

M0017/94B

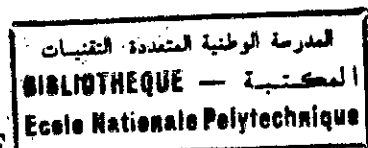
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE-MECANIQUE

OPTION: CONSTRUCTION MECANIQUE



THESE

Présentée en vue de l'obtention
du diplôme de Magister

THEME

*Description du chemin de propagation
droite et circulaire par la méthode des
discontinuités de déplacement
en champ complexe*

Présentée par M. SAHNOUN : Ingénieur d'état de l'Ecole Nationale Polytechnique

Devant le jury:

- A. BALI	Professeur	E.N.P	Président
- S. RECHAK	Professeur	E.N.P	Examineur
- B. KEBLI	Ph.D	E.N.P	Examineur
- H. BELHANECHÉ	Dr	E.N.P	Examineur
- Y. BELKACEMI	Dr	E.N.P	Rapporteur

Juillet 1994

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE-MECANIQUE

OPTION: CONSTRUCTION MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

THESE

**Présentée en vue de l'obtention
du diplôme de Magister**

THEME

***Description du chemin de propagation
droite et circulaire par la méthode des
discontinuités de déplacement
en champ complexe***

Présentée par M. SAHNOUN : Ingénieur d'état de l'Ecole Nationale Polytechnique

Devant le jury:

- A. BALI	Professeur	E.N.P	Président
- S. RECHAK	Professeur	E.N.P	Examineur
- B. KEBLI	Ph.D	E.N.P	Examineur
- H. BELHANECHÉ	Dr	E.N.P	Examineur
- Y. BELKACEMI	Dr	E.N.P	Rapporteur

Juillet 1994

Remerciements

Ce travail a été effectué au département de Génie Mécanique de l'E.N.P sous la direction de Monsieur **Y. BELKACEMI**, qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de ma profonde gratitude pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont particulièrement à Monsieur **A. BALI** Professeur à l'E.N.P, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le Jury.

Je remercierai également Messieurs **S. RECHAK**, **B. KEBLI** et **H.BELHANECHÉ** pour avoir accepté de juger ce modeste travail en faisant partie de l'honorable jury.

Je n'oublierai pas de remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, plus particulièrement les membres du centre de calcul.

INTRODUCTION

1

CHAPITRE 1

PROBLEME ELASTIQUE PLAN EN CHAMP COMPLEXE

1.0	Introduction	6
1.1	Passage en champ complexe	6
1.2	Tenseur des contraintes et des déformations	7
1.3	Conditions au limites sur, un segment placé sur l'axe réel	8
1.4	Méthode des discontinuités et différents types de solution	11
1.5	Conclusion	12

CHAPITRE 2

SOLUTION FONDAMENTALE POUR UN ELEMENT DROIT

2.0	Introduction	14
2.1	Solution élémentaire	14
	Discontinuité d'ordre zéro	15
2.2	Discontinuité d'ordre supérieur	19
	2.2.1 Modèle linéaire	20
	2.2.2 Modèle quadratique	22
2.3	Conclusion	23

CHAPITRE 3

SOLUTION FONDAMENTALE POUR UN ELEMENT CIRCULAIRE

3.0	Introduction	24
3.1	Equations de Plemelj	24
3.2	Solution de problème	30
3.3	Discontinuité d'ordre zéro	31
3.4	Conclusion	32

CHAPITRE 4

PROCEDURE NUMERIQUE DE LA METHODE

4.0	Introduction	34
4.1	Transformation des coordonnées	34
4.2	Procédure numérique	37
4.3	Applications	40

CHAPITRE 5

APPLICATION DE LA METHODE A LA PROPAGATION DES FISSURES

5.0	Introduction	52
-----	--------------	----

5.1 Fissures de Griffith	52
5.2 Modes de la rupture	53
5.3 Analyse d'Irwin	54
5.4 Critère du taux de restitution d'énergie	57
5.5 Application	58
5.5.1 Propagation avec élément droit	58
5.5.2 Propagation avec élément circulaire	66
5.6 conclusion	70
CONCLUSION	72
BIBLIOGRAPHIE	74

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION



Les méthodes numériques constituent un ensemble de techniques d'analyse commune à plusieurs disciplines de sciences appliquées telles que le génie civil, génie mécanique, constructions aéronautiques et navales. La méthode des éléments finis et de différences finies ont atteint un haut niveau de développement et de popularité grâce aux développements mathématiques théoriques extraordinaires, les conditions d'application et de convergence. Il existe une autre approche qui peut offrir une simplicité, c'est la méthode des intégrales de frontière.

L'utilisation des transformations intégrales est l'une des méthodes les plus efficaces pour la résolution des équations différentielles. Son application permet d'abaisser d'une unité leur dimension et de ramener directement les équations intégrales à des équations algébriques. Les divers types de transformation s'obtiennent par un changement de variable dont le choix est dicté par la structure de l'équation et la géométrie du domaine.

Les composantes de déplacement et de tension s'obtiennent à partir des opérations sur une fonction de déplacement appelée potentiel. Dans certains problèmes il y a des fonctions qui permettent d'obtenir par simples dérivations les composantes de tension qui permettent de satisfaire les équations d'équilibre, de telles fonctions sont appelées potentiels de tension (SOLOMON [30]),. Les potentiels de déplacement présentent des avantages surtout dans le cas des corps isotropes et homogènes, alors que les potentiels de tension généralisent l'application notamment aux corps anisotropes non homogènes.

Cette méthode a bénéficié de nombreux développements en bidimensionnel. Elle a été étendue aux problèmes

tridimensionnels par WATSON et LACHAT, WILLES et ALL [18],[19],[33] qui ont développé des algorithmes numériques.

La méthode des discontinuités de déplacement est l'une des méthodes indirectes des intégrales de frontière très adaptés aux structures élastiques surtout dans les milieux fissurés, au comportement des fissures et à la description du chemin de fissuration.

Le développement en coordonnées cartésiennes a été fait par CROUCH [10],[11] en utilisant les potentiels de NEUBER PAPKOVITCH. Son inconvénient est que le contour soit découpé en éléments rectilignes et ceci nécessite une expérience dans la discrétisation des contours à courbure très variable. CROUCH dans son travail original a supposé la discontinuité de déplacement constante. CRAWFORD et AL [9] ont pu développer des éléments d'ordre supérieur mais les formules obtenues ont abouti à des intégrales difficiles à déterminer.

Lors de la formulation de la méthode en champ complexe une voie très intéressante s'est dégagée et ce grâce aux travaux de PANASYUK et AL [23], MUSKHELISHVILI et PARTON [22],[24]. Un effort très important a été consacré au développement de la méthode par BOUHADANE [4] et BELKACEMI [3].

Le premier chapitre est une présentation de l'écriture de la méthode des intégrales de frontière en champ complexe ainsi que la méthode des discontinuités et les différents types de solution.

Dans le deuxième chapitre nous développerons la formulation du cas de la méthode de discontinuité de déplacement. Les potentiels complexes seront déterminés pour les différents cas de discontinuité; constante, linéaire et quadratique.

Nous aborderons dans le chapitre trois les solutions fondamentales d'un contour circulaire en coordonnées polaires.

On développera par la suite la méthode de discontinuité avec des éléments circulaires à un noeud.

Le chapitre quatre sera consacré à la procédure numérique de la méthode en champ complexe avec les différents éléments en utilisant les conditions de symétrie, et enfin nous présenterons quelques exemples à titre de comparaison

En application de la méthode, on présentera un chapitre où l'on étudiera la description du chemin de propagation droite des fissures, et l'on développera un algorithme de couplage des éléments droits et circulaires. On étendra le cas pour une propagation curviligne.

CHAPITRE 1

PROBLEME ELASTIQUE PLAN EN CHAMP COMPLEXE

1.0 INTRODUCTION :

Le développement de la théorie d'élasticité sera basé dans ce chapitre sur la représentation complexe de l'élasticité plane, celle de KOLOSSOV (MILE THOMPSON [21]) s'est trouvée utile pour les solutions des problèmes aux valeurs frontières. La représentation complexe peut être généralisée et avec succès pour les corps anisotropes, de bons résultats sont obtenus par S.GLEKHNITZKY, SG.MIKHLIN et DI.SHERMAN (MUSKHELISHVILI [22]).

Le passage en champ complexe nous permet donc d'utiliser les relations de KOLOSSOV MUSKHELISHVILI et les propriétés des intégrales de CAUCHY.

1.1 PASSAGE EN CHAMP COMPLEXE

Lorsque les forces volumiques sont nulles, la fonction d'AIRY vérifie l'équation biharmonique $\Delta \Delta A = 0$.

$$\Delta(\Delta A) = \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} = 0 \quad (1.1)$$

La fonction d'AIRY A est donnée par GOURSAT (HENRY[13]) par :

$$A(x,y) = \text{Re} \left[\bar{z} \phi(z) + h(z) \right] \quad (1.2)$$

où $z = x+iy$, $\phi(z)$ et $h(z)$ sont des potentiels à déterminer

Cette solution de base a été développée et appliquée à de nombreux problèmes plans par KOLOSSOV et surtout MUSKHELISHVILI.

1.2 TENSEUR DE CONTRAINTE ET CHAMP DE DEPLACEMENT EN CHAMP COMPLEXE

En utilisant les relations :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

On pourra déterminer les dérivées de la fonction d'AIRY.

Ainsi les composantes des contraintes sont:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - \frac{1}{2} z \phi''(z) - \frac{1}{2} \overline{\phi''(z)} - \frac{1}{2} h''(z) - \frac{1}{2} \overline{h''(z)} \\ \sigma_{yy} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + \frac{1}{2} z \phi''(z) + \frac{1}{2} \overline{\phi''(z)} + \frac{1}{2} h''(z) + \frac{1}{2} \overline{h''(z)} \\ \sigma_{xy} &= i \left[-z \phi''(z) + \frac{1}{2} \overline{\phi''(z)} - \frac{1}{2} h''(z) + \frac{1}{2} \overline{h''(z)} \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\text{avec } \sigma_{xx} = A_{,yy} ; \sigma_{yy} = A_{,xx} \text{ et } \sigma_{xy} = -A_{,xy}$$

Les composantes des déplacements sont déterminées par les relations contraintes déformations.

Les relations de KOLOSSOV MUSKHELISHVILI qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 2 \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] = 4 \operatorname{Re} \left[\phi'(z) \right] \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2i\sigma_{xy} &= - \left[\bar{z} \phi''(z) + h''(z) \right] \\ 2\mu \left[U_x + iU_y \right] &= K \left[\phi(z) - \bar{z} \phi'(z) - \psi(z) \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec: μ est le coefficient de Lamé

$$\psi(z) = h'(z)$$

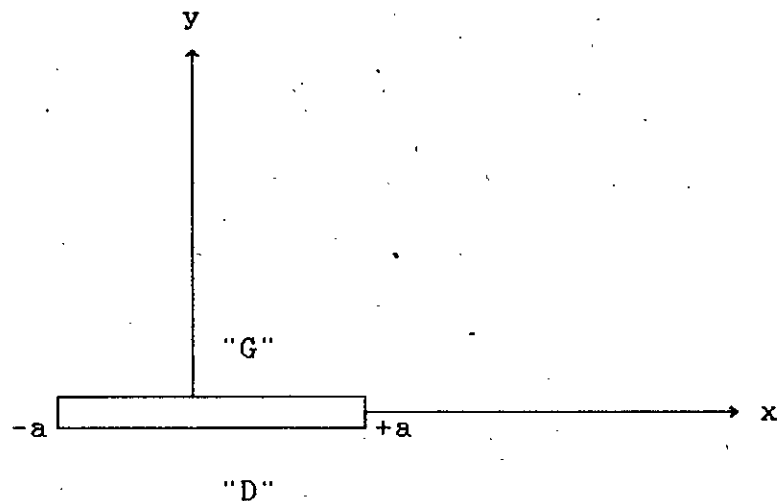
$$K = 3 - 4\nu \quad \text{en déformation plane}$$

$$K = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en contrainte plane}$$

où ν représente le coefficient de Poisson

1.3 CONDITIONS AUX LIMITES SUR UN SEGMENT PLACE SUR L'AXE REEL

Lorsqu'il s'agit d'une discontinuité constante comme le montre la figure ci-dessous, un changement de fonction pour des problèmes de domaines infinis proposé par MILNE-THOMSON [21] est utilisé.



FIG(1.1) Discontinuité de déplacement centrée sur l'axe des x

$$\Omega(z) = -\bar{z} \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}$$

(1.6)

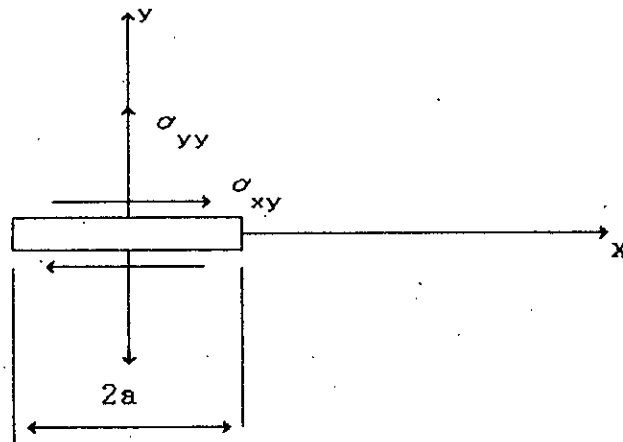
$$\text{d'où} \quad \overline{\psi(z)} = -\Omega(z) - \bar{z} \overline{\phi'(z)}$$

L'expression des déplacements se ramène à :

$$2\mu D(z, \bar{z}) = K \phi(z) - (z - \bar{z}) \phi'(z) + \bar{\Omega}(z) \quad (1.7)$$

Le problème consiste à rechercher une fonction vérifiant les conditions aux limites en contraintes sur les lèvres inférieures et supérieures d'une fissure.

Les contraintes qui sont appliquées sur les deux lèvres sont :



FIG(1.2) Les composantes des contraintes appliquées sur une fissure de longueur $2a$.

$$(\sigma_{xy}, \sigma_{yy}, 0) \text{ et } (-\sigma_{xy}, -\sigma_{yy}, 0)$$

Pour déterminer le vecteur contrainte, on doit calculer le nombre complexe $\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}$ à partir des relations de KOLLOSOV MUSKHELISHVILI.

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + z\overline{\phi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \\ &= \phi'(z) + (z - \bar{z}) \overline{\phi''(z)} - \overline{\Omega'(z)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ainsi les conditions aux limites devront satisfaire à :

Pour la lèvres supérieure.

$$(\sigma_{yy}^G - i\sigma_{xy}^G) = \phi'(x) - \Omega'(x)^D \quad (1.10)$$

Pour la lèvres inférieure.

$$(\sigma_{yy}^D - i\sigma_{xy}^D) = \phi'(x) - \Omega'(x)^G \quad (1.11)$$

En effectuant la somme et la différence nous aboutissons aux formules de PLEMJ du problème posé en contrainte.

$$\begin{aligned} (\phi'(x) - \Omega'(x))^G + (\phi'(x) - \Omega'(x))^D &= (\sigma_{yy}^G - i\sigma_{xy}^G) + (\sigma_{yy}^D - i\sigma_{xy}^D) \\ (\phi'(x) + \Omega'(x))^G - (\phi'(x) + \Omega'(x))^D &= (\sigma_{yy}^G - i\sigma_{xy}^G) - (\sigma_{yy}^D - i\sigma_{xy}^D) \end{aligned} \quad (1.12)$$

En tenant compte du changement de fonction $\Omega(z)$ le vecteur déplacement s'écrira sous la forme:

$$2 \mu \hat{D} = K \phi(z) - (\bar{z} - z) \phi'(z) + \bar{\Omega}(z) \quad (1.13)$$

Le long de OX, les conditions imposées en déplacement devront satisfaire à :

$$\begin{aligned} 2 \mu (D^G - D^D) &= (K\phi - \Omega)^G - (K\phi - \Omega)^D \\ 2 \mu (D^G + D^D) &= (K\phi - \Omega)^G + (K\phi - \Omega)^D \end{aligned} \quad (1.14)$$

Les discontinuités de contrainte et de déplacement sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{T} &= (T^G - T^D)(x) = (\sigma_{yy}^G - i\sigma_{xy}^G) - (\sigma_{yy}^D - i\sigma_{xy}^D) \\ \hat{D} &= (D^G - D^D)(x)\end{aligned}\quad (1.15)$$

1.4 METHODE DES DISCONTINUITES ET DIFFERENTS TYPES DE SOLUTION

Les potentiels complexes qu'on doit déterminer, doivent correspondre aux conditions aux limites. Ces discontinuités sont, soit une discontinuité de déplacement $\hat{D} = (D^G - D^D)(x)$, soit une discontinuité de contrainte $\hat{T} = (T^G - T^D)(x)$.

