

UNIVERSITE d'ALGER

105C 1/73

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

département GENIE - CIVIL

# THESE DE FIN D'ETUDES

pavillon d'exposition à toiture en  
quatre paraboloides hyperboliques

proposé par :

UNGUREANU ION

ingénieur docteur d'état

professeur à l'ENP

étudié par :

BACCOUCHE SALAH

ANNEE 1972-73

UNIVERSITE d'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

département GENIE - CIVIL

THESE DE FIN D'ETUDES

pavillon d'exposition à toiture en  
quatre paraboloides hyperboliques

proposé par :

UNGUREANU ION

ingénieur docteur d'état

professeur à l'ENP

étudié par :

BACCOUCHE SALAH

ANNEE 1972-73



Il'est pour moi un devoir agréable de remercier Monsieur UNGUREANU ION Professeur de la Théorie de l'élasticité à L'E.N.P. pour son aide ainsi que ses appréciations très compétentes. Sans lui, je ne me serais jamais aventuré dans ce monde des coques, à la fois beau et difficile.

Ile remercie également Monsieur KHAOUA Mohamed, Directeur Général du C.T.C. ainsi que Monsieur HAFIDI, Directeur Régional et Monsieur BEGHDAI Ingénieur, pour m'avoir apporté toute l'aide matérielle dont j'ai eu besoin pour venir à bout de ce projet.

Ile ne saurai clore ces lignes qu'en remerciant tous ceux qui ont contribué à ma formation, mes professeurs ainsi que notre Chef de Département, Monsieur MEROUANI et notre Directeur Monsieur OUABDESLAM.

Il-) LGER, le 10 JUIN 1973.

---

*Baccouch Sabat*



## INTRODUCTION

La construction des parois minces en béton Armé est entrée aujourd'hui dans la pratique courante du Constructeur. Elle est l'aboutissement logique des progrès réalisés dans l'utilisation du béton Armé.

L'emploi des parois de faible épaisseur comme éléments résistants n'est pas propre au béton armé. Les Constructeurs métalliques ont appliqué la même idée à la construction des réservoirs, des chaudières, des plaques de répartition et... Mais le béton armé se prête beaucoup mieux à la réalisation des éléments minces courbes parce que la forme de la surface qui est le facteur essentiel de la portance de la paroi mince s'obtient plus facilement avec le béton armé qu'avec le métal.

La réduction des dimensions entraîne la réduction du poids propre de la construction, ce qui se traduit en réalité, par une consommation des matériaux plus petite qu'avec les autres systèmes de construction. Si de plus



On tient compte du fait que l'utilisation des Coques en tant que toits permet de couvrir de vastes superficies sans avoir recours à des poteaux intermédiaires, ce qui autrement aurait été requis pour des raisons architecturales et d'exploitation, on verra assez clairement les grands avantages que les Coques offrent à la technique des Constructions.

Seulement on doit tenir compte du fait que le coût du coffrage constitue souvent un handicap important pour les voiles minces. Le façonnage de gabarits courbes précis nécessite une main d'œuvre spécialisée onéreuse. A cet égard, certaines surfaces particulières se révèlent intéressantes: Ce sont les surfaces développables ou doublement réglées tel que le paraboloides hyperbolique qui justement fait l'objet de mon étude. Enfin la difficulté des calculs de résistance de la plupart de ces structures peut parfois faire hésiter les Constructeurs qui en reviennent dès lors aux solutions classiques.

En tenant compte de toutes les Considérations ci-dessus, on peut donc affirmer que la détermination de l'état de contraintes dans les Coques constitue un problème particulièrement important pour l'ingénieur élaborant des projets. En effet la

détermination des efforts et des déformations des Coques constitue un des problèmes les plus ardues de la théorie de l'élasticité appliquée, à cause surtout des calculs mathématiques nécessaires.

Bien que, généralement, on ait pu établir les équations d'équilibre et de déformations, les cas où l'on a pu trouver des solutions sous une forme finie sont plutôt rares et ne se réfèrent qu'aux formes des surfaces, aux contours et aux charges simples.

Les connaissances de mathématiques supérieures nécessaires ont créé un vide qui sépare — au détriment du progrès technique — l'ingénieur constructeur moderne qui ne possède que des notions élémentaires de la mécanique des systèmes formés de barres, du représentant de la théorie mathématique pure de l'élasticité, qui connaît les méthodes modernes de l'analyse mathématique.», disait le regretté Vlassov.

En outre, il faut tenir compte que la théorie est fondée sur toute une série d'hypothèses simplificatrices réduisant les phénomènes physiques à des schémas, ce qui met sous le signe du doute les résultats fournis par le calcul. En ce sens le célèbre architecte mexicain CANDILLA, qui,



employant le paraboloïde hyperbolique, a construit de nombreux édifices particulièrement remarquables par leur légèreté, écrit en présentant quelques structures de Coques : « Compte tenu de l'impossibilité, lorsqu'il s'agit d'un problème de structures, de prendre en considération toutes les conditions secondaires, telle que la contraction due à la prise du béton, les différences de  $T^{\circ}C$  entre les points de la structure, le tassement inégal des fondations, la non homogénéité intrinsèque des matériaux de constructions et l'inévitable manque de précision dans l'exécution, il est évident que le calcul mathématique ne saurait jamais offrir une solution exacte et unique. Aussi les méthodes complexes pour l'élaboration des projets sont-elles utiles. Il vaut mieux s'en tenir à des procédés plus simples qui, assez souvent, sont suffisants lorsque l'ingénieur est un constructeur, et non un calculateur.

Un autre investigateur envisage le même problème, de la manière suivante :

« L'analyse des structures en Coques consiste à déduire une équation différentielle et à trouver à cette équation une solution satisfaisant

aux conditions aux limites -

« la déduction de l'équation différentielle commence par une série d'approximations grossières. Nous faisons une première approximation en considérant que le matériau de la coque est un matériau homogène, isotrope et parfaitement élastique, ou la distribution des efforts intérieurs et des déformations est indépendante de la  $t^{\circ}$  et de l'humidité. Nous faisons une nouvelle approximation lorsque nous supposons que la coque possède une forme géométrique précise... »

Ainsi dans le meilleur des cas, ces théories ne permettent la détermination des efforts que dans une copie élastique d'une construction réelle.

Le Grand Constructeur Français M. Freyssinet avoue quant à lui dans les Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics en 1958 :

« .. Il se trouve que, occupé par ailleurs, je n'ai pris aucune part aux recherches qu'ont provoquées ces nombreux problèmes - j'en suis d'autant plus ignorant qu'elles ont presque toujours revêtu une forme mathématique beaucoup trop compliquée pour moi.

Je m'ignore pas qu'aligner des équations est plus rapide et moins onéreux, plus facile et plus amusant



que des essais en vraie grandeur ou même sur modèle ; je sais aussi que des recherches théoriques sont indispensables pour cerner les problèmes et préciser les domaines à l'intérieur desquels l'expérience peut être utilement organisée. Mais je m'intéresse peu aux recherches purement théoriques car je sais, pour en avoir cruellement pâti autrefois, que les théories sont les plus dangereuses maîtresses d'erreurs que puissent avoir les hommes en général et les Constructeurs en particulier.

« Celles dont l'outil exclusif est l'analyse mathématique sont d'autant plus redoutables qu'elles enivrent leurs adeptes par l'illusion qu'ils peuvent grâce à celles reconstruire l'Univers. Se croyant devenus Dieux, ils substituent à la réalité qu'ils méprisent, les constructions de cerveaux en délire ; cela n'aurait aucune importance s'ils ne réussissaient à les inspirer avec l'intolérance de fanatiques qui croient posséder la vérité »

Quelle sera donc la conclusion à tirer de tout ceci et où est la position juste du théoricien vis-à-vis du praticien ?

A notre avis l'ingénieur doit être théoricien et praticien en même temps, car la théorie et la

pratique loin de se dissocier, se complètent.

Seulement les chercheurs doivent transposer leurs résultats en un langage simple et approprié au besoin de l'ingénieur sachant fort bien que ce dernier doit reprendre les calculs pour des raisons pratiques au point où le mathématicien, soucieux avant tout de l'existence des solutions, a abandonné le problème. Il est certain que la théorie de l'élasticité part d'hypothèses et fait l'objet de simplifications qui laissent une part d'incertitude. Mais ceci n'est pas une raison pour ne rien faire.

Les méthodes d'Essais sur modèle sont aujourd'hui suffisamment au point pour relever les incertitudes, et de toute façon, l'étude sur modèle ne peut se faire sans être suivie par un calcul théorique qu'elle complète et suit pas à pas.

En un mot, un travail à caractère théorique n'est vraiment nécessaire que s'il est relié à la pratique, c'est à dire si la théorie peut être illustrée par des exemples fournis par la pratique.



SUJET ET MÉTHODES  
DE CALCUL

Au cours des recherches faites pour découvrir les surfaces convenant à la construction en coque, qui ont pour conditions d'être :

- à double courbure
- facilement traitables par les mathématiques
- d'une construction facile
- belle et expressive

Le paraboloides hyperbolique devait être rapidement découvert. L'ancienne géométrie ne s'était pas occupée de cette forme - Ses équations ne sont connues que depuis le XVII<sup>e</sup> siècle. Dans les livres de mathématiques et de géométrie, on n'en a fait mention qu'incidemment - A qui revient le mérite d'avoir pour la première fois projeté des coques en forme de paraboloides hyperbolique ?

Nul ne peut le dire - Comme il arrive souvent lorsqu'une chose est dans l'air, plusieurs chercheurs ont pu

indépendamment l'un de l'autre prétendre en avoir fait la découverte. Après la dernière guerre, des coques en paraboloides hyperboliques ont été construites dans le monde entier en nombre croissant.

Les méthodes actuelles de diffusion, qui s'étendent au monde entier, ont aidé pour leur part à faire connaître rapidement cette idée; Et c'est dans le but de contribuer à répandre en Algérie cette forme nouvelle qui constitue une mode dans les constructions, que nous avons envisagé, sous la conduite du Docteur Ingénieur UNGUREANU Ion,

professeur de la théorie de l'élasticité à l'École Nationale polytechnique, Chef de Laboratoire d'Essais sur modèles des structures à Bucarest, l'étude d'un pavillon d'exposition dont la structure de résistance sera exécutée en béton armé et la toiture constituée de paraboloides hyperboliques.

La forme en plan de la construction représente quatre carrés - Chaque carré est couvert d'un paraboloides hyperbolique de 20m de côté.

Il en résulte que dans son ensemble, la toiture est constituée de quatre paraboloides hyperboliques jointifs - La différence de niveau entre les coins d'appui et ceux de sommet est de 8 m -

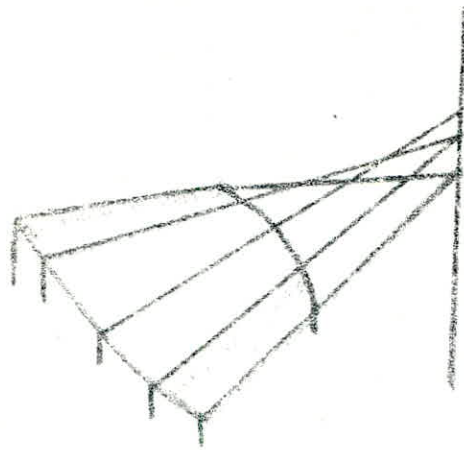


l'épaisseur de la coque est de 7 cm et m'augmente que sur une largeur de 100 cm, de 7 à 12 cm au long du contour. Les poutres de Rive ont la largeur constante et la hauteur variable.

Pour la détermination des efforts intérieurs dans la coque ainsi que ceux dans les poutres, Nous considérons un seul parabolôïde hyperbolique parmi les quatre, à cause de la symétrie.

Le parabolôïde hyperbolique appartient à la famille des surfaces réglées, qui sont engendrées par le déplacement d'une droite suivant une loi bien définie. Ces surfaces se rencontrent fréquemment et sous des formes différentes, cylindre, cône, surface conoïdale, conoïde ect... de tels voiles présentent des avantages évidents pour le traçage, le façonnage et la mise en place des coffrages - pour définir complètement du point de vue géométrique le parabolôïde hyperbolique, Nous allons définir d'abord les surfaces conoïdales.

Une surface conoïdale est une surface engendrée par une droite mobile s'appuyant sur deux directrices situées dans des plans parallèles verticaux et astreinte à couper une droite verticale fixe. Lorsque la droite verticale fixe dont question ci-dessus est rejetée à



l'infini, la surface conoïdale devient conoïde.

Les paraboloides hyperboliques peuvent être considérés comme des conoïdes dont les deux directrices sont des droites non concourantes. Un plan parallèle aux deux directrices constitue le deuxième plan directeur qui définit une deuxième famille de génératrices rectilignes. La surface est donc doublement réglée et chaque point peut être défini par le croisement de deux génératrices - De plus ces deux droites forment le plan tangent à la surface au point considéré -

Il y a deux méthodes qui permettent de déterminer l'état de contraintes dans le paraboloides hyperbolique:

1<sup>re</sup> - La méthode exacte, constituant la théorie de flexion qui attaque le problème dans toute sa généralité, en prenant en considération les efforts et les moments, tout en étudiant en même temps les déformations -



2° - La méthode simplifiée constituant la théorie de membrane (sans moments), où l'on admet que par suite de la très faible épaisseur de la coque par rapport à ses autres dimensions, il ne saurait y avoir des moments de flexion ni de torsion - l'équilibre est assuré uniquement par les efforts dans le plan tangent  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{yx} = N_{xy}$

Ainsi dans le premier cas l'ordre de grandeur des contraintes dues aux moments  $M$  est comparable à celui des contraintes produites par les efforts  $N$ . Certains auteurs l'appellent-ils état de contrainte de type mixte. Dans le second cas, les contraintes de flexion sont petites comparées à celles produites par les efforts normaux.

Dans certains cas, à condition que la coque travaille selon la théorie de membrane, on peut satisfaire aux exigences de la pratique avec une précision suffisante. Toutefois dans la plupart des cas, l'état de contrainte de membrane est irréalisable, et nous sommes forcés d'admettre l'apparition, dans la coque, de domaines où l'on a un état de contraintes du type mixte -

Selon A.L. Goldenveiser, la théorie sans moments donne un tableau à peu près correct de l'état

de contraintes et de déformations d'une coque jusqu'à une distance assez éloignée de certaines lignes de la surface moyenne qu'il appelle les lignes d'Altération de l'état de contraintes.

On peut considérer comme des lignes d'Altération: les bords de la coque, les lignes de discontinuité de la charge, les lignes de discontinuité de la rigidité ou de l'épaisseur de la coque.

Au cours de son important traité à caractère mathématique, A. L. Goldenveiser a énoncé diverses conditions pour l'applicabilité de la théorie des membranes parmi lesquelles:

- 1<sup>o</sup> - les lignes d'Altération ne doivent pas former un réseau trop dense sur la surface.
- 2<sup>o</sup> - les charges extérieures (de surface et sur le contour) ne doivent pas présenter des variations trop fortes.
- 3<sup>o</sup> - la surface moyenne de la coque doit être exempte de certaines singularités.
- 4<sup>o</sup> - la surface moyenne doit être rigide, c'est à dire qu'elle ne doit pas subir des déformations sans qu'il y ait traction (compression) et cisaillement.

Ainsi que le fait remarquer Goldenveiser lui-même « ces conditions ne sont pourtant pas



nécessaires - Même lorsque l'on ne peut satisfaire à quelques-unes d'entre elles, la théorie sans moment peut, toutefois, rester utilisable dans certaines conditions.

Dans la présente étude, Nous consacrerons la première partie à l'application de la théorie de membrane au paraboloi'de hyperbolique. Dans la seconde partie nous lui appliquerons la théorie de flexion.

Les Règles que nous utiliserons seront :

- Règles techniques de Conception et de calcul des ouvrages et Constructions en béton Armé.

CC BA 68 -

- Règles définissant les effets de la neige et du vent sur les Constructions et Annexes.

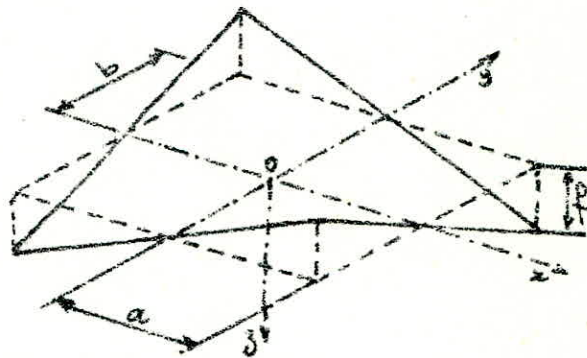
N. V. 65 révisés 1967.

On tiendra compte seulement, pour le calcul des efforts, de l'influence du poids propre et de la neige.

L'étude des influences du vent, de la T<sub>ec</sub> et du retrait ainsi que celle de la répartition non uniforme et non symétrique de la neige, fera l'objet d'une seconde phase de travail basé essentiellement sur un modèle réduit. On aura alors à déterminer les courbes de chargements.

## GÉNÉRALITÉS

La coque du parabololoïde hyperbolique est limitée par deux surfaces courbes, ses parois. leur écart  $\delta = 7 \text{ cm}$  qui constitue l'épaisseur de la membrane est faible par rapport aux autres dimensions. La surface située entre les deux parois, et qui partage en deux l'épaisseur de la coque est appelée surface médiane. c'est cette surface que nous avons représentée plus bas. Dans cette surface nous allons définir, d'une façon assez précise les forces intérieures.



$$a = b = 10 \text{ m}$$
$$f = 4 \text{ m}$$



## A. Hypothèses de Calcul

Dans l'étude du parabolôïde hyperbolique, on fait plusieurs hypothèses de calcul simplificatrices, en ce qui concerne le comportement du matériel et du solide. Ces hypothèses sont :

1<sup>o</sup> - le matériel est continu, homogène et isotrope - cette hypothèse fait l'approximation de la structure discrète de la matière au moyen d'une structure continue ce qui permet d'exprimer les efforts et les déformations par des fonctions continues. par suite de l'homogénéité et de l'isotropie, il s'ensuit que le comportement d'un élément du parabolôïde hyperbolique ne dépend point de sa position ni de son orientation, mais seulement des forces agissant sur lui.

2<sup>o</sup> - Les sollicitations du matériel restent inférieures à la limite de proportionnalité dans le domaine élastique et le module d'élasticité est le même à la traction et à la compression. Il s'ensuit que, après avoir été déchargé, la surface moyenne déformée revient à l'état initial sans déformations, ni contraintes résiduelles. Cette seconde hypothèse permet d'appliquer le principe de la superposition des effets dans le cas des efforts.

3<sup>o</sup> - Les déformations élastiques sont faibles

par rapport à l'épaisseur du parabolôïde hyperbolique.

Au point de vue mathématique, cette hypothèse revient à ne considérer que les termes linéaires du développement en série des expressions des déformations par rapport à la cote  $z$ , considérée suivant la normale. Elle permet également d'appliquer le principe de la superposition des effets aux déformations.

4° les points situés sur une normale à la surface moyenne avant la déformation, restent sur une droite toujours normale à cette surface après déformation - Sa longueur ne change pas non plus. Ceci équivaut à l'hypothèse des sections planes de Bernoulli dans le cas des poutres droites.

Elle exprime que les cisaillements spécifiques  $\gamma_{zx}$  et  $\gamma_{zy}$  dans les surfaces parallèles à la surface moyenne ou, ce qui revient au même, les contraintes de cisaillement  $\tau_{zx}$  et  $\tau_{zy}$  sont nulles. En outre

Elle exprime que l'allongement spécifique  $\epsilon_z$  est nul, c'est à dire que les déplacements de tous les points d'une normale à la surface moyenne sont constants et égaux au déplacement  $u$  du point correspondant dans la surface moyenne (l'épaisseur de la coque ne subit pas de modifications par suite de la déformation -)



5° - les Contraintes normales à la surface moyenne sont négligeables et peuvent, donc, être considérées comme nulles - c'est à dire que  $\sigma_z = 0$

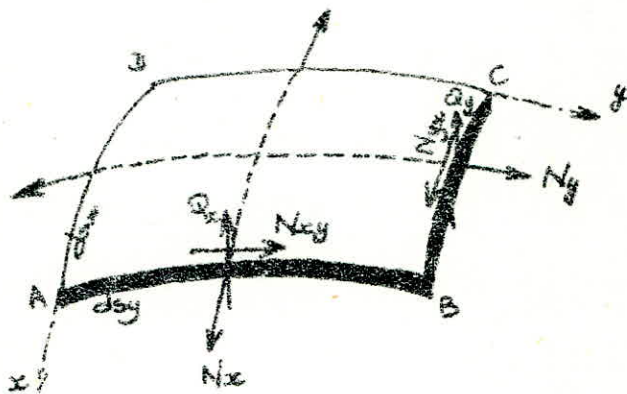
- Ces Contraintes sont négligées aussi bien dans la résistance des matériaux, que dans la théorie des poutres ; Dans la théorie de l'élasticité, on montre qu'elles ne jouent qu'un rôle secondaire - Dans la pratique courante, leurs valeurs ne sont que de l'ordre de 1% de celles des autres contraintes normales - ce qui justifie qu'on les néglige.

## B. Rappels de la théorie de l'élasticité.

- Supposons avoir découpé dans la coque du paraboloïde hyperbolique un petit morceau rectangulaire dont nous appellerons les côtés  $ds_x$  et  $ds_y$ . Nous indiquons ainsi notre intention de les faire tendre vers zéro par un passage aux limites. Dans chacune des surfaces sectionnées, qui ont pour aire  $\delta ds_x$  ou  $\delta ds_y$  agissent des contraintes qui, comme nous le verrons plus tard, sont, dans beaucoup de cas, uniformément réparties sur toute la petite surface de la section. Elles sont donc déterminées si on donne leur résultante. Mais celle-ci n'est pas une grandeur calculable appropriée - Cependant, elle dépend évidemment de la longueur de la section  $ds_x$  ou  $ds_y$ .

Nous nous libérons de cet arbitraire en divisant la résultante par la longueur de la section et en faisant tendre celle-ci vers zéro. Le quotient admet au sens du calcul différentiel, une valeur limite que nous appelons force élastique. Elle a les dimensions d'une force par unité de longueur. On peut aussi la mesurer en  $g/cm$  ou en  $t/m$ . C'est la force appliquée par unité de longueur d'une section faite dans la coque. Nous la décomposons en ses composantes suivant un système d'axes rectangulaires formés par la tangente à la section, la normale à la coque et la normale à la section, qui se trouve tangente à la membrane de la coque.

Nous donnerons pour ces composantes les définitions suivantes :





Dans une section  $x = c^te$  (bord AB), Nous désignons par  $N_x$  la force appliquée sur l'unité de longueur de la section, dans la direction  $x$ , et Nous l'appellerons force longitudinale. Elle sera comptée positivement pour les forces de traction, négativement pour les pressions. On définit de la même manière la force longitudinale  $N_y$ . La force appliquée sur l'unité de longueur et agissant dans la section  $x = c^te$ , qui a la direction de la tangente à la section, s'appelle l'effort tranchant on la désigne par  $N_{xy}$ . On la compte positivement quand dans une section où une force longitudinale positive a la direction de l'axe positif des abscisses, elle est dirigée dans le sens des ordonnées croissantes. On définit de la même manière, pour la section  $y = c^te$  l'effort tranchant  $N_{yx}$ . Le signe de l'effort tranchant dépend des axes de coordonnées. Il s'inverse quand on change le sens positif sur un des axes de coordonnées.

On obtient une définition des efforts tranchants équivalente dans son contenu, mais plus utile dans beaucoup de cas, en partant des contraintes. Nous délimitons dans une section  $x = c^te$  un petit élément de surface  $dF$ . soit  $\sigma_x$  l'effort normal qu'il transmette soit  $\tau_{xy}$  la composante de l'effort tranchant, parallèle à la surface médiane et soit  $\tau_{yx}$ , la composante

de l'effort tranchant perpendiculaire à la surface. les forces correspondantes dans une section  $y = cte$  s'appelleront  $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}$ . Selon la R.D.M on a :  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .

Si la contrainte  $\sigma_x$  est également répartie sur l'épaisseur  $\delta$  de la coque, l'effort résultant pour la surface  $\delta ds_y$  de la section, sera simplement  $\sigma_x \delta ds_y$  et la force longitudinale définie ci-dessus sera :

$$N_x = \sigma_x \cdot \delta$$

Si  $\sigma_x$  varie le long de l'épaisseur de la coque, il nous faut intégrer les forces partielles :

$$\sigma_x \cdot dF \Rightarrow N_x = \int \sigma_x dF$$

Appelons  $z$  l'écart d'un point par rapport à la surface médiane : l'élément de surface a alors pour hauteur  $dz$ , mais sa largeur n'est pas simplement  $ds_y$  : par suite de la courbure de la coque, les normales aux points A et B ne sont pas parallèles et les fibres parallèles à  $ds_y$  sur les parois inférieures et supérieures de la coque n'ont pas des longueurs égales. Si l'on désigne par  $r_y$  le rayon de courbure des lignes  $x = cte$  l'élément de surface, à la distance  $z$  de la surface médiane, a une longueur :

$$ds_y \cdot \frac{r_y + z}{r_y}$$



et l'on obtient, pour la force longitudinale  $N_x$ , l'équation de définition:

$$N_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz$$

dans la section  $y = cte$ , la force longitudinale correspondante est:

$$N_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_y \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz$$

et les deux efforts tranchants sont:

$$N_{xy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$N_{yx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{yx} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz$$

Il résulte de ces formules qu'en dépit de l'égalité symétrique des contraintes de cisaillement, les deux efforts tranchants n'ont pas besoin d'être égaux. Il ne le sont que si  $r_x = r_y$ . Si  $\tau_{xy}$  est indépendant de  $z$  comme on peut le déduire de l'intégrale car, comme  $\int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} z dz = 0$ , le membre avec le rayon de courbure devient nul. Son influence naturellement, n'est jamais grande car  $\delta$  doit être petit par rapport aux rayons de courbure, mais il faut cependant en tenir compte à l'occasion.

En intégrant la troisième composante de la

contrainte de cisaillement ou  $\tau_{yz}$ , on obtient finalement les forces transversales :

$$Q_x = - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{yz} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$Q_y = - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{yz} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz$$

Quand les contraintes ne sont pas également réparties sur l'épaisseur  $\delta$  de la coque, la détermination de leur résultante ne suffit pas pour les calculer. Afin de caractériser cette inégalité de répartition, on utilise les moments des contraintes par rapport à la surface intermédiaire.

Les moments fléchissants :

$$M_x = - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_x \cdot z \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz$$

$$M_y = - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \sigma_y \cdot z \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz$$

et les moments de torsion :

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{xy} \cdot z \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz$$

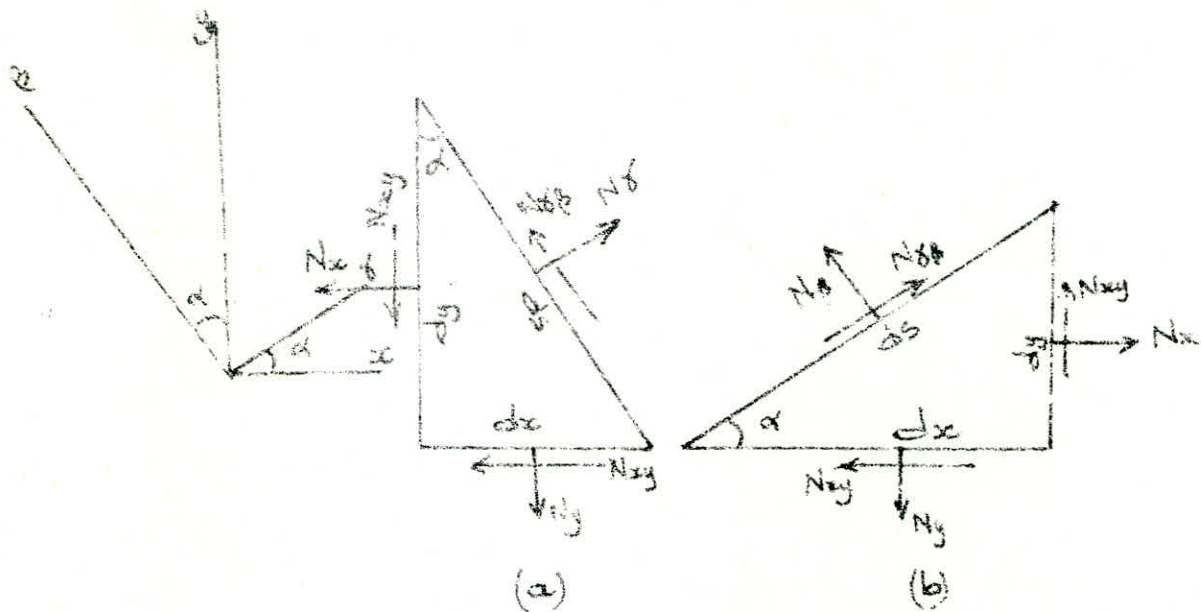
$$M_{yx} = - \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \tau_{xy} \cdot z \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz$$



on choisit leurs signes de façon qu'à la paroi  $z = -\frac{h}{2}$  (la paroi interne du parabolôïde hyperbolique), apparaissent des contraintes de traction et de cisaillement positives.

Attendu que, généralement,  $\tau_x \neq \tau_y$ , on observe que  $N_{xy} \neq N_{yx}$  et  $M_{xy} \neq M_{yx}$ , bien que selon la loi de la dualité, les contraintes tangentielles soient égales ( $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ).

Jusqu'ici on m'a parlé que des forces élastiques, les forces qui agissent dans les sections  $x = c^e$ ,  $y = c^e$ . Ces directions sont arbitraires et un problème de Coque n'est résolu qu'au moment où on peut fournir les forces élastiques pour toute direction de section. Nous allons voir qu'il suffit de les indiquer pour deux sections et qu'à partir de celles-ci, on peut calculer toutes les autres sans connaître la forme et la charge de la Coque; pour le démontrer et pour trouver les formules permettant de calculer les forces rapportées aux nouvelles directions de section, nous extrairons de la Coque du parabolôïde hyperbolique un petit triangle rectangle. Strictement parlant, nous n'avons pas un triangle plan, mais quand nous faisons tendre vers zéro la longueur de ses côtés, il ne se distingue plus de sa projection sur un plan tangent à la surface médiane. Nous pouvons alors



Conduire les calculs ci-après pour des raisons de simplicité, sur un élément de coque et supposer que les coordonnées sont des coordonnées cartésiennes habituelles et que la somme des angles du Triangle est égale à  $180^\circ$ .

