

وزارة التعليم والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIEUR D'ETAT EN ELECTRONIQUE

THEME

**Prétraitement de la parole
(filtrage numérique)
en vue de sa reconnaissance**

propose par :

Melle Aicha MOUSSAOUI

Etudié par :

MOKHTARI Tahar

BENRAMOUL Brahim

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

—»O«—

وزارة التعليم والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

—»O«—

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

—»O«—

DEPARTEMENT ELECTRONIQUE

—»O«—

PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIEUR D'ETAT EN ELECTRONIQUE

THEME

*Prétraitement de la parole
(filtrage numérique)
en vue de sa reconnaissance*

propose par :

Melle Aicha MOUSSAOUI

Etudié par :

MOKHTARI Tahar

BENRAMOUL Brahim

Promotion Janvier 1984

- A la mémoire de ma mère .
- A mon père qui m'a tout donné .
- A mes grands parents Hafid et Louiza
- A mon frère Rachid .
- A toute la famille .
- A tous les amis(es) .

T. Mokhtari .

- A mon père et ma mère qui ont consacré toute leur vie pour notre bonheur .
- A la mémoire de ma grand-mère Safia .
- A mes frères et sœurs qui m'ont beaucoup encouragé .
- A toute la famille .
- A tous les amis(es) pour toute leur sympathie et leur aide durant mes années d'études .
- A celle qui sera "mienne" pour le meilleur et pour le pire .

B. Benramoul .



REMERCIEMENTS

Que tous ceux qui ont contribué à notre formation trouvent ici, l'expression de notre profonde reconnaissance ainsi que nos plus vifs remerciements.

Nous remercions principalement, M^{lle} Moussaoui, pour son aide et ses conseils tout au long de l'élaboration de ce projet de fin d'étude.

Nos remerciements, vont aussi, à Messieurs les responsables du laboratoire de Linguistique de Ben-Aknoun, Perrier et Mariane, et Monsieur le directeur de l'institut.

Et que tous les gens qui nous ont aidé de près ou de loin, trouvent ici, l'expression de notre sincère remerciement.

◉ TABLE DES MATIERES ◉

◉ <u>Chapitre I</u> : Notions générales.....	◉ <u>Introduction</u>	I
- I.1 : Généralités		1
- I.2 : Filtrés numériques		3
- I.3 : Synthèse des filtres numériques		5
- I.4 : Structures d'un filtre numérique		8
- I.5 : Transformée de Fourier		13
◉ <u>Chapitre II</u> : Echantillonnage et quantification		16
- II.1 : Echantillonnage		16
- II.2 : Décimation et interpolation		19
- II.3 : Quantification		25
◉ <u>Chapitre III</u> : Analyse de Fourier à court terme		40
III.1 : Introduction		40
III.2 : Vitesses d'échantillonnage de $X_n(e^{j\omega})$ en temps et en fréquences		44
III.3 : Méthode de sommation d'un banc de filtres de la synthèse à court terme		46
◉ <u>Chapitre IV</u> : Conception d'un banc de filtres numériques		59
IV.1 : Introduction		59
IV.2 : Conception d'un banc de "F.N" utilisant les filtres "R.I.I"		70
IV.3 : Conception d'un banc de "F.N" utilisant les filtres "R.I.F"		75
IV.4 : Exemples		83
◉ <u>Conclusion</u>		88
◉ <u>Annexes</u> : A, B, C		89

INTRODUCTION

Le signal vocal est complexe, il peut être représenté par l'évolution de l'amplitude dans l'espace temps - fréquence.

Nous avons choisi d'en effectuer l'analyse spectrale à court terme, grâce à un banc de filtres numériques dans la bande utile, comprise entre (200 et 6800) Hz (domaine significatif de la parole).

Auparavant, le signal de la parole subit certaines transformations. D'abord il est amplifié grâce à un préamplificateur, puis un atténuateur permet de compenser l'atténuation à 6dB que subissent les fréquences aigües (0,5 à 10) KHz au niveau du conduit vocal, ceci afin que la réponse soit identique pour tout le spectre.

Enfin, un échantillonnage à une fréquence de 16 KHz et une conversion analogique - numérique fournissent les entrées numériques des filtres. A la sortie des filtres numériques, on obtient des sorties numériques qui sont, en général, à traiter par un microprocesseur pour des différentes utilisations. Le traitement des données du spectre consiste, ensuite, à y rechercher un paramètre particulier de la parole, comme l'intensité, l'amplitude, la mélodie, le voisement, ... etc.

Différentes raisons ont guidé notre choix vers les filtres numériques plutôt qu'analogiques :

- La possibilité de changer la bande utile sans modification du circuit.
- une rapidité de calcul suffisante.

- La simplicité de réalisation, puisque le même circuit sert au calcul de tous les filtres, dont il suffit de lui fixer les paramètres pour le filtre concerné.

- L'encombrement réduit de la réalisation.

Compte tenu des filtres passe-bande qui se recoupent, une atténuation de 12 dB par octave est suffisante, aussi, dans la réalisation il serait préférable d'utiliser des filtres du second ordre.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES

1.1) Généralités :

1.1.1) Rappels sur le mécanisme de production du signal de la parole :

Notre organe phonatoire comprend pour l'essentiel : les poumons, la trachée, le larynx, le pharynx et les cavités buccale et nasale.

Dans la région centrale du larynx se trouvent les cordes vocales, constituant un diaphragme souple.

Sous l'action de l'air en provenance des poumons, les cordes vocales se mettent à vibrer et donnent naissance à un phénomène de relaxation qui se traduit à la sortie des cordes vocales, par des variations impulsionnelles périodiques de la pression et du débit de l'air. L'excitation du conduit vocal (pharynx, cavités buccale et nasale) par cette source que sont les cordes vocales donne naissance aux sons du langage.

L'ensemble des cavités supraglottiques constitue un filtre qui va renforcer ou atténuer sélectivement les composantes du signal de source.

Il est nécessaire d'examiner plus précisément la nature du signal de la parole et son évolution au cours du temps afin de pouvoir déterminer les conditions dans lesquelles les méthodes mathématiques du "traitement du signal" peuvent être appliquées au signal de la parole.

1.1.2) Nature et propriétés statistiques du signal de la parole :

On examine ici la nature du signal de la parole considéré non pas comme élément porteur d'information, mais comme fonction du temps au sens de

la théorie du signal. Bien que l'analyse spectrale soit une technique comme pour l'étude des signaux, son application aux signaux de la parole souffre de certaines limitations qui découlent des propriétés de non-stationnarité et de pseudo-périodicité de l'onde de la parole.

Le signal de la parole est le résultat de l'excitation, par le signal de source, du conduit vocal dont la forme et les dimensions sont variable avec le temps. Le signal de la parole est en général, un processus non-stationnaire, c'est à dire que ses propriétés changent au cours du temps. La non-stationnarité de la parole résulte des changements au cours du temps aussi bien du signal de source que de la forme et des dimensions du conduit vocal.

Dans la pratique, les caractéristiques du conduit vocal et du signal de source évoluent lentement et l'on peut assimiler la forme du conduit vocal, continûment variable au cours du temps, à une succession de formes différentes, chacune étant réputée constante pendant un laps de temps pouvant être de l'ordre de 10 à 25 ms. Il est alors possible d'appliquer les méthodes ~~classiques~~ d'analyse spectrale au signal de la parole à condition de n'opérer que sur des séquences de ce signal de durées limitées de 10 à 25 ms. Cette supposition mène à des méthodes de traitement à "court terme" dans lesquelles des segments courts du signal de la parole sont séparés et traités et dans lesquels les propriétés du signal de la parole sont supposées fixes.

La majorité des techniques du traitement à "court terme" peuvent être mathématiquement représentées par :

$$Q_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} T[x(m)] W(n-m) \quad (1-1)$$

où T est une transformation et $w(n)$ est une fenêtre de durée limitée.
D'habitude la séquence de fenêtres est de durée finie, bien que ceci n'est pas toujours le cas. La largeur de la bande de la fenêtre décroît quand le nombre d'échantillons croît. Il est souhaitable en pratique de choisir N de l'ordre de 100 à 250 échantillons pour une fréquence d'échantillonnage 10 KHz. (Les fenêtres sont de durée de 10 à 25 ms).

1-2-) Filtrés numériques :

1-2-1-) Introduction : Dans le domaine analogique, le rôle d'un filtre est de sélectionner parmi toutes les composantes spectrales du signal celles qui remplissent les conditions désirées. Par contre dans le domaine numérique le signal d'entrée se présente sous formes d'échantillons $x(n)$ et l'opération de filtrage numérique consiste à associer à ces échantillons une séquence $y(n)$ en sortie.

Le filtre numérique n'est autre qu'une unité de calcul disposant des opérateurs : additionneur, multiplicateur et retard.

1-2-2-) Définition d'un filtre numérique :

Un filtre numérique est un algorithme de calcul par lequel une séquence de nombres $\{x(n)\}$ dite séquence d'entrée est transformée en une autre séquence de nombres $\{y(n)\}$ dite séquence de sortie.



fig (1-1)

$$\{y(n)\} = H[\{x(n)\}] \quad (1-2)$$

123) Filtrés non-récurrents et récurrents :

a- Filtrés non-récurrents : Un filtre non-récurrent est un filtre dont chaque échantillon de sortie est une combinaison linéaire des échantillons présents et passés d'entrée.

L'équation de récurrence caractérisant ce type de filtre s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) \quad (1-3)$$

b- Filtrés récurrents : Un filtre récurrent est un filtre dont chaque échantillon de sortie est une combinaison linéaire des échantillons présents et passés d'entrée ainsi que des échantillons passés de sortie.

L'équation de récurrence caractérisant ce type de filtre s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N b_i y(n-i) \quad (1-4)$$

124. Fonction de transfert :

a- Définition : Soient $\{x(n)\}$ et $\{y(n)\}$ les séquences d'entrée de sortie d'un filtre. Soient $X(z)$ et $Y(z)$ leurs transformées en z respectives, on appelle fonction de transfert $H(z)$ du filtre numérique le rapport de ces deux transformées : $H(z) = Y(z)/X(z)$.

b- Calcul de la fonction de transfert d'un filtre récurrent.

En faisant la transformée en z de l'équation (1-4) on obtient :

$$Y(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} Y(z) \quad (1-5)$$

d'où l'on tire la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \quad (1-6) \quad \text{où } N \geq M \text{ pour des raisons de réalisabilité.}$$

Pour le cas d'un filtre non-récurif, il suffit de mettre les $b_i = 0$

$$H(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} \quad (1-7)$$

1.3.) Synthèse des filtres numériques :

Le but recherché est de donner les principales méthodes permettant la synthèse d'un filtre numérique.

Les méthodes de synthèse des filtres récurifs permettent à partir d'un filtre analogique de référence, de fonction de transfert en p (transformée de Laplace), $H(p)$, de construire la fonction de transfert du filtre numérique dont le comportement en fréquence sera celui du filtre analogique de départ.

$$F(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_e}} = H(p) \Big|_{p=j\omega} \quad (1-8)$$

C'est évident que le filtre obtenu n'aura pas exactement le même comportement que le filtre analogique mais il s'agit de trouver une transformation du plan de Laplace (p) en un plan complexe (z) conservant le mieux possible les caractéristiques du filtre de départ.

1.3.1.) Synthèse des filtres récurifs :

a - Synthèse par invariance impulsionnelle :

Considérons un filtre analogique dont la fonction de transfert $H(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$H(p) = \sum_i \frac{K_i}{p + p_i} \quad (1-9)$$

où p_i sont les pôles complexes de cette fonction de transfert. La partie réelle des pôles complexes est négative pour assurer la stabilité du filtre.

La réponse impulsionnelle est
$$h_a(t) = \sum_i K_i e^{p_i t} \quad (1-10)$$

La méthode consiste à synthétiser le filtre numérique dont la réponse impulsionnelle serait celle du filtre analogique mais échantillonnée, c'est à d,

$$h(nT_e) = \sum_i K_i e^{p_i nT_e} \quad (1-11)$$

La fonction de transfert du filtre numérique $H_n(z)$ étant la transformée en z de sa réponse impulsionnelle :

$$h(nT_e) = \sum_i K_i e^{p_i nT_e} = \sum_i K_i [e^{p_i T}]^n \quad (1-12)$$

D'après le tableau donné en "Annexe" on obtient :

$$H_n(z) = \sum_i \frac{K_i}{1 - \exp[-p_i T_e] \cdot z^{-1}} \quad (1-13)$$

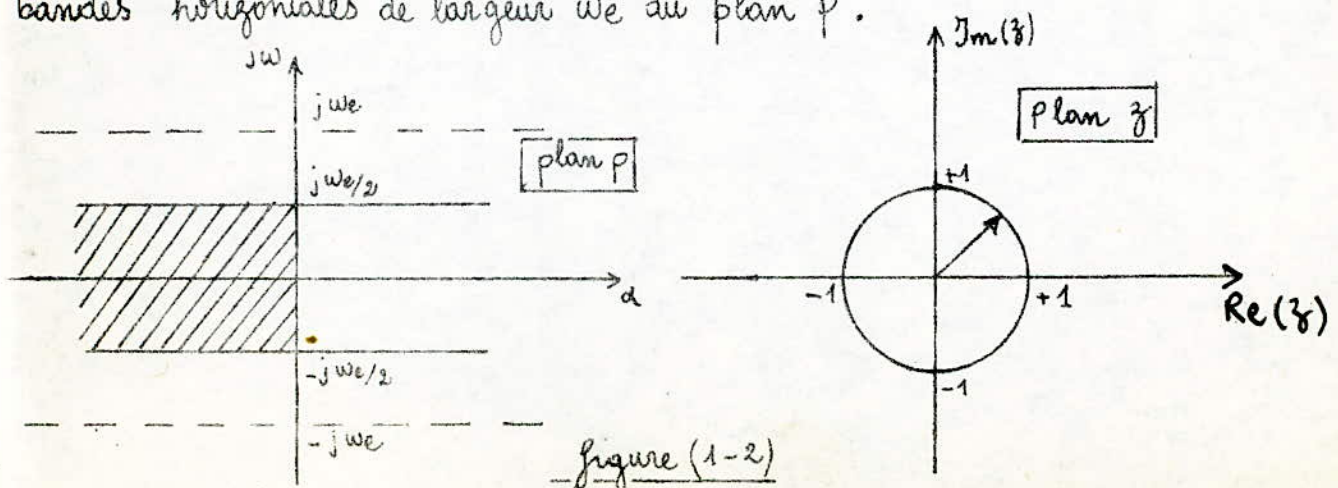
La fonction de transfert isochrone du filtre analogique s'obtient pour

$$p = j\omega. \text{ Soit } H_a(j\omega) = \sum_i \frac{K_i}{j\omega + p_i} \quad (1-14)$$

La correspondance entre le plan p et le plan z est établie par la

$$\text{relation : } z = e^{pT_e} \quad (1-15)$$

La relation (1-15) fait correspondre la totalité du plan z à des bandes horizontales de largeur ω_e du plan p .



La largeur de la bande maximale utilisable pour le filtre numérique correspond à $|\omega| < \omega_e/2$.

Il est donc indispensable que la réponse en fréquence du filtre prototype soit nul ou tout au moins négligeable hors de la bande limitée par les ordonnées $\pm j\omega_e/2$ du plan p .

b- Méthode de la transformée bilinéaire :

C'est la transformée la plus utilisée pour ces performances remarquables en fréquence. La méthode consiste à remplacer dans la fonction de transfert du filtre p par $c \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, la nouvelle fonction de transfert en z obtenue sera celle du filtre numérique récursif ayant des caractéristiques d'amplitude et de phase en fonction de la fréquence très rapprochées de celles du filtre analogique.

Le calcul de la constante "c" se fait de la façon suivante :

On sait que $p = c \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ et que $z = e^{sT_e}$.

On utilisera les notations suivantes :

p : variable de Laplace dans le domaine analogique

s : variable de Laplace dans le domaine numérique

λ : pulsation correspondant à $p = j\lambda$

ω_d : pulsation correspondant à $s = j\omega_d$

$$p = c \cdot (1 - e^{-sT_e}) / (1 + e^{-sT_e}) = c \operatorname{th}(sT_e/2)$$

En posant $p = j\lambda$, $s = j\omega_d$ on obtient

$$c = \frac{\lambda}{\operatorname{tg} \frac{\omega_d T_e}{2}} \quad (1-16)$$

En pratique, la valeur de c sera fixée par un couple de fréquence particulier (λ, ω_d) (fréquence de coupure f_c pour un passe-bas, passe-haut et fréquence de résonance pour un passe-bande)

1.4.) Structures d'un filtre numérique.

Nous avons vu, les méthodes permettant l'analyse et la synthèse des filtres numériques. L'utilisation de ces méthodes nous permet d'établir la fonction de transfert du filtre décrite par l'équation (1-6), pour le cas d'un filtre récursif et l'équation (1-7) pour le cas d'un filtre non-récursif. La connaissance de ces deux équations récurrentes nous permettront de programmer l'unité de calcul des filtres.

a - Filtrés non-récursifs :

Leur structure découle directement de l'équation de récurrence,

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) .$$

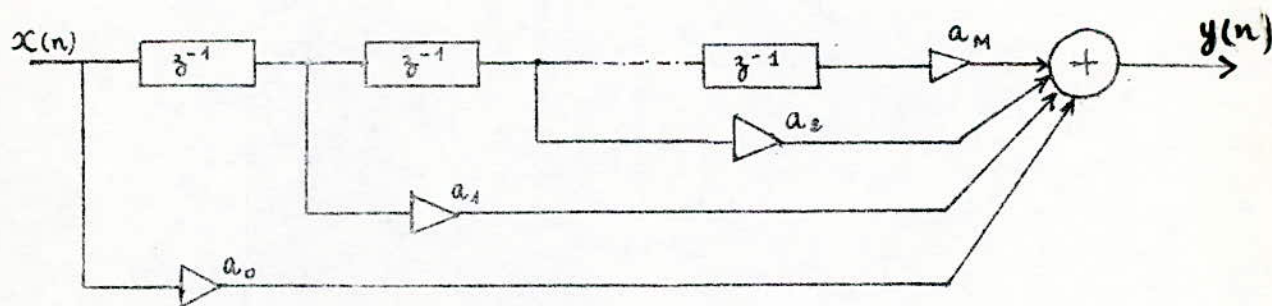


figure (1-3)

Cette structure nécessite $(M+1)$ emplacements mémoires, la gestion de la table $x(n-i)$ et $(M+1)$ multiplications.

b - Filtrés récursifs :

Leur structure découle directement de l'équation de récurrence :

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) - \sum_{l=1}^N b_l y(n-l) .$$

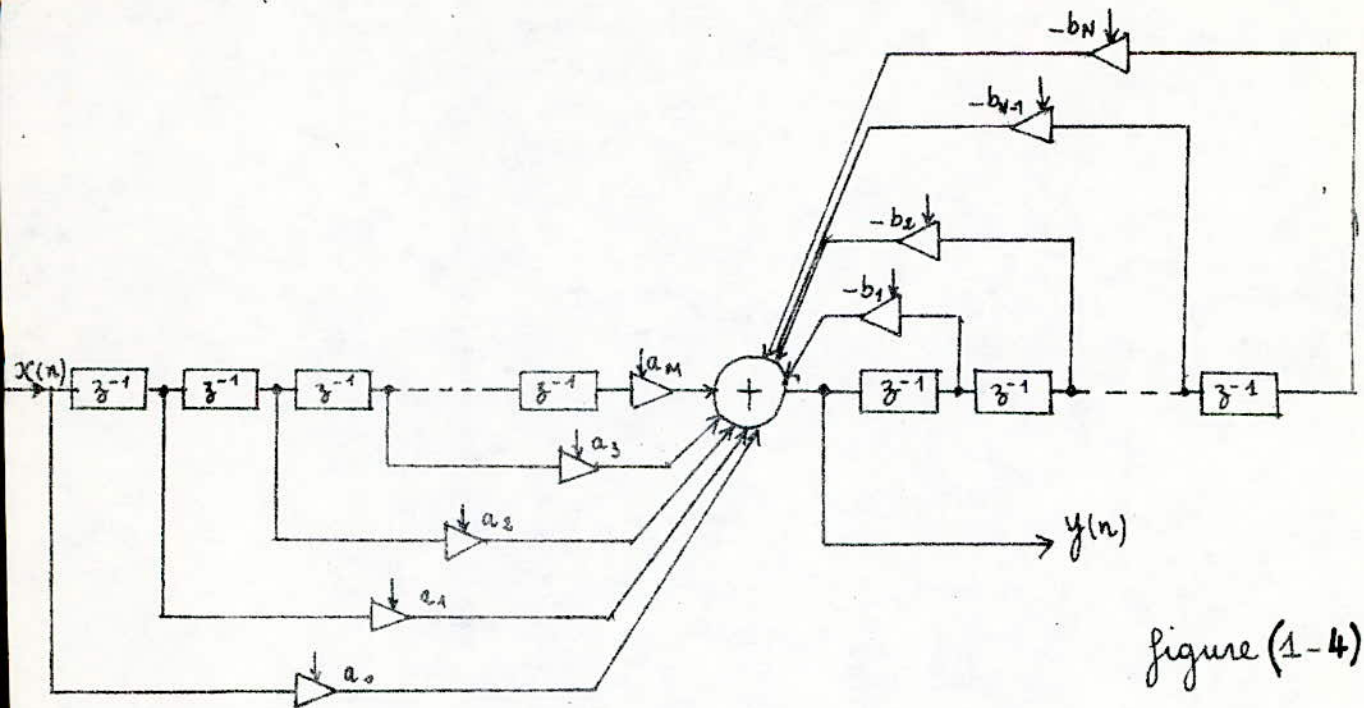


figure (1-4)

⊗ Structure réalisée sous la forme directe "1".

On remarque que cette structure nécessite la gestion de deux tables $x(n-i)$ et $y(n-i)$, $(M+N)$ emplacements mémoires et $(M+N+1)$ multiplications. Pour l'amélioration de cette structure, on introduit une variable intermédiaire $W(z)$ dans la fonction de transfert soit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)} \cdot \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (1-17)$$

On pose $N(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}$ avec $N(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i}$ d'où $y(n) = \sum_{i=0}^M a_i w(n-i) \quad (1-18)$

et $\frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{D(z)}$ avec $D(z) = 1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}$, $W(z) = \frac{X(z)}{D(z)}$

d'où $w(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N b_i w(n-i) \quad (1-19)$

Les équations (1-18) et (1-19) nous donne la structure appelée forme directe "2", elle est donnée par la figure (1-5) :

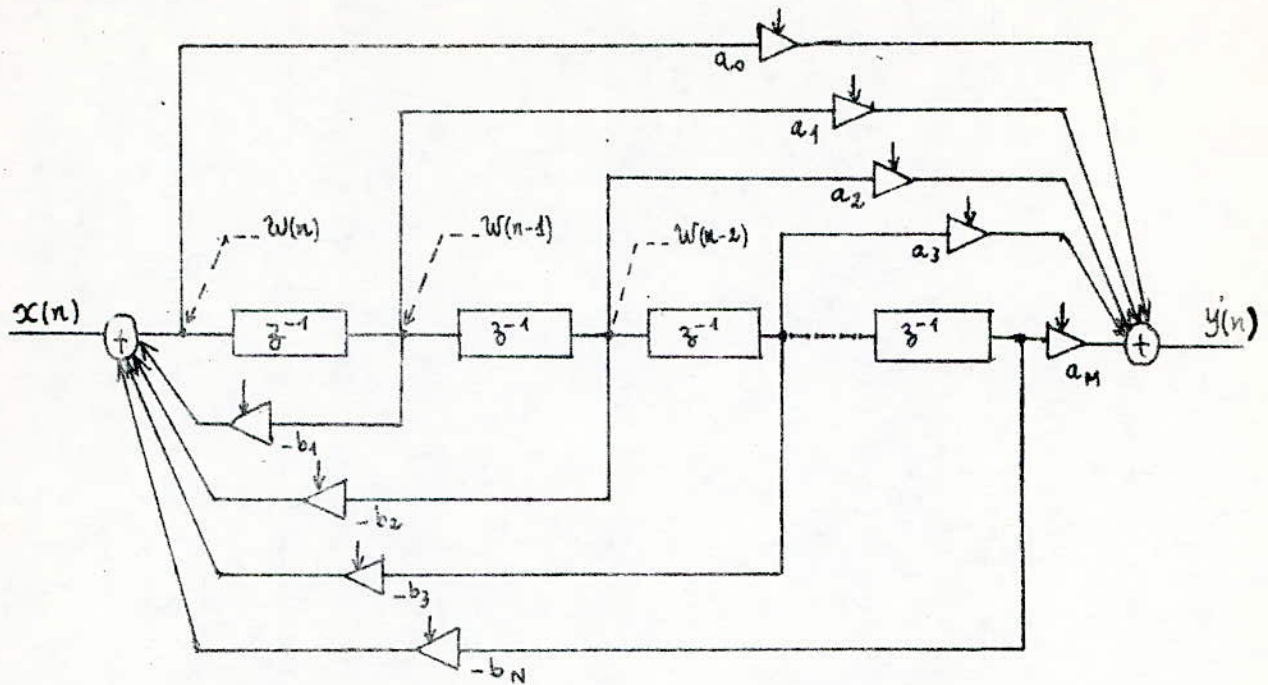


figure (1-5)

La forme directe "2" permet de réduire le nombre d'emplacements mémoires à N et la gestion d'une seule table $w(n-i)$.

- la forme parallèle : La forme parallèle est obtenue en décomposant $H(z)$ en fractions du premier ordre ou du deuxième ordre.

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_r(z) = \sum_{i=1}^r H_i(z) \quad (1-20)$$

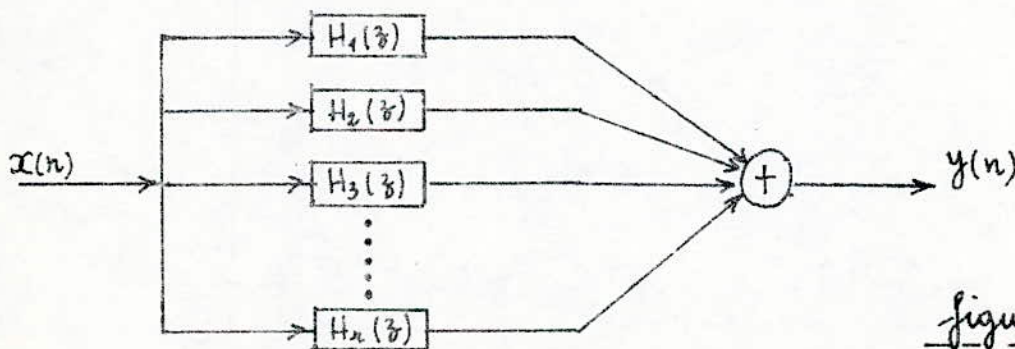
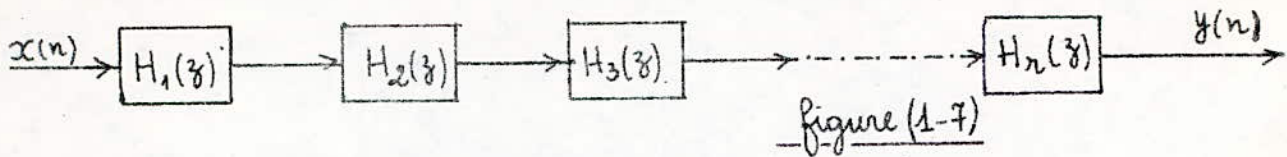


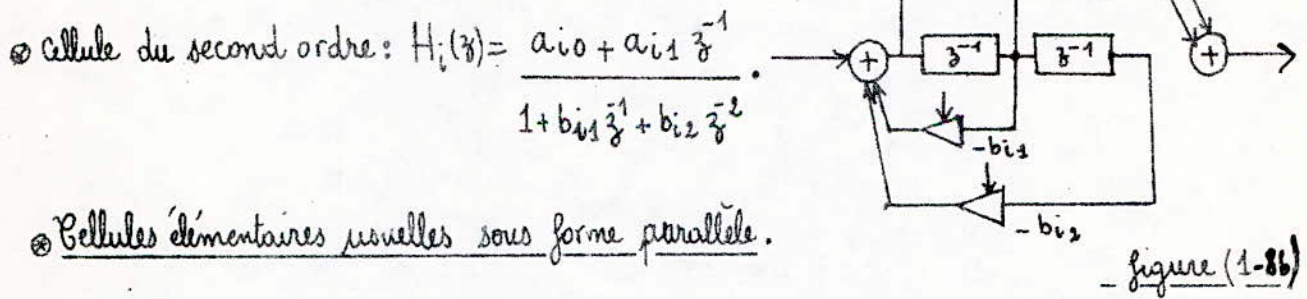
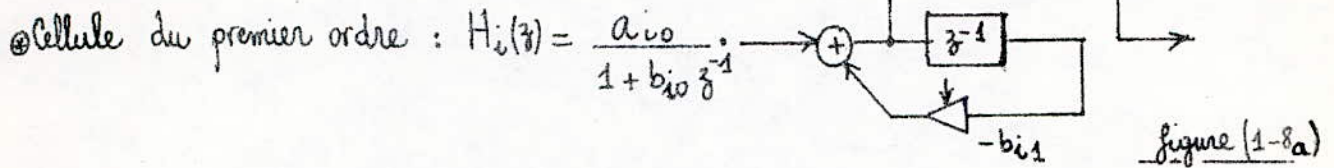
figure (1-6)

- la forme cascade : Cette forme est obtenue en décomposant la fonction de transfert en produit de fonctions simples du premier ou du deuxième ordre.



