

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

8/87

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : **HYDRAULIQUE**

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Etude de la structure
Cinematique-Dynamique
D'un
RESSAUT Hydraulique Noye

Proposé Par :

M^r: PIMENOV

Etudié par :

M^r: HASSAD : M

Dirigé par :

M^r: PIMENOV
M^{elle}: BENMAMAR

2 PL
3 PR

PROMOTION : **Janv: 87**

DÉDICACES

JE DEDIE CE MODESTE MEMOIRE
SCIENTIFIQUE A U PREALABLE A :
-MES PARENTS QUI N'ONT CESSÉ DE
DEPLOYER LEURS EFFORTS ET DE M'ENCOUR-
-AGER AFIN D'ATTEINDRE LA REUSSITE

AINSIQU'A MES SOEURS FIDELES QUI M'ONT
SOUTENUS MORALEMENT. JE LEUR DOIS
TOUTES MES RECONNAISSANCES ET RESPECT:
{ H, Z, S, N, M, Z }

-A TOUTES PERSONNES QUI M'AIMENT OU QUI
M'HAISSENT.

-JE LE DEDIE NOTANMENT ET SANS OUBLIER
A LA MEMOIRE DES MARTYRS TOMBÉS
AUCAMP D'HONNEUR POUR DES CAUSES
JUSTES ET SACRÉS.

-A LA PROSPERITE ET GLOIRE DE L'ALGERIE
-ET TOUS ET TOUTES (LES HYDRAULICIENS)
-ENFIN A MA FUTURE FEMME-QUE J'
-J'IGNORE POUR L'INSTANT. ...!

SIGNÉ:
MAHIEDDINE



REMERCIEMENTS



وزارة التعليم العالي

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات

TERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

ementa...Hydraulique.....
teur; M.PIMENOV...Melle BENMAMAR
Ingénieur: HASSAD...Mahieddine

مصلحة...
بنسوف...
هندس

الدراسة الحركية والديناميكية للقفزة المائية الساكنة
الهدف من هذه الدراسة هو اجراء عمل نظري وتجريبي لتصور السرعة
خلال القفزة المائية في جريان ذو بعد ثنائي تحت بوابة في قناة
مستطيلة المقطع المرز،

objet: .Etude de la structure cinématique et dynamique du Ressaut hydraulique noyé

résumé: L'objet du présent travail est de faire une étude théorique et expérimentale de l'évolution des vitesses dans la structure du ressaut hydraulique noyé dans un écoulement bidimensionnel créé par une vanne de fond placée dans un canal horizontal de section rectangulaire (sans forces de frottement).

Subject: .Study of the kinematic and dynamic structure of the hydraulic jump

Abstract: The extensive previous work is to do a theoretic and an experimental study of the distribution (velocity) on hydraulic jump in two dimensionnel flow under sluice gate in a rectangular smooth horizontal flum.

Table des matières

- CHAPITRE: I

- Introduction et but

Page 1

- CHAPITRE: II

II-1- Généralités

II-2- Notions générales sur le ressaut hydraulique.

page 3

Ⓐ Description

page 4

Ⓑ Profondeurs conjuguées

Ⓒ Longueur du ressaut

Ⓓ Recherche de la position du ressaut

Ⓔ Déplacement du ressaut

Ⓕ Différents types de ressaut

- CHAPITRE: III

III-1- solution théorique pour le problème.

page 18

Ⓐ Rappel sur les équations du mouvement turbulent

Ⓑ Etendue du problème bidimensionnel

Ⓒ Etude adimensionnelle

Ⓓ Analyse du système

Ⓔ Solution du système d'équations

Ⓕ Résultats analytiques après résolution

CHAPITRE: IV

IV-1 solution numérique à l'aide des différences finies

page 33

Ⓐ Recherche de l'algorithme

Ⓑ Etablissement du programme

IV-2-Interprétation des résultats théoriques

- CHAPITRE: V

V-1 Etude expérimentale

page 44

Ⓐ dispositif expérimental

Ⓑ lois de similitude

Ⓒ Méthodes de mesure

Ⓓ Résultats expérimentaux

Ⓔ conclusion

Ⓕ Conclusion générale

« BIBLIOGRAPHIE »

* Le problème qu'on va étudier dans ce modeste mémoire est d'une importance capitale. Le point délicat de l'objet du problème; c'est d'exprimer l'influence dominante des changements rapides et irréguliers qu'éprouvent les vitesses ainsi que les pressions aux divers points de la masse fluide (eau) incompressible d'un ressaut hydraulique royé dans ses différentes sections; crée par le passage d'un écoulement torrentiel à un écoulement fluvial (ex: écoulement sous une vanne dans un canal rectangulaire horizontal).

L'importance de cette étude des vitesses et leur évolution (répartition) dans le ressaut; est de constater comment se distribuent les vitesses, après avoir tracer leur profil afin de maîtriser ce phénomène cité et de le stabiliser pour différents débits dans une position désirée. Par exemple dans les ouvrages hydraulique tels que les barrages déversoirs, pour un évacuateur de crues et ceci pour intérêt de réduire la vitesse de la lame d'eau déversante à l'aval du coursier de l'évacuateur car les vitesses élevées provoquent l'érosion du lit et compromettre la stabilité de l'ouvrage.

En dehors d'autre procédés, visant le même but; telle que l'interposition d'obstacles ou d'un bassin d'amortissement

au pied de l'ouvrage; la diffusion de la lame dans l'air etc..., on utilise souvent les propriétés du ressaut hydraulique car ce dernier est un dissipateur d'énergie ce que veut dire réduit à la fois l'énergie totale et cinétique du courant.

BUT :

- Le but du travail entrepris est d'étudier la distribution de la vitesse dans le ressaut hydraulique royé dans un canal horizontal et de section rectangulaire uniforme.
- La première partie de notre travail consistera à établir l'équation de Reynolds et en tenant compte des conditions aux limites.
- Pour la résolution de cette équation, nous utiliserons la méthode numérique.
- La deuxième partie sera la détermination des vitesses dans le ressaut hydraulique expérimentalement en utilisant le tube de PITOT
- En dernier lieu nous ferons une analyse des résultats de nos travaux établis.

CHAPITRE II

II 1 - Généralités

- Le ressaut hydraulique est défini comme le phénomène qui correspond au passage brutal d'un écoulement dans un état supercritique < régime dit torrentiel > à un écoulement dans un état subcritique < régime dit fluvial >.

Le passage est accompagné d'une création de turbulence et d'une perte d'énergie considérable.

- Le ressaut peut-être considéré comme une onde stationnaire, occupant une courte zone de transition qui sépare ces deux régimes dont les surfaces se situant nécessairement de part et d'autre du niveau critique.

- Comme nous le verrons, le ressaut est un dissipateur d'énergie, c'est aussi l'un des types les plus caractéristiques des Mouvements brusquement variés.

* II 2 Notions générales sur le ressaut hydraulique :

a) Description :

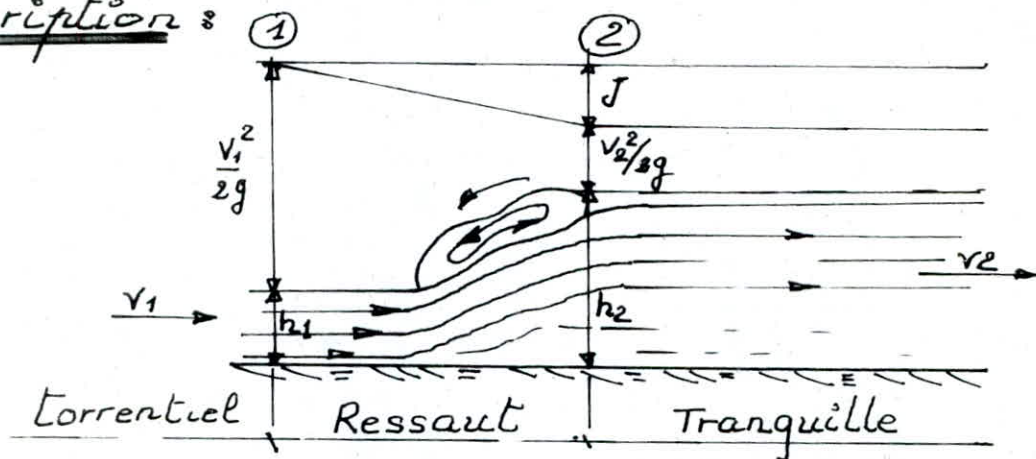


fig: A Ressaut hyd (forme ordinaire)

Nous considérons comme sections terminales du ressaut en les affectant des indices (1) et (2); ces sections qui limitent de par et d'autre la zone de régime brusquement varié. Dans la section (1) d'entrée, les filets liquides sont encore sensiblement parallèles; dans la section (2) de sortie, ils le sont pratiquement.

b) Profondeurs conjuguées :

Les profondeurs conjuguées sont h_1 et h_2 des sections terminales. La hauteur du ressaut sera: différence $(h_2 - h_1)$ et sa longueur est la distance des deux sections.

On se propose de calculer l'une des profondeurs conjuguées en fonction de l'autre.

- Nous avons deux méthodes de Calcul :

1°) Celle qui est d'après le théorème D'EULER (théorème des quantités de Mouvement) < voir polycopé [I] >

2°) d'après BELANGER:

Démonstration: $h_2 = ? \frac{h_1}{2} (\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1)$: voir F.J. RESH

La relation de continuité s'écrit:

$$\bar{U}_1 h_1 = \bar{U}_2 h_2 \quad \text{avec } \bar{U}_i: \text{ vitesse moyenne de la section } (i)$$

faisant intervenir le taux de présence de la phase liquide (β) dans l'expression de la masse volumique ($\rho = (1-\alpha)\rho_{\text{eau}} + \alpha\rho_{\text{air}}$) avec $\alpha =$ taux de présence de la phase gazeuse.

on obtient :

$$\int_0^h \beta \bar{u}^2 dy + \int_0^h \beta \bar{u}'^2 dy - g \int_0^h \int_{h_1}^y \beta dy' dy - \int_0^h \left[\beta \bar{v}^2 + \beta \bar{v}'^2 + \int_{h_1}^y \frac{d}{dx} (\beta \bar{u} \bar{v} + \beta \bar{u}' \bar{v}') dy' \right] dy$$

$$+ \frac{1}{\rho_{\text{eau}}} \int_0^x \mu_{\text{eau}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \Big|_{y=0} dx - \int_0^x \beta \bar{u}^2 \Big|_{y=h} dx + \int_0^x \beta \bar{u}' \bar{v}' \Big|_{y=h} dx + g \int_0^x \int_{h_1}^h \beta dy' dx +$$

$$\int_0^x \left[\beta \bar{v}^2 \Big|_{y=h} + \beta \bar{v}'^2 \Big|_{y=h} + \int_{h_1}^h (\beta \bar{u} \bar{v} + \beta \bar{u}' \bar{v}') dy' \right] dx =$$

$$\int_0^h \beta \bar{u}^2 dy + \int_0^h \beta \bar{u}'^2 dy + \int_0^h \bar{p} dy \quad : (Ia, b)$$

C'est l'expression de la conservation de la quantité de Mouvement

La force précitée doit alors évidemment être nulle
 L'expression $[I a, b, c]$ peut être transformée en définissant
 les quantités suivantes :

Soient les coefficients de correction suivants :

1°)
$$1 + \beta^* = \int_0^4 \frac{\bar{u}^2}{\bar{u}^2} dy = \frac{\int_0^4 \bar{u} dy}{\bar{u} \cdot h}$$
 avec $1 + \beta^*$ = coef de correction pour la non uniformité de la distribution du flux de quantité de $M = \bar{u}$ moyen

\bar{u} = vitesse moyenne dans la section

\bar{u} = composante de la vitesse moyenne suivant OX

h = profondeur conjugée

2°)
$$I = \int_0^4 \frac{\bar{u}'^2}{\bar{u}^2} dy = \frac{\int_0^4 \bar{u}' dy}{\bar{u}^2 \cdot h}$$
 avec \bar{u}' = composante de la fluctuation suivant OX

I = coef de correction analogue au précédent pour fluctuations de vitesse

3°) coefficient de correction en tenant compte de la non linéarité de la distribution de la pression statique : K

$$K = \int_0^4 \frac{\bar{v}'^2}{\bar{u}^2} dy = \frac{\int_0^4 \bar{v}'^2 dy}{\bar{u}^2 \cdot h}$$
 avec : \bar{v}' = composante des fluctuations suivant OY

4°) Coefficient moyen de frottement pariétal : C_F

$$C_F = \frac{\bar{\tau}_0}{\rho \bar{u}_1^2 / 2} = \frac{\int_0^4 \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} |_{y=0} dx}{L_j \cdot \rho \cdot \bar{u}_1^2 / 2}$$

et L_j = Longueur du Ressaut

avec \bar{u}_1 = vitesse moyen d'entrée

μ = coef dynamique

$\bar{\tau}_0$ = tension de frottement pariétal

5°) Le rapport
$$J = \frac{h_2}{h_1}$$

h_i : profonds conjugués

6°) La relation de continuité :

$$\bar{u}_1 \cdot h_1 = \bar{u}_2 \cdot h_2$$

\bar{u}_i : vitesse moyenne de la section i

- On obtient à partir de l'équation (Ia,b,c) :

$$(\beta_2^* + 1) \bar{U}_2^2 \cdot h_2 - (\beta_1^* + 1) \bar{U}_1^2 \cdot h_1 + I_2 \bar{U}_2^2 \cdot h_2 - I_1 \bar{U}_1^2 \cdot h_1 + g \cdot \frac{h_2^2}{2} - g \cdot \frac{h_1^2}{2} - K_2 \bar{U}_2^2 \cdot h_2 + K_1 \bar{U}_1^2 \cdot h_1 + C_F \cdot \frac{\bar{U}_1^2 \cdot L_j}{2} = 0 \quad : [I a, b, c, d]$$

* Soit après transformation et division de tous les termes par le produit $\bar{U}_1^2 \cdot h_1$ pour rendre l'expression adimensionnelle

$$\boxed{\frac{J \cdot (J+1)}{2} = F_1^2 \cdot (1 + \varepsilon)} \quad ; \quad \text{avec } \varepsilon = \frac{J}{J-1} (\beta_1^* + I_1 - K_1) - \frac{J}{J-1} (\beta_2^* + I_2 - K_2) - C_F \cdot \frac{L_j \cdot J^2}{2 \cdot h_1 \cdot (J+1)}$$

$F_1 = \text{Nombre de Froude} = \frac{\bar{U}^2}{\sqrt{gh}}$

- Enfin à partir des équations de (ε) on suppose une distribution uniforme des vitesses : ($\beta_2^* = \beta_1^* = 0$) ; l'effet de turbulence négligeable dans les sections (1) et (2) : ($I_1 = I_2 = 0$) et ($K_1 = K_2 = 0$). Et si le frottement est considéré négligeable ($C_F = 0$). L'équation s'écrit :

avec [IIa] s'écrit : $\frac{J}{2} (J+1) = F_1^2$ avec $\varepsilon = 0$; [IIab]

Cette relation [IIa,b] n'est autre que la formule simplifiée de conservation de quantité de mouvement proposée par BELANGER en 1828 ; avec $J = \frac{h_2}{h_1}$: $\frac{J}{2} (J+1) - F_1^2 = 0$ a pour solution :

on aura : $\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1]}$ II a, b, c ; c.g.f.d

Rq : la deuxième racine négative de $J(J+1) - 2F_1^2 = 0$ n'a aucun sens physique (Rejetée).

c) Longueur du Ressaut:

-Si la hauteur du ressaut est accessible au calcul, il n'en est malheureusement pas de même de sa longueur; car on ne sait pas déterminer correctement la forme exacte de la surface libre de ce type de mouvement brusquement varié.

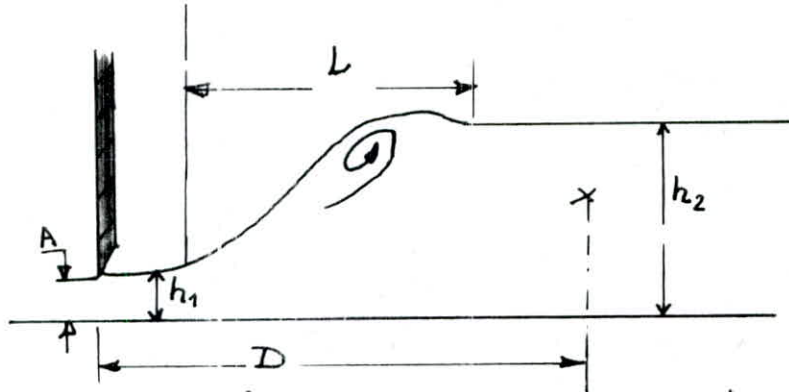
Actuellement, seule l'expérience permet de recueillir quelques données sur ce point. Ainsi, la longueur du ressaut ordinaire en canal rectangulaire se situeait normalement entre 5 et 7 fois sa hauteur.

Certains auteurs considèrent qu'on peut approximativement la prendre égale à $5\sqrt{2}$. Pour les sections non rectangulaire, ces chiffres doivent être généralement majorés.

Le ressaut ondulé est relativement plus long; ses ondulations s'étendent d'autant plus loin que sa hauteur est plus faible. Donc il n'y a pas été possible jusqu'à présent de calculer théoriquement cette longueur.

Elle dépend probablement de l'énergie qui doit être dissipée dans le ressaut.

On a dû se contenter de mesurer cette longueur et de l'exprimer par des formules empiriques.



(fig B) : Longueur L du rouleau de surface et point d'éclatement de la veine J (Escande)

D'après Wojcicki :

$$\frac{L}{h_2 - h_1} = 8 - 0,05 \cdot \frac{h_2}{h_1}$$

tandis que d'après SMETANA :

$$\frac{L}{h_2 - h_1} = 6$$

- Pour Safranez :

$$L = 4,5 h_2 = 6 h_1 F_r$$

- PAVLOWSKI :

$$2,5 h_2 \left(1,9 - \frac{h_1}{h_2} \right)$$

- Pour Ludin :

$$\frac{(h_2 - h_1)}{L} = \frac{1}{4,5} - \frac{1}{6 F_r}$$

- or Escande a introduit une autre notion pour l'appréciation du danger d'un ressaut. Il a constaté que dans le cas d'un écoulement au dessous d'une vanne à une certaine distance $\langle D \rangle$ (Mesurée à partir de la vanne, conformément à la fig B) La veine qui s'écoule d'abord au dessous du rouleau de surface avec une vitesse relativement grande subit brusquement une sorte (d'éclatement).