Choisissons les 2 côtés de l'angle droit parallèles aux coordonnées  $x$  et  $y$  et supposons que les forces élastiques  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$ , qui leur sont transmises soient connues - L'hypothénuse est, comme le montre la figure, dirigée suivant un autre système de coordonnées rectangulaires  $\alpha$ ,  $\beta$ . Nous écrivons simplement les conditions d'équilibre pour l'élément de coque choisi, puis les équations de transformation pour les directions  $\alpha$  et  $\beta$ . Les charges n'entrent pas en ligne de compte,



car leurs montants sont petits et d'ordre plus élevé que les grandeurs qui nous intéressent.

$$N_{\gamma} ds = N_x dy \cos \alpha + N_{xy} dy \sin \alpha + N_y dx \sin \alpha + N_{xy} dx \cos \alpha$$

$$N_{\gamma\beta} ds = -N_x dy \sin \alpha + N_{xy} dy \cos \alpha + N_y dx \cos \alpha + N_{xy} dx \sin \alpha$$

Divisons les 2 équations par  $ds$ , en remarquant

$\frac{dx}{ds} = \sin \alpha$  et que  $\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$ . Nous obtenons les formules finales permettant de calculer  $N_{\gamma}$  et  $N_{\gamma\beta}$ . Le triangle

dessiné plus haut fournit de la même manière une équation pour  $N_{\beta}$  et la même équation pour l'effort tranchant. Le système des formules s'écrit alors:

$$N_{\gamma} = N_x \cos^2 \alpha + N_y \sin^2 \alpha + 2 N_{xy} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$N_{\beta} = N_x \sin^2 \alpha + N_y \cos^2 \alpha + 2 N_{xy} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$N_{\gamma\beta} = (N_x - N_y) \cos \alpha \sin \alpha + N_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

En les utilisant il faut faire bien attention que l'on peut intervertir les indices  $x$  et  $y$  ou  $\gamma$  et  $\beta$ , mais qu'il faut introduire  $\alpha$  avec le signe correct.

Les équations plus haut expriment que les forces longitudinales et les efforts tranchants sont les composantes d'un tenseur à deux dimensions, le tenseur de la force longitudinale - par suite de l'égalité de ces deux des efforts tranchants, ce tenseur est symétrique.

Il prend en écriture matricielle la forme:

$$\begin{vmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{vmatrix}$$

Ainsi ces équations représentent la force longitudinale et l'effort tranchant d'une section en fonction de sa direction. Cherchons les valeurs limites de la force longitudinale et formons la dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{dN_x}{d\alpha} &= \varepsilon(N_y - N_x) \cos\alpha \sin\alpha + \varepsilon N_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \\ &= \varepsilon N_{xy} \end{aligned}$$

⇒ La force longitudinale présente un maximum ou un minimum quand l'effort tranchant est nul, ce qui se produit pour :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\varepsilon N_{xy}}{N_x - N_y}$$

Les couples  $\alpha_0$  satisfaisant à cette équation définissent deux droites perpendiculaires, les axes principaux du tenseur. Les forces longitudinales correspondantes s'appellent les forces longitudinales principales. Elles ont pour valeur :

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{N_x + N_y}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2}{4} + N_{xy}^2} \\ N_b &= \frac{N_x + N_y}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{(N_x - N_y)^2}{4} + N_{xy}^2} \end{aligned}$$

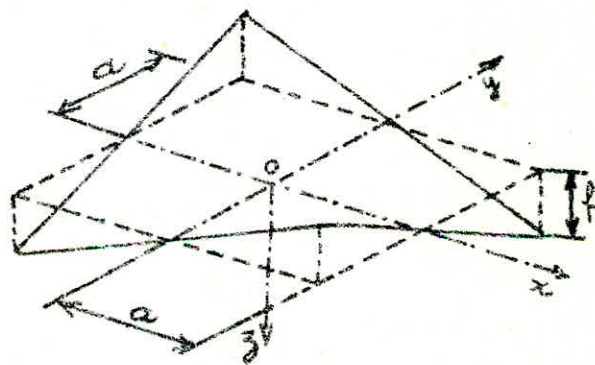
Si en tous les points de la coque du paraboléoïde hyperbolique, on reporte les directions des forces longitudinales principales, on peut tracer deux réseaux de courbes, admettant ces directions pour tangentes. Ces réseaux



de courbes orthogonales s'appellent les trajectoires de forces longitudinales et indiquent les chemins suivant lesquels les charges se transmettent aux bords de la coque, par un système de forces de compression et de traction. Ainsi ces trajectoires offrent une aide essentielle pour le ferrailage de la coque du parabolioïde hyperbolique : elles indiquent l'orientation à donner aux armatures. Mais en général, cette orientation n'est pas suivie, car elle est difficilement réalisable dans la pratique.

# I. Calcul du paraboloides hyperbolique par la théorie de membrane.

## I.1 : Théorie de membrane pour paraboloides Hyperbolique



$$a = 10 \text{ m}$$
$$f = 4 \text{ m}$$

fig I.1

L'équation du paraboloides hyperbolique rapportés au système de coordonnées cartésiennes de la fig I.1 est de la forme :  $z(x,y) = f(x) \cdot g(y)$

Nous choisirons un élément de coque tel que sa projection soit un parallélogramme de côté  $dx$  et  $dy$ .

Considérons le cas le plus général où les axes de coordonnées  $Ox$  et  $Oy$  forment un angle  $w$  entre eux.



l'axe  $oz$  est perpendiculaire au plan  $OX, OY$ .

L'élément de Coque que nous avons choisi au point  $P$  est rapporté à deux axes  $P_x$  et  $P_y$  situés dans le plan tangent à la Coque en  $P$ . Ces Axes sont tel que :  $P_x$  est parallèle au plan  $XOZ$  et  $P_y$  est parallèle au plan  $YOZ$ . Ils sont repérés dans le système  $XYZ$  par leurs cosinus directeurs qui sont :

pour  $P_x$  :  $a_1, b_1, c_1$

pour  $P_y$  :  $a_2, b_2, c_2$

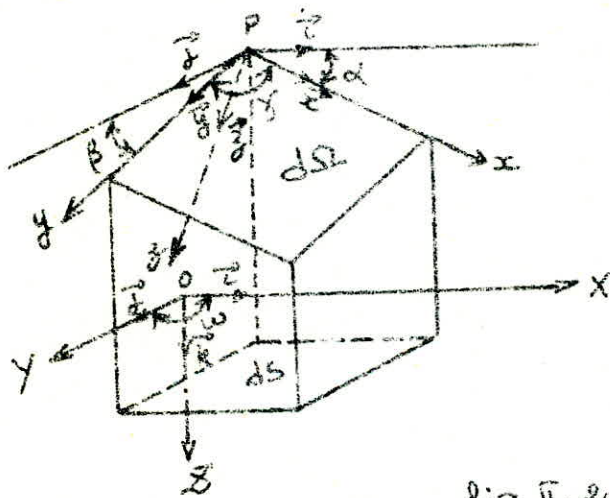


fig II.2

les vecteurs  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont des vecteurs unitaires

$$\Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

La relation entre l'élément de surface gauche  $d\Omega$  (fig I.2) et sa projection est :

$$dS = dx dy \sin \omega$$

$$d\Omega = dx dy \sin \alpha$$

$$\text{or } \frac{dx}{\cos \alpha} = dx \quad \text{et} \quad \frac{dy}{\cos \beta} = dy$$

$$\Rightarrow d\Omega = \frac{dx dy}{\cos\alpha \cos\beta} \cdot \sin\delta$$

$$\Rightarrow \frac{d\Omega}{ds} = \frac{dx dy \sin\delta}{\cos\alpha \cos\beta} = \frac{\sin\delta}{\cos\alpha \cos\beta \sin\omega}$$

$$\frac{d\Omega}{ds} = \frac{\sin\delta}{\cos\alpha \cos\beta \sin\omega}$$

La relation entre l'angle  $\delta$  de l'élément de surface gauche et l'angle  $\omega$  des axes de coordonnées est la suivante :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \cos\delta$$

$$\text{or } \vec{x} \begin{vmatrix} \cos\alpha \vec{i} \\ \sin\alpha \vec{j} \end{vmatrix} \quad \vec{y} \begin{vmatrix} \cos\beta \vec{j} \\ \sin\beta \vec{k} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} &= \cos\alpha \cos\beta \cos(\vec{i}, \vec{j}) + \sin\alpha \sin\beta \cos(\vec{j}, \vec{k}) \\ &= \cos\alpha \cos\beta \cos\omega + \sin\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\cos\delta = \cos\alpha \cos\beta \cos\omega + \sin\alpha \sin\beta} \quad (1)$$

Considérons maintenant le cas de notre paraboloïde hyperbolique tel qu'il a été représenté dans la figure I.1. Les axes sont rectangulaires donc  $\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  La relation (1) devient :

$$\cos\delta = \sin\alpha \sin\beta$$

Imaginons un quadrillage régulier sur le plan XOY. Ce quadrillage reporté sur la coque gauche du paraboloïde hyperbolique sera réel comme gauche.



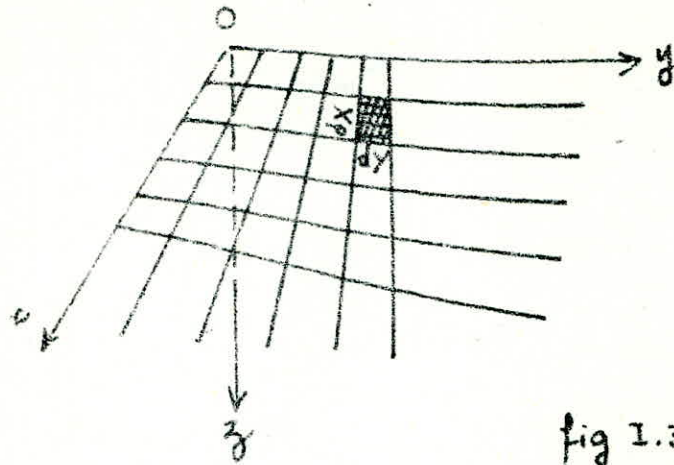


fig 1.3

l'équation du paraboléide hyperbolique dans le repère ainsi représenté (fig 1.1 ou 1.3) est :

$$z = hxy$$

or pour  $x=a$  et  $y=a \Rightarrow z = ha^2 = f$

$$\Rightarrow h = \frac{f}{a^2} \quad \text{et comme on a : } f = 4 \text{ m}$$

$$\text{et } a = 10 \text{ m}$$

$\Rightarrow$

$$z = \frac{fxy}{a^2} = \frac{4}{100} xy$$

$$z = 0,04xy$$

Les sections par des plans parallèles aux axes sont des hyperboles, des paraboles ou des droites.

plan parallèle au plan  $xoy$  :

$$\text{si } z = z_0 \Rightarrow xy = \frac{z_0 a^2}{f}$$

c'est l'équation d'une hyperbole.

plan vertical:  $y = ax + b$

$$\Rightarrow z = \frac{f}{a^2} x(ax + b) \Rightarrow \text{c'est une parabole}$$

plan parallèle à  $xoz$ :

$y = b$  donne:

$$z = \frac{f}{a^2} bx \Rightarrow \text{c'est une droite.}$$

Des plans verticaux à  $45^\circ$  sur  $Ox$  et  $Oy$ , donnent deux familles de paraboles à concavité soit vers le haut, soit vers le bas.

Considérons l'élément  $dx, dy$  tel qu'il a été représenté dans la figure I.3. La projection en plan de cet élément de coque est un rectangle de côté  $dx, dy$ . Les lignes  $x = cte$  et  $y = cte$  forment donc sur la surface méridienne un réseau de coordonnées obliques et nous représenterons l'état des contraintes dans la coque au moyen des forces longitudinales obliques et des efforts tranchants obliques.

Ces forces sont représentées sur la fig. I.4.

Deux d'entre elles,  $N_x$  et  $N_{yx}$  sont parallèles au plan de  $xz$ , elles n'ont pas de composantes en  $x$ . L'utilisation des forces élastiques obliques rendra donc particulièrement simples les équations de forces pour les directions  $x$  et  $y$ .

Nous commencerons maintenant par établir les



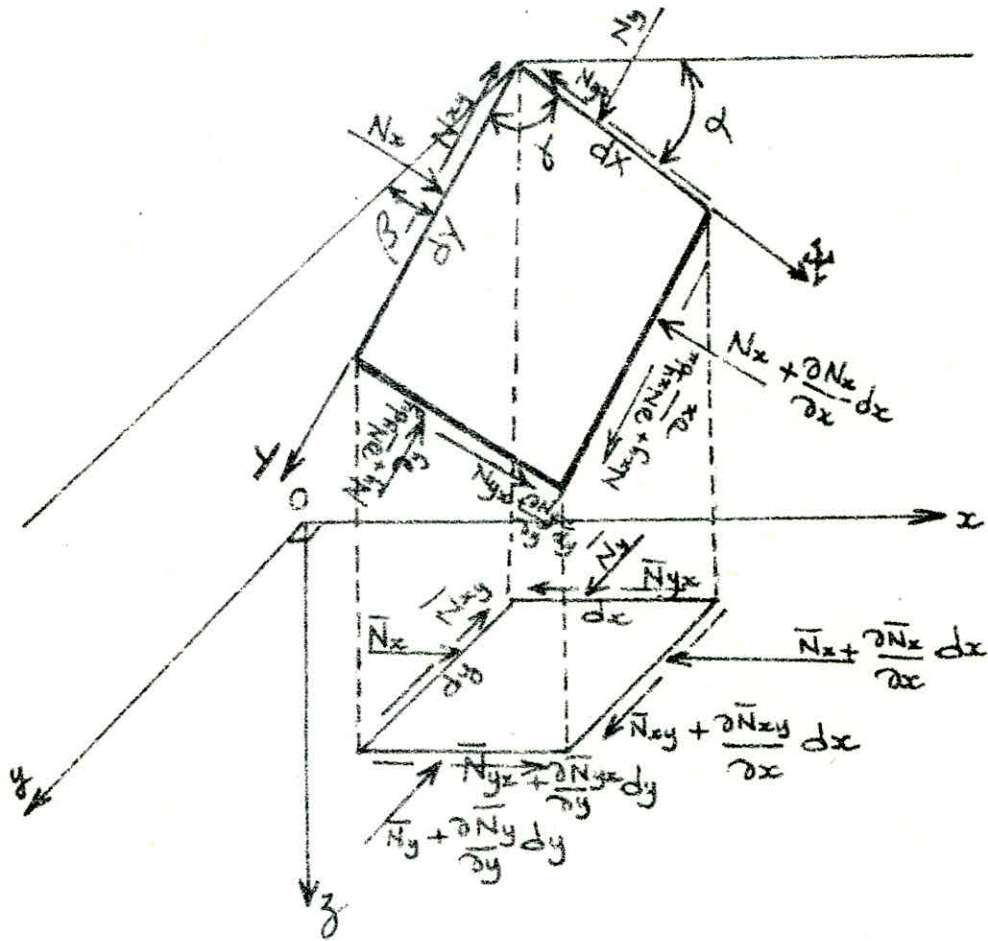


fig I.4

Conditions d'équilibre avec les forces dans la direction de l'axe des  $x$ . La force longitudinale  $N_x$  doit être multipliée par la longueur  $\frac{dy}{\cos \beta}$  de l'élément de section auquel elle est appliquée. Pour obtenir la composante de cette force suivant l'axe des  $x$ , il faut encore la multiplier par  $\cos \alpha$ , ce qui donne :

$$N_x \frac{dy}{\cos \beta} \cdot \cos \alpha = \bar{N}_x dy$$

au contraire pour l'effort tranchant  $N_{xy}$ , qui a la même direction que l'élément de section sur lequel elle agit, le cosinus avec l'élément de section disparaît et le cosinus qui projette la force en plan est le même que plus haut de sorte la composante en  $x$  a pour grandeur :

$$N_{yx} = \frac{dy}{\cos \beta} \cdot \cos \beta = N_{yx} dx = \bar{N}_{yx} dx$$

Les grandeurs  $\bar{N}_x$  et  $\bar{N}_{xy}$  ainsi introduites, auxquelles nous joignons encore :

$$\bar{N}_y = N_y \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} ; \quad N_{xy} = \bar{N}_{xy}$$

forment un tenseur que nous décrivons comme la projection en plan du tenseur de la force élastique.

Grâce à lui, les conditions d'équilibre pour les directions  $x, y$  s'écrivent :

$$\bar{N}_x dy - \left( \bar{N}_x + \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} dx \right) dy + \bar{N}_{yx} dx - \left( \bar{N}_{yx} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + p_x dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} dx dy = p_x dx dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} = p_x \quad (1)$$



et en considérant le même calcul suivant la direction  $y$  on aura:

$$\frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} = p_y \quad (*)$$

où  $p_x$  et  $p_y$  décrivent les forces extérieures à la coque, rapportées à l'unité de surface de la projection plane.

La troisième équation est plus compliquée; elle décrit l'équilibre des forces en  $z$ ; la composante en  $z$  de la force longitudinale  $N_x$  appliquée à l'élément de section  $\frac{dy}{\cos \beta}$  est:

$$N_x \frac{dy}{\cos \alpha} \sin \alpha = \bar{N}_x \operatorname{tg} \alpha dy$$

et la composante en  $z$  de l'effort tranchant  $N_{xy}$  appliqué au même élément de section est:

$$N_{xy} \frac{dy}{\cos \beta} \sin \beta = \bar{N}_{xy} \operatorname{tg} \beta dy$$

Les deux autres forces donnent les équations correspondantes. Nous appellerons  $p_z dx dy$  la charge verticale. Nous la rapporterons aussi, comme les deux autres, à l'élément de surface de la projection horizontale et nous obtiendrons comme condition d'équilibre:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{N}_x \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{N}_{xy} \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{N}_{xy} \operatorname{tg} \beta) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{N}_y \operatorname{tg} \beta) - p_z = 0$$

Comme ici les angles n'apparaissent que par leurs tangentes, il est recommandé de les remplacer par les dérivés en  $z$  :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

de sorte qu'après différentiation des produits entre parenthèses, l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = p_z - \left( \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} \\ - \left( \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

Mais d'après les relations qui ont été déjà écrites, cette équation devient :

$$\bar{N}_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = p_z - p_x \frac{\partial z}{\partial x} - p_y \frac{\partial z}{\partial y}$$

en utilisant les notations de Monge :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad ; \quad t = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad ; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

l'équation devient :

$$r \bar{N}_x + 2s \bar{N}_{xy} + t \bar{N}_y = + p_z - p \cdot p_x - q \cdot p_y$$

d'où, les équations générales de la théorie de



membrane seront :

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} = p_x$$

$$\frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} = p_y$$

$$\kappa \bar{N}_x + 2s \bar{N}_{xy} + t \bar{N}_y = +p_z - p_x p_x - q p_y$$

Pour le paraboloid hyperbolique dont l'equation est :  $z = \frac{f_{xy}}{a^2}$

$$\Rightarrow p = \frac{f_y}{a^2} ; q = \frac{f_x}{a^2} ; \kappa = 0 ; t = 0 ; s = \frac{f}{a^2}$$

$\Rightarrow$  le systeme I.1 devient :

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} = p_x$$

$$\frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} = p_y$$

$$\frac{2f}{a^2} \bar{N}_{xy} = p_z - \frac{f_y}{a^2} p_x - \frac{f_x}{a^2} p_y$$

Comme nous l'avons déjà précisé, nous ne considérons dans cette étude que les charges verticales constituées par les effets du poids propre du paraboloid hyperbolique et de la neige.



$\Rightarrow p_x = p_y = 0$  et  $p_z = p$   
 les équations I.2 deviennent alors :

$$\frac{ef}{a^2} \bar{N}_{xy} = p \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_{xy} = \frac{pa^2}{ef}$$

et puisque  $N_{xy}$  dans la coque est tel que :

$$\bar{N}_{xy} = N_{xy}$$

$\Rightarrow$

$$N_{xy} = \frac{pa^2}{ef}$$

de même :

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} = 0$$

d'où :  $\bar{N}_x = f(y)$

$\bar{N}_y = f(x)$

or  $\bar{N}_x$  est parallèle à l'axe  $ox \Rightarrow$  la constante  $f(y)$  ne dépend que de  $y$  et est indépendante de  $x$ . Autrement dit, pour une génératrice telle que  $y = y_0$  et  $z = f \frac{xy}{a^2}$ , sur cette génératrice il y aura un effort  $N_x = f_1(y_0)$  indépendant de  $x$ , donc constant le long de la génératrice. Comme les charges extérieures que nous considérons sont seulement des charges verticales et que le long de



Bordure de la coque, il n'existe pas d'efforts normaux à sa section, on aura :

$$\bar{N}_x = N_x = 0$$

Le même raisonnement peut être fait pour  $\bar{N}_y$  et on aura :

$$\bar{N}_y = 0$$

d'où finalement les efforts dans la coque sont :

$$N_x = 0$$

$$N_y = 0$$

$$N_{xy} = \frac{pa^2}{ef}$$

### 4.2 Calcul relatif à La Coque :

Le calcul qui a été fait jusqu'à présent nous a permis d'obtenir les efforts dans la coque.  $N_x = 0$ ,  $N_y = 0$  et  $N_{xy} = \frac{pa^2}{ef}$ .

on voit que  $N_{xy}$  est constant partout, donc indépendant des coordonnées, ce qui permet de dire que le paraboloides hyperbolique est un voile d'égal résistance pour tous les systèmes de charges uniformément réparties et parallèles à son axe.

Considérons maintenant la relation angulaire que nous avons démontrée au début de cette étude :  $\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta$ .

Si nous adoptons l'hypothèse, très employée dans le cas du paraboloïde hyperbolique et qui consiste à dire que les courbes directrices sont tel que :

$$\cos \alpha = 1, \quad \cos \beta = 1$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \sin \alpha \sin \beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

L'angle  $\beta = \frac{\pi}{2}$  est l'angle auquel agissent les efforts  $N_{xy}$ . Ces 2 efforts sont ainsi perpendiculaires donc, ont la même direction que les arêtes

caractérisant le feuillage de la Coque. On sait que, dans un pôle, lorsque les efforts s'exercent autour d'un point se réduisant à deux efforts tangents

$N_{xy}$ , les tensions principales qui sont données par les équations trouvées dans la partie "généralité" de

cette étude, sont égales à :

$$N_x = \frac{P \alpha^2}{e f}$$

$$N_y = -\frac{P \alpha^2}{e f}$$

L'angle suivant lequel les tensions principales sont dirigées est égal à :

$$\tan \alpha_0 = \infty \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

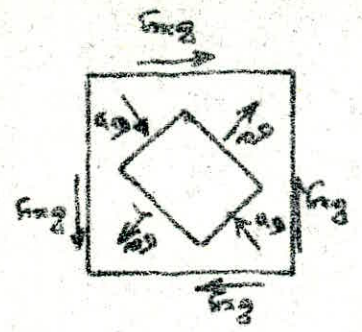


fig. I.5



l'équation du paraboléide hyperbolique est :

$$z = 0,04 \cdot xy$$

Ses dimensions dans le plan :  $ea = 20\text{ m} \Rightarrow a = 10\text{ m}$

sa flèche :  $ef = 8\text{ m} \Rightarrow f = 4\text{ m}$

le poids d'un  $\text{m}^2$  de la coque qui a pour épaisseur

$$s = 7\text{ cm} \text{ est : } 0,07 \times 2,5 = 0,175\text{ t}$$

le poids d'un  $\text{m}^2$  d'étanchéité hydraulique autoprotégée est

- Enduit d'application à chaud : 275

$$\begin{array}{r} \text{étanchéité} \\ : \frac{16}{43\text{ Kg}} \end{array}$$

$$\Rightarrow P_g = 175 + 43 = 218\text{ kg.}$$

en faisant l'hypothèse que le paraboléide hyperbolique est construit à Alger, on aura une surcharge  $N$  due à la

neige égale à :  $N = 20\text{ t/m}^2 \Rightarrow P = 218 + 20 = 238$

$$\Rightarrow \boxed{P \approx 0,24\text{ t}}$$

d'où les forces tangentielles  $N_{xy}$  seront égales à :

$$N_{xy} = 3\text{ t/m}$$

et les forces suivant les directions principales seront égales à :

$$N_a = 3\text{ t/m}$$

$$N_b = -3\text{ t/m}$$



### Vérification de la Coque,

le ferrailage de la Coque qu'on a adopté est constitué d'armatures  $\phi 8$  espacés de  $e = 15$  cm. L'acier est de l'ADX. L'épaisseur de la Coque étant égale à 7 cm, la vérification de la contrainte tangentielle dans le béton se fera comme suit :

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{100 \times e} = \frac{3000}{100 \times 7} = \frac{30}{7} = 4,285 \text{ Kg/cm}^2$$

d'après les règles C.C.B.A 68, article 27 relatif aux plaques et Coques page 42,  $\tau_{xy}$  doit être tel que :

$$\tau_{xy} \leq 1,15 \bar{\sigma}_b$$

or d'après ce même règlement page 16, on a pour un béton classé à 350 Kg/m<sup>3</sup>, à contrôle strict, une contrainte de traction admissible égale à :

$$\bar{\sigma}_b = 7 \text{ bars}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = 4,285 < 1,15 \times 7 = 8,05 \text{ bars.}$$

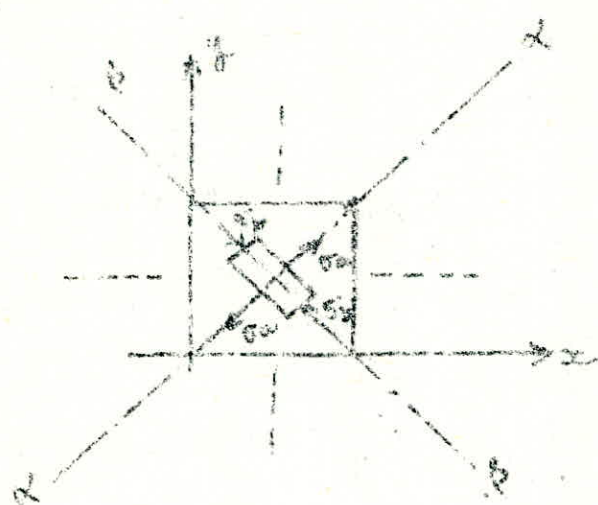
- ce qui est vérifié.

pour la vérification de la Coque sous l'action des contraintes principales on pourra procéder comme suit :

Les contraintes principales agissent suivant des directions à 45° par rapport à  $O_x$  et  $O_y$  - d'où pour vérifier le béton sous l'action de ces contraintes on pourra déterminer les contraintes

normales "capables" que la coque peut supporter suivant les directions  $Ox$  et  $Oy$ .

Ceci nous permet de déterminer les contraintes "capables" suivant les directions  $\alpha - \alpha$  et  $\beta - \beta$ , et de les comparer aux contraintes principales qui agissent réellement sur la coque ( $N_1 = 35.01$  et  $N_2 = -36$  voir fig ci-dessous).



Nous n'avons pas besoin de faire ce calcul Ici car les forces "capables" sont très grandes comparées aux forces principales.



## II. Calcul du parabolôide hyperbolique par la Théorie de Flexion

### II. 1. Equations générales :

Le parabolôide hyperbolique que nous étudions obéit à 2 conditions :

$$* - \frac{f}{ea} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$* - \frac{\delta}{R} \ll 1 \quad \text{avec } \delta : \text{épaisseur de la coque}$$

$R : \text{un des rayons de}$

courbure normale.

$\Rightarrow$  on peut le classer dans la série des coques subminces, ce qui va nous permettre de pouvoir lui appliquer la théorie de flexion selon la méthode de MARGUERRE - VLASSOV.

l'équation du parabolôide hyperbolique est :

$$z = \frac{f}{a} xy = 0,04 xy.$$

Considérons un élément de surface du parabolôide hyperbolique et sa projection dans le plan. Ecrivons toutes les forces qui agissent sur cet élément ainsi que leur projection dans le plan.