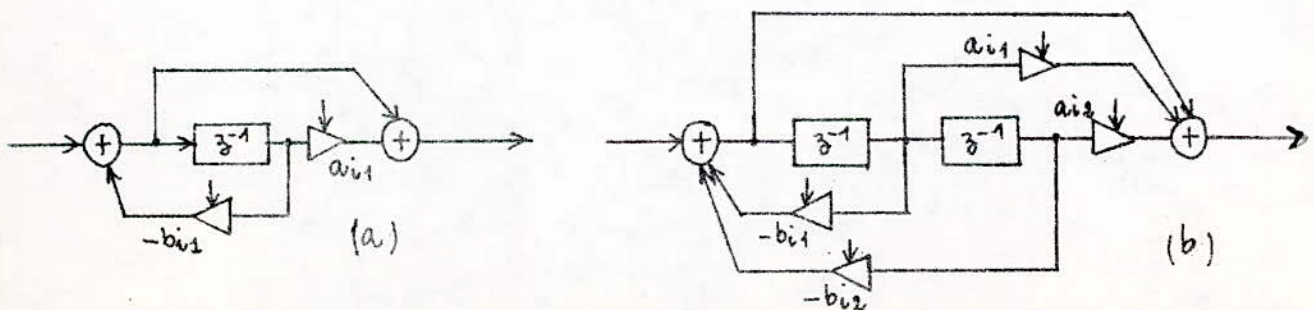
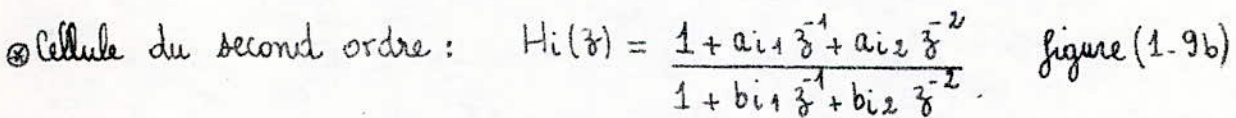
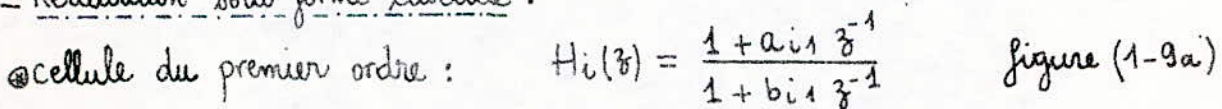
Les cellules élémentaires les plus utilisées sont :

- Réalisation sous forme parallèle :



⊗ Cellules élémentaires usuelles sous forme parallèle.

- Réalisation sous forme cascade :



⊗ Cellules élémentaires usuelles sous forme cascade. figure (1-9)

14.1.) Effet de quantification.

Lors de la réalisation d'un filtre numérique, il faut tenir compte des erreurs qui peuvent affecter les échantillons du signal de sortie. Les erreurs sont dues :

- a) à la quantification du signal d'entrée.
- b) à la quantification des coefficients du filtre.
- c) aux troncatures ou aux arrondis effectués après chaque multiplication.

14.2.) Sensibilité des formes directes.

La réalisation sous forme directe est très sensible aux erreurs de quantification des coefficients qui augmentent avec l'ordre de la fonction de transfert. La quantification d'un seul coefficient influence sur tous les pôles de la fonction de transfert réalisée sous forme directe. Par contre la réalisation sous forme cascade ou parallèle est moins sensible aux erreurs de quantification parce que la quantification d'un coefficient affectera, au plus, la position de deux pôles. C'est pour cette raison que la réalisation des filtres numériques se fait généralement sous formes cascades ou parallèles.

Comme exemple de réalisation, on choisit le filtre récursif d'ordre k , sous la forme cascade. En prenant des cellules élémentaires d'ordre deux on aura :

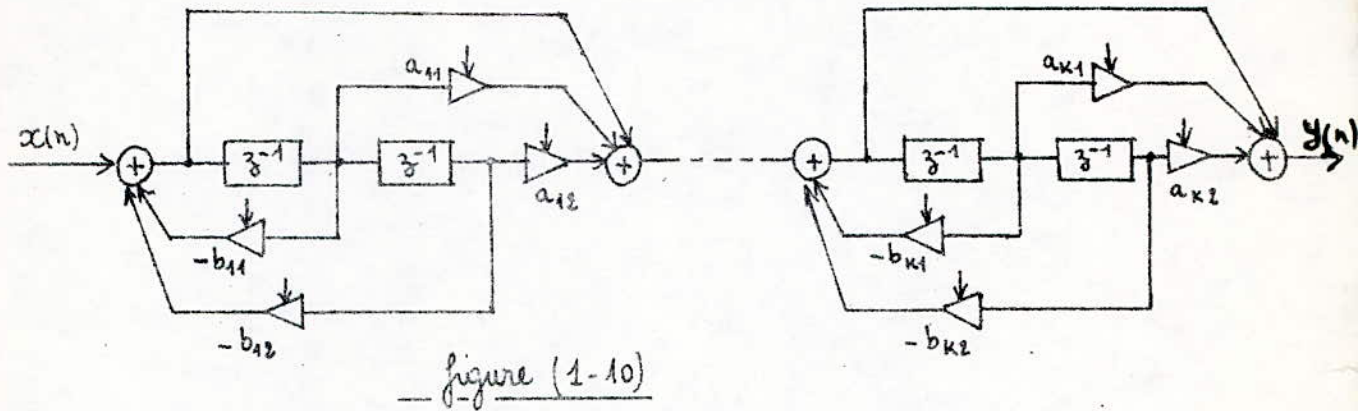
$$H_i(z) = \frac{1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}$$

d'où l'équation de récurrence obtenue à partir de la fonction de transfert $H_i(z)$ qui est de la forme $H_i(z) = \frac{Y_i(z)}{W_i(z)} \cdot \frac{W_i(z)}{X_i(z)}$

s'écrit sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} y_i(n) &= w_i(n) + a_{i1} w(n-1) + a_{i2} w(n-2) \\ w_i(n) &= x_i(n) - b_{i1} w(n-1) - b_{i2} w(n-2) \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

La réalisation cascade forme directe "2" est représentée par :



1.5-) Transformation de Fourier

La représentation de la transformée de Fourier de $x(n)$ est donnée

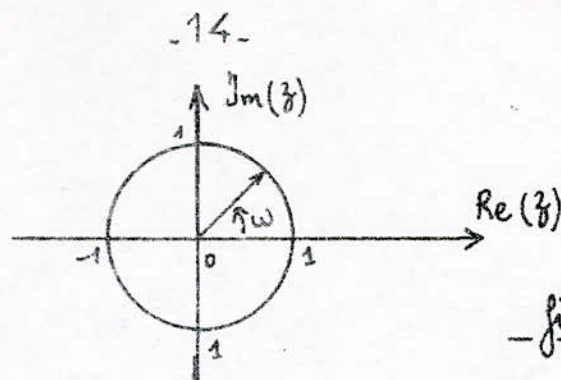
par :

$$\left. \begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ x(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

Ces deux équations peuvent être vues comme cas spécial des équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (a) \\ x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

De façon précise, la transformée de Fourier est obtenue par la restriction de la transformée en z en un cercle unité dans le plan z , c'est à dire en mettant $z = e^{j\omega}$ comme il est indiqué sur la figure suivante. La fréquence numérique variable, ω , a une interprétation comme un angle dans le plan z .



-figure (1-11)-

Une condition suffisante pour l'existence de la représentation de la transformée de Fourier peut être obtenue en remplaçant $|z|=1$ dans l'équation $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$, c'est à dire que :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \cdot |z^{-n}| < \infty} \quad (1-24a)$$

L'équation (1-24a) est la condition suffisante de l'existence de la transformée en z . D'où la condition suffisante de l'existence de la transformée de Fourier pour $|z|=1$, c'est à dire que :

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty} \quad (1-24b)$$

1.5.1) Transformation de Fourier discrete (T.F.D)

Comme dans le cas des signaux analogiques, si la séquence est périodique de période N c'est à dire $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+N)$ $-\infty < n < +\infty$, La représentation en séries de Fourier pour une séquence périodique est :

$$\begin{aligned} \tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (a) \\ \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (b) \end{aligned} \quad (1-25)$$

Ceci est une représentation exacte d'une séquence périodique. Cependant, la grande utilité de cette représentation réside en imposant

une interprétation différente pour ces deux équations.

On considère une séquence de longueur finie, qui est égale à zéro à l'extérieur de $0 \leq n \leq N-1$. Ainsi la transformée en z est :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \quad (1-26)$$

Si on évalue $X(z)$ en N points sur le cercle unité, espacés uniformément c'est à dire $z_k = e^{j \frac{2\pi}{N} k} \quad k=0, 1, \dots, N-1$

On obtient :

$$X(e^{j \frac{2\pi}{N} k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (1-27)$$

Si on considère une séquence périodique comme étant une séquence infinie de copies exactes de $x(n)$, c'est à dire que :

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \quad (1-28)$$

Alors, les échantillons $X(e^{j \frac{2\pi}{N} k})$ sont facilement retrouvées à partir des équations (1-25a) et (1-27) à être les coefficients de Fourier d'une séquence périodique $\tilde{x}(n)$. Ainsi une séquence de longueur N peut être représentée d'une manière exacte par la représentation de la T.F.D de la forme :

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} & k=0, 1, \dots, N-1 \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} & n=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1-29)$$

On donne à la fin du projet, en annexe, quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète.

CHAPITRE : 2

ECHANTILLONNAGE & QUANTIFICATION

2-1) Echantillonnage :

Pour utiliser les méthodes de traitement du signal numérique sur un signal analogique comme celui de la parole, il est nécessaire de représenter le signal comme une séquence de nombres. Ceci est généralement fait par échantillonnage du signal analogique noté $x_a(t)$, périodiquement pour produire la séquence :

$$\boxed{x(n) = x_a(nT)} \quad -\infty < n < +\infty \quad (2-1)$$

2-1-1) Théorème d'échantillonnage

Les conditions sous lesquelles la séquence d'échantillons donnée par la relation (2-1) soit une représentation du signal analogique $x_a(t)$ originale sont bien connues et sont souvent résumées comme suit :

Si un signal $x_a(t)$ a une transformée de Fourier à bande limitée $X_a(j\Omega)$ telle que : $X_a(j\Omega) = 0$ pour $\Omega \geq 2\pi F_N$

où F_N est la fréquence de Nyquist ;

alors $x_a(t)$ peut être reconstruit, d'une façon unique, d'échantillons espacés uniformément $x_a(nT)$ $-\infty < n < +\infty$ si $\frac{1}{T} > 2F_N$.

Le théorème précédent vient du fait que si la T.F de $x_a(t)$

est définie comme :
$$\boxed{X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt} \quad (2-2)$$

et la T.F de la séquence $x(n)$ est définie comme suit :

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}} \quad (2-3)$$

alors si $X(e^{j\omega})$ est évalué pour les fréquences $\omega = \Omega T$, alors $X(e^{j\Omega T})$ est relié à $X_a(j\Omega)$ par la relation suivante :

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega + j\frac{2\pi}{T} \cdot k) \quad (2-4)$$

Pour voir les implications de la relation (2-4), supposons que $X_a(j\Omega)$ est comme montrée sur la figure (2-1a), c'est à dire, en supposant que $X_a(j\Omega) = 0$ pour $|\Omega| > \Omega_N = 2\pi F_N$.

D'après la relation (2-4), $X(e^{j\Omega T})$ est la somme d'un nombre infini de fonctions identiques à $X_a(j\Omega)$, chacune centrée sur un multiple entier de $\frac{2\pi}{T}$. La figure (2-1b) nous montre le cas où $\frac{1}{T} > 2F_N$ telles que les images de la T.F. ne chevauchent pas dans la bande essentielle $|\Omega| < 2\pi F_N$.

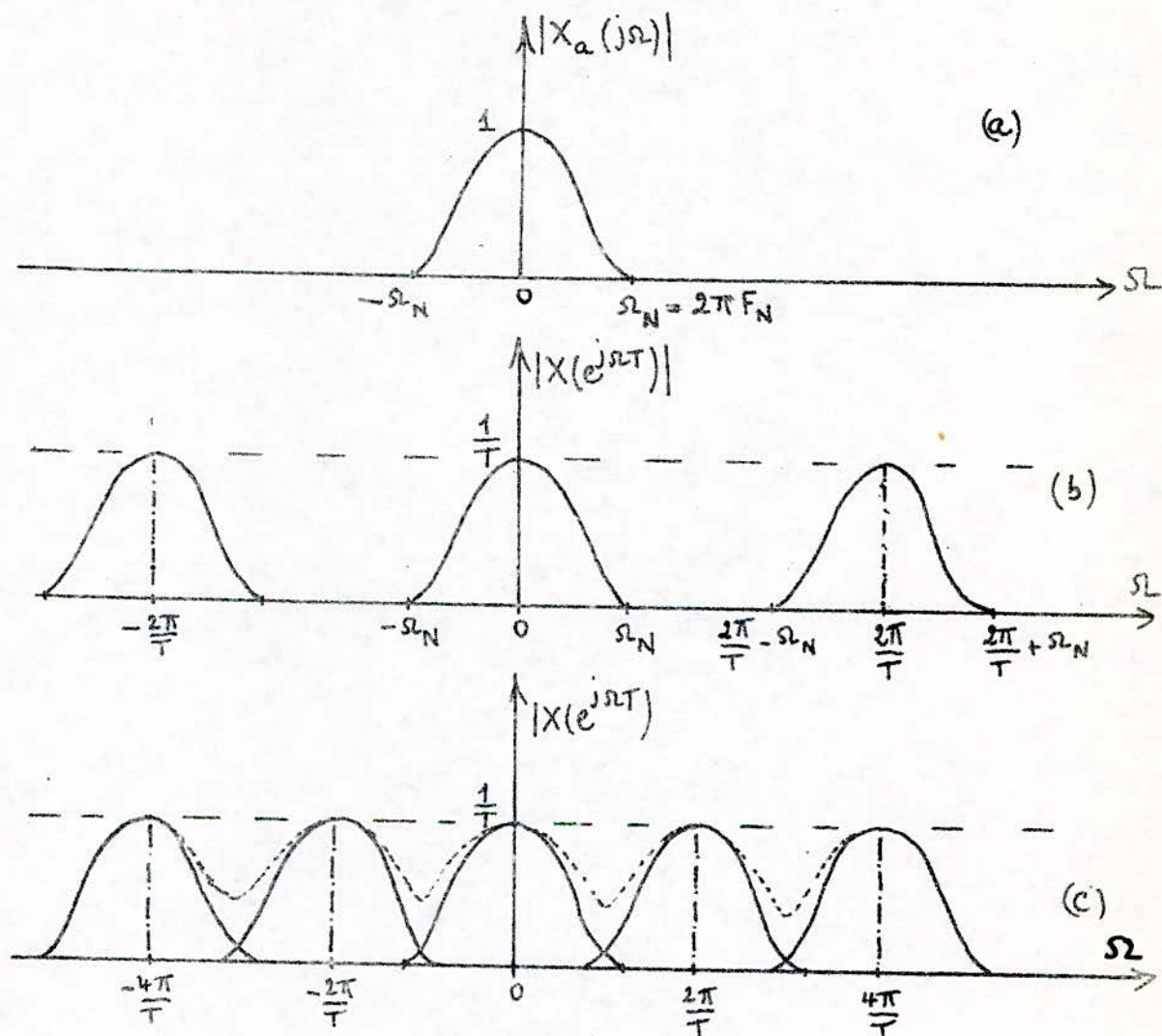
La figure (2-1c) montre le cas où $\frac{1}{T} < 2F_N$. Dans ce cas l'image centrée sur $\frac{2\pi}{T}$, chevauche dans la bande essentielle. Il est clair que le recouvrement peut être évité seulement si la T.F. est à bande limitée et si la fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{T}$ est égale au moins à deux fois la fréquence de Nyquist ($\frac{1}{T} > 2F_N$).

Sous cette condition, il est clair que la T.F. de la séquence $x(n)$ est proportionnelle à la T.F. du signal $x_a(t)$ dans la bande essentielle, c'est à dire :

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \quad (2-5)$$

En utilisant ce résultat, on peut montrer que le signal $x_a(t)$ original peut être lié à la séquence $x(n)$ par la formule dite formule d'interpolation :

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot \left[\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \right] \quad (2-6)$$



- figure (2-1) -

Ainsi, les échantillons donnés d'un signal analogique à bande limitée, pris à une vitesse d'échantillonnage ($\frac{1}{T}$) au moins deux fois la fréquence de Nyquist, il est possible de reconstruire le signal analogique original, en utilisant l'équation (2-6). En pratique, les convertisseurs numérique-analogique (C-N-A) cherchent à approcher l'équation (2-6) le plus proche possible.

2.2.) Décimation et interpolation.

2.2.1.) Introduction. Dans plusieurs exemples du traitement numérique du signal de la parole, on aura besoin de changer la vitesse d'échantillonnage ($\frac{1}{T}$) du signal discret. Un exemple qui apparaît quand le signal de la parole est échantillonné en utilisant la quantification différentielle à un bit, à une vitesse très élevée, et alors convertie à une représentation PCM à plusieurs bits à une vitesse faible. Un autre exemple est quand un paramètre du signal de la parole est échantillonné à une vitesse faible pour un codage efficace, alors une vitesse élevée est exigée pour la reconstruction de ce signal. Les procédés de réduction et d'augmentation de la vitesse d'échantillonnage s'appellent respectivement "décimation" et "interpolation".

2.2.2.) Décimation.

Supposons que l'on veut réduire la vitesse d'échantillonnage par un facteur M , c'est à dire qu'on veut calculer une nouvelle séquence correspondante aux échantillons $x_a(t)$ prise avec une période

$$T' = MT, \text{ c'est à dire : } \boxed{y(n) = x_a(nT') = x_a(nTM)} \quad (2-7)$$

$$\text{d'où : } \boxed{y(n) = x(Mn) \quad -\infty < n < +\infty} \quad (2-8)$$

Les transformées de Fourier de $x(n)$ et $y(n)$ sont reliées par la

$$\text{relation : } \boxed{Y(e^{j\Omega T'}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\Omega T' - \frac{2\pi k}{M})})} \quad (2-9)$$

A partir de (2-9) on peut voir que dans le but qu'il n'y ait pas

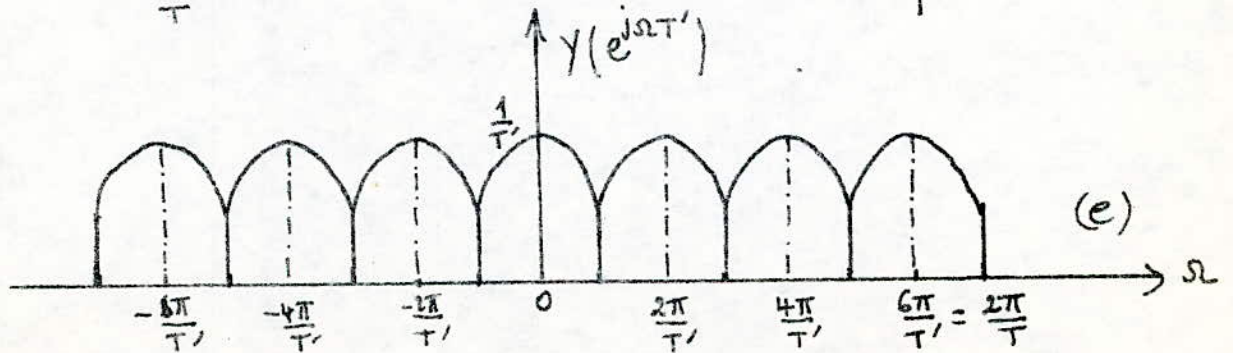
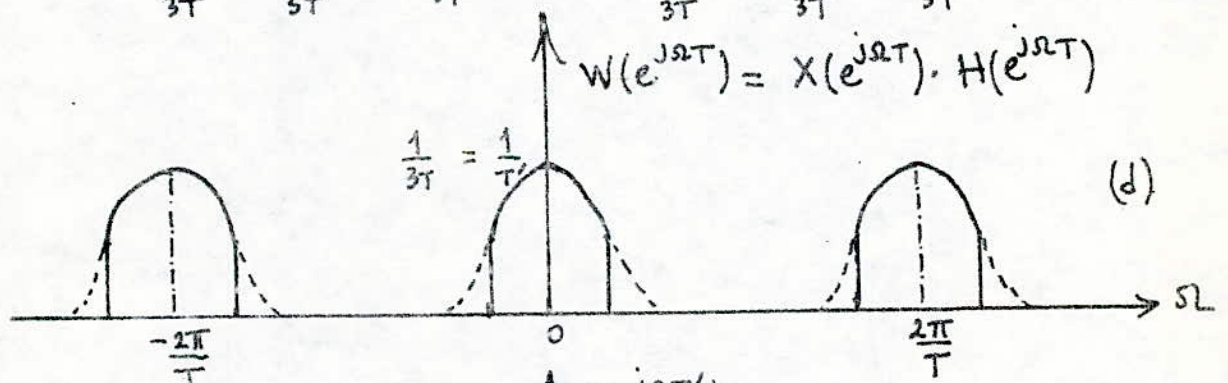
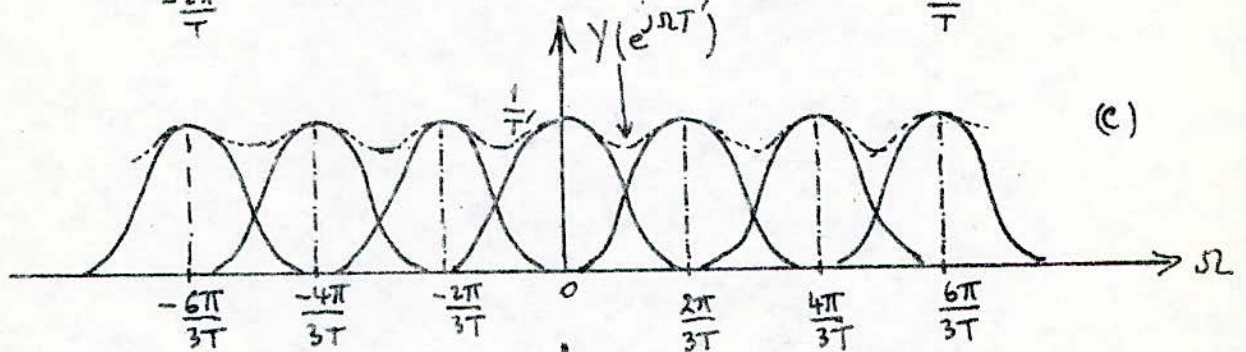
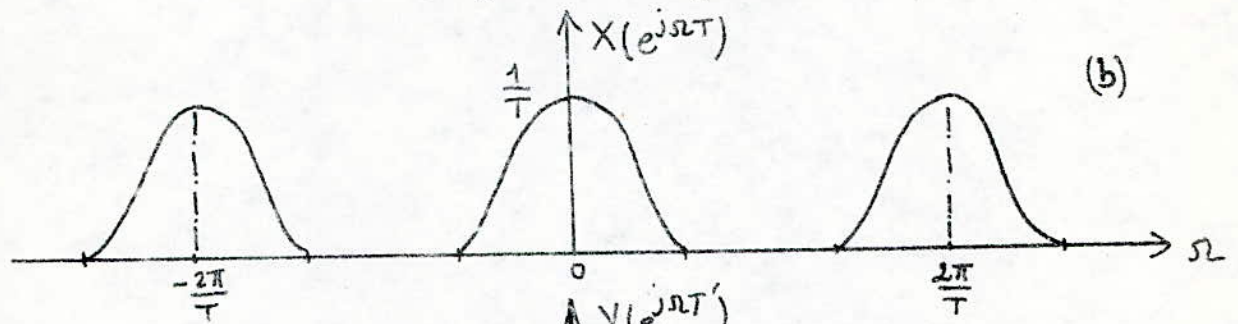
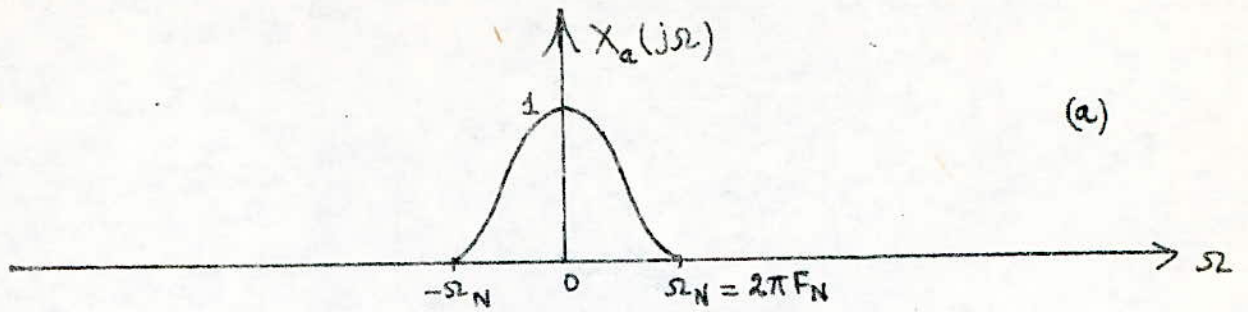
de chevauchement entre les images de $X(e^{j\Omega T})$, on doit avoir $\frac{1}{T} > 2F_N$. Si cette condition tient, alors on voit que :

$$Y(e^{j\Omega T'}) = \frac{1}{M} X(e^{j\Omega T'}) = \frac{1}{M} X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{T} X_a(j\Omega)$$

$$\text{d'où } \boxed{Y(e^{j\Omega T'}) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega), \quad -\frac{\pi}{T} < \Omega < \frac{\pi}{T}} \quad (2-10)$$

La figure (2-2) montre un exemple de réduction de la vitesse.
La figure (2-2a) montre la T.F du signal analogique original.
La figure (2-2b) montre la T.F de $x(n) = x_a(nT)$ où la vitesse d'échantillonnage $\frac{1}{T}$ est en quelque sorte supérieure à la vitesse de Nyquist ($2F_N$). La figure (2-2c) montre le cas de la réduction de la vitesse d'échantillonnage par "3" c'est à dire $T' = 3T$.