IL est possible de construire cinq solutions :

- 1) Problème mixte avec discontinuité de déplacement et continuité de contrainte

$$\hat{D}(x) \neq 0 \quad ; \quad \hat{T}(x) = 0 \quad \text{avec } x \in]-a, a[$$

- 2) Problème mixte avec discontinuité de contrainte et continuité de déplacement

$$\hat{D}(x) = 0 \quad ; \quad \hat{T}(x) \neq 0$$

- 3) Problème en déplacement avec discontinuité de déplacement

$$\begin{aligned}\hat{D}(x) \neq 0 \quad ; \quad &\text{il reste à faire une hypothèse sur} \\ &(D^G + D^D)(x); \text{ celle qui prend moins du temps possible} \\ &\text{est } (D^G + D^D)(x) = 0\end{aligned}$$

4) Problème en contrainte avec discontinuité de contrainte

$$\hat{T}(x) \neq 0 \quad ; \quad (T^G + T^D)(x) = 0$$

5) Problème mixte avec discontinuité de déplacement et discontinuité de contrainte

$$\hat{T}(x) \neq 0 \quad ; \quad \hat{D}(x) \neq 0$$

1.6 CONCLUSION

La première solution, la méthode de discontinuité de déplacement, consiste à imposer sur un segment en milieu infini un champ de déplacement discontinu et un champ de contrainte continu. Les équations de PLEMELJ permettent d'exprimer les potentiels Ω et ϕ solutions de base du problème, et à partir de cette formulation on peut déterminer l'état de contrainte et de déformation en tout point du domaine étudié.

L'intérêt de cette méthode qui consiste à discrétiser uniquement le contour et non pas le domaine tout entier donne des solutions rapidement convergentes (CROUCH [10]).

CHAPITRE 2

SOLUTION FONDAMENTALE POUR UN ELEMENT DROIT

2.0 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons présenté le passage en champ complexe de la fonction d'Airy et les équations de PLEMELJ exprimant des potentiels à déterminer.

Dans ce chapitre nous déterminerons ces potentiels en fonction des discontinuités choisies ainsi que les expressions des tensions, des contraintes et des déplacements. Nous développerons les cas d'un élément à un noeud, à deux noeuds et à trois noeuds. Nous examinerons la simplicité du passage en champ complexe par rapport au développement en coordonnées cartésiennes.

2.1 SOLUTION ELEMENTAIRE

Soit un domaine infini contenant une fissure représentée par N segments, on impose pour chaque segment un champ de contrainte $\hat{T}$ continu et un champ de déplacement $\hat{D}$ discontinu.

Les conditions aux limites sont exprimées par les équations de PLEMELJ définies sur $x \in [-a, a]$ par :

$$\begin{aligned} (\phi' + \Omega')^G(x) - (\phi' + \Omega')^D(x) &= 0 \\ (K\phi - \Omega)^G(x) - (K\phi - \Omega)^D(x) &= 2\mu \hat{D}(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Avec $D(x)$ la discontinuité de déplacement qui est définie par:

$$D(x) = \begin{cases} D^G(x) - D^D(x) & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{pour } x > a \end{cases} \quad (2.2)$$

La solution générale du problème dépend de la nature de la discontinuité $D(x)$.

2.1 DISCONTINUITÉ D'ORDRE ZÉRO

Les équations à résoudre sont :

$$(\phi' + \Omega')^G - (\phi' + \Omega')^D = 0 \quad (2.3)$$

$$(K \phi - \Omega)^G - (K \phi - \Omega)^D = 2 \mu \hat{D}$$

On suppose que les contraintes et les rotations sont nulles à l'infini, la solution du problème est donnée par l'intégrale de CAUCHY.

$$(\phi' + \Omega') = 0$$

$$(K \phi - \Omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{2 \mu D(t)}{t - z} dt \quad (2.4)$$

Pour une discontinuité constante la relation (2.4) devient:

$$(K \phi - \Omega) = \frac{\mu}{\pi i} D_0 \int_{-a}^{+a} \frac{dt}{t - z} \quad (2.5)$$

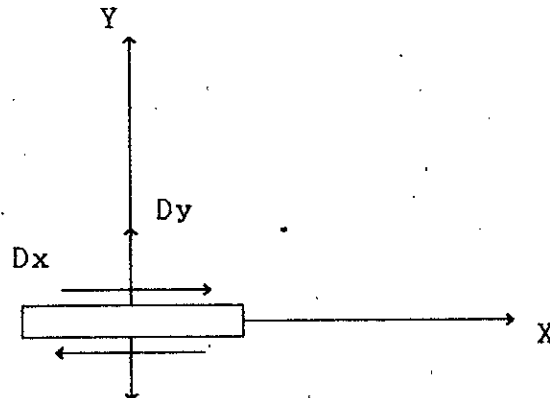
D'où :

$$\phi(z) = \frac{\mu}{i \pi (K+1)} \operatorname{Log} \left(\frac{z - a}{z + a} \right) (D_x + i D_y) \quad (2.6)$$

$$\text{et } \Omega(z) = -\phi(z)$$

La discontinuité de déplacement D_0 est la différence entre les deux déplacements des deux lèvres de la fissure, elle est définie par:

$$D_i = U_i(x, 0_G) - U_i(x, 0_D) \quad (2.7)$$



FIG(2.1) Les composantes de la discontinuité constante

Les contraintes et les déplacements sont donnés par la forme des expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \operatorname{Re} [\phi'(z)] + \operatorname{Re} [\phi'(z) + (z-\bar{z})\phi''(z) + \bar{\Omega}'(z)] \\ \sigma_{xy} &= -\operatorname{Im} [\phi'(z) + (z-\bar{z})\phi''(z) + \bar{\Omega}'(z)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\sigma_{yy} = 2 \operatorname{Re} [\phi'(z)] - \operatorname{Re} [\phi'(z) + (z-\bar{z})\phi''(z) + \bar{\Omega}'(z)]$$

et

$$U_x = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} [k \phi'(z) + (z-\bar{z})\phi''(z) + \Omega(z)] \quad (2.9)$$

$$U_y = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im} [k \phi'(z) + (z-\bar{z})\phi''(z) + \Omega(z)]$$

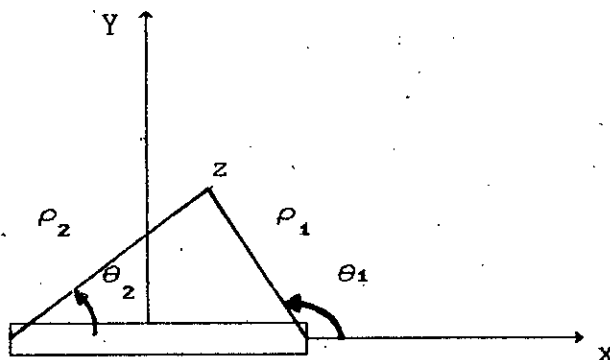
Il est facile de vérifier que les déplacements (2.9) sont continus dans tout le corps sauf pour $|x| \leq a$ et $y = 0$ où ils sont discontinus par définition (2.2).

Sur la lèvres (+) les déplacements sont donnés par :

$$2 \mu (U_x + U_y) = K \phi^+ + \Omega^- = K \phi^+ - \phi^- \quad (2.10)$$

avec

$$\phi(z) = \frac{\mu}{i \pi (K+1)} \left[\lim_{y \rightarrow 0^+} \text{Log} \left(\frac{z-a}{z+a} \right) \right] \hat{D}o \quad (2.11)$$



FIG(2.2) Passage à la limite sur un segment droit

D'après la figure (2.2), on peut déterminer les limites de l'expression Logarithmique. Ainsi :

$$z-a = \rho_1 e^{i\theta_1} \quad (2.12)$$

$$z+a = \rho_2 e^{i\theta_2}$$

Où ρ_i est le module du nombre complexe

En champ complexe le Logarithme peut être écrit sous la forme :

$$\text{Log}(z) = \text{Log}|z| + i \text{Arg}(z)$$

Pour $z \in \text{lèvre}^+$:

$$\rho_1 = a \quad \text{et} \quad \theta_1 = \pi \quad (2.13)$$

$$\rho_2 = a \quad \text{et} \quad \theta_2 = 0$$

En remplaçant ces variables dans le Logarithme népérien on obtient :

$$\text{Log}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^+ = \text{Log}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + i(\theta_1 - \theta_2) = i\pi \quad (2.14)$$

Pour $z \in \text{lèvre}^-$:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= a & \theta_1 &= -\pi \\ \rho_2 &= a & \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ainsi :

$$\text{Log}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^- = -i\pi \quad (2.16)$$

L'expression de déplacement devient alors :

$$2\mu (U_x + iU_y) = \frac{1}{2} \hat{D}_0 \quad (2.17)$$

d'où :

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{1}{2} \text{Re} (D_0) \\ U_y &= \frac{1}{2} \text{Im} (D_0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Les déplacements U_x et U_y sont donc continus pour $|x| > a$ sur $y=0$, mais ils ont une discontinuité constante $\hat{D}_x$ et $\hat{D}_y$ pour $|x| \leq a$.

D'une façon similaire on peut évaluer les contraintes.

$$\phi'(z) = \frac{\mu}{i\pi(k+1)} \hat{D}_0 \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \quad (2.19)$$

$$= -\Omega'(z) = \phi'^+(z) = \phi'^-(z)$$

d'où

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})^+ &= \phi'^+(z) - \Omega'^-(z) \\ &= \frac{2\mu}{i\pi(k+1)} (Dx + iDy) \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

et

$$\begin{aligned} (\sigma_{yy})^+ &= \text{Re} [2\phi'(z)] \\ (\sigma_{xy})^+ &= \text{Im} [2\phi'(z)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

A partir de ces deux expressions on remarque que les contraintes sont singulières et discontinues pour $x = \pm a$, par contre elles sont finies et continues le long de $y=0$.

2.2 DISCONTINUITÉ D'ORDRE SUPERIEUR

Dans le paragraphe précédent une discontinuité constante a été utilisée pour déterminer le champ des contraintes et de déplacements, dans celui-ci nous allons décrire une formulation d'ordre supérieur, linéaire et quadratique.

Le modèle numérique d'une discontinuité linéaire exige deux noeuds dans chaque élément de discrétisation et trois noeuds pour l'élément quadratique, localisés à l'intérieur de l'élément pour éviter le risque d'avoir des singularités aux extrémités.

L'optimum de localisation de ces noeuds est déterminé par les points zéro du polynôme de GAUSS-TCHEBYCHEV (CRAWFORD [9]).

2.2.1 MODELE LINEAIRE :

La discontinuité de déplacement est donnée sous la forme :

$$D(x) = a_1 x + b_1 \quad (2.22)$$

avec a_1 et b_1 des coefficients de linéarisation et $x \in [-a, +a]$

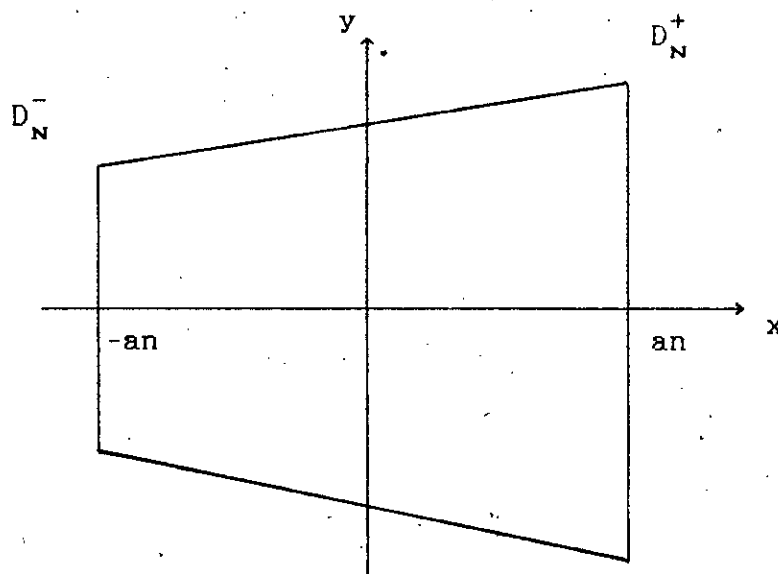
D'autre part, la discontinuité $D(x)$ est LIPSHITZIENNE d'ordre un sur $[-a, a]$, donc la deuxième équation de (2.3) nous permet d'écrire:

$$(K \phi - \Omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{2\mu D(t)}{t - z} dt \quad (2.23)$$

D'où

$$\phi(z) = \frac{\mu}{i\pi(K+1)} \left[2a_1 a + (a_1 z + b_1) \operatorname{Log} \left(\frac{z - a}{z + a} \right) \right] \quad (2.24)$$

Il reste maintenant à définir les coefficients de linéarisation pour chaque segment comme le montre la figure suivante:



FIG(2.3) Discontinuité de déplacement linéaire

Soient $-an$ et $+an$ les positions des noeuds de l'élément linéaire, pour le Nième élément la discontinuité s'écrit de la façon suivante :

$$D(x) = a x + b \quad x \in [-an, an] \quad (2.25)$$

La discontinuité de déplacement s'exprime par:

$$\hat{D}(x) = D^G(x) - D^D(x) = \hat{D}_x(x) + \hat{D}_y(x) \quad (2.26)$$

avec $\hat{D}_x$ et $\hat{D}_y$ les discontinuités normales et tangentielles.

Si on exprime les discontinuités aux points nodaux, comme suit:

$$D(-an) = D^- = -a an + b \quad (2.27)$$

$$D(+an) = D^+ = a an + b$$

on obtient:

$$a = \frac{D^+ - D^-}{2 a n} = \frac{Dx^+ - Dx^-}{2 a n} + i \frac{Dy^+ - Dy^-}{2 a n} \quad (2.28)$$

$$b = \frac{D^+ + D^-}{2} = \frac{Dx^+ + Dx^-}{2} + i \frac{Dy^+ + Dy^-}{2}$$

Ainsi les contraintes et les déplacements seront exprimés en fonction de quatre discontinuités Dx^- , Dx^+ , Dy^- et Dy^+ .

2.2.2 MODELE QUADRATIQUE

Par le même raisonnement que celui d'un élément linéaire, le potentiel $\phi(z)$ sera égal à :

$$\phi(z) = \frac{\mu}{i \pi (K+1)} \left[(Az^2 + Bz + C) \operatorname{Log} \left(\frac{z - a}{z + a} \right) + 2aAz + 2aB \right] \quad (2.29)$$

avec A, B et C sont des constantes qui peuvent-être exprimées en fonction des discontinuités des trois noeuds.

Soient D^0 , D^+ et D^- respectivement les discontinuités des noeuds centre, droit et gauche. Les constantes A, B et C seront:

$$A = \frac{D^- + D^+ - 2 D^0}{2 a^2} ; C = D^0 \quad \text{et} \quad B = \frac{D^+ - D^-}{2 a} \quad (2.30)$$

Donc les contraintes et les déplacements seront exprimées en fonction de six discontinuités Dx^0 , Dx^- , Dx^+ , Dy^0 , Dy^- et Dy^+

D'après les équations de PLEMELJ (MUSKHELISHVILI [22]), les potentiels ϕ et Ω dépendent de la forme de la discontinuité de déplacement pouvant être de degré quelconque.

Avec la représentation sous forme d'intégrale de CAUCHY on peut déterminer la solution d'un ordre quelconque.

2.3 CONCLUSION :

L'approximation par la méthode de discontinuité de déplacement sera moins bonne si la discontinuité n'est pas nulle aux extrémités de la fissure. Pour éviter ce problème il faut choisir un élément linéaire qui doit vérifier les conditions $D(-a)=0$ et $D(+a)=0$, mais on se heurte à une discrétisation assez fine qui provoque une augmentation de la taille de la matrice pour que l'élément linéaire suit la forme de la fissure [6].

Un élément parabolique a été choisi par BOUHADANE [4] sous la forme :

$$D(x) = \gamma \sqrt{a - x}$$

Avec γ un paramètre de linéarisation.

avec lequel on peut prendre une discrétisation large en bout de fissure.

CHAPITRE 3

SOLUTION FONDAMENTALE POUR UN ELEMENT CIRCULAIRE

3.0 INTRODUCTION

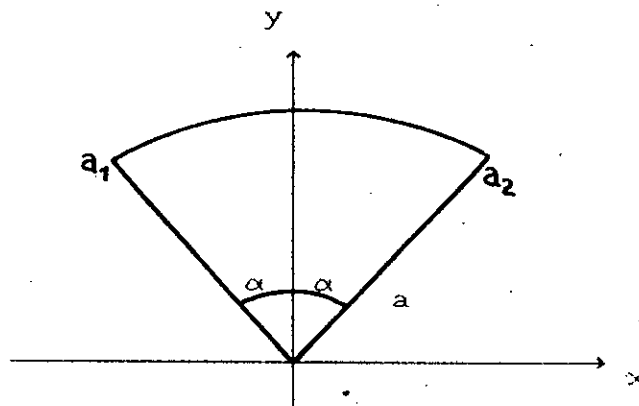
Quand il s'agit des courbures qui varient très rapidement, la solution avec les éléments droits nécessite une discrétisation assez fine, et par conséquent une augmentation très forte de la taille de la matrice des coefficients d'influence.