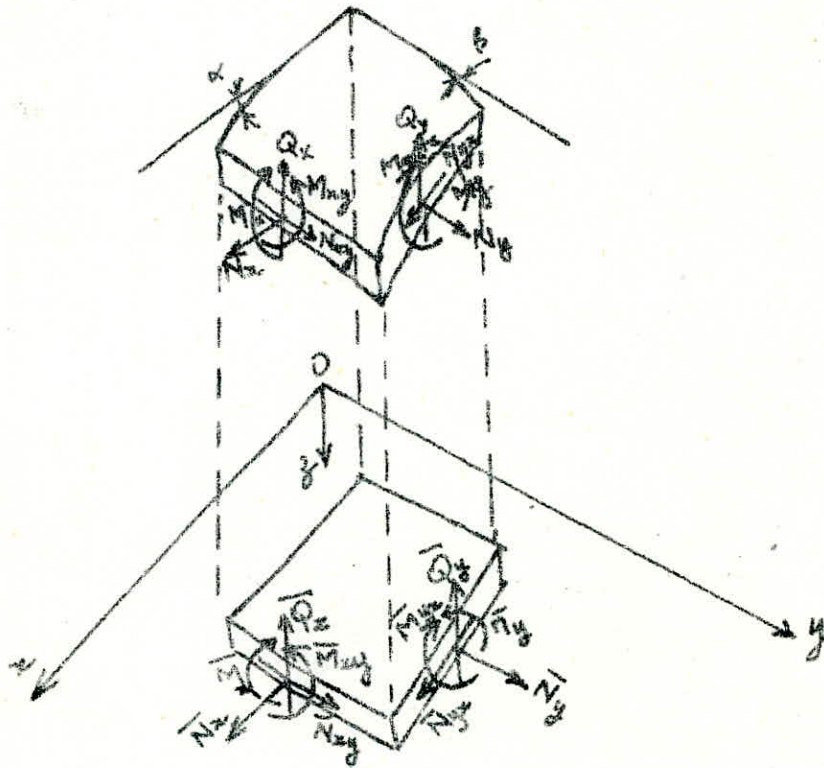


fig II.1

les relations entre les efforts agissant sur l'élément gauche et ceux agissant sur l'élément plan, sont les suivantes :

$$\bar{N}_x = N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + Q_x \sin \alpha$$

$$\bar{N}_{xy} = N_{xy} + Q_x \operatorname{tg} \beta$$

$$\bar{Q}_x = N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \operatorname{tg} \alpha + N_{xy} \operatorname{tg} \beta + Q_x \cos \alpha$$



$$\bar{M}_x = M_x$$

$$\bar{M}_{xy} = M_{xy} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\bar{N}_y = N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + Q_y \sin \beta$$

$$\bar{Q}_y = N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \beta + N_{yx} \operatorname{tg} \alpha + Q_y \cos \beta$$

$$\bar{N}_{xy} = N_{yx} + Q_y \operatorname{tg} \alpha$$

$$\bar{M}_y = M_y$$

$$\bar{M}_{yx} = M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

Considérons maintenant la projection de toutes les forces qui agissent sur l'élément de surface gauche, sur les trois axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . On aura le Tableau II. 1.

vecteurs	proj. sur l'axe $Ox$	proj. sur l'axe $Oy$	proj. sur l'axe $Oz$
$N_x \frac{dy}{\cos \beta}$	$N_x \frac{dy}{\cos \beta} \cos \alpha$	—	$N_x \frac{dy}{\cos \beta} \sin \alpha$
$N_y \frac{dx}{\cos \alpha}$	—	$N_y \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \beta$	$N_y \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \beta$
$N_{xy} \frac{dy}{\cos \beta}$	—	$N_{xy} \frac{dy}{\cos \beta} \cos \beta$	$N_{xy} \frac{dy}{\cos \beta} \sin \beta$
$N_{yx} \frac{dx}{\cos \alpha}$	$N_{yx} \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \alpha$	$N_{yx} \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha$	$N_{yx} \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \alpha$
$Q_x \frac{dy}{\cos \beta}$	$Q_x \frac{dy}{\cos \beta} \sin \alpha \cos \beta$	$Q_x \frac{dy}{\cos \beta} \sin \beta \cos \alpha$	$Q_x \frac{dy}{\cos \beta} \cos \alpha \cos \beta$
$Q_y \frac{dx}{\cos \alpha}$	$Q_y \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha \cos \beta$	$Q_y \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \beta \cos \alpha$	$Q_y \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \alpha \cos \beta$
$M_x \frac{dy}{\cos \beta}$	—	$M_x \frac{dy}{\cos \beta} \cos \beta$	$M_x \frac{dy}{\cos \beta} \sin \beta$
$M_y \frac{dx}{\cos \alpha}$	$M_y \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \alpha$	—	$M_y \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \alpha$
$M_{xy} \frac{dy}{\cos \beta}$	$M_{xy} \frac{dy}{\cos \beta} \cos \alpha$	—	$M_{xy} \frac{dy}{\cos \beta} \sin \alpha$
$M_{yx} \frac{dx}{\cos \alpha}$	—	$M_{yx} \frac{dx}{\cos \alpha} \cos \beta$	$M_{yx} \frac{dx}{\cos \alpha} \sin \beta$

à partir de ce tableau on obtient les équations d'équilibre suivantes :

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

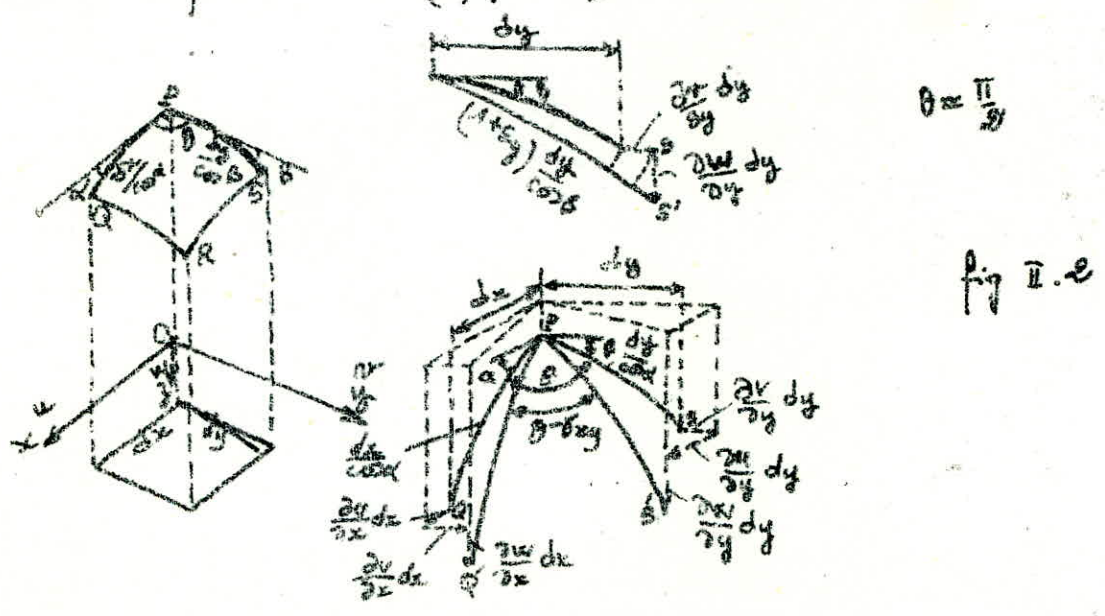
$$\frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + Z = 0$$

$$\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yx}}{\partial y} - \bar{Q}_x = 0$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} - \bar{Q}_y = 0$$

en adoptant le même système de coordonnées que pour l'étude de l'équilibre des efforts et des moments projetés, FLÜGGE et GEYLING ont établi les formules des déformations (fig II.2).



si l'on désigne par  $u, v$  et  $w$  les déplacements d'un point  $P$  suivant les axes de coordonnées rectangulaires  $Oxyz$ , les allongements et le cisaillement d'un élément de coque du parabolôïde hyperbolique seront: (pour  $\theta = 1$ )

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \cos^2 \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \beta \cos \beta$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \cos \beta - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta$$

II.3

$$+ \frac{\partial v}{\partial x} \cos \beta \cos \alpha - \frac{\partial v}{\partial y} \sin \beta \cos^2 \beta \sin \alpha$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial x} \cos^3 \alpha \sin \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos^3 \beta \sin \alpha$$

En tenant compte des notations de Poisson qui sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p = \text{tg}^2 \alpha \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q = \text{tg}^2 \beta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = r \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = s \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = t$$

et des simplifications introduites par l'hypothèse des coques parabolisées :

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 \quad ; \quad 1 + \text{tg}^2 \beta = 1 \quad ; \quad \cos^2 \alpha = 1 \quad ; \quad \cos^2 \beta = 1 \quad ; \quad \cos \alpha \cos \beta = 1$$

et en considérant un élément de surface du



parabolôïde hyperbolique déterminé par le croisement orthogonal des armatures constituant le ferrillage de la Coque (ces armatures sont constituées de deux nappes orthogonales, chaque nappe étant parallèle à un axe de coordonnées)  $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  ;  
 les équations II.3 se réduisent à :

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\delta_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + q \frac{\partial w}{\partial x} + p \frac{\partial w}{\partial y}$$

de même les relations II.1 deviennent :

$$\bar{N}_x = N_x$$

$$\bar{N}_{xy} = N_{xy}$$

$$\bar{Q}_x = N_x \operatorname{tg} \alpha + N_{xy} \operatorname{tg} \beta + Q_x$$

$$\bar{M}_x = M_x$$

$$\bar{M}_{xy} = M_{xy}$$

$$\bar{N}_y = N_y$$

$$\bar{N}_{yx} = N_{yx} = N_{xy}$$

$$\bar{Q}_y = N_y \operatorname{tg} \beta + N_{yx} \operatorname{tg} \alpha + Q_y$$

$$\bar{M}_y = M_y$$

$$\bar{M}_{yx} = M_{yx} = M_{xy}$$

Avec ces valeurs les équations d'équilibre II.2 deviennent :

$$(a) \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

$$(b) \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$II.5 \quad (c) \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (N_x \tan \alpha + N_{xy} \tan \beta) + \frac{\partial}{\partial y} (N_y \tan \beta + N_{yx} \tan \alpha) + Z = 0$$

$$(d) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$(e) \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

Les termes contenant  $\tan \alpha$  et  $\tan \beta$  ont été conservés parcequ'ils interviennent sous forme de dérivées dans l'équation de projection sur la normale.

En effectuant la différentiation dans l'équation II.5 (c), tout en tenant compte des notations de Monge, l'équation de projection sur la normale s'écrira :

$$\begin{aligned} & \cdot r N_x + s \Delta N_{xy} + t N_y + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \\ & = -Z - p \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \right) - q \left( \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right) \\ & = -Z + pX + qY \end{aligned}$$

La forme spéciale des équations précédentes nous permet d'exprimer les efforts par l'intermédiaire d'une fonction  $F$  du type Airy :

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx \qquad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy$$

$$N_{xy} = N_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Avec ces notations, les 2 équations II.5 (a) et (b) sont identiquement vérifiées tandis que l'équation II.6 devient :

$$t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P(x, y)$$

où le terme de charge a été noté par :

$$-P(x, y) = pX + qY - z + \mu \int X dx + t \int Y dy$$

faisons maintenant intervenir les relations d'élasticité reliant les efforts aux déformations extensionnelles :

on a :

$$\epsilon_x = \frac{N_x - \mu N_y}{E \delta}$$

$$\epsilon_y = \frac{N_y - \mu N_x}{E \delta}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu) N_{xy}}{E \delta}$$

II.10

et

$$M_x = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -K \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{yx} = M_{xy} = -K(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

avec  $K = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$  = rigidité en flexion



en portant les expressions de II.10 pour les moments, dans les équations d'équilibre II.5, on déduit les efforts tranchants.

$$Q_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

II.11

$$Q_y = -K \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

reprenons l'équation II.8 et remplaçons  $Q_x$  et  $Q_y$  par leur expression dans II.11, on aura :

$$t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\Delta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - K \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -P(x, y)$$

en vue d'obtenir la seconde équation de base, on part des relations II.4, où l'on élimine les déplacements tangentiels  $u$  et  $v$ .

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + p \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + q \frac{\partial w}{\partial x} + p \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + p \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$+ q \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

$$+ p \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$$

en utilisant les notations de Monge, on obtient la condition de compatibilité :

$$\text{II-13 : } \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left( t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

en substituant, dans le premier membre, aux déformations spécifiques les valeurs fournies par II-9 et en exprimant ensuite les efforts par l'intermédiaire de la fonction de force F, conformément à II-7, on obtient :

$$\text{II-14 : } \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + ES \left( t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2p \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \bar{P}(x, y)$$

où le terme de charge est désigné par :

$$\bar{P}(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy - \mu \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

une simplification est obtenue par l'introduction des opérateurs II.15 :

$$\text{II.15} \quad \left| \begin{aligned} \Delta(\dots) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\dots) \\ \Delta_1(\dots) &= \left( t \frac{\partial^2}{\partial x^2} - e\beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\dots) \end{aligned} \right.$$

de cette manière les 2 équations de base II.12 et II.14 deviennent :

$$\text{II.16} \quad \left| \begin{aligned} K \Delta \Delta w - \Delta_1 F &= P(x, y) \\ \Delta \Delta F + E \delta \cdot \Delta_1 w &= \bar{P}(x, y) \end{aligned} \right.$$

Dans notre cas, nous ne considérerons le calcul du paraboloid hyperbolique que sous l'influence du poids propre et de la neige. L'étude du vent, ainsi que tout le reste des autres sollicitations, feront l'objet d'une seconde phase de calcul basé sur un modèle réduit. De sorte que dans l'état actuel, les Composantes tangentielle X et Y de la charge sont nulles et les 2 équations de base deviennent :

II.17

$\begin{aligned} K \Delta \Delta w - \Delta_1 F &= Z \\ \Delta \Delta F + E \delta \Delta_1 w &= 0 \end{aligned}$
---



or l'équation du paraboloid hyperbolique est :

$$z = \frac{f}{a^2} xy$$

$$\Rightarrow r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f}{a^2}$$

$$\Rightarrow s = \frac{f}{a^2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Delta_1(\dots) &= \left( t \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + r \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\dots) \\ &= \left( -2s \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) (\dots) \\ &= \left( -\frac{2f}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) (\dots) \end{aligned}$$

les équations II.17 deviennent alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta \Delta w + \frac{ef}{Ka^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{z}{k} \\ \Delta \Delta F - \frac{2E\delta f}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}} \quad \text{II.18}$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{(2)} w + \frac{ef}{Ka^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{z}{k} \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{(2)} F - \frac{2E\delta f}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}} \quad \text{II.18 bis}$$

Ainsi la considération des équations d'équilibre et de déformations, nous a conduit à écrire



deux équations aux dérivées partielles, du 4<sup>ème</sup> ordre où les inconnues sont les efforts intérieurs.

La résolution de ces équations constitue un problème assez complexe, dans la mesure où sa solution ne saurait être obtenue au moyen des fonctions élémentaires. Dans des situations pareilles, on fait appel aux solutions fournies par le Calcul Numérique.

L'essence de toute méthode de Calcul Numérique consiste à ne pas utiliser des infiniments petits, mais de très petites quantités, finies. En effet, dans le premier cas, la solution analytique aboutit à une expression continue (par intervalles au moins) des inconnues, ce qui veut dire que, en possédant l'expression d'une inconnue en fonction des variables indépendantes, nous pouvons déterminer directement la valeur de cette inconnue en chaque point de la surface moyenne.

A l'encontre de ce cas, on ne peut par le Calcul Numérique, déterminer les valeurs des inconnues qu'aux points d'un réseau préalablement établi. Pour déterminer les valeurs des inconnues en des points autres que les nœuds du réseau, il faut procéder par interpolation.



## II.2 : Les différences finies :

Le calcul numérique revient, ainsi que nous l'avons déjà indiqué, à substituer aux infiniment petits, de très petites quantités finies, c'est à dire à substituer, aux différentielles, des différences finies.

L'opération avec les différences finies constitue la méthode des différences finies. Cette transformation permet de trouver par des calculs simples, surtout quand on utilise l'ordinateur (c'est l'avantage de la méthode), des solutions particulières des équations aux dérivées partielles - La méthode est donc pratique pour les calculs pratiques - Les solutions trouvées doivent vérifier certaines conditions aux limites connues -

Ainsi cette méthode comprend essentiellement deux aspects :

- l'aspect mathématique, qui consiste essentiellement à transformer les équations différentielles en équations aux différences finies -

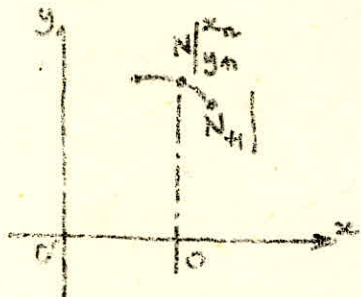
- l'aspect physique, qui consiste à substituer à la surface moyenne réelle, une série d'éléments plus simples -

Afin d'offrir une première image de la manière de passer d'une équation différentielle aux équations aux différences finies, nous allons nous occuper



du cas simple où la fonction inconnue  $y$  ne dépend que d'une seule variable  $x$ . Nous utiliserons comme courbe d'interpolation la parabole du second degré.

Ainsi, supposons qu'entre 3 points consécutifs  $N-1, N, N+1$  la variation de la fonction est parabolique,



l'équation de la parabole du second degré passant par ces points est dont l'axe est // à  $Oy$  est de la forme :

$$y = ax^2 + bx + c$$

on suppose que  $N$  est situé sur l'axe  $Oy$ .

$$\Rightarrow x_{n-1} = -\Delta x ; x_n = 0 ; x_{n+1} = +\Delta x$$

$$\Rightarrow \text{pour } x = x_n = 0 \Rightarrow y = y_n = c$$

$$\text{et : } \frac{dy}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{\Delta x - (-\Delta x)} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} = 2ax + b$$

$$\text{avec } x_n = 0 \Rightarrow b = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x}$$

$$\text{Finalement : } y_{n+1} = ax_{n+1}^2 + \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} x_{n+1} + y_n$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n - \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2} = a$$

$$\Rightarrow \frac{2y_{n+1} - 2y_n - y_{n+1} + y_{n-1}}{2(\Delta x)^2} = a = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{2(\Delta x)^2}$$

d'où l'équation de la parabole du second degré passant par ces points et dont l'axe est parallèle à  $Oy$  est :

$$y = y_m + \frac{y_{n+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} \cdot x + \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{x^2}{2}$$

les deux premières dérivées seront :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} + \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} \cdot x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

①

au point  $N$ , où  $x = x_n = 0$  et  $y = y_n$

⇒

$$\frac{dy_n}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta x} \quad \text{①}'$$

$$\frac{d^2y_n}{dx^2} = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{(\Delta x)^2}$$

La relation ①' correspond au théorème des valeurs moyennes exprimant que, dans un intervalle où la variation d'une courbe est continue et uniforme, il y a un point où la tangente est parallèle à la corde qui réunit les extrémités de l'intervalle.

Nous calculons aussi, au moyen de la relation ①, la valeur de la première dérivée aux



points  $(N-1)$  et  $(N+1)$ .

$$\begin{aligned}\frac{dy_{m-1}}{dx} &= \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} + y_{m+1} \frac{-2y_m + y_{m-1}}{(\Delta x)^2} \cdot (-\Delta x) \\ &= \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} + \frac{(-2y_{m+1} + 4y_m - 2y_{m-1})}{2\Delta x} \\ &= \frac{-y_{m+1} + 4y_m - 3y_{m-1}}{2\Delta x} \quad \textcircled{2}\end{aligned}$$

de même :

$$\frac{dy_{m+1}}{dx} = \frac{3y_{m+1} - 4y_m + y_{m-1}}{2\Delta x} \quad \textcircled{2}'$$

La relation  $\textcircled{2}$  constitue la formule d'interpolation à gauche et la relation  $\textcircled{2}'$  constitue la formule d'interpolation à droite.

Les dérivées troisième et supérieures ne peuvent plus être calculées par la différentiation de l'équation de la parabole, mais peuvent être établies par Analogie :

$$\frac{d^2 y_m}{dx^2} = \frac{\Delta^2 y_{m+1} - \Delta^2 y_{m-1}}{2\Delta x}$$

$$\text{or } \Delta^2 y_{m+1} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m}{(\Delta x)^2}$$

$$\text{et } \Delta^2 y_{m-1} = \frac{y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3 y_m}{dx^3} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m - y_m + 2y_{m-1} - y_{m-2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$\frac{d^3 y_m}{dx^3} = \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} - 2y_{m-1} - y_{m-2}}{2(\Delta x)^3}$$

de même :

$$\frac{d^2 y_m}{dx^2} = \frac{\Delta^2 y_{m-1} - 2\Delta^2 y_m + \Delta^2 y_{m+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^4 y_m}{dx^4} = \frac{y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2} - 2y_{m+1} + 4y_m - 2y_{m+1} + y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m}{(\Delta x)^4}$$

$$\frac{d^4 y_m}{dx^4} = \frac{y_{m+2} - 4y_{m+1} + 6y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}}{(\Delta x)^4}$$

II.2.1 - les différences finies dans le cas de deux variables indépendantes :

La méthode des équations aux différences finies peut être aisément étendue au cas où la fonction inconnue, soit  $F$ , dépend de deux variables indépendantes. A cette fin, le plan de référence, limité par un contour  $(r)$ , est couvert d'un réseau de points situés sur une série de lignes droites spécialement tracées.

Le choix du réseau doit être fait judicieusement puisque un choix convenable des lignes de coordonnées, en fonction de la forme du contour, pourra apporter

des simplifications substantielles.

Parmi les types de réseaux, nous choisirons l'un des plus importants, à savoir le réseau rectangulaire.

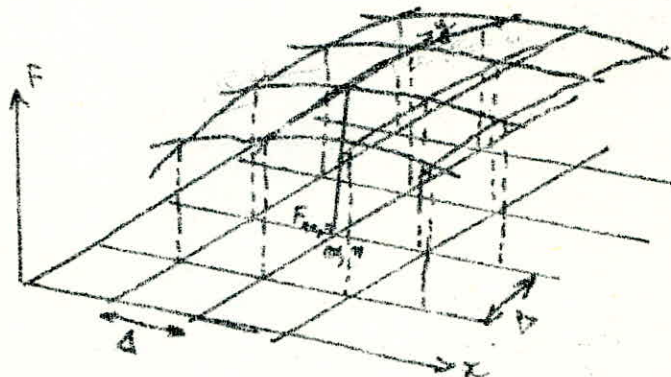
Si, dans le plan  $Oxy$ , on trace deux séries de droites parallèles aux axes, ces droites détermineront un réseau de points  $(m, n)$ , auxquels correspondront les ordonnées de la fonction inconnue  $F_{m,n}$ .

Les dérivées par rapport à une seule variable (par exemple  $x$ ) s'écrivent tout comme s'il n'y avait que cette variable  $x$ ; La seule différence consiste dans le fait que l'on voit apparaître des indices doubles, dont l'un  $n$  reste inchangé.

Dans le cas des dérivées mixtes, les 2 indices varient en vertu de la relation:

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left( \frac{\partial^n F}{\partial y^n} \right) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left( \frac{\partial^m F}{\partial x^m} \right)$$

Les différences mixtes peuvent être ainsi facilement évaluées; on aura pour des intervalles égaux:





$$\frac{\partial F_{m,n}}{\partial x} = \frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial F_{m,n}}{\partial y} = \frac{F_{m,n+1} - F_{m,n-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2} = \frac{F_{m+2,n} - 2F_{m+1,n} + F_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial y^2} = \frac{F_{m,n+2} - 2F_{m,n+1} + F_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x \partial y} = \frac{F_{m+1,n+1} - F_{m+1,n-1} - F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1}}{4\Delta x \cdot \Delta y}$$

en effet, suivant la relation, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F_{m,n}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2\Delta x} \right] \\ &= \frac{F_{m+1,n+1} - F_{m+1,n-1} - F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1}}{4\Delta x \cdot \Delta y} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 F_{m,n}}{\partial x^4} = \frac{F_{m+4,n} - 4F_{m+3,n} + 6F_{m+2,n} - 4F_{m+1,n} + F_{m,n}}{(\Delta x)^4}$$

$$\frac{\partial^4 F_{m,n}}{\partial y^4} = \frac{F_{m,n+4} - 4F_{m,n+3} + 6F_{m,n+2} - 4F_{m,n+1} + F_{m,n}}{(\Delta y)^4}$$

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{F_{m+2,n} - 2F_{m+1,n} + F_{m,n}}{(\Delta x)^2} \right)$$

$$= \frac{F_{m+2,n+2} - 2F_{m+2,n+1} + F_{m+2,n} - 2F_{m+2,n-1} + 4F_{m+2,n} - 2F_{m+2,n-2} - 2F_{m+1,n+2} + 4F_{m+1,n+1} - 2F_{m+1,n} - 2F_{m+1,n-1} + 4F_{m+1,n} - 2F_{m+1,n-2} + F_{m,n+2} - 2F_{m,n+1} + F_{m,n} - 2F_{m,n-1} + F_{m,n-2}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}$$

$$+ \frac{F_{m-2,n+2} - 2F_{m-2,n+1} + F_{m-2,n} - 2F_{m-2,n-1} + 4F_{m-2,n} - 2F_{m-2,n-2} - 2F_{m-1,n+2} + 4F_{m-1,n+1} - 2F_{m-1,n} - 2F_{m-1,n-1} + 4F_{m-1,n} - 2F_{m-1,n-2} + F_{m-1,n+2} - 2F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n} - 2F_{m-1,n-1} + F_{m-1,n-2}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{4F_{m,n} - 2(F_{m+1,n} + F_{m-1,n} + F_{m,n+1} + F_{m,n-1})}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + \frac{F_{m+1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n+1} + F_{m-1,n-1}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}$$

Comme dans notre cas, on considérera des intervalles égaux dans les deux sens :

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta y = \Delta$$

$$\Rightarrow \Delta^2 F_{m,n} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_{m,n} = \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{m,n}}{\partial y^2} = \frac{F_{m+1,n} - 2F_{m,n} + F_{m-1,n}}{\Delta^2} + \frac{F_{m,n+1} - 2F_{m,n} + F_{m,n-1}}{\Delta^2}$$

$$\Rightarrow \Delta^2 F_{m,n} = \frac{F_{m+1,n} + F_{m-1,n} + F_{m,n+1} + F_{m,n-1} - 4F_{m,n}}{\Delta^2}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta \Delta^2 F_{m,n} &= \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) F_{m,n} \\ &= \frac{1}{\Delta^4} \left[ 20F_{m,n} - 8(F_{m+1,n} + F_{m-1,n} + F_{m,n+1} + F_{m,n-1}) \right. \\ &\quad \left. + 2(F_{m+1,n+1} + F_{m-1,n+1} + F_{m+1,n-1} + F_{m-1,n-1}) \right. \\ &\quad \left. + (F_{m+2,n} + F_{m-2,n} + F_{m,n+2} + F_{m,n-2}) \right] \end{aligned}$$

II.3. Résolution des équations générales de la théorie de flexion par la méthode des différences finies :

on prend comme point de départ les équations II.18 bis où les inconnues sont  $w$  et

$$F: \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{(2)} w + \frac{E f}{K a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{Z}{K}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{(2)} F - \frac{E E f}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

on considérera que le paraboloïde hyperbolique de côté  $a = 20 \text{ m}$  est partagé en  $ek = 10$  intervalles égaux.

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta y = \Delta = \frac{a}{k} = \frac{10}{5} = 2 \text{ m}$$

Afin de pouvoir travailler avec des grandeurs adimensionnelles, il faudra procéder au changement de fonction suivant :

$$Z = Z_0 \eta(x, y)$$

$$F = \frac{Z_0 a^4}{f} \cdot \frac{1}{k^2} \phi$$

$$w = \frac{Z_0 a^4}{K} \cdot \frac{1}{k^4} \cdot W$$

et adopter la notation du paramètre de la



Coque : 
$$Y_k = \frac{3(1-\mu^2)}{k^4} \left(\frac{\rho}{8}\right)^2$$

D'où les équations II. 18 bis deviennent :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} w + \frac{4}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha}{\Delta^4} \quad \text{II. 19}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(3)} \phi - \frac{4 Y_k}{\Delta^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0$$

Introduisons maintenant les différences finies :

$$\frac{\partial^2 W_{m,n}}{\partial x \partial y} = \frac{W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n-1}}{4 \Delta^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} W_{m,n} &= \frac{1}{\Delta^4} \left[ 20W_{m,n} - 8(W_{m+2,n} + W_{m-2,n} \right. \\ &+ W_{m,n+2} + W_{m,n-2}) + 2(W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1}) \\ &\left. + W_{m+2,m} + W_{m-2,m} + W_{m,n+2} + W_{m,n-2} \right] \end{aligned}$$

et :

$$\frac{\partial^2 \phi_{m,n}}{\partial x \partial y} = \frac{\phi_{m+1,n+1} - \phi_{m+1,n-1} - \phi_{m-1,n+1} + \phi_{m-1,n-1}}{4 \Delta^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} \phi_{m,n} &= \frac{1}{\Delta^4} \left[ 20\phi_{m,n} - 8(\phi_{m+1,m} + \phi_{m-1,m} \right. \\ &+ \phi_{m,n+1} + \phi_{m,n-1}) + 2(\phi_{m+1,m+1} + \phi_{m-1,m+1} + \phi_{m+1,m-1} + \\ &\left. \phi_{m-1,m-1}) + \phi_{m+2,m} + \phi_{m-2,m} + \phi_{m,n+2} + \phi_{m,n-2} \right] \end{aligned}$$

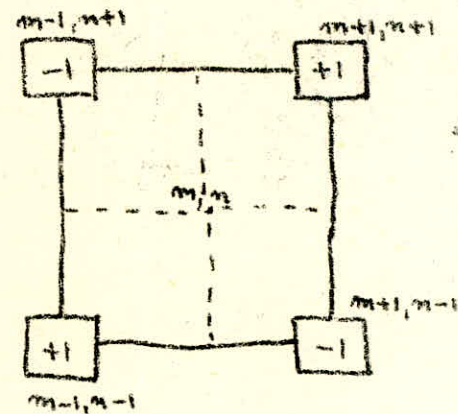
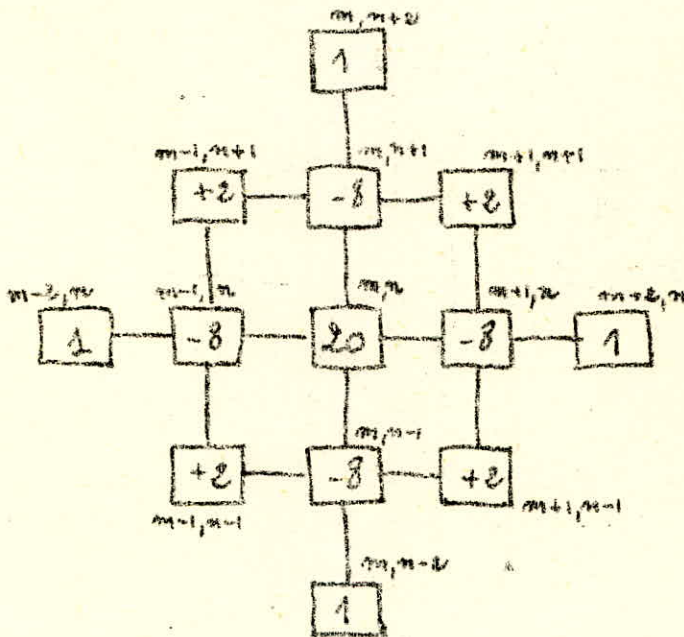
En introduisant ces expressions dans le système II.19 et en effectuant toutes les simplifications, on obtient :

II.20

$$\begin{aligned} & \left[ 20 W_{m,n} - 8 \left( W_{m+1,m} + W_{m-1,m} + W_{m,n+1} + W_{m,n-1} \right) \right. \\ & \quad \left. + 8 \left( W_{m+1,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1} \right) \right. \\ & \quad \left. + W_{m+2,n} + W_{m-2,n} + W_{m,n+2} + W_{m,n-2} \right] \\ & + \phi_{m+1,n+1} - \phi_{m+1,n-1} - \phi_{m-1,n+1} + \phi_{m-1,n-1} = \rho_{m,n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ 20 \phi_{m,n} - 8 \left( \phi_{m+1,m} + \phi_{m-1,m} + \phi_{m,n+1} + \phi_{m,n-1} \right) \right. \\ & \quad \left. + 8 \left( \phi_{m+1,n+1} + \phi_{m-1,n+1} + \phi_{m+1,n-1} + \phi_{m-1,n-1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \phi_{m+2,n} + \phi_{m-2,n} + \phi_{m,n+2} + \phi_{m,n-2} \right] \\ & - \gamma_k \left[ W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n-1} \right] = 0 \end{aligned}$$

Les images des points intervenant dans les 2 équations II.20 et se référant au même maillage  $(m, n)$  sont données par les figures suivantes :



Les équations du type II.6 sont écrites pour tous les points intérieurs du réseau. Mais dans les équations, interviennent aussi les valeurs des inconnues dans des points sur et au dehors du contour. Pour avoir un nombre égal d'équations et d'inconnues, il faudra ajouter les conditions marginales transcrites elles aussi en différences finies.