Pour ce cas, le recouvrement apparaît parce que $\frac{1}{T'} < 2F_N$.
Cependant, supposons que $x(n)$ est filtré par un filtre passe-bas numérique à la fréquence de coupure $\frac{\pi}{T'} = \frac{\pi}{3T}$ produisant une séquence $w(n)$. Pour notre exemple, la T.F de la sortie du filtre passe-bas est montrée dans la figure (2-2d). Le recouvrement n'apparaît pas quand la vitesse du signal filtré est réduite d'un facteur "3" comme l'indique la figure (2-2e), cependant les échantillons $y(n)$ ne représente plus $x_a(t)$ mais le nouveau signal $y_a(t)$ qui est une version filtrée de $x_a(t)$. Un diagramme-bloc général du système de décimation est donné par la figure (2-3).



* Illustration du procédé de décimation pour $M=3$. - figure (2-2)

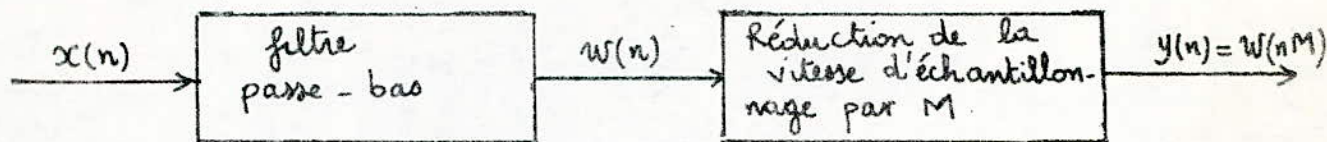


figure (2-3)

2-23-) Interpolation .

Maintenant supposons qu'on a des échantillons d'un signal analogique $x(n) = x_a(nT)$. Si on désire augmenter la vitesse d'échantillonnage par un facteur entier L , on doit calculer une nouvelle séquence correspondante aux échantillons de $x_a(t)$ pris avec une période $T' = T/L$, c'est à dire :

$$y(n) = x_a(nT') = x_a(nT/L) \quad (2-11)$$

d'où $y(n) = x(n/L)$ pour $n=0, \pm L, \pm 2L, \dots$ (2-12)

mais on doit compléter les échantillons inconnus pour toutes les valeurs de n par un procédé d'interpolation.

Pour voir comment ceci peut être fait en utilisant un filtre numérique, considérons la séquence $v(n)$ qui est telle que :

$$v(n) = \begin{cases} x(n/L) & , n=0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2-13)$$

La T.F de $v(n)$ est : $V(e^{j\Omega T'}) = X(e^{j\Omega T'L}) = X(e^{j\Omega T})$ (2-14)

La figure (2-4) montre $V(e^{j\Omega T'})$ et $X(e^{j\Omega T})$ pour le cas $T' = T/3$. Dans le but d'obtenir une séquence $y(n) = x_a(nT')$ de la séquence

$v(n)$, on doit s'assurer que :

$$V(e^{j\Omega T'}) = \frac{1}{T'} X_a(j\Omega), -\frac{\pi}{T'} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T'} \quad (2-15)$$

En supposant que :

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega), -\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T} \quad (2-16)$$

alors il est clair de la figure (2-4a) que ce qui est exigé est que les images de $X_a(j\Omega)$ dans $V(e^{j\Omega T'})$, qui sont centrées en $\Omega = \frac{2\pi}{T'}$, $\Omega = \frac{4\pi}{T'}$, doivent être enlevées par un filtre passe-bas. De plus s'assurer que l'amplitude est correcte pour l'intervalle T' , le gain du filtre doit être égal à $L = T/T'$.

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega T'}) &= H(e^{j\Omega T'}) \cdot V(e^{j\Omega T'}) \\ &= H(e^{j\Omega T'}) \cdot X(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\Omega T'}) \cdot \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \\ \boxed{Y(e^{j\Omega T'}) &= H(e^{j\Omega T'}) \cdot \frac{1}{T} X_a(j\Omega)} \quad (2-17) \end{aligned}$$

Ainsi, dans le but d'avoir la relation (2-15), il faut que :

$$\boxed{H(e^{j\Omega T'}) = \begin{cases} L = T/T' & \text{pour } |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}} \quad (2-18)$$

Le système d'interpolation général est le suivant :

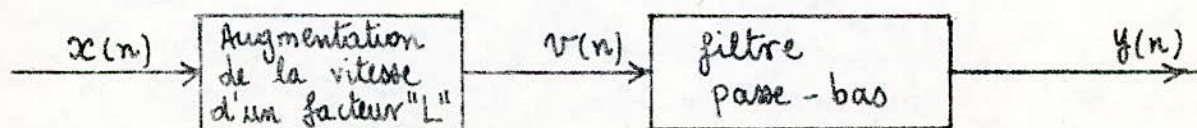
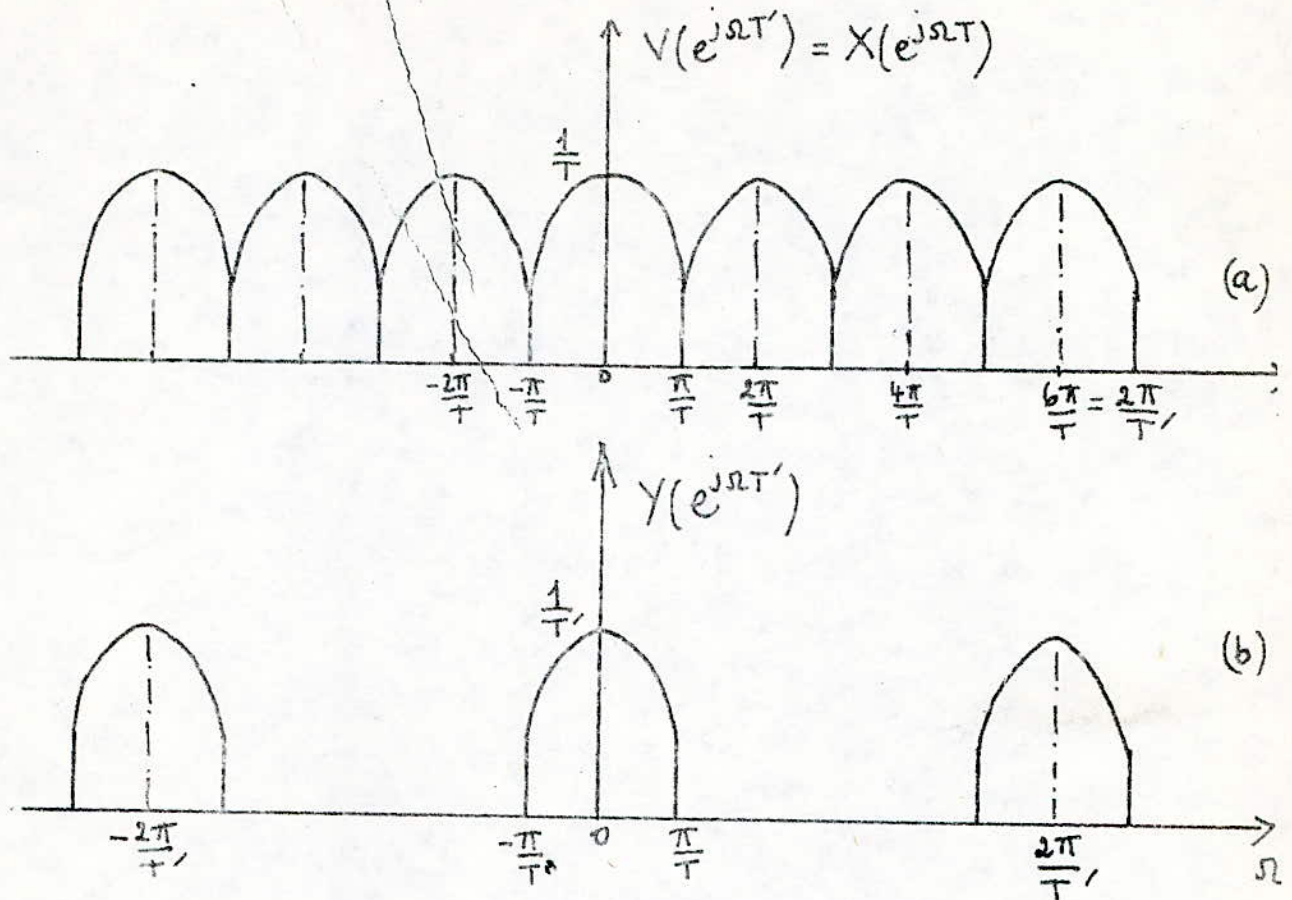


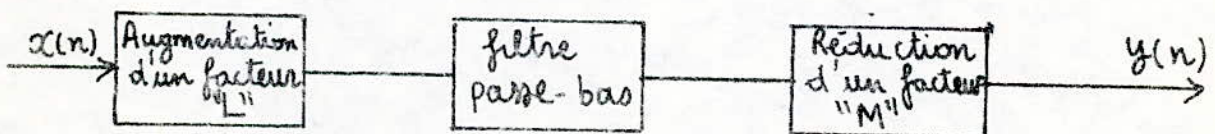
figure (2-5)



⊗ Illustration du procédé d'interpolation.

figure (2-4)

Dans le cas où on aura l'augmentation de la vitesse d'échantillonnage d'un facteur non-entier $P = L/M$, on aura à utiliser le diagramme suivant :



⊗ Représentation du diagramme-bloc de l'augmentation de la vitesse d'échantillonnage par un facteur $P = L/M$.

figure (2-6)

2.3.) Quantification.

Dans le traitement numérique, il est plus commode de considérer les procédés d'échantillonnage et de quantification séparément, même s'il est impossible de les distinguer au moment de l'exécution des représentations numériques du signal de la parole. Ainsi, supposons que la parole a été filtrée par un filtre passe-bas et échantillonnée à une vitesse convenable qui nous donne la séquence $\{x(n)\}$.

Cette dernière est connue avec une précision infinie. Les valeurs des échantillons doivent être quantifiées en une suite finie d'amplitude, pour qu'elles puissent être représentées par une suite finie de symboles. Le procédé de quantification et de codage est montré sur la figure (2-7) :

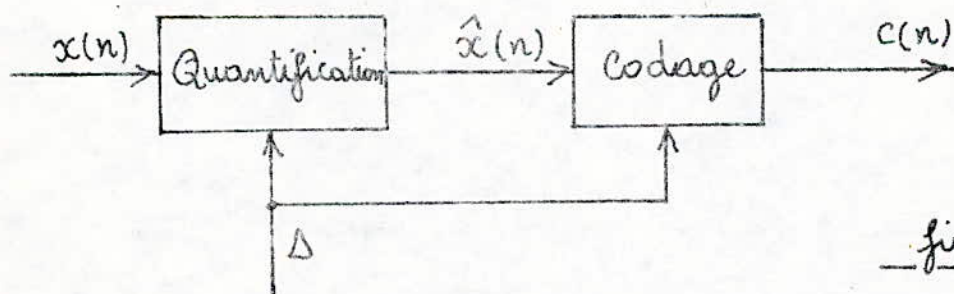


figure (2-7)

Il est commode de séparer ce procédé en deux étages, étage de quantification qui produit une séquence d'amplitudes quantifiées $\{\hat{x}(n)\}$ et étage de codage qui fait correspondre à chaque échantillon quantifié un code $c(n)$. La quantité Δ représente le pas de quantification. Dans la plupart du temps, il est très commode d'utiliser des nombres binaires pour représenter les échantillons quantifiés.

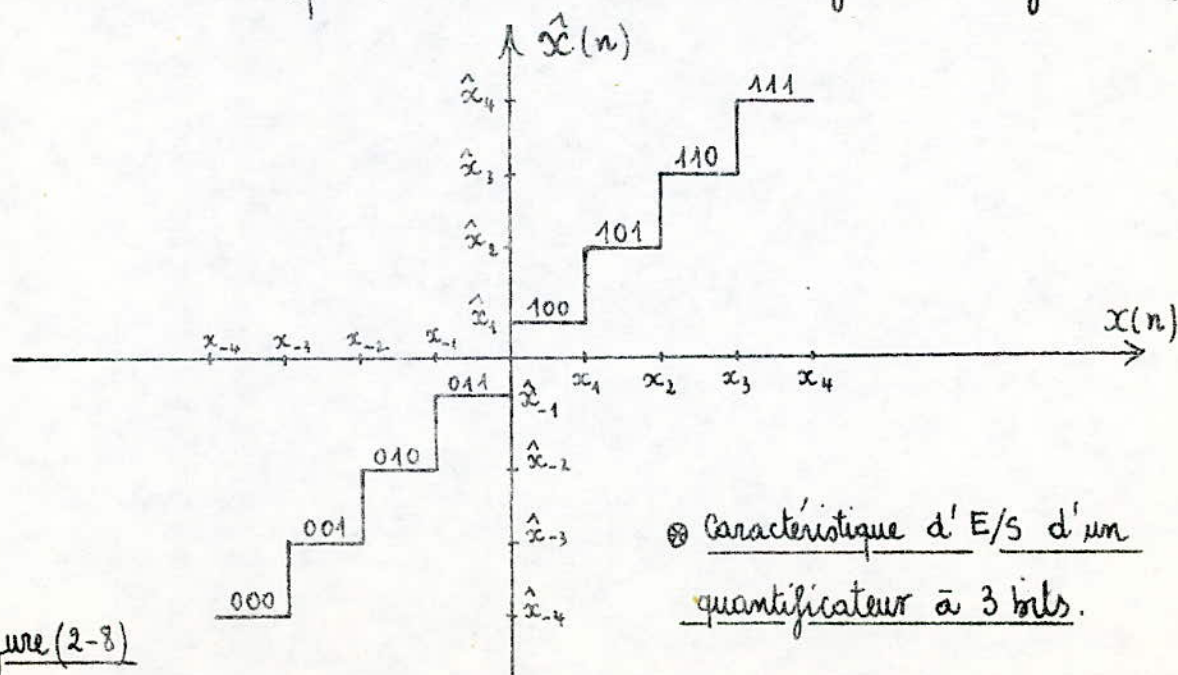
Avec B bits, il est possible de représenter 2^B niveaux différents de quantification. La capacité d'information exigée pour transmettre ou stocker la représentation numérique est alors :

$$I = B \cdot F_s \quad (2-19)$$

où F_s est la vitesse d'échantillonnage (échantillons/s) et B le nombre de bits par échantillon. Il est généralement souhaitable de maintenir I le plus bas possible. Pour une largeur de bande donnée de la parole, le minimum de F_s est fixé par le théorème d'échantillonnage.

Donc la seule façon de réduire I est de réduire le nombre B . Pour cette raison, nous allons discuter les différentes techniques de la quantification d'un signal.

Les amplitudes des échantillons sont quantifiées par division de l'amplitude du signal en rangs, et on fixe la même valeur d'amplitude pour les échantillons qui se trouvent dans le rang donné. Figure (2-8)



⊗ Caractéristique d'E/S d'un quantificateur à 3 bits.

figure (2-8)

2.3.1-) Quantification uniforme.

Le rang et le niveau de quantification peuvent être choisis de différentes manières dépendant de l'application voulue. Quand cette dernière est à traiter par un système numérique, le niveau et le rang de quantification sont généralement, uniformément distribués; ainsi pour définir un quantificateur uniforme, utilisant l'exemple de la figure (2-8) on doit écrire :

$$\left. \begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= \Delta \\ \hat{x}_i - \hat{x}_{i-1} &= \Delta \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

où Δ est le pas de quantification.

Les deux caractéristiques les plus souvent utilisées pour un quantificateur uniforme sont montrées dans la figure (2-9).

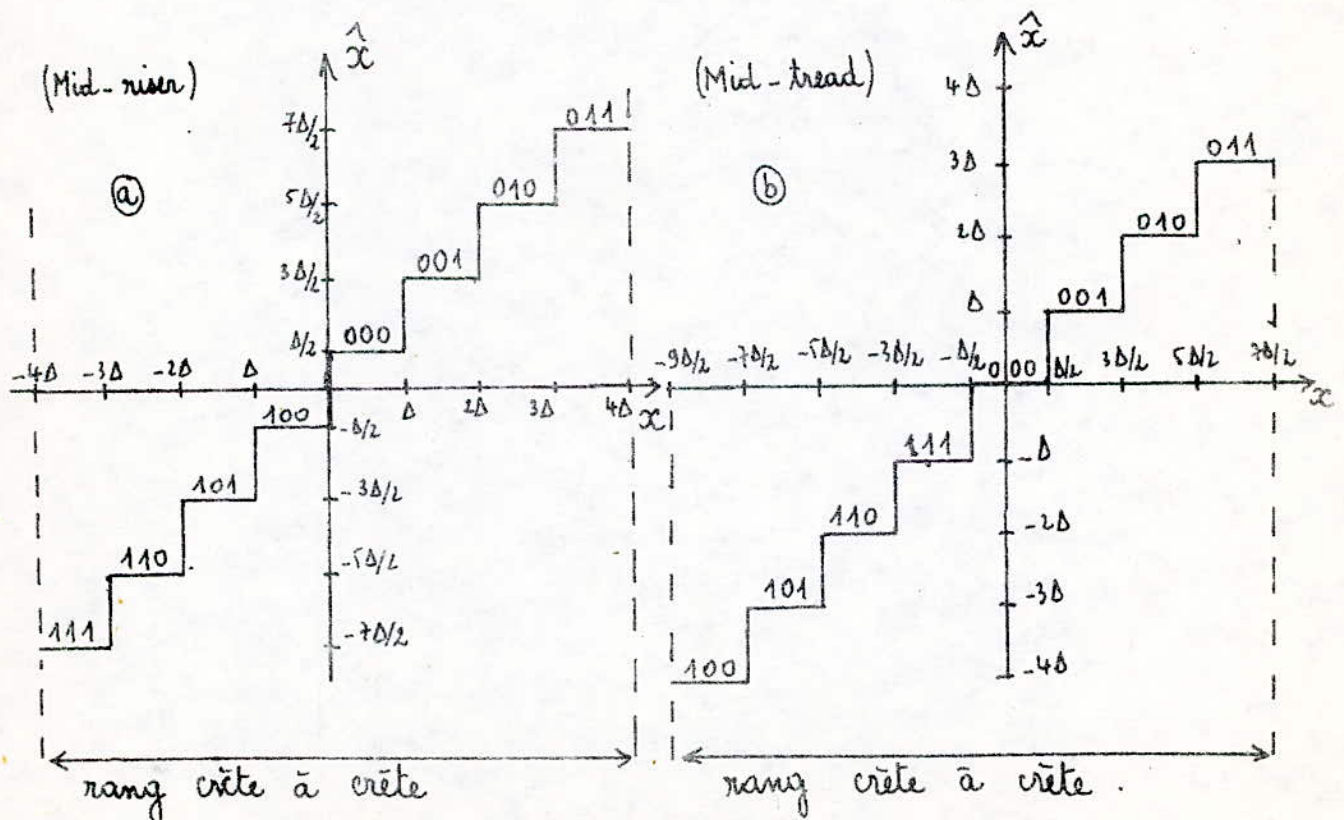


figure (2-9)

Par exemple si on interprète le mot codé en binaire comme la représentation signe, avec le bit le plus à gauche comme étant le signe (fig(2-9a)). Alors les échantillons quantifiés sont liés aux mots codés par la relation :

$$\hat{x}(n) = \frac{\Delta}{2} \text{sign}[C(n)] + \Delta C(n) \quad (2-21)$$

où $\text{sign}[C(n)] = \begin{cases} 1 & \text{si le premier bit de } C(n) \text{ est "0"} \\ -1 & \text{si le premier bit de } C(n) \text{ est "1"} \end{cases}$

Même chose, on peut interpréter le mot codé de la figure (2-9b) comme la représentation complément à 2, dans ce cas les échantillons quantifiés sont liés aux mots codés par :

$$\hat{x}(n) = \Delta \cdot C(n) \quad (2-22)$$

Cette dernière méthode d'affectation des mots codés aux niveaux de quantification est très utilisée quand la séquence à traiter est exécutée par une arithmétique à complément à 2, puisque les mots codés peuvent servir comme une représentation numérique directe des valeurs des échantillons.

Pour les quantificateurs uniformes, il existe deux paramètres essentiels, le nombre de niveaux et le pas de quantification Δ , le nombre de niveaux est généralement choisi de la forme 2^B pour rendre efficace l'utilisation des mots codés en binaire en B bits. Ensemble, Δ et B doivent être choisis d'une façon à couvrir le rang des échantillons d'entrée. Si l'on suppose que $|x(n)| \leq X_{\max}$, alors (en supposant que la densité de probabilité est symétrique pour $x(n)$) on peut écrire :

$$2X_{\max} = \Delta \cdot 2^B \quad (2-23)$$

En discutant l'effet de quantification, il est utile de représenter les échantillons quantifiés $\hat{x}(n)$ comme suit :

$$\hat{x}(n) = x(n) + e(n) \quad (2-24)$$

où $e(n)$ est l'erreur de quantification ou du bruit. On peut voir dans la figure (2-9) que si Δ et B sont choisis comme dans la formule (2-23) alors on aura : $-\Delta/2 \leq e(n) \leq \Delta/2$.

Il est clair que si l'on ne connaît ni $x(n)$ ni $e(n)$ mais seulement $\hat{x}(n)$, pour étudier les effets de quantification, il est commode de supposer un modèle statistique simple pour le bruit de quantification.

Le modèle est basé sur les suppositions suivantes :

1- Le bruit de quantification est un bruit blanc stationnaire, c'est-à-d.:

$$\begin{aligned} E[e(n) \cdot e(n+m)] &= \sigma_e^2 & m=0 \\ &= 0 & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

2- Le bruit de quantification n'est pas corrélé avec le signal d'entrée

$$E[x(n) \cdot e(n+m)] = 0 \quad \forall m.$$

3- La distribution du bruit de quantification est uniforme pour chaque intervalle de quantification et puisqu'ils sont les mêmes alors;

$$p(e) = 1/\Delta \quad -\Delta/2 \leq e \leq \Delta/2.$$

Ces suppositions sont clairement peu réalistes pour certains types de signaux. Par exemple si l'entrée est constante pour tout n , les précédentes propositions ne sont pas applicables. La parole, cependant, est un signal compliqué et aléatoire qui fluctue d'une manière rapide parmi les niveaux de quantification, et si Δ est assez petit, l'amplitude du signal est susceptible de traverser plusieurs pas de quantification en allant d'un échantillon à un autre. Dans ce cas les expériences nous montrent que ces hypothèses tiennent assez bon.

Un exemple qui illustre la validité des suppositions statistiques précédentes est montré dans la figure (2-10).

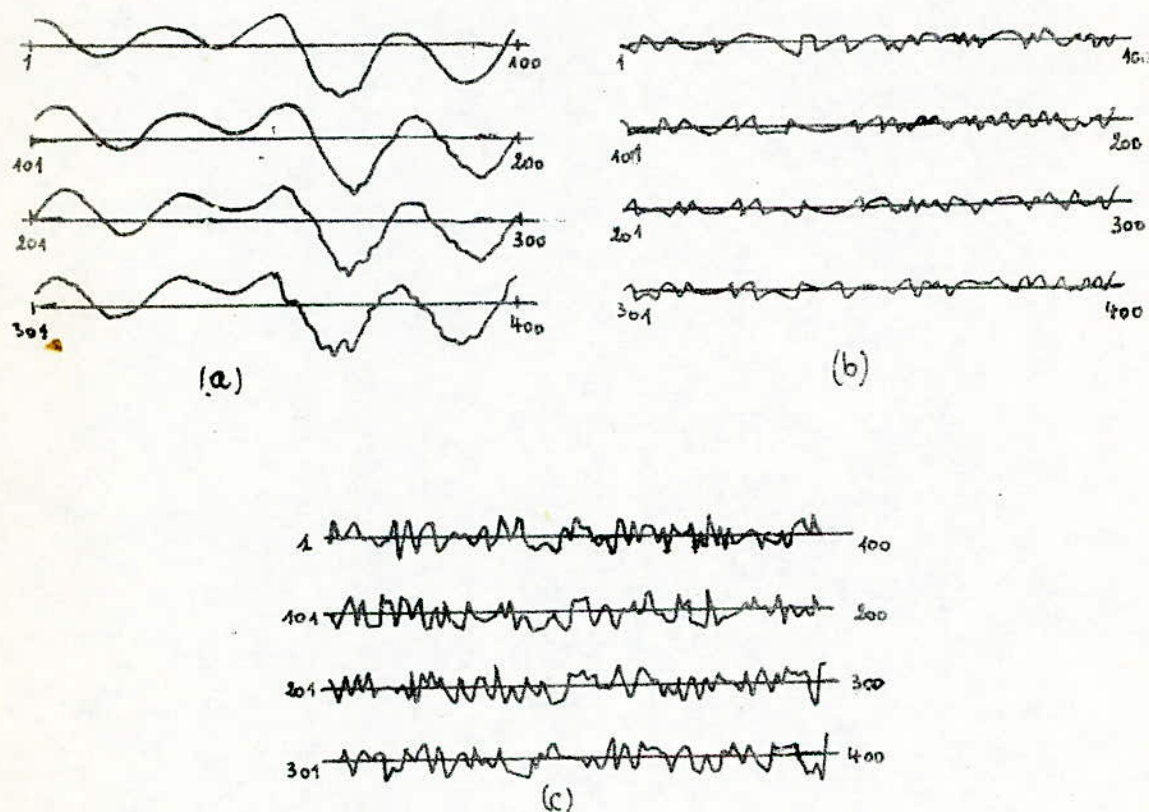
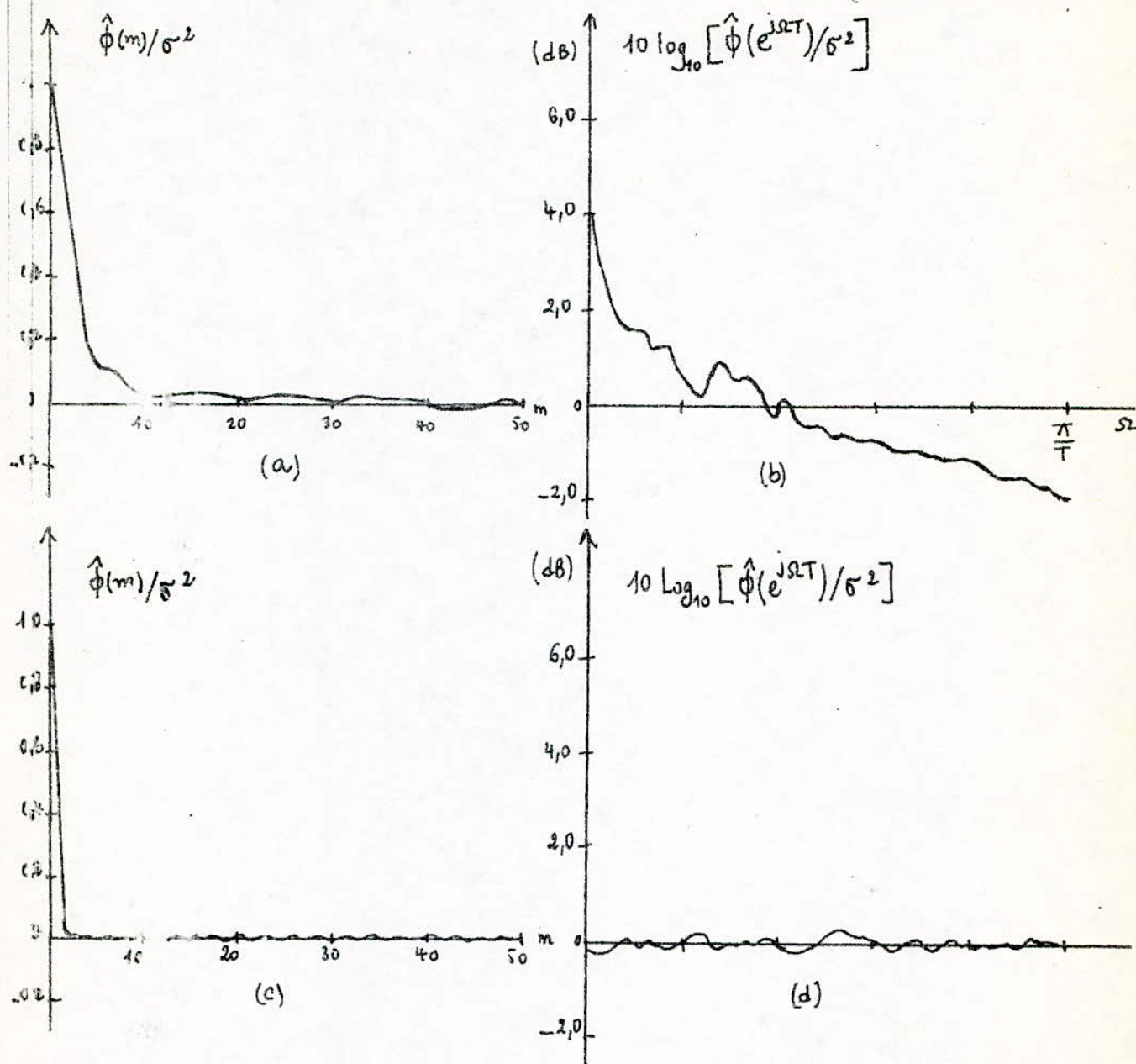


figure (2-10)

- a) Forme d'onde du signal de la parole.
- b) Erreur de quantification pour un quantificateur à trois bits.
(même échelle que (a))
- c) Erreur de quantification pour un quantificateur à huit bits.
(agrandie 66 fois par rapport à (a))



- (a) - L'estimée de l'autocorrélation normalisée pour une quantification à "3" bits.
 (b) - Spectre de puissance pour une quantification à "3" bits.
 (c) - L'estimée de l'autocorrélation normalisée pour une quantification à "8" bits.
 (d) - Spectre de puissance pour une quantification à "8" bits.