Pour éviter ce problème on utilise des éléments d'ordre supérieur, mais à cause de l'éloignement des points des conditions aux limites du contour exact, la solution n'est pas pour autant précise. On est donc heurté à un problème double, la forme de la discrétisation et le nombre des noeuds.

Le recours à la solution avec des éléments circulaires ne présente pas de complications majeures. Elle nécessite seulement une réécriture des relations de KOLOSSOV-MUSKHELISHVILI en coordonnées polaires.

3.1 EQUATIONS DE PLEMELJ

Pour un contour circulaire, on recherchera les solutions élémentaires qui correspondent à une discontinuité en arc d'ouverture 2α et de rayon a selon la figure ci-dessous:



FIG(3.1) Arc circulaire d'ouverture 2α

La coupure est placée symétriquement par rapport à l'axe des Y d'une part pour retrouver la solution développée pour un arc rectiligne (BOUHADANE) lorsque α tend vers zéro et d'autre part pour éviter les problèmes créés par la fonction multiforme.

Le changement de repère en champ complexe s'obtient de la manière suivante (MUSKHELISHVILI [22]) :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 2 \left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)} \right] \\ \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - 2i\sigma_{r\theta} &= -2 e^{2i\theta} \left[\overline{z} \phi''(z) + \psi'(z) \right]\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$2\mu \begin{bmatrix} U_r + iU_\theta \end{bmatrix} = e^{-i\theta} \left[K \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right]$$

Les conditions aux limites s'écrivent pour :

-une discontinuité de déplacement

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^A - (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^B = 2\mu \hat{D}(t) \quad (3.2)$$

-une continuité de contrainte

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^A + (\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta})^B = 0 \quad (3.3)$$

En utilisant la relation $e^{-i\theta} = \frac{\overline{z}}{a}$

les conditions aux limites s'expriment par :

$$(\sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta}) = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - \overline{z\phi''(z)} - \overline{z\psi'(z)}$$

$$2\mu(U_r + iU_\theta) = \frac{\overline{z}}{a} \left[K \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right] \quad (3.4)$$

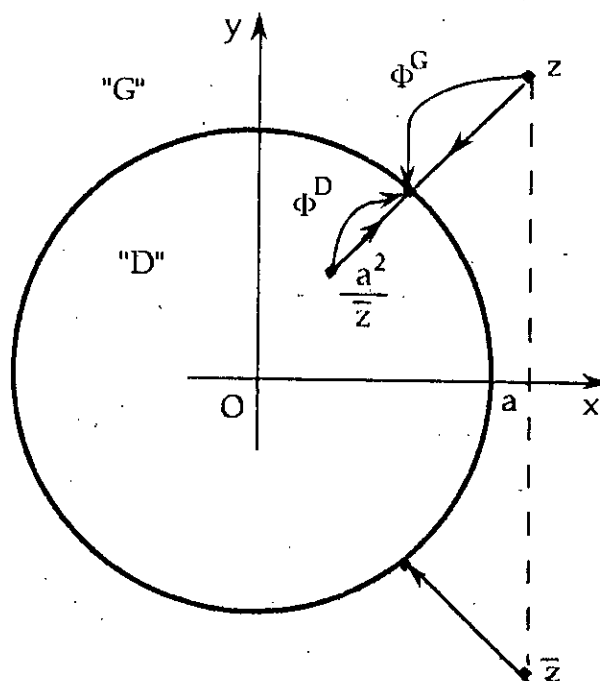
La discontinuité de déplacement est définie comme suit :

$$D(t) = (U_r + iU_\theta)^G - (U_r + iU_\theta)^D = D_r + iD_\theta \quad (3.5)$$

où D_r représente la discontinuité radiale
 D_θ la discontinuité tangentielle

L'expression de la résultante sur l'arc $a_1 a_2$ est:

$$x + iy = -i \left[\phi(z) - z \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi'(z)} \right]_{a_1}^{a_2} \quad (3.6)$$



FIG(3.2) Passage à la limite sur un segment circulaire

Les fonctions Ω et ϕ sont analytiques dans tout le plan sauf sur la discontinuité.

On remarque bien que si un point z ($z \in "G"$) tend vers un point de la frontière $t = ae^{i\theta}$, le point $\bar{z}$ ne tend pas vers celui-ci que se soit de côté " G " ou bien " D ", contrairement au point $a^2/\bar{z}$ puisque $z \bar{z} = a^2$. Un prolongement analytique à travers la frontière circulaire est nécessaire.

Pour ce faire, on suppose que dans l'équation de la résultante (3.6) les fonctions ϕ' et ψ' définies pour z et nous substituons z par $\frac{a^2}{\bar{z}}$ dans celle-ci.

On introduit une fonction Ω définie par BOUHADANE [4] :

$$\Omega\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) = - \left[- \frac{a^2}{z} \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] \quad (3.7)$$

Les deux fonctions Ω et ϕ étant connues, la fonction ψ' sera exprimée par :

$$\psi'(z) = - \left[\frac{a^2}{z} \overline{\phi'(z)} + \Omega\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) \right] \quad (3.8)$$

D'où les expressions des contraintes et des déplacements:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + \left(1 - \frac{a^2}{z\bar{z}}\right) - z\phi''\left(1 - \frac{a^2}{z\bar{z}}\right) - \frac{a^2}{z\bar{z}} \Omega'\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) \\ 2\mu(U_r + iU_\theta) &= \frac{z}{r} \left[K \left(\phi(z) + \overline{\phi'(z)} \right) \left(z - \frac{a^2}{\bar{z}} \right) - \Omega\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dans le cas où z tend vers $t = ae^{i\theta}$ et $z \in "G"$ ($\frac{a^2}{z} \in "D"$),

les expressions des conditions aux limites deviennent:

$$(\sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta})^G = \phi'^G - \Omega^D$$

$$(\sigma_{rr} + i \sigma_{r\theta})^D = \phi'^D - \Omega^G$$

$$2\mu(U_r + iU_\theta)^G = e^{-i\theta} (K\phi^G - \Omega^D) \quad (3.10)$$

$$2\mu(U_r + iU_\theta)^D = e^{-i\theta} (K\phi^D - \Omega^G)$$

Ainsi les équations de PLEMJ (MUSKHELISHVILI [22]) dans le cadre de la discontinuité de déplacement sont:

$$(\phi' + \Omega')^G - (\phi' + \Omega')^D = 0$$

$$(K\phi - \Omega)^G - (K\phi - \Omega)^D = 2\mu D(t) e^{-i\theta} \quad (3.11)$$

avec

$$D(t) = (U_r + iU_\theta)^G - (U_r + iU_\theta)^D$$

La détermination de la forme générale des potentiels complexes suppose que les contraintes, les déplacements et les résultantes sont nulles à l'infini.

L'intégration de l'équation homogène (1^{ère} relation de (3.11)) nous donne

$$\phi' + \Omega' = A \quad (3.12)$$

Pour avoir des déplacements nuls à l'infini on prend la constante d'intégration nulle.

De la même façon l'intégration de la deuxième relation nous conduit à écrire l'expression suivante:

$$K\phi(z) - \Omega(z) = Bz + \frac{\mu}{i\pi} \int_{a1}^{a2} \frac{e^{i\theta} D(t)}{t - z} dt \quad (3.13)$$

A partir de ces deux intégrations, les potentiels complexes $\phi(z)$ et $\Omega(z)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{K+1} \left[(A+B)z + I(z) \right] \\ \Omega(z) &= Az - \phi(z) \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec

$$I(z) = \frac{\mu}{i\pi} \int_{a1}^{a2} \frac{e^{i\theta} D(t)}{t - z} dt$$

Avec l'hypothèse des contraintes nulles à l'infini, $\phi'(z)$ tend vers zéro quand z tend vers l'infini, ce qui impose que :

$$A + B = 0 \quad (3.15)$$

Donc:

$$\phi(z) = I(z) \quad \text{d'où}$$

$$\phi'(0) = \alpha_0 = \frac{1}{K+1} I'(0) \quad (3.16)$$

En considérant la même hypothèse, $\Omega'(z)$ a la forme:

$$\Omega'(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (3.17)$$

et

$$\Omega'(z) = A - \phi'(z) \quad (3.18)$$

$\phi'(z)$ étant holomorphe à l'origine, nous avons donc :

$$\text{et } \phi'(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + O(z^2) \quad (3.19)$$

$$\Omega'(z) = A \quad (3.20)$$

De l'équation (3.18) nous avons :

$$\text{et } \phi'(0) = \alpha_0 = \frac{1}{K+1} I'(0) \quad (3.21)$$

$$A = \frac{1}{K+1} \overline{I'(0)} \quad (3.22)$$

Enfin, les potentiels auront la forme suivante:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{K+1} I(z) \\ \Omega(z) &= - \frac{1}{K+1} \left[\overline{I'(0)} z + I(z) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2 SOLUTION DU PROBLEME

Pour un milieu affaibli par une fissure circulaire de rayon a et d'ouverture 2α et d'extrémité a_1, a_2 comme le montre la figure(2.1) les fonctions potentielles $\phi(z)$ et $\Omega(z)$ dépendent de la nature de la discontinuité de déplacement; celle-ci a le développement suivant:

$$D(t) = \delta_0 + \sum_{n=1}^n \delta_n \sin(2n\theta) + \sum_{n=1}^n \beta_n \cos(2n\theta) \quad (3.24)$$

où δ_n et β_n sont des coefficients de linéarisation.

3.3 DISCONTINUITÉ D'ORDRE ZERO

La discontinuité pour un tel type d'élément est choisie, de la manière suivante:

$$\hat{D}(t) = \delta_0 = \text{constante} \quad (3.25)$$

L'expression (3.14) devient alors :

$$\phi(z) = \frac{\mu \delta_0}{i\pi a} \frac{1}{K+1} \left[(az-a_1) + z \operatorname{Log} \left(\frac{z-a_2}{z-a_1} \right) \right] \quad (3.26)$$

Pour déterminer la fonction potentielle $\Omega(z)$ on utilise la deuxième expression de (3.14), d'où

$$I'(z) = \frac{\mu \delta_0}{i\pi a} \left[\operatorname{Log} \left(\frac{z-a_2}{z-a_1} \right) + z \left(\frac{1}{z-a_2} - \frac{1}{z-a_1} \right) \right] \quad (3.27)$$

et

$$I'(0) = \frac{\mu \delta_0}{i\pi a} \left[\operatorname{Log} \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \right] \quad (3.28)$$

La fonction $\Omega(z)$ s'écrit donc:

$$\Omega(z) = \frac{\mu \overline{\delta_0}}{i\pi(K+1)a} \left[\overline{\operatorname{Log} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)} \right] - \frac{\mu \delta_0}{i\pi a} \frac{1}{K+1} \left[(az-a_1) + z \operatorname{Log} \left(\frac{z-a_2}{z-a_1} \right) \right] \quad (3.29)$$

δ_0 étant un complexe qui s'écrit sous la forme $\delta_0 = D_r + i D_\theta$

Avec ces deux potentiels, on peut calculer le champ des contraintes et des déplacements.

3.4 CONCLUSION

Le calcul des contraintes et des déplacements au voisinage de la tête de fissure est obtenu avec une bonne précision, si les déplacements sont continus en celles-ci.

BELKACEMI [3] a proposé les éléments suivants :

$$D(t) = \delta_0 \sqrt{a_2 - t} \quad \text{en} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha$$

et

$$D(t) = \delta_0 \sqrt{t - a_1} \quad \text{en} \quad \frac{\pi}{2} + \alpha$$

avec δ_0 et δ_0 des paramètres de linéarisation.

Il sera facile maintenant de déterminer les potentiels complexes avec ces deux formes de discontinuités et ce en suivant la même procédure des éléments circulaires à deux noeuds.

CHAPITRE 4

PROCEDURE NUMERIQUE DE LA METHODE

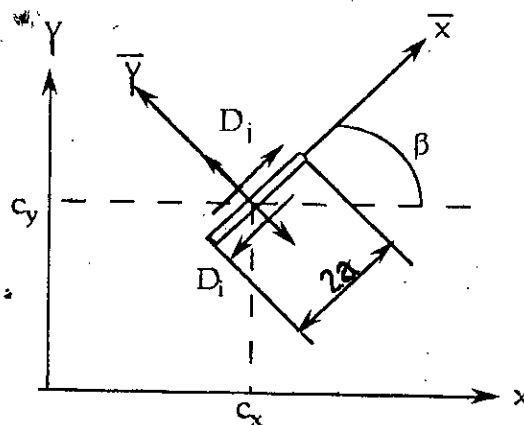
4.0 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons aborder la procédure numérique de la méthode des discontinuités de déplacement pour les éléments droits ou circulaires d'ordre zéro, linéaire et quadratique et nous verrons comment le passage en champ complexe facilite le changement de repère et la transformation des coordonnées.

4.1 TRANSFORMATION DES COORDONNEES

Le problème est rapporté au repère local $(\bar{O} \bar{X} \bar{Y})$ obtenu par une translation et une rotation dans le repère global (OXY) .

Déterminons la relation entre $z^* = (\bar{x}, \bar{y})$ et $z = (x, y)$.



FIG(4.1) Discontinuité de déplacement d'un segment arbitraire

Soit $Cz = (Cx, Cy)$ fig(4.1), les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x - Cx) \cos \beta + (y - Cy) \sin \beta \\ \bar{y} &= -(x - Cx) \sin \beta + (y - Cy) \cos \beta\end{aligned}\quad (4.1) :$$

Si $z = x + iy$

Alors $z^* = (z - Cz) e^{-i\beta}$.

Les contraintes dues aux composantes $D\bar{x}$ et $D\bar{y}$ sont exprimés par:

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \operatorname{Re} \left[CM \left[4 \text{ CIA2} + (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA4} \right] \right] D\bar{x} + \\ &\quad \operatorname{Re} \left[CM \text{ CPI} \left[2 \text{ CIA2} + (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA4} \right] \right] D\bar{y} \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= \operatorname{Re} \left[CM \left[- (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA4} \right] \right] D\bar{x} + \\ &\quad \operatorname{Re} \left[CM \text{ CPI} \left[2 \text{ CIA2} - (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA4} \right] \right] D\bar{y} \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= - \operatorname{Im} \left[CM \left[4 \text{ CIA2} + (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA4} \right] \right] D\bar{x} + \\ &\quad - \operatorname{Im} \left[CM \text{ CPI} \left[2 \text{ CIA2} + (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA4} \right] \right] D\bar{y}\end{aligned}\quad (4.2)$$

Avec:

$$\text{CPI} = i$$

$$CM = \frac{\mu}{i\pi(k+1)}$$

$$\text{CIA2} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}$$

$$\text{CIA4} = \frac{1}{(z+a)^2} - \frac{1}{(z-a)^2}$$

De même les déplacements sont:

$$\begin{aligned}
 U_{\bar{x}} &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} \left[CM \left[K \text{ CIA1} + (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA3} - \text{CIA5} \right] \right] D\bar{x} + \\
 &\quad \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re} \left[CM \text{ CPI} \left[K \text{ CIA1} - (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA3} - \text{CIA5} \right] \right] D\bar{y} \\
 U_{\bar{y}} &= \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im} \left[CM \left[K \text{ CIA1} + (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA3} - \text{CIA5} \right] \right] D\bar{x} + \\
 &\quad \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im} \left[CM \text{ CPI} \left[K \text{ CIA1} - (z^* - \bar{z}^*) \text{ CIA3} - \text{CIA5} \right] \right] D\bar{y}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Avec:

$$\text{CIA1} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{z-a}{z+a}$$

$$\text{CIA3} = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}$$

$$\text{CIA5} = \operatorname{Log} \frac{\bar{z}-a}{\bar{z}+a}$$

Les relations de KOLLOSOV-MUSKHELISHVILI exprimées dans le repère global OXY s'écrivent, après changement de repère d'une manière très simple par:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{\bar{xx}} + \sigma_{\bar{yy}}$$

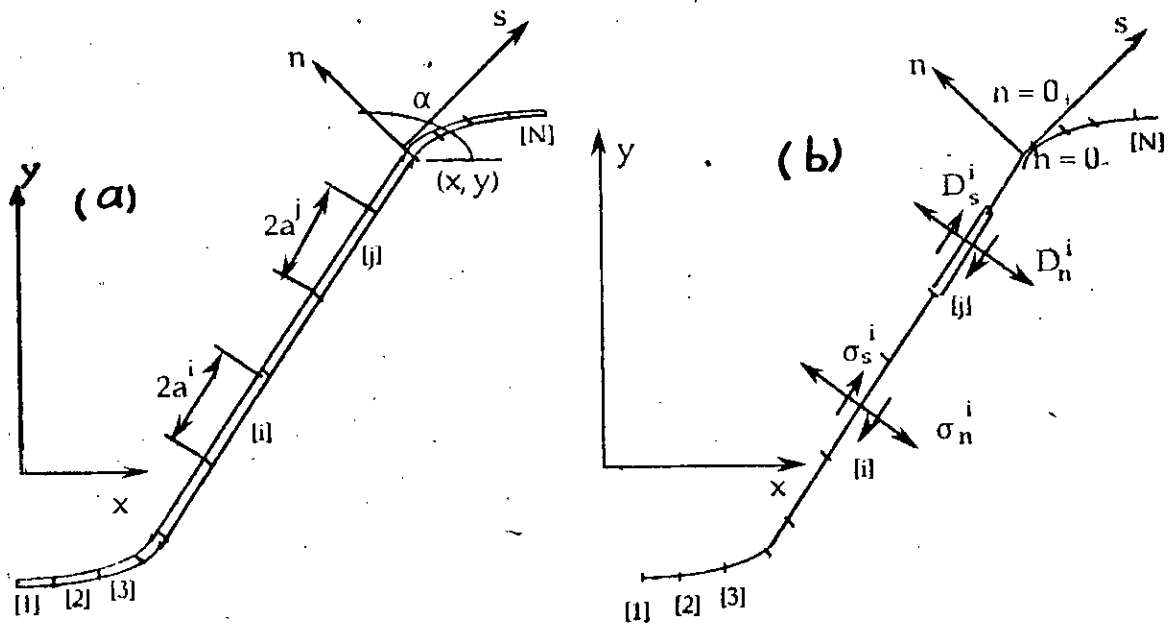
$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i \sigma_{xy} = e^{-2i\beta} (\sigma_{\bar{yy}} - \sigma_{\bar{xx}} + 2i \sigma_{\bar{xy}})$$

$$U_x + i U_y = e^{i\beta} (U_{\bar{x}} + i U_{\bar{y}})$$

(4.4)

4.2 PROCEDURE NUMERIQUE

La courbe curviligne (Fig(4.2a)) est divisée en N segments (Fig(4.2b)), la position et l'orientation sont spécifiées par rapport au repère global OXY . Les composantes des discontinuités de déplacement pour le $J^{\text{ème}}$ segment de la fissure dans la direction s et n sont définies par :



FIG(4.2) Représentation d'une fissure par N discontinuité de déplacement

$$D_s^j = jU_s^G - jU_s^D \quad (4.5)$$

$$D_n^j = jU_n^G - jU_n^D$$

U_n et U_s sont les composantes des déplacements normal et tangentiel de l'élément j .