Les conditions marginales que nous considérons ici seront :

1°) - le bord ne peut subir de déplacement suivant la direction normale à la surface (suivant la direction de l'axe  $Oz$ ) :

$$W_{5,m} = 0 \Rightarrow W_{5,m} = 0$$

en effet le déplacement suivant l'axe  $Oz$  est supposé empêché par les poteaux de façades :

2°) - La rotation du bord est empêchée :

$$\frac{\partial W_{5,m}}{\partial z} = 0 \Rightarrow W_{4,m} = W_{6,m}$$

3°) - L'effort normal au bord est nul.

$$N_{x,5,m} = \frac{\partial^2 F_{5,m}}{\partial y^2} = 0$$

$\Rightarrow$  le long du bord la variation de la fonction de force est linéaire :  $F(x,y) = Ay + B$



où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

En tenant compte des conditions d'antisymétrie (nous posons  $B=0$ ).

soit  $\bar{F}$  la valeur de la fonction de force au coin :  $F_{5,5} = \bar{F}$

Il s'ensuit que le long du côté  $x=a$  on aura :

$$\text{ou bien : } \phi_{k,m} = \frac{m}{k} \bar{\phi} = \phi_{5,m} = \frac{m}{5} \bar{\phi}$$

4°) Allongement spécifique nul le long du bord :

$$E_{y,k,m} = \frac{1}{E\delta} (N_{y,k,m} - \mu N_{x,k,m}) = 0$$

Si l'on considère aussi la condition précédente, la condition géométrique sera équivalente à la condition statique :

$$N_{y,k,m} = \frac{\partial^2 F_{k,m}}{\partial x^2} = 0 = N_{y,5,m} = \frac{\partial^2 F_{5,m}}{\partial x^2}$$

qui, transcrite en différences finies devient :

$$\phi_{6,m} = \frac{2m}{5} \bar{\phi} - \phi_{4,m}$$

Comme on suppose dans cette étude que la charge est symétrique par rapport à  $xoz$  et  $yoz$ , il est facile de montrer que dans les conditions marginales précédentes, les plans des coordonnées, aussi bien

que les plans bissecteurs sont des plans de symétrie en ce qui concerne les déformations de flexion  $w_z$ . La fonction de force  $F$  sera antisymétrique par rapport aux plans de coordonnées, mais symétrique par rapport aux plans bissecteurs. Par conséquent pour  $x=0$  et  $y=0$ , on aura  $F=0$ .

En vertu de ces considérations, dans le cas de notre paraboloïde hyperbolique sur contour fermé, nous nous occuperons d'un seul octant et nous déterminerons le système d'équations aux différences finies.

On divisera le côté  $2a = 20 \text{ m} \Rightarrow a = 10 \text{ m}$  en  $2k = 10 \Rightarrow k = 5$  intervalles égaux, car on ne s'occupe que d'un seul octant. (Voir Réseau fig. ).

Pour déterminer  $\bar{\phi}$ , nous procéderons de la manière suivante - Nous écrivons d'abord les équations du type II.20 pour tous les points du réseau situés sur le contour ( $m=5, n$ ); toutes ces équations déterminent les inconnues  $W_z$ , qui n'interviennent que pour établir les efforts tranchants sur le contour à l'exception de l'équation correspondant au coin ( $m=n=5$ ).

Aucune inconnue supplémentaire n'est introduite

en écrivant l'équation pour le coin, puisque  $W_{7,m}=0$   
(c'est à dire que le point du réseau 7,5 est situé  
sur le prolongement d'une ligne de contour) elle  
représente justement l'équation recherchée:

$$8W_{4,4} + 4\phi_{4,4} - \frac{12}{5}\bar{\phi} = \tau_{4,4}$$

On ajoute cette équation au système  
général de  $5 \times 5 = 25$  équations du type II.20  
et on aura un système à 26 équations.

Ces équations sont écrites ci-dessous:



points	Equations générales	Equations réduites (simplifiées)
0,0	$ \begin{aligned} 20 W_{0,0} - 8(W_{0,1} + W_{-1,0} + W_{1,0} + W_{0,-1}) \\ + 2(W_{-1,1} + W_{1,1} + W_{-1,-1} + W_{1,-1}) \\ + W_{0,2} + W_{-2,0} + W_{2,0} + W_{0,-2} \\ - \phi_{-1,1} - \phi_{1,-1} + \phi_{1,1} + \phi_{-1,-1} = \eta_{0,0} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} 20 W_{0,0} - 32 W_{1,0} + 8 W_{1,1} + 4 W_{2,0} \\ + 4 \phi_{2,1} = \eta_{0,0} \end{aligned} $
0,0	$ \begin{aligned} 20 \phi_{0,0} - 8(\phi_{0,1} + \phi_{-1,0} + \phi_{1,0} + \phi_{0,-1}) \\ + 2(\phi_{-1,1} + \phi_{1,1} + \phi_{-1,-1} + \phi_{1,-1}) \\ + \phi_{0,2} + \phi_{-2,0} + \phi_{2,0} + \phi_{0,-2} \\ - \delta_k [-W_{-1,1} - W_{1,-1} + W_{1,1} + W_{-1,-1}] = 0 \end{aligned} $	$0 = 0$
1,0	$ \begin{aligned} 20 W_{1,0} - 8(W_{1,1} + W_{0,0} + W_{2,0} + W_{1,-1}) \\ + 2(W_{0,1} + W_{2,1} + W_{0,-1} + W_{2,-1}) \\ + W_{1,2} + W_{-1,0} + W_{3,0} + W_{1,-2} \\ - \phi_{0,1} - \phi_{2,-1} + \phi_{2,1} + \phi_{0,-1} = \eta_{1,0} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} 25 W_{1,0} - 16 W_{1,1} - 8 W_{0,0} - 8 W_{2,0} \\ + 6 W_{2,1} + W_{3,0} + 2 \phi_{2,1} = \eta_{1,0} \end{aligned} $



points	Equations générales	Equations réduites (simplifiées)
1,0	$20 \phi_{1,0} - 8(\phi_{1,1} + \phi_{0,0} + \phi_{2,0} + \phi_{1,-1}) +$ $2(\phi_{0,1} + \phi_{2,1} + \phi_{0,-1} + \phi_{2,-1})$ $+ \phi_{1,2} + \phi_{-1,0} + \phi_{3,0} + \phi_{1,-2}$ $- \delta_k [-W_{0,1} - W_{2,-1} + W_{2,1} + W_{0,-1}] = 0$	$0 = 0$
2,0	$20 W_{2,0} - 8(W_{2,1} + W_{1,0} + W_{3,0} + W_{2,-1})$ $+ 2(W_{1,1} + W_{3,1} + W_{1,-1} + W_{3,-1})$ $+ W_{2,2} + W_{0,0} + W_{4,0} + W_{2,-2}$ $- \phi_{1,1} - \phi_{3,-1} + \phi_{3,1} + \phi_{1,-1} = \tau_{2,0}$	$20 W_{2,0} - 16 W_{2,1} - 8 W_{1,0} - 8 W_{3,0}$ $+ 4 W_{1,1} + 4 W_{3,1} + 2 W_{2,2} + W_{0,0}$ $+ W_{4,0} - 2 \phi_{1,1} + 2 \phi_{3,1} = \tau_{2,0}$
2,0	$20 \phi_{2,0} - 8(\phi_{2,1} + \phi_{1,0} + \phi_{3,0} + \phi_{2,-1})$ $+ 2(\phi_{1,1} + \phi_{3,1} + \phi_{1,-1} + \phi_{3,-1})$ $+ \phi_{2,2} + \phi_{0,0} + \phi_{4,0} + \phi_{2,-2}$ $- \delta_k [-W_{1,1} - W_{3,-1} + W_{3,1} + W_{1,-1}] = 0$	$0 = 0$

-74-



points	Equations générales	équations réduites (simplifiées)
3,0	$20 W_{3,0} - 8(W_{3,1} + W_{2,0} + W_{4,0} + W_{3,-1})$ $+ 2(W_{2,1} + W_{4,1} + W_{2,-1} + W_{4,-1})$ $+ W_{3,2} + W_{1,0} + W_{5,0} + W_{3,-2}$ $- \phi_{2,1} - \phi_{4,-1} + \phi_{4,1} + \phi_{2,-1} = \zeta_{3,0}$	$20 W_{3,0} - 16 W_{3,1} - 8 W_{2,0} - 8 W_{4,0}$ $+ 4 W_{2,1} + 4 W_{4,1} + 2 W_{3,2} + W_{1,0}$ $- 2 \phi_{2,1} + 2 \phi_{4,1} = \zeta_{3,0}$
3,0	$20 \phi_{3,0} - 8(\phi_{3,1} + \phi_{2,0} + \phi_{4,0} + \phi_{3,-1})$ $+ 2(\phi_{2,1} + \phi_{4,1} + \phi_{2,-1} + \phi_{4,-1})$ $+ \phi_{3,2} + \phi_{1,0} + \phi_{5,0} + \phi_{3,-2}$ $- \delta_k [-W_{2,1} - W_{4,-1} + W_{4,1} + W_{2,-1}] = 0$	$0 = 0$
4,0	$20 W_{4,0} - 8(W_{4,1} + W_{3,0} + W_{5,0} + W_{4,-1})$ $+ 2(W_{3,1} + W_{5,1} + W_{3,-1} + W_{5,-1})$ $+ W_{4,2} + W_{2,0} + W_{6,0} + W_{4,-2}$ $- \phi_{3,1} - \phi_{5,-1} + \phi_{5,1} + \phi_{3,-1} = \zeta_{4,0}$	$21 W_{4,0} - 16 W_{4,1} - 8 W_{3,0} + 4 W_{3,1}$ $+ 2 W_{4,2} + W_{2,0} - 2 \phi_{3,1} + \frac{2}{5} \bar{\phi} = \zeta_{4,0}$

- 54 -



points	Equations générales	Equations réduites (simplifiées)
4,0	$20 \phi_{4,0} - 8(\phi_{4,1} + \phi_{3,0} + \phi_{5,0} + \phi_{4,-1})$ $+ 2(\phi_{3,1} + \phi_{5,1} + \phi_{3,-1} + \phi_{5,-1})$ $+ \phi_{4,2} + \phi_{2,0} + \phi_{6,0} + \phi_{4,-2}$ $- \delta_k [-W_{3,1} - W_{5,-1} + W_{5,1} + W_{3,-1}] = 0$	$0 = 0$
1,1	$20 W_{1,1} - 8(W_{1,2} + W_{0,1} + W_{2,1} + W_{1,0})$ $+ 2(W_{0,2} + W_{2,2} + W_{0,0} + W_{2,0})$ $+ W_{1,3} + W_{-1,1} + W_{3,1} + W_{1,-1}$ $- \phi_{0,2} - \phi_{2,0} + \phi_{2,2} + \phi_{0,0} = \eta_{1,1}$	$22 W_{1,1} - 16 W_{2,1} - 16 W_{1,0} + 4 W_{2,0}$ $+ 2 W_{2,2} + 2 W_{0,0} + 2 W_{3,1} + \phi_{2,2} = \eta_{1,1}$
1,1	$20 \phi_{1,1} - 16(\phi_{2,1} + \phi_{1,2} + \phi_{0,1} + \phi_{1,0})$ $+ 2(\phi_{0,2} + \phi_{2,2} + \phi_{0,0} + \phi_{2,0})$ $+ \phi_{1,3} + \phi_{-1,1} + \phi_{3,1} + \phi_{1,-1}$ $- \delta_k [-W_{0,2} - W_{2,0} + W_{2,2} + W_{0,0}] = 0$	$18 \phi_{1,1} - 16 \phi_{2,1} + 2 \phi_{2,2} + 2 \phi_{3,1}$ $+ 2 \delta_k W_{2,0} - \delta_k W_{2,2} - \delta_k W_{0,0} = 0$



points	Équations générales	Equations réduites (simplifiées)
2,1	$20 W_{2,1} - 8 (W_{2,2} + W_{1,1} + W_{3,1} + W_{2,0})$ $+ 2 (W_{1,2} + W_{3,2} + W_{1,0} + W_{3,0})$ $+ W_{2,3} + W_{0,1} + W_{4,1} + W_{2,-1} - \phi_{1,2}$ $- \phi_{3,0} + \phi_{3,2} + \phi_{1,0} = \eta_{2,1}$	$23 W_{2,1} - 8 W_{2,2} - 8 W_{1,1} - 8 W_{3,1} - 8 W_{2,0}$ $+ 3 W_{3,2} + 3 W_{1,0} + 2 W_{3,0} + W_{4,1} - \phi_{2,1} + \phi_{3,2}$ $= \eta_{2,1}$
2,1	$20 \phi_{2,1} - 8 (\phi_{2,2} + \phi_{1,1} + \phi_{3,1} + \phi_{2,0})$ $+ 2 (\phi_{1,2} + \phi_{3,2} + \phi_{1,0} + \phi_{3,0})$ $\phi_{2,3} + \phi_{0,1} + \phi_{4,1} + \phi_{2,-1}$ $- \delta_k [-W_{1,2} - W_{3,0} + W_{3,2} + W_{1,0}] = 0$	$21 \phi_{2,1} - 8 \phi_{2,2} - 8 \phi_{1,1} - 8 \phi_{3,1} + 3 \phi_{3,2}$ $+ \phi_{4,1} + \delta_k W_{2,1} + \delta_k W_{3,0} - \delta_k W_{3,2}$ $- \delta_k W_{1,0} = 0$
3,1	$20 W_{3,1} - 8 (W_{3,2} + W_{2,1} + W_{4,1} + W_{3,0})$ $+ 2 (W_{2,2} + W_{4,2} + W_{2,0} + W_{4,0})$ $+ W_{3,3} + W_{1,1} + W_{5,1} + W_{3,-1}$ $- \phi_{2,2} - \phi_{4,0} + \phi_{4,2} + \phi_{2,0} = \eta_{3,1}$	$21 W_{3,1} - 8 W_{3,2} - 8 W_{2,1} - 8 W_{4,1} - 8 W_{3,0}$ $+ 2 W_{2,2} + 2 W_{4,2} + 2 W_{2,0} + 2 W_{4,0}$ $+ W_{3,3} + W_{1,1} - \phi_{2,2} + \phi_{4,2} = \eta_{3,1}$



points	Equations générales	équations réduites (simplifiées)
3,1	$ \begin{aligned} & 20 \phi_{3,1} - 8(\phi_{3,2} + \phi_{2,1} + \phi_{4,1} + \phi_{3,0}) \\ & \quad + 2(\phi_{2,2} + \phi_{4,2} + \phi_{2,0} + \phi_{4,0}) \\ & \quad + \phi_{3,3} + \phi_{1,1} + \phi_{5,1} + \phi_{3,-1} \\ & \quad - \delta_k \left[ -W_{2,2} - W_{4,0} + W_{4,2} + W_{2,0} \right] \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & 19\phi_{3,1} - 8\phi_{3,2} - 8\phi_{2,1} - 8\phi_{4,1} + 2\phi_{2,2} \\ & \quad + 2\phi_{4,2} + \phi_{3,3} + \phi_{1,1} + \frac{1}{5}\bar{\Phi} + \delta_k W_{2,2} \\ & \quad + \delta_k W_{4,0} - \delta_k W_{4,2} - \delta_k W_{2,0} = 0 \end{aligned} $
4,1	$ \begin{aligned} & 20 W_{4,1} - 8(W_{4,2} + W_{3,1} + W_{5,1} + W_{4,0}) \\ & \quad + 2(W_{3,2} + W_{5,2} + W_{3,0} + W_{5,0}) \\ & \quad + W_{4,3} + W_{2,1} + W_{6,1} + W_{4,-1} - \phi_{3,2} \\ & \quad - \phi_{5,0} + \phi_{5,2} + \phi_{3,0} = \eta_{4,1} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & 22 W_{4,1} - 8 W_{4,2} - 8 W_{3,1} - 8 W_{4,0} + 2 W_{3,2} \\ & \quad + 2 W_{3,0} + W_{4,3} + W_{2,1} - \phi_{3,2} + \frac{2}{5}\bar{\Phi} = \eta_{4,1} \end{aligned} $
4,1	$ \begin{aligned} & 20 \phi_{4,1} - 8(\phi_{4,2} + \phi_{3,1} + \phi_{5,1} + \phi_{4,0}) \\ & \quad + 2(\phi_{3,2} + \phi_{5,2} + \phi_{3,0} + \phi_{5,0}) \\ & \quad + \phi_{4,3} + \phi_{2,1} + \phi_{6,1} + \phi_{4,-1} \\ & \quad - \delta_k \left[ -W_{3,2} - W_{5,0} + W_{5,2} + W_{3,0} \right] = 0 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & 18 \phi_{4,1} - 8 \phi_{4,2} - 8 \phi_{3,1} - \frac{2}{5} \bar{\Phi} + 2 \phi_{3,2} \\ & \quad + \phi_{4,3} + \phi_{2,1} + \delta_k W_{3,2} - \delta_k W_{3,0} = 0 \end{aligned} $



points	équations générales	équations réduites (simplifiées)
2,2	$20 W_{2,2} - 8 (W_{2,3} + W_{1,2} + W_{3,2} + W_{2,1})$ $+ 2 (W_{1,3} + W_{3,3} + W_{1,1} + W_{3,1})$ $+ W_{2,4} + W_{0,2} + W_{4,2} + W_{2,0}$ $- \phi_{1,3} - \phi_{3,1} + \phi_{3,3} + \phi_{1,1} = \eta_{2,2}$	$20 W_{2,2} - 16 W_{3,2} - 16 W_{2,1} + 4 W_{3,1} +$ $2 W_{1,1} + 2 W_{3,3} + 2 W_{2,0} + 2 W_{4,2} +$ $\phi_{1,1} + \phi_{3,3} - 2 \phi_{3,1} = \eta_{2,2}$
2,2	$20 \phi_{2,2} - 8 (\phi_{2,3} + \phi_{1,2} + \phi_{3,2} + \phi_{2,1})$ $+ 2 (\phi_{1,3} + \phi_{3,3} + \phi_{1,1} + \phi_{3,1})$ $+ \phi_{2,4} + \phi_{0,2} + \phi_{4,2} + \phi_{2,0}$ $- \delta_k [-W_{1,3} - W_{3,1} + W_{3,3} + W_{1,1}] = 0$	$20 \phi_{2,2} - 16 \phi_{3,2} - 16 \phi_{2,1} + 4 \phi_{3,1} +$ $2 \phi_{3,3} + 2 \phi_{1,1} + 2 \phi_{4,2} + 2 \delta_k W_{3,1} -$ $\delta_k W_{3,3} - \delta_k W_{1,1} = 0$
3,2	$20 W_{3,2} - 8 (W_{3,3} + W_{2,2} + W_{4,2} + W_{3,1})$ $+ 2 (W_{2,3} + W_{4,3} + W_{2,1} + W_{4,1})$ $+ W_{3,4} + W_{1,2} + W_{5,2} + W_{3,0}$ $- \phi_{2,3} - \phi_{4,1} + \phi_{4,3} + \phi_{2,1} = \eta_{3,2}$	$22 W_{3,2} - 8 W_{3,3} - 8 W_{2,2} - 8 W_{4,2}$ $- 8 W_{3,1} + 3 W_{4,3} + 2 W_{4,1} + 3 W_{2,1} + W_{3,0}$ $- \phi_{3,2} - \phi_{4,1} + \phi_{4,3} + \phi_{2,1} = \eta_{3,2}$



points	équations générales	équations réduites (simplifiées)
3,2	$20 \phi_{3,2} - 8(\phi_{3,3} + \phi_{2,2} + \phi_{4,2} + \phi_{3,1})$ $+ 2(\phi_{2,3} + \phi_{4,3} + \phi_{2,1} + \phi_{4,1}) +$ $\phi_{3,4} + \phi_{1,2} + \phi_{5,2} + \phi_{3,0} -$ $\delta_k [-W_{2,3} - W_{4,1} + W_{4,3} + W_{2,1}] = 0$	$22 \phi_{3,2} - 8 \phi_{3,3} - 8 \phi_{2,2} - 8 \phi_{4,2} - 8 \phi_{3,1} + 3 \phi_{4,3}$ $+ 3 \phi_{2,1} + 2 \phi_{4,1} + \frac{2}{5} \bar{\phi} + \delta_k W_{3,2} + \delta_k W_{4,1}$ $- \delta_k W_{4,3} - \delta_k W_{2,1} = 0$
4,2	$20 W_{4,2} - 8(W_{4,3} + W_{3,2} + W_{5,2} + W_{4,1})$ $+ 2(W_{3,3} + W_{5,3} + W_{3,1} + W_{5,1})$ $+ W_{4,4} + W_{2,2} + W_{6,2} + W_{4,0}$ $- \phi_{3,3} - \phi_{5,1} + \phi_{5,3} + \phi_{3,1} = \eta_{4,2}$	$21 W_{4,2} - 8 W_{4,3} - 8 W_{3,2} - 8 W_{4,1} +$ $2 W_{3,3} + 2 W_{3,1} + W_{4,4} + W_{2,2} + W_{4,0}$ $- \phi_{3,3} + \frac{2}{5} \bar{\phi} + \phi_{3,1} = \eta_{4,2}$
4,2	$20 \phi_{4,2} - 8(\phi_{4,3} + \phi_{3,2} + \phi_{5,2} + \phi_{4,1})$ $+ 2(\phi_{3,3} + \phi_{5,3} + \phi_{3,1} + \phi_{5,1}) +$ $\phi_{4,4} + \phi_{2,2} + \phi_{6,2} + \phi_{4,0}$ $- \delta_k [-W_{3,3} - W_{5,1} + W_{5,3} + W_{3,1}] = 0$	$19 \phi_{4,2} - 8 \phi_{4,3} - 8 \phi_{3,2} - \frac{4}{5} \bar{\phi} - 8 \phi_{4,1} +$ $2 \phi_{3,3} + 2 \phi_{3,1} + \phi_{4,4} + \phi_{2,2} + \delta_k W_{3,3}$ $- \delta_k W_{3,1} = 0$

- 80 -



points	équations générales	équations réduites (simplifiées)
3,3	$ \begin{aligned} & 20 W_{3,3} - 8(W_{3,4} + W_{2,3} + W_{4,3} + W_{3,2}) \\ & + 2(W_{2,4} + W_{4,4} + W_{2,2} + W_{4,2}) \\ & + W_{3,5} + W_{1,3} + W_{5,3} + W_{3,1} - \phi_{2,4} \\ & - \phi_{4,2} + \phi_{4,4} + \phi_{2,2} = \eta_{3,3} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & 20 W_{3,3} - 16 W_{4,3} - 16 W_{3,2} + 4 W_{4,2} \\ & + 2 W_{4,4} + 2 W_{2,2} + 2 W_{3,1} + 2 \phi_{4,2} \\ & + \phi_{4,4} + \phi_{2,2} = \eta_{3,3} \end{aligned} $
3,3	$ \begin{aligned} & 20 \phi_{3,3} - 8(\phi_{3,4} + \phi_{2,3} + \phi_{4,3} + \phi_{3,2}) \\ & + 2(\phi_{2,4} + \phi_{4,4} + \phi_{2,2} + \phi_{4,2}) \\ & + \phi_{3,5} + \phi_{1,3} + \phi_{5,3} + \phi_{3,1} \\ & - \delta_k [-W_{2,4} - W_{4,2} + W_{4,4} + W_{2,2}] = 0 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & 20 \phi_{3,3} - 16 \phi_{4,3} - 16 \phi_{3,2} + 4 \phi_{4,2} + 2 \phi_{4,4} \\ & + 2 \phi_{2,2} + \frac{6}{5} \bar{\phi} + 2 \phi_{3,1} + 2 \delta_k W_{4,2} - \delta_k W_{4,4} \\ & - \delta_k W_{2,2} = 0 \end{aligned} $
4,3	$ \begin{aligned} & 20 W_{4,3} - 8(W_{4,4} + W_{3,3} + W_{5,3} + W_{4,2}) \\ & + 2(W_{3,4} + W_{5,4} + W_{3,2} + W_{5,2}) \\ & + W_{4,5} + W_{2,3} + W_{6,3} + W_{4,1} \\ & - \phi_{3,4} - \phi_{5,2} + \phi_{5,4} + \phi_{3,2} = \eta_{4,3} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & 23 W_{4,3} - 8 W_{4,4} - 8 W_{3,3} - 8 W_{4,2} \\ & + 3 W_{3,2} + W_{4,1} - \phi_{4,3} + \frac{2}{5} \bar{\phi} + \phi_{3,2} = \eta_{4,3} \end{aligned} $



points	équations générales	équations réduites (simplifiées)
4,3	$20 \phi_{4,3} - 8(\phi_{4,4} + \phi_{3,3} + \phi_{5,3} + \phi_{4,2})$ $+ 2(\phi_{3,4} + \phi_{5,4} + \phi_{3,2} + \phi_{5,2})$ $+ \phi_{4,5} + \phi_{2,3} + \phi_{6,3} + \phi_{4,1}$ $- \delta_k [-W_{3,4} - W_{5,2} + W_{5,4} + W_{3,2}] = 0$	$21 \phi_{4,3} - 8\phi_{4,4} - 8\phi_{3,3} - 8\phi_{4,2} + 3\phi_{3,2}$ $- \frac{2}{5} \bar{\phi} + \phi_{4,1} + \delta_k W_{4,3} - \delta_k W_{3,2} = 0$
4,4	$20 W_{4,4} - 8(W_{4,5} + W_{3,4} + W_{5,4} + W_{4,3})$ $+ 2(W_{3,5} + W_{5,5} + W_{3,3} + W_{5,3})$ $+ W_{4,6} + W_{2,4} + W_{6,4} + W_{4,2}$ $- \phi_{3,5} - \phi_{5,3} + \phi_{5,5} + \phi_{3,3} = \eta_{4,4}$	$22 W_{4,4} - 16 W_{4,3} + 2 W_{3,3} + 2 W_{4,2}$ $- \frac{1}{5} \bar{\phi} + \phi_{3,3} = \eta_{4,4}$
4,4	$20 \phi_{4,4} - 8(\phi_{4,5} + \phi_{3,4} + \phi_{5,4} + \phi_{4,3})$ $+ 2(\phi_{3,5} + \phi_{5,5} + \phi_{3,3} + \phi_{5,3})$ $+ \phi_{4,6} + \phi_{2,4} + \phi_{6,4} + \phi_{4,2}$ $- \delta_k [-W_{3,5} - W_{5,3} + W_{5,5} + W_{3,3}] = 0$	$18 \phi_{4,4} - 16 \phi_{4,3} + 2 \phi_{3,3} + 2 \phi_{4,2} - \delta_k W_{3,3}$ $- \frac{26}{5} \bar{\phi} = 0$



points	Equations générales	Equations réduites (simplifiées)
5,5	$  \begin{aligned}  & 20 \psi_{5,5} - 8 (\psi_{5,6} + \psi_{4,5} + \psi_{6,5} + \psi_{5,4}) \\  & + 2 (\psi_{4,6} + \psi_{6,6} + \psi_{4,4} + \psi_{6,4}) \\  & + \psi_{5,7} + \psi_{3,5} + \psi_{7,5} + \psi_{5,3} \\  & - \phi_{4,6} - \phi_{6,4} + \phi_{6,6} + \phi_{4,4} = \mathcal{Z}_{5,5}  \end{aligned}  $	$8 \psi_{4,4} + 4 \phi_{4,4} - \frac{12}{5} \bar{\phi} = \mathcal{Z}_{5,5}$
5,5	$  \begin{aligned}  & 20 \phi_{5,5} - 8 (\phi_{5,6} + \phi_{4,5} + \phi_{6,5} + \phi_{5,4}) \\  & + 2 (\phi_{4,6} + \phi_{6,6} + \phi_{4,4} + \phi_{6,4}) \\  & + \phi_{5,7} + \phi_{3,5} + \phi_{7,5} + \phi_{5,3} \\  & - \delta_R [-\psi_{4,6} - \psi_{6,4} + \psi_{6,6} + \psi_{4,4}] = 0  \end{aligned}  $	$-\delta_R$



Toutes ces équations forment un système à 26 inconnues. (Tableau II.1) - Ce système a été résolu par ordinateur et dans cette résolution, pour pouvoir utiliser les résultats dans le cas le plus général, c'est à dire pour pouvoir combiner tous les cas de charges, nous avons considéré que le coefficient de chargement  $\eta$  est égal à 1 pour un point alors qu'il est nul pour tous les autres; de sorte, l'ordinateur a eu à résoudre 15 systèmes de 26 inconnues chacun -

Dans une seconde étape nous avons donné ces résultats à l'ordinateur pour qu'il les combine de façon à obtenir différents cas de chargement (par exemple: parabolioïde hyperbolique complètement chargé ou à moitié chargé etc...) suivant le Tableau II.2 -

Il est à signaler que nous avons programmé ces 2 étapes de calcul en un seul programme, mais la mémoire de l'ordinateur était dépassée de 450 bits, ce qui fait qu'on était obligé de procéder en deux étapes.

A partir des résultats donnés par le second programme, nous avons utilisé une programma 101 pour calculer les efforts aux différents points du réseau.

