelques dizaines de 10^{-6}). Seules les mesures par jauges de déformation sont assez précises pour limiter l'incertitude relative à une valeur acceptable. Les mesures par extensomètres mécaniques ne peuvent donner que des ordres de grandeur ; par contre les extensomètres à lames donnent des mesures dont la qualité approche celle des jauges.

Les rotations de torsion sont aussi très petites et leur mesure précise difficile. Les mesures par clinomètre à jauges réalisées dans les sections autres que la section médiane sont, en moyenne, satisfaisantes bien que la sensibilité des appareils soit limitée. Dans la section centrale, on a utilisé un clinomètre spécial très sensible mais dont l'étalonnage est délicat et la fidélité non garantie lorsque l'on passe de la position d'étalonnage sur un banc à la position d'essai sur la poutre (voir 4.2.).

Pour les mesures par capteurs de déplacement, on a utilisé les appareils les plus sensibles et précis là où les rotations devaient être les plus petites, aux appuis et à leur voisinage ; ceci était particulièrement important pour mesurer la rotation des appuis déformables de OE 2. Par contre, dans la section médiane (recoupement avec le clinomètre), la sensibilité des capteurs s'est révélée insuffisante ; dans les sections voisines de la section médiane, ces mesures présentent une assez forte dispersion (pour OE 2 en particulier).

4.2. - Rotations de torsion (domaine élastique non fissuré)

La mesure des rotations est la plus fondamentale car elle donne directement la rigidité globale de la poutre vis-à-vis de la torsion.

Dans le domaine élastique, avant fissuration, on peut la caractériser par :

- l'évolution de la rotation de la section médiane (corrigée de la rotation aux appuis) en fonction du couple ;

- les valeurs de la rotation (corrigée de celle des appuis) le long de la poutre sous couple maximal.

On considère non pas la valeur absolue du moment de torsion C (égal à la moitié du couple extérieur Γ), mais sa variation ΔC par rapport à la première étape sous couple nul, de façon à éliminer les incertitudes sur l'état "zéro". On fait la moyenne sur les trois derniers cycles préliminaires seulement, le premier étant toujours légèrement différent.

En ce qui concerne la rotation dans la section médiane les résultats des mesures obtenues par le clinomètre sont présentés par des points à la figure 12. Elles sont très peu dispersées et traduisent, en moyenne un comportement bien linéaire représenté par la droite moyenne. On a porté aussi les résultats obtenus par les capteurs de déplacement, qui sont beaucoup plus dispersés et moins bien linéaires, mais montrent que l'ordre de grandeur de la rotation mesurée par le clinomètre est surestimé.

Par une analyse du même type que celle qui précède, on détermine la meilleure droite de variation de la rotation mesurée en fonction du couple dans chacune des sections de mesure. On en déduit la valeur expérimentale moyenne, dans chaque section, pour une valeur unité du couple ; en anticipant sur la suite, ces valeurs sont portées à la figure 17 pour OE 1 et à la figure 18 pour OE 2. L'allure de la courbe de variation de la rotation Θ le long de la poutre étant donnée par les calculs théoriques dont il sera question plus loin, on peut alors apprécier la valeur corrigée de la rotation au milieu. On en déduit le facteur correctif à apporter à l'étalonnage du clinomètre (*) :

0,88 pour OE 1 ,
0,92 pour OE 2 .

Les valeurs mesurées de la rotation dans la section médiane de la poutre permettent de déterminer la rigidité de torsion "globale" de la poutre sur l'ensemble d'une demi-travée de longueur $l = 1,95$ m :

(*) facteur valable pour toutes les phases de l'essai, le clinomètre restant fixé à la poutre dans les mêmes conditions pendant toutes ces phases.

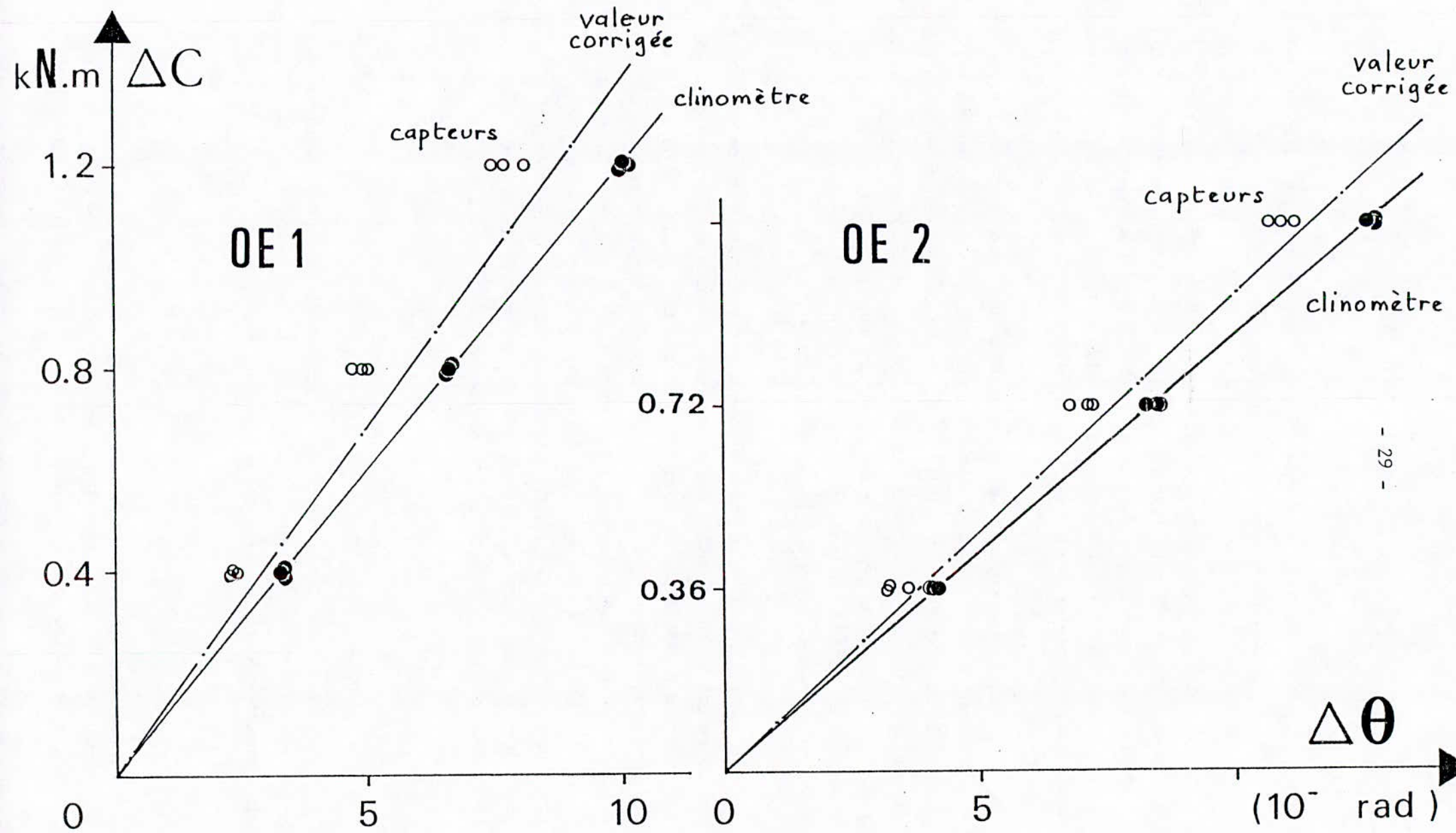


FIG. 12 - Rotation dans la section médiane en fonction du couple

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{\Delta \theta / \ell} &\simeq 2700 \text{ kN.m}^2/\text{rad} && \text{pour OE 1,} \\ &\simeq 1800 \text{ kN.m}^2/\text{rad} && \text{pour OE 2,} \end{aligned}$$

soit 3,7 fois la rigidité de torsion pure pour OE 1, 2,4 fois pour OE 2.

5- Programme de déroulement du chargement:

Il est donné à l'ANNEXE 4.

2^{eme} PARTIE

DOMAINE DU COMPORTEMENT LINEAIRE

1. - INTRODUCTION (Synthèse bibliographique)

Jusqu'au début du siècle, dans la science de l'ingénieur, on désignait par le terme de "torsion" la théorie établie par Saint-Venant [99], selon laquelle l'effort intérieur agissant sur la section résulte d'un flux de cisaillement fermé, sans considérer les contraintes tangentielles dues à la variation des contraintes normales dans la direction longitudinales d'une barre (torsion non uniforme). D'importantes contributions à l'application de la théorie de Saint-Venant ont été apportées par Bredt [11] (formule désignée par son nom), par la description relative à l'analogie de Prandtl, par l'apport au calcul des constantes de torsion des profils laminés de A. Foppl [42] et par les travaux de C. Weber et W. Gunther [108].

S. Timoshenko [101] a, pour la première fois résolu un problème de torsion mixte.

A Göttingen, après avoir traité le déversement de la poutre de section rectangulaire, Prandtl [89] présenta à Timoshenko [101] le problème du déversement des poutres en I. Ces résultats qui ont conduit à la théorie de la "torsion avec flexion des ailes" ont été publiés en 1905 en langue russe et en 1910 en langue allemande.

La contribution de Timoshenko pour la section en I fut la résolution d'un problème des valeurs propres (reprise en partie par Vlassov [104] pour certains profils ouverts).

Dans le profil \square , également très important, le problème correspondant des valeurs de bord apparut au premier plan. Des essais de flexion commentés par Von Bach [105] en 1909, ne montrèrent jamais une répartition plane des déformations longitudinales pour des poutres présentant une section en \square , dans le sens de l'hypothèse de Bernoulli-Navier (les tensomètres ayant indiqué la somme des déformations engendrées par les contraintes de flexion et les contraintes de gauchissement).

C'est seulement dix ans plus tard, que ces résultats furent interprétés correctement par R. Maillart [73] et A. Eggenschwyler [31] qui définirent l'axe des centres de cisaillement comme lieu géométrique que tous les plans de charge doivent contenir, pour que la flexion ne soit pas accompagnée de torsion.

La théorie de la torsion non uniforme relative à des sections ouvertes à parois minces, de forme quelconque, trouve son origine principalement dans les travaux de M. Wagner [109] et R. KAPPUS [68] qui étudièrent le flambement par torsion des barres. En plus des travaux de Goodier [44], TIMOSHENKO [101] et Bleich [12] ont publié aux U.S.A. des résumés et des articles concernant la théorie des barres à section ouverte à parois minces, dans lesquelles ils traitent principalement les problèmes de stabilité de ces éléments de construction.

les aspects relatifs à la construction aéronautique ont été développés dans un ouvrage de P. Kuhn [67].

Toutefois, ce n'est qu'en 1940, sous la forme d'un recueil de Vlassov [104] des problèmes inhérents à la torsion, que le problème de la torsion mixte est éminemment traité. Par ailleurs, il semblerait aussi que les notions de coordonnées sectorielles fondamentales, aient été introduites pour la première fois par Vlassov...

Pour des profilés métalliques minces, dans le domaine de l'élasticité linéaire, cette rétrospective montre que beaucoup de recherches et de travaux ont été menés dans ce sens et que la théorie classique de la résistance des matériaux a été suffisante pour l'évaluation des états de contrainte et de déformation, dans une pièce de forme quelconque. Il n'en demeure pas moins que, pour le matériau béton armé, la résistance des matériaux classique n'est plus suffisante pour le calcul de sections de forme quelconque dans la mesure où on ne connaît pas de démarche uniforme, applicable quelle que soit la forme de la section. Par ailleurs, si pour une section mince, l'analogie de la membrane fournit un outil de calcul assez fiable de l'inertie de torsion, on ne connaît pas d'expression générale de l'inertie de torsion pour des sections massives. Pour cela, nous nous sommes proposés, d'une part d'établir une synthèse concise

de la théorie des poutres à profil mince ouvert en élasticité linéaire, et d'autre part d'établir une confrontation originale de cette théorie avec les résultats expérimentaux des essais OE 1 et OE 2. L'originalité de cette vérification réside dans le fait que la littérature ne mentionne aucune comparaison de ce genre.

Le tableau 2, ci-après, donne les principales contributions de la littérature sur la torsion des pièces en béton, béton armé, béton précontraint dans le domaine de l'élasticité linéaire.

	NON ARME	BETON ARME	BETON PRECONTRAINTE
TORSION PURE	Théorie classique de l'élasticité Théorie classique de la plasticité Morsch (1904) C. Von Bach (1909) Prandtl & Timoshenko (1910) Bach (1912) Young, Sagar & Hughes (1923) Miyamoto (1927) Turner et Davis (1934) Marshall & Tembe (1941)	Saint-Venant Young, Sagar & Hughes (1923) Rausch (1929) Turner & Davis (1934) Andersen (1935-1937) Vlassov (1940) Cowan (1950) Ernst (1957)	Nylander (1945) Cowan (1953) Humphreys (1957) Zia (1961)
TORSION ET FLEXION	Fischer (1950) Cowan (1953)	Nylander (1945) Cowan (1953) Amstrong (1956) Chinenkov (1959) Lessig (1959) GESUNG (1964) Pandit & Warwaruk (1965)	Cowan (1953) Gardner (1963) Swamy (1962) Reeves (1962)
TORSION, FLEXION ET CISAILLEMENT		Vlassov (1940) Tylander (1945) Lyalin (1959) Lessig (1961) Yudin (1964) Farmer (1965) Ersoy (1965)	

TABLEAU 2

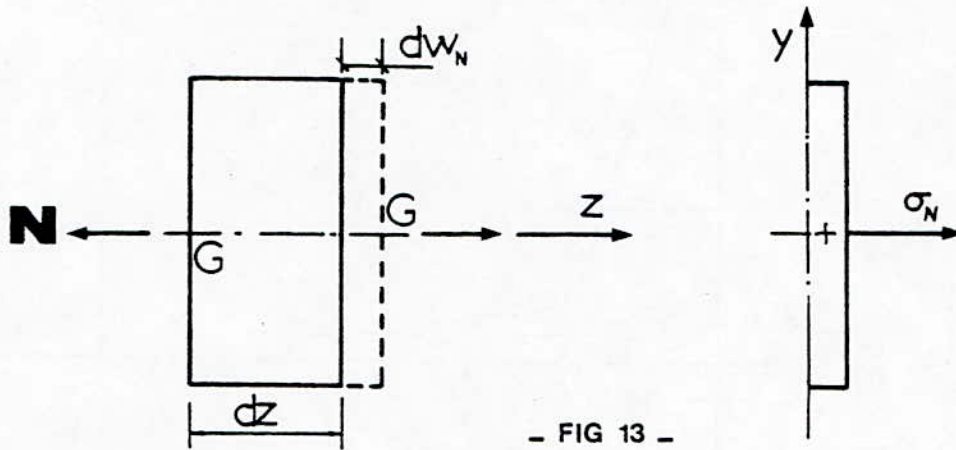
2. - THEORIE DES POUTRES A PROFIL MINCE OUVERT EN ELASTICITE LINEAIRE

Dans l'exposé qui suit, on considère une poutre droite d'axe z , de section (S) constante, sollicitée dans son plan moyen (Gyz) .

2.1. - Action de l'effort normal, du moment fléchissant et de l'effort tranchant

2.1.1. - Action de l'effort normal

l'effort normal produit des déformations longitudinales ϵ_N et des contraintes normales σ_N qui sont uniformes sur la section (cf. Fig. 13).



En écrivant que la résultante de ces contraintes est égale à l'effort normal, on obtient :

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad \text{avec} \quad A = \iint_{(S)} dS$$

et dW_N étant le déplacement longitudinal relatif entre deux sections voisines distantes de dz :

$$\epsilon_N = \frac{dW_N}{dz} = \frac{N}{EA}$$

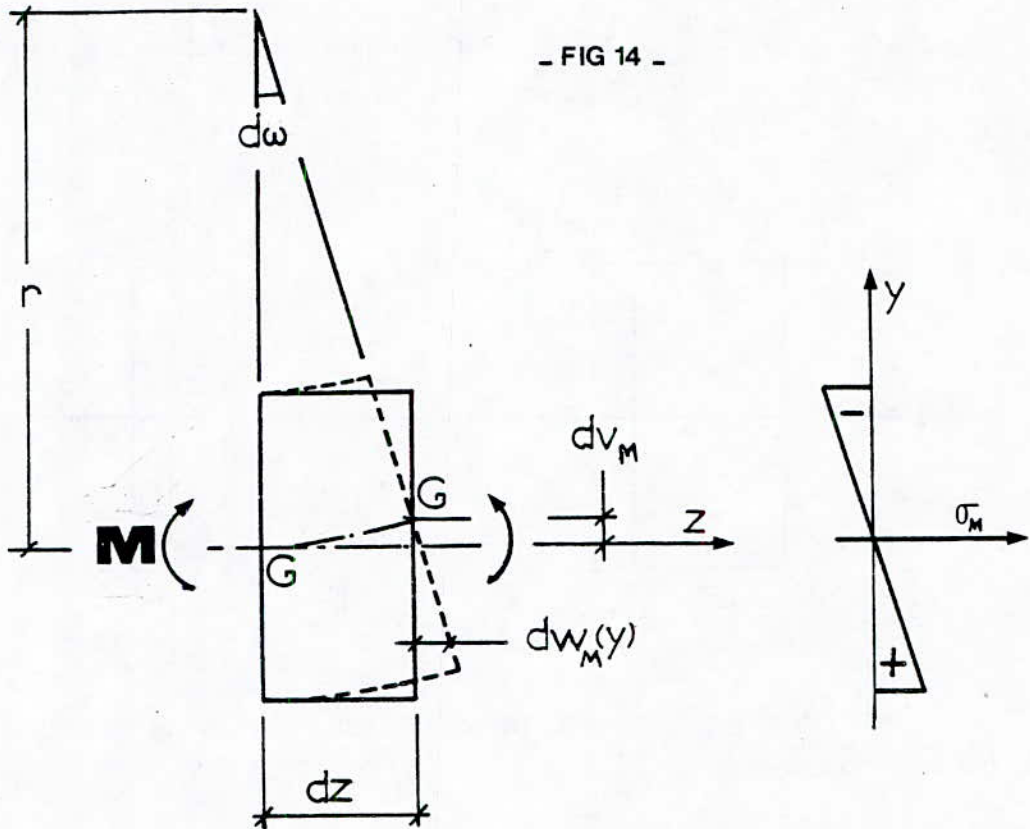
En écrivant d'autre part que le moment résultant est nul, on obtient :

$$\iint_{(S)} y \cdot dS = 0$$

par définition du centre de gravité G, origine des axes.

2.1.2. - Action du moment de flexion

D'après l'hypothèse de la planéité des sections, le moment de flexion M (d'axe x) produit une rotation relative $d\omega$ de deux sections voisines distantes de dz (Fig. 14).



Toutes les fibres longitudinales de la section subissent une courbure, mais les tangentes à leurs déformées restent normales aux plans des sections (conservation des angles droits ; pas de distorsion). Les déformations longitudinales (indépendantes de x) sont réparties linéairement sur la hauteur de la section :

$$\epsilon_M(y) = \frac{dw_M(y)}{dz} = \frac{y}{r}$$

r étant le rayon de courbure.

En écrivant que le moment résultant des contraintes normales σ_M correspondantes est égal à M, on obtient :

$$\sigma_M(y) = \frac{M}{I} \cdot y \quad \text{avec } I = \iint_{(s)} y^2 \cdot dS$$

et dV_M étant le déplacement transversal (flèche relatif entre deux sections voisines).

$$\frac{1}{r} = \frac{d\omega}{dz} = \frac{d^2 V_M}{dz^2} = \frac{M}{EI}$$

2.1.3. - Action de l'effort tranchant

Sous l'action de l'effort tranchant T (porté par l'axe y) les angles droits ne se conservent pas ; il apparait des distorsions. On admet cependant que deux sections voisines sont superposables par translation.

La seule expression générale est celle de l'effort de glissement par unité de longueur g_A , qui est la résultante des contraintes tangentielles, parallèles à l'axe z, agissant sur la face latérale d'un prisme de base (A) et de longueur dz, isolé de la poutre (Fig. 15) :

$$g_A = \frac{dN_A}{dz} = \frac{T \cdot S_A}{I}$$

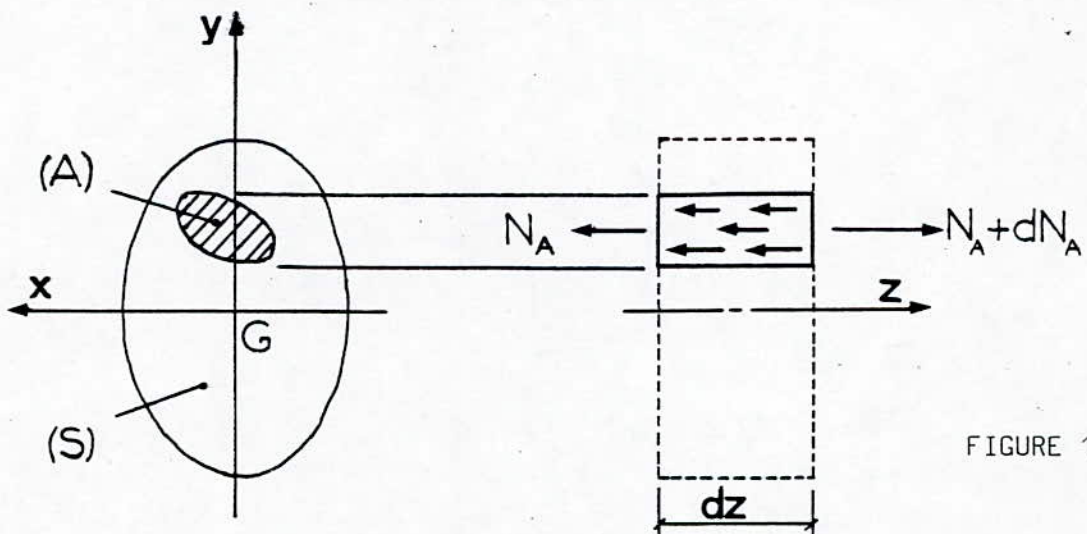


FIGURE 15

N_A étant la résultante des contraintes normales agissant sur l'aire A et S_A le moment statique de cette aire par rapport à l'axe G_x :

$$S_A = \iint_{(A)} y \cdot dS$$

On ne peut pas tirer d'expression générale de la contrainte de cisaillement, seulement des expressions approchées ou valables dans des cas particuliers.

Pour une section à profil mince (Fig. 16) :

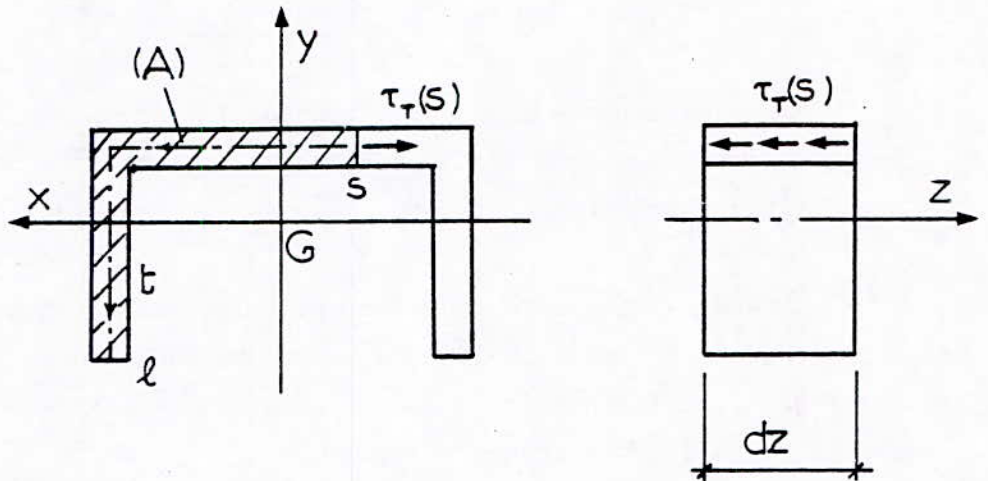


FIGURE 16

on calcule de façon analogue le flux de cisaillement dans le profil :

$$q(s) = \frac{I \cdot S(s)}{I}$$

avec :

$$S(s) = \int_s^l y \cdot e(t) \cdot dt$$

S (ou t) étant l'abscisse curviligne le long du contour de la section et $e(s)$ l'épaisseur du profil. Si celle-ci est suffisamment petite vis-à-vis de la longueur l du profil, on admet que les contraintes de cisaillement τ_T sont parallèles au contour et constantes dans l'épaisseur. Elles ne dépendent que de l'abscisse s , et l'on a :

$$\tau_T(s) = \frac{q(s)}{e(s)} = \frac{T \cdot S(s)}{I \cdot e(s)}$$

Les distorsions correspondantes sont :

$$\Upsilon(s) = \frac{\tau_T(s)}{G}$$

Le déplacement transversal (flèche) relatif de deux sections voisines est dV_T (Figure 17 ; exemple d'une section rectangulaire mince)

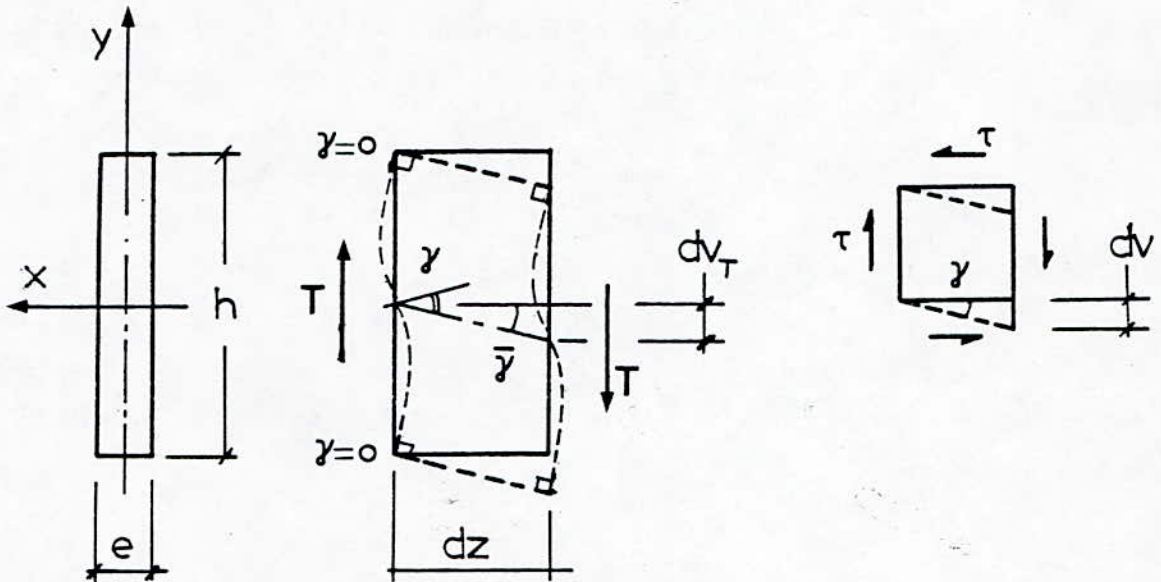


FIGURE 17

Il lui correspond une distorsion moyenne $\bar{\Upsilon}$ telle que $dV_T = \bar{\Upsilon} \cdot dz$, que l'on calcul en écrivant l'égalité du travail de l'effort tranchant et des travaux des contraintes internes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot T \cdot dV &= \frac{1}{2} \cdot \iint_{(s)} \tau_T \cdot \Upsilon \cdot dS \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{(\Gamma)} \tau_T(s) \cdot \Upsilon(s) \cdot e(s) \cdot ds \end{aligned}$$

($\int_{(\Gamma)}$ indiquant l'intégration le long du contour de la section)

d'où

$$\bar{T} = \frac{dV_T}{dz} = - \frac{T}{GA_1}$$

l'aire réduite A_1 ayant pour expression :

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{I^2} \int_{(\Gamma)} \frac{S(s)^2}{e(s)} \cdot ds$$

Dans l'exemple de la section rectangulaire, l'aire réduite A_1 a pour valeur $5 \cdot eh/6$ et l'expression des contraintes de cisaillement est :

$$\tau_T(y) = \frac{T S(y)}{Ie} = \frac{6T}{eh^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

2.1.4. - Flèche totale

la flèche totale $V = V_M + V_T$ obtenue par superposition des termes dus au moment fléchissant et à l'effort tranchant, satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{M}{EI} - \frac{1}{GA_1} \cdot \frac{dT}{dz} \quad (2.0)$$

Mais on admet de calculer indépendamment :

- V_M par l'équation de : $\frac{d^2V_M}{dz^2} = \frac{M}{EI}$

- V_T par l'équation de : $\frac{dV_T}{dz} = - \frac{T}{GA_1}$

Il est bien connu que pour les poutres dont la portée est suffisamment grande vis-à-vis des dimensions transversales, le terme V_T dû à l'effort tranchant est négligeable vis-à-vis du terme V_M dû à la flexion. Il n'en est plus de même si la portée relative devient faible, surtout si les rotations des sections sont empêchées (poutre encastree). C'est alors le terme V_T qui devient prépondérant, mais la flèche est alors très petite. Par ailleurs, dans ce cas, d'après le principe de Saint-Venant, la théorie des poutres n'est plus suffisante surtout pour ce qui concerne le calcul des contraintes normales.

2.2. - Action du couple de torsion

2.2.1. - Généralités

A l'abscisse z le long de la poutre, le couple de torsion dû aux forces extérieures est C .

Pour les poutres à section massive, ou à profil mince ferme, ce couple n'engendre que des contraintes de cisaillement calculables selon la théorie élémentaire de la torsion ("torsion pure" ou "torsion de Saint-Venant"). Il n'en est de même pour une poutre à profil mince ouvert que si son gauchissement est parfaitement libre.

Si le gauchissement est gêné, une partie du couple C_1 est équilibrée par des contraintes de cisaillement de "torsion pure", l'autre partie C_2 par des contraintes de cisaillement de "gauchissement gêné". Ces dernières sont accompagnées de contraintes normales. On est donc en "torsion mixte".

Remarque : Dans une section où le gauchissement est totalement empêché, on a $C_1 = 0$ et $C_2 = C$.

2.2.2. - Torsion pure

Sous l'action du couple de torsion C , il se produit une rotation relative $d\Theta$ de deux sections voisines autour de l'axe Gz , telle que :

$$\frac{d\Theta}{dz} = - \frac{C}{GK} \quad (2.1)$$

où K est l'inertie de torsion de la section.

De plus, il apparaît des déplacements longitudinaux $dW_C(x,y)$ des différents points des sections par rapport à leur position initiale (Fig. 18 ; exemple de la section carrée).

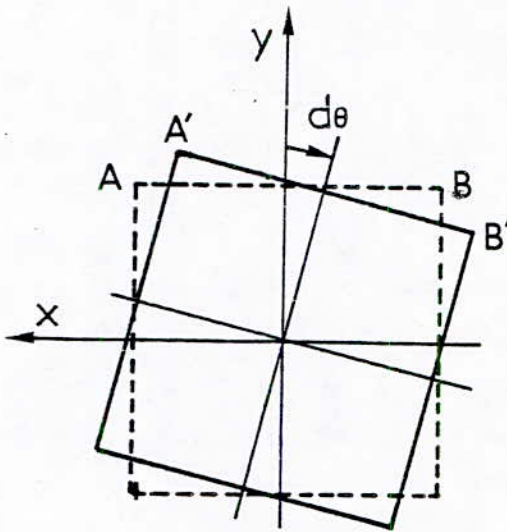
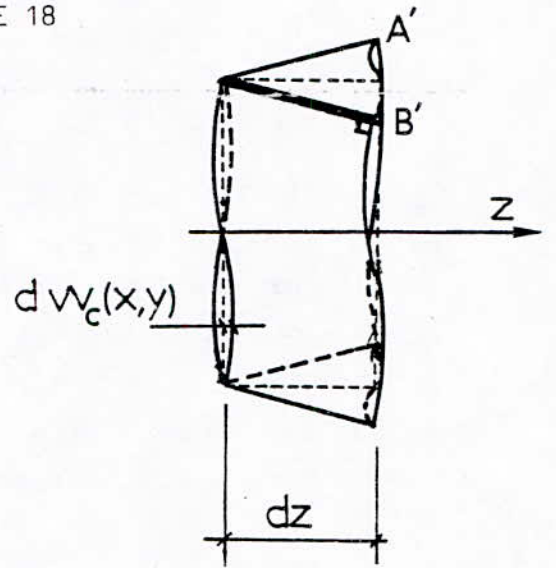


FIGURE 18



Dans une zone de couple de torsion constant, les sections subissent toutes le même gauchissement. A ce déplacement dW_c , ne correspond aucune déformation longitudinale ϵ , donc aucune contrainte normale σ , si le gauchissement est parfaitement libre. On admet que les déformations de gauchissement sont négligeables pour les sections massives et les sections tubulaires. Elles ne le sont plus pour les profils minces ouverts.

Il n'existe pas d'expression générale pour l'expression des contraintes de cisaillement τ_c , ni pour l'inertie de torsion K , dans le cas des sections pleines ou tubulaires épaisses.

Pour les tubes minces (fig. 19), on admet que la contrainte de cisaillement est constante dans l'épaisseur.

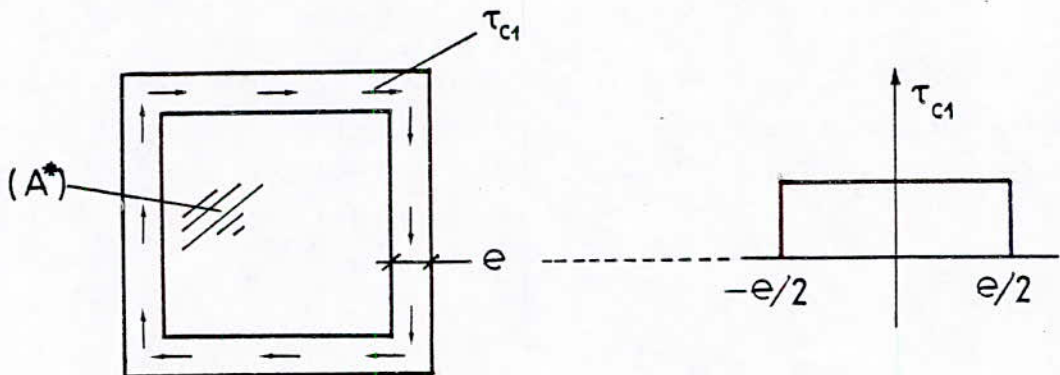


FIGURE 19

Son expression est : $\tau_c(s) = \frac{C}{2.A^*.e(s)}$ (2.2.)

A* étant l'aire limitée par le contour fermé (Γ) du tube et e(s) son épaisseur à l'abscisse s le long du contour.

L'inertie de torsion a pour expression :

$$K = \frac{4 \cdot A^{*2}}{\int_{(\Gamma)} \frac{ds}{e(s)}} \quad (2.3)$$

Dans un profil mince ouvert (Fig. 20), on admet que la contrainte de cisaillement varie linéairement dans l'épaisseur de chaque élément (*) ; elle s'annule sur la ligne moyenne et a pour valeur maximale :

$$\tau_{C_1}(s) = \frac{C_1 \cdot e(s)}{K} \quad (2.4)$$

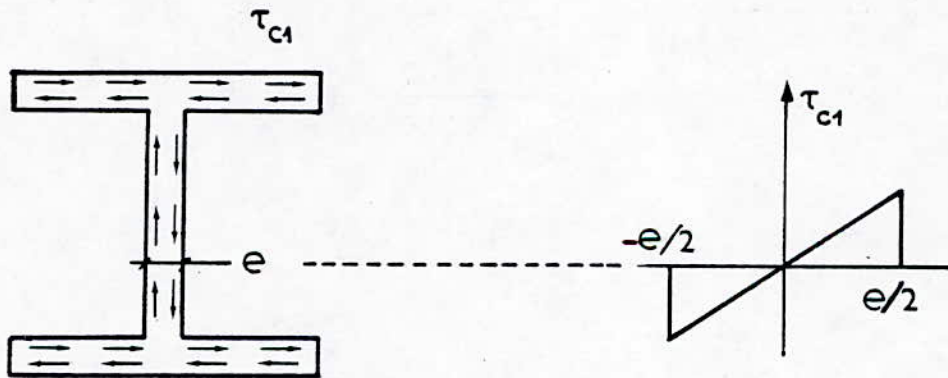


FIGURE 20

C₁ étant la part du couple équilibrée en torsion pure.

L'inertie de torsion a pour expression (*) :

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{3} \cdot \sum_i b_i \cdot e_i^3$$

(*) chaque élément a une épaisseur e_i petite vis-a-vis de sa longueur b_i. Eventuellement l'épaisseur e_i(s) peut être faiblement variable. L'inertie de torsion de l'élément s'écrit alors :

$$k = \frac{1}{3} \int_0^b e_i(s) \cdot ds$$

2.2.3. - Gauchissement gêné ; application à une section en double té

On considère une poutre à section en double té symétrique (Fig. 21), soumise à un couple de torsion C .

La section d'abscisse $z + dz$ subit une rotation $d\Theta$ par rapport à la section d'abscisse z .

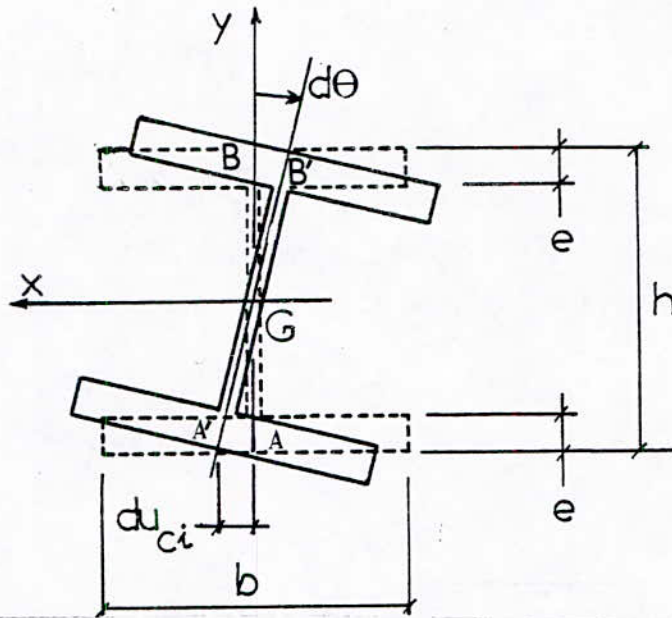


FIGURE 21

Si le gauchissement est libre, les déplacements dans la direction z sont ceux représentés à la figure (22).

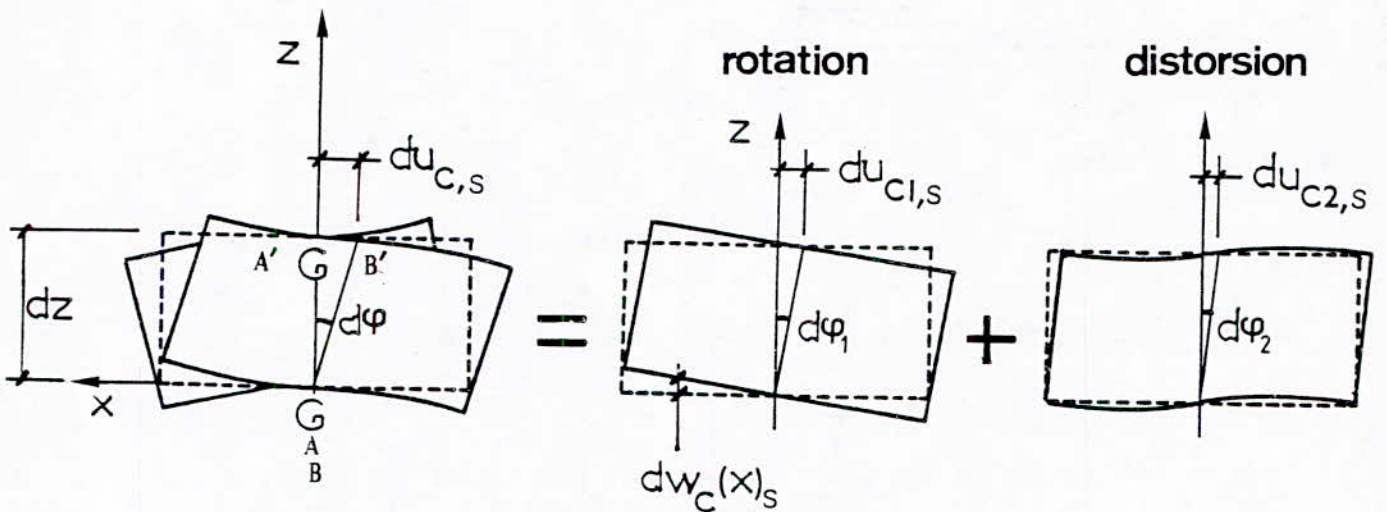


FIGURE 22

Ceux de l'âme sont négligeables ; ceux des ailes proviennent du déplacement relatif dans la direction x du centre de gravité de chaque aile entre les deux sections d'abscisse z et $z + dz$. Dans l'hypothèse de l'indéformabilité de la section dans son plan, on a :

$$du_c = \pm \frac{h}{2} \cdot d\Theta$$

- aile inférieure (indice i) : signe +
- aile supérieure (indice s) : signe -

Cette flèche du_c est la superposition de deux termes :

$$du_{c1} \text{ provenant d'une rotation } d\varphi_1 = \pm \frac{h}{2} \cdot \frac{d\Theta_1}{dz}$$

$$du_{c2} \text{ provenant d'une distorsion } d\varphi_2 = \pm \frac{h}{2} \cdot \frac{d\Theta_2}{dz}$$

La rotation de torsion totale est :

$$d\Theta = d\Theta_1 + d\Theta_2$$

Si le gauchissement est totalement empêché dans la section z par exemple (Fig. 23), on voit que pour y annuler les déplacements précédents, il faut appliquer aux deux ailes :

- des moments de flexion d'axe y , m , tels que :

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \frac{d^2 u_{c1}}{dz^2} = - \left[- \frac{m}{EJ} \right]$$

J étant le moment d'inertie d'une aile par rapport à Gy , soit :

$$m = \pm \frac{h}{2} \cdot EJ \cdot \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} \quad (2.5)$$

- des efforts tranchants, t , tels que :

$$d\varphi_2 = \frac{du_{c2}}{dz} = - \left(- \frac{t}{GA_1} \right)$$

A_1 étant l'aire réduite d'une aile dont l'expression est :

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{J^2} \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \frac{S(x)^2}{e} \cdot dx \quad (2.6)$$

soit :

$$t = \pm \frac{h}{2} \cdot GA_1 \cdot \frac{d\varphi_2}{dz}$$

avec :

$$A_1 = 5 eb/6$$

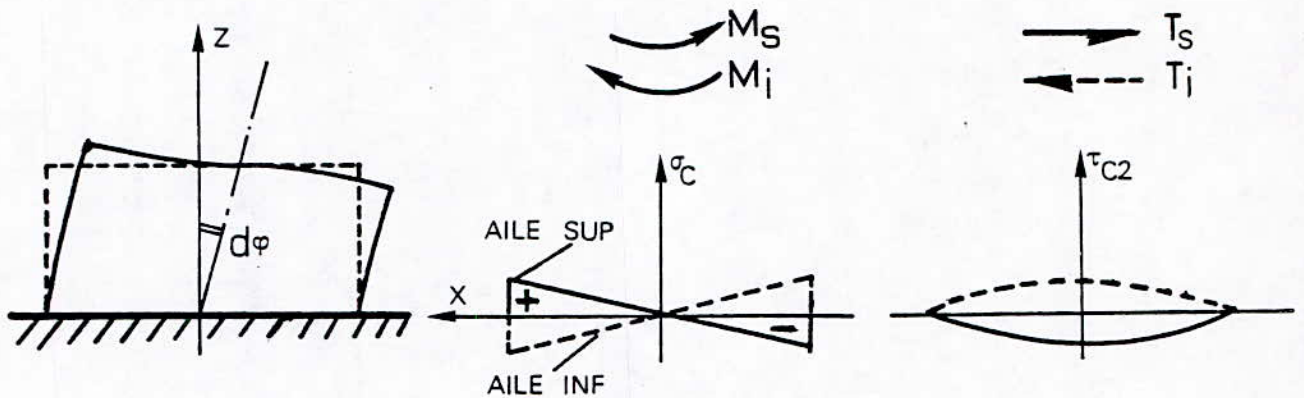


FIGURE 23

(on aura évidemment : $t = dm/dz$)

Il en résulte, d'une part des contraintes normales :

$$\sigma_c \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = \frac{m}{j} \cdot x \quad (2.7)$$

dont la résultante et les moments résultants par rapport à Gx et Gy sont nuls. Il s'agit bien d'un état d'autocontrainte, puisqu'il n'y a ni effort normal, ni moments fléchissants extérieurs. Les contraintes σ_c résultent du "bimoment" constitué par les deux moments fléchissants m égaux et opposés. On peut retrouver leur expression par une autre voie, en écrivant que l'annulation des déplacements $dW_c \left(x, \pm \frac{h}{2} \right)$ engendre des déformations longitudinales :

$$\epsilon_c \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = \frac{dW_c}{dz} = x \cdot \frac{d\varphi_1}{dz}$$

d'où les contraintes :

$$\sigma_c \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = E \cdot x \cdot \frac{h}{2} \frac{d^2\theta_1}{dz^2}$$

D'autre part, il résulte des efforts tranchants t des contraintes de cisaillement :

$$\begin{aligned} \tau_{c2} \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) &= \frac{t \cdot S(x)}{J \cdot e} \\ &= \frac{6t}{e \cdot b^3} \cdot \left(\frac{b^2}{4} - x^2 \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'effort tranchant total résultant de ces contraintes est évidemment nul, mais elles équilibrent un couple de torsion :

$$\begin{aligned} |C_2| &= |t| \cdot h = \frac{h^2}{2} \cdot GA_1 \cdot \frac{d\theta_2}{dz} \\ &= G \cdot \frac{5 \cdot e b h^3}{12} \cdot \frac{d\theta_2}{dz} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2.4. - Gauchissement gêné ; théorie générale

A - Notions de coordonnée sectorielle et de pôle

a) Notations

$x(s)$ et $y(s)$: coordonnées d'un point M situé sur le profil

M, B ou S_0 : origine sectorielle

A : pôle de la section

$\omega(s)$: coordonnée sectorielle (elle représente le double de l'aire située dans la zone (AM_1, AM, \widehat{S}))

AM_1 (ou AB ou AS_0) : "vecteur rayon" fixe

AM : "vecteur rayon" mobile

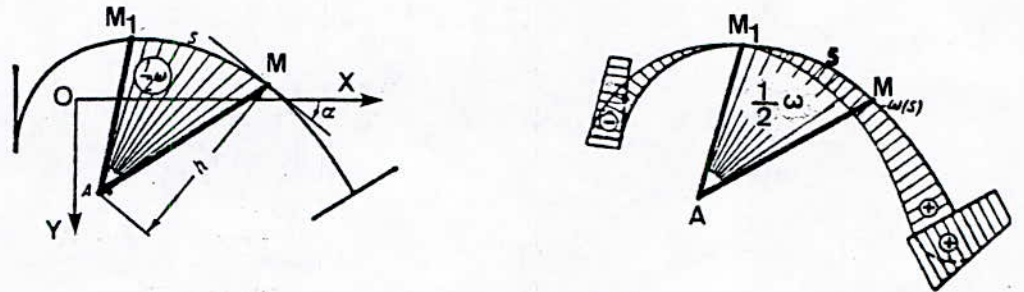


FIGURE 24

Convention de signe (selon la théorie de Vlassov)

L'aire sera considérée positive, si le vecteur AM s'est déplacé dans le sens des aiguilles d'une montre quand on regarde la section des "z négatifs".

Soient ω_A et ω_D les coordonnées sectorielles rapportées à deux points distincts, $A(a_x, a_y)$ et $D(d_x, d_y)$ deux points de la section droite, et un point M (x, y) sur le contour du profil.

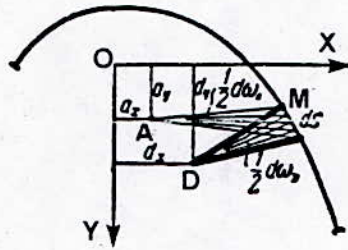


FIGURE 25

Les différentielles de ω_A et ω_D s'écrivent :

$$d\omega_A = (x - a_x) \cdot dy - (y - a_y) \cdot dx \quad (2.10)$$

$$d\omega_D = (x - d_x) \cdot dy - (y - d_y) \cdot dx$$

de (2.10) on déduit :

$$d(\omega_A - \omega_D) = (a_y - d_y) \cdot dx - (a_x - d_x) \cdot dy \quad (2.11)$$

en intégrant (2.11), et en y exprimant ω_A en fonction de ω_D , on obtient :

$$\omega_A = \omega_D + (a_y - d_y) \cdot x + (a_x - d_x) \cdot y + C \quad (2.12)$$

où C est une constante dépendant de l'origine du système d'axes. Notons $M_0(x_0, y_0)$ l'origine sectorielle (la même pour les deux points choisis A et D).

C'est-à-dire :

$$\text{pour } s = 0 ; \text{ on a } \omega_A = \omega_D = 0$$

$$\longrightarrow C = - (a_y - d_y) \cdot x_0 + (a_x - d_x) \cdot y_0$$

(2.12) s'écrit alors :

$$\omega_A = \omega_D + (a_y - d_y) \cdot (x - x_0) - (a_x - d_x) \cdot (y - y_0) \quad (2.13)$$

On définit les paramètres :

$$S_y = \int_A 1 \cdot x \cdot dA$$

$$S_x = \int_A 1 \cdot y \cdot dA$$

$$J_{xy} = \int_A xy \cdot dA$$

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$S = \int_A 1 \cdot \omega \cdot dA$$

$$J_{\omega x} = \int_A x \cdot \omega \cdot dA$$

$$J_{\omega y} = \int_A y \cdot \omega \cdot dA$$

$$J_y = \int_A x^2 \cdot dA$$

(2.14)

(2.15)

S_x et S_y définissent la position de l'origine des coordonnées

J_{xy} définit la direction des arcs de coordonnées

$J_{\omega x}$ et $J_{\omega y}$ définissent la position du pôle des aires sectorielles

S_{ω} définit la direction du vecteur rayon ou la position de l'origine des aires sectorielles.

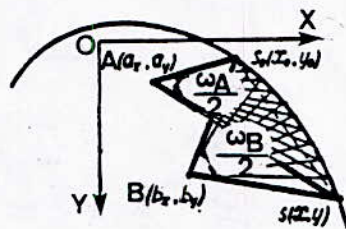


FIGURE 26

Désignons par x , y , et ω les coordonnées principales généralisées d'un point S , dans une section droite d'un profil mince ouvert.

Les coordonnées x et y peuvent être prises, par rapport aux axes principaux, ou par rapport à des axes quelconques.

b) Détermination du pôle (Fig. 25)

$$\begin{aligned} \omega_A = \omega_B + (a_y - b_y) \cdot x(s) - (a_x - b_x) \cdot y(s) \\ + (a_x - b_x) \cdot y(s_0) - (a_y - b_y) \cdot x(s_0) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$x(s_0)$ et $y(s_0)$ sont les coordonnées de l'origine sectorielle, c'est-à-dire point S_0 tel que : $\omega_A = \omega_B = 0$.

Soit A le point pour lequel : $J_{\omega x} = J_{\omega y} = 0$ (A : pôle principal), et B le pôle auxiliaire.

Ecrivons :

$$J_{\omega x} = \int_A x \cdot \omega \cdot dA = 0$$

$$J_{\omega y} = \int_A y \cdot \omega \cdot dA = 0$$

Ces deux expressions deviennent :

$$\begin{aligned} \int_A \omega_A \cdot x \cdot dA = \int_A \omega_B \cdot x \cdot dA + (a_y - b_y) \cdot \int_A x^2 \cdot dA - (a_x - b_x) \\ \cdot \int_A xy \cdot dA + \left[(a_x - b_x) \cdot y(s_0) - (a_y - b_y) \cdot x(s_0) \right] \cdot \int_A x \cdot dA = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\underbrace{\int_A xy \cdot dA}_{\parallel 0}$

 $\underbrace{\int_A x \cdot dA}_{\parallel 0}$

$$\int_A \omega_A \cdot y \cdot dA = \int_A \omega_B \cdot y \cdot dA + (a_y - b_y) \cdot \int_A xy \cdot dA - (a_x - b_x) \cdot \int_A y^2 \cdot dA + \left[(a_x - b_x) \cdot y(s_0) - (a_y - b_y) \cdot x(s_0) \right] \cdot \int_A y \cdot dA = 0 \quad (2.18)$$

Si la section est rapportée aux axes principaux :

$$\int_A xy \cdot dA = J_{xy} = 0 ; \quad \int_A x \cdot dA = S_y = 0 ; \quad \int_A y \cdot dA = S_x = 0$$

En utilisant (2.14) et (2.15), on obtient

$$\boxed{\begin{aligned} a_x - b_x &= \frac{\int_A \omega_B \cdot y \cdot dA}{\int_A y^2 \cdot dA} = \frac{J_{\omega_B y}}{J_x} \\ a_y - b_y &= -\frac{\int_A \omega_B \cdot y \cdot dA}{\int_A x^2 \cdot dA} = -\frac{J_{\omega_B x}}{J_y} \end{aligned}} \quad (2.19)$$

On peut vérifier que les coordonnées du pôle A déterminées par les équations (2.19), ne dépendent pas de l'origine de l'aire sectorielle ω_B , où que ces coordonnées sont invariantes pour un changement d'origine de "l'aire sectorielle".

Les aires sectorielles $\omega_B(s_1, s)$ et $\omega_B(s_0, s)$ qui ont un pôle commun B, mais des origines sectorielles S_0 et S_1 , diffèrent l'une de l'autre de la quantité $\omega_B(s_0, s_1)$ telle que :

$$\omega_B(s_0, s_1) + \omega_B(s_1, s) = \omega_B(s_0, s) \quad (2.19')$$

En remplaçant (2.19) dans (2.19'), on obtient :

$$a_x - b_x = \frac{1}{J_x} \cdot \int_A y \cdot \omega_B(s_0, s) \cdot dA = \frac{1}{J_x} \left[\int_A y \cdot \omega_B(s_1, s) dA + \omega_B(s_1, s_0) \int_A y dA \right]$$

$$a_y - b_y = -\frac{1}{J_x} \cdot \int_A x \cdot \omega_B(s_0, s) \cdot dA = -\frac{1}{J_y} \left[\int_A x \cdot \omega_B(s_1, s) \cdot dA + \omega_B(s_1, s_0) \int_A x dA \right]$$

En axes principaux :

$$\left. \begin{aligned} \int_A x \cdot dA = S_y = 0 \\ \int_A y \cdot dA = S_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

donc les expressions (1.19) restent inchangées.

Remarques : La position du pôle principal (centre de torsion), comme d'ailleurs la position du centroïde, ne dépendant que de la géométrie et des dimensions de la section.

D'autre part, il est aisé de voir que :

- dans le cas de sections ayant un axe de symétrie, le centre de torsion (ou pôle principal) demeure sur cet axe (en élasticité linéaire) ;
- dans le cas de sections présentant deux axes de symétrie, ce pôle principal se trouve à l'intersection des deux axes et coïncide donc avec le centroïde de la section.

Les coordonnées de ce pôle principal (centre de torsion) par rapport aux axes principaux [relation (2.19)], font intervenir celles d'un point B arbitrairement choisi, qui a servi de pôle auxiliaire pour l'aire sectorielle ω_B .

En particulier, en prenant ce point B au centroïde de la section, les équations (2.19) s'écrivent plus simplement :

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{J_x} \cdot \int_A \omega_0 \cdot y \cdot dA \\ a_y &= -\frac{1}{J_y} \cdot \int_A \omega_0 \cdot x \cdot dA \end{aligned}} \quad (2.21)$$

Remarques sur l'origine sectorielle :

La détermination de l'origine sectorielle se fait en utilisant la condition d'orthogonalité $S_{\omega} = 0$.

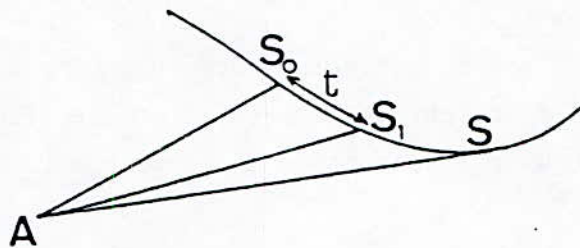
$S_{\omega} = \int_A \omega \cdot dA = S^+ + S^-$, pour une origine sectorielle arbitrairement choisie, mais une position de pôle principal unique.

Toutefois, il est possible de choisir cette origine sectorielle, de sorte que le moment statique sectoriel soit nul.

L'aire sectorielle (pour le pôle principal A) s'écrit :

$$\omega_A(s_1, s) = \omega_A(s_0, s) - \omega_A(s_0, s_1) \quad (2.22)$$

FIGURE 27



La quantité $\omega_A(s_0, s_1)$ qui est le double de l'aire comprise entre AS_0 , AS_1 et $\widehat{S_0S_1}$ est essentiellement fonction de l'arc $\widehat{S_0S_1} = t$.

Posons $\omega_A(s_0, s_1) = D(t)$

soit S_1 l'origine sectorielle pour laquelle $S_{\omega} = 0$ est satisfait. A partir de (2.22), on peut écrire alors :

$$\int_A \omega_A(s_1, s) \cdot dA = \int_A \omega_A(s_0, s) \cdot dA - \int_A \omega_A(s_0, s_1) \cdot dA = 0$$

||
A · D(t)

On en déduit :

$$D(t) = \frac{1}{A} \cdot \int_A \omega_A(s_0, s) \cdot dA$$

D(t) est déterminé par la distance t entre un point arbitrairement choisi S₀ (à partir duquel on mesure la quantité ω_A(s₀, s) et le point S₁, point pour lequel S_ω = 0. Ce dernier sera appelé "point sectoriel zéro. Pour des sections à axe de symétrie, ce point est situé à l'intersection de l'axe de symétrie et du contour de la section (il peut y en avoir plusieurs).

Le point sectoriel "zéro" le plus proche du pôle principal sera appelé : "point sectoriel zéro principal".

c) Expressions générales du pôle principal (dans un système d'axes quelconques :

en posant :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= a_x - b_x \\ \alpha_y &= a_y - b_y \\ \alpha &= (a_x - b_x) \cdot y(s_0) - (a_y - b_y) \cdot x(s_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

l'équation (2.16) s'écrit plus simplement :

$$\omega_A = \alpha_y \cdot x - \alpha_x \cdot y + \omega_B + \alpha \quad (2.24)$$

les coordonnées du pôle principal et du "point sectoriel zéro" étant inconnues les coefficients α_x, α_y et α sont aussi inconnus. Seuls sont connus x, y et

ω_B rapportés à un pôle choisi B et une origine arbitrairement choisie.

En supposant que ω_A est une coordonnée sectorielle principale, qui satisfait aux conditions d'orthogonalité, on peut écrire :

$$J_{\omega_A^x} = \int \omega_A \cdot x \cdot dA = \int (\alpha_y \cdot x - \alpha_x \cdot y + \omega_B) \cdot x \cdot dA = 0$$

$$J_{\omega_A^y} = \int \omega_A \cdot y \cdot dA = \int (\alpha_y \cdot x - \alpha_x \cdot y + \omega_B) \cdot y \cdot dA = 0$$

$$S_{\omega_A} = \int \omega_A \cdot dA = \int (\alpha_y \cdot x - \alpha_x \cdot y + \omega_B) \cdot dA = 0$$

On peut condenser ces équations :

$$\begin{aligned} J_y \cdot \alpha_y - J_{xy} \cdot \alpha_x + S_y \cdot \alpha &= - J_{\omega_B x} \\ J_{xy} \cdot \alpha_y - J_x \cdot \alpha_x + S_x \cdot \alpha &= J_{\omega_B y} \\ S_y \cdot \alpha_y - S_x \cdot \alpha_x + A \cdot \alpha &= - S_{\omega_B} \end{aligned} \quad (2.25)$$

où les inconnues sont α_x , α_y et α .

Il est possible de déterminer α_x , α_y et α de (2.23) et de construire le diagramme de la coordonnée sectorielle principale ω_A , et d'obtenir par la même, la position de l'origine des aires sectorielles sur le diagramme.

Nota :

$$J_{\omega_A} = \int_A \omega^2 \cdot dA = ?$$

$$\omega_A^2 = (\alpha_y \cdot x - \alpha_x \cdot y + \omega_B)^2$$

Après simplifications, J_{ω_A} s'écrit :

$$J_{\omega_A} = \alpha_y \cdot J_{\omega_B x} - \alpha_x \cdot J_{\omega_B y} + \alpha \cdot S_{\omega_B} + J_{\omega_B} \quad (2.26)$$

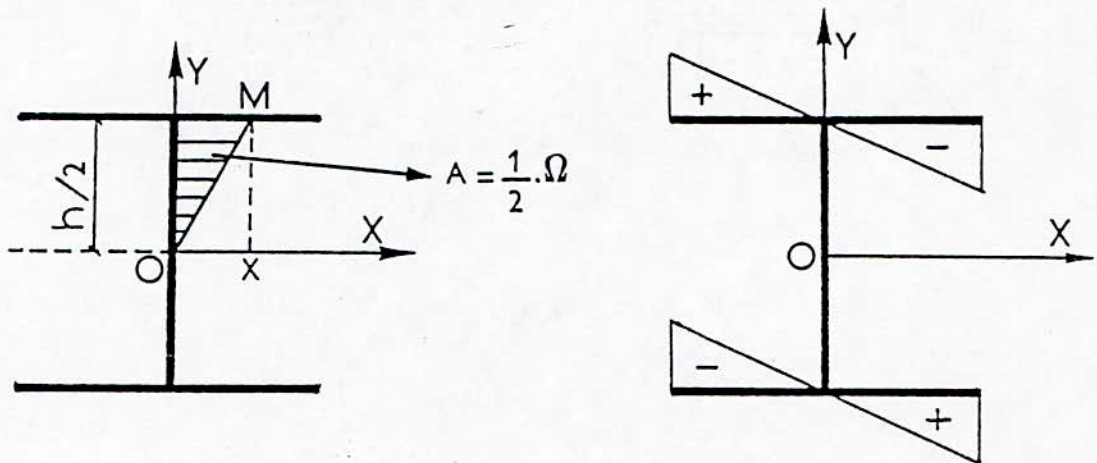
Ayant déterminé α_x , α_y et α de l'équation (2.25) pour un pôle B arbitrairement choisi et connaissant $J_{\omega Bx}$, $J_{\omega By}$, $S_{\omega B}$ et $J_{\omega B}$, on peut calculer par l'équation (2.26) la valeur de $J_{\omega A}$.

d) Quelques sections

Section en double té

tout point sur le contour peut être défini par l'aire sectorielle Ω .

Pôle principal au centroïde :



$$\Omega = -\frac{hx}{2} \text{ pour } y = +h/2$$

$$\Omega = -\frac{hx}{2} \text{ pour } y = -h/2$$

Section en U :

Pour un pôle quelconque B n'étant pas pôle principal :

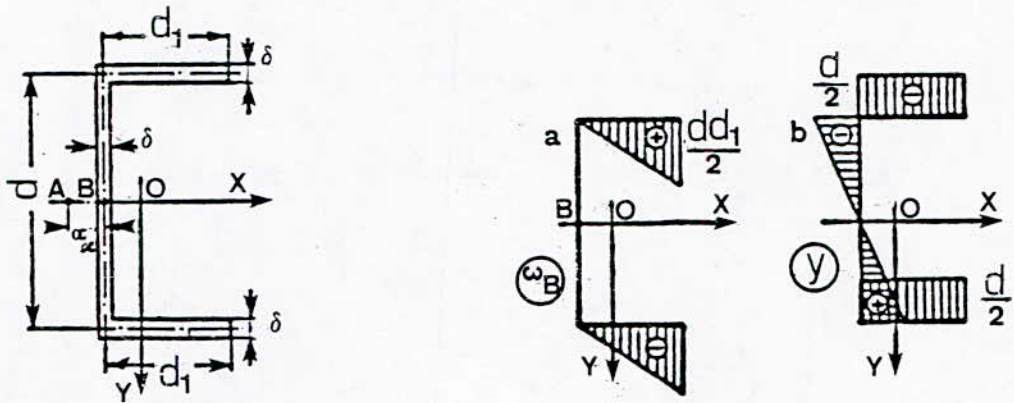


FIGURE 28

Par rapport à un point T (pôle principal = centre de torsion) :

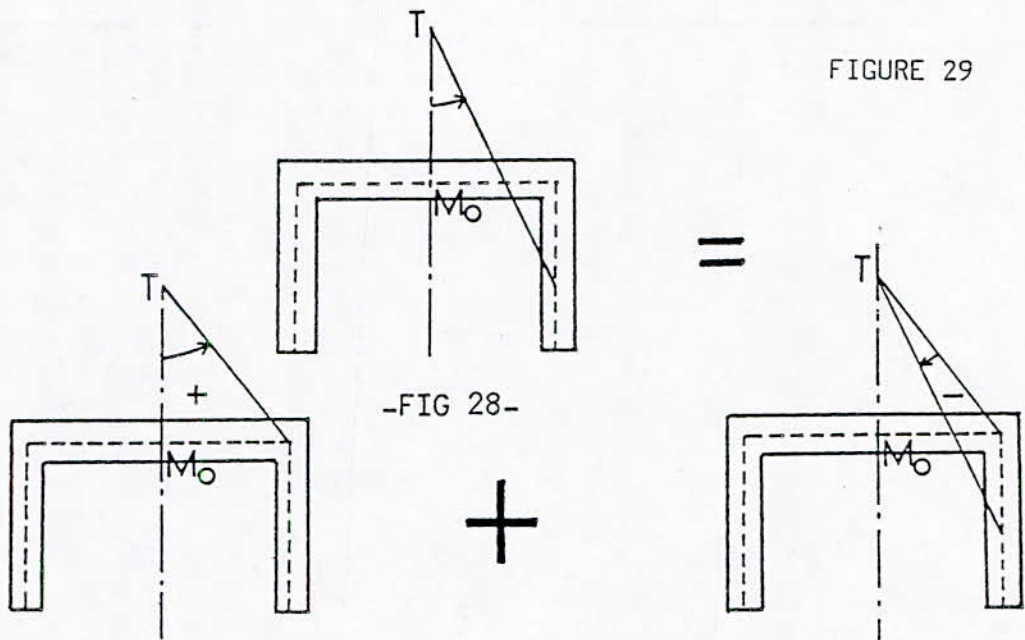


FIGURE 29

$$\Omega = 2 \cdot (A_1 + A_2)$$

Section quelconque (pôle principal en T)

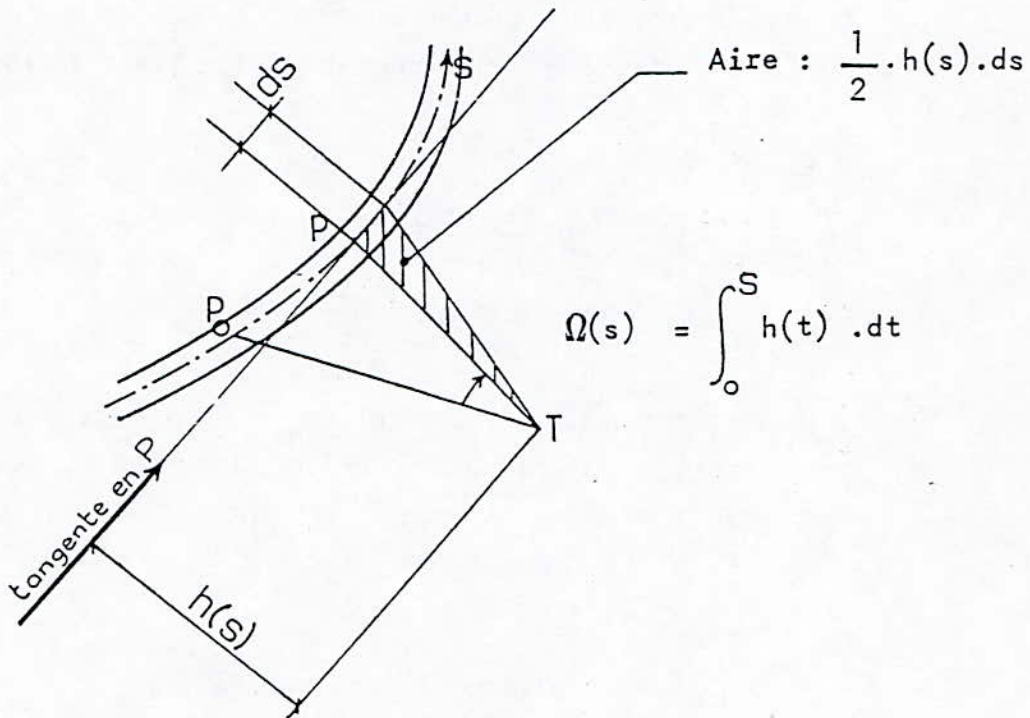


FIGURE 30

B - Analogie entre la torsion non uniforme et la flexion
[voir COURBON (12) et KOLLBRUNNER et BASLER (55)]

L'analogie parfaite entre la torsion non uniforme et la flexion, exprimée ci-après rend ce problème particulièrement simple.

Dans cette théorie, on peut faire le parallèle suivant :

coordonnée $y(s)$ centre de gravité G moment de flexion M effort tranchant T	\longleftrightarrow \longleftrightarrow	aire sectorielle $\Omega(s)$ centre de torsion T bimoment B couple de torsion C_2
---	--	--

- on définit l'aire sectorielle $\Omega(s)$ comme le double de l'aire comprise entre les segments droits TP_0 et TP , T étant le centre de torsion du profil, P_0 le point origine ($s = 0$) et P le point courant d'abscisse s sur le profil. Le terme $\Omega(s)$ apparaît en particulier dans l'expression de τ_c .

- Le centre de gravité (point tel que si on y applique une force longitudinale, elle produit un effort normal et pas de moment flexion) et les axes principaux d'inertie étant définis par :

$$\iint_{(S)} y \cdot dS = \iint_{(S)} x \cdot dS = \iint_{(S)} x \cdot y \cdot dS = 0$$

- le Centre de torsion (point tel que si on y applique une force transversale, elle produit un effort tranchant et pas de couple de torsion) et le point origine P_0 sont définis par :

$$\begin{aligned} \int_{(\Gamma)} \Omega(s) \cdot e(s) \cdot ds &= \int_{(\Gamma)} \Omega(s) \cdot y \cdot e(s) \cdot ds \\ &= \int_{(\Gamma)} \Omega(s) \cdot x \cdot e(s) \cdot ds = 0 \end{aligned}$$

- Le moment de flexion M et le bimoment B sont alors définis respectivement par :

$$M = \iint_{(S)} \sigma(y) \cdot y \cdot dS \quad (\text{dimension FL})$$

$$B = \int_{\Gamma} \sigma(s) \cdot \Omega(s) \cdot e(s) \cdot ds \quad (\text{dimension FL}^2)$$

Inversement, les contraintes normales dues au moment de flexion et au bimoment s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned}\sigma_M(y) &= \frac{M}{I} y = E \cdot \frac{d^2 v_M}{dz^2} \cdot y \\ \sigma_C(y) &= \frac{B}{K_1} \cdot \Omega(s) = E \cdot \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} \cdot (s)\end{aligned}$$

Le moment d'inertie de flexion I (en abrégé : inertie de flexion) et le moment d'inertie sectorielle K_1 (en abrégé : inertie de gauchissement) se calculent respectivement par :

$$\begin{aligned}I &= \iint_S y^2 \cdot dS && \text{(dimension } L^4\text{)} \\ K_1 &= \int_{\Gamma} \Omega(s)^2 \cdot e(s) \cdot ds && \text{(dimension } L^6\text{)}\end{aligned}$$

Les déplacements de flexion, v_M , et de torsion, Θ_1 , sont liés au moment M et au bimoment B , et aux rigidités correspondantes EI et EK_1 par :

$$\begin{aligned}\frac{d^2 v_M}{dz^2} &= \frac{M}{EI} && \text{(dimension } L^{-1}\text{)} \\ \frac{d^2 \Theta_1}{dz^2} &= \frac{B}{EK_1} && \text{(dimension } L^{-2}\text{)}\end{aligned}$$

- L'effort tranchant T et le couple de torsion C_2 se déduisent de M et de B par les relations :

$$\begin{aligned}T &= \frac{dM}{dz} && \text{(dimension } F\text{)} \\ C_2 &= \frac{dB}{dz} && \text{(dimension } FL\text{)}\end{aligned}$$

Les contraintes de cisaillement correspondantes se calculent par les relations :

$$\tau_T(s) = \frac{T \cdot S(s)}{I \cdot E(s)}$$
$$\tau_{C_2}(s) = \frac{C_2 \cdot L(s)}{K_1 \cdot e(s)}$$

Le moment statique S et le moment statique sectoriel L ayant pour expressions respectives :

$$S(s) = \int_S^l y(t) \cdot e(t) \cdot dt \quad (\text{dimension } L^3)$$
$$L(s) = - \int_S^l \Omega(t) \cdot e(t) \cdot dt \quad (\text{dimension } L^4)$$

Les déplacements d'effort tranchant, flèche V_T , et de torsion, rotation Θ_2 sont liés à l'effort tranchant T et au couple de torsion C_2 par :

$$\frac{dV_T}{dz} = - \frac{1}{GA_1} \quad (\text{sans dimension})$$
$$\frac{d\Theta_2}{dz} = - \frac{C_2}{GK_2} \quad (\text{dimension } L^{-1})$$

Expressions dans lesquelles interviennent l'aire réduite A_1 et l'inertie de torsion sectorielle K_2 par :

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{I^2} \cdot \int_{(\Gamma)} \frac{S(s)^2}{e(s)} \cdot ds \quad (\text{dimension } L^{-2})$$
$$\frac{1}{K_2} = \frac{1}{K_1^2} \cdot \int_{(\Gamma)} \frac{L(s)^2}{e(s)} \cdot ds \quad (\text{dimension } L^{-4})$$

2.3. - Equations de la torsion mixte

Rappelons qu'il y a torsion mixte dans les sections où le couple de torsion extérieur est équilibré partiellement en torsion pure, partiellement en gauchissement gêné.

2.3.1. - Equations générales

la rotation de torsion totale étant $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$, on a d'une part l'équation relative au couple de torsion pure C_1 :

$$\frac{d\Theta}{dz} = - \frac{C_1}{GK} \quad (2.27)$$

d'autre part, l'équation relative au bimoment B et au couple de torsion C_2 :

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = \frac{B}{EK_1} - \frac{1}{GK_2} \cdot \frac{dC_2}{dz} \quad (2.28)$$

analogue à l'équation (1.0) exprimant la flèche totale $V = V_M + V_T$ en fonction du moment de flexion et de l'effort tranchant T.

Les valeurs de M et T étant connues en fonction des forces extérieures, l'intégration de chacun des deux termes du second membre de l'équation (2.0), pour calculer la flèche V, ne pose pas de problèmes.

Dans l'équation (2.28), par contre, les valeurs de B et de C_2 qui résultent d'états d'auto-contraintes ne sont pas directement calculables à partir des forces extérieures ; elles dépendent de la rotation Θ cherchée, dont on connaît par ailleurs la relation (2.27) avec le couple de torsion pure C_1 . Compte-tenu de ce que le couple total $C = C_1 + C_2$ est, lui, une grandeur connue en fonction des forces extérieures, et de ce que $C_2 = \frac{dB}{dz}$, on peut éliminer C_1 et C_2 entre les équations (2.27) et (2.28).

$$\boxed{EK_1 \cdot \frac{d^3\Theta}{dz^3} - GK \cdot \frac{d\Theta}{dz} = C - \frac{EK_1}{GK_2} \cdot \frac{d^2C_2}{dz^2}} \quad (2.29)$$

équation dans laquelle intervient encore une dérivée du couple C_2 .

2.3.2. - Equation simplifiée

généralement, on néglige la rotation Θ_2 (correspondant aux distorsions dues à C_2) devant la rotation Θ_1 (à laquelle correspond le bimoment B), de même qu'on néglige la flèche V_T due à l'effort tranchant devant la flèche V_M due au moment de flexion M.

L'équation (2.29) devient alors :

$$EK_1 \cdot \frac{d^3\Theta}{dz^3} - GK \cdot \frac{d\Theta}{dz} = C(z) \quad (2.30)$$

qui s'intègre sans difficulté si on connaît une solution particulière de l'équation avec second membre.

Si la rotation Θ_2 n'est pas négligeable, on peut envisager le calcul par approximations successives suivant :

1 - On admet en première approximation que $\Theta_2 = 0$. L'équation (2.30) fournit une première approximation de Θ

2 - On en déduit : $C_1(z) = - GK \cdot \frac{d\Theta}{dz}$

$$C_2(z) = C - C_1 ; \text{ et } \frac{d^2C_2}{dz^2}$$

3 - On calcule une deuxième approximation de Θ_2 en intégrant :

$$\frac{d\Theta_2}{dz} = - \frac{C_2}{GK_2}$$

Si le rapport $\frac{\Theta_2}{\Theta}$ est suffisamment petit, la solution obtenue est acceptable.

4 - Sinon, $\frac{d^2C_2}{dz^2}$ étant en fonction connue de z au second membre de l'équation (2.29), l'intégration de celle-ci fournit une deuxième approximation de Θ , et on réitère à partir du § 2. La difficulté majeure provient de l'intégration de l'équation (2.29) dont le second membre peut tantôt être une fonction compliquée de z .

2.3.3. - conditions aux limites

Les constantes d'intégration sont déterminées d'après les conditions aux limites de la poutre.

- De même que dans une section où la rotation est empêchée, on doit satisfaire à la condition :

$$\frac{dV}{dz} = 0 \text{ (rotation } \omega \text{ nulle)}$$

- Dans une section où le gauchissement est parfaitement empêché, on doit satisfaire à la condition :

$$\frac{d\Theta}{dz} = 0 \text{ (déplacement longitudinal } W \text{ nul)}$$

- S'il s'agit d'un encastrement parfait, on doit en outre satisfaire simultanément aux conditions :

$$\text{et } \begin{cases} V = 0 & \text{(flèche nulle)} \\ \Theta = 0 & \text{(rotation de torsion nulle)} \end{cases}$$

mais il existe bien sûr des types d'appuis où ces conditions ne sont pas couplées (voir par exemple au niveau du tableau ci-après ; Fig. 31).

2.4. - Mode d'analyse d'une poutre selon la valeur du rapport L/d

2.4.1 -

Posons :

$$d = \sqrt{\frac{EK_1}{GK}} \quad (2.30)$$

et λ égal au rapport de la longueur L de la poutre à la "distance caractéristique : d ", ne dépendant que de la section de la poutre.

Le carré de cette longueur unité d est égal au quotient de la rigidité de torsion non uniforme EK_1 à la rigidité de torsion de Saint-Venant GK (voir équation 2.30).

Nous pouvons donc présumer que λ permet de déterminer le domaine de sollicitation de la poutre considérée, c'est-à-dire si la torsion de Saint-Venant ou la torsion non uniforme prédomine ou si, au contraire, la torsion mixte est prépondérante :

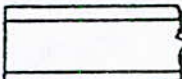
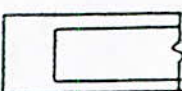
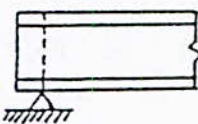
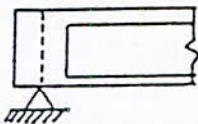
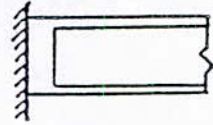
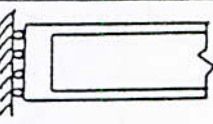
		flèche v	rotation de torsion θ	rotation de flexion ω	gauchissement $Q, \frac{d\theta}{dz}$
Libre		libre	libre	libre	libre
		libre	libre	libre	nul $\frac{d\theta}{dz} = 0$
Articulation		nulle $v = 0$	nulle $\theta = 0$	libre	libre
		nulle $v = 0$	nulle $\theta = 0$	libre	nul $\frac{d\theta}{dz} = 0$
Encastrement		nulle $v = 0$	nulle $\theta = 0$	nulle $\frac{dV}{dz} = 0$	nul $\frac{d\theta}{dz} = 0$
		libre	nulle $\theta = 0$	nulle $\frac{dV}{dz} = 0$	nul $\frac{d\theta}{dz} = 0$

FIG. 31 : Conditions imposées par diverses natures d'appuis

$$X^2 = L^2 \cdot \frac{GK}{EK_1} \quad (2.51)$$

si le numérateur est grand en regard du dénominateur, la torsion de Saint-Venant est donc prédominante.

Cependant, plus ce quotient est petit, plus la solution exacte due à la torsion mixte se rapprochera de celle donnée par la torsion non uniforme. Le mode d'analyse d'une poutre selon la valeur du rapport L/d est illustré par Kollbrunner et Basler au niveau du tableau ci-après (Fig. 32).

Valeurs de L/d	Type d'analyse en section courante
$< 0,5$	Gauchissement gêné ($C_1 = 0$)
$0,5$ à 2	Gauchissement gêné avec correction
2 à 5	Torsion mixte
5 à 10	Torsion pure avec correction
>10	Torsion pure ($C_2 = 0$)

FIG. 32 : Type d'analyse en fonction du rapport de la portée L à la "distance caractéristique" $d = \sqrt{\frac{EK_1}{GK}}$ d'après Kollbrunner et Basler).

2.4.2. - Remarques sur les caractéristiques géométriques de la section

A - Inertie de torsion K d'une section en double té

a) Généralités :

les dimensions de la poutre d'essai OE ont été "vérifiées sur six sections droites. La concordance est très satisfaisante.

Le but recherché, consistera en une approche la plus conforme possible de l'inertie de torsion K d'une section en double té, qui prenne

en compte la variation de l'épaisseur à travers l'aile, "l'effet de bord" dans les sections extrêmes de l'aile, et la correction à apporter dans l'évaluation de la contribution de l'âme.

b) Formules proposées par la littérature

diverses formules de calcul de l'inertie de torsion inspirées de modèles ou d'analogies, sont proposées par la littérature.

Sur la base de celles-ci, nous pouvons calculer les inerties de torsion correspondantes (Tableau 3).

Auteurs	Expressions de K	Valeurs de K (en m ⁴)
Orr	$0,42(Dt_1^3 + 2Bt_2^3)$	$5.03 \cdot 10^{-5}$
Föppl	$1,3[\frac{1}{3}(D-2t_2) \cdot t_1^3 + Bt_2^3]$	$5.96 \cdot 10^{-5}$
Bach	$\frac{1}{3} Dt_1^3 + \frac{2}{3}(B-t_1) \cdot t_2^3$	$5.09 \cdot 10^{-5}$
Tuckerman	$1,57. [\frac{2}{3} \cdot Bt_2^3 + \frac{1}{3}(D-2t_2)t^3]$	$4.51 \cdot 10^{-5}$
Gibson et Ritchie	$A^2/60$	$5.99 \cdot 10^{-5}$
Ellipse équivalente	$A^4/40.J$	$3.50 \cdot 10^{-5}$

FIGURE 33

Les formules proposées sont rapportées à la section en double té ci-après, où les dimensions sont notées comme indiqué :

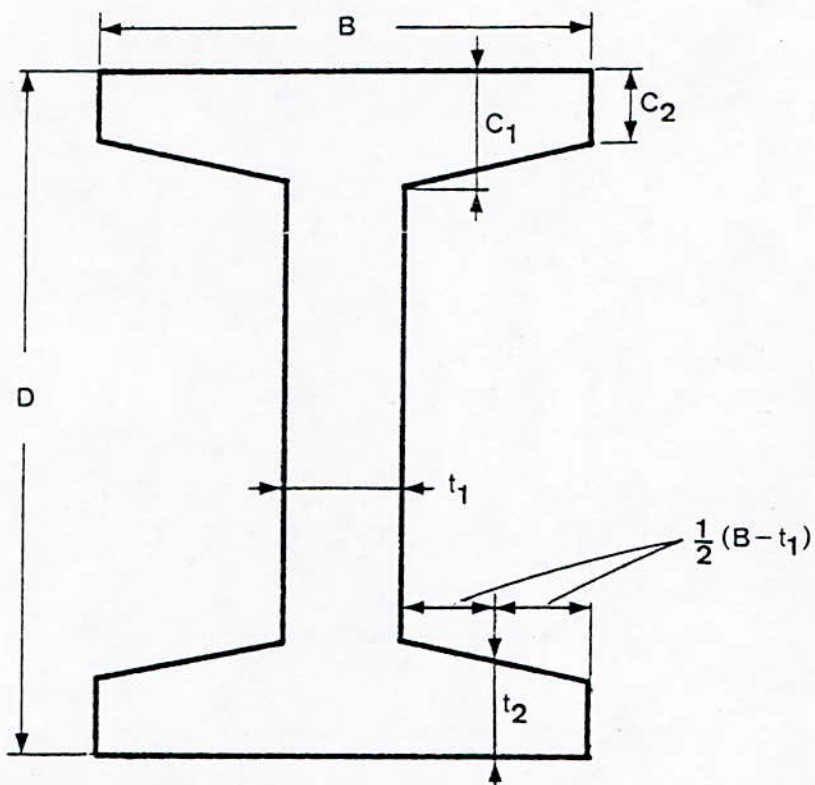


FIGURE 54

Les valeurs obtenues (Fig.55) peuvent ainsi être résumées de la manière suivante:



La dispersion (autour d'une valeur moyenne $\bar{K} = 5.10^{-5} m^4$) est trop importante ; c'est pour cette raison qu'un calcul "plus proche de la réalité" s'avère indispensable.

c) Théorie de Saint-Venant et analogie de la membrane

Théorie de Saint-Venant pour les sections pleines
(rappels de l'élasticité linéaire)

La section est supposée indéformable dans son plan. Tous ces points subissent donc la même rotation de torsion Θ . Les déplacements relatifs à deux sections voisines sont donc :

- selon G_x :

$$\frac{du}{dz} = -y \cdot \frac{d\Theta}{dz}$$

- selon G_y :

$$\frac{dv}{dz} = x \cdot \frac{d\Theta}{dz}$$

De plus, chaque section subit un gauchissement traduit par un déplacement w du point courant selon z , tel que :

$$w = \Psi(x,y) \cdot \frac{d\Theta}{dz}$$

il est assez aisé de passer des déplacements aux distorsions Υ_{zx} et Υ_{yz} (les déformations ϵ sont nulles), puis aux contraintes τ_{zx} et τ_{yz} par l'intermédiaire du module de déformation transversal G_0 tel que :

$$\tau = G_0 \cdot \Upsilon \quad (\text{les contraintes } \Upsilon \text{ sont nulles})$$

Il n'y a pas de solution générale, mais une solution par type de section. On la cherche, non pas à partir de la fonction du gauchissement Ψ , mais à partir d'une fonction de contrainte Φ .

Considérons (Fig. 35), une pièce à ligne moyenne droite $G_0 z$, d'axes principaux d'inertie $G_0 x$ et $G_0 y$, de section droite constante, limitée par le contour (C), soumise à un moment de torsion C constant sur la pièce.

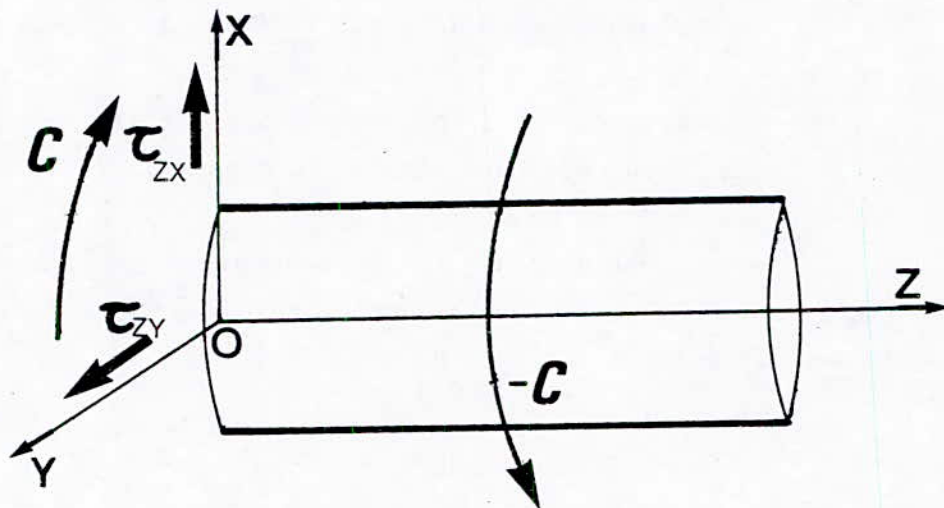


FIGURE 35

D'après Saint-Venant, et conformément à la théorie élémentaire de l'élasticité, l'état de contrainte sur la section d'une pièce prismatique soumise à la torsion peut être alors défini par les composantes suivantes du tenseur contrainte :

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{array} \right] \quad (2.32)$$

L'équation d'équilibre des contraintes peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 G_0 \cdot \frac{d\Theta}{dz}$$

avec G_0 : module d'élasticité transversal tel que $G_0 = E_0/2(1 + \nu)$ et $d\Theta/dz$: rotation unitaire d'ensemble de la pièce.

Cette fonction de contrainte Φ satisfait à la condition aux limites suivante :

$$\frac{d\Phi}{ds} = 0 \text{ sur le contour (C) de la pièce}$$

[la contrainte $\vec{\tau}$ est tangente au contour (C) de la section ; la fonction Φ y est constante ($\Phi = 0$ par exemple)].

On démontre par ailleurs que le couple C résultant des contraintes s'écrit [en notant (Σ) la section droite de la pièce] :

$$C = 2 \cdot \iint_{(\Sigma)} \Phi \cdot d\Sigma$$

L'origine des axes est au centre de torsion T, tel que la rotation se fasse autour de l'axe Tz. En ce point, on a :

- $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$
- un cisaillement nul
- une distorsion nulle

Analogie de la membrane

Considérons une membrane homogène, initialement plane, dont le contour (C) est celui d'une section droite de la pièce.

Lorsque celle-ci est uniformément tendue sur le contour (C) de la section, avec une tension q par unité de longueur du contour, et soumise à une pression transversale uniforme p , on démontre que la flèche w de la membrane déformée (supposée petite, et nulle sur le contour) satisfait à l'équation :

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - \frac{p}{q} \quad (2.33)$$

Nous passerons de la fonction de contrainte Φ à la fonction w , déformée d'une membrane tendue sur le contour de la section et soumise à la pression p , en posant :

$$2 G \frac{d\Theta}{dz} = \frac{p}{q}$$

De cette analogie, il s'en suit les résultats suivants (Fig. 36) :

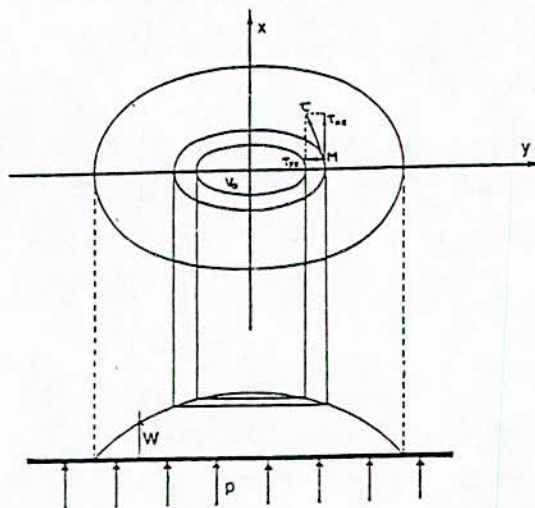


FIGURE 36

- 1 - Les lignes de cisaillement sont les projections sur le plan de la section des lignes de niveau de la membrane déformée.
- 2 - La pente maximale en un point de la membrane, est proportionnelle à la valeur de la contrainte tangentielle au point correspondant de la section plane.
- 3 - La contrainte de cisaillement $\vec{\tau}$ en un point quelconque est portée par la tangente à la ligne de niveau de la membrane passant par ce point.
- 4 - Le couple de torsion C a pour valeur, le double du volume V_0 limité par la membrane déformée et son plan initial :

$$C = 2 \cdot V_0 = 2 \cdot \iint_{(\Sigma)} w \cdot dx \cdot dy$$

et les contraintes de cisaillement peuvent être formulées comme il suit :

$$\tau_{xz} = \frac{C}{2V_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = - \frac{C}{2V_0} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

Le calcul de l'inertie de torsion d'après différents cas d'écoles est donné ci-après :

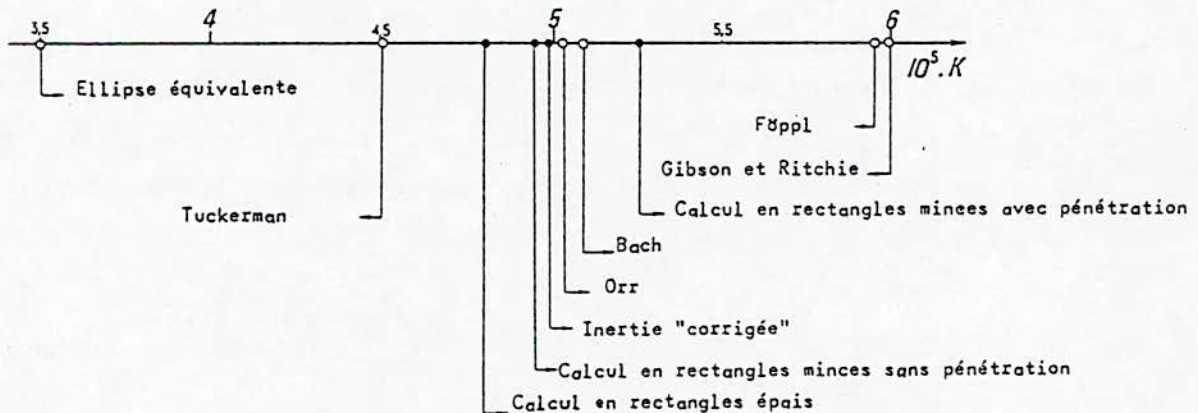


FIGURE 37 : Evaluation de l'inertie de torsion selon différentes méthodes et selon différents auteurs (Essai OE)

B - Inertie de gauchissement

Le terme $(K_1)_{\text{béton}}$ a été évalué de façon précise, en prenant en compte la variation de l'épaisseur. Cependant, pour l'évaluation de l'inertie globale de gauchissement $(K_1 = (K_1)_{\text{béton}} + (K_1)_{\text{acier}})$, il apparaît difficile de prendre en compte la contribution des armatures longitudinales (notée K_{1a}), du fait que la position des armatures ne coïncide pas toujours avec la ligne moyenne de la section de béton.