G et D représentent respectivement la surface positive et négative dans le repère local $S N$.

L'influence d'un élément de discontinuité de déplacement sur les contraintes et les déplacements d'un point quelconque est déterminée à partir des résultats (4.3) et (4.4). Donc les contraintes normale et tangentielle d'un élément i en fonction des termes des composantes de discontinuités de déplacement du $j^{\text{ème}}$ élément peuvent s'exprimer par:

$$\begin{aligned}\sigma_S^i &= A_{SS}^{ij} D_S^j + A_{SN}^{ij} D_N^j \\ \sigma_N^i &= A_{NS}^{ij} D_S^j + A_{NN}^{ij} D_N^j\end{aligned}\quad (4.6)$$

Où A_{SS}^{ij} , A_{SN}^{ij} , A_{NS}^{ij} et A_{NN}^{ij} sont les coefficients d'influence des contraintes.

Pour N éléments, (4.6) s'écrira sous la forme:

$$\begin{aligned}\sigma_S^i &= \sum_{j=1}^N A_{SS}^{ij} D_S^j + \sum_{j=1}^N A_{SN}^{ij} D_N^j \\ \sigma_N^i &= \sum_{j=1}^N A_{NS}^{ij} D_S^j + \sum_{j=1}^N A_{NN}^{ij} D_N^j\end{aligned}\quad (4.7)$$

Les équations (4.7) forment un système linéaire de $2N$ inconnus D_S^i et D_N^i pour $i = 1, N$.

Après avoir trouvé les discontinuités D_S^i et D_N^i , on peut déterminer les contraintes et les déplacements d'un point quelconque du corps en utilisant le principe de superposition.

En particulier les déplacements le long de la fissure s'écrivent comme suit:

$$\begin{aligned} U_S^i &= \sum_{j=1}^N B_{SS}^{ij} D_S^j + \sum_{j=1}^N B_{SN}^{ij} D_N^j \\ U_N^i &= \sum_{j=1}^N B_{NS}^{ij} D_S^j + \sum_{j=1}^N B_{NN}^{ij} D_N^j \end{aligned} \quad (4.7)$$

où B_{SS}^{ij} , B_{SN}^{ij} , B_{NS}^{ij} et B_{NN}^{ij} sont les coefficients d'influence frontières des déplacements.

Ce développement concerne une discontinuité de déplacement d'ordre zéro. Si l'on veut passer à une discontinuité d'ordre supérieur on ne change que les expressions (4.7).

Dans le cas d'une discontinuité linéaire, les contraintes et les déplacements sont exprimés par:

$$\begin{aligned} \sigma_S^i &= A_{SS1}^{ij} D_S^j(1) + A_{SN1}^{ij} D_N^j(1) + A_{SS2}^{ij} D_S^j(2) + A_{SN2}^{ij} D_N^j(2) \\ \sigma_N^i &= A_{NS1}^{ij} D_S^j(1) + A_{NN1}^{ij} D_N^j(1) + A_{NS2}^{ij} D_S^j(2) + A_{NN2}^{ij} D_N^j(2) \\ U^i &= B_{SS1}^{ij} D_S^j(1) + B_{SN1}^{ij} D_N^j(1) + B_{SS2}^{ij} D_S^j(2) + B_{SN2}^{ij} D_N^j(2) \\ U_n^i &= B_{NS1}^{ij} D_S^j(1) + B_{NN1}^{ij} D_N^j(1) + B_{NS2}^{ij} D_S^j(2) + B_{NN2}^{ij} D_N^j(2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ces équations forment un système linéaire de $4N$ inconnus D_S et D_N

De même les expressions pour une discontinuité quadratique auront la forme:

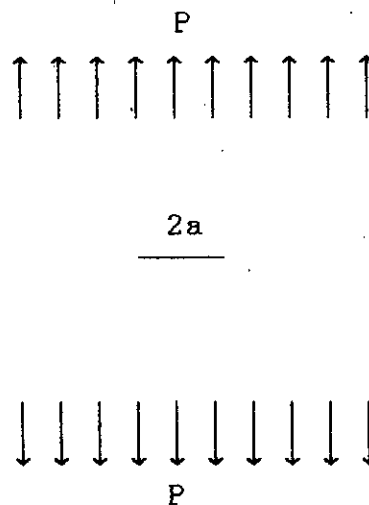
$$\begin{aligned}
 \sigma_S^i &= A_{SS1}^{ij} D_S^j(1) + A_{SN1}^{ij} D_S^j(1) + A_{SS2}^{ij} D_N^j(2) + A_{SN2}^{ij} D_N^j(2) + A_{SS3}^{ij} D_N^j(3) + A_{SN3}^{ij} D_N^j(3) \\
 \sigma_N^i &= A_{NS1}^{ij} D_S^j(1) + A_{NN1}^{ij} D_S^j(1) + A_{NS2}^{ij} D_N^j(2) + A_{NN2}^{ij} D_N^j(2) + A_{NS3}^{ij} D_N^j(3) + A_{NN3}^{ij} D_N^j(3) \\
 U_S^i &= B_{SS1}^{ij} D_S^j(1) + B_{SN1}^{ij} D_S^j(1) + B_{SS2}^{ij} D_N^j(2) + B_{SN2}^{ij} D_N^j(2) + B_{SS3}^{ij} D_N^j(3) + B_{SN3}^{ij} D_N^j(3) \\
 U_N^i &= B_{NS1}^{ij} D_S^j(1) + B_{NN1}^{ij} D_S^j(1) + B_{NS2}^{ij} D_N^j(2) + B_{NN2}^{ij} D_N^j(2) + B_{NS3}^{ij} D_N^j(3) + B_{NN3}^{ij} D_N^j(3)
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

C'est un système linéaire de $6N$ inconnus D_S^i et D_N^i

4.3 APPLICATIONS

4.3.1 Fissure dans un milieu infini

Cet exemple FIG(4.3) est présenté pour illustrer l'amélioration de la précision des résultats obtenus par les éléments linéaires et quadratiques comparés à ceux des éléments droits (discontinuité constante).



FIG(4.3) Fissure horizontale dans un milieu infini

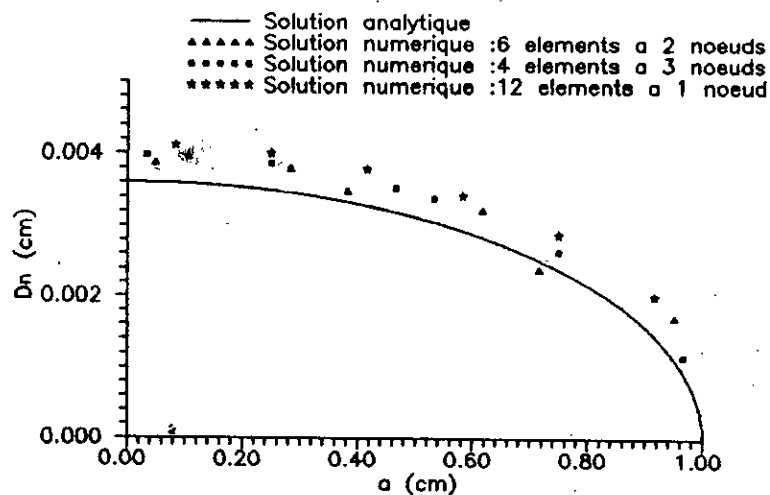
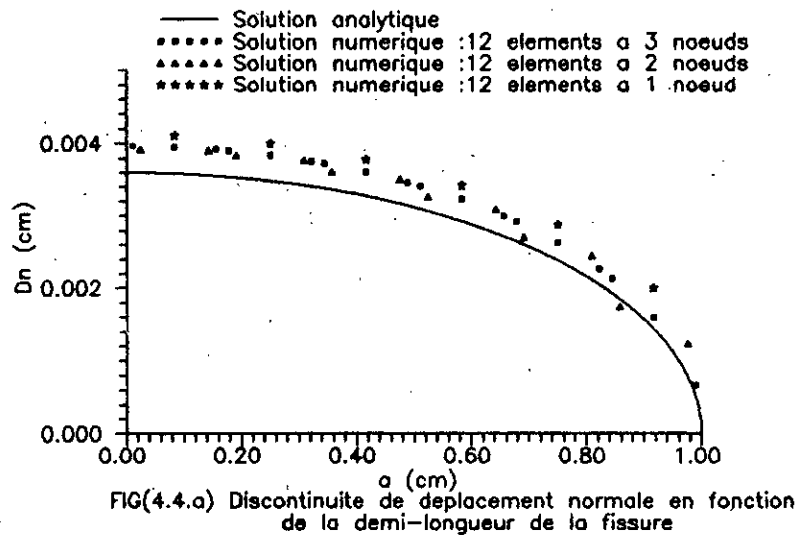
Les caractéristiques du matériau étant:

$$\nu = 0.1 \quad \text{et} \quad \frac{p}{G} = 10^{-3} \quad \text{Crouch [10].}$$

La solution exacte de la distribution de la discontinuité de déplacement le long de la fissure est donnée par Crouch [10] :

$$Dy(x) = Uy(x,0^-) - Uy(x,0^+) = \frac{-2(1-\nu)}{G} p a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

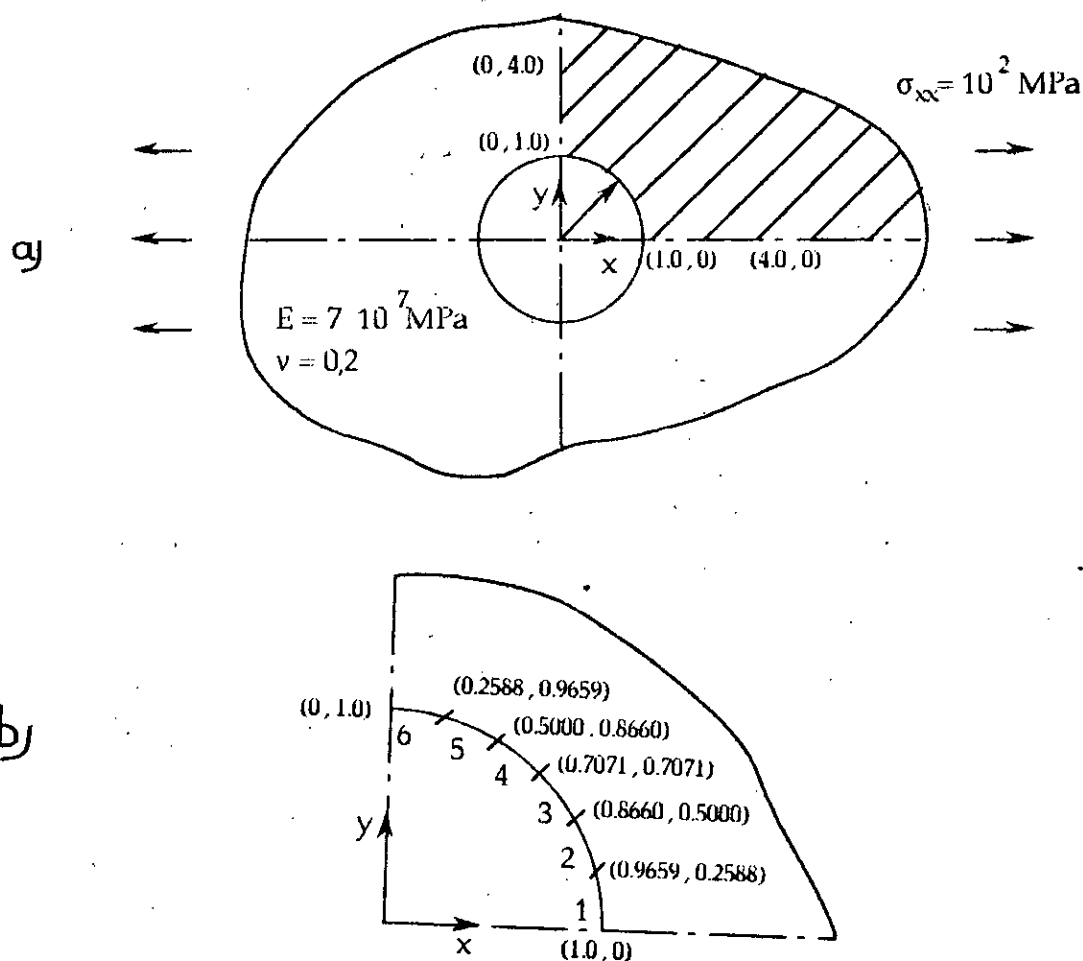
Deux approximations numériques à cette solution sont données par les figures 4.4.a et 4.4.b . On remarque qu'on obtient une bonne approximation en utilisant les éléments d'ordre supérieur.



4.3.2 Trou circulaire dans une plaque infinie

Dans cet exemple FIG(4.5.a), on considère le problème d'un trou circulaire dans une plaque infinie sous une tension uniaxiale à l'infini. Les conditions de symétrie (double symétrie) sont utilisées pour traiter ce problème et le contour est divisé en six segment FIG(4.5.b).

On remarque dans cet exemple que les éléments de discrétisation présentent des perturbations près du contour (Tableau 1 et 2).