- Figure (2-11)

La figure (2-10a) montre 400 échantillons du signal de la parole. Ce signal est quantifié par des quantificateurs uniformes de type "Mid-tread" de "3" et "8" bits. Les signaux d'erreurs de quantification résultants sont montrés dans les figures (2-10b) et (2-10c). Il est évident que la séquence d'erreur montre une certaine corrélation avec le signal d'entrée dans le cas d'une quantification à "3" bits. Cependant, aucune corrélation n'est apparente pour une quantification à "8" bits. Il est clair que la fonction de corrélation indiquée par la figure (2-11c) est compatible avec la supposition que : $\phi(m) = \sigma_e^2 \delta(m)$. Cependant, la figure (2-11a) montre une corrélation significative pour $m > 0$. Ceci est reflété dans les estimées des spectres de puissance résultants données par les figures (2-11b) et (2-11d) qui montrent que le spectre du bruit de quantification à "3" bits tend à diminuer pour les HF, alors que celui de "8" bits est très plat. Avec ce modèle statistique, il est possible de relier la puissance du bruit à celle du signal et aux paramètres du quantificateur. Pour ce but, il est commode de calculer le rapport signal sur bruit :

$$\boxed{\frac{S}{B} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{E[x^2(m)]}{E[e^2(m)]} = \frac{\sum_n x^2(n)}{\sum_n e^2(n)}} \quad (2-24)$$

Si le rang du quantificateur crête à crête est supposé égal à $2 X_{\max}$, alors pour un quantificateur à B bits on obtient : $\Delta = \frac{2 X_{\max}}{2^B}$ (2-25)

Si on suppose une distribution uniforme de l'amplitude pour le bruit, alors on obtient : $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{X_{\max}^2}{3 \cdot 2^{2B}}$ (2-26)

En substituant l'équation (2-25) dans l'équation (2-26) on aura :

$$\boxed{\frac{S}{B} = \frac{3 \cdot 2^{2B}}{\left(\frac{X_{max}}{\sigma_x}\right)^2}} \quad (2-27)$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{S}{B} (dB) = 10 \log_{10} \left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right] = 6B + 4,77 - 20 \log_{10} \left(\frac{X_{max}}{\sigma_x} \right)} \quad (2-28)$$

Si on suppose que le rang du quantificateur est tel que $X_{max} = 4 \cdot \sigma_x$
alors : $\boxed{\frac{S}{B} (dB) = 6B - 7,2} \quad (2-29)$

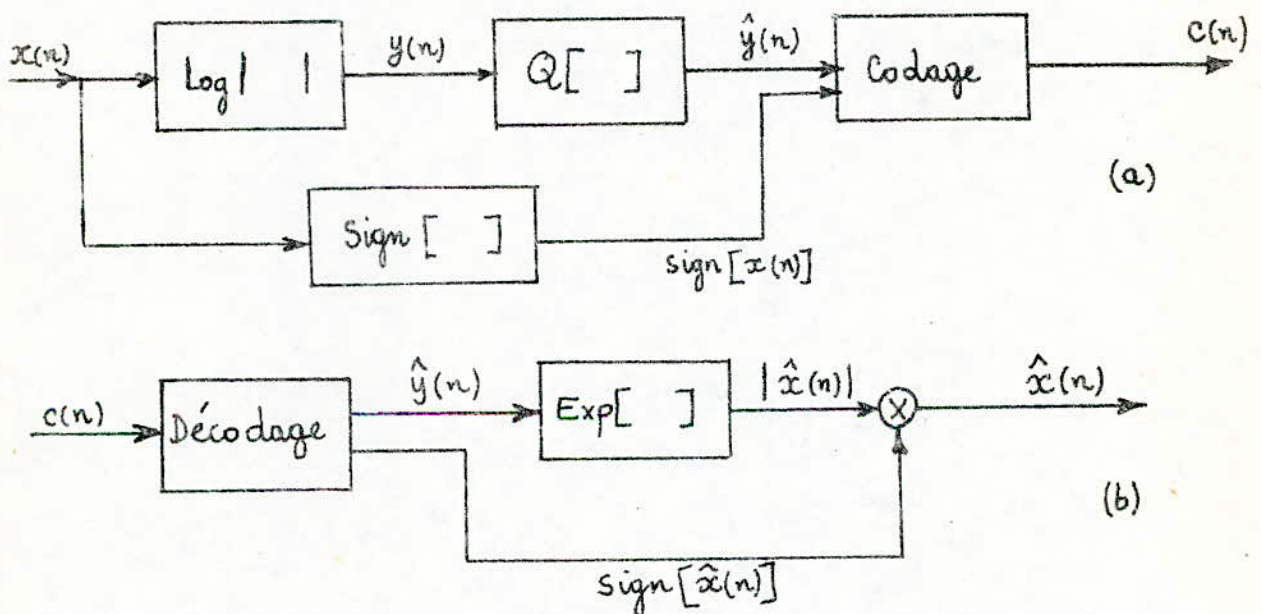
Dans le but de maintenir une représentation fidèle avec un quantificateur uniforme, il est nécessaire d'utiliser beaucoup plus de bits qui soient impliqués par l'analyse prévue et dans laquelle on a supposé que le signal de la parole est stationnaire.

Par exemple l'équation (2-29) suggère que $B = 7$ pourrait fournir environ 36 dB, qui pourrait fournir, probablement, une qualité suffisante dans le système de communication. Il est généralement accepté qu'environ 11 bits sont exigés pour fournir une représentation de haute qualité des signaux de la parole avec un quantificateur uniforme.

Pour toutes les raisons précédentes, il serait très désirable d'avoir un système de quantification pour lequel (S/B) ne dépend pas du niveau du signal. Cela peut être résolu en utilisant une distribution non-uniforme des niveaux de quantification.

2.3.2-) Compression - Expansion instantanées

On peut voir que le logarithme de l'entrée est mieux quantifié que l'entrée elle-même et c'est pour cela qu'on a adopté cette méthode qui est la compression logarithmique. La figure (2-12) montre que l'entrée $x(n)$ est comprimée par la fonction "logarithme" avant la quantification puis étendue par la fonction "exponentielle" après décodage.



⊗ Diagramme bloc d'un codage - décodage logarithmique.

- figure (2-12)

La compression logarithmique est définie par la transformation suivante:

$$\boxed{y(n) = \log |x(n)|} \quad (2-30)$$

La transformation inverse est: $\boxed{\hat{x}(n) = \exp[y(n)] \cdot \text{sign}[x(n)]} \quad (2-31)$

$$\text{où } \text{sign}[x(n)] = \begin{cases} 1 & \text{si } x(n) > 0 \\ -1 & \text{si } x(n) < 0 \end{cases}$$

Maintenant le logarithme quantifié est : $\hat{y}(n) = Q[\log|x(n)|]$

On peut écrire : $\hat{y}(n) = \log|x(n)| + \varepsilon(n)$ (2-32)

où on a supposé que $\varepsilon(n)$ est indépendant de $\log|x(n)|$.

L'inverse du logarithme quantifié est : $\hat{x}(n) = \exp[\hat{y}(n)] \cdot \text{sign}[x(n)]$

$$\hat{x}(n) = |x(n)| \cdot \text{sign}[x(n)] \cdot \exp[\varepsilon(n)]$$

alors $\hat{x}(n) = x(n) \cdot \exp[\varepsilon(n)]$ (2-33)

Si $\varepsilon(n)$ est petit, on peut approximer la relation précédente par :

$$\hat{x}(n) \cong x(n) \cdot (1 + \varepsilon(n)) = x(n) + x(n) \cdot \varepsilon(n)$$

$$\hat{x}(n) \cong x(n) + f(n) \quad (2-34) \quad \text{avec } f(n) = x(n) \cdot \varepsilon(n)$$

Ainsi, puisque $x(n)$ et $\varepsilon(n)$ sont supposées indépendantes alors ;

$$\sigma_f^2 = \sigma_x^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2 \quad \text{d'où} \quad S/B = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_f^2} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \quad (2-35)$$

Compte tenu de cette relation on peut dire que (S/B) est indépendant de la variance du signal mais dépend seulement du pas de quantification.

L'analyse précédente bien qu'elle n'est pas pratique, elle peut, avec des approximations de la caractéristique de compression logarithmique être réalisable.

Pour cela l'utilisation d'un système compresseur/expandeur pour la quantification est montré sur la figure (2-13)

En pratique, on a examiné une caractéristique de compression appelée :

la loi μ . Cette loi de compression est définie par la relation :

$$y(n) = F[x(n)] = X_{\max} \cdot \frac{\log\left[1 + \mu \frac{|x(n)|}{X_{\max}}\right]}{\log[1 + \mu]} \cdot \text{sign}[x(n)] \quad (2-36)$$

La figure (2-13) représente le diagramme bloc d'un système compresseur/expandeur pour la quantification.

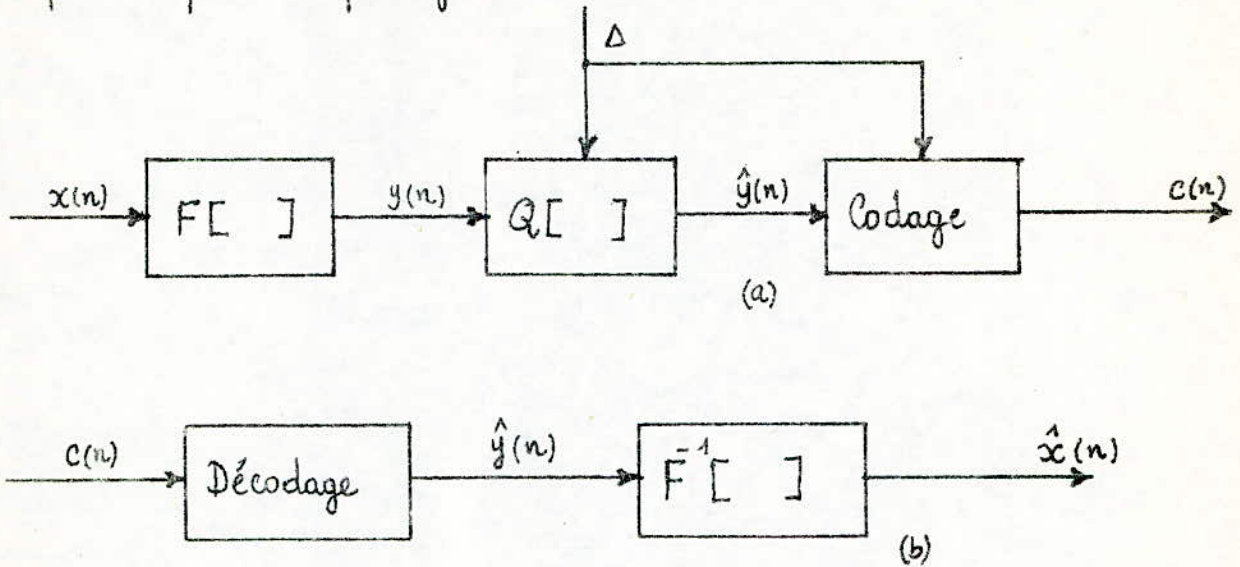
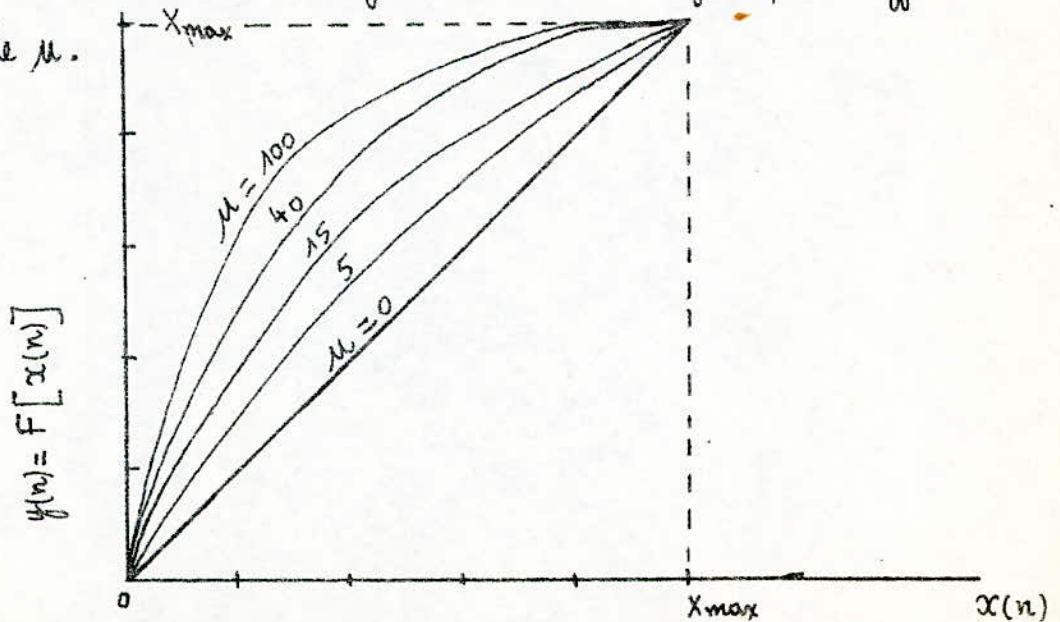


figure (2-13)

La figure suivante montre la famille de courbes $y(n)$ pour différentes valeurs de μ .



⊗ Relations E/S pour la caractéristique de la loi μ .

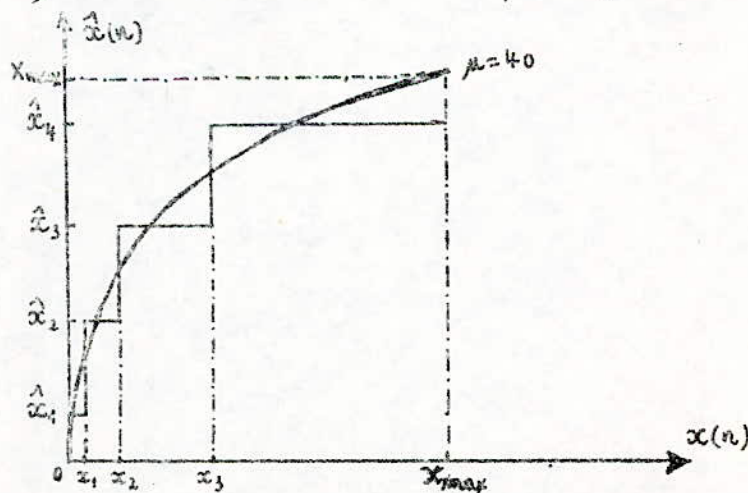
figure (2-14)

Il est clair que l'utilisation de la relation (2-36) évite le problème des petites amplitudes d'entrée puisque $y(n) = 0$ quand $|x(n)| = 0$.

Si $\mu = 0$, l'équation (2-36) se réduit à $y(n) = x(n)$, c'est à dire que les niveaux de quantification sont uniformément espacés. Cependant pour des grandes valeurs de μ et pour $|x(n)|$ grand on aura :

$$|y(n)| \cong X_{\max} \cdot \log \left| \frac{x(n)}{X_{\max}} \right| \quad (2-37)$$

Ainsi sauf pour les très faibles amplitudes, la courbe de la loi μ donne une bonne approximation au pourcentage d'erreur constant. La figure (2-15) montre la distribution des niveaux de quantification pour le cas d'un quantificateur à $\mu = 40$ et "8" niveaux de quantification.



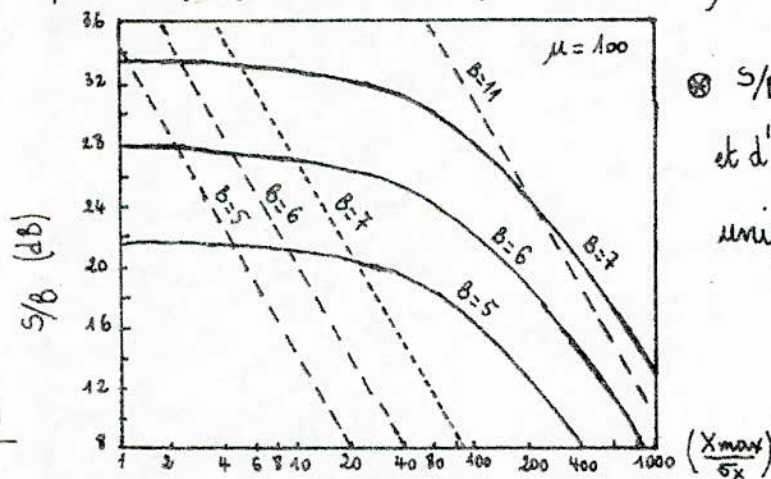
① Distribution des niveaux de quantification pour la loi μ
d'un quantificateur avec $\mu = 40$.

figure (2-15)

En employant les mêmes suppositions que celles utilisées pour l'analyse dans le cas d'un quantificateur uniforme, le rapport (S/B) pour un quantificateur de loi μ est de la forme : équation (2-38)

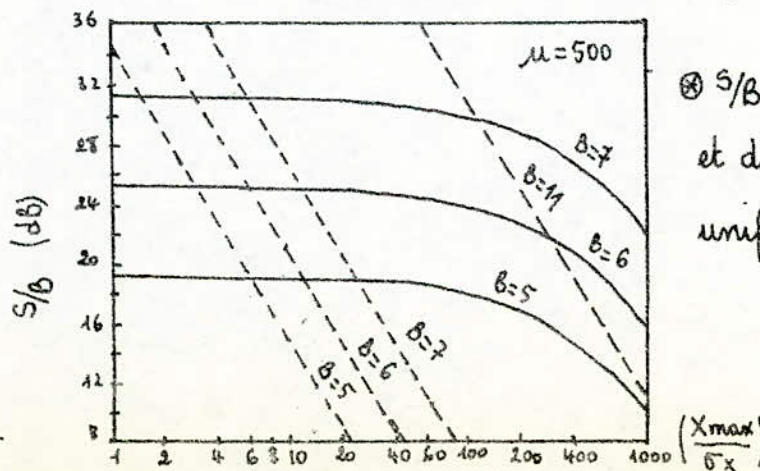
$$\frac{S}{B} (dB) = 6B + 4,77 - 20 \log_{10} [\ln(1+\mu)] - 10 \log_{10} \left[1 + \left[\frac{X_{max}}{\mu \sigma_x} \right]^2 + \sqrt{2} \left[\frac{X_{max}}{\mu \sigma_x} \right] \right]$$

Cette équation comparée à l'équation (2-28) indique le moins de dépendance du (S/B) de la quantité $\left(\frac{X_{max}}{\sigma_x} \right)$. On constate quand μ croît, le (S/B) devient moins sensible au changement de $\left(\frac{X_{max}}{\sigma_x} \right)$ c'est à dire bien que le terme $- 20 \log_{10} (\ln(1+\mu))$ diminue le (S/B) , le rang de $\left(\frac{X_{max}}{\sigma_x} \right)$ pour lequel le (S/B) est constant, croît avec μ .



⊗ S/B pour la loi $\mu=100$ et d'un quantificateur uniforme pour $B=5,6,7,11$.

figure (2-16)



⊗ S/B pour la loi $\mu=500$ et d'un quantificateur uniforme pour $B=5,6,7,11$.

figure (2-17)

La quantité " x_{max} " est un paramètre du système de quantification. Il spécifie l'amplitude de "surcharge", c'est à dire, l'amplitude au-delà duquel les échantillons sont taillés. La quantité " σ_x " est un paramètre du signal.

Les courbes en pointillées de la figure (2-16) et de la figure (2-17) montrent comment le rapport (S/B) d'un quantificateur uniforme varie comme une fonction linéaire de $(\frac{x_{max}}{\sigma_x})$. Les équations (2-28) et (2-38) donnent une bonne description du rapport (S/B) pour les valeurs de $\frac{x_{max}}{\sigma_x} > 8$. Le point important qu'on peut tirer de ces courbes c'est que la quantification de la loi μ peut maintenir approximativement le même rapport (S/B) au dessus d'un assez large rang.

Par exemple de la figure (2-16) il est clair que pour $\mu = 100$, le rapport (S/B) diminue de 2 dB entre $8 < \frac{x_{max}}{\sigma_x} < 30$.

Et pour la figure (2-17) il est clair que pour $\mu = 500$, le rapport (S/B) diminue de 2 dB entre $8 < \frac{x_{max}}{\sigma_x} < 150$.

Cependant, une comparaison entre les figures (2-16) et (2-17) indique que le maximum atteint du rapport (S/B) est d'environ de 2,6 dB pour $\mu = 100$ ^{de plus} que pour $\mu = 500$.

On peut voir des deux figures (2-16) et (2-17) qu'avec $B=7$, le rapport (S/B) est environ 34 dB. En effet, une loi μ PCM (MIC) à 7 bits est généralement prise comme standard pour la représentation du signal de la parole (Qualité).

CHAPITRE: 3

ANALYSE DE FOURIER A COURT TERME (INSTANTANÉE)

3.1- Introduction:

L'utilisation de la représentation de Fourier est utile dans le traitement du signal pour deux raisons essentielles :

- pour des systèmes linéaires, il est très commode de déterminer la réponse à une superposition de sinusoïdes ou à des exponentielles complexes.
- la représentation de Fourier sert souvent à mettre en évidence certaines propriétés du signal qui peuvent être obscures ou au moins, moins évidentes dans le signal original.

La transformée de Fourier joue un rôle très important dans la communication parlée. Les représentations de Fourier standard qui sont appropriées pour des signaux aléatoires périodiques ou stationnaires ne sont pas directement applicables à la représentation des signaux de la parole dont les propriétés changent d'une manière aléatoire.

On a déjà vu que le principe d'analyse à court terme est une approche valable au traitement de la parole vues que les propriétés temporelles de l'énergie, de la corrélation peuvent être supposées fixes sur des intervalles de temps de l'ordre de 10 à 25 ms.

3.1.1. Définitions et propriétés:

En définissant la représentation de Fourier dépendante du temps, on

On sera motivé par un besoin d'une représentation spectrale qui reflète les propriétés de la parole. On définit la T.F dépendante du temps comme suit :

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(n-m) \cdot x(m) e^{-j\omega n} \quad (3-1)$$

où $w(n-m)$ est une séquence de fenêtre réelle qui détermine la portion qui est amplifiée, en indice "n", du signal $x(m)$.

La T.F dépendante du temps est clairement une fonction de deux variable l'indice "n" et la fréquence variable ω . Avec un changement de variable, l'équation (3-1) devient comme suit :

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) \cdot x(n-m) e^{-j\omega(n-m)}$$

$$X_n(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) \cdot x(n-m) e^{+j\omega m} \quad (3-2)$$

Si on définit :

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) \cdot w(m) e^{j\omega m} \quad (3-3)$$

alors on aura :

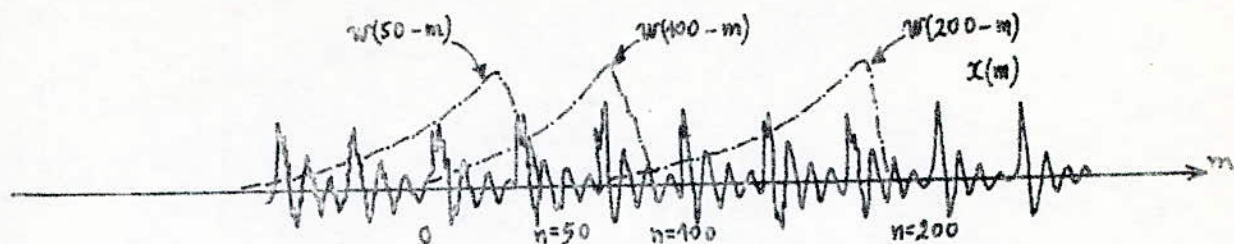
$$X_n(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n} \tilde{X}(e^{j\omega}) \quad (3-4)$$

Les équations (3-1) et (3-4) peuvent être interprétés de deux façons distinctes. La première, si on suppose que n est fixé, on peut dire que $X_n(e^{j\omega})$ est la T.F normale de la séquence $w(n-m) \cdot x(m)$, $-\infty < m < \infty$. La seconde, si on suppose que ω est fixée, $X_n(e^{j\omega})$ dépend de n , dans ce cas on peut voir que les équations (3-1) et (3-2) sont sous une forme de convolution.

3.1.2.) Interprétation de la (T.F).

Pour commencer, on considèrera $X_n(e^{j\omega})$, comme la T.F normale

de la séquence $w(n-m) x(m)$, pour n fixé.



③ Schéma illustrant le signal $x(m)$ et $w(n-m)$ pour différentes valeurs de n .
figure (3-1).

La T.F dépendante du temps est une fonction de n prenant des valeurs entières de façon à glisser la fenêtre $w(n-m)$ le long de la séquence $x(m)$. Cela est **montrée** dans la figure (3-1). Si $w(n-m)$ est de durée finie, la condition d'existence de la T.F dépendante du temps est obtenue. Le fait que pour n fixé, $X_n(e^{j\omega})$ a les mêmes propriétés que la T.F normale, conduit à une simple preuve que la séquence $x(m)$ peut être récupérée d'une manière exacte à partir de la TF inverse. Alors on aura :

$$w(n-m) \cdot x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega \quad (3-5)$$

pour $m=n$ et pour $w(0) \neq 0$, on trouve que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3-6)$$

Une propriété importante de $X_n(e^{j\omega})$ est sa relation avec la fonction d'autocorrelation à court terme :

$$S_n(e^{j\omega}) = |X_n(e^{j\omega})|^2 = X_n(e^{j\omega}) \cdot X_n^*(e^{j\omega}) \quad (3-7)$$

qui est la transformée de Fourier de :

$$R_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [w(n-m) \cdot x(m)] \cdot [w(n-m-k) \cdot x(m+k)] \quad (3-8)$$

Le rôle de la fenêtre $w(n)$ est de sélectionner une portion de la séquence $x(m)$ pour être ensuite analysée.

La forme de la séquence fenêtre a un effet important sur la nature de la T.F dépendante du temps. Si $X_n(e^{j\omega})$ est obtenue à partir de la séquence $w(n-m) \cdot x(m)$ et si on suppose que :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot e^{-j\omega n} \quad (3-9)$$

et $W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) e^{-j\omega n} \quad (3-10)$

existent alors la T.F normale de $w(n-m) \cdot x(m)$ est la convolution des transformées de $w(n-m)$ et de $x(m)$. Puisque pour n fixé, la T.F normale de $w(n-m)$ est $W(e^{j\omega}) e^{-j\omega n}$, alors :

$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\theta}) e^{-j\theta n} \cdot X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (3-11)$$

En changeant θ par $-\theta$ on obtient :

$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\theta}) e^{j\theta n} \cdot X(e^{j(\omega+\theta)}) d\theta \quad (3-12)$$

En effet, les séquences typiques de fenêtres sont en général telles que $w(n-m) = 0$ pour m en dehors de l'intervalle fini de n . Il est raisonnable de supposer que les propriétés de $x(m)$ à l'intérieur de la fenêtre persistent à l'extérieur de la fenêtre. L'équation (3-12) a un sens si $X(e^{j\theta})$ représente la T.F du signal dont les propriétés essentielles sont continues ou nulles à l'extérieur de la fenêtre.