En principe, il s'avère indispensable de savoir définir une ligne moyenne de la section homogène.

Le problème étant assez délicat, il paraît possible (dans certains cas) d'envisager une projection de la position des armatures sur la ligne moyenne du béton (fig. 38) :

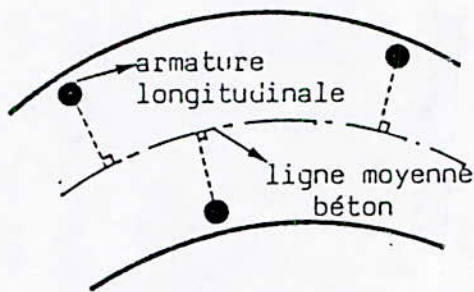


FIGURE 38

Dans la mesure où cette distance armatures longitudinales-ligne moyenne du béton est négligeable (cas des sections minces), il est possible d'entrevoir une simplification de l'expression générale de l'inertie de gauchissement K_1 de la section.

L'expression générale de l'inertie globale de gauchissement K_1 (dédue de la remarque formulée dans la partie théorique en élasticité linéaire, quant à l'évaluation de l'inertie sectorielle d'une section mince en fonction de l'inertie de flexion J d'une aile/ $y'y$, par "l'analogie de flexion des ailes") peut s'écrire :

$$K_1 = \int_{(T)} [\Omega(s)]^2 \cdot e(s) \cdot ds + n \cdot \sum_i [\Omega(s_{ai})]^2 \cdot A_i \quad (2.34)$$

où :

- A_i : section de l'armature i
- s_{ai} : coordonnée sectorielle de l'armature i
- n : coefficient d'équivalence

2.4.3. - Solution du problème de torsion

la solution de l'équation simplifiée (2.30) sans second membre s'écrit :

$$\Theta = k_1 + k_2 \cdot \frac{z}{d} + k_3 \cdot e^{-z/d} + k_4 \cdot e^{z/d} \quad (2.55)$$

en posant :

$$d = \sqrt{\frac{EK_1}{GK}}$$

dans les deux cas envisagés, le second membre de l'équation (2.50) est égal à C, couple de torsion constant.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est :

$$\Theta = - \frac{C}{GK} \cdot z$$

La solution générale est donc (en remarquant que le terme en z de la solution (2.55) n'est autre, ici, que la solution particulière) :

$$\Theta = k_1 + k_3 \cdot e^{-z/d} + k_4 \cdot e^{z/d} - \frac{C}{GK} \cdot z$$

Les constantes k_1 , k_3 et k_4 sont déterminées pour chacun des deux cas d'essai, d'après les conditions aux limites.

Les détails de ce calcul sont donnés à l'Annexe 3.

3. - PRESENTATION DES RESULTATS ET CONFRONTATION AUX CALCULS (domaine linéaire non fissuré)

3.1. - Compléments

Ces compléments concernent l'évaluation des caractéristiques mécaniques de la section des poutres OE qui est bien un profil ouvert mais non mince et d'épaisseur variable ; de plus, il faut tenir compte de la présence des armatures.

3.1.1. - Inertie de torsion pure d'une section en double té non mince et d'épaisseur variable

Pour un rectangle mince d'épaisseur t faible devant sa longueur, l'inertie est donnée par l'expression :

$$K_0 = \frac{lt^3}{3} \quad (2.36)$$

la section en double té peut être décomposée en trois éléments (Figure 39 a) :

- l'âme de longueur $h - \bar{e}$ et d'épaisseur e' ,
- les deux ailes de longueur b et d'épaisseur moyenne $\bar{e} = \frac{1}{2} (e+e')$

En première approximation, son inertie est alors :

$$K_{oi} = \sum_i \frac{l_i t_i^3}{3} = \frac{1}{3} [(h - \bar{e}) e'^3 + 2b\bar{e}^3] \quad (2.37)$$

Effet de la variation d'épaisseur des ailes :

D'après KOLLBRUNNER et BASLER [55], l'inertie d'un rectangle mince mais d'épaisseur $t(s)$ faiblement variable peut se calculer par

$$K'_0 = \frac{1}{3} \int_0^l t(s)^3 \cdot ds$$

Dans le cas d'une variation linéaire de $t(s)$ entre e et e' sur la longueur b , on obtient :

$$K'_0 = \frac{b}{12} [e^3 + e'^3 + ee' (e + e')] \quad (2.38)$$

valeur très peu différente de celle obtenue en prenant directement t égal à l'épaisseur moyenne \bar{e} dans l'expression (2.36)

Effet de bord sur un rectangle d'épaisseur constante :

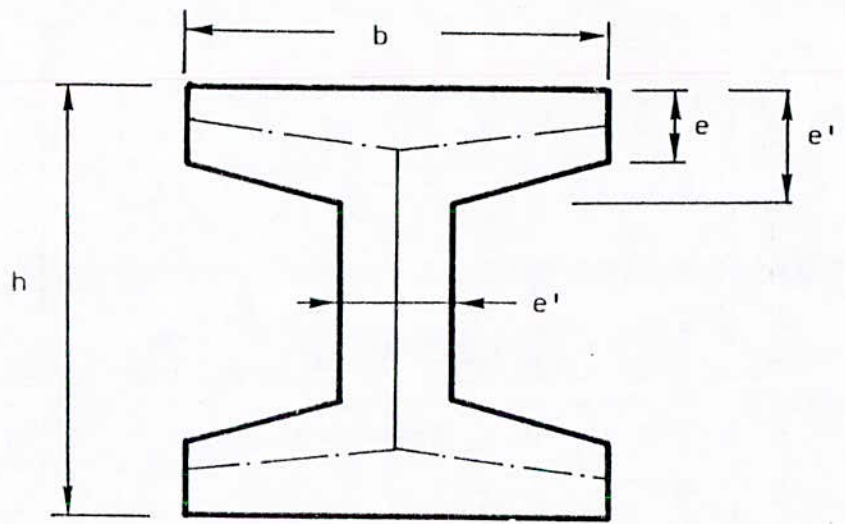
D'après l'analogie classique, les formules précédentes supposent que la membrane déformée tendue sur le contour de la section rectangulaire d'épaisseur constante soit un cylindre à génératrices parallèles aux grands côtés et à directrice parabolique constante sur toute la longueur (figure 39 b). Ceci est évidemment faux le long des petits côtés. La perturbation due à l'effet de bord est sans importance pour un rectangle mince (l/t grand). Il n'en est plus de même si le rectangle n'est pas mince, mais alors les traités de Résistance des Matériaux donnent la solution exacte à partir de la théorie de Saint-Venant. Une très bonne approximation de l'inertie est alors donnée par la formule :

$$K = (1 - 0,63 \frac{t}{l}) \cdot K_0$$

pour $l/t > 2$.

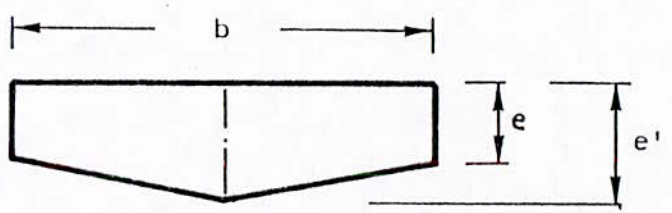
(*) C.F. KOLLBRUNNER et K. BASLER - "torsion ; application à l'étude des structures" - SPES (Lausanne) et BORDAS (Paris) éditeurs - Traduction 1970

a Décomposition de la section

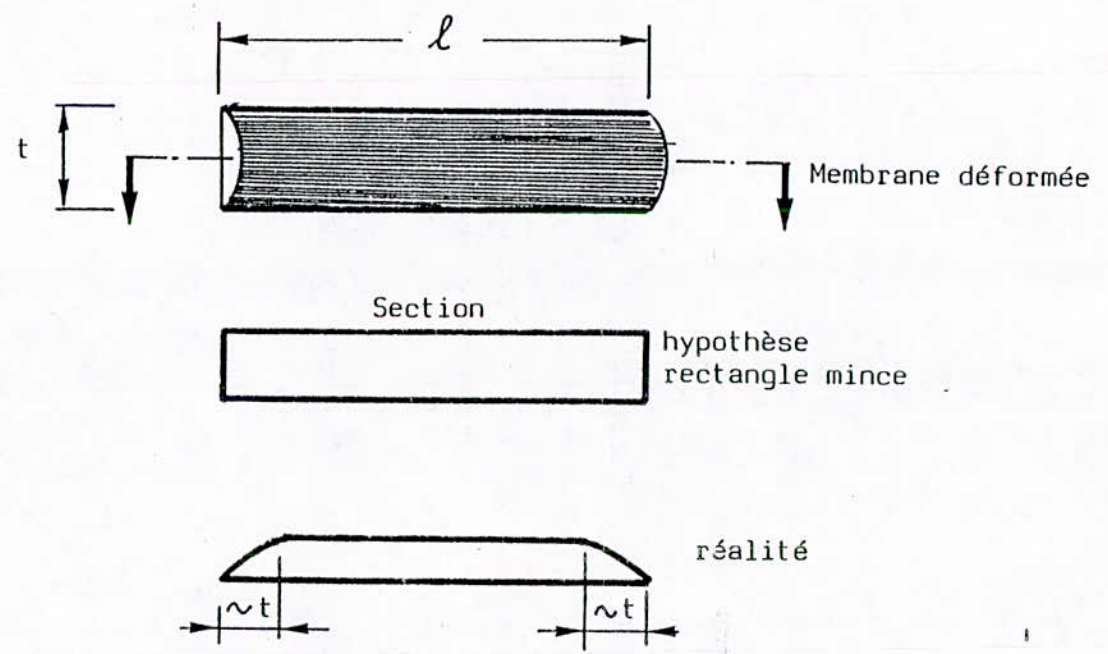


$b = 400 ; h = 400 ; e = 45 ; e' = 55 \text{ mm}$

Effet de bord + variation d'épaisseur



b Effet de bord



c

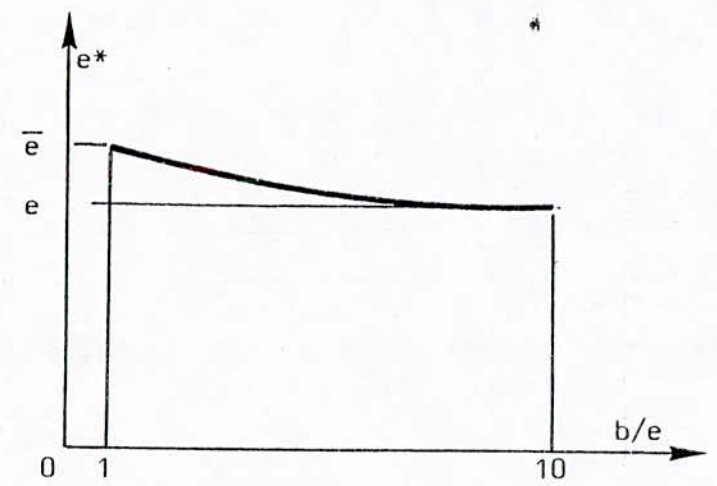


FIGURE 39

Effet de bord sur un élément d'épaisseur variable :

Pour les ailes d'épaisseur variable, il faut considérer dans l'effet de bord une épaisseur e^* un peu supérieure à e ; l'inertie s'écrit alors :

$$K = \left(1 - 0,63 \frac{e^*}{b}\right) \cdot K'_0 \quad (2.39)$$

Pour une section dont la longueur serait sensiblement égale à l'épaisseur e , l'effet de bord influe sur toute la longueur et on peut admettre que la correction doit être calculée avec l'épaisseur moyenne, soit $e^* = \bar{e}$. Au contraire, pour une longueur assez grande, admettons égale à $10 e$, l'effet de bord n'existera plus que sur une distance e , donc $e^* = e$. On fait l'hypothèse d'une variation hyperbolique entre les deux cas précédents (figure 39 c), ce qui conduit à l'expression suivante de l'épaisseur e^* à introduire dans la correction :

$$e^* = \frac{1}{9} [10e - \bar{e} + 10 (\bar{e} - e) \frac{e}{b}] \quad (2.40)$$

Effet de pénétration de deux éléments :

L'inertie de torsion étant toujours supposée proportionnelle au volume limité par la membrane déformée, quand on évalue séparément les inerties des ailes et de l'âme, on surévalue l'inertie totale en comptant deux fois une partie du volume correspondant à la pénétration de l'âme dans les ailes (figure 40 a). Par contre, compte-tenu du raccordement des deux membranes, il n'est pas nécessaire de tenir compte d'un effet de bord pour l'âme dont l'inertie peut donc être calculée par la formule valable pour un rectangle mince déjà introduite dans l'expression (2.39). Il ne reste plus qu'à effectuer la correction relative à l'effet de pénétration.

Le volume total sous la membrane relative à l'âme est :

$$\begin{aligned} V &= 2 (h - e') w_{\max} \int_0^{e'/2} \left[1 - \left(\frac{2x}{e'}\right)^2\right] dx \\ &= \frac{2}{3} (h - e') \cdot e' \cdot w_{\max} \end{aligned}$$

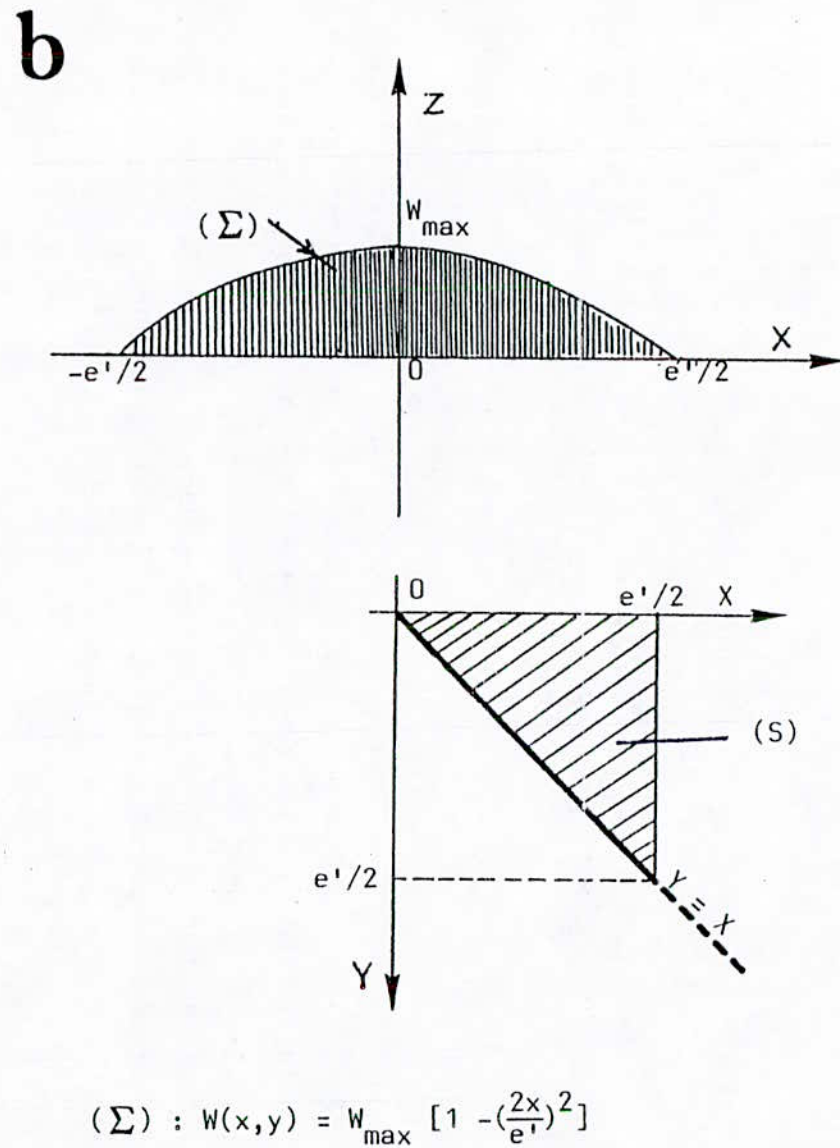
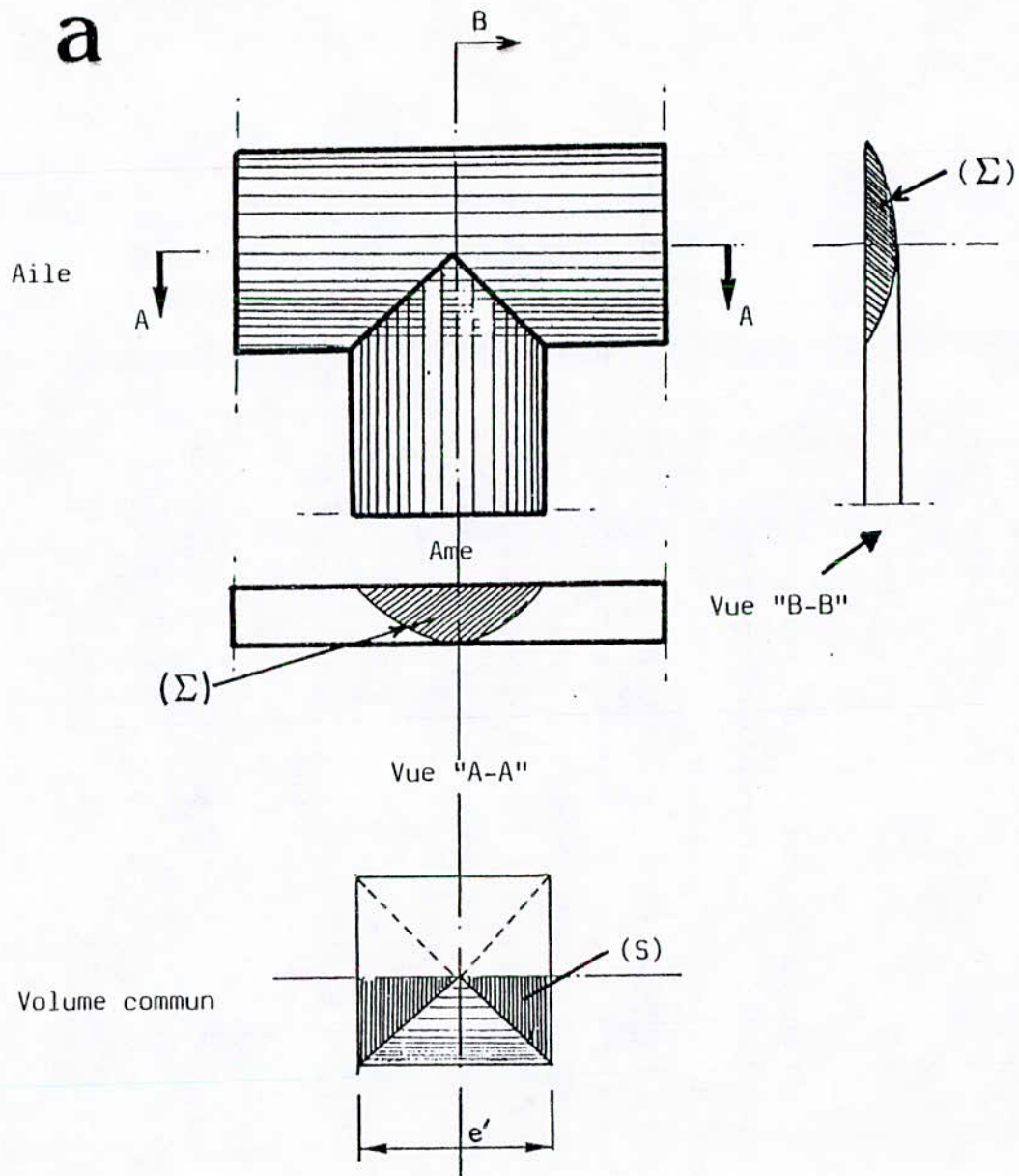


FIGURE 40

Le volume commun à l'âme et aux deux ailes est égal à huit fois le volume situé sous le secteur triangulaire (S) de la figure 40 b, soit :

$$\Delta V = 8 \iint_{(S)} w(x,y) \cdot dx \cdot dy = \frac{e'^2}{2} \cdot w_{\max}$$

L'inertie corrigée de l'âme est alors :

$$\left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right) \cdot K_0 = \left[1 - \frac{3e'}{4(h-e')}\right] \frac{1}{3} (h - e') e'^3 \quad (2.41)$$

Récapitulation :

L'expression approchée de l'inertie de la section supposée mince est calculée par la formule (2.37). Pour une meilleure évaluation, on calcule d'abord e^* selon la formule (40), d'où l'inertie corrigée des ailes selon (2.38) et (2.39); l'inertie corrigée de l'âme est donnée par la formule (2.41). On obtient les valeurs suivantes :

- formule des profils minces (2.37): $K = 43,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$,

- avec corrections (2.38 ; 39; 40; 41): $K = 48,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$.

La formule des profils minces donne environ 10 % d'erreur.

3.1.2. - Inertie de gauchissement compte tenu de la variation d'épaisseur et des armatures

Pour le profil en double té mince d'épaisseur constante \bar{e} , l'inertie s'écrirait :

$$K_1 = 2 \frac{\bar{e} b^3}{12} \left(\frac{h-\bar{e}}{2}\right)^2 \quad (2.42)$$

Compte tenu de la variation d'épaisseur de l'aile, l'aire sectorielle, égale au double de l'aire du triangle de la figure 41 a, s'écrit :

$$\Omega(x) = \frac{h - e'}{2} \cdot x$$

En supposant la ligne moyenne de l'aile parallèle à l'axe des x on obtient l'expression approchée :

$$\Omega(x) = \frac{h - \bar{e}}{2} \cdot x$$

L'inertie de gauchissement s'écrit alors :

$$K_1 = 4 \int_0^{b/2} \Omega(x)^2 \cdot t(x) \cdot dx$$
$$= \frac{(e' + 3e)b^3 (h - e')^2}{96} \quad (2.43)$$

En utilisant l'expression approchée de $\Omega(x)$ et l'épaisseur constante $t(x) = \bar{e}$, on retrouve l'expression (2.42) L'expression (2.43) ci-dessus tient compte de la variation d'épaisseur et de l'inclinaison de la ligne moyenne par rapport à l'axe x, mais elle est tout de même basée fondamentalement sur l'hypothèse du profil mince. On obtient les valeurs suivantes :

- profil mince à ailes parallèles et épaisseur constante (2.42): $K_1 = 16,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6$;
- profil mince ; ligne moyenne réelle et épaisseur variable (2.43) : $K_1 = 15,08 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6$.

La formule la plus simple (2.42) donne 8 % d'erreur par rapport à (2.43) Cette dernière doit donner une valeur suffisamment approchée car le profil est tout de même assez mince.

Contribution des armatures :

Le gauchissement étant un phénomène de déformations longitudinales, les armatures longitudinales ajoutent une contribution à celle du béton. En principe, il faudrait définir la ligne moyenne de la section homogène (béton + armatures), qui, en toute rigueur, n'est plus rectiligne. En se basant sur cette ligne moyenne (Γ) et en définissant la position des armatures par l'abscisse curviligne s_i de leur projection sur la ligne moyenne (fig. 41 b) on calculerait alors l'inertie de gauchissement selon l'expression

$$K_1 = \int_{(\Gamma)} \Omega(s)^2 \cdot t(s) \cdot ds + n \sum_{i=1}^n \Omega(s_i)^2 \cdot A_i$$

$n = E_a/E_{bo}$ étant le coefficient d'équivalence .

En fait, comme on ne sait pas tenir compte exactement de l'effet de l'épaisseur et que la différence est assez faible entre les calculs précédents (2.42) et (2.43), il est suffisant de raisonner en terme de flexion des ailes dans leur propre plan mais en considérant l'effet des armatures dans leur inertie de flexion propre et dans la distance entre leurs centres de gravité.

Le calcul est le suivant (fig. 41 a), en notant A l'aire d'une armature $\emptyset 10$:

$$\text{aire d'une aile } B' = be + \frac{b(e'-e)}{2} + 5 n A$$

$$\text{moment statique } S'_{xx} = \frac{be^2}{2} - \frac{b(e'-e)^2}{6} + n A [3(e-a) + 2(e-a')]$$

$$\text{distance du centre de gravité à } O \quad d' = \frac{h}{2} - e + \frac{S'_{xx}}{B'}$$

$$\text{inertie de flexion d'une aile } J = J_b + J_a$$

$$J_b = \frac{eb^3}{12} + 2 \frac{e'-e}{12} \left(\frac{b}{2}\right)^3$$

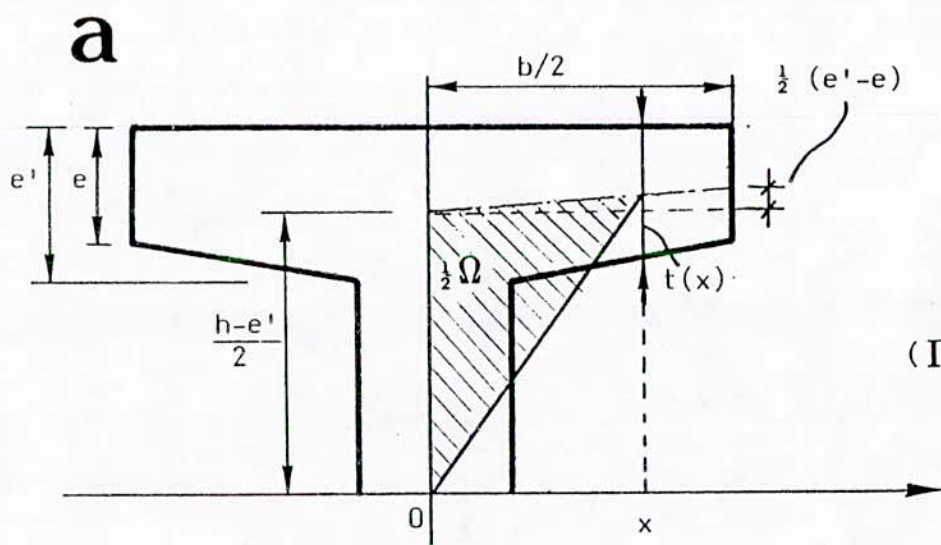
$$J_a = 2 n A (c^2 + c'^2)$$

inertie de gauchissement

$$K_1 = 2 (J_b + J_a) d'^2 \quad (2.44)$$

Avec $n = 195\,000/36\,500 = 5,34$, on obtient $K_1 = 17,69 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6$, qui résulte de la somme de :

- la contribution du béton $2 J_b d'^2 = 15,60 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6$; valeur très légèrement supérieure à celle calculée par (2.44) à cause de l'augmentation de la distance d ;
- la contribution de l'acier $2 J_a d'^2 = 2,09 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6$, soit 14 % de celle du béton.



$$\Omega(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{h-e'}{2} \cdot x \right)$$

$$t(x) = e' - (e'-e) \frac{2x}{b}$$

$$t \text{ moyen} = \bar{e}$$

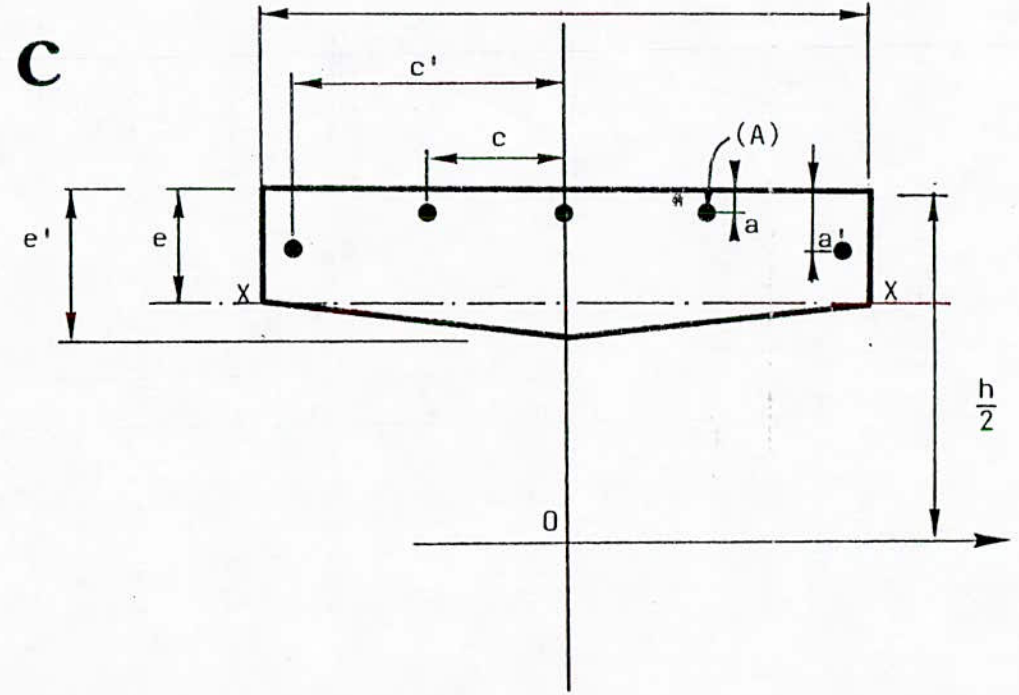
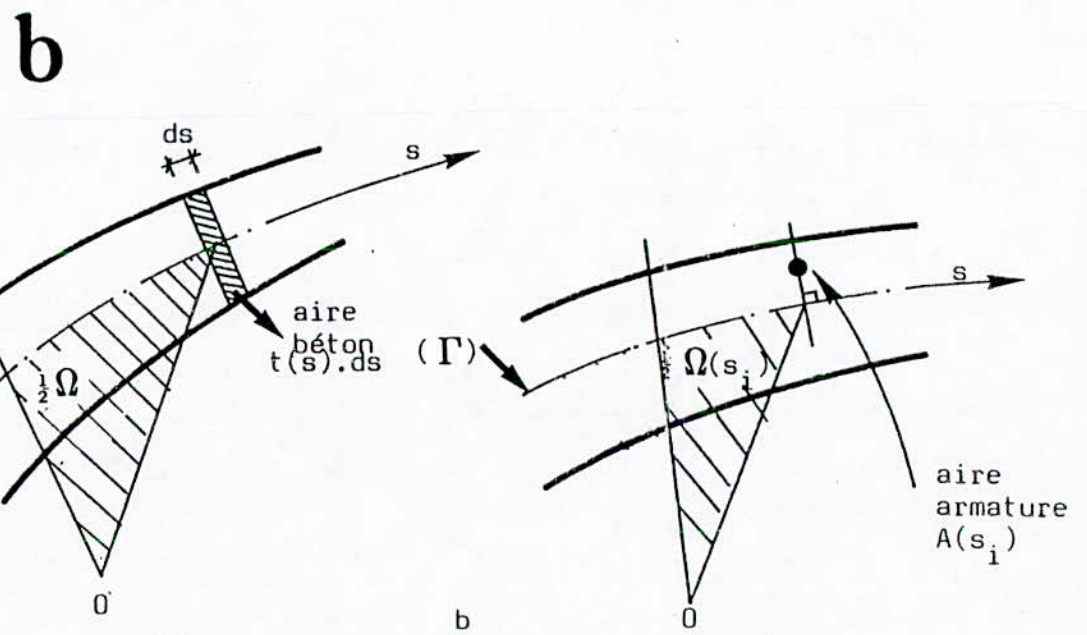


FIGURE 41

3.1.3. - Inertie de torsion sectorielle compte tenu des armatures

Pour le profil en double té mince d'épaisseur constante \bar{e} , l'inertie de torsion sectorielle (ou torsion gauche) s'écrit :

$$K_2 = 2 A_1 \left(\frac{h-\bar{e}}{2}\right)^2$$

expression où A_1 est l'aire réduite de chaque aile vis-à-vis d'un effort tranchant parallèle à l'aile : $A_1 = 5 b\bar{e}/6$. D'où

$$K_2 = \frac{5b\bar{e}}{3} \left(\frac{h-\bar{e}}{2}\right)^2 \quad (2.45)$$

L'expression générale pour un profil mince d'épaisseur variable $t(s)$ passe par le moment statique sectoriel

$$L(s) = - \int_s^{\ell} \Omega(u) \cdot t(u) \cdot du$$

puis l'inertie est calculée par l'expression

$$\frac{1}{K_2} = \frac{1}{(K_1)^2} \int_{(\Gamma)} \frac{L(s)^2}{t(s)} \cdot ds$$

On peut aisément tenir compte des armatures dans K_1 (cf. 3.1.2.) et dans le moment statique

$$L(s) = - \int_s^{\ell} \Omega(u) \cdot t(u) \cdot du - n \sum_{i=j}^m \Omega(s_j) \cdot A_i$$

pour $s < s_j < \ell$

La généralisation de l'expression de K_2 est plus difficile à établir directement. On va donc évaluer cette inertie par la généralisation de l'expression de la théorie élémentaire :

$$K_2 = 2 A_1 d^2 \quad ,$$

donc par l'introduction de l'effet des armatures dans le calcul de l'aire réduite A_1 .

Conformément aux notations de la figure 42, l'effort de glissement à une abscisse s s'écrit :

$$g(s) = T \frac{S(s)}{I} .$$

Cet effort résulte de l'équilibre avec les contraintes normales s'exerçant dans les sections d'abscisse z et $z + dz$, lesquelles dépendent du béton et des armatures. Celles-ci interviennent dans l'inertie I et dans le moment statique qui s'écrit :

$$S(s) = \int_s^{\ell} x(u) \cdot t(u) \cdot du + n \sum_{i=j}^m x(s_i) \cdot A_i$$

avec $s \leq s_j < \ell$

L'effort tranchant est équilibré par des contraintes de cisaillement dans le béton seul :

$$\tau(s) = \frac{g(s)}{t(s)} = \frac{T}{I} \frac{S(s)}{t(s)} .$$

Leur correspondent des distorsions locales du béton $\gamma(s) = \tau(s)/G$.

On écrit que le travail de l'effort tranchant T dans le déplacement élémentaire correspondant du_T/dz est égal à celui des contraintes τ dans les distorsions γ :

$$\frac{1}{2} T \frac{du_T}{dz} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \tau(s) \cdot \gamma(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

Soit

$$T \frac{du_T}{dz} = \frac{1}{G} \int_0^{\ell} \tau(s)^2 \cdot t(s) \cdot ds$$

En remplaçant $\tau(s)$ par son expression et en exprimant le déplacement sous la forme :

$$\frac{du_T}{dz} = \frac{T}{GA_1} ,$$

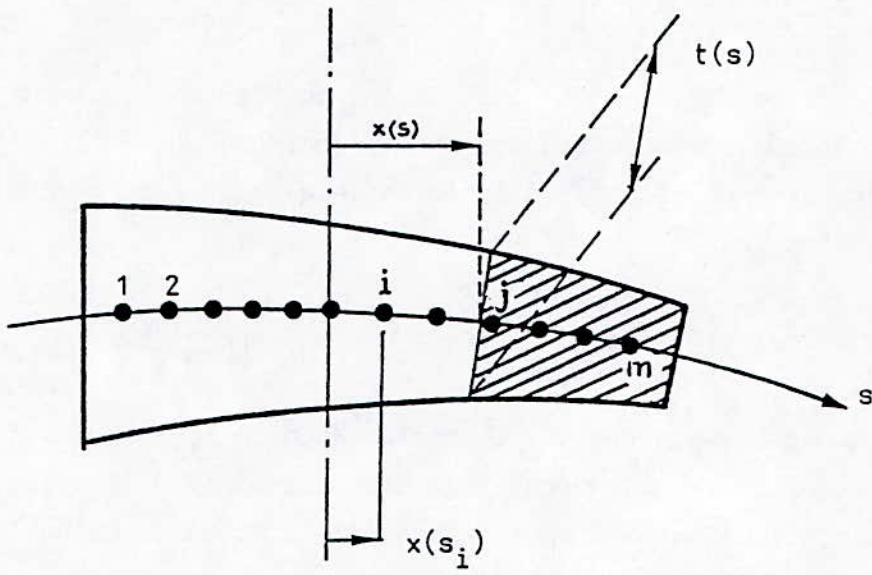


FIGURE 42

on tire l'expression de l'aire réduite

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{J^2} \int_0^l \frac{S(s)^2}{t(s)} \cdot ds$$

L'intégrale se calcule en deux termes :

1) béton :
$$\int_0^l \left[\int_s^l x(u) \cdot t(u) \cdot du \right]^2 \frac{ds}{t(s)}$$

2) acier :
$$n^2 \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=j}^m x(s_i) \cdot A_i \right]^2 \int_{s_{j-1}}^{s_j} \frac{ds}{t(s)}$$

Les contraintes de cisaillement considérées agissent dans le béton seul et sont supposées constantes dans l'épaisseur $t(s)$. Il n'y a donc pas à considérer, dans ce calcul, la ligne moyenne de la section homogène mais celle du béton seul.

Calcul simplifié :

Pour les poutres OE, l'inertie K_2 n'intervient que dans des termes correctifs ; il n'est pas nécessaire d'en faire une évaluation très précise. Le moment statique est $S = S_b + S_a$ avec le terme dû au béton d'une section rectangulaire de longueur b et d'épaisseur \bar{e} :

$$S_b(x) = \frac{\bar{e}}{2} \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - x^2 \right]$$

et le terme dû aux armatures

$$S_a = \begin{cases} nA(c + c') & \text{pour } 0 < x < c \\ nA c' & \text{pour } c < x < c' \\ 0 & x > c' \end{cases}$$

L'intégrale 1) donne $\bar{e} b^5/120$; l'intégrale 2) donne

$$2 \frac{n^2 A^2}{\bar{e}} \left[(c + c')^2 c + c'^2 (c' - c) \right]$$

L'inertie à introduire dans l'expression de A_1 est $\bar{J} = \bar{J}_b + \bar{J}_a$ dont le terme dû au béton est :

$$\bar{J}_b = \frac{\bar{e} b^3}{12} ,$$

le terme dû aux armatures \bar{J}_a conservant l'expression indiquée en 3.1.2. La distance entre les ailes à considérer dans K_2 est $d = (h - \bar{e})/2$. L'expression de l'inertie est alors :

$$K_2 = \frac{2 \left[\frac{\bar{e} b^3}{12} + 2nA (c^2 + c'^2) \right]^2 \left(\frac{h-\bar{e}}{2} \right)^2}{\frac{\bar{e} b^5}{120} + 2 \frac{n^2 A^2}{\bar{e}} [(c+c')^2 \cdot c+c' \cdot (c'-c)]} \quad (2.46)$$

Si l'on annule les termes dus aux armatures, on retrouve bien l'expression (2.45) Finalement, on a les valeurs suivantes :

- béton seul (2.45) : $K_2 = 10,21 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$,
- béton + armatures (2.46) : $K_2 = 12,77 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$.

La contribution des armatures accroît l'inertie de 25 %, ce qui provient essentiellement de l'augmentation de l'inertie de flexion propre des ailes (+ 12,7 %) qui intervient au carré.

3.1.4. - Récapitulation des grandeurs intervenant dans les rigidités

Compte-tenu des valeurs exactes des modules (en anticipant sur 3.2.) et du coefficient d'équivalence, on obtient les valeurs suivantes pour chacune des deux poutres :

		Unité	OE 1	OE 2
Module de déformation longitudinale E_{bo}		MPa	36 000	37 000
Coefficient de Poisson ν_0		-	0,185	0,185
Module de déformation transversale $G_0 = E_{bo}/2(1 + \nu_0)$		MPa	15 200	15 600
Coefficient d'équivalence $n = E_a/E_{bo}$ (*)		-	5,42	5,27
Inertie de flexion I		$10^{-4} \cdot m^4$	15,0	15,0
Inertie de torsion pure K		$10^{-6} \cdot m^4$	48,1	48,1
Inertie de gauchissement K_1		$10^{-6} \cdot m^6$	17,7	17,7
Inertie de torsion sectorielle K_2		$10^{-4} \cdot m^4$	13,0	12,7

(*) valable pour les armatures $\emptyset 10$; pour les barres $\emptyset 4$ on prend 1,1 n.

3.2. - Comportement en flexion seule

On considère les variations de déformation longitudinale $\Delta\epsilon_l$ et transversale $\Delta\epsilon_t$ sur les fibres extrêmes des sections (faces supérieure et inférieure) dues à la variation du moment de flexion $\Delta M = 0,55 \cdot \Delta F_f$ entre la première étape de flexion ($F_f = 1,96$ kN) et l'étape où la force est maximale ($F_f = 19,6$ kN), soit $\Delta M = 9,70$ kN.m.

Pour OE 1, en moyenne sur les quatre cycles préliminaires de flexion, on obtient :

	$\Delta\epsilon_l$	$\Delta\epsilon_t$
Nombre de mesures	48	39
Moyenne (10^{-6})	35,9	6,7
Coefficient de variation	3,6 %	14,6 %

On en déduit directement le coefficient de Poisson :

$$\nu_0 = \frac{\Delta \varepsilon_t}{\Delta \varepsilon_l} \simeq 0,185 .$$

Par ailleurs, la déformation longitudinale peut se calculer par

$$\Delta \varepsilon_l = \frac{\Delta M \cdot h}{2 E_{bo} \cdot I} .$$

L'inertie de flexion a une expression de la forme :

$$I = \alpha + \beta \frac{E_a}{E_{bo}}$$

avec $E_a = 195\ 000\ \text{MPa}$, $\alpha = 13,6 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4$ et $\beta = 0,263 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4$. On peut alors calculer le module à partir de la déformation $\Delta \varepsilon_l$ expérimentale par

$$E_{bo} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\Delta M \cdot h}{2 \cdot \Delta \varepsilon_l} - \beta E_a \right] .$$

On obtient

$$E_{bo} \simeq 36\ 000\ \text{MPa}$$

Pour OE 2, le nombre des mesures disponibles est beaucoup faible à cause de la fissuration prématurée. Pour une variation de moment $\Delta M = 7,8\ \text{kN.m}$, on obtient :

		$\Delta \varepsilon_l$	$\Delta \varepsilon_t$
Nombre de mesures	: n	12	10
Moyenne (10^{-6})	: m	28,0	5,4
Coefficient de variation	: σ	6,8 %	9,6 %

Pour $\Delta M = 17,5 \text{ kN.m}$, on obtient :

	$\Delta \varepsilon_z$	$\Delta \varepsilon_t$
n	12	10
m	66,1	11,3
σ	10,7 %	22,1 %

Dans ce dernier cas, on est assez proche de la fissuration et le fluage devient sensible, ce qui accroît la dispersion des résultats et conduit à surestimer $\Delta \varepsilon_z$. En se basant sur les mesures faites pour $\Delta M = 7,8 \text{ kN.m}$, on estime le module à $E_{bo} \approx 37\,000 \text{ MPa}$. Cette valeur est logique par rapport à OE 1 puisque ce sont des bétons de même composition mais d'âge un peu différent ; de plus, à ces âges, le module n'évolue plus beaucoup.

Les valeurs du coefficient de Poisson selon les deux groupes de mesures précédentes sont très différentes : 0,193 et 0,171 respectivement. On admettra la même valeur que pour OE 1, soit 0,185.

3.3. - Comportement en torsion seule

3.3.1. - Rappel : solution de l'équation de la torsion mixte

Le couple de torsion extérieur constant étant C, la rotation de torsion $\Theta(z)$ est solution de l'équation "simplifiée"

$$E_{bo} K_1 \frac{d^3 \Theta}{dz^3} - G_o K \frac{d\Theta}{dz} = C \quad (2.47)$$

Cette solution s'écrit sous la forme

$$\Theta(z) = k_1 + k_3 e^{-z/d} + k_4 e^{z/d} + \lambda z$$

avec

$$d = \sqrt{\frac{E_{bo} K_1}{G_o K}} = \sqrt{2(1 + \nu_o) \frac{K_1}{K}}$$

"distance caractéristique" qui a pour valeur 0,935 m, la même pour OE 1 et OE 2.

A partir de cette solution approchée, on peut calculer les parts du couple équilibrées en torsion pure :

$$C_1(z) = - GK \frac{d\Theta}{dz} ,$$

et en gauchissement gêné :

$$C_2(z) = C - C_1(z).$$

Connaissant cette valeur approchée de $C_2(z)$, on peut chercher la solution de l'équation générale

$$EK_1 \frac{d^3\Theta}{dz^3} - GK \frac{d\Theta}{dz} = C - \frac{EK_1}{GK_2} \frac{d^2C_2}{dz^2}$$

qui donne une meilleure approximation de $\Theta(z)$, de la forme :

$$\Theta(z) = k_1 + k_3 e^{-z/d} + k_4 e^{z/d} + (\lambda + \mu e^{-z/d} + \nu e^{z/d}).z \quad (2.48)$$

Dans le cas de OE 1, la deuxième approximation conduit aux écarts relatifs suivants par rapport à la première :

- 2,6 % sur la rotation Θ maximale,
- 2,6 % sur le couple C_1 maximal,
- + 1,7 % sur le couple C_2 maximal,
- + 1,6 % sur le bimoment B maximal.

Pour OE 2, ces écarts sont plus faibles car le gauchissement gêné influe moins que pour OE 1. Compte-tenu des incertitudes expérimentales, on peut se contenter de la première approximation.

On trouvera à l'Annexe 3 le détail des calculs.

3.3.2. - Conditions aux limites

Cas de OE 1 :

Si l'on cherche les valeurs des constantes k_1 , k_3 , k_4 et λ de l'équation (2.47) en supposant le gauchissement parfaitement gêné sur appui et dans la section médiane de la poutre, on obtient des rotations $\Theta(z)$, représentées par

la courbe (a) de la figure 43, qui sont inférieures aux valeurs expérimentales. Par ailleurs (voir 3.4.2.) les déformations longitudinales expérimentales dues au gauchissement gêné sont un peu plus grandes au voisinage de la section médiane qu'au voisinage de la section d'appui. Le gauchissement étant parfaitement gêné dans la section médiane par raison de symétrie, il s'avère donc que la gêne n'est pas parfaite dans la section d'appui.

En comptant les abscisses z à partir de l'appui et en notant l la longueur de la demi-portée et a la longueur des parties "pleines" de la poutre comptées à partir de l'appui ou à partir de la section médiane, on considère les conditions aux limites suivantes :

- la rotation est nulle dans la section $z = 0$, et elle le reste jusqu'à $z = a$;
- le gauchissement est parfaitement empêché dans la section $z = l - a$;
- le gauchissement est parfaitement gêné dans une section a priori inconnue située à une distance $z = v_1$ au-delà de l'appui, vers l'extérieur de la poutre.

Soit

$$\Theta(a) = 0 \quad ,$$

$$\frac{d\Theta}{dz}(l - a) = 0 \quad ,$$

$$\frac{d\Theta}{dz}(v_1) = 0 \quad .$$

Comme on a maintenant quatre inconnues k_2, k_3, k_4 et v_1 ($\lambda = -C/G_0K$ étant connu), il faut disposer d'une quatrième relation. A défaut d'une détermination directe de v_1 à partir de considération de déformabilité relative de la section courante et du bloc d'about plein vis-à-vis des efforts dus au gauchissement gêné, on utilisera une relation expérimentale :

$$\Theta(l - a) = \Theta_{\max}(l) \text{ expérimental.}$$

Pour $C = 1 \text{ kN.m}$, on a $\Theta_{\max} \simeq 7,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. On obtient alors, en première approximation :

$$v_1 = - 0,20 \text{ m,}$$

ainsi que les constantes $k_1, k_3, k_4, \lambda, \mu$ et ν de l'équation (13) (voir annexe 3).

Cas de OE 2 :

Le calcul effectué dans l'hypothèse du gauchissement parfaitement libre dans la section d'appui ($z = 0$) et parfaitement gêné au voisinage du milieu de la poutre (section $z = l - a$) conduit à des rotations plus grandes que les valeurs expérimentales, comme le montre la courbe (a) de la figure 44. Par ailleurs, la mesure des déformations longitudinales (voir 3.5.2.) fait apparaître une légère gêne du gauchissement au voisinage de l'appui, avec des valeurs de signe opposé à celles mesurées vers le milieu de la poutre. Il s'en suit que le gauchissement serait libre à une distance $z = v_2$ de l'appui vers l'intérieur de la poutre, a priori inconnue.

On utilise donc les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}\Theta(a) &= 0 \quad , \\ \frac{d\Theta}{dz}(l - a) &= 0 \quad , \\ \frac{d^2\Theta}{dz^2}(v_2) &= 0 \quad ,\end{aligned}$$

et la relation complémentaire :

$$\Theta(l - a) = \Theta_{\max}(l) \text{ expérimental} \quad .$$

Pour $C = 1 \text{ kN.m}$, on a $\Theta_{\max} \simeq 10,7 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. On obtient alors :

$$v_2 = 0,55 \text{ m} \quad .$$

Remarque :

La signification des distances v_1 et v_2 est précisée à la figure 45 sur laquelle a été portée l'allure de la variation de $\Theta(z)/L$ en fonction de z , qui est la même pour les deux poutres (à la légère différence des rigidités près). La longueur L est la distance entre les deux sections où le gauchissement est parfaitement empêché, soit :

$$\begin{aligned} L &\approx l - a - v_1 \approx 2,10 \text{ m} && \text{pour OE 1,} \\ L &\approx 2(l - a - v_2) \approx 2,65 \text{ m} && \text{pour OE 2.} \end{aligned}$$

Le rapport de cette longueur à la distance caractéristique d a alors les valeurs suivantes, commentées selon les indications de KOLLBRUNNER et BASLER :

$$\begin{aligned} L/d &\approx 2,2 && \text{pour OE1,} \\ L/d &\approx 2,8 && \text{pour OE 2.} \end{aligned}$$

On se trouve dans le domaine de la "torsion mixte" avec une forte influence du gauchissement gêné, même pour OE 2 contrairement à ce qu'on aurait voulu obtenir.

3.3.3. - Comparaison des rotations mesurées et calculées

Les résultats des calculs précédents, poussés jusqu'à la seconde approximation pour OE 1, arrêtés à la première pour OE 2, permettent de tracer la courbe des rotations $\Theta(z)$ calculées le long de la poutre : ce sont les courbes (b) des figures 43 et 44.

La comparaison avec les valeurs mesurées est satisfaisante dans les deux cas, à l'incertitude près sur la mesure dans la section médiane de la poutre ($z = 1,95 \text{ m}$).

3.4. - Déformations dues au gauchissement gêné

3.4.1. - Rappel : calcul du bimoment, des contraintes et des déformations

Une première approximation du bimoment est donnée par :

$$B = E_{bo} K_1 \frac{d^2 \Theta}{dz^2} .$$

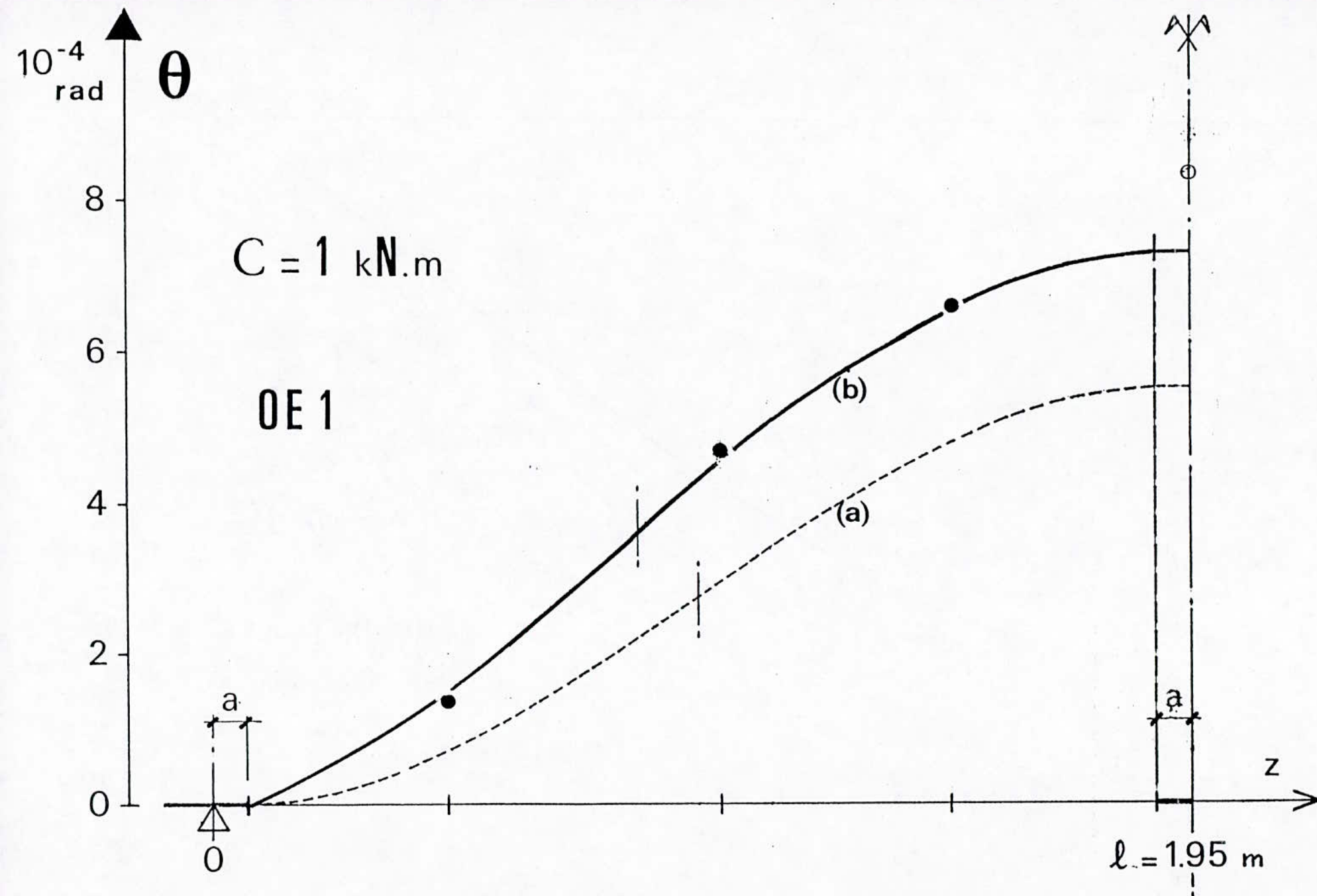


FIG. 43 - Rotation le long de la poutre (essai OE 1)

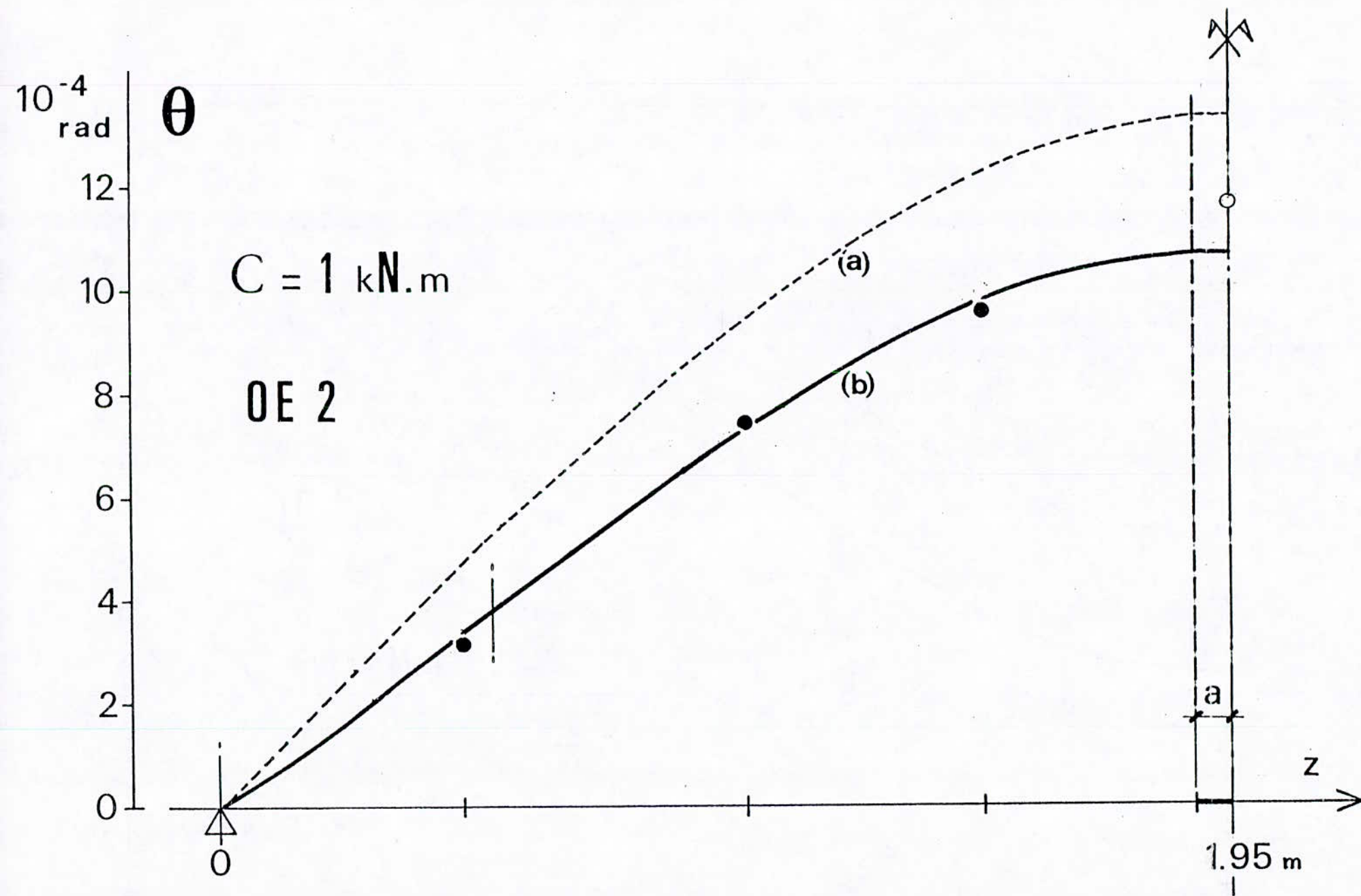


FIG. 44. Rotation le long de la poutre (essai OE 2)

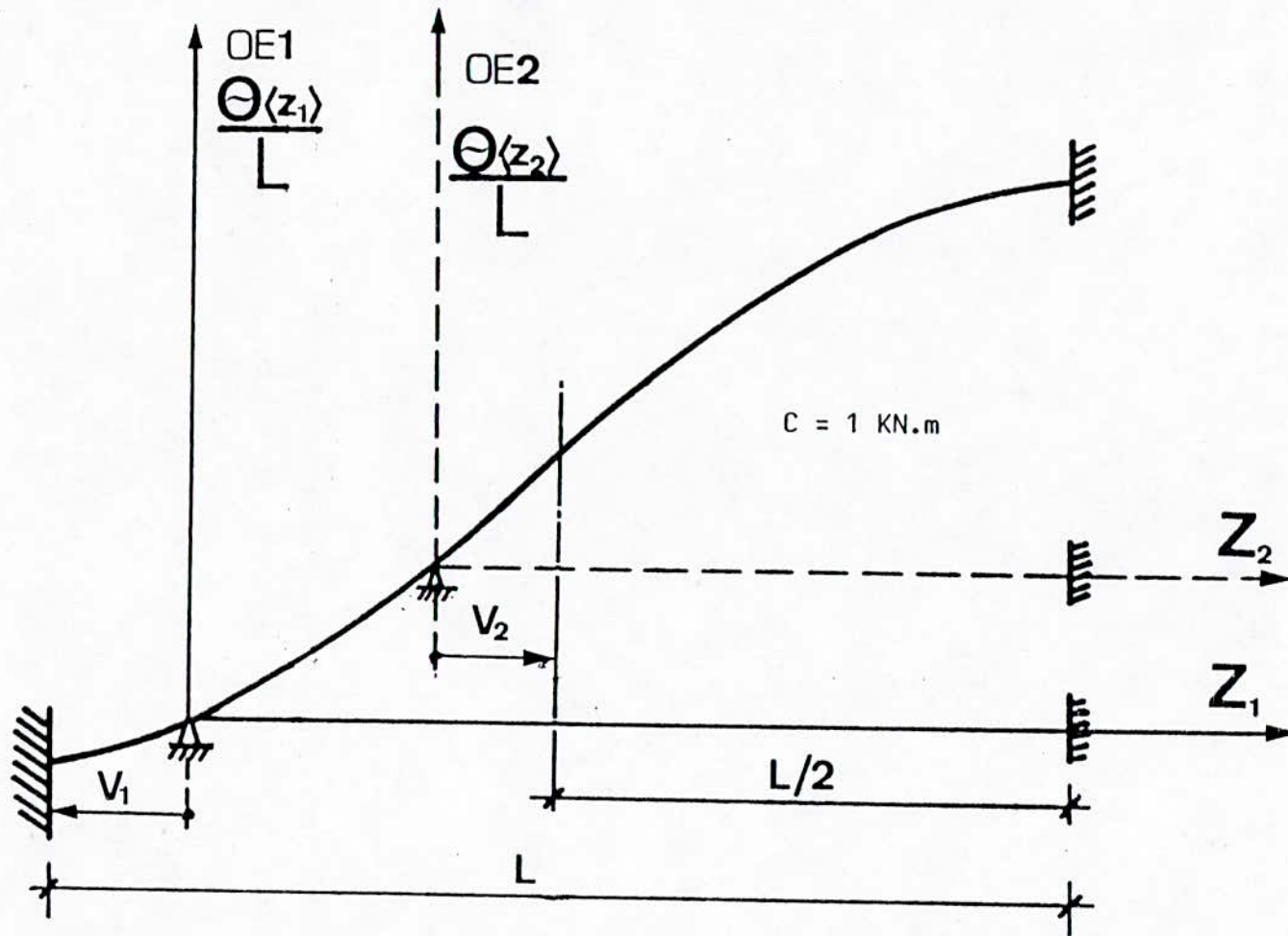


FIG 45 : Conditions d'encastrement vis-à-vis du gauchissement

Si nécessaire, à partir de la seconde approximation de Θ (cf. 3.3.1.) et de la connaissance de $C_2(z)$, une meilleure approximation est donnée par :

$$B = E_{bo} K_1 \frac{d^2\Theta}{dz^2} + 2(1 + \nu_0) \frac{K_1}{K_2} \frac{dC_2}{dz} .$$

Une autre façon de procéder, en deuxième approximation, est de calculer le terme Θ_2 , d'où le terme $\Theta_1 = \Theta - \Theta_2$ (Θ étant la deuxième approximation de la rotation totale) et le bimoment par :

$$B = E_{bo} K_1 \frac{d^2\Theta_1}{dz^2} .$$

Dans un profil mince, les contraintes dues à la gêne du gauchissement, constantes dans l'épaisseur, sont alors :

$$\sigma_c(x) = \frac{B}{K_1} \cdot \Omega(x) .$$

On calcule ensuite les déformations longitudinales (supposés constantes sur l'épaisseur de l'aile) par :

$$\epsilon_c(x) = \frac{B}{E_{bo} K_1} \cdot \frac{h-e'}{2} \cdot x .$$

3.4.2. - Exploitation des mesures de déformations longitudinales des ailes

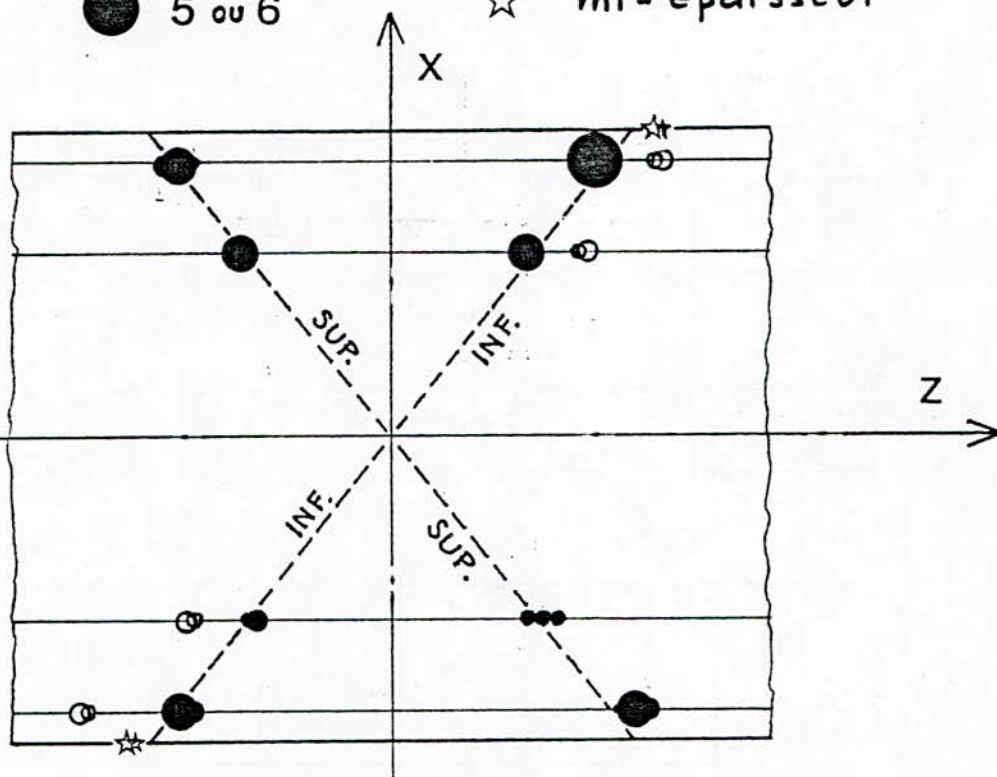
Cas de OE 1 :

Deux sections ont été équipées particulièrement en mesure de déformation longitudinale des ailes : une près du milieu de la poutre ($z = 1,81$ m). l'autre près de l'appui ($z = 0,125$ m). Les résultats des mesures effectuées sous le couple maximal lors des trois derniers cycles de torsion pure sont présentés à la figure 46. Les mesures les plus nombreuses, sur les faces externes des ailes (dessus de l'aile supérieure et dessous de l'aile inférieure), mettent en évidence la bonne symétrie de comportement des ailes supérieure et inférieure ; d'autre part la linéarité des déformations ϵ avec l'abscisse x est bien vérifiée à la dispersion des résultats près.

- Nombre de mesures
- 1
 - 2
 - 3
 - 5 ou 6
- faces externes
○ " internes
☆ mi-épaisseur

(a)

section
 $z = 1.81 \text{ m}$

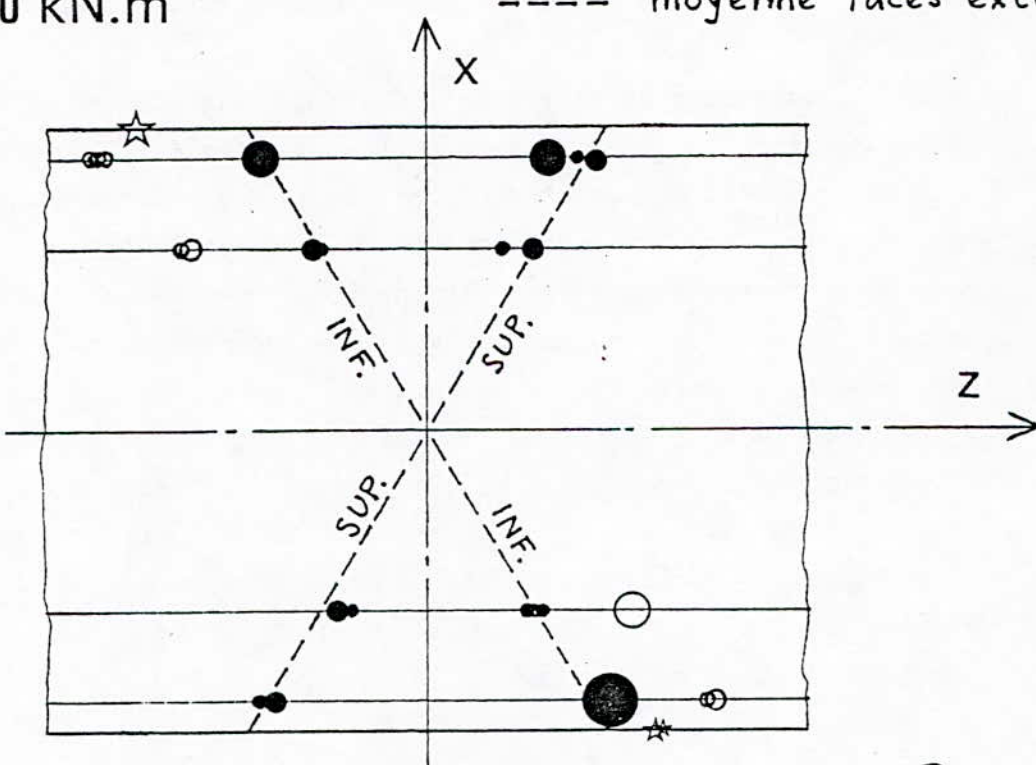


$C = 1.20 \text{ kN.m}$

--- moyenne faces externes

(b)

section
 $z = 0.125 \text{ m}$



OE 1

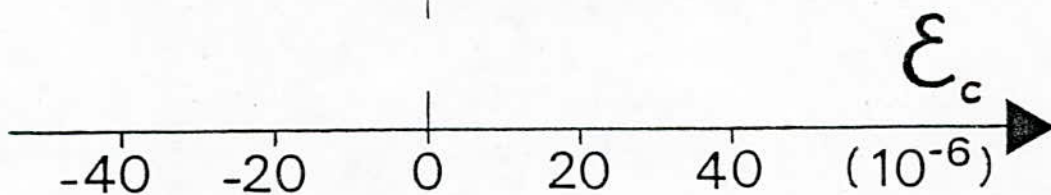


Fig. 46 - Déformations expérimentales dues à la gêne du gauchissement (OE 1)

Cette dispersion est d'ailleurs assez réduite compte-tenu des faibles valeurs mesurées, ainsi que le montrent les valeurs du tableau ci-dessous concernant l'ensemble des valeurs absolues des ϵ_c mesurées sur les faces extérieures, pour trois niveaux de couple (nombre de mesures n, valeur moyenne m, coefficient de variation σ) :

Couple C (kN.m)	Déformation $ \epsilon_c $ pour $x = 0,18$ m					
	$z = 0,125$ m			$z = 1,81$ m		
	n	m	σ	n	m	σ
0,40	18	$7,1 \cdot 10^{-6}$	15,9 %	24	$9,5 \cdot 10^{-6}$	14,2 %
0,80	18	$13,9 \cdot 10^{-6}$	12,2 %	24	$19,0 \cdot 10^{-6}$	10,2 %
1,20	18	$21,2 \cdot 10^{-6}$	12,9 %	24	$28,7 \cdot 10^{-6}$	8,6 %

On remarque aussi l'excellente linéarité en fonction du couple.

La figure 46 montre par contre que les mesures effectuées sur les faces internes des ailes (dessus de l'aile inférieure) donnent des valeurs significativement différentes de celles des faces externes. Les quelques mesures effectuées à mi-épaisseur des ailes (sur la tranche de l'aile inférieure) donnent des valeurs intermédiaires entre les précédentes. Il existe donc, au moins pour les sections voisines des parties rigides de la poutre, un gradient de contrainte de gauchissement généré dans l'épaisseur de l'aile. C'est ce que montre la figure 47 où l'on a porté, sur l'épaisseur d'une aile, la moyenne des déformations $|\epsilon_c|$ mesurées, corrigées pour les traduire toutes en déformation maximale $\epsilon_{c,max}$ à l'extrémité de l'aile, dans l'hypothèse de la linéarité en x. Il faut noter que la dispersion des résultats est nettement plus forte dans la section $z = 0,125$ m, comme le montre les valeurs ci-dessous (pour $C = 1,20$ kN.m) :

Emplacement des mesures

OE 1: $C = 1.20 \text{ kN.m}$

● $z = 1.81 \text{ m}$

○ 0.125

OE 2: 1.08

★ 1.81

☆ 1.45

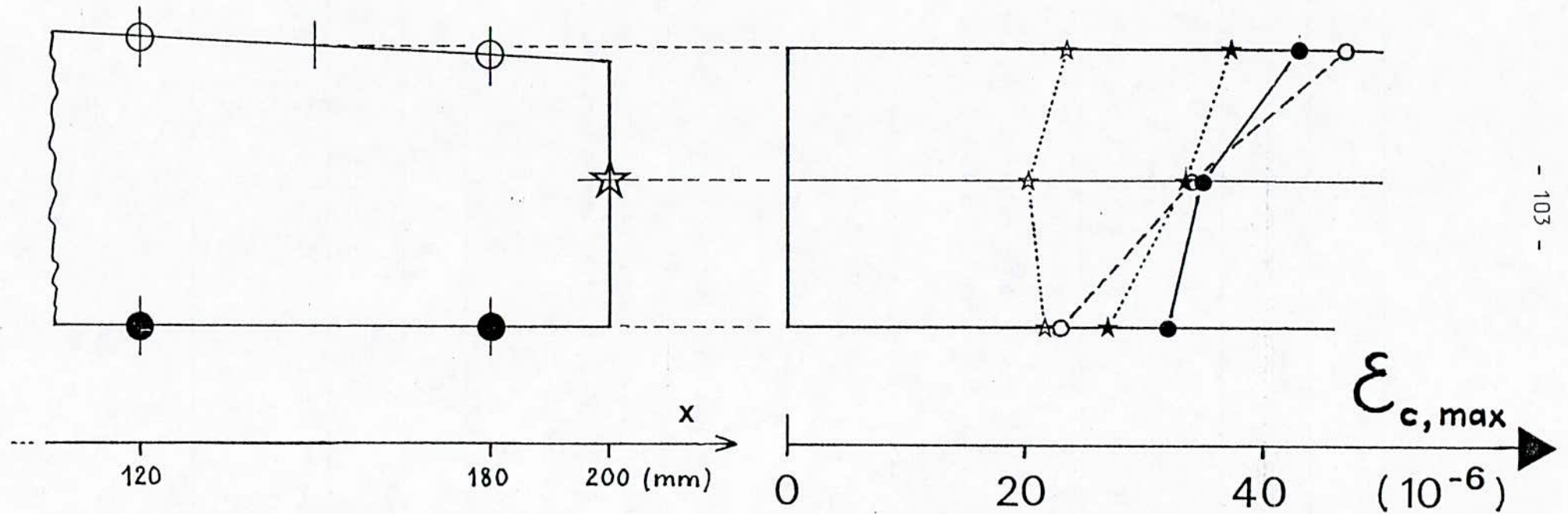


Fig. 47 - Gradient de déformations de gauchissement gêné dans l'épaisseur de l'aile

Déformation $\epsilon_{c,max}$ ($ \epsilon_c $ extrapolé pour $x = 0,20$ m)						
Position dans l'épaisseur	$z = 0,125$ m			$z = 1,81$ m		
	n	m	σ	n	m	σ
Face externe	30	22,9	13,4 %	36	31,9	7,9 %
Mi-épaisseur	6	34,2	12,3 %	6	35,0	1,8 %
Face interne	12	46,7	8,7 %	12	43,0	5,4 %

En raisonnant toujours sur les valeurs absolues et en se ramenant à une valeur unité du couple ($C = 1$ kN.m), la variation expérimentale de la déformation $\epsilon_{c,max}$ le long de la poutre est représentée par les points de la figure 48. On ne dispose malheureusement de mesure à divers niveaux dans l'épaisseur de l'aile que dans les sections extrêmes.

Cas de OE 2 :

Les sections les plus instrumentées sont toutes deux proches du milieu de la poutre ($z = 1,81$ m et $z = 1,45$ m) puisque le gauchissement est en principe libre à l'appui. La dispersion des résultats est plus forte que pour OE 1, comme le montrent les valeurs numériques ci-dessous (tableau homologue de celui présenté pour OE 1) :

Couple C (kN.m)	Déformation $ \epsilon_c $ pour $x = 0,18$ m					
	$z = 1,45$ m			$z = 1,81$ m		
	n	m	σ	n	m	σ
0,36	24	$6,5 \cdot 10^{-6}$	20,2 %	24	$8,4 \cdot 10^{-6}$	16,4 %
0,72	24	$13,2 \cdot 10^{-6}$	21,0 %	24	$17,2 \cdot 10^{-6}$	17,1 %
1,08	24	$19,8 \cdot 10^{-6}$	21,1 %	24	$25,2 \cdot 10^{-6}$	16,6 %

La linéarité reste très bonne en fonction du couple.

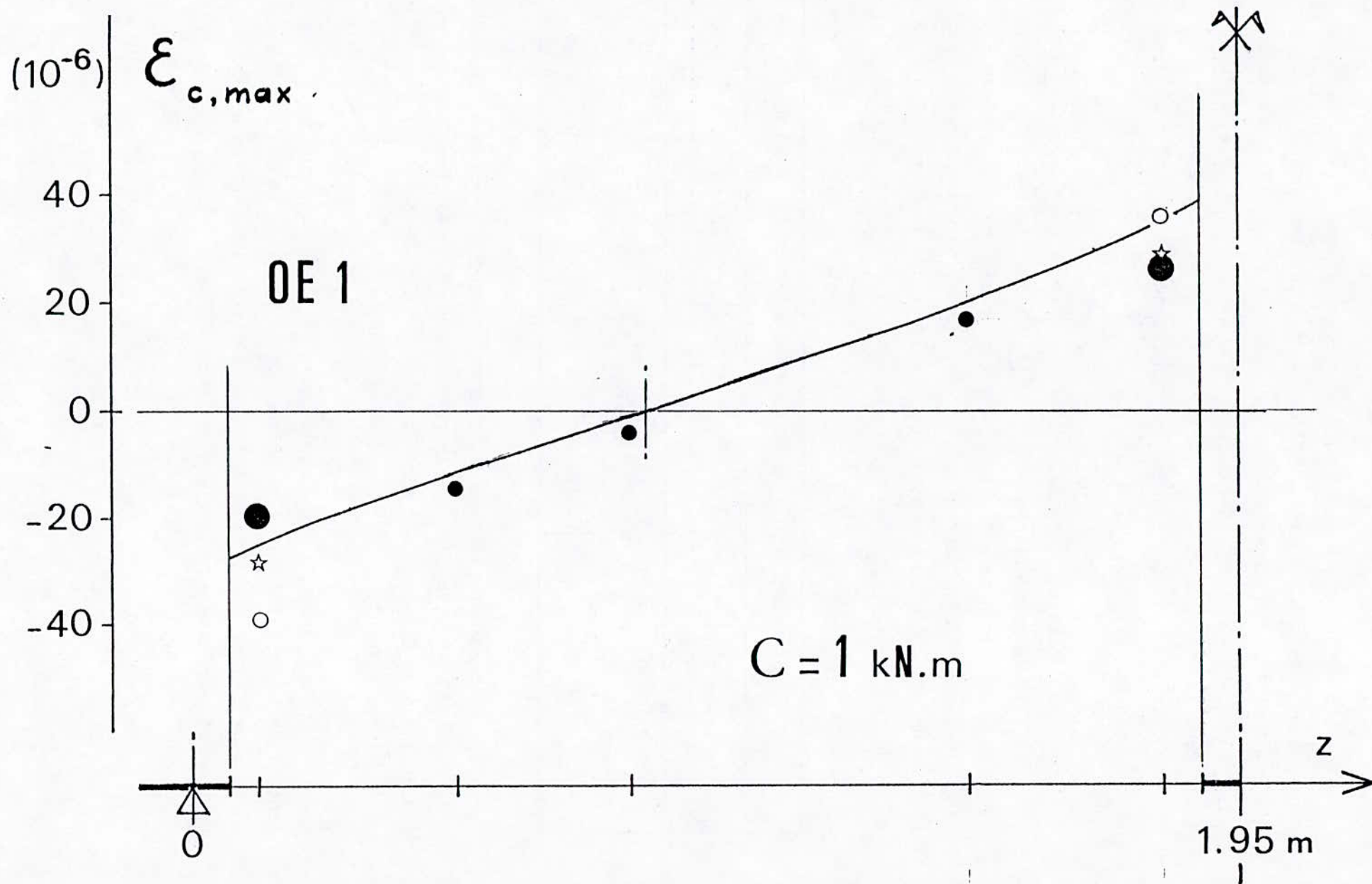


Fig. 48 - Déformations dues au gauchissement gêné, le long de la poutre (OE 1)

Le détail des mesures sous le couple maximal, présenté à la figure 49, montre que la symétrie entre les ailes supérieure et inférieure (et même entre les deux moitiés d'une même aile) n'est pas très bonne. Ceci pourrait provenir du fait que les conditions de libération du gauchissement à l'appui ne sont pas exactement les mêmes pour les deux ailes. Cependant, faute de moyen de pousser l'interprétation dans cette voie, on raisonne sur la moyenne des valeurs absolues des mesures sur les deux ailes.

On constate encore que, dans la section proche du milieu de la poutre (fig. 49 a), les déformations sont plus grandes sur les faces internes que sur les faces externes. Par contre, cet effet disparaît dans la section $z = 1,45$ m (fig. 49 b). Il s'agit donc bien d'un effet local au voisinage des sections d'encastrement vis-à-vis du gauchissement. Ceci est précisé par les valeurs numériques de la déformation $\epsilon_{C,max}$ présentées au tableau ci-dessous (pour $C = 1,08$ kN.m):

Déformation $\epsilon_{C,max}$ ($ \epsilon_C $ extrapolé pour $x = 0,20$ m)						
Position dans l'épaisseur	$z = 1,45$ m			$z = 1,81$ m		
	n	m	σ	n	m	σ
Face externe	36	$21,7 \cdot 10^{-6}$	25,8 %	36	$27,1 \cdot 10^{-6}$	20,0 %
Mi-épaisseur	6	$20,3 \cdot 10^{-6}$	18,0 %	6	$33,5 \cdot 10^{-6}$	8,2 %
Face interne	12	$23,4 \cdot 10^{-6}$	20,8 %	12	$37,2 \cdot 10^{-6}$	15,1 %

Le gradient (ou absence de gradient) correspondant est représenté à la figure 47. On remarque que le gradient est du même ordre de grandeur dans les deux essais OE 1 et OE 2 pour la section $z = 1,81$ m, soit environ ± 15 % de la valeur moyenne.

En se ramenant à un couple unité ($C = 1$ kN.m), la variation expérimentale de la déformation de gauchissement gêné à l'extrémité des ailes, $\epsilon_{C,max}$ le long de la poutre est représentée par les points de la figure 50. Au voisinage de l'appui, on ne dispose pas de mesures sur les faces internes qui pourraient mettre en évidence un éventuel gradient.

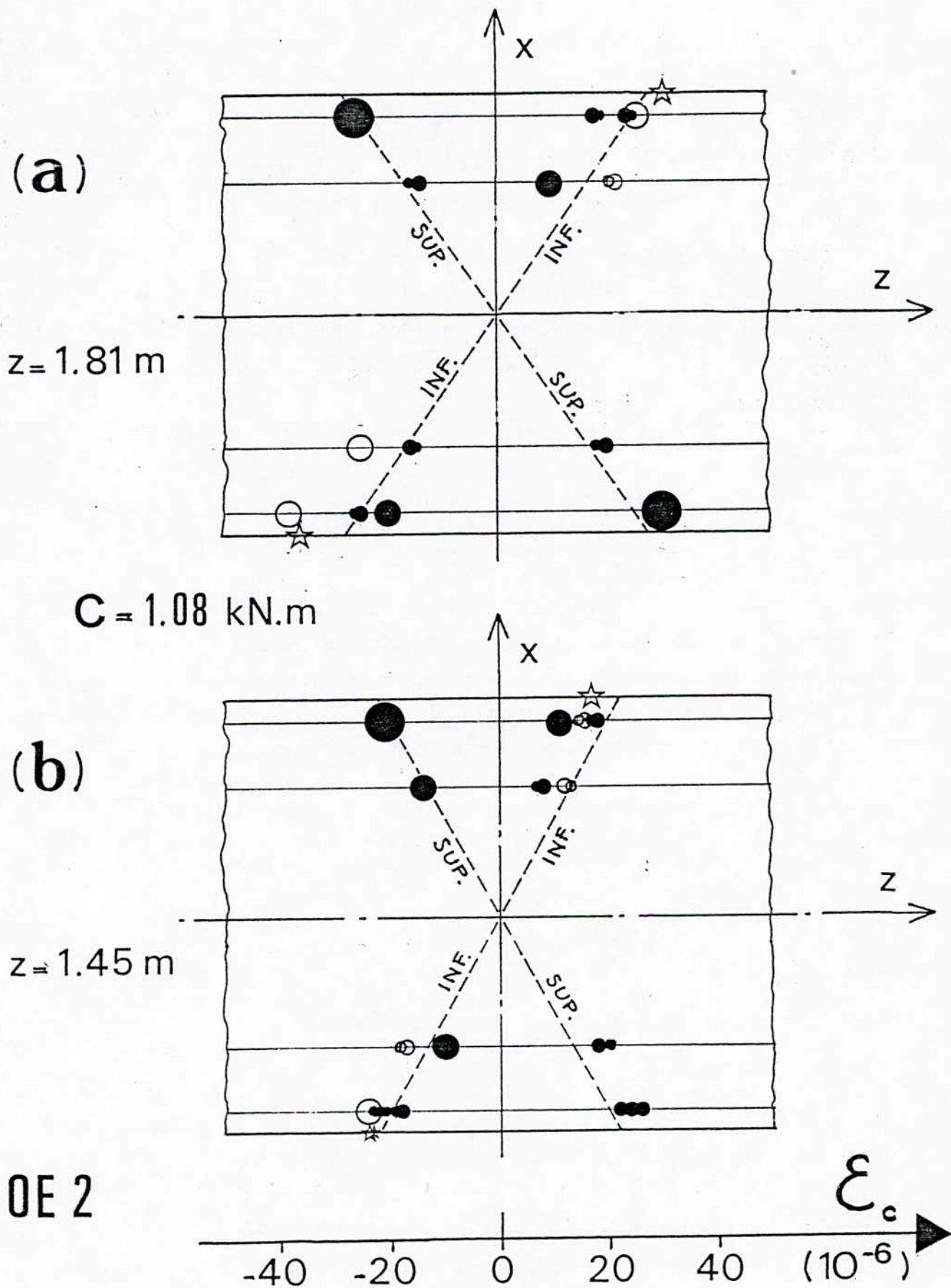


Fig. 49 - Déformations expérimentales dues à la gêne du gauchissement (OE 2)

3.4.3. - Comparaison des déformations mesurées et calculées

Les courbes représentatives des déformations $\epsilon_{c,max}$ calculées (seconde approximation pour OE 1, première pour OE 2) sont tracées sur les figures 48 et 50.

L'accord avec les mesures est satisfaisant pour OE 1. Pour OE 2, il semble que la gêne du gauchissement soit un peu surestimée, ce qui conduit à des valeurs calculées supérieures, en valeur absolue, aux valeurs mesurées. Une distance v_2 de l'ordre de 0,40 m semblerait plausible.

3.5. - Déformations dues aux cisaillements

3.5.1. - Rappel : calcul des contraintes de cisaillement et des déformations correspondantes

Les contraintes de cisaillement dues à la part C_1 du couple équilibré en torsion pure sont supposées varier linéairement dans l'épaisseur de l'âme et des ailes (la section de la membrane déformée par un plan perpendiculaire à la ligne moyenne est un arc de parabole) ; elles s'annulent sur la ligne moyenne et sont maximales sur les parements. Ces valeurs maximales sont :

- dans l'âme

$$\tau_{c1,max} = \frac{C_1 \cdot e'}{K} \quad ,$$

- dans les ailes

$$\tau_{c1,max}(x) = \frac{C_1 \cdot t(x)}{K} \quad .$$

A la jonction de l'aile et de l'âme ($x = 0$), cette valeur doit encore être valable sur la face externe, compte-tenu de l'allure supposée de la membrane déformée (cf. 3.1.1. et fig. 40 a).

Les contraintes de cisaillement dues à la part C_2 du couple équilibrée en gauchissement gêné sont nulles dans l'âme, constantes dans l'épaisseur des ailes et réparties le long de celles-ci comme les contraintes dues à un effort tranchant parallèle à l'aile. Leur expression est :

$$\tau_{c2}(x) = \frac{C_2 \cdot L(x)}{K_1 \cdot t(x)} \quad .$$

Compte tenu du béton et des armatures (cf. 3.1.3.) le moment statique sectoriel s'écrit, en valeur absolue :

$$L(x) = \frac{h-e'}{2} \left[\frac{b^2(e' + 2e)}{24} - \frac{e'}{2} x^2 + \frac{2(e' - e)}{3b} \cdot x^3 \right] \\ + n A \frac{h-e'}{2} \sum_j x_j \\ \left(x \leq x_j \leq \frac{b}{2} \right) \quad .$$

Soit un terme dû au béton égal à :

$$(166,75 - 4744 x^2 + 2875 x^3) \cdot 10^{-6} \quad m^4 \quad ,$$

et un terme dû aux armatures égal à :

$$\left\{ \begin{array}{l} n A \frac{h-e'}{2} (c + c') = 3,656 \cdot 10^{-6} n \quad \text{pour } 0 < x < c \\ n A \frac{h-e'}{2} c' = 2,437 \cdot 10^{-6} n \quad \text{pour } c < x < c' \\ 0 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{pour } x > c' \quad . \end{array} \right.$$

Les cisaillements τ_{c1} et τ_{c2} sont de même signe sur les faces externes des ailes, de signe contraire sur les faces internes.

On mesure les déformations relatives ϵ_{45} dans les directions inclinées de 45° par rapport à l'axe de la poutre, c'est-à-dire par rapport aux directions où s'exercent les contraintes τ . Si l'état de contrainte est de cisaillement pur, on a directement, pour les mesures en surface :

- dans l'âme

$$\epsilon_{45} = \frac{1 + \nu_0}{E_{bo}} \tau_{c1, \max}$$

- au milieu des faces externes des ailes

$$\epsilon_{45} = \frac{1 + \nu_0}{E_{bo}} \cdot [\tau_{c1, \max}(0) + \tau_{c2}(0)]$$

Dans les ailes, à une distance x non nulle de l'axe, on a un état de contrainte qui comprend une contrainte normale longitudinale $\sigma_c(x)$ et un cisaillement $\tau_{c1}(x) \pm \tau_{c2}(x)$. La déformation en surface selon la direction inclinée de 45° est alors :

$$\epsilon_{45} = \frac{1 + \nu_0}{E_{bo}} [\tau_{c1, \max}(x) \pm \tau_{c2}(x)] \pm \frac{1 - \nu_0}{2 E_{bo}} \cdot \sigma_c(x) ,$$

les signes + ou - étant fonction de la face extérieure ou intérieure et du côté de l'aile, Est ou Ouest.