FIG(4.5) Trou circulaire dans un corps infini soumis à une tension uniaxiale (a) spécification du problème (b) modèle de l'élément frontière

NOMBRE DE SEGMENTS SUR LA FRONTIERE A DISCRITISER: 0

NOMBRE DE SEGMENT DANS LE DOMAINE OU ON CHERCHE DES VALEURS: 2

0.0000 0.0000

COEFFICIENT DE POISSON= 0.20

MODULE DE YOUNG=0.700000E+05

CONTRAINTES INITIALES SUIVANT X= 0.1000E+03

CONTRAINTES INITIALES SUIVANT Y= 0.0000E+00

CONTRAINTES DE CISAILLEMENT XY= 0.0000E+00

DONNEES CARACTERISANT L'ELEMENT DE FRONTIERE:

		X(CENTRE)	Y(CENTRE)	LONGUEUR	ANGLE	US OU SIGMA_S	UN OU SIGMA_N	
1	1	0.1294	0.9830	0.2611	-7.50	0.0000E+00	0.0000E+00	
2	1	0.3794	0.9160	0.2611	-22.50	0.0000E+00	0.0000E+00	
3	1	0.6036	0.7866	0.2611	-37.50	0.0000E+00	0.0000E+00	
4	1	0.7866	0.6036	0.2611	-52.50	0.0000E+00	0.0000E+00	
5	1	0.9160	0.3794	0.2611	-67.50	0.0000E+00	0.0000E+00	
6	1	0.9830	0.1294	0.2611	-82.50	0.0000E+00	0.0000E+00	
ELEMENT	DS	US(-)	US(+)	DN	UN(-)	UN(+)	SIGMA-S	SIGMA-N
1	0.000721	0.000486	-0.000235	-0.001107	-0.000829	0.000278	0.000000	0.000000
2	0.001969	0.001328	-0.000641	-0.000425	-0.000360	0.000065	0.000000	0.000000
3	0.002689	0.001814	-0.000875	0.000756	0.000451	-0.000305	0.000000	0.000000
4	0.002689	0.001814	-0.000875	0.002120	0.001388	-0.000732	0.000000	0.000000
5	0.001969	0.001328	-0.000641	0.003302	0.002200	-0.001102	0.000000	0.000000
6	0.000721	0.000486	-0.000235	0.003984	0.002669	-0.001315	0.000000	0.000000

Point	X-cord	Y-cord	DPL-UX	DPL-UY	SIG-XX	SIG-YY	SIG-XY
1	1.1000	0.0000	0.002627	0.000000	-13.088	-58.483	0.000
2	1.2000	0.0000	0.002498	0.000000	-1.287	-36.229	0.000
3	1.3000	0.0000	0.002373	0.000000	5.439	-22.087	0.000
4	1.4000	0.0000	0.002254	0.000000	12.280	-12.806	0.000
5	1.5000	0.0000	0.002142	0.000000	19.168	-6.731	0.000
6	2.0000	0.0000	0.001691	0.000000	47.158	3.588	0.000
7	2.5000	0.0000	0.001384	0.000000	63.997	4.481	0.000
8	3.0000	0.0000	0.001167	0.000000	74.173	3.936	0.000
9	3.5000	0.0000	0.001008	0.000000	80.660	3.257	0.000
10	4.0000	0.0000	0.000886	0.000000	85.012	2.675	0.000
11	0.0000	1.1000	0.000000	-0.001024	239.093	56.109	0.000
12	0.0000	1.2000	0.000000	-0.001009	206.156	34.025	0.000
13	0.0000	1.3000	0.000000	-0.000995	183.321	33.713	0.000
14	0.0000	1.4000	0.000000	-0.000974	166.014	34.576	0.000
15	0.0000	1.5000	0.000000	-0.000947	153.173	34.402	0.000
16	0.0000	2.0000	0.000000	-0.000794	122.553	26.700	0.000
17	0.0000	2.5000	0.000000	-0.000667	112.249	19.273	0.000
18	0.0000	3.0000	0.000000	-0.000570	107.682	14.208	0.000
19	0.0000	3.5000	0.000000	-0.000496	105.279	10.804	0.000
20	0.0000	4.0000	0.000000	-0.000438	103.860	8.453	0.000

NOMBRE DE SEGMENTS SUR LA FRONTIERE A DISCRITISER: 0

NOMBRE DE SEGMENT DANS LE DOMAINE OU ON CHERCHE DES VALEURS: 2

0.0000 0.0000

COEFFICIENT DE POISSON= 0.20

MODULE DE YOUNG=0.700000E+05

CONTRAINTES INITIALES SUIVANT X= 0.1000E+03

CONTRAINTES INITIALES SUIVANT Y= 0.0000E+00

CONTRAINTES DE CISAILLEMENT XY= 0.0000E+00

DONNEES CARACTERISANT L ELEMENT DE FRONTIERE:

		X(CENTRE)	Y(CENTRE)	LONGUEUR	ANGLE	US OU SIGMA_S	UN OU SIGMA_N						
1	1	0.2500	0.9330	0.5176	-15.00	0.0000E+00	0.0000E+00						
2	1	0.6830	0.6830	0.5176	-45.00	0.0000E+00	0.0000E+00						
3	1	0.9330	0.2500	0.5176	-75.00	0.0000E+00	0.0000E+00						
BLT	KODE	X1(NOEUD-1)	Y1(NOEUD-1)	X2(NOEUD-2)	Y2(NOEUD-2)								
1	1	0.0732	0.9804	0.4268	0.8856								
2	1	0.5536	0.8124	0.8124	0.5536								
3	1	0.8856	0.4268	0.9804	0.0732								
BLT	DS1	US1(-)	US1(+)	DN1	UN1(-)	UN1(+)	UX1(-)	UY1(-)	UX1(+)	UY1(+)	SIGMA1-S	SIGMA1-N	
	DS2	US2(-)	US2(+)	DN2	UN2(-)	UN2(+)	UX2(-)	UY2(-)	UX2(+)	UY2(+)	SIGMA2-S	SIGMA2-N	
1	0.000750	-0.000183	-0.000933	-0.001129	0.000272	0.001401	-0.000107	0.000310	-0.000539	0.001594	-.7772E-15	0.2470E-14	
	0.001870	0.001229	-0.000641	-0.000650	-0.000535	0.000115	0.001049	-0.000835	-0.000589	0.000277	-.1776E-14	-.3775E-14	
2	0.002414	0.001679	-0.000735	0.000853	0.000508	-0.000345	0.001546	-0.000828	-0.000764	0.000276	-.2539E-14	0.5773E-14	
	0.002826	-0.000913	-0.003739	0.001810	-0.000658	-0.002469	-0.001111	0.000180	-0.004390	0.000898	0.3672E-16	0.1310E-13	
3	0.001458	-0.000462	-0.001921	0.003314	-0.001119	-0.004432	-0.001200	0.000157	-0.004778	0.000708	0.2887E-14	0.4233E-14	
	0.001162	0.000800	-0.000362	0.003792	0.002517	-0.001275	0.002639	-0.000121	-0.001325	0.000019	-.1155E-13	0.7772E-15	

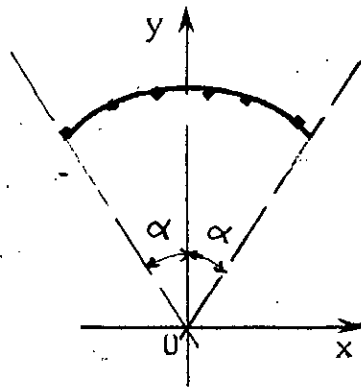
DEPLACEMENTS ET CONTRAINTES DANS LE DOMAINE:							
POINT	x-cord	Y-CORD	DPL-UX	DPL-UY	SIG-XX	SIG-YY	SIG-XY
1	1.1000	0.0000	0.002523	0.000000	-17.8800	-52.7830	0.0000
2	1.2000	0.0000	0.002385	0.000000	-3.9030	-30.4270	0.0000
3	1.3000	0.0000	0.002258	0.000000	5.8065	-18.0421	0.0000
4	1.4000	0.0000	0.002139	0.000000	14.1906	-10.2297	0.0000
5	1.5000	0.0000	0.002029	0.000000	21.7508	-5.1276	0.0000
6	2.0000	0.0000	0.001596	0.000000	49.7077	3.5563	0.0000
7	2.5000	0.0000	0.001305	0.000000	65.8818	4.2155	0.0000
8	3.0000	0.0000	0.001100	0.000000	75.5734	3.6617	0.0000
9	3.5000	0.0000	0.000949	0.000000	81.7285	3.0158	0.0000
10	4.0000	0.0000	0.000834	0.000000	85.8490	2.4709	0.0000
11	0.0000	1.1000	0.000000	-0.001044	238.1751	48.9843	0.0000
12	0.0000	1.2000	0.000000	-0.001023	197.1922	41.5940	0.0000
13	0.0000	1.3000	0.000000	-0.000996	174.3682	39.4494	0.0000
14	0.0000	1.4000	0.000000	-0.000966	158.8383	37.8342	0.0000
15	0.0000	1.5000	0.000000	-0.000934	147.5673	36.0835	0.0000
16	0.0000	2.0000	0.000000	-0.000774	120.4286	26.3160	0.0000
17	0.0000	2.5000	0.000000	-0.000647	111.1423	18.7610	0.0000
18	0.0000	3.0000	0.000000	-0.000551	107.0041	13.7609	0.0000
19	0.0000	3.5000	0.000000	-0.000479	104.8203	10.4354	0.0000
20	0.0000	4.0000	0.000000	-0.000423	103.5287	8.1514	0.0000

4.3.3 Fissure circulaire en milieu infini

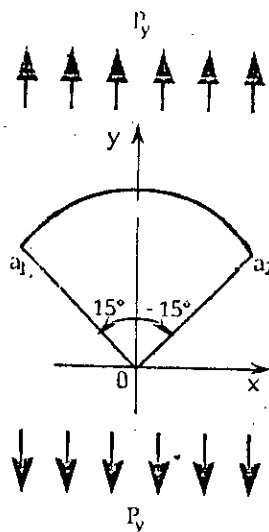
Dans le but d'illustrer les résultats des éléments circulaires, on a considéré deux exemples des fissures circulaires dans un milieu infini, et en absence des solutions analytiques, les résultats des éléments circulaires seront comparées avec ceux des éléments droits.

4.3.3.1 Fissure sous traction uniaxiale

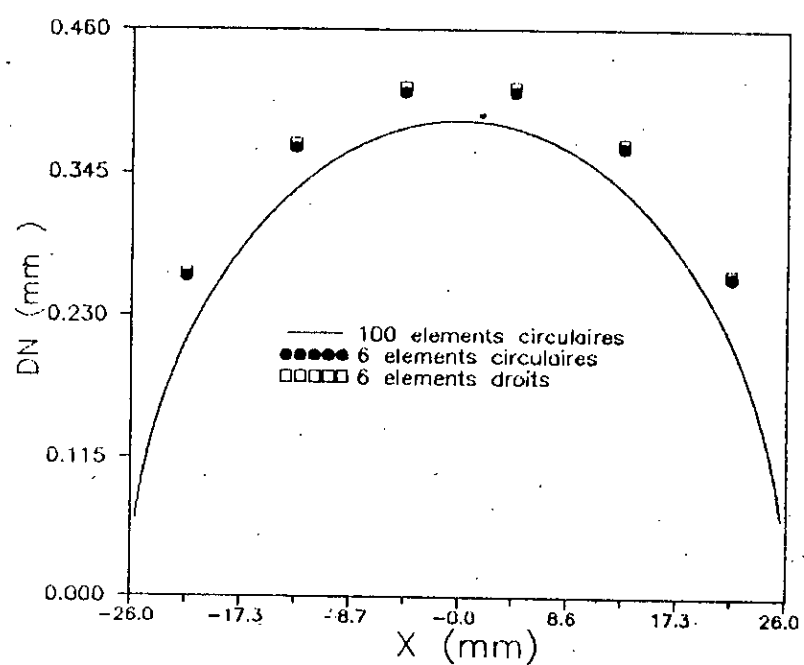
Ce premier exemple concerne une fissure soumise à une traction uniaxiale FIG(4.7) de rayon $R = 100\text{mm}$, d'ouverture $2\alpha = 30^\circ$ et $P_y = 100\text{ Mpa}$.



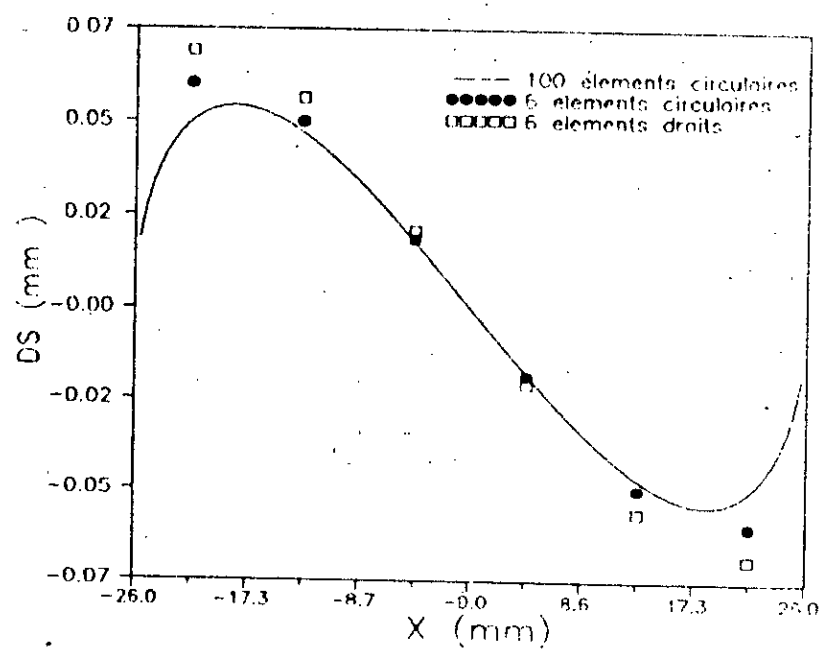
FIG(4.6) Discrétisation d'une fissure circulaire



FIG(4.7) Fissure circulaire soumise à une traction uniaxiale



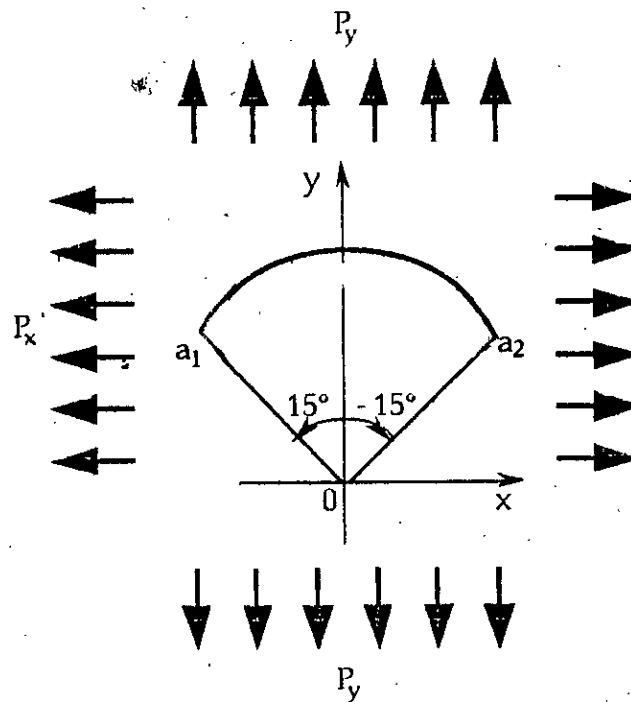
FIG(4.10. a) Discontinuité normale DN en fonction de l'abscisse x



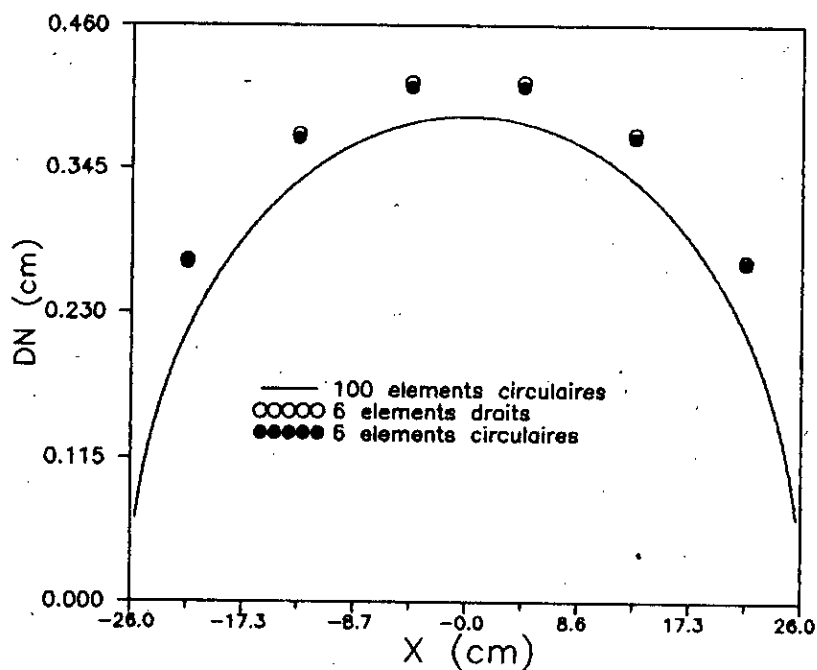
FIG(4.10. b) Discontinuité tangentielle DS en fonction de l'abscisse x

4.3.3.2 Fissure sous traction biaxiale

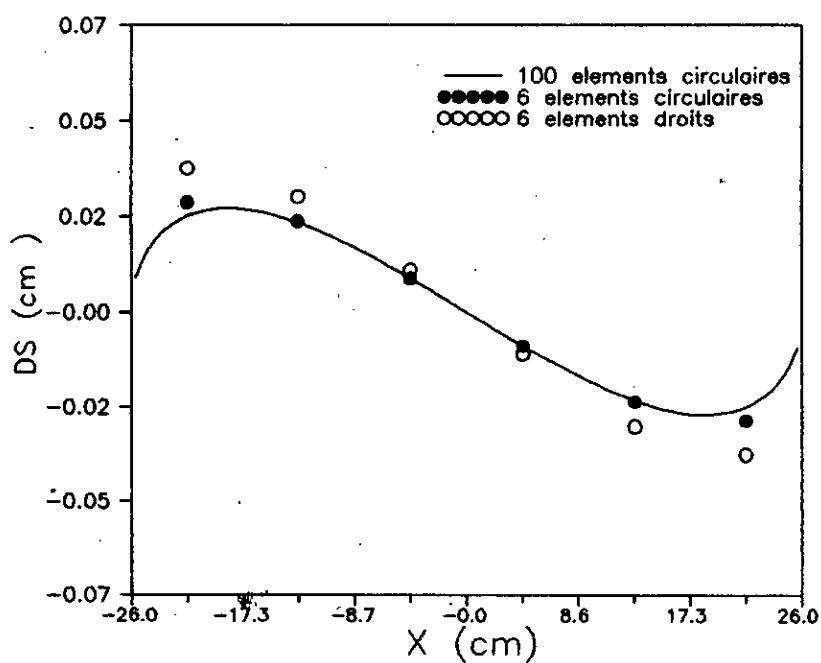
Dans ce deuxième exemple, les caractéristiques de la fissure sont similaires à la précédente mais elle est soumise à un chargement biaxial $P_x = P_y = 100$ Mpa FIG(4.9).