$\frac{c}{a}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,0		0,5	1	1	1	1	1	1	1	1
2,0				0,5	1	1	1	1	1	1
3,0						0,5	1	1	1	1
4,0								0,5	1	1
1,1		0,25	1	1	1	1	1	1	1	1
2,1				0,5	1	1	1	1	1	1
3,1						0,5	1	1	1	1
4,1								0,5	1	1
2,2				0,25	1	1	1	1	1	1
3,2						0,5	1	1	1	1
4,2								0,5	1	1
3,3						0,25	1	1	1	1
4,3								0,5	1	1
4,4								0,25	1	1
5,5										1

Tableau II.8



Ces efforts sont donnés par les équations suivantes:

$$N_{x,m,n} = \frac{2z_0 a^2}{f} (\phi_{m,n+1} - 2\phi_{m,n} + \phi_{m,n-1})$$

$$N_{y,m,n} = \frac{2z_0 a^2}{f} (\phi_{m+1,n} - 2\phi_{m,n} + \phi_{m-1,n})$$

$$N_{xy,m,n} = -\frac{z_0 a^2}{2f} (\phi_{m+1,n+1} - \phi_{m+1,n-1} - \phi_{m-1,n+1} + \phi_{m-1,n-1})$$

$$M_{x,m,n} = m_{x,m,n} + \mu m_{y,m,n} ; M_{y,m,n} = m_{y,m,n} + \mu m_{x,m,n}$$

où :

$$m_{x,m,n} = -\frac{z_0 a^2}{k^2} (W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n})$$

$$m_{y,m,n} = -\frac{z_0 a^2}{k^2} (W_{m,n+1} - 2W_{m,n} + W_{m,n-1})$$

$$M_{xy,m,n} = M_{yx,m,n} = -(1-\mu) \frac{z_0 a^2}{4k^2} (W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n+1} + W_{m-1,n-1})$$

$$Q_{x,m,n} = -\frac{z_0 a}{2k} \left[ W_{m+2,n} - 4W_{m+1,n} + 4W_{m-1,n} - W_{m-2,n} + W_{m+1,n+1} - W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n-1} \right]$$

$$Q_{y,m,n} = -\frac{z_0 a}{2k} \left[ W_{m,n+2} - 4W_{m,n+1} + 4W_{m,n-1} - W_{m,n-2} + W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n+1} - W_{m-1,n-1} \right]$$

pour tous les points du réseau on aura :



$$N_{xy, m, n} = -\frac{z_0 a^2}{2f} (\phi_{m+1, m+1} - \phi_{m+1, n-1} - \phi_{m-1, m+1} + \phi_{m-1, n-1})$$

$$\begin{aligned} N_{xy, 0, 0} &\Rightarrow \phi_{1,1} - \phi_{1,1} - \phi_{-1,1} + \phi_{-1,-1} &= 4\phi_{1,1} \\ N_{xy, 1, 0} &\Rightarrow \phi_{2,1} - \phi_{2,-1} - \phi_{0,1} + \phi_{0,-1} &= 2\phi_{2,1} \\ N_{xy, 2, 0} &\Rightarrow \phi_{3,1} - \phi_{3,-1} - \phi_{1,1} + \phi_{1,-1} &= 2\phi_{3,1} - 2\phi_{1,1} \\ N_{xy, 3, 0} &\Rightarrow \phi_{4,1} - \phi_{4,-1} - \phi_{2,1} + \phi_{2,-1} &= 2\phi_{4,1} - 2\phi_{2,1} \\ N_{xy, 4, 0} &\Rightarrow \phi_{5,1} - \phi_{5,-1} - \phi_{3,1} + \phi_{3,-1} &= 0,4\bar{\phi} - 2\phi_{3,1} \\ N_{xy, 1, 1} &\Rightarrow \phi_{2,2} - \phi_{2,0} - \phi_{0,2} + \phi_{0,0} &= \phi_{2,2} \\ N_{xy, 2, 1} &\Rightarrow \phi_{3,2} - \phi_{3,0} - \phi_{1,2} + \phi_{1,0} &= \phi_{3,2} - \phi_{2,1} \\ N_{xy, 3, 1} &\Rightarrow \phi_{4,2} - \phi_{4,0} - \phi_{2,2} + \phi_{2,0} &= \phi_{4,2} - \phi_{2,2} \\ N_{xy, 4, 1} &\Rightarrow \phi_{5,2} - \phi_{5,0} - \phi_{3,2} + \phi_{3,0} &= 0,4\bar{\phi} - \phi_{3,2} \\ N_{xy, 2, 2} &\Rightarrow \phi_{3,3} - \phi_{3,1} - \phi_{1,3} + \phi_{1,1} &= \phi_{3,3} - 2\phi_{3,1} + \phi_{1,1} \\ N_{xy, 3, 2} &\Rightarrow \phi_{4,3} - \phi_{4,1} - \phi_{2,3} + \phi_{2,1} &= \phi_{4,3} - \phi_{4,1} - \phi_{3,2} + \phi_{2,1} \\ N_{xy, 4, 2} &\Rightarrow \phi_{5,3} - \phi_{5,1} - \phi_{3,3} + \phi_{3,1} &= 0,4\bar{\phi} - \phi_{3,3} + \phi_{3,1} \\ N_{xy, 3, 3} &\Rightarrow \phi_{4,4} - \phi_{4,2} - \phi_{2,4} + \phi_{2,2} &= \phi_{4,4} - 2\phi_{4,2} + \phi_{2,2} \\ N_{xy, 4, 3} &\Rightarrow \phi_{5,4} - \phi_{5,2} - \phi_{3,4} + \phi_{3,2} &= 0,4\bar{\phi} - \phi_{4,3} + \phi_{3,2} \\ N_{xy, 4, 4} &\Rightarrow \phi_{5,5} - \phi_{5,3} - \phi_{3,5} + \phi_{3,3} &= -0,2\bar{\phi} + \phi_{3,3} \\ N_{xy, 5, 5} &\Rightarrow \phi_{6,6} - \phi_{6,4} - \phi_{4,6} + \phi_{4,4} &= 4\phi_{4,4} - \frac{12}{5}\bar{\phi} \\ N_{xy, 5, 0} &\Rightarrow \phi_{6,1} - \phi_{6,-1} - \phi_{4,1} + \phi_{4,-1} &= \frac{4}{5}\bar{\phi} - 4\phi_{4,1} \\ N_{xy, 5, 1} &\Rightarrow \phi_{6,2} - \phi_{6,0} - \phi_{4,2} + \phi_{4,0} &= \frac{4}{5}\bar{\phi} - 2\phi_{4,2} \\ N_{xy, 5, 2} &\Rightarrow \phi_{6,3} - \phi_{6,1} - \phi_{4,3} + \phi_{4,1} &= \frac{4}{5}\bar{\phi} - 2\phi_{4,3} + 2\phi_{4,1} \\ N_{xy, 5, 3} &\Rightarrow \phi_{6,4} - \phi_{6,2} - \phi_{4,4} + \phi_{4,2} &= \frac{4}{5}\bar{\phi} - 2\phi_{4,4} + 2\phi_{4,2} \\ N_{xy, 5, 4} &\Rightarrow \phi_{6,5} - \phi_{6,3} - \phi_{4,5} + \phi_{4,3} &= -\frac{4}{5}\bar{\phi} + 2\phi_{4,3} \end{aligned}$$



$$N_{x,m,n} = \frac{2x_0 a^2}{f} (\phi_{m,n+1} - 2\phi_{m,n} + \phi_{m,n-1})$$

$$N_{x,0,0} \Rightarrow \phi_{0,1} - 2\phi_{0,0} + \phi_{0,-1} = 0$$

$$N_{x,1,0} \Rightarrow \phi_{1,1} - 2\phi_{1,0} + \phi_{1,-1} = 0$$

$$N_{x,2,0} \Rightarrow \phi_{2,1} - 2\phi_{2,0} + \phi_{2,-1} = 0$$

$$N_{x,3,0} \Rightarrow \phi_{3,1} - 2\phi_{3,0} + \phi_{3,-1} = 0$$

$$N_{x,4,0} \Rightarrow \phi_{4,1} - 2\phi_{4,0} + \phi_{4,-1} = 0$$

$$N_{x,1,1} \Rightarrow \phi_{1,2} - 2\phi_{1,1} + \phi_{1,0} = \phi_{2,1} - 2\phi_{1,1}$$

$$N_{x,2,1} \Rightarrow \phi_{2,2} - 2\phi_{2,1} + \phi_{2,0} = \phi_{3,2} - 2\phi_{2,1}$$

$$N_{x,3,1} \Rightarrow \phi_{3,2} - 2\phi_{3,1} + \phi_{3,0} = \phi_{3,2} - 2\phi_{3,1}$$

$$N_{x,4,1} \Rightarrow \phi_{4,2} - 2\phi_{4,1} + \phi_{4,0} = \phi_{4,2} - 2\phi_{4,1}$$

$$N_{x,2,2} \Rightarrow \phi_{2,3} - 2\phi_{2,2} + \phi_{2,1} = \phi_{3,2} - 2\phi_{2,2} + \phi_{2,1}$$

$$N_{x,3,2} \Rightarrow \phi_{3,3} - 2\phi_{3,2} + \phi_{3,1} = \phi_{3,3} - 2\phi_{3,2} + \phi_{3,1}$$

$$N_{x,4,2} \Rightarrow \phi_{4,3} - 2\phi_{4,2} + \phi_{4,1} = \phi_{4,3} - 2\phi_{4,2} + \phi_{4,1}$$

$$N_{x,3,3} \Rightarrow \phi_{3,4} - 2\phi_{3,3} + \phi_{3,2} = \phi_{4,3} - 2\phi_{3,3} + \phi_{3,2}$$

$$N_{x,4,3} \Rightarrow \phi_{4,4} - 2\phi_{4,3} + \phi_{4,2} = \phi_{4,4} - 2\phi_{4,3} + \phi_{4,2}$$

$$N_{x,4,4} \Rightarrow \phi_{4,5} - 2\phi_{4,4} + \phi_{4,3} = \frac{4}{5}\bar{\phi} - 2\phi_{4,4} + \phi_{4,3}$$

$$N_{x,5,5} \Rightarrow \phi_{5,6} - 2\phi_{5,5} + \phi_{5,4} = 0$$

$$N_{x,5,0} \Rightarrow \phi_{5,1} - 2\phi_{5,0} + \phi_{5,-1} = 0$$

$$N_{x,5,1} \Rightarrow \phi_{5,2} - 2\phi_{5,1} + \phi_{5,0} = 0$$

$$N_{x,5,2} \Rightarrow \phi_{5,3} - 2\phi_{5,2} + \phi_{5,1} = 0$$

$$N_{x,5,3} \Rightarrow \phi_{5,4} - 2\phi_{5,3} + \phi_{5,2} = 0$$

$$N_{x,5,4} \Rightarrow \phi_{5,5} - 2\phi_{5,4} + \phi_{5,3} = 0$$

$$M_{xy, m, n} = M_{yx, m, n} = -(1 - \mu) \frac{Z_0 a^2}{4k^2} (W_{m+1, n} - W_{m+1, n-1} - W_{m-1, n} + W_{m-1, n-1})$$

$$M_{xy, 0, 0} \Rightarrow W_{1,1} - W_{1,-1} - W_{-1,1} + W_{-1,-1} = 0$$

$$M_{xy, 1, 0} \Rightarrow W_{2,1} - W_{2,-1} - W_{0,1} + W_{0,-1} = 0$$

$$M_{xy, 2, 0} \Rightarrow W_{3,1} - W_{3,-1} - W_{1,1} + W_{1,-1} = 0$$

$$M_{xy, 3, 0} \Rightarrow W_{4,1} - W_{4,-1} - W_{2,1} + W_{2,-1} = 0$$

$$M_{xy, 4, 0} \Rightarrow W_{5,1} - W_{5,-1} - W_{3,1} + W_{3,-1} = 0$$

$$M_{xy, 1, 1} \Rightarrow W_{2,2} - W_{2,0} - W_{0,2} + W_{0,0} = W_{2,2} - 2W_{2,0} + W_{0,0}$$

$$M_{xy, 2, 1} \Rightarrow W_{3,2} - W_{3,0} - W_{1,2} + W_{1,0} = W_{3,2} - W_{3,0} - W_{2,1} + W_{1,0}$$

$$M_{xy, 3, 1} \Rightarrow W_{4,2} - W_{4,0} - W_{2,2} + W_{2,0} = W_{4,2} - W_{4,0} - W_{2,2} + W_{2,0}$$

$$M_{xy, 4, 1} \Rightarrow W_{5,2} - W_{5,0} - W_{3,2} + W_{3,0} = W_{3,0} - W_{3,2}$$

$$M_{xy, 2, 2} \Rightarrow W_{3,3} - W_{3,1} - W_{1,3} + W_{1,1} = W_{3,3} - 2W_{3,1} + W_{1,1}$$

$$M_{xy, 3, 2} \Rightarrow W_{4,3} - W_{4,1} - W_{2,3} + W_{2,1} = W_{4,3} - W_{4,1} - W_{3,2} + W_{2,1}$$

$$M_{xy, 4, 2} \Rightarrow W_{5,3} - W_{5,1} - W_{3,3} + W_{3,1} = W_{3,1} - W_{3,3}$$

$$M_{xy, 4, 3} \Rightarrow W_{4,4} - W_{4,2} - W_{2,4} + W_{2,2} = W_{4,4} - 2W_{4,2} + W_{2,2}$$

$$M_{xy, 4, 3} \Rightarrow W_{5,4} - W_{5,2} - W_{3,4} + W_{3,2} = W_{3,2} - W_{4,3}$$

$$M_{xy, 4, 4} \Rightarrow W_{5,5} - W_{5,3} - W_{3,5} + W_{3,3} = W_{3,3}$$

$$M_{xy, 5, 5} \Rightarrow W_{6,6} - W_{6,4} - W_{4,6} + W_{4,4} = 0$$

$$M_{xy, 5, 0} \Rightarrow W_{6,1} - W_{6,-1} - W_{4,1} + W_{4,-1} = 0$$

$$M_{xy, 5, 1} \Rightarrow W_{6,2} - W_{6,0} - W_{4,2} + W_{4,0} = 0$$

$$M_{xy, 5, 2} \Rightarrow W_{6,3} - W_{6,1} - W_{4,3} + W_{4,1} = 0$$

$$M_{xy, 5, 3} \Rightarrow W_{6,4} - W_{6,2} - W_{4,4} + W_{4,2} = 0$$

$$M_{xy, 5, 4} \Rightarrow W_{6,5} - W_{6,3} - W_{4,5} + W_{4,3} = 0$$



$$N_{y,m,n} = \frac{2z_0 \alpha^2}{f} (\phi_{m+1,n} - 2\phi_{m,n} + \phi_{m-1,n})$$

- $N_{y,0,0} \Rightarrow \phi_{1,0} - 2\phi_{0,0} + \phi_{-1,0} = 0$
- $N_{y,1,0} \Rightarrow \phi_{2,0} - 2\phi_{1,0} + \phi_{0,0} = 0$
- $N_{y,2,0} \Rightarrow \phi_{3,0} - 2\phi_{2,0} + \phi_{1,0} = 0$
- $N_{y,3,0} \Rightarrow \phi_{4,0} - 2\phi_{3,0} + \phi_{2,0} = 0$
- $N_{y,4,0} \Rightarrow \phi_{5,0} - 2\phi_{4,0} + \phi_{3,0} = 0$
- $N_{y,1,1} \Rightarrow \phi_{2,1} - 2\phi_{1,1} + \phi_{0,1} = \phi_{2,1} - 2\phi_{1,1}$
- $N_{y,2,1} \Rightarrow \phi_{3,1} - 2\phi_{2,1} + \phi_{1,1} = \phi_{3,1} - 2\phi_{2,1} + \phi_{1,1}$
- $N_{y,3,1} \Rightarrow \phi_{4,1} - 2\phi_{3,1} + \phi_{2,1} = \phi_{4,1} - 2\phi_{3,1} + \phi_{2,1}$
- $N_{y,4,1} \Rightarrow \phi_{5,1} - 2\phi_{4,1} + \phi_{3,1} = 0,2\bar{\phi} - 2\phi_{4,1} + \phi_{3,1}$
- $N_{y,2,2} \Rightarrow \phi_{3,2} - 2\phi_{2,2} + \phi_{1,2} = \phi_{3,2} - 2\phi_{2,2} + \phi_{1,2}$
- $N_{y,3,2} \Rightarrow \phi_{4,2} - 2\phi_{3,2} + \phi_{2,2} = \phi_{4,2} - 2\phi_{3,2} + \phi_{2,2}$
- $N_{y,4,2} \Rightarrow \phi_{5,2} - 2\phi_{4,2} + \phi_{3,2} = 0,4\bar{\phi} - 2\phi_{4,2} + \phi_{3,2}$
- $N_{y,3,3} \Rightarrow \phi_{4,3} - 2\phi_{3,3} + \phi_{2,3} = \phi_{4,3} - 2\phi_{3,3} + \phi_{2,3}$
- $N_{y,4,3} \Rightarrow \phi_{5,3} - 2\phi_{4,3} + \phi_{3,3} = 0,6\bar{\phi} - 2\phi_{4,3} + \phi_{3,3}$
- $N_{y,4,4} \Rightarrow \phi_{5,4} - 2\phi_{4,4} + \phi_{3,4} = 0,8\bar{\phi} - 2\phi_{4,4} + \phi_{3,4}$
- $N_{y,5,5} \Rightarrow \phi_{6,5} - 2\phi_{5,5} + \phi_{4,5} = 0$
- $N_{y,5,0} \Rightarrow \phi_{6,0} - 2\phi_{5,0} + \phi_{4,0} = 0$
- $N_{y,5,1} \Rightarrow \phi_{6,1} - 2\phi_{5,1} + \phi_{4,1} = 0$
- $N_{y,5,2} \Rightarrow \phi_{6,2} - 2\phi_{5,2} + \phi_{4,2} = 0$
- $N_{y,5,3} \Rightarrow \phi_{6,3} - 2\phi_{5,3} + \phi_{4,3} = 0$
- $N_{y,5,4} \Rightarrow \phi_{6,4} - 2\phi_{5,4} + \phi_{4,4} = 0$

$$M_{x,m,n} = m_{x,m,n} + \mu m_{y,m,n}$$

$$M_{y,m,n} = m_{y,m,n} + \mu m_{x,m,n}$$

- $M_{x,0,0} = m_{x,0,0} + \mu m_{y,0,0}$
- $M_{x,1,0} = m_{x,1,0} + \mu m_{y,1,0}$
- $M_{x,2,0} = m_{x,2,0} + \mu m_{y,2,0}$
- $M_{x,3,0} = m_{x,3,0} + \mu m_{y,3,0}$
- $M_{x,4,0} = m_{x,4,0} + \mu m_{y,4,0}$
- $M_{x,1,1} = m_{x,1,1} + \mu m_{y,1,1}$
- $M_{x,2,1} = m_{x,2,1} + \mu m_{y,2,1}$
- $M_{x,3,1} = m_{x,3,1} + \mu m_{y,3,1}$
- $M_{x,4,1} = m_{x,4,1} + \mu m_{y,4,1}$
- $M_{x,2,2} = m_{x,2,2} + \mu m_{y,2,2}$
- $M_{x,3,2} = m_{x,3,2} + \mu m_{y,3,2}$
- $M_{x,4,2} = m_{x,4,2} + \mu m_{y,4,2}$
- $M_{x,3,3} = m_{x,3,3} + \mu m_{y,3,3}$
- $M_{x,4,3} = m_{x,4,3} + \mu m_{y,4,3}$
- $M_{x,4,4} = m_{x,4,4} + \mu m_{y,4,4}$
- $M_{x,5,5} = m_{x,5,5} + \mu m_{y,5,5}$
- $M_{x,5,0} = m_{x,5,0} + \mu m_{y,5,0}$
- $M_{x,5,1} = m_{x,5,1} + \mu m_{y,5,1}$
- $M_{x,5,2} = m_{x,5,2} + \mu m_{y,5,2}$
- $M_{x,5,3} = m_{x,5,3} + \mu m_{y,5,3}$
- $M_{x,5,4} = m_{x,5,4} + \mu m_{y,5,4}$

- $M_{y,0,0} = m_{y,0,0} + \mu m_{x,0,0}$
- $M_{y,1,0} = m_{y,1,0} + \mu m_{x,1,0}$
- $M_{y,2,0} = m_{y,2,0} + \mu m_{x,2,0}$
- $M_{y,3,0} = m_{y,3,0} + \mu m_{x,3,0}$
- $M_{y,4,0} = m_{y,4,0} + \mu m_{x,4,0}$
- $M_{y,1,1} = m_{y,1,1} + \mu m_{x,1,1}$
- $M_{y,2,1} = m_{y,2,1} + \mu m_{x,2,1}$
- $M_{y,3,1} = m_{y,3,1} + \mu m_{x,3,1}$
- $M_{y,4,1} = m_{y,4,1} + \mu m_{x,4,1}$
- $M_{y,2,2} = m_{y,2,2} + \mu m_{x,2,2}$
- $M_{y,3,2} = m_{y,3,2} + \mu m_{x,3,2}$
- $M_{y,4,2} = m_{y,4,2} + \mu m_{x,4,2}$
- $M_{y,3,3} = m_{y,3,3} + \mu m_{x,3,3}$
- $M_{y,4,3} = m_{y,4,3} + \mu m_{x,4,3}$
- $M_{y,4,4} = m_{y,4,4} + \mu m_{x,4,4}$
- $M_{y,5,5} = m_{y,5,5} + \mu m_{x,5,5}$
- $M_{y,5,0} = m_{y,5,0} + \mu m_{x,5,0}$
- $M_{y,5,1} = m_{y,5,1} + \mu m_{x,5,1}$
- $M_{y,5,2} = m_{y,5,2} + \mu m_{x,5,2}$
- $M_{y,5,3} = m_{y,5,3} + \mu m_{x,5,3}$
- $M_{y,5,4} = m_{y,5,4} + \mu m_{x,5,4}$



$$\mathcal{M}_{x,m,n} = -\frac{\epsilon_0 a^2}{k^2} \left( W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n} \right)$$

$$\mathcal{M}_{x,0,0} \Rightarrow W_{1,0} - 2W_{0,0} + W_{-1,0} = 2W_{1,0} - 2W_{0,0}$$

$$\mathcal{M}_{x,1,0} \Rightarrow W_{2,0} - 2W_{1,0} + W_{0,0} = W_{2,0} - 2W_{1,0} + W_{0,0}$$

$$\mathcal{M}_{x,2,0} \Rightarrow W_{3,0} - 2W_{2,0} + W_{1,0} = W_{3,0} - 2W_{2,0} + W_{1,0}$$

$$\mathcal{M}_{x,3,0} \Rightarrow W_{4,0} - 2W_{3,0} + W_{2,0} = W_{4,0} - 2W_{3,0} + W_{2,0}$$

$$\mathcal{M}_{x,4,0} \Rightarrow W_{5,0} - 2W_{4,0} + W_{3,0} = W_{3,0} - 2W_{4,0}$$

$$\mathcal{M}_{x,1,1} \Rightarrow W_{2,1} - 2W_{1,1} + W_{0,1} = W_{2,1} - 2W_{1,1} + W_{1,0}$$

$$\mathcal{M}_{x,2,1} \Rightarrow W_{3,1} - 2W_{2,1} + W_{1,1} = W_{3,1} - 2W_{2,1} + W_{1,1}$$

$$\mathcal{M}_{x,3,1} \Rightarrow W_{4,1} - 2W_{3,1} + W_{2,1} = W_{4,1} - 2W_{3,1} + W_{2,1}$$

$$\mathcal{M}_{x,4,1} \Rightarrow W_{5,1} - 2W_{4,1} + W_{3,1} = W_{3,1} - 2W_{4,1}$$

$$\mathcal{M}_{x,2,2} \Rightarrow W_{3,2} - 2W_{2,2} + W_{1,2} = W_{3,2} - 2W_{2,2} + W_{2,1}$$

$$\mathcal{M}_{x,3,2} \Rightarrow W_{4,2} - 2W_{3,2} + W_{2,2} = W_{4,2} - 2W_{3,2} + W_{2,2}$$

$$\mathcal{M}_{x,4,2} \Rightarrow W_{5,2} - 2W_{4,2} + W_{3,2} = W_{3,2} - 2W_{4,2}$$

$$\mathcal{M}_{x,3,3} \Rightarrow W_{4,3} - 2W_{3,3} + W_{2,3} = W_{4,3} - 2W_{3,3} + W_{2,3}$$

$$\mathcal{M}_{x,4,3} \Rightarrow W_{5,3} - 2W_{4,3} + W_{3,3} = W_{3,3} - 2W_{4,3}$$

$$\mathcal{M}_{x,4,4} \Rightarrow W_{5,4} - 2W_{4,4} + W_{3,4} = W_{4,3} - 2W_{4,4}$$

$$\mathcal{M}_{x,5,5} \Rightarrow W_{6,5} - 2W_{5,5} + W_{4,5} = 0$$

$$\mathcal{M}_{x,5,0} \Rightarrow W_{6,0} - 2W_{5,0} + W_{4,0} = 2W_{4,0}$$

$$\mathcal{M}_{x,5,1} \Rightarrow W_{6,1} - 2W_{5,1} + W_{4,1} = 2W_{4,1}$$

$$\mathcal{M}_{x,5,2} \Rightarrow W_{6,2} - 2W_{5,2} + W_{4,2} = 2W_{4,2}$$

$$\mathcal{M}_{x,5,3} \Rightarrow W_{6,3} - 2W_{5,3} + W_{4,3} = 2W_{4,3}$$

$$\mathcal{M}_{x,5,4} \Rightarrow W_{6,4} - 2W_{5,4} + W_{4,4} = 2W_{4,4}$$

$$\Omega_{m, m, n} = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{k^2} (W_{m, m+1} - 2W_{m, m} + W_{m, m-1})$$

$$\Omega_{0,0} \Rightarrow W_{0,1} - 2W_{0,0} + W_{0,-1} = 2W_{1,0} - 2W_{0,0}$$

$$\Omega_{1,0} \Rightarrow W_{1,1} - 2W_{1,0} + W_{1,-1} = 2W_{1,1} - 2W_{1,0}$$

$$\Omega_{2,0} \Rightarrow W_{2,1} - 2W_{2,0} + W_{2,-1} = 2W_{2,1} - 2W_{2,0}$$

$$\Omega_{3,0} \Rightarrow W_{3,1} - 2W_{3,0} + W_{3,-1} = 2W_{3,1} - 2W_{3,0}$$

$$\Omega_{4,0} \Rightarrow W_{4,1} - 2W_{4,0} + W_{4,-1} = 2W_{4,1} - 2W_{4,0}$$

$$\Omega_{1,1} \Rightarrow W_{1,2} - 2W_{1,1} + W_{1,0} = W_{2,1} - 2W_{1,1} + W_{1,0}$$

$$\Omega_{2,1} \Rightarrow W_{2,2} - 2W_{2,1} + W_{2,0} = W_{2,2} - 2W_{2,1} + W_{2,0}$$

$$\Omega_{3,1} \Rightarrow W_{3,2} - 2W_{3,1} + W_{3,0} = W_{3,2} - 2W_{3,1} + W_{3,0}$$

$$\Omega_{4,1} \Rightarrow W_{4,2} - 2W_{4,1} + W_{4,0} = W_{4,2} - 2W_{4,1} + W_{4,0}$$

$$\Omega_{2,2} \Rightarrow W_{2,3} - 2W_{2,2} + W_{2,1} = W_{3,2} - 2W_{2,2} + W_{2,1}$$

$$\Omega_{3,2} \Rightarrow W_{3,3} - 2W_{3,2} + W_{3,1} = W_{3,3} - 2W_{3,2} + W_{3,1}$$

$$\Omega_{4,2} \Rightarrow W_{4,3} - 2W_{4,2} + W_{4,1} = W_{4,3} - 2W_{4,2} + W_{4,1}$$

$$\Omega_{3,3} \Rightarrow W_{3,4} - 2W_{3,3} + W_{3,2} = W_{4,3} - 2W_{3,3} + W_{3,2}$$

$$\Omega_{4,3} \Rightarrow W_{4,4} - 2W_{4,3} + W_{4,2} = W_{4,4} - 2W_{4,3} + W_{4,2}$$

$$\Omega_{4,4} \Rightarrow W_{4,5} - 2W_{4,4} + W_{4,3} = W_{4,3} - 2W_{4,4}$$

$$\Omega_{5,5} \Rightarrow W_{5,6} - 2W_{5,5} + W_{5,4} = 0$$

$$\Omega_{5,0} \Rightarrow W_{5,1} - 2W_{5,0} + W_{5,-1} = 0$$

$$\Omega_{5,1} \Rightarrow W_{5,2} - 2W_{5,1} + W_{5,0} = 0$$

$$\Omega_{5,2} \Rightarrow W_{5,3} - 2W_{5,2} + W_{5,1} = 0$$

$$\Omega_{5,3} \Rightarrow W_{5,4} - 2W_{5,3} + W_{5,2} = 0$$

$$\Omega_{5,4} \Rightarrow W_{5,5} - 2W_{5,4} + W_{5,3} = 0$$



$$Q_{x_{m,n}} = -\frac{Z_0 a}{2k} \left[ W_{m+2,n} - 4W_{m+1,n} + 4W_{m,n} - W_{m-1,n} + W_{m+1,n+1} - W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n-1} \right]$$

$$Q_{x_{0,0}} = W_{2,0} - 4W_{1,0} + 4W_{-1,0} - W_{-2,0} + W_{1,1} - W_{-1,1} + W_{1,-1} - W_{-1,-1} = 0$$

$$Q_{x_{1,0}} = W_{3,0} - 4W_{2,0} + 4W_{0,0} - W_{-1,0} + W_{2,1} - W_{0,1} + W_{2,-1} - W_{0,-1}$$

$$Q_{x_{2,0}} = W_{4,0} - 4W_{3,0} + 4W_{1,0} - W_{0,0} + W_{3,1} - W_{1,1} + W_{3,-1} - W_{1,-1}$$

$$Q_{x_{3,0}} = W_{5,0} - 4W_{4,0} + 4W_{2,0} - W_{1,0} + W_{4,1} - W_{2,1} + W_{4,-1} - W_{2,-1}$$

$$Q_{x_{4,0}} = W_{6,0} - 4W_{5,0} + 4W_{3,0} - W_{2,0} + W_{5,1} - W_{3,1} + W_{5,-1} - W_{3,-1}$$

$$Q_{x_{1,1}} = W_{3,1} - 4W_{2,1} + 4W_{0,1} - W_{-1,1} + W_{2,2} - W_{0,2} + W_{2,0} - W_{0,0}$$

$$Q_{x_{2,1}} = W_{4,1} - 4W_{3,1} + 4W_{1,1} - W_{0,1} + W_{3,2} - W_{1,2} + W_{3,0} - W_{1,0}$$

$$Q_{x_{3,1}} = W_{5,1} - 4W_{4,1} + 4W_{2,1} - W_{1,1} + W_{4,2} - W_{2,2} + W_{4,0} - W_{2,0}$$

$$Q_{x_{4,1}} = W_{6,1} - 4W_{5,1} + 4W_{3,1} - W_{2,1} + W_{5,2} - W_{3,2} + W_{5,0} - W_{3,0}$$

$$Q_{x_{2,2}} = W_{4,2} - 4W_{3,2} + 4W_{1,2} - W_{0,2} + W_{3,3} - W_{1,3} + W_{3,1} - W_{1,1}$$

$$Q_{x_{3,2}} = W_{5,2} - 4W_{4,2} + 4W_{2,2} - W_{1,2} + W_{4,3} - W_{2,3} + W_{4,1} - W_{2,1}$$

$$Q_{x_{4,2}} = W_{6,2} - 4W_{5,2} + 4W_{3,2} - W_{2,2} + W_{5,3} - W_{3,3} + W_{5,1} - W_{3,1}$$

$$Q_{x_{2,3}} = W_{5,3} - 4W_{4,3} + 4W_{2,3} - W_{1,3} + W_{4,4} - W_{2,4} + W_{4,2} - W_{2,2}$$

$$Q_{x_{4,3}} = W_{6,3} - 4W_{5,3} + 4W_{3,3} - W_{2,3} + W_{5,4} - W_{3,4} + W_{5,2} - W_{3,2}$$

$$Q_{x,4,4} = W_{6,4} - 4W_{5,4} + 4W_{3,4} - W_{2,4} + W_{5,5} - W_{3,5} + W_{5,3} - W_{3,3}$$

$$Q_{x,5,5} = W_{7,5} - 4W_{6,5} + 4W_{4,5} - W_{3,5} + W_{6,6} - W_{4,6} + W_{6,4} - W_{4,4}$$

$$Q_{x,5,0} = W_{7,0} - 4W_{6,0} + 4W_{4,0} - W_{3,0} + W_{6,1} - W_{4,1} + W_{6,-1} - W_{4,-1}$$

$$Q_{x,5,1} = W_{7,1} - 4W_{6,1} + 4W_{4,1} - W_{3,1} + W_{6,2} - W_{4,2} + W_{6,0} - W_{4,0}$$

$$Q_{x,5,2} = W_{7,2} - 4W_{6,2} + 4W_{4,2} - W_{3,2} + W_{6,3} - W_{4,3} + W_{6,1} - W_{4,1}$$

$$Q_{x,5,3} = W_{7,3} - 4W_{6,3} + 4W_{4,3} - W_{3,3} + W_{6,4} - W_{4,4} + W_{6,2} - W_{4,2}$$

$$Q_{x,5,4} = W_{7,4} - 4W_{6,4} + 4W_{4,4} - W_{3,4} + W_{6,5} - W_{4,5} + W_{6,3} - W_{4,3}$$

$$Q_{y,m,n} = -\frac{z_0 a}{2k} \left[ W_{m,n+2} - 4W_{m,n+1} + 4W_{m,n-1} - W_{m,n-2} + W_{m+1,n+1} - W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n+1} - W_{m-1,n-1} \right]$$