3.5.2. - Interprétation des mesures de déformations ϵ_{45}

Cas de OE 1 :

Les grandeurs mesurées sont encore plus faibles que celles des déformations de gauchissement gêné ; cependant, malgré la dispersion, les valeurs moyennes obtenues sur plusieurs points de mesures homologues et sur les trois derniers cycles de torsion pure sont bien significatives. Par exemple sur l'ensemble des mesures effectuées, dans une même section ($z = 0,975$ m), sur les faces internes des deux ailes, la distribution statistique des résultats est caractérisée par les valeurs suivantes :

Couple C (kN.m)	Déformation $ \epsilon_{45} $ pour $x = 0,115$ m		
	n	m	σ
0,40	24	$4,4 \cdot 10^{-6}$	14,8 %
0,80	24	$8,8 \cdot 10^{-6}$	12,5 %
1,20	24	$13,2 \cdot 10^{-6}$	12,0 %

La linéarité en fonction du couple est parfaite.

Les mesures effectuées sur les parements de l'âme sont proportionnelles, le facteur était $(1 + \nu_0)/E_{b0}$, à la contrainte $\tau_{c1,max}$. Sous le couple maximal ($C = 1,20 \text{ kN.m}$) on a les résultats suivants dans trois sections :

Ame	Déformation $ \epsilon_{45} $ [$\tau_{c1,max}$]			
	Section	n	m	σ
$z = 0,125 \text{ m}$	6	7,7	6,7 %	
$z = 0,975 \text{ m}$	12	18,4	9,7 %	
$z = 1,81 \text{ m}$	6	5,8	16,9 %	

Les déformations au milieu des ailes ($x = 0$) sont proportionnelles (avec le même facteur que ci-dessus) à la somme des contraintes $\tau_{c1,max}(0)$, égale à la valeur précédente de $\tau_{c1,max}$, et $\tau_{c2}(0)$. Par différence, on peut donc obtenir la seconde. Les valeurs expérimentales obtenues sous le couple maximal sont les suivantes :

Ailes ($x=0$)	Déformation $ \epsilon_{45} $ [$\tau_{c1,max}(0) + \tau_{c2}(0)$]			$ \epsilon_{45} $ [$\tau_{c2}(0)$]	
	Section	n	m	σ	m
$z = 0,125 \text{ m}$	6	$14,5 \cdot 10^{-6}$	3,8 %	$6,8 \cdot 10^{-6}$	
$z = 0,975 \text{ m}$	9	$22,4 \cdot 10^{-6}$	6,7 %	$4,0 \cdot 10^{-6}$	
$z = 1,81 \text{ m}$	3	$14,7 \cdot 10^{-6}$	3,9 %	$8,9 \cdot 10^{-6}$	

Dans la section la plus instrumentée ($z = 0,975 \text{ m}$), le bimoment est très petit donc l'influence de la contrainte τ_c est très faible sur la déformation ϵ_{45} ; on l'élimine complètement en faisant la moyenne sur quatre mesures symétriques situées sur les deux moitiés de chacune des deux ailes .

supérieure et inférieure, dont l'abscisse est la même en valeur absolue, $x = 0,115$ m. En distinguant les faces externes et internes des ailes, les résultats obtenus sous le couple maximal sont les suivants :

Section $z = 0,975$ m	Déformation $ \epsilon_{45} $ [$\tau_{c1,max}(0,115) \pm \tau_{c2}(0,115)$]		
	n	m	σ
Faces externes	18	$19,3 \cdot 10^{-6}$	12,7 %
Faces internes	24	$13,2 \cdot 10^{-6}$	12,0 %

Puisqu'il y a addition des contraintes sur les faces externes et soustraction sur les faces internes, on peut immédiatement séparer les déformations dues à C_1 et à C_2 . On obtient les valeurs ci-dessous :

$$\epsilon_{45} = 16,25 \cdot 10^{-6} \text{ dû à } \tau_{c1,max}(0,115),$$

$$\epsilon_{45} = 3,05 \cdot 10^{-6} \text{ dû à } \tau_{c2}(0,115).$$

Cas de OE 2 :

Dans cet essai, la dispersion des résultats est nettement plus forte comme le montrent les valeurs ci-dessous de la distribution des résultats obtenus sur les faces internes de la section $z = 1,20$ m, pour diverses valeurs du couple (tableau à comparer au tableau homologue présenté pour OE 1) :

Couple C (kN.m)	Déformation $ \epsilon_{45} $ pour $x = 0,115$ m		
	n	m	σ
0,36	24	$4,2 \cdot 10^{-6}$	50,5 %
0,72	24	$7,5 \cdot 10^{-6}$	54,2 %
1,08	24	$12,0 \cdot 10^{-6}$	51,3 %

La linéarité avec le couple C est approximative et les coefficients de variation sont très grands.

On peut cependant interpréter les valeurs moyennes comme précédemment. Sur les parements de l'âme, sous le couple maximal ($C = 1,08 \text{ kN.m}$) on obtient les valeurs suivantes :

Ame	Déformation $ \epsilon_{45} $ [$\epsilon_{C1,max}$]		
	Section	n	m
$z = 0,085 \text{ m}$	6	$21,5 \cdot 10^{-6}$	12,7 %
$z = 1,20 \text{ m}$	12	$14,8 \cdot 10^{-6}$	19,9 %
$z = 1,81 \text{ m}$	6	$4,8 \cdot 10^{-6}$	27,5 %

Au milieu des ailes ($x = 0$) les valeurs sont celles du tableau ci-dessous (et l'on sépare le terme dû à τ_{C2} connaissant celui dû à τ_{C1} d'après le tableau précédent) :

Ailes ($x = 0$)	Déformation $ \epsilon_{45} $ [$\tau_{C1,max}(0) + \tau_{C2}(0)$]			$ \epsilon_{45} $ [$\tau_{C2}(0)$]
	Section	n	m	σ
$z = 0,085 \text{ m}$	3	$21,3 \cdot 10^{-6}$	2,7 %	≈ 0
$z = 1,20 \text{ m}$	12	$16,7 \cdot 10^{-6}$	32,5 %	$1,9 \cdot 10^{-6}$
$z = 1,81 \text{ m}$	6	$7,8 \cdot 10^{-6}$	14,9 %	$3,0 \cdot 10^{-6}$

Dans la section $z = 1,20 \text{ m}$, le bimoment n'est pas négligeable ; les contraintes normales σ_c vont donc influencer sur les valeurs de ϵ_{45} dans les ailes. On élimine d'abord leur effet (par raison de symétrie) en calculant la moyenne sur les deux moitiés de chacune des deux ailes. En distinguant les faces externes et internes, les valeurs obtenues sous le couple maximal sont les suivantes :

Section z = 1,20 m	Déformation $ \epsilon_{45} $ [$\tau_{c1,max}(0,115) \pm \tau_{c2}(0,115)$]		
	n	m	σ
Faces externes	24	$13,5 \cdot 10^{-6}$	36,3 %
Faces internes	24	$12,0 \cdot 10^{-6}$	51,3 %

On sépare alors les termes dus à C_1 et à C_2 :

$$\epsilon_{45} = 12,75 \cdot 10^{-6} \text{ dû à } \tau_{c1,max}(0,115),$$

$$\epsilon_{45} = 0,75 \cdot 10^{-6} \text{ dû à } \tau_{c2}(0,115).$$

En utilisant les symétries, la part de la déformation ϵ_{45} due aux contraintes normales $\sigma_c(x)$ peut être obtenue en faisant la somme des déformations mesurées sur chaque demi-aile (dessus et dessous) changées de signe alternativement de la façon suivante :

- + (aile supérieure Est)
- (aile supérieure Ouest)
- + (aile inférieure Ouest)
- (aile inférieure Est).

On obtient ainsi sous le couple maximal :

$$\epsilon_{45} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ dû à } \sigma_c(0,115).$$

La déformation longitudinale correspondante est :

$$\epsilon_c(0,115) = \frac{2}{1 - \nu_0} \cdot \epsilon_{45}.$$

Dans l'hypothèse de la distribution linéaire de ϵ_c avec x, la valeur extrapolée au bord de l'aile (x = 0,20 m) et sous un couple C = 1 kN.m est :

$$\epsilon_{c,max} = 13,4 \cdot 10^{-6}.$$

Cette valeur a été reportée sur la figure 50. Elle est en bon accord avec les mesures directes de ϵ_c dans d'autres sections.

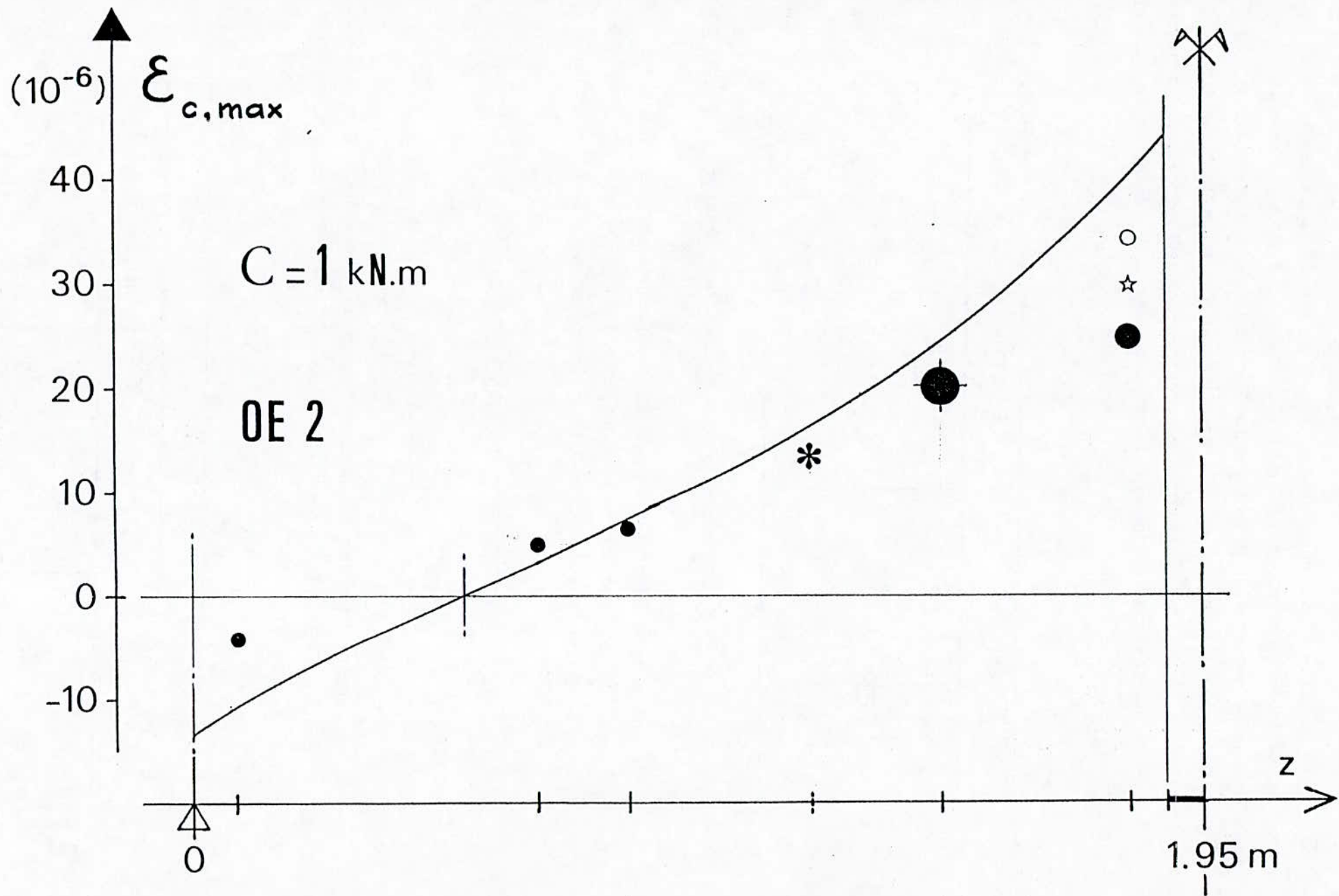


Fig. 50 - Déformations dues au gauchissement gêné, le long de la poutre (OE 2)

Nota : La symétrie n'est pas très bien respectée entre les deux moitiés de la poutre. Ceci est sans importance pour la section $z = 1,20$ m car on travaille sur la moyenne des mesures effectuées dans les deux sections symétriques. Par contre, pour les autres sections où les mesures n'ont été effectuées que sur une moitié de la poutre, il faudrait apporter une légère correction aux résultats. Les valeurs exactes sont évidemment inconnues : on peut seulement estimer qu'elles se trouvent dans les "fourchettes" suivantes (sous le couple maximal) :

Section	$z = 0,085$ m	$z = 1,81$ m
Déformation $ \epsilon_{45} $ due à		
$\tau_{c1,max}$ âme	21,5 à $24,5 \cdot 10^{-6}$	4,8 à $5,5 \cdot 10^{-6}$
$\tau_{c1,max}(0) + \tau_{c2}(0)$	21,3 à $24,3 \cdot 10^{-6}$	7,8 à $8,9 \cdot 10^{-6}$
$\tau_{c2}(0)$	≈ 0	3,0 à $3,4 \cdot 10^{-6}$

3.5.3. - Comparaison des déformations mesurées et calculées

Une première comparaison peut être effectuée sur les variations relatives de ϵ_{45} en fonction de x , dans les ailes, en formant les rapports des déformations pour $x = 0$ et $x = 0,115$ respectivement. Le calcul donne :

$$\frac{\tau_{c1,max}(0)}{\tau_{c1,max}(0,115)} = \frac{e'}{t(0,115)} = 1,117 \quad ,$$

$$\frac{\tau_{c2}(0)}{\tau_{c2}(0,115)} = \frac{t(0,115)}{e'} \cdot \frac{L(0)}{L(0,115)} = 1,374 \quad .$$

La comparaison des rapports expérimentaux (sous le couple maximal, dans la section $z = 0,975$ m ou $z = 1,20$ m pour OE 1 et OE 2 respectivement) et calculés est la suivante :

Rapport $\epsilon_{45}(0 / \epsilon_{45}(0,115))$ dû à	OE 1		OE 2	
	rapport expérimental	mesure calcul	rapport expérimental	mesure calcul
$\tau_{c1,max}$	1,132	1,01	1,161	1,04
τ_{c2}	1,311	0,95	2,533	1,84

Cette comparaison est excellente à l'exception des déformations dues à τ_{c2} pour OE 2 dont les grandeurs sont très incertaines car ce sont des valeurs très petites calculées à partir des mesures des déformations ϵ_{45} résultant de la somme et de la différence des effets de $\tau_{c1,max}$ et de τ_{c2} , mesures elles-mêmes très dispersées (l'incertitude relative est plus faible sur la déformation due à $\tau_{c1,max}$, qui est la plus grande).

La comparaison directe des valeurs expérimentales de ϵ_{45} avec celles calculées à partir des valeurs des couples $C_1(z)$ et $C_2(z)$ est effectuée soit sur les valeurs dues à chacune des contraintes τ_{c1} ou τ_{c2} isolément (figures 51 et 53 pour OE 1 et OE 2 respectivement) soit sur les valeurs combinées $\tau_{c1} \pm \tau_{c2}$ correspondant aux mesures directes (figures 51 et 54 pour OE 1 et OE 2 respectivement).

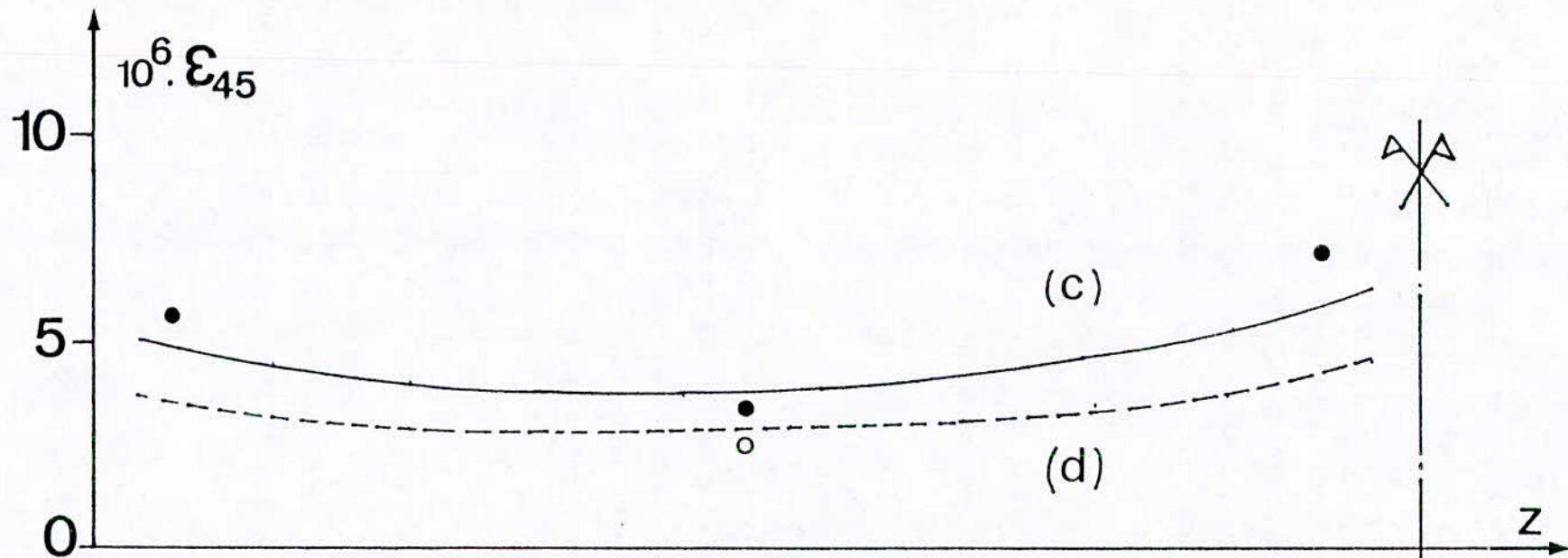
L'accord entre calcul et mesures est tout à fait satisfaisant pour OE 1. Il l'est moins pour OE 2, ce qui tient d'une part à la forte incertitude expérimentale, d'autre part à ce que, vraisemblablement, on surestime la gêne du gauchissement à l'appui.

4. - CONCLUSION

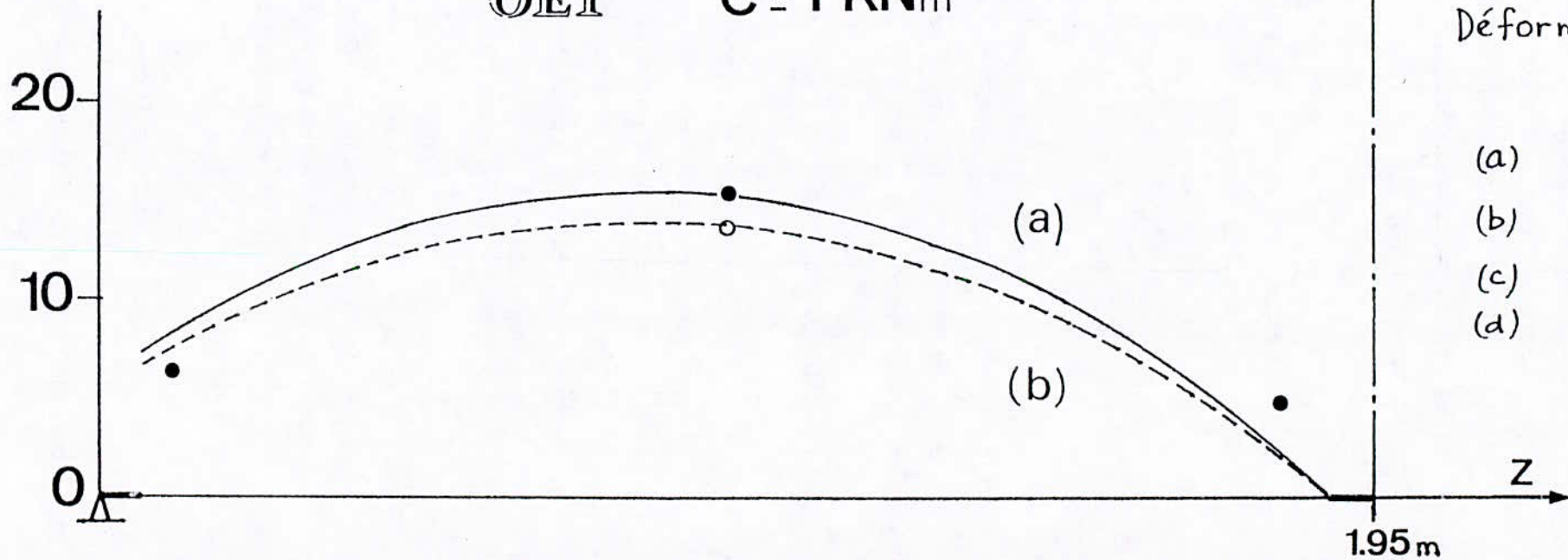
compte-tenu des incertitudes expérimentales dues à la petitesse des déformations mesurées (déformations locales dues aux contraintes du cisaillement et aux contraintes normales de gauchissement gêné et rotations de torsion), on montre que la théorie des poutres à profil mince ouvert est applicable, dans le domaine linéaire avant la fissuration, aux poutres en béton armé ayant fait l'objet des essais.

Il faut cependant tenir compte du fait que les épaisseurs ne sont pas très petites vis-à-vis des longueurs dans l'évaluation de l'inertie de torsion K , et de l'effet des armatures longitudinales dans l'inertie de gauchissement K_1 et dans l'inertie de torsion sectorielle K_2 , ainsi que dans le calcul des contraintes normales de gauchissement gêné σ_c et des contraintes de cisaillement τ_{c2} dues au couple C_2 .

Le calcul des termes dus aux armatures est assez simple si on utilise la théorie simplifiée de la "flexion des ailes". Il est très complexe dans le cas général. Il en serait de même si l'on voulait tenir compte des armatures dans l'évaluation de l'"aire réduite" A_1 permettant le calcul des flèches dues à l'effort tranchant.



OE1 C = 1 KN_m



Déformation ϵ_{45}
due à :

- (a) $\tau_{c1, \max}(0)$
- (b) $\tau_{c1, \max}(0, 115)$
- (c) $\tau_{c2}(0)$
- (d) $\tau_{c2}(0, 115)$

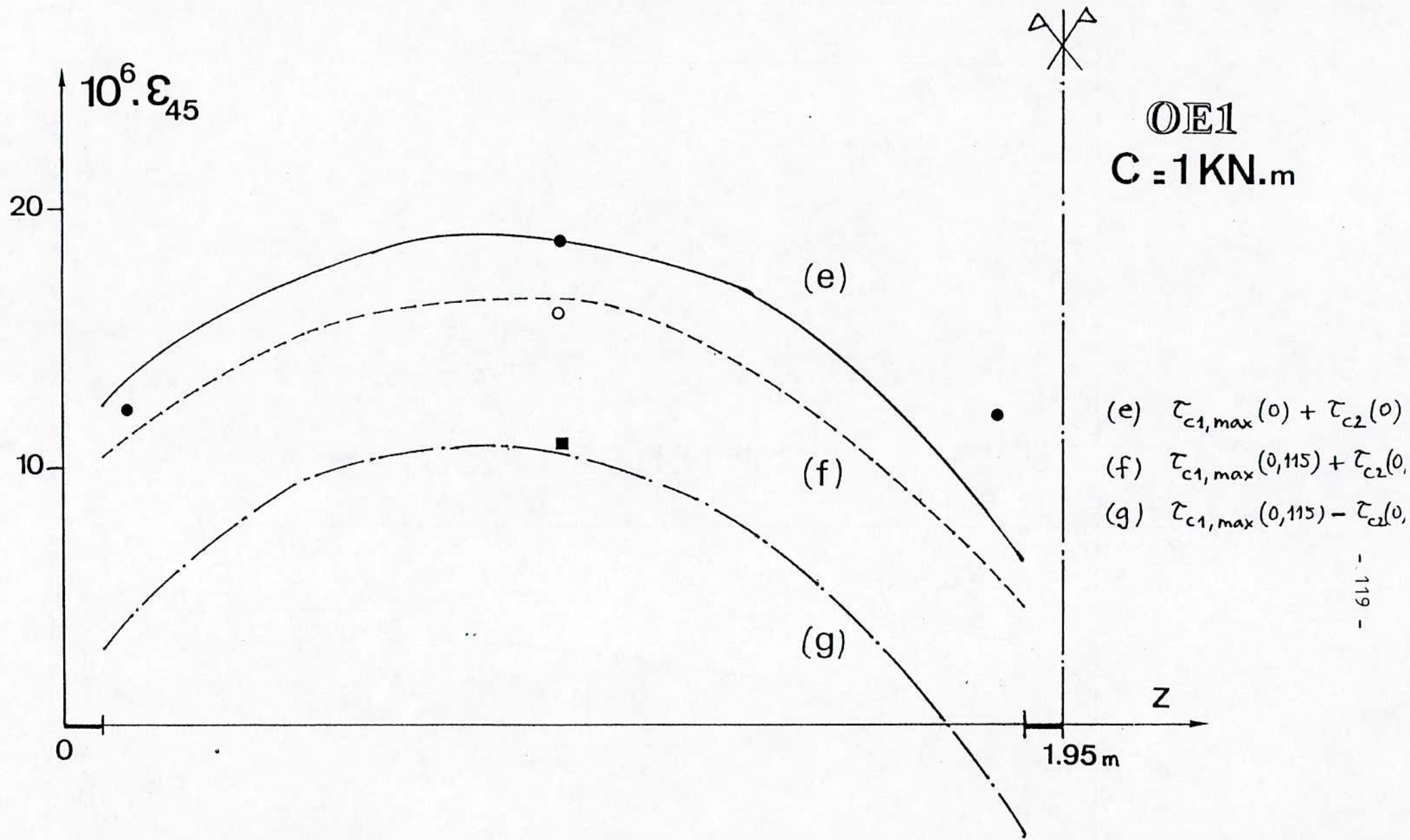


Fig. 52 - Déformations dues aux cisaillements (effet combiné de C_1 et C_2), pour OE 1

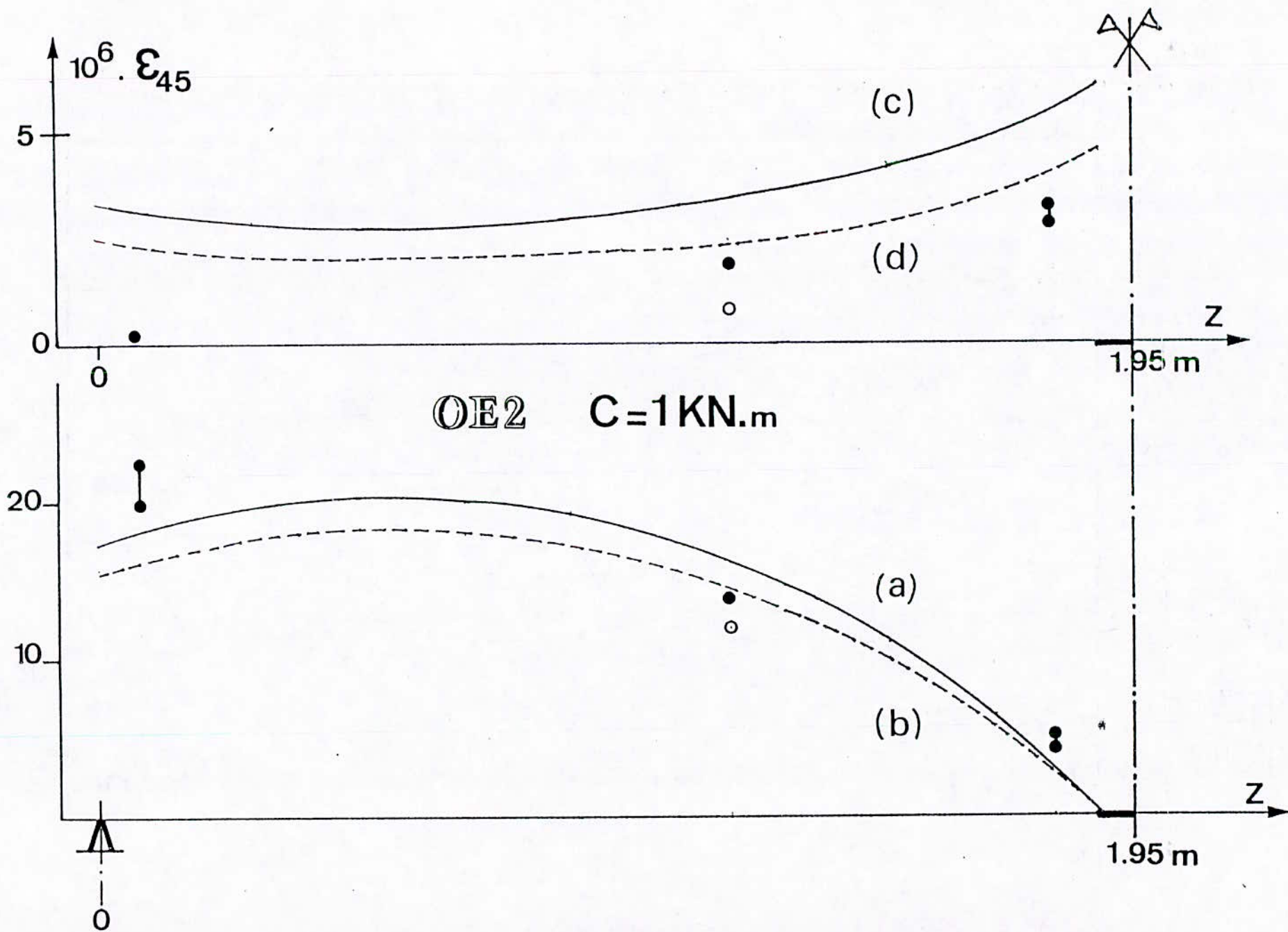


Fig. 53 - Déformations dues aux cisaillements relatifs à C_1 et C_2 , pour OE 2

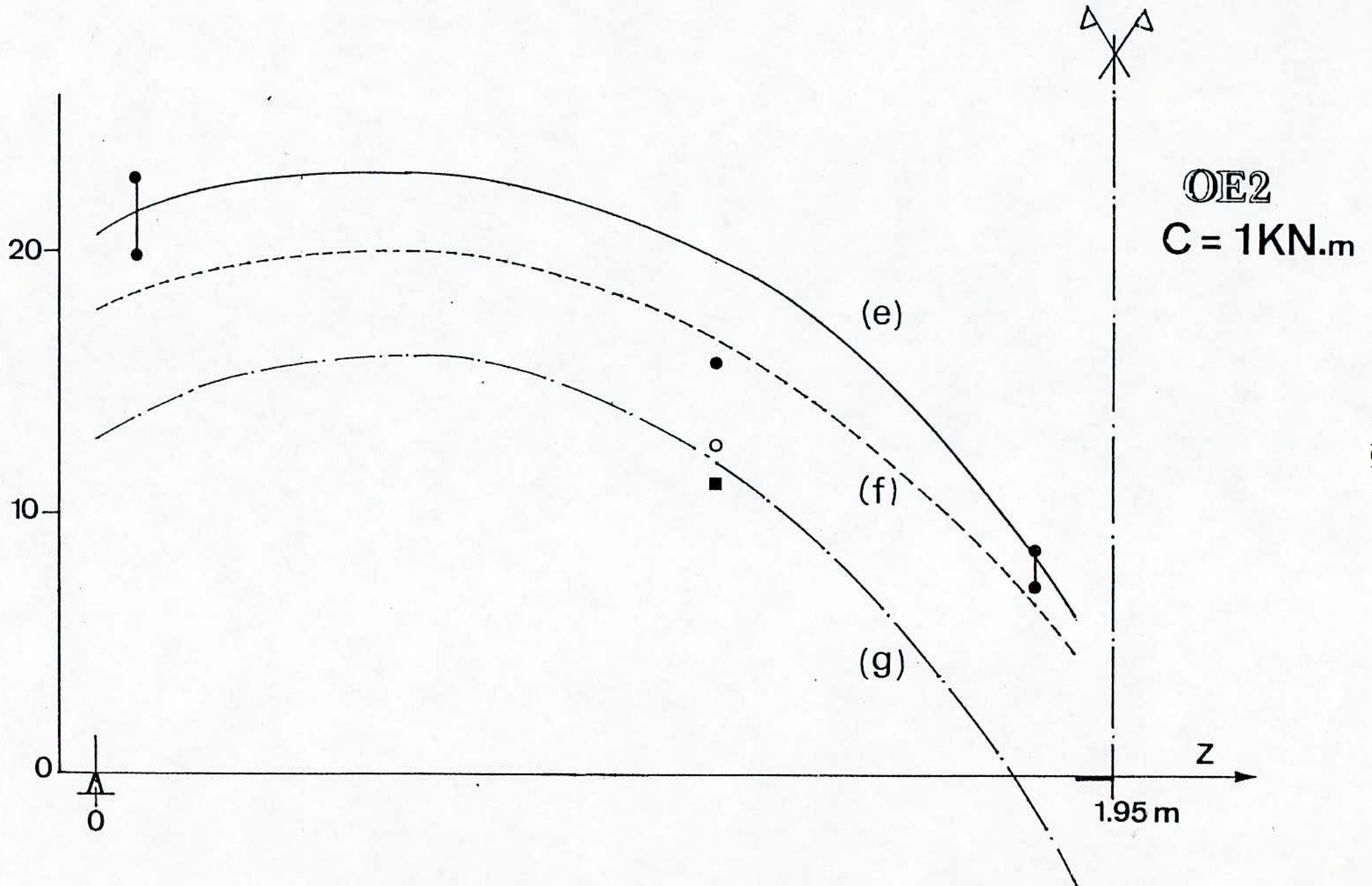


Fig. 54 - Déformations dues aux cisaillements (effet combiné de C_1 et C_2), pour OE 2

3^{eme} PARTIE

**COMPORTEMENT APRES FISSURATION :
FLEXION**

3^{eme} PARTIE

COMPORTEMENT APRES FISSURATION : FLEXION

On se reportera aux chapitres précédents pour les caractéristiques des corps d'épreuve et de leurs matériaux, la procédure expérimentale et les mesures effectuées, ainsi que pour les rappels de la théorie des poutres à profil mince ouvert et les compléments nécessaires à l'application aux poutres en béton armé.

1. - Présentation générale

Pour chacune des phases de flexion A, B et C et chacun des deux essais OE 1 et OE 2, on présente au tableau 4 les déformations longitudinales moyennes mesurées dans les deux sections particulièrement instrumentées situées à environ 1,10 m du milieu de la poutre, et les valeurs moyennes sur toute la poutre relative à l'espacement et à l'ouverture des fissures. Les grandeurs indiquées sont les suivantes :

M_1	Valeur du moment de flexion exercé par les vérins
ϵ_{b1}	face inférieure (jauges PL 120)
ϵ_{b2}	faces latérales (extensomètre mécanique)
ϵ_{b3}	
ϵ_{b4}	
ϵ_a	armatures $\varnothing 10$ (jauges FLA 6)
ϵ_{b5}	face supérieure (extensomètre mécanique ; base 200 mm)
s_m	espacement moyen des fissures dans l'aile supérieure
t_m	ouverture moyenne des fissures au niveau des armatures tendues (mesurée aux bords de l'aile).

Ces déformations sont les variations dues au moment de flexion M_1 exercé par les vérins. Initialement, agit de plus un moment de flexion M_0 dû au poids propre de la poutre et des équipements d'essai. Sa valeur dans les

ESSAI	Phase	Etape	Moment M_1 (kN.m)	Déformations (10^{-6})						Fissures (mm)	
				ϵ_{b1}	ϵ_{b2}	ϵ_{b3}	ϵ_{b4}	ϵ_a	ϵ_{b5}	s_m	t_m
OE 1	A	45	37,8	-214	151	564	904	1103	1161	103	0,045
	B	59	59,4	-363	250	894	1435	1998	1950	73	0,083
	C	74	75,5	-462	316	1119	1868	2470	2633	63	0,105
OE 2	A	40	37,8	-183	72	344	637	1015	961	114	0,047
	B	50	59,4	-304	138	609	1106	1802	1664	89	0,092
	C	63	75,5	-401	200	824	1514	2330	2320	68	0,115

Tableau 4 : Essais OE 1 et OE 2
Déformations longitudinales
moyennes mesurées, écartement
des fissures

Essai	Phase	Moment relatif M/M_u	Valeurs expérimentales				Valeurs calculées			
			ϵ_m (10^{-6})	ϵ_M (10^{-6})	x (mm)	ρ (m^{-1})	ϵ_m (10^{-6})	ϵ_M (10^{-6})	x (mm)	ρ (m^{-1})
OE 1	A	0,42	-210	1190	60	0,0035	-210	1050	67	0,0032
	B	0,68	-360	2030	60	0,0060	-350	2100	59	0,0060
	C	0,86	-455	2630	59	0,0077	-440	2520	59	0,072
OE 2	A	0,42	-180	910	67	0,0027	-205	950	72	0,0028
	B	0,67	-305	1580	65	0,0047	-370	2150	58	0,0060
	C	0,86	-410	2170	63	0,0065	-465	2720	58	0,0074

Tableau 5 : Essais OE 1 et OE 2 - Déformations
moyennes mesurées et calculées (LMCP)

sections de mesure considérées est la suivante :

- pour OE 1 , $M_0 \simeq - 1,3 \text{ kN.m}$;
- pour OE 2 , $M_0 \simeq - 1,9 \text{ kN.m}$.

Ces valeurs sont proches de la valeur moyenne le long de la poutre.

Le moment de flexion total est donc :

$$M \simeq M_0 + M_1$$

2. - Etat de déformation moyen

Les valeurs indiquées de ϵ sont les moyennes sur les deux moitiés Nord et sud de la poutre. En réalité, il n'y a pas une symétrie parfaite et on observe des écarts de l'ordre de $\pm 6\%$ par rapport à la moyenne, pour les moitiés Nord et Sud.

Ces valeurs mesurées représentent bien des déformations moyennes compte tenu des déformations concentrées au niveau des fissures (glissement local) et de la contribution du béton adhérent aux armatures entre les fissures. Les mesures plus ponctuelles effectuées sur les armatures peuvent correspondre à des valeurs de déformation quelconques entre le minimum (au milieu de l'intervalle entre deux fissures) et le maximum (au droit d'une fissure). En raison de la destruction locale d'adhérence due au collage de la jauge et à sa protection, la valeur moyenne sur les 10 mesures est plus proche de la déformation maximale que de la déformation moyenne correspondant aux mesures sur le béton.

Les figures 55 et 56 présentent, pour OE 1 et OE 2 respectivement, les diagrammes correspondant à l'hypothèse de planéité des sections, en variation de déformation moyenne $\Delta\epsilon$, ajustés au mieux aux valeurs expérimentales. On peut en tirer les valeurs expérimentales d'un certain nombre de grandeurs caractéristiques de l'état de déformation moyen dû à la flexion :

- ϵ_m déformation minimale (béton comprimé, face inférieure),
- ϵ_M déformation maximale (face supérieure tendue) ;
- x hauteur comprimée,
- ρ courbure = $(\epsilon_M - \epsilon_m)/h$, h étant la hauteur de la section.

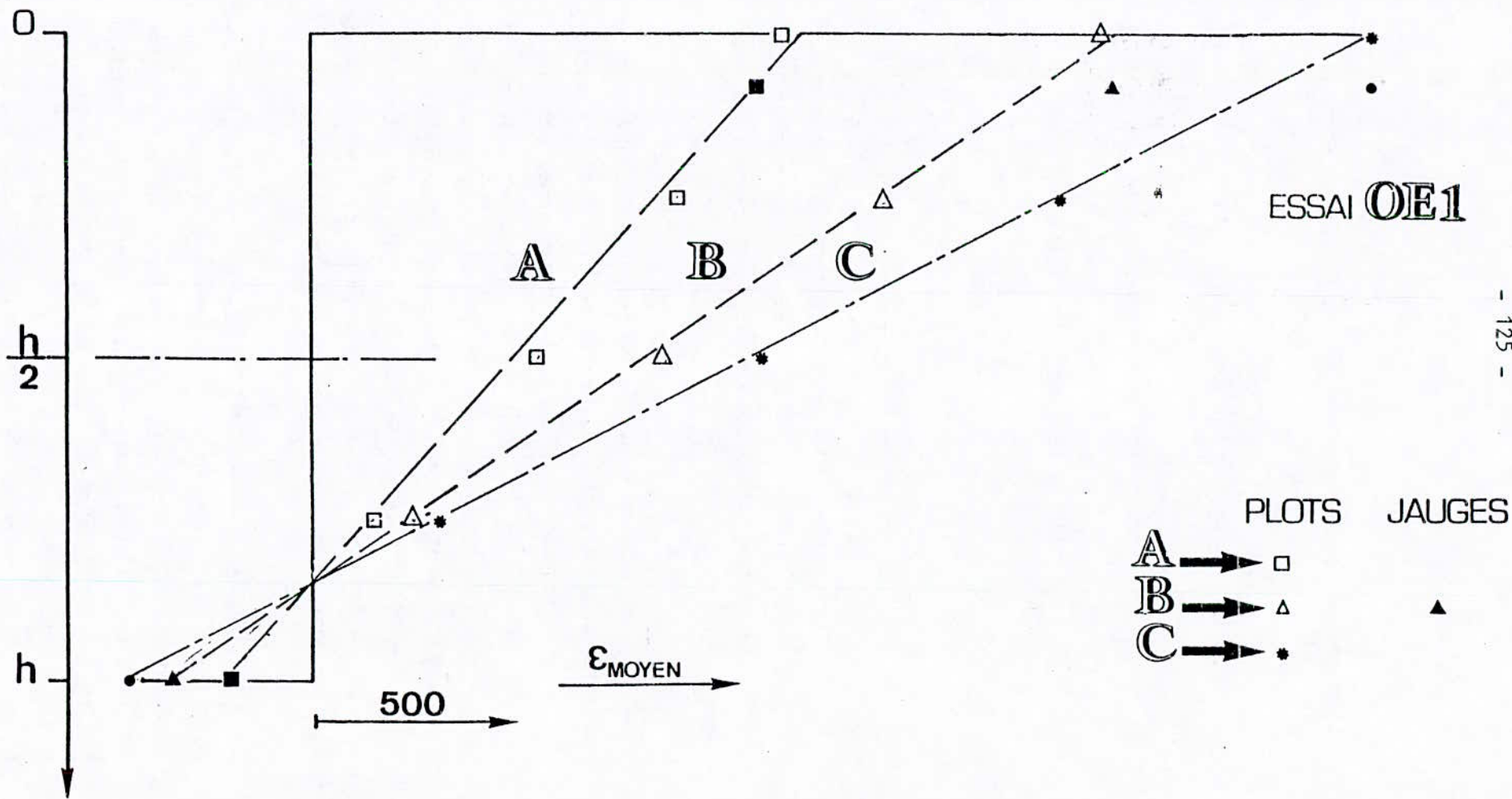


Fig.55 : Essai OE 1 - Etats de déformation longitudinale moyens

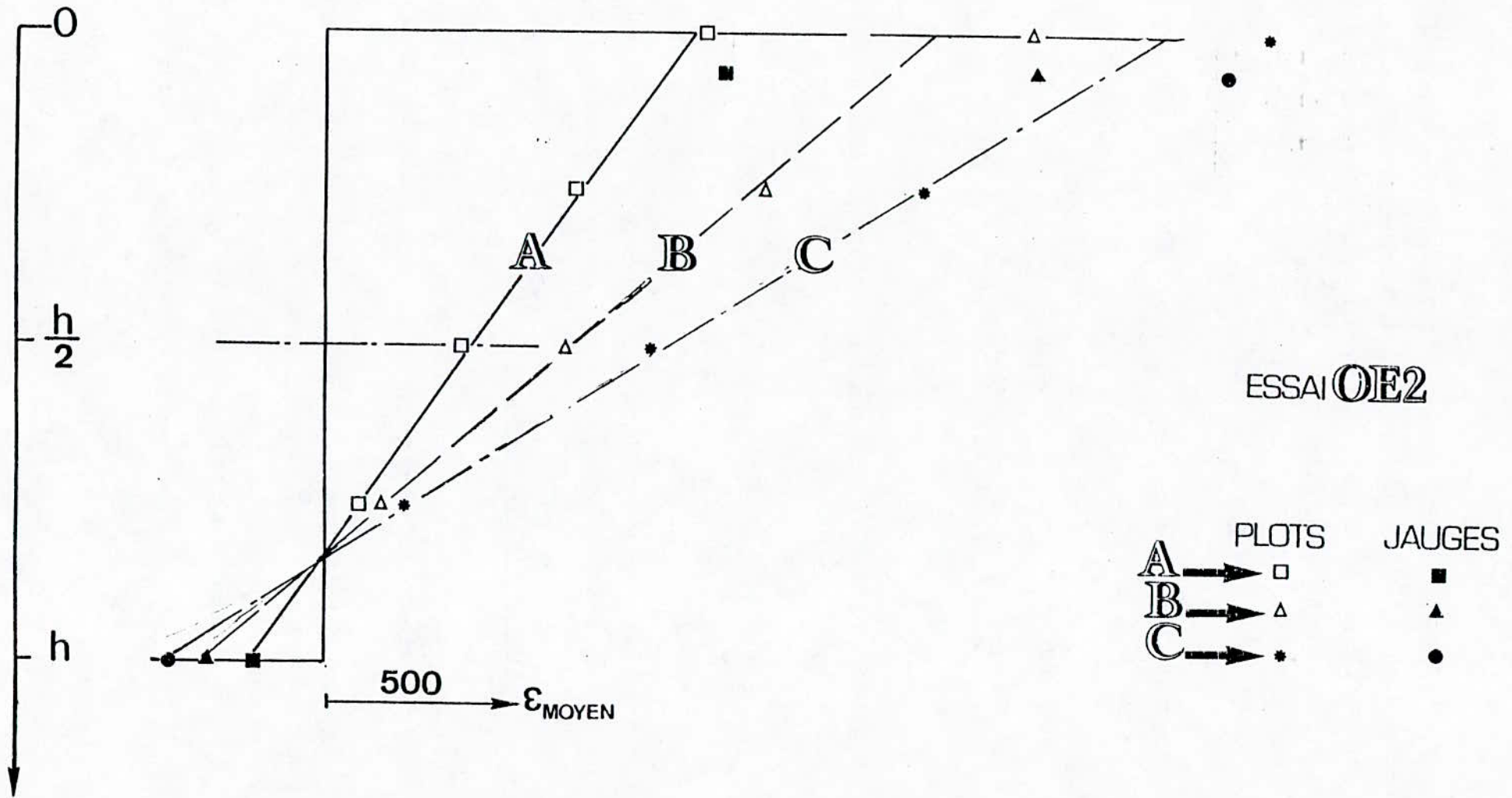


FIG 56 : ESSAI 0E2 - Etats de déformation longitudinale moyens

Ces valeurs, portées au tableau 5, tiennent compte de l'état initial de déformation, dû au moment M_0 , qui a servi de référence aux mesures $\Delta \epsilon$. Cet état initial est caractérisé par une déformation nulle à mi-hauteur de la section, et par une courbure initiale

$$\vartheta_0 = \frac{M_0}{E_{bo} I_h}$$

l'inertie homogène de la section étant $I_h = \alpha + \beta n$ (conformément à la définition du chapitre 2. § 3.1.4.).

Soit, pour OE 1 $\vartheta_0 = - 0,24 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$
pour OE 2 $\vartheta_0 = - 0,34 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$.

Remarque :

D'après les jauges collées sur les armatures, l'allongement maximal mesuré est, en phase C, de l'ordre de :

$2580 \cdot 10^{-6}$ pour OE 1
 $2583 \cdot 10^{-6}$ pour OE 2

La déformation de début de plastification étant égale à $2690 \cdot 10^{-6}$, on constate qu'on reste dans le domaine élastique linéaire du comportement de l'acier.

3. - Etat de fissuration moyen

Les photographies des figures 57 et 58 montrent l'état de fissuration à chaque phase pour chacun des deux essais.

les valeurs d'espacement et d'ouverture indiquées au tableau 4 concernent pour l'ensemble de la poutre, les mesures effectuées sur le bord de l'aile, au niveau des armatures tendues. Les mesures effectuées au milieu de la face supérieure, dans l'axe de la poutre, donnent les résultats suivants (en mm) :

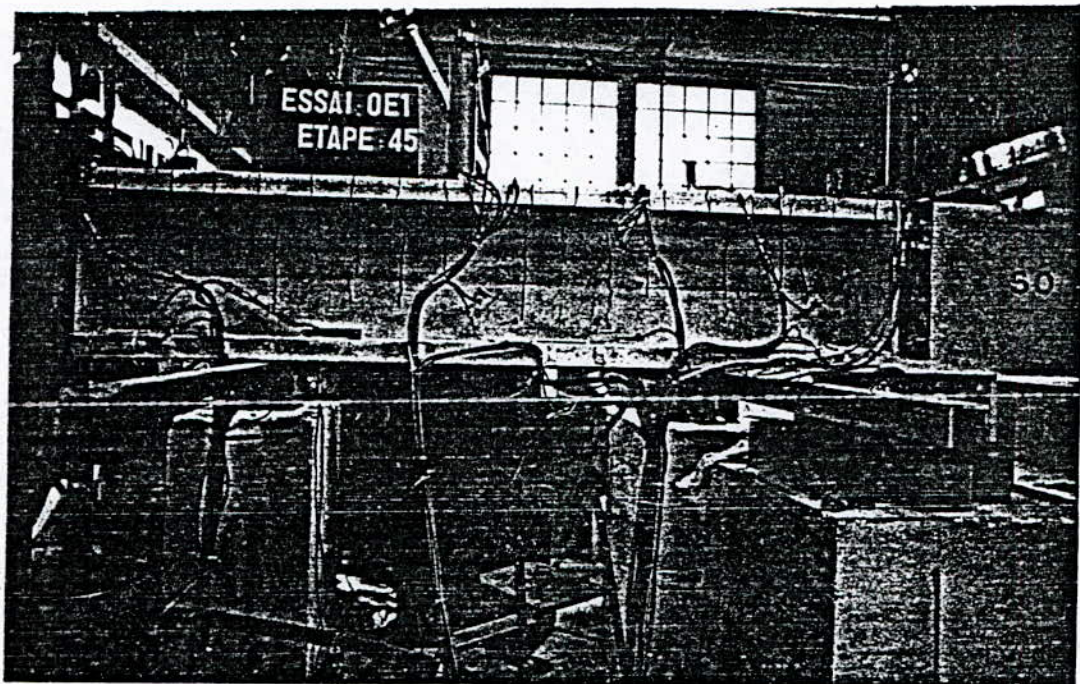


fig 57

0E1

flexion A



flexion B



flexion C

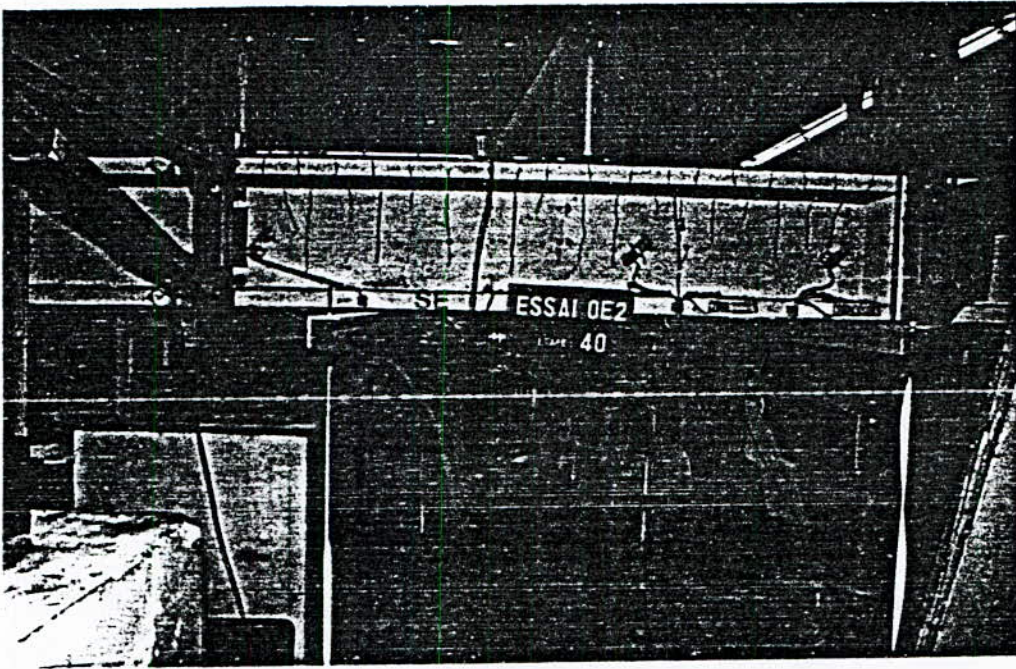
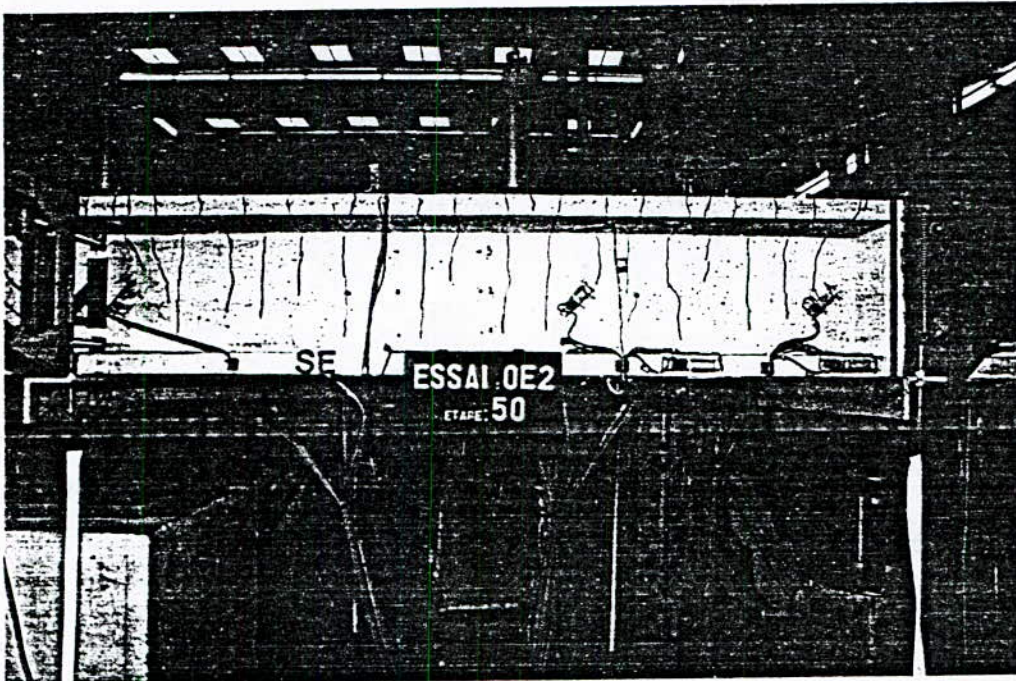
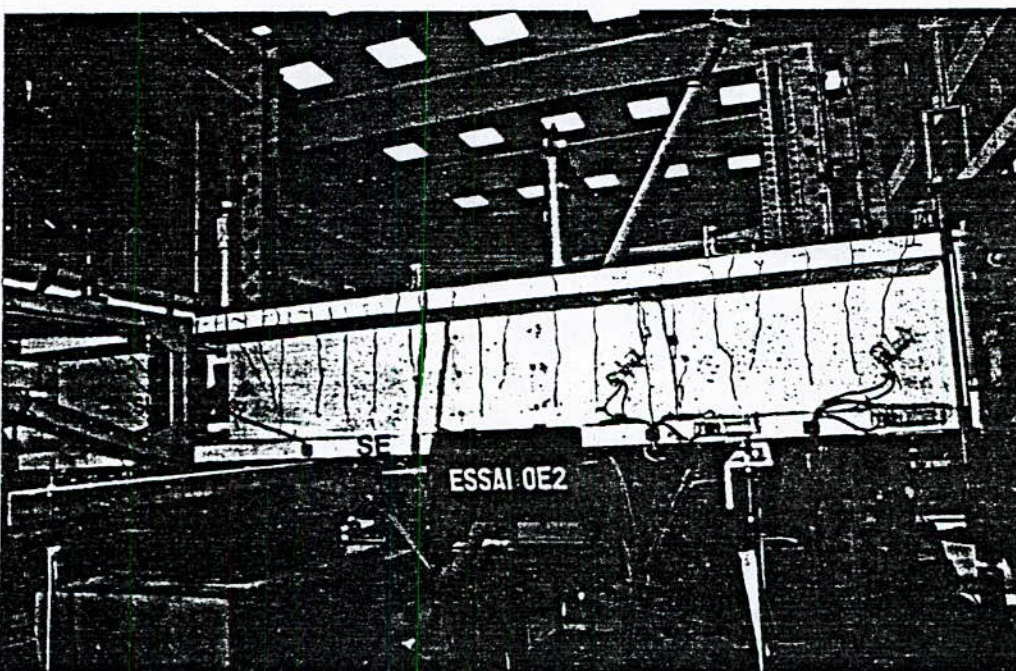


fig 58
OE2

flexion A



flexion B



flexion C

Phase	s_m	t_m
A	103	0,045
B	73	0,083
C	63	0,106
A	114	0,047
B	89	0,092
C	69	0,115

Il n'y a pas de différence avec les mesures effectuées aux bords de l'aile.

Par ailleurs, en se limitant aux zones voisines des encastremets vis-à-vis du gauchissement (sur une distance de 0,45 m à partir du raidisseur médian pour OE 2, de cette zone et celles de 0,45 m de long à partir des blocs d'about pour OE 1), on obtient les valeurs moyennes suivantes

Phase	s_m	t_m
A	103	0,044
B	80	0,083
C	70	0,015
A	118	0,045
B	93	0,090
C	70	0,110

Les différences avec la moyenne générale tout le long de la poutre ne sont pas significatives.

4. - Comparaison au calcul

4.1. - Déformations moyennes

La loi moment-courbure moyenne a été calculée à l'aide d'un programme de calcul informatique du S.E.S. (programme LMCP) dans lequel on utilise une loi contrainte-déformation du béton qui respecte les trois paramètres essentiels

mesurés (module à l'origine, résistance, abscisse du sommet), et dans lequel on évalue de façon approchée les déformations moyennes de la zone fissurée en attribuant au béton tendu une loi de comportement fictive. Cette loi est linéaire jusqu'à l'atteinte de la résistance à la traction f_t

$$* \quad \sigma = E_{bo} \cdot \epsilon \quad 3-1$$

Au-delà de la fissuration, on admet une répartition linéaire des déformations et des contraintes dans la zone tendue, telle que :

$$\sigma = E_{bt} \cdot \epsilon \quad 3-2$$

régie par la déformation de la fibre la plus tendue à laquelle on attribue une loi de comportement parabolique décroissant à partir du point de fissuration jusqu'au point de contrainte nulle lorsque l'allongement atteint l'allongement de plastification des armatures. Le module fictif E_{bt} est le module sécant correspondant.

Le calcul est poussé jusqu'à l'atteinte du moment maximal M_u . En négligeant le raffermisssement (c'est-à-dire en supposant l'acier parfaitement élastoplastique), on obtient la valeur suivante, valable pour OE 1 et OE 2 :

$$M_u = 86,0 \text{ kN.m.}$$

Les figures 59 et 60 présentent les lois moment-courbure calculées, au moins dans la partie correspondant au domaine des essais. Les valeurs particulières des déformations calculées correspondant aux moments $M = M_0 + M_1$ exercés à chaque phase sont portées au tableau 5. Sur les figures, on a porté aussi les points correspondants, pour chaque phase, au moment M et à la courbure \emptyset expérimentale.

On constate un accord relativement satisfaisant entre le calcul et les essais.

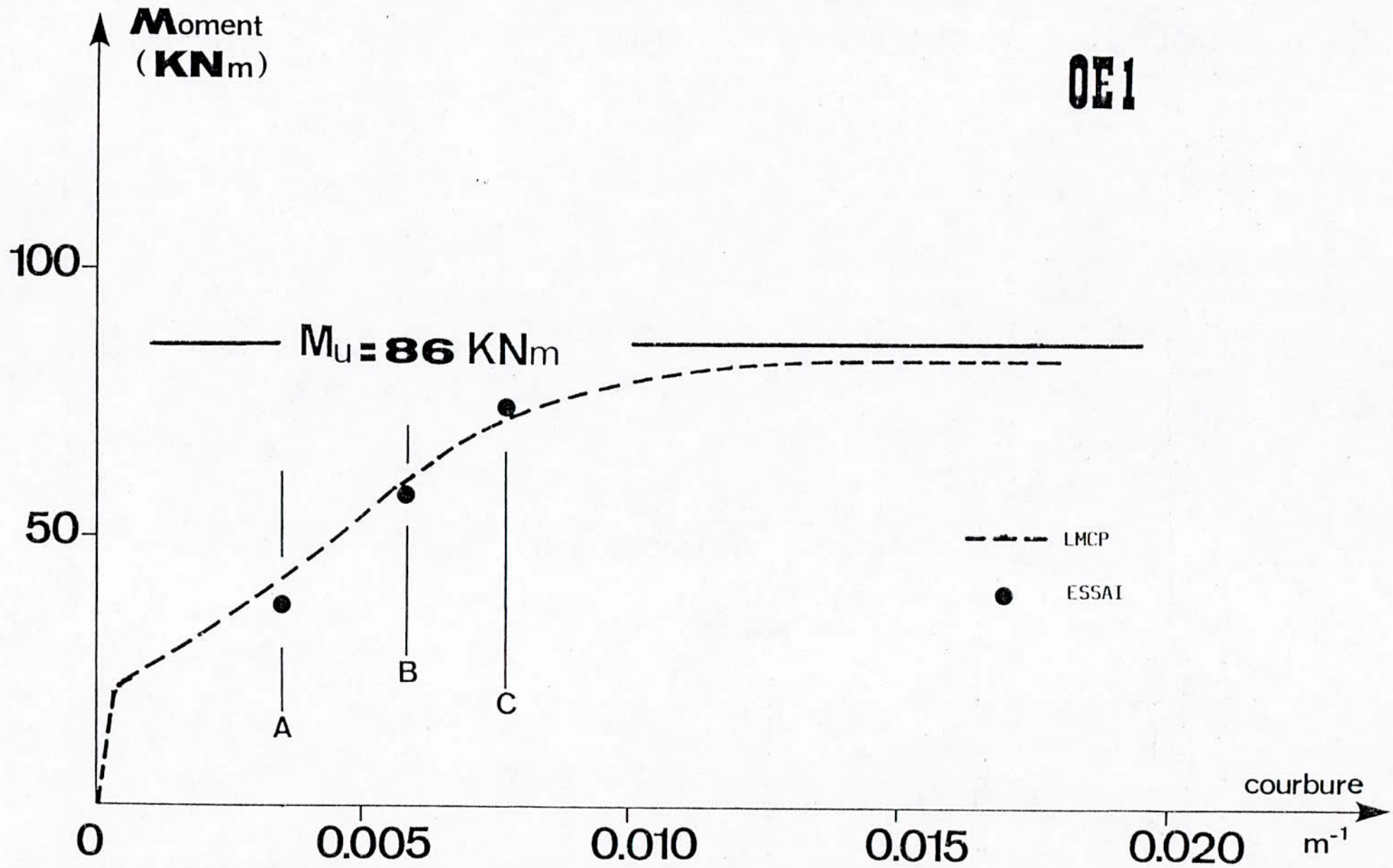


Fig. 59 : OE 1 - Relation moment-courbure

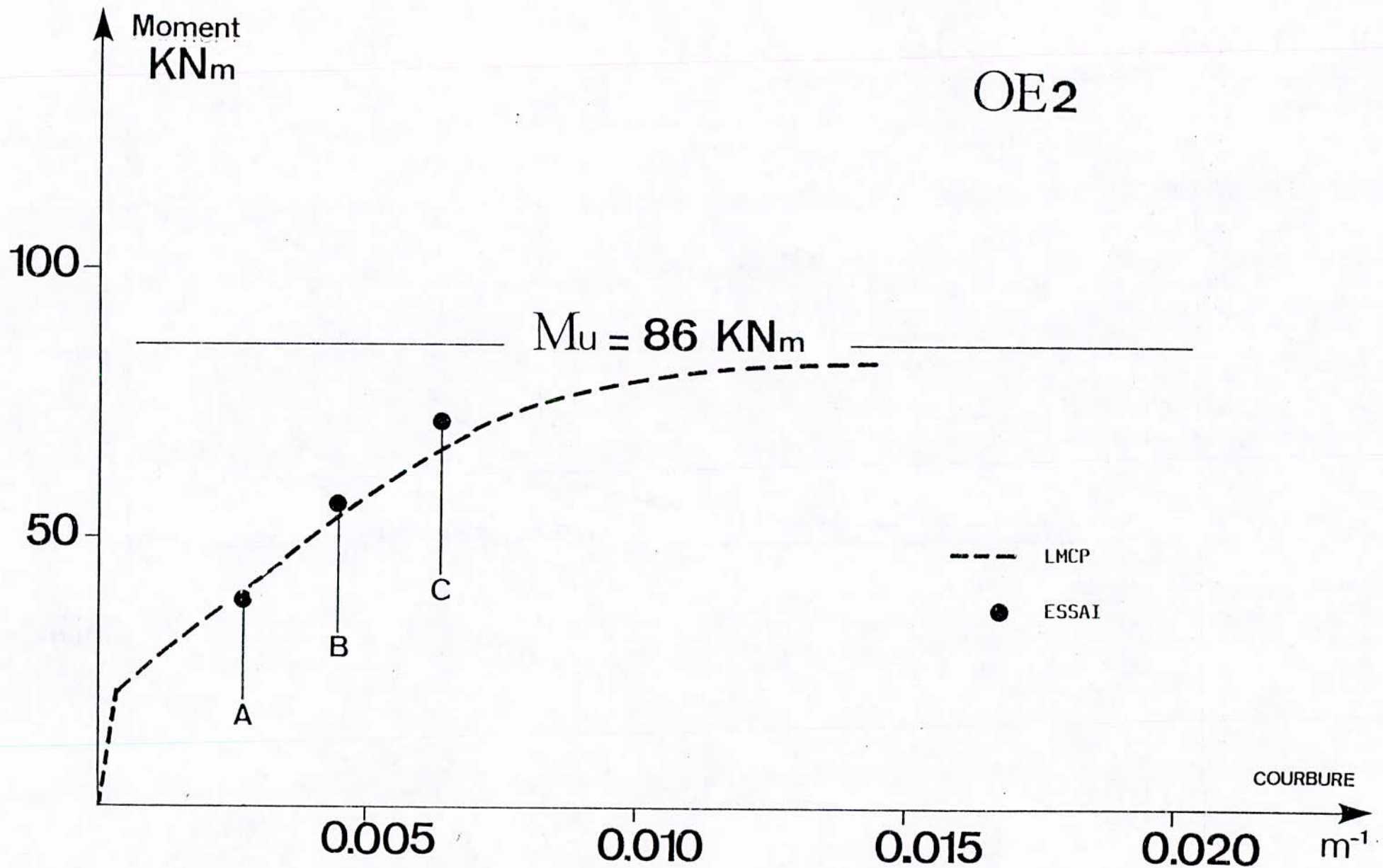


Fig. 60 : ESSAI OE 2 - Relation moment-courbure

4.2. - Espacement et ouverture des fissures

On les calcule en appliquant les formules proposées par le Code Modèle CEB-FIP 78 (*).

Après stabilisation de la fissuration, l'espacement moyen des fissures est donné par l'expression :

$$s_m = 2 \left(c + \frac{s}{10} \right) + k_1 k_2 \frac{\emptyset}{\tilde{\omega}_f} \quad 3-3$$

- c est l'enrobage des armatures ; ici, l'enrobage minimal est de 15 mm ;
 s est l'espacement de deux armatures successives égal à 90 mm (et inférieur à $15 \emptyset = 150$ mm) ;
 \emptyset est le diamètre des barres, 10 mm ;
 $\tilde{\omega}_f$ est le pourcentage d'armature dans la "section d'enrobage" de largeur b_{ef} et de hauteur h_{ef}

$$\tilde{\omega}_f = \frac{A}{b_f h_f}$$

avec :

$$b_f = b = 400 \text{ mm (largeur de l'aile)}$$

$$h_f = \bar{e} = 50 \text{ mm (épaisseur moyenne de l'aile)}$$

$$A = \frac{5}{4} \pi \emptyset^2 \text{ (section des 5 barres } \emptyset 10)$$

- k_1 est le coefficient caractérisant l'adhérence, égal à 0,4 pour les barres à haute adhérence
 k_2 est le coefficient représentant l'influence du gradient de déformation dans la section

$$k_2 = 0,125 \left(1 + \frac{\epsilon'_M}{\epsilon_M} \right)$$

(*) Comite Euro-International du Béton - Fédération International de la Précontrainte : "code Modèle CEB-FIP pour les structures en béton", 3ème édition 1978

ϵ_M et ϵ'_M étant les allongements sur les faces externe et interne de l'aile supérieure respectivement. On peut admettre, d'après les mesures de déformations, $k_2 = 0,23$ pour OE 1 et OE 2.

D'où
$$s_m = 48,0 + 46,9 \simeq 95 \text{ mm}$$

En admettant que les fissures "principales" sont toutes apparues dès la phase B (dans la phase C apparaissent des fissures "secondaires") cette valeur calculée surestime de 17 % la valeur expérimentale moyenne pour OE 1 et OE 2 (81 mm).

L'allongement moyen des armatures se calcul par l'expression suivante :

$$\epsilon_{am} = \frac{\sigma_a}{E_a} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{af}}{\sigma_a} \right)^2 \right] > 0,4 \frac{\sigma_a}{E_a} \quad 3-4$$

σ_a est la contrainte de l'armature au droit d'une fissure, soit les valeurs suivantes pour la phase B :

OE 1	$\sigma_a \simeq 395 \text{ MPa,}$
OE 2	$\sigma_a \simeq 390 \text{ MPa.}$

σ_{af} est la contrainte de l'armature au droit d'une fissure sous l'action du moment de fissuration M_f , c'est-à-dire celui qui provoque dans le béton la contrainte maximale σ_M égale à la résistance à la traction f_t :

$$\sigma_M = \frac{M_f h}{2 I_h} = f_t$$

Soit $M_f = 21,8 \text{ kN.m}$ pour OE 1,
 $M_f = 24,7 \text{ kN.m}$ pour OE 2.

D'où les valeurs de contrainte :

OE 1	$\sigma_{af} \simeq 150 \text{ MPa}$
OE 2	$\sigma_{af} \simeq 170 \text{ MPa}$

β_1 est un coefficient caractérisant les qualités d'adhérence des barres

$$\beta_1 = \frac{1}{2,5 k_1} = 1,0$$

β_2 est un coefficient représentant l'influence de la durée d'application ou de la répétition des charges. Ici $\beta_2 = 1$ au premier chargement.

On en tire, dans la phase B :

$$\begin{aligned} \epsilon_{am} &\simeq 1690 \cdot 10^{-6} \text{ pour OE 1,} \\ \epsilon_{am} &\simeq 1580 \cdot 10^{-6} \text{ pour OE 2.} \end{aligned}$$

les valeurs expérimentales, déduites des diagrammes des figures 1 et 2, sont d'environ $1900 \cdot 10^{-6}$ et $1500 \cdot 10^{-6}$ respectivement. Le calcul en donne donc une estimation raisonnable.

L'ouverture moyenne des fissures se calcule alors par :

$$t_m = s_m \cdot \epsilon_{am}$$

D'où, en phase B

$$\begin{aligned} t_m &\simeq 0,16 \text{ mm pour OE 1,} \\ t_m &\simeq 0,15 \text{ mm pour OE 2.} \end{aligned}$$

Le calcul surestime nettement l'ouverture des fissures de près de 80 %. Ceci provient d'une part de la surestimation de s_m , d'autre part du fait de négliger l'allongement propre du béton entre deux fissures (l'effet de l'allongement moyen de l'armature est supposé intégralement traduit en ouverture des fissures).

===== 4^{eme} PARTIE =====

**COMPORTEMENT EN FLEXION-TORSION
APRES FISSURATION**

Il s'est dégagé de cet ensemble de recherches, une méthode d'interprétation selon la théorie du treillis à angle variable, qui n'est rien d'autre qu'une légère transformation de la théorie connue sous le nom de "Diagonal compression field theory". Cependant, il est à noter que ce modèle n'introduit pas dans les résolutions courantes de problèmes de torsion, les phénomènes de torsion gênée, quoique ces derniers dans certains cas, peuvent avoir un effet prédominant sur l'analyse du comportement d'une section donnée.

D'autre part, dès les premières utilisations d'éléments en béton armé de forme complexe (notamment éléments de formes élancées), de types d'appuis variés, le phénomène de torsion (sous toutes ses formes) est apparu comme l'un des phénomènes fondamentaux de sollicitation sur ce matériau composite.

Il a de ce fait, préoccupé les constructeurs et les théoriciens tout au long des techniques de construction et calcul du béton armé.

Toutefois, malgré les très nombreuses recherches et publications sur la torsion, les théories antérieures sur ce mécanisme n'expliquent qu'incomplètement ce phénomène, et la variation des paramètres qui le régissent, aussi bien dans une section droite que le long de l'élément de construction considéré (z variable).

Cette méconnaissance partielle est due à la complexité du phénomène, et au fait que, dans les calculs usuels de l'ingénieur, la prise en compte d'hypothèses simplificatrices a donné une approximation suffisante pour la vérification des sections aux contraintes admissibles.

Cependant, le développement actuel des méthodes de calcul des poutres fissurées, en vue d'un calcul plus précis, des contraintes, des déformations, des rotations, d'une homogénéisation du coefficient de sécurité, et par suite d'une amélioration de l'économie des projets, exige une bonne connaissance de la répartition des différents paramètres cités ci-dessus, le long de l'élément en tenant compte de l'état de fissuration existant.

La présente recherche sera donc une contribution à la connaissance des rigidités de gauchissement et torsion de poutres à profil ouvert en béton armé, sollicitées en torsion-flexion, avec prédominance de flexion ($C/M \ll 1$), en tenant compte de l'état de fissuration créé par la flexion.

Compte-tenu du comportement non-linéaire du béton et des armatures, de la fissuration due à la flexion, le problème essentiel qui se pose est le suivant : donner une appréciation fiable et correcte des paramètres rigidité de gauchissement et de torsion lorsque la fissuration de flexion évolue. Cependant, on notera que ce comportement ne peut en aucun cas être ramené à une modélisation en treillis (valable pour une fissuration inclinée, cas largement étudié par les auteurs et au niveau du S.E.S. (*)).

1.2. - Etudes antérieures

Les études antérieures sont très peu nombreuses, et ne fournissent que peu d'éléments utilisables pour la résolution du problème posé ici.

Elles sont présentées par ordre d'importance en y consignant tous les points qui pourraient mériter intérêt dans le travail envisagé.

- Etude théorique de Zbirohowski-Koscia [111]

Elle ne concerne que le calcul des contraintes normales dans le domaine élastique avec fissuration, sous l'action d'un effort normal N , de deux moments de flexion M_x et M_y et d'un bimoment B .

Par hypothèse, on admet que les sollicitations sont déterminées dans l'état non fissuré, puis les contraintes calculées en tenant compte de la fissuration des sections.

Ainsi, de même que dans les calculs "classiques", on évalue les moments de flexion dans une poutre hyperstatique sans tenir compte de la variation d'inertie due à la fissuration, comme on évalue ici le bimoment B (qui dépend des rotations) à l'aide des rigidités EK_x et GK de la section non fissurée. La contrainte normale résultante s'écrit :

(*) Service d'Etude des Structures du C.E.B.T.P. Paris

$$\sigma(x,y) = \frac{N}{S'} + \frac{M'_x}{I'_x} \cdot y + \frac{M'_y}{I'_y} \cdot x + \frac{B'_1}{K'_1} \cdot \Omega'(x,y)$$

les moments M'_x , M'_y et bimoment B'_1 étant calculés par rapport aux axes principaux de la section fissurée (S') tels que :

$$\iint_{(S')} x \cdot dS = \iint_{(S')} y \cdot dS = \iint_{(S')} x \cdot y \cdot dS = 0$$

et les grandeurs géométriques relatives à la section fissurée étant telles que :

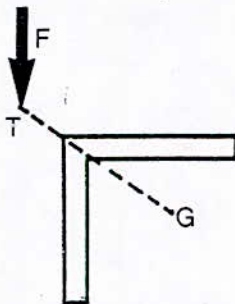
$$\iint_{(S')} \Omega' \cdot dS = \iint_{(S')} \Omega' \cdot x \cdot dS = \iint_{(S')} \Omega' \cdot y \cdot dS = 0$$

$$I'_x = \iint_{(S')} y^2 \cdot dS ; \quad I'_y = \iint_{(S')} x^2 \cdot dS ;$$

$$K'_1 = \iint_{(S')} \Omega'^2 \cdot ds$$

La détermination des axes x et y , en négligeant les zones où σ est une traction, est réalisée numériquement par approximations successives.

A noter, je cite : "... Cinq équations montrent clairement, que lorsque aucun bimoment n'est présent dans une section fissurée, la distribution des contraintes dans cette section est influencée par les propriétés sectorielles du béton". En fait, ceci n'a une signification physique que pour certains cas bien particuliers.



F : force agissant

G : Centre de gravité

T : centre de torsion

Avant fissuration :

L'action de F produit une flexion biaxiale et pas de torsion

Après fissuration :

Cette même action produira une flexion biaxiale et une torsion, donc création d'un bimoment. Une généralisation valable du phénomène est la suivante, du fait que quatre cas peuvent se présenter, en fonction de la symétrie de la section et du chargement.

	Symétrique	Dissymétrique
Symétrique	Section symétrique et symétrique chargée (1)	Section symétrique et dissymétrique chargée (2)
Dissymétrique	Section dissymétrique et symétrique chargée (3)	Section dissymétrique et dissymétrique chargée (4)

Cas (1) : pas de torsion (pas de bimoment) ni avant, ni après fissuration

Cas (2, 3, 4) : torsion (donc bimoment après ou avant fissuration).

- Etudes théoriques et expérimentales de Krpan et Collins [53 ; 58 ; 59]

Ils soulignent le nombre d'essais très important fait dans le cadre de profils minces, mais que peu d'essais ont été effectués sur les profils ouverts.

L'étude de Krpan et Collins [59] est un travail récent sur les profils ouverts où ils soulignent la difficulté à "maîtriser" le phénomène dans une section droite ou le long de la poutre.

L'intérêt de cette publication, est de donner un schéma de la formation des fissures suivant que tel ou tel phénomène soit prépondérant, en y notant l'apparition présumée d'une fissuration de flexion (due au poids propre de l'élément et au dispositif expérimental).

Cette étude est très intéressante, car elle s'attache à traduire, par le calcul et l'expérimentation, le comportement depuis le début du chargement jusqu'à la rupture. Une des hypothèses fondamentales, est que l'on peut

calculer indépendamment les déformations (et contraintes) dues aux couples C_1 et C_2 dans les "bielles" de béton inclinées et les armatures transversales d'un treillis.

- C_1 : partie de couple équilibrée en torsion pure
- C_2 : partie de couple équilibrée en gauchissement gêné
- C : couple agissant tel que : $C = C_1 + C_2$

Pour une valeur connue du bímoment B , l'état de déformation longitudinale est déterminé par approximations successives, par une méthode qui revient à généraliser, non seulement les équations de flexion, mais aussi celles du gauchissement gêné, de la façon suivante :

- déformations longitudinales dues au bímoment :

$$\epsilon_0(s) = \frac{B}{EK_1} \cdot \Omega(s)$$

- centre de torsion et point origine sur le profil tels que l'aire sectorielle $\Omega(s)$ satisfasse à :

$$\begin{aligned} \int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot e(s) \, ds &= \int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot x \cdot e(s) \, ds \\ &= \int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot y \cdot e(s) \, ds = 0 \end{aligned}$$

$E(s)$ étant le module sécant du matériau acier ou béton, fonction de la déformation $\epsilon_0(s)$ à l'abscisse s (éventuellement nul pour le béton si $\epsilon_0(s)$ est un allongement).

- Rigidité de gauchissement :

$$EK_1 = \int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s)^2 \cdot e(s) \cdot ds$$

- Le flux de cisaillement dû au couple de torsion de gauchissement gêné C_2 est calculé par :

$$q(s) = C \cdot \frac{\overline{EL}(s)}{EK_1}$$

- Le moment statique sectoriel $L(s)$ étant généralisé en :

$$\overline{EL}(s) = - \int_s^l E(t) \cdot \Omega(t) \cdot e(t) \cdot dt$$

Dans l'état fissuré, le comportement vis à vis des cisaillements est étudié selon un modèle de treillis à angle variable : "Diagonal compression field theory". On en déduit l'allongement des armatures transversales et le raccourcissement du béton des bielles, ainsi qu'un module fictif \overline{G} du béton fissuré. Cette dernière valeur permet de généraliser la rigidité de torsion sectorielle sous la forme :

$$\overline{GK}_2 = \overline{G} \frac{\overline{EK}_1^2}{\int_{(\Gamma)} \frac{\overline{EL}(s)^2}{e(s)} \cdot ds}$$

le modèle de treillis permet de calculer aussi les allongements des armatures transversales dus au couple de torsion pure C_1 et de déterminer la rigidité de torsion pure GK . Une valeur unique est adoptée pour celle-ci, indépendante de l'intensité du couple C_1 et des autres sollicitations. En fait, sur l'exemple présenté (qui correspond à la poutre étudiée expérimentalement), on rejoint les conclusions données en [36], au sens que l'on considère d'abord le comportement dans la phase où le béton tendu est fissuré mais où le béton comprimé (et les armatures) restent dans le domaine élastique linéaire.

Le module E étant constant, on peut calculer par approximations successives (Cf. [36]) les grandeurs S , I , K_1 , $L(s)$, K_2 relatives à la "section homogène réduite" selon la terminologie habituelle.

Ces grandeurs sont indépendantes du niveau des sollicitations, donc on peut admettre qu'elles sont indépendantes de z . On peut alors calculer facilement la rotation Θ d'après l'équation simplifiée :

$$EK_1 \cdot \frac{d^3\Theta}{dz^3} - GK \cdot \frac{d\Theta}{dz} = C(z)$$

(qui s'intègre facilement si on connaît une solution particulière de l'équation avec second membre)

et calculer Θ_2 d'après :

$$\frac{d\Theta_2}{dz} = - \frac{C_2}{GK_2}$$

(Θ_2 : rotation due aux distorsions).

Sur l'exemple présenté, la rotation Θ_2 maximale ($z = L/2$) est environ 10 % de la rotation Θ , pour la poutre non fissurée.

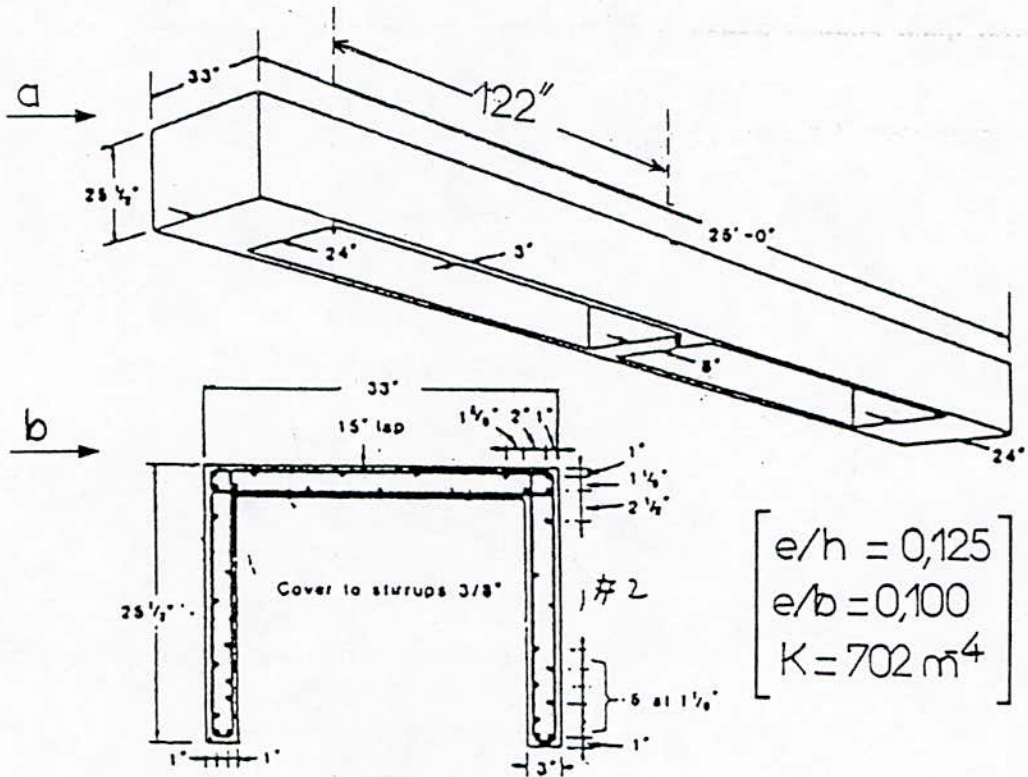
Pour la poutre élastique linéaire fissurée, Θ_2 devient 60 % de Θ . Dans les deux cas, les auteurs commettent l'erreur (sûrement plus conséquente dans le second cas) d'ajouter Θ_2 à Θ .

Après le début de la plastification, les rigidités calculées comme indiqué ci-dessus, sont variables avec z . Mais sur l'exemple présenté, la part du couple équilibré en torsion pure est tellement faible (environ 7 %) que la distribution du bimoment B peut être estimée directement d'après l'analogie $(M, T) \rightleftharpoons (B, C_2)$ en admettant $C_2 = C$ connu.

L'équation simplifiée n'est donc pas intégrée dans le domaine où les rigidités sont fonction de z .

Par ailleurs, l'estimation des rigidités de torsion prête à critiques. D'une part, il paraît difficile d'admettre, pour un calcul précis des rotations, que la rigidité de torsion pure \overline{GK} est strictement constante dans tout le domaine fissuré (ceci n'a que peu d'importance dans l'exemple présenté, car le couple C_1 est très petit). D'autre part, l'évaluation de la rigidité de torsion sectorielle \overline{GK}_2 paraît "batarde", puisqu'elle fait intervenir un module \overline{G} déduit du modèle du treillis et une inertie K_2 déduite d'un calcul de section droite.

Nous donnons ci-après (Fig.62) le dispositif expérimental utilisé par Krpan et Collins, suivi d'un commentaire permettant d'apprécier la portée de cet essai.



Dimensions of beam tested : (a) Overall dimensions ; (b) Cross section

FIGURE 61 : Caractéristiques de la poutre d'essai Krpan-collins

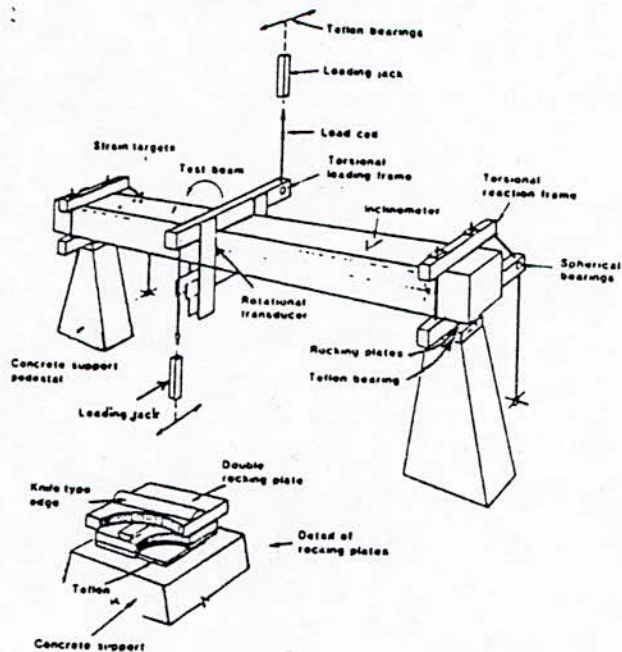


FIGURE 62 : Schématisation du dispositif expérimental Krpan-collins

Dimensions de la poutre d'essai

$e = 3 \text{ cm}$; $b = 30 \text{ cm}$; $h = 24 \text{ cm}$; $L = 122 \text{ cm}$ et $K = 700 \text{ m}^{-4}$;
 $K_1 = 236.10^4 \text{ cm}^5$ (donnée de l'essai).

$$E/h = 0,125 \text{ ; } e/b = 0,100.$$

On admet que la théorie des profils minces s'applique même si les rapports e/h et e/b ne sont pas très petits.

Calcul de la "longueur caractéristique d "

avec :

$$G = \frac{E}{2} \cdot \nu / (1 + \nu)$$

On admet que tous les éléments sont des rectangles étroits :

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 b_i \cdot t_i^3$$

Inertie de torsion pure :

$$K = 1/3 \cdot [2 \cdot 21(3)^3 + 30 \cdot (3)^3] = 648 \text{ cm}^4$$

En prenant ν le coefficient de Poisson égal à 0,2, on obtient :

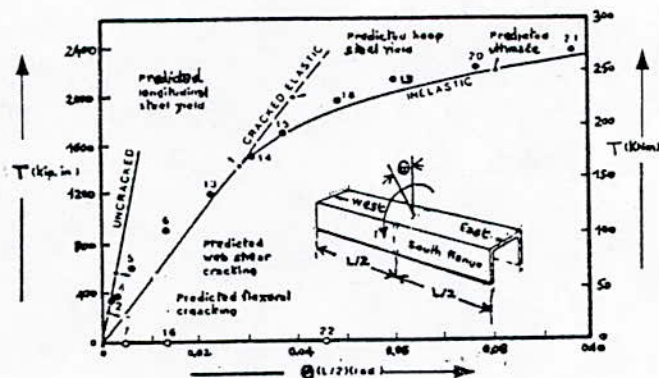
$$d = 93,5 \text{ cm} \text{ et } L/d = 1,30$$

L'analyse de Kollbrunner et Basler (Tableau 31), en fonction du rapport de la portée L à la distance caractéristique d , situe cet essai dans la zone : $0,5 < L/d < 2$.

Cet essai correspond donc à un cas où le gauchissement gêné est prépondérant.

Il est à noter plusieurs remarques ou critiques importantes liées à ce travail :

- Les résultats liés à cette étude ne peuvent être extrapolés de manière aussi évidente à un comportement classique d'éléments situés dans un ouvrage quelconque. Ce point soulevé est essentiellement dû aux dimensions du corps d'épreuve très éloignées de celles des poutres ou poteaux courants.
- L'utilisation tantôt de "paramètres non fissurés", puis réutilisation de ces mêmes paramètres dans une situation fissurée paraît très sujette à critiques.
- Krpan et Collins font remarquer que très peu d'auteurs font la distinction entre la phase fissurée et la phase non fissurée lorsqu'il s'agit du phénomène d'adhérence. Ceci est amplement justifié, car le schéma "d'adhérence totale" n'est plus valable lorsque le réseau de fissures s'est installé.
- Dans le domaine non-linéaire, la confrontation entre les rotations de torsion calculées et mesurées (fig.63) est remarquablement satisfaisante, ce qui est quelque peu surprenant, dans la mesure où on est bien dans un cas où le gauchissement gêné est prépondérant (selon l'analyse de Kollbrunner et Basler), malgré la démarche théorique très sujette à critique employée par l'auteur.



Comparison of predicted and observed relationships between applied torque and resulting midspan rotation

FIGURE 63: Comparaison entre rotations de torsion calculées et mesurées

• Etude théorique et expérimentale de Grob et Thürliman [43]

Cinq essais ont été réalisés sur des poutres à section en U renversé (hauteur $h = 0,50$ m, largeur $b = 0,50$ m, épaisseur est appliquée une force verticale excentrée (Fig. 64).

Les poutres (dont une était précontrainte) sont encastées en torsion (mais pas en gauchissement) et simplement appuyées en flexion aux deux extrémités.

On a donc une sollicitation combinée de flexion, torsion et effort tranchant. Le rapport C/M varie le long de la poutre, et nous noterons sur la dernière ligne du tableau (65) ci-après la valeur du rapport C/M_{moy} .

Le rapport L/d ou "longueur caractéristique" est égal à 3,2, ce qui place l'essai en plein domaine de la torsion mixte.

L'étude théorique proposée repose sur le modèle du treillis spatial à bielles de béton d'inclinaison variable. Elle porte aussi sur le calcul de la charge de rupture en torsion et flexion combinée.

L'évolution des déformations n'y est pas étudiée.