FIG(4.9) Fissure circulaire soumise à une traction biaxiale



FIG(4.8.a) Discontinuité normale DN en fonction de l'abscisse X



FIG(4.8.b) Discontinuité tangentielle DS en fonction de l'abscisse X

D'après ces deux exemples, on remarque que les discontinuités normales sont presque les mêmes alors que les éléments circulaires améliorent les résultats des discontinuités tangentielles.

CHAPITRE 5

APPLICATION A LA PROPAGATION DES FISSURES

5.0 INTRODUCTION

La valeur théorique des forces de cohésion d'un cristal parfait est de l'ordre de la contrainte théorique, celle-ci est égale au dixième du module de YOUNG, mais expérimentalement les valeurs mesurées sont très basses, l'explication réside dans le fait que la résistance théorique a été calculée pour un matériau parfait exempt de défauts (BARTHELLEMY [2]).

Les matériaux contiennent généralement des défauts (microfissures), l'initialisation ainsi que la propagation des fissures se font à partir de ces défauts qui interviennent pour des seuils de contraintes plus bas que le seuil théorique.

5.1 FISSURES DE GRIFFITH:

GRIFFITH a abordé le problème de la rupture des corps fissurés d'un point de vue énergétique. Cette approche repose sur le fait que l'instabilité d'une fissure aura lieu lorsque l'énergie potentielle libérée lors de son extension est supérieure à l'énergie absorbée pendant celle-ci. Cette énergie potentielle diminue au fur et à mesure que la fissure se propage [2],[16].

La condition nécessaire pour la rupture s'écrit donc (BARTHELLEMY [2]):

$$\delta W_{el} - \delta W_{ext} > 2 \delta a \gamma_s \quad (5.1)$$

$2 \delta a \gamma_s$: énergie dissipée dans la séparation

δW_{el} : variation d'énergie de déformation élastique.

δW_{ext} : travail des forces extérieures.

Pour déterminer W_{el} et W_{ext} on considère l'accroissement de la fissure dans deux cas extrêmes, à contrainte constante ou alors à déformation constante.

$$\text{Soit } \frac{\partial}{\partial s} (W_{el} - W_{ext}) + 2\gamma < 0 \quad (5.3)$$

$$\text{et } G = - \frac{\partial}{\partial s} (W_{el} - W_{ext}) \quad (5.4)$$

Le critère de propagation se traduit par :

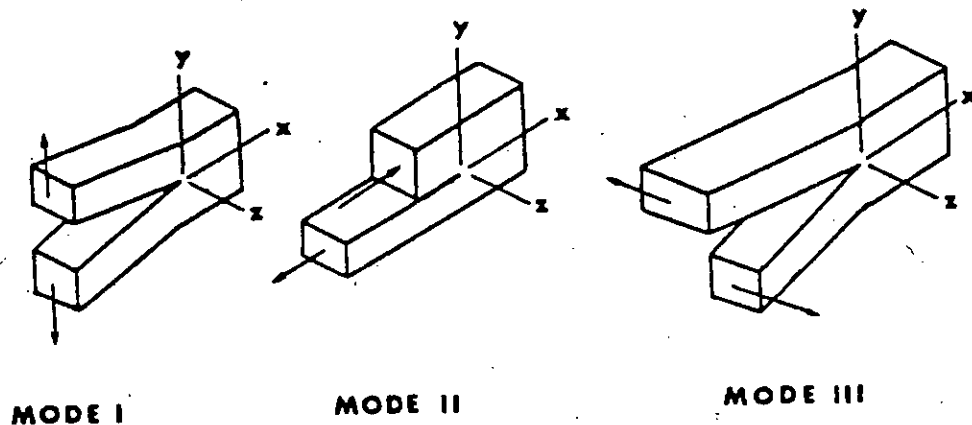
$$G > 2\gamma \quad (5.5)$$

Donc dès que le taux de restitution d'énergie G est supérieur à deux fois l'énergie de surface 2γ , une partie de l'énergie disponible sert à rompre les liaisons, c'est l'énergie de séparation. L'excès d'énergie $(G - 2\gamma)$ ds est transformé en énergie cinétique qui pourrait se dissiper dans la séparation de surfaces nouvelles, ce processus peut mener à la propagation instable.

Si au contraire les sollicitations extérieures sont telles que à tout moment le taux de restitution d'énergie critique G_c est égale à deux fois l'énergie de surface 2γ , il n'y aura pas d'accroissement d'énergie cinétique et la rupture est dite contrôlée c'est à dire une croissance stable de la fissure (BARTHELLEMY [2]).

5.2 MODES DE LA RUPTURE

Il est d'usage de considérer trois modes fondamentaux de sollicitations et tout autre s'en déduit par des combinaisons linéaires.



FIG(5.1) Modes fondamentaux de ruptures

Le mode I correspond à une traction perpendiculaire au plan de la fissure.

Le mode II et III correspondent à des propagations par glissement droit et vis. Le mode II est un mode perpendiculaire au fond de la fissure, alors que le mode III est un cisaillement mais parallèlement au fond de la fissure.

5.3 ANALYSE D'IRWIN

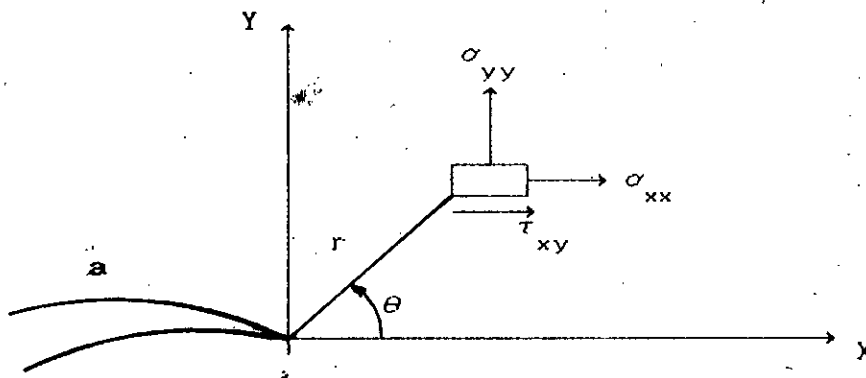
L'analyse de GRIFFITH permet de développer à partir de considérations thermodynamiques les conditions nécessaires pour la propagation des fissures. Il reste à montrer les contraintes localisées au voisinage de la fissure.

G.R IRWIN (BAILON [1]) considère une région en front de fissure comme suffisamment petite par rapport au solide

considéré mais suffisamment grande vis à vis des dimensions atomiques.

Le calcul en théorie élastique donne des valeurs de contrainte et de déplacement en tout point au voisinage de la fissure.

Pour un élément $dx dy$ à une distance r de la fissure et un angle θ avec le plan de fissure, il est soumis à des contraintes normales σ_{xx}, σ_{yy} et un cisaillement σ_{xy} comme l'indique la figure:



FIG(5.2) Les contraintes au voisinage de la fissure

Les expressions des déplacements et des contraintes s'écrivent:

$$u_x = \frac{KI}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (K - \cos(\theta)) + \frac{KII}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (K + \cos(\theta) + 2)$$

$$u_y = \frac{KI}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (K - \cos(\theta)) - \frac{KII}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (K + \cos(\theta) + 2)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{KI}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{KII}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{KI}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{KII}{(2\pi r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{KII}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{KI}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

(5.6)

$$K = 3 - 4\nu \quad \text{en déformation plane.}$$

$$K = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en contrainte plane}$$

KI et KII représentent les facteurs d'intensité de contrainte qui caractérisent la singularité des contraintes à la pointe de la fissure.

Les discontinuités des composantes U_2 et U_1 sont respectivement :

$$U_2 = U_2(r, \pi) - U_2(r, -\pi) = \frac{KI}{\mu} (K+1) \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}$$

(5.7)

$$U_1 = U_1(r, \pi) - U_1(r, -\pi) = \frac{KII}{\mu} (K+1) \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}$$

D'une manière générale on peut écrire les contraintes et les déplacements pour $r = 0$ et $r \ll a$ comme suit:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (5.8)$$

$$U_i = \frac{K_i}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_{ij}(\theta)$$

Le facteur d'intensité de contrainte K_i est déterminé par les conditions aux limites, il dépend de la contrainte appliquée et de la géométrie de la fissure. La connaissance de ce facteur permet donc de connaître le champ de contrainte en fond de fissure, et la fissure commence à se propager lorsque le facteur d'intensité de contrainte atteint une valeur critique K_c . Il est noté K_{Ic} pour le mode I, K_{IIc} pour le mode II et K_{IIIc} en mode III.

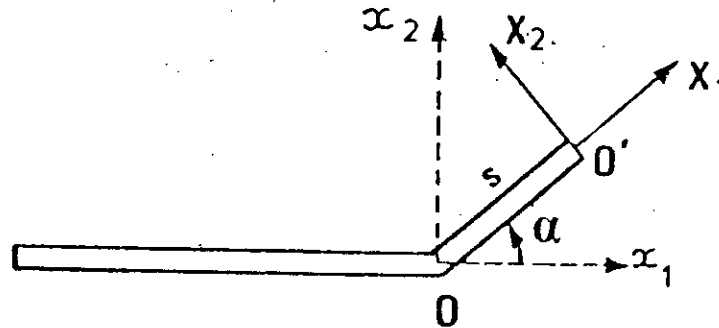
La rupture aura lieu pour une distribution critique des contraintes à fond de fissure.

5.4 CRITERE DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Il est considéré dans ce critère que la direction de propagation de la fissure à chaque instant rend maximal le taux d'énergie libérée G [20]. On réalise une série de calcul sur des fissures branchées d'un angle θ , la branche ayant une longueur da suffisamment petite et dans chaque cas $G(\theta)$ est évalué numériquement par:

$$G(\theta) = \frac{1}{2 \Delta a} T [U(\Delta a, \theta) - U(0,0)] \quad (5.9)$$

La direction de bifurcation est celle qui rend $G(\theta)$ maximum.



FIG(5.3) Fissure branchée

Ce critère est satisfaisant sur le plan physique mais il donne des résultats peu différents de ceux du critère de la contrainte maximale (LEMAITRE [20]).

5.5 APPLICATION

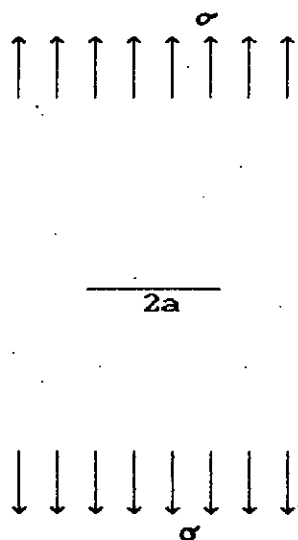
Dans ce paragraphe, à travers une série d'exemple, on a proposé de faire le calcul de taux de restitution d'énergie dans le cas d'une propagation droite et circulaire. on évaluera l'erreur en fonction du nombre de noeuds.

Le matériau a été pris avec les caractéristiques suivantes:
 $E = 2 \cdot 10^5$ MPa ; $\nu = 0.3$ et $P = 1000$ MPa

5.5.1 PROPAGATION DROITE

5.5.1.1 Plaque infinie en traction

On considère un milieu élastique plan, infini, qui contient une fissure de longueur $2a$, soumis à une traction fig(5.4).

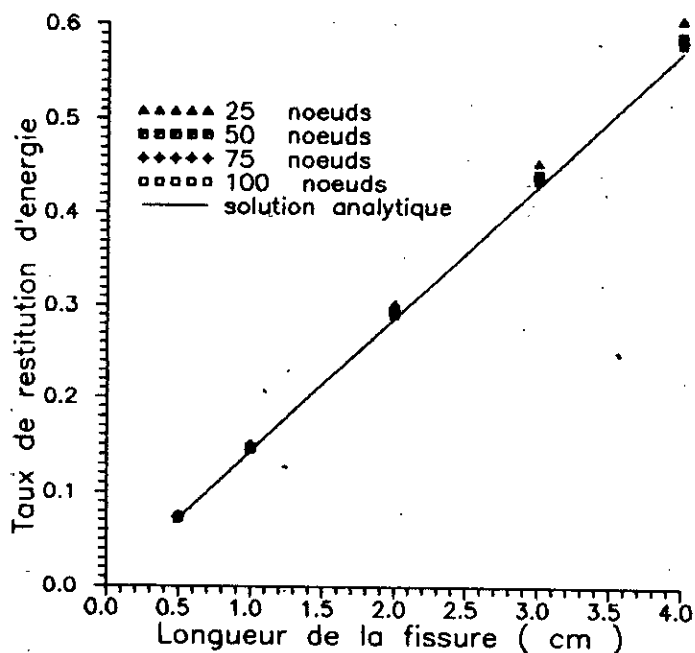


Fig(5.4) Fissure horizontale dans une plaque infinie en traction

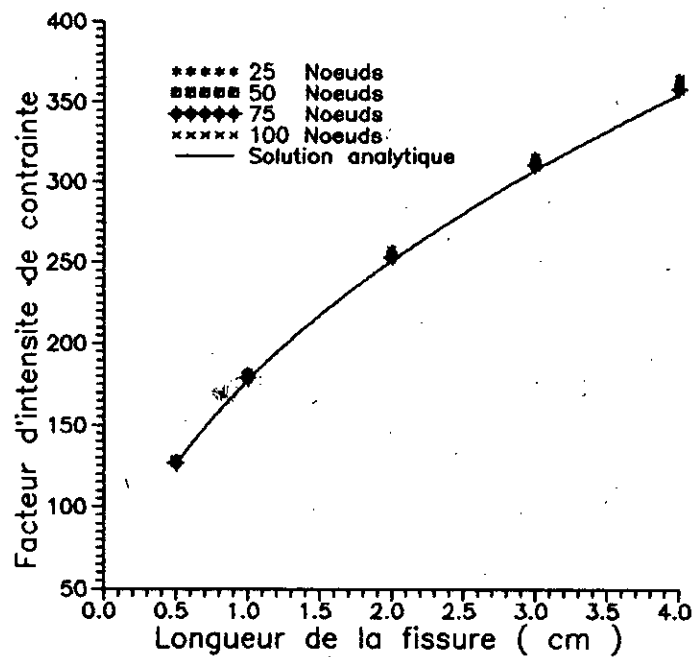
L'expression du coefficient d'intensité de contrainte est :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

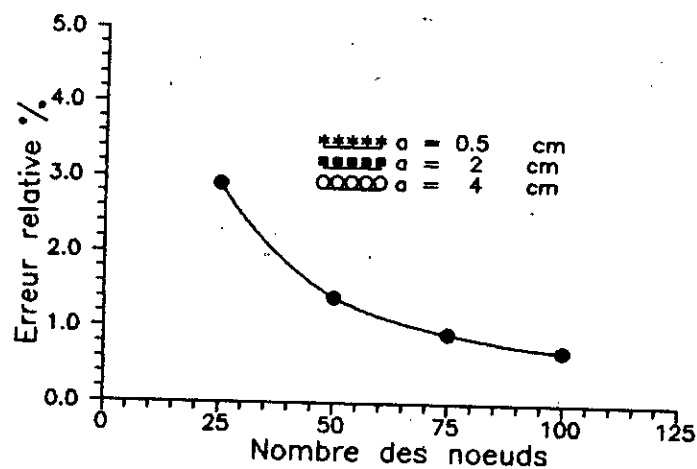
La fissure a été discrétisée avec 25,50,75 et 100 éléments et on a obtenu les résultats suivants:



FIG(5.5) Taux de restitution d'énergie pour une fissure horizontale dans une plaque infinie en traction



FIG(5.6) Courbe du facteur d'intensité de contrainte pour une fissure horizontale dans une plaque infinie

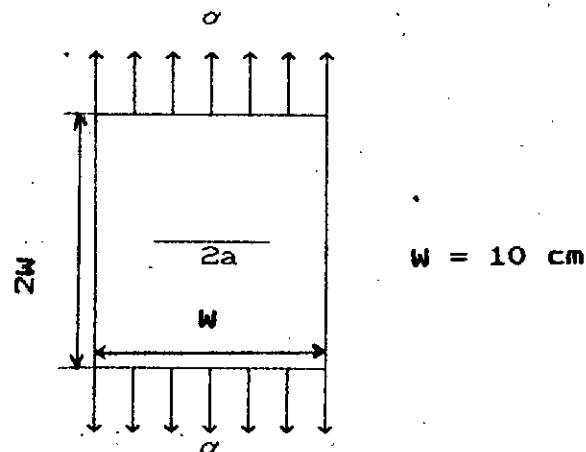


FIG(5.7) Erreur relative en fonction du nombre des noeuds de F . I . C d'une fissure horizontale dans une plaque infinie

D'après ces courbes, on remarque le bon accord entre les résultats analytiques et numériques. l'erreur relative peut être diminuée en augmentant le nombre de noeuds. La figure(5.7) nous montre que l'erreur relative dépend seulement de la forme de discrétisation (courbes des erreurs confondues).