Ainsi la T.F dépendante du temps peut être interprétée comme une version filtrée de la T.F de la partie du signal qui est à l'intérieur de la

fenêtre. Avec ce point de vue, les propriétés de la fenêtre $W(e^{j\theta})$ deviennent importantes. Il est clair de l'équation (3-12), que pour une reproduction fidèle des propriétés de $X(e^{j\omega})$ dans $X_n(e^{j\omega})$, la fonction $W(e^{j\theta})$ devrait apparaître comme une impulsion par rapport à $X(e^{j\omega})$. Il est montré que la largeur du lobe principal de $W(e^{j\theta})$ est inversement proportionnel à la longueur de la fenêtre.

3.2.) Vitesses d'échantillonnage de $X_n(e^{j\omega})$ en temps et en fréquence.

La T.F à court terme est une représentation bidimensionnelle d'un signal $x(n)$ unidimensionnel. $X_n(e^{j\omega})$ est une fonction de deux variables n et ω . Une considération essentielle dans la réalisation numérique des systèmes pour l'analyse de Fourier à court terme est la vitesse à laquelle $X_n(e^{j\omega})$ devrait être échantillonnée pour fournir une représentation sans ^{recouvrement} de $X_n(e^{j\omega})$ à partir duquel $x(n)$ peut être exactement récupéré.

On commence par la discussion de la vitesse d'échantillonnage de $X_n(e^{j\omega})$ dans le temps. Notons la largeur de la bande efficace de la fenêtre d'analyse par "B". Ainsi la séquence $X_n(e^{j\omega})$ a la même largeur de bande que celle de la fenêtre, et donc selon le théorème d'échantillonnage $X_n(e^{j\omega})$ doit être échantillonné à la vitesse $2B$ échantillons/s au moins pour éviter le phénomène de recouvrement.

Comme exemple, considérons une fenêtre de Hamming, c'est à dire :

$$W(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \left[\frac{2\pi n}{L-1} \right] & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3-13)$$

La largeur de la bande approximative de $W(e^{j\omega})$ est :

$$B = \frac{2F_s}{L} \quad (3-14), \text{ où } F_s : \text{la vitesse d'échantillonnage de } x(n)$$

Ainsi la vitesse d'échantillonnage exigée pour $X_n(e^{j\omega})$ dans le temps est $2B$ c'est à dire $4F_s/L$ échantillons/s.

Pour $L = 100$ et $F_s = 10 \text{ KHz}$ on obtient $B = 200 \text{ Hz}$. $X_n(e^{j\omega})$ peut être évaluée 400 fois/s c'est à dire chaque 25 échantillons.

Puisque $X_n(e^{j\omega})$ est périodique en ω de période 2π , il est donc seulement nécessaire d'échantillonner sur un intervalle de longueur 2π .

On utilise l'interprétation de la T.F de $X_n(e^{j\omega})$ pour déterminer une suite finie appropriée de fréquences $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$, auxquelles $X_n(e^{j\omega})$ doit être évaluée pour retrouver exactement $x(n)$.

Si la fenêtre est à temps limité et si $X_n(e^{j\omega})$ est vue comme une T.F, sa T.F inverse est aussi à temps limité. Dans ce cas le théorème d'échantillonnage exige que l'on échantillonne $X_n(e^{j\omega})$ en fréquence à une vitesse au moins deux fois la largeur du temps de la fenêtre.

Puisque la T.F inverse de $X_n(e^{j\omega})$ est le signal $x(m) \cdot w(n-m)$ et ce signal est de durée L échantillons, alors selon le théorème d'échantillonnage $X_n(e^{j\omega})$ doit être échantillonnée en fréquence à la suite de fréquences

$$\omega_k = \frac{2\pi}{L} \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L-1 \quad (3-15)$$

dans le but de récupérer exactement $x(n)$ à partir de $X_n(e^{j\omega})$.

Ainsi pour l'exemple de la fenêtre de Hamming de durée $L = 100$ échantillons, on exige de $X_n(e^{j\omega})$ d'être évaluée au moins en 100 fréquences espacées

uniformément. En se basant sur la discussion précédente, on peut déterminer la vitesse d'échantillonnage totale de $X_n(e^{j\omega_k})$ qui doit être calculée pour donner une représentation sans recouvrement du signal original $x(n)$. La vitesse d'échantillonnage minimale de $X_n(e^{j\omega_k})$ dans le temps est "2B", et le nombre minimal d'échantillons en fréquences est "L". Ainsi la vitesse d'échantillonnage totale de $X_n(e^{j\omega_k})$ est : $SR = 2B \cdot L$ (3-16)

Pour la majorité des fenêtres pratiques, B peut être représentée comme un multiple entier de (F_s/L) , c'est à dire que : $B = C \cdot F_s/L$ (3-17) ou "C" est une constante de proportionnalité. Ainsi l'équation (3-16) peut être écrite comme suit : $SR = 2C \cdot F_s$ (3-18)

On définit le rapport de "suréchantillonnage" le rapport de la vitesse d'échantillonnage à court terme sur la vitesse d'échantillonnage de $x(n)$, c'est à dire $\frac{SR}{F_s} = 2C$ (3-19)

Comme exemple si $w(n)$ est une fenêtre de Hamming alors $2C = 4$, si $w(n)$ est rectangulaire (et si la largeur de la bande B est définie comme la fréquence du premier zéro de $W(e^{j\omega})$) $2C = 2$.

3.3-) Méthode de sommation d'un banc de filtres de la synthèse à court terme.

Cette méthode de synthèse est liée à l'interprétation de banc de filtres du spectre à court terme dans lequel on a choisi pour toutes les pulsations ω_k , $X_n(e^{j\omega_k})$ est une représentation d'un passe-bas du signal dans une bande centrée en ω_k . D'après (3-1) et (3-2), $X_n(e^{j\omega_k})$ peut s'exprimer comme suit:

$$X_n(e^{j\omega_k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_k(n-m) x(m) e^{-j\omega_k m} \quad (3-20)$$

ou par
$$X_n(e^{j\omega_k}) = e^{-j\omega_k n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_k(m) x(n-m) e^{j\omega_k m} \quad (3-21)$$

où $W_k(m)$ est la fenêtre utilisée à la pulsation ω_k .

Si on définit
$$h_k(n) = W_k(n) e^{j\omega_k n} \quad (3-22)$$

Alors l'équation (3-21) devient comme suit :

$$X_n(e^{j\omega_k}) = e^{-j\omega_k n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) h_k(m) \quad (3-23)$$

Puisque la fenêtre $W_k(n)$ a les propriétés d'un filtre passe-bas, l'équation (3-23) peut être interprétée comme un filtre passe-bande avec une réponse impulsionnelle $h_k(n)$ suivit d'une modulation complexe $e^{-j\omega_k n}$.

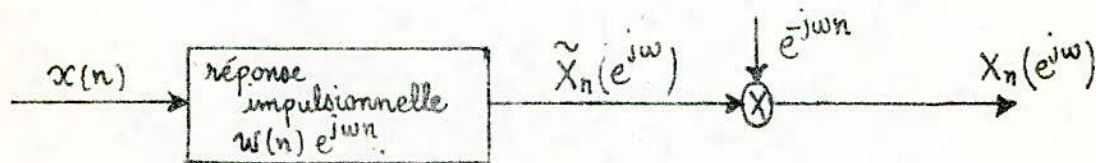


figure (3-2)

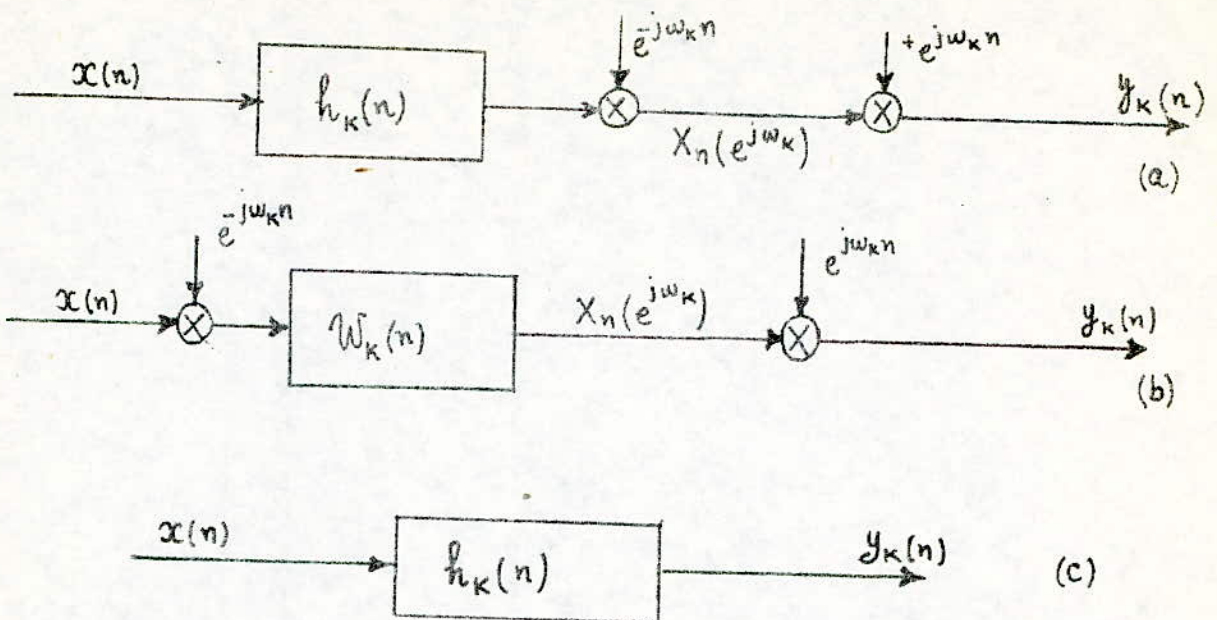
Si la T.F $W(e^{j\omega})$ est une fonction passe-bas, alors le filtre de la figure (3-2) serait un filtre passe-bande centré à la fréquence ω .

Si on définit :
$$y_k(n) = X_n(e^{j\omega_k}) \cdot e^{j\omega_k n} \quad (3-24)$$

nous aurons :
$$y_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m) h_k(m) \quad (3-25)$$

Ainsi $y_k(n)$ est simplement la sortie des filtres passe-bande avec une réponse impulsionnelle $h_k(m)$ comme donnée par l'équation (3-25).

En substituant l'équation (3-23) dans l'équation (3-24) on obtient l'équation (3-25) qui est donnée sur la figure (3-3a) :



⊕ Méthodes pour la synthèse de réalisation d'un seul canal en termes de filtrage linéaire. figure (3-3)

Puisque les équations (3-20) et (3-23) sont équivalentes, on peut aussi noter que chaque forme de $X_n(e^{j\omega_k})$ peut être utilisée dans (3-24) et dans les deux cas, le système liant $x(n)$ à $y_k(n)$ est un filtre passe-bande avec une réponse impulsionnelle $h_k(n)$.

La figure (3-3) nous fournit la clé d'une méthode pratique pour reconstruire le signal d'entrée à partir de la T.F dépendante du temps.

Considérons une suite de N fréquences $\{\omega_k\}$, en supposant que $X_n(e^{j\omega_k})$ existe pour chaque fréquence.

Maintenant considérons N filtres passe-bande de la forme :

$$h_k(n) = w_k(n) \cdot e^{j\omega_k n} \quad (3-26)$$

Supposons par exemple que $w_k(n)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure ω_{pk} .

La réponse fréquentielle $W_k(e^{j\omega})$ d'un filtre est donnée par la figure (3-4a). La réponse fréquentielle d'un filtre passe-bande, complexe correspondant à une réponse impulsionnelle $h_k(n) = w_k(n) e^{j\omega_k n}$ est :

$$H_k(e^{j\omega}) = W_k(e^{j(\omega - \omega_k)}), \quad (3-27)$$

comme montrée dans la figure (3-4b).

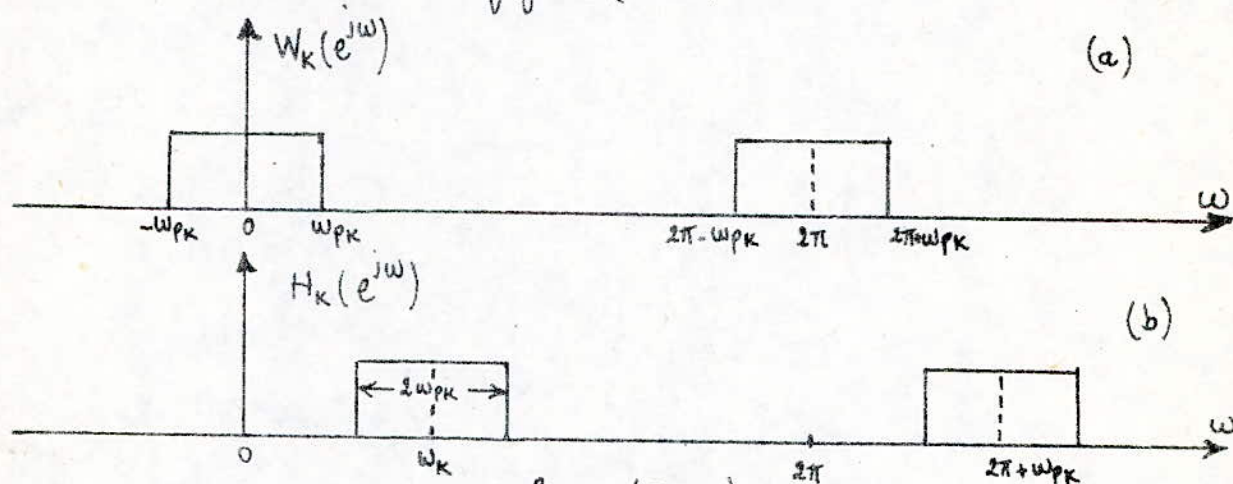


figure (3-4)

Notons que ω_k est la fréquence centrée, et la largeur de la bande est $2\omega_k$. Considérons maintenant une suite de N filtres passe-bande choisis avec leurs fréquences centrées espacées uniformément telle que la bande de fréquence essentielle soit entièrement couverte.

Ainsi

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot K, \quad K = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3-28)$$

On supposera aussi que la fenêtre $w_k(n)$ est la même pour tous les canaux, c'est à dire

$$w_k(n) = w(n) \quad (3-29)$$

Alors si on considère une suite de filtres passe-bande, ayant la même entrée et leurs sorties ensemble, comme dans la figure (3-5), la réponse

fréquentielle composite liant $x(n)$ à $y(n)$ est :

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k(e^{j\omega_k}) = \sum_{k=0}^{N-1} W(e^{j(\omega-\omega_k)}) \quad (3-30)$$

Si $W(e^{j\omega_k})$ est échantillonnée, comme il faut (c'est à dire, si $N \gg L$ où L est la durée de la fenêtre), on montre que pour tout ω , on a :

$$W(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(e^{j(\omega-\omega_k)}) \quad (3-31)$$

L'obtention de l'équation (3-31) est comme suit :

L'inverse de la T.F de $W(e^{j\omega})$ est la fenêtre $w(n)$. Si $W(e^{j\omega})$ est échantillonnée en fréquence en N points espacés uniformément, la T.F inverse discrète de la version échantillonnée de $W(e^{j\omega_k})$ est :

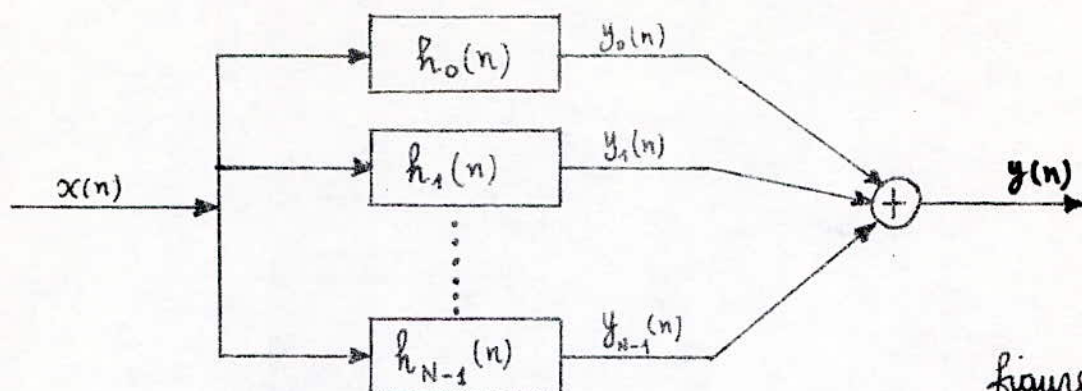
$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(e^{j\omega_k}) \cdot e^{j\omega_k n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n + nN) \quad (3-32)$$

Si $w(n)$ est de durée L échantillons alors $w(n) = 0$ pour $n < 0$ ou $n \geq L$ (3-33)

de recouvrement n'apparaît pas dû à l'échantillonnage en fréquence de $W(e^{j\omega})$. Ainsi dans ce cas, si l'équation (3-32) est évaluée en $n=0$, on obtient :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W(e^{j\omega_k}) = W(0) \quad (3-34)$$

L'équation (3-31) est facilement obtenue en notons que $W(e^{j(\omega-\omega_k)})$ est une version échantillonnée uniforme de $W(e^{j\omega})$ évaluée en $\omega - \omega_k$ plutôt que ω_k . Selon le théorème d'échantillonnage, toute suite de N échantillons espacés uniformément est suffisante.



— figure (3-5) —

⊗ Système linéaire équivalent reliant $y_k(n)$ et $y(n)$ à $x(n)$.

A partir des équations (3-34) et (3-31), on obtient la réponse impulsionnelle du système composite :

$$\tilde{h}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n) e^{j\omega_k n} = N w(0) \delta(n) \quad (3-35)$$

Ainsi la sortie composite est égale à :

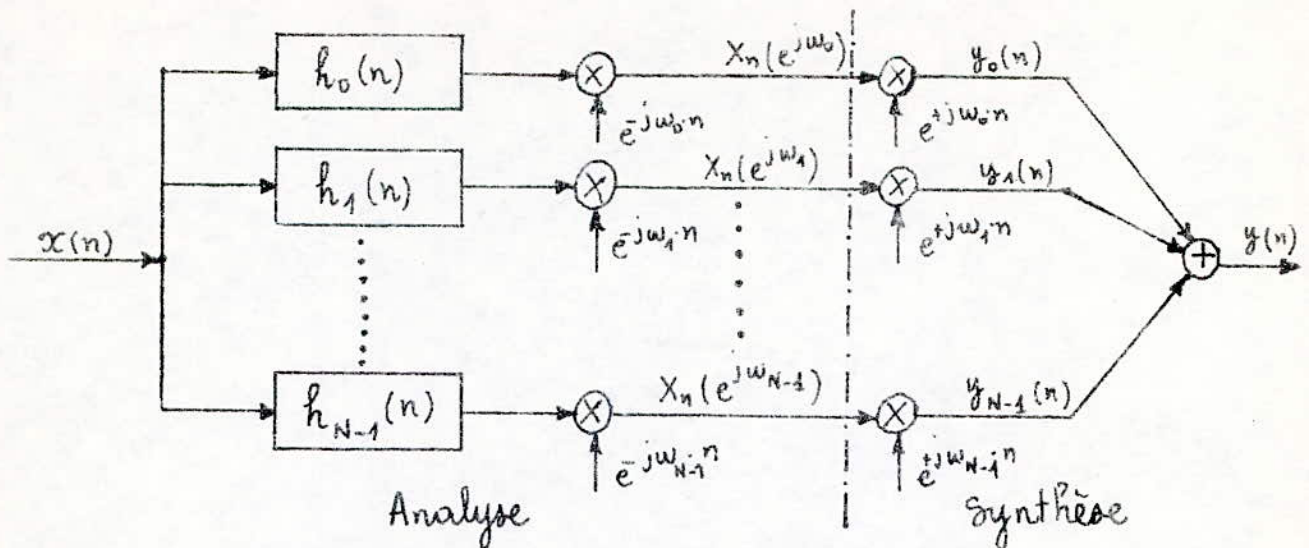
$$y(n) = N w(0) x(n) \quad (3-35')$$

Ainsi pour la méthode de sommation d'un banc de filtres, le signal reconstruit est, comme suit :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_n(e^{j\omega_k}) \cdot e^{j\omega_k n} \quad (3-36)$$

On a montré, que si $X_n(e^{j\omega_k})$ est échantillonné en fréquence, comme il faut, alors $y(n) = N w(0) x(n)$ est indépendante de la forme spécifique de $w(n)$.

Les opérations d'analyse et de synthèse impliquées par l'équation (3-36) sont montrées sur la figure (3-6), où les filtres sont des passe-bande.



⊗ Opérations d'analyse et synthèse pour l'analyse spectrale à court terme.

figure (3-6)

On vient juste de montrer un résultat très important, c'est à dire sous la condition que $w(n)$ est de durée finie "L" alors la séquence $x(n)$ peut être reconstruite exactement à partir de la TF dépendante du temps échantillonnée en temps et en fréquence. On peut montrer que si $W(e^{j\omega})$ a parfaitement une bande limitée en fréquence, alors $x(n)$ peut aussi être reconstitué exactement à partir de $X_n(e^{j\omega_k})$. En effet nous verrons qu'il existe de nombreuses possibilités pour la reconstruction du signal $x(n)$ à partir de la TF (dépendante du temps) à court terme. On a montré que pour éviter le recouvrement dans le temps, $X_n(e^{j\omega_k})$ doit être évalué au moins en L fréquences espacées uniformément. La largeur de la bande d'une fenêtre de L échantillons est généralement de $\frac{2\pi}{L}$ (pour la fenêtre rectangulaire) à $\frac{4\pi}{L}$ (pour celle de Hamming). Puisque les fréquences d'analyse sont $\frac{2\pi}{L} \cdot k$, l'effectif des filtres passe-bande chevauchent en fréquence.

Comme mentionné précédemment, il y a une façon dans laquelle $X_n(e^{j\omega_k})$ peut être évalué dans des bandes où il n'y a pas de chevauchement et pour lesquelles $x(n)$ peut être encore exactement reconstitué.

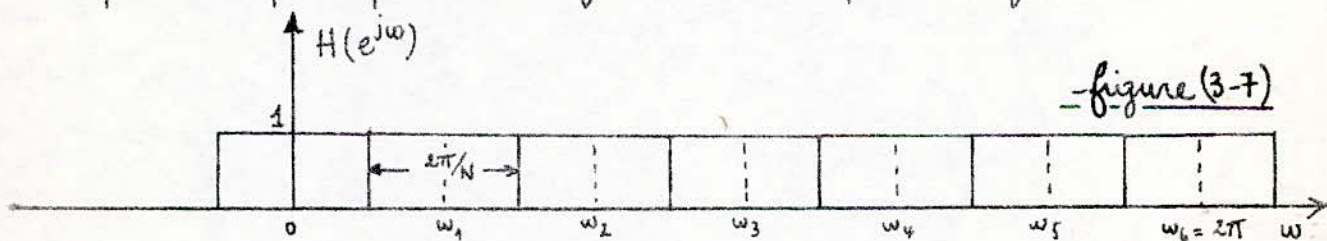
Pour montrer cela on suppose que la longueur de la fenêtre pour toutes les bandes est "L" échantillons, et qu'aussi la même fenêtre est utilisée pour "N" bandes de fréquences espacées uniformément avec des fréquences d'analyse :

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k, \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (3-37)$$

où "N" peut être moins que "L".

On suppose aussi que $w(n)$ est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\omega_p = \frac{\pi}{N}$ (3-38)

Cette situation est montrée dans la figure (3-7) et qui nous montre que la réponse composite pour $N=6$ filtres idéaux espacés uniformément.



Pour ce cas l'équation (3-35) devient :

$$\tilde{h}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w(n) \cdot e^{j\omega_k n} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\omega_k n} \right) \cdot w(n) \quad (3-39)$$

Si on pose $p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\omega_k n} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot k}$ (3-40)

alors : $\tilde{h}(n) = w(n) \cdot p(n)$ (3-41)

La séquence $p(n)$ est périodique de période N. De même, on peut écrire $p(n)$ sous la forme d'un train d'impulsions périodique d'amplitude

N, c'est à dire que :

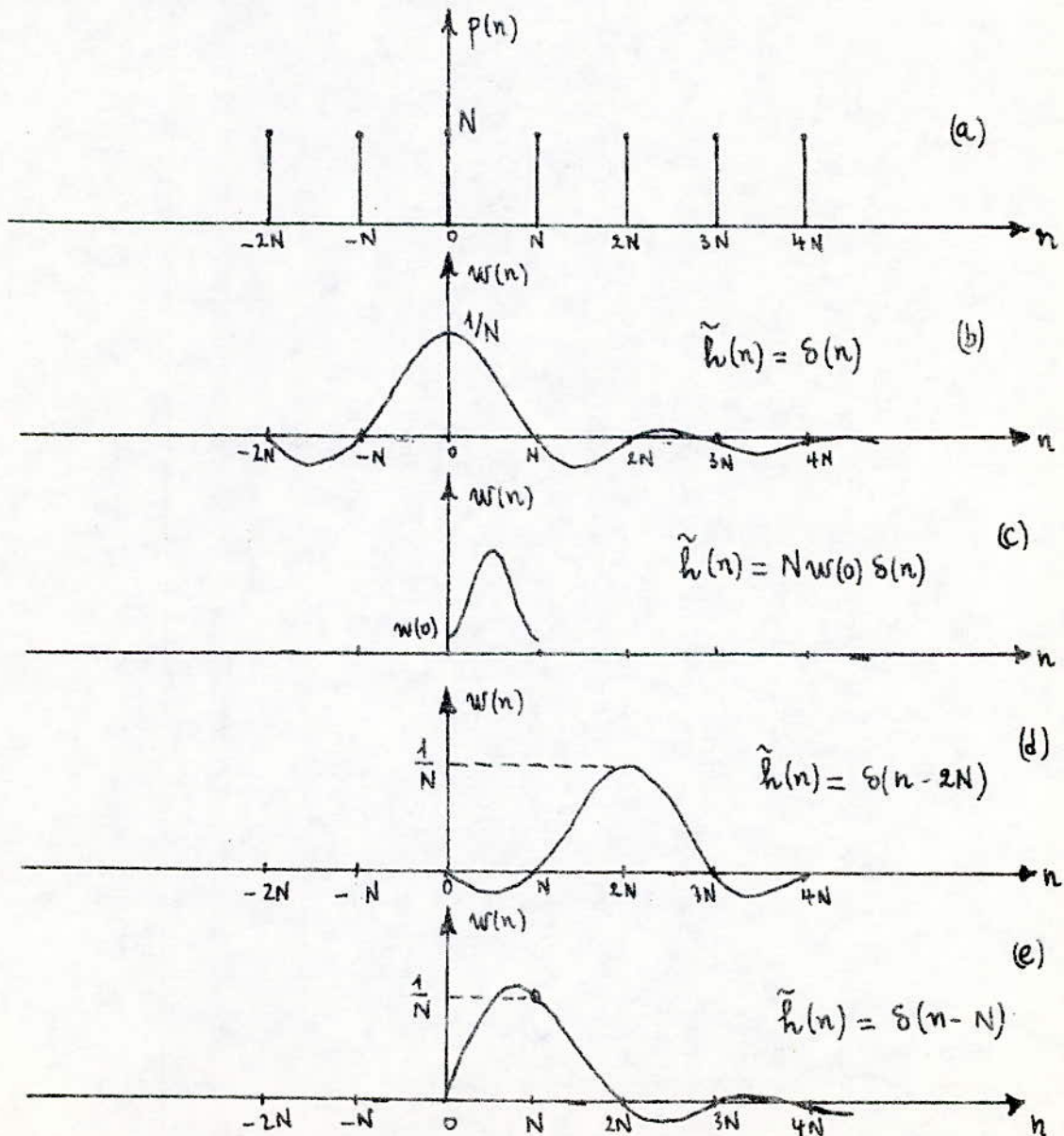
$$p(n) = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n-rN) \quad (3-42)$$

ainsi on peut écrire :

$$\tilde{h}(n) = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} w(rN) \cdot \delta(n-rN) \quad (3-43)$$

Ainsi la réponse impulsionnelle composite est simplement une séquence de fenêtres échantillonnées en intervalles de N échantillons.