En aval de ce (point d'éclatement), la vitesse plutôt la répartition de la vitesse est de nouveau plus uniforme sur toute

la hauteur de la veine.

- Par conséquent on a $v_{\text{fond}} \approx v_m$ de ce fait le grave danger d'affouillement qui est grand pour $v_{\text{fond}} > v_m$ diminue de nouveau. On a d'après Escande.

$$\frac{D}{A} = -E + \frac{6h_2}{A}$$

avec A = ouverture de la vanne

D = distance du point d'éclatement (voir fig.)
 h_2 = hauteur de l'eau à l'aval.

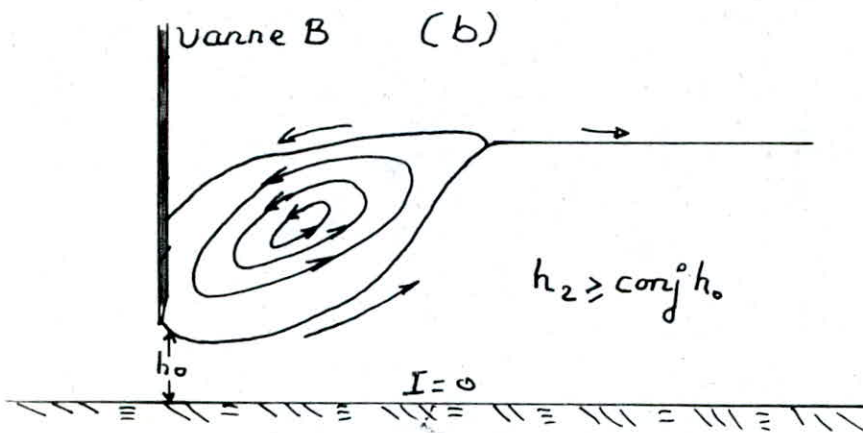
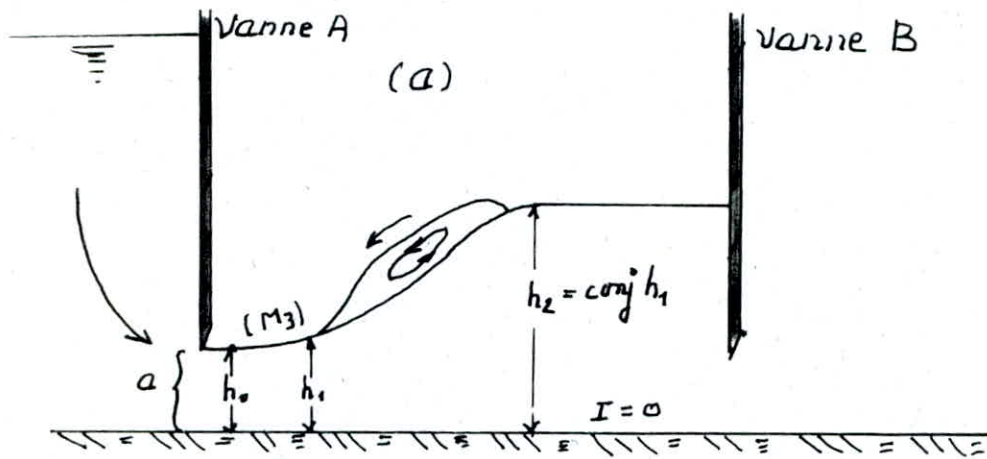
a) Recherche de la position du Ressaut:

Le ressaut ne peut être existant que si la veine tourbillonnaire est appelée à se transformer en un courant tranquille. Pour déterminer sa position, il faut préalablement connaître la ligne d'eau amont située en-dessous du niveau critique et la ligne d'eau aval, située en-dessus de ce niveau.

- Le ressaut se placera de telle manière que ses sections terminales aient des profondeurs conjuguées et soient distantes de la longueur présumée du ressaut; soit $5h_2$ approximativement.

-e) Déplacement du ressaut:

-Étudions le déplacement du ressaut en raisonnant par exemple sur le montage suivant : (voir fig:c)



(fig:c) : Étude du déplacement du ressaut
en fonction de la retenue aval

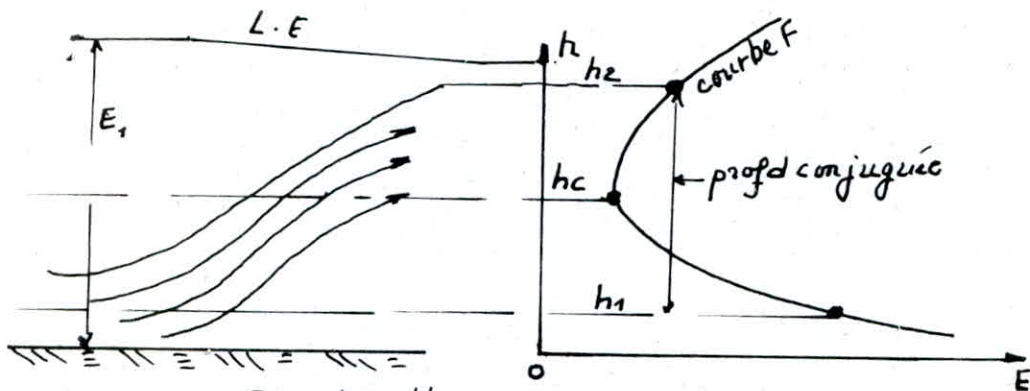
- L'eau rentre dans un canal rectangulaire de pente inférieure à la pente critique, par une vanne de tête (A) et s'évacue par une vanne de sortie (B).

La veine liquide issue de (A) étant du type torrentiel (courbe M3), son débit est indépendant des conditions avalées, tout au moins si cette veine est dénoyée, et ne dépend que de la retenue amont et de la levée correspondante (a); la profondeur avalée h_2 dépend de ce débit et de la levée de B.

En somme, (A) règle le débit et (B) la profondeur h_2 .
Supposons le débit maintenu constant, pour une valeur donnée de h_2 , le ressaut se forme au point de profondeur h_1 , telle que h_1 soit conjuguée de h_2 .

- Admettons que l'on baisse progressivement (B) de manière à faire varier h_2 , la courbe F montre que la profondeur conjuguée h_1 doit décroître: Le ressaut se déplace donc vers l'amont jusqu'à ce que la profondeur de la section d'entrée soit conjuguée de la nouvelle valeur de h_2 .

- Si h_2 croît de plus en plus, le ressaut s'approche progressivement de (A).



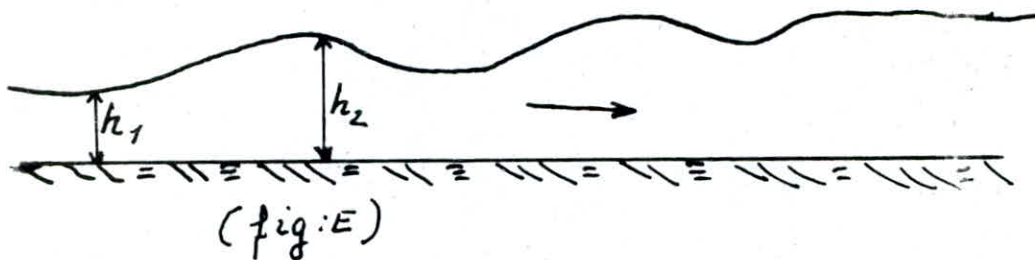
(fig: D) : Etude d'un ressaut à l'aide de courbe F

- Il atteint la vanne lorsque h_2 est conjuguée de la levée (a) de celle-ci (approximativement, à cause de la courbure des filets à la sortie de la vanne); cette valeur de h_2 est la profondeur maximum aval pour qu'il y ait ressaut. Si h_2 augmente encore, la veine est noyée [fig d; (b)]. Dans ces conditions, les formules du ressaut précédemment établies n'ont plus de sens puisque les réactions de contact sont modifiées par la présence de la vanne (A); le débit dépend maintenant de h_2 , c'est à dire des conditions aval. D'une manière analogue, on pourrait étudier le déplacement du ressaut en fonction du débit.

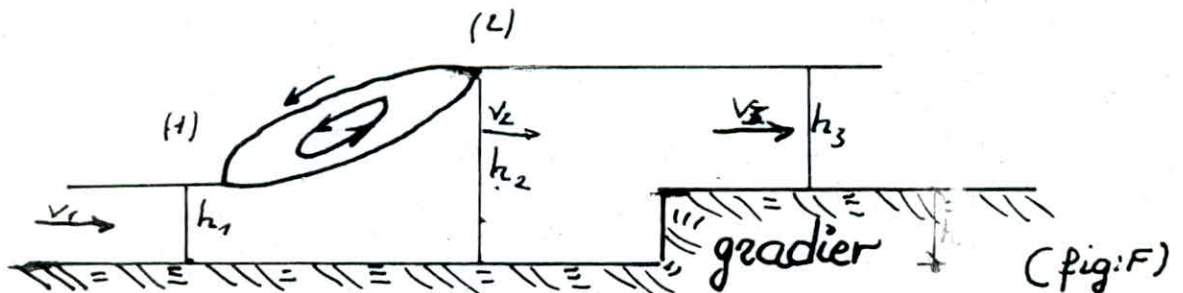
1. Différents types de ressaut :

- Selon la valeur du nombre de Froude amont, on peut classer les ressauts en différents types :

1.) Ressaut ondulé : faible hauteur



2.) Ressaut à remous : présence d'un obstacle (gradier)



Dans le cas du seuil (gradier), problème beaucoup plus intéressant pour la pratique, la résolution théorique est basée sur les équations suivantes :

a)
$$\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} = \frac{q}{g} (v_2 - v_1)$$
 avec q débit unitaire
qui est équation \mathcal{J} des quantités de $M = v^2 h$ entre sections (1) et (2)

b) Équation des quantités de Mouvement entre les sections (2) et (3) (en supposant la loi hydrostatique dans la section du seuil):

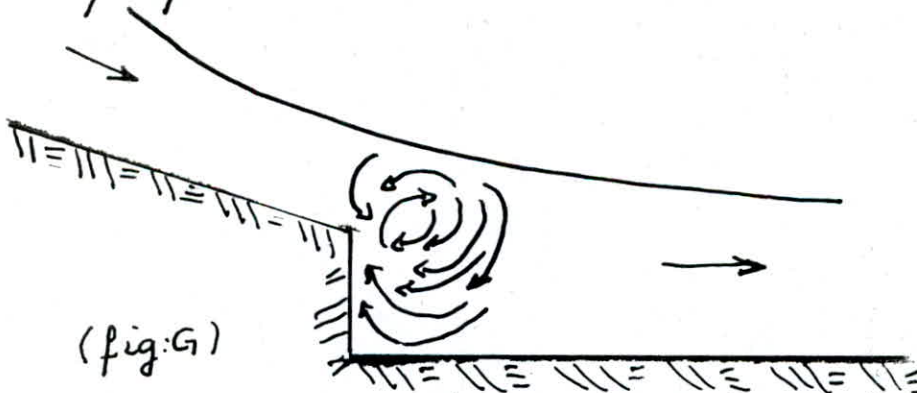
$$\frac{h_2^2}{2} - \frac{h_3^2}{2} - \frac{h}{2}(2h_2 - h) = \frac{g}{g} (V_3 - V_2)$$

et enfin $V_1 h_1 = V_2 h_2 = V_3 h_3$.

D'où en éliminant h_2 , V_2 et V_3 :

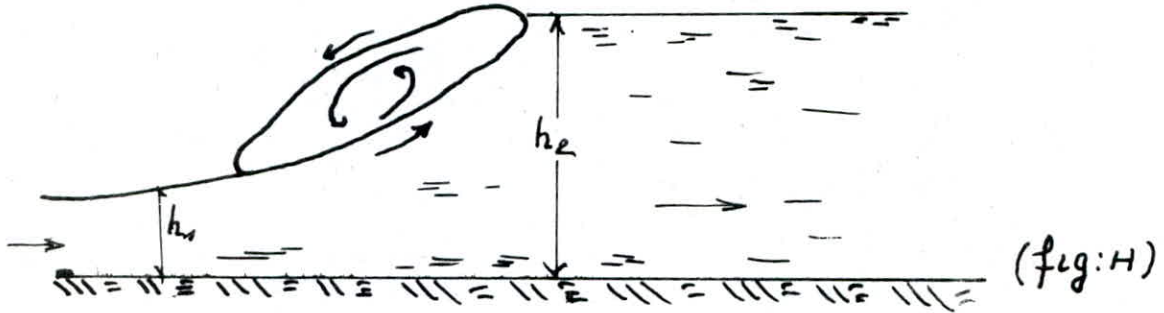
$$\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^2 = 1 + 2F_r^2 \left(1 - \frac{1}{h_3/h_1}\right) + \frac{h}{h_1} \left(\frac{h}{h_1} - \sqrt{1 + 8F_r^2} + 1\right)$$

3°) Ressaut non noyé : ^(Rouleau) Ressaut de fond développé (superficiel)



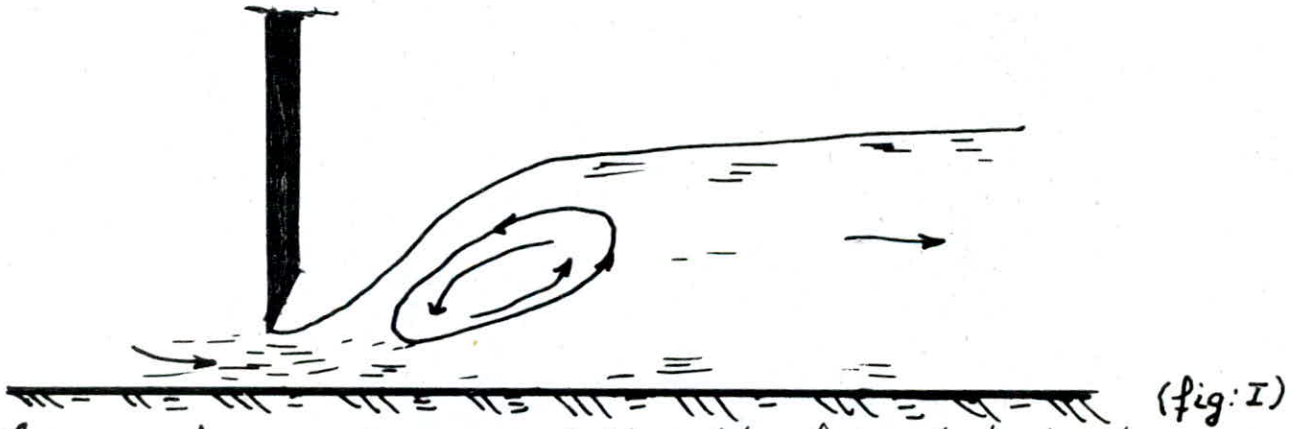
- Ce type de ressaut a un rouleau de fond développé. Ce ressaut est caractérisé par une répartition particulière des vitesses en section différentes de celle du ressaut parfait
- Ce ressaut superficiel est observé lorsque la nappe s'écoule d'un barrage, d'un gradin spécial.

4°) Ressaut parfait :



soit $H = h_2 - h_1$ hauteur du ressaut
si $H > h_1 \Rightarrow$ le ressaut est parfait.

5°) Ressaut Noyé (dénaturé) :



Lorsque le ressaut se produit à l'aval immédiat d'une vanne, l'eau tourbillonnante qui le recouvre vient en contact avec la vanne provoquant ainsi le ressaut dénaturé

Remarque : Cas de Bonage : L'emplacement du ressaut ordinaire varie avec le débit, avec les niveaux d'amont et d'aval etc... On devra donc recourir au ressaut noyé dont l'emplacement est fixe. Le plus souvent, on provoque la production du ressaut noyé soit en réalisant un encuvement, soit en établissant un seuil transversal (au niveau du radier).

III) CHAPITRE III

III-1: Solution théorique pour le problème:

<Écoulement bidimensionnel sans forces de frottement.>

↳ Rappel sur les équations des mouvements turbulents pour les fluides incompressibles:

- En utilisant les équations du mouvement réel afin d'obtenir les équations du mouvement moyen du fluide. Pour cela remplaçant chaque élément (Pression, vitesse...) par la somme de sa valeur moyenne et de sa fluctuation.

On aura: $P = \bar{P} + P'$ pression
composantes des vitesses $\begin{cases} u = \bar{u} + u' \rightarrow ox \\ v = \bar{v} + v' \rightarrow oy \\ w = \bar{w} + w' \rightarrow oz \end{cases}$ avec (u', v', w') fluctuations
et $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ vitesses moyennes

On peut écrire l'équation du mouvement permanent suivant Reynolds :

$$(1) \begin{cases} \rho x \left\{ \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u - \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}'}{\partial z} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v - \left(\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} \bar{w}'}{\partial z} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta w - \left(\frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w} \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} \bar{w}'}{\partial y} \right) \end{aligned} \right. \end{cases}$$

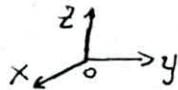
avec ν = viscosité cinématique [m^2/s]

$\begin{cases} x \rightarrow ox \\ y \rightarrow oy \\ z \rightarrow oz \end{cases}$ composantes de la force massique

ρ = masse volumique (fluide incompressible) [kg/m^3]

b) Etendue du problème bidimensionnel :

Soit un repère oxy (plan) caractérisant chaque point de l'écoulement bidimensionnel



* Les hypothèses sur lesquelles se basent notre problème sont :

- Composante de la vitesse moyenne suivant oz négligeable
- Écoulement est supposé stationnaire

- Écoulement a lieu dans un canal horizontal donc les composantes de la force de masse suivant les directions ox et oz sont nulles

- Composante suivant oy sera : $- \rho g$

* Les équations différentielles du mouvement appliquées à ce genre d'écoulement turbulent suivant Reynolds sont sous la forme suivante :

$$(2) \begin{cases} ox \left\{ \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u - \left[\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v'}{\partial y} \right] \\ oy \left\{ \begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \rho g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v - \left[\frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}v'}{\partial x} \right] \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Ainsi que l'équation de continuité peut s'écrire :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

Remarque :

- Afin d'évaluer le terme de pression nous utilisons l'équation différentielle suivant oy .
- Nous remarquons que notre système d'équations (2) n'est pas fermé c'est à dire : 3 équations à 6 inconnues ($u, v, p, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$)

Pour résoudre notre système, il faut faire recours à des suppositions supplémentaires.

1^{ère} variante :

Supposant que le mouvement dans le ressort est similaire à celui d'un jet ou de celui dans une couche limite horiz

Dans ces conditions, on peut obtenir un système simplifié :

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v \ll u \\ w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0 \end{cases}$$

Remarque : Terme de viscosité négligeable devant les tensions de Reynolds.