5.5.1.2 Plaque finie en traction

Le cas de fissure dans des plaques de taille finie est d'un grand intérêt pratique, mais le problème de la détermination du champ de contrainte est rendu complexe par les conditions aux limites.

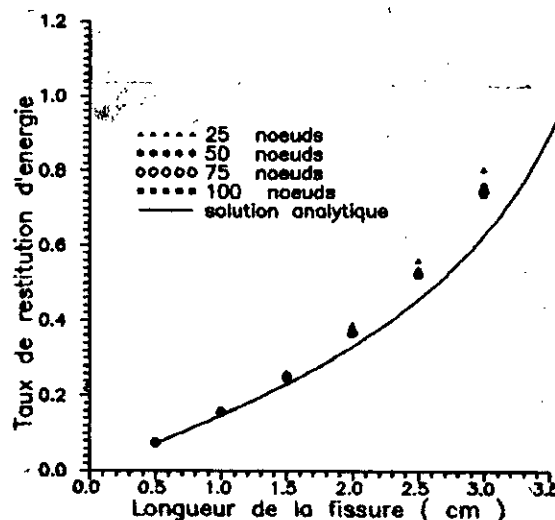


Fig(5.8) Fissure horizontale dans une plaque finie en traction

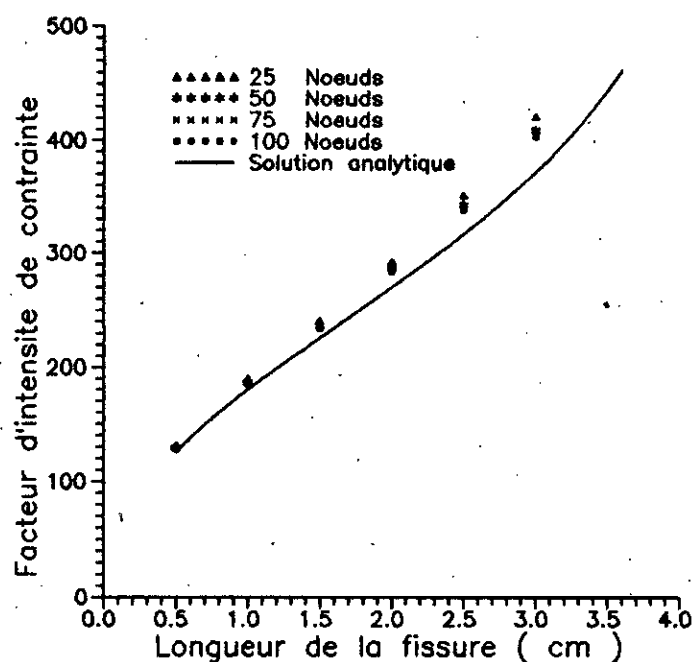
Les valeurs empiriques de cette plaque fig(5.8) sont données par [2]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{w}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{w} \right]^{\frac{1}{2}}$$

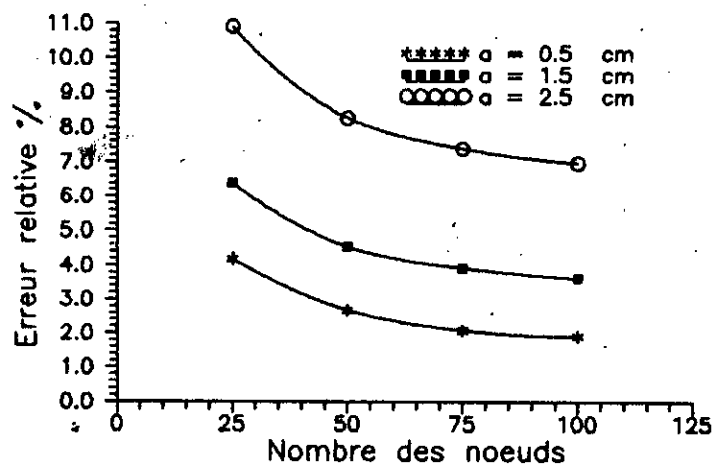
Les résultats numériques et les erreurs relatives sont représentés dans les figures suivantes:



FIG(5.9) Taux de restitution d'énergie pour une fissure horizontale dans une plaque finie en traction

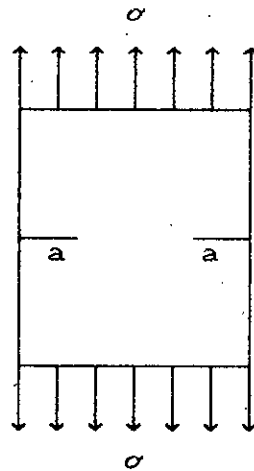


FIG(5.10) Courbe du facteur d'intensité de contrainte pour une fissure horizontale dans une plaque finie en traction



FIG(5.11) Erreur relative en fonction du nombre des noeuds de F . I . C d'une fissure horizontale dans une plaque finie

5.5.1.3 Plaque finie en traction (double fissure débouchante)



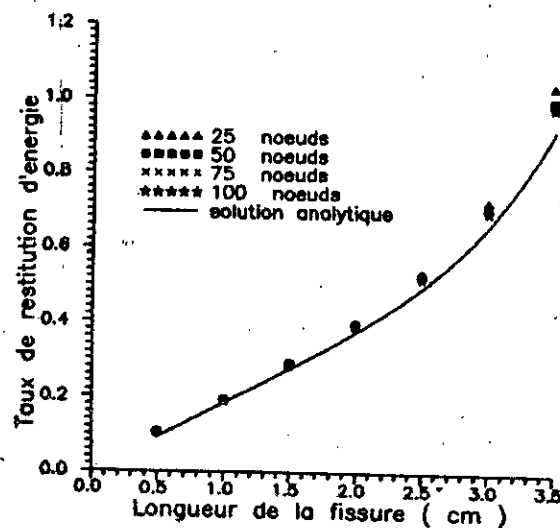
Fig(5.12) Plaque finie avec double fissure débouchante

Pour cet exemple, l'expression du facteur d'intensité de contrainte est donnée par BUI [6] :

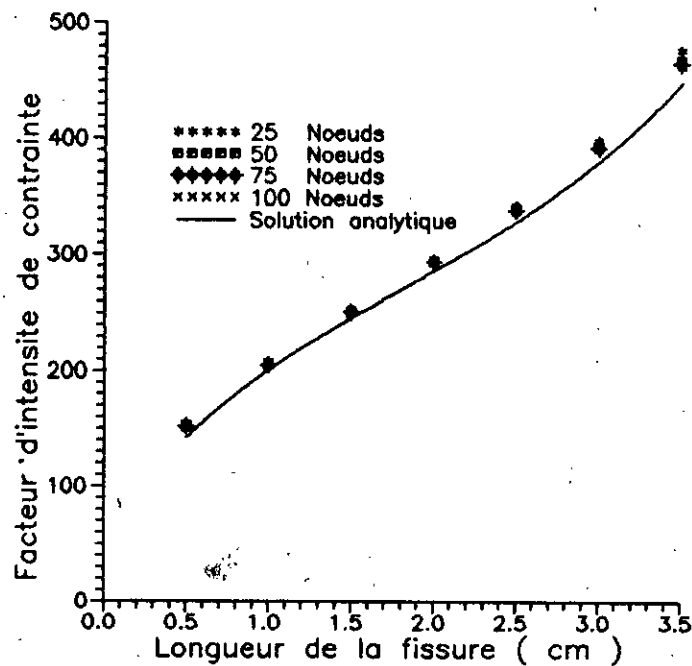
$$K_I = y \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$\text{avec } y = 1.99 + 0.76 \frac{a}{w} - 8.48 \left(\frac{a}{w} \right)^2 + 27.36 \left(\frac{a}{w} \right)^3$$

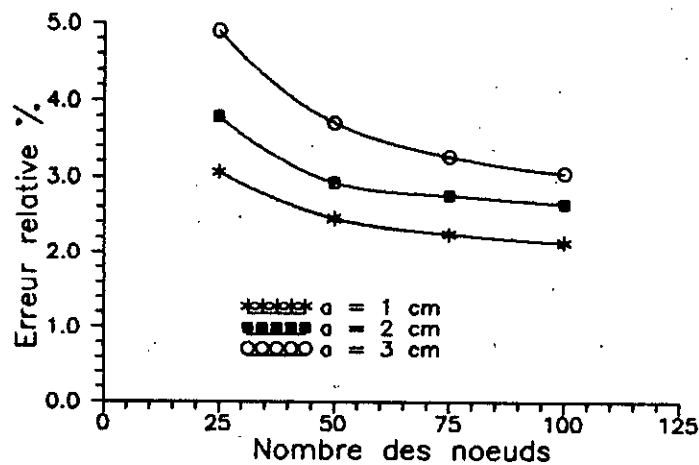
Les résultats numériques comparés à ceux de l'analytique sont représentés par les courbes suivantes:



FIG(5.13) Taux de restitution d'énergie pour une double fissure débouchante dans une plaque finie en traction



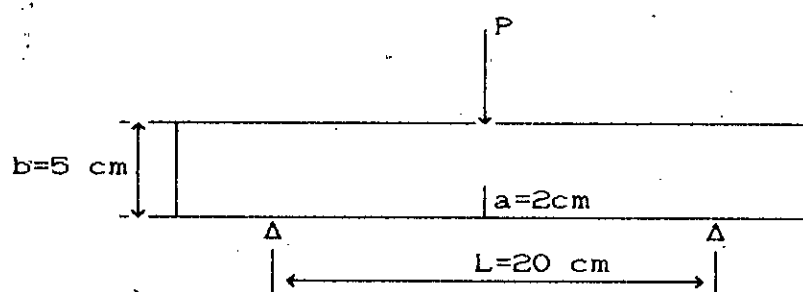
FIG(5.14) Courbe du facteur d'intensité de contrainte pour une double fissure débouchante dans une plaque finie



FIG(5.15) Erreur relative en fonction du nombre des noeuds de F.E.C d'une double fissure débouchante dans une plaque finie

Les résultats obtenus pour le cas des plaques finies, nous montrent que les variables de fissuration s'éloignent de la solution analytique au fur et à mesure que la taille des défauts augmente et que l'erreur dépend du nombre de discrétisation et de la taille des défauts à cause de l'interaction entre les éléments de la frontière et de la fissure.

5.5.1.4 Eprouvette de flexion trois points (S.E.N.B)



FIG(5.16) Eprouvette de flexion 3 points entaillée

L'expression du facteur d'intensité de contrainte est donnée par BUI [6]:

$$K_I = \frac{3PL}{2b^2l} \sigma \sqrt{\pi a} y$$

$$\text{avec } y = 1.09 - 1.735 \frac{a}{b} + 8.2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 14.18 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 14.75 \left(\frac{a}{b} \right)^4$$

Pour cet exemple la discrétisation de l'éprouvette au niveau de la fissure joue un rôle très important à cause de la forte concentration de contrainte.

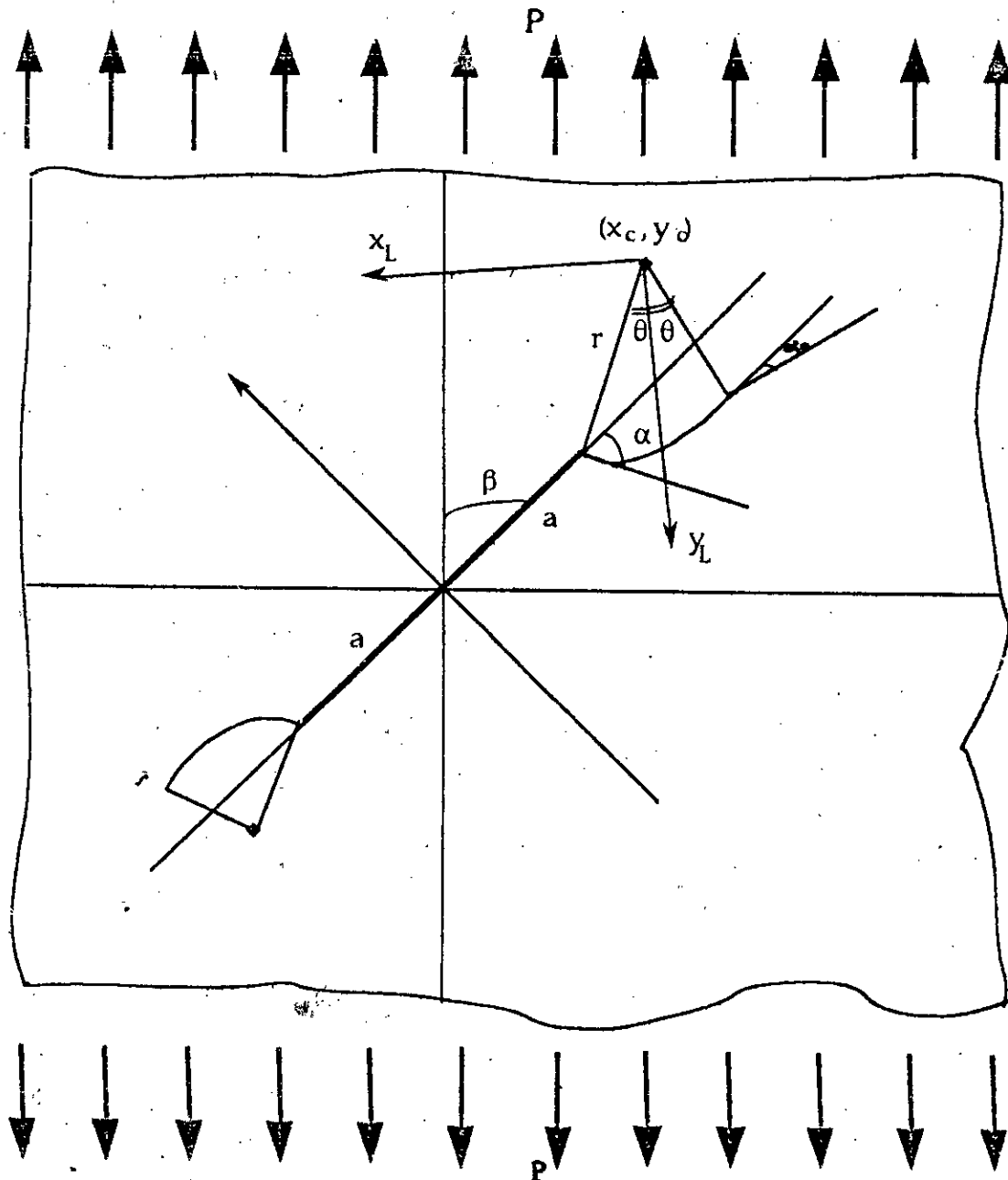
on a maillé l'éprouvette avec 98 éléments et on a obtenu les résultats suivants:

Nombre des éléments de la fissure	5	10	12	15	20	25
G en MJ/m ²	0.4125	0.4113	0.4109	0.4105	0.4101	0.4098

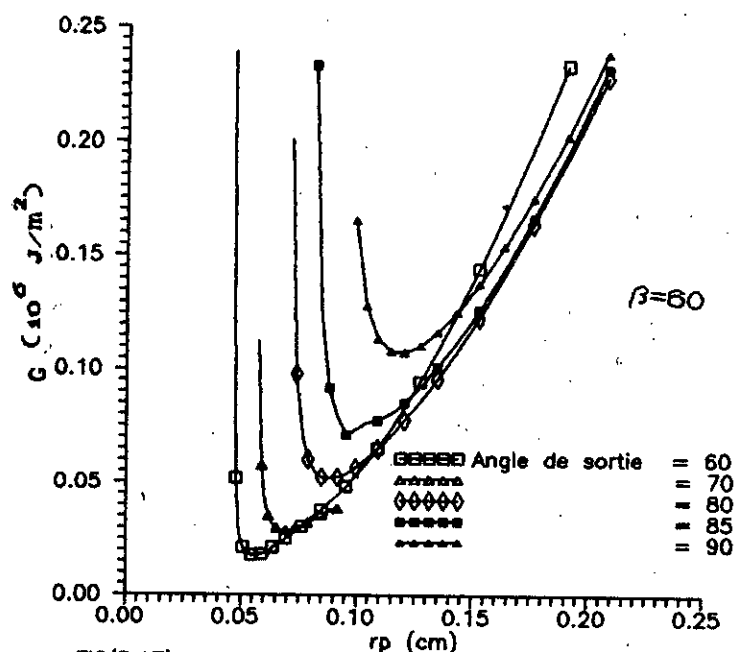
Le taux de restitution d'énergie analytique étant égal à 0.4094 MJ/m²

5.5.2 PROPAGATION CIRCULAIRE

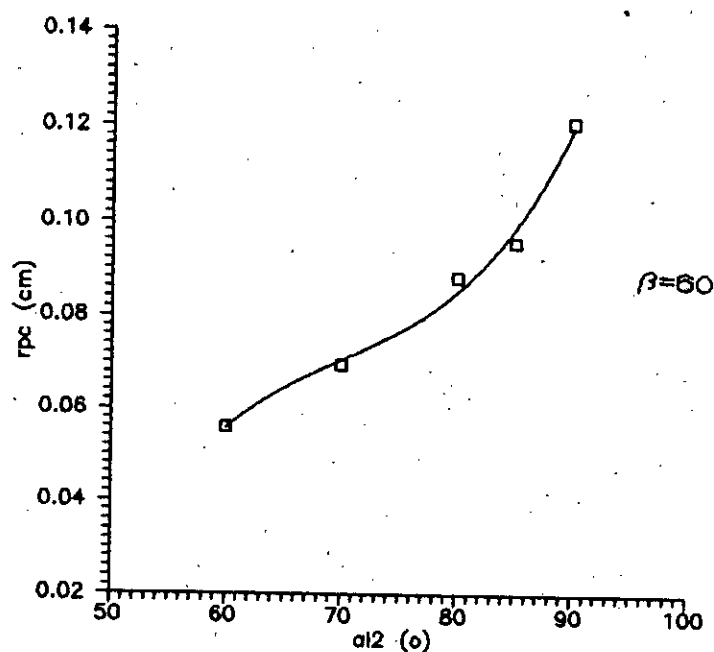
La simulation de la propagation circulaire nécessite un couplage entre les éléments droits et circulaires. On a fait des applications sur des fissures orientées arbitrairement avec un angle β par rapport à la direction de chargement comme le montre la figure (5.17). Les deux exemples ont été pris avec $\beta=30^\circ$ et $\beta=60^\circ$ et on a obtenu les résultats suivants avec des différents angles de sortie.