Remarques : Les quelques valeurs suivantes permettent d'apprécier la portée de cet essai :

- on admet que ce type de section est "mince", bien que les rapports e/b et e/h ne soient pas très petits, en effet : $e/h = e/b = 0,16$
- Valeur du couple : $C = P \cdot e'/2$
- le moment varie de $Pl/4$ à 0
- le rapport C/M varie de $\left(\frac{C}{M}\right)_{\text{min}} = 2 \cdot \frac{e'}{l}$ à $l' \infty$

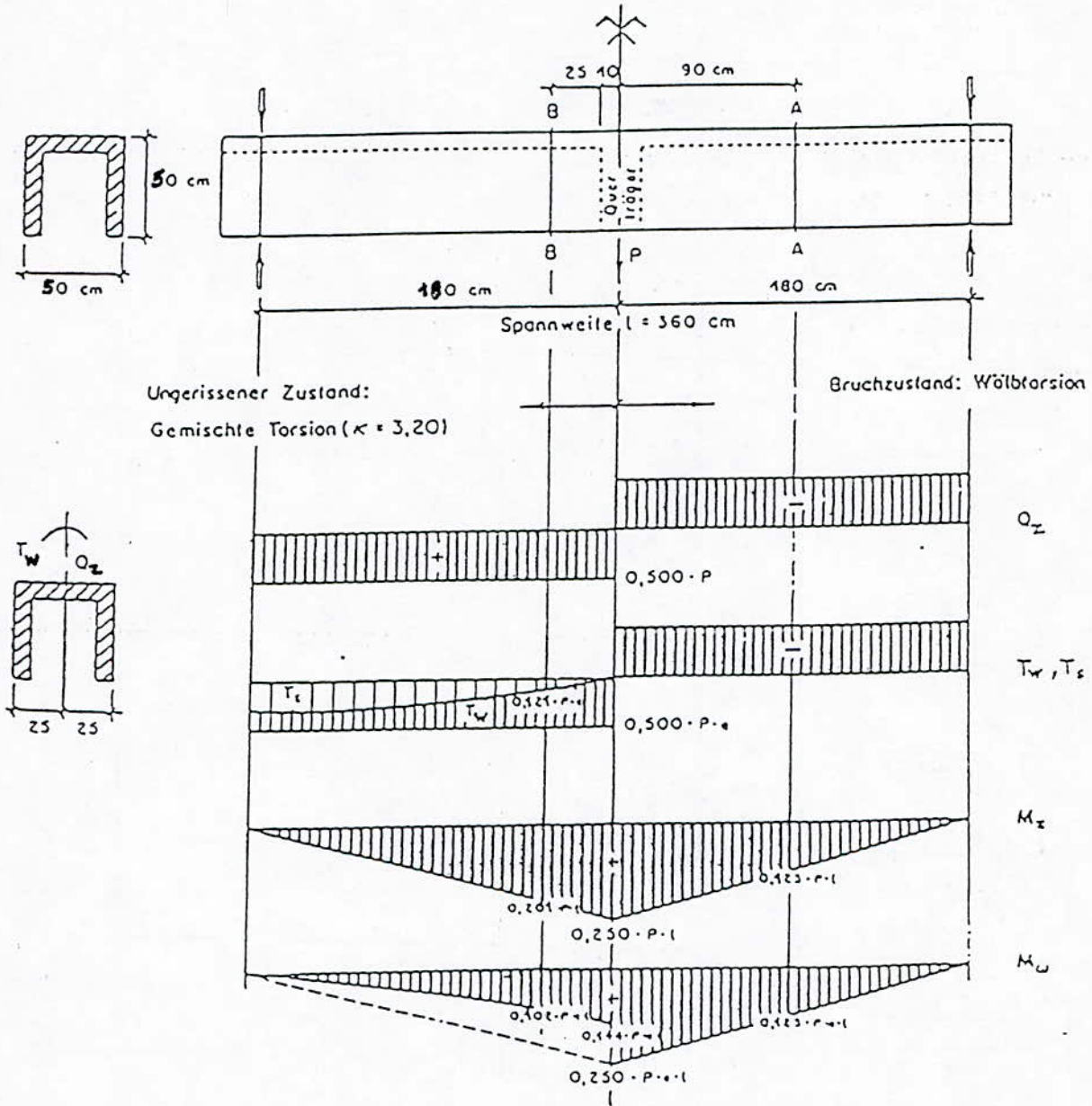


FIGURE 64: Caractéristiques des poutres d'essai et diagrammes des efforts résultats (essai Grob-Thürliman)

Bolken - Bezeichnung	TW ₁	TW ₂	TW ₃	TW ₄	TW ₅
Querschnitt					
Längsarmierung oben	2 x 2 Ø 26	2 x 2 Ø 16	2 x 2 Ø 26	2 x 2 Ø 26	2 x 2 Ø 26
Längsarmierung unten	2 x 2 Ø 18	2 x 2 Ø 26	2 x 2 Ø 18	2 x 2 Ø 18	2 x 1/2"-Uitz 2 x Ø 16
Bügel	Ø 8 / l _B = 12	Ø 8 / l _B = 12	Ø 8 / l _B = 12	Ø 6 / l _B = 12	Ø 6 / l _B = 12
Exzentrizität der Last P	180	180	90	90	90
Hauptparameter	Grundquerschnitt	Anordnung der Längsarmierung	Beanspruchung	Beanspruchung, Bügelarmierung	Beanspruchung, Bügelarmierung, Vorspannung
C/M _{moy}	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25

Fig 65 : Détails de ferrillage (Essai GROB-THURLIMAN)

- Sharma et Pandit (Torsional stiffness of concrete beams under combined loading) [96, 97, 98]

La rigidité de torsion d'une section rectangulaire (armée et non armée) y est étudiée, sous sollicitations combinées compression-flexion et torsion.

les essais ont porté sur 77 spécimens, en adoptant un chargement séquentiel [(compression + flexion) puis torsion].

Des expressions empiriques sont données pour évaluer les rigidités, mais localement (points A et B).

Au point B :

$$GK = 5040 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot k \cdot x^3 \cdot y \quad (\text{fig.66})$$

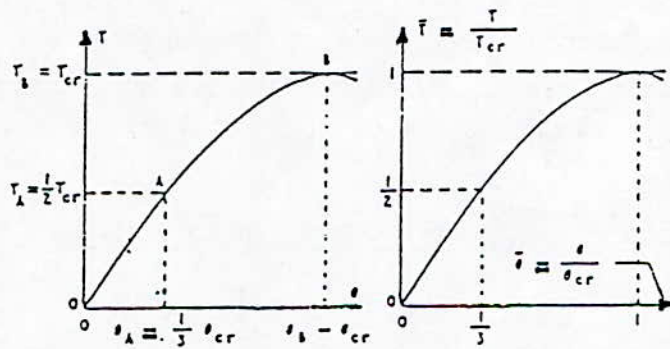
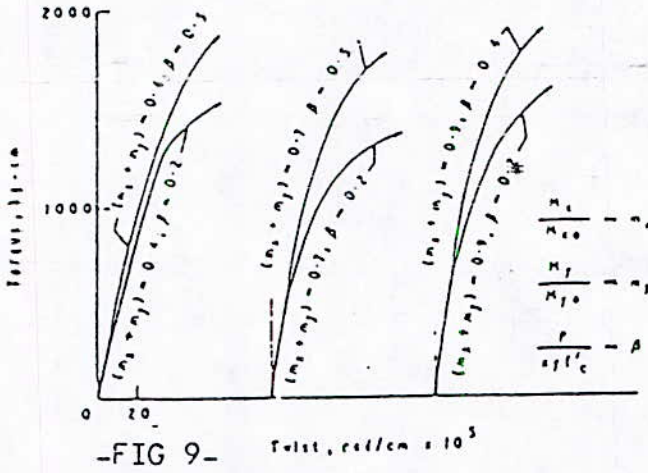


FIGURE 66

avec x et y respectivement petite et grande dimension de la section.

Les figures 67 et 68 font ressortir respectivement l'influence de la flexion et de la compression sur le phénomène.



Effect of bending moments on the torsional stiffness of beams under axial compression, biaxial bending and torsion

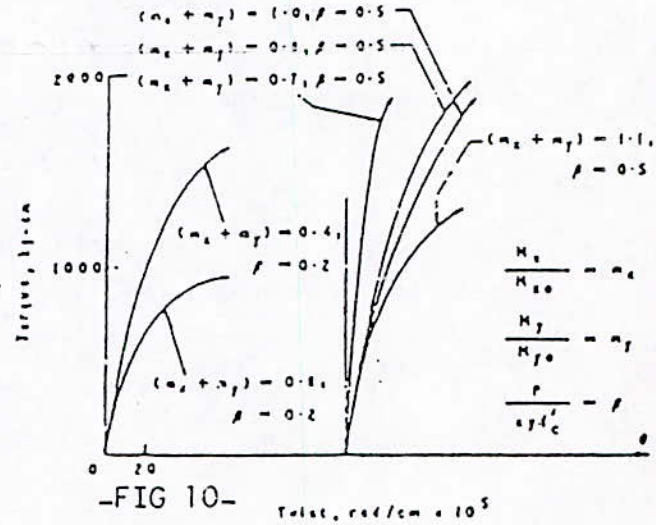


FIGURE 67

FIGURE 68

Pandit propose une formule générale permettant de calculer la rigidité initiale à un état quelconque fissuré sous chargement quelconque. Celle-ci est comparée aux résultats expérimentaux.

La concordance n'est pas très satisfaisante (Fig. 69).

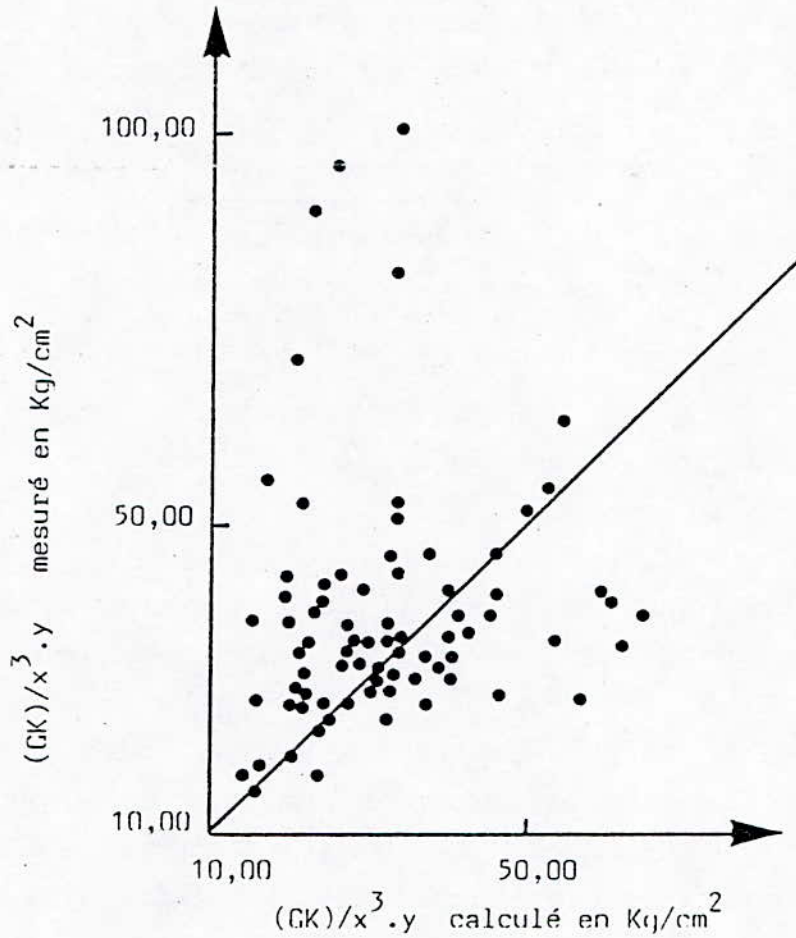


FIGURE 69

- Etudes expérimentales S.E.T.R.A.-C.E.B.T.P. [32, 34, 36, 37, 38, 64, 65, 91]

A ce jour le C.E.B.T.P. a proposé une gamme d'essais très variée :

- sections pleines épaisses ;
- sections creuses

Les essais réalisés peuvent être classés en trois familles :

- sections carrées pleines de 0,40 m de côté avec un trou \varnothing 102 mm au centre (repères KE 10, 10, 14, 17, 19) ;
- sections carrées creuses de 0,40 m de côté extérieur et 50 mm d'épaisseur de paroi (repères KE 11, 13, 15, 18, 20) ;

- sections rectangulaires de hauteur 0,40 m et largeur variable, les rapports b/h étant indiqués ci-dessous

Repère	b/h
KE 16	0,75 (avec trou central Ø 102)
KE 23	0,45
KE 24	0,30
KE 25	0,15

A cet effet, la figure (70) rappelle le dispositif d'essai utilisé antérieurement pour l'étude des sections massives et de caissons (profils fermés) en béton armé.

Son défaut réside dans le couple de torsion parasite ΔC susceptible d'être engendré par les forces de flexion verticales.

Il est dû, pour une part aux imperfections initiales (excentrement e_0 de l'axe des vérins par rapport au plan moyen de la poutre), et pour une autre part à ce que la rotation de torsion Θ entraîne une inclinaison par rapport à la verticale de l'axe du vérin de flexion situé du côté du "berceau";

Ce couple parasite peut s'écrire :

$$\Delta C \ll F \cdot e_0 + 1,3 \frac{C}{GK} \cdot F$$

expression où F est la force de flexion exercée par chacun des deux vérins de flexion. En admettant un excentrement initial e_0 de 2 mm, du même côté pour les deux vérins, et une force de flexion maximale de 300 kN dans les deux phases d'essai où une bonne précision est recherchée, le dernier terme dans ΔC donne une incertitude sur l'origine de C au plus égale à 0,6 kN.m. Pour les sections creuses, où le couple maximal appliqué était d'environ 10 kN.m, on a donc une incertitude de l'origine d'environ 6 % de la valeur maximale.

Ceci n'est pas négligeable, mais on peut en tenir compte approximativement en mesurant les rotations de torsion provoquées par l'application des forces de flexion.

Le second terme de ΔC permet d'évaluer l'incertitude relative sur les variations de couple dont il n'est pas possible de corriger les effets. En admettant que la rigidité sécante GK minimale dans les phases où une bonne précision est recherchée, est approximativement, pour les sections creuses :

$$GK = G_o K_o / 2 = 15000 \text{ kN.m}^2$$

On obtient une incertitude relative maximale :

$$\frac{1,3F}{GK} = \frac{1,3(300)}{15000} \approx 3 \%$$

ce qui est encore acceptable.

Cependant, il est aisé de montrer, que pour les essais envisagés (en torsion mixte) sur des profils minces ouverts, le dispositif d'essai antérieur ne peut plus donner satisfaction, du fait de l'erreur expérimentale trop importante qui serait introduite.

Pour les valeurs moyennes suivantes relatives à une section mince, on a :

$$\text{Rigidité moyenne : } GK \approx 1500 \text{ kN.m}^2$$

$$\text{Force de flexion maximale : } F_{\max} \approx 150 \text{ kN.m (70 \% du moment ultime)}$$

L'erreur associée au dispositif seul serait de 13 %, ce qui est excessif. Il s'est donc avéré indispensable de concevoir un dispositif d'essai approprié à ce genre de sections (profils minces ouverts).

1.3. - Conclusions provisoires

Cette analyse bibliographique s'est intéressée à deux catégories de travaux :

- a) éléments à profil mince ouvert sollicités en torsion et flexion ;
- b) fissuration de flexion des sections en béton armé.

Elle a permis de soulever plusieurs points et lacunes ayant pu servir d'orientation dans la démarche à suivre pour résoudre la question soulevée :

- sur aucun travail réalisé à ce jour, il n'y a coexistence des points (a) et (b). Ceci atteste donc du vide important qu'il reste à combler, tant dans le domaine où la fissuration de flexion est existante, que dans la "plage" de valeurs $C/M \ll 1$;
- sous une fissuration inclinée, le modèle le plus utilisé, servant à décrire théoriquement le problème, a consisté en l'emploi du "treillis à angle variable" ;
- le domaine du comportement en phase non fissurée a été développé de façon concise (sur le plan théorique uniquement), mais le domaine fissuré est étudié avec des approximations très sujettes à critiques, donnant trop souvent lieu à une erreur dépassant la marge admise en béton armé ;
- toutes les approches du phénomène dans le domaine fissuré ne prennent pas en compte la contribution des armatures.

En conclusion de l'examen de la bibliographie, on peut retenir que le problème du calcul est défriché, mais non complètement résolu, et que l'on ne dispose d'aucun résultat d'essai dans le domaine des poutres à profil mince ouvert soumises à la flexion et à la torsion avec un rapport C/M très petit.

Ayant déjà souligné l'importance que revêt cette recherche pour une majorité d'ouvrages réalisés actuellement [voir déversement des poutres et poteaux (B. Fouré, Décembre 1981)], le C.E.B.T.P. demeure le seul à disposer d'un éventail d'essais aussi important sur la torsion des poutres en béton armé et précontraint. Le dernier rapport établi au C.E.B.T.P. (B. Fouré, Novembre 1984, KE bis), basé sur l'introduction du phénomène de goujon (prise en compte de l'apport des armatures dans le comportement global d'une section fissurée) apporte une synthèse, comme il justifie que la seule voie qui s'offre, serait une formulation empirique (ou semi-empirique) des divers paramètres, basée sur des hypothèses qui peuvent voir leurs affirmations apportées par l'expérimentation.

2 — **COMPORTEMENT EN TORSION COMBINEE A LA FLEXION**

A ce jour, le C.E.B.T.P. a proposé une gamme d'essais très variée :

- sections pleines épaisses ;
- sections creuses (KE 11, 13, 15, 18, 20) ;
- sections rectangulaires minces (KE 24 (?), KE 25) ;

Le complément d'étude qu'on envisage dans le cadre de cette recherche, s'intéresse aux sections à profil mince ouvert. Aussi, avons nous envisagé deux poutres d'essai à section mince en double té, l'une avec gauchissement libre à l'appui (Référence OE 2), l'autre où l'on gêne les déformations de gauchissement au niveau de l'appui de flexion (Référence OE 1).

En s'aidant des études antérieures (plus particulièrement sections creuses et KE 25), et des résultats recueillis de l'étude expérimentale proposée, nous allons essayer d'établir des méthodes rigoureuses de calcul des rigidités de torsion \overline{GK} et de gauchissement \overline{EK}_1 ; pour un état de déformation longitudinale et de fissuration donné.

Cette recherche abordera aussi expérimentalement l'étude des problèmes de gauchissement gêné, hors du domaine linéaire, en présence de fissures dues à la flexion.

2.0 - Généralités

a) Relation couple de torsion-rotation de torsion

Dans chacune des phases de flexion, pour des valeurs croissantes du couple de torsion, l'enregistrement effectué par le clinomètre KE, permet de connaître la valeur de la rotation brute dans la section médiane. Par ailleurs, pour le calcul ultérieur du coefficient de proportionnalité entre le couple et la rotation (ce coefficient est une combinaison de GK et de EK_1), nous disposons aussi de la rotation moyenne sur appui.

b) Remarques générales^(*)

- En torsion pure, la relation $C = f(\Delta\theta)$ est quasiment linéaire. Dès qu'il y a fissuration, l'allure générale de cette relation n'est plus linéaire ;
- la non-linéarité se manifeste au-delà d'un couple voisin de $C \simeq C_f/5$ (C_f : couple de fissuration en gauchissement gêné) ;
- La non-linéarité est d'autant plus accentuée que le couple de torsion est grand, et que l'on est proche de l'état ultime de flexion (la "déformabilité" de la poutre augmente avec l'importance de la fissuration) ;
- Cette non-linéarité est beaucoup moins apparente que celle observée lors d'essais sur des sections pleines et creuses (essais KE).

2.1. - Influence des divers paramètres

2.1.1. - Rappels

La définition des rigidités de torsion se fait d'après les courbes $C = f(\Delta\theta/L)$. Le tracé de la courbe $C = f(\Delta\theta/L)$ permet de distinguer une rigidité initiale, sécante et tangente (Fig. 71).

(*) L'interprétation plus poussée sous sollicitation combinée de flexion torsion après fissuration, sera effectuée simultanément avec l'évaluation des rigidités tangentes dans les chapitres qui suivent.

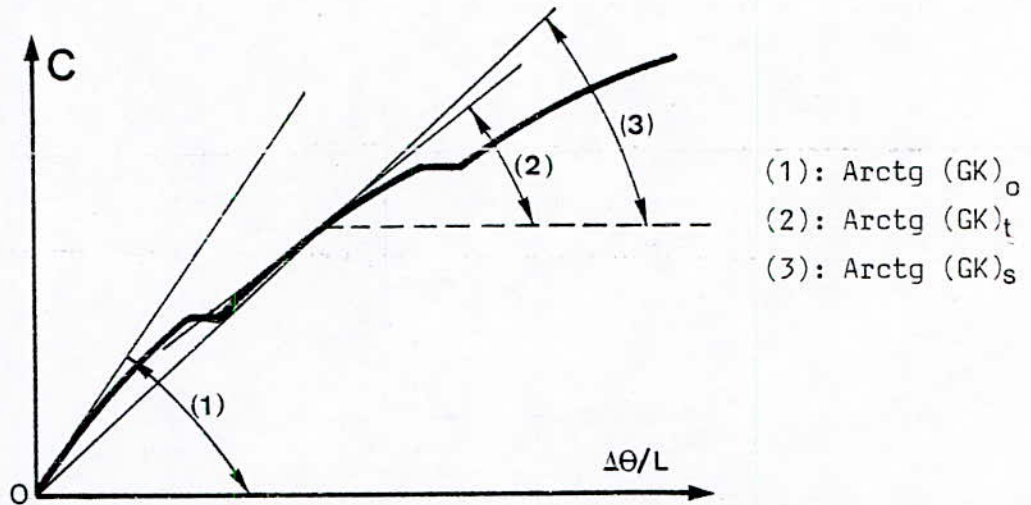


FIGURE 71

Chacune de ces rigidités est fonction d'un certain nombre de paramètres :

- a) la rigidité sécante $(GK)_o$, fonction de M , N (ou rigidités à l'origine ;
- b) la rigidité sécante $(GK)_s$, fonction de M , N et C ;
- c) la rigidité tangente $(GK)_t$, fonction de M , N et C .

2.1.2. - Influence des paramètres

2.1.2.1. - Niveau de sollicitation en flexion

Les valeurs $(GK)_o / (G_o K_o)$ enregistrées avec la variation de M/M_u avec $G_o K_o$ rigidité de torsion en élasticité linéaire ; M_u le moment ultime de flexion) donnent une indication globale des effets combinés de la fissuration, de la palstification du béton comprimé et de la forme de la section.

Il apparait clairement que : la réduction de rigidité de torsion due essentiellement à la fissuration en flexion simple est plus importante que celle due exclusivement à la plastification du béton comprimé, en flexion composée sans fissuration.

2.1.2.2. - Influence des armatures

Après fissuration de flexion, entre le début du chargement en torsion, et une valeur de couple voisine de $C_f/4$ (C_f : couple de fissuration de "gauchissement") on peut observer que le terme de rigidité chute d'environ 40 % par rapport à sa valeur initiale pour une section armée. Pour une section sans armatures, cette diminution est encore beaucoup plus marquée (cf. travaux de Gesund et Boston).

Cependant, plusieurs travaux (Sharma et Pandit ; Fouré) ont montré que seules les armatures de flexion contribuaient, après fissuration, dans le terme de rigidité. Cela tend encore à confirmer la non participation des armatures transversales.

2.1.2.3. - Le béton comprimé

a) Plastification du béton comprimé

Celle-ci ne semble pas jouer un grand rôle (différents essais sur sections rectangulaires pleines et creuses).

Ceci est confirmé par une étude antérieure menée par le C.E.B.T.P. (Contrat S.E.T.R.A.-U.T.I. 1977).

b) Importance de la zone comprimée

Chinenkov note qu'il est délicat de déterminer exactement la surface de béton comprimé, sous sollicitation combinée de flexion-torsion.

Gesund et Boston ont établi que cette diminution de section comprimée par rapport à la section classique de calcul peut être de l'ordre de 1/4 de cette dernière. Par ailleurs, tous les auteurs sont unanimes pour affirmer que la torsion a pour effet de rapprocher l'axe neutre vers le centre de gravité géométrique de la section (Pandit et Warwaruk ; Fig. 72)

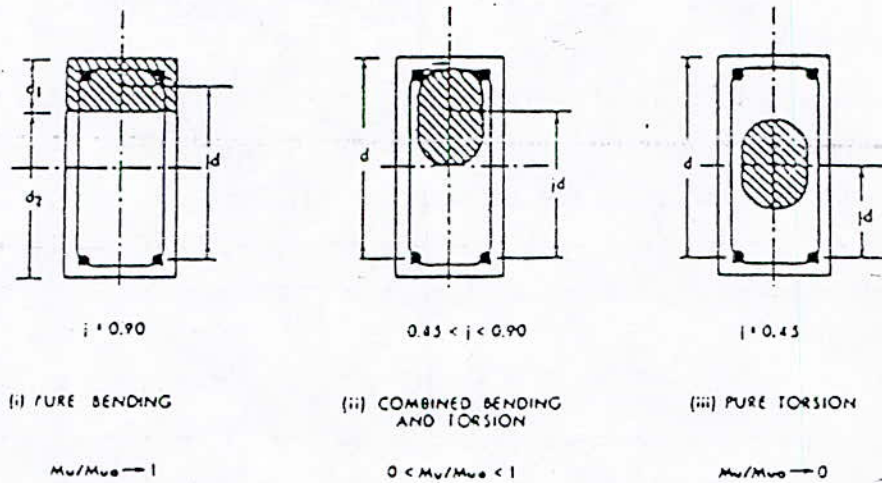


FIGURE 72

Notre problème étant un problème d'instabilité en flexion composée déviée [valeurs $(C/M) \ll 1$], la modification de position de l'axe neutre sera insignifiante.

2.1.2.4. - Fissuration de flexion

Deux paramètres essentiels ont été retenus pour caractériser l'état de fissuration de la poutre :

- l'ouverture des fissures t_m (ouverture moyenne au niveau de l'armature) ;
- l'espacement moyen s_m entre deux fissures successives.

du fait d'une part, du nombre important de paramètres intermédiaires, et d'autre part que ces paramètres sont tous liés à une même cause, il s'avère préférable de caractériser l'importance de la fissuration par le paramètre relatif global I_f , tel que :

$$I_f = t_m / s_m$$

Sur la base du paramètre I_f , ainsi défini, notre présente étude visera à établir une corrélation (la mieux appropriée) entre le niveau de fissuration I_f et la variation de la rigidité de torsion \overline{GK} . (les modifications de "comportement" pouvant être apportées par le fluage sont négligées du fait d'un pilotage en contrôle de déformations).

2.1.2.5. - La forme de la section

C'est de loin, le point le plus important dans cette étude. Les études menées à ce jour ont permis de tirer quelques résultats sur les sections pleines et creuses, mais l'analyse des profils ouverts ne prévoit et ne confirme que peu de résultats sur leur comportement. La difficulté est accentuée par le fait que toutes les sections ne peuvent être traitées de la même manière. C'est pour cette raison que, selon le type de section, et selon le niveau de fissuration, on peut définir un paramètre de "dégradation" (ou d'influence mutuelle des coefficients λ et μ) noté Ψ qui englobe ces deux points (Cf. ANNexe).

2.2- COMPORTEMENT EN TORSION ET FLEXION

2.2.1- Expression des grandeurs liées au gauchissement en élasticité non-linéaire

2.2.1.1- Rappel de l'élasticité linéaire

L'aire sectorielle principale $\Omega(s)$ est définie comme le double de l'aire limitée par le segment de droite TP_0 reliant le "pôle principal T , ou centre de torsion, et le "point origine" P_0 du contour (Γ), le segment de droite TP reliant T au point courant P d'abscisse s sur (Γ) et le segment curviligne P_0P du contour (voir figure 73).

L'origine des axes étant en T , on satisfait aux deux équations :

$$\int_{(\Gamma)} \Omega(s) \cdot x(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0 \quad 4-1$$

$$\int_{(\Gamma)} \Omega(s) \cdot y(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0 \quad 4-2$$

Le choix du point origine P_0 permet de satisfaire de plus à l'équation :

$$\int_{(\Gamma)} \Omega(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0 \quad 4-3$$

Ces trois équations expriment simplement que la gêne du gauchissement engendre un état d'autocontrainte normal (l'effort normal et les deux moments de flexion résultants étant nuls)

L'inertie de gauchissement s'écrit

$$K_1 = \int_{(\Gamma)} \Omega(s)^2 \cdot t(s) \cdot ds \quad 4-4$$

Les contraintes normales dues au gauchissement gêné et les déformations correspondantes s'écrivent, en fonction du bimoment B :

$$\sigma_c(s) = \frac{B}{k_1} \cdot \Omega(s) \quad 4-5$$

$$\epsilon_c(s) = \frac{\sigma_c(s)}{E}$$

2.2.1.2- Généralisation au matériau non-linéairement élastique

Le module sécant de déformation du matériau est $E(s)$, variable en fonction de la contrainte normale totale $\sigma(s)$ due à l'ensemble des sollicitations (flexion composée "classique", gauchissement gêné...).

La position du centre de torsion T et celle du point origine P_0 sont alors variables avec la sollicitation ainsi que la valeur de l'aire sectorielle $\Omega(s)$. En supposant toujours l'origine des axes en T celui-ci est défini par les deux équations :

$$\int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot x(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0 \quad 4-1'$$

$$\int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot y(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0 \quad 4-2'$$

Le point origine est défini par l'équation suivante (indépendante du système d'axes mais dépendant de la position de T) :

$$\int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0 \quad 4-3'$$

On en déduit la valeur de l'aire sectorielle Ω , et on peut calculer la rigidité de gauchissement :

$$\overline{EK_1} = \int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s)^2 \cdot t(s) \cdot ds \quad 4-4'$$

puis la déformation de gauchissement gêné

$$\epsilon_c(s) = \frac{B}{\overline{EK}_1} \cdot \Omega(s) \quad 4-6'$$

et la contrainte normale correspondante

$$\sigma_c(s) = E(s) \cdot \epsilon_c(s) \quad 4-5'$$

2.2.1.3- Cas du béton armé - béton tendu négligé

Il faut tenir compte de la fissuration du béton d'une part (l'aire restant comprimée définissant un domaine partiel (Γ') du contour), des armatures d'autre part. Si l'on néglige totalement le béton tendu, le centre de torsion T et le point origine P_0 sont définis par les équations suivantes :

$$\int_{(\Gamma')} E_b(s) \cdot \Omega(s) \cdot x(s) \cdot t(s) \, ds + \sum_i E_a(s_i) \cdot \Omega(s_i) \cdot x(s_i) \cdot A_i = 0 \quad 4-1''$$

$$\int_{(\Gamma')} E_b(s) \cdot \Omega(s) \cdot y(s) \cdot t(s) \, ds + \sum_i E_a(s_i) \cdot \Omega(s_i) \cdot y(s) \cdot A_i = 0 \quad 4-2''$$

$$\int_{(\Gamma')} E_b(s) \cdot \Omega(s) \cdot t(s) \, ds + \sum_i E_a(s_i) \cdot \Omega(s_i) \cdot A_i = 0 \quad 4-3''$$

La rigidité de gauchissement d'écrit

$$\overline{EK}_1 = \int_{(\Gamma')} E_b(s) \cdot \Omega(s)^2 \cdot t(s) \, ds + \sum_i E_a(s_i) \cdot \Omega(s_i)^2 \cdot A_i \quad 4-4''$$

Les déformations $\epsilon_c(s)$ se calculent toujours par l'expression (4-6') et les contraintes dans le béton et les armatures par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{bc}(s) &= E_b(s) \cdot \epsilon_c(s) \\ \epsilon_{ac}(s) &= E_a(s) \cdot \epsilon_c(s) \end{aligned} \right\} \quad 4-5''$$

2.2.1.4- Prise en compte du béton tendu

Si l'on veut tenir compte de la contribution du béton entre les fissures à la rigidité de la partie tendue, on peut procéder comme il a été indiqué, pour la flexion, en III.4.1. Il faut ajouter aux termes "béton" l'intégration sur la zone tendue (Γ'') des contraintes correspondant au module fictif E_{bt} . On a donc les termes complémentaires suivants :

$$4-1'' : \int_{(\Gamma''')} E_{bt}(s) \cdot \Omega(s) \cdot x(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

$$4-2'' \int_{(\Gamma''')} E_{bt}(s) \cdot \Omega(s) \cdot x(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

$$4-3'' \int_{(\Gamma''')} E_{bt}(s) \cdot \Omega(s) \cdot t(s) \cdot ds$$

$$4-4'' \int_{(\Gamma''')} E_{bt}(s) \cdot \Omega(s)^2 \cdot t(s) \cdot ds$$

$$4-5'' \quad \epsilon_{bc,t}(s) = E_{bt}(s) \cdot \epsilon_c(s)$$

contrainte moyenne du béton tendu sur la fibre
d'abscisse s

Une autre façon de procéder est d'attribuer aux armatures tendues un module fictif E_a^* supérieur au module réel, pour tenir compte de ce que l'allongement moyen ϵ_{am} est plus petit que l'allongement ϵ_a au droit d'une fissure. L'expression du module est donc :

$$E_a^* = E_a \cdot \frac{\epsilon_a}{\epsilon_{am}}$$

le rapport $\epsilon_a / \epsilon_{am}$ peut être calculé, par exemple, par l'expression proposée en III.4.2.

2.2.2- Application aux poutres OE

2.2.2.1- Position du centre de torsion

Après la fissuration de flexion, la section conserve l'axe de symétrie y . De plus, les contraintes dans le béton comprimé sont assez petites pour qu'on puisse admettre que le comportement reste linéaire, régi par le module E_{bo} (*); les armatures ne sont pas plastifiées. On est donc dans le domaine du comportement linéaire, après fissuration. Les variations de déformations longitudinales dues à la torsion sont suffisamment petites pour qu'on reste dans le domaine linéaire. La symétrie est donc conservée.

Par raison de symétrie, le centre de torsion T est porté par l'axe y ; par rapport au centre de gravité initial O , il est déplacé d'une distance w vers la zone comprimée. Le point origine P_0 reste situé, pour chacune des ailes, à l'intersection de la ligne moyenne de l'aile et de l'axe y .

On transpose ce qui a été fait dans le domaine linéaire avant fissuration (**), en faisant l'hypothèse supplémentaire que le béton tendu est complètement négligeable.

On suppose que les lignes moyennes des ailes sont parallèles. Celle de l'aile comprimée passe par le centre de gravité "homogène" de celle-ci, situé à une distance de O égale à :

$$d' = \frac{h}{2} - e + \frac{S'_{xx}}{B'}$$

avec :

$$B' = be + \frac{b(e' - e)}{2} + 5 n A$$
$$S'_{xx} = \frac{be^2}{2} - \frac{b(e' - e)^2}{6} + n A [3(e - a) + 2(e - a')]$$

(*) La déformation extrême, $\epsilon_m = 455.10^{-6}$, correspond dans le calcul, à une contrainte $\bar{\sigma}_b$ égale à 16,0 MPa. La déformation $\epsilon = \bar{\sigma}_b / E_{bo} = 444.10^{-6}$ ne diffère de ϵ_m que de 2 %.

(**) Cf. **CHAPITRE II**, § 3.1.2.

Soit $d' = 0,1755 \text{ m}$ pour OE 1 et OE 2.

La ligne moyenne de l'aile tendue passe par le centre de gravité des armatures seules situé à une distance de 0 égale à :

$$d'' = 0,181 \text{ m}$$

Les expressions de l'aire sectorielle sont alors les suivantes (Fig. 74) :

- pour l'aile inférieure comprimée :

$$\Omega(x_i) = \frac{1}{2} (d' - w) \cdot x_i$$

- pour l'aile supérieure tendue :

$$\Omega(x_s) = \frac{1}{2} (d'' + w) \cdot x_s$$

La position du centre de torsion est déterminée par l'équation (41''), qui, transposée au cas où $E_b(s) \equiv E_{b0}$ et $E_a = n E_{b0}$, s'écrit :

$$2 (d' - w) \left[\bar{e} \int_0^{b/2} x^2 \cdot dx + n A \sum_{i=1}^2 (x_i)^2 \right] - 2 (d'' + w)^2 n A \sum_{i=1}^2 (x_i)^2 = 0$$

Soit :

$$(d' - w) \frac{\bar{e} b^3}{12} + 2 n A [(d' - w) - (d'' + w)] (c^2 + c'^2) = 0 \quad 4-7$$

On en tire :

$$w = \frac{d' \frac{\bar{e} b^3}{12} + 2 n A (d' - d'') (c^2 + c'^2)}{\frac{\bar{e} b^3}{12} + 4 n A (c^2 + c'^2)}$$

D'où

$$w = 0,139 \text{ m pour OE 1,} \\ 0,140 \text{ m pour OE 2.}$$

Pour tenir compte de la contribution du béton tendu dans l'aile supérieure, il faut remplacer, dans le calcul ci-dessus, le coefficient d'équivalence $n = E_a/E_{bo}$ par la valeur fictive :

$$n^* = \frac{E_a^*}{E_{bo}}$$

avec :

$$E_a^* = E_a \frac{\epsilon_a}{\epsilon_{am}}$$

L'équation 47 devient alors :

$$(d'-w) \frac{\bar{e}b^3}{12} + [2 nA (d'-w) - 2 n^*A(d''+w)](c+c')^2 = 0 \quad 4-7'$$

Soit :

$$w = \frac{d' \frac{\bar{e}b^3}{12} + 2(nd' - n^*d'') A(c^2 + c'^2)}{\frac{eb^3}{12} + 2(n+n^*) A(c^2 + c'^2)} \quad 4-8'$$

Afin d'éviter d'introduire des causes d'incertitude supplémentaires dans l'interprétation des résultats, on prendra pour ϵ_a la valeur maximale mesurée par les jauges collées sur les armatures et pour ϵ_{am} la valeur expérimentale déduite des diagrammes linéaires de déformation moyenne sur la section.

L'ensemble des valeurs à considérer est alors celui du tableau ci-dessous :

	Phase	A	B	C
OE 1	$\epsilon_a (10^{-6})$	1390	1920	2570
	$\epsilon_{am} (10^{-6})$	1100	1900	2450
	ϵ_a/ϵ_{am}	1,25	1,01	1,05
OE 2	$\epsilon_a (10^{-6})$	1110	1980	2570
	$\epsilon_{am} (10^{-6})$	850	1500	2050
	ϵ_a/ϵ_{am}	1,31	1,32	1,25

Les rapports $\epsilon_a / \epsilon_{am}$ devraient, logiquement, décroître lorsque le moment de flexion croît. Compte-tenu de la dispersion des valeurs, cette tendance ne se manifeste pas nettement. On ne considèrera donc que la valeur moyenne sur l'ensemble des cas

$$\frac{\epsilon_a}{\epsilon_{am}} \simeq 1,20$$

Pour l'aile supérieure, le coefficient d'équivalence fictif prend entre les valeurs

$$\begin{aligned} n^* &= 6,56 \text{ pour OE 1,} \\ n^* &= 6,32 \text{ pour OE 2.} \end{aligned}$$

On en déduit la position du centre de torsion, par l'équation 48' :

$$\begin{aligned} w &= 0,132 \text{ m pour OE 1,} \\ &= 0,133 \text{ m pour OE 2.} \end{aligned}$$

La prise en compte de la contribution du béton tendu a une influence relativement faible sur la position du centre de torsion (w varie de 6 % environ).

Remarque :

On peut relier aussi la position du centre de torsion aux déformations longitudinales de gauchissement, de la façon suivante. Les déformations maximales au bord des ailes ($x = 0,20$ m) s'écrivent :

- pour l'aile inférieure :

$$\epsilon_{ci,max} = \frac{B}{E_{bo} \cdot K_1} \cdot (x_i = 0,20)$$

- pour l'aile supérieure :

$$\epsilon_{cs,max} = \frac{B}{E_{bo} \cdot K_1} \cdot (x_s = 0,20)$$

En faisant le rapport et en remplaçant Ω par son expression, on obtient

$$\frac{\epsilon_{ci, \max}}{\epsilon_{cs, \max}} = \frac{d' - w}{d'' - w} = \rho$$

D'où

$$w = \frac{d' - \rho d''}{1 + \rho} \quad 4-9$$

2.2.2.2- Inertie de gauchissement

Dans ce cas particulier où le comportement reste linéaire après fissuration, il n'est pas nécessaire d'évaluer le terme global de rigidité \overline{EK}_1 . La rigidité de gauchissement sera égale au produit du module E_{bo} du béton par l'inertie homogène K_{1h} . Celle-ci s'écrit, en négligeant le béton tendu et par transposition de l'expression 44' :

$$K_{1h} = 2 (d' - w)^2 \left[\bar{e} \int_0^{b/2} x^2 dx + nA \sum_{i=1}^2 x_i^2 \right] + 2(d'' + w)^2 nA \sum_{i=1}^2 x_i^2$$

Soit

$$K_{1h} = (d' - w)^2 \frac{\bar{e} b^3}{12} + 2nA [(d' - w)^2 + (d'' + w)^2] (c^2 + c'^2) \quad 4-10$$

D'où

$$K_{1h} = 3,93 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \text{ pour OE 1,} \\ 3,83 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \text{ pour OE 2.}$$

Si l'on considère la contribution du béton tendu, d'une part w change légèrement, d'autre part l'expression de l'inertie devient :

$$K_{1h} = (d' - w)^2 \left[\frac{\bar{e} b^3}{12} + 2nA(c^2 + c'^2) \right] + 2n^* A(c^2 + c'^2) (d'' + w)^2 \quad 4-10'$$

D'où

$$K_{1h} = 4,66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \text{ pour OE 1,} \\ = 4,50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \text{ pour OE 2.}$$

On constate que la contribution du béton tendu a un effet important sur l'inertie de gauchissement (+ 18 % par rapport au cas où l'on néglige cet effet). D'autre part, la fissuration entraîne une réduction des trois quarts par rapport à l'inertie de la section non fissurée.

Nota : La transposition de la théorie de la flexion des ailes utilisée dans les calculs effectués dans le domaine non-fissuré, donnerait, en négligeant le béton tendu :

$$K_{1h} = (J_b + J_a) (d' - w)^2 + J_a.(d''+w)^2$$

avec $J_a = 2 nA (c^2 + c'^2)$ comme dans l'expression (9) précédente

et $J_b = \frac{eb^3}{12} + \frac{(\bar{e}' - e)b^3}{48}$ valeur légèrement différente de $\bar{e}b / 12$

2.2.3- Interprétation des mesures de déformations longitudinales ϵ_c

2.2.3.1- Généralités

Un premier examen des mesures de déformations longitudinales ϵ_c correspondant aux contraintes σ_c dues à la gêne du gauchissement sous l'action du couple de torsion, permet de faire les constatations suivantes :

- à couple de torsion égal, l'ordre de grandeur des déformations reste le même sous les trois niveaux de flexion A, B, C ;
- dans l'aile supérieure, les déformations ϵ_c sont, en valeur absolue, beaucoup plus grandes que dans l'aile inférieure. Traduites en variation de longueur Δl sur la base de mesure $l = 100$ mm, elles restent plus petites que l'ouverture moyenne des fissures t_m , à chaque phase de l'essai. Donc, du côté de l'aile où les déformations ϵ_c sont négatives, le raccourcissement ne va jamais jusqu'à la refermeture complète des fissures. D'autre part, compte tenu de l'espacement des fissures, égal ou inférieure à la longueur de la base de mesure, on peut admettre que la valeur mesurée ϵ_c correspond bien à une déformation moyenne, au sens utilisé en III.2. ;

- malgré la dispersion des valeurs mesurées, on peut admettre qu'en moyenne la distribution linéaire des déformations ϵ_c en fonction de l'abscisse x sur la largeur de l'aile est conservée. En conséquence, on peut traduire toutes les déformations, en valeur absolue, en déformation maximale au bord de l'aile $\epsilon_{c,max}$, en multipliant la valeur mesurée par le rapport $0,20/x$ (en m) approprié.

Dans les deux sections les plus instrumentées de chacune des deux poutres, on peut ainsi calculer une valeur moyenne de $\epsilon_{c,max}$, pour chaque valeur du couple de torsion appliqué, correspondant à 2 mesures (à mi-épaisseur de l'aile), 4 mesures (sur les faces internes) ou 6 mesures (sur les faces externes).

Les mesures effectuées, à l'aide d'un extensomètre mécanique de 100 mm de base, sous l'aile supérieure sont très dispersées en raison d'une part de l'incertitude de mesure propre à l'appareil, d'autre part à la posture de mesure malcommode pour l'opérateur.

2.2.3.2- Cas de OE 1 - Sections $z = 0,125$ m et $z = 1,81$ m

Variation de $\epsilon_{c,max}$ avec le couple C :

Les figures 75, 76 et 77 présentent, à titre d'exemple, les valeurs expérimentales moyennes de $\epsilon_{c,max}$ en fonction du couple dans chacune des trois phases d'essai A, B et C (correspondant aux trois niveaux de flexion) et dans la section d'abscisse $z = 1,81$ m. On trouvera en annexe les résultats relatifs à la section $z = 0,125$ m. Ces figures montrent que la variation de $\epsilon_{c,max}$ avec C peut être considérée comme linéaire pour les faibles valeurs du couple. Pour les plus grandes valeurs, la déviation de la linéarité reste faible.

Pour chacune des ailes, on constate que les déformations sont plus fortes sur la face interne que sur la face externe, phénomène déjà observé avant la fissuration.

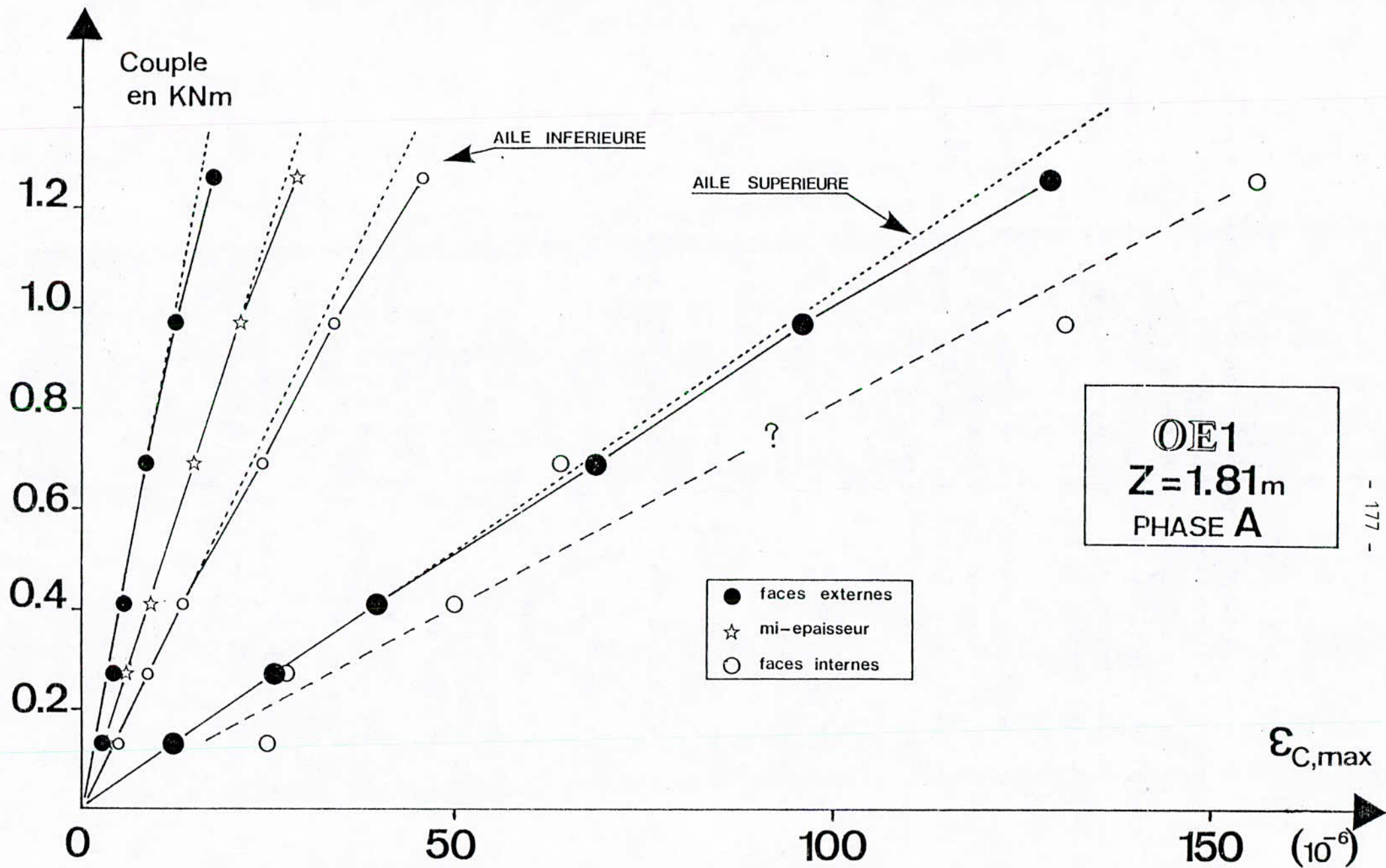


FIG 75

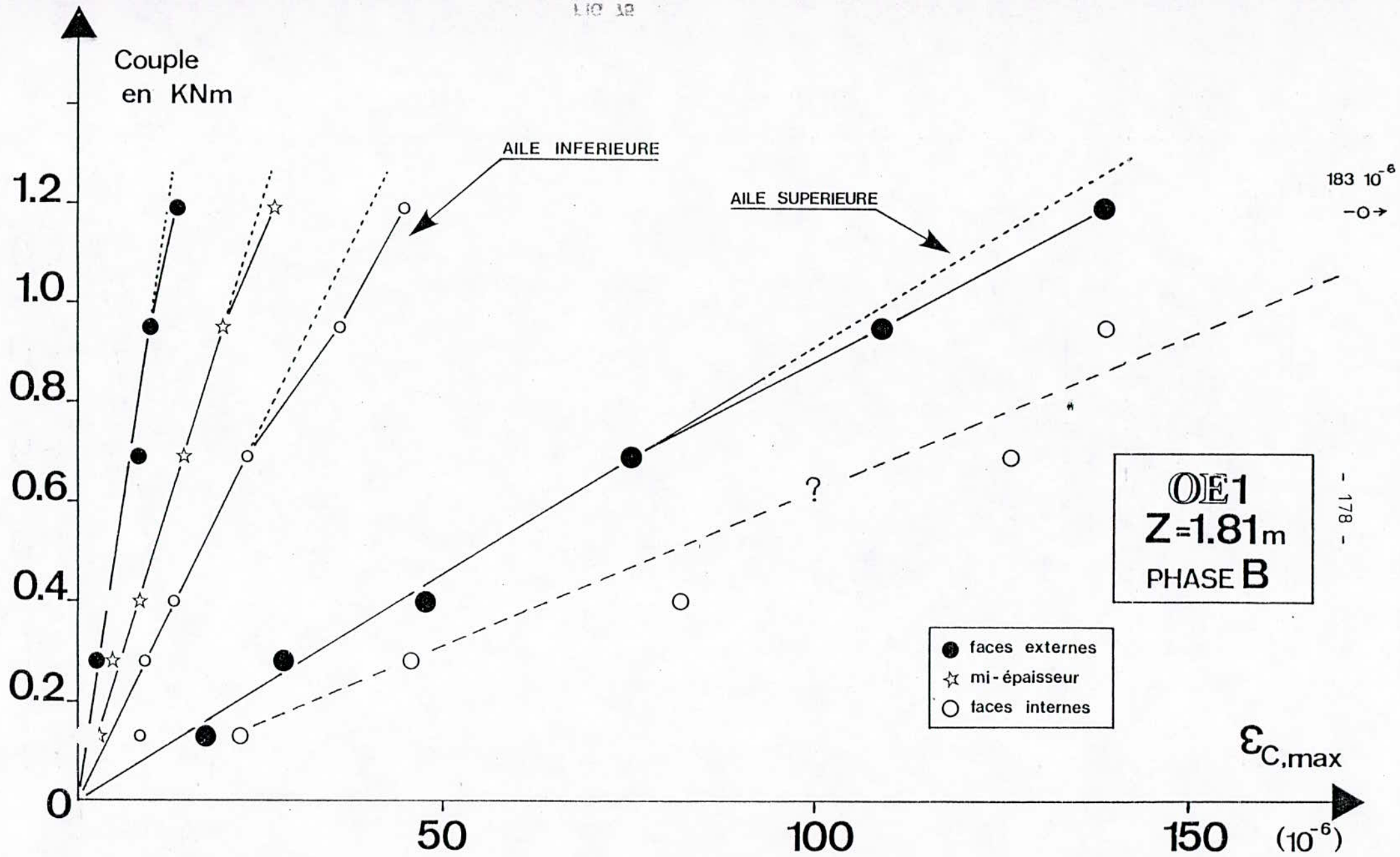


FIG 76

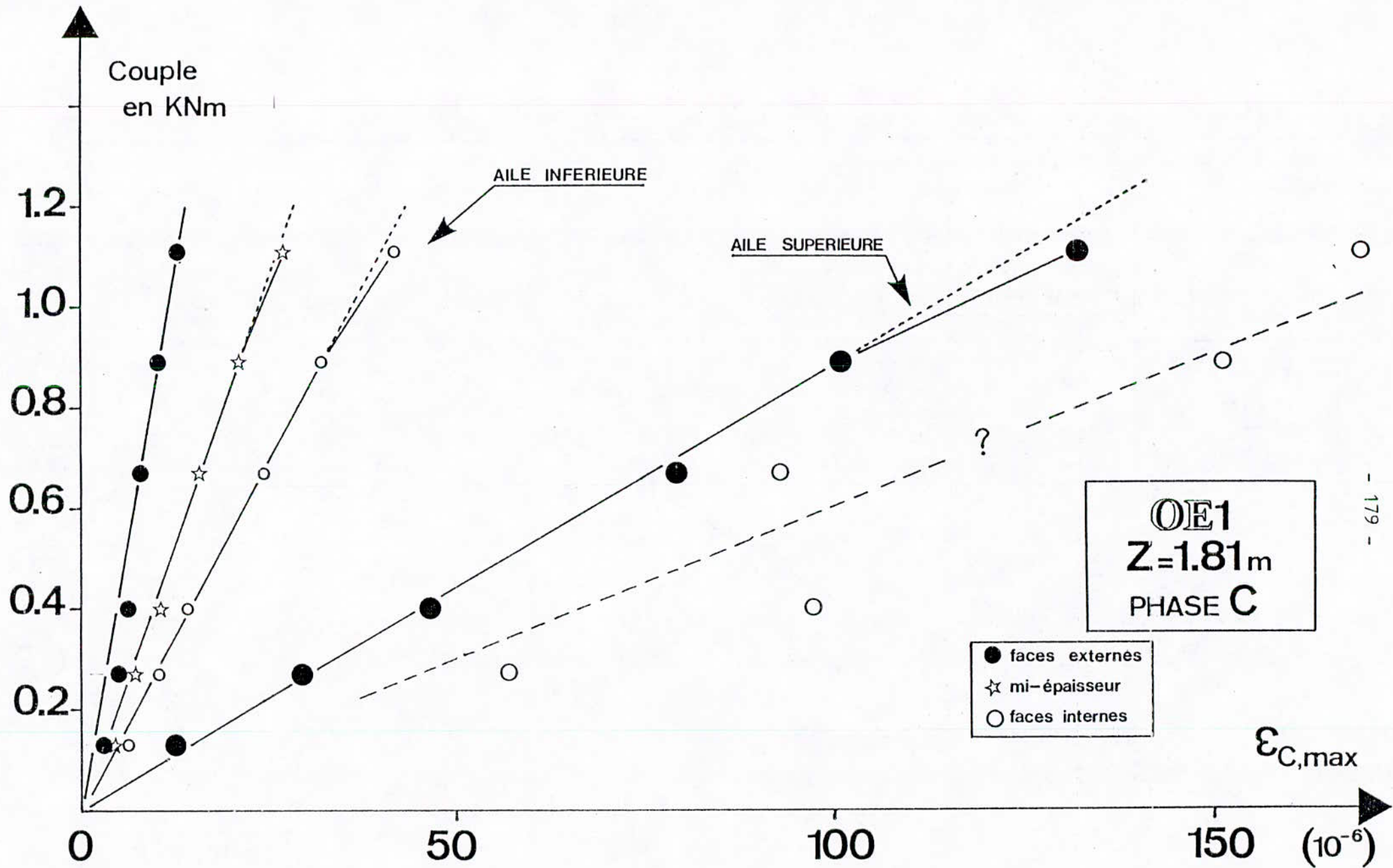


FIG 77

Gradient dans l'épaisseur de l'aile :

Ayant tracé les droites $\epsilon_{c,max} = k.C$, on peut calculer, pour chaque aile, la valeur de la pente k relative à chaque niveau de mesures, rapportée à la valeur moyenne k_{moy} sur tous les niveaux. La valeur de ce rapport k/k_{moy} varie assez peu d'une phase à l'autre, mais varie d'une section à l'autre. La présentation graphique des valeurs, à la figure 78, met bien en évidence le gradient de déformation dans les ailes. Il est plus grand dans la section $z = 0,125$ m que dans la section $z = 1,81$ m. Il est nettement plus faible dans l'aile supérieure fissurée que dans l'aile inférieure. Dans cette dernière, le gradient est plus fort que ce qu'on avait observé avant la fissuration.

Rapport des déformations dans les ailes inférieure et supérieure :

A l'aide des valeurs de k tirées directement des mesures et du gradient supposé linéaire, on peut estimer les valeurs des pentes k_i et k_s relatives à la déformation $\epsilon_{c,max}$ qui se produirait au niveau de la ligne moyenne des ailes inférieure (à la distance d' de 0) et supérieure (à la distance d'') respectivement. Le rapport k_i/k_s est égal au rapport des déformations $\epsilon_{ci,max} / \epsilon_{cs,max} = \rho$.

Les valeurs expérimentales de ρ ainsi obtenues sont indiquées au tableau ci-dessous :

$\rho = \epsilon_{ci,max} / \epsilon_{cs,max}$ expérimental				
Phase section	A	B	C	Moyenne
$z = 0,125$ m	0,186	0,215	0,185	0,195
$z = 1,81$ m	0,205	0,171	0,165	0,180
Moyenne	0,196	0,193	0,175	0,188

ESSAI OE1

● — z = 1,81 m
 ○ - - - z = 0,125 m

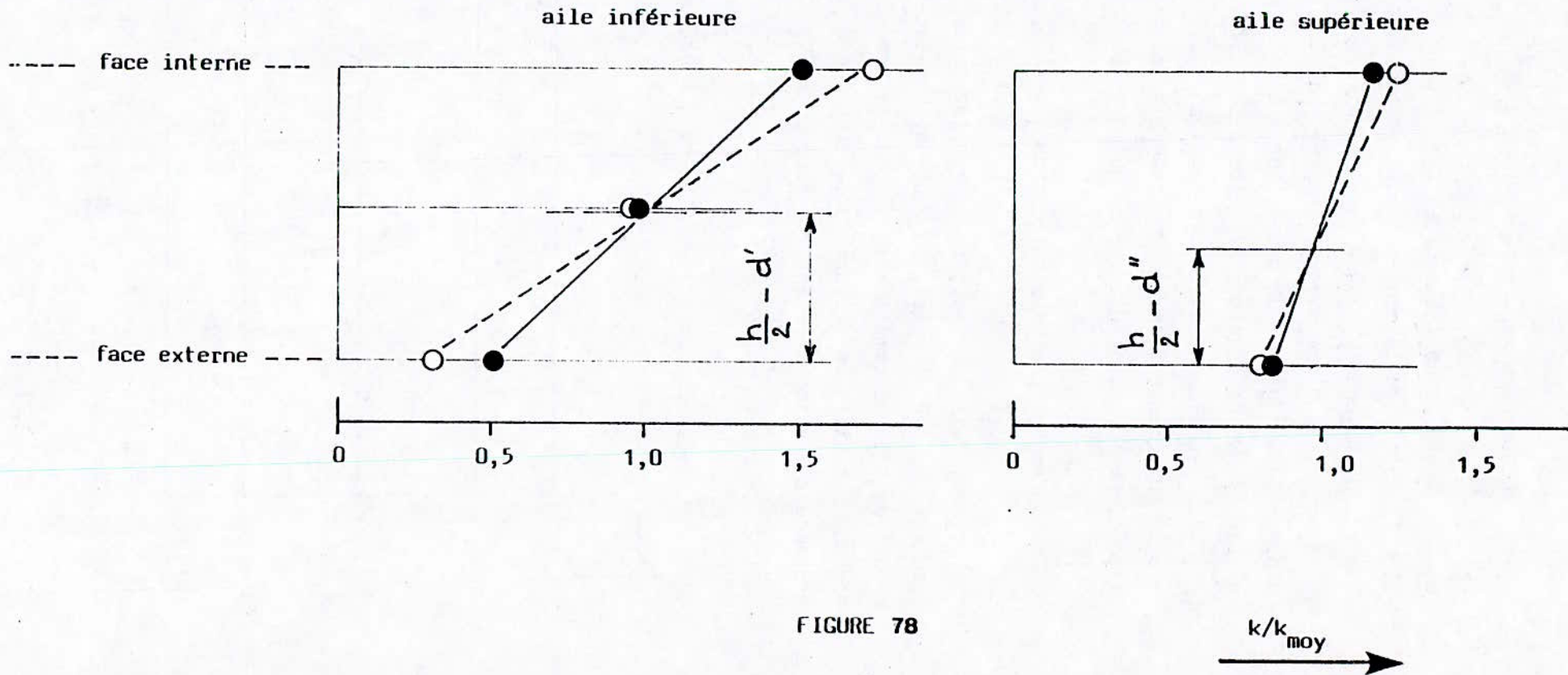


FIGURE 78

Ces résultats, très dispersés, ne mettent pas en évidence de tendance nette, sauf peut-être une légère décroissance de ρ lorsque le niveau de flexion croît. Ce sens de variation serait conforme à l'évolution prévisible de la position du centre de torsion.

2.2.3.3- OE 1 - autres sections et variations le long de la poutre

On dispose de mesures en nombre plus limité sur les faces externes des ailes inférieure et supérieure dans les sections $z = 0,50$ m et $z = 1,45$ m. L'évolution des déformations $\epsilon_{C,max}$ avec le couple C est présenté à la figure 79. On peut encore admettre une variation linéaire et la pente k dépend peu de la phase considérée.

Dans la section $z = 0,825$ m, on dispose de mesures sur l'aile inférieure seulement. Malgré leur forte dispersion (due aux très faibles déformations mesurées, la moyenne ne dépassant pas $4 \cdot 10^{-6}$) on peut estimer, sur les trois phases une pente moyenne $k \simeq 3 \cdot 10^{-6}/\text{kN.m}$.

L'ensemble des résultats permet de présenter la distribution des déformations $\epsilon_{C,max}$ le long de la poutre, aux figures 80 (pour l'aile inférieure) et 81 (pour l'aile supérieure), sous la forme des valeurs de la pente k en fonction de l'abscisse $z^{(*)}$. On constate que l'allure de la variation reste conforme à celle observée avant la fissuration. Ici encore, l'influence du gradient dans l'épaisseur de l'aile introduit une difficulté d'interprétation par rapport au calcul tiré de l'hypothèse du profil mince.

2.2.3.4. - Cas de OE 2

Section $z = 1,81$ m :

Dans cette section, où le gauchissement est fortement gêné, le comportement est analogue à celui observé pour OE 1. Cependant, la dispersion des résultats est plus forte et l'incertitude sur l'évaluation des pentes k plus grande (les figures donnant $\epsilon_{C,max}$ en fonction de C sont présentées en annexe).

Par la même procédure que précédemment, on peut évaluer le gradient de déformation moyen dans les ailes. La figure 82 montre une très bonne linéarité dans l'aile inférieure. On aboutit aux valeurs suivantes du rapport

(*) valable en moyenne sur les trois phases A, B et C.

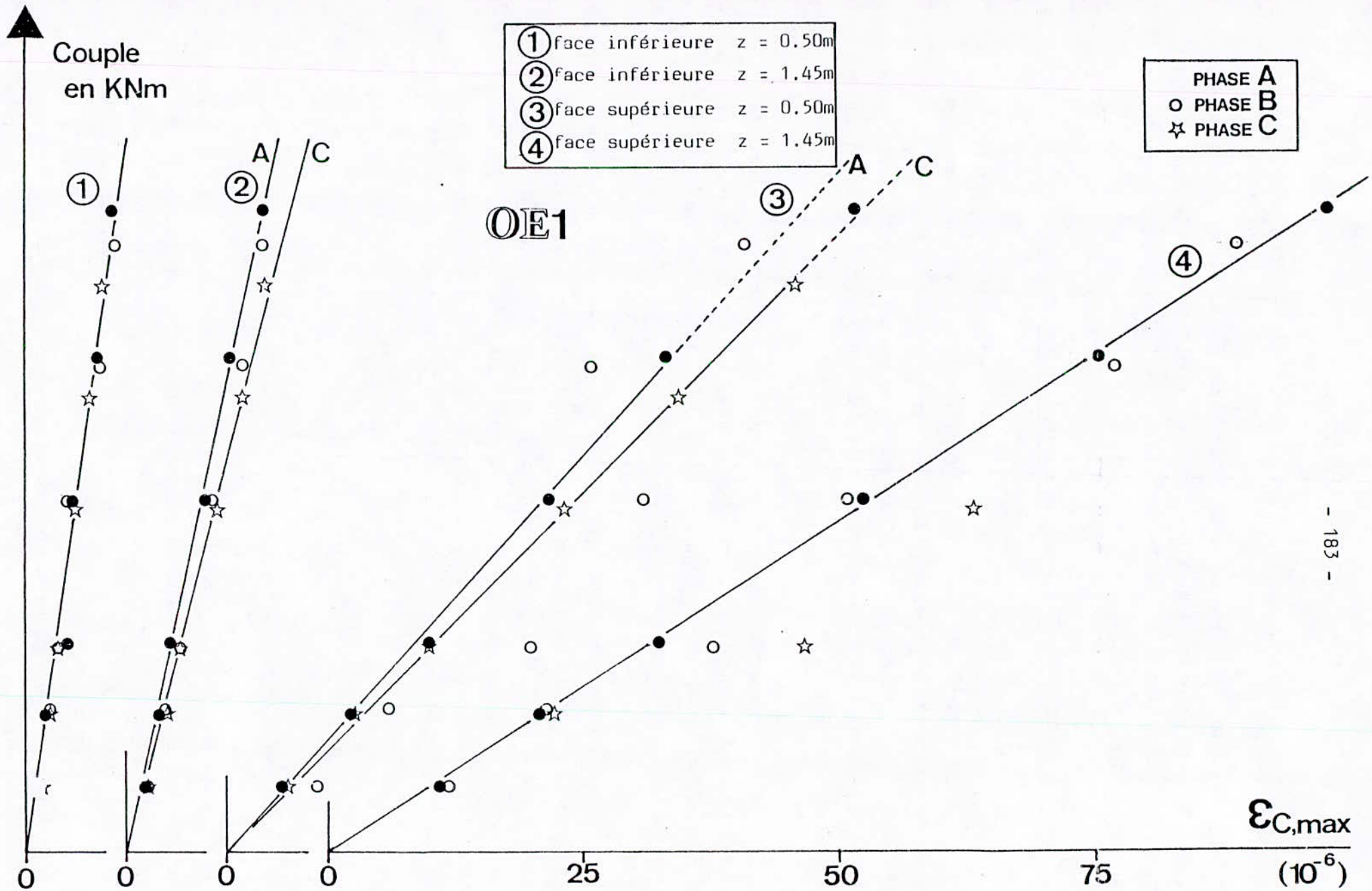


FIG 79 OR 071

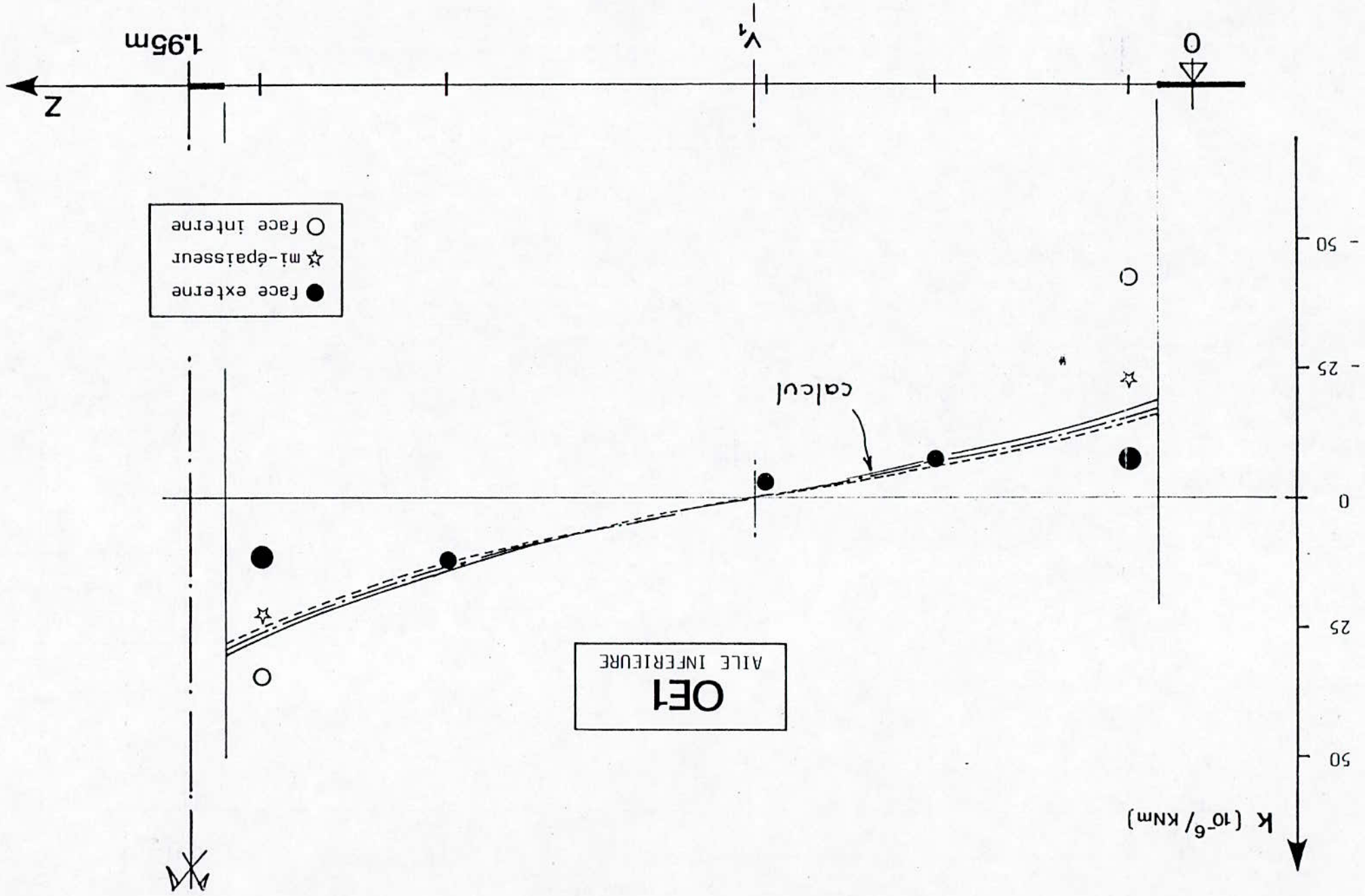
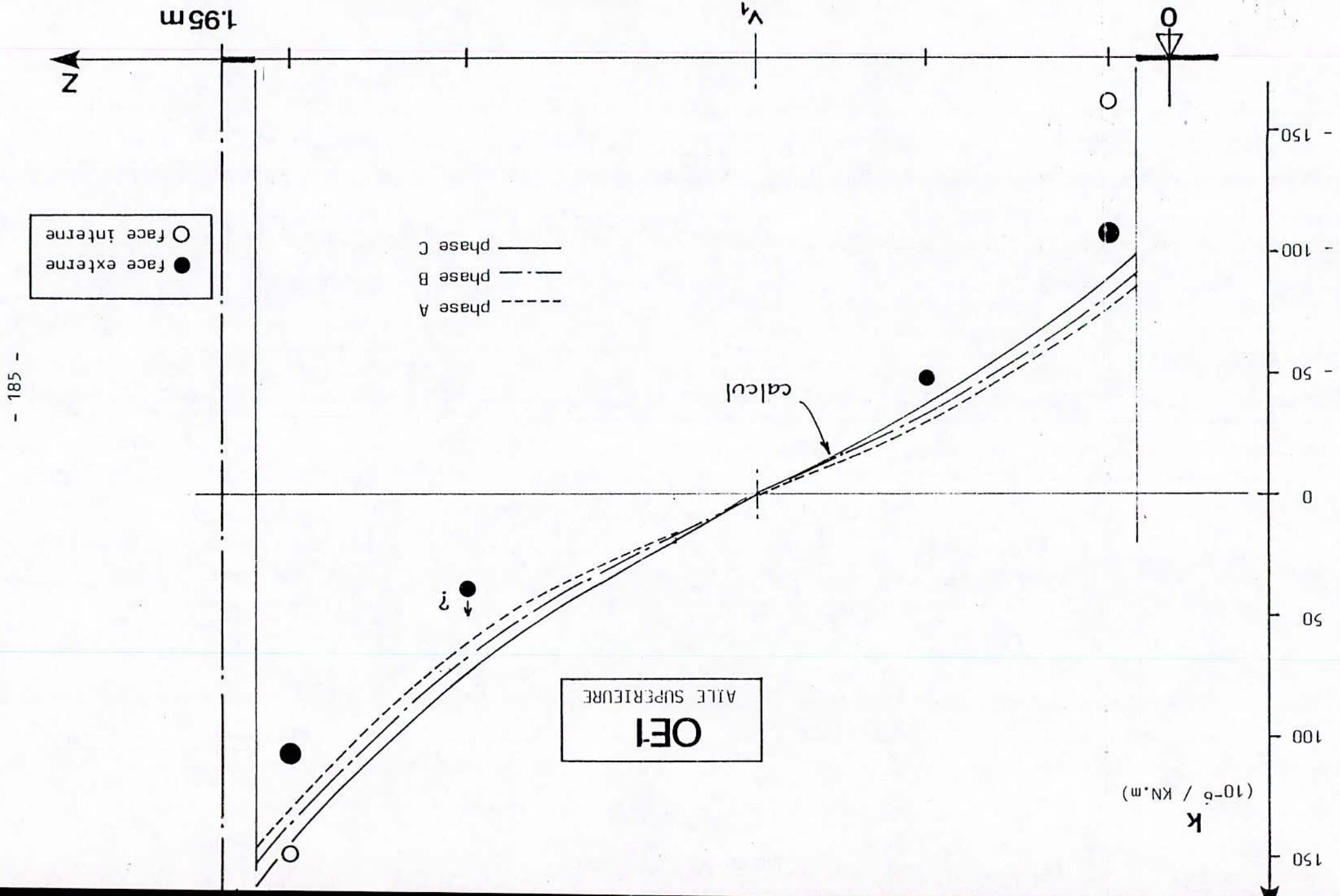


FIG 81



ESSAI OE2

— $z = 1,81$ m
☆ - - - $z = 1,45$ m
(phase C seulement pour l'aile supérieure)

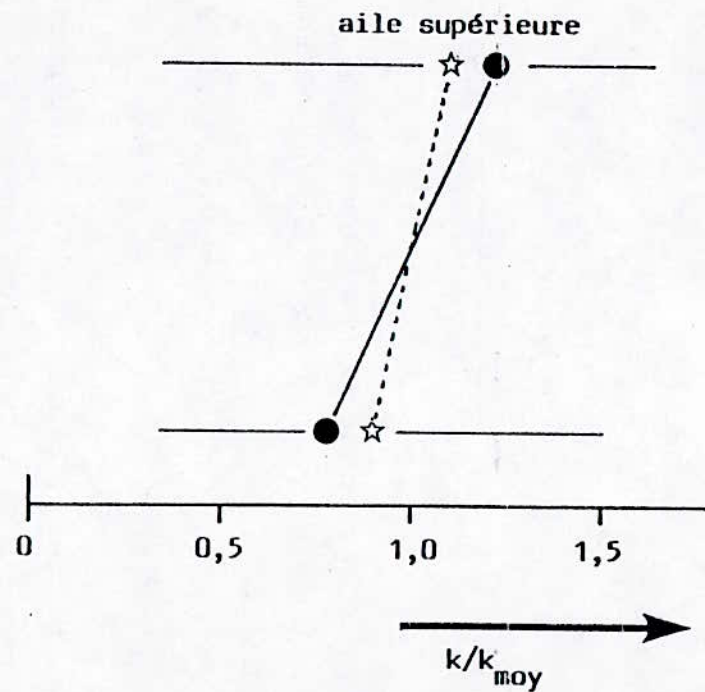
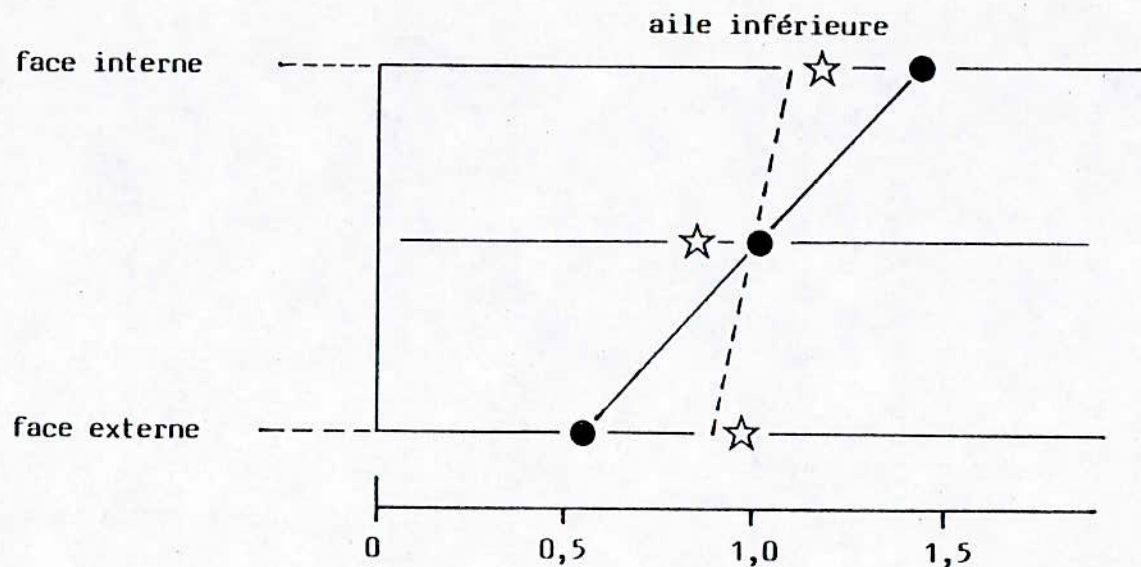


FIGURE 82

$$\rho = \epsilon_{ci,max} / \epsilon_{cs,max} \text{ expérimental :}$$

Phase	A	B	C
ρ_{exp}	0,177	0,151	0,188

On retrouve la même valeur que la moyenne obtenue pour OE 1 dans la phase C où les résultats de OE 2 sont un peu moins dispersés, donc plus significatifs.

Section $z = 1,45 \text{ m}$:

Dans cette section, la gêne du gauchissement est faible donc les déformations ϵ_c sont petites. Les valeurs mesurées présentent une dispersion considérable (voir les figures en annexe). Dans la phase C, on peut cependant tracer les droites $\epsilon_{c,max} = k.C$ valablement pour l'aile inférieure.

Sur celle-ci, en calculant à chaque étape de chaque phase le rapport k des valeurs mesurées de $\epsilon_{c,max}$ au couple C appliqué, et en éliminant les valeurs paraissant "aberrantes", on peut estimer des valeurs moyennes de k . Elles sont portées à la figure 82 ; malgré la dispersion, on constate que le gradient est très faible, conformément à ce qui avait été observé avant la fissuration.

Pour l'aile supérieure, on ne peut guère exploiter que les résultats de la phase C, en estimant la pente k moyenne d'après les mesures sur les faces externe et interne aux quatre dernières étapes de couple. On obtient le gradient, faible, indiqué à la figure 82. D'autre part, le rapport ρ des déformations $\epsilon_{c,max}$ des ailes inférieure et supérieure peut être estimé à 0,25 environ...

Autres sections :

Les mesures dans les autres sections correspondent à une gêne du gauchissement faible ou très faible, donc à des grandeurs mesurées très petites.

Leur dispersion est telle qu'elles sont inexploitable (*).

Déformations le long de la poutre :

Ne disposant de résultats valables que dans deux sections, on ne peut en déduire l'allure de la variation le long de toute la poutre. Cependant, la figure 83 montre que les résultats des mesures effectuées dans les sections $z = 1,81$ m et $z = 1,45$ m (en supposant le gradient nul dans cette dernière) semblent assez cohérents avec l'allure de variation avec z déduites du calcul élastique avant la fissuration.

2.2.3.5. - Centre de torsion et inertie de gauchissement "expérimentaux"

On peut conclure de ce qui précède que l'influence de la fissuration sur les caractéristiques de gauchissement des sections est uniforme le long de la poutre et pratiquement indépendante du niveau de flexion. Ceci se justifie par les raisons suivantes :

- d'une phase à l'autre, les fissures ne progressent que dans l'âme qui ne joue pas de rôle dans le gauchissement ;
- les matériaux béton et acier restent dans le domaine élastique linéaire (cf. III.2.) ;
- les contraintes de compression dues au gauchissement gêné ne sont jamais assez fortes pour entraîner la refermeture complète des fissures de flexion.

Cependant, une cause de variation est que la contribution du béton tendu doit décroître lorsque la contrainte dans les armatures tendues croît.

(*) La dispersion, beaucoup plus considérable que dans l'essai OE 1, est vraisemblablement due pour une part à de petites vibrations engendrées par le dispositif d'asservissement en flexion.

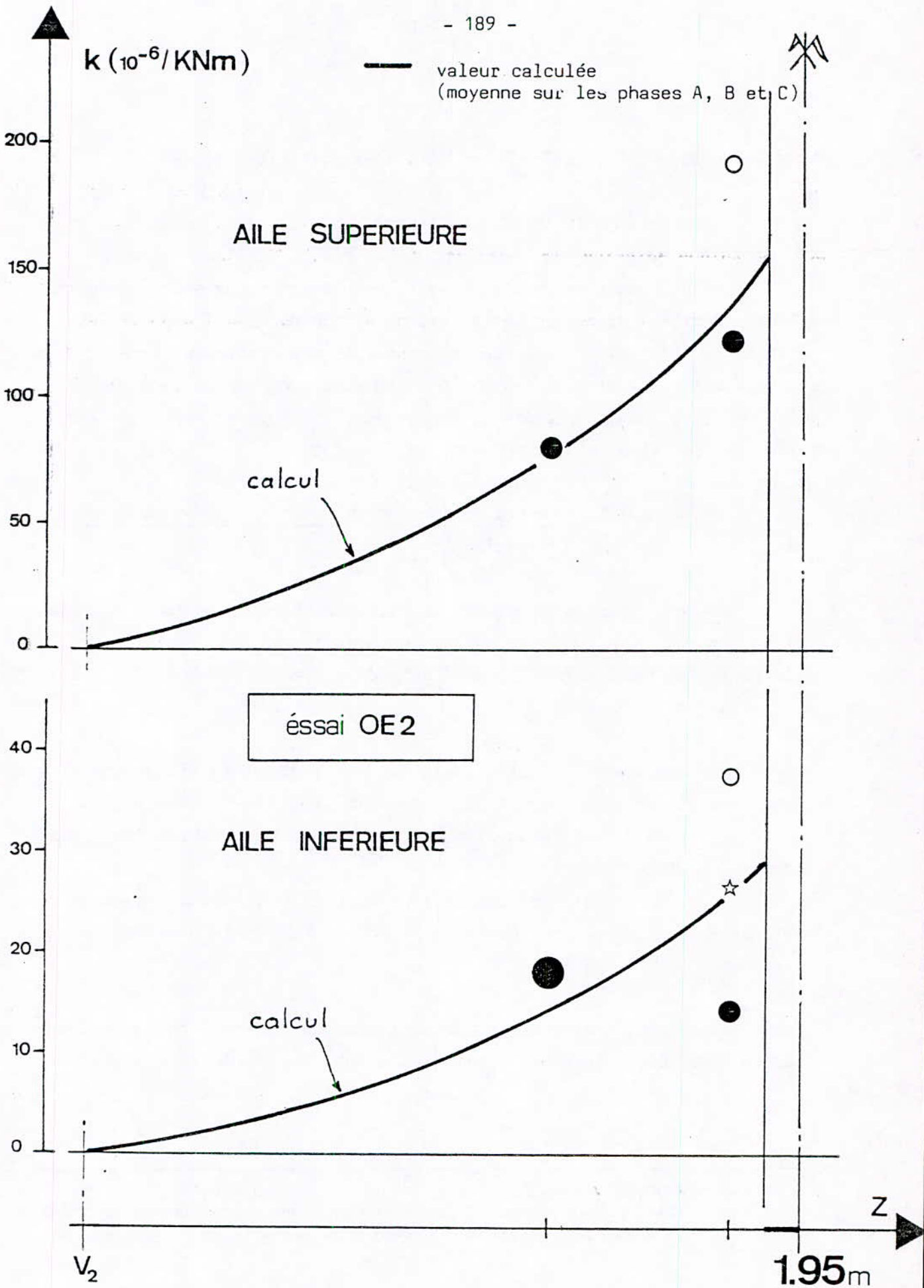


FIG 83

Compte-tenu des incertitudes expérimentales d'une part, de l'absence de méthode à la fois simple et vraiment fiable pour l'introduire dans une interprétation poussée d'autre part, on admette que cette contribution est, en valeur relative, indépendante du niveau de flexion.

En conséquence, la position du centre de torsion est fixe. On la calcule, à partir du rapport ρ des déformations $\epsilon_{c,max}$ des ailes inférieure et supérieure, par l'expression 4-9). On estime la valeur expérimentale probable du rapport à :

$$\rho_{exp} \simeq 0,19 \text{ pour OE 1 et OE 2.}$$

D'où $w_{exp} \simeq 0,12 \text{ m pour OE 1 et OE 2.}$

L'écart entre la position expérimentale du centre de torsion et la valeur calculée par l'équation 4-8') peut s'expliquer pour une part par la forte incertitude sur la valeur expérimentale de ρ , d'autre part par une contribution du béton tendu plus grande que celle estimée pour le calcul.

La cohérence de cette valeur avec le calcul est obtenue en tenant compte d'une contribution du béton tendu qui d'après l'équation 4-8') correspond à :

$$n^* = 8,85 = 1,63 n \text{ pour OE 1,}$$

$$n^* = 8,84 = 1,68 n \text{ pour OE 2.}$$

Ces valeurs paraissent élevées par rapport au calculs antérieurs (2.4.2. et 3.2.1.), mais elles sont encore d'un ordre de grandeur acceptable si on considère la valeur maximale théorique du rapport $\epsilon_a / \epsilon_{am}$, juste au moment de la fissuration ϵ_a étant la déformation de l'acier seul au droit d'une fissure et ϵ_{am} la déformation du béton et de l'acier homogènes avant la fissuration. Ce rapport est de l'ordre de 10 mais, bien sûr, il décroît rapidement pendant la phase de développement de la fissuration).

Les valeurs correspondantes de l'inertie de gauchissement "expérimentale" se calculent alors par la formule (4-10). On obtient :

$$\begin{aligned} K_{1h,exp} &= 6,06 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \text{ pour OE 1,} \\ &= 6,05 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \text{ pour OE 2} \end{aligned}$$

2.2.4- Effet du gauchissement sur la fissuration

A chacune des étapes où le couple detorsion était maximal, on a mesuré l'ouverture des fissures aux bords de l'aile supérieure, dans les zones voisines des encastremets vis-à-vis du gauchissement. En regroupant ces mesures par zones tendue ou comprimée par l'effet du gauchissement gêné, on obtient les valeurs moyennes suivantes de t_m :

OE 1	zone comprimée	zone tendue	Moyenne
Phase A	- non mesuré -		
B	0,080	0,085	0,083
C	0,100	0,110	0,105

OE 2	zone comprimée	zone tendue	Moyenne
Phase A	0,060	0,065	0,063
B	0,100	0,115	0,107
C	0,110	0,150	0,130

L'effet des contraintes ϵ_c de gauchissement gêné sur l'ouverture des fissures est nettement mis en évidence. La symétrie entre les deux côtés de l'aile est parfaite pour OE 1, la moyenne étant bien la valeur due à la flexion seule. Par contre, pour OE 2, cette moyenne est supérieure à la flexion seule ce qui provient sans doute d'une insuffisance de l'asservissement des déformations de flexion.