Suivant l'expérience on a : $\rho \bar{u} \bar{v} / \mu \frac{\partial u}{\partial y} \approx (10^2 \div 10^3)$

* $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$ ce qui entraîne \bar{u}'^2 et $\bar{u}'v'$ sont de même ordre

de grandeur $\rightarrow \frac{\partial(\bar{u}'^2)}{\partial x} \approx 0$

2^{eme} variante :

Le terme $\frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x}$ composante normale, par la suite peut être

introduite dans l'expression de la pression $\hat{P} = P + \rho \bar{u}'^2$

- On obtient finalement le système :

$$(3) \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho \bar{u}'v')}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

La valeur moyenne τ résultant de la turbulence par la tension superficielle :

On a $\tau = -\rho \bar{u}'v' =$ tension tenseur de Reynolds

Le système d'équations (3) devient :

$$(3') \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Si on suppose que $\tau = \rho \cdot \epsilon_T \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ suivant l'expérience on aura avec $\epsilon_T =$ coefficient de turbulence :

$$(3'') \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} + \epsilon_T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

c) Etude adimensionnelle :

-Si nous (suy) posons :

$$u_1 = \frac{u}{u_0} \quad (1)$$

$$v_1 = \frac{v}{u_0} \quad (2)$$

$$P_1 = \frac{\hat{P}}{P_0} = \frac{\hat{P}}{\rho u_0^2} \quad (3)$$

avec de même

$$t = \frac{x}{h} \quad (4)$$

$$\eta = \frac{y}{h} \quad (5)$$

* avec x = distance à partir de la section de contrôle où la section est régulière.

* u_0 = vitesse moyenne

* h = profondeur du courant dans la section où la distribution de vitesses et la profondeur sont régulières

* $P_0 = \rho u_0^2$ = pression dynamique moyenne du courant dans la section dont la distribution de pression est régulière.

-Si nous remplaçons les (u, v, p, x, y) respectivement par leurs valeurs, dans le système ci-dessus (3) tirées des équations (1, 2, 3, 4, 5) énumérées précédemment, puis en multipliant la première équation de (3) par $(\frac{h}{u_0^2})$ et la deuxième de (3) par $(\frac{h}{u_0})$, nous aurons :

$$(4) \begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{h}{u_0^2} x - \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\varepsilon_L}{h u_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } (u_0, h) = \text{const}$$

- Si on désigne par:

$$\frac{\varepsilon_T}{h \cdot u_0} = \frac{1}{R_T} \Rightarrow R_T = \frac{h \cdot u_0}{\varepsilon_T}$$

R_T : est appelé Nombre de Reynolds

ce qui résulte que:

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = -\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{1}{R_T} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} & \text{avec } -\frac{h \cdot x}{u_1} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (\text{Écoulement assimilé à celui du jet})$$

- Nous remarquons que le système n'est pas fermé;
(3 inconnues u_1, v_1, R_T)

Pour cela il faut connaître R_T expérimentalement ou théoriquement suivant la théorie de PRANDTL par exemple.

- Proposons nous la nouvelle variable (S) de la manière suivante:

$$S = \int_0^t \frac{dt}{R_T} \quad \text{avec } t = \frac{x}{h}$$

$$\text{ce qui donne } \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{R_T}$$

de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow v = -\int_0^r \frac{\partial u}{\partial t} dr = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^r u dr$$

on sait que $t = f(S)$; fonction de S , d'où:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial S} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial S} \cdot \frac{1}{R_T}$$

or dans le système précédent, (t) change

alors nous aurons:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_T} \cdot \mathcal{U} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S} - \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{\eta} \mathcal{U} d\eta \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} = - \frac{1}{R_T} \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{R_T} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \eta^2} \\ \frac{1}{R_T} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S} - \frac{1}{R_T} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial}{\partial S} \int_0^{\eta} \mathcal{U} d\eta \right] = 0 \end{cases}$$

si on pose $\hat{v} = - \frac{\partial}{\partial S} \int_0^{\eta} \mathcal{U} d\eta$ et avec $\mathcal{U}'_S = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial S}$
 $P'_S = \frac{\partial P}{\partial S}$

on peut écrire:

$$\begin{cases} \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}'_S + \hat{v} \cdot \mathcal{U}'_{\eta} = - P'_S + \mathcal{U}''_{\eta} \\ \mathcal{U}'_S + \hat{v}'_{\eta} = 0 \end{cases}$$

Pour simplification d'écriture:

(s) varie suivant l'axe Ox: (s → x)

et la hauteur (η → y) suivant Oy

d'où:

$$(5) \begin{cases} \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}'_S + \hat{v} \cdot \mathcal{U}'_{\eta} = \mathcal{U}''_{\eta} - P'_S \\ \mathcal{U}'_S + \hat{v}'_{\eta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (5') \begin{cases} \mathcal{U} \cdot \mathcal{U}'_x + v \mathcal{U}'_y = \mathcal{U}''_y - P'_x \\ \mathcal{U}'_x + v'_y = 0 \end{cases}$$

ou bien

$$(5'') \begin{cases} \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (2) \end{cases}$$

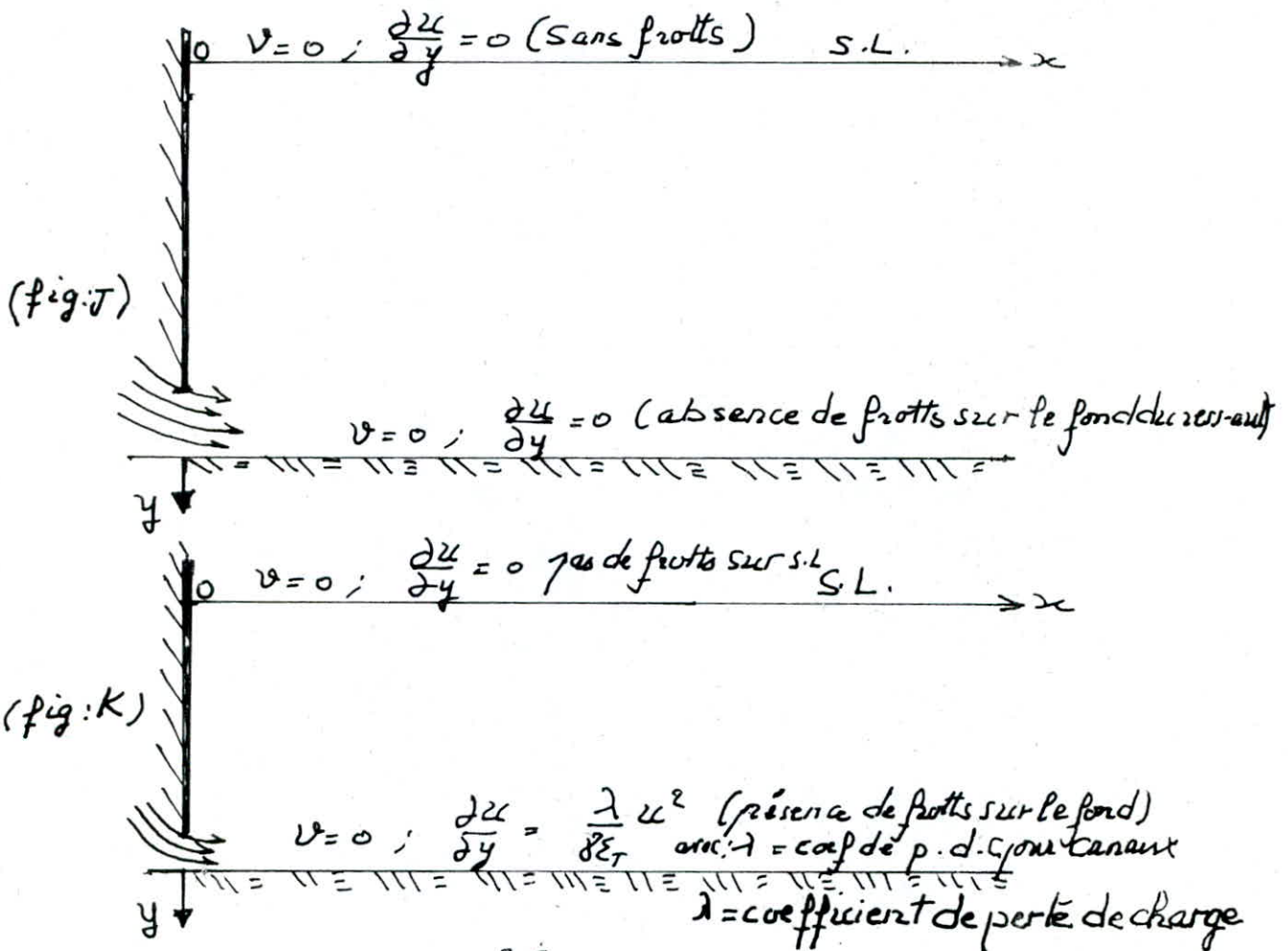
d) Analyse du système (5):

L'équation (5-1) est du type hyperbolique; elle exprime le processus d'égalisation (Redressement) des vitesses.

Pour résoudre le système, il faut faire recours aux conditions aux limites.

Soit l'axe ox le long de la surface libre et l'axe oy dirigé vers le bas comme l'indique la fig [J], [K]

avec u, v , données



- Le frottement sur la surface libre est nulle :

$$\tau = \text{Tenseur de Reynolds} = \rho \cdot \varepsilon_T \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

avec $\rho \cdot \varepsilon_T \neq 0$ c'est à dire : $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

- sur le fond : $\tau = \rho \cdot \frac{\lambda}{8} u^2$

$$\tau = \rho \cdot \varepsilon_T \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ or } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\lambda u^2}{8 \cdot \varepsilon_T} \Rightarrow \tau = \rho \cdot \frac{\lambda}{8 \cdot \varepsilon_T} u^2 \cdot \varepsilon_T = \rho \cdot \frac{\lambda}{8} u^2$$

$\lambda = \text{coéf de perte de charge}$

$\varepsilon_T = \text{coéf. de turbulence}$

$\rho = \text{masse volumique}$

si $\tau = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ avec toujours $\rho \cdot \varepsilon_T \neq 0$

c'est ainsi que les conditions aux limites seront :

- si $S=0 \rightarrow u, v$ données
 $y=0 \rightarrow v=0; \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
 $y(r)=1 \rightarrow v=0$

- La résolution du problème suite aux conditions aux limites est plus complexe que celle du problèmes aux conditions initiales.

Pour cela :

Nous utilisons la méthode numérique qui est :

* Méthode des différences finies

e) solution du système d'équations :

- Notre système est du deuxième ordre < non linéaire >

1^{ère} supposition : La première approximation : la composante verticale de la vitesse est inférieure à la composante horizontale

soit par ex: $v = \frac{1}{10} u$ (1)

Ce qui peut être déduit que le terme $v \frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$

2^{ème} supposition: La variation du gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial s} \approx \frac{\partial P}{\partial x} = B = \text{const}$

3^{ème} supposition: L'équation de continuité pour différentes sections du courant peut être écrit avec ($Q = \text{débit} = \text{const}$)

$$Q = u_0 \cdot h \cdot L = \int_0^h u \cdot L \, dy \quad \text{avec} \quad h \cdot L = \text{surface}$$

$$\text{d'où} \quad \int_0^h \frac{u \, dy}{u_0 h} = 1$$

$$\text{or} \quad \int_0^h u \, dy = u_0 h \int_0^1 u_1 \, d\eta \quad \text{avec} \quad u_1 = \frac{u}{u_0}; \quad \eta = \frac{y}{h}; \quad h=1 \Rightarrow \eta=y$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u_1 \, d\eta = 1 \Rightarrow \int_0^1 u_1 \, dy = 1 \quad ; \quad (u, y \text{ adimensionnels})$$

Le système devient

$$\begin{cases} (1) \quad u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - B & \text{ou} \quad \begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - B \\ \int_0^1 u_1 \, dy = 1 \quad \text{avec} \quad u_1 = \frac{u}{u_0} \end{cases} \\ (2) \quad \int_0^1 u_1 \, d\eta = 1 \end{cases}$$

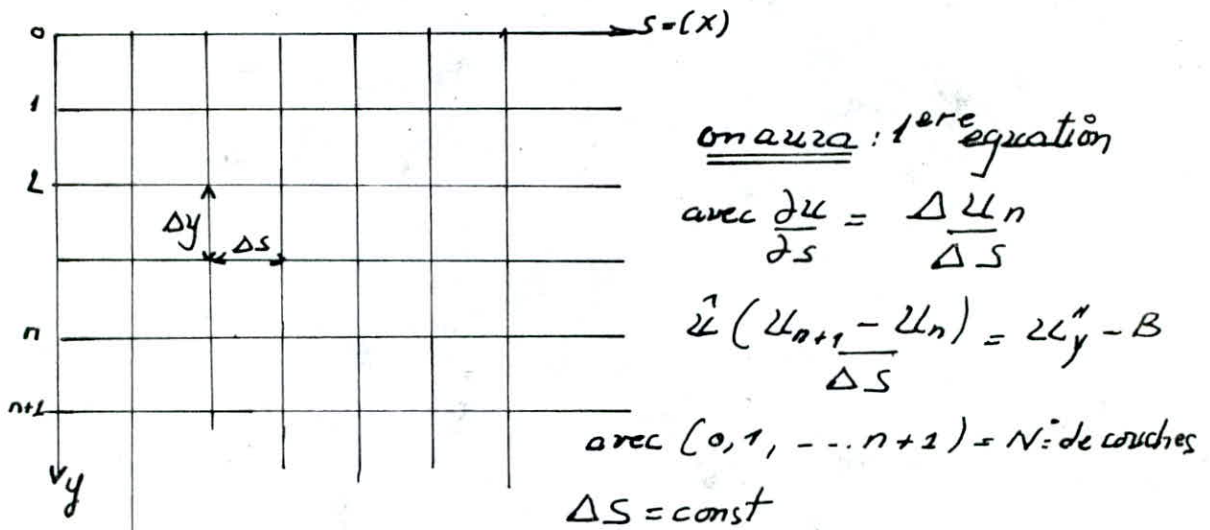
La solution de (1) a un sens physique si $\frac{\partial u}{\partial s} > 0$

$$\text{c'a-dire} \quad u = \begin{cases} u & \text{pour } u > 1 \\ 1 & \text{pour } u \leq 1 \end{cases}$$

Le système devient:

$$\begin{cases} \hat{u} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - B \\ \int_0^1 u_1 d\eta = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \hat{u} u'_s = u''_y - B \\ \int_0^1 u_1 dy = 1 \end{cases}$$

* Appliquons la méthode des différences finies pour la résolution de ce système :



Soit :

$$\begin{cases} \mathcal{E} = u_n \\ u = u_{n+1} \\ k = \frac{1}{\Delta s} \end{cases}$$

- remplaçons dans l'équation (1) dans le système :

$$\hat{u} \cdot k \cdot (u - \mathcal{E}) = u'' - B \quad (Ia)$$

$$\Rightarrow u'' - \hat{u} \cdot k \cdot u = -\mathcal{E} \cdot \hat{u} \cdot k + B \quad (I'a)$$

- L'équation (I'a) est une équation différentielle du 2^{ème} ordre indéterminée. cette résolution peut-être

présentée avec comme solution de deux équations indéterminées:

$$\begin{cases} u_1'' - \hat{u} \cdot K \cdot u_1 = -\hat{u} \cdot K \cdot \varrho & (I'_1) \\ u_2'' - \hat{u} \cdot K \cdot u_2 = B & (I'_2) \end{cases}$$

-si u_1 est solution de I'_1 et u_2 de $I'_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2$ est solution du système ci-dessus.

Soit l'équation (I'_2) : $u_2'' - \hat{u} \cdot K \cdot u_2 = B$

soit la solution $u_2 = f(B) = Bz$ avec z fonction inconnue
d'où $u_2' = Bz'$ et $u_2'' = Bz''$

\Rightarrow l'équation I'_2 devient

$$Bz'' - \hat{u} \cdot K \cdot B \cdot z = B \quad \text{avec } B \neq 0$$

$$\text{ou: } z'' - \hat{u} \cdot K \cdot z = 1 \quad ; (I'_3)$$

-Considérons l'équation $u_1 + u_2$

$$u = u_1 + u_2 = u_1 + Bz \quad (\text{III})$$

Soit: l'intégrale définie de $(0 \text{ à } 1)$

$$\int_0^1 u dy = \int_0^1 u_1 dy + \int_0^1 Bz dy$$

$$\text{or } \int_0^1 u dy = 1 \quad (\text{équation de continuité})$$

$$\Rightarrow 1 = \int_0^1 u_1 dy + B \int_0^1 z dy$$

$$\Rightarrow B = \frac{1 - \int_0^1 u_1 dy}{\int_0^1 z dy} \quad \text{IV}$$

c'est ainsi que le système :

$$\begin{cases} \hat{u} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - B \\ \int_0^1 u_1 d\eta = 1 \end{cases}$$

peut se mettre sous la forme d'un système d'équations : (4 équations)

$$\mathcal{V}' \begin{cases} \mathcal{U}'' - \hat{u} \cdot K \cdot \mathcal{U}_1 = -K \cdot \mathcal{U} \\ \mathcal{Z}'' - K \cdot \mathcal{U} \cdot \mathcal{Z} = 1 \\ \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + B \mathcal{Z} \\ B = \frac{1 - \int_0^1 \mathcal{U}_1 dy}{\int_0^1 \mathcal{Z} dy} \end{cases}$$