$$Q_{y,0,0} = W_{0,2} - 4W_{0,1} + 4W_{0,-1} - W_{0,-2} + W_{1,1} - W_{1,-1} + W_{-1,1} - W_{-1,-1}$$

$$Q_{y,1,0} = W_{0,3} - 4W_{0,2} + 4W_{0,0} - W_{0,-1} + W_{1,2} - W_{1,0} + W_{-1,2} - W_{-1,0}$$

$$Q_{y,2,0} = W_{0,4} - 4W_{0,3} + 4W_{0,1} - W_{0,0} + W_{1,3} - W_{1,1} + W_{-1,3} - W_{-1,1}$$

$$Q_{y,3,0} = W_{0,5} - 4W_{0,4} + 4W_{0,2} - W_{0,1} + W_{1,4} - W_{1,2} + W_{-1,4} - W_{-1,2}$$

$$Q_{y,4,0} = W_{0,6} - 4W_{0,5} + 4W_{0,3} - W_{0,2} + W_{1,5} - W_{1,3} + W_{-1,5} - W_{-1,3}$$

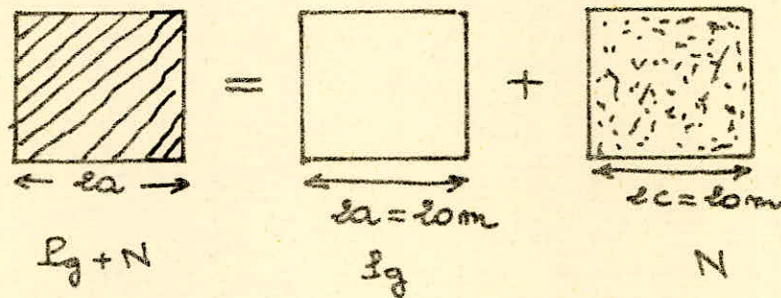
$$Q_{y,1,1} = W_{0,3} - 4W_{0,2} + 4W_{0,0} - W_{0,-1} + W_{2,2} - W_{2,0} + W_{0,2} - W_{0,0}$$



$$\begin{aligned}
Q_{y,1} &= W_{1,4} - 4W_{1,3} + 4W_{1,1} - W_{1,0} + W_{2,3} - W_{2,1} + W_{0,3} - W_{0,1} \\
Q_{y,3,1} &= W_{1,5} - 4W_{1,4} + 4W_{1,2} - W_{1,1} + W_{2,4} - W_{2,2} + W_{0,4} - W_{0,2} \\
Q_{y,4,1} &= W_{1,6} - 4W_{1,5} + 4W_{1,3} - W_{1,2} + W_{2,5} - W_{2,3} + W_{0,5} - W_{0,3} \\
Q_{y,2,2} &= W_{2,4} - 4W_{2,3} + 4W_{2,1} - W_{2,0} + W_{3,3} - W_{3,1} + W_{1,3} - W_{1,1} \\
Q_{y,3,2} &= W_{2,5} - 4W_{2,4} + 4W_{2,2} - W_{2,1} + W_{3,4} - W_{3,2} + W_{1,4} - W_{1,2} \\
Q_{y,4,2} &= W_{2,6} - 4W_{2,5} + 4W_{2,3} - W_{2,2} + W_{3,5} - W_{3,3} + W_{1,5} - W_{1,3} \\
Q_{y,3,3} &= W_{3,5} - 4W_{3,4} + 4W_{3,2} - W_{3,1} + W_{4,5} - W_{4,3} + W_{2,4} - W_{2,2} \\
Q_{y,4,3} &= W_{3,6} - 4W_{3,5} + 4W_{3,3} - W_{3,2} + W_{4,5} - W_{4,3} + W_{2,5} - W_{2,3} \\
Q_{y,4,4} &= W_{4,6} - 4W_{4,5} + 4W_{4,3} - W_{4,2} + W_{5,5} - W_{5,3} + W_{3,5} - W_{3,3} \\
Q_{y,5,5} &= W_{5,7} - 4W_{5,6} + 4W_{5,4} - W_{5,3} + W_{6,6} - W_{6,4} + W_{4,6} - W_{4,4} \\
Q_{y,5,0} &= W_{0,7} - 4W_{0,6} + 4W_{0,4} - W_{0,3} + W_{1,6} - W_{1,4} + W_{-1,6} - W_{-1,4} \\
Q_{y,5,1} &= W_{1,7} - 4W_{1,6} + 4W_{1,4} - W_{1,3} + W_{2,6} - W_{2,4} + W_{0,6} - W_{0,4} \\
Q_{y,5,2} &= W_{2,7} - 4W_{2,6} + 4W_{2,4} - W_{2,3} + W_{3,6} - W_{3,4} + W_{1,6} - W_{1,4} \\
Q_{y,5,3} &= W_{3,7} - 4W_{3,6} + 4W_{3,4} - W_{3,3} + W_{4,6} - W_{4,4} + W_{2,6} - W_{2,4} \\
Q_{y,5,4} &= W_{4,7} - 4W_{4,6} + 4W_{4,4} - W_{4,3} + W_{5,6} - W_{5,4} + W_{3,6} - W_{3,4}
\end{aligned}$$

Dans l'étude du paraboloïde hyperbolique par la théorie de flexion, nous avons considérés deux cas de chargement de la coque.

1°. paraboloïde hyperbolique complètement chargé par la neige:  $\frac{c}{a} = 1$



$P_g$ : charge permanente = 218 Kg.  $N$ : charge neige = 20 Kg

$$\Rightarrow P_g + N = Z_0 = 238 = 0,24t$$

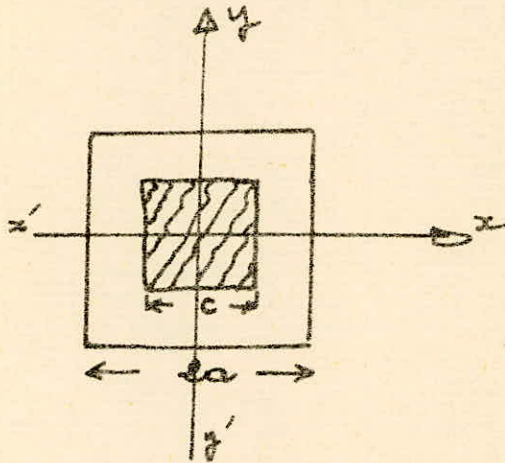
La combinaison de ces résultats suivant les équations données pour les efforts nous donnent:

$$\left. \begin{array}{l} N_{xy, m, n} = 3 t.m \\ N_x, m, n = 0 \\ N_y, m, n = 0 \\ M_{x, m, n} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} M_{y, m, n} = 0 \\ M_{xy, m, n} = 0 \\ Q_x, m, n = 0 \\ Q_y, m, n = 0 \end{array}$$

et on retrouve par ces résultats ceux donnés par la théorie de membrane - d'où la conclusion très importante: pour le cas du paraboloïde hyperbolique complètement chargé ( $\frac{c}{a} = 1$ ), la théorie de flexion donne exactement les mêmes résultats que la théorie de membrane.



2°/- le paraboléoïde hyperbolique à moitié chargé par la neige suivant le schéma suivant :



La surcharge due à la neige est répartie symétriquement par rapport aux axes  $x'x$  et  $y'y$  -

Pour ce cas on calculera les efforts causés par la neige dans la coque grâce aux résultats donnés par l'ordinateur pour  $\frac{c}{a} = 0,5$  - Ces efforts seront ajoutés à ceux causés par le poids propre  $P_g = 0,22t$  et calculés suivant les résultats donnés par l'ordinateur pour  $\frac{c}{a} = 1$  -

Tous ces efforts sont présentés dans les Tableaux suivants - A partir de ces efforts, nous avons tracés différents diagrammes dans différentes parties de la coque. Ces efforts ne sont pas très importants parceque la surcharge due à la neige est faible. ( $N = 20kg$ ) les moments que nous avons obtenus sont faibles et les efforts tranchants  $Q_{x,m,n}$  et  $Q_{y,m,n}$  sont très faibles -

$$\frac{c}{a} = 0,5$$

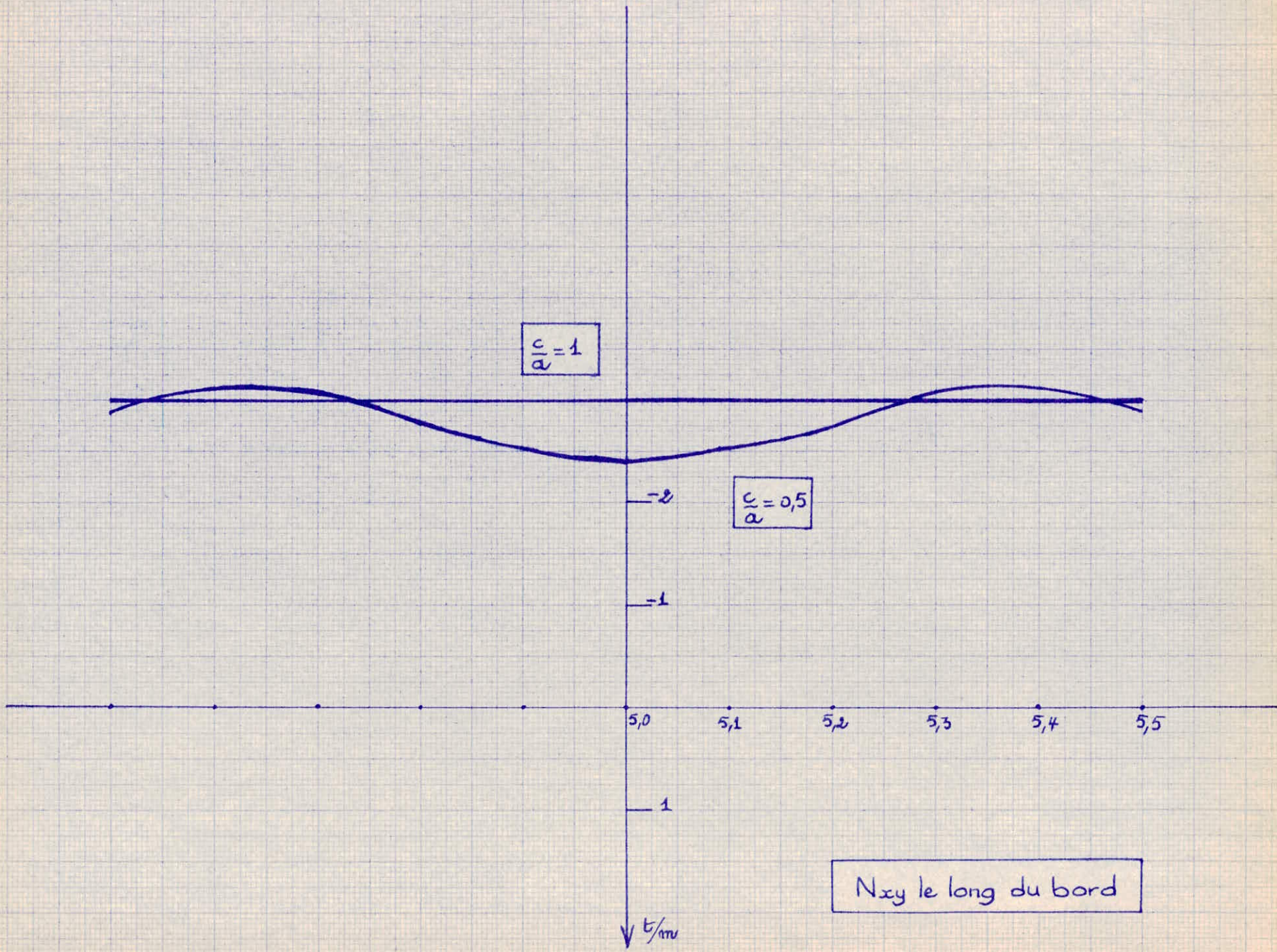
points	$M_x$	$M_y$	$M_{xy}$
0,0	0,00084	0,00084	0,000
1,0	0,00387	0,00895	0,000
2,0	0,00502	0,00187	0,000
3,0	-0,01062	-0,00037	0,000
4,0	0,00454	0,00347	0,000
1,1	0,00291	0,00291	0,00104
2,1	0,00535	0,00342	0,00112
3,1	-0,01048	0,00054	0,00479
4,1	0,00252	0,00351	-0,00809
2,2	0,00551	0,00551	-0,00467
3,2	-0,00861	0,00068	-0,00161
4,2	-0,00381	0,00040	-0,01774
3,3	-0,00718	-0,00718	-0,00301
4,3	-0,01095	-0,00765	-0,00946
4,4	-0,01175	-0,01175	-0,02410
5,5	0,000	0,000	0,000
5,0	-0,00174	-0,00029	0,000
5,1	0,00105	0,00017	0,000
5,2	0,01021	0,00170	0,0000
5,3	0,02152	0,00358	0,000
5,4	0,02084	0,00347	0,000



$$\frac{c}{a} = 0,5$$

points	Nxy	Nx	Ny
0,0	-2,99805	0,000	0,000
1,0	-2,98796	0,000	0,000
2,0	-2,92905	0,000	0,000
3,0	-2,83320	0,000	0,000
4,0	-2,63659	0,000	0,000
1,1	-2,98031	-0,21980	-0,21980
2,1	-2,91964	-0,33360	-1,06430
3,1	-2,81309	-0,63030	-1,0251
4,1	-2,65105	-1,21050	-3,26110
2,2	-2,86147	-2,31160	-2,31160
3,2	-2,76710	-3,18970	-2,33370
4,2	-2,73866	-3,43890	-4,73140
3,3	-2,73690	-3,01450	-3,01450
4,3	-2,88090	-2,52210	-2,51170
4,4	-3,00770	1,73780	1,73780
5,5	-2,98560	0,000	0,000
5,0	-2,48700	0,000	0,000
5,1	-2,54260	0,000	0,000
5,2	-2,75580	0,000	0,000
5,3	-3,0293	0,000	0,000
5,4	-3,06530	0,000	0,000