Ceci est indiqué sur la figure (3-8).



⊗ Séquences typiques pour $p(n)$ et $w(n)$ pour un banc de filtres composite.

La figure (3-8a) montre la séquence $p(n)$. La figure (3-8b) montre la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal avec une fréquence de coupure, c'est à dire :

$$w(n) = \frac{\sin(\pi n/N)}{\pi n} \quad (3-44)$$

On peut voir, par comparaison des figures (3-8a) et (3-8b) que le produit $\tilde{h}(n) = p(n) \cdot w(n)$ serait nul par tout sauf en $n=0$ où le produit vaut l'unité. Ainsi la réponse impulsionnelle composite est : $\tilde{h}(n) = \delta(n)$ (3-45)

Bien que cela suppose un filtre passe-bas idéal, les détails de la façon dont $p(n)$ et $w(n)$ interviennent pour produire la réponse composite suggèrent une multitude de façons pour le choix de $w(n)$ tel que le signal peut être reconstruit à partir de la T.F à court terme échantillonnée.

Avant tout, notons que si $w(n)$ est de longueur finie $L < N$, et causale, alors la réponse impulsionnelle composite sera comme dans l'équation (3-35), ainsi vérifiant la discussion de la partie précédente.

La figure (3-8c) montre un exemple de ce cas. Une fenêtre causale de longueur supérieure à N peut être utilisée si $w(n)$ a les propriétés suivantes :

$$(3-46) \quad w(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} & , n = n_0 N \\ 0 & , n = rN, r \neq n_0 \end{cases}$$

alors $\tilde{h}(n) = p(n) \cdot w(n) = \delta(n - r_0 N)$ (3-47)

La figure (3-8d) montre un exemple de fenêtre de durée finie ; où $r_0 = 2$. En effet, il est clair que $w(n)$ n'exige pas une restriction dans le temps ou en fréquence dans le but qu'il soit possible de reconstruire d'une manière exacte la copie identique retardée de $x(n)$ à partir de $X_n(e^{j\omega_k})$.

Tout ce qu'on exige est que $w(n)$ est choisie comme dans l'équation (3-46).

Il n'y a aucune restriction sur la longueur de la fenêtre qu'elle soit finie ou infinie tant qu'elle a des zéros espacés uniformément.

En effet, la figure (3-8e) nous montre une fenêtre de durée infinie avec des propriétés bien appropriées.

L'équation (3-47) implique que la réponse fréquentielle composite d'un système analyse/synthèse comme indiquée sur la figure (3-6) a une réponse d'amplitude plate et une phase linéaire correspondant à un retard de $r_0 N$ échantillons. Ceci étant dit, on peut écrire :

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega r_0 N} \quad (3-48)$$

Ceci implique que la sortie du système analyse/synthèse soit :

$$y(n) = x(n - r_0 N) \quad (3-49)$$

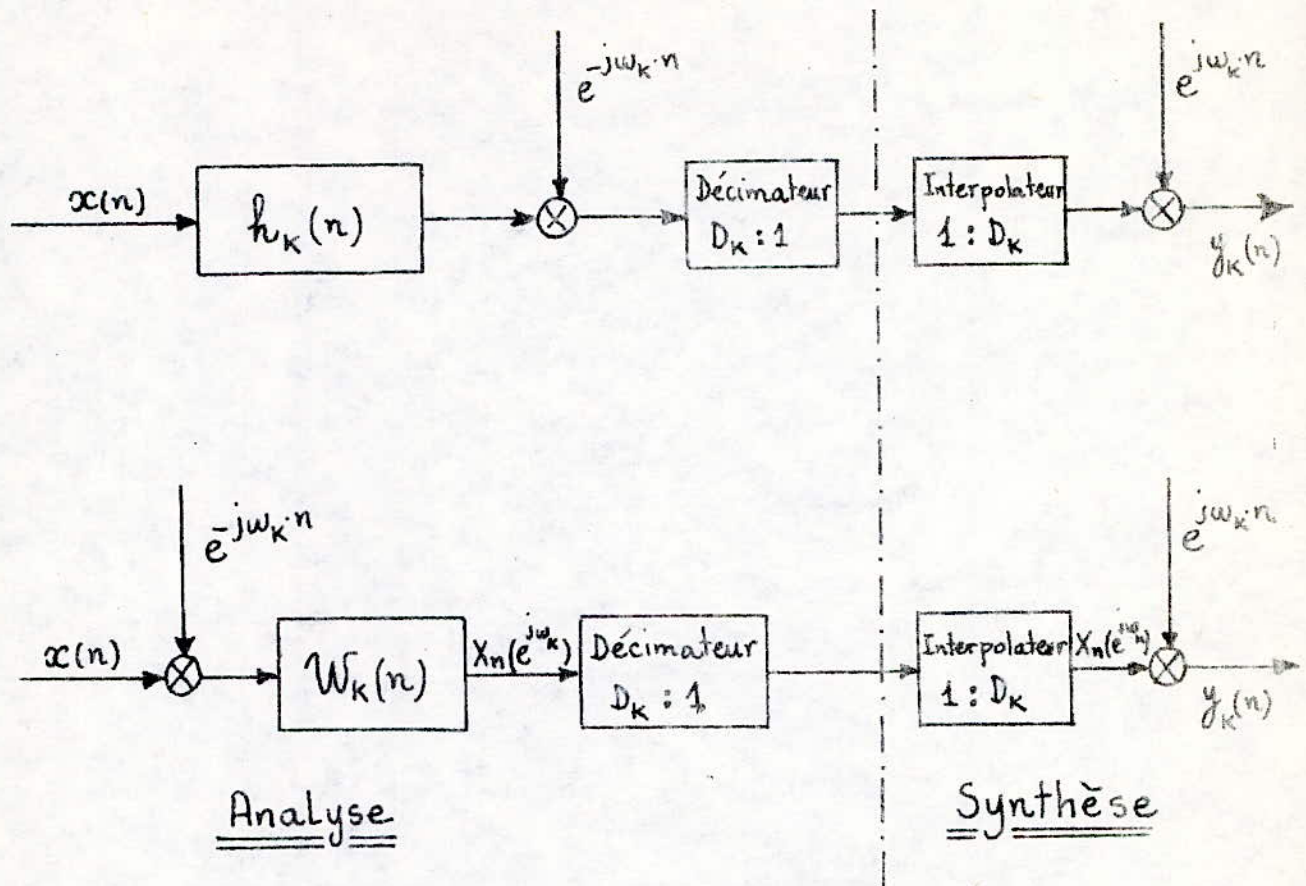
Ainsi, avec un retard de $r_0 N$ échantillons, la sortie est une copie exacte de la séquence d'entrée.

Donc on a montré que la reconstruction exacte de l'entrée est possible avec un nombre de canaux de fréquences moins que celui exigé par le théorème d'échantillonnage et avec une fenêtre causale qui permet la réalisation de l'analyse avec des filtres passe-bande et passe-bas causaux.

Ainsi une question importante et pratique est comment peut-on bien faire des filtres numériques pour approcher le comportement montré dans la figure (3-8).

Avant de procéder à une autre approche de la synthèse du spectre à court terme, on doit discuter la façon dans laquelle l'équation (3-36) est pratiquement réalisée, puisque nous avons montré que $X_n(e^{j\omega_k})$ nécessite seulement d'être évaluée à une vitesse qui dépend de la longueur de la fenêtre.

Pour cela on suppose que le $k^{\text{ième}}$ canal est calculé une fois tous les D_k échantillons de l'entrée. Pour des canaux espacés uniformément $D_k = D$. En supposant que $X_n(e^{j\omega_k})$ est calculé à une vitesse d'échantillonnage de l'entrée (bien que cela ne peut pas être le cas dans la pratique). On peut modifier les figures (3-3a) et (3-3b) pour refléter le fait que $X_n(e^{j\omega_k})$ nécessite seulement d'être échantillonné à une vitesse F_s/D_k par inclusion d'un décimateur à la sortie de l'analyse et un interpolateur à l'entrée de la synthèse comme cela est montré sur la figure (3-9).



⊗ Réalisation complète d'un banc de filtres pour un seul canal pour l'analyse spectrale à court terme.

figure (3-9)

CHAPITRE: 4

CONCEPTION D'UN BANC DE FILTRES NUMÉRIQUES

4.1) Dans ce chapitre, on considère quelques méthodes pratiques pour la conception de bancs de filtres. Le but ici est la conception de bancs de filtres dont la réponse fréquentielle comporte approche l'idéal qui est une amplitude plate et une phase linéaire.

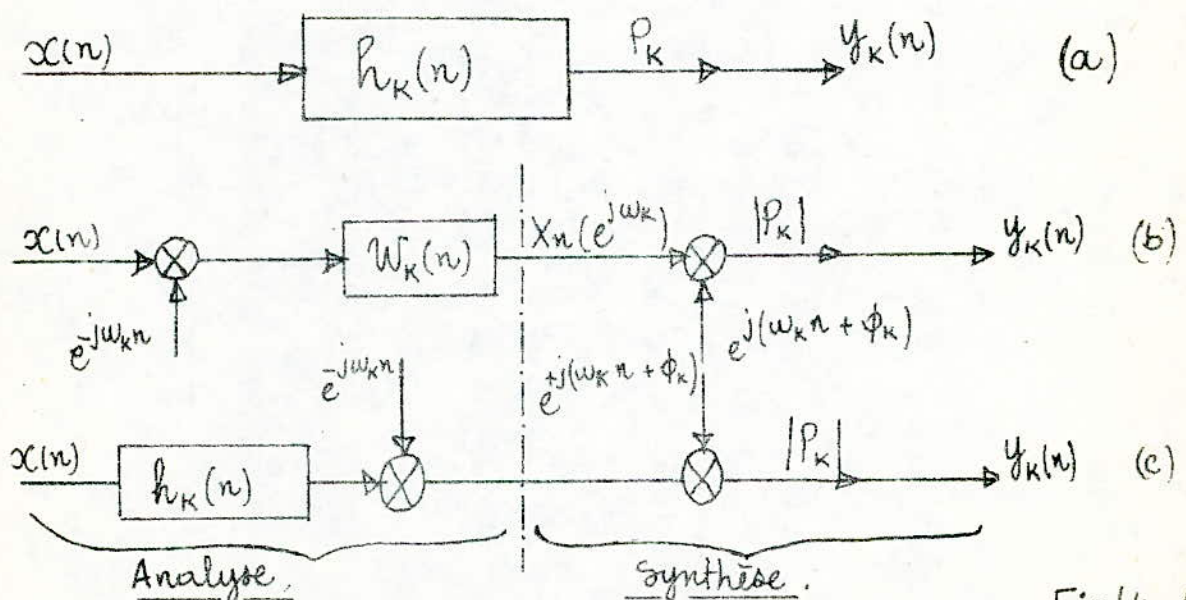
Nous commencerons avec certains détails communs à la conception de bancs de filtres sans tenir compte du type de filtres utilisés. Puis on montrera des exemples d'utilisation des filtres à réponse impulsionnelle finie et à réponse impulsionnelle infinie.

4.1.1) Considérations pratiques :

L'étude théorique a montré qu'il est possible d'avoir une reproduction exacte du signal d'entrée à la sortie d'un banc de filtres espacés uniformément, si le filtre passe-bas, $w(n)$, a des zéros espacés uniformément à N intervalles d'échantillons. Donc pour la conception d'un tel banc de filtres, il paraît nécessaire d'abord de choisir le nombre de filtres (et donc l'espace fréquentielle) et alors concevoir un filtre passe-bas avec une résolution en fréquence appropriée et des espaces appropriés des zéros dans le domaine temporel. Malheureusement, un nombre de considérations pratiques apparaît pour compliquer ce procédé simple. D'abord, il est souvent souhaitable d'utiliser un espace

non-uniforme de filtres. Ainsi une réponse composite parfaite obtenue ne fournit pas nécessairement une solution pratique. De plus, en pratique il est utile d'omettre certaines parties du spectre d'analyse. Il est donc nécessaire de considérer l'effet d'omission des filtres lors de la réponse composite.

Dans le but de représenter certaines de ces considérations, et avant de donner la solution aux problèmes précédents, il est utile de considérer une structure de banc de filtres légèrement modifiée dans laquelle chaque signal du canal complexe dans la figure (3-2) ou (3-3) est multipliée par une constante complexe notée $P_k = |P_k| e^{j\phi_k}$. Ceci est montré dans la figure (4-1) pour un seul canal.



Fig(4-1)

⊗ Structure d'un banc de filtres modifiée pour un seul canal.

a) Filtre passe-bande équivalent pour l'analyse et la synthèse.

b) Réalisation par utilisation des modulateurs et un filtre passe-bas.

c) Réalisation par utilisation des modulateurs et un filtre passe-bande.

Notons que puisque chaque canal est un système linéaire, le multiplicateur peut être appliqué à l'entrée comme à la sortie. Si on considère un système à N canaux complexes, on obtient :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k y_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k X_k(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n} \quad (4-1)$$

La réponse impulsionnelle composite de ce système est :

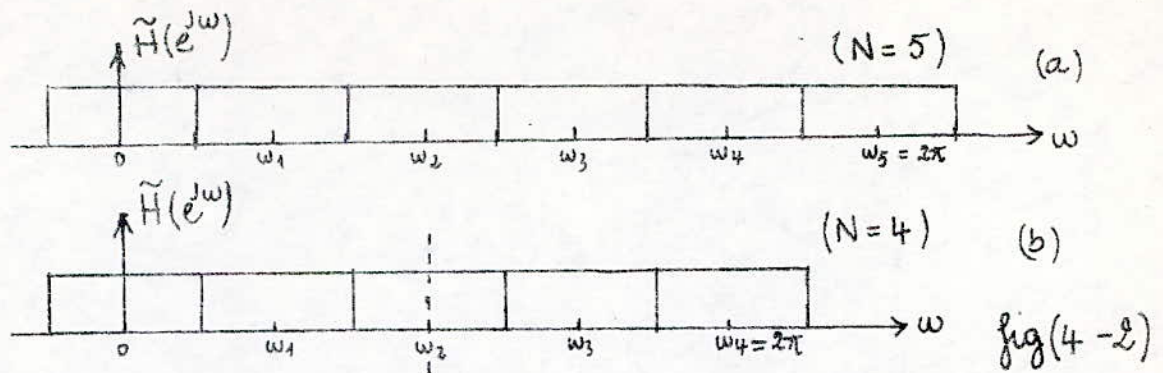
$$\tilde{h}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k h_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |P_k| W_k(n) e^{j(\omega_k n + \phi_k)} \quad (4-2)$$

En termes d'un banc de filtres, la constante complexe P_k prévoit l'ajustement du gain et de la phase des filtres individuels dans le banc.

Le premier pas dans la conception du système d'un banc de filtres est de choisir la position des fréquences d'analyse $\{\omega_k\}$ pour $0 \leq k \leq N-1$.

Dans plusieurs cas le choix des fréquences d'analyse espacées uniformément, serait désiré. Quelquefois, il serait souhaitable d'utiliser une distribution non-uniforme des fréquences d'analyse, c'est le cas par exemple d'un système de traitement de la parole qui essaye de profiter de la sensibilité décroissante de l'oreille pour les très hautes fréquences. En tout cas, il est pratique de choisir la position des fréquences symétriquement à travers la bande $0 \leq \omega \leq 2\pi$, c'est à dire, tel que $\boxed{\omega_{N-k} = 2\pi - \omega_k}$. Ceci est montré sur la figure (4-2) pour N pair et impair. On note pour N pair, un seul canal est centré sur $\omega = \pi$. Si en plus $\boxed{W_k(n) = W_{N-k}(n)}$, alors on aura :

$$X_n(e^{j\omega_k}) = X_n^*(e^{j(2\pi - \omega_k)}) = X_n^*(e^{-j\omega_k})$$



⊗ Distribution des fréquences d'analyse: (a) pour N pair, (b) pour N impair. Ceci conduit à une simplification du banc de filtres telle que seulement les filtres passe-bandes réels sont acceptés. En utilisant les suppositions $\omega_k = 2\pi - \omega_{N-k}$, $P_k = P_{N-k}^*$ et $W_k(n) = W_{N-k}(n)$

dans l'équation (4-2), on peut facilement montrer que pour N pair :

$$\tilde{h}(n) = P_0 W_0(n) + \sum_{k=1}^{N/2-1} 2 |P_k| W_k(n) \cos(\omega_k n + \phi_k) + P_{N/2} W_{N/2}(n) \cdot (-1)^n \quad (4-3)$$

et pour N impair on aura :

$$\tilde{h}(n) = P_0 W_0(n) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} 2 |P_k| W_k(n) \cos(\omega_k n + \phi_k) \quad (4-4)$$

Ainsi pour ce cas, on peut considérer le banc de filtres se compose d'un filtre passe-bas $P_0 W_0(n)$, et une série de filtres passe-bande avec des réponses impulsionnelles réelles :

$$h_k(n) = 2 |P_k| W_k(n) \cos(\omega_k n + \phi_k) \quad (4-5)$$

Quand N est pair, un canal passe-haut supplémentaire centré en $\omega = \pi$ est exigé pour couvrir complètement le range des fréquences $0 \leq \omega < 2\pi$. La réponse impulsionnelle de ce filtre est : $P_{N/2} W_{N/2}(n) \cdot (-1)^n$.

Sauf pour la contrainte que les fréquences d'analyse soient placées symétriquement dans l'intervalle $0 \leq \omega < 2\pi$, il n'existe aucune autre contrainte sur la position des fréquences $\{\omega_k\}$. Une fois ces fréquences sont choisies, on doit trouver une position correspondante des filtres passe-bas ou des fenêtres d'analyse, $\{W_k(n)\}$, qui ont les résolutions en fréquence désirées et aussi fournissent la réponse composite désirée.

Souvent ^{situées} il est seulement nécessaire de calculer $X_n(e^{j\omega_k})$ aux fréquences ^{situées} dans une sous-bande de la bande de fréquence essentielle $0 \leq \omega < 2\pi$.

Par exemple, l'analyse en $\omega_k = 0$ est souvent omise puisque cette partie du spectre de la parole n'est pas intéressante dans la majorité des sujets de traitement de la parole.

De même, l'analyse en hautes fréquences (ω_k proche de π) est souvent omise dans le procédé de limitation de la bande de l'entrée avant l'échantillonnage, cette partie du spectre est d'habitude très atténuée et donc porte peu d'information efficace.

Pour voir l'effet d'omission des canaux de la réponse composite, retournons au cas des fréquences d'analyse espacées uniformément, c'est à dire que:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} \cdot k$$

Si on suppose des fenêtres d'analyse identiques $W_k(n) = W(n)$

alors l'équation (4-2) devient:

$$\tilde{h}(n) = W(n) \sum_{k=0}^{N-1} P_k e^{j \frac{2\pi}{N} k n} \quad (4-7)$$

Ainsi, si on définit :
$$p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (4-8)$$

Alors :
$$\tilde{h}(n) = w(n) \cdot p(n) \quad (4-9)$$

Comme avant, $p(n)$ est périodique de période N . Notons que si $P_k = 1$, $0 \leq k \leq N-1$. Tous les canaux sont inclus et l'équation (4-7) devient identique à l'équation (3-39). L'effet d'omission de canaux est observé en mettant les P_k égaux à zéro.

Par exemple, pour exclure le canal de fréquence zéro, il suffit de mettre $P_0 = 0$. Aussi pour exclure tous les canaux au dessus de $\omega_M = \frac{2\pi}{N} M$, on met $P_k = 0$ pour $k > M$. Dans ce cas

$$p(n) = \sum_{k=1}^M e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{k=N-M}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^M \left[e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right] \quad (4-10)$$

Cette expression peut être mise sous une forme plus compacte :

$$p(n) = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{N} (2M+1)n \right]}{\sin \left(\frac{\pi}{N} n \right)} - 1 \quad (4-11)$$

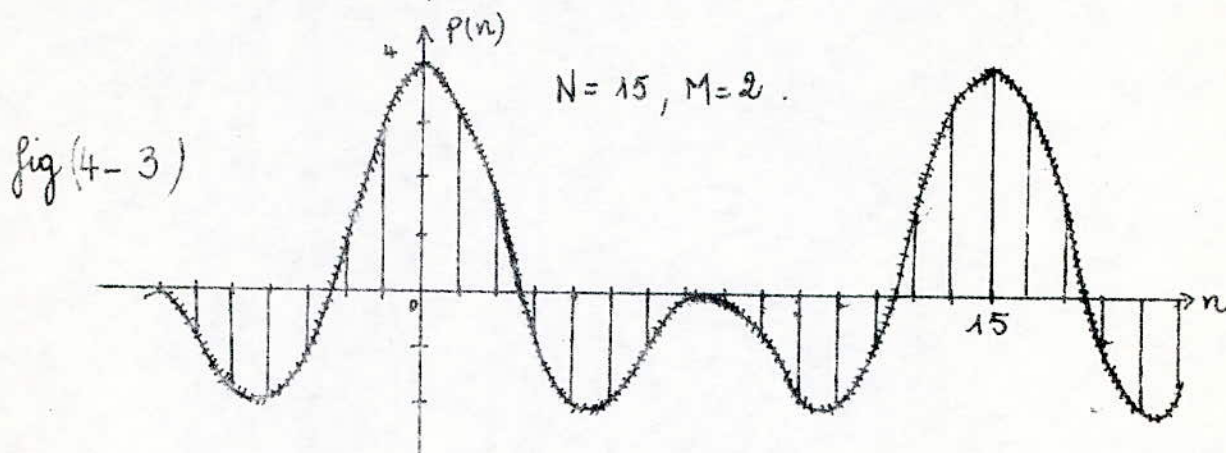
Comme exemple, l'équation (4-11) est tracée dans la figure (4-3) pour le cas $N = 15$ et $M = 2$.

Dans ce cas, $p(n)$ est périodique de période 15. On peut voir que si le canal à la fréquence zéro est inclus, le terme (-1) de l'équation (4-11) disparaît. Aussi, si N est impair tel que quand tous les canaux sont inclus, $M = \frac{N-1}{2}$, alors $p(n)$ peut

être exprimée comme :

$$p(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\sin(\frac{\pi}{N} n)} = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(n - rN) \quad (4-12)$$

Alors $\tilde{h}(n) = \delta(n - r_0 N)$.

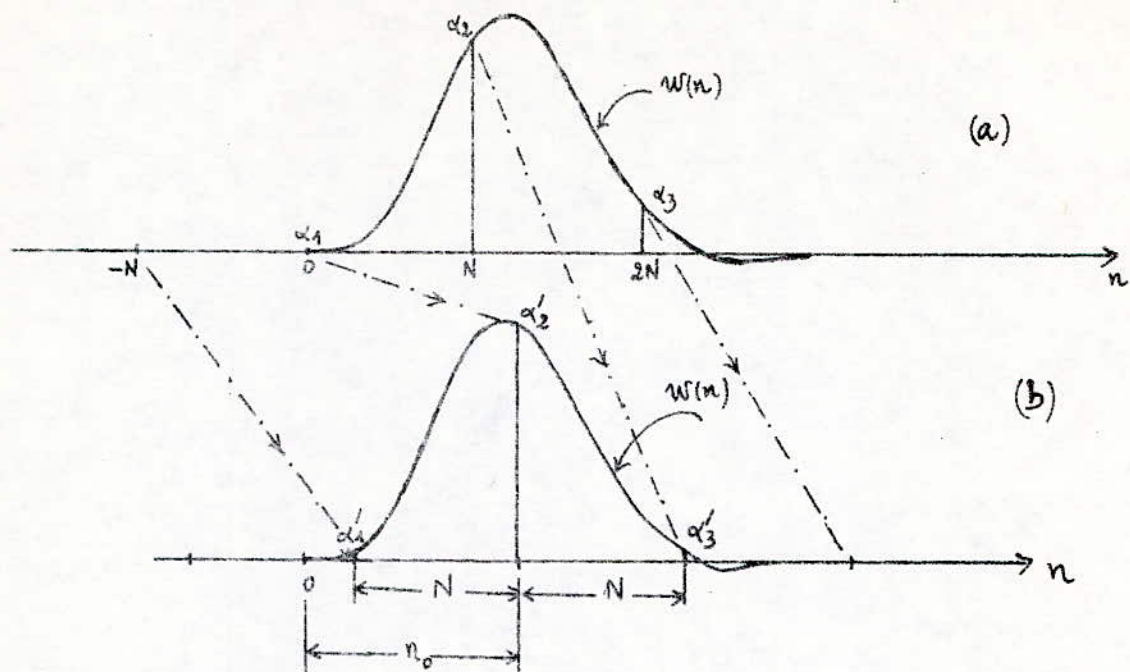


⊗ Tracé de $p(n)$ pour un banc de filtres avec $N=15$ et $M=2$

En effet, il devrait être clair qu'en omettant le canal de fréquence zéro, et la suite des canaux à hautes fréquences, est équivalent à un filtrage passe-bande.

Une considération générale provient du fait que la plupart des méthodes de conception des filtres standards ne permettent pas des contraintes simultanées sur la réponse fréquentielle et la réponse temporelle. Ainsi, il peut ne pas être possible d'obtenir un filtre passe-bas dont la réponse impulsionnelle a des zéros chaque N échantillons.

Pour voir l'effet de ceci, on considère la figure (4-4). On suppose que tous les canaux sont inclus de façon que $p(n)$ soit un train d'échantillons unités avec une période N .



⊗ Illustration de la façon d'ajuster le paramètre n_0 .