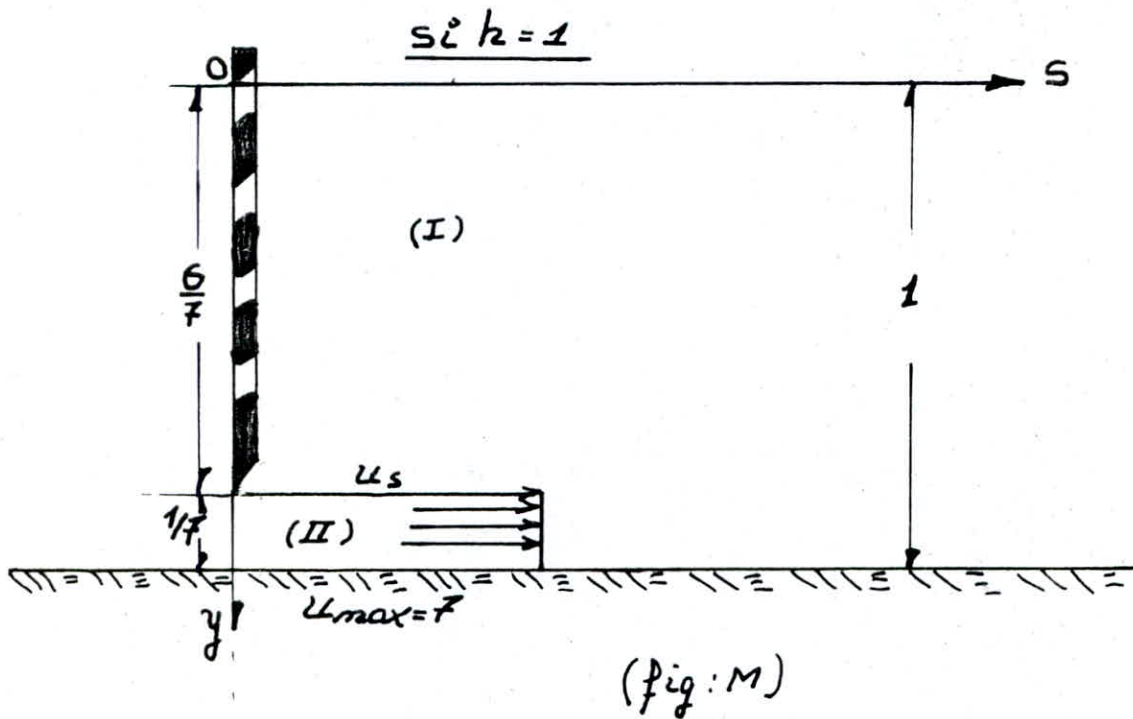
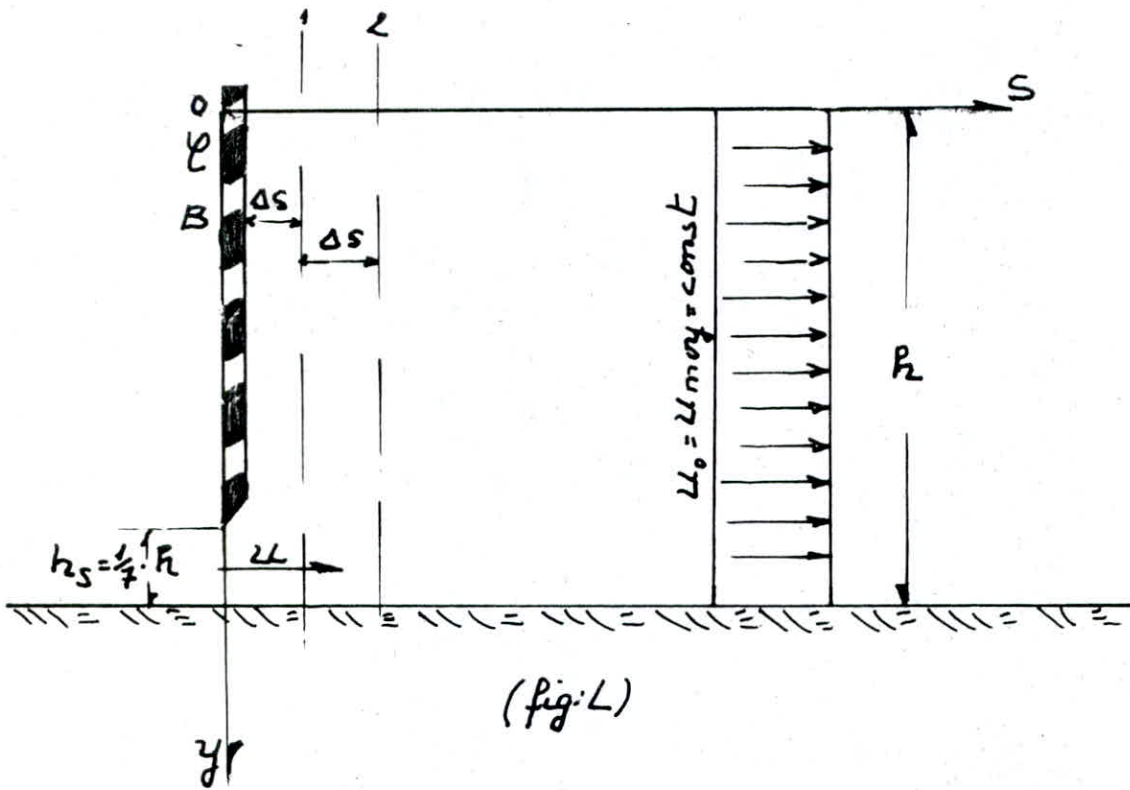
Résultats analytiques après résolution :

Pour résoudre ce système par la méthode numérique il faut chercher comment ce fait la distribution de la vitesse (u) et de la pression (B) pour $s=0$ (section approchée de 0)

Dans ce but on prend le système :

$$\begin{cases} \mathcal{U}'' - \hat{u} \cdot K \cdot \mathcal{U} = -\hat{u} \cdot K \cdot \mathcal{U} + B \quad (1) \\ \mathcal{Z}'' - \hat{u} \cdot K \cdot \mathcal{Z} = 1 \end{cases}$$

et l'étudier analytiquement pour un cas concret d'après le schémas suivants :



* pour la solution de l'équation (1):

prenons $h_s = \frac{1}{7} h = \frac{1}{7}$ avec $h=1$

$u_0 = u_{\text{moy}}$ dans la section régulière

d'où, $\frac{u_{\text{moy}}}{u_0} = \hat{u}_{\text{moy}} = 1 \equiv u_{\text{moy}}$

d'où l'équation de continuité: $\left[\frac{u_s}{u_0} \equiv u_s \right]$

$$Q = u_s \cdot h_s = u_{\text{moy}} \cdot h = \text{const} \Rightarrow \frac{u_{\text{moy}} \cdot h}{h_s} = \frac{1 \times 1}{\frac{1}{7}} = 7$$

- on peut diviser le domaine de l'écoulement en deux parties I et II

$$a) 0 \leq y \leq \frac{6}{7} \rightarrow \begin{cases} \hat{u} = 1 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$b) \frac{6}{7} \leq y \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \hat{u} \left[\frac{u_s}{u_0} \right] = 7 \\ \varphi \left[\frac{u_s}{u_0} \right] = 7 \end{cases}$$

- Pour une étude complète se refaire au Polycopé [1] intitulé:
<étude de la distribution de vitesses dans un ressaut hydraulique>

CONCLUSION (déduction de l'étude):

Les équations obtenues après calcul sont:

$$\text{VI} \begin{cases} u_I = C_I (e^{\sqrt{K} \cdot y} + e^{-\sqrt{K} \cdot y}) - 0,52383 \\ u_{II} = C_{II} \cdot e^{-\sqrt{K} \cdot y} + 6,2517 \end{cases}$$

avec les coefficients C_i calculés:

$$\underline{C_I = C_{II} = 0,001024}$$

$$\underline{C_{III} = 0 \quad C_{IV} = -1,4438 \cdot 10^{10}}$$

CHAPITRE IV

IV-1 Solution-numérique à l'aide des différences finies:

a) Recherche de L'Algorithme:

- Les équations (VI) (solutions) trouvées se ne sont que des solutions pour une seule section au niveau de la vanne. Pour généraliser et cela pour différentes sections, il nous faut établir un algorithme.

Nous allons étudier le système primitif

$$\text{qui est } \begin{cases} z' \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - B \\ \int_0^1 u d\eta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - B \\ \int_0^1 u dy = 1 \text{ avec } \eta \rightarrow y \end{cases}$$

Appliquons la méthode des différences finies pour résoudre le système considéré :

Rappel : sur le segment $[x_0, L]$ avec $L = \text{longueur du Ressort}$

vérifiant la condition initiale pour $x = x_0$ ou $s = s_0 = 0$ [vanne]

$u = u_0$. Introduisons les notations qui nous serviront par la suite. Les valeurs approchées de la solution aux points : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ avec le même pas $\Delta x = 0,01$ soit $\Delta s = 0,01$

sont : $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$

- Les premières différences ou les différences du 1^{er} ordre seront:

$$\Delta U_0 = U_1 - U_0 ; \Delta U_1 = U_2 - U_1 \dots ; \Delta U_n = U_{n+1} - U_n$$

Les différences du 2^{ème} ordre sont:

$$\Delta^2 U_0 = \Delta U_1 - \Delta U_0 = U_2 - 2U_1 + U_0$$

$$\Delta^2 U_1 = \Delta U_2 - \Delta U_1 = U_3 - 2U_2 + U_1$$

⋮
⋮
⋮

$$\Delta^2 U_{n-1} = \Delta U_n - \Delta U_{n-1} = U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}$$

Remarque:

- Les différences des différences du 2^{ème} ordre sont appelées différences du troisième ordre ... etc

désignons par U'_0, U'_1, \dots, U'_n les valeurs approchées des (données) dérivées et par

$U''_0, U''_1, \dots, U''_n$ valeurs approchées des dérivées 2^{ème} ordre
... etc

On détermine d'une manière analogue les premières différences des dérivées:

$$\Delta U'_0 = U'_1 - U'_0 ; \Delta U'_1 = U'_2 - U'_1 ; \dots ; \Delta U'_n = U'_{n+1} - U'_n$$

et les secondes différences des dérivées

$$\Delta^2 U'_0 = \Delta U'_1 - \Delta U'_0 ; \Delta^2 U'_1 = \Delta U'_2 - \Delta U'_1 ; \dots ; \Delta^2 U'_{n-1} = \Delta U'_n - \Delta U'_{n-1}$$

Alors nous donnons sur les frontières d'un rectangle

$$0 \leq x \leq a$$

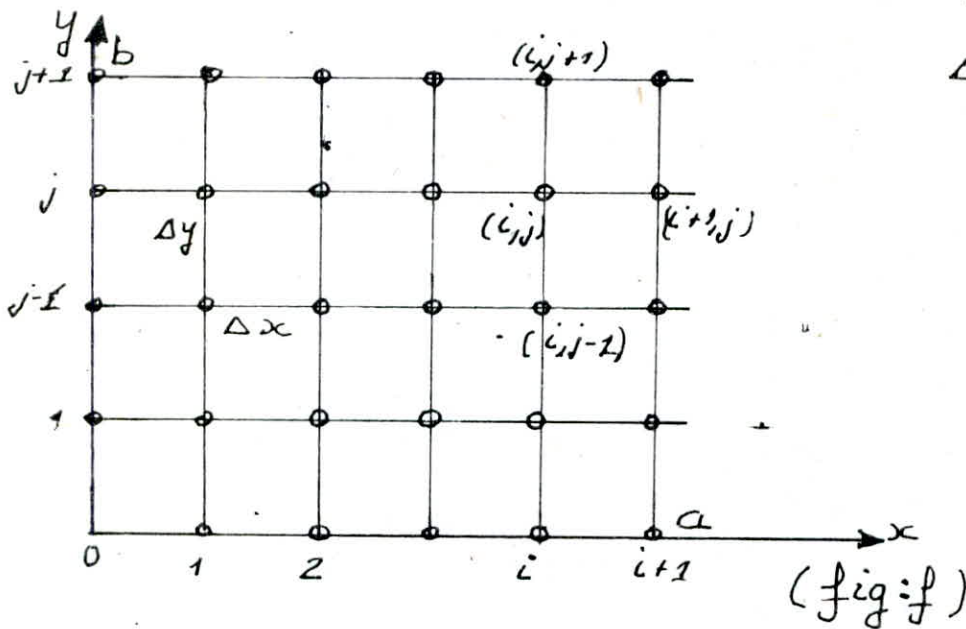
$$0 \leq y \leq b$$

traçons les familles de droites $x = ih + x_0$
 $y = j\ell + y_0$

découpons le rectangle en petites cellules de côtés :

$$\Delta x = \frac{a}{N}$$

$$\Delta y = \frac{b}{M}$$



Nous cherchons les valeurs de la solution aux sommets de ces cellules (Noeuds)

Nous n'avons pas à distinguer les noeuds du rectangle initial $(0, 0)$; $(a, 0)$; (a, b) ; $(0, b)$ étant donné qu'ils n'interviennent pas dans les raisonnements ultérieurs

Notre domaine sera celui de la grille.

Nous désignons les valeurs approchées de la fonction cherchée aux points x, y par u_{ij}

$$\text{c'est à dire : } u(x, y) = u(i\Delta x, j\Delta y) = u_{ij}$$

Soit $\Delta x = h$; $\Delta y = l$

on sait que $\frac{\partial \mathcal{U}(x, y)}{\partial x} = \frac{\mathcal{U}[(x+h); y] - \mathcal{U}(x, y)}{h}$
(1)

(2): $\frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, y)}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \left[\frac{\mathcal{U}(x+h; y) - \mathcal{U}(x, y)}{h} - \frac{\mathcal{U}(x, y) - \mathcal{U}(x-h; y)}{h} \right]$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\mathcal{U}(x+h, y) - 2\mathcal{U}(x, y) + \mathcal{U}(x-h, y)}{h^2}$$

Analogiquement pour :

(3): $\frac{\partial \mathcal{U}(x, y)}{\partial y} = \frac{\mathcal{U}(x; y+l) - \mathcal{U}(x; y)}{l}$
 ∂y

(4): $\frac{\partial^2 \mathcal{U}(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\mathcal{U}(x; y+l) - 2\mathcal{U}(x; y) + \mathcal{U}(x; y-l)}{l^2}$

on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} \Big|_{x=ih} \Big|_{y=jl} = \frac{\mathcal{U}_{i+1, j} - 2\mathcal{U}_{i, j} + \mathcal{U}_{i-1, j}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} \Big|_{x=ih} \Big|_{y=jl} = \frac{\mathcal{U}_{i, j+1} - 2\mathcal{U}_{i, j} + \mathcal{U}_{i, j-1}}{l^2} \end{cases}$$

* Notre équation est :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = \tilde{u} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}$$

avec gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x} = B = \text{const}$

- Assimilant notre écoulement (sous la vanne) à un mouvement dans un sillage (jet) d'eau. En considérant que le ressaut est noyé de façon que la surface libre ne sera perturbée (horizontale)

L'équation aura une solution approchée que celle d'un mouvement dans un sillage c'est à dire :

$$a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = \tilde{u} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \quad \text{qui a un sens physique que si } \tilde{u} \neq 0$$

Rq1: Le terme $\frac{\partial P}{\partial x}$ étant négligé raison de la même allure et convergence des deux fonctions : $f(u_I + u_{II})$ et $g(u_I + u_{II} + B(z_I + z_{II}))$ avec $\mathcal{U} = u_I + u_{II}$ au lieu de $\mathcal{U} = u_I + u_{II} + B(z_I + z_{II})$

(voir figs). Notre équation devient : $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = \tilde{u} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$ avec $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ (VII)

- Pour l'équation VII aura un sens physique que si $\tilde{u} > 0$ pour cela ; posons $\tilde{u} = b^2$ carré parfait toujours $> 0 \forall b \neq 0$
 $b \in \mathbb{R}$

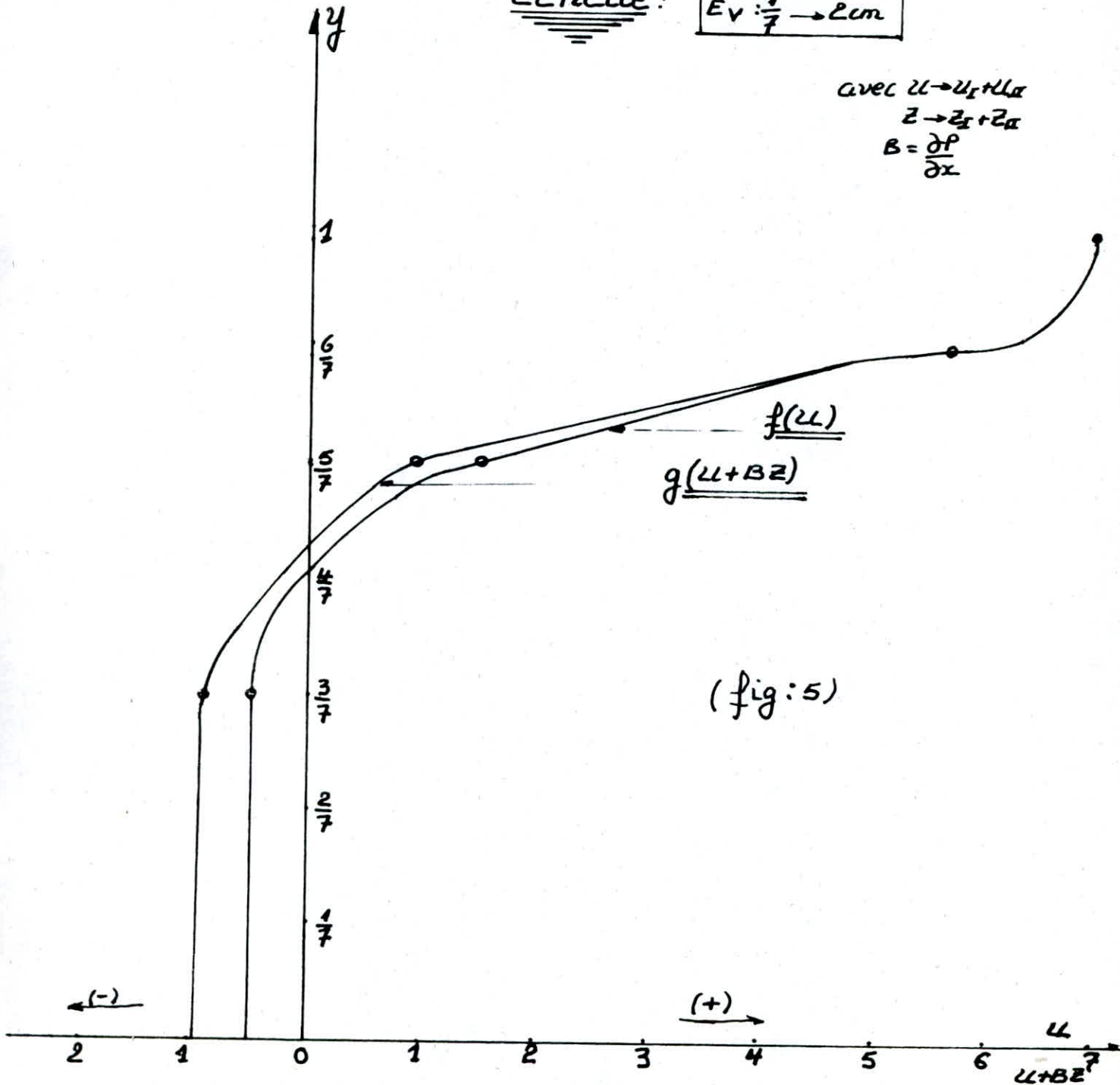
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = b^2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \quad \text{en posant } a^2 = \frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}} \quad \text{(VIII)} \quad a \in \mathbb{R}$$

Echelle:

$E_H: 1$	$\rightarrow 2\text{cm}$
$E_V: \frac{1}{7}$	$\rightarrow 2\text{cm}$

avec $u \rightarrow u_1 + u_2$
 $z \rightarrow z_1 + z_2$
 $B = \frac{\partial p}{\partial x}$



Rq:2 - (a) est définie comme coefficient variable dont la valeur est en fonction de la turbulence d'écoulement.