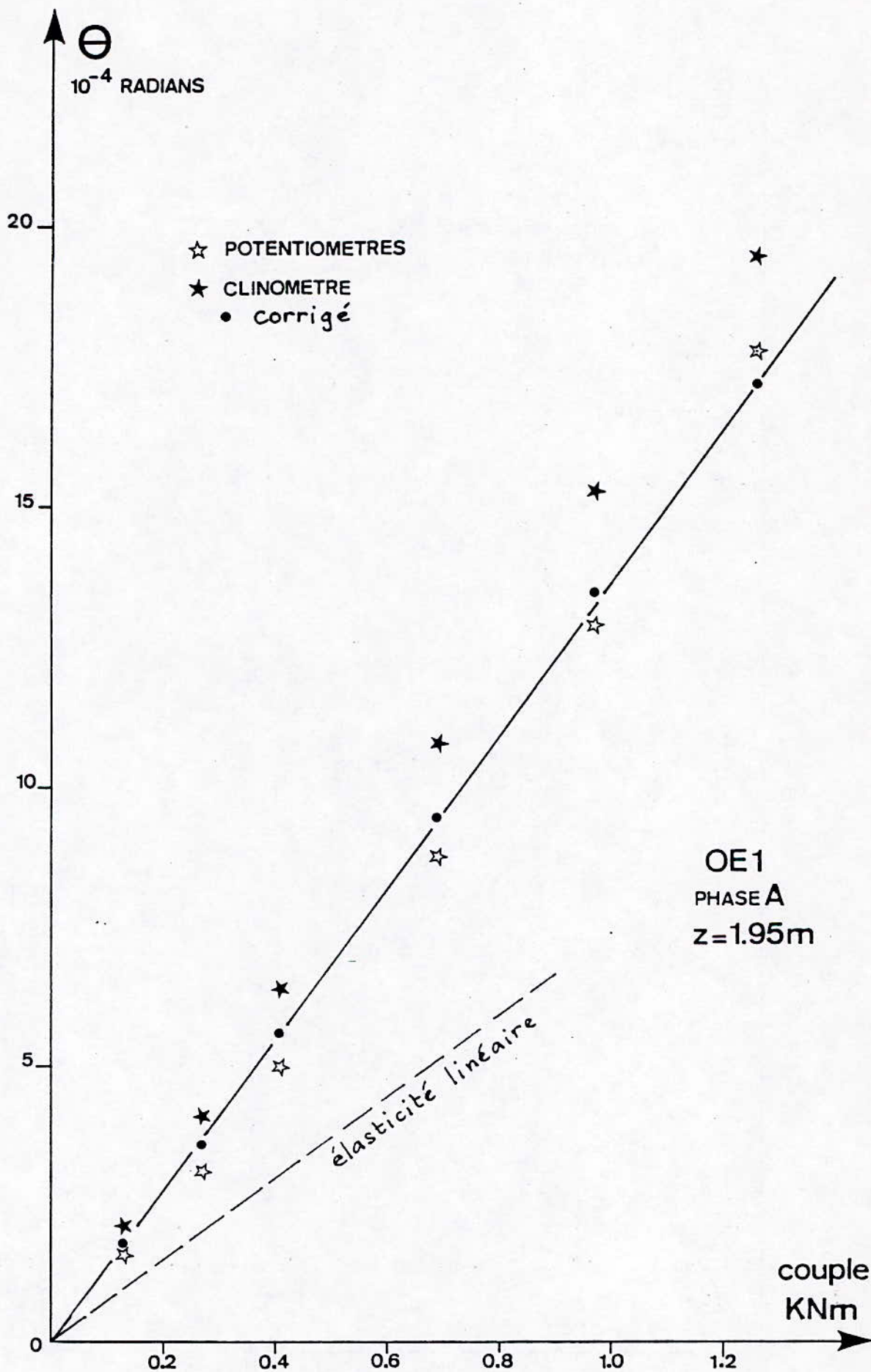


FIG 84

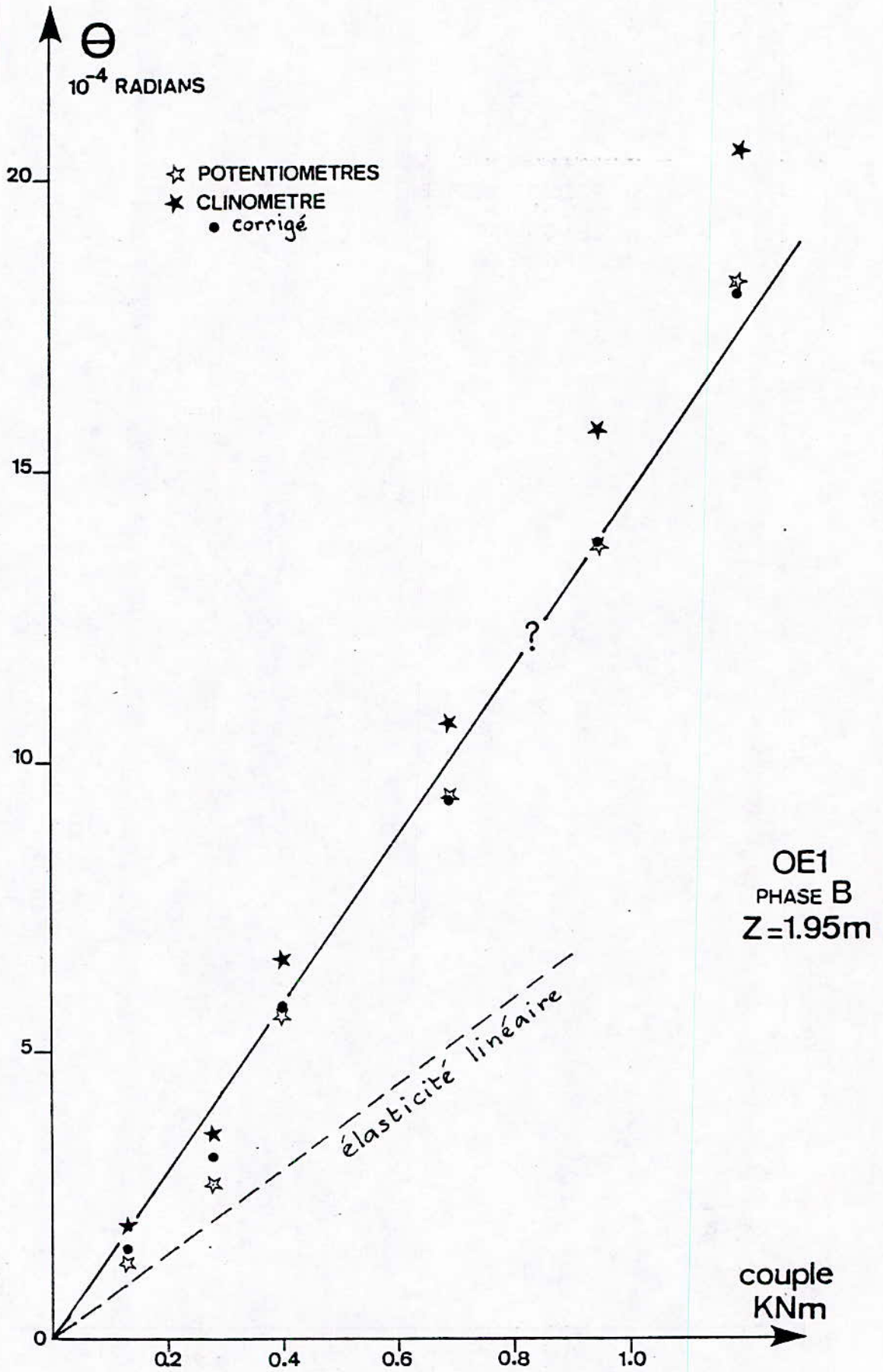


FIG 85

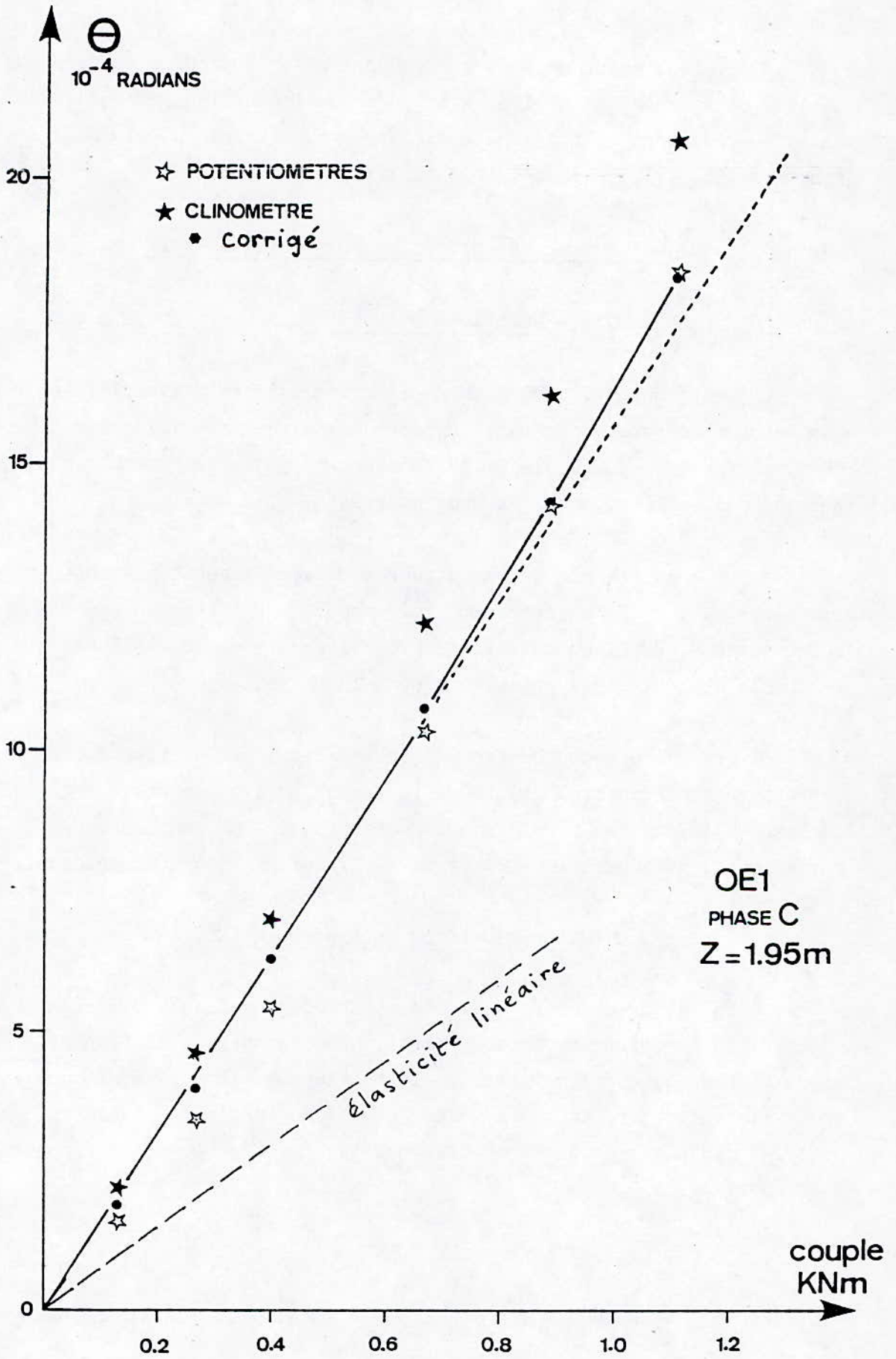


FIG 86

Il faut noter de plus que, sous l'effet du couple de torsion, on a observé occasionnellement l'apparition de quelques fissures nouvelles, parallèles aux fissures de flexion, dans l'aile supérieure au voisinage des encastremets vis-à-vis du gauchissement.

2.2.5 - Interprétation du comportement d'ensemble

2.2.5.1- Rotations de torsion

Les figures 84, 85 et 86 présentent à titre d'exemple, les résultats des mesures de rotation Θ dans la section médiane ($z = 1,95$ m) de la poutre OE 1, en fonction du couple C. On trouvera en annexe l'ensemble des résultats, section par section, pour les deux poutres.

On constate que la variation de Θ avec C peut être considérée comme linéaire : $\Theta = k_0 \cdot C$. La pente k_0 croît modérément lorsqu'on passe aux phases successives A, B, C. La déviation de la linéarité ne se manifeste que lorsque le couple devient élevé et surtout dans la phase C.

Les valeurs des pentes k_0 ainsi déterminées section par section permettent de représenter l'allure de la variation expérimentale de la rotation le long de la poutre. C'est ce que montrent pour chacune des phases, les points portés sur les figures 87 à 89 et 90 à 92 pour OE 1 et OE 2 respectivement.

2.2.5.2- Rigidité de torsion pure $(\overline{GK})_0$

La valeur de cette rigidité n'est pas accessible directement par les mesures. On la détermine indirectement en cherchant la solution de l'équation simplifiée de la torsion mixte. Si le problème était réellement non linéaire, on le linéariserait, pour une valeur donnée du couple de torsion C, en utilisant les rigidités sécantes correspondantes $\overline{EK}_1(C)$ et $\overline{GK}(C)$. L'équation s'écrirait :

$$\overline{EK}_1(C) \cdot \frac{d^3\Theta}{dz^3} - \overline{GK}(C) \cdot \frac{d\Theta}{dz} = C$$

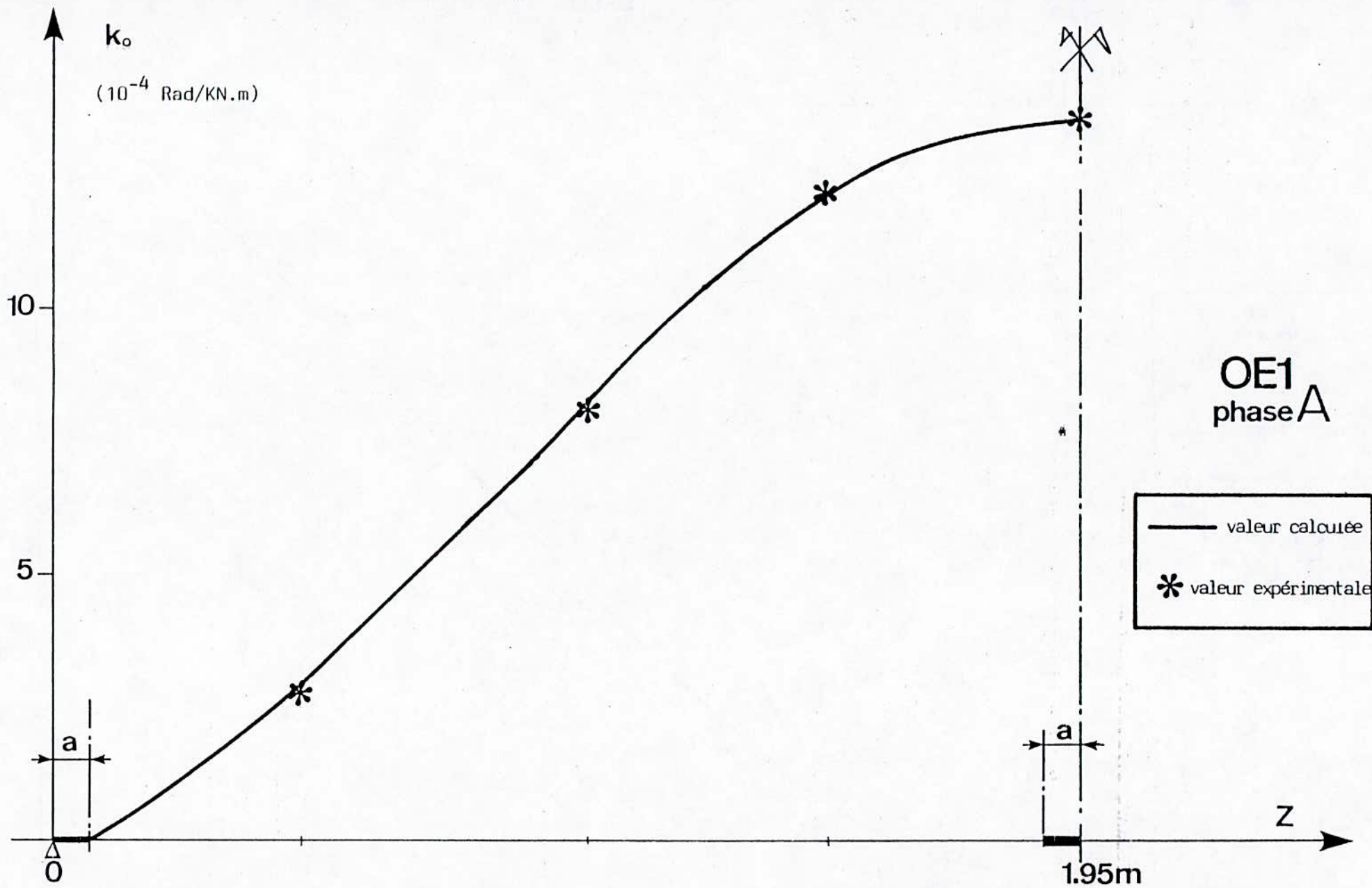


FIG 87

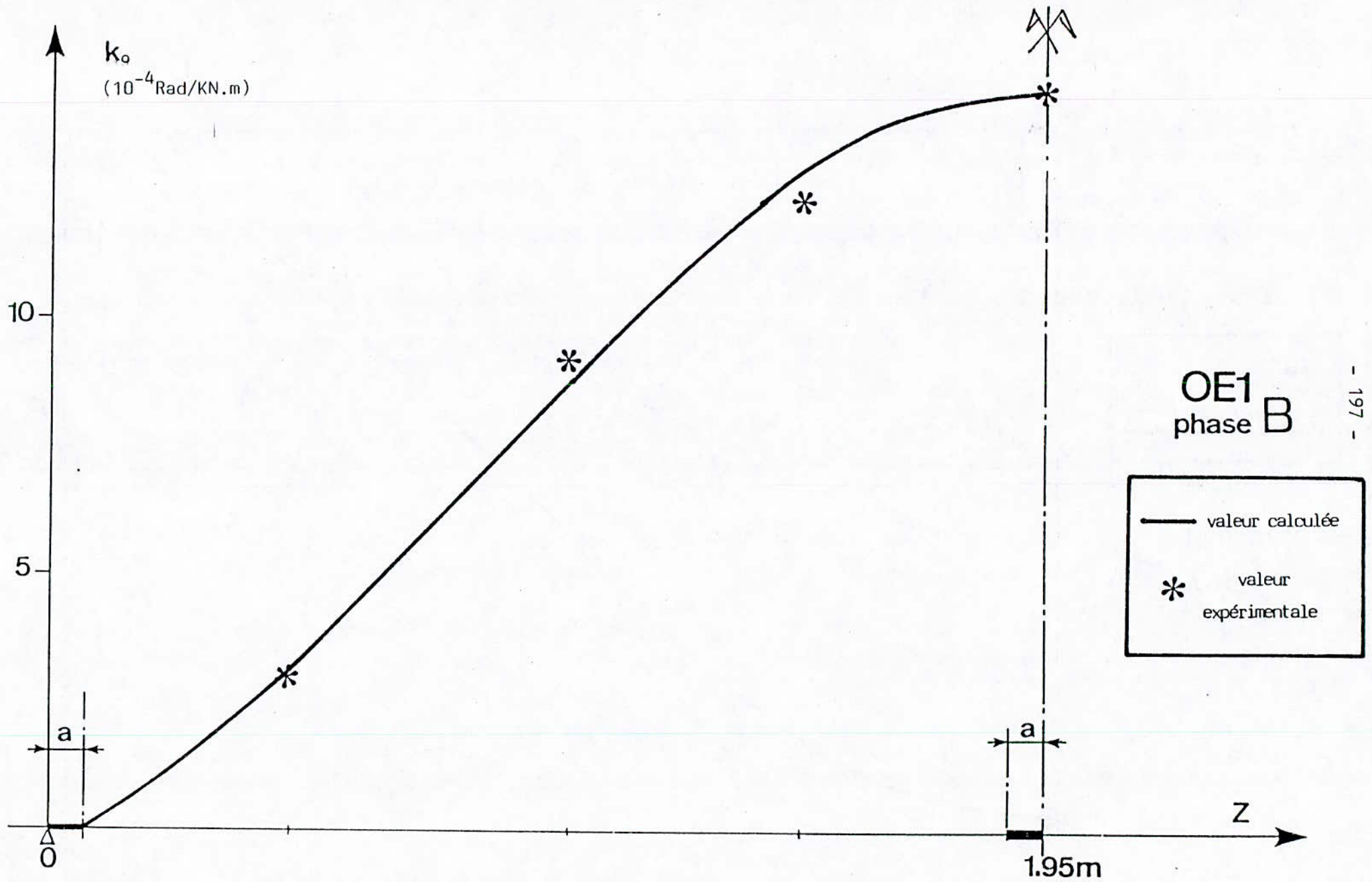


FIG 88

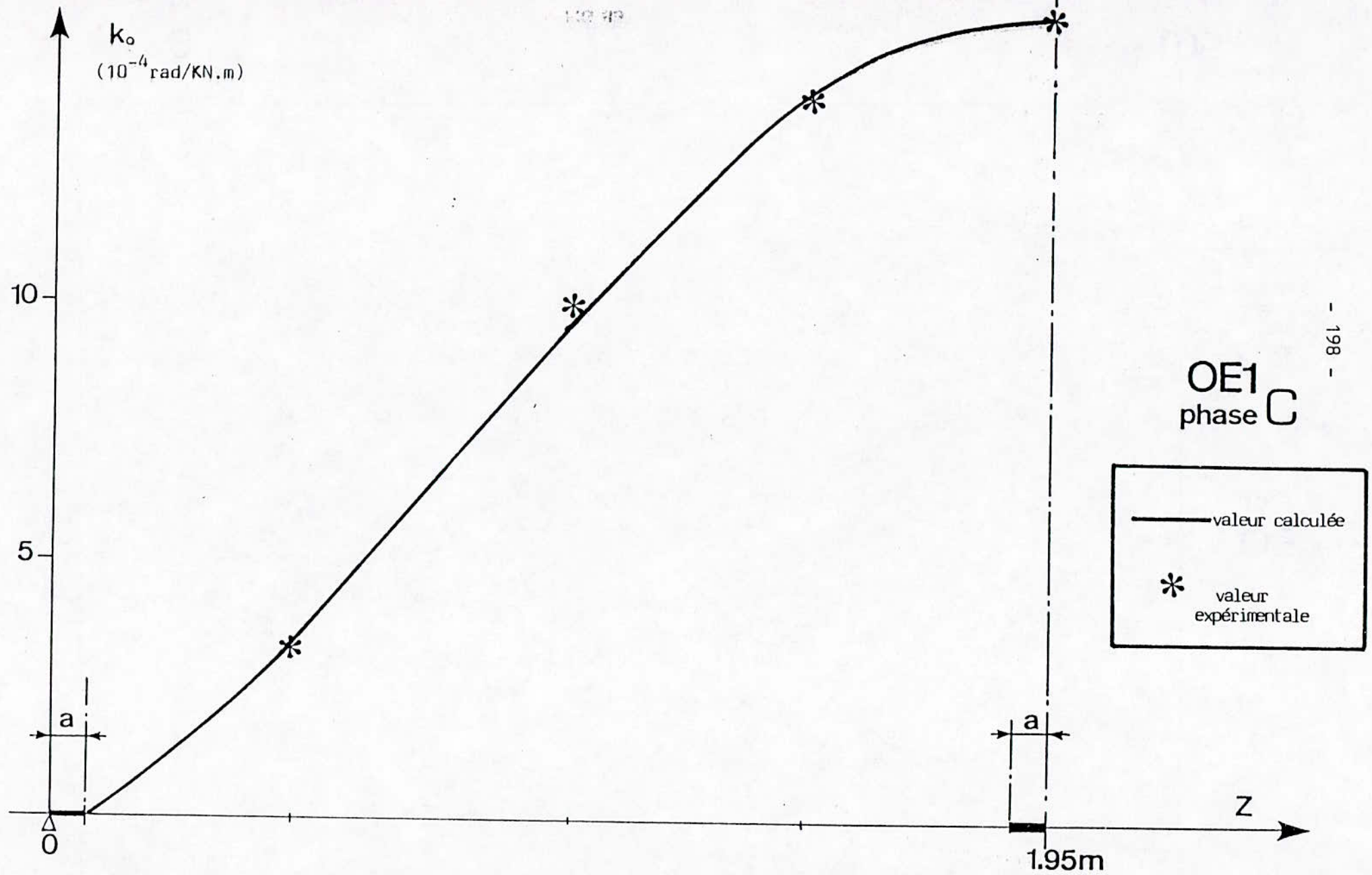


FIG 89

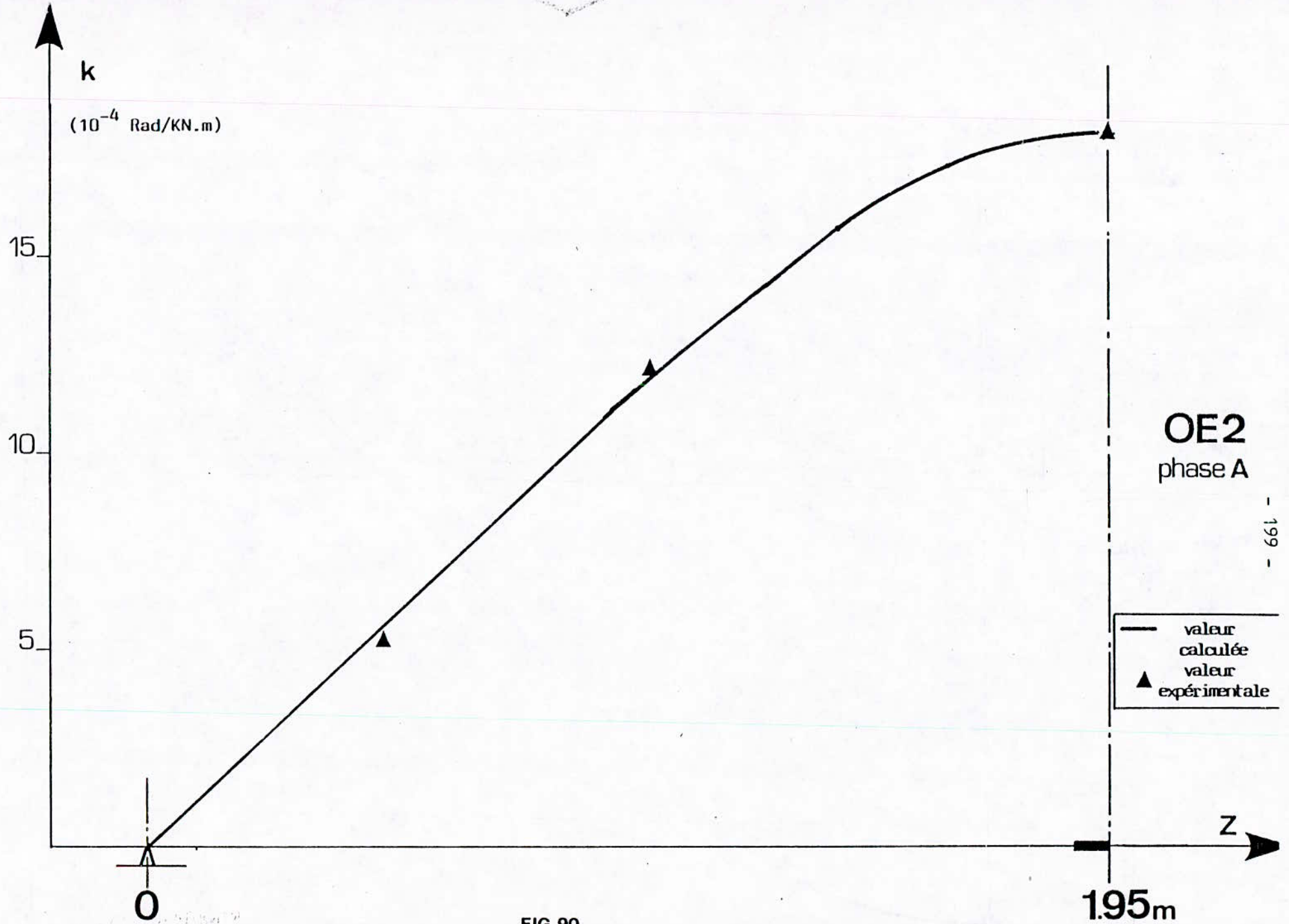


FIG 90

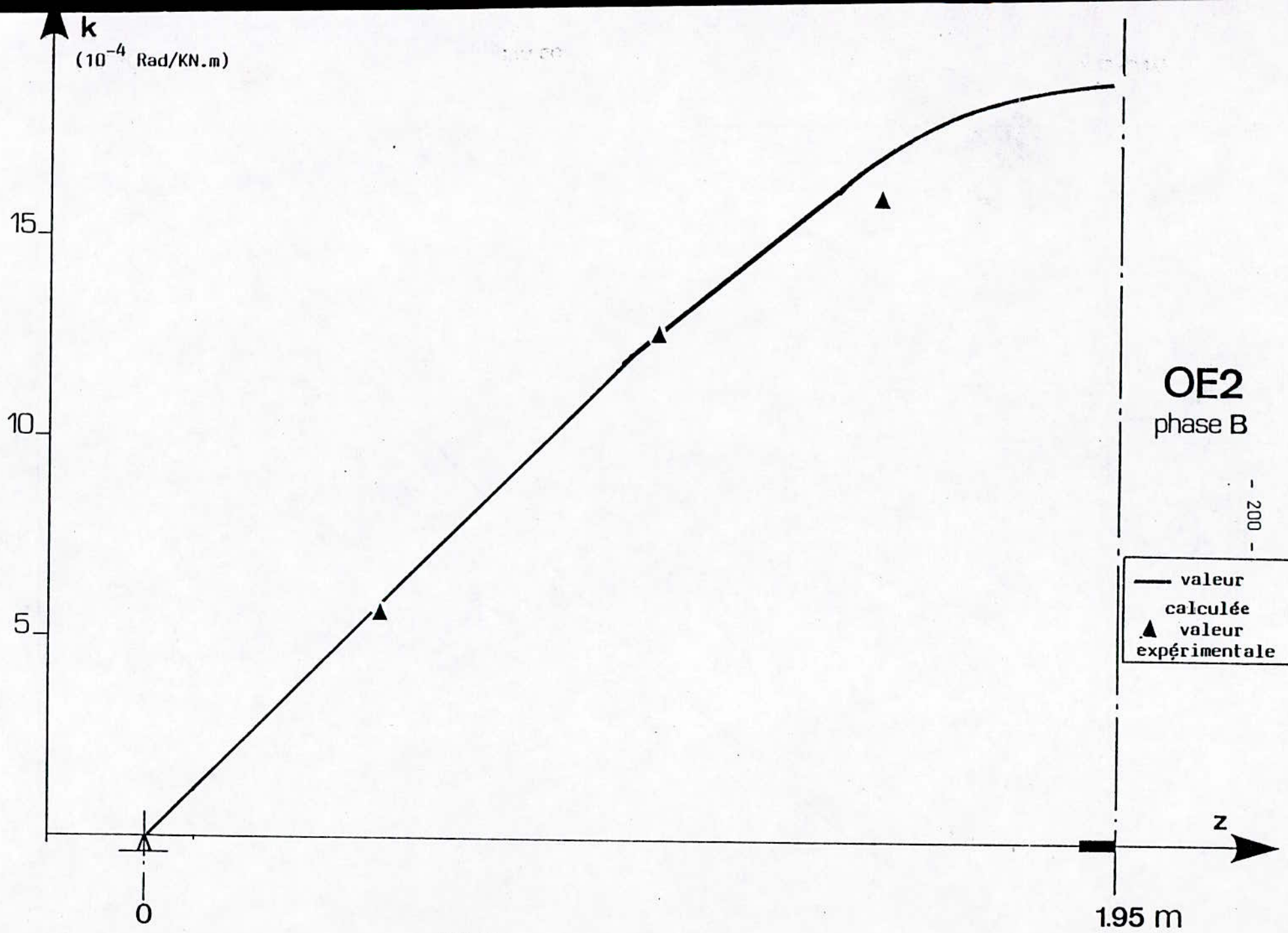


FIG 91

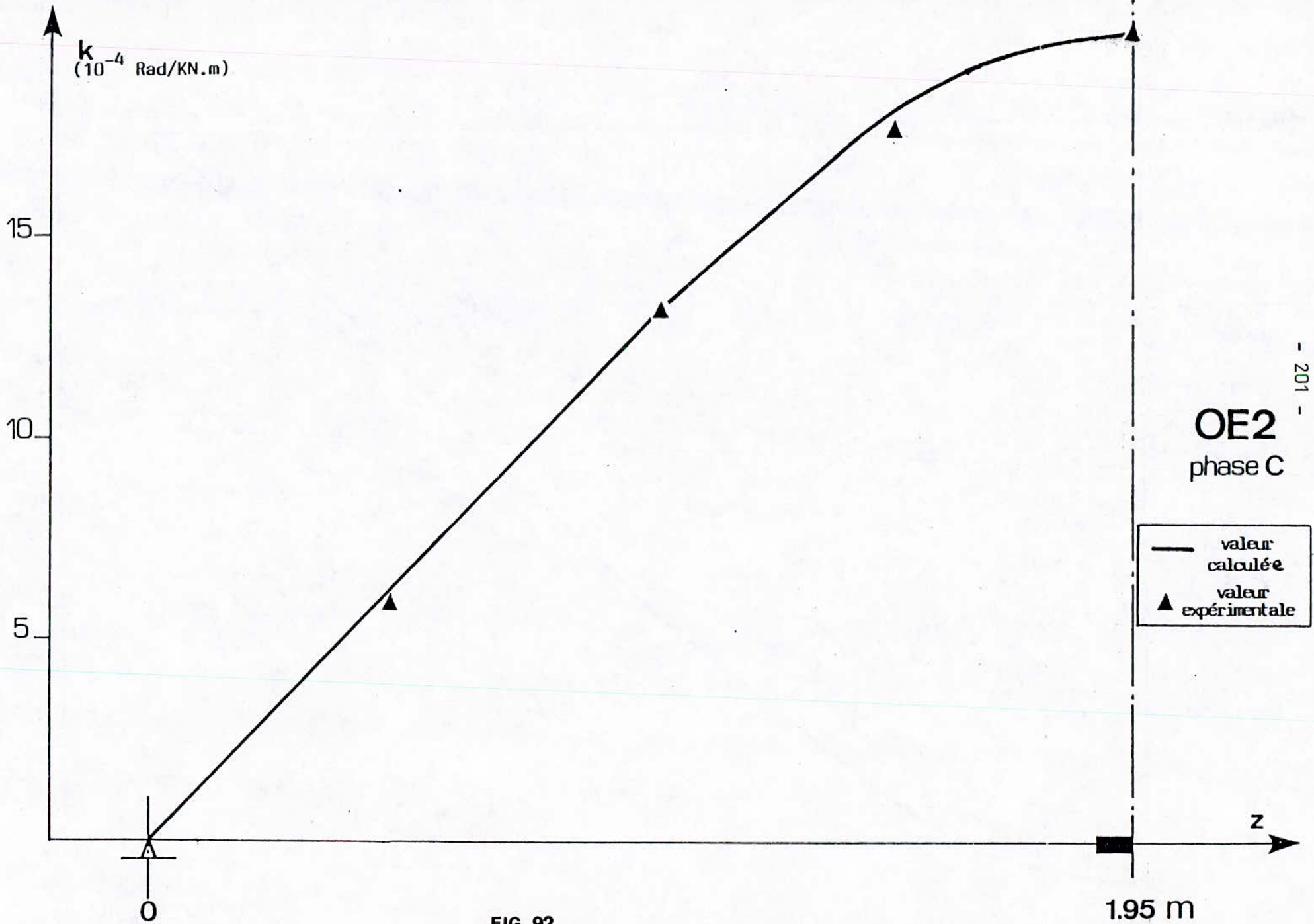


FIG 92

Ici, la rigidité de gauchissement est constante, produit du module E_{bo} par l'inertie homogène "expérimentale" $K_{1h,exp}$ et l'on cherche, pour chaque phase, l'inertie de torsion "à l'origine" c'est-à-dire sous faible couple, $(\overline{GK})_o$. L'équation s'écrit :

$$E_{bo} \cdot K_{1h,exp} \cdot \frac{d^3\Theta}{dz^3} - (\overline{GK})_o \cdot \frac{d\Theta}{dz} = C$$

La solution peut s'écrire sous la forme :

$$\Theta(z) = \frac{C d^3}{E_{bo} \cdot K_{1h,exp}} [k'_1 + k'_3 e^{-z/d} + k'_4 e^{z/d} - \frac{z}{d}]$$

Les quatre inconnues k'_1 , k'_3 , k'_4 et d sont déterminées à l'aide des quatre conditions aux limites (*)

$$\Theta(a) = 0$$

$$\frac{d\Theta}{dz}(\ell-a) = 0$$

$$\frac{d\Theta}{dz}(v_1) = 0 \text{ avec } v_1 \text{ connu, pour OE 1}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2}(v_2) = 0 \text{ avec } v_2 \text{ connu, pour OE 2}$$

$$\Theta(\ell-a) = \Theta_{\max}(\ell) \text{ expérimental, connu}$$

On admet que les abscisses particulières v_1 et v_2 sont inchangées par rapport au calcul élastique avant fissuration. En raisonnant pour un couple unité, $C = 1 \text{ kN.m}$, la rotation Θ_{\max} au milieu de la poutre est égale à la pente k_o déterminée expérimentalement (cf. 3.5.1.).

Ayant déterminé la valeur de la distance caractéristique d , on passe à la rigidité de torsion par :

$$(\overline{GK})_o = \frac{E_{bo} \cdot K_{1h,exp}}{d^2}$$

(*) Cf. ANNEXE 3

Les valeurs obtenues sont indiquées au tableau ci-dessous, où l'on rappelle aussi celles de la rigidité de gauchissement :

	OE 1	OE 2
$E_{bo} \cdot K_{1h,exp}$	218 kN.m ⁴	224 kN.m ⁴
Phase A $\frac{d}{(\overline{GK})_o}$	0,55 m 707 kN.m ²	0,579 m 668 kN.m ²
Phase B $\frac{d}{(\overline{GK})_o}$	0,587 m 652 kN.m ²	0,600 m 622 kN.m ²
Phase C $\frac{d}{(\overline{GK})_o}$	0,655 m 544 kN.m ²	0,626 m 571 kN.m ²

En valeur relative, rapportée à la rigidité de torsion pure élastique avant fissuration $G_o \cdot K$, on obtient :

$(\overline{GK})_o / G_o \cdot K$	OE 1	OE 2
Phase A	0,967	0,890
Phase B	0,865	0,829
Phase C	0,745	0,761

On constate que la rigidité décroît lorsque le niveau de flexion (donc l'ouverture des fissures) croît. Ceci est illustré par la figure 93 où les rapports précédents sont portés en fonction de M/M_u . On constate que la valeur déterminée en phase A pour OE 2 paraît trop faible.

Remarques :

1) Le rapport de la longueur L entre les deux sections où le gauchissement est parfaitement gêné ($L \simeq 2,10$ m pour OE 1 et 2,65 m pour OE 2) à la distance caractéristique d prend alors les valeurs suivantes :

L/D	élastique	Phase A	Phase B	Phase C
OE 1	2,2	3,80	3,60	3,30
OE 2	2,8	4,60	4,40	4,20

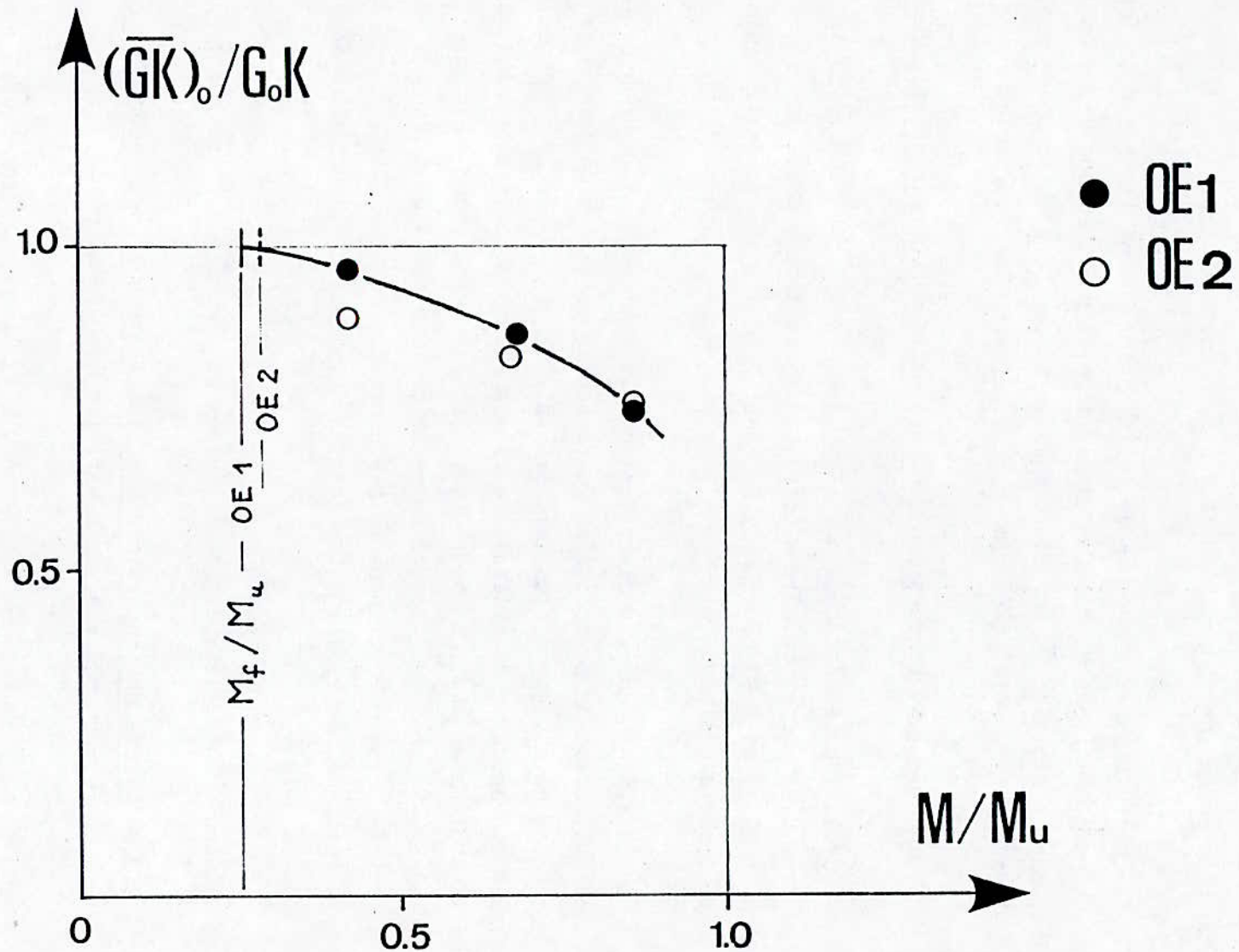


FIG 93

Par rapport au domaine élastique avant fissuration, les valeurs sont plus élevées, donc l'influence relative du gauchissement gêné par rapport à la torsion pure a diminué. Il n'est alors pas utile de pousser la solution de l'équation de la torsion mixte à la deuxième approximation.

2) Le fait que les phénomènes soient pratiquement linéaires en fonction de C , pour un niveau de flexion donné, simplifie évidemment beaucoup le problème, car la rigidité \overline{GK} est alors constante sur toute la longueur de la poutre alors que le couple de torsion pure $C_1(z)$ est, lui, variable.

2.2.5.3- Comparaison des déformations mesurées et calculées

La solution précédente a donné la valeur de la rotation $\Theta(z)$ le long de la poutre. Les courbes calculées correspondantes sont tracées sur les figures 87 à 89 pour OE 1, 91 à 93 pour OE 2. On constate que l'accord entre les mesures et le calcul est excellent.

On détermine aussi la distribution du bimoment $B(z)$ le long de la poutre, ce qui permet de calculer, en toute section les déformations dues au gauchissement gêné et, en particulier, les valeurs $\epsilon_{c,max}$ au bord des ailes. Les courbes de variation de celles-ci avec l'abscisse z ont été tracées sur les figures 80 et 81 pour OE 1, 83 pour OE 2. Pour une même valeur du couple C , les valeurs de $\epsilon_{c,max}$ croissent lorsqu'on passe de la phase A à la phase B et à la phase C (cette croissance est plus faible pour OE 2 que pour OE 1). Ceci s'explique par le fait que, la rigidité \overline{GK} décroissant, la part C_1 du couple décroît, donc la part C_2 croît.

L'accord entre les valeurs calculées et mesurées est assez satisfaisant.

2.2.6- Calcul des contraintes de cisaillement et des déformations correspondantes, en élasticité non-linéaire

La variation du module de déformation transversale sécant $G(s)$ ou tangent $G_t(s)$ est supposée connue sur la section.

2.2.6.1- Termes dus à la torsion pure (couple C_1)

Pour un élément mince d'épaisseur t et longueur l , l'analogie de la membrane généralisée (*), considérant que la flèche maximale de celle-ci est proportionnelle

(*)

au module sécant de déformation transversale $G(s)$ variable le long de l'élément, permet d'écrire la contrainte de cisaillement maximale sous la forme :

$$\tau_{c1,max}(s) = \frac{3C_1}{l_t^2} \frac{G(s)}{\bar{G}} = \frac{C_1 t}{K} \frac{G(s)}{\bar{G}}$$

expression où intervient l'inertie $K = l_t^3/3$ et le module sécant moyen

$$\bar{G} = \frac{1}{l} \int_0^l G(s) \cdot ds.$$

la distorsion locale correspondante s'écrit alors :

$$\delta_{c1,max} = \frac{C_{1,max}}{G(s)} = \frac{C_1 \cdot t}{\bar{G} \cdot K}$$

Elle est constante le long de l'élément, alors que la contrainte est variable.

On aurait des relations analogues en ce qui concerne les variations de contrainte et de déformation dues à une variation de couple ΔC_1 , en y introduisant le module tangent $G_t(s)$ et sa valeur moyenne \bar{G}_t :

$$\Delta \tau_{c1,max} = \frac{\Delta C_1 \cdot t}{K} \frac{G_t(s)}{\bar{G}_t}$$

$$\Delta \delta_{c1,max} = \frac{\Delta C_1 \cdot t}{\bar{G}_t \cdot K}$$

Dans ce dernier cas, on sait démontrer directement que la rigidité de torsion globale est égale au produit du module tangent moyen par l'inertie :

$$\bar{G}_t K = \bar{G}_t \cdot K$$

Par analogie, la rigidité sécante globale s'écrit :

$$\bar{G} K = \bar{G} \cdot K$$

avec :

$$K = \frac{1}{3} l_t^3$$

Si la largeur de l'élément est faiblement variable, on pourra écrire :

$$\delta_{c1,max}(s) = \frac{C_1 \cdot t(s)}{\bar{G} \cdot K}$$

avec :

$$K = \frac{1}{3} \int_0^l t(s)^3 ds$$

et

$$\bar{G} = \frac{\int_0^l G(s) \cdot t(s) \cdot ds}{\int_0^l t(s) \cdot ds}$$

Si la section est un assemblage de plusieurs éléments, l'inertie sera :

$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{3} \sum_i \int_0^{l_i} t_i^3(s) \cdot ds$$

En élasticité linéaire, le couple équilibré par chaque élément est proportionnel à l'inertie

$$\frac{C_{1i}}{K_i} = \frac{C_1}{K}$$

La contrainte de cisaillement maximale dans un élément et la distorsion correspondante s'écrivent :

$$\tau_{c1,max,i} = \frac{C_1 \cdot t_i}{K} = \frac{C_{1i} \cdot t_i}{K}$$

$$\delta_{c1,max,i} = \frac{C_1 \cdot t_i}{\bar{G}_0 \cdot K} = \frac{C_{1i} \cdot t_i}{\bar{G}_0 \cdot K_i}$$

En élasticité non linéaire, cette dernière relation s'écrit :

$$\delta_{c1,max,i}(s) = \frac{C_1 \cdot t_i(s)}{\bar{G}K} = \frac{C_{1i} \cdot t_i(s)}{\bar{G}K_i}$$

En écrivant que $\sum_i C_{1i} = C_1$, on en tire :

$$\overline{GK} = \sum_i \overline{GK}_i = \sum_i \overline{G}_i \cdot K_i$$

Donc, sous la forme la plus générale, la rigidité s'écrit :

$$\overline{GK} = \frac{1}{3} \sum_i \overline{G}_i \cdot \int_0^{l_i} t(s)^3 \cdot ds \quad [4-10"]$$

expression dans laquelle on peut aussi, le cas échéant, faire intervenir des corrections pour tenir compte des effets de bord et des effets de pénétration des éléments les uns dans les autres.

2.2.6.2- Termes dus au gauchissement gêné (couple C_2)

L'expression des déformations longitudinales à la gêne du gauchissement est, en élasticité non linéaire :

$$\varepsilon_c(s) = \frac{B \cdot \Omega(s)}{\overline{EK}_1}$$

Les contraintes correspondantes sont :

$$\sigma_c(s) = E(s) \cdot \varepsilon_c(s)$$

si l'on isole un volume compris entre deux sections droites z et $z + dz$ et la portion de profil entre les abscisses s et l (figure 94), il est soumis aux forces résultantes des contraintes normales :

$$\begin{aligned} F(z,s) &= \int_s^l \sigma_c(u) \cdot t(u) \cdot du \\ &= \frac{B(z)}{\overline{EK}_1} \int_s^l E(u) \cdot \Omega(u) \cdot t(u) \cdot du \\ &= \frac{B(z)}{\overline{EK}_1} \cdot \overline{EL}(s) \end{aligned}$$

et

$$F(z+dz,s) = \frac{B(z) + dB(z)}{\overline{EK}_1} \cdot \overline{EL}(s)$$

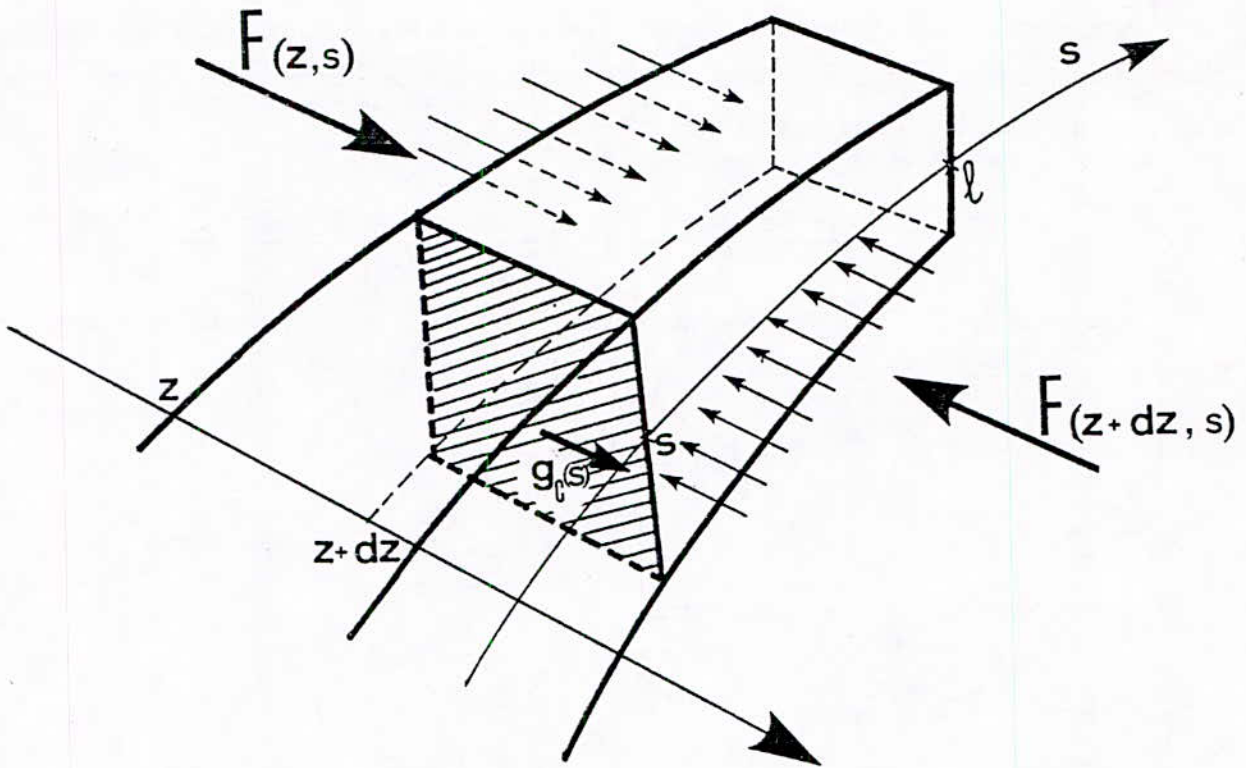


FIGURE 94

expression où intervient la "rigidité statique sectorielle"

$$\overline{EL}(s) = \int_s^l E(u) \cdot \Omega(u) \cdot t(u) \cdot du$$

Ce volume est soumis aussi à un effort de glissement par unité de longueur $g_c(s)$, s'exerçant tangentiellement à la surface de coupure du profil à l'abscisse s et tel que :

$$g_c(s) \cdot dz = F(z+dz, s) - F(z, s) = \frac{dB}{EK_1} \cdot \overline{EL}(s)$$

Soit, compte tenu de ce que $dB/dz = C_2$,

$$g_c(s) = \frac{C_2}{EK_1} \cdot \overline{EL}(s)$$

La contrainte de cisaillement correspondante, supposée constante sur l'épaisseur du profil, est alors :

$$\tau_{c2}(s) = \frac{C_2}{EK_1} \frac{\overline{EL}(s)}{t(s)}$$

et la distorsion :

$$\delta_{c2}(s) = \frac{\tau_{c2}(s)}{G(s)} = \frac{C_2}{EK_1} \frac{\overline{EL}(s)}{G(s) \cdot t(s)}$$

Remarques :

1) Pour une valeur de C_2 donnée, la contrainte τ_{c2} ne dépend que de l'état de contraintes normales σ et déformations longitudinales ε totales (dues à la flexion et au gauchissement gêné), car la position du centre de torsion, donc l'aire sectorielle $\Omega(s)$ et par suite \overline{EK}_1 et $\overline{EL}(s)$ ne dépendent que de σ et ε . Par contre, la distorsion δ_{c2} fait intervenir un module de déformation transversale $G(s)$ qui n'a pas nécessairement une relation connue avec le module longitudinal $E(s)$.

2) L'expression de la rigidité de torsion sectorielle sécante \overline{GK}_2 ou tangente $\overline{G_tK}_2$, doit être établie en écrivant l'équation exprimant que le travail du couple C_2 dans la rotation Θ_2 est égal à la somme des travaux des contraintes τ_{c2} dans les distorsions δ_{c2} correspondantes. Cette équation ne peut être, en principe, explicitement résolue que dans la formulation tangente, et encore avec une très grande complexité même pour des cas simples, par exemple la théorie simplifiée de la flexion des ailes.

A titre d'approximation, on pourra admettre :

$$\frac{1}{\overline{GK}_2} = \frac{1}{(EK_1)^2} \sum_i \frac{1}{G_i} \int_0^{\ell_i} \frac{EL(s)^2}{t(s)} ds$$

2.2.6.3- Applications aux essais OE

Le problème essentiel est de définir le module $G(s)$. Dans l'aile comprimée, l'état de contrainte est tel qu'on reste dans le domaine de l'élasticité linéaire, on a donc $G = G_0$. Dans la partie fissurée, il faut définir un module $G(y)$ fictif qui tienne compte du comportement moyen d'une zone qui, de part et d'autre d'une fissure, s'étend sur une longueur égale à la moitié de l'espace entre fissures ($\pm s_m/2$). Ce module décroît à partir de G_0 quand on s'éloigne de l'axe neutre des déformations de flexion ; l'hypothèse la plus simple est que cette décroissance est linéaire (*).

Dans l'aile supérieure, on peut admettre un module fictif moyen \overline{G}_1 constant dans l'épaisseur. Dans l'âme, en première approximation, le module varie linéairement entre G_0 et \overline{G}_1 . Connaissant la rigidité globale $(\overline{GK})_0$ expérimentale, on peut écrire, d'après (4-10') :

$$(\overline{GK})_0 = \frac{1}{3} [G_0 b e^3 + \frac{1}{2} (G_0 + \overline{G}_1) (h - 2e') e'^3 + \overline{G}_1 b e^3]$$

expression d'où l'on tire une valeur approchée de \overline{G}_1/G_0 (unité, le mètre) :

(*) Cf. CHAPITRE IV § 2-4-3-1

$$\frac{\bar{G}_1}{G_0} \approx \frac{40500}{G_0} (\bar{GK})_0 - 1$$

Soit les valeurs suivantes :

\bar{G}_1/G_0	OE 1	OE 2
Phase A	0,88	0,75
Phase B	0,68	0,61
Phase C	0,45	0,48

- Il faut aussi évaluer la rigidité statique sectorielle $\bar{EL}(s)$. Dans l'aile inférieure, le module est constant, égal à E_{bo} ou à E_a . La rigidité s'écrit :

$$\bar{EL}(x)_{inf} = E_{bo} \cdot L(x)_{inf}$$

où $L(x)_{inf}$ est le moment statique sectoriel "homogène" calculé comme en élasticité linéaire en tenant compte des armatures (*), mais en tenant compte, de plus, de la nouvelle position du centre de torsion ($w = 0,12$ m).

En valeur absolue, il s'écrit :

$$L(x)_{inf} = (d'-w) \cdot \left[\frac{b^2(e'+2e)}{24} - \frac{e'}{2} \cdot x^2 + \frac{2(e'-e)}{3b} \cdot x^3 \right] + n A (d'-w) \sum_j x_j$$

$$(x < x_j < \frac{b}{2})$$

soit un terme dû au béton égal à :

$$(53,67 - 1526 x^2 + 926,9 x^3) \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

et un terme dû aux armatures égal à (en m^4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} n A (d'-w) (c+c') = 1,184 \cdot 10^{-6} \cdot n \text{ pour } 0 < x < c \\ n A (d'-w) c' = 0,789 \cdot 10^{-6} \cdot n \text{ pour } c < x < c' \\ 0 \text{ pour } x > c' \end{array} \right.$$

(*) Cf. chapitre II § 3.5.1.

Dans l'aile supérieure, on ne tient compte que des armatures avec le module fictif E_a^* . La rigidité s'écrit :

$$\overline{EL}(x)_{\text{sup}} = E_a^* \cdot L(x)_{\text{sup}}$$

avec :

$$L(x)_{\text{sup}} = \begin{cases} n^*A(d''+w)(c+c') = 6,42 \cdot 10^{-6} \cdot n^* & \text{pour } 0 < x < c \\ n^*A(d''+w)c' = 4,28 \cdot 10^{-6} \cdot n^* & \text{pour } c < x < c' \\ 0 & \text{pour } x > c' \end{cases}$$

2.2.7- Interprétation des déformations locales ϵ_{45} dues au cisaillement

2.2.7.1- Présentation générale

Cas de OE 1 :

Dans l'aile inférieure où le béton reste comprimé, les mesures effectuées par les jauges collées ont un sens indiscutable. Bien que les déformations mesurées soient faibles, et que le nombre des points de mesures homologues permettant d'établir des moyennes, soit limité (de 1 à 4), on trouve une variation assez régulière de ϵ_{45} avec le couple C, comme le montre à titre d'exemple les figures 94a et 94b (d'autres résultats sont présentés en annexe 0).

Avec une incertitude plus ou moins grande selon le cas, on peut tracer des droites de variation linéaire de la forme :

$$\epsilon_{45} = k_1 \cdot C$$

Dans les différents cas, les valeurs de la pente k_1 ainsi déterminées sont rassemblées au tableau ci-dessous :

AILE INFERIEURE
FACE INFERIEURE

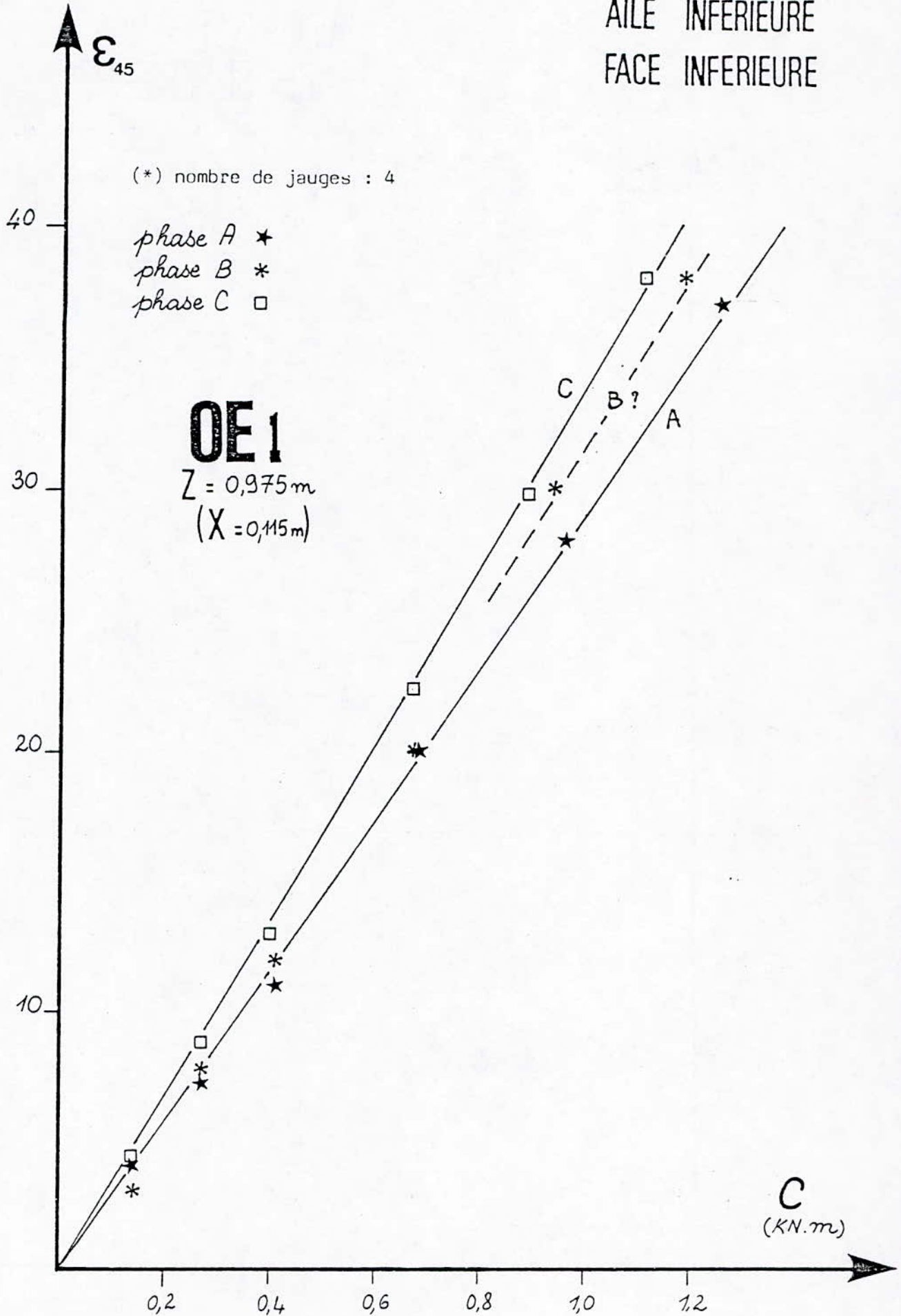


FIGURE 94 a

AILE INFÉRIEURE FACE SUPÉRIEURE

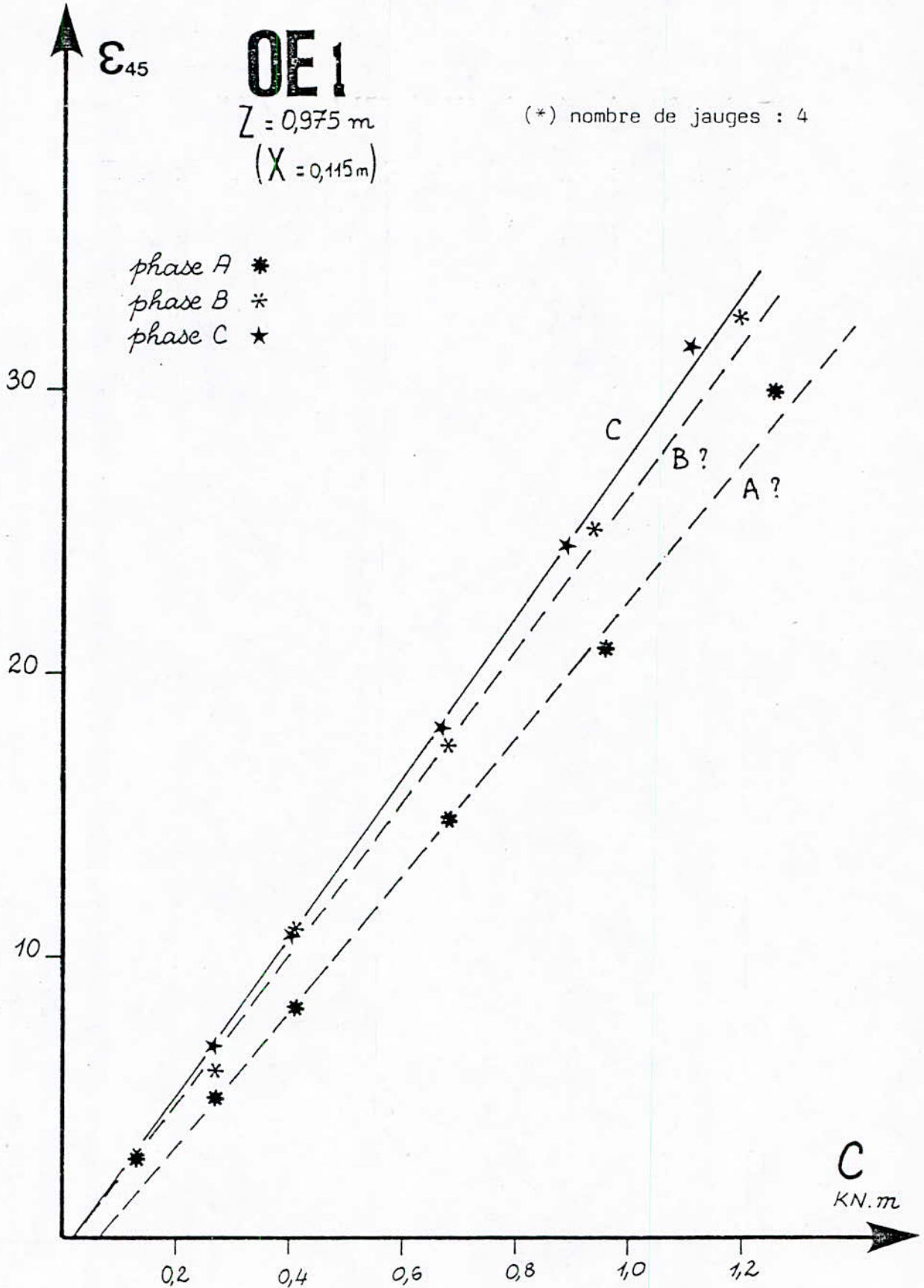


FIGURE 94 b

k_1 (aile inférieure) en $10^{-6}/\text{kN.m}$					
z (m)	x (m)	face	phase		
			A	B	C
0,125	0	inf.	20,3	21,5 ?	23,3
0,975	0	inf.	30,0	33,0 ?	36,2
	0,115	inf.	29,0	31,3 ?	33,8
	0,115	sup.	24,0 ?	26,6 ?	28,0
1,81	0	inf.	18,3	19,5 ?	21,1

Dans l'âme, malgré la présence des fissures, les jauges collées sur le béton continuent à donner des indications cohérentes (bien que plus dispersées que dans l'aile comprimée) qui traduisent le comportement du béton entre les fissures. Un exemple des mesures les plus cohérentes est donné à la figure 94c. Par contre, on ne peut pas affirmer que ces mesures donnent une indication valable sur le comportement moyen du béton armé fissuré. Les valeurs estimées des pentes k_1 sont les suivantes :

k_1 (âme) en $10^{-6}/\text{kN.m}$			
z (m)	A	B	C
0,125	?	12,5 ?	11,3
0,975	24,0	28,8	34,0
1,81	?	?	12,9

Dans l'aile supérieure, où les fissures sont nettement plus ouvertes que dans l'âme, les mesures sont encore plus dispersées. Cependant, on peut encore apprécier valablement la pente k_1 dans certains cas (exemple, figure 94d). Les valeurs sont portées ci-après :

(*) nombre de jauges : 4

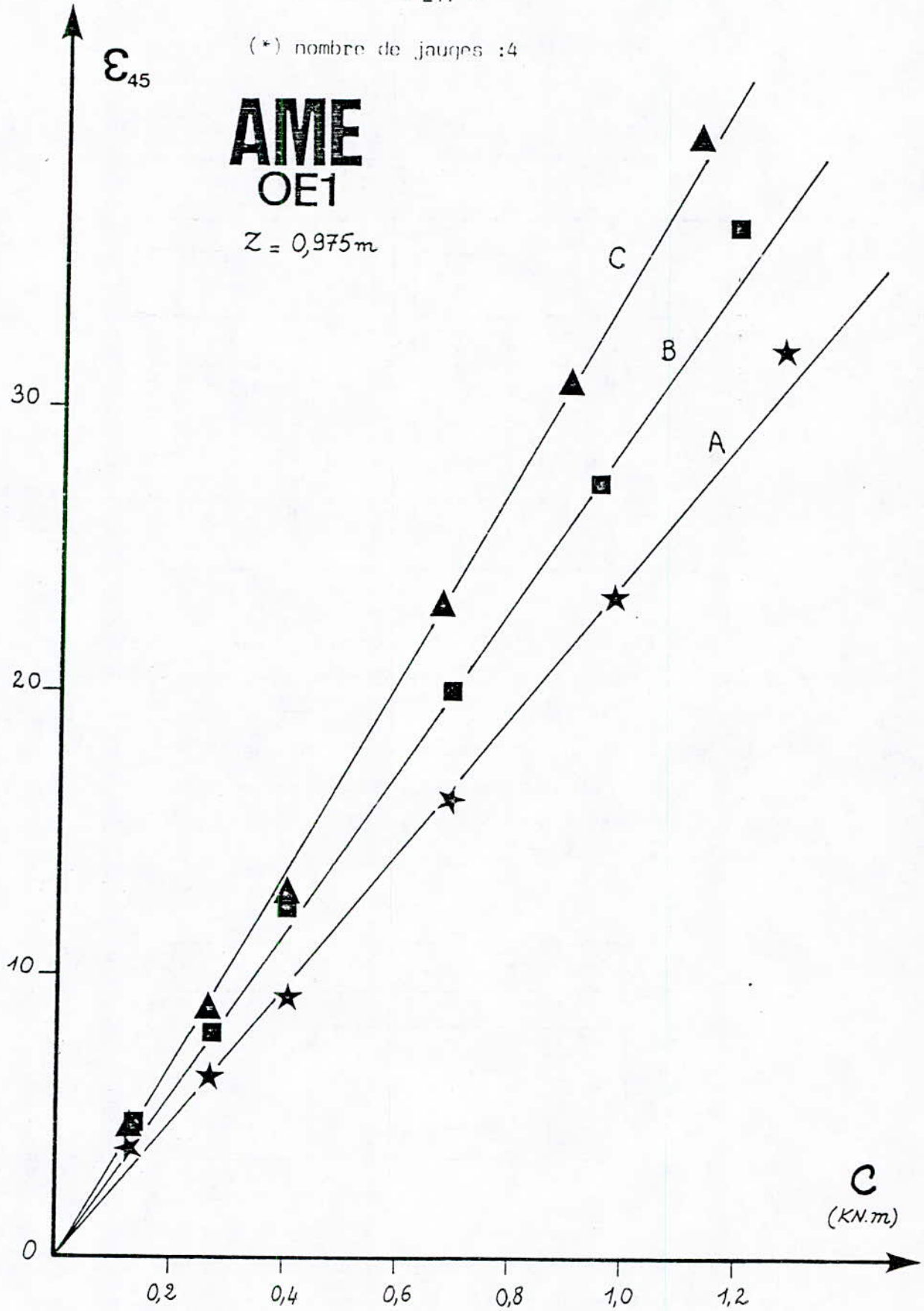


FIGURE 94 c

phase A ★
phase B ■
phase C ▲

phase A *
phase B •
phase C □

(*) nombre de jauges : 3

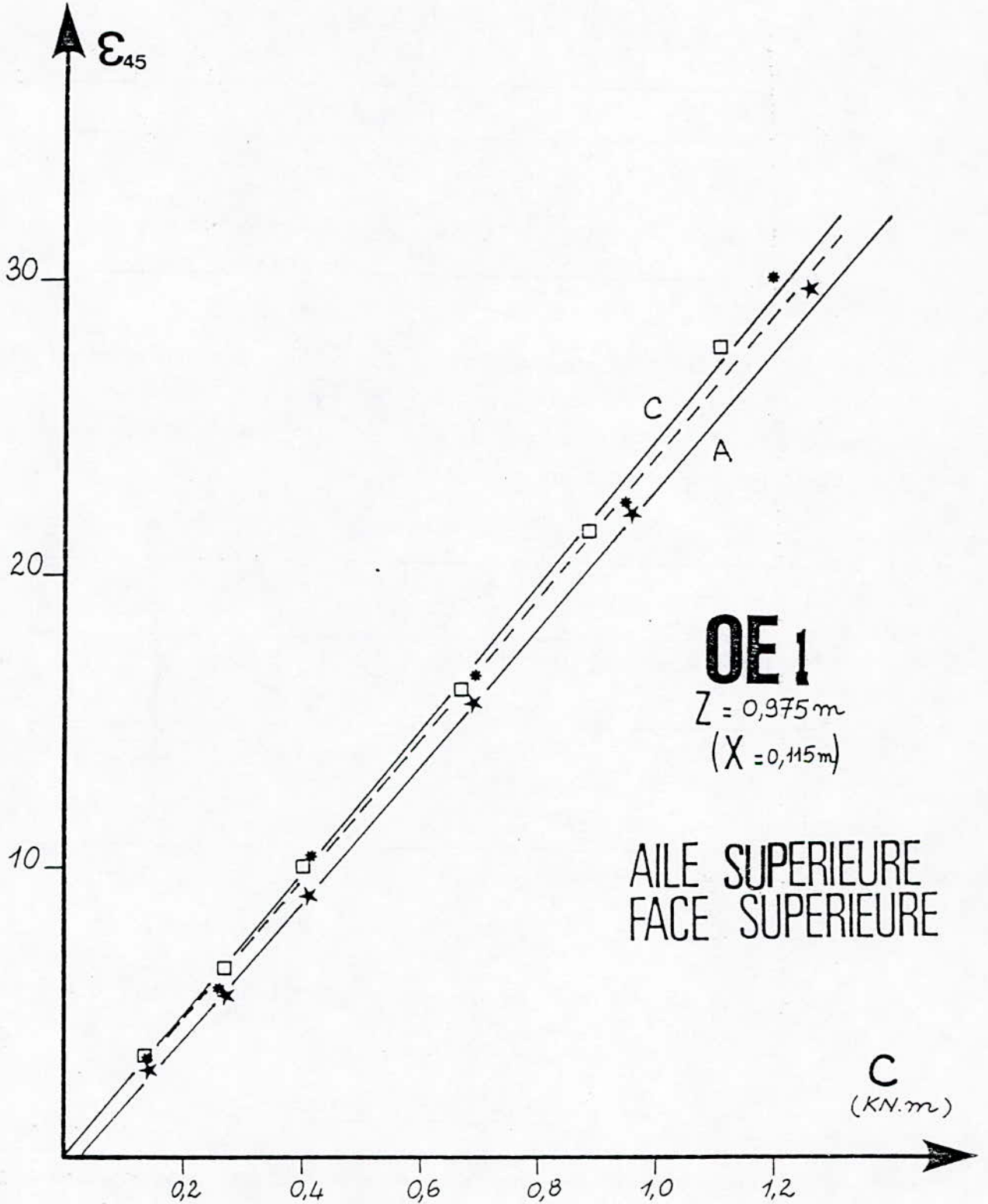


FIGURE 94 d

k_1 (aile supérieure) en $10^{-6}/\text{kN.m}$					
z (m)	x (m)	face	phase		
			A	B	C
0,125	0	sup.	14,7	?	?
0,975	0	sup.	15,9	?	23,3 ?
	0,115	sup.	23,3	23,9 ?	24,4
	0,115	inf.	18,7	20,7 ?	17,3 ?

Dans la section $z = 0,975$ m, les mesures effectuées simultanément sur les faces externe et interne (à l'abscisse $x = 0,115$ m) permettent, par demi-somme et demi-différence, de séparer les termes dus à C_1 et à C_2 . On obtient les valeurs suivantes :

aile	terme dû à	Phases		
		A	B	C
inférieure	$\tau_{C1,max}(0,115)$	26,5	28,95	30,9
	$\tau_{C2}(0,115)$	2,5	2,35	2,9
supérieure	$\tau_{C1,max}(0,115)$	20,7	22,1 ?	20,8
	$\tau_{C2}(0,115)$	2,0	1,4	3,5

Cas de OE 2

Pour la poutre OE 2, les mesures sont beaucoup trop dispersées pour être exploitables.

2.2.7.2- Comparaison au calcul

Dans l'âme, où il n'y a pas d'effet de gauchissement, on a :

$$\epsilon_{45} = \frac{1}{2} \delta_{C1,max}$$

Au milieu des ailes, où la gêne du gauchissement crée un cisaillement mais pas de contrainte normale, on a :

$$\epsilon_{45} = \frac{1}{2} [\delta_{c1,max}(0) + \delta_{c2}(0)]$$

Dans les ailes, à la distance x de l'axe, on a de plus l'effet de la contrainte longitudinale $\sigma_c(x)$ qui crée des déformations :

- longitudinale:
$$\epsilon_c(x) = \frac{B \cdot \Omega(x)}{EK_1}$$

- transversale :

$$\epsilon_{c,t}(x) = - \nu \cdot \epsilon_c(x)$$

Le coefficient de Poisson ν est égal à ν_0 dans l'aile inférieure. Dans l'aile supérieure, il est plus faible en raison de la fissuration ; on le prendra égal à 0. La déformation ϵ_{45} s'écrit alors :

$$\epsilon_{45} = \frac{1}{2} [\delta_{c1,max}(x) \pm \delta_{c2}(x) \pm (1-\nu) \cdot \epsilon_c(x)]$$

Les calculs sont effectués avec les valeurs "expérimentales" de la position du centre de torsion et du coefficient d'équivalence fictif n^* (cf. 2.2.3.5.). Les résultats en sont présentés sous forme de courbes tracées sur les figures 95a à 95e où ont été aussi portés les points expérimentaux valables pour une valeur unité du couple, $C = 1$ kN.m, dans l'hypothèse du comportement linéaire de pente k_1 .

De façon générale, le calcul confirme l'évolution croissante des valeurs mesurées de la phase A aux phases B et C. Le terme prépondérant, dans la déformation ϵ_{45} , provient de la part C_1 du couple équilibrée en torsion pure. Le couple C_1 décroît d'une phase à la suivante, mais moins rapidement que ne décroît la rigidité \overline{GK} .

Compte tenu des diverses causes d'incertitudes et, en particulier, de celles afférentes à la mesure de déformations très petites, l'accord entre mesures et calcul est globalement satisfaisant. Dans l'aile inférieure, les mesures en diverses sections (fig. 95a) semblent montrer que le calcul sousestime

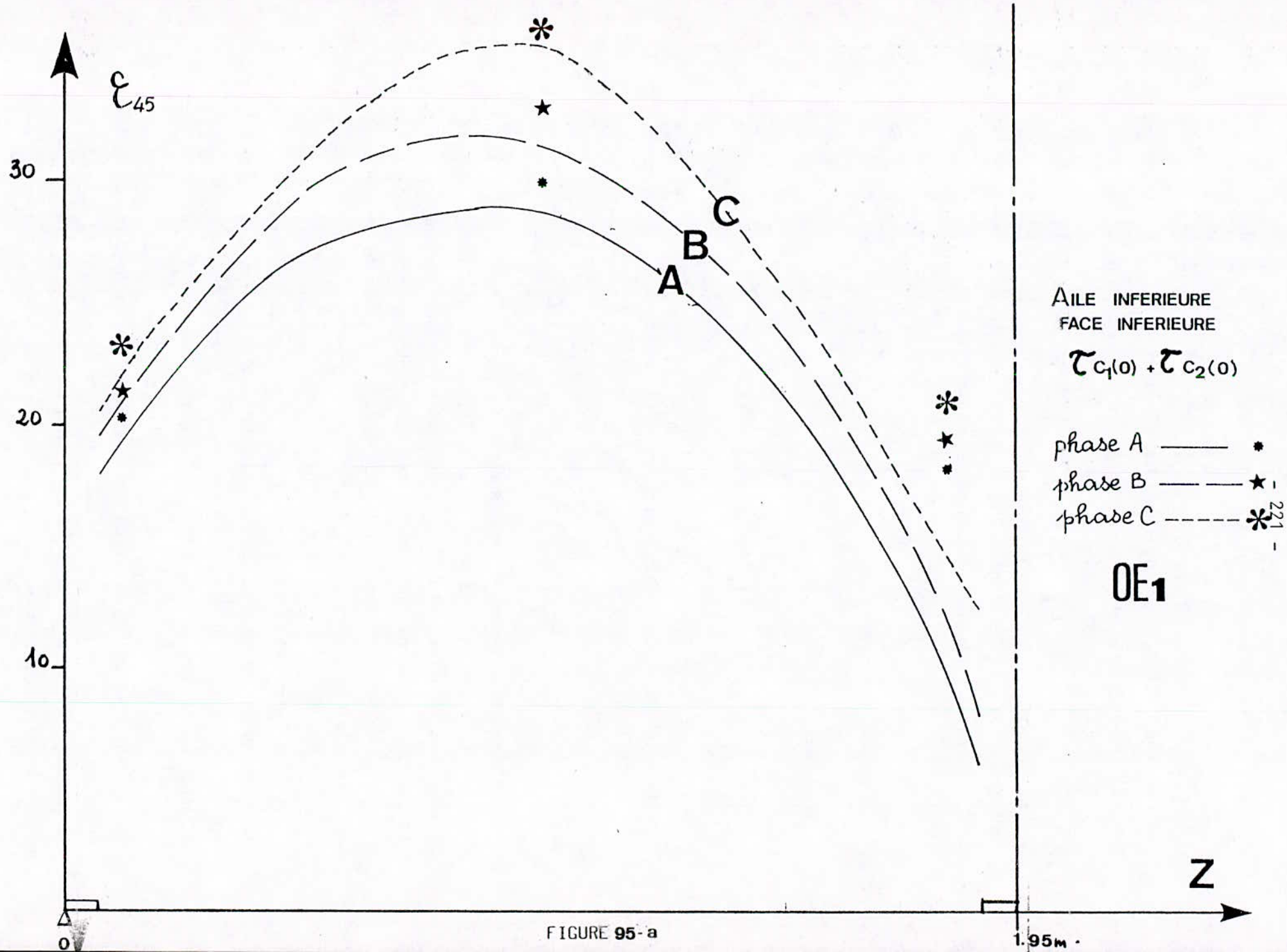
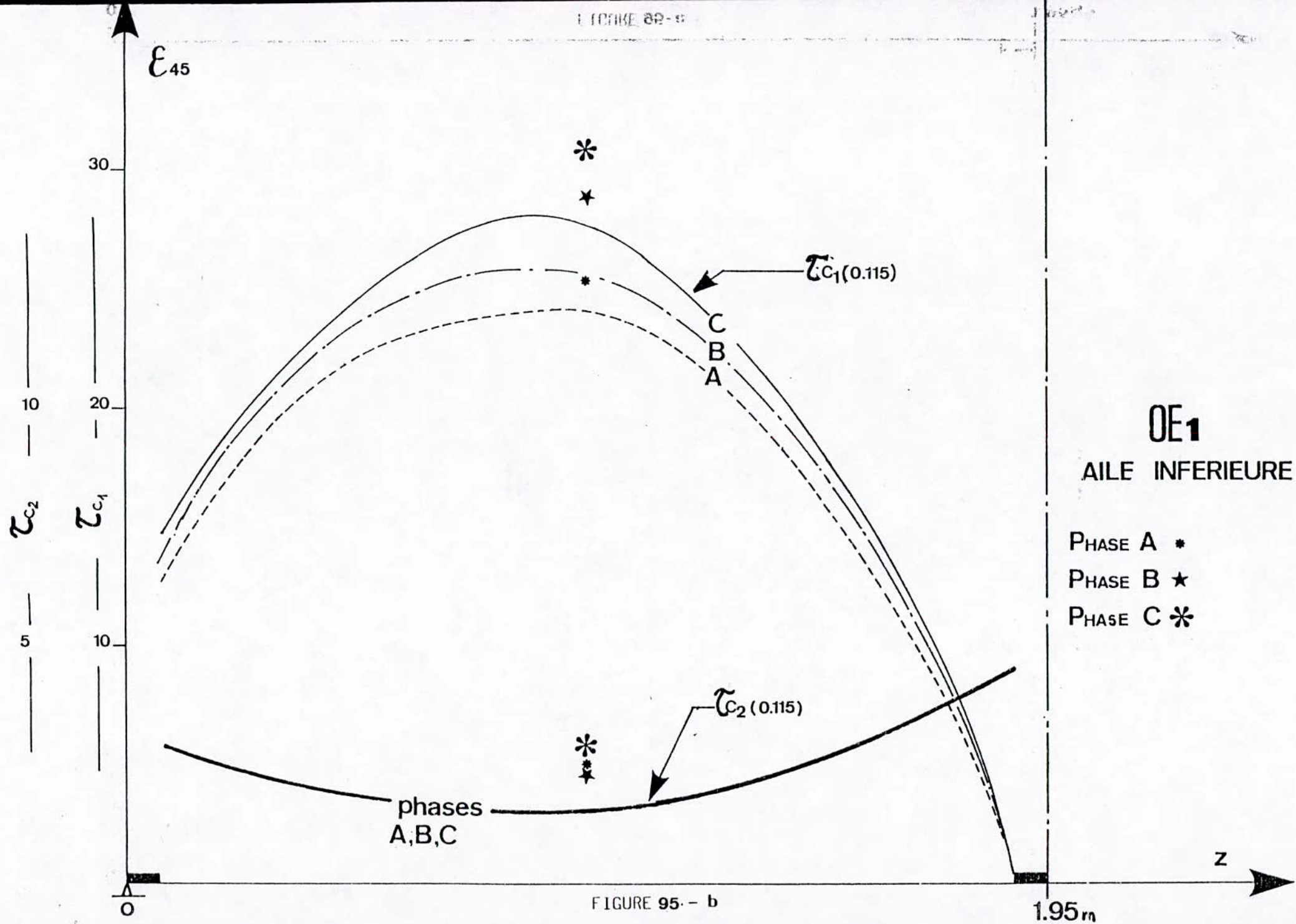


FIGURE 95-a

1.95m



OE1
AILE INFERIEURE

- PHASE A *
- PHASE B ★
- PHASE C *

FIGURE 95 - b

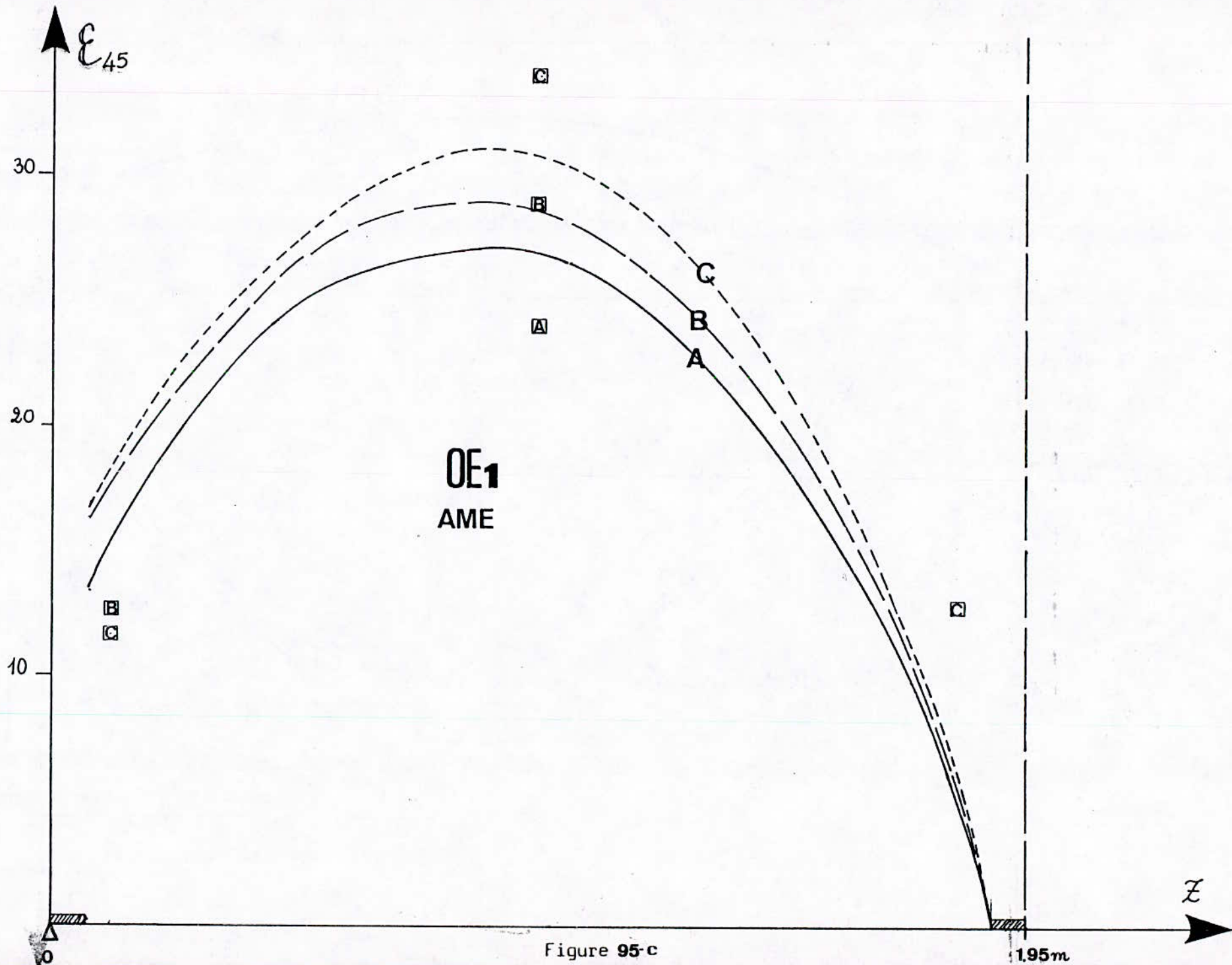


Figure 95-c

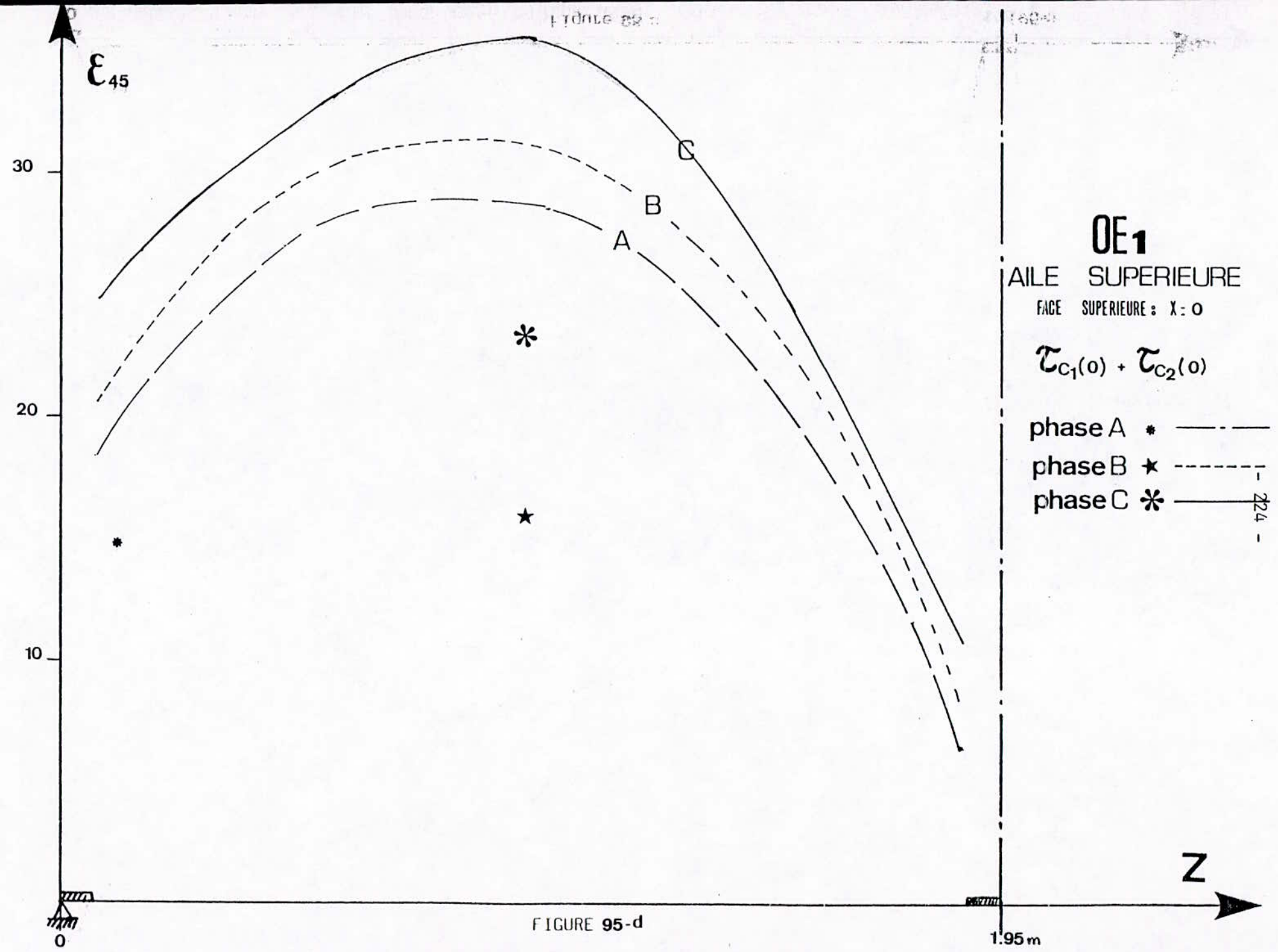


FIGURE 95-d

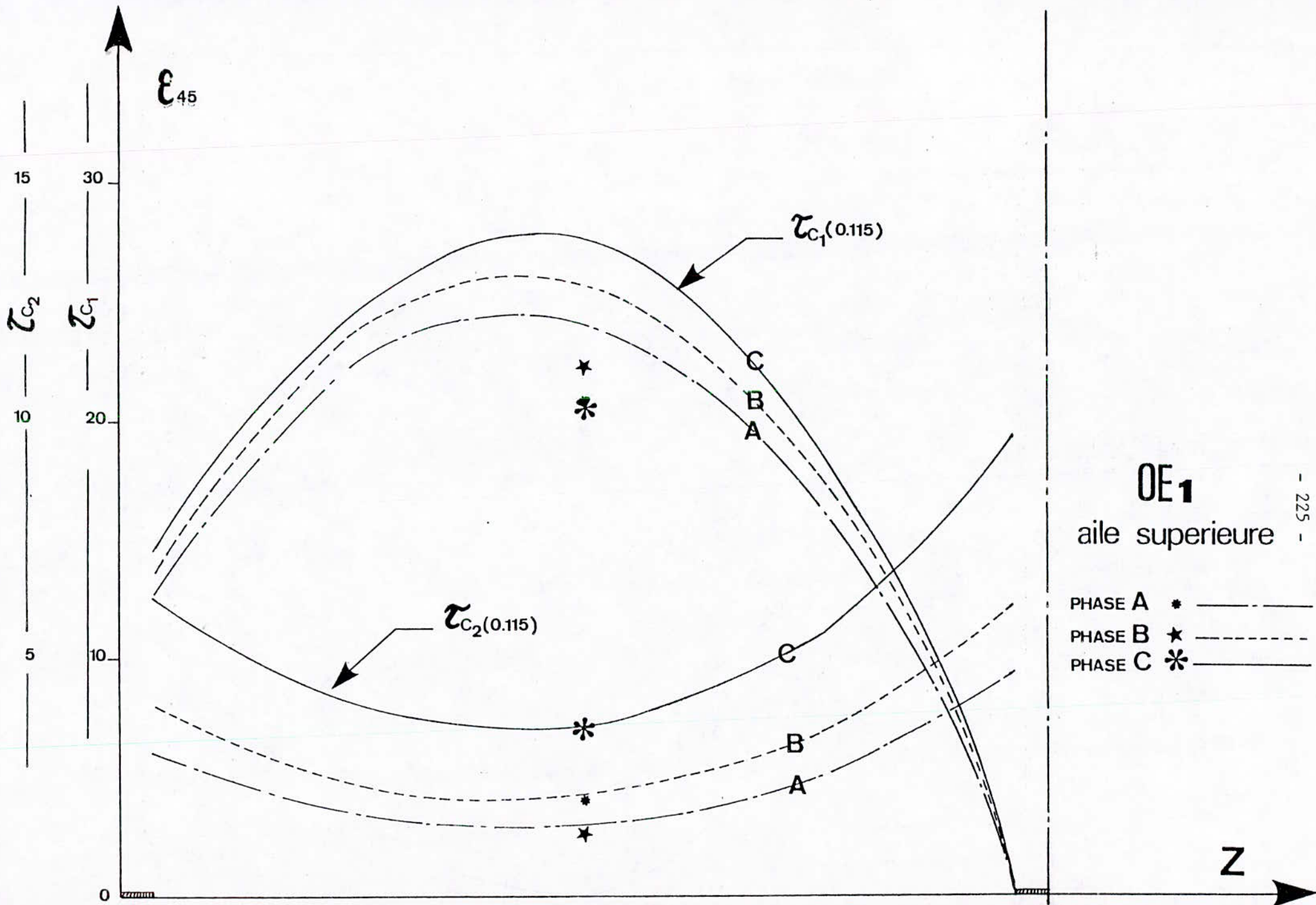


FIGURE 95-e

la gêne du gauchissement dans la section $z = 0$ par rapport à la section $z = 1,95$ m (la valeur $|v_1|$ serait surestimée).