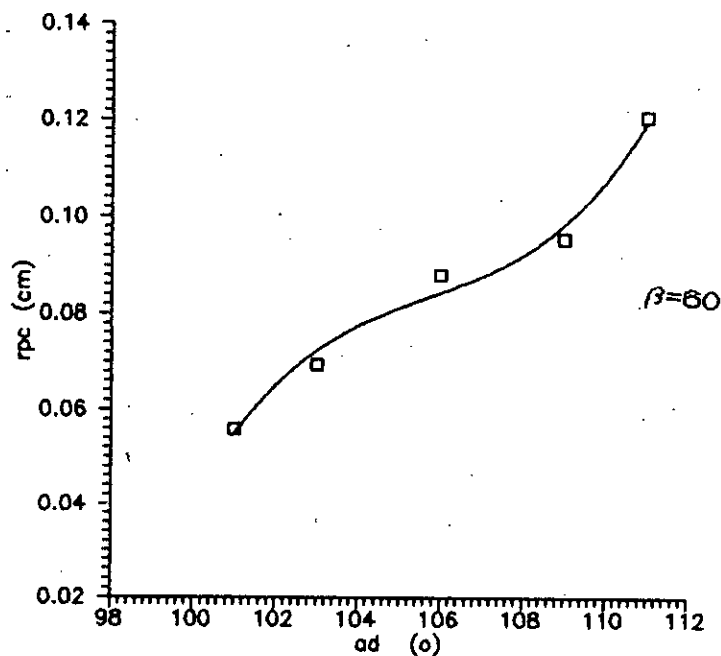
FIG(S.17) Fissure en traction uniaxiale avec élément de propagation circulaire en milieu infini



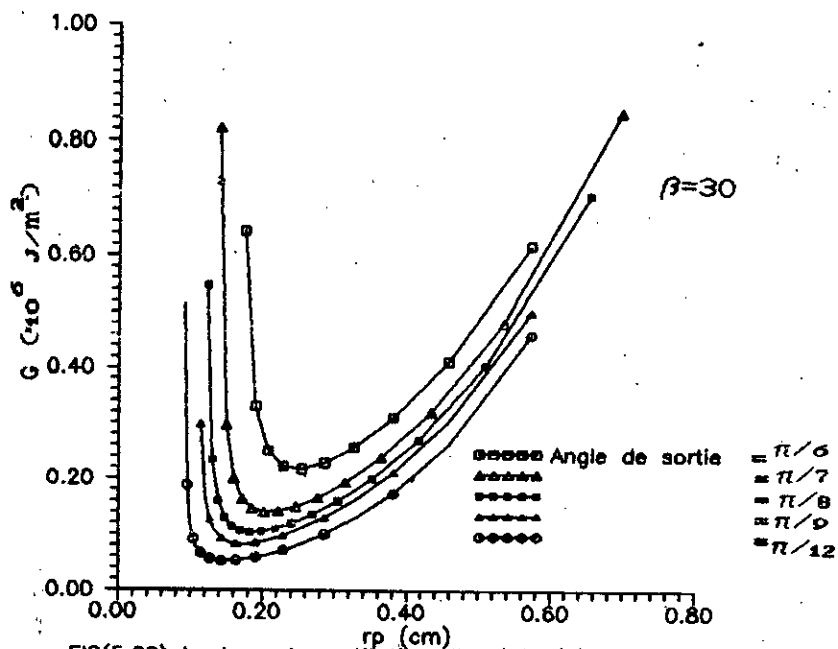
FIG(5.17) Le taux de restitution d'énergie (G) en fonction du rayon de l'élément circulaire (r_p)



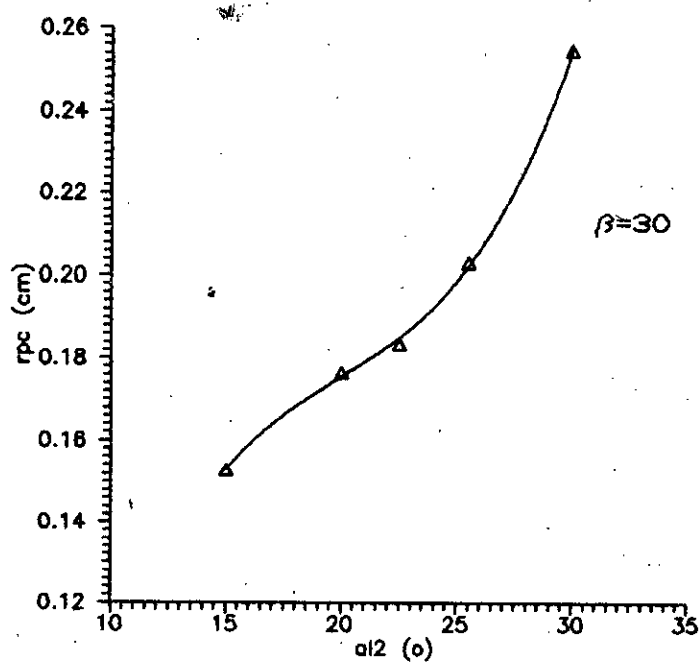
FIG(5.18) Le rayon de l'élément circulaire (r_{pc}) correspondant à chaque angle de sortie ($a/2$)



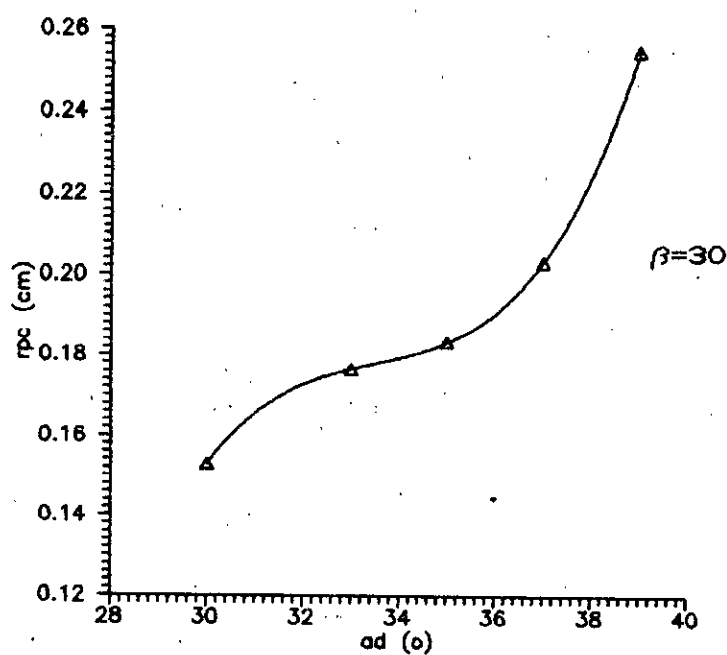
FIG(5.19) Le rayon de l'élément circulaire (rp_c) en fonction de l'inclinaison défavorable de chaque angle de sortie (ad_2)



FIG(5.20) Le taux de restitution d'énergie (G) en fonction du rayon de l'élément circulaire (rp)



FIG(5.21) Le rayon de l'element circulaire (rpc) correspondant à chaque angle de sortie (a_{12})



FIG(5.22) Le rayon de l'element circulaire (rpc) en fonction de l'inclinaison defavorable de chaque angle de sortie (a_{12})

Les valeurs des rayons sont obtenues à partir d'une expression déterminée en fonction des paramètres indiqués sur la figure(5.17). Ces rayons varient en fonction de l'inclinaison de l'élément circulaire fig(5.18,5.21) et pour chaque angle de sortie on a trouvé un optimum du taux de restitution d'énergie qui s'augmente au fur et à mesure que l'angle de sortie augmente, et de même pour les rayons optimaux fig(5.17,5.20). Les figures (5.19,5.22) représentant le rayon de l'élément circulaire en fonction de l'inclinaison défavorable de chaque angle de sortie montre la non-linéarité entre ces deux paramètres

5.6 CONCLUSION

D'après les résultats obtenus on a remarqué le bon accord entre les résultats analytiques et numériques, l'erreur relative peut être diminuée considérablement en augmentant le nombre des noeuds. Elle ne dépend pas de la taille des fissures dans le cas des plaques infinies, contrairement aux plaques de dimensions finies qui nécessitent une discrétisation assez fine au fur et à mesure que les dimensions des fissures augmentent.

En ce qui concerne la propagation circulaire, les résultats des taux de restitution d'énergie ont montré le même ordre de grandeur avec ceux de l'élément droit.

CONCLUSION

Dans ce présent travail, nous avons développé et programmé la méthode des discontinuités de déplacement, on a montré la nécessité d'exprimer cette méthode plutôt en champ complexe qu'en coordonnées cartésiennes. Une application aux milieux fissurés a été examinée.

Cette méthode s'adapte bien aux problèmes d'élasticité et ce en réduisant la taille du système d'équations. L'avantage est que les problèmes sont étudiés avec une modélisation dans les domaines même non bornés. Néanmoins, on obtient toujours des matrices non-symétriques et pleines à résoudre.

Comparativement à la méthode des équations intégrales, la méthode des éléments finis présente un inconvénient qui est la description des champs des déplacements et des contraintes au voisinage de la fissure. L'évaluation des F.I.C consistent à déterminer ces champs où plusieurs auteurs utilisent des éléments spéciaux isoparamétriques pour lesquels le noeud du centre est décalé d'un quart vers la pointe de fissure [25]. Sans ceux-là une description assez fine pour connaître les champs est nécessaire d'où une difficulté, telle que la taille de la matrice (temps de calcul).

Afin de valider notre programme, nous avons effectué des tests numériques sur des problèmes bidimensionnels comportant des fissures, les résultats obtenus ont montré un bon accord. Nous avons étendu les cas pour une étude paramétrée en fonction des longueurs des fissures afin d'atteindre la précision voulue en fonction du nombre de noeuds.

En ce qui concerne la propagation curviligne, on a fait un couplage entre les éléments droits et les éléments circulaires pour simuler la propagation des fissures curvilignes. Par conséquent on a pu déterminer l'angle de branchement et la direction de la propagation lointaine des fissures. Au niveau de calcul des taux de restitution d'énergie on a obtenu le même ordre de grandeur que ceux de l'élément droit.

En ayant ce code de calcul, la méthode des discontinuités de déplacement est recommandée pour être étendue aux milieux élastiques stratifiés, aux problèmes de contact, à l'étude de la propagation avec des éléments d'ordre supérieur et du traitement des problèmes en milieux semi-infinis.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAILON J.P.(1980)-" Rupture, Contrôle, Sureté"-Ecole d'été,E.N.P Montreal.
- [2] BARTHELLEMY H.(1980)-"Notions de la mécanique de la rupture" -Ed.Eyrols.
- [3] BELKACEMI Y.-"Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe"-Thèse de Doctorat,U.S.T de Lille,1990.
- [4] BOUHADANE A.-"Application de l'intégrale de Cauchy à la méthode de discontinuité de déplacement et autres méthodes de collocation" -Thèse de Doctorat,U.S.T de Lille,1985.
- [5] BREBIA C.A,ORSZAG S.A.(1984)-"The Complex variable Boundary Element Method"-Editoriel Board,U.S.A.
- [6] BUI H.D (1978)-"Mécanique de la rupture fragile " -Ed.Masson, Paris.
- [7] H.D.BUI(1977)-"An integral equation method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape"-J.Mech.Phys.Solids,Vol.25,pp.29-39
- [8] COTTERELL.B.,RICE J.R (1980)-"Slight, Curved or Kinked Cracks"-int.J.of Fracture,vol.16,n°2.
- [9] CRAWFORD A.M. CURRAN J.H(1981)-"High Order Functional Variation Displacement Discontinuity Elements" -Int.J.Rock,Mech.Min. Sci.Abst., vol.19,pp 143-148.
- [10] CROUCH. S.L.,STARFIELD A.M.(1983)-"Boundary Element Method in Geomechanics"-Ed.George Allen and Uwin.
- [11] CROUCH S.L.(1976) -"Solution of Plane Elasticity Problems by the Discontinuity Method"-int.J. for Num.Met in Eng,vol.10,pp:301-343.

- [12] EFFTIS and SUBRAMONIAN N.(1978)-"The Inclined Crack Under Biaxial Load"-Eng.Fracture Mec.,Vol.10,pp.43-67.
- [13] HENRI.C.(1960)-"Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes"-Ed.Hermann,Paris.
- [14] HENRY J.P,PARSY F.(1983)-"Cours d'élasticité"-Dunod,Paris.
- [15] HENRY J.P,CAIGNAERT G.(1988)-"Exercices d'élasticité"-Dunod, Paris.
- [16] HUSSAIN M.A.,PU S.L.,Underwood j.(1984)-"Strain Energy Release rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II"-Fracture Analysis, ASTM STP 560,pp.228.
- [17] LABBENS R.-"Introduction à la mécanique de la rupture"- Ed. Pluralis.
- [18] LACHAT J.C.(1975)-"A further development of the boundary integral technique of elastostatics" -PHD thesis, Universite of Southampton.
- [19] LACHAT J.C.,WATSON J.O.(1976)-"Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: A formulation for three Dimensional elastostatics" -int.j.Num.Met.Eng., vol.10,pp.991-1005.
- [20] LEMAITRE J.,CHABOCHE J.P.(1985)-"Mécanique des matériaux solides"- Ed.Bordas,Paris.
- [21] MILE THOMPSON L.M.(1968)-"Systèmes élastiques plans" -Dunod, Paris.
- [22] MUSKHELISHVILI N.P.(1963)-"Some basic problems of mathematical theory of elasticity" -Noordhoof Ed.Groningen.

Bibliographie

- [23] PANASYUK Y.V.,SAVRUK H.P.,DATSYSHYN A.D.(1977)-"A General Method of two Dimensional Problem in the theory of Crack"-Eng.Fracture Mec.,Vol.9,pp.489-497.
- [24] PARTON V.,PERLINE P.(1984) -"Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité"- Ed.Mir,Moscou.
- [25] PETER G TRACY (1978)-"Elastic analysis of radial cracks emanating from the outer and inner surfaces of circular ring"-Eng.Fracture Mec., Vol.11,pp.291-300.
- [26] PIN TONG, T.H.H. PIAN AND LASRY(1973) S.J.-"A Hybrid-Element Approach To Crack Problems In Plane Elasticity"- int.J. for Num.Met in Eng,vol.7,pp.297-308.
- [27] ROUAINIA M.(1988)-"Modélisation numérique de la progression de fissures dans les solides élastiques"-Rapport de stage,U.S.T de Lille.
- [28] SIDOROV YU.V,FEDORYUK M.V,SHABUNIN M.I.(1985)-"Lecture on the theory of function of a complex variable"-Ed.Mir,Moscow.
- [29] G.C.SIH P.C.PARIS F.ERDOGAN(1962)-"Crack-tip, Stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems"-J of App Mec,pp.306-312
- [30] SOLOMON L.(1968)-"Elasticité linéaire"-Ed.Masson .
- [31] THOMAS A.CRUSE (1973)-"Application of the Boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis"-Computers & structures,Vol 3,pp.509-527
- [32] T.V.HROMADKA II and G.L.GUYMON (1984)-"A complex variable boundary element method :Development"-int.J. for Num.Met in Eng,vol.20,pp.25-37.

Bibliographie

- [33] WILLES T.D, CURRAN J.H(1983)-"A General 3-d Displacement Discontinuity Method "-Proceeding of the 4 th Int.Conf.Num.Met.in Geomechanics,Edmonton,Canada,Vol.1,pp.103-111.

ORGANIGRAMME

DU

PROGRAMME