* La solution de cette équation vérifiant les conditions aux limites ; $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$ (pas de frottements et s. libre horizontale) ; \mathcal{U} est $\mathcal{U}(x, y)$ dans le rectangle délimité par les droites (voir fig: f ci dessus) : $y=0$; $x=0$; $x=L$; $y=h$ avec L : longueur du ressort
 h : profondeur.

couvrant ce rectangle d'une grille formée par les droites $x = i \cdot h$; $i = 1, 2, \dots$ ici h est le pas suivant x .

$y = j \cdot \ell$; $j = 1, 2, \dots$ avec ℓ pas suivant y ;

- déterminons ensuite les valeurs approchées des solutions aux nœuds de cette grille ; comme nous l'avons précisé avant ; c'est à dire aux points d'intersection de ces droites $x = i \cdot h$; $y = j \cdot \ell$.

Introduisons les notations $\mathcal{U}(i \cdot h ; j \cdot \ell) = \mathcal{U}_{i,j}$

- Écrivons au lieu de l'équation (VIII), l'équation correspondante en f différences finies pour le point $(i \cdot h ; j \cdot \ell)$. Conformément aux formules (1, 2, 3, 4)

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} = \frac{a^2(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}))}{l^2}$$

définissons $u_{i+1,j}$

$$u_{i+1,j} = \left(1 - 2a^2 \frac{h}{l^2}\right) u_{i,j} + a^2 \frac{h}{l^2} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \quad (\text{VIII}')$$

à partir de cette formule, nous pouvons obtenir une valeur approchée de la solution à condition que $h \leq \frac{l^2}{2a^2}$.
La formule (VIII') se simplifie si le pas $h = \Delta y$ est choisi de sorte que

$$1 - \frac{2a^2 \cdot h}{l^2} = 0$$

ce qui donne : $h = \frac{l^2}{2a^2}$

⇒ (VIII') prend la forme :

$$u_{i+1,j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2} \quad (\text{VIII''})$$

ou : $u_{i,j} = (u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1})/2$; (IX)

qui présente notre algorithme cherché

- Cette formule (IX) est particulièrement commode pour les calculs qui suivent.

Rappel :

- Au niveau de la vanne, on a trouvé

$$U = U_I + U_{II} \quad \text{pour } 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{ou } \left. \begin{array}{l} U = U_I \\ U = U_{II} \end{array} \right\} \text{ pour } 0 \leq y \leq \frac{6}{7}$$

$$\left. \begin{array}{l} U = U_I \\ U = U_{II} \end{array} \right\} \text{ pour } \frac{6}{7} \leq y \leq 1$$

$$\text{avec } U_I = U_{0,j}^I = 0,001024 (e^{10y} + e^{-10y}) - 0,52383$$

$$\text{pour } \Delta s = 0,01 ; K = \frac{1}{\Delta s} = 100 \text{ pt } 0 \leq y \leq \frac{6}{7}$$

L'équation $U_{0,j}^I$ devient

$$0,002048 \cosh\left(\frac{y}{10}\right) - 0,52383 \quad \text{avec } j \in [0, 86]$$

$$\text{car la borne sup: } \frac{6}{7} = 0,86 \Rightarrow 10 \cdot y_j = 10 \cdot \frac{6}{7} = 8,6 = \frac{86}{10}$$

c'à d: pour l'argument $10 \cdot y_j$:

$$10 y_0 = 10 \frac{0}{10} = 0$$

$$10 y_1 = 10 \frac{1}{10} = 1$$

$$10 y_2 = 10 \frac{2}{10} = 2$$

$$\vdots$$
$$10 y_3 = 10 \frac{3}{10} = 3$$

$$\vdots$$
$$10 y_j = 10 \cdot \frac{8,6}{10} = \frac{86}{10} = \frac{j}{10} \quad \text{avec } j \in [0, 86]$$

Analogiquement pour $U_{0,j}^{II}$:

$$U_{0,j}^{II} = -1,4438 \cdot 10^{10} \cdot e^{-\sqrt{700} \cdot \frac{j}{100}} + 6,92517 \quad \text{avec } K = 100$$

$$U_{0,j}^{II} = -1,4438 \cdot 10^{10} \exp(-\sqrt{700} \cdot \frac{j}{100}) + 6,92517 \quad \text{avec } j \in [86, 100]$$

c'à d $y \in [\frac{6}{7}, 1]$ ou après transformation $y \in [\frac{86}{100}, \frac{100}{100}]$

avec y devient j .

b) * Établissement du programme pour l'algorithme :

$$\text{on a : } U_{ij} = \frac{U_{i-1,j-1} + U_{i-1,j+1}}{2}$$

Néguations de N inconnues

$$\text{avec } U = U_{0,j}^I = 0,002048 \cosh\left(\frac{j}{100}\right) - 0,52383$$

pour $0 \leq j \leq 86$

$$U = U_{0,j}^{II} = -1,4438 \cdot 10^{10} \cdot e^{-\sqrt{700} \cdot j/100} + 6,92517$$

pour $j \in [86, 100]$

Rq: Pour l'exécution on a pris pour pas = 0,01 exactement
suivant σy , ce qui donne pour $U_{0,j}^I \rightarrow 0 \leq j \leq 86$
et pour $U_{0,j}^{II} \rightarrow 86 \leq j \leq 100$. c'a d 100 points entout $\rightarrow [0,1]$

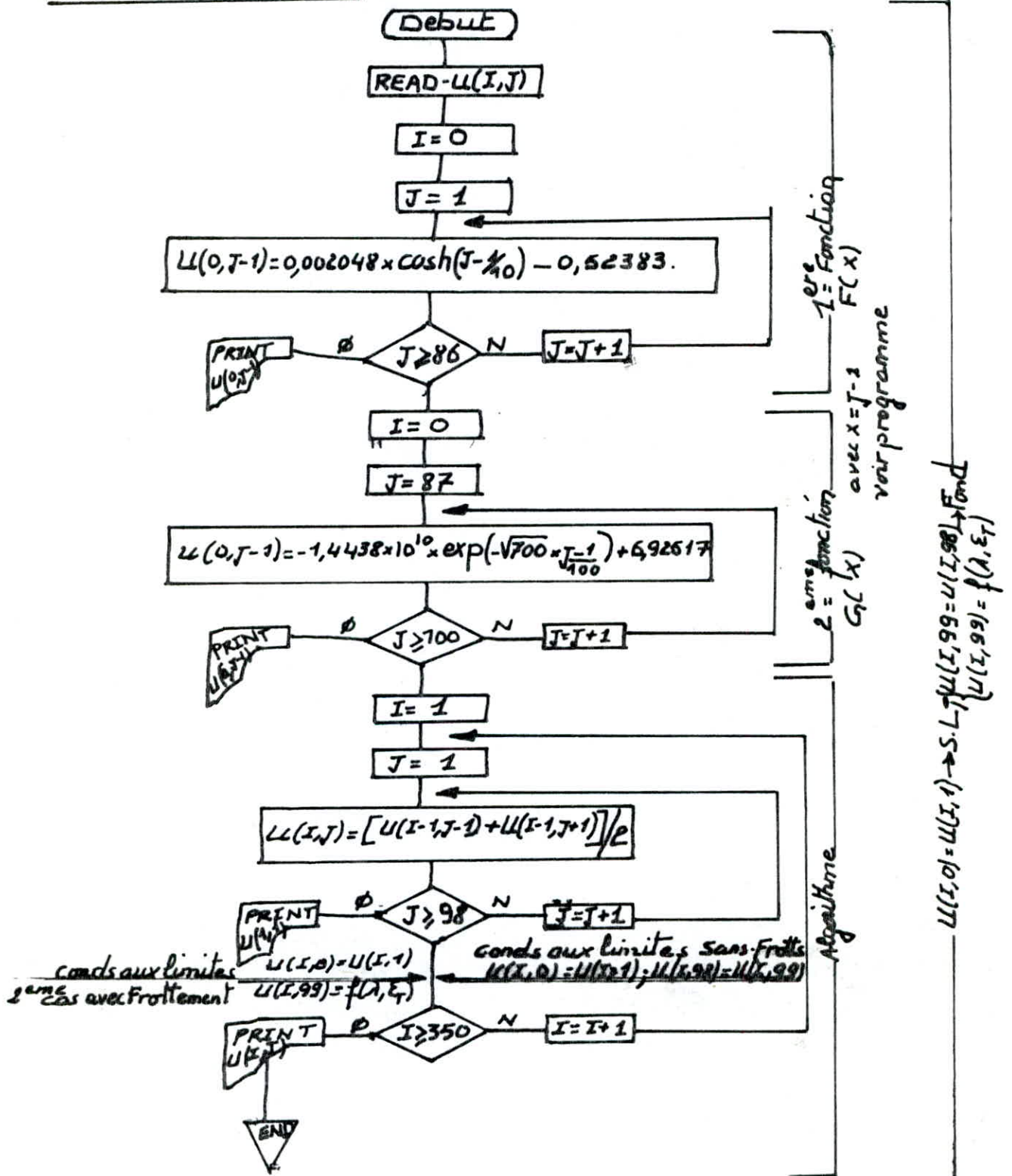
- Pour un calcul numérique rigoureux et précis, on a fait
recours au micro-ordinateur

- travail a été exécuté sur un VAX: VT102 et VR220

d'où l'obtention des résultats après avoir fait établir
l'organigramme et le programme :

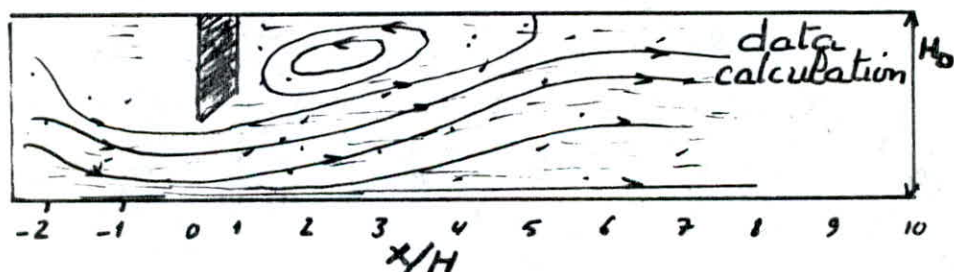
Voir les résultats sur l'annexe du Memoire

ORGANIGRAMME :

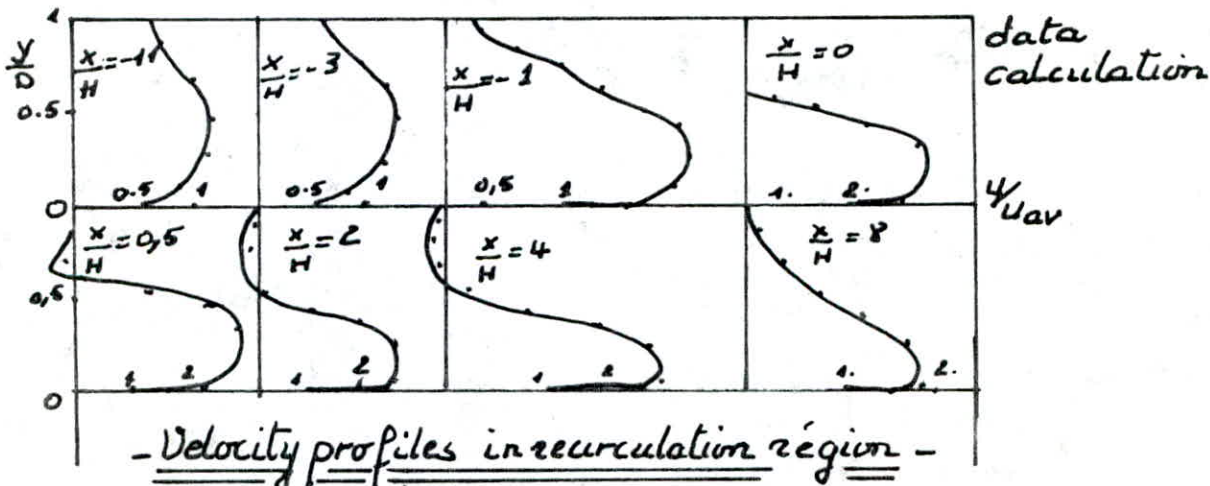


IV-2 Interprétation des résultats théoriques :

Suite aux diagrammes des vitesses élaborés (voir planche); à partir des résultats déduits par Ordinateur pour l'écoulement bidimensionnel (sous une vanne de fond), ceux-ci (diagrammes) concordent d'une manière satisfaisante aux diagrammes de vitesses tracés dans différents ouvrages; en citant comme exemple: Dans la publication de Reynolds W.C.; intitulée: « la simulation des modèles et leurs applications dans la turbulence » dans laquelle, l'auteur a relevé très soigneusement ce sujet (le notre), de même chez M^r RISH-J-F: « Etude de la structure du ressaut hydraulique »



a) STREAMLINES



- Velocity profiles in recirculation region -

d'après Reynolds W.C.
T.2 page 332

- on peut dire que l'assimilation de l'équation d'un sillage;
 $\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial x}$ nous a permis de faire une approche assez bonne
à la solution exacte de notre système de départ déduit des équations
de Reynolds.

- Pour l'ensemble des diagrammes tracés pour les deux cas, avec et sans
frottements, nous constatons que les vitesses demeurent négatives
au niveau des couches du fluide proches de la surface libre
et même à celle-ci, par contre en se rapprochant du fond, les
vitesses seront positives progressivement; mais au fond pour le
cas sans frottements, les vitesses ne varient que très légèrement.
De la section d'entrée à la section de sortie du ressaut, elles
valent: $\langle 6,84 \rightarrow 4,7 \text{ environ} \rangle$ (voir résultats sur l'annexe).

Pour le deuxième cas avec frottements au niveau du fond et même
à partir du milieu de la section presque, les vitesses deviennent
exclusivement positives croissantes en se dirigeant vers le fond.

Remarque: Les courbes des vitesses avec frottements sont moins aplatis
que celles sans frottements et se rapprochent de plus en plus de l'origine
(0) - VANNE - Ce qui montre la justesse de l'évolution des vitesses (profils)
de la surface libre vers le fond si nous faisons comparaison avec les profils
tracés suivant Reynolds par la suite celle de la méthode appliquée
afin de résoudre notre modèle mathématique.

- Plus loin du ressaut à partir de la section ($I=2000$) voir programme, le profil des vitesses devient exclusivement positif pour les deux cas (avec et sans frottements); ce qui peut être conclu que l'écartement fluvial est atteint.

Remarque 2: La deuxième constatation est :

suite à la condition aux limites du fond : $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\lambda \zeta^2}{8 \cdot \epsilon_T}$ (avec frottement)

avec :

- * λ = coefficient de perte de charge qui est estimé à $\lambda = 0,03$ pour notre canal et :

- * ϵ_T : coefficient de turbulence

- 1^{er} cas : $\epsilon_T = 0,03$ constant car existent des expériences dans la littérature qui montrent que pour les sillages libres, ϵ_T peut être constant

- 2^{ème} cas : ϵ_T pris variable. Pour simple curiosité nous avons fait varier ϵ_T linéairement comme suite : $\epsilon_T = K \cdot x + 0,03$ pour l'intervalle : $\epsilon_T \in [0,003, 0,03]$

avec $K = -0,009 = \text{tg} \alpha$

pour $x=0$; $\epsilon_T = 0,03$
 pour $x=L=3$; $\epsilon_T = 0,003$
 (avec $L = \text{longueur du Ressaut}$)

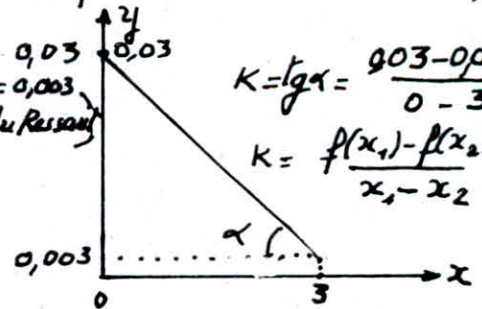
$$K = \text{tg} \alpha = \frac{0,03 - 0,003}{0 - 3}$$

$$K = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

CONCLUSION:

En conséquence :

- en comparant les profils des vitesses obtenus avec ϵ_T constant et ϵ_T variable linéairement



nous constatons que l'influence de la variation du coefficient de turbulence le long du courant est insignifiante (voir fig. 10 des diags)

-CHAPITRE V

V.1 Etude expérimentale

a) Dispositif expérimental

- Généralités sur les canaux :

La gamme des canaux est d'une qualité remarquable, et comporte de nombreuses innovations techniques. De construction soignée, les canaux sont disponibles dans plusieurs longueurs standards, et conviennent parfaitement aux besoins de la recherche et l'enseignement hydraulique. On sait que les canaux sont toujours le siège de l'écoulement à surface libre. Ils comportent une section généralement de forme géométrique simple, dont la plus grande largeur est précisément à la surface libre, ils sont nécessairement (pour des grandes longueurs) dotés d'une légère pente vers l'aval, pente égale à celle de la ligne d'énergie pour les écoulements qui les empruntent.

- Notre expérience est faite dans un canal horizontal de section rectangulaire de largeur 25 cm, profondeur de 50 cm et longueur 10 m. Le fond du canal est en acier et les parois latérales sont vitrées et à sa partie centrale est placée une vanne de fond en plexiglas qu'on peut déplacer de bas en haut.

- tube de pitot :

Principe :

En l'absence de perte de charge et pour un filet liquide horizontal

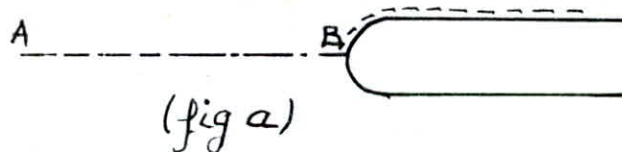
on a :
$$P + \rho \frac{v^2}{2} = \text{cste}$$

Immergeons un obstacle contre lequel vient buter le filet liquide (fig a). Considérons un point A en amont et le point B où le filet liquide rencontre l'obstacle.