Dans l'âme (fig.95c), l'accord assez satisfaisant entre les mesures locales sur le béton, entre les fissures, et le calcul qui tient compte du comportement moyen, tend à montrer qu'il y a transmission des cisaillements à travers les fissures faiblement ouvertes. Les écarts les plus grands entre mesure et calcul apparaissent dans l'aile supérieur (fig.95d) ; ils traduisent la différence entre l'état local de contrainte et déformation du béton et le comportement moyen d'une zone dû aux discontinuités que sont les fissures nettement ouvertes.

2.3. - Conclusions relatives à la comparaison entre les mesures et le calcul (domaine fissuré)

Malgré les difficultés expérimentales liées à la nécessité de mesures de faibles ou très faibles déformations de façon fiable et stable sur des durées de plusieurs minutes ou dizaines de minutes, cette étude a permis de tirer des conclusions importantes.

La fissuration due à la flexion réduit de façon importante la rigidité au gauchissement des poutres qui, dans le cas présent, n'est plus que 35 % environ de la valeur élastique. Mais elle a un effet nettement moindre sur la rigidité de torsion pure qui, sous faible couple, est réduite à 75 % de la valeur élastique lorsqu'on approche de la plastification des armatures longitudinales. La rigidité de gauchissement ne dépend pratiquement pas de l'ouverture des fissures (dans la mesure où les contraintes dues à la gêne du gauchissement n'entraîne pas leur fermeture complète dans les parties re-comprimées). Par contre, la rigidité de torsion pure en dépend et, de plus, décroît un peu lorsque le couple devient assez élevé.

Il est possible d'interpréter le comportement en torsion des poutres à profil mince ouvert, fissurées en flexion, en généralisant les expressions de la théorie élastique, dans l'hypothèse d'un comportement élastique non-linéaire. Dans le cas particulier des essais OE, les expressions se simplifient un peu car on reste dans le domaine linéaire pour le comportement du béton comprimé et des armatures. Mais on donne les bases permettant de traiter le cas général.

A partir de l'état de déformation longitudinale ϵ dû à la flexion, on peut déterminer :

- la position du centre de torsion,
- l'aire sectorielle $\Omega(s)$,
- la rigidité statique sectorielle $\overline{EL}(s)$,
- la rigidité au gauchissement \overline{EK}_1

Pour une évaluation correcte de ces grandeurs, il est nécessaire de tenir compte de la contribution du béton tendu dans la zone fissurée.

Pour évaluer la rigidité de torsion pure \overline{GK} , on fait intervenir un module de déformation transversale G variable dans la section. Pour la partie tendue, il s'agit d'un module fictif permettant de traduire le comportement moyen du béton armé fissuré ; il sera relié de façon empirique (*) au paramètre de fissuration t_m/s_m .

Enfin, s'il était nécessaire de pousser la résolution de l'équation de la torsion mixte jusqu'à la deuxième approximation, il faudrait utiliser une expression approchée de la rigidité de torsion sectorielle \overline{GK}_2 . Il paraît impossible d'en établir une expression générale explicite.

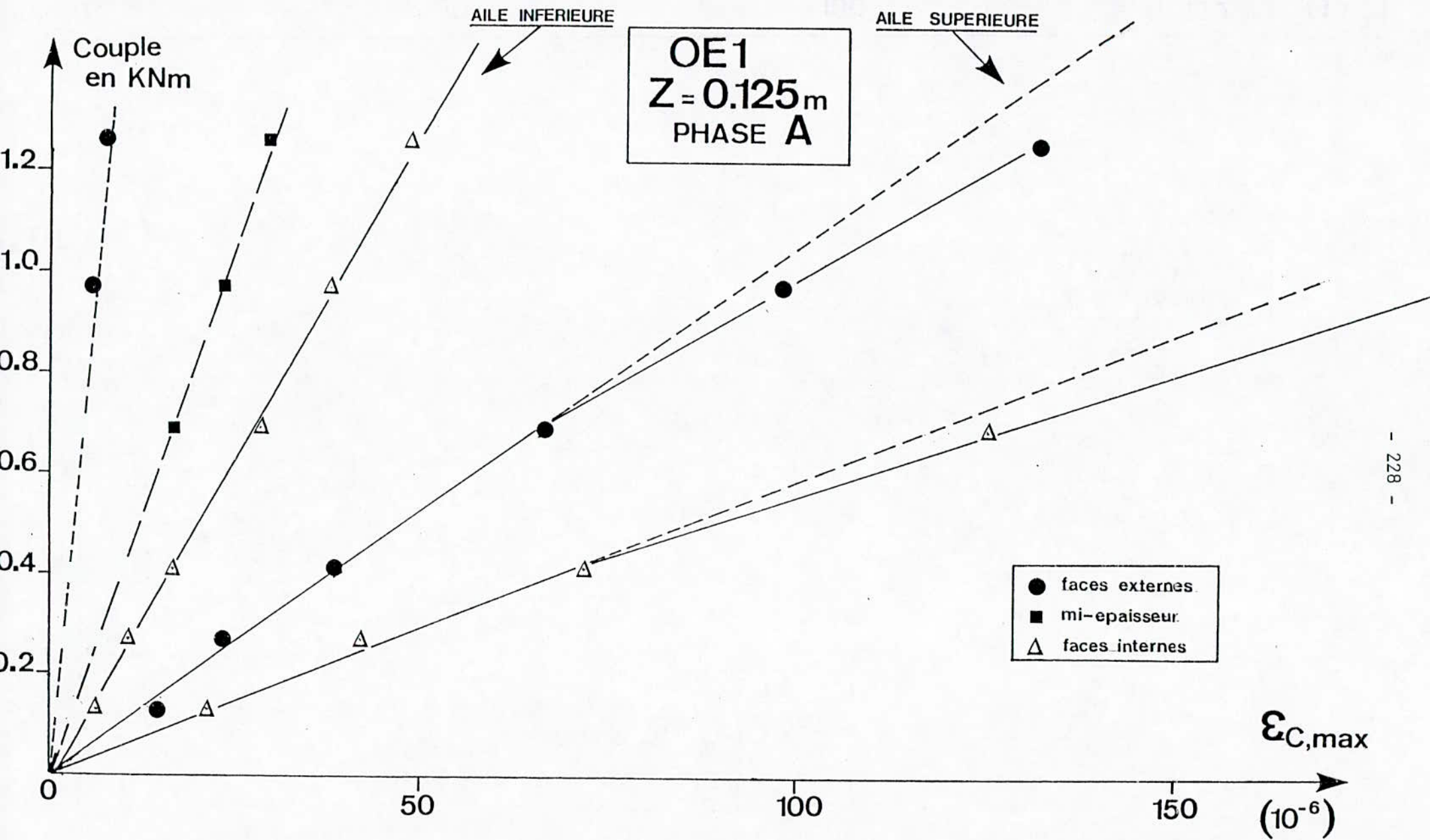
(*) En anticipant sur le § 2.4.3.4.

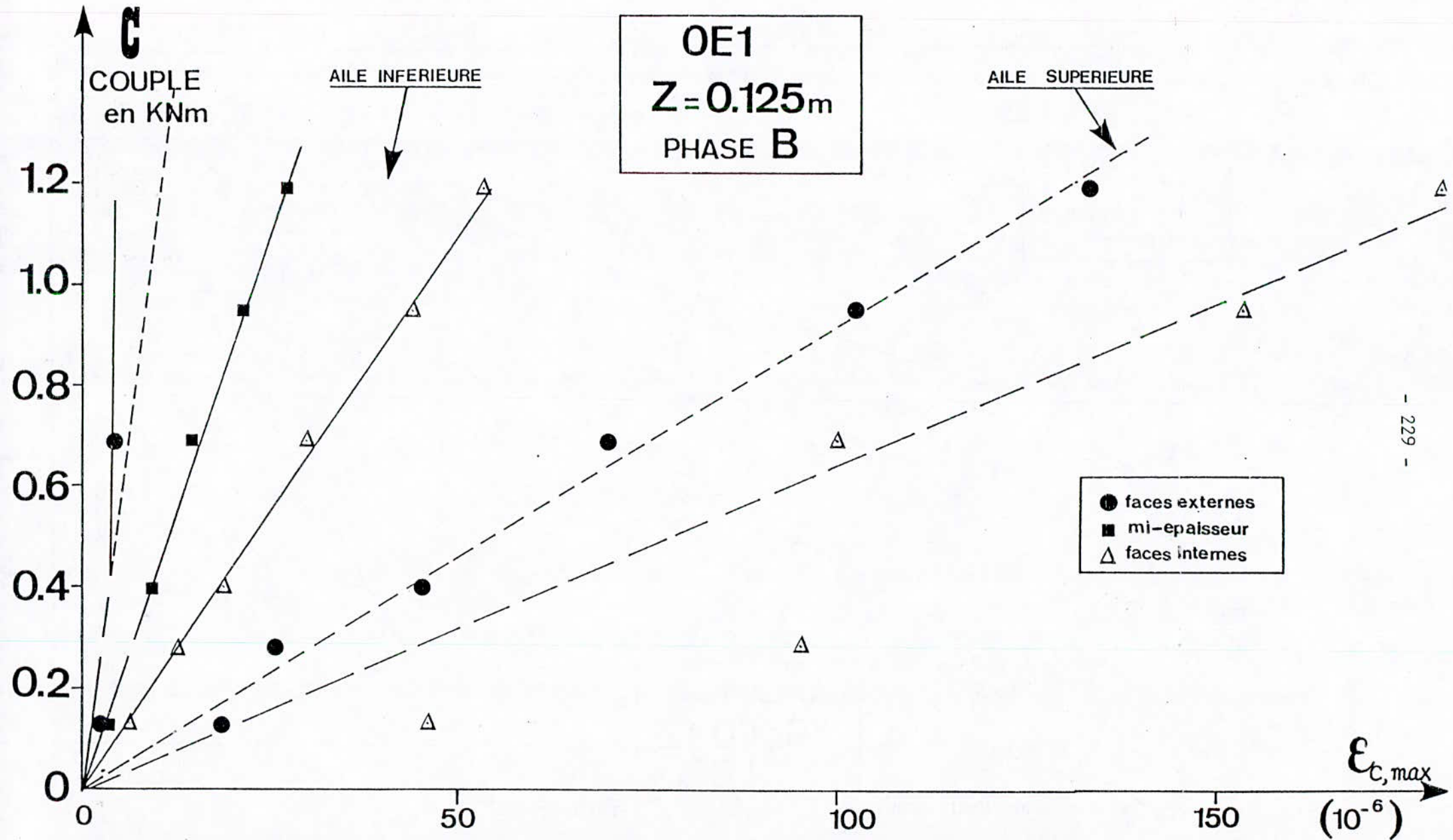


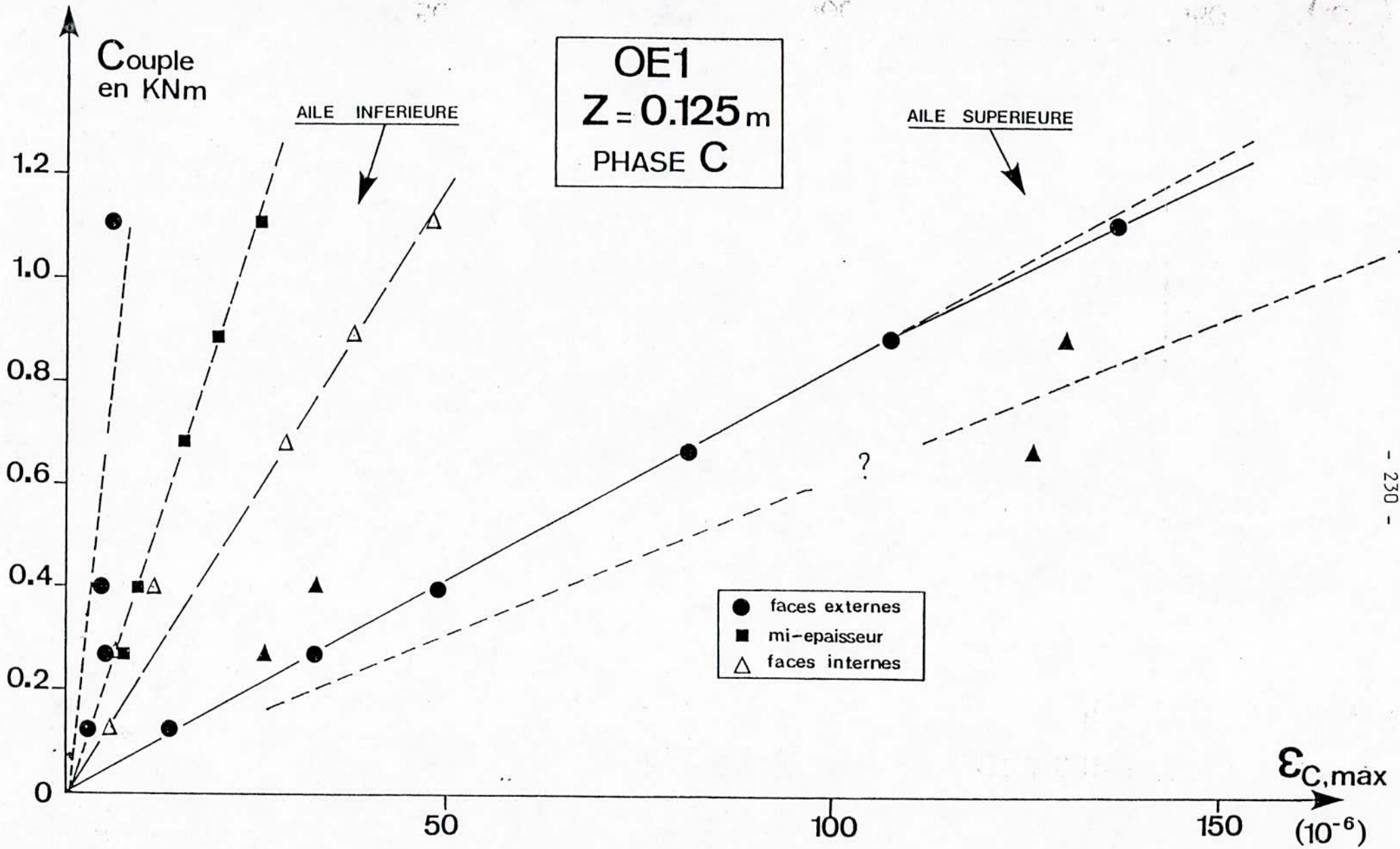
Courbes relatives aux mesures effectuées dans le domaine fissuré, sous couple croissant.

ESSAIS OE 1, OE 2

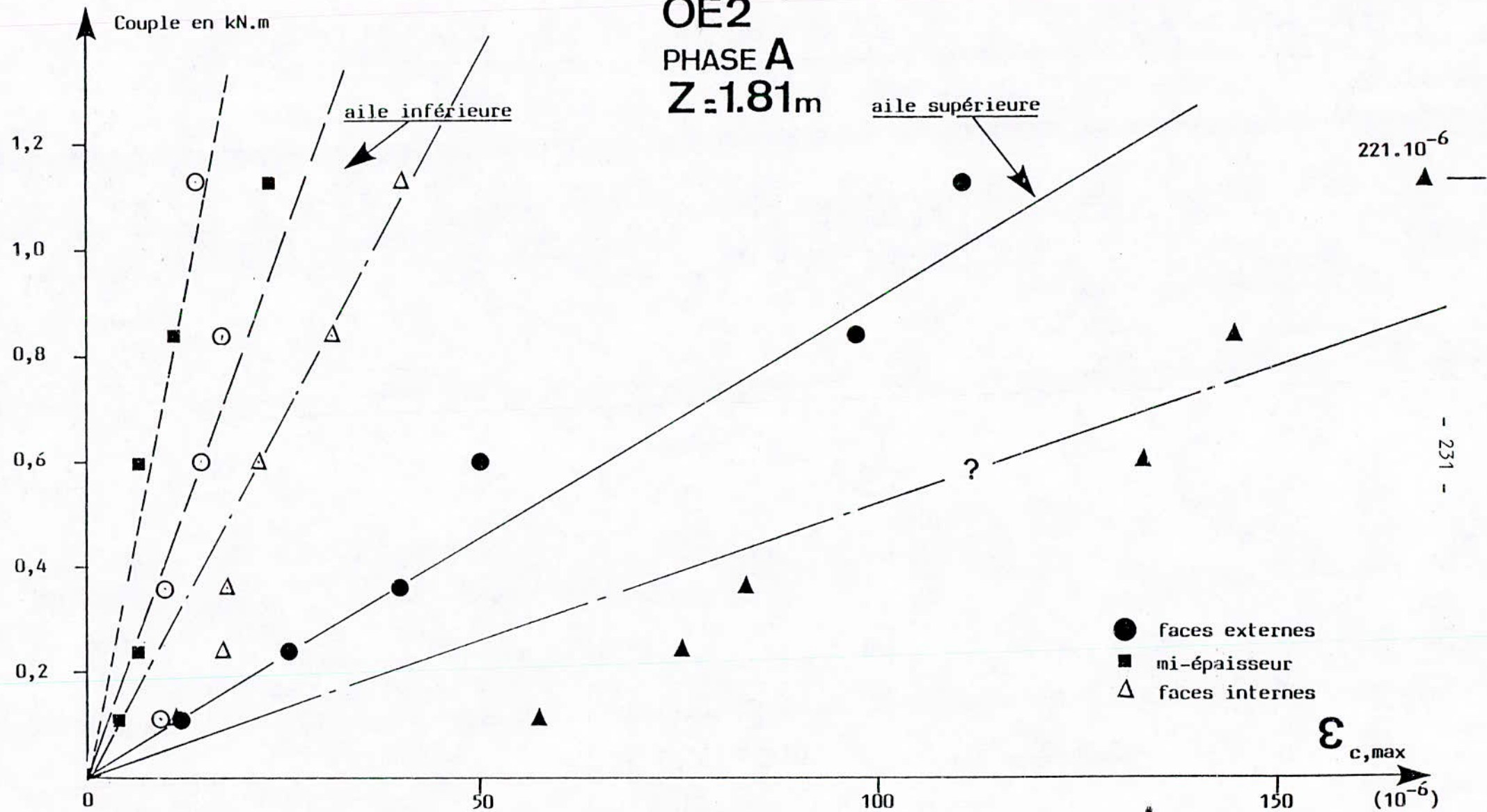
Evolution des déformations longitudinales degauchissement
et des rotations de torsion en fonction du couple



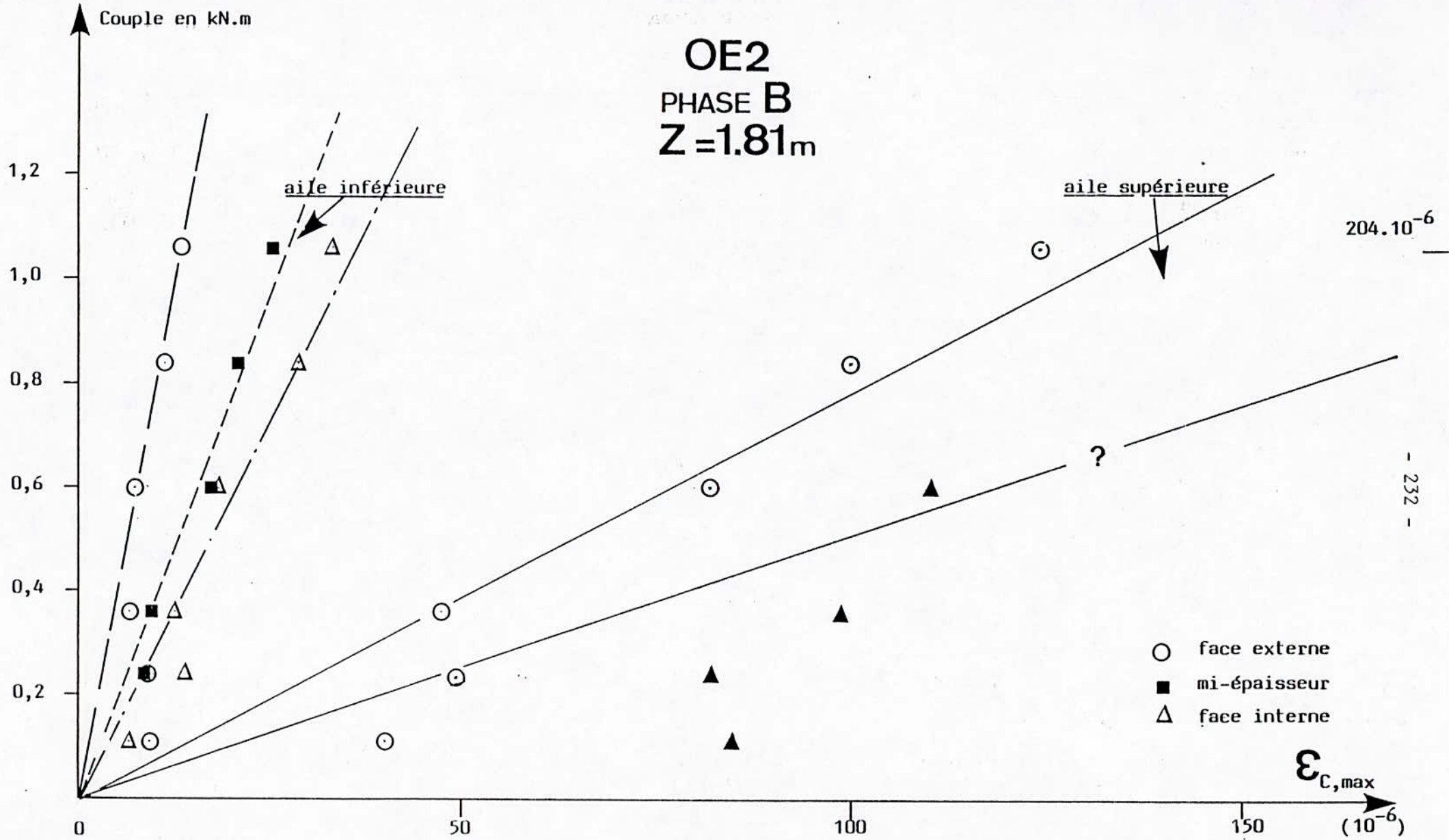


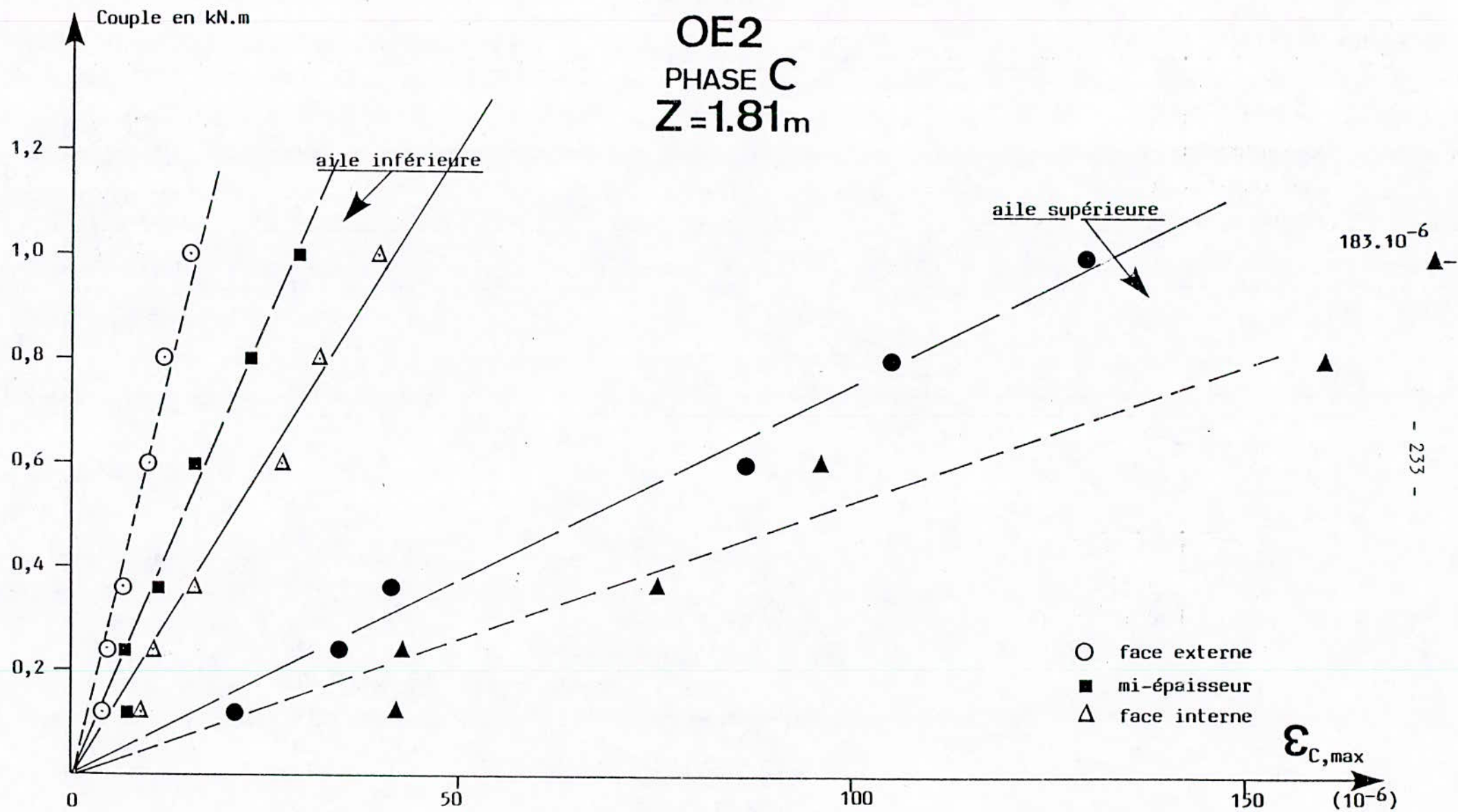


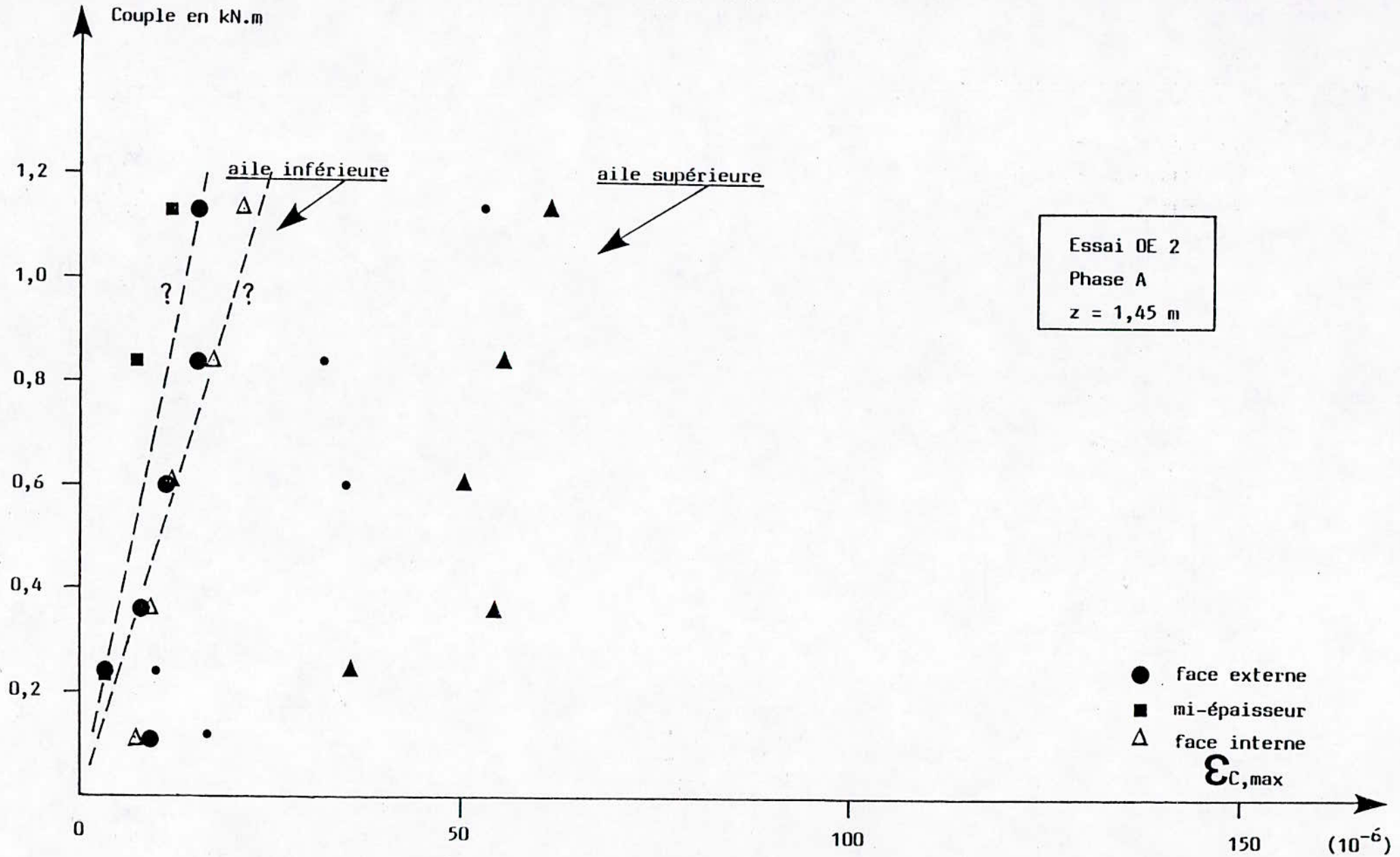
OE2
 PHASE A
 Z=1.81m



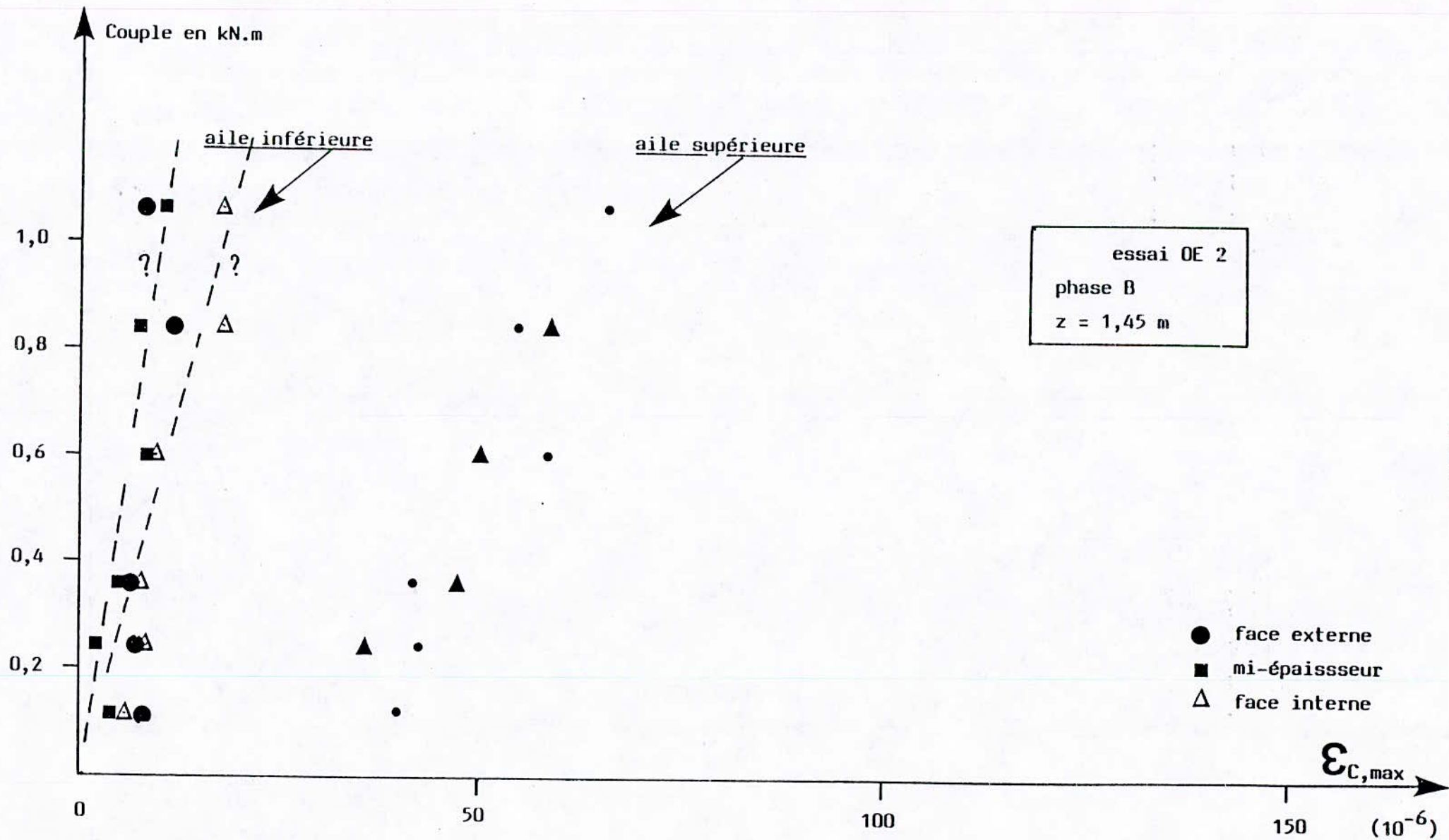
OE2
 PHASE B
 Z = 1.81m



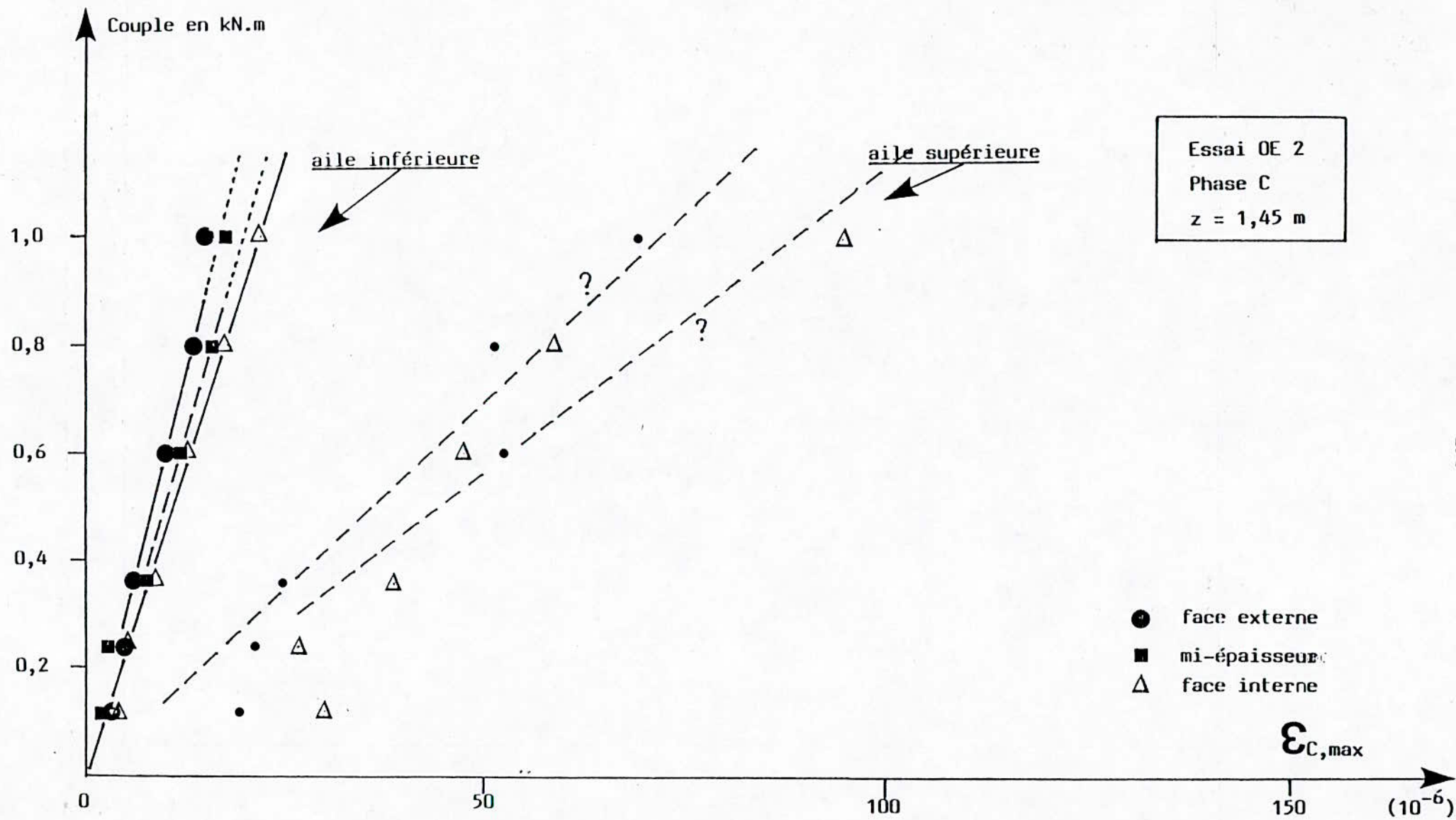




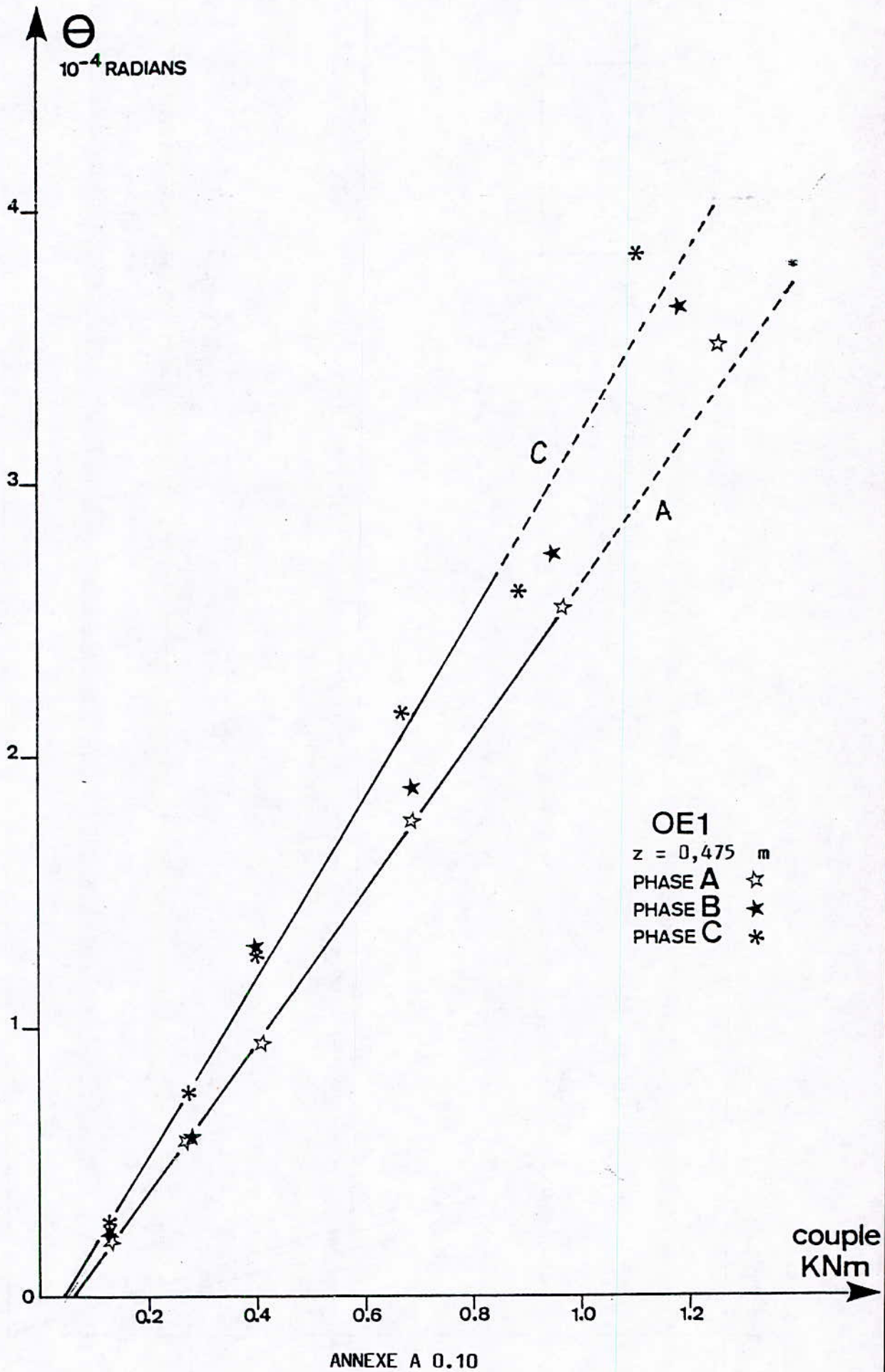
ANNEXE A 0.7

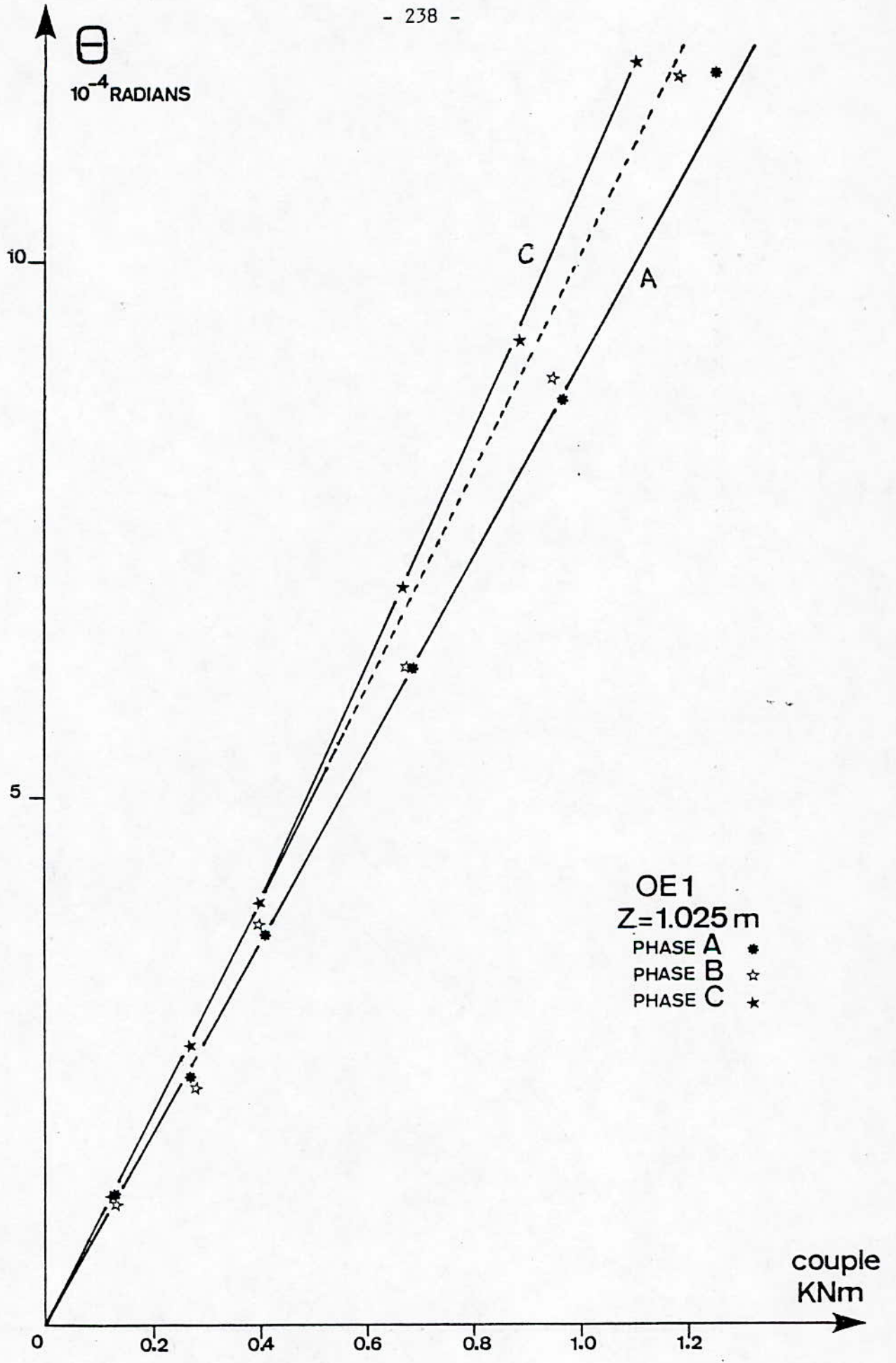


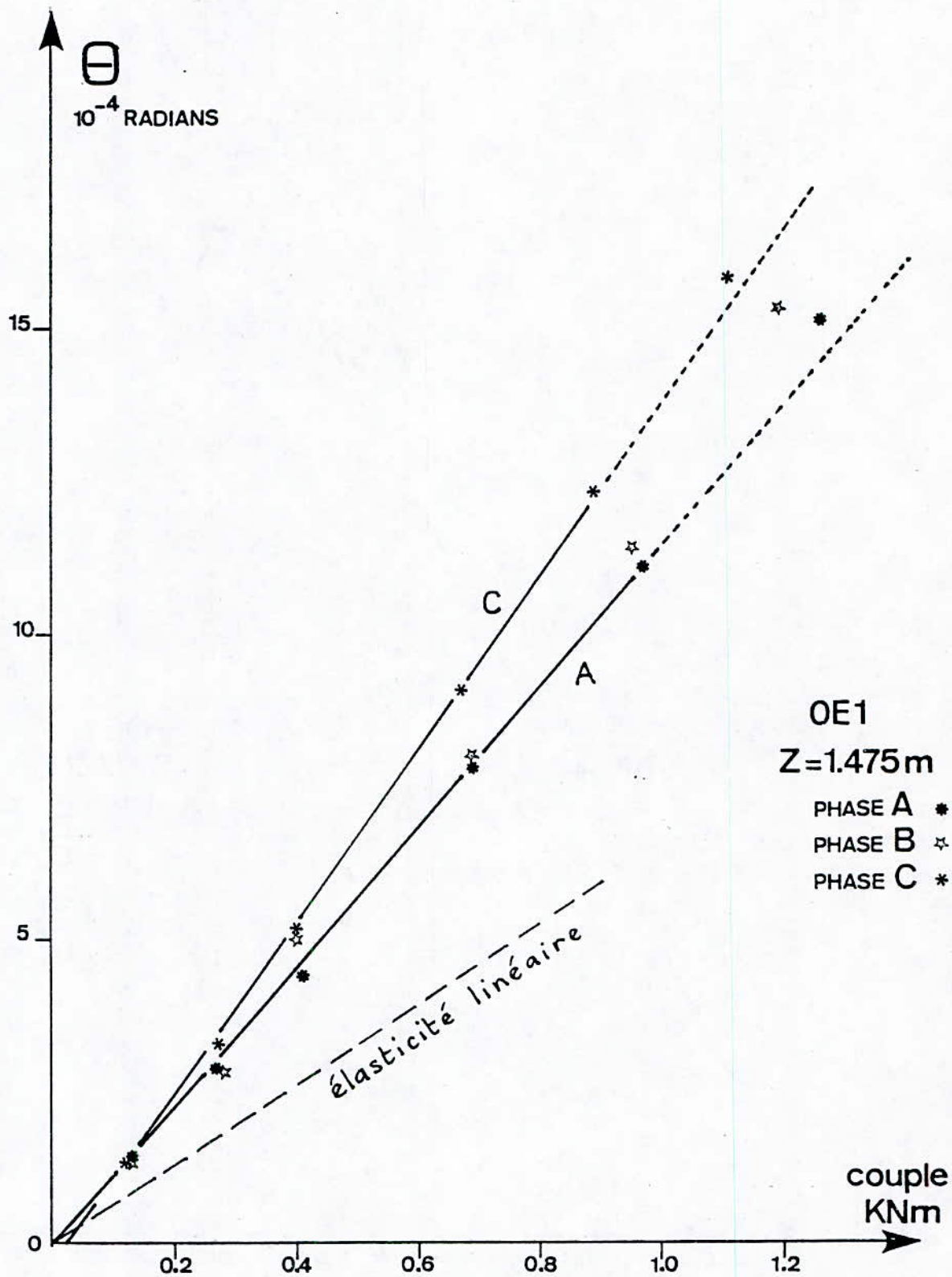
ANNEXE A 0.8

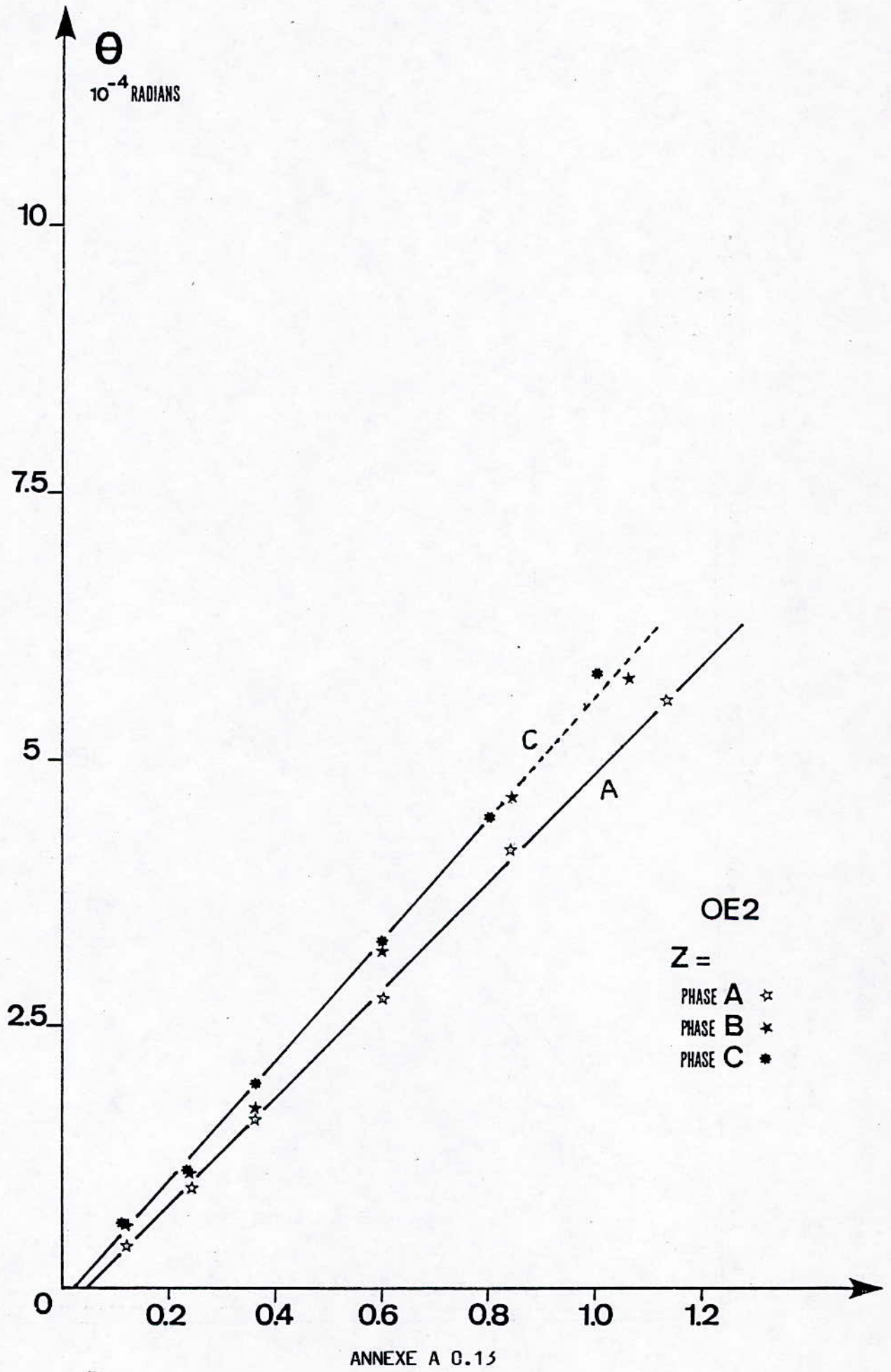


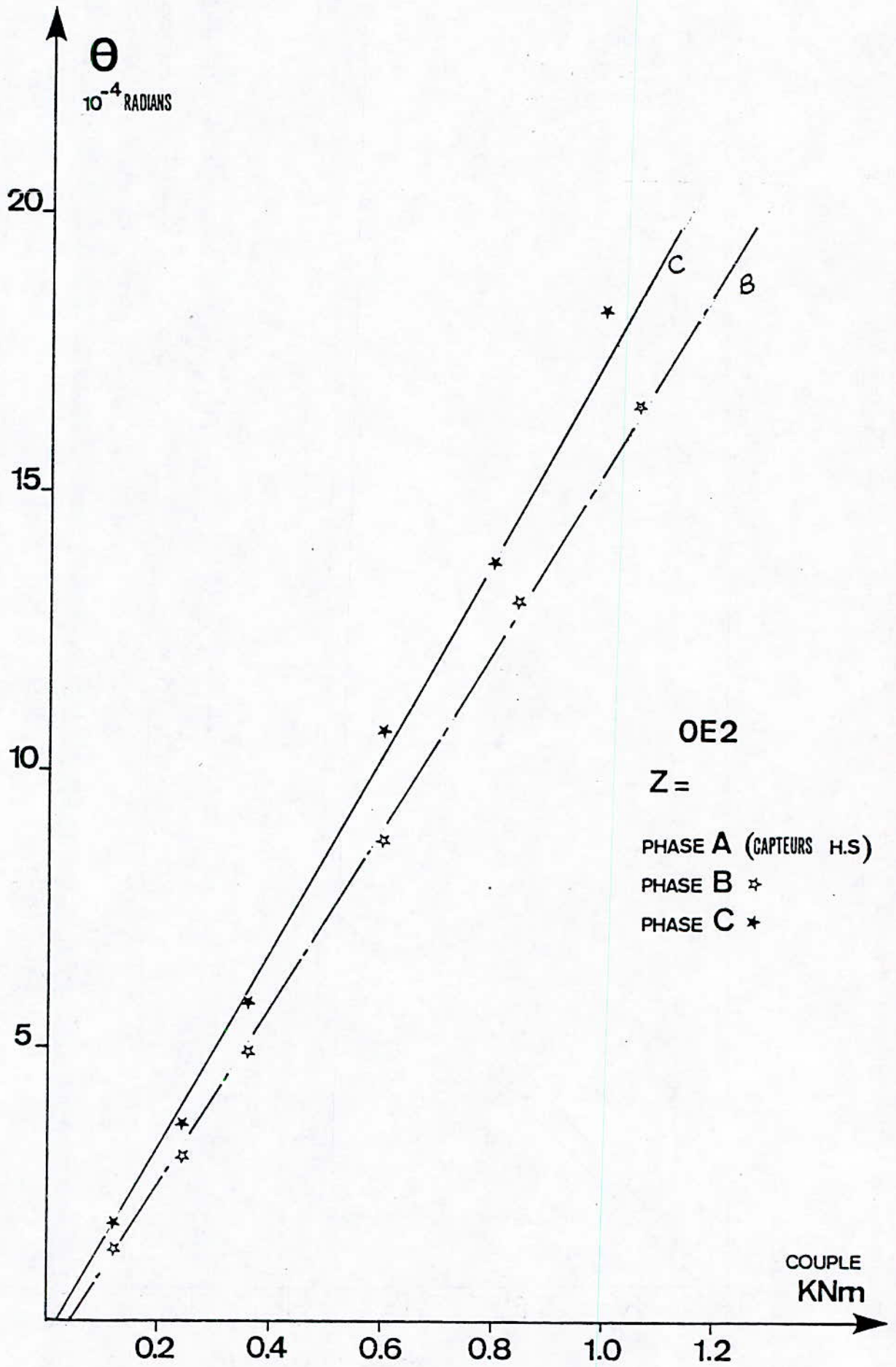
ANNEXE A 0.9



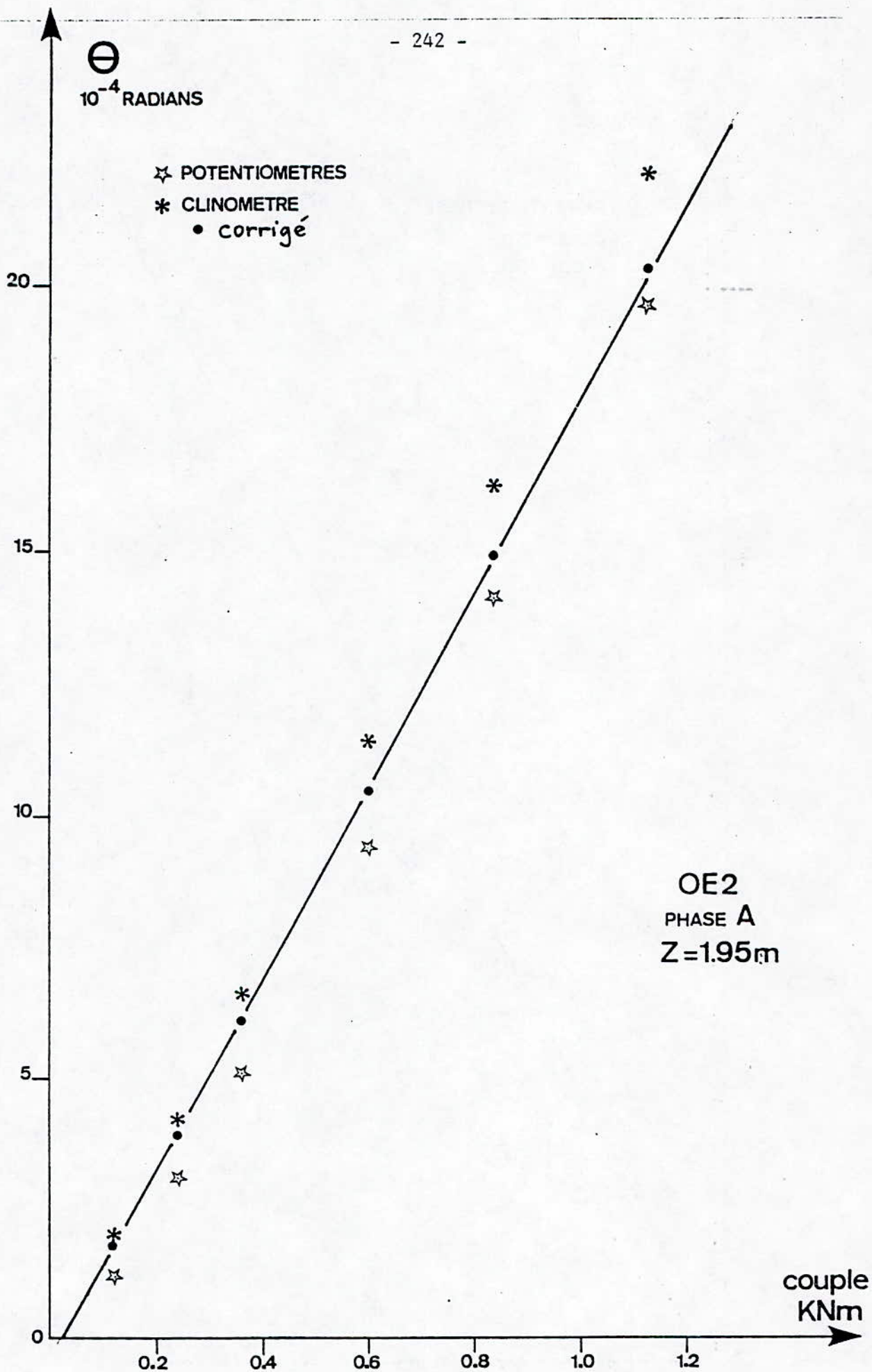


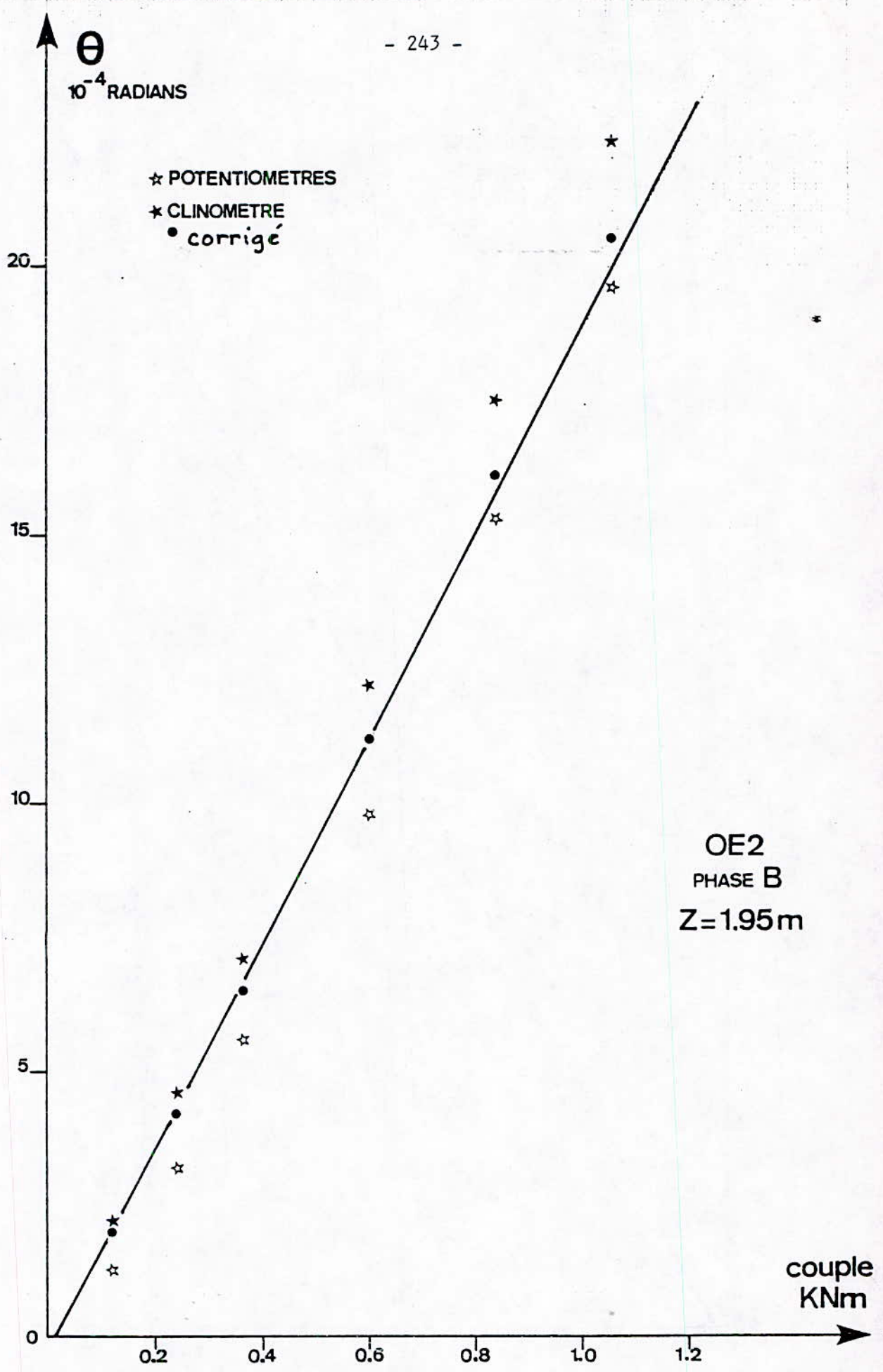


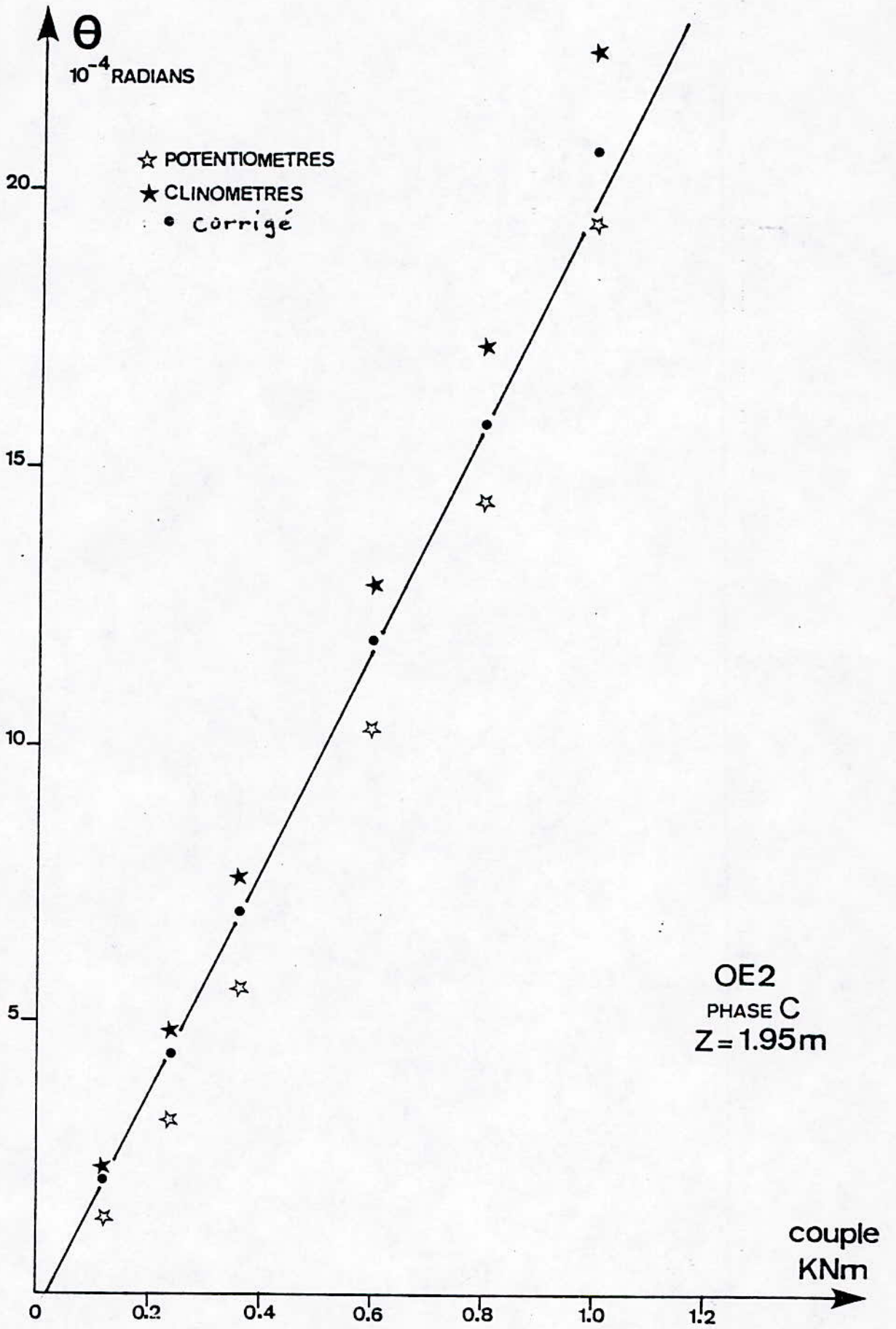




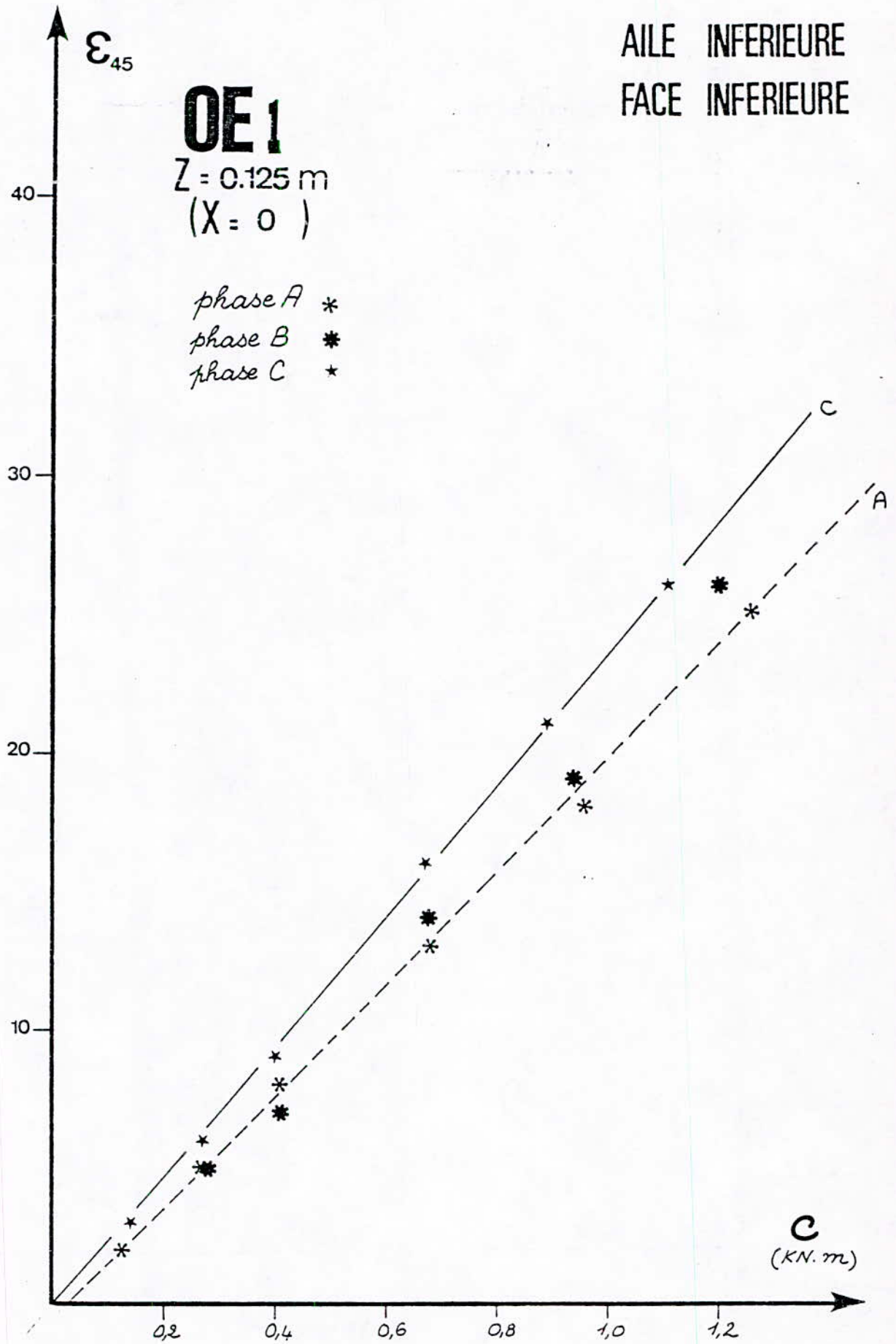
OE2
Z =
PHASE A (CAPTEURS H.S)
PHASE B ☆
PHASE C ☆





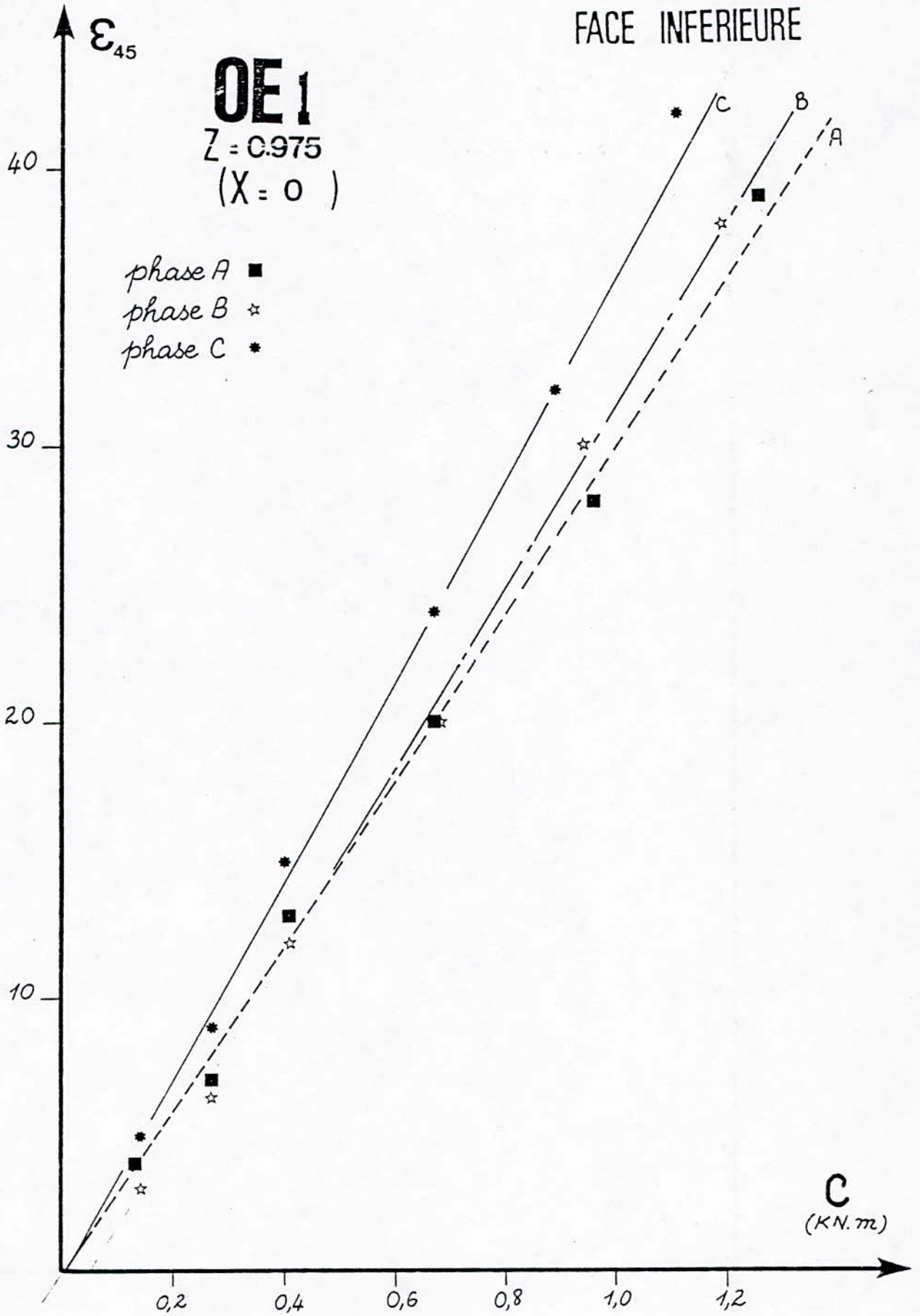


(*) nombre de jauges : 1

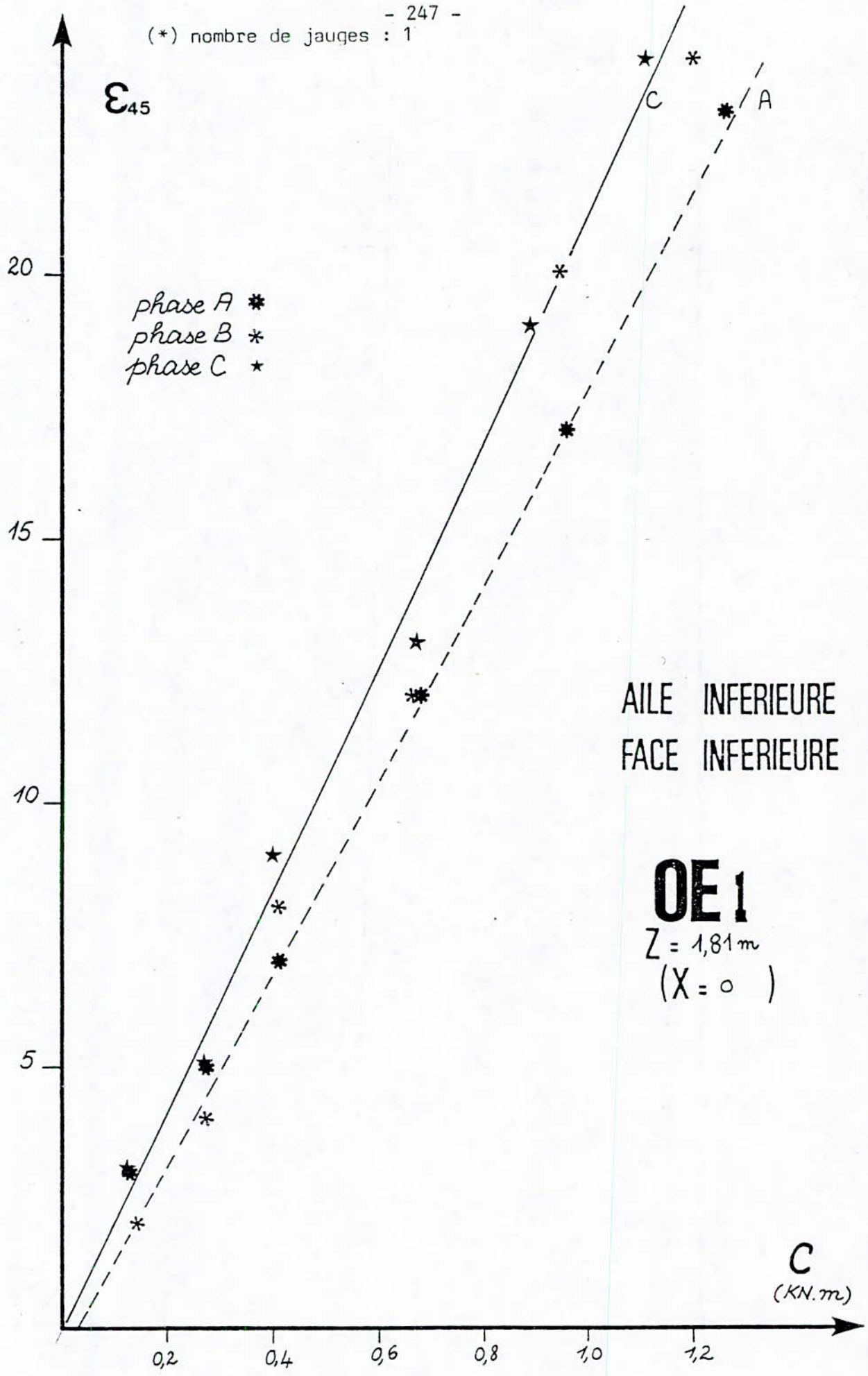


(*) nombre de jauges : 2

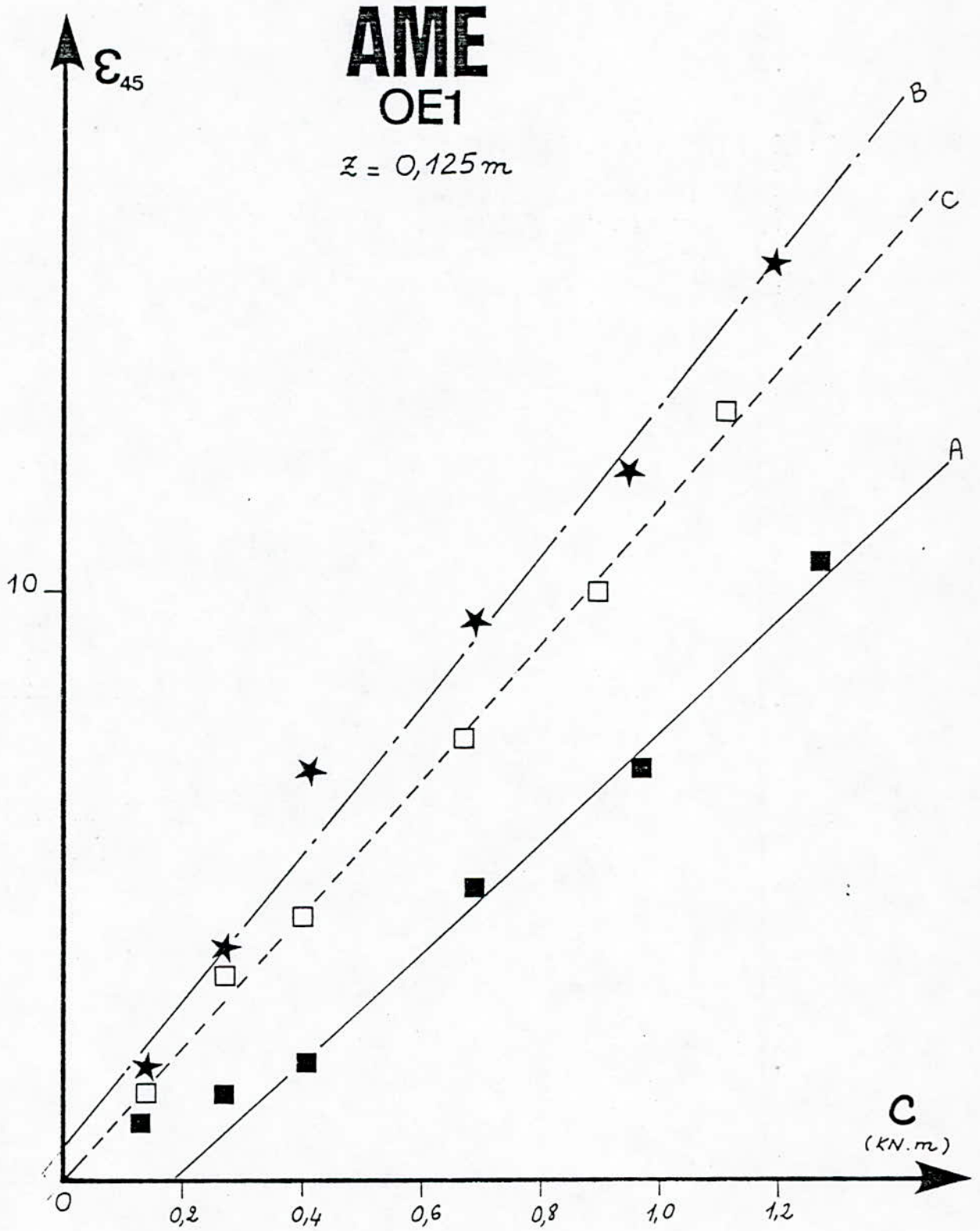
AILE INFÉRIEURE
FACE INFÉRIEURE



(*) nombre de jauges : 1

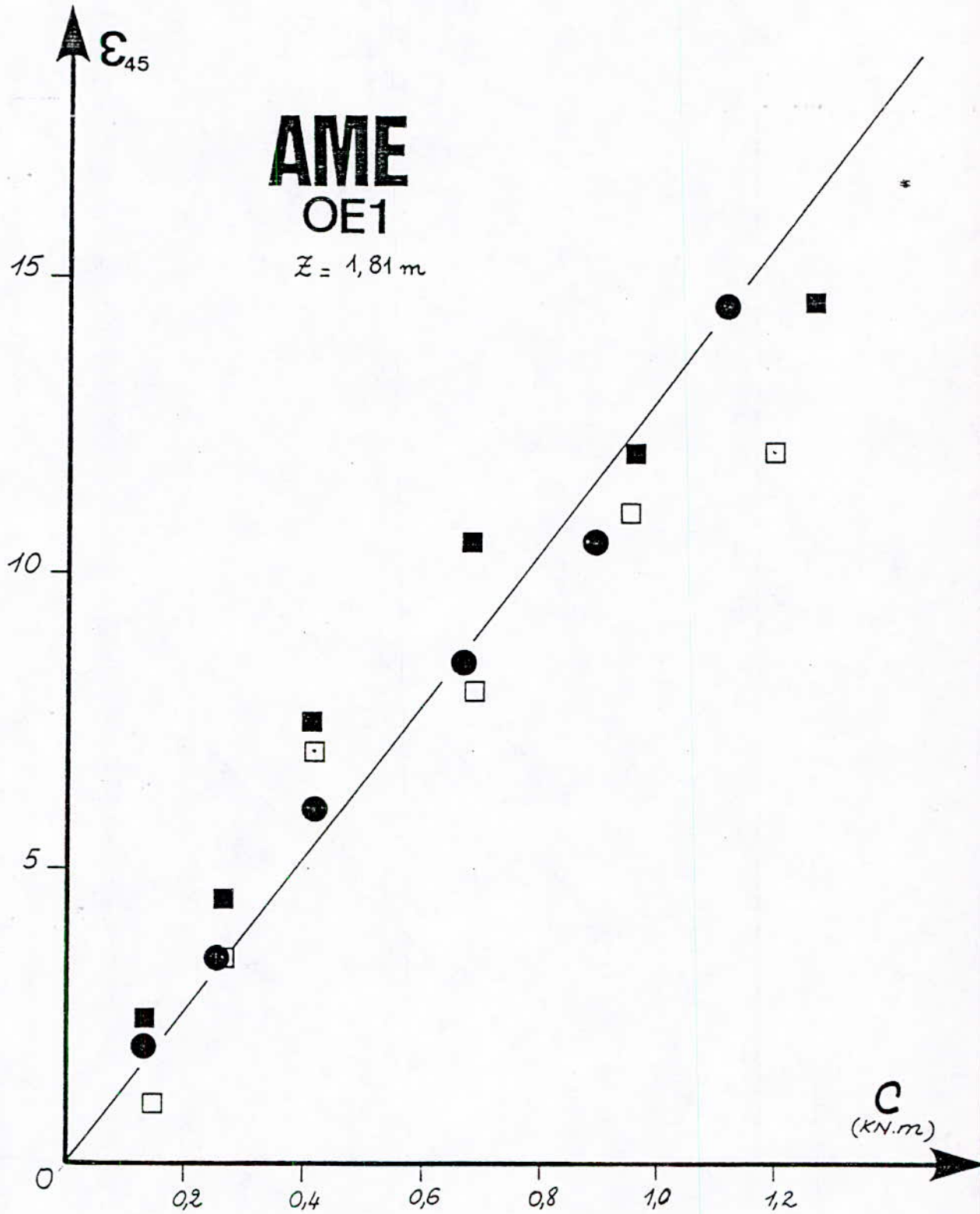


(*) nombre de jauges :2



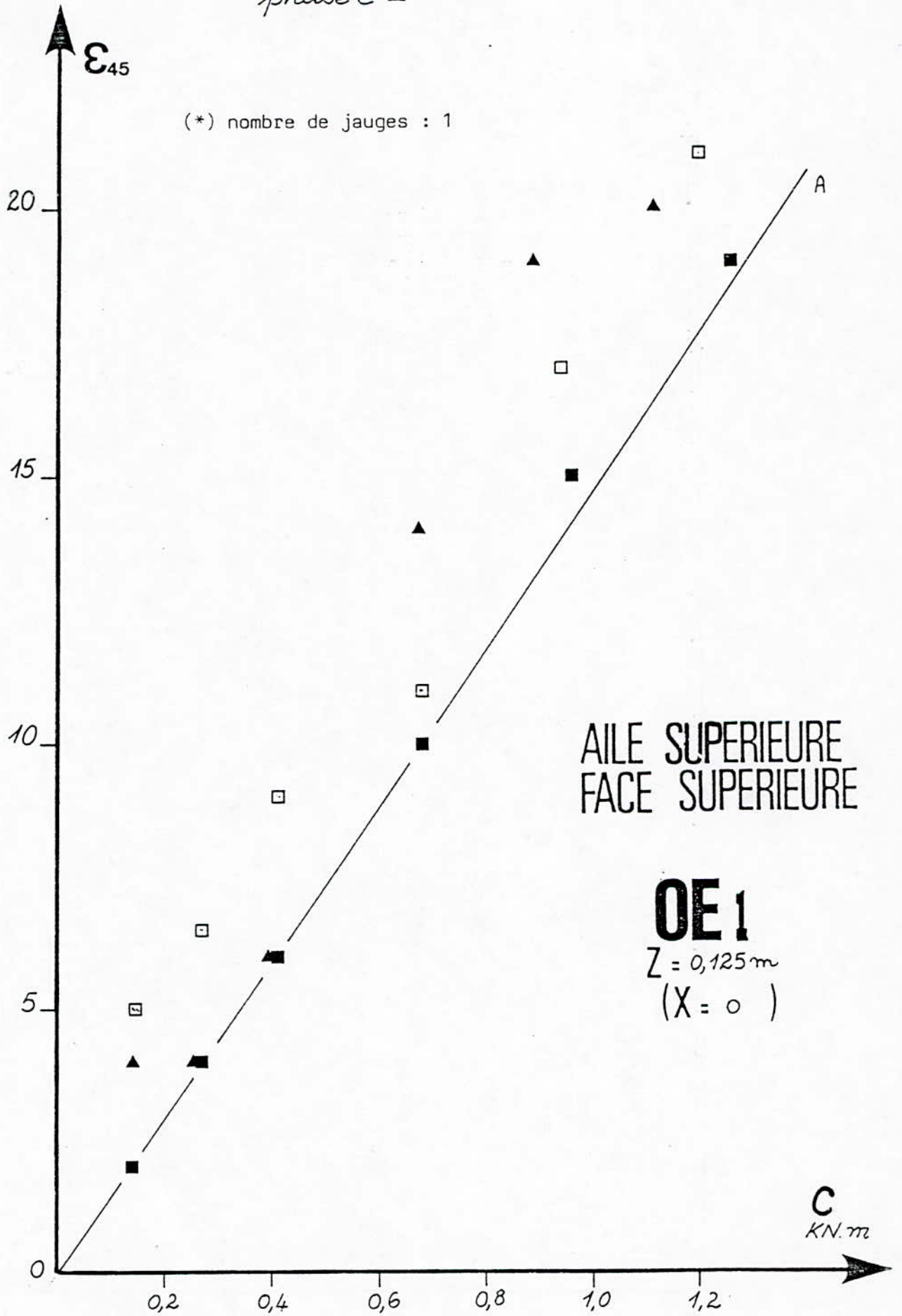
phase A ■
phase B ★
phase C □

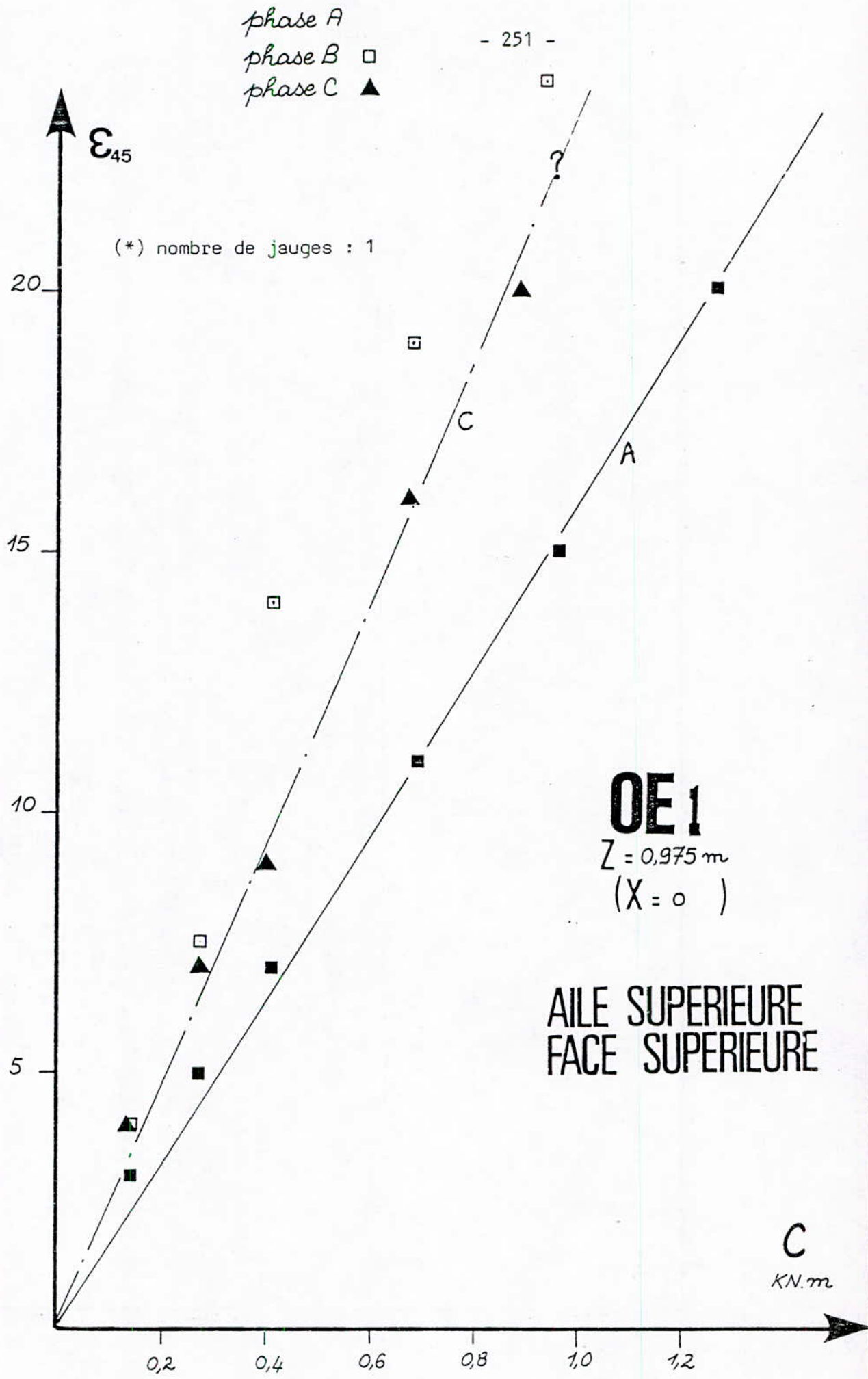
(*) nombre de jauges 2



(mauvaise symetrie) phase A ■
phase B □
phase C ●

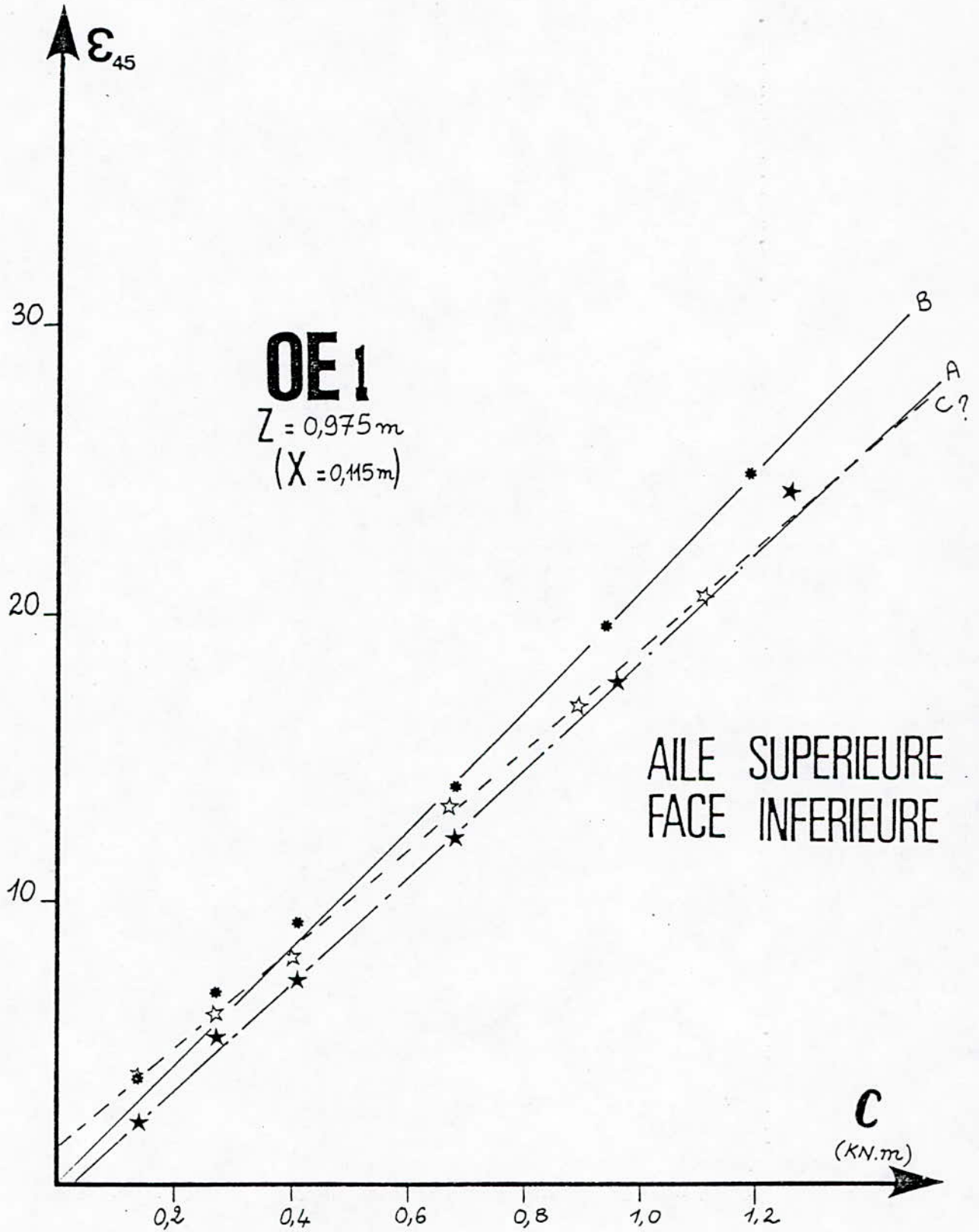
phase A ■
phase B □
phase C ▲





- * phase A
- * phase B
- * phase C

(*) nombre de jauges : 4



2.4. - Approche du calcul de la rigidité de torsion à l'origine (rigidité tangente) d'une section en béton armé

2.4.1. - Contribution des armatures à la rigidité de torsion

2.4.1.1. - Généralités

a) Les armatures longitudinales continues et adhérentes au béton contribuent directement à la résistance à l'effort normal et au moment fléchissant. Leur contribution se calcule facilement à partir des aires A_i de leur section traitées comme des éléments $d\Sigma$ de la section droite ne différant de ceux du béton que par leur module. Cependant, avant fissuration, la contribution des armatures est faible et souvent négligée.