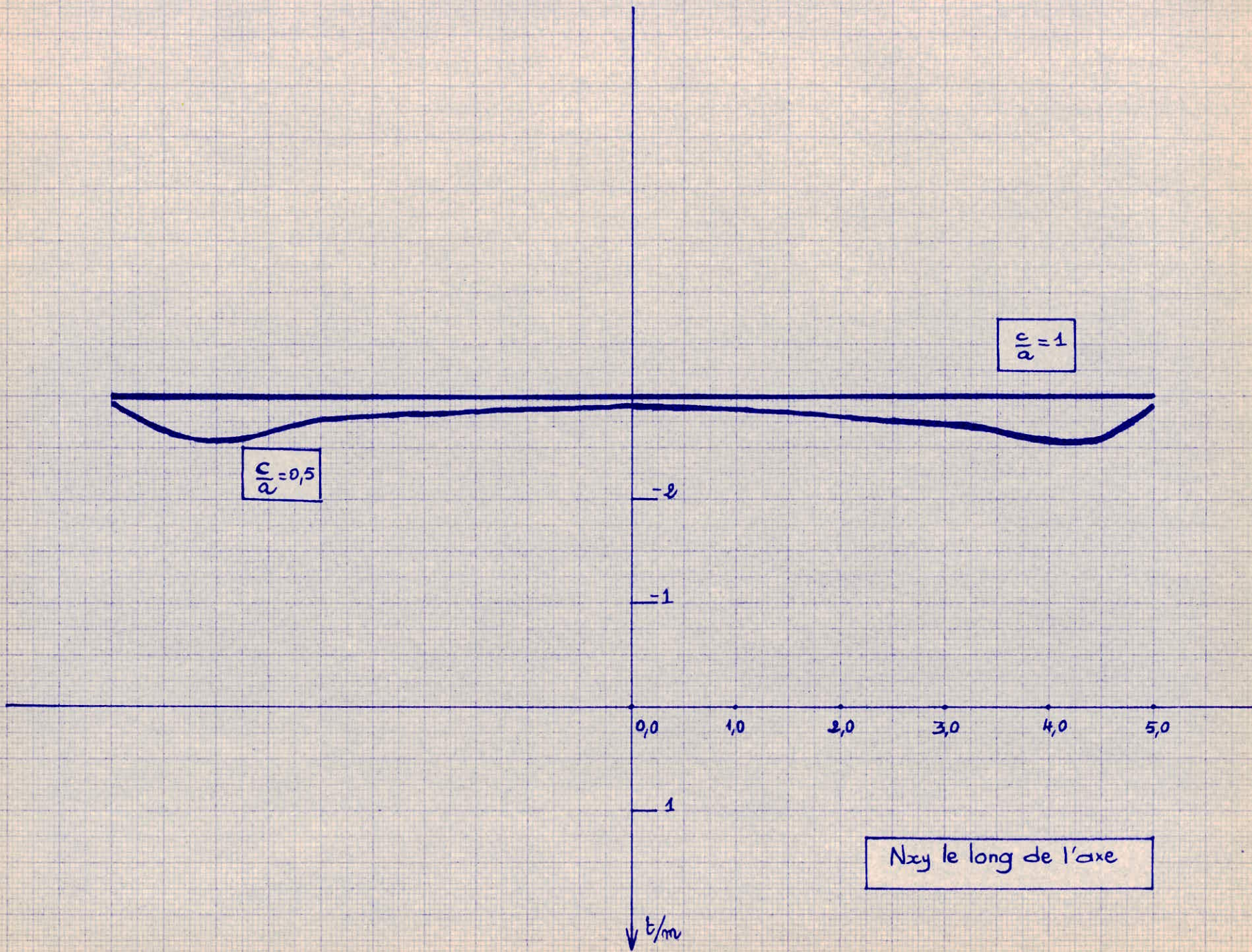
$$\frac{c}{a} = 1$$

$$\frac{c}{a} = 0,5$$

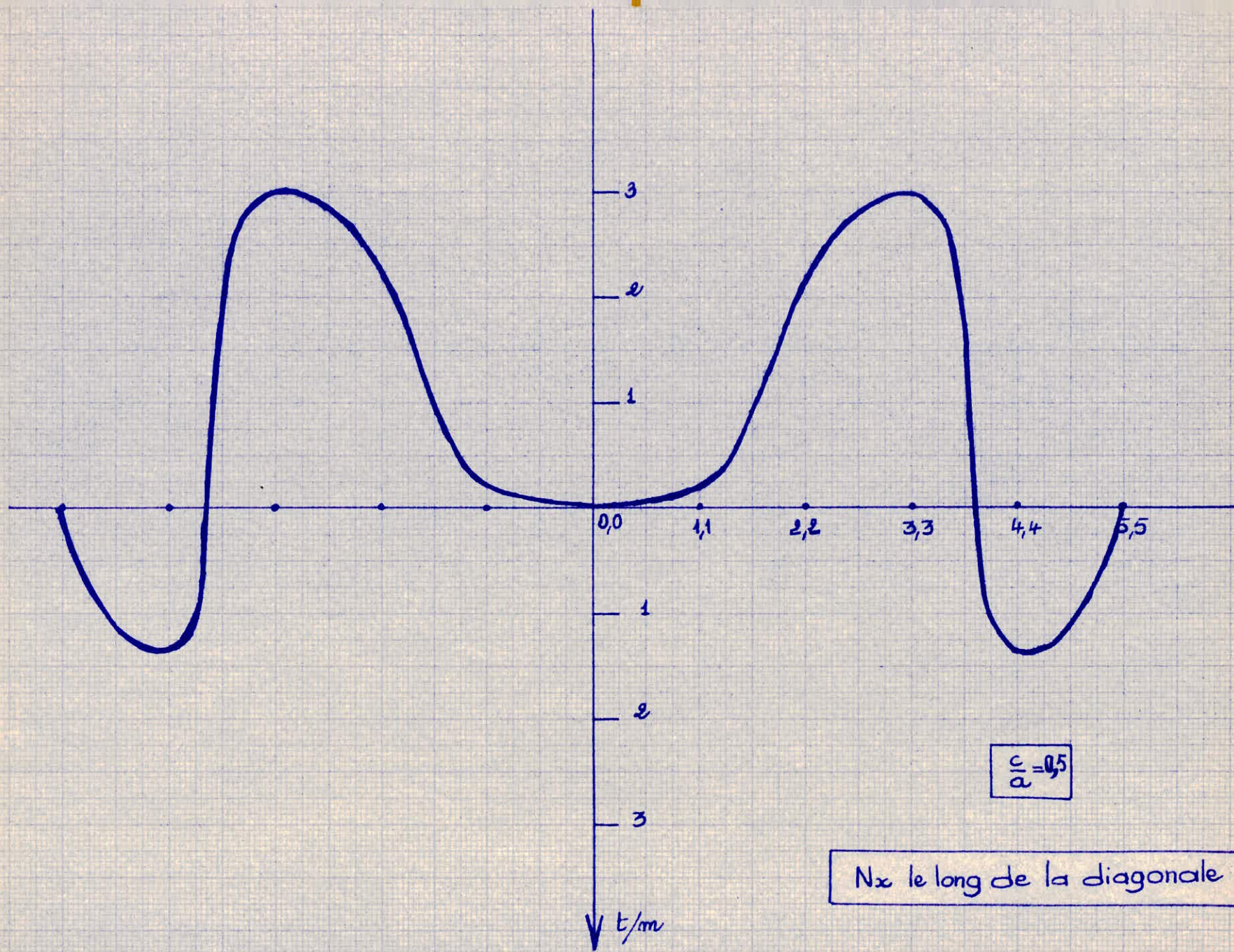
Nxy le long du bord

$\frac{t}{m}$

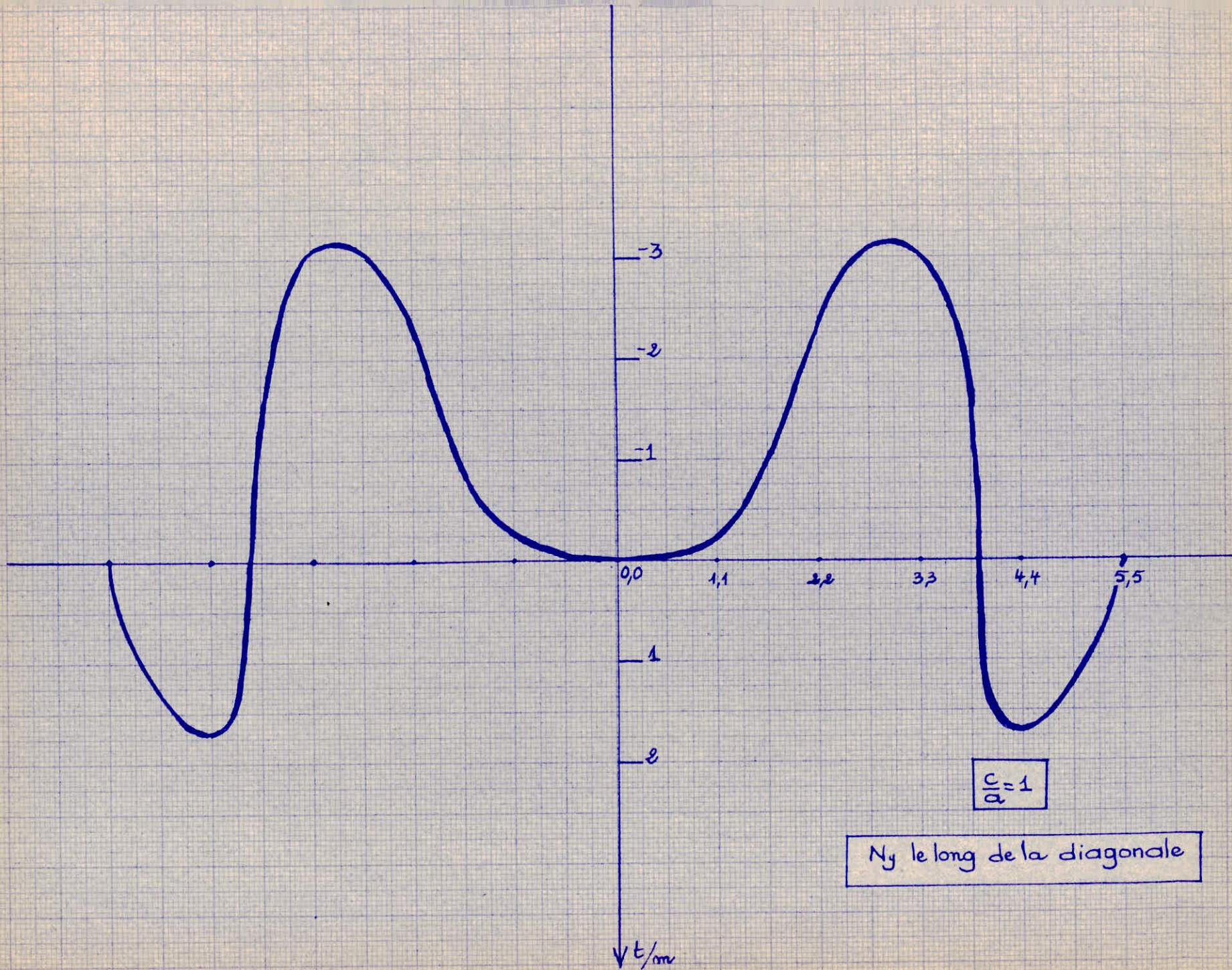




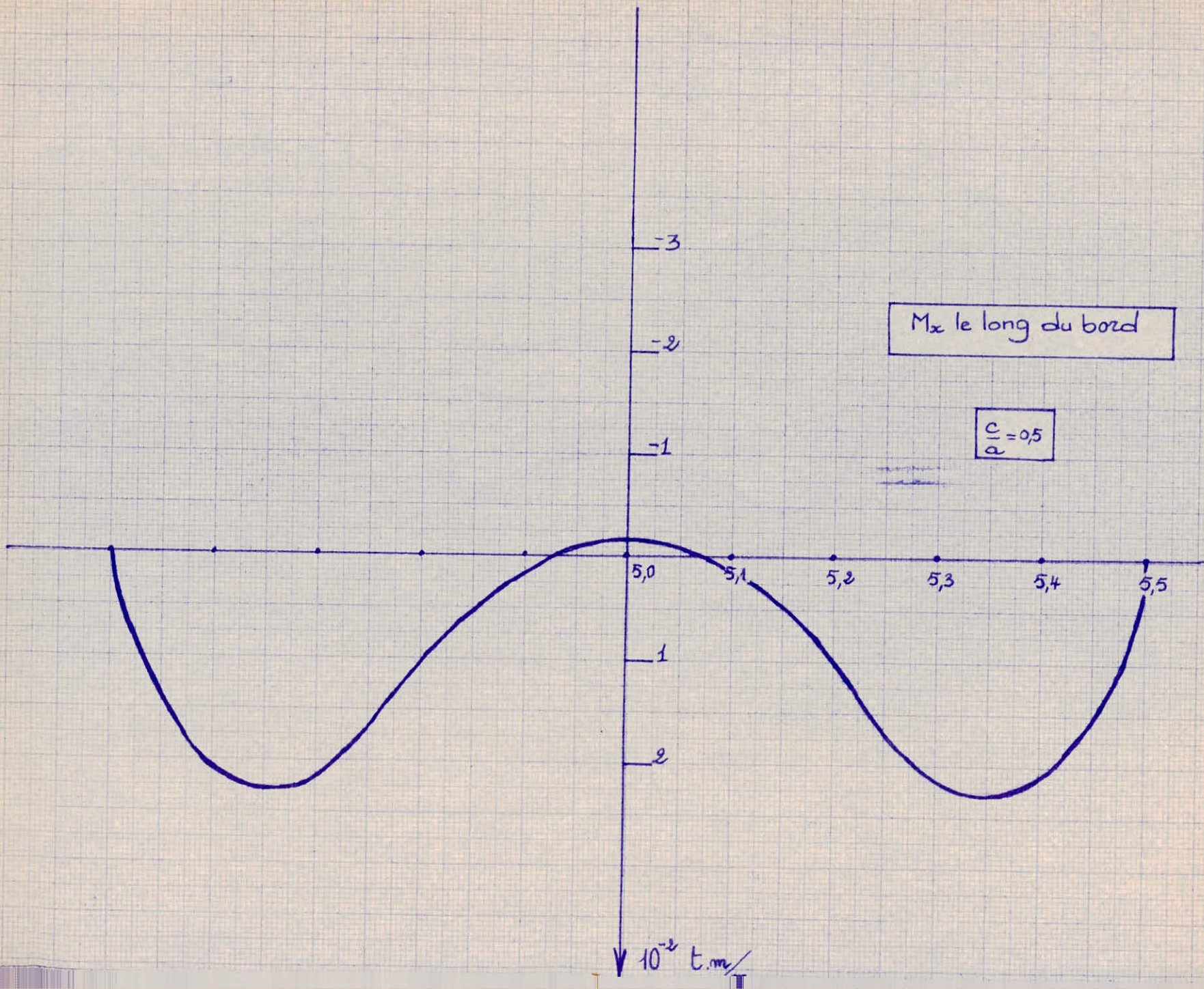




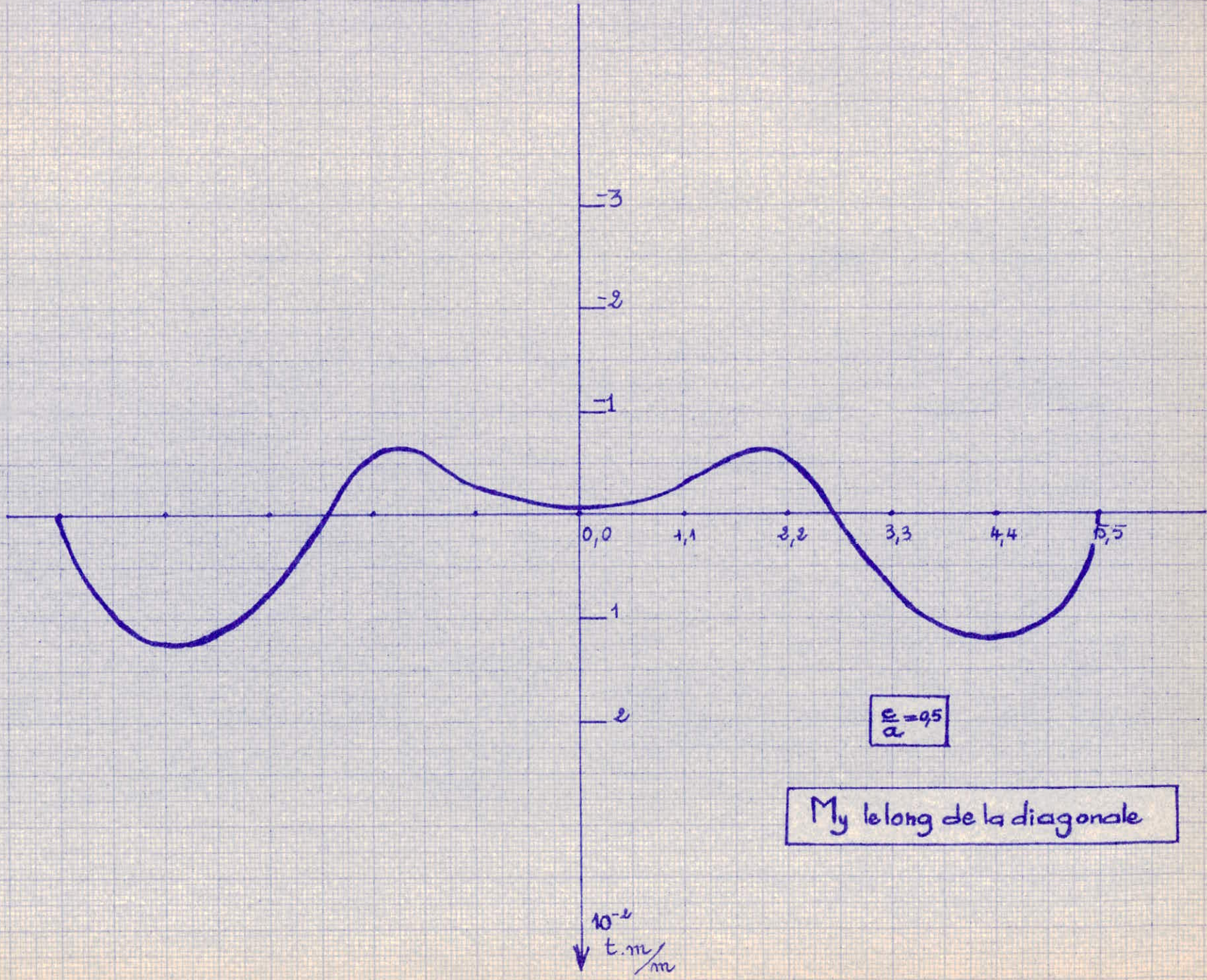




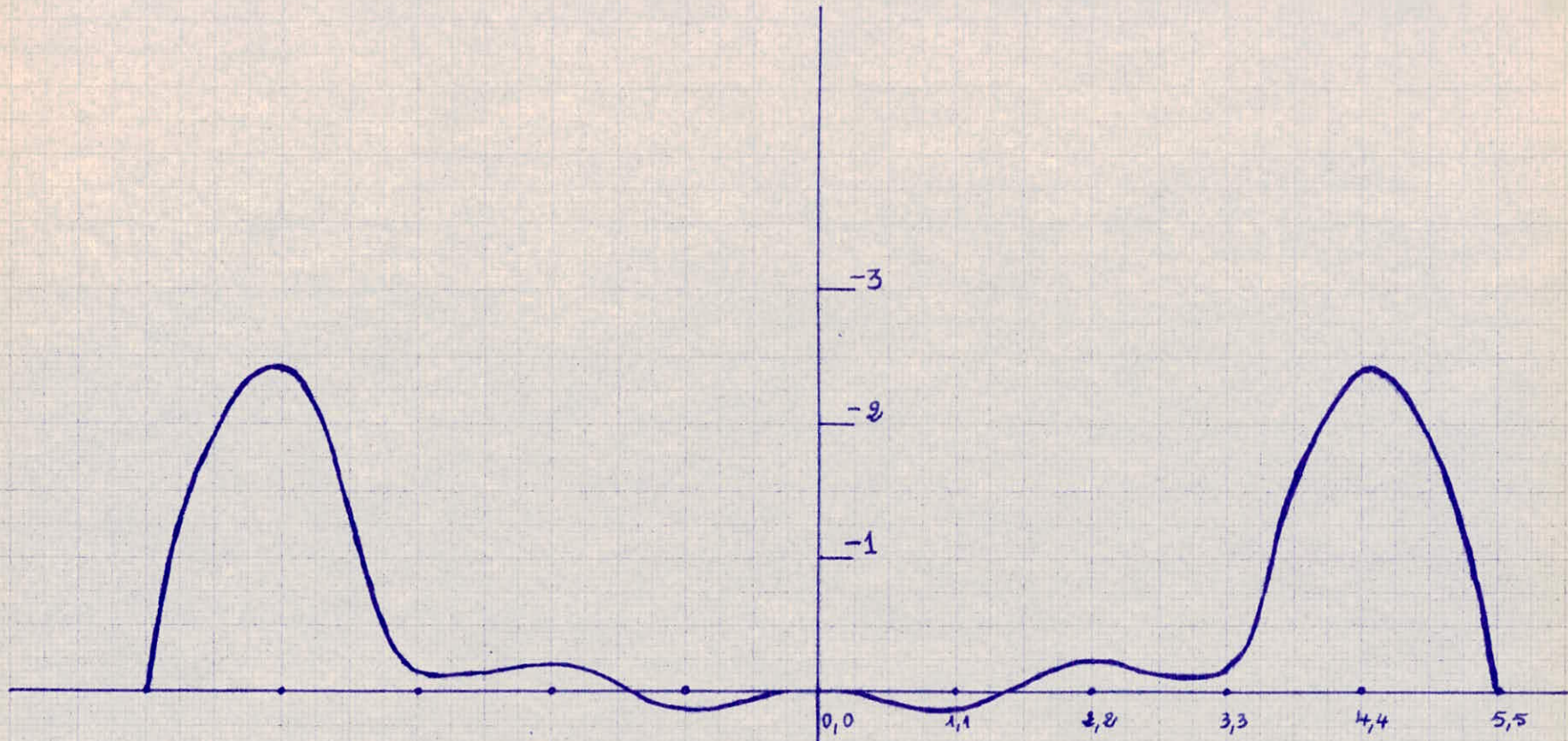












$$\frac{c}{a} = 0,5$$

Mxy le long de la diagonale

$10^{-2}$   
t.m/cm



## II.4 Calcul du Portique Central

Nous considérerons le portique central 2-5-8.  
les charges qui s'exercent sur ce portique sont :

⊙ - le poids propre qui varie de :

$$0,5 \times 1,2 \times 2,5 = 1,5 \text{ t au niveau de l'encastrement}$$

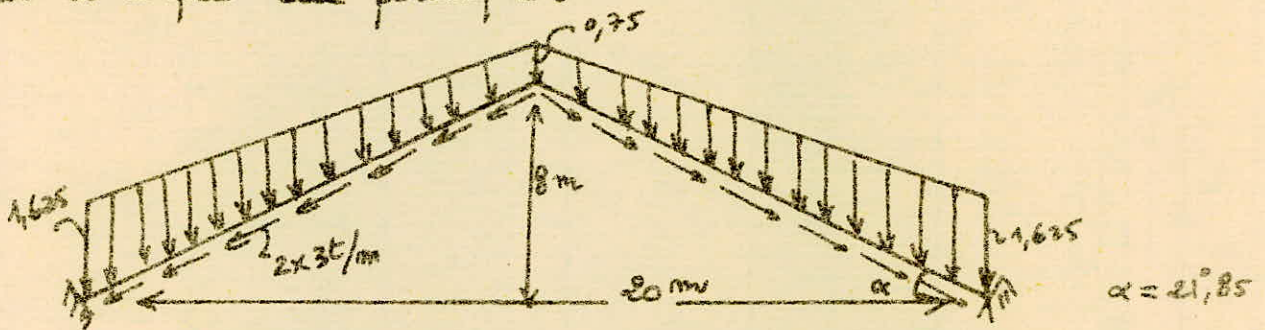
$$\tilde{\alpha} \quad 0,5 \times 0,5 \times 2,5 = 0,625 \text{ au niveau du sommet.}$$

$$\tilde{\alpha} \quad \text{le poids on doit ajouter } 0,05 \times 2,5 = 0,125 \text{ t/m}$$

due à la variation de l'épaisseur de la coque

au niveau du portique central.

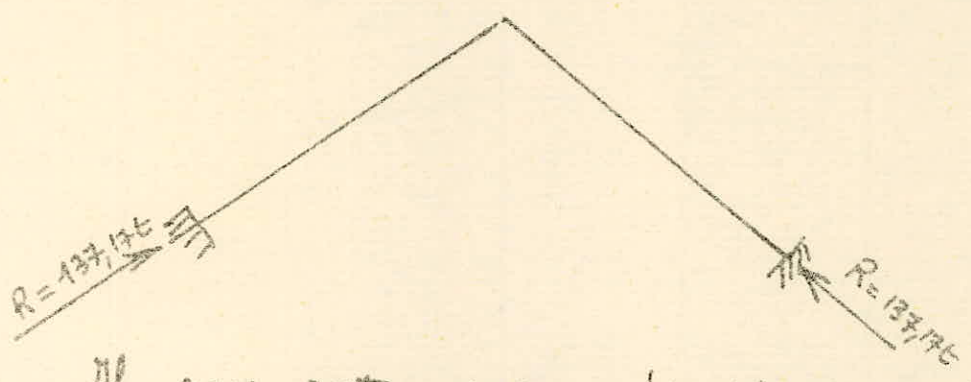
⊙ les charges tangentielle Nuy transmises par la coque au portique.



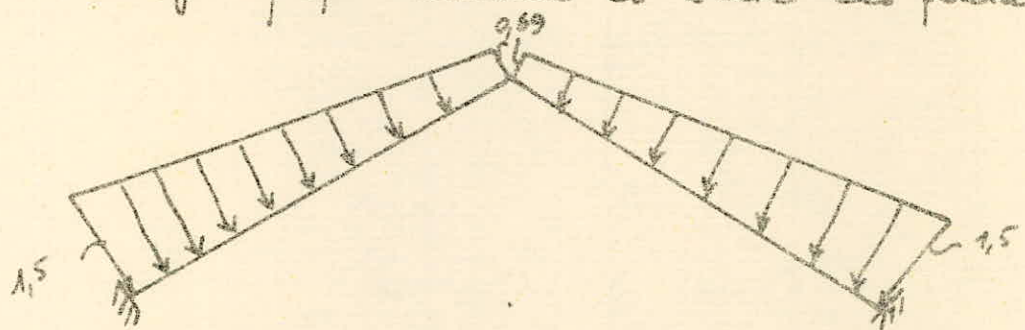
La section du portique varie de  $0,50 \times 1,20 \text{ m}^2$  au niveau de l'encastrement à  $0,50 \times 0,50$  au niveau du sommet. C'est donc un portique à Inertie variable.

les charges verticales qui s'exercent sur le portique peuvent être décomposés suivant des charges perpendiculaires à l'axe de la poutre du portique et des charges tangentielle - finalement les charges tangentielle cheminent vers les Appuis sans soulever de moments - la réaction Totale qu'ils créent est

égale à :  $R = 137,17 t$ .



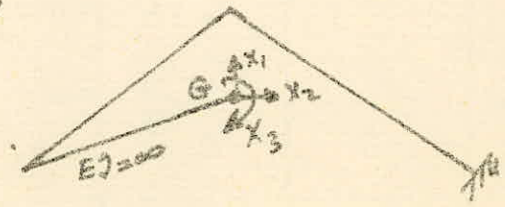
Il nous reste ainsi à étudier le portique avec les charges perpendiculaires à l'axe des poutres.



Dans un portique pareil, le nombre d'inconnues est égal à 3 =  $X_1, X_2$  et  $X_3$  - Le système des équations canoniques employé pour le calcul d'un tel portique ont la forme :

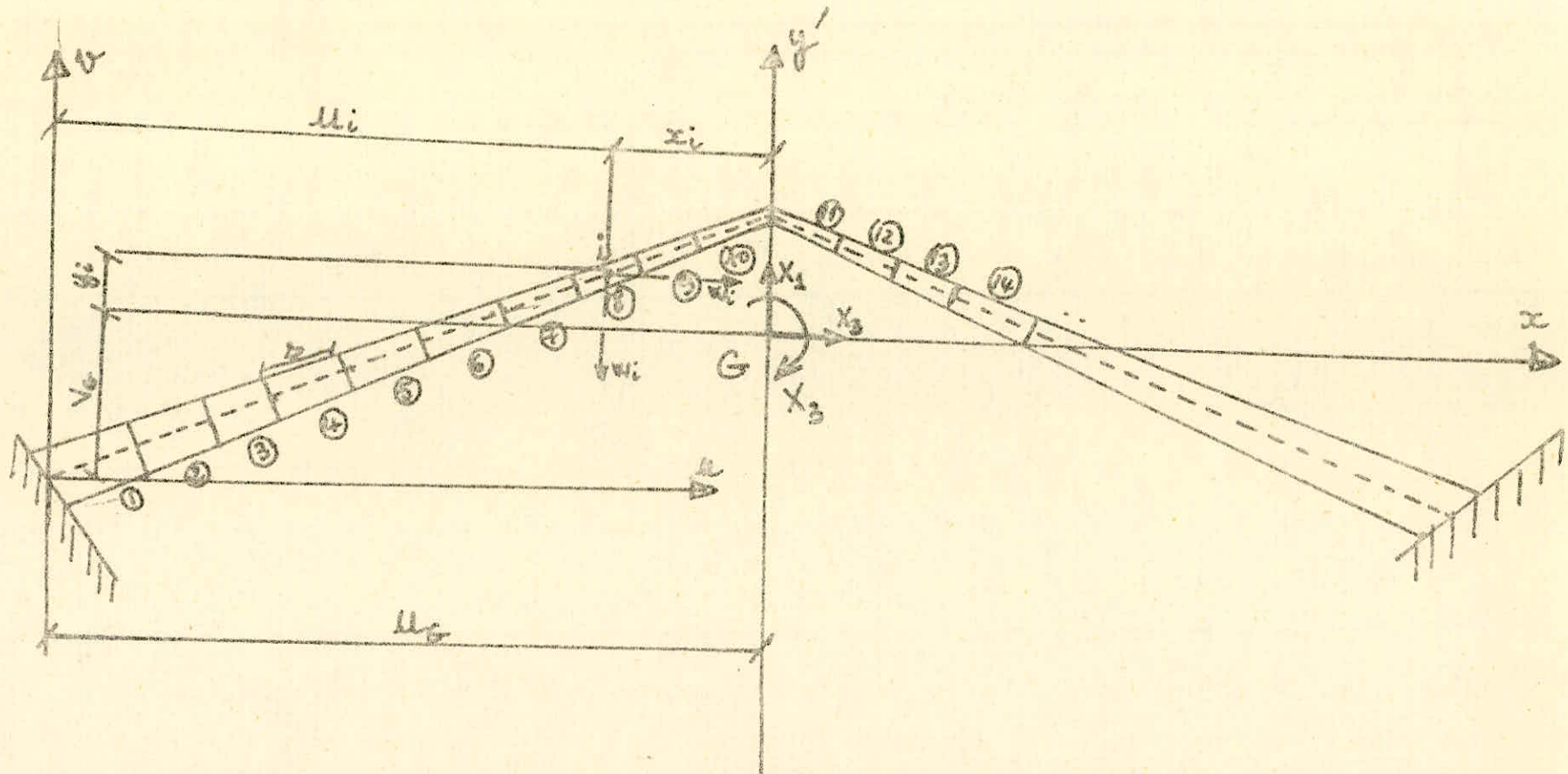
$$\begin{aligned}
 X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0 \\
 X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0 \\
 X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0
 \end{aligned}$$

or on peut réduire à zéro tous les coefficients secondaires du système d'équations canoniques par le choix du système principal qui sera comme suit (fig ci-dessous) :









$$u_G = \frac{w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3 + \dots}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots} = \frac{\sum w_i u_i}{\sum w_i}$$

$$v_G = \frac{w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots}{w_1 + w_2 + \dots} = \frac{\sum w_i v_i}{\sum w_i}$$



N°	$s_i$	$b_i$	$d_i$	$\eta_i$	$u_i = \frac{I_c}{I_i} s_i$	$u_i$	$u_i u_i$	$u_i$	$u_i u_i$
1	2	0,5	1,167	$6,58 \cdot 10^{-2}$	$30,15 \cdot I_c$	0,934	$28,3 \cdot I_c$	0,35	10,74
2	2	"	1,101	$5,55 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot I_c$	2,8	$100,9 I_c$	1,07	38,5
3	2	"	1,036	$4,62 \cdot 10^{-2}$	$43,3 \cdot I_c$	4,67	$202,2 I_c$	1,78	77,2
4	2	"	0,97	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$52,6 \cdot I_c$	6,54	$344 I_c$	2,49	152,5
5	2	"	0,904	$3,08 \cdot 10^{-2}$	$64,9 \cdot I_c$	8,41	$546 I_c$	3,21	208,3
6	2	"	0,84	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$80,9 \cdot I_c$	10,27	$840 I_c$	3,92	317,2
7	2	"	0,774	$1,935 \cdot 10^{-2}$	$103,5 \cdot I_c$	12,14	$1258 I_c$	4,63	480
8	2	"	0,708	$1,48 \cdot 10^{-2}$	$135 \cdot I_c$	14	$1890 I_c$	5,34	720
9	2	"	0,643	$1,105 \cdot 10^{-2}$	$181 \cdot I_c$	15,87	$2870 I_c$	6,05	1090
10	3,30	"	0,555	$0,708 \cdot 10^{-2}$	$282,5 \cdot I_c$	18,35	$5175 I_c$	7	1977
11	3,30	"	0,555	$0,708 \cdot 10^{-2}$	$282,5 \cdot I_c$			7	1977
12	2	"	0,643	$1,105 \cdot 10^{-2}$	$181 \cdot I_c$			6,05	1090
13	2	"	0,708	$1,48 \cdot 10^{-2}$	$135 \cdot I_c$			5,34	720
14	2	"	0,774	$1,935 \cdot 10^{-2}$	$103,5 \cdot I_c$			4,63	480
15	2	"	0,84	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$80,9 \cdot I_c$			3,92	317,2
16	2	"	0,904	$3,08 \cdot 10^{-2}$	$64,9 \cdot I_c$			3,21	208,3
17	2	"	0,97	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$52,6 \cdot I_c$			2,49	152,5
18	2	"	1,076	$4,62 \cdot 10^{-2}$	$43,3 \cdot I_c$			1,78	77,2
19	2	"	1,101	$5,55 \cdot 10^{-2}$	$36 \cdot I_c$			1,07	38,5
20	2	"	1,167	$6,58 \cdot 10^{-2}$	$30,15 \cdot I_c$			0,35	10,74



Tableau (B)

$N_i$	$w_i$	$x_i$	$y_i$	$w_i x_i$	$w_i y_i$	$M_p$	$M_p w_i$	$M_p w_i y_i$	$M_p w_i x_i$	$w_i y_i$	$w_i x_i$
1	30,15	-19,66	-4,62	-592	-139,29	-0,698	-21,04	97,22	+413,21	643,52	11638,72
2	36	-17,20	-3,9	-619	-140,4	-6,08	-218,88	853,63	+3763,52	547,56	10646,8
3	43,3	-15,33	-3,19	-664	-138,12	-16,56	-717,05	2287,26	+10995,84	440,6	10179,12
4	52,6	-13,46	-2,48	-707	-130,45	-31,92	-1679	4163,96	+22567,44	223,51	9516,22
5	64,9	-11,49	-1,76	-744	-114,22	-51,60	-3348,84	5893,75	+38390,4	801,02	8548,56
6	80,9	-9,73	-1,05	-787	-84,94	-75,54	-8111,18	6416,36	+59449,98	89,18	7657,51
7	103,5	-7,86	-0,34	-812,5	-35,19	-103,56	-10718,46	3644,27	+84142,5	11,96	6386,25
8	135	-6	0,37	-810	49,95	-134,92	-18214,2	-6739,25	+109285,2	18,48	4860,0
9	181	-4,13	1,08	-748	195,48	-170,07	-30782,7	-33241,37	+127212,36	211,11	3089,24
10	282,5	-1,65	2,03	-466	573,47	-219,93	-62130,22	-126123,25	+102487,38	1164,14	768,9
11	282,5	+1,65	2,03	466	573,47	-282,47	-79777,77	-161988,07	-131631,02	1164,14	768,9
12	181	4,13	1,08	748	195,48	-329,86	-59704,66	-64481,03	-246735,28	211,11	3089,24
13	135	6	0,37	810	49,95	-367,09	-49557,15	-18336,14	-297342,9	18,48	4860,0
14	103,5	7,86	-0,34	812,5	-35,19	-408,64	-42294,24	+14380,04	-332020,0	11,96	6386,25
15	80,9	9,73	-1,05	787	-84,94	-451,66	-36539,29	+38364,00	-335956,42	89,18	7657,51
16	64,9	11,49	-1,76	744	-114,22	-499,71	-32431,17	57076,87	-371784,24	801,02	8548,56
17	52,6	13,46	-2,48	707	-130,45	-522,96	-27507,7	+68220,13	-369732,72	223,51	9516,22
18	43,3	15,33	-3,19	664	-138,12	-609,4	-26387,02	+84170,32	-404647,6	440,6	10179,12
19	36	17,20	-3,9	619	-140,4	-672,46	-24197,76	+94371,26	-416067,04	547,56	10646,8
20	30,15	19,66	-4,62	592	-139,29	-742,29	-22383,06	+103407,5	-439494,88	643,52	11638,72
		$\Sigma$ 2019,7					$\Sigma M_p w_i$ = -5597,414		$\Sigma$ = -2.709.704,27		$\Sigma$ = 149.582,64
								$\Sigma$ = 68.437,46			8902,26



le Tableau (A), donne la position du centre élastique:  $x = 4,97 \text{ m}$   $y = 0$

le Tableau (B) donne les valeurs de  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  au niveau du centre élastique:

$$X_1 = 18,2 \text{ t}$$

$$X_2 = -7,52 \text{ t} \quad \text{et} \quad X_3 = 276,38 \text{ t.m.}$$

Ces efforts ramenés à l'encastrement donnent:

$$M_1 = 123 \text{ t.m.}, \quad V = 18,1 \text{ t} \quad \text{et} \quad H = 7,52 \text{ t.}$$

de plus la section au niveau de l'encastrement sera soumise à un effort normal égal à:

$$N = 137,17 \text{ t.}$$

or l'effort  $N_1 = 127,8 \text{ t}$  crée un moment au niveau de l'encastrement égal à:

$$M' = N_1 \times 0,24 = 30,7 \text{ t.m.}$$

Ce moment est dû au fait que la cage garde une distance constante du bord supérieur de la poutre égale à 30 cm. D'où le moment résultant au niveau de l'encastrement sera égal à:

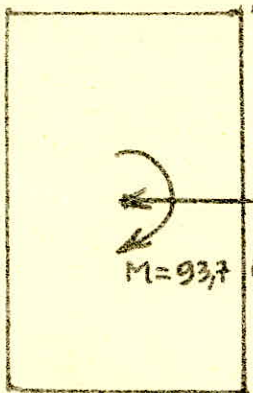
$$M = 123 - 30,7 = 93,7 \text{ t.m.}$$

Le diagramme des moments résultants pour toutes les sections du portique a été tracé. (voir fig II.a)

Ainsi la section d'encastrement  $50 \times 120 \text{ cm}^2$  est soumise à un effort de Compression  $N' = 137,17 \text{ t}$ , à un moment  $M = 93,7 \text{ t.m}$  et à un effort Tranchant de  $16,75 \text{ t}$ .

- Calcul du ferrillage du portique.

Au niveau ② de la section d'encastrement on a un moment  $M = 93,7 \text{ t.m}$ , un effort Normal  $N = 137,17 \text{ t}$  et un effort tranchant  $T = 16,35 \text{ t}$ . les dimensions de la section sont :  $120 \times 50 \text{ cm}^2$ .



la section est partiellement comprimée

$$e = \frac{M}{N} = \frac{93,7}{137,17} = 0,67 \text{ m} > \frac{120}{6} = 0,2$$

⇒ le moment fictif  $M_f$  est égal à :

$$M_f = M + Ne = 93,7 + 137,17 \times 0,67$$

$$M_f = 185,4 \text{ t.m}$$

$$\Rightarrow \mu' = \frac{185,4 \times 15 \cdot 10^5}{2667 \times 50 \times (110)^2} = 0,174 \Rightarrow k = 17.$$

$$\sigma_b' = \frac{2800}{17} = 164,6 \text{ bars} > 135 \text{ bars.}$$

⇒ on doit utiliser des armatures comprimées.

$$\text{d'où : } \mu = \frac{185,4 \cdot 10^5}{2800 \times 50 \times (110)^2} = 0,011 \rightarrow k = 13$$

avec  $k = 13$  les Tableaux donnent :

$$\alpha = 0,5357 ; \epsilon = 0,8214 ; \mu = 0,22 ; \mu' = 0,253$$

et  $\bar{\omega}' = 2,06$ .

$$\Rightarrow \sigma_a = 2800 \text{ et } \sigma_a' = \frac{15(0,535 - 0,1) \cdot 135}{0,535} = 1650 \text{ bars}$$

$$\text{d'où : } M_0 = 0,22 \times 50 \times (110)^2 \cdot 135 = 165,4 \text{ t.m.}$$

$$\Rightarrow \Delta M = 185,4 - 165,4 = 20 \text{ t.m} \Rightarrow A' = \frac{20 \cdot 10^5}{1,60 \times 1,65 \cdot 10^5} = 12,6 \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \phi 20 \text{ TOR}$$



ainsi la section d'armatures comprimées est  
constituée de  $4 \phi 20$ .

La section d'armatures tendues est égale à :

$$A = \frac{15 \times 2 \times 50 \times 10^5}{15 \times 100} + \frac{20 \cdot 10^5}{1,05 \cdot 2,8} - \frac{137,17}{-2,8} = 58,8 \text{ cm}^2$$

A  $\rightarrow$  12  $\phi$  25 TOR

Les armatures sont placées suivant le plan de  
ferraillage - (voir plan de ferraillage du portique).  
La même méthode de calcul est utilisée pour le  
calcul du ferraillage dans différentes sections du  
portique. C'est ainsi que la section ⑤ doit être  
ferraillée avec 2  $\phi$  25 TOR comme armatures tendues.  
(voir plan de ferraillage).

### Calcul de la poutre de Rive :

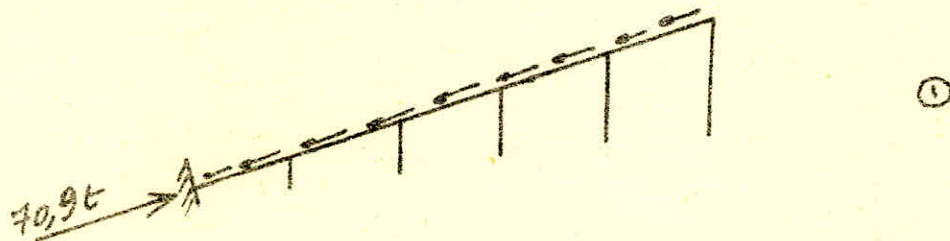
La poutre de Rive, telle qu'elle a été représentée dans le plan de coffrage est une poutre encastree d'un cote et reposant sur les poteaux de façades.

C'est donc une poutre continue à Inertie variable.