(a) réponse impulsionnelle composite pour $n_0 = 0$

(b) n_0 est choisie pour minimiser l'ondulation du module et de la phase . figure (4-4)

L'enveloppe de la séquence $w(n)$ est montré comme une courbe continue. Le produit de $p(n)$ et $w(n)$ est montré comme des échantillons de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Il est clair dans ce cas que la réponse impulsionnelle composite est approximativement:

$$\boxed{\tilde{h}(n) = \alpha_2 \delta(n-N) + \alpha_3 \delta(n-2N)} \quad (4-13)$$

si on néglige les impulsions en $3N, 4N, \dots$ etc. Dans ce cas la réponse fréquentielle composite est de la forme :

$$\boxed{\tilde{H}(e^{j\omega}) = \alpha_2 e^{-j\omega N} + \alpha_3 e^{-j2\omega N}} \\ \boxed{\tilde{H}(e^{j\omega}) = \alpha_2 e^{-j\omega N} \left(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} e^{-j\omega N} \right) = \alpha_2 e^{-j\omega N} \tilde{G}(e^{j\omega})} \quad (4-14)$$

avec : $\boxed{\tilde{G}(e^{j\omega}) = 1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} e^{-j\omega N}}$ (4-15)

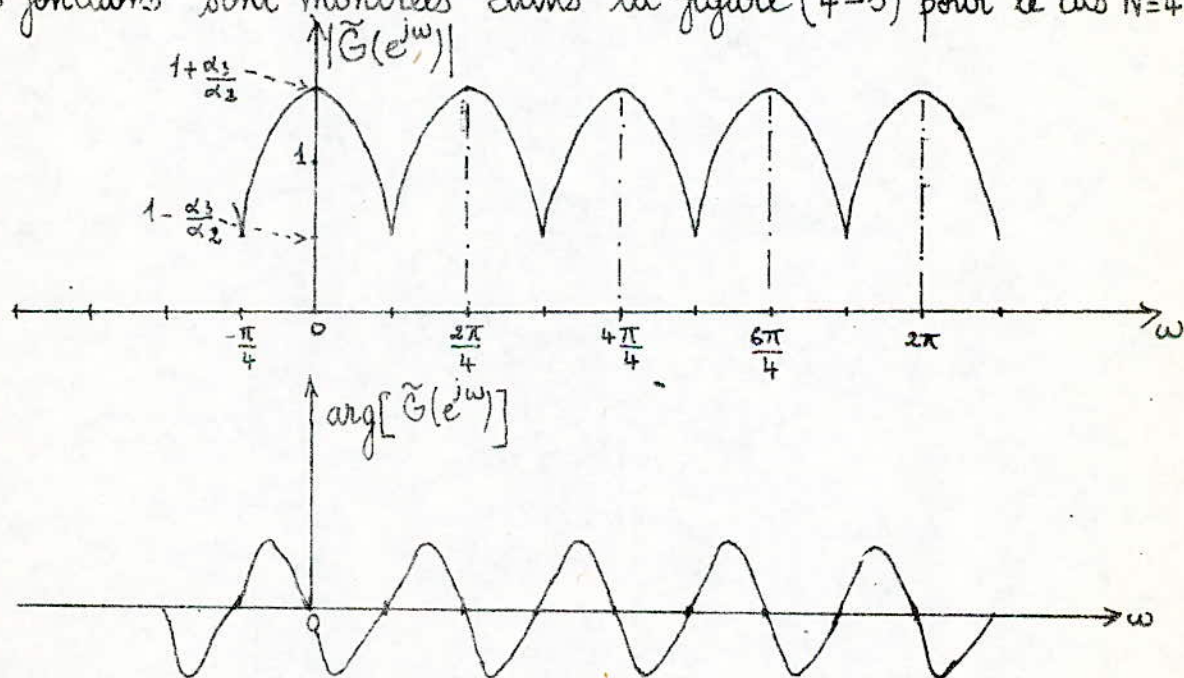
$\tilde{G}(e^{j\omega})$ représente la déviation de la réponse fréquentielle composite de $\alpha_2 e^{-j\omega N}$ qui correspondrait à une reproduction parfaite de l'entrée avec un retard de N échantillons et d'un facteur d'échelle α_2 .

Le module et la phase de $\tilde{G}(e^{j\omega})$ sont respectivement :

$$\boxed{|\tilde{G}(e^{j\omega})| = \left[1 + \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)^2 + 2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cos \omega N \right]^{1/2}} \quad (4-16)$$

$$\text{et } \boxed{\arg[\tilde{G}(e^{j\omega})] = \text{Arctg} \left[\frac{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \sin \omega N}{1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \cos \omega N} \right]} \quad (4-17)$$

Ces fonctions sont montrées dans la figure (4-5) pour le cas $N=4$.



⊗ Amplitude et phase d'un banc de filtres composite - fig (4-5)

On peut voir que le module de la réponse composite a une erreur multiplicative qui en général oscille avec une période $\frac{2\pi}{N}$. C'est bien sûr l'espace entre les filtres. En effet les maximums de $|\tilde{G}(e^{j\omega})|$

apparaissent pour les fréquences d'analyse $\omega_k = (\frac{2\pi}{N}) \cdot k$, et les minimums apparaissent au milieu de deux maximums. C'est à dire aux points de croisement des filtres passe-bande individuels. L'amplitude de l'ondulation dans la réponse composite, dépend des grandeurs α_2 et α_3 . Notons que l'erreur du module et de la phase disparaît quand $\alpha_3=0$, et les erreurs sont maximales quand $\alpha_3 = \alpha_2$.

Plusieurs approches de réduction de cette erreur dans la réponse composite sont suggérées par la figure (4-4). Une possibilité est d'utiliser une fenêtre un peu plus courte que $w(n)$, c'est à dire rendre α_3 plus petit en rendant $w(n)$ plus petite en $n = 2N$.

Ceci malheureusement aura un effet d'élargissement de la T.F de $w(n)$, et ainsi la résolution en fréquence des canaux individuels serait dégradée. Une seconde possibilité est de rendre N plus large en laissant $w(n)$ la même. Une troisième possibilité est suggérée par la figure (4-4b).

Si on décale simplement la séquence infinie des impulsions relatives à $w(n)$, on obtient une séquence de trois impulsions au lieu de deux, c'est à dire :

$$\tilde{h}(n) = \alpha'_1 \delta(n-n_0) + \alpha'_2 \delta(n-N-n_0) + \alpha'_3 \delta(n-2N-n_0) \quad (4-18)$$

La réponse fréquentielle composite est alors :

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N+n_0)} [\alpha'_1 e^{j\omega N} + \alpha'_2 + \alpha'_3 e^{-j\omega N}] \quad (4-19)$$

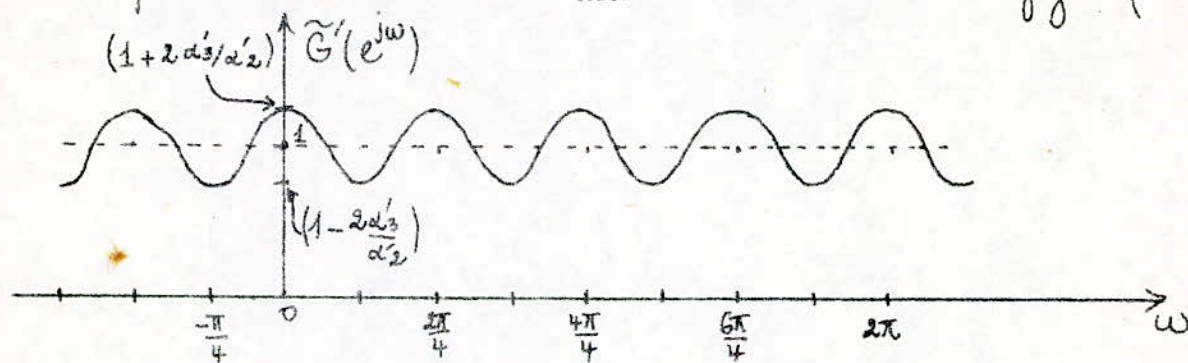
Si on définit comme avant :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(e^{j\omega}) &= \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} e^{j\omega N} + 1 + \frac{\alpha'_3}{\alpha'_2} e^{-j\omega N} \quad \rightarrow (4-20) \\ \tilde{H}(e^{j\omega}) &= \alpha'_2 e^{-j\omega(N+n_0)} \cdot \tilde{G}(e^{j\omega}) \quad \rightarrow (4-21) \end{aligned}$$

On peut voir si $\alpha'_1 = \alpha'_3$, alors on aura ;

$$\tilde{G}(e^{j\omega}) = 1 + 2(\alpha'_3/\alpha'_2) \cos \omega N$$

En tenant compte de ce résultat, on peut dire qu'il n'y a pas d'erreur de phase. L'erreur du module est tracée dans la figure (4-6)



⊗ Amplitude pour un banc de filtres composite ($N=4$)

quand $p(n)$ est décalé par rapport à $w(n)$. fig (4-6)

Dans le premier cas, l'erreur crête à crête est $2\alpha'_3/\alpha'_2$. Dans le second cas, l'erreur crête à crête est $4\alpha'_3/\alpha'_2$. Ainsi, en tenant compte du fait que l'erreur de phase est nulle si $\alpha'_1 = \alpha'_3$, si $\frac{2\alpha'_3}{\alpha'_2} < \frac{\alpha'_2}{\alpha'_3}$, alors l'erreur du module serait aussi petite que la première.

Le mécanisme de décalage de $p(n)$ par rapport à $w(n)$ est valable dans l'équation (4-9). Pour obtenir une séquence d'impulsions infinie, décalées de n_0 , on laisse simplement :

$$p_k = e^{-j\frac{2\pi}{N} k n_0} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4-22)$$

d'où :

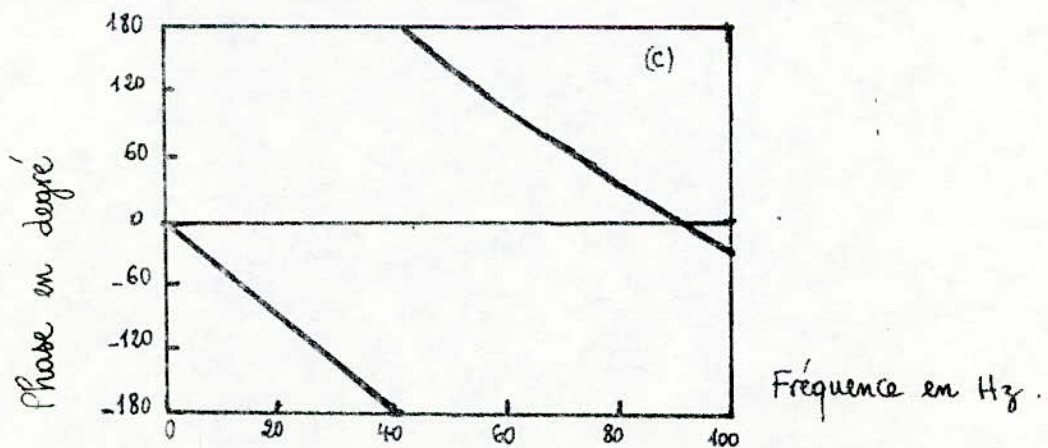
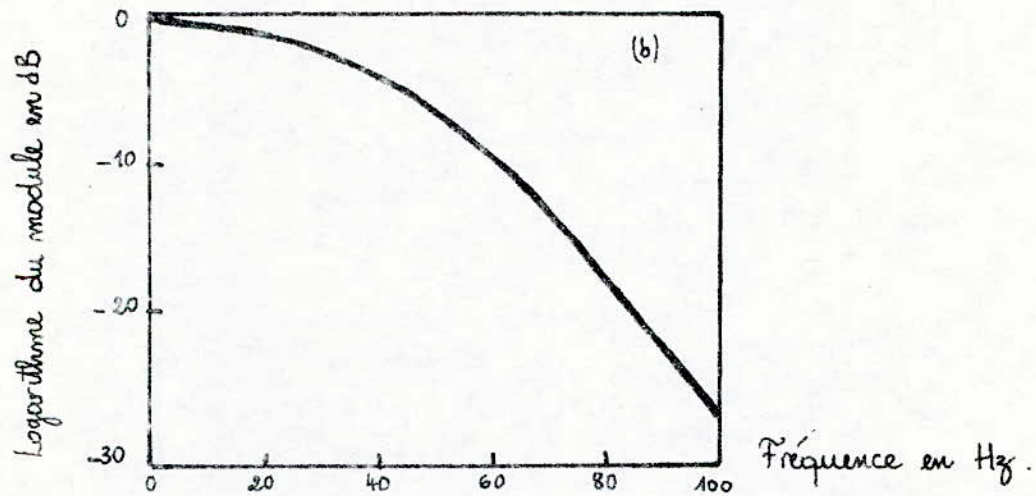
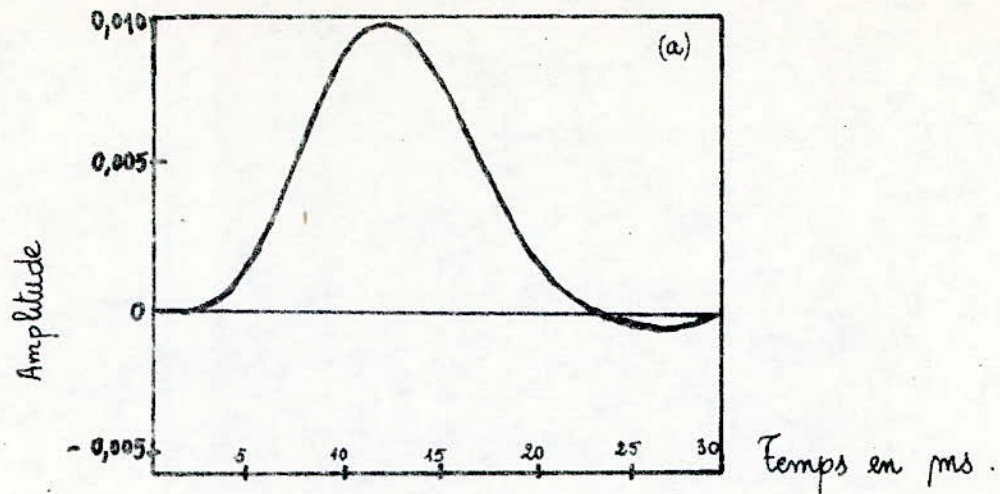
$$p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N} (n-n_0)k} = N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0-nN) \quad (4-23)$$

4-2) Conception d'un banc de filtre en utilisant les R.I.I.

On suppose que la séquence d'entrée est obtenue par échantillonnage du signal de la parole à une vitesse de 10000 échantillons/s, un banc de filtres est désigné avec un espace uniforme de 100 Hz entre deux filtres. Ceci implique que N est égale à $N = \frac{10\,000}{100} = 100$, et les fréquences d'analyse sont $\omega_K = \frac{2\pi \cdot K}{100}$, $K = 0, 1, \dots, M$. Le rang d'analyse est entre 100 Hz et 3000 Hz, ceci veut dire que 30 canaux serait exigés, c'est à dire que $M = 30$. L'objectif de la réponse composite qui est une amplitude plate et une phase linéaire, est facilement atteint si les filtres individuels ont ces mêmes propriétés. Pour cette raison les filtres de Bessel sont utilisés pour les filtres individuels.

Pour cet exemple, un filtre passe-bas numérique est dérivé d'un filtre analogique de Bessel d'ordre six, par la méthode d'invariance impulsionnelle. La figure (4-7) montre les propriétés de la réponse du filtre d'analyse. L'enveloppe de la réponse impulsionnelle du passe-bas est montrée sur la figure (4-7a). Notons que 30 ms correspond à 300 échantillons à la vitesse d'échantillonnage 10 000 Hz.

Aussi notons que la phase dans la figure (4-7c) est presque linéaire. La fréquence de coupure du filtre est de 60 Hz. Ce filtre est utilisé pour concevoir un banc de filtres de 30 canaux avec un espace de 100 Hz entre les canaux. Le canal de fréquence zéro est omis. En utilisant l'équation (4-11) avec $M = 30$ et $N = 100$, on trouve:



* Caractéristiques d'un filtre de Bessel d'ordre 6

a) Réponse impulsionnelle . b) Réponse du module

c) Réponse de la phase.

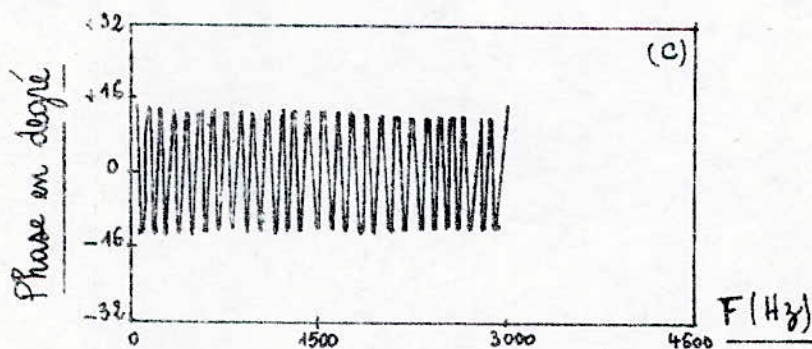
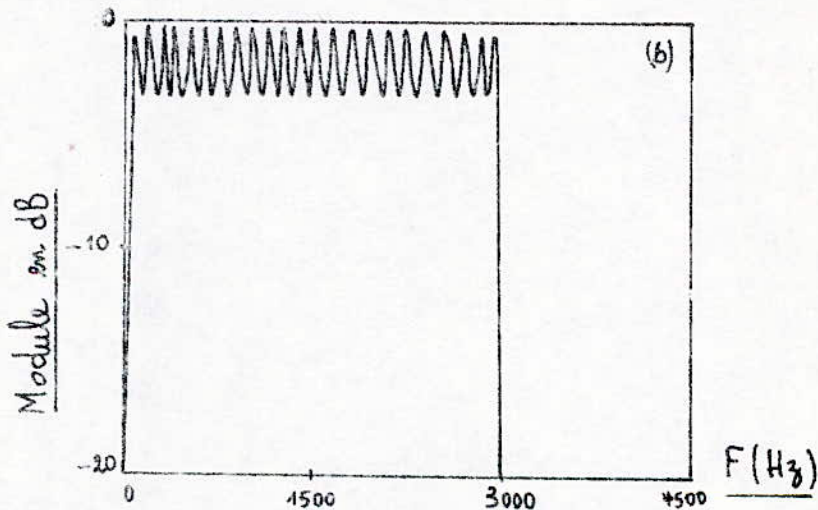
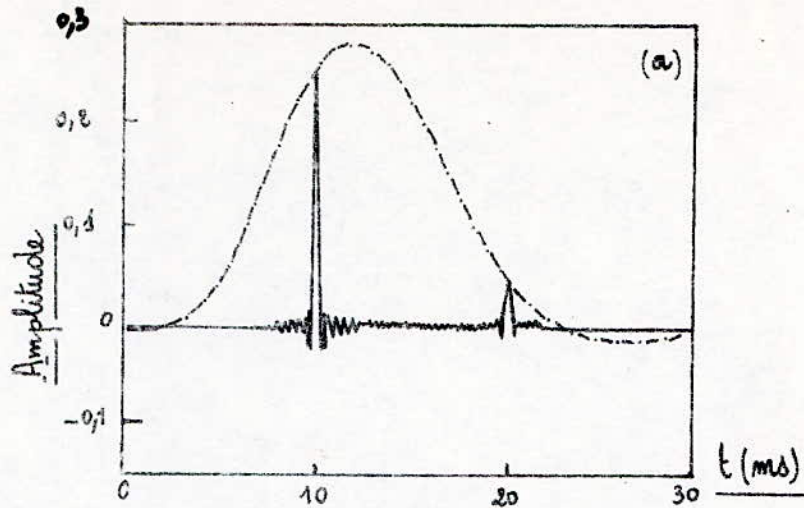
fig(4-7)

$$p(n) = \frac{\sin[0,61\pi n]}{\sin[0,01\pi n]} - 1 \quad (4-24)$$

Notons que $p(n)$ est périodique avec une période $N = 100$. Les caractéristiques de la réponse composite résultante sont montrées sur la figure (4-8). Aussi, on voit que, puisque la durée de $w(n)$ est supérieure à $2N = 200$ échantillons, $\tilde{h}(n)$ montre deux grands maximums. Ceci mène à une ondulation significative dans la réponse du module et de la phase. De façon précise, environ une ondulation de 4 dB dans l'erreur du module, et 25° crête à crête pour l'erreur de la phase. Pour améliorer la performance du filtre sans changer $w(n)$, un retard suffisant est inclus pour égaliser les amplitudes du premier et troisième maximum, ceci est montré dans la figure (4-9). On voit dans la figure (4-9a) que le maximum dans $p(n)$ pour $n=0$ a été décalé de 129 échantillons à la droite. Le module et la phase composite sont beaucoup améliorés comme le montrent les figures (4-9b) et (4-9c). Dans ce cas l'ondulation du module est d'environ 0,8 dB et l'erreur de phase est seulement de 0,6 degrés.

L'exemple précédent suggère un essai et un procédé d'erreur que produira généralement un banc de filtres avec une bonne réponse composite.

- 1- On détermine l'espace et le nombre exigé de filtres pour couvrir la bande d'analyse désirée.
- 2- Concevoir un filtre qui donne une sélectivité en fréquence



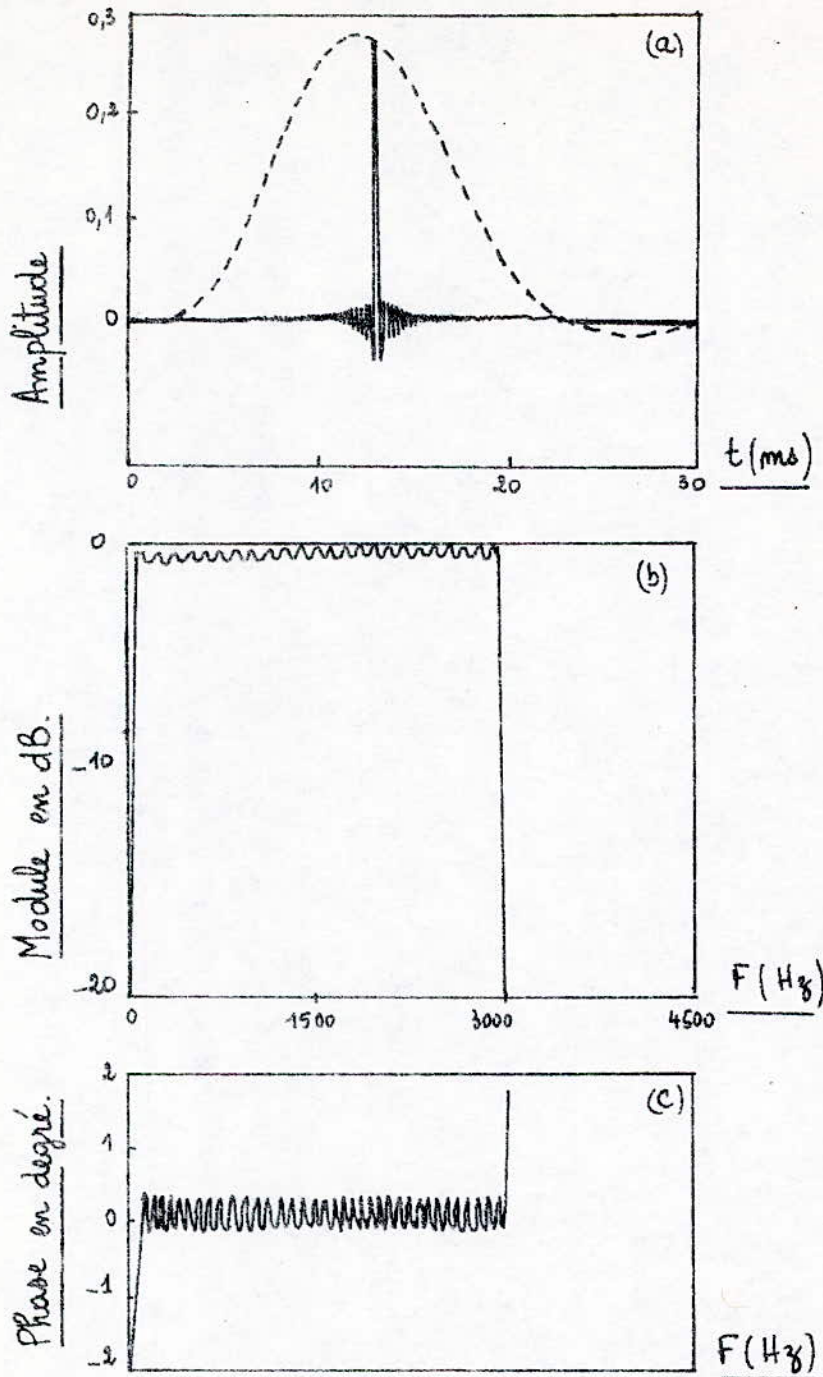
⊗ Caractéristiques d'un banc de filtres de 30 canaux (après un retard de 10 ms.)

a) Réponse impulsionnelle

b) Réponse du module composite

c) Réponse de phase composite

- figure (4-8)



⊗ Caractéristiques d'un banc de filtres à 30 canaux.

a) Réponse impulsionnelle pour $n_0 = 12,9$

b) Réponse composite du module

c) Réponse composite de phase (après un retard de 12,9 ms).

figure (4-9)

désirée pour chaque canal. Ceci donne $w(n)$.

3- Evaluer $w(n)$ et déterminer n_0 tel que $\alpha'_1 = \alpha'_3$ (fig(4-4))

4- Evaluer la réponse. Si la réponse n'est pas satisfaisante, l'espace entre filtres ou la largeur de la bande doivent être changés et le processus recommence.

Ce procédé est appliqué pour les fréquences d'analyse espacées uniformément.

Cette approche est raisonnablement réussie, cependant des résultats extrêmement meilleurs peuvent être obtenus en utilisant des filtres à réponse impulsionnelle finie (R.I.F)

4-3) Conception d'un banc de filtre utilisant les filtres R.I.F :

Les filtres R.I.F numériques sont intéressants pour la conception des bancs de filtres de la parole pour plusieurs raisons. D'abord ce genre de filtres peut être conçu simplement pour avoir une phase linéaire précise et cela en imposant la contrainte suivante :

$$\boxed{w(n) = w(L-1-n)} \quad 0 \leq n \leq L-1 \quad (4-25)$$

où $w(n)$ est la réponse impulsionnelle du filtre et L sa longueur en échantillons. Ceci veut dire que le critère de la phase linéaire pour la réponse composite du banc de filtres est directement obtenu si les filtres individuels ont une caractéristique de phase linéaire identique. Le deuxième avantage des filtres R.I.F est qu'il existe une variété de méthodes de conception.

La méthode de fenêtre de conception paraît avoir plusieurs avantages pour la conception des filtres RIF passe-bas et passe-bande, pour leur utilisation dans le banc de filtres.

Cette méthode est montrée dans la figure (4-10).

Avant de considérer les détails de la conception du banc de filtres, essayant de voir la méthode de fenêtre de conception.

D'abord, un filtre passe-bas idéal désiré est de la forme :

$$W_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j\omega n_d} & \omega \leq \omega_p \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4-26)$$

est défini par le choix de la fréquence de coupure ω_p .

Notons que pour la simplicité on a omis de mettre dans la figure (4-10) le terme de phase linéaire $e^{-j\omega n_d}$ correspondant à un retard de n_d échantillons. La valeur de n_d exigée est $n_d = (L-1)/2$.

La réponse impulsionnelle est donc :

$$W_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_p}^{\omega_p} e^{-j\omega n_d} \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_p(n-n_d)]}{\pi(n-n_d)}, \quad \forall n.$$

Cette réponse impulsionnelle est de durée infinie et doit être tronquée pour obtenir un filtre RIF. Ceci est fait, en définissant :

$$W(n) = d(n-n_d) \cdot W_d(n) \quad (4-27)$$

où $d(n)$ est la fenêtre de conception du filtre, $W(n)$ est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas résultant. La longueur de la fenêtre notée L peut être un nombre entier pair ou impair. La figure (4-10) montre le cas où L est impair.

La méthode de fenêtre de conception paraît avoir plusieurs avantages pour la conception des filtres R.I.F. passe-bas et passe-bande, pour leur utilisation dans le banc de filtres.

Cette méthode est montrée dans la figure (4-10).

Avant de considérer les détails de la conception du banc de filtres, essayant de voir la méthode de fenêtre de conception.

D'abord, un filtre passe-bas idéal désiré est de la forme :

$$W_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d} & \omega \leq \omega_p \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4-26)$$

est défini par le choix de la fréquence de coupure ω_p .

Notons que pour la simplicité on a omis de mettre dans la figure (4-10) le terme de phase linéaire $e^{-j\omega n_d}$ correspondant à un retard de n_d échantillons. La valeur de n_d exigée est $n_d = (L-1)/2$.