Les termes dus aux armatures dans le calcul des contraintes et des déformations se transposent alors facilement en élasticité non-linéaire. Par exemple, aux termes dus au béton dans les rigidités, il faut ajouter les termes suivants dus aux armatures :

- dans \overline{EA}

$$\sum_i E_{ai} \cdot A_i$$

- dans \overline{EI}

$$\sum_i E_{ai} \cdot y_{ai}^2 \cdot A_i$$

b) Vis-à-vis de la torsion, l'influence des armatures, aussi bien longitudinales que transversales, est généralement négligée tant que le béton n'est pas fissuré. Cependant Karlsson [60] a trouvé, par un raisonnement qu'il conviendrait de vérifier, un accroissement notable de la rigidité de torsion dû aux armatures (par exemple, près de 15 % d'accroissement par rapport au béton seul, pour une section carrée armée longitudinalement aux quatre angles, avec un pourcentage géométrique de 2 %).

Après fissuration, les armatures transversales et longitudinales jouent un rôle fondamental lorsque les fissures sont inclinées (mécanisme du treillis). Dans le problème qui nous préoccupe, les fissures sont droites et seules les armatures longitudinales peuvent jouer un rôle, par effet de joujon.

Les essais montrent cependant que c'est le béton qui joue toujours le plus grand rôle.

c) Compte-tenu de la contribution essentiellement discontinue des armatures (aire discontinue et intervention seulement dans les sections de fissures) on ne peut pas reprendre les raisonnements précédents, dans l'hypothèse d'un milieu continu fictif de module G variable représentant le comportement moyen d'une zone de poutre fissurée, en y incluant des termes dus aux armatures. Il faut un raisonnement spécifique qui va être développé ci-dessous, de façon à donner une base logique à la recherche d'expressions semi-empiriques.

2.4.1.2. - Raideur due à l'effet de goujon

a) Ordre de grandeur de la rotation et du glissement dans une section de fissure

la rotation concentrée dans une section de fissure peut être estimée, certainement par excès, par l'expression :

$$\delta\theta = \left(\frac{1}{GK} - \frac{1}{G_o K} \right) C s_m \quad (4-11)$$

En appelant r la distance à l'axe de rotation de l'armature qui en est la plus éloignée, le glissement maximal au niveau d'une armature sera :

$$g = r \cdot \delta\theta \quad (4-12)$$

A partir des valeurs expérimentales connues de s_m , G_o , K et \overline{GK} (rigidité sécante) on peut calculer le glissement dans les différents essais réalisés. On se place dans la phase de développement maximal de la fissuration et sous une valeur du couple C égale au tiers du couple C_o qui provoquerait la fissuration inclinée due au cisaillement dans la poutre homogène (élasticité linéaire).

repère	C_o (KN.m)	$G_o K$ (KN.m ²)	phase	s_m (mm)	C (KN.m)	\overline{GK} (KN.m ²) (*)	$\delta\theta$ (10 ⁻⁶ rd)	r (mm)	g (10 ⁻³ mm)
KE 10	41.3	52700	C	64	13.8	18700	30	240	7.3
KE 11	27.6	39300	C	74	09.2	10800	46	240	11.0
KE 12	32.0	45200	B	76	10.7	18200	27	240	06.4
KE 13	25.6	35200	C	71	08.5	16800	19	240	04.5
KE 14	39.9	52600	C ₁	78	13.3	18900	35	240	08.4
KE 15	29.2	39700	B	104	09.7	21600	21	240	05.1
KE 16	19.9	26000	D	220	06.6	15200	40	208	08.3
KE 17	37.3	50800	C	103	12.4	19000	42	240	10.1
KE 18	26.6	34800	C	89	08.9	7800	79	240	18.9
KE 19	37.9	54500	C	63	12.6	27100	15	240	03.5
KE 20	31.2	39200	C	63	10.4	13200	33	240	07.9
KE 23	09.41	7300	C	99	3.14	3270	52	184	09.7
KE 24	04.74	2750	C	84	1.58	1440	44	181	07.9
KE 25	1.12	340	C	51	0.373	205	37	181	06.7

(*) rigidités sécantes

tableau 6 Glissement maximal au niveau de l'armature, dans une section de fissure.

Pour différents essais relatifs à des sections pleines ou creuses, le tableau (6) présente les résultats de ce calcul. En moyenne, le glissement est d'environ 8 millièmes de mm, ce qui est très petit. La valeur maximale (près de 2 centièmes de mm) est obtenue pour le plus petit pourcentage d'armatures et une section creuse, la valeur minimale ($3,5 \cdot 10^{-3}$ mm) pour le plus grand pourcentage d'armatures et une section pleine. Ceci met bien en évidence l'influence de l'armature.

Des glissements aussi petits, de l'ordre d'un centième de mm, justifient bien l'hypothèse du comportement linéaire vis-à-vis de l'effet de goujon.

b) Relation entre la force transversale et le glissement

Sous sa forme générale, le problème peut être posé de la façon suivante : un plan de glissement sépare deux milieux élastiques semi-infinis qui sont traversés par une barre élastique perpendiculaire au plan précédent. Quelle est alors la relation entre la réaction transversale à la barre et le glissement relatif ?

Ce problème a été résolu pour l'application, en mécanique des sols, au comportement d'un pieu sous l'action d'une force transversale, ou au comportement d'une barre de clouage du sol. La solution en est rappelée par Schlosser [93].

b1) Réaction normale sol-inclusion (selon Schlosser)

La présence d'inclusions horizontales dans un massif de sol frottant, à parement vertical et à surface horizontale, a pour effet de modifier la forme de la surface de rupture potentielle et de la rendre perpendiculaire à la direction des inclusions.

Lorsque ces dernières ont une certaine rigidité (rigidité résultant soit du fait qu'il faille les battre, soit du fait qu'elles soient entourées d'une épaisse couche de coulis, dans le cas de barres scellées au terrain), elles sont sollicitées en plus de la traction, par des efforts de flexion et de

cisaillement, à la manière d'un pieu soumis à une force horizontale, et à un moment en tête. Ce problème de pieu sollicité en tête a été étudié et expérimenté par les Laboratoires des Ponts et Chaussées à Paris.

Le calcul fait en élastoplasticité par la méthode du coefficient de réaction du sol, conduit à la résolution de l'équation :

$$EI \cdot \frac{d^4 y}{dz^4} + k_s \cdot y \cdot B = 0$$

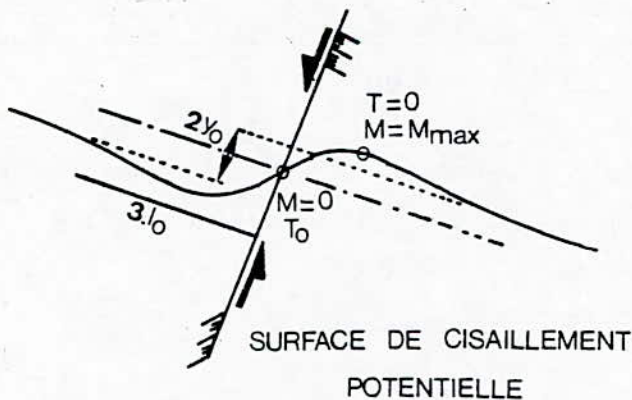
- k_s → coefficient de réaction du sol
- y → déplacement latéral du pieu
- B → largeur du pieu

la solution de cette équation introduit la notion de "longueur de transfert". Cette longueur est donnée par l'expression :

$$l_0 = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k_s \cdot B}}$$

Dans le cas d'un pieu fonctionnant comme un pieu infiniment long ($L \gg 3 l_0$) et libre en tête, on obtient :

$$y_{\max} = y_0 = \frac{2}{k_s \cdot B \cdot l_0} \cdot \left(T_0 + \frac{M_0}{l_0} \right)$$



Remarque : Cette méthode n'est valable que lorsque les déplacements en tête ne dépassent pas quelques centimètres

Fig. 96 Déformée schématique d'une barre sollicitée au cisaillement le long de la surface de rupture potentielle.

b2) Relation effort transversal T équilibré par une armature - glissement relatif g des deux parties de béton séparées par la fissure

Notons :

T → Effort transversal équilibré par une armature de diamètre \emptyset traversant perpendiculairement un plan de fissure

g → Glissement relatif des deux parties de béton séparées par la fissure.

La transposition des résultats précédents à notre problème, permet d'écrire la relation :

$$T = \frac{E_{bo} \cdot \emptyset}{8} \cdot \sqrt[4]{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}} \cdot g} \quad (4-13)$$

avec les notations suivantes :

E_{bo} → Module de déformation longitudinale à l'origine du béton

E_a → Module de l'acier de la barre

\emptyset → diamètre de l'armature.

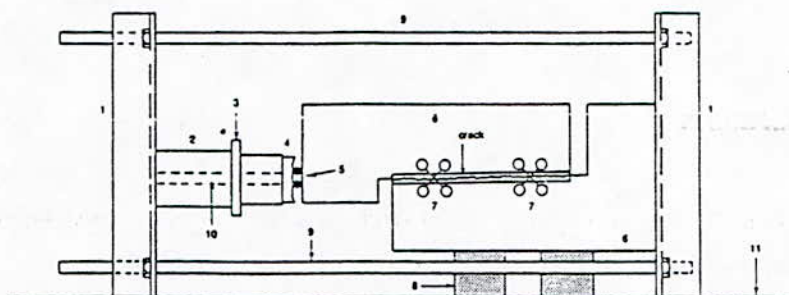
Pour vérifier la validité de cette formule, confrontons la à différents résultats d'essais

b3) Comparaison de la formule empirique $T = f(g)$ avec des résultats expérimentaux

Nous disposons, pour la littérature, de plusieurs résultats d'essais. Ceux-ci sont poussés jusqu'à rupture, donc bien au-delà du domaine linéaire.

- Essais Hamadi - Regan [47]

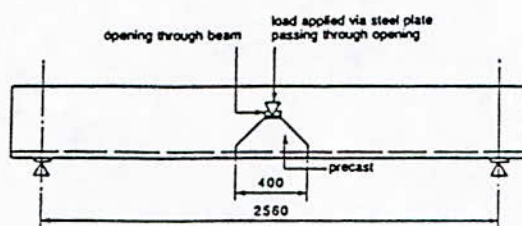
Ce sont des essais de résistance à l'effort tranchant. Il s'agit de poutres où la charge est appliquée directement sur les armatures principales de flexion, par l'intermédiaire d'un bloc de béton désolidarisé du reste de la poutre (disp. exp . fig. 97). La rupture se produit par éclatement du béton d'enrobage des armatures.



- 1: End supports (steel channels)
- 2: Hollow ram jack
- 3: Plate
- 4: Load-cell (25 kN capacity)
- 5: Rollers
- 6: The specimen
- 7: Demec crosses
- 8: Timber supports
- 9: Rods tightened to the vertical channels by nuts. The lower rod passes through the timber support (8)
- 10: Horizontal plain bar fixed to the channel to hold the assembly (2, 3 and 4)
- 11: Laboratory floor

Figure Push-off specimen (700 x 300 x 150 mm) to be tested.

FIGURE 97



La figure (98) présente les résultats expérimentaux sous la forme de la force transversale T , rapportée à la force de rupture T_U , en fonction du glissement g . Les résultats concernent deux bétons (un normal, un léger) et trois diamètres d'armatures (on a exclu le diamètre $\emptyset 16$ avec le béton normal, car sa résistance est bien plus élevée que dans les autres essais, et les résultats divergent notablement de l'ensemble des autres essais).

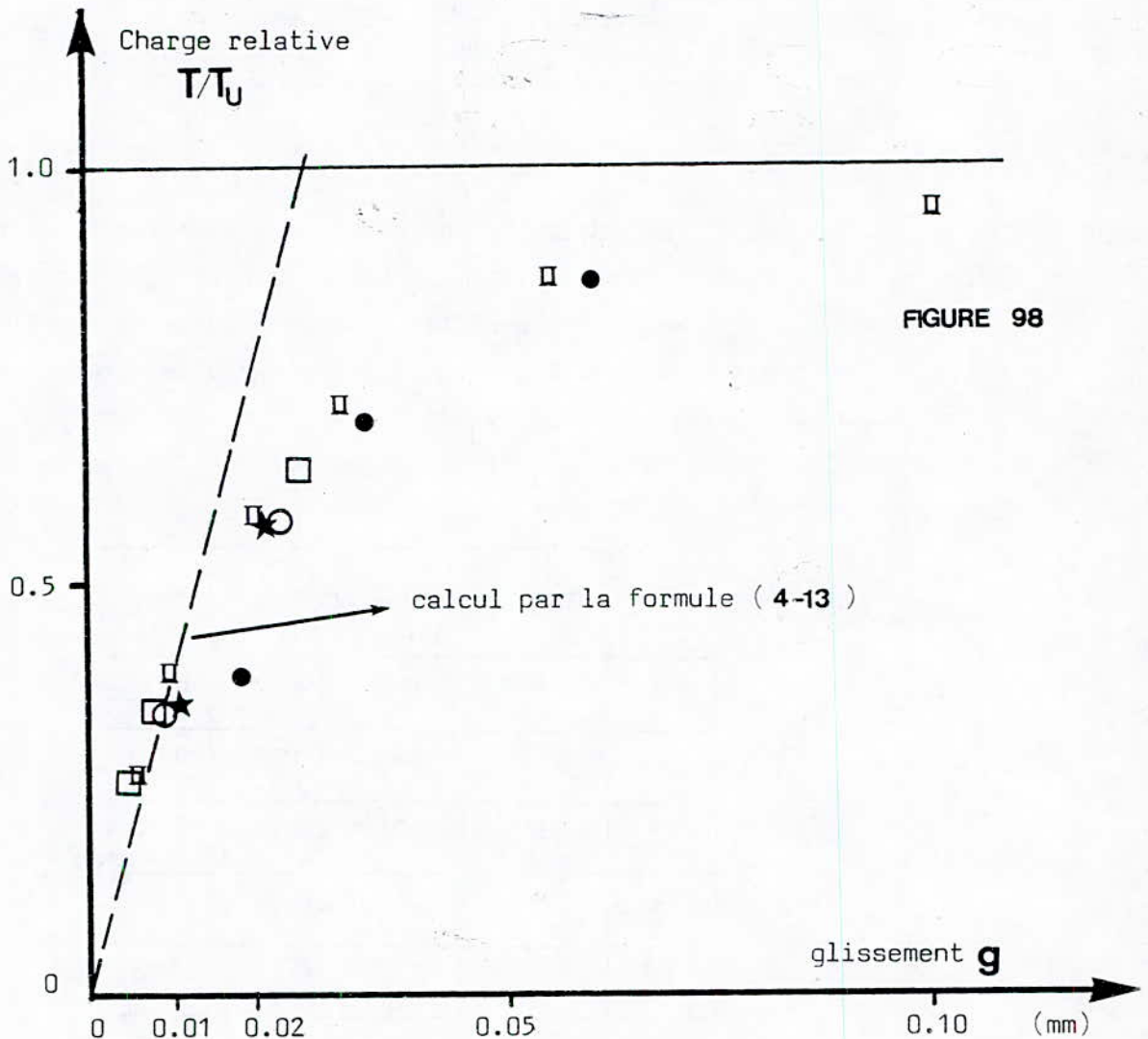
	BÉTON	f_c MPa	barres	$2T_U$ KN
●	NORMAL	30	$2 \emptyset 20$	6.00
□	"	29	$2 \emptyset 20$	5.60
○	LEGER	20	$2 \emptyset 20$	5.00
★	"	21	$2 \emptyset 20$	4.75
□	"	21	$2 \emptyset 20$	4.65

A partir de la résistance en compression du béton f_c , prise égale à 85 % de la résistance mesurée sur cubes, on peut évaluer le module (en MPa) par :

$$E_{bo} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_c} \quad \text{pour le béton normal}$$

$$E_{bo} = 1650 \cdot \sqrt[3]{\rho_s^3 \cdot f_c} \quad \text{pour le béton léger, en admettant pour sa densité sèche } \rho_s = 1,55.$$

A partir du module E_{bo} moyen, on peut alors tracer la droite représentative de la formule (4-13). On constate (Fig.98) qu'elle représente convenablement les résultats expérimentaux moyens tant que le glissement reste inférieure à 0,01 mm.



- Essais de Paulay et Park [84 et 89]

Ce sont des essais de résistance au cisaillement des joints de reprise de bétonnage.

Pour étudier l'effet de goujon, cette surface est lisse et graissée. Des courbes force-glissement sont présentées pour divers diamètres de barre (Fig. 99).

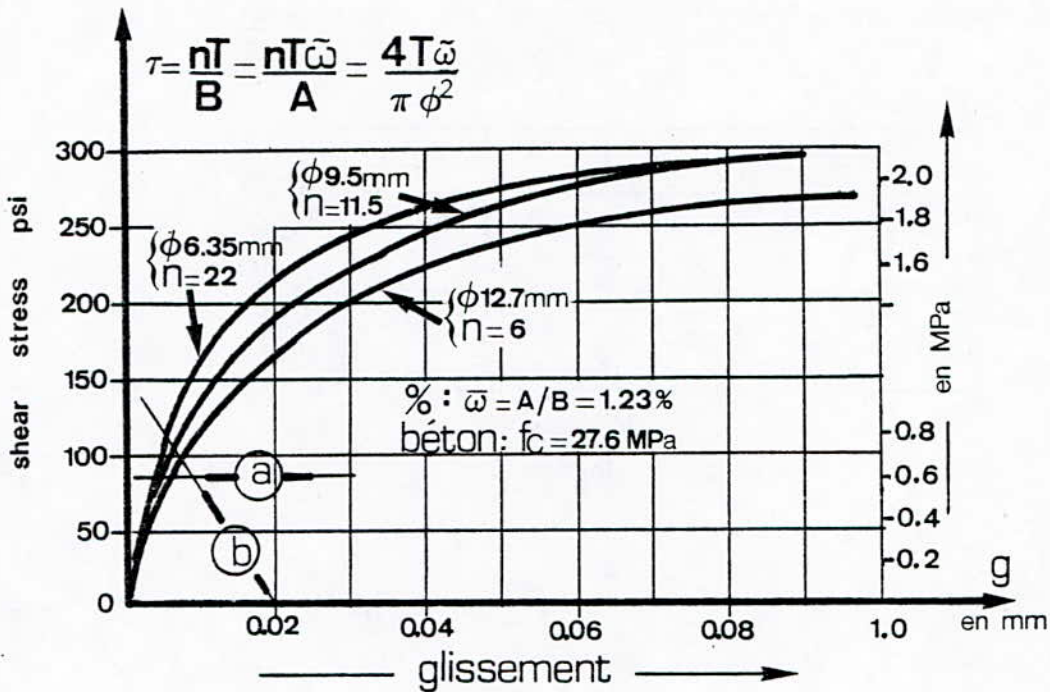


FIGURE 99

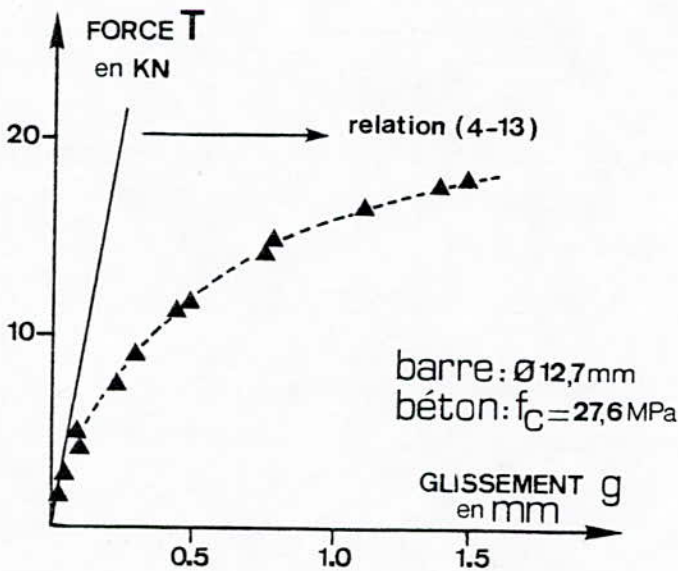


FIGURE 100

Il est difficile d'évaluer leur pente à l'origine ; par contre on peut comparer la pente de sécantes reliant l'origine à des points plus précis des courbes :

- a - pour un cisaillement moyen $\tau = 0,6$ MPa
- b - pour les intersections avec la droite passant par les points ($g = 0,5$ mm ; $\tau = 0$) et ($g = 0$; $\tau = 1$ MPa).

On obtient alors les valeurs du tableau suivant :

\emptyset (mm)	6,35	9,5	12,7
(a) $\frac{T}{\beta \cdot g}$ (MPa)	4120	4290	4130
(b) $\frac{T}{\beta \cdot g}$ (MPa)	3200	3460	3460

Ces valeurs permettent de vérifier la proportionnalité de T à β et à g.

Pour le diamètre 12,7 mm, on dispose de résultats un peu plus précis dans le domaine des faibles glissements, reportés à la figure (100), sur laquelle on a porté aussi la droite représentant la formule (4-13), le module étant calculé à partir de la résistance par :

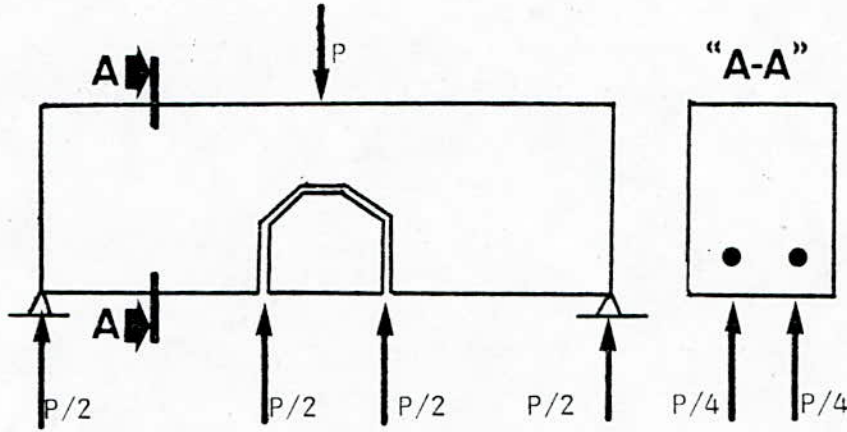
$$E_{bo} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_c} \quad (\text{en MPa})$$

On constate encore que cette formule donne une évaluation correcte de la pente à l'origine de la courbe force-glissement.

- Essais H.P.J. Taylor [100]

L'essai proposé par Taylor met bien en évidence l'effet de goujon des armatures. Cet essai est poussé jusqu'à rupture donc bien au-delà du domaine linéaire.

La charge totale P est appliquée sur la partie centrale du corps d'épreuve ; donc la fraction reprise pour chaque barre est $P/4$ comme indiqué ci-dessous :



La figure (101) présente les résultats expérimentaux sous la forme de la force transversale $T = P/4$ en fonction du glissement g .

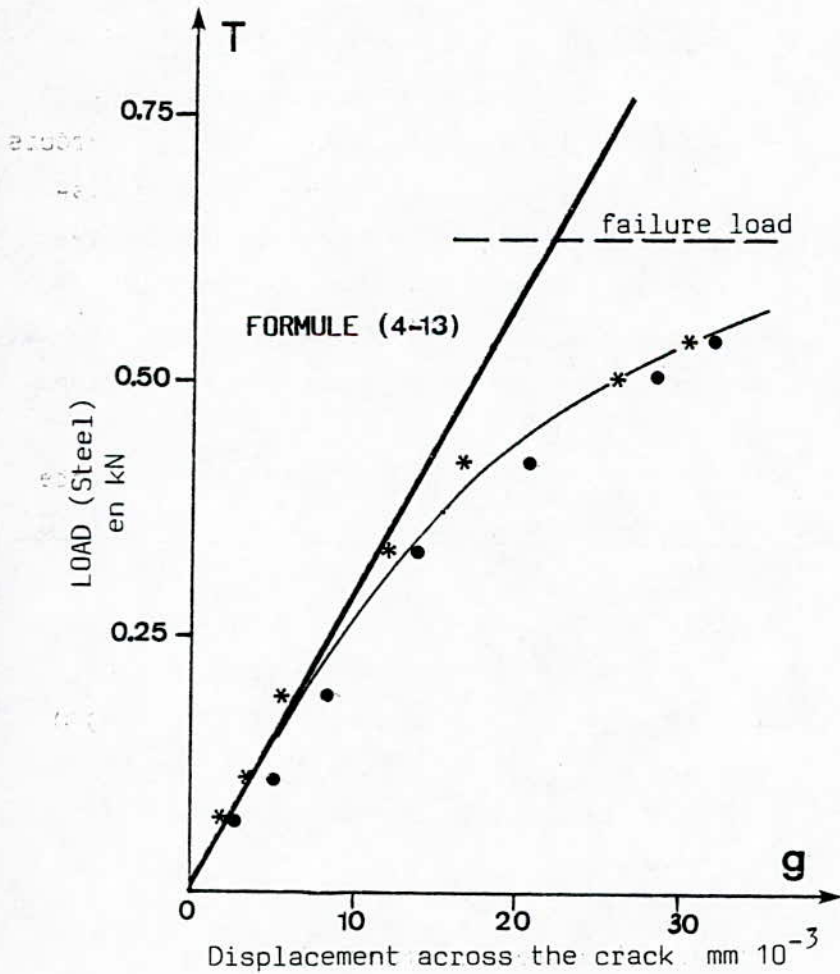


Fig 101- Relation force-glissement expérimentale d'après H.P.J. TAYLOR

Ces résultats concernent le micro-béton ayant les caractéristiques suivantes :

Agrégats :	2,4 - 1,2 mm.....	58 %
	1,2 - 0,6 mm.....	20 %
	0,6 - 0,3 mm.....	15 %
	0,3 - 0,15 mm.....	7 %

$$\text{Rapport } \frac{E}{C} = 0,4 \text{ et } \frac{\text{Agrt}}{C} = 4,5.$$

A partir de la résistance en compression f_c , on évalue le module E_{bo} (en kg/cm²) par la relation suivante :

$$E_{bo} = 50\ 000 \cdot [\sqrt[3]{f_c} - 1,5 + \log D]$$

D : diamètre du plus gros agrégat employé (en mm)

f_c : résistance en compression (en kg/cm²)

Pour D = 2,4 mm et $f_c = 241$ kg/cm², on obtient :

$$E_{bo} = 28870 \text{ MPa}$$

Le tracé de la droite $T = \zeta \cdot g$ (formule 4-13) donne encore une très bonne approche de la courbe expérimentale. Cela vient donc confirmer plus sérieusement la validité de l'analogie proposée, traduite par la formule (4-13), qui permet de connaître pour un glissement donné la valeur de la force transversale correspondante.

- Essais de Soroushian, Obaseki, Rojas et Sim [113]

Ces essais étudient l'effet de goujon d'armatures au niveau de liaisons poutre-poteau dans une structure, en présence d'une fissure dans la zone de contact poutre-poteau.

Le dispositif expérimental et le spécimen d'essai sont rappelés respectivement aux figures (102) et (103).

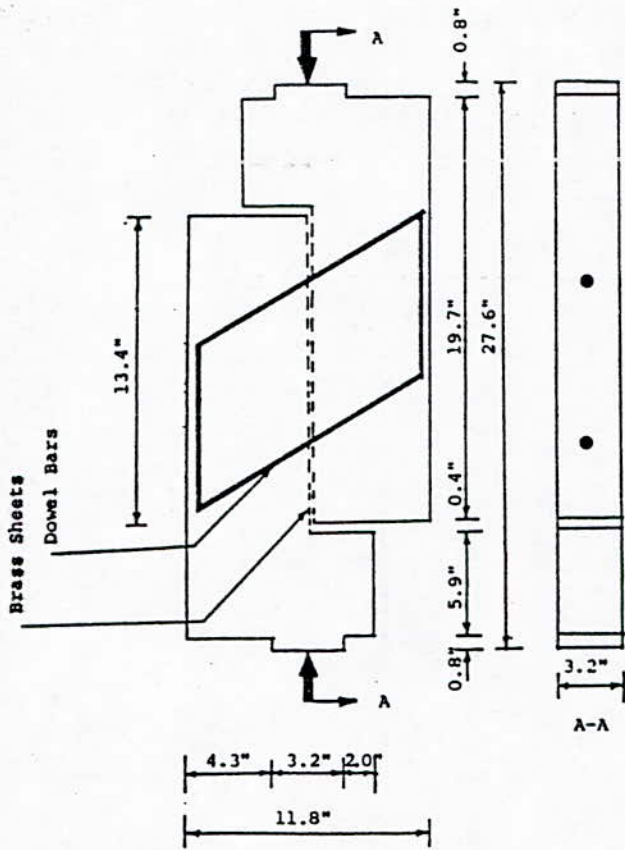


FIG 102 Dowel test specimen

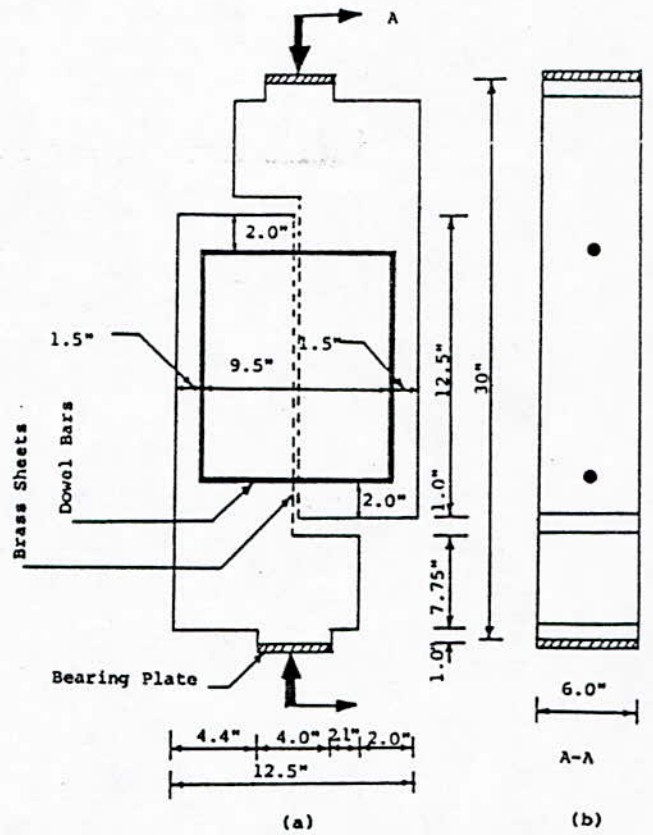


FIG 103 Test specimen: (a) dowel bars, and (b) Section A-A

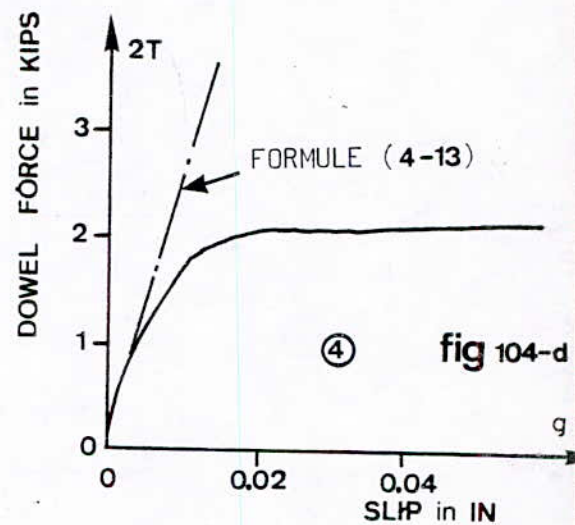
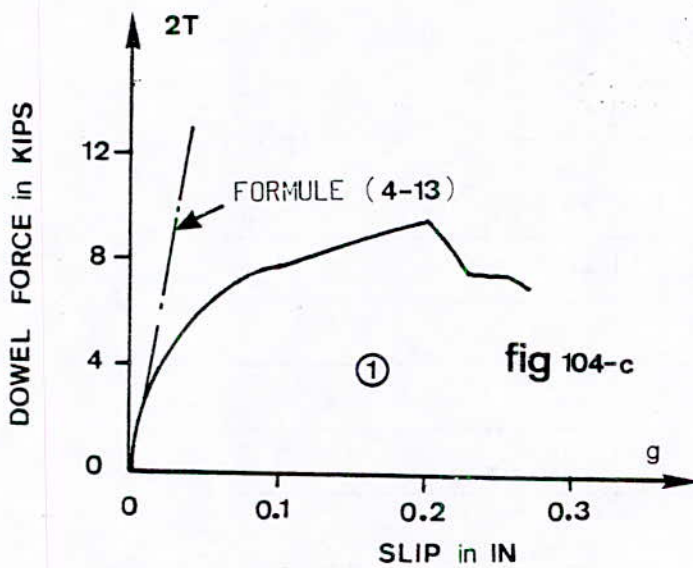
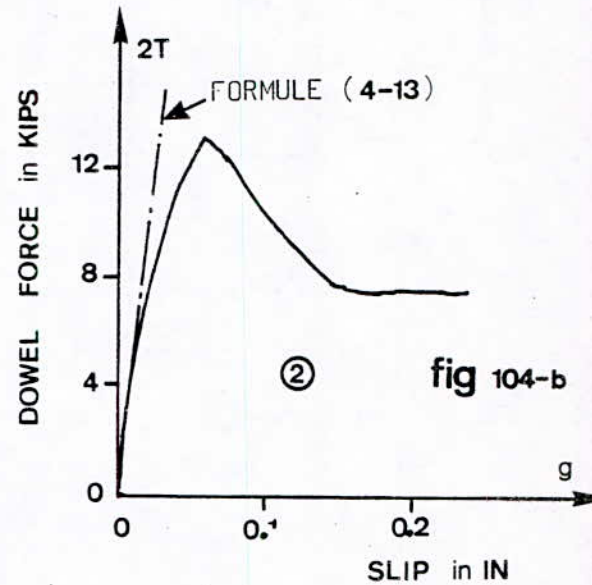
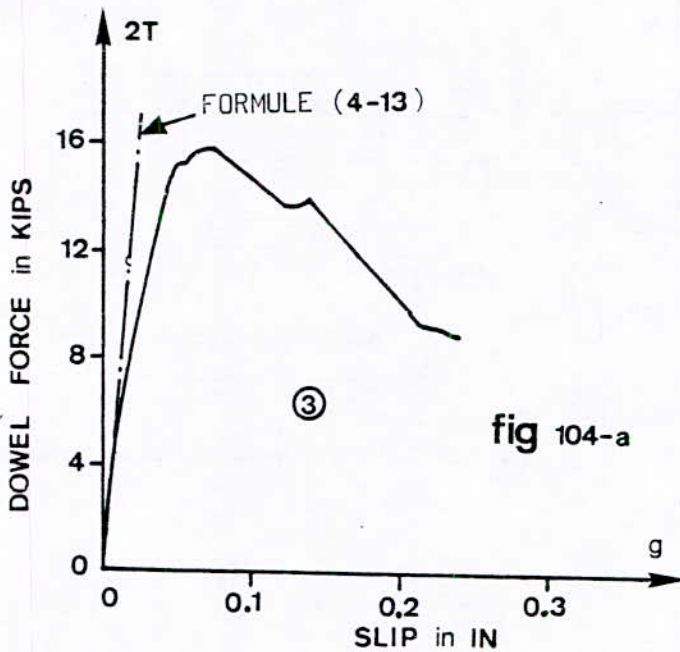
Quatre essais ont été réalisés ; les caractéristiques des matériaux employés sont les suivantes :

Repère	f_c MPa	E_{bo} MPa	E_a MPa	\emptyset cm
1	44,16	38400	$2,10 \cdot 10^5$	1,27
2	44,16	38400	$2,10 \cdot 10^5$	1,90
3	44,16	38400	$2,1 \cdot 10^5$	2,54
4	31,55	34280	$2,1 \cdot 10^5$	0,99

Des courbes force-glissement sont présentées pour divers paramètres de barre (Fig.104).

Sur celles-ci, nous avons aussi reporté la droite représentant la relation (4-13).

Dans le domaine des faibles glissements, on constate que la correspondance est encore très bonne.



c) Calcul de la raideur

Dans une section fissurée, la rotation "concentrée" $\partial\theta_1$ se fait autour de l'axe longitudinal z passant par le centre de torsion.

Le glissement au niveau de chaque armature, dont la distance au centre de torsion est r_i , est donné par :

$$g_i = r_i \cdot \partial\theta_1$$

la force transversale équilibrée par chaque armature est, d'après la formule (4-13) :

$$T_i = \frac{E_{bo} \cdot \varnothing_i}{8} \cdot \sqrt[4]{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}}} \cdot g_i$$

elle est perpendiculaire à la droite passant par le centre de torsion et l'armature considérée. La part C_a du couple de torsion équilibrée par les armatures est donc :

$$C_a = \sum_{i=1}^n T_i \cdot r_i = R_a \cdot \partial\theta_1 \quad 4-14$$

ou :

$$C_a = \frac{E_{bo}}{8} \cdot \sqrt[4]{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}}} \cdot \partial\theta_1 \cdot \sum_{i=1}^n \varnothing_i \cdot r_i^2$$

D'après (4-14), la raideur est donc :

$$R_a = \frac{E_{bo}}{8} \cdot \sqrt[4]{\pi \cdot \frac{E_a}{E_{bo}}} \cdot \sum_{i=1}^n \varnothing_i \cdot r_i^2 \quad 4-15$$

Dans cette approche considérée, on a comme inconnue la position du centre de torsion(*) autour duquel se fait la rotation (nécessaire pour évaluer r_i).

(*) Ce problème a été résolu pour les sections minces en double T OE_1 et OE_2 (cf. § 2-235). Pour les sections creuses, après fissuration de flexion, le déplacement du centre de torsion par rapport à sa position initiale est très faible.

2.4.2. - Tentative de calcul de la rigidité de torsion à l'origine (Modèle proposé et formulation générale)

On considère une zone de poutre de longueur l , comportant n fissures identiques, soumise à un couple de torsion constant C .

On décompose la rotation totale sur la longueur l en deux termes (un raisonnement du même genre, mais pour les poutres présentant des fissures inclinées dues à la torsion, donc non transposable ici, a été utilisé par Walsh, Hall et Archer [105])

$$\Theta = \underbrace{\int_0^l \left(\frac{d\Theta}{dz}\right) dz}_{\text{intégration des rotations dans le béton non fissuré}} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \Theta_j}_{\text{Somme des rotations concentrées dans les section de fissures}} \quad 4-16$$

intégration des rotations dans le béton non fissuré

Somme des rotations concentrées dans les section de fissures

Ceci s'écrit encore :

$$\Theta = \frac{Cl}{(GK)} + n \cdot \partial\Theta = \frac{Cl}{GK}$$

(GK) étant la rigidité moyenne du béton entre les fissures, $\partial\Theta$ la rotation concentrée à chaque fissure (égale pour toutes les fissures) et \overline{GK} la rigidité moyenne globale cherchée.

Supposons d'abord le béton non armé. Le couple est équilibré, en toute section, par le béton seul : $C = C_b$. L'expression précédente s'écrit alors :

$$\Theta_o = \frac{Cl}{(GK)_o} + n \cdot \partial\Theta_o = \frac{Cl}{GK_b} \quad 4-17$$

\overline{GK}_b étant la rigidité moyenne globale due au béton seule, que l'on suppose connue à partir d'une hypothèse convenable sur le module fictif $G(x,y)$ [d'après les méthodes évoquées ultérieurement (§ 1.1.3.3.)].

On en tire la valeur de la rotation concentrée :

$$\partial\theta_o = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\overline{GK}_b} - \frac{1}{(GK)_o} \right] Cl \quad 4-18$$

Supposons maintenant la poutre armée longitudinalement. Le couple C est équilibré par le béton seul en section courante ($C = C_b$), par le béton et les armatures dans les sections de fissures. La rotation s'écrit :

$$\theta_1 = \frac{C}{(GK)_1} + n \cdot \partial\theta_1 = \frac{Cl}{GK} \quad 4-19$$

$(GK)_1$ étant la rigidité moyenne du béton entre les fissures, différente de $(GK)_o$ parce que l'action des armatures dans les fissures modifie certainement la distribution des cisaillements en zone courante. On a donc :

$$(GK)_1 = \lambda \cdot (GK)_o \quad 4-20$$

[λ est probablement proche de 1]

$\partial\theta_1$ est la rotation concentrée en chaque section de fissure, inférieure à $\partial\theta_o$ par suite de la présence des armatures, et \overline{GK} est la rigidité moyenne globale (béton + armatures) cherchée.

Dans une section de fissure, la part C_b du couple équilibré par le béton est donc fonction de la rotation $\partial\theta_1$, mais on n'a pas la proportionnalité de $\partial\theta$ au couple :

$$\frac{\partial\theta_1}{C_b} \neq \frac{\partial\theta_o}{C}$$

car l'action des armatures modifie aussi la contribution du béton. On peut simplement écrire :

$$\partial\theta_1 = \mu \cdot \partial\theta_0 \cdot \frac{C_b}{C} \quad 4-21$$

Par ailleurs, la part C_a du couple équilibrée par les armatures est proportionnelle à la rotation $\partial\theta_1$ et à la raideur de torsion R_a dans l'hypothèse où le comportement est élastique et linéaire pour l'effet de goujon :

$$\partial\theta_1 = \frac{C_a}{R_a} \quad 4-22$$

On a bien sûr :

$$C = C_a + C_b \quad 4-23$$

Les relations (4.18) (4.21) et (4.23) permettent de calculer les inconnues $\partial\theta_0$, $\partial\theta_1$, C_a , C_b . En particulier, la rotation concentrée s'écrit :

$$\partial\theta_1 = \frac{\frac{\mu l}{n} \left[\frac{1}{GK_b} - \frac{1}{(GK)_o} \right]}{1 + \frac{\mu l}{n} \left[\frac{1}{GK_b} - \frac{1}{(GK)_o} \right] R_a} C$$

Les relations (4.19) et (4.20) permettent alors de calculer la rigidité moyenne globale par :

$$\frac{1}{GK} = \frac{1}{\lambda(GK)_o} + \frac{\mu \left[\frac{1}{GK_b} - \frac{1}{(GK)_o} \right]}{1 + \mu \left[\frac{1}{GK_b} - \frac{1}{(GK)_o} \right] \frac{l}{n} R_a} \quad 4-24$$

dans cette expression, on trouve l'espacement moyen des fissures

$$s_m = \frac{l}{n}$$

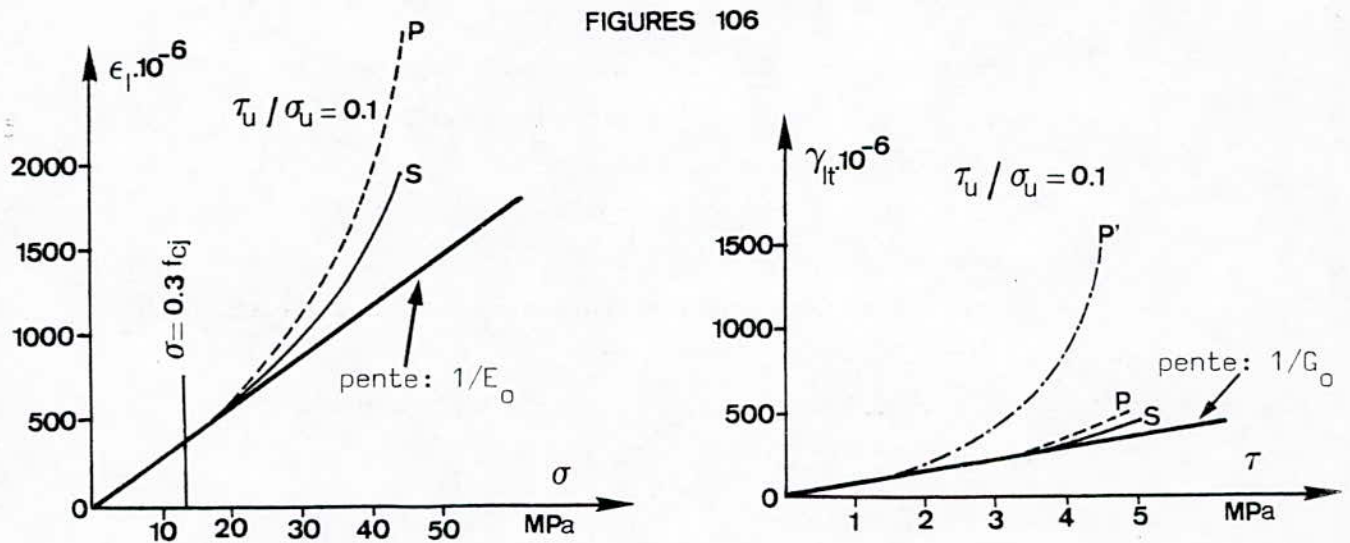
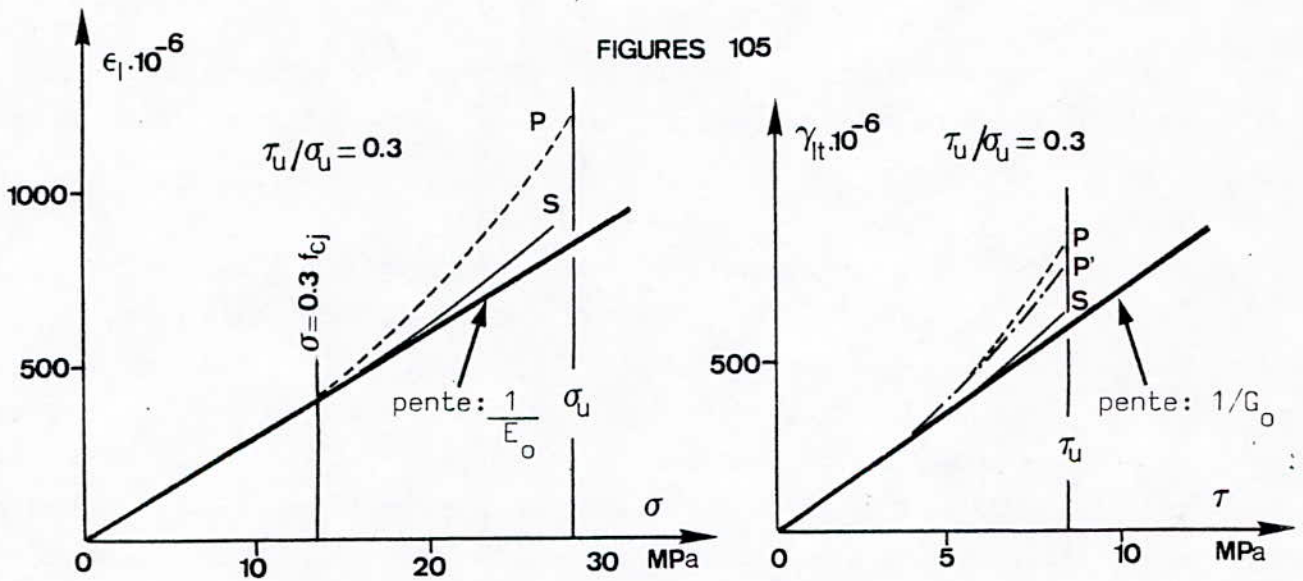
Le terme dû aux armatures fait intervenir une rigidité $R_a \cdot s_m$ (homogène à GK) qui est le produit de la "raideur concentrée" R_a d'un ressort spiral équivalent aux armatures par la distance moyenne s_m entre deux ressorts consécutifs ; ceci est logique.

2.4.3. - Application aux essais OE (sections en double téminces) et KE (sections creuses)

2.4.3.1. - Déformabilité du béton en compression et cisaillement combinés

la déformabilité du béton en compression et cisaillement combinés a fait l'objet d'une étude expérimentale au niveau du Service d'Etude des Structures du C.E.B.T.P. [40].

les figures (105) et (106) rapportent l'évolution de la déformation longitudinale ϵ_l et de la distorsion γ_{lt} en fonction de la contrainte σ ou τ dans le cas de chargements séquentiel [courbe (S)], et proportionnel [courbe (P)].



C'est toutefois les résultats schématisés par la figure (106) où le rapport $\frac{\tau_u}{\sigma_u}$ est relativement faible, qui permettent de tirer quelques hypothèses sur la variation du module de déformation transversale dans le cas où la sollicitation de flexion est prédominante devant celle de la torsion.

2.4.3.2. - Hypothèses sur la variation du module de déformation transversal G

En élasticité linéaire, le module de déformation transversal G est toujours supposé constant dans toute la section droite, et lié au module de déformation longitudinale (lui aussi constant) par l'expression :

$$G_0 = E_0 / 2(1 + \nu_0)$$

Après fissuration de flexion, le module de déformation $G(x,y)$ est variable dans une même section droite, il est essentiellement fonction de deux paramètres :

- l'état de fissuration (fissures droites) dû à la flexion
- l'intensité de la contrainte de cisaillement existante

Il est toutefois possible, dans le cas d'essais conduits a niveau du couple C assez petit (donc une distribution de τ à faibles valeurs ; cas des essais OE 1 et OE 2), d'envisager le calcul de la contribution du béton à la rigidité de torsion (terme GK_b) par l'intermédiaire d'un module de déformation transversale fictif $G(x,y)$, tel que :

- dans la zone comprimée : il reste constant et égal à G_0 sur toute la hauteur de la section comprimée ;

Le cadre de notre présente recherche, étant un problème de déversement (ou plus généralement de flambement en flexion composée déviée), les contraintes de cisaillement restent faibles, donc assez éloignées de la contrainte de rupture.

L'analyse de la figure 106 relative à $\frac{\tau_u}{\sigma_u} = 0,1$ permet d'envisager un module de déformation transversale constant et égal à G_0 sur toute la hauteur de section comprimée.

- Dans la zone tendue : on suppose que le module fictif décroît linéairement et proportionnellement à la distance à l'axe neutre de la valeur G_0 jusqu'à une valeur particulière G_1 au niveau de l'armature la plus tendue.

2.4.3.3. - Evaluation de la rigidité de torsion tangente à l'origine (terme béton)

a) Rigidité de torsion tangente d'une section rectangulaire mince

a1) Expression de la rigidité de torsion d'une section rectangulaire en fonction du module de déformation transversal moyen

Le module G est variable en fonction de l'abscisse y sur la ligne moyenne.

On peut encore admettre que chaque section de la membrane déformée par un plan perpendiculaire à l'axe y est un arc de parabole. On fait de plus l'hypothèse (valable à une certaine distance des petits côtés) que la flèche maximale de la membrane est proportionnelle à la pression $p(y)$, donc au module sécant $G(y)$.

L'équation de la membrane peut alors s'écrire :

$$w(x,y) = w_{\max}(y) \left[1 - \left(\frac{2x}{e} \right)^2 \right]$$

avec :

$$w_{\max}(y) = k \cdot G(y)$$

Le volume sous la membrane se calcule de la façon suivante :

$$dV (y) = \frac{2}{3} w_{\max} (y) \cdot e \cdot dy$$

$$V = \frac{2e}{3} \int_0^b w_{\max} (y) \cdot dy$$

$$2V = \frac{4e}{3} k \int_0^b G (y) \cdot dy = C$$

d'où, en posant :

$$\bar{G} = \frac{1}{b} \int_0^b G (y) \cdot dy \quad (\text{module sécant moyen})$$

$$k = \frac{3C}{4be\bar{G}} = \lambda \cdot C$$

Les contraintes de cisaillement sont :

$$\tau_{zx} = \frac{\partial w}{\partial y} = k \left[1 - \left(\frac{2x}{e} \right)^2 \right] \frac{dG}{dy}$$

$$|\tau_{yz}| = \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| = \frac{8k}{e^2} \cdot G (y) \cdot x$$

d'où

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2}$$

Nous avons besoin aussi de l'expression de l'accroissement de contrainte $\Delta\tau$ dû à un accroissement du couple ΔC auquel correspond l'accroissement de rotation $\Delta(d\Theta/dz)$. Cette expression n'est pas évidente car celle de τ dépend du module $G (y)$ par l'intermédiaire de k .

On a admis que la flèche de la membrane est proportionnelle à la pression totale p , donc au module sécant G et à la rotation $d\Theta/dz$:

$$\frac{p(y)}{t} = 2 G (y) \frac{d\Theta}{dz}$$

On doit admettre que l'accroissement de flèche est proportionnel à l'accroissement de pression Δp , lui-même lié à l'accroissement de rotation $\Delta(d\Theta/dy)$ et du module tangent G_t

$$\frac{\Delta p(y)}{t} = 2 G_t (y) \cdot \Delta \left(\frac{d\Theta}{dy} \right)$$

On reprend alors le calcul de la façon suivante :

$$\Delta w (x, y) = \Delta w_{\max} (y) \cdot \left[1 - \left(\frac{2x}{e} \right)^2 \right]$$

$$\Delta w_{\max} (y) = \Delta k_t \cdot G_t (y)$$

$$d(\Delta V) = \frac{2}{3} \Delta w_{\max} (y) \cdot e \cdot dy$$

$$2 \cdot \Delta V = \frac{4e}{3} \cdot \Delta k_t \int_0^b G_t (y) dy = \Delta C$$

$$\Delta k_t = \frac{3 \Delta C}{4be \overline{G}_t} = \lambda_t \cdot \Delta C$$

$$\Delta \tau_{zx} = \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} = \Delta k_t \left[1 - \left(\frac{2x}{e} \right)^2 \right] \frac{dG_t}{dy}$$

$$\Delta \tau_{yz} = \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} = \frac{8 \cdot \Delta k_t}{e^2} \cdot G_t (y) \cdot x$$

$$\Delta \tau = \sqrt{\Delta \tau_{zx}^2 + \Delta \tau_{yz}^2}$$

Faisons l'égalité des travaux virtuels, comme en 2.4.3.3. (§ c1), en remplaçant $\Delta(d\Theta/dz)$ par $\Delta C / \overline{G}_t K$:

$$c \cdot \frac{\Delta C}{\overline{G}_t K} = \iint_{(\Sigma)} \tau \cdot \Delta \delta \cdot d\Sigma = \iint_{(\Sigma)} \frac{\tau \cdot \Delta \tau}{\overline{G}_t} \cdot d\Sigma$$

$$= \lambda \cdot C \cdot \lambda_t \cdot \Delta C \int_{(\Sigma)} (\dots) d\Sigma$$

soit :

$$\begin{aligned} \overline{G_t K} &= \frac{1}{\lambda \cdot \lambda_t \int_{(\Sigma)} (\dots) d\Sigma} \\ &= \frac{16 b^2 e^2 \overline{G} \cdot \overline{G}_t}{9 \int_{(\Sigma)} (\dots) d\Sigma} \end{aligned}$$

Pour un rectangle mince, on peut admettre en première approximation que les termes provenant de τ_{zx} seront négligeables.

En posant $\tau_{zx} = \Delta \tau_{zx} = 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{(\Sigma)} (\dots) d\Sigma &= \int_{(\Sigma)} \left[\frac{8}{e^2} G(y) \cdot x \cdot \frac{8}{e^2} \cdot x \right] d\Sigma \\ &= \frac{64}{e^4} \int_{-e/2}^{e/2} x^2 dx \int_0^b G(y) dy = \frac{64}{e^4} \frac{e^3}{12} b \overline{G} \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\overline{G_t K} \approx \overline{G}_t \cdot \frac{be^3}{3}}$$

La rigidité tangente est donc, en première approximation égale au module tangent moyen multiplié par l'expression classique de l'inertie en élasticité linéaire.

a2) Module moyen sur une section rectangulaire mince
[variation linéaire de $G(y)$]

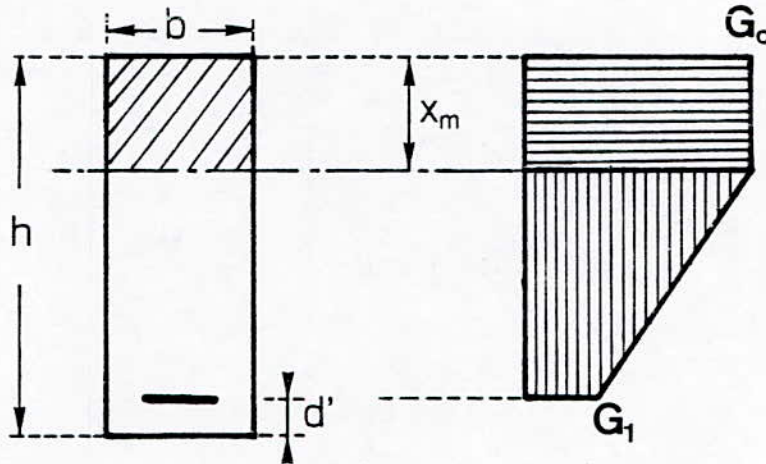


FIGURE 107

sur la partie comprimée (hauteur x_m) : $G = G_0$

sur la partie tendue (hauteur $h - x_m$) :

$$G(y) = G_0 + (G_0 - G_1) \frac{y}{h-d'-x_m}$$

$G = G_1$ au niveau de l'armature tendue

$$G'_1 = G_0 + (G_0 - G_1) \frac{x_m - h}{h-d'-x_m} \quad \text{sur la fibre inférieure}$$

Module moyen sur la partie tendue

$$\begin{aligned} \bar{G}' &= \frac{1}{2} [G_0 + G'_1] = G_0 - \frac{G_0 - G_1}{2} \frac{h - x_m}{h-d'-x_m} \\ &= G_0 - \frac{G_0 - G_1}{2} \frac{1}{1 - \frac{d'}{h-x_m}} \end{aligned}$$

Module moyen sur l'ensemble :

$$G = \frac{1}{h} [G_0 x_m + \bar{G}'(h-x_m)]$$

$$\bar{G} = \frac{1}{h} \left[G_0 h - \frac{G_0 - G_1}{2} \frac{h - x_m}{1 - \frac{d'}{h - x_m}} \right]$$

a3) Calcul de la rigidité pour une section rectangulaire mince

$$\bar{GK} = \bar{G} \frac{hb^3}{3} = Z$$

$$= \frac{b^3}{3} \left[G_0 h - (G_0 - G_1) \ell \right] \text{ avec } \ell = \frac{h - x_m}{2 \left(1 - \frac{d'}{h - x_m} \right)}$$

$$\frac{3Z}{b^3} = G_0 (h - \ell) + G_1 \cdot \ell$$

$$G_1 = \frac{3Z}{b^3} - G_0 \left(\frac{h}{\ell} - 1 \right) \text{ avec } \ell = \frac{h - x_m}{2 \left(1 - \frac{d'}{h - x_m} \right)}$$

ou

$$\boxed{\frac{G_1}{G_0} = 1 + \frac{3Z}{b^3 \ell G_0} - \frac{h}{\ell}}$$

a4) Remarque - Application à une section à profil mince ouvert

Un profil mince ouvert peut être assimilé à un assemblage de rectangles minces de large b_i , d'épaisseur e_i ($e_i \ll b_i$), de module de déformation transversal moyen $\bar{G}_{t,i}$.

Par conséquent, **conformément au résultat du § a1** précédent, la rigidité de torsion tangente globale d'un profil mince ouvert peut être calculée, en première approximation, par la relation suivante :

$$\boxed{\bar{G}_t K \approx \frac{1}{3} \cdot \sum_i \bar{G}_{t,i} \cdot b_i \cdot e_i^3}$$

$$\text{avec } G_{t,i} = \frac{1}{b_i} \cdot \int_0^{b_i} G_t(s_i) \cdot ds_i$$

b) Cas de la section en double té (OE 1 et OE 2)

A partir des hypothèses précédemment admises (§ 2.4.3.2.), il peut être envisagé dans le cadre de la section en double té, la variation schématique suivante du module de déformation transversale $G(x,y)$ sur la section droite :

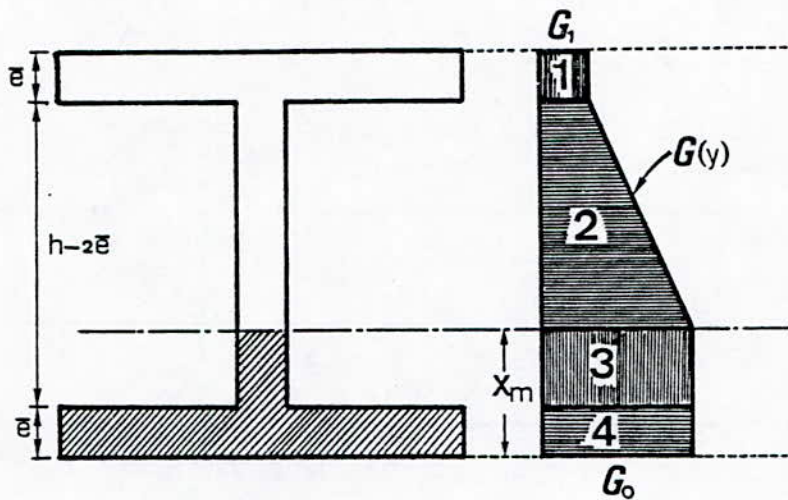


FIGURE 108

Par ailleurs à niveaux de fissuration voisins (A, B et C), on montre une forte similitude des rapports $(GK)_0/G_0K$ calculés respectivement pour la section en double té mince et la section rectangulaire la plus mince (KE 25).

Ce rapprochement permet d'envisager un calcul de la rigidité béton de la section en double té, comme une combinaison de rigidités de rectangles minces sans pénétration, soit :

$$G_t K = (GK_t)_{\text{exp}} = \sum_{i=1}^4 \bar{G}_i K_i = Z \quad 4-25$$

Le calcul de la rigidité d'une section rectangulaire mince ayant déjà été établi (§ 2.4.3.3.a), la rigidité de la section en double té peut s'écrire :

$$\overline{G_t K} = \frac{b\bar{e}^3}{3} \cdot G_1 + \frac{b\bar{e}^3}{3} \cdot G_0 + \left\{ \frac{1}{h-2\bar{e}} \cdot [G_0 (h-2\bar{e}) - \frac{G_0 - G_1}{2} \cdot (h-2\bar{e} - x'_m)] \right\} \cdot \frac{(h-2\bar{e}) \cdot \bar{e}^3}{3}$$

$$\overline{GK} = G_0 \left[\frac{b\bar{e}^3}{3} \cdot \frac{G_1}{G_0} + \frac{b\bar{e}^3}{3} + \left\{ \frac{1}{h-2\bar{e}} [(h-2\bar{e}) - \frac{1 - \frac{G_1}{G_0}}{2} \cdot (h-2\bar{e} - x'_m)] \right\} \frac{(h-2\bar{e})\bar{e}^3}{3} \right]$$

La rigidité $\overline{GK} = Z$ étant supposée connue (expérimentalement), on cherche G_1 :

$$\frac{G_1}{G_0} = \frac{\left[\frac{Z}{G_0} - \frac{b\bar{e}^3}{3} - \frac{\bar{e}^3}{3} (h-2\bar{e}) + \frac{\bar{e}^3}{6} (h-2\bar{e} - x'_m) \right]}{\left[\frac{b\bar{e}^3}{3} + \frac{\bar{e}^3}{6} (h-2\bar{e} - x'_m) \right]}$$

4-26

les valeurs ainsi calculées sont consignées au tableau (7)

Remarque : La rigidité Z à prendre en compte lors du calcul de $\frac{G_1}{G_0}$ représente un pourcentage δ de la rigidité expérimentale Z . Ce coefficient δ tient compte des corrections à apporter au calcul, inhérentes aux hypothèses admises. (§ 2.4.3.2.).

En posant :

$$G_1 = G_0 \cdot \delta, \text{ la relation (4-26) s'écrit}$$

$$(\delta Z) = G_0 \cdot \left[\frac{2b\bar{e}^3}{3} + (h-2\bar{e}) \cdot \frac{\bar{e}^3}{3} \right]$$

où :

$$\delta \cdot \left(\frac{Z}{G_0}\right) = \left[2 \frac{be^3}{3} + (h-2e) \cdot \frac{e^3}{3}\right] \quad 4-27$$

L'inertie exacte (calculée avec toutes les corrections) est :

$$K = \frac{Z}{G_0} = 4810 \text{ cm}^4$$

alors qu'en assimilant la section à une combinaison de rectangles minces sans pénétration, l'inertie est :

$$K = 4942 \text{ cm}^4$$

La valeur du coefficient δ est donc :

$$\delta = \frac{4942}{4810} = 1,025$$

(soit un écart de 2,5 %).

On peut donc prendre très justement $\delta = 1$.

Phase	f	x'_m (*) (cm)	G_1/G_0
A	0,967	2	0,990
B	0,865	1,5	0,815
C	0,745	1,25	0,559

ESSAI OE 1

Phase	f	x'_m (*) (cm)	G_1/G_0
A	0,890	1,75	0,866
B	0,829	1,75	0,756
C	0,761	1,75	0,591

ESSAI OE 2

Tableau 7 : Essais OE - Calcul du module fictif G_1

(*) $x'_m = x_m - e$ (en cm)

$$f = \frac{(GK)_0}{G_0 K}$$

c) Cas des sections creuses (essais KE 11, KE 13, KE 15
KE 18 et KE 20)

Le rappel des données expérimentales essentielles est apporté à l'annexe 4.

c1) Généralisation de la formule de Bredt

Nous admettons les hypothèses suivantes :

- le milieu est supposé continu ;
- la relation $\tau = f(\delta)$ reste linéaire (mais non réversible).

En supposant la pression $p(x,y)$ (non uniforme) qui agit sur la membrane, comme toujours proportionnelle au module de déformation transversale $G(x,y)$, il est possible d'envisager une formulation tangente du problème.

L'égalité du travail du couple de torsion C dans un accroissement virtuel de rotation unitaire $\Delta(\frac{d\theta}{dz})$, et du travail des contraintes τ dans des accroissements virtuels des distorsions : $\Delta\delta = \frac{\Delta\tau}{G_t}$, s'écrit :

$$\begin{aligned} C \cdot \Delta\left(\frac{d\theta}{dz}\right) &= \iint_{(\Sigma)} \tau \cdot \Delta\delta \cdot d\Sigma = \int_{(\Gamma)} q \cdot \Delta\delta \cdot ds \\ &= \frac{C \cdot \Delta C}{(2\Omega)^2} \cdot \int_{(\Gamma)} \frac{ds}{G_t(s) \cdot e(s)} \end{aligned}$$

avec :

$$q = \frac{C}{2\Omega} \quad (\text{flux de cisaillement constant dans un tube})$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta C}{2\Omega e(s)} \quad (\text{la variation de la contrainte de cisaillement})$$

$$\Delta\left(\frac{d\theta}{dz}\right) = \frac{\Delta C}{\overline{G_t K}} \quad (\text{accroissement virtuel de rotation unitaire})$$

On en déduit ainsi une généralisation de la formule de Bredt sous la forme :

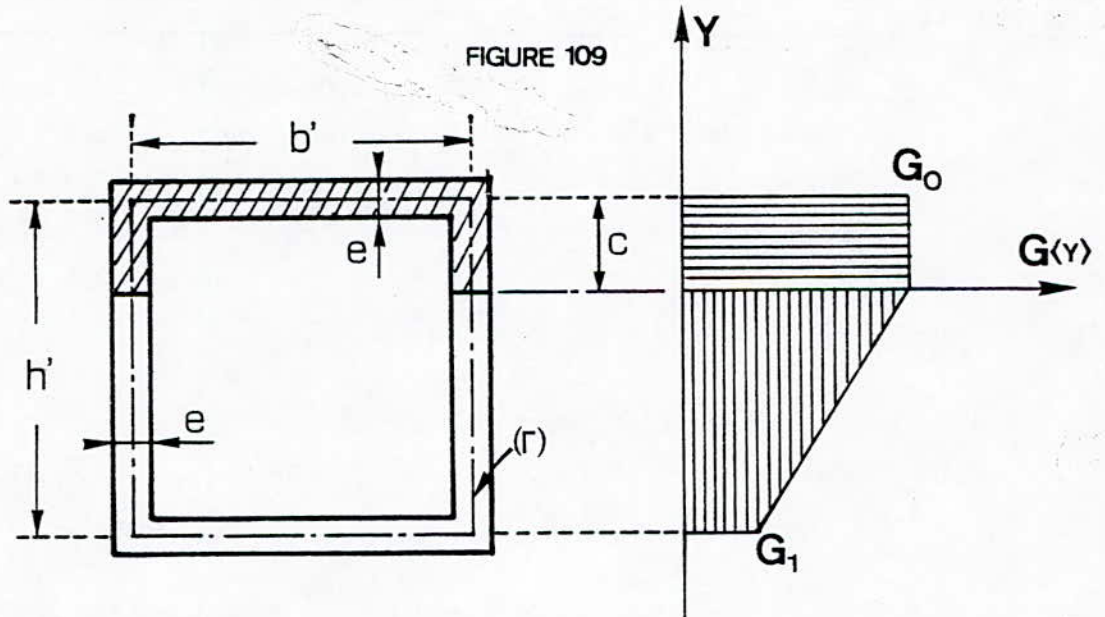
$$\overline{G_t K} = \frac{4 \Omega^2}{\int_{(\Gamma)} \frac{ds}{G_t(s) \cdot e(s)}}$$

4-28

$G_t(s)$ représentant le module de déformation transversal tangent, variable le long de la ligne moyenne du tube.

c2) Expression du module de déformation transversale sur la section droite

Les hypothèses admises permettent d'envisager la variation $G(y)$ suivante :



La formule de Bredt généralisée [relation (4-28)] permet d'écrire :

$$\overline{GK} = \frac{4 \Omega^2}{\frac{1}{e} \int \frac{ds}{G(s)}} = \frac{4b'^2 \cdot h'^2 \cdot e}{\frac{b'+2 \cdot c}{G_0} + \frac{2(h'-c)}{G_0-G_1} \cdot \log \frac{G_0}{G_1} + \frac{b'}{G_1}}$$

4-29

La rigidité \overline{GK} étant supposée connue (expérimentalement), et en posant : $\overline{GK} = Z$ et $Q = 4 b'^2 \cdot h'^2 \cdot e$, l'équation ci-dessus permet de déterminer le paramètre G , soit :

$$\left[\frac{b'+2c}{G_0} + \frac{2(h'-c)}{G_0-G_1} \cdot \log \frac{G_0}{G_1} + \frac{b'}{G_1} \right] \cdot Z = Q$$

ou :

$$(b'+2c - \frac{Q}{Z} \cdot G_0) \cdot G_1^2 - [2c - \frac{Q}{Z} \cdot G_0 + 2(h'-c) \cdot \log \frac{G_0}{G_1}] G_0 G_1 - b' G_0^2 = 0$$

En posant $x = G_1/G_0$, la détermination de G_1 se ramène à la résolution par approximations successives de l'équation suivante :

$$(b'+2c - \frac{Q}{Z} \cdot G_0) \cdot x^2 - [2c - \frac{Q}{Z} \cdot G_0 - 2(h'-c) \cdot \text{Log } x] \cdot x - b' = 0$$

4-30

Remarque : De même que pour les sections minces en double té, la rigidité (Z) figurant dans l'équation (4-30), représente une partie δZ de la rigidité expérimentale. En effet, les calculs respectifs d'une inertie exacte K_I (tube de côtés b et h) et d'une inertie K_{II} (en assimilant la section à celle d'un tube mince de dimensions $b'=h'$) permettent de mettre en évidence un rapport $\delta = K_{II}/K_I = 0,892$.

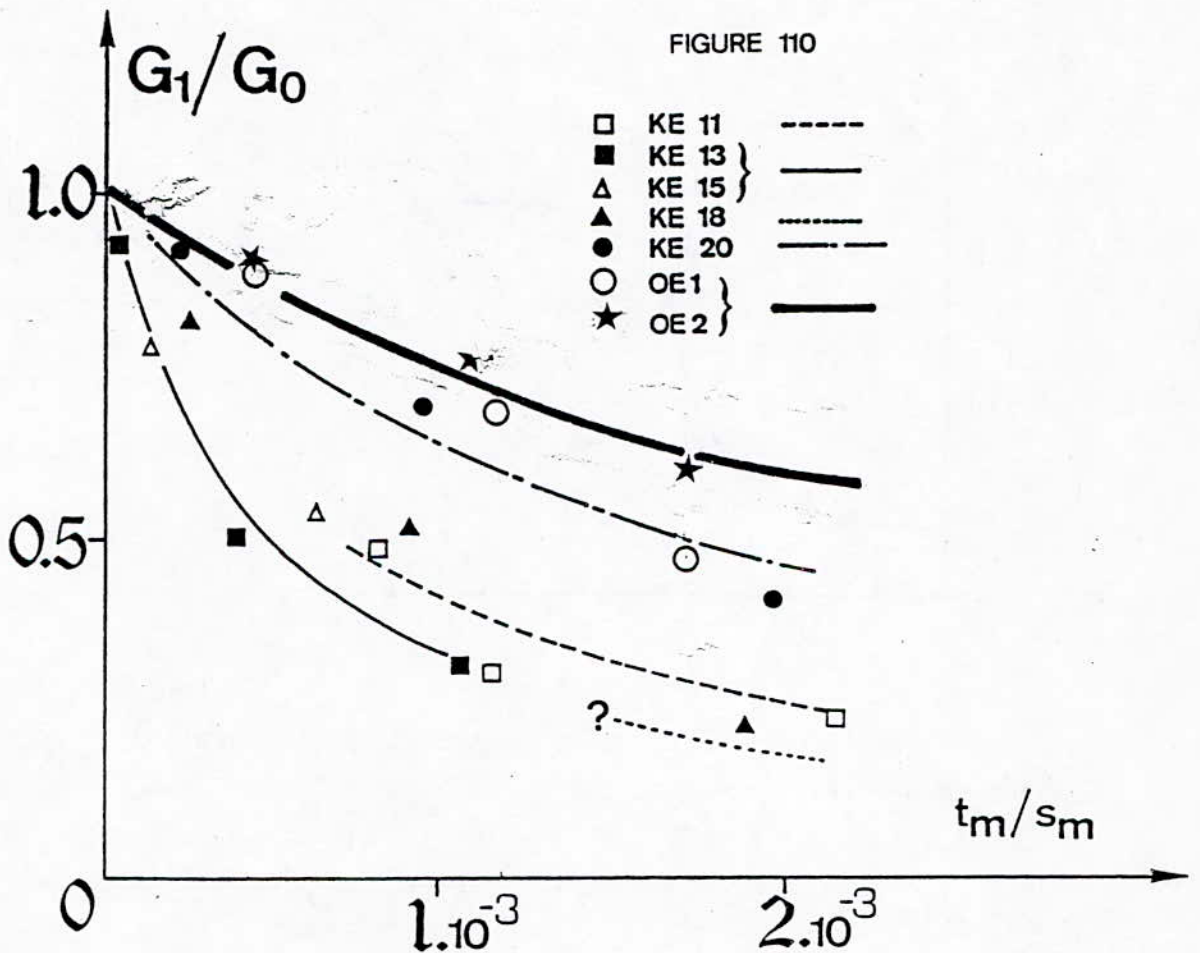
C'est précisément ce rapport $\delta = K_{II}/K_I$ que l'on admettra toujours subsister entre la rigidité non-linéaire calculée par la formule (4-29) et la rigidité réelle.

2.4.3.4. - Contribution du béton seul à la rigidité de torsion tangente initiale

Les formules (4-25) et (4-29) permettent le calcul des valeurs G_1/G_0 pour les différentes phases de chaque essai (en négligeant la contribution des armatures).

Ce calcul est rapporté (**Tab. 7**) par les essais OE 1 et OE 2) et Annexe 5 pour les sections creuses.

La figure (110) ci-dessous rapporte l'évolution de ce paramètre G_1/G_0 en fonction d'un état de fissuration moyen symbolisé par t_m/s_m , rapport de l'ouverture moyenne t_m au niveau de l'armature la plus tendue et de la distance moyenne s_m entre deux fissures successives.



Pour une section ne dépassant par un certain niveau de "dégradation" (voisin de $t_m/s_m < 1,5 \cdot 10^{-3}$), la variation de $G_1/G_0 = f(t_m/s_m)$ peut être traduite de façon significative par des courbes hyperboliques du type :

$$\frac{G_1}{G_0} = \frac{a}{a + \frac{t_m}{s_m}}$$

Par ailleurs, on peut remarquer, sur la figure (110) que l'on passe progressivement de la courbe supérieure extrême (essais OE 1 et OE 2) à la courbe inférieure extrême (KE 13) par une diminution progressive du paramètre R_a/G_0K symbolisant l'importance du phénomène de goujon.

C'est pour cette raison, que pour les différents essais (KE et OE), nous allons essayer de relier, ci-dessous, la constante a au paramètre R_a/G_0K (Fig. 111).

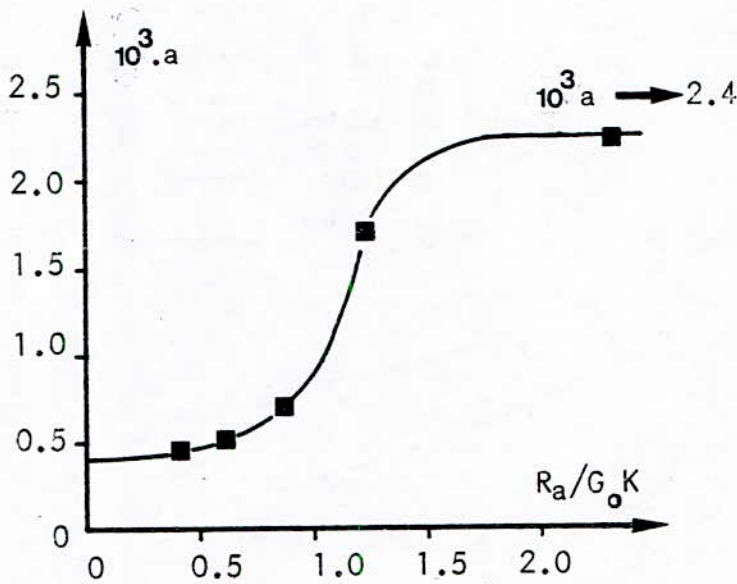


FIGURE 111

Par extrapolation de la courbe, il est possible d'en déduire la valeur de a correspondant au cas où il n'existe pas d'armatures au niveau de la section ($R_a/G_0K \rightarrow 0$). Cette valeur $a = a_0 \simeq 0,4$, correspond à la valeur de la constante permettant d'obtenir la contribution du béton seul à l'origine.

On peut ainsi résumer la contribution du béton seul à l'origine par l'expression :

$$\left[\frac{G_{t1}}{G_0} \right] = \frac{1}{1 + 2500 \cdot \frac{t_m}{s_m}}$$

4-31

2.4.3.5. - Coefficient d'influence Ψ ou "coefficient de dégradation"

dans l'expression générale (4-24) permettant le calcul de la rigidité globale d'une section quelconque à l'origine, figurent deux coefficients à priori inconnus : λ et μ

Il sont essentiellement fonction de l'importance de la fissuration et de la quantité d'armatures tendues présente au droit de la fissure.

Une première tentative (annexe) a consisté à envisager une définition séparée de chacun des paramètres λ et μ .

Celle-ci n'a pas permis de donner une concordance très satisfaisante, du fait qu'il existe en permanence une interaction entre ces deux paramètres.

En remarquant qu'à faible niveau de fissuration ($t_m/s_m \rightarrow 0$), on a λ et μ très proches de 1, on peut envisager un paramètre correctif Ψ qui ne soit fonction que de l'état de "dégradation" de la section, c'est-à-dire du paramètre de fissuration moyen t_m/s_m .

Ce coefficient Ψ représente l'erreur relative commise en prenant $\lambda = \mu = 1$ dans l'équation (4-24), au fur et à mesure que la fissuration dans la section évolue. Les valeurs de Ψ calculées (au niveau du tableau 8) sont reportées (Fig. 112) en fonction du paramètre t_m/s_m . On peut y mettre en évidence une tendance de variation traduite par des droites du type :

$$\Psi = 1 + a \cdot \left[10^3 \frac{t_m}{s_m} \right]$$

4-32

avec, en moyenne :

- $a = + 0,05$ pour les sections minces en double té (ou d'une manière générale les sections minces).
- $a = - 0,250$ pour les sections creuses

Repère	Phase	10^3 tm/sm	$G_0 K_0 = (GK)_0$ kN.m ²	\overline{GK}_b kN.m ²	R_a kN.m	S_m cm	$\overline{GK} (*)$ kN.m ²	Ψ
KE11	A	0,81	39350	22400	54100	7,8	27700	0,827
	B	1,14		19400		7,8	21200	1,056
	C	2,14		13900		7,4	18100	0,720
KE13	A	0,03	35040	34300	23100	30	34100	1,004
	B	0,39		26600		10,9	26600	1,005
	C	1,04		19400		7,1	20800	0,948
KE15	A	0,13	39600	35700	22400	21	36100	0,990
	B	0,63		26200		10,4	30600	0,864
KE18	A	0,24	34800	28300	14400	17,8	32000	0,888
	B	0,89		19000		9,7	25200	0,766
	C	1,87		13200		8,9	15500	0,894
KE20	A	0,20	39120	32600	48000	18,8	37800	0,868
	B	0,92		21500		7,6	33300	0,667
	C	1,94		14800		6,3	25300	0,629
OE1	A	0,435	731,1	516	43759	10,3	707,5	0,980
	B	1,136		440,1		7,3	652,5	0,988
	C	1,683		416,5		6,3	544,5	1,125
OE2	A	0,411	750,4	545,8		11,4	668,1	1,024
	B	1,036		469,4		8,9	621,9	1,054
	C	1,682		438,4		6,9	571,2	1,109

Sections creuses

Section en double te

TABLEAU 8 : Calcul du coefficient de dégradation Ψ

[(*) Valeur expérimentale des rigidités initiales]

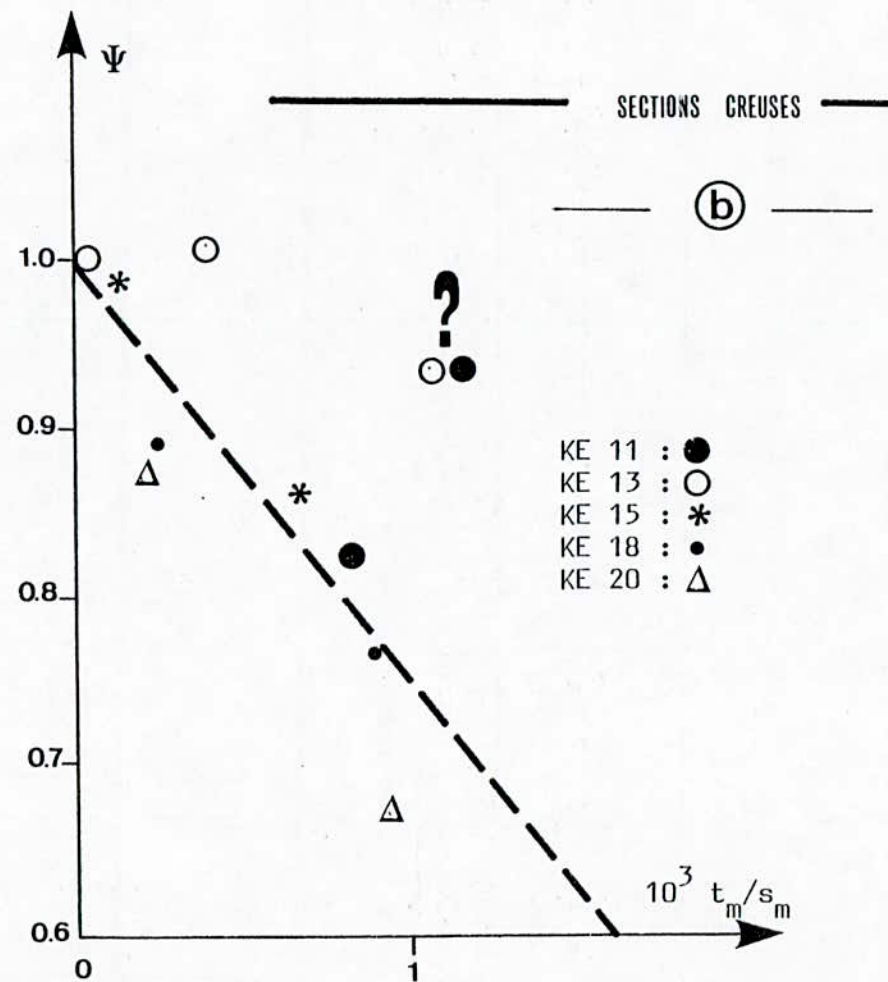
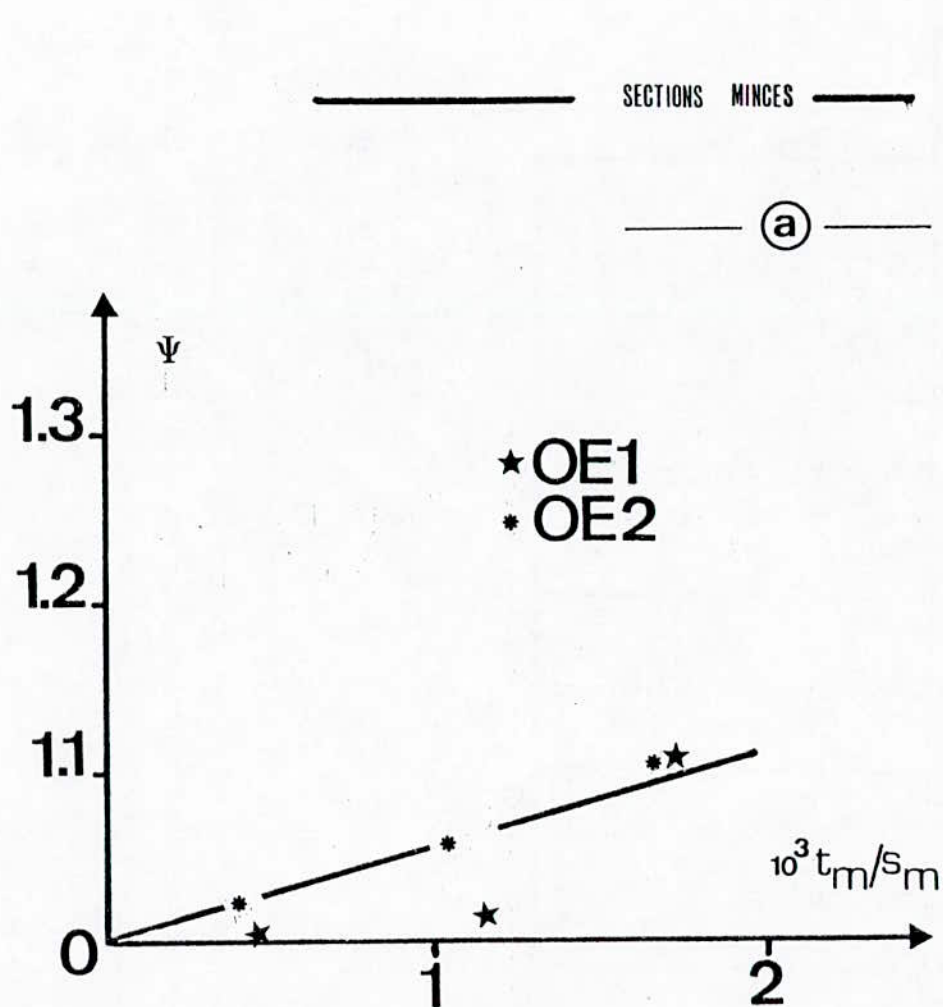


Fig 112: Evolution du coefficient de "dégradation" de la section : Ψ
(cas des sections creuses et en double té minces).