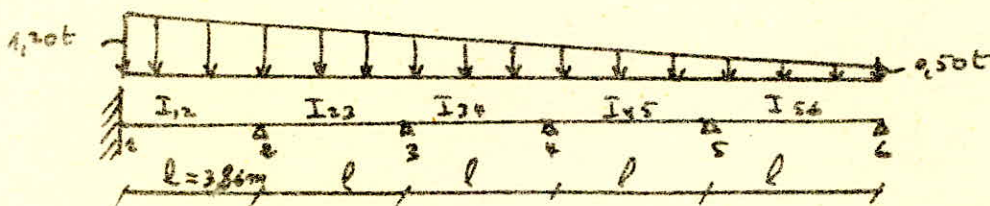
La section au niveau de l'encastrement est de  $0,40 \times 1,20 \text{ m}^2$ .

au niveau du sommet la section est égale à :  $0,40 \times 0,50 \text{ m}^2$ .

les charges qui s'exercent sur cette poutre sont d'une part le poids propre et d'autre part les charges tangentielles produites par la coque. La même décomposition de charges peut être faite. Ici, comme pour le pontique :



et on aura à étudier la poutre soumise au chargement suivant :



on considèrera pour chaque travee l'inertie moyenne et on utilisera le théorème des 3 moments tel que :



$$\frac{M_{0l}}{I} + e \left( \frac{M_{0l}}{I} + \frac{P_0 l_0}{I_2} \right) + M_c \frac{l_1}{I_1} = -\frac{1}{4} \left( \frac{Pl^3}{I} + \frac{Rl_1^3}{I_1} \right)$$

Les moments d'inertie relatifs à chaque poutre sont :

$$I_{12} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$I_{45} = 1,223 \cdot 10^{-2}$$

$$I_{23} = 3,303 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

$$I_{56} = 0,643 \cdot 10^{-2}$$

$$I_{34} = 2,105 \cdot 10^{-2} \text{ m}^4$$

en écrivant les équations des 3 moments pour chaque barre, on aura finalement le système suivant :

$$4,5 M_1 + 0,90 \Pi_2 = -15,17$$

$$78,77 M_2 + 391,27 \Pi_2 + 116,86 \Pi_3 = -712,22$$

$$116,86 M_2 + 600,47 M_3 + 47,5 \Pi_4 = -946,36$$

$$183,37 M_3 + 997,98 \Pi_4 + 315,61 M_5 = -1326,68$$

$$315,61 \Pi_4 + 1831,85 \Pi_5 = -1983,76.$$

la résolution de ce système donne les valeurs suivantes pour les moments :

$$M_2 = -3,05 \text{ t.m} \quad (\text{moment d'encastrement})$$

$$\Pi_2 = -2,2 \text{ t.m}$$

$$\Pi_3 = -1,5 \text{ t.m}$$

$$\Pi_4 = -0,9 \text{ t.m}$$

$$\Pi_5 = -0,7 \text{ t.m}$$

les réactions d'appuis trouvées sont égales à :

$$R_1 = 2t \quad - \quad R_2 = 3,80t \quad - \quad R_3 = 3,4t \quad - \quad R_4 = 2,8t \quad - \quad R_5 = 2,4t$$

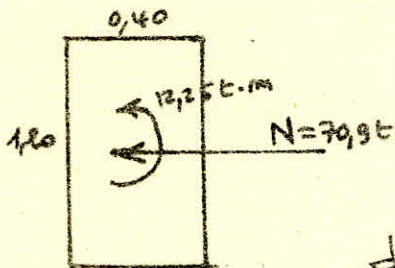
$$\text{et } R_6 = 1,16t.$$

le Diagramme des moments pour cette poutre continue a été tracé en tenant compte des moments créés

par les charges tangentielles transmises par la coque à la poutre. (voir fig. e. b) -

le moment résultant au niveau de l'encastrement est égal à :  $M = (68,9)(0,24) - 3,05 = 12,25 \text{ t.m}$

d'où la section au niveau de l'encastrement est soumise à  $M = 12,25 \text{ t.m}$ ,  $N = 70,9 \text{ t}$  et  $T = 0 \text{ t}$ .



calculons le ferrillage de cette section. on aura :

$$e = \frac{M}{N} = 0,17 < \frac{h_t}{6} = \frac{120}{6} = 0,20$$

d'où la section est entièrement

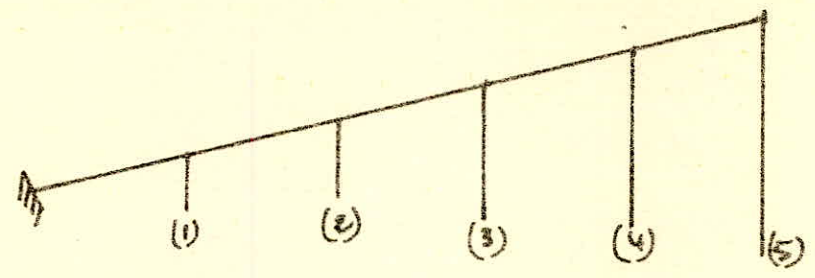
comprimée - le calcul qui a été effectué montre qu'on n'a pas besoin de mettre des armatures comprimées. Toutefois les règlements imposent 0,4% de la section du Béton en armatures en haut et en bas => on aura

à mettre :  $0,4 \times \frac{120 \times 40}{100} = 19,2 \text{ cm}^2$

c'est à dire 4  $\phi$  25 en haut et 4  $\phi$  25 en bas.

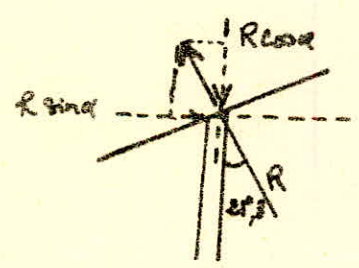


### Calcul des poteaux de façades:



Dans le calcul de la poutre de Rive nous avons déterminé les réactions aux appuis. Ces réactions constituent les forces qui agissent sur les poteaux. Comme la poutre de Rive est inclinée de  $21,85^\circ$  par rapport à l'horizontale,  $\Rightarrow$  chaque poteau est soumis en son sommet à une force horizontale et une force verticale. Ainsi le poteau (1) est soumis à

un effort de Compression :  $V = 3,8 \times 0,92$   
 $\Rightarrow V = 3,5t$   
 et un effort horizontal :  $H = 3,8 \times 0,37$   
 $\Rightarrow H = 1,4t$ .



$\Rightarrow$  au niveau de l'encastrement, le poteau (1) qui a une section  $0,40 \times 0,70 m^2$  sera soumis à un effort de Compression  $N = 3,5 + \text{poids propre} = 3,5 + 0,4 \times 0,7 \times 5 \times 2,5$   
 $N = 7t$

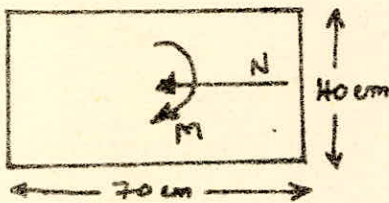
l'effort Horizontal  $H = 1,4$  donnera un moment  $M = 7t.m = 1,4 \times 5$ .

Tous les poteaux seront considérés comme étant articulés en haut et encastrés en pied.

la longueur de flambement du poteau (1) est égale à :  $l_c = 0,7 l_0 = 3,5 \text{ m}$ . son rayon de giration

$$\text{est : } i = \sqrt{\frac{b h^3}{12 b h}} = \sqrt{\frac{R^2}{12}} = \sqrt{\frac{1600}{12}} = 11,5 \text{ cm}$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{350}{11,5} = 30,5 < 35 \Rightarrow$  on doit étudier la section en flexion composée :  $M = 7 \text{ t.m}$  ;  $N = 7 \text{ t}$ .



$$e = \frac{M}{N} = \frac{7}{7} = 1 \text{ m} \Rightarrow$$

c'est une section partiellement comprimée.

le moment fictif par rapport aux

aciers tendus :  $e' = M + N \times 0,15 = 7 + 1,05 = 8,05 \text{ t.m}$

$$\Rightarrow \mu' = \frac{15 \cdot 8,05 \cdot 10^5}{2,8 \cdot 70 \cdot (3,6)^2 \cdot 10^5} = 0,049$$

les Tableaux donnent :  $k = 32,9 \Rightarrow$  la

sollicitation dans le béton est :  $\frac{2800}{32,9} = 85,1 < 135 \text{ bars}$ .

d'où il n'est pas nécessaire de placer des armatures de compression. les Tableaux donnent aussi :

$$\omega = 0,356 \Rightarrow A = \frac{0,356 \times 3,6 \times 70}{1,00} = \frac{7}{2,8} = 2,5 \text{ cm}^2$$

$\rightarrow 2 \phi 20$  pour le ferrillage de la section voir le plan de ferrillage.

Considérons maintenant le poteau (5). sa longueur est égale à :  $l = 13 \text{ m} \Rightarrow l_c = 0,7 \times 13 = 9,1 \text{ m}$

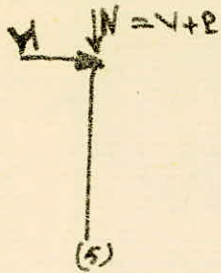
$$\Rightarrow \lambda = \frac{910}{11,5} = 79 \Rightarrow 50 < \lambda = 79 < 150$$

d'où on calcule l'éclatement fictif :  $\lambda'^2 = \lambda^2 + \frac{33.000}{1+0,6 \frac{e}{R_c}} \cdot \frac{e}{R_c}$

$\Rightarrow$  On calcule l'excentricité  $e$ . on a :  $V = 1,16 \times 0,92$

$$\Rightarrow V = \text{effort de compression} = 1,06 \text{ t}$$





$$H = 1,16 \times 0,37 = 0,43 \text{ t}$$

⇒ le moment au niveau de l'encastrement est égal à:  $M = 0,43 \times 13 = 5,58 \text{ t.m}$

à l'effort de Compression  $V$ , s'ajoute le

poide propre:

$$N = 1,06 + 0,4 \times 0,7 \times 2,5 \times 13 = 9,1 \text{ t.}$$

$$\Rightarrow e = \frac{M}{N} = \frac{5,58}{9,1} = 0,61 \text{ m} \Rightarrow \lambda' = 205$$

d'où on calcule la flèche donnée par les règlements:

$$f_c = \frac{8 \cdot (11,2)^2}{20} \cdot (2,3) \cdot 10^{-3} (205 - 50)^{3/2} = 0,92 \text{ m}$$

⇒ on calcule la section à la flexion composée

avec une excentricité  $e_1 = 0,61 + 0,92 = 1,53 \text{ m}$

d'où le moment sera:  $M = Ne_1 = 9,1 \times 1,53 = 13,9 \text{ t.m}$

$$\left| \begin{array}{l} M = 13,9 \text{ t.m} \\ N = 9,1 \text{ t.} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{M}{N} = \frac{13,9}{9,1} = 1,53 \text{ m} = e$$

d'où le moment fictif  $M_f$  est égal à:

$$M_f = 13,9 \times 9,1 \times 0,15 = 15,4 \text{ t.m}$$

$$\Rightarrow \mu' = \frac{15 \cdot 15,4 \cdot 10^5}{2,8 \cdot 70 \cdot (3,6)^2 \cdot 10^5} = 0,114$$

$$\Rightarrow k = 23 \Rightarrow \sigma'_b = \frac{2800}{23} = 121,5 < 135 \text{ bars}$$

⇒ pas besoin d'armatures comprimées -

les armatures tendues seront égales à:

$$A = \tilde{\omega} \frac{bh}{100} = 0,858 \times 3,6 \times 7 - \frac{9,1}{2,8} = 18,35 \text{ cm}^2$$

$$A \rightarrow 4 \phi 25 \text{ TOR.}$$

le ferrailage du poteau est représenté sur le plan de ferrailage -



Etude des poteaux d'Appuis :

Les poteaux d'Appui sont étudiés comme deux consoles encastées en pied au niveau des fondations et soumises en tête aux sollicitations suivantes :

1°/- le moment d'encastrement du portique central projeté suivant le plan de la section normale de la console + le moment causé par la réaction perpendiculaire au portique central divisé par deux + le moment causé par le bloc de béton constituant l'encastrement du portique et des poutres de rives =  $M_1$ .  
Ce moment  $M$  sera projeté suivant les 2 directions des poteaux d'Appuis et il donne pour chaque console un moment de flexion  $M$  égal à :

$$M_1 = \frac{93,3\sqrt{2}}{2} + (2,5)(1,2 \times 1,2 \times 0,5) \cdot 0,5 \frac{\sqrt{2}}{2} + 16,25 \times 0,5 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_1 = 70,05 \text{ t.m.}$$

Ainsi chaque poteau est constitué d'une console soumise à un moment  $M_1 = 70,05 \text{ t.m.}$

2°) l'effort de Compression  $K_1 = K' + K''$

avec  $K' = \sqrt{\frac{(145,53)^2}{2} + \frac{(70,9)^2}{2}} = 102,3 \text{ t.}$

$$K'' = \frac{7,52 \cos 21,85}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{16,25 \sin 21,85}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2,5}{2} \times 1,2 \times 1,2 \times \sin 21,85 + 2 \cos 21,85 = 8,1 \text{ t.}$$

⇒ :

$$K_1 = K' + K'' = 110,4 \text{ t.}$$



30). Un effort en tête de la console perpendiculaire à son axe :  $R = \frac{16,25}{2} = 8,1 + 1,8 \sin 21,85 = 8,7 \text{ t}$

40). le poids propre : Charge répartie verticalement qu'on se compose en deux :

$$\text{charge axiale : } 0,55 \times 4,85 = 2,7 \text{ t}$$

$$\text{Charge } \perp \text{ à l'axe : } 1,38 \text{ t/m.l.}$$

l'effort résultant  $K$  est égal à :  $K = 110,4 + 2,7 = 113,1 \text{ t}$

l'étude de la console sous les effets de chargement donne un moment d'encastrement total égal à :

$$M_1 = - \frac{(1,38)(4,85)^2}{2} - (8,7)(4,85) - 70,05 = -128,5 \text{ t.m}$$

une réaction  $R = 25,38 \text{ t}$  et un effort axial

$K = 113,1 \text{ t}$  - d'où en adoptant pour la semelle les dimensions  $L = 4 \text{ m}$ ,  $l = 3 \text{ m}$  et  $h = 2 \text{ m}$  et un Taux de Travail du sol de  $\bar{\sigma}_{sol} = 3 \text{ bars}$  et en ramenant tous les efforts au centre d'intersection de l'axe de la semelle avec celui de la console on aura :

$$M = 135,5 \text{ t.m} \quad K = 110,1 \text{ t.m} \quad R = 24 \text{ t.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M = 135,5 \text{ t.m} \\ N = 110,1 \sin 21,85 + 24 \approx 66 \text{ t.} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } e = \frac{M}{N} = \frac{135,5}{66 + 3 \times 4 \times 2 \times 2,5} = 1,07 \text{ m}$$

$\Rightarrow$  la contrainte maximum de compression sur le sol est égale à :



$$\sigma_{\text{sol}} = \frac{2 \times 126 \cdot 10^3}{3(9,3) 300} = \frac{252}{84,9} \approx 2,95 \text{ bars}$$

Ainsi la semelle absorbe l'effort Normal  $N$  et le moment  $M$  tandis que le tirant en Béton précontraint absorbe l'effort horizontal  $T = 110,1 \cdot \sin 4,85 \approx 102 \text{ t}$ .

### Calcul des poteaux d'Appuis: FERRAILLAGE:

le poteau d'Appui est soumis à un moment  $M = 128,5 \text{ t.m}$  et à un effort Normal de  $113,1 \text{ t}$ .

$$\Rightarrow e = \frac{M}{N} = \frac{128,5}{113,1} = 1,13 > \frac{h_0}{6} = \frac{1,20}{6} = 0,20$$

$\Rightarrow$  c'est une section partiellement comprimée -

le moment fictif:  $M_{\text{Gf}} = M + N \cdot e = 128,5 + 56,55$

$$\Rightarrow M_{\text{Gf}} = 185,05 \text{ t.m}$$

$$\Delta' \text{ où: } \mu' = \frac{15 \cdot 185,05 \cdot 10^5}{2800 \times 50 \cdot (110)^2} = 0,165 \rightarrow k = 17,67$$

$$\Rightarrow \sigma'_b = \frac{2800}{17,67} = 158,5 \text{ bars} > 135 \text{ bars}$$

$\Rightarrow$  il faut arriver aussi en compression.

$$\text{on aura: } \mu = \frac{\sigma_b}{\sigma'_b k^2} = \frac{185,05}{810} = 0,228$$

on utilise les abaque de flexion  $\Rightarrow k = 26 > k_0$

$$\text{on prend } k_0 = 20,7 = \frac{2800}{135}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0,42 \quad \mu = 0,18 \quad \mu' = 0,13 \quad \omega = 1,015$$

$$\Rightarrow \sigma_a = 2800 \text{ bars} \quad \text{et } \sigma'_a = 1640 \text{ bars}$$



$$\Rightarrow N_0 = 0,18 \times 50 \times (110)^2 \cdot 135 = 145,9 \text{ t.m}$$

$$\Rightarrow \Delta N = 185,05 - 145,9 = 39,15 \text{ t.m}$$

$$\Rightarrow A' = \frac{39,15}{1,72} = 22,75 \text{ cm}^2$$

$$\text{et } A_1 = \frac{15 \cdot 1,05 \cdot 50 \times 120}{15 \times 100} + \frac{39,15}{1,05 \cdot 2800}$$

$$\Rightarrow A_1 = 74,4$$

$$\Rightarrow A = 74,4 - \frac{113,1}{2800} = 34,2 \text{ cm}^2$$

le ferrillage du poteau d'Appui est représenté sur le plan de ferrillage -

la contrainte de cisaillement  $\tau_s = \frac{24.000}{110 \times 50} = 4,35 \text{ bars}$ .

largement absorbée par les cadres en place placés à  $e = 20 \text{ cm}$ . Dans cette étude l'effort tranchant n'est pas important pour toutes les parties de l'ouvrage étudié, car tout les efforts se déroulent par compression -

### Calcul du Tirant :

le dosage du béton au ciment est considéré de  $400 \text{ kg/m}^3$  - l'effort à équilibrer est de :  $N'_1 = 102 \text{ t}$   
 la contrainte admissible du béton :  $R = 100 \text{ bars} = 1000 \text{ t/m}^2$

$\Rightarrow$  Précontrainte :  $F = N'_1 = 102 \text{ t}$  réalisée par 2 câbles  $12 \phi 8$  de section totale  $A' = 1206 \text{ mm}^2$ , tendus à

$$\frac{102.000}{1206} \approx 83,4 \text{ kg/mm}^2$$

Chaque câble est disposé sous une gaine de  $4,5 \text{ cm}$  de diamètre, soit une aire de gaine =  $0,0031 \text{ m}^2$



béton :  $B = \frac{102}{1000} = 0,102 \text{ m}^2 \Rightarrow$  section totale  
 $= 0,1051 \text{ m}^2$  - soit un rectangle de  $40 \times 26 \text{ cm}$

Pourcentage d'Acier :  $\bar{w} = \frac{A'}{B} = \frac{1206}{0,1} \cdot 10^{-6} = 1,2\%$

La solution précédente est de réviser un peu légèrement  
 sous-évaluée - on va négliger le phénomène de surtension  
 des câbles à la mise en charge - En effet, lors de  
 l'application de  $N'$ , le tirant s'allonge de  $\Delta l$  en  
 se comprimant le béton de  $\Delta \sigma_b$  et en surtendant  
 les câbles de  $\Delta \sigma_a$ . Ces quantités sont liées par  
 la relation de Hooke, soit :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta \sigma_b}{E_b} = \frac{\Delta \sigma_a}{E_a} \quad \text{soit : } \Delta \sigma_a = m \Delta \sigma_b$$

avec  $m = \frac{E_a}{E_b}$

De plus :  $N' = B \Delta \sigma_b + A \Delta \sigma_a$  ou

$$N' = \Delta \sigma_b B (1 + m \bar{w})$$

$$\Rightarrow \Delta \sigma_b = \frac{N'}{B(1 + m \bar{w})}$$

La relation fondamentale sur les contraintes s'écrit  
 alors :

$$0 \leq \frac{F}{B} - \frac{N'}{B(1 + m \bar{w})} \leq R \quad \text{qui donne } \left\{ \begin{array}{l} \text{en charge : } F = \frac{N'}{1 + m \bar{w}} \\ \text{A vide : } B = \frac{N'}{R(1 + m \bar{w})} \end{array} \right.$$

Ce qui nous donne finalement une force de précontrainte

$$F = 94,3 \text{ t} \quad \text{et} \quad B = 0,0938 \text{ m}^2.$$



## INDICATIONS pour l'exécution :

1°) - Coffrage : Veiller à sa bonne exécution - un écart de quelques millimètres peut excentrer les efforts de membrane régnant dans le voile ou point de créer des contraintes dangereuses.

Veiller à ce qu'il ne se produise pas, lors du bétonnage, aucune poche, ni aucune surépaisseur - ce qui entraînerait des irrégularités dans la répartition des charges.

les Coffrages doivent être suffisamment rigides.

### 2°) Ferrailage :

La pose des armatures est une opération de grande importance. le niveau indiqué au plan doit être scrupuleusement respecté.

3°) Bêtonnage : Etant donné la faible épaisseur du voile, la plus grande dimension des granulats est ordinairement fixée à 22 mm - on bétonnera autant que possible symétriquement et en progressant des parties basses vers les sommets.

### 4°) Décoffrage :

le décoffrage est une opération délicate qui doit être exécutée suivant un programme soigneusement étudié - il faut en effet éviter que durant le coffrage il se produise une augmentation de charges sur certains Appuis.

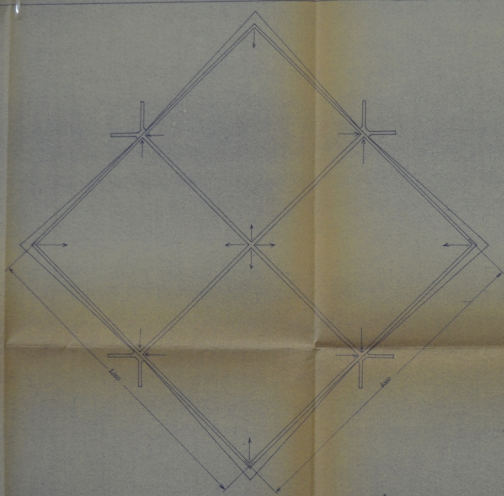


Conclusion :

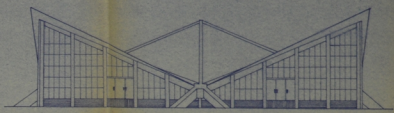
Pour ses problèmes de tirage, la seconde partie n'a pas été très détaillée; Et comme il s'agit de calculs, ils peuvent être facilement retrouvés. Par contre les calculs qui nous semblent importants, ont été détaillés. Pour ce qui est des 2 théories étudiées, il nous semble que la théorie de membrane, complétée par un Essai sur modèle réduit donne une solution largement suffisante.

Je renouvelle mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé -

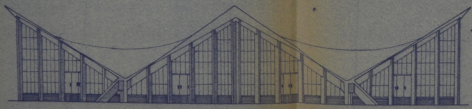




VUE EN PLAN



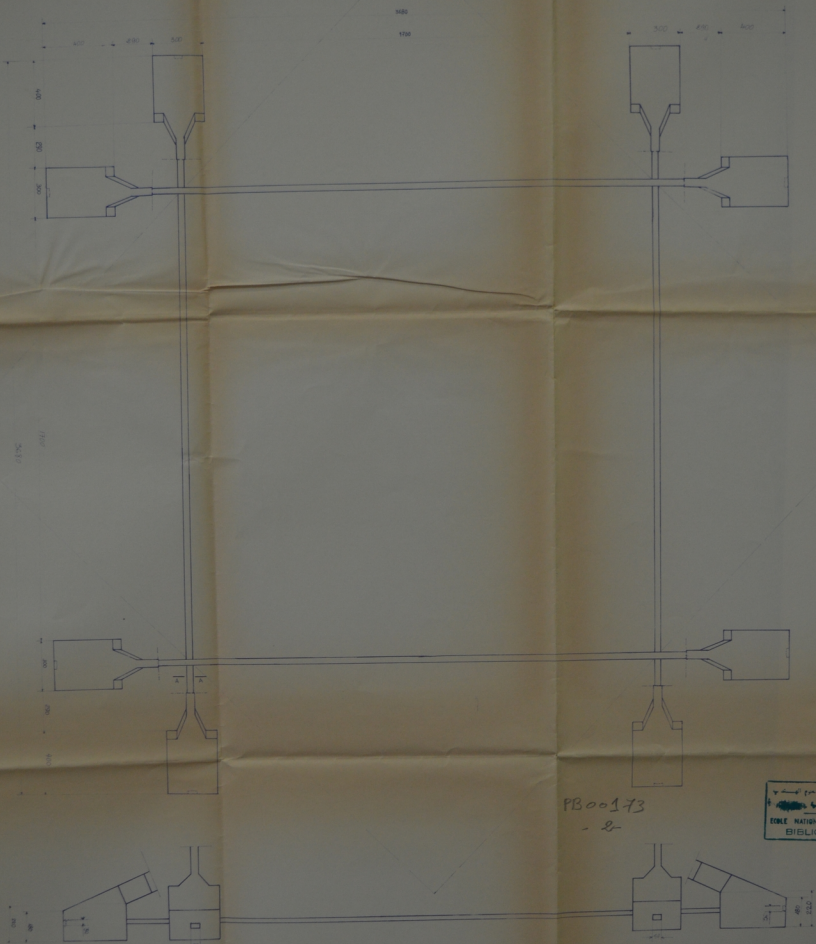
VUE DE FACE



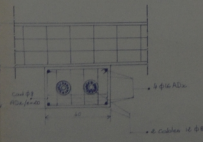
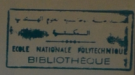
VUE DE FACE

PB 00173  
- 1 -

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE Dpt. GÉNIE - CIVIL			
PAVILLON D'EXPOSITION 40x40 m <sup>2</sup>	Dessiné par	Baccouche	Revisé par
	projeté par	Baccouche	Date
VUE EN PLAN FAÇADES	Permis de	UNIVERSITÉ	
	Échelle	1/50	



PB00173  
- 2 -



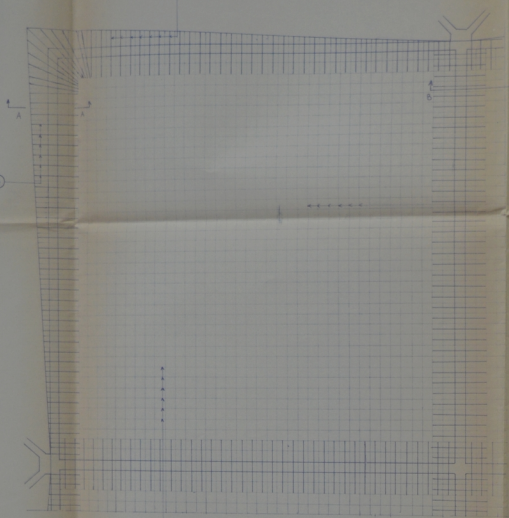
COUPE A-A

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D <sup>r</sup> . GENIE CIVIL				
PAVILLON D'EXPOSITION 40.40 m <sup>2</sup>	éléments jeux	Bois Trottoir	par	évalué sur 5
	projet sur	Bois Trottoir	par	
COFFRAGE FONDACTIONS TIRANTS	évalué jeux	Bois Trottoir	par	
	formations	UNIFORME		



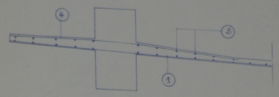
①  $\phi 8 \text{ ADx}$   
/e=10

①  $\phi 8 \text{ ADx}$   
/e=10



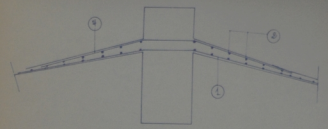
①  $\phi 8 \text{ ADx}$   
/e=10

FERRAILLAGE DE LA COQUE

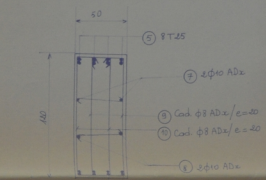


COUPE A A

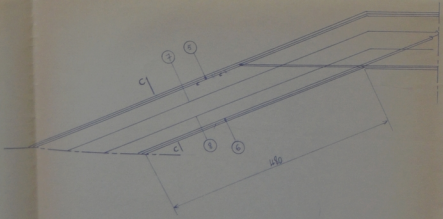
①  $\phi 8 \text{ ADx}$   
/e=10



COUPE B B

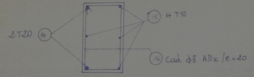


COUPE C C



POTEAU D'APPUI

①  $\phi 8 \text{ ADx}$

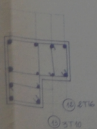


COUPE E E

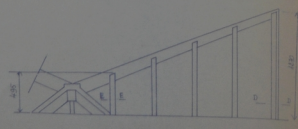
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
BIBLIOTHEQUE

PB00173  
.03.

①  $\phi 7 \text{ AD}$



COUPE D-D



POTEAUX DE RIVE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
D<sup>re</sup> GENIE-CIVIL

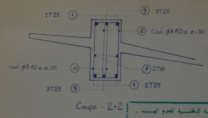
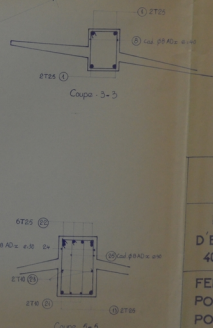
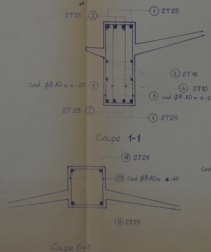
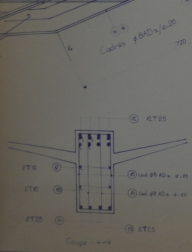
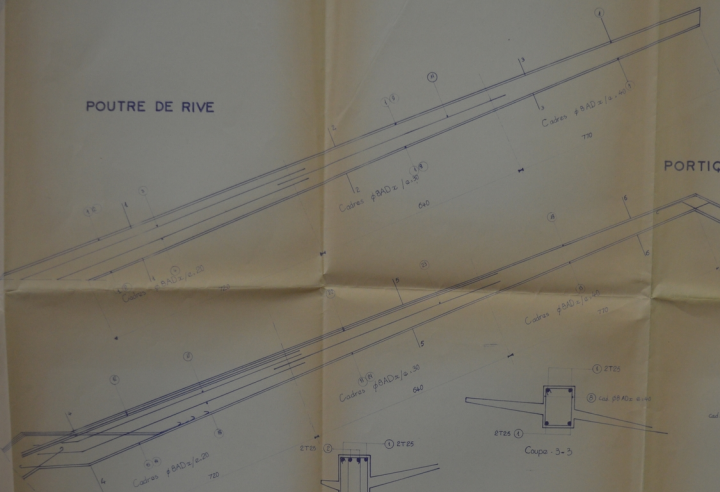
PAVILLON D'EXPOSITION 40x40 m <sup>2</sup>	Structure poutre :	Bois lamelle 5x6	①	Echelle : 1/50 - 20/50
	Traverse poutre :	Bois lamelle	②	Scale 1/20 / 1/50
FERRAILLAGE COQUE+POTEAUX D'APPUI-RIVE	Structure poutre :	Bois lamelle	③	
	Plancher poutre :	BOIS LAMELLE	④	





POUTRE DE RIVE

PORTIQUE



المستشفى الوطني للهندسة  
الكتاب  
Ecole Nationale Polytechnique  
BIBLIOTHEQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
Dpt. GENIE-CIVIL

PAVILLON D'EXPOSITION 40x40 m <sup>2</sup>	classé par :	bancoche	Hand	شماره No 1/16
	projeté par :	bancoche	Hand	تاریخ 4.04.73
FERRAILLAGE POUTRE DE RIVE PORTIQUE	étudié par :	bancoche	Hand	
	formulé par :	INGENIEUR		

PB00173

206-