En A la pression est égale à la pression statique P_s et la vitesse est v

En B la pression est égale à la pression totale P_t et la vitesse est 0 d'où

$$P_t = P_s + \rho \frac{v^2}{2}$$



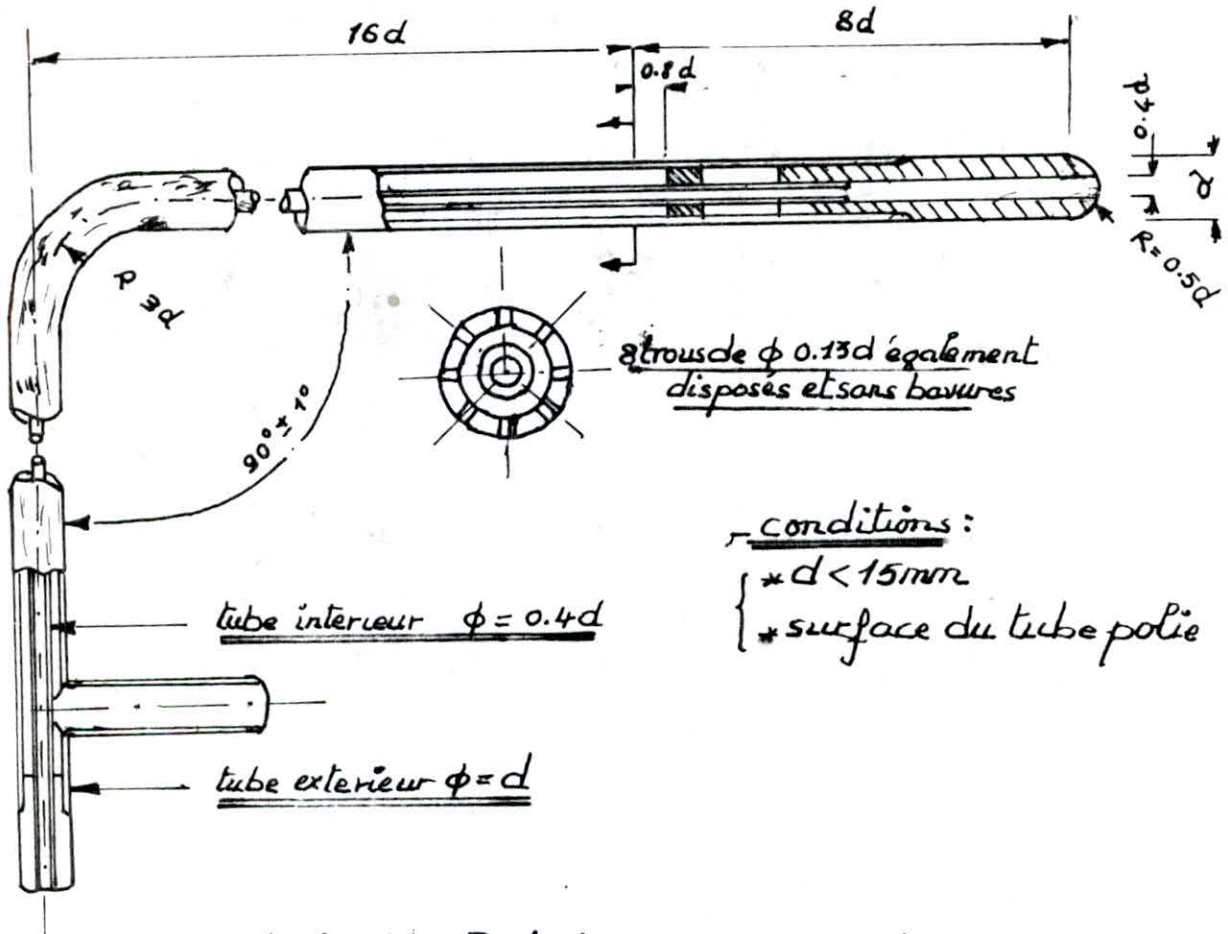
$$v = \sqrt{2 \frac{P_t - P_s}{\rho}}$$

Pour connaître la vitesse en un point, on est donc conduit à mesurer la pression différentielle ΔP entre la pression totale et la pression statique ; cette mesure se fait avec une antenne appelée tube de Pitot

- La hampe doit avoir une longueur minimum de $24d$

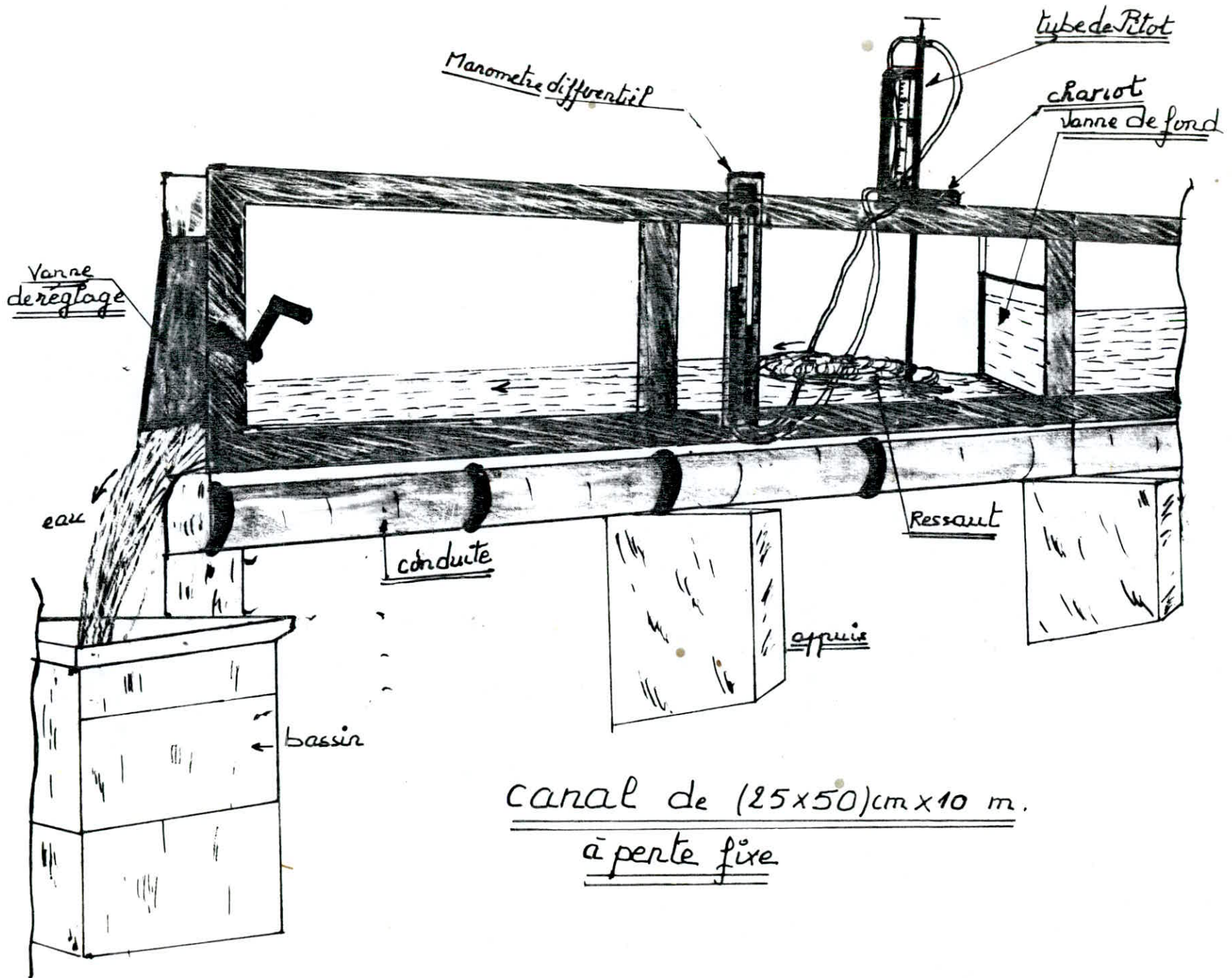
- En écoulement permanent on a: $v = \alpha \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$

avec $\alpha = 1$ si le nombre de Reynolds $Re > 500$



- tube de Pitot (vue en coupe).

647



b) Lois de similitude :

on sait que Couette a tenu compte des lois de similitudes physique dans ses considérations, qui ont conduit à la définition du Nombre de Reynolds : Re_d

- Bref aperçu sur cette notion de similitude importante pour l'hydraulique Moderne :

* Deux Mouvements sont mécaniquement semblables, s'ils satisfont ^{les} aux conditions :

- 1) Sont géométriquement semblables (trajectoires, formes des masses fluides semblables etc...)
- 2) grandeurs homologues de même nature physique (forces, vitesses, ... etc) sont entre elles dans le même rapport qui peut être différent suivant la nature de la grandeur.

Soient :

* L, l deux grandeurs caractéristiques homologues et $\lambda_i = \frac{L}{l}$

* M, m deux masses homologues élémentaires et $\beta_i = \frac{M}{m}$

* $K_1, K_2, K_3, \dots, k_1, k_2, k_3, \dots$ forces agissant sur les masses

et $\alpha = \frac{K}{k}$

* T, t , temps correspondants et $\tau_i = \frac{T}{t}$

* V, v , vitesses correspondantes aux masses M, m et $\varepsilon_i = \frac{V}{v}$

Rq : Les Majuscules \rightarrow Nature ; minuscules $\rightarrow M^v t$ dans le modèle réduit).

ou par définition de la vitesse :

$$(1) \quad \xi_i = \frac{m/s}{m/s} = \frac{v}{v} = \frac{L_i}{V_i} = \frac{\lambda_i}{\tau_i}$$

à l'aide de la loi du Mouvement de Newton :

$$(2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = k$$

on obtient la relation de Bertrand :

$$(3) \quad \beta_i \frac{\lambda_i}{\tau_i^2} = \partial_i = \frac{K}{k} ; \frac{M}{m} \left(\frac{L}{\tau_i} \right)^2$$

on peut déterminer de ces équations le thème suivant :

- Pour que deux $M^{\nu ts}$ soient mécaniquement semblables, il faut et il suffit que :

- 1) Conditions aux limites de $M^{\nu ts}$ (conditions d'entrée et de sortie de l'eau, débits ... etc) dans la nature et dans le modèle soient mécaniquement semblables entre elles.

- 2) Les forces $K_1, K_2, \dots, k_1, k_2, \dots$, remplissent la condition suivante en tous les points et à tout moment :

$$\beta_i \frac{\lambda_i}{\tau_i^2} = \frac{K_1}{k_1} = \frac{K_2}{k_2} = \frac{K_3}{k_3} = \dots$$

Rq : Par forces nous entendons ici par (forces physiques) qui dépendent des propriétés de la matière ex : (pesanteur dépend de l'accélération due à la gravité (g)), (le frottement du fluide (caractérisé par sa viscosité) ... etc

Dans ce cas les pressions normales à l'intérieur du fluide ne sont pas des forces physiques car elles dépendent des forces de réactions (forces passives) qui sont les conséquences de $M \neq t$ et non la cause du Mouvement

Suivant que les forces physique en présence remplissent les conditions (1) ou non; la ~~la~~ similitude de $M \neq t$ est possible ou non.

Le procédé général pour étudier s'il existe ou non une loi de similitude, consiste donc à écrire l'équation dynamique du Mouvement en employant des valeurs relatives et en tenant compte de l'équation de continuité. Une loi de similitude éventuelle, si elle existe en résulte d'elle même.

Si une contradiction apparaisse dans l'équation dynamique ainsi obtenue, cela signifie qu'il existe justement pas de loi de similitude univoque.

- Dans l'application de cette notion au $M \neq t$ des liquides, nous pouvons distinguer deux types principaux de Mouvement:

*1) Système en charge.

*2) Système à surface libre.

Chacun de ces deux types principaux peut être encore subdivisé

en:

- Écoulement dans des ouvrages courts (ouvrages dont la rugosité des parois n'a aucun rôle important mais insignifiant

pour le Mouvement (déversoirs, chambre de dissipation d'énergie, etc...)

- Ecoulement dans des ouvrages longs (ouvrage dont la rugosité est importante ($M \neq \tau_s$ graduellement variable dans les canaux découverts ou dans les longues conduites en charge etc...))

* Considérons le système avec Surface libre sans frottements internes. Dans ce système c'est la pesanteur qui est la force externe prépondérante on a :

dans la nature : $K_1 = Mg$

dans le modèle : $K_1 = m \cdot g$

de sorte que $\beta_i \frac{\lambda_i}{\tau_i^2} = \frac{Mg}{mg} = \beta_i$ et $\frac{\lambda_i}{\tau_i} = 1$ ou $\tau_i = \sqrt{\lambda_i}$

ou $\frac{\lambda_i}{\tau_i} = \varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i}$

- Si l'on revient aux grandeurs absolues et si l'on multiplie l'équation encore par la constante $\frac{1}{\sqrt{g}}$ on aura : $\frac{V}{\sqrt{g \cdot L}} = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l}} = F_r$ c'est le nombre de Froude.

d'où l'énoncé :

* Dans la nature et dans le modèle, le nombre de FROUDE des deux mouvements doit être le même c'est la loi de similitude de Froude,

*Résumé :

Pour système avec surface libre :

ouvrages courts avec frottement négligeable : loi de Froude

ouvrages longs avec turbulence complètement établie :

Loi généralisée de Froude (éventuellement avec rugosité des parois conforme).

*Remarque importante :

après avoir rendu conforme la rugosité des parois lorsque celle-ci ne peuvent pas être reproduite à l'échelle; en partant de ces lois générales, on a pu indiquer également les lois de similitude pour les rivières transportant des matières solides et pour les écoulements souterrains.

c. Méthode de mesure

- Au préalable fixons un débit d'arrivée en manipulant la vanne d'alimentation, déterminons sa valeur (m^3/s) par l'utilisation du déversoir triangulaire; lisons par la suite la hauteur initiale h_0 dans le bassin qui correspond au niveau de l'eau dans ce dernier avant le déversement de l'eau.
 - Pour chaque débit correspond une hauteur h_i lue sur le limnimètre. la différence $h_i - h_0$ donne h_i , puis à l'aide du tableau d'étalonnage du déversoir triangulaire on extrait les débits $Q_i \rightarrow h_i$
 - Après avoir fixé le débit; nous déplaçons la vanne de fond de façon à obtenir une ouverture désirée
 - En faisant changer la valeur du débit à l'aide de la vanne d'alimentation et la vanne de réglage, nous obtenons le ressaut noyé
 - une fois le ressaut noyé est positionné à la sortie juste de l'ouverture (stable), nous commençons à prendre des mesures dans différentes positions suivant oy (profondeur) d'une section définie du ressaut noyé. Ainsi nous pouvons opérer pour différentes sections et ceci grâce au tube de pitot déjà monté et placé sur un chariot au dessus de notre canal (voir fig E)
- Rq: Les mesures prises sont lues sur un manomètre relié directement au tube de Pitot qui sont: $|P_t - P_s|$ respectivement pression totale et statique d'où l'évaluation de la vitesse $V_i = \sqrt{\frac{(P_t - P_s) \cdot 8}{\rho}}$
- sont en colonne d'eau: $V = \sqrt{(P_t - P_s) \cdot 2g}$: P_t et P_s en mm.

d) - Résultats expérimentaux :

- Débit : Q -

Il est évalué en mesurant d'abord les hauteurs d'eau h_i lues sur un limnimètre placé au niveau du bassin :

avec h_0 : hauteur initiale d'eau avant que la lame se déverse

$h_0 = 10,50 \text{ cm}$ c'est à dire à partir de l'arête du déversoir.

Une fois que l'écoulement se stabilise c'est à dire, la hauteur amont dans le canal est gardée constante, on prélève les h_i :

$$h_i = 29,20 \text{ cm}$$

$$\text{d'où } h_i - h_0 = 18,7 \text{ cm} = 187 \text{ mm}$$

en utilisant le tableau des débits pour le déversoir triangulaire (voir ci-dessous) :

$$\text{on aura pour } \Delta h = h_i - h_0 = 187 \text{ mm} \rightarrow \boxed{Q = 10,46 \text{ l/s}}$$

- a = ouverture de la vanne = 1,5 cm.