On pourra calculer la rigidité globale d'une section fissurée, à l'origine par :

$$\frac{1}{GK} = \Psi \cdot \left[\frac{1}{G_o K} + \frac{\left[\frac{1}{GK_b} - \frac{1}{G_o K} \right]}{1 - \left[\frac{1}{GK_b} - \frac{1}{G_o K} \right] \cdot R_a s_m} \right] \quad (4-33)$$

Notons ci-après les rapports des rigidités expérimentales et calculées [par la relation (4-33)] :

Essai	Phase	cal/exp	écart en %	(GK) _{cal} (KN.m ²)	(GK) _{exp} (KN.m ²)
OE1	A	0.96	- 4	678.4	707.5
	B	0.94	- 6	592.5	652.5
	C	1.04	+ 4	564.8	544.5
OE2	A	1.00	0	670.4	668.1
	B	1.00	0	625.2	621.9
	C	1.02	+ 2	584.5	571.2
KE11	A	1.03	+ 3		
	B	1.30	+ 30		
KE13	A	1.02	+ 2		
	B	1.12	+ 12		
	C	1.20	+ 20		
KE15	A	1.02	+ 2		
	B	1.02	+ 2		
KE18	A	0.95	- 5		
	B	1.00	0		
KE20	A	0.93	- 7		
	B	0.87	- 13		
	C	1.22	+ 22		

2.4.3.6. - Application des résultats obtenus au cas des sections rectangulaires minces

A priori, la relation (4-33) établie, permettant le calcul de la rigidité tangente à l'origine d'une section quelconque en béton armé en fonction des paramètres qui la caractérisent devrait être aussi valable pour le cas des sections rectangulaires minces.

En effet, nous avons déjà fait remarquer qu'à niveaux de fissuration identiques (rapports t_m/sm très voisins), la dégradation de la rigidité (symbolisée par le rapport $(GK)_0/(G_0K_0)$, G_0K_0 étant la rigidité de torsion en élasticité linéaire) était analogue pour les sections en double té minces (Essais OE1, OE2) et les sections rectangulaires minces (KE 25).

par conséquent la formule établie pour les sections minces à profil ouvert, devrait encore être valable pour une section rectangulaire mince.

C'est ce qu'on se propose de vérifier sur la section rectangulaire mince (KE 25) et la section rectangulaire KE 24.

Les essais KE 23, KE 24, KE 25 ont été réalisés au Service d'Etude des Structures du C.E.B.T.P. sur des sections rectangulaires de hauteur $h = 0,40$ m et de largeur b variable, chacun des essais étant caractérisé par le rapport b/h défini ci-après :

Repère	b/h	Classification
KE23	0,45	épaisse
KE24	0,30	mince << épaisse
KE25	0,15	mince

Le tableau (9) présente pour les essais KE 24 et KE 25, les résultats expérimentaux et une comparaison des rigidités tangentées à l'origine calculées et expérimentales.

La concordance est satisfaisante, notamment pour la section rectangulaire mince KE 25 (écart d'environ - 6 % entre le calcul et la valeur expérimentale).

Repère et Phase	$(G_L K)_g$ (KN.m ²) (**)	$10^3 \cdot t_m/s_m$	$G_o K$ (KN.m ²)	$R_a \cdot s_m^2$ (KN.m ²)	x_m (m)	G_o (KN/m ²)	G_1/G_o	$(G_L K)_g$ (KN.m ²) (*)	Ca1/Exp
KE 24 A	2530	0.45	2750	1025.8	0.110	$149 \cdot 10^5$	0.470	2164	0.86
B	2320	1.36	"	836.1	0.090	"	0.227	1817	0.78
C	1920	2.74	"	724.1	0.082	"	0.127	1594	0.83
KE 25 A	283	0.41	340	562.4	0.090	$143 \cdot 10^5$	0.494	281.4	0.99
B	262	1.20	"	370.8	0.086	"	0.250	246	0.94
C	235	1.80	"	315.2	0.077	"	0.182	229	0.97

(*) valeurs calculées

(**)valeurs expérimentales

Tableau 9 : Comparaison des rigidités à l'origine calculées (par la relation (4-33)) et expérimentales- sections rectangulaires minces

2.4.3.7. - Généralisation au cas des sections épaisses (Essais KE 10, 12, 14, 17, 19, 23, 24)

a) Généralités

Pour des sections rectangulaires plus épaisses (ou le rapport de la plus grande dimension h et de la plus petite dimension transversale e devient élevé), la formulation proposée pour la rigidité à l'origine dans le cas des sections minces (relation 4-33) n'est plus directement applicable. Elle reste malgré tout valable dans la démarche et dans les principes développés.

Pour ces sections, la difficulté essentielle provient du fait qu'on ne connaît plus, a priori, l'allure des lignes de cisaillement après fissuration. Une illustration en est donnée par la figure (113). Par ailleurs, le centre de torsion doit se déplacer notablement vers la zone comprimée (Fig.

114), ce qui a pour effet de modifier considérablement la valeur de la raideur de torsion R_a due aux armatures, en modifiant les bras de levier r_i .

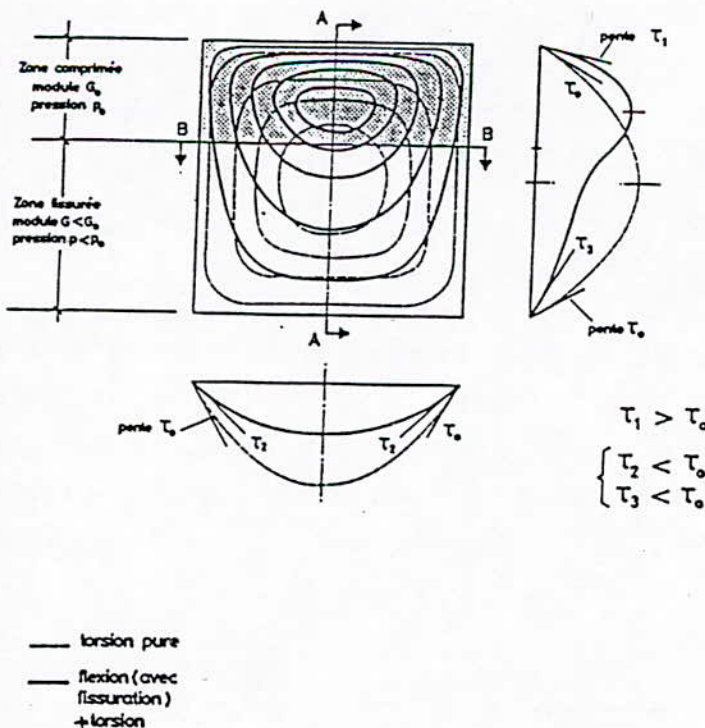


FIGURE 113

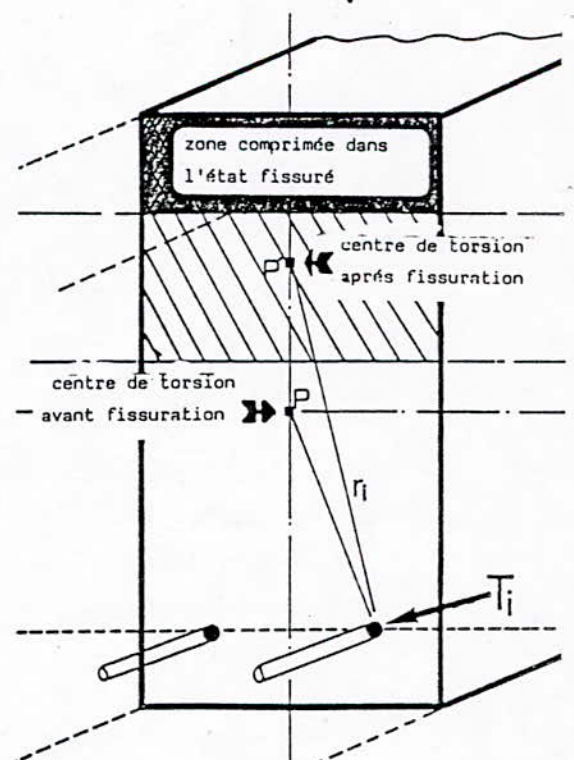


FIGURE 114

b) Formule de calcul de la rigidité de torsion à l'origine d'une section pleine

Dans les principes développés, la démarche de calcul utilisée pour les sections minces reste encore valable pour les sections épaisses, en envisageant toutefois une réévaluation du coefficient de dégradation ou de correction Ψ pour ce type de sections.

b1) Contribution du béton

A partir d'un module moyen à l'origine $(\overline{G}_t)_0$ calculé à partir de la valeur particulière $(G_{t1})_0$ donnée par l'expression (4-31) en fonction de l'indice de fissuration $I_f = t_m/s_m$, et de la valeur de l'inertie de torsion K en élasticité linéaire, nous pouvons calculer en première approximation la contribution du béton seul par l'expression :

$$(\overline{G}_t K_b)_0 \approx (\overline{G}_t)_0 \cdot K$$

Les valeurs ainsi calculées sont reportées au tableau (10) où l'on a porté aussi les valeurs de la rigidité en élasticité linéaire $G_0 K$, et du produit $R_a \cdot s_m$ (la valeur de R_a étant celle obtenue en supposant très injustement le pôle principal occupant toujours la même position, quelque soit l'état de fissuration).

b2) Coefficient de dégradation et de correction Ψ :

Ce coefficient englobera l'influence concomittante des paramètres λ et μ et la validité critiquable de certaines hypothèses. Il sera calculé par la relation (4-33) dans laquelle \overline{GK} représentera la valeur expérimentale de la rigidité de torsion. Les résultats de ce calcul sont portés au tableau (10) et présentés à la figure (115) en fonction de l'indice de fissuration moyen de la poutre I_f , tel que $I_f = t_m/s_m$.

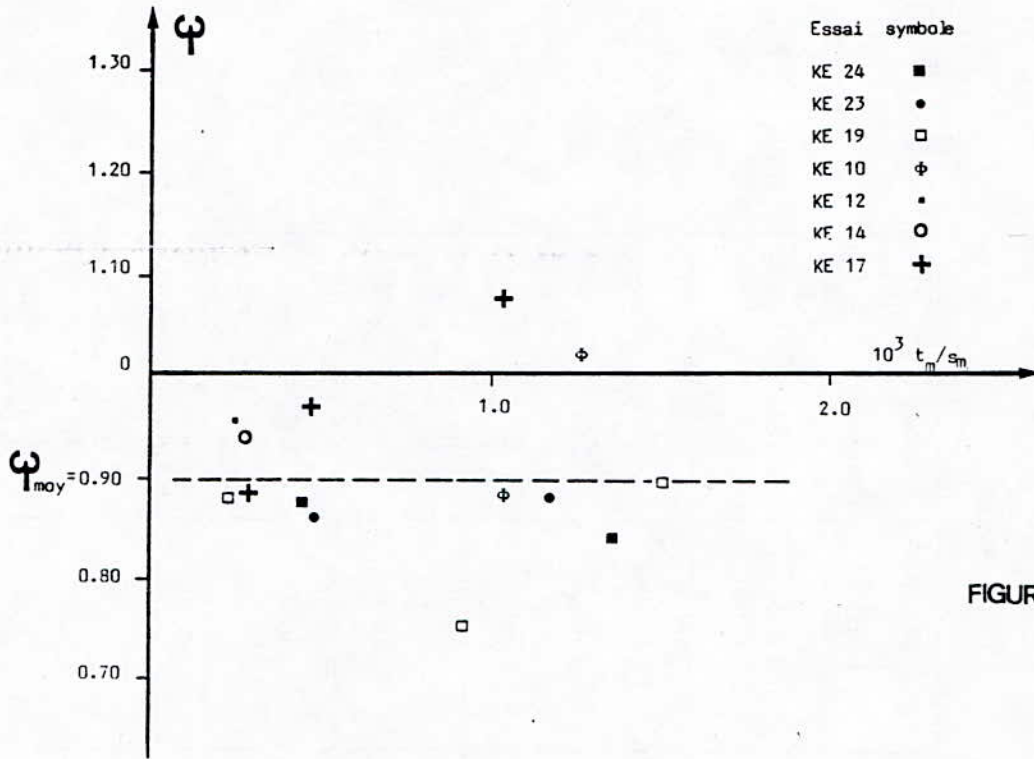


FIGURE 115

Pour les sections de faible raideur relative (R_a/G_0K), et pour les grandes valeurs de t_m/s_m ($t_m/s_m \approx 2.10^{-3}$), la dispersion est considérable.

Pour des valeurs de t_m/s_m , telles que $0 < t_m/s_m < 1,3.10^{-3}$, la dispersion des résultats n'est pas forte, et on peut alors traduire une tendance générale par la valeur moyenne suivante :

$$\bar{\Psi} = 0,90$$

b3) Comparaison des rigidités expérimentale et calculée

A partir de cette valeur particulière de $\bar{\Psi}$, on peut, pour chaque phase de chacun des essais relatifs aux sections pleines, recalculer la rigidité globale par la relation (4-33), toujours selon les hypothèses admises, et la comparer à la rigidité de torsion expérimentale.

Cette comparaison est donnée au tableau (10) sous la forme du rapport $(GK)_{cal}/(GK)_{exp}$.

Référence	Phase	$10^5 t_m / s_m$	$(G_t K)_o \text{ exp}$ kN.m ²	$(G_o K) \text{ calc}$ kN.m ²	$R_a / G_o K$	$(G_t K_b)_o \text{ calc}$ kN.m ²	Ψ calculé	$\frac{(GK)_{\text{cal}}}{(GK)_{\text{exp}}}$
KE 10	A	1,04	41900	52560	0,626	36700	0,881	1,02
	B	1,27	35000	52560	0,626	35400	1,018	0,88
	C	2,52	28500	52560	0,626	32300	1,144	0,79
KE 12	A	0,25	41800	45360	0,459	39800	0,953	0,95
	B	2,22	23500	45360	0,459	31000	1,325	0,68
KE 14	A	0,28	48900	52560	0,447	45800	0,938	0,96
	B	1,74	28700	52560	0,447	36600	1,281	0,70
	C	2,90	26600	52560	0,447	35900	1,381	0,65
KE 17	A	0,29	47500	50760	0,264	41600	0,880	1,02
	B	0,47	40200	50760	0,264	38800	0,968	0,93
	C	1,04	32200	50760	0,264	34400	1,073	0,84
KE 19	A	0,23	53000	54360	0,844	46500	0,879	1,02
	B	0,92	52000	54360	0,844	38800	0,751	1,20
	C	1,51	40600	54360	0,844	35900	0,892	1,00
KE 23	A	0,49	6650	7300	1,589	5640	0,857	1,05
	B	1,18	5850	7300	1,589	5010	0,876	1,03
	C	2,72	4600	7300	1,589	4510	0,895	1,00
KE 24	A	0,45	2530	2742	3,144	2170	0,874	1,03
	B	1,36	2320	2742	3,144	1860	0,836	1,08
	C	2,74	1920	2742	3,144	1720	0,944	0,95

TABLEAU 10 - Sections pleines - Comparaison des rigidités expérimentales et calculées

Sur les 20 cas, ces rapports ont une moyenne de 0,95 avec un coefficient de variation de 13 %.

Les résultats sont donc assez satisfaisants.

Une récapitulation graphique des comparaisons rigidité expérimentale-rigidité calculée est apportée par les figures (116) et (117). On y constate que la concordance est très satisfaisante.

2.4.3.8. - Organigramme de calcul de la rigidité de torsion à l'origine $(GK)_o$:

la rigidité de torsion à l'origine peut être évaluée par la démarche illustrée ci-dessous

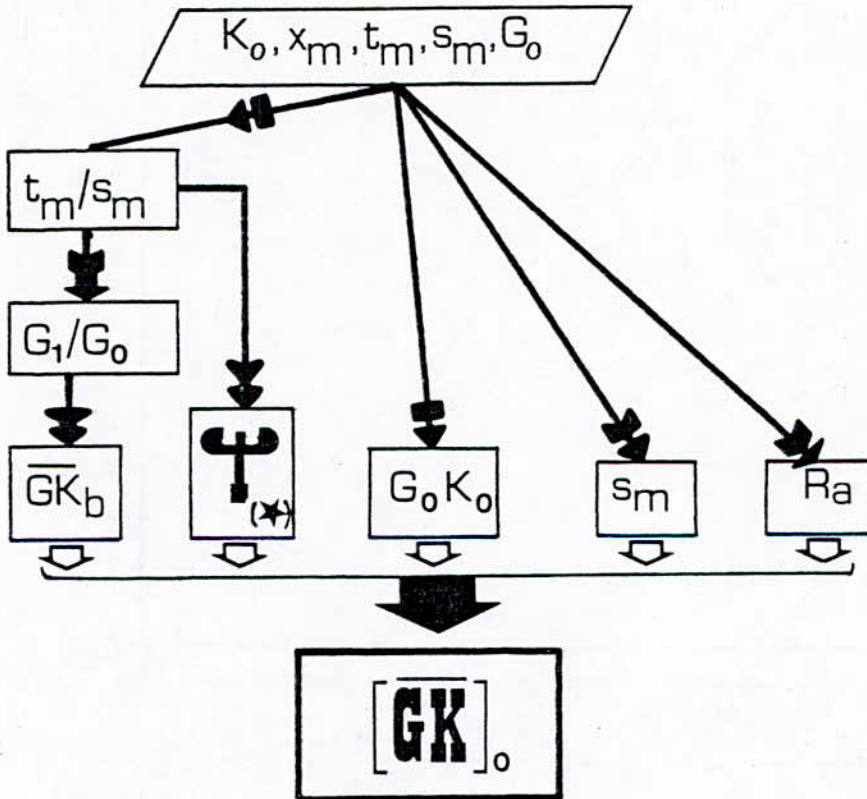


FIG 118: DETERMINATION DE LA RIGIDITE A L'ORIGINE D'UNE SECTION EN BETON ARME

(.) Sections double té minces
Sections rectangulaires minces

$$\Psi = 1 + 50 \cdot \frac{t_m}{s_m}$$

Sections creuses

$$\Psi = 1 - 250 \cdot \frac{t_m}{s_m}$$

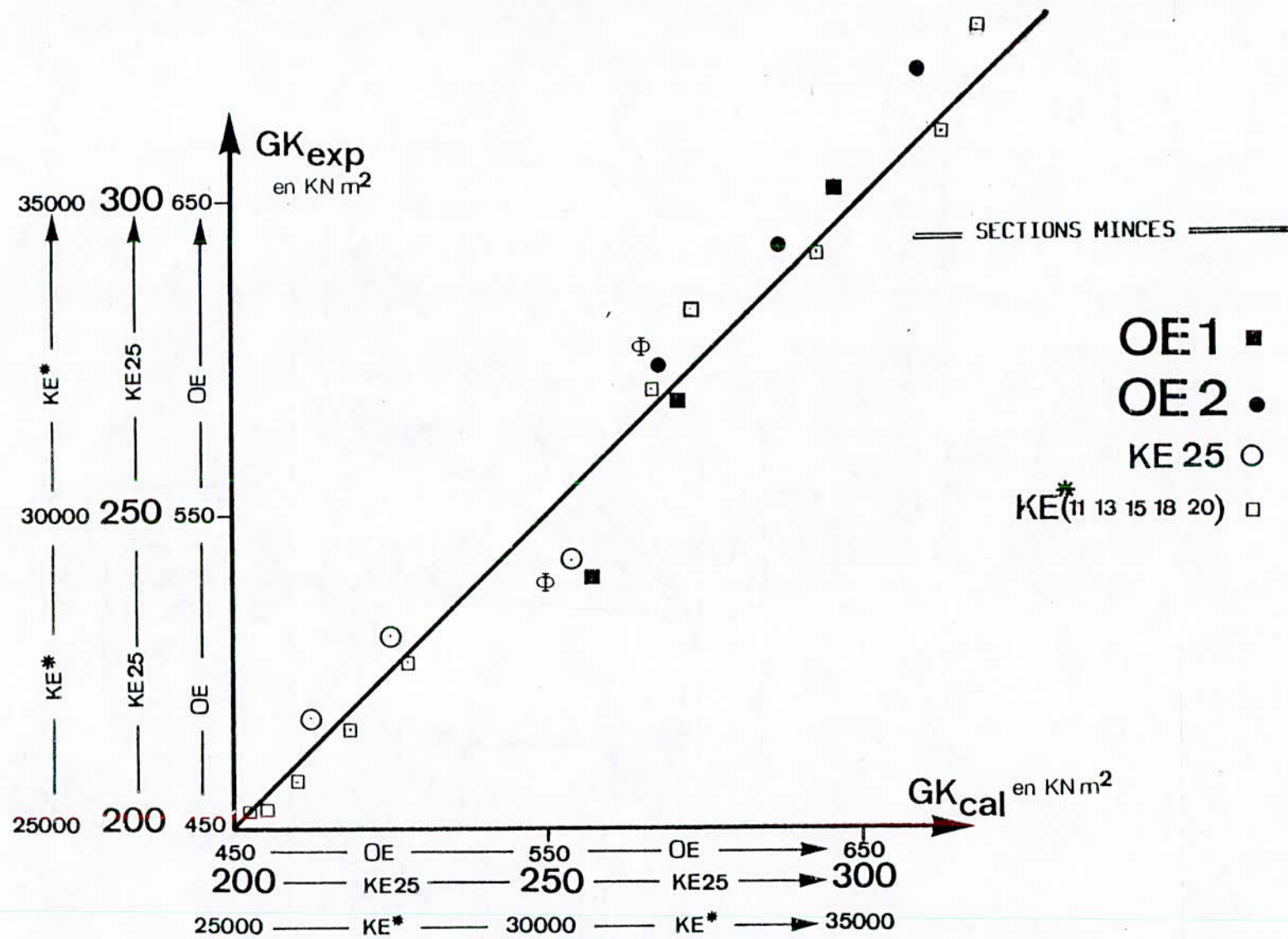


FIG 116 : Sections minces - Comparaison des rigidités tangentés à l'origine, expérimentales et calculées (par la relation 4-33).

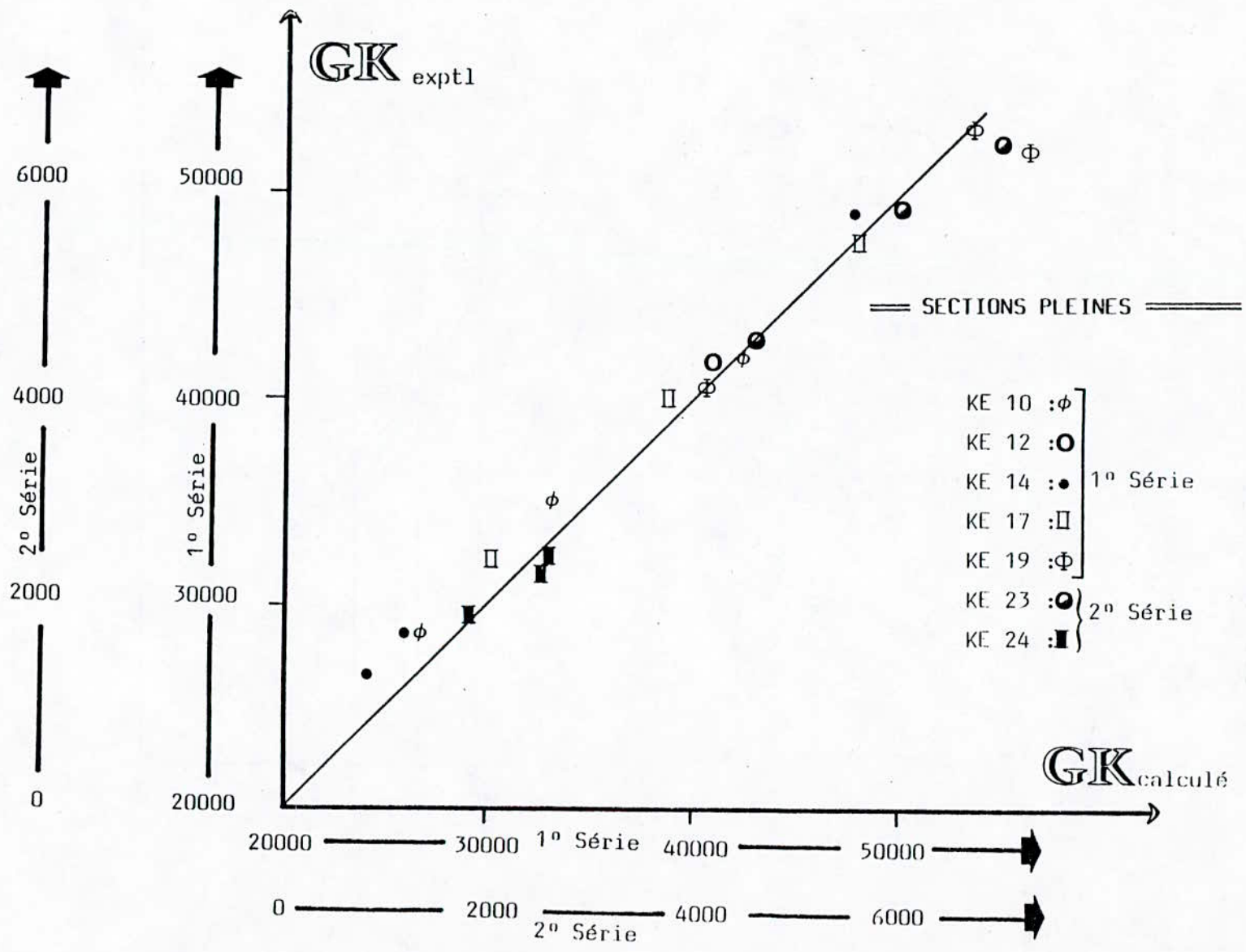


FIG.117 : Sections pleines - Comparaison des rigidités tangentés à l'origine, expérimentales et calculées (par la relation 4-33).

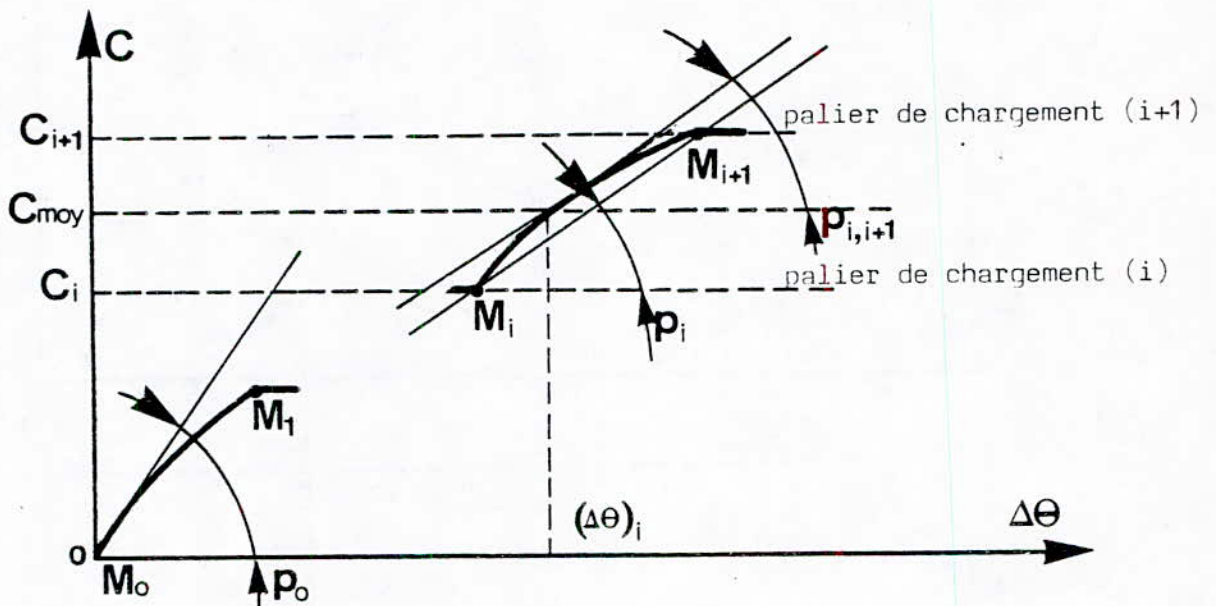
2.5. - Proposition d'une loi de variation semi-empirique de la rigidité de torsion tangente d'un profil mince ouvert

2.5.1. - Introduction

Soit la courbe ci-après représentant la variation de la rotation de torsion par rapport au couple de torsion, lors d'un chargement de flexion et torsion combinées.

Notons :

- $(\overline{GK})_t$: la valeur expérimentale de la rigidité de torsion tangente dans une phase quelconque du chargement
- $(\overline{GK})_0$: la valeur expérimentale de cette même grandeur quand le couple de torsion est voisin de 0 ($C \rightarrow 0$)
- C_{moy} : la valeur moyenne du couple de torsion entre deux chargements consécutifs
- C_f : la valeur du couple de fissuration en gauchissement gêné (cf. § (1.3).A3).



$$p_i \approx p_{i+1,i} \text{ connaissant } \overline{EK}_1 \rightarrow (\overline{GK})_t$$

$$p_0 \text{ ———— } \text{connaissant } \overline{EK}_1 \rightarrow (\overline{GK})_0$$

(*)

Dans la mesure où nous recherchons une généralisation de la loi de comportement de la rigidité tangente quand le couple de torsion croît, il est nécessaire d'envisager celle-ci en examinant la variation de grandeurs relatives $(GK)_t / (GK)_0$ et C_{moy} / C_f .

Par ailleurs, on rappelle que notre étude se situe dans le cadre d'un problème d'instabilité (en flexion composée déviée). Par conséquent, le domaine où la connaissance d'une loi de variation $[(GK)_t / (GK)_0] = f(C_{moy} / C_f)$ est recherchée, se situe approximativement dans la fourchette de valeurs suivantes :

$$0 < (C_{moy} / C_f) < 0,25$$

2.5.2. - Proposition d'une loi semi-empirique de variation de la rigidité tangente $(GK)_t$

Pour les diverses phases A, B et C des essais OE 1 et OE 2, les valeurs du rapport expérimental $(GK)_t / (GK)_0$ (tableaux 11 et 12) sont respectivement reportées sur les figures (118 et 119) en fonction des valeurs correspondantes de C_{moy} / C_f .

D'une manière générale, on constate que la dispersion des résultats n'est pas importante (sauf toutefois pour la phase A de l'essai OE 1, où celle-ci est quand même assez forte).

Cependant, on peut traduire une tendance générale par une courbe du type :

$$\frac{(GK)_t}{(GK)_0} = e^{-\tilde{k}} \cdot \frac{C_{moy}}{C_f}$$

Par une méthode de régression, on peut déterminer une valeur significative de \tilde{k} pour les essais OE 1 et OE 2, dans les trois phases de flexion A, B et C. On trouve alors $\tilde{k} = 4$ pour OE 1 et $\tilde{k} = 1,5$ pour OE 2. Au-delà d'un couple C_{moy} , tel que $C_{moy} / C_f > 0,25$, la dégradation moyenne de la rigidité tangente par rapport à sa valeur initiale [valeur à l'origine $(GK)_0$] est voisine de 60 %.

Nous pouvons proposer une relation générale pour l'évaluation de la rigidité tangente d'une section quelconque fissurée en flexion (fissures droites) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{GK}_{\bar{t}} \\ \text{GK}_{\bar{t}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\epsilon - \bar{k} \cdot \frac{C_{\text{moy}}}{C_f}}{\Psi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{G_0 K} + \frac{[\frac{1}{G K_b} - \frac{1}{G_0 K}]}{1 + [\frac{1}{G K_b} - \frac{1}{G_0 K}] R_a \cdot s_m}} \quad \text{si } 0 < \frac{C_{\text{moy}}}{C_f} < 0,25 \\ \frac{0,60}{\Psi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{G_0 K} + \frac{[\frac{1}{G K_b} - \frac{1}{G_0 K}]}{1 + [\frac{1}{G K_b} - \frac{1}{G_0 K}] R_a \cdot s_m}} \quad \text{si } \frac{C_{\text{moy}}}{C_f} > 0,25 \end{array}$$

La démarche générale de calcul proposée est rapportée à l'annexe

A.8.0.

ETAPE	C_{moy} (kN.cm)	$\Delta C/\Delta \theta$ $\times 10^{-4}$	$[\Delta C/\Delta \theta]$ (*) $\times 10^{-4}$	(GK) _o KN.m ²	$\frac{(GK)_t}{(GK)_o}$	Phase
49-50	6,696	6,5771	7,2470	707	0,672	Flexion torsion A
51-52	55,91	6,1556	6,9725		0,605	
52-53	54,72	6,2509	7,1055		0,656	
53-54	82,58	6,2720	7,1275		0,642	
54-55	111,67	5,760	6,5455		0,496	
64-65	7	7	7,9545	632	0,948	Flexion torsion B
67-68	54	5,6	6,5656		0,502	
68-69	54,75	6,70	7,6156		0,856	
69-70	81,5	5,200	5,9091		0,574	
70-71	107	5,208	5,9182		0,577	
81-82	6,75	6,1564	6,9752	544	0,744	Flexion torsion C
82-83	20,25	5,6250	6,5920		0,564	
83-84	55,50	5,417	6,1557		0,490	
84-85	55,50	5,190	5,8977		0,410	
85-86	78	5,640	6,4091		0,569	
86-87	100	4,889	5,5557		0,504	

TABLEAU 11 : Essai OE1 - Evaluation des rigidités tangentes expérimentales

	C_{moy} (kN.cm)	$\Delta C/\Delta \theta$ $\times 10^{-4}$	$F(d) = \frac{(*)}{EK_t(\Delta C/\Delta \theta)}$	$(GK)_o$ kN.m ²	$\frac{(GK)_t}{(GK)_o}$	Phase
41-42	6,5	6	$5,1198 \cdot 10^{-5}$	668	1,00	Flexion torsion A
42-43	18	5,455	5,613 "		0,85	
43-44	30	5,0	6,1438 "		0,73	
44-45	48	5,0	6,1438 "		0,73	
45-46	72	5,0	6,1438 "		0,73	
46-47	98,5	4,83	6,36 "		0,68	
53-54	6,5	5,455	5,6313 "	622	0,93	Flexion torsion B
54-55	18	5	6,1438 "		0,79	
55-56	30	4,615	6,6563 "		0,67	
56-57	48	4,8	6,3997 "		0,73	
57-58	72	4,44	6,9186 "		0,62	
58-59	95	4,68	6,5638 "		0,69	
63-64	6	5,217	5,8882 "	571	0,95	Flexion torsion C
64-65	18	4,615	6,6563 "		0,75	
65-66	30	4,444	6,9124 "		0,69	
66-67	48	4,444	6,9124 "		0,69	
68-69	90	3,750	8,1917 "		0,46	

TABLEAU 12 : Essai OE 2 - Evaluation des rigidités tangentes expérimentales

ESSAI 0E1

Courbe d'équation: $\frac{(GK)_t}{(GK)_0} = e^{-4 \cdot \frac{C_{moy}}{C_f}}$

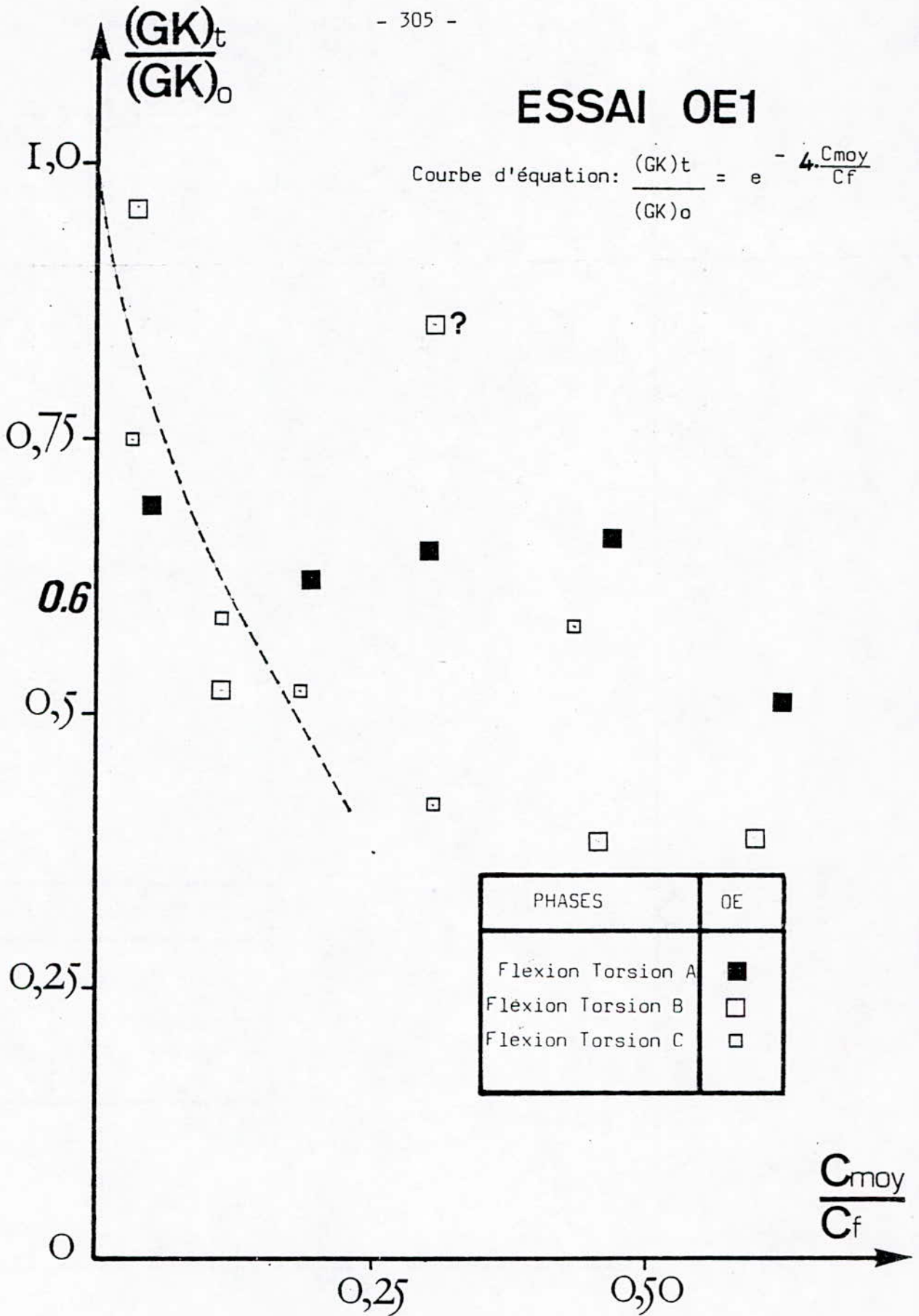


FIG 118 : Evolution de la rigidité tangente relative en fonction du rapport (Cmoy/Cf).

ESSAI OE2

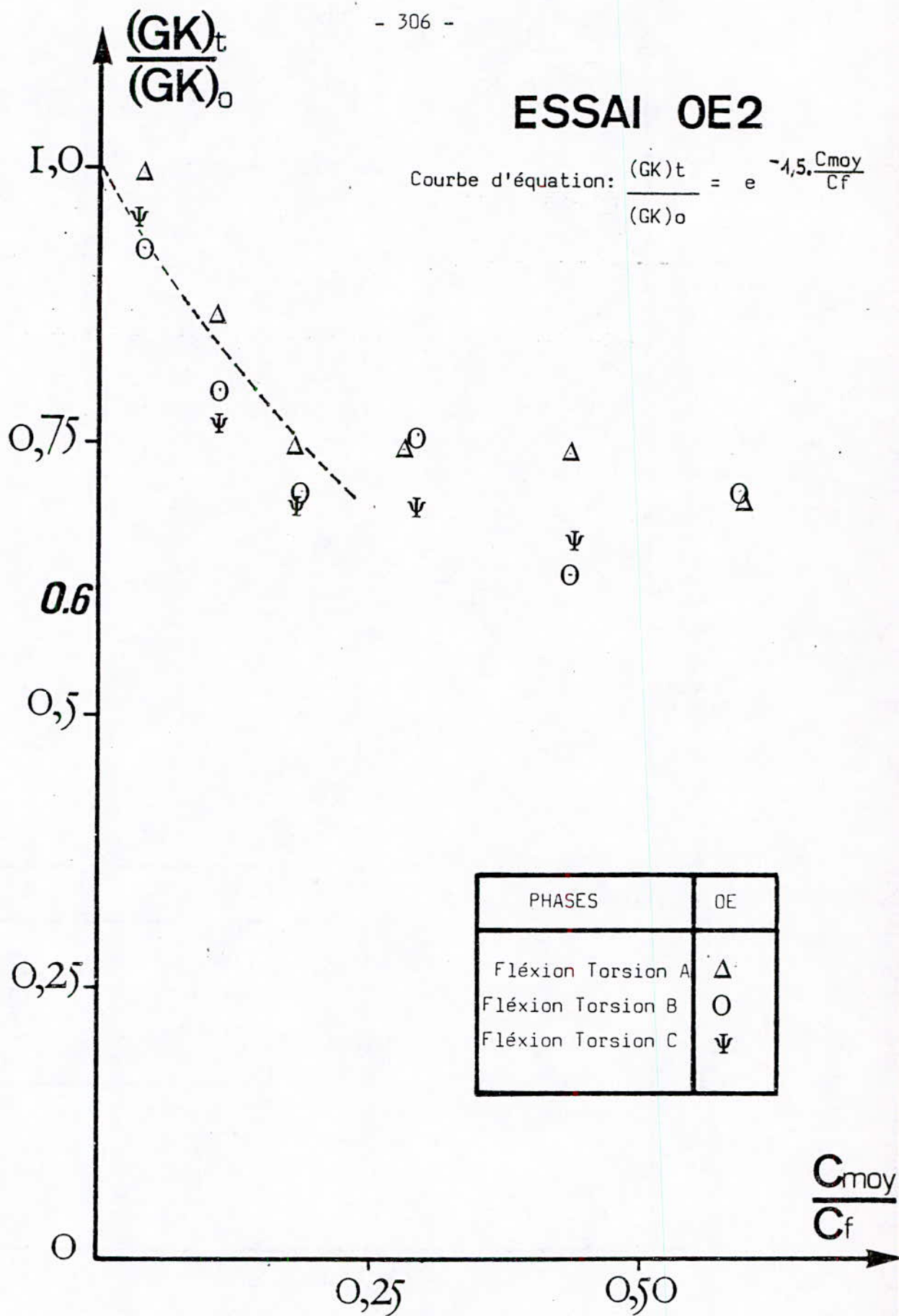


FIG 119 : Evolution de la rigidité tangente relative en fonction du rapport (Cmoy/Cf).

3. - SYNTHÈSE DES RESULTATS OBTENUS ET APPLICATION A LA THEORIE DE L'ELASTICITE NON-LINEAIRE

3.1. - Introduction

L'instabilité en flexion composée déviée est un problème très complexe. D'après la littérature, la seule méthode de résolution existant à ce jour pour les matériaux béton armé et précontraint, est celle de Menegotto et Pinto ([97] et [98]). Toutefois, celle-ci ne s'applique qu'aux éléments à section pleine massive ou à section fermée creuse, car elle ne permet pas d'introduire les effets de la torsion qui ne sont plus négligeables dans le cas de profils minces ouverts.

Dans l'hypothèse de la constance des rigidités le long de l'élément considéré (confirmé par l'expérimentation), les expressions de l'élasticité linéaire restent valables, à condition, en sus d'hypothèses complémentaires, de pouvoir redéfinir convenablement les rigidités (qui interviennent dans ces expressions pour tenir compte :

- de la fissuration introduite par la flexion ;
- de la contribution des armatures ;
- du comportement du béton du point de vue de déformabilité hors du domaine linéaire, sous un état de contrainte biaxial de compression et de cisaillement.

Ce travail a donc recherché une meilleure connaissance de l'évolution des rigidités de torsion \overline{GK} et de gauchissement \overline{EK}_1 , pour permettre la détermination directe de l'état de contrainte et de déformation d'un élément fissuré en flexion, au fur et à mesure que l'état de fissuration (symbolisé dans le manuscrit par l'indice de fissuration I_f). Les méthodes semi-empiriques développées lors de cette étude, dans le cas où l'influence de la torsion n'est plus négligeable, permettent de calculer directement cet état de contrainte et de déformation dans une section quelconque. Les vérifications expérimentales effectuées sont très satisfaisantes. Elles permettent de juger de la validité des diverses hypothèses faites pour aboutir à ces relations semi-empiriques.

5.2. - Principales simplifications et hypothèses admissibles

Celles-ci sont essentiellement basées sur les résultats des expérimentations :

a) Pour les sections massives ou les profils minces fermés, on néglige toujours l'influence de la torsion et du gauchissement gêné.

Pour les profils minces ouverts, pour lesquels, l'effet de la torsion n'est pas négligeable, il faut adapter au problème du béton armé, la théorie de l'élasticité linéaire dont les principaux points sont rappelés § 2, et généraliser ainsi les expressions classiques de l'élasticité linéaire au domaine de l'élasticité non-linéaire.

b) Dans l'étude d'un problème d'instabilité en flexion composée déviée, on reste toujours dans le domaine des petits déplacements, ce qui est bien confirmé par l'expérimentation.

c) On néglige les flèches dues à l'effort tranchant devant celles dues au moment de flexion, la probabilité de rencontrer des éléments élancés fortement sollicités à l'effort tranchant étant très faible. On élimine, ainsi le risque de développement d'une fissuration inclinée, qu'il serait très difficile à prendre en compte en même temps qu'une part de fissuration droite de flexion. Cette difficulté est due au fait qu'on se situerait hors du domaine d'application du modèle de calcul de poutre en treillis, et du modèle de fissuration droite développé dans cette thèse.

d) On peut négliger la rotation de torsion due au couple C_2 devant celle due au bimoment B comme dans la théorie linéaire. Ce point est confirmé par la comparaison des rotations entre la première et la deuxième approximation (cf. Annexe 3).

e) Après fissuration totale de l'aile tendue (dans le cas d'une section en double té), le centre de torsion se remplace définitivement à une position indépendante de l'évolution de la fissuration, position qui d'ailleurs est très voisine de celle du centre de cisaillement après fissuration (conformément à la comparaison faite entre les déformations de cisaillement calculées et mesurées).

f) Après fissuration, dans le cas d'un profil mince ouvert, les distorsions associées au gauchissement sont constantes sur l'épaisseur et celles associées à la torsion pure varient linéairement sur l'épaisseur.

g) Le domaine auquel nous devons étendre les intégrales, définissant la position du centre de torsion et la rigidité de gauchissement, est défini par l'aire du béton comprimé et de toutes les armatures longitudinales ;

3.3. - Transposition des résultats en élasticité non-linéaire

Notations :

Section droite : (Σ)

Aire du béton comprimé et de toutes les armatures longitudinales (Σ')

Contour d'une section droite simplement connexe : (C)

Ligne moyenne d'une section tubulaire (Γ)

Aire de la section droite : A

Aire intérieure au contour (Γ) : Ω

Moment statique : S

Moment d'inertie : I

Tracé du plan moyen de la poutre : axe y

Abscisse curviligne le long du contour : s

Modules sécants E et G , tels que : $\sigma = E \cdot \varepsilon$ et $\tau = G \cdot \delta$

Modules tangents E_t et G_t tels que : $\sigma = E_t \cdot \Delta \varepsilon$ et $\tau = G_t \cdot \Delta \delta$

3.3.1. - Rappels concernant l'action de l'effort normal et du moment fléchissant

a) Formulation "sécante" - Effet des sollicitations N et M totales

L'origine des axes x et y est au centroïde C , remplaçant le centre de gravité, tel que :

$$\iint_{(\Sigma')} E(y) \cdot x \cdot d\Sigma = \iint_{(\Sigma')} E(y) \cdot y \cdot d\Sigma = 0$$

Les rigidités "normales", "statique" et de flexion s'écrivent :

$$\overline{EA} = \int_{(\Sigma')} E(y) \cdot d\Sigma \quad (\text{indépendante de l'origine})$$

$$\overline{ES} = \int_{(\Sigma')} E(y) y \cdot d\Sigma = 0 \quad (\text{par définition de } C)$$

$$\overline{EI} = \int_{(\Sigma')} E(y) \cdot y^2 \cdot d\Sigma$$

Les déformations longitudinales sont définies par deux paramètres :

- la déformation au centroïde $\epsilon_c = \frac{N}{EA}$

- la courbure $\varnothing = \frac{M_c}{EI}$ (le moment M_c étant calculé au centroïde).

Les relations sollicitations-déformations s'écrivent donc :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{EA} & 0 \\ 0 & \overline{EI} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_c \\ \varnothing \end{Bmatrix}$$

et l'expression des contraintes normales est alors, dans le cas général :

$$\sigma(y) = E(y) \cdot \left[\frac{N}{EA} + \frac{M_c}{EI} \cdot y \right]$$

b) Formulation "tangente" - Effet d'un accroissement ΔN , ΔM des sollicitations

L'origine est au centroïde tangent C_t tel que, les ordonnées étant notées y_t :

$$\int_{(\Sigma')} E_t(y_t) \cdot y_t \cdot d\Sigma = 0$$

On peut définir les rigidités :

$$\overline{E_t A} = \int_{(\Sigma')} E_t(y_t) \cdot d\Sigma$$

$$\overline{E_t I} = \int_{(\Sigma')} E_t(y_t) \cdot y_t^2 \cdot d\Sigma$$

L'accroissement des déformations est défini par :

$$\Delta \varepsilon_{C_t} = \frac{N}{E_t A} \quad \Delta \vartheta = \frac{\Delta M_{C_t}}{E_t I}$$

(l'accroissement des moments étant calculé en C_t).

Les relations entre accroissements de sollicitations et de déformations sont donc :

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_{C_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{E_t A} & 0 \\ 0 & \overline{E_t I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{C_t} \\ \Delta \vartheta \end{bmatrix}$$

L'expression de l'accroissement des contraintes est alors :

$$\Delta \sigma(y) = E_t(y) \cdot \left[\frac{\Delta N}{E_t A} + \frac{\Delta M_{C_t}}{E_t I} \cdot y \right]$$

c) Expressions en axes quelconques

Sous leur forme, les expressions précédentes ont pour intérêt essentiel de mettre en évidence la transposition des expressions de l'élasticité linéaire.

Dans le domaine des faibles déplacements, la position des centroïdes C et C_t étant très peu variable avec les sollicitations, il est toujours possible de passer des expressions ci-dessus, valables avec origine des axes en C ou C_t , aux expressions dans un système d'axes fixe dans la section.

3.3.2. - Action de l'effort tranchant

il est possible de généraliser aussi les expressions de l'élasticité linéaire dans l'hypothèse du module $G(y)$ variable dans la section. Cette démarche n'a que peu d'intérêt, la littérature fournissant des méthodes de résolution plus simples et plus proches de la réalité physique (modèle du treillis Réf 76).

3.3.3. - Action du couple de torsion

a) Equation de la torsion :

En négligeant d'une part la rotation correspondant aux distorsions dues au couple C_2 (Cf. A.3), devant la rotation à laquelle correspond le bimoment B, et d'autre part la flèche due à l'effort tranchant devant la flèche due au moment de flexion, l'équation de la torsion mixte s'écrit, sous forme simplifiée :

$$\overline{EK}_t \cdot \frac{d^3\Theta}{dz^3} - \overline{GK} \cdot \frac{d\Theta}{dz} = C(z)$$

avec : \overline{GK} et \overline{EK}_t respectivement rigidités de torsion et de gauchissement en élasticité non-linéaire.

Comme en élasticité linéaire, cette équation s'intègre facilement, et on obtient finalement une solution de la forme :

$$\Theta = k_1(L, \bar{d}) + k_3(L, \bar{d}) \cdot e^{-z/\bar{d}} + k_4(L, \bar{d}) \cdot e^{z/\bar{d}}$$

avec \bar{d} la "distance caractéristique" rapport des deux rigidités de l'élasticité non-linéaire, à savoir :

$$\bar{d} = \sqrt{\frac{\overline{EK}_1}{\overline{GK}}}$$

par ailleurs concernant ces deux grandeurs, il a été mis en évidence les résultats suivants :

Rigidité de gauchissement \overline{EK}_1 : elle se calcule par une relation de forme analogue à celle de l'élasticité linéaire avec un domaine d'intégration composé des armatures longitudinales et du béton comprimé de l'aile comprimée. Elle reste donc constante après fissuration totale de l'aile tendue, malgré un état de fissuration qui lui, évolue.

Rigidité de torsion \overline{GK} : elle a fait l'objet d'une étude particulière (chapitres II et IV) qui a permis de mettre au point une relation semi-empirique donnant celle-ci dans un état de fissuration et de chargement quelconque.

b) Contraintes et déformations de cisaillement, de torsion et de gauchissement gêné

Ayant étendu les intégrales de calcul au domaine (Σ') précédemment défini, on peut déterminer simultanément la position du pôle principal, et la valeur de la rigidité de gauchissement non-linéaire \overline{EK}_1

Position du centre de torsion, telle que :

$$\int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot x(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0$$

$$\int_{(\Gamma)} E(s) \cdot \Omega(s) \cdot y(s) \cdot t(s) \cdot ds = 0$$

rigidité de gauchissement, telle que :

$$\overline{EK}_1 = \iint_{(\Sigma')} E(s) \cdot [\Omega_T(s)]^2 \cdot dS$$

les grandeurs \overline{C}_1 , \overline{C}_2 et \overline{B} se calculent comme des dérivées de la rotation :

$$\overline{C}_1 = - \overline{GK} \cdot \frac{d\Theta}{dz} \quad ; \quad \overline{C}_2 = C - \overline{C}_1 \quad ; \quad \overline{B} = d^2 \overline{GK} \cdot \frac{d^2\Theta}{dz^2}$$

Le gauchissement gêné se traduit par des déformations longitudinales ϵ_2 et des contraintes normales σ_2 qui s'ajoutent algébriquement à celles dues à l'effort normal et au moment de flexion.

Celles-ci peuvent se calculer par l'expression :

$$\epsilon_2 = \frac{\overline{B} \cdot \Omega}{\overline{EK}_1}$$

la distribution des distorsions n'est pas, dans le cas général, régie par une hypothèse simple, valable quelque soit la forme de la section, comme l'est l'hypothèse de la planéité des sections pour les déformations longitudinales. Toutefois, dans le cas d'un profil mince ouvert, l'expérimentation montre (Essais OE 1 et OE 2) que les distorsions associées au gauchissement gêné sont constantes sur l'épaisseur et que celles associées à la torsion pure varient linéairement sur l'épaisseur.

par ailleurs, la comparaison des déformations de cisaillement calculées et mesurées (essais OE 1 et OE 2) s'avère très satisfaisante avec les hypothèses envisagées, et permet de généraliser les expressions des déformations de cisaillement et des caractéristiques qui interviennent dans leur calcul, par les relations (*) (**), soit :

$$\varepsilon_{c1} = \frac{1}{2} \gamma_{c1} = \frac{1}{2} \frac{C_1 \cdot t(s)}{\overline{GK}} \quad (*)$$

$$\varepsilon_{c2} = \frac{1}{2} \gamma_{c2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_2 \overline{EL}(s)}{\overline{EK}_1 \overline{G(s)} \cdot t(s)} \quad (**)$$

avec :

$t(s)$: épaisseur à l'abscisse s .

$\overline{G(s)}$: module de déformation transversale à l'abscisse s

Dans un cas général de sollicitation, pour un profil mince, la contrainte de cisaillement totale à l'abscisse s le long du profil d'épaisseur $e(s)$ (supposée parallèle à la tangente à la ligne moyenne), s'écrira comme la somme algébrique :

- des composantes dues à l'effort tranchant et au gauchissement gêné (supposées constantes sur l'épaisseur) ;
- celle due au couple de torsion pure (supposée nulle sur la ligne moyenne et variant linéairement dans l'épaisseur) soit :

$$\begin{aligned} \tau(s) = & \frac{T_x \cdot \overline{ES}_y(s)}{\overline{EI}_y \cdot e(s)} + \frac{T_y \cdot \overline{ES}_x(s)}{\overline{EI}_x \cdot e(s)} \\ & + \int \cdot \overline{G} \cdot \frac{\overline{C}_1 \cdot e(s)}{\overline{GK}} + \frac{\overline{C}_2 \overline{EL}(s)}{\overline{EK}_1 \cdot e(s)} \end{aligned} \quad (*)$$

(\int , compris entre - 1 et 1, indiquant la position dans l'épaisseur du profil).

Dans ces expressions :

- \overline{ES}_y et \overline{ES}_x sont les rigidités statiques par rapport à C_y et C_x respectivement ;
- $\overline{EL}(s)$: la grandeur géométrique telle que :

$$\overline{EL}(s) = - \int_0^s E(s) \cdot \Omega_T(s) \cdot e(s) \cdot ds$$

- \overline{C}_1 et \overline{C}_2 , les fractions du couple C appliqué qui sont équilibrées en torsion pure et en gauchissement gêné respectivement.

4. - DETERMINATION DES RIGIDITES TANGENTES PAR UNE METHODE GRAPHIQUE

l'étude suivante réalisée au C.E.B.T.P. qui a fait l'objet de la présente thèse, s'est attachée à la mise au point de formules semi-empiriques de calcul de la rigidité de torsion d'une section en béton armé, de forme quelconque, sous chargement combiné de flexion et torsion avec fissuration de flexion.

Basées sur un modèle physique de fonctionnement de la section, sous ce type particulier de chargement, ces relations peuvent permettre la détermination de la rigidité de torsion en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques de la section, et d'un indice de fissuration (défini comme le rapport de l'ouverture de la fissure au niveau de l'armature tendue t_m et de l'écartement entre deux fissures successives s_m).

Dans l'attente de la mise à terme d'une recherche actuellement réalisée au C.E.B.T.P. (*) (relative à la détermination d'une loi reliant le chargement à la variable de fissuration s_m) qui permettra un calcul automatique de la rigidité de torsion, en fonction du chargement en présence d'une fissuration droite, nous, proposons une synthèse graphique des différents essais réalisés, à ce jour, dans les laboratoires du C.E.B.T.P. En effet cet outil graphique rapporte pour deux familles de sections (creuses et pleines) la dégradation de la rigidité de torsion tangente par rapport à la valeur qu'elle aurait en élasticité linéaire, en fonction du rapport C/C_0 , avec :

C : Couple de torsion agissant ;

C_0 : Couple de fissuration en torsion pure, calculé en admettant que la contrainte de cisaillement maximal atteigne une valeur égale à la résistance à la traction.

par interpolation, pour un type de section donné (Fig.120 et 121), et pour un couple donné, on pourra obtenir (avec une erreur maximum de l'ordre de 10 %) la valeur de la rigidité de torsion tangente.

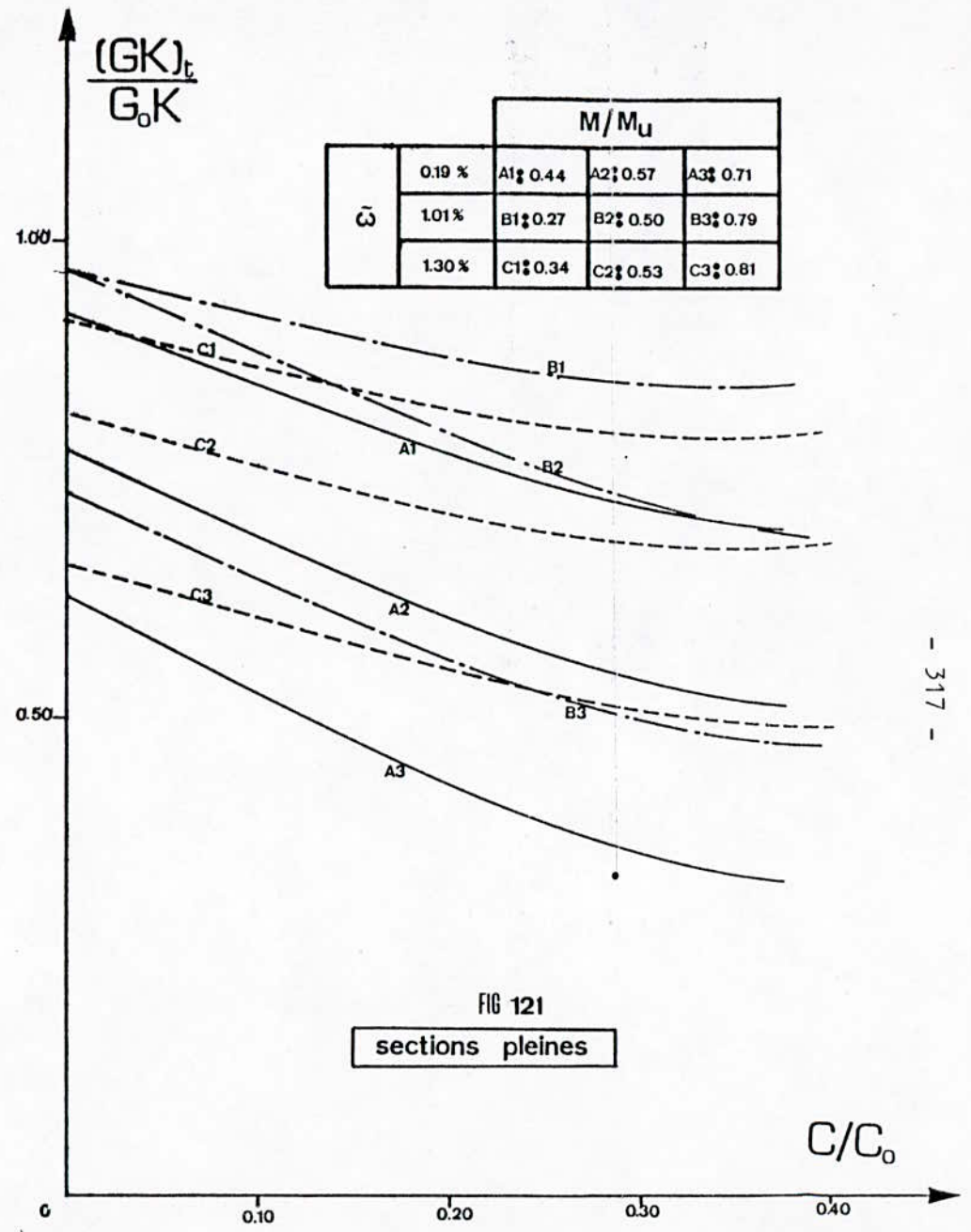
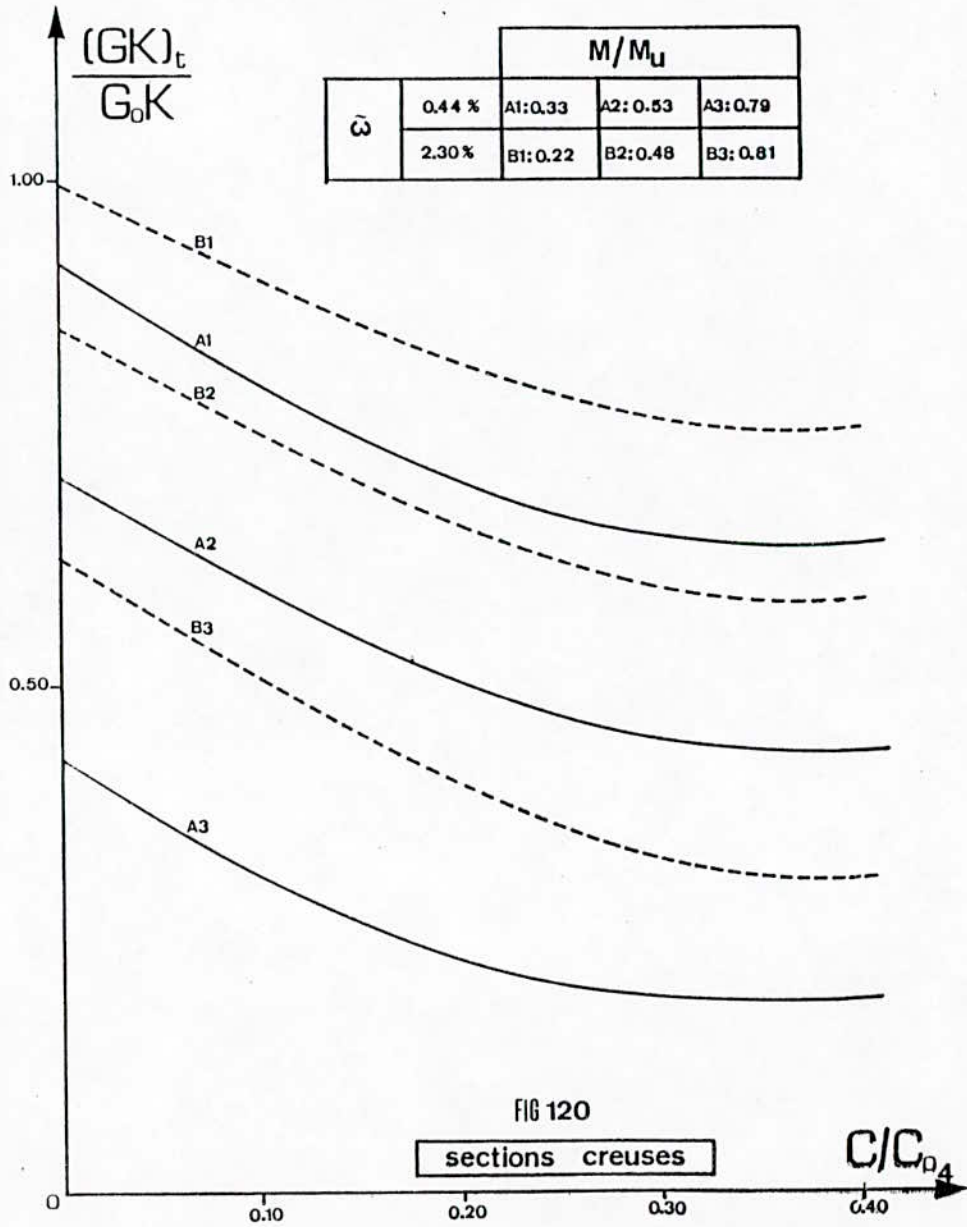


FIG 120
sections creuses

FIG 121
sections pleines

Détermination des rigidités tangentés par une méthode graphique

CONCLUSION

Ce travail développe une méthode originale de calcul pour un profil mince ouvert, de la rigidité de torsion et de la rigidité de gauchissement, après fissuration de flexion.

Les rotations de torsion, les déformations de cisaillement et de gauchissement observées lors des essais, semblent également une meilleure concordance avec les méthodes de calcul proposées, qu'avec les quelques théories simplifiées existant dans la littérature.

En élasticité linéaire (avant fissuration), une contribution importante a été apportée pour tenir compte de la contribution des armatures dans les expressions des rigidités de gauchissement et de torsion d'une section mince ouverte en béton armé.

Un travail de dépouillement important (180 points de mesure environ) a permis une confrontation détaillée de la théorie au comportement expérimental.

En élasticité non linéaire, l'interprétation des essais est basée sur une généralisation de la théorie classique (dans l'hypothèse de l'élasticité non linéaire).

On peut ainsi généraliser les expressions qui définissent :

- la position du centre de torsion
- l'aire sectorielle
- la rigidité statique sectorielle
- la rigidité de gauchissement.

Après fissuration de flexion, on montre que la position du centre de torsion est indépendante du niveau de chargement et du niveau de fissuration de la section droite.

La rigidité de gauchissement étant alors constante le long de la poutre, on peut "remonter" à la rigidité de torsion expérimentale qui n'est pas directement calculable.

Par une méthode semi-empirique qui permet de relier le module de déformation transversal G fictif à l'état de fissuration de la poutre, et en tenant compte de l'influence des armatures longitudinales (par effet de "goujon"), on développe une méthode semi-empirique de calcul de la rigidité de torsion.

Cette recherche, qui a fait parallèlement l'objet d'un contrat industriel, est d'une grande utilité pratique, notamment pour le calcul et l'utilisation de préfabriqués de grande dimension.

En Algérie, où l'utilisation de ce type d'éléments s'est rapidement développé au cours des dernières années, ce problème est de première actualité, notamment en vue de l'élaboration des règles de construction relatives à ces ouvrages nouveaux.

Par sa contribution importante, ce travail ouvre la voie à des recherches nouvelles de la solution plus générale et plus rigoureuse du problème de l'état ultime de stabilité d'éléments en béton armé ou précontraint.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABSI E. - "Contribution à l'étude des profils minces ouverts raidis par des linteaux". Annales de l'I.T.B.T.P., Janvier 1980 n° 379. Série Théorie et Méthodes de Calcul n° 23 B, pp 1 - 12, Réf. 2.

- [2] ALLOS A.E. and MARTIN L.H. - "Plain concrete tee beams subjected to torsion, bending and shear". G.B. Build Env. Vol. 13, n° 2, 1978, pp 125 - 134, Réf. 20.

- [3] ATTARD Mario M., SOMERVATTLE, KABAILA - "Stability theory and analysis of thin walled open beams". Uniciv Rep. n° R-200, November 1981, 66 pages (illustrations bibliographiques).

- [4] BELOW Kevin D., B. Vijaya RANGAN and HALL Stanley - "Theory for concrete beams in torsion and bending". U.S.A. Proc. A.S.C.E., Journal of the Structural Division, Août 1975, Vol. 101 n° 5 ST 8, pp 1645 - 1660.

- [5] BLACK Martin M. - "Non-linear behaviour of thin walled unsymmetrical beam sections subjected to bending and torsion". London Chatto, 1967, pp 87 - 102.

- [6] BLAISE P. - "La torsion des prismes cellulaires à parois minces et à profils composés d'éléments fermés et ouverts". COstruction Métallique, 1964, Vol. 2, pp 21 - 34.

- [7] BOSE B. - "The influence of torsional restraint stiffness at supports on the buckling strength of beams". GBR Struc. Engr., Vol. 60 B, n° 4, December 1982, pp. 69 - 75.

- [8] BEROUS et FAGET - "Rapport de stage E.C.P.", 1980.
- [9] BEEBY W. - "the prediction of crack widths in hardened concrete".
The Structural Engineer, Vol. 57, Janvier 1979.
- [10] BUILDING CODEREQUIREMENTS for reinforced concrete (A.C.I. 318-77),
A.C.I. Committee 318, American Concrete Institute. Detroit Michigan
1978, 148 pp.
- [11] BREDT R. - "Kritische Bemerkungen Zur Drehungselastizität".
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure Bd 40, 5785, 1986.
- [12] BELICH F. - "Buckling Strength of Metal Structures". Mac Graw Hill
Book Company, New-York 1958.
- [13] COLLINS M.P. - "The torque twists characteristics of reinforced
concrete beams". S.M. n° 8. Study Inelasticity and non linearity
in structural concrete University of Waterloo Press, Waterloo,
Ontario, 1972, pp 211 - 232.
- [14] COURBON J. - "Résistance des matériaux". Tomes 1 et 2, Dunod
Editeur, Paris.
- [15] COLLINS M.P. - "Towards a rational theory of R.C. members in shear".
Journal of the Structural Division A.S.C.E., Vol. 104 n° ST 4.
Proc. Paper 13697, April 1978, pp 649 - 666.
- [16] CONTALDO M. et MALANGONE P. - "Sul dimensionamento di elementi
in C.A. soggetti a torsione e sul controllo della rigidezza torsio-
nale in fase fessurata". Italia G. Génio Civil, Vol. 119 n° 7-9,
Juillet-Août-Septembre, 1981, pp 229 - 242.
- [17] COLLINS M.P. and MITCHELL D. - "Shear and torsion design of pres-
tressed and non-prestressed concrete beams". U.S.A. J. Prestressed
Concr. Inst. 1980/09-10, Vol. 25, n° 5 pp 32 - 100, Réf. 35.

- [18] COLLINS M.P., WALSH and ARCHER - "The design of rectangular reinforced concrete beams subjected to combined torsion, bending and shear". Kensington Univ. of N.S. Waler, août 66, Univ. report N.R.-16, 33 p.
- [19] COLLINS and LAMPERT - "Redistribution of moments at cracking" Canada Toronto Dept. de Génie Civil, Fév. 71, Publi. 71-21, 25 p.
- [20] COLLINS M.P., WALSH P.F., ARCHER F.E. and HALL A.S. - "Reinforced concrete in torsion". University of New South Wales ; Kensington australia. Uniciv report n° 31, March 1968, 328 p.
- [21] COMAN H.J. - "An elastic theory for the torsional strength of rectangular reinforced concrete beams". Magazine of concrete research, Vol. 4, n° 24, July 1959, pp 3-7.
- [22] CHAJES A. and WINTER G. - "Torsional, flexural buckling of thin walled members". U.S.A. Proc. A.S.C.E. Journal of structural Division, août 1965, Vol. 91 n° ST4, Part. 1, pp 103 - 124.
- [23] DEIELOWSKI R. - "Torsion non uniforme des poutres à parois minces et à profils composés d'éléments fermés et ouverts". Annales des Ponts et Chaussées n° 5, 1952.
- [24] DESAYI P. - "Cracking of reinforced and prestressed concrete members", Part 1 and 2, The Indian Concrete Journal. May 1976 and June 1976, Vol. 50, pp 146 - 150 and 187 - 190.
- [25] DESAYI P. - "Cracking in reinforced concrete flexural members". Journal of the American Concrete Institute, April 1956, Proc. Vol. 52, pp. 851 - 862
- [26] DESAYI P. and GONESAN N. - "Estimation of maximum crack width in reinforced concrete flexural members". Indian Concrete Journal 1980/04, Vol. 54 n° 4, pp 106 - 112
- [27] DANESI R.F. and EDWARDS A.D. - "Bending, torsion and distorsion of prestressed concrete box beams, deformable cross section". G.B.R., Proc. Inst. Civ. Engr., Vol 73 n° 12, Dec. 1982 pp 789 - 810

- [28] DUY W. - "Überschläglicher Kippnachweis nachgl 13503/01 unter Berücksichtigung". ALL, Bauplanung Bautechnik, Oktober 75.
- [29] DAVIES J.M. - "Torsion-bending analysis made easy". Proc. Civ. Engrs., Fev. 86.
- [30] EDWARDS D.Arthur and PICARD A. - "theory of cracking in concrete members". Journal of the Structural Division,
- [31] EGGENSCHWYLER A. - "Über die Festigkeitsberechnung von Schiebetoren und ähnlichen Bauwerken". Diss ETH 1921.
- [32] FOURÉ B. et PRADES B. - "Calcul des rigidités d'une section de béton armé en double té hors du domaine de l'élasticité linéaire". Document provisoire. Octobre 1974, S.E.S , C.E.B.T.P.
- [33] FOURÉ B. - "Flexion composée en élasticité non-linéaire". Extrait du cours de l'E.N.P.C., Paris.
- [34] FOURÉ B. - "Déversement des poteaux et poutres en béton armé ou précontraint". Note de clôture de dossier de recherches, Décembre 1976.
- [35] FOURÉ B. - "A torsion test machine". Institut de Recherches Appliquées du Béton Armé (I.R.A.B.A.), Saint-Rémy-lès-Chevreuse Juin 1969, 13 p.
- [36] FOURÉ B. - "Deversement des poutres et poteaux en béton armé et précontraint ; Influence de la fissuration de flexion". Etude expérimentale, Mars 1984, S.E.S , C.E.B.T.P.
- [37] FOURÉ B. - "Rigidité de torsion des poutres fissurées en flexion". Etude de synthèse, Contrat S.E.T.R.A -U.T.I , Novembre 1984.

- [38] FOUÉ B. - "la torsion des pièces circulaires creuses". Annales de l'I.T.B.T.P. 1981/06 n° 395, Série Essais et Mesures n° 185, pp 64 - 76.
- [39] FOUÉ B. et GRELAT A. - "Calcul automatique de structures planes en béton armé, Programme L.M.C.P., S.E.S. 1975.
- [40] FOUÉ B. et KAVYRCHINE M. - "Déformabilité du béton en compression et cisaillement combinés ; étude expérimentale". Fev. 83, publication interne du C.E.B.T.P.
- [41] FISCHER W. and DOBIE W.B. - "The torsional stiffness of structural sections". The Structural Engineer, Vol. 26, n° 3, March 1948, pp 154 - 182.
- [42] FÖPPL A. - "Der Drillingswiderstand von Walzeisensträgern Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd 61, 5694, 1917.
- [43] GROB J. - "Traglast von stäben mit dünnwandigen offenem querschnitten". Institut für Baustatik, E.T.H. Zürich, Bericht Nr 56, Juin 1975.
- [44] GOODIER J.N. - "The buckling of compressed bars by torsion and flexure". Cornell University, Engineering Experiment Station Bulletin 27, 1941
- [45] HOGNESTAD E. - "High strength bars as concrete reinforcement". Part 2, Control of flexural cracking. Journal of the P.C.A. Research and Development Laboratories, January 1962, Vol. 4, pp 46 - 62.
- [46] HEINS P. Conrad and POTOCKO R. - "Torsional stiffening of I girder webs". U.S.A. Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs, Journal of Structural division 1979/08, Vol. 105 n° 8 pp 1689 - 1698, Réf. 8.

- [47] HAMADI Y.D. and REGAN P.E. - "Behaviour in shear of beams with flexural cracks". Magazine of concrete research ; Juin 1980
- [48] HSU T.T.C. - "Torsion of structural concrete - plain concrete - rectangular sections". Torsion of structural concrete publication. SP 18, American Concrete Institute. Détroit, Michigan, 48219, U.S.A. 1968, pp 261 - 306
- [49] HWANG C.S. and HSU T. - "Mixed torsion analysis of reinforced concrete channel beams - a Fourier series approach". Journal of American Concrete Institute, Vol. 80 n° 5, October 83, pp 377 - 386.
- [50] HANNACHI N.E. - "Adhérence aciers-béton" - Thèse de Magister en G. Civil , Polytechnique alger, Octobre 1982.
- [51] JACCOUD et FABRE J.P. - "Flèches de structures en béton armé ; vérification expérimentale d'une méthode de calcul". Annales de l'I.T.B.T.P. n° 406, Juillet-Août 1982.
- [52] JUST David and WALLEY Willian J. - "Torsion of solid and hollow rectangular beams". Journal of the Structural Division A.S.C.E. ; Vol. 105 n° ST8, Proc. paper 14845, Sept. 1979, pp 1789 - 1894
- [53] KR PAN P. and COLLINS M.P. - "Testing thin walled open R.C. structure in torsion". Journal of the Structural Division A.S.C.E., Vol. 107 n° ST6, Proc. paper 16332, June 1981, pp 1129 - 1140.
- [54] KR PAN P. - "The behaviour of open thin walled restrained, reinforced concrete members in torsion". Thesis of Doctor of Philosophy C.E. Oct. 74, toronto, Canada.
- [55] KOLLBRUNNER et BASLER K. - "Torsion - Application à l'étude des structures". S.P.E.S. (Lausanne) et Bordas (Paris) éditeurs.
- [56] KAVYRCHINE M., LACHIZE J.P., VILLATOUX J.P. et NGUYEN VAN PHUOC - "Essais en flexion et flexion-torsion combinées de poutres en double té en béton précontraint". Service d'Etude des structures Rapport EL 74.

- [57] KAVYRCHINE M., GRELAT A. et NGUYEN VAN PHUOC - "Essais à la torsion de pièces prismatiques en micro-béton précontraint". S.E.S. - C.E.B.T.P., Rapport GL, Janvier 1975.
- [58] KR PAN P. and COLLINS M.P. - "Predicting torsional response of thin walled open reinforced concrete members". Journal of the Structural Division, A.S.C.E., Juin 1981.
- [59] KR PAN P. and COLLINS M.P. - "Testing thin walled open reinforced concrete structure in torsion". Journal of the Structural Division A.S.C.E., Juin 1981.
- [60] KARLSSON I. - "Torsionnal stiffness of reinforced concrete structures in pure torsion". Chalmers University of Technology, Division of Concrete Structures, report 71/1, Goteborg - Juin 1971.
- [61] KUTZELNIGG E. - "Deu stahlbau, 1978/12, Vol. 47 n° 12 pp 370 - 373.
- [62] KUCZYNSKI W. - "Annales de l'I.T.B.T.P. n° 206, Février 1965.
- [63] KAVYRCHINE M. - "Quelques aspects du comportement du béton armé des structures liés à l'influence des zones tendues ou fissurées". Annales de l'I.T.B.T.P. n° 383, 1980.
- [64] KAVYRCHINE M. et FOURÉ B. - "Instabilité de forme. Déversement des poutres et poteaux en béton armé ou précontraint. Rapport Contrat SETRA-UTI, Décembre 1981.
- [65] KAVYRCHINE M. et FOURÉ B. - "Etude préliminaire sur les essais de poutres à profil ouvert". Rapport SETRA-UTI, Décembre 1981.
- [66] KR PAN P. and WARPTI - "Computer program for warping torsional constants". National Technical Information Service, Springfield V.a, 1978.

- [67] KUHN P. - "Stresses in Aircraft and shell structures". Mac Graw Hill Book Company 1956.
- [68] KAPPUS R. - Drillknicken zentrisch gedrückter Stäbe mit offenem Profil im elastischen Bereich; Luftfahrtforschung Bd 13 S 444, 1937.
- [69] LINDGREN H; - "Cylindrical shells" - Vol. 1, Cylindrical roofs, Copenhagen, Danish Technical Press 1951, pp. 360.
- [70] LAMPERT P. and THURLIMANN B. - "Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending". Publication 31-I International Association for Bridge and Structural Engineering. Zürich 1971, pp 107 - 131.
- [71] LAMPERT P. and COLLINS M.P. - "Torsion, bending and confusion ; an attempt to establish the facts". Proceedings V. 69 n° 8, August 1972, pp 500 - 504.
- [72] LADYING R.W. and WILHEM W. - "Torsional strength and stiffness of plain rectangular concrete beams". Report n° 2005. Civil Engineering Studies, West Virginia University, Morgantown. West Virginia, U.S.A. 1969.
- [73] MAILLART R. - "Zur frage Biegung. Schweizerische Bauzeitung", Bd 77. 5195, 1921.
- [74] MENEGOTTO M. et PINTO P.E. - "Método générale di analisi della fléssione deviata di éléments iperstatici snelli in C.A o in C.A.P." Istituto di Scienza e Tecnica delle Costruzioni. Rap- port technique n° 47, Université de Rome (1974)
- [75] MENEGOTTO M. et PINTO P.E. - "Slender RC compressed members in biaxial bending". Journal of the Structural Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers (Mars 1977).

- [76] MITCHELL D., LAMPERT P. and COLLINS M.P. - "The effect of stirrup spacing and longitudinal restraint on the behaviour of reinforced concrete beams subjected to pure torsion". Civil Engineering Publication n° 71-22. Dept. of Civil Engineering, University of Toronto, octobre 1971.
- [77] MANDEL J. - "Détermination du centre de torsion à l'aide du théorème de réciprocité". Annales des Ponts et Chaussées, n° 3, 1948.
- [78] MASSONI Michel - "Extension de la théorie de la torsion gênée aux sections multicellulaires ouvertes ou fermées". Annales des Ponts et Chaussées, 1979/04-06 n° 10, pp 13 - 21, Réf. 11.
- [79] MALDAGUE J.C. - "Détermination expérimentale des lois moments-courbures des poutres en béton armé". Annales de l'I.T.B.T.P. n° 209, Mai 1965.
- [80] MANSUR Mohammad A., TING Seng Kiong and LEE Seng lip - "Torsion tests of R/C beams with large openings". U.S.A., Journal of Structural Engineering A.S.C.E., Vol. 109, n° 8, Août 1983, pp 1780 - 1791.
- [81] MAC MULLEN Arthur and EL DEGHWY Wael M. - "prestressed concrete tests compared with torsion theories". P.C.I. Journal - Septembre et Octobre 1985.
- [82] NIELSEN T. B. - U.S A.C.I. Design and construction, Vol. 4, n° 11 Nov. 82, pp 51 - 55.
- [83] NGUYEN VAN PHUOC - "Torsion de pièces de forme quelconque en béton précontraint" - Thèse de Docteur-Ingénieur, Paris VI.
- [84] PAULAY T., PARK R. and PHILLIPS M.H. - "Horizontal construction joints in cast in place reinforced concrete". American Concrete Institute, Special publication SP 42, 1974.
- [85] PARK R. and PAULAY T. - Reinforced concrete structures". John Wiley and Sons, New-York 1975, 7.8.3 Chapitre 7.

- [86] PRÉ Michel - "Etude de la torsion dans le béton précontraint par la méthode du treillis spatial évolutif". Annales de l'I.T.B.T.P. n° 385, Juillet/Août 1980.
- [87] PLISKIN L. - "Calcul en flexion composée d'une section en béton armé avec des lois de comportement des matériaux quelconques. Application à différentes sections du B.A.E.L. 80". Annales de l'I.T.B.T.P. n° 418, Octobre 1983, Série Béton 218, pp 126 - 143.
- [88] PANDIT G.S. and WARWARUK J. - "Effect of flexure on the initial torsional stiffness of reinforced concrete beams of rectangular cross section". Indian Concrete Journal, Septembre 1967, Vol. 41 pp 355 - 358.
- [89] PRANDTL L. - "Zur torsion von prismatischen Stäben". Physikalische Zeitschrift 4. Jahrgang S758, 1903.
- [90] RAJASEKARAN S. - "Critical review of the design of reinforced concrete cikylbs". Indian Concrete Journal, Vol. 56 n° 1, January 1982, pp 10 - 17.
- [91] ROBINSON J.R., B. FOURÉ et A. SAHEBDJEM - "Flambement des poteaux carrés en béton armé chargés hors d'un plan de symétrie". Annales de l'I.T.B.T.P. n° 327, Avril 1975.
- [92] ROBINSON J.R. et B. FOURÉ - "La résistance aux efforts tangents des joints verticaux d'angle entre grands panneaux". Annales de l'I.T.B.T.P., n° 316, Avril 1974.
- [93] SCHLOSSER F. - "Analogies et différences dans le comportement et le calcul des ouvrages de soutènement en terre armée et par clouage au sol". Annales de l'I.T.B.T.P., Octobre 1983. Journées d'étude "Renforcements et amélioration des sols".
- [94] SANDEGREN D.S. and YU C.W. - "Torsional stiffness of reinforced concrete rectangular members". G.B.R. Magazine concrete Research 1979/12., Vol. 31 n° 109, pp 1936201, Réf. 7.

- [95] SOLANKI H.T. - "Behaviour of reinforced concrete beams in torsion". G.B.R. Proc. Institute Civ. Engrs. Part 2, Vol. 75 ; Mars 85, pp 95 - 101.
- [96] SHARMA A.K. and PANDIT G.S. - "Tests on concrete beams in combined torsion". Indian Concrete Journal, December 1978, Vol. 52, pp 517 - 520.
- [97] SHARMA A.K. and PANDIT G.S. - "Torsion tests on concentrically prestressed beams". Indian Concrete Journal, February 1979, Vol. 54, pp 54 - 59.
- [98] SHARMA A.K. and PANDIT G.S. - "Torsional stiffness of concrete beams under combined loading". Indian Concrete Journal 1981.
- [99] SAINT-VENANT B. - "Mémoire des savants étrangers", Vol. 14 - 1855.
- [100] TAYLOR H.P.J. - "Investigation of the dowel shear forces carried by the tensile steel in reinforced concrete beams". Cement and Concrete Association 1969. Publication 42.451.
- [101] TIMOSHENKO S.P. and GOODIER J.N. - "Theory of elasticity". Mac Graw Hill book Co. Inc 1970.
- [102] Torsion in concrete 1784 - 1974. A.C.I. Bibliography n° 12 A.C.I. Committee 438. American Concrete Institute. Detroit Michan 1978, 148 p.
- [103] THASANATORN Chirasak and PILKEY Walter D. - Torsional stresses in circularly curved bars". Journal of the Structural Division, A.S.C.E., Vol. 105 n° ST 11. Proc. Paper 14984, Nov. 79, pp 2327 - 2342.
- [104] VLASSOV V.Z. - "Thin walled elastic beams". Moscow 1941. Jerusalem Israel program for scientific translations (for National Science Foundation, Washington D.C. and the U.S. Departement of Commerce) 1961, 495 p.

- [105] VON BACH - "Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von balken mit". Deutscher Ingenieure, 1909 - 1910.
- [106] WALSH D.F., HALL A.S. and ARCHER F.E. - "Deformation of reinforced concrete beams subjected to bending and torsion". University of New South Wales, Report R-34, Kensington, Mars 1968.
- [107] WANG T. Shien and JSA Shi T. - "Stiffness analysis of locally buckled thin walled continuous beams". G.B. Computers & Structures, April 1975, Vol. 5 n° 1, pp 81 - 93.
- [108] WEBER C. et BUNTHER W. - "Torsionstheorie" Verlag Friedr Viewegand Sohr Braunschweig 1958.
- [109] WAGNER H. - "Verdrehung und knickung von effenen Profilen". Festschrift 25, Jahre T.H. Danzig 1929 Bd 11, S329.
- [110] YOUNG C.R., SAGAR W.L. and HUGHES C.A. - "Torsional strength of rectangular sections of concrete plain and reinforced". University of Toront, School of Engineering, Bulletin n° 9, 1922.
- [111] ZBIROHOWSKI Koscia K. - "Thin walled beams, from theory to practice". London Crosby Lockwood and Sons Ltd 1967, pp XII - 100.
- [112] ZALESSOV A.S. - "Calcul de la résistance des éléments en béton armé soumis aux contraintes transversales et à la torsion". U.R.S.S. Zelezobeton n° 6, 1976, pp 22 - 24.
- [113] PARVIS Soroushian, OBASEKI Kienuwa, ROJAS Maximo and SIM - "Analysis of dower bars acting against concrete core". A.C.I. Journal July/August 1986, paper n° 83-59, pp 642 - 649.