- h_{av} = hauteur d'eau à l'aval du ressaut = 10,5 cm

d'où $U_{\max} = \frac{h_{av}}{a} = 7$ adimensionnel (vitesse maximale)

- U_0 = vitesse moyenne dans la section régulier et b : largeur du canal

$$U_{av} = U_0 = \frac{Q}{b \cdot h_{av}} = \frac{10,46 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10,5 \cdot 10^{-4}} = 0,4 \text{ m/s}$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

- Détermination de la hauteur critique h_{cr} :

$$\text{par déf : } h_{cr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^3 \cdot g}} = \sqrt[3]{\frac{(10,46)^2 \cdot 10^{-6}}{(25)^3 \cdot 9,81 \cdot 10^{-4}}} = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$$

$$h_{cr} = 6 \text{ cm} \Rightarrow h_{av} > h_{cr} : 10,5 \text{ cm} > 6 \text{ cm} \text{ vérifiée}$$

- vitesse critique :

$$U_{cr} = F \sqrt{g \cdot h_{cr}} = \sqrt{9,81 \cdot 0,06} = \sqrt{0,6086} \text{ m/s} \approx 0,785 \text{ m/s}$$

avec F = nombre de FROUDE = 1

Le débit est donné par la formule

$$Q = \frac{1}{3} \mu \frac{b}{h} \sqrt{2g} \left[\frac{4}{5} \left(h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{5/2} - 2h \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \frac{4}{5} \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^{5/2} \right]$$

en négligeant la vitesse d'approche on obtient

$$Q = \frac{4}{15} \mu \rho h \sqrt{2gh}$$

étant donné que la mesure exacte de la largeur l de la nappe est très difficile, on introduit l'expression $l = 2 h \operatorname{tg} \alpha$
d'où le débit

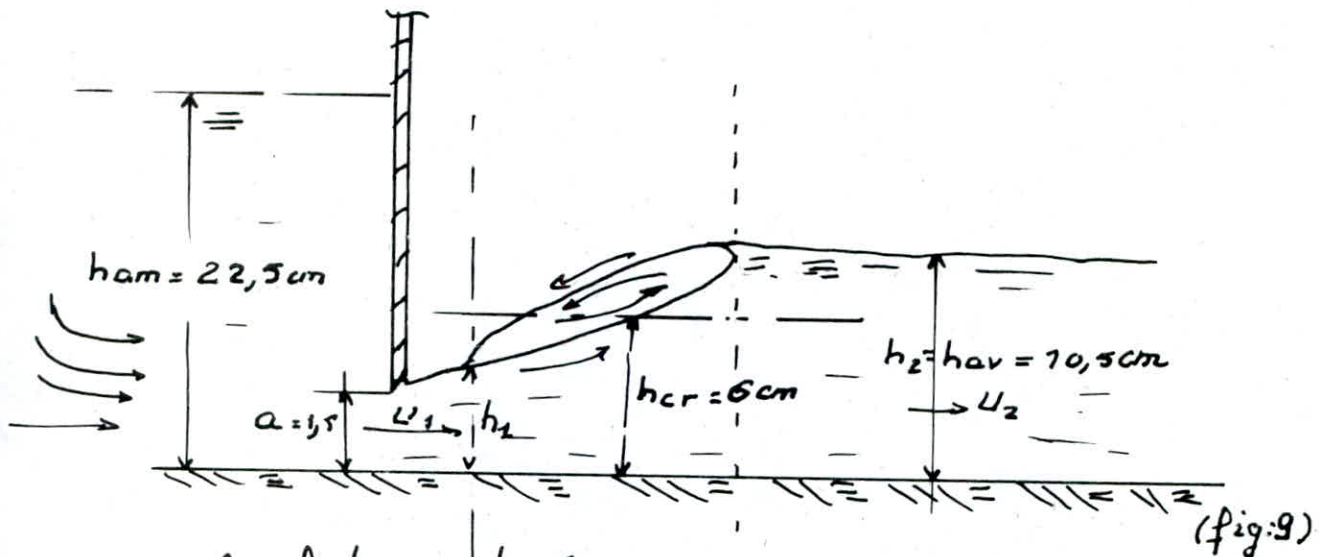
$$Q = \frac{8}{15} \mu \operatorname{tg} \alpha h^2 \sqrt{2gh}$$

V - Exemples : Tableau d'étalonnage d'un déversoir triangulaire (type SOGREAH normalisé) $2\alpha = 53^\circ 8'$ $p = 0,65m$ $L = 1,20m$
situé à l'extrémité du grand canal vitré.
étalonnage à 1% près.

h (mm)	Q (l/s)	h (mm)	Q (l/s)	h (mm)	Q (l/s)	h (mm)	Q (l/s)
80	01,25	110	03,31	156	06,64	194	11,46
81	01,29	119	03,38	157	06,75	195	11,63
82	01,33	120	03,44	158	06,87	196	11,77
83	01,38	121	03,53	159	06,98	197	11,92
84	01,42	122	03,60	160	07,08	198	12,06
85	01,46	125	03,67	161	07,19	199	12,21
86	01,50	124	03,74	162	07,30	200	12,36
87	01,54	125	03,82	163	07,43	201	12,52
88	01,59	126	03,90	164	07,54	202	12,69
89	01,64	127	03,98	165	07,65	203	12,84
90	01,68	128	04,05	166	07,76	204	13,00
91	01,73	129	04,13	167	07,88	205	13,15
92	01,77	130	04,21	168	07,99	206	13,33
93	01,82	131	04,30	169	08,11	207	13,49
94	01,88	132	04,38	170	08,25	208	13,65
95	01,93	133	04,46	171	08,36	209	13,81
96	01,98	134	04,54	172	08,48	210	13,97
97	02,03	135	04,63	173	08,60	211	14,16
98	02,08	136	04,71	174	08,74	212	14,32
99	02,14	137	04,81	175	08,87	213	14,49
100	02,19	138	04,91	176	09,00	214	14,65
101	02,24	139	04,98	177	09,1	215	14,82
102	02,30	140	05,07	178	09,24	216	15,00
103	02,35	141	05,16	179	09,39	217	15,18
104	02,41	142	05,26	180	09,51	218	15,35
105	02,47	143	05,35	181	09,64	219	15,52
106	02,53	144	05,44	182	09,77	220	15,70
107	02,59	145	05,53	183	09,90	221	15,87
108	02,65	146	05,63	184	10,03	222	16,08
109	02,71	147	05,74	185	10,19	223	16,25
110	02,78	148	05,83	186	10,32	224	16,43
111	02,84	149	05,93	187	10,46	225	16,61
112	02,90	150	06,03	188	10,59	226	16,78
113	02,97	151	06,12	189	10,73	227	16,96
114	03,03	152	06,21	190	10,89	228	17,18
115	03,11	153	06,34	191	11,03	229	17,36
116	03,17	154	06,44	192	11,17	230	17,55
117	03,24	155	06,54	193	11,31	231	17,75

- VITESSE à l'avalée:

$$U_{av} = 2l_0 = \underline{0,4 \text{ m/s}}$$



- Calcul des ondes (vitesse) au niveau critique :

$$\text{C'est } U_{cr} = \sqrt{g h_{cr}} = \sqrt{9,81 \cdot 0,06} \approx \underline{0,769 \text{ m/s}}$$

avec $F_r = \text{Froude} = 1$

- Calcul du nombre de FROUDE :

$$F_r = \frac{U^2}{g h}$$

à la section d'entrée : avec $h_1 = 5 \text{ cm}$ et $U_1 = \sqrt{g h_1} = \sqrt{9,81 \cdot 0,05} \cdot F_r$

$$F_r = \frac{U_1^2}{g \cdot h_1} = ?$$

vitesse d'entrée

- à l'ouverture : on sait que le débit entré est égale au débit de sortie . $Q_1 = Q_2 = Q = 10,46 \text{ l/s}$

$$Q = a \cdot b \cdot U_1 = (1,5 \cdot 25)_{\text{cm}} \cdot U_1 = 10,46 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{10,46 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} \approx \underline{2,78 \text{ m/s}}$$

$$\Rightarrow F_r = \frac{(2,78)^2}{9,81 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} > 1 \Rightarrow \underline{\text{entrée} \rightarrow \text{Ecoulement turbulent}}$$

- à la sortie

$$F = \frac{Uz^2}{g \cdot h_{av}} = \frac{U_{av}^2}{g \cdot h_{av}} = \frac{(0,4)^2 \cdot 10^2}{9,81 \cdot 10,5} = \frac{16}{9,81 \cdot 10,5} < 1$$

⇒ sortie → écoulement fluvial

- tableaux récapitulatif des Résultats : $u^2 = (\Delta P) 2g$

$h_i = 29,20 \text{ cm}$; $h_o = 10,50 \text{ cm}$ $Q = 10,46 \frac{\text{l}}{\text{s}}$ $b = 25 \text{ cm}$
 $\alpha = 1,5 \text{ cm}$; $h_{av} = 10,5 \text{ cm}$
 $y_o = \text{hauteur de la section}$

Section	y_i (cm)	P_t (mm)	P_s (mm)	$P_t - P_s = \Delta P$ (mm)	u^2	u (m/s)	y_i/y_o	u_i/u_o	
<u>S=50</u>	0	96,5	78,0	18,50	0,36	0,60	0,000	1,50	
$b = \frac{25}{2}$ $y_o = 8 \text{ cm}$	1	211,0	69,0	142	2,78	1,67	0,125	4,17	
	2	86,50	60,0	26,50	0,52	0,72	0,250	1,80	
	3	54,0	53,5	0,50	0,01	0,19	0,375	0,25	
	4	43,0	44,0	-1,0	/	/	0,500	/	
	6	29,0	31,0	-2,0	/	/	0,750	/	
	8	12,0	18,0	-6,0	/	/	1,000	/	
	Section	y_i	P_t	P_s	$P_t - P_s$	u^2	u	y_i/y_o	u_i/u_o
	<u>S=50</u>	0	95,5	78	17,50	0,35	0,59	0,000	1,47
$b = \frac{25}{4}$ $y_o = 8 \text{ cm}$	1	205,0	68	137,0	2,69	1,64	0,125	4,10	
	2	80,50	56	24,50	0,48	0,69	0,250	1,73	
	3	48,0	47,5	0,50	0,01	0,10	0,375	0,25	
	4	37	39	-2,0	/	/	0,500	/	
	6	24	28	-4,0	/	/	0,750	/	
	8	9	15	-6,0	/	/	1,000	/	

Tab: B

section	y_i (cm)	P_E (mm)	P_S (mm)	$P_E - P_S$	$z z^2$	$z z_{m/s}$	$\frac{y_i}{y_0}$	$\frac{z z_i}{z z_0}$
<u>S=100</u>	0	107	94,0	13	0,26	0,51	0	1,28
b = $\frac{25}{2}$ y ₀ = 9cm ALU-MILITEN	1	175,5	81,5	94	1,85	1,36	0,110	3,40
	2	159,5	76,0	83,50	1,64	1,28	0,220	3,21
	3	69,0	65,0	4,0	0,08	0,28	0,330	0,70
	6	31	33	-2,0	/	/	0,670	/
	9	12	15	-3,0	/	/	1,000	/
	section	y_i	$P_{E_{mm}}$	$P_{S_{mm}}$	$P_E - P_S$	$z z^2$	$z z_{m/s}$	$\frac{y_i}{y_0}$
<u>S=100</u>	0	105,5	93,0	12,50	0,24	0,50	0	1,24
b = $\frac{25}{4}$ y ₀ = 9cm PRES de LA PAROI	1	172,5	83,5	89,50	1,75	1,32	0,110	3,30
	2	149,0	71,0	78,50	1,53	1,24	0,220	3,09
	3	66,5	63,0	3,50	0,07	0,26	0,330	0,66
	6	35,0	37,0	-2,0	/	/	0,670	/
	9	14	18	-4,0	/	/	1,000	/

Tab: C

section	y_i (cm)	P_t (mm)	P_s (mm)	$P_t - P_s$ (mm)	U^2	U m/s	$\frac{y_i}{y_0}$	$\frac{U_i}{U_0}$
$S=4,5$	0	110	102	8,0	0,16	0,40	0,0	1,00
AU MILIEU $\frac{b}{2}$	1	146	91	55	1,08	1,04	0,100	2,60
	2	127	80	47	0,92	0,96	0,200	2,40
	3	81	71	10	0,19	0,44	0,300	1,10
	4	60,5	60	0,5	0,01	0,10	0,40	0,25
	6	41	42	-1	/	/	0,60	/
	8	29	31	-2	/	/	0,80	/
	10	15	18	-3	/	/	1,00	/
$y_0 = 10$ cm								
section	y_i cm	P_t mm	P_s mm	$P_t - P_s$	U^2	U m/s	$\frac{y_i}{y_0}$	$\frac{U_i}{U_0}$
$S=1,5$	0	108,5	101,0	7,50	0,15	0,38	0,0	0,96
PRÈS DE LA-PAROI $\frac{b}{4}$	1	143,0	92,0	51,0	1,00	1,00	0,100	2,50
	2	126,5	81,0	45,5	0,89	0,94	0,200	2,36
	3	81,0	72,0	9,00	0,17	0,41	0,300	1,04
	4	65,5	65,0	0,50	0,01	0,10	0,400	0,25
	6	41,0	43,0	-2,0	/	/	0,600	/
	8	22,0	26,0	-4,0	/	/	0,800	/
	10	8,00	13	-5,0	/	/	1,00	/
$y_0 = 10$ cm								

e) CONCLUSION:

Suite aux résultats (voir tableaux A, B, C):

Nous pouvons conclure que:

1°) L'influence des parois latérales peut être négligée ce qui implique l'écoulement est bidimensionnel

- à: $\frac{b}{2} = \frac{25}{2}$ cm au milieu du canal et à: $\frac{b}{4} = \frac{25}{4}$ cm près des parois, nous constatons qu'il y ait une légère variation entre les pressions totales P_t elles même et légère variation entre pressions statique et $\frac{b}{2}$ pour $y=0$ ma

$$\begin{cases} P_t = 96,5 \text{ mm} \\ P_s = 78,0 \text{ mm} \end{cases} \text{ et à: } \frac{b}{4} \text{ pour } y=0 \rightarrow \begin{cases} P_t = 95,5 \text{ mm} \\ P_s = 78 \text{ mm} \end{cases} \text{ (tab: A)}$$

de même pour tous les y_i .

2°) En comparant les profils des vitesses dans différentes sections du ressaut obtenus analytiquement avec ceux des vitesses mesurées expérimentalement, nous pouvons dire que:

- Il existe une ressemblance et assez bonne coïncidence entre les profils issus de l'expérience et ceux issus de la théorie.

- L'existence de la partie du profil négatif avait lieu et que le passage de la partie positive à l'autre coïncide de même.

Remarque: Les résultats de la partie négative ne peuvent être utilisés (des pressions afin d'évaluer les vitesses)

raison pour laquelle nous constatons que, en se rapprochant de la surface libre le sens de l'écoulement (au niveau du ressaut) change de sens

Dans ce cas pareil, il faut inverser la position du tube de pitot mais notre installation ne le permet pas.

p) CONCLUSION GENERALE :

Suite aux résultats

obtenus, nous pouvons conclure qu'il est possible de résoudre le problème posé par la solution directe des équations différentielles partielles

- 2^{ème}) : Au niveau de la vanne (section initiale), le problème peut être résolu purement analytiquement (fonctions u_1 et u_2 trouvées)
- 3°) : Nous avons pris comme point de départ ces fonctions citées pour étendre la solution numérique afin de résoudre le problème de la répartition des vitesses dans les différentes sections du ressaut hydraulique
- 4°) Le système d'équations obtenu était simplifié en négligeant le terme de gradient de pression $\frac{\partial P}{\partial x} \approx 0$, pour avoir une solution approchée du système qui devient par la suite simple à résoudre (voir graphe fig: 5)
- 5°) Le système à résoudre $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ \int u dy = 1 \end{cases}$ est le modèle mathématique de celui d'un sillage libre qui pourra être résolu par la méthode des différences finies numériquement (avec et sans forces de frottements) pour les différentes conditions aux limites.

suite à la Conclusion

Les résultats de la solution par la méthode indiquée sont présentés sur les diagrammes (voir fig: A1)

- 6°) L'influence de la variation du coefficient ε_T de turbulence le long du courant sur le profil des vitesses est pratiquement négligeable.

- 7°) La comparaison entre l'étude théorique et celle de l'expérience pour $u_{max} = 7$ révèle une similitude des parties positives des profils des vitesses. Ces résultats de notre étude ne sont que pour $u_{max} = 7$ pour une étude complète, il faut poursuivre celle-ci pour différents u_{max} et faire une bonne expérience en appliquant les autres méthodes et comparer enfin les résultats théoriques et expérimentaux des autres recherches.

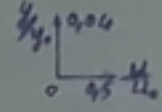


BIBLIOGRAPHIE

- ARNOLD-V: Equations différentielles ordinaires: EDITION: MIR-1974
- BRLIN-E-A: Introduction à l'étude de la couche limite: G. VILLARS - 1955
- CARLIER-M: Hydraulique générale et appliquée: EYROLLES - 1980
- CRALISSE: Hydraulique des canaux découverts en R. Permanent: EYROL-1960
- COMOLET-R: Mécanique expérimentale des fluides (T: 2): Masson et Cie-1979
- Communications présentées
à la société hydrotechnique: Mécanique des fluides
de FRANCE et la magnétohydrodynamique : EYROLLES-1961
- DEMIDOVITCH-B, Cours élémentaire de mathématiques
KOULDRIAVISEV-V supérieurs EDITION: MIR-1982
- DHATT-G: Une présentation de la méthode des éléments finis: MALOINE-1984
TOUZOT-G
- ESCANDE-L: Complément d'hydraulique (2^{ème} partie): DUNOD-1960
- GERMAIN-P: Mécanique des milieux continus: Masson et Cie -1962
- HOUILLÉ-BLANCHE: (Revue) Années: 1970-1983-1985
- JAEGER: Hydraulique technique : DUNOD - 1960
- LENGASTRE-A: Manuel d'hydraulique générale: EYROLLES-1961
- NOVIKOWSKI-C: Méthodes de calcul numérique (T: 2): EDIT: PSI-84
- OUZIAUX-R: Mécanique des fluides appliquée: DUNOD - 1978
PERRIERV
- PISKOUNOV-N: Calcul différentiel et intégral (T: 2): ED-MIR-1980
- REYNOLDS-W.C: La simulation des modèles dans la turbulence (T: 2)-1984
- SEKKOUTI-B } MEMOIRE: Etude de la distribution des vitesses
SENOUCI-A } dans un Ressaut hydraulique [1] - 1986 EYROLLES-
- TISON-L-T: Cours d'hydraulique (T: 2) DUNOD-1969
- RISH-F-J: Etude de la structure du Ressaut. PUBLICATION - 1984
COANTIC-M } Hydraulique de recherches
LEUTHLUSSH-H-T

avec 1^{er} $\epsilon_T = 0,03$ et 2^{ème} $\epsilon_T = K \cdot x + 0,03$

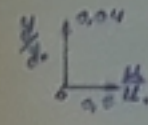
ECHELLE:



○ Résultats expérimentaux



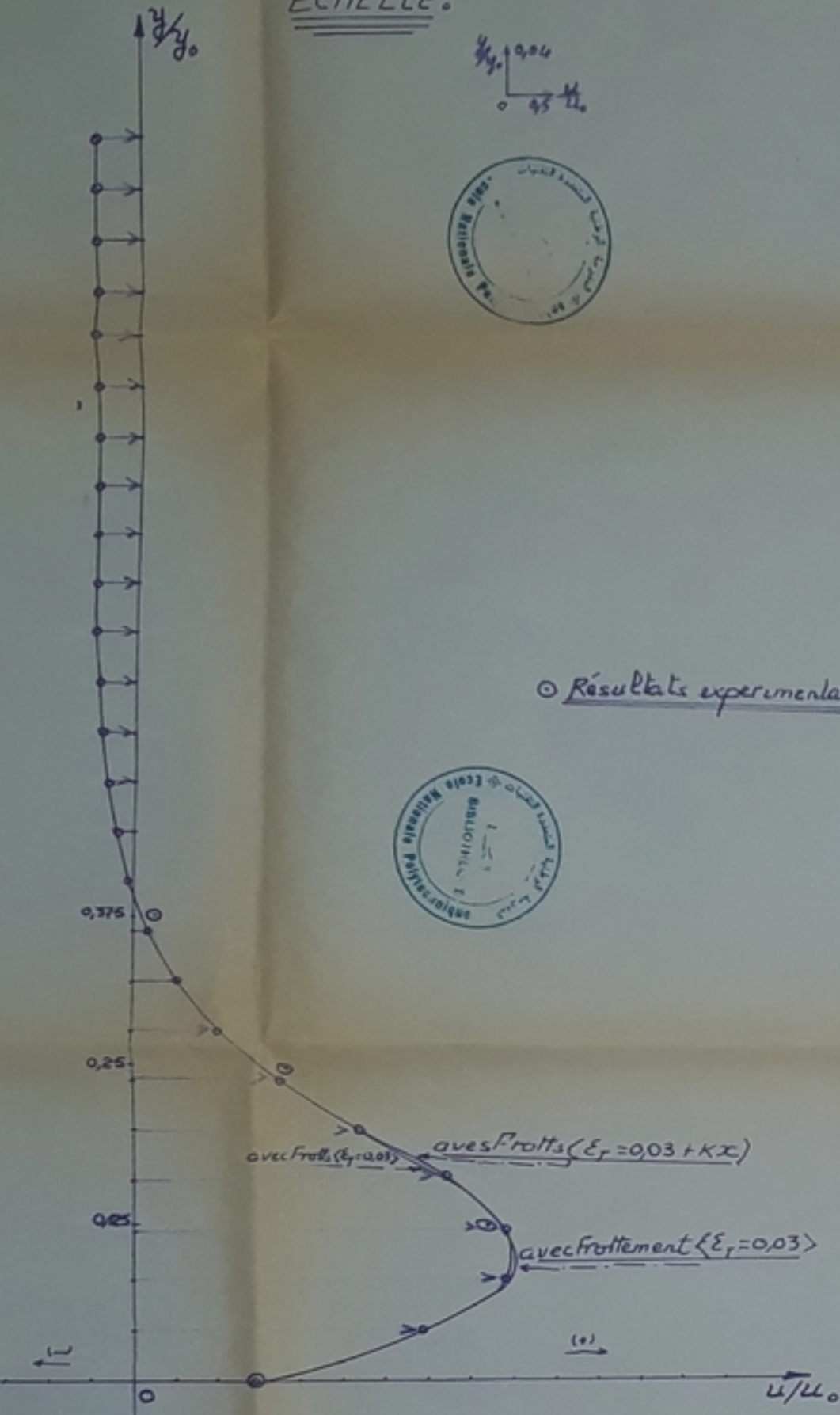
ECHELLE:



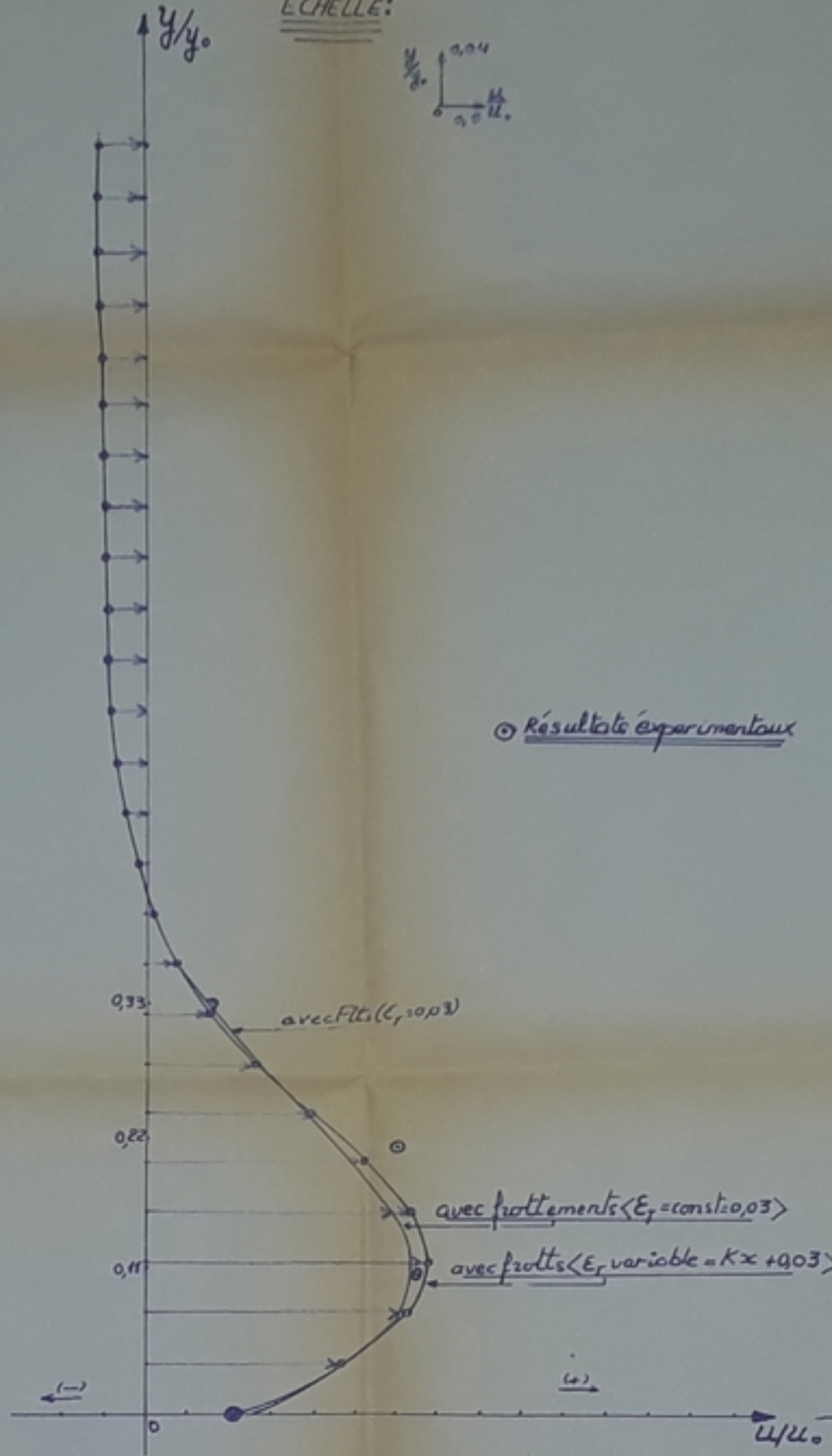
○ Résultats expérimentaux



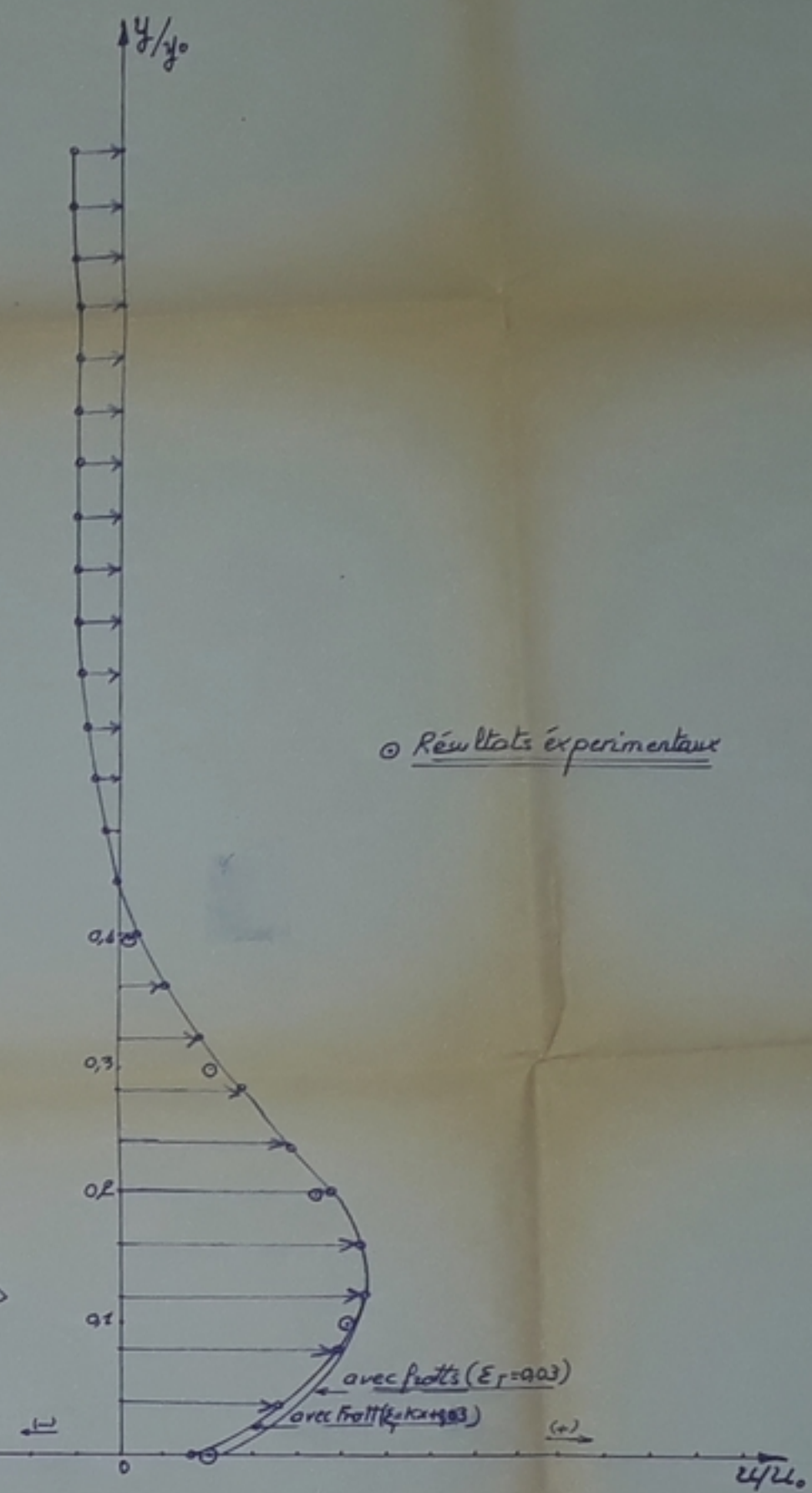
○ Résultats expérimentaux



Section I=50



Section I=99



Section I=148

PROFILS des vitesses (avec frotts) dans Ressaut

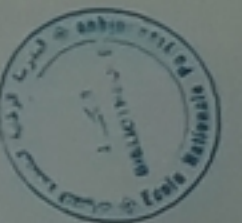
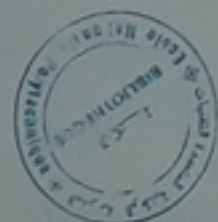
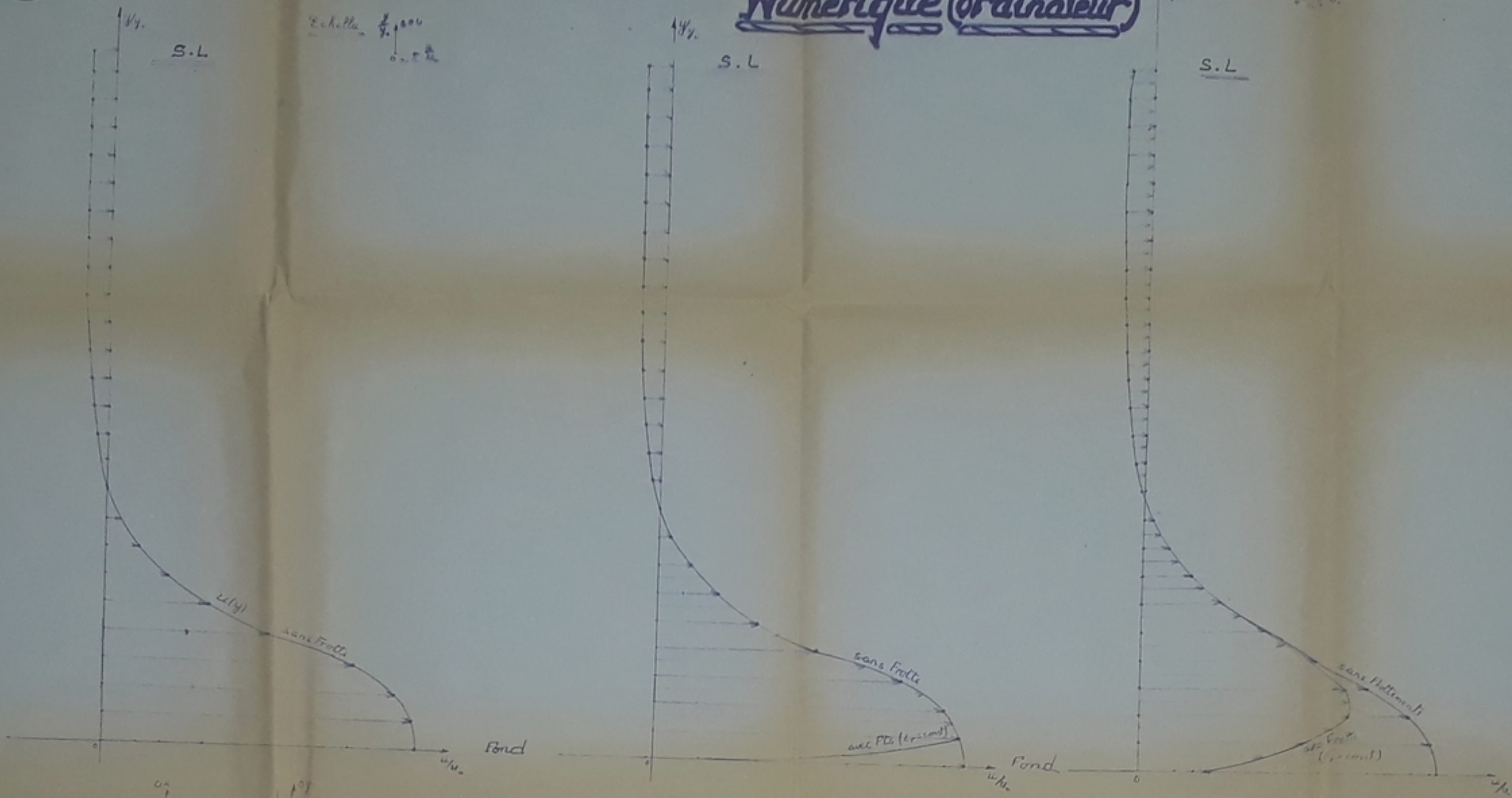


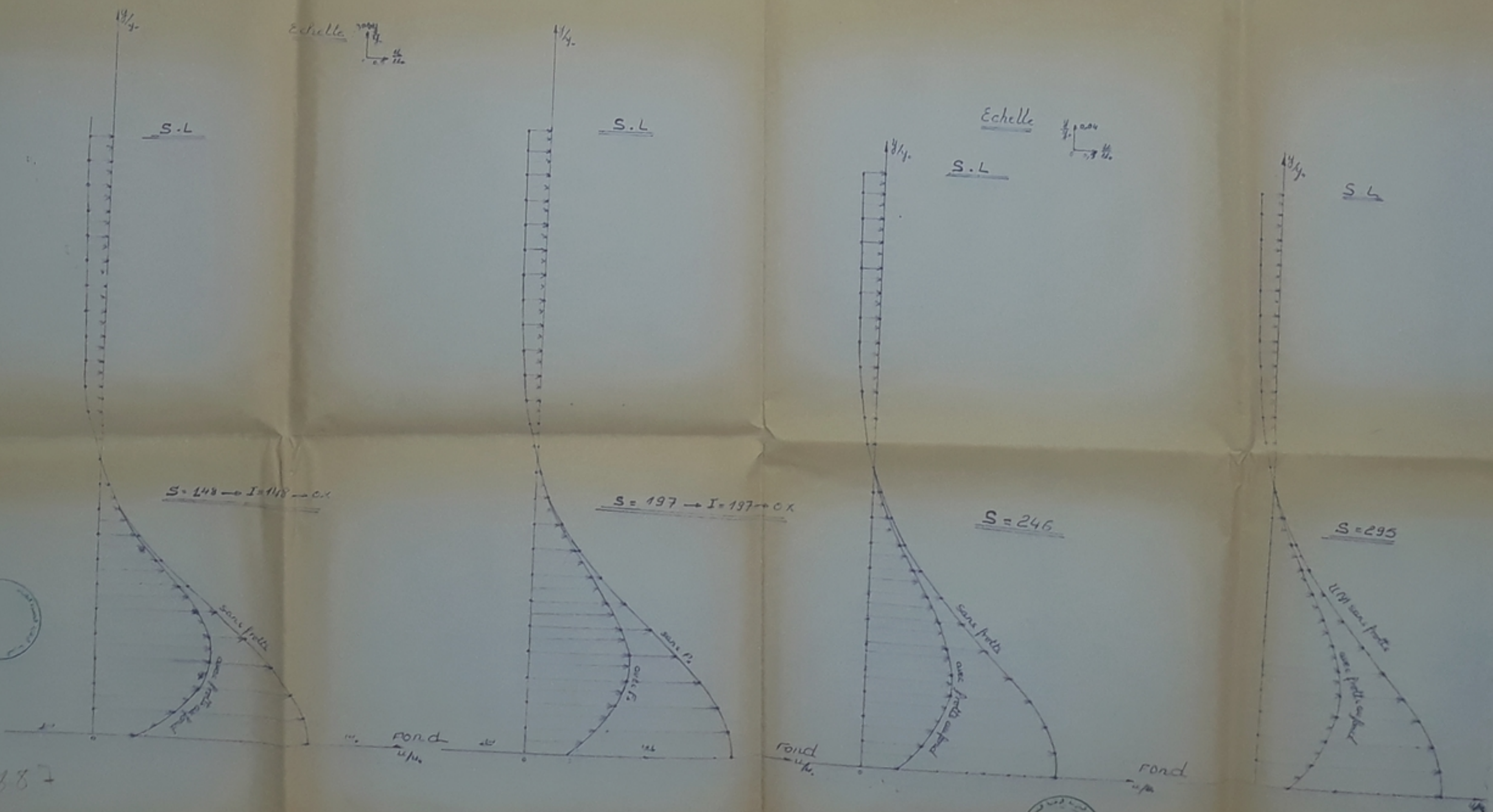
Diagramme des vitesses déduit du calcul Numérique (ordinateur)



$S = 0 \rightarrow I = 0 \rightarrow C.K.$
 ou $I = 3$ (logarithmique) $\frac{1}{2} = 2, 500 \rightarrow 2, 500$

$S = 1 \rightarrow I = 1, 700 \rightarrow C.K.$

$S = 50 \rightarrow I = 50 \rightarrow C.K.$



$S = 148 \rightarrow I = 148 \rightarrow C.K.$

$S = 197 \rightarrow I = 197 \rightarrow C.K.$

$S = 246$

$S = 295$

PH00887

-2-