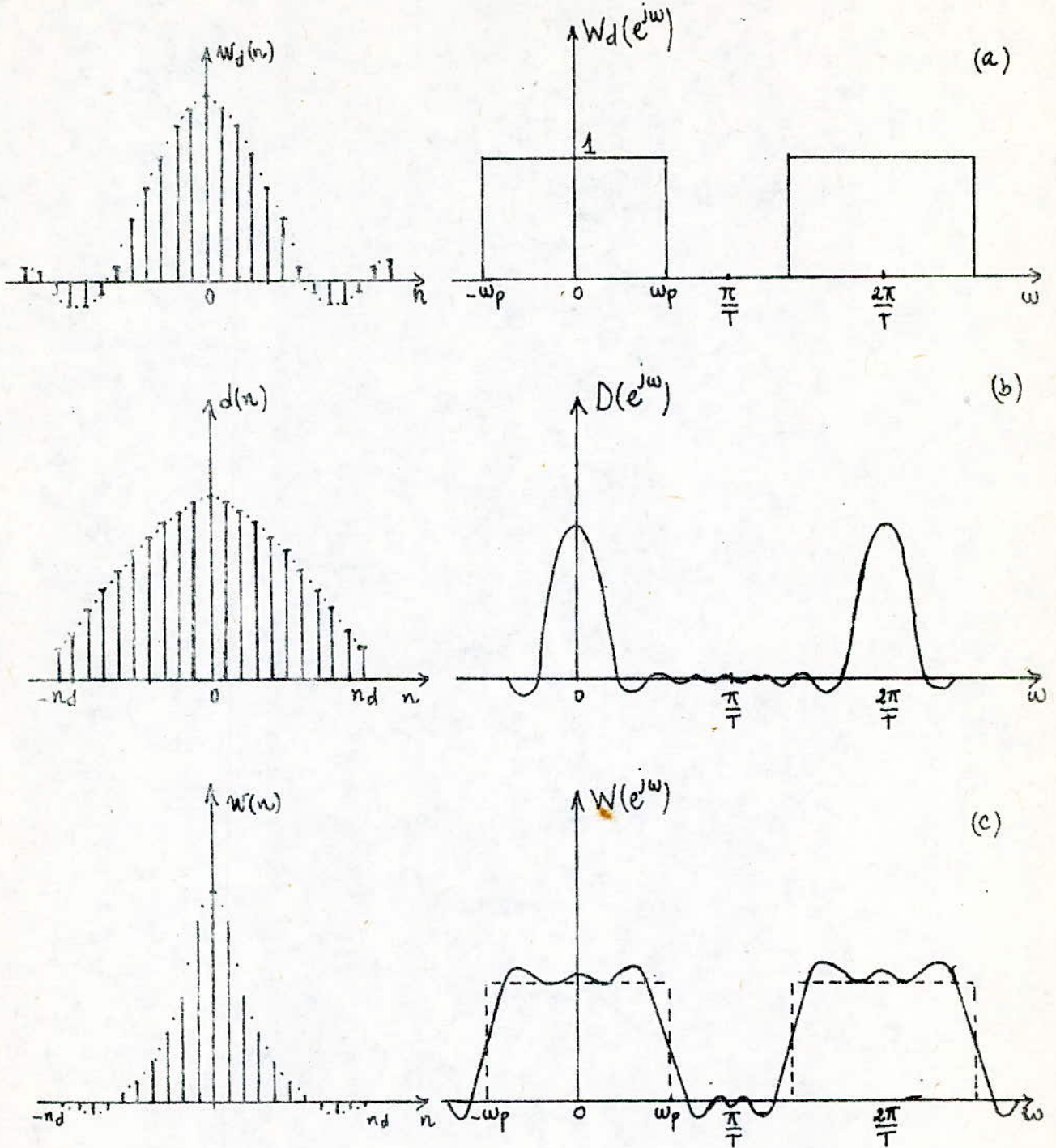
La réponse impulsionnelle est donc :

$$W_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_p}^{\omega_p} e^{-j\omega n_d} \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_p(n-n_d)]}{\pi(n-n_d)}, \quad \forall n.$$

Cette réponse impulsionnelle est de durée infinie et doit être tronquée pour obtenir un filtre R.I.F. Ceci est fait, en définissant :

$$W(n) = d(n-n_d) \cdot W_d(n) \quad (4-27)$$

Où $d(n)$ est la fenêtre de conception du filtre, $W(n)$ est la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas résultant. La longueur de la fenêtre notée L peut être un nombre entier pair ou impair. La figure (4-10) montre le cas où L est impair.



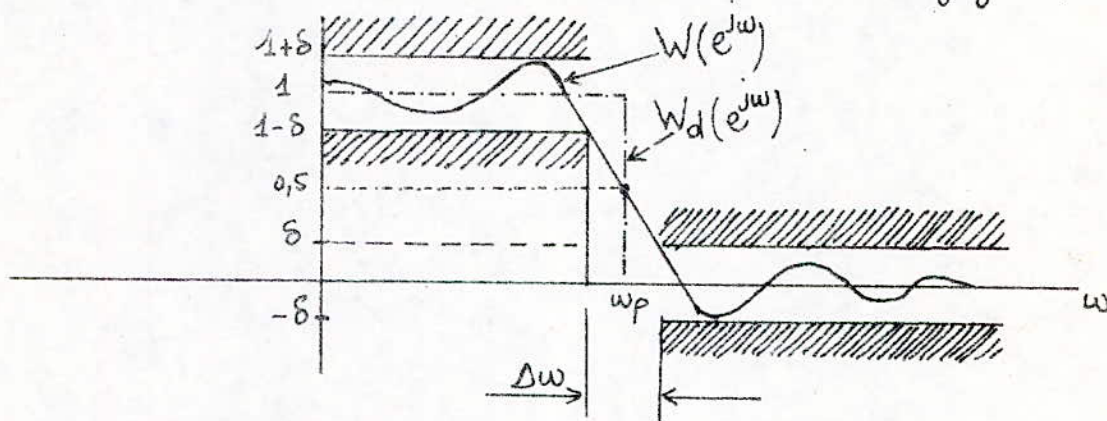
⊗ Fenêtre de conception d'un filtre passe-bas idéal.

figure (4-10)

Le résultat de la multiplication de la réponse impulsionnelle du passe-bas idéal par la fenêtre de conception correspond à une convolution dans le domaine fréquentiel de la réponse fréquentielle idéale et la TF, $D(e^{j\omega})$, de la fenêtre de conception, c'est à dire :

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_d(e^{j\theta}) \cdot D(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (4-28)$$

Le résultat de cette convolution est montré dans la figure (4-10c).



⊙ La conception d'un filtre passe-bas résultant de la méthode de fenêtrage. figure (4-11)

On peut voir que les effets principaux sont l'introduction d'une transition lisse entre la bande passante et la bande ~~stoppante~~^{rejetée} et l'introduction des ondulations dans ces régions. Les propriétés de cette approximation sont montrées sur la figure (4-11). Si ω_p est plus grande que la largeur du "lobe principal" de $D(e^{j\omega})$, alors la suite suivante des propriétés est généralement vraie :

- 1- La région de transition $\Delta\omega$ est inversement proportionnelle à L .
- 2 La fonction $W(e^{j\omega})$ est très proche de l'antisymétrie par rapport au point $(\omega_p, 0,5)$.

3. Les erreurs d'approximation du maximum dans la bande passante et la bande ~~stoppante~~ ^{rejetée} sont presque égales.

4. L'erreur d'approximation est très grande dans le voisinage de ω_p et elle décroît pour les valeurs de ω qui sont loin de ω_p .

Ces propriétés de la fenêtre de conception sont vraies pour toutes les fenêtres les plus fréquemment utilisées.

Cependant, Kaiser a proposé une famille de fonctions fenêtres qui sont très flexibles et presque optimales pour les buts de conception des filtres. Spécialement, la fenêtre de Kaiser est :

$$d(n) = \frac{I_0(\alpha \sqrt{1 - (n/n_d)^2})}{I_0(\alpha)} \quad |n| \leq n_d \quad (4-29)$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs}$$

où $n_d = (L-1)/2$ et $I_0(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro modifiée du 1^{er} genre.

$$L = \frac{-20 \log_{10} \delta - 7,95}{14,36 \cdot \Delta f} + 1 \quad (4-30a) \quad (L: \text{ordre du filtre})$$

δ l'erreur d'approximation du maximum, Δf est la largeur de la bande de transition normalisée. $\left(\Delta f = \frac{\Delta \omega}{2\pi} \right)$ (4-30b).

Pour utiliser cette formule, δ et Δf sont fixés à des valeurs qui fournissent la selectivité en fréquence désirée.

Le paramètre α peut être calculé à partir de l'équation :

$$\alpha = 0,1102 (-20 \log_{10} \delta - 8,7) \quad \text{pour } -20 \log_{10} \delta > 50$$

$$\alpha = 0,5842 (-20 \log_{10} \delta - 21)^{0,4} + 0,07886 (-20 \log_{10} \delta - 21) \quad (4-30c)$$

pour $21 < -20 \log_{10} \delta < 50$

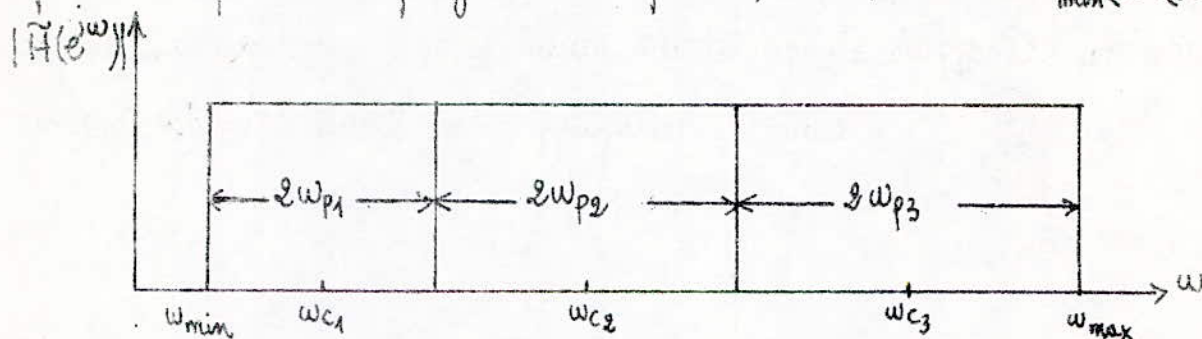
Dans l'application présente de la méthode de conception, le choix de S et Δf dépendent des spécifications des filtres passe-bande qui constituent le banc de filtres.

Rappelons que le banc de filtres est constitué d'une suite de filtres passe-bande avec des réponses impulsionnelles de la forme :

$$h_k(n) = p_k w_k(n) e^{j\omega_k n} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4-31)$$

où $w_k(n)$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas.

La figure (4-12) montre trois filtres passe-bande idéaux dont la réponse composite est parfaitement plate sur l'intervalle $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$.



⊙ Réponse fréquentielle composite de trois filtres passe-bande idéaux non-uniforme. - Figure (4-12).

Dans la conception des filtres passe-bas, on choisit l'emplacement des fréquences d'analyse $\{\omega_k\}$ et l'emplacement des fréquences de coupures $\{\omega_{pk}\}$ de façon à couvrir exactement la bande désirée comme indiqué sur la figure (4-12). Les filtres passe-bande idéaux sont alors approchés par la méthode de conception de fenêtre.

Le choix de l'erreur d'approximation du maximum pour le filtre dépend de combien l'atténuation de la bande stoppante est nécessairement estimée, dans une application donnée.

Les valeurs typiques du terme $(-20 \log_{10} \delta)$ seront en général entre 40 et 60 dB. Le choix de Δf est réglé compte tenu de la sélectivité en fréquence désirée, pour les filtres individuels. Clairement, la largeur de transition $\Delta \omega_k$ ne devrait pas dépasser $2\omega_{pk}$.

Si tous les filtres ont des régions de transition identiques et en plus si ces transitions sont antisymétriques par rapport au point de croisement, alors on peut s'attendre que la somme des réponses fréquentielles serait très proche de l'unité. Ceci implique que $d(n)$ serait le même pour chaque filtre dans le banc de filtres.

Pour voir toutes les implications du choix de $d(n)$ à être le même pour chaque canal de fréquence, considérons la réponse fréquentielle ~~de~~ comporte qui comme on a vu à partir de l'équation (4-31) est:

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k W_k(e^{j(\omega-\omega_k)}) \quad (4-32)$$

Maintenant si la même fenêtre de conception est utilisée pour chaque fréquence d'analyse, on peut écrire :

$$W_k(e^{j(\omega-\omega_k)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} W_{dk}(e^{j(\theta-\omega_k)}) \cdot D(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (4-33)$$

Si on substitue l'équation (4-33) dans l'équation (4-32) et on change l'ordre de sommation et d'intégration, on obtient :

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\sum_{k=0}^{N-1} P_k W_{dk}(e^{j(\theta-\omega_k)}) \right] D(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (4-34)$$

Si on définit :

$$\tilde{H}_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k W_{dk}(e^{j(\theta-\omega_k)}) \quad (4-35)$$

Alors l'équation (4-34) peut être écrite comme suit :

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{H}_d(e^{j\theta}) \cdot D(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (4-36)$$

La fonction $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$ est simplement la réponse fréquentielle composite désirée. Si on suppose que $P_k = 1$ pour $0 \leq k \leq N-1$ et que les largeurs de bandes et les fréquences centrées de $W_{dk}(e^{j(\omega-\omega_k)})$ sont telles que le rang de fréquence entier $-\pi \leq \omega \leq \pi$ soit couvert,

alors :

$$\tilde{H}_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (4-37)$$

En substituant cette dernière dans l'équation (4-36) on obtient :

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\theta n_d} \cdot D(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = d(n_d) \cdot e^{-j\omega n_d} \quad (4-38)$$

Ceci implique que la réponse impulsionnelle composite est de la

forme :

$$\tilde{h}(n) = d(n_d) \cdot \delta(n - n_d) \quad (4-39)$$

Ainsi, si des canaux suffisants sont inclus, alors la réponse fréquentielle composite désirée est plate avec une phase linéaire.

Cela étant, indépendamment du choix de la distribution des fréquences centrées et les largeurs de bandes, la réponse composite est idéale qu'importe la fenêtre de conception utilisée. Tant que la même fenêtre est utilisée pour tous les canaux, ainsi la reproduction parfaite de l'entrée est théoriquement possible en utilisant des filtres R.I.F avec une distribution arbitraire des fréquences centrées et des largeurs de bandes. L'effet de ne pas inclure des portions des rangs de fréquences $-\pi \leq \omega \leq \pi$ peut facilement être vu, en notant que l'équa-

tion (4-38) tient sans tenir compte de la façon de choisir P_k dans l'équation (4-37). Ainsi, si des régions de fréquences basses et hautes sont omises de l'analyse comme dans la figure (4-12), alors $P_0 = 0$ et $P_K = 0$ pour $K > M$ où M est le nombre de canaux inclus. En général la réponse composite désirée serait de la forme :

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}, \quad \omega_{\min} \leq |\omega| \leq \omega_{\max} \quad (4-40)$$

Ainsi, pour une fenêtre de conception donnée, $d(n)$, et $\omega_{\min}$ et $\omega_{\max}$ données, la réponse composite serait un filtre passe-bande avec des régions de transitions et d'ondulations de la bande passante et de la bande ~~stoppante~~ ^{rejetée} identiques à ceux des filtres individuels. Ainsi la réponse composite est encore indépendante du nombre et de la distribution des filtres passe-bande individuels choisis.

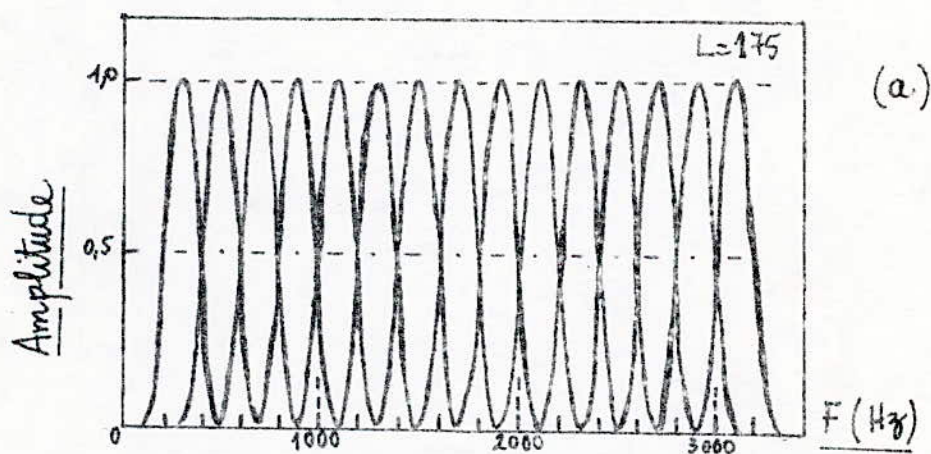
4.4) Exemples :

1. Supposons que la vitesse d'échantillonnage est 9,6 KHz et qu'on désire concevoir un banc de filtres de 15 filtres espacés uniformément qui couvrent le rang (200 à 3200) Hz. La fréquence de coupure pour tous les filtres passe-bas est $F_p = \frac{\omega}{2\pi N} = \frac{3200 - 200}{2(15)} = 100$ Hz. Les fréquences centrées sont $F_k = \frac{\omega_k}{2\pi N} = 200K + 100$, $K = 1, 2, \dots, 15$. Avec ce choix, les 15 filtres idéaux couvrent exactement l'intervalle de 200 à 3200 Hz. Si on suppose une atténuation de 60 dB soit exigée, à travers les régions de transition de chaque canal, alors on trouve à partir de l'équation (4-30c) que $\alpha = 5,65326$. Puisque la fréquence

de coupure est de 100 Hz pour tous les filtres passe-bas prototypes, la bande de transition la plus large, qui est raisonnable, est de 200 Hz. En utilisant cette valeur et $-20 \log_{10} \delta = 60$ dans l'équation (4-30a) on obtient $L = 175$ comme la plus petite valeur raisonnable de L .

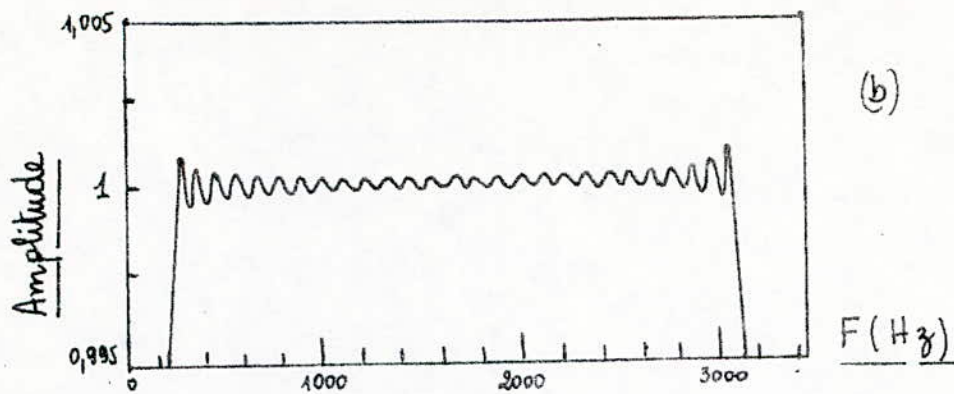
Notons que si une atténuation faible est acceptable alors L peut être plus petit pour le même Δf . Les caractéristiques du banc de filtres conçu avec les paramètres précédents sont données dans la figure (4-13).

Notons que les canaux adjacents se croisent à la valeur 0,5 de l'amplitude.



⊗ Réponse des filtres individuels d'un banc de 15 filtres
— passe-bande pour $L = 175$. figure (4-13a)

La figure (4-13b) montre la réponse de l'amplitude composite du banc de filtres. La phase est bien sûr linéaire avec $n_d = (175-1)/2 = 87$ échantillons de retard. En effet la déviation de l'unité est inférieure ou égale à l'erreur d'approximation du maximum $\delta = 0,001$ qui a été



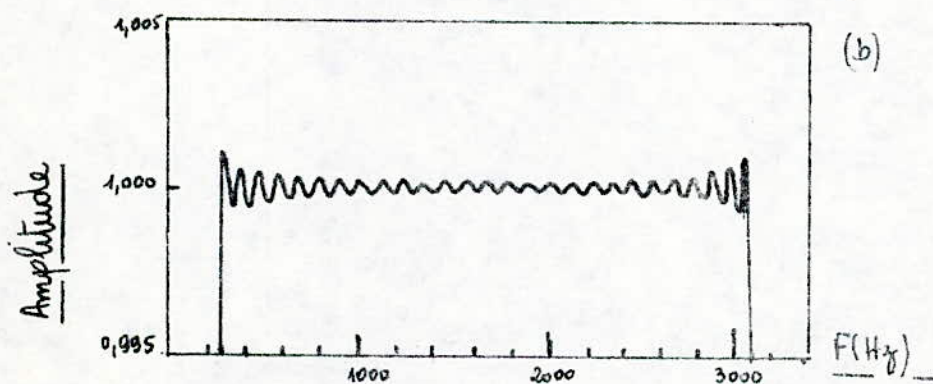
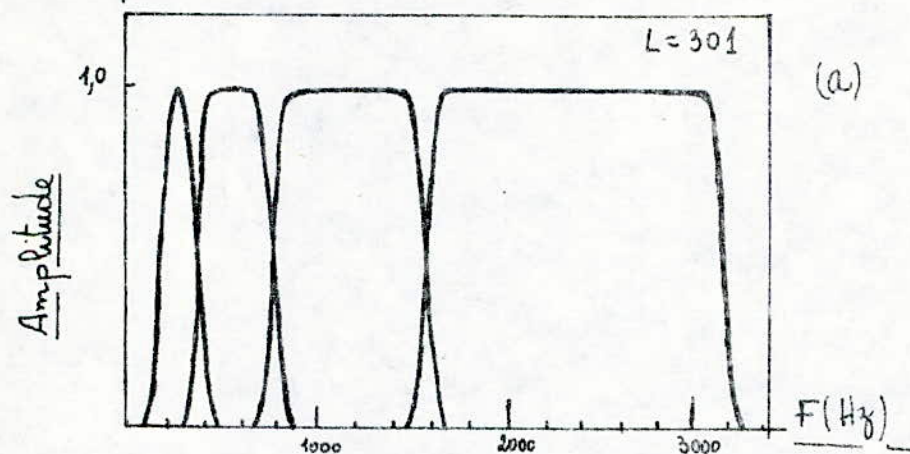
⊗ Réponse fréquentielle composite d'un banc de 15 filtres passe-bande uniformes pour $L = 175$. fig (4.13b)

utilisée dans la conception des filtres passe-bas prototypes .

2. Un espace non-uniforme des filtres est souvent utilisé pour exploiter la résolution en fréquence décroissante de l'oreille avec l'augmentation de la fréquence . Supposons qu'on désire couvrir le même rang (200 à 3200) Hz comme dans l'exemple (1), cependant on désire utiliser seulement quatre filtres . Cela étant, chaque filtre aura une largeur de bandes deux fois la largeur du filtre précédent . Ceci implique que le rang de fréquences de (200 à 3200 Hz) doit être divisé en quatre bandes de largeurs : (200, 400, 800, 1600) Hz avec des fréquences centrées en (300, 600, 1200, 2400) Hz respectivement . On suppose qu'une atténuation de 60 dB soit désirée .

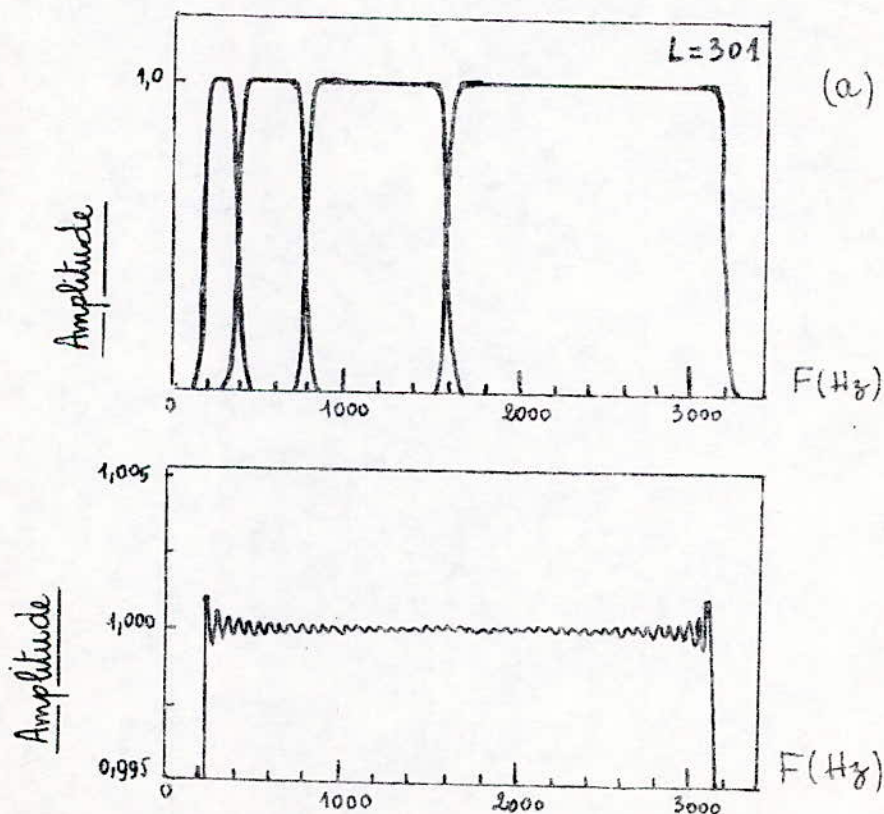
On note que la fréquence de coupure la plus petite du filtre passe-bas est 100 Hz de façon à ce que la plus petite largeur de transition raisonnable soit de 200 Hz . Ceci conduit à la valeur minimale de $L = 175$. Le banc de filtres correspondant à ces paramètres de conception est donné par la figure (4-14) . La relation complémentaire entre les transitions ascendantes et descendantes entre les filtres adjacents est notée

dans la figure (4-14a). On voit que, puisque L et d sont les mêmes pour la conception des passe-bas prototypes, la forme des courbes la région de transition est indépendante de la largeur de la bande. La figure (4-14b) montre la réponse composite où la déviation de l'unité est encore plus petite que 0,001. Comme dans l'exemple (1), la phase linéaire correspondant à 87 échantillons de retard.



④ Réponses fréquentielles composite et individuelles d'un banc de 4 filtres passe-bande non-uniformes pour $L=175$. figure (4-14)

3. Supposons que tous les paramètres restent les mêmes, comme dans l'exemple (2) sauf qu'on exige des régions de transition plus courtes. L'équation (4-30a) montre que L et Δf sont presque inversement proportionnelles. La figure (4-15) montre le banc de filtres correspondant aux paramètres de l'exemple (2) sauf que $L = 301$ et $\Delta f = 0,012082$, (la largeur de transition est de 116 Hz). Les transitions brusques sont apparentes dans les figures (4-15a) et (4-15b) montre que la réponse composite reste très plate, dans ce cas le retard de la phase est de 150 échantillons.



⊗ Réponses fréquentielles composite et individuelles d'un banc de 4 filtres passe-bande non-uniforme pour $L = 301$.

fig (4-15)

CONCLUSION

L'objet de ce travail était le prétraitement du signal de la parole en utilisant le filtrage numérique.

Actuellement, le filtrage numérique occupe une place importante dans l'électronique digitale, son domaine d'application s'élargit de plus en plus surtout en télécommunication (téléphone numérique), en traitement et transmission du signal (parole, image).

Le résultat de notre travail pourrait être utilisé dans différents domaines. Par exemple :

- La reconstitution de la parole par prédiction linéaire
- pour l'aide visuelle pour handicapés auditifs grâce à des appareils qui montrent un ou plusieurs paramètres de la parole comme l'intensité, la mélodie, ...

ANNEXE "A"

Transformée en "z"

Séquence $\{x(n)\}$	Transformée en "z"
1) $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$	1) 1
2) $\delta(n-k) = \begin{cases} 1, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$	2) z^{-k}
3) $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	3) $\frac{z}{z-1}$
4) $a^n \cdot u(n)$	4) $\frac{z}{z-a}$
5) $x(n-k)$	5) $X(z) \cdot z^{-k}$
6) $x(n) a^n$	6) $X(az)$
7) $x(n+k)$	7) $X(z) z^k - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{k-j}$

ANNEXE "B"

Transformée de Fourier normale "T.F.N"

Originale	T. F. N
1) $f(t), g(t)$	1) $F(\omega), G(\omega)$
2) $\alpha f(t) + \beta g(t)$	2) $\alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
3) $f'(t)$	3) $j\omega \cdot F(\omega)$
4) $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	4) $\frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)$
5) $f(t - t_0)$	5) $F(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
6) $f(t) e^{j\omega_0 t}$	6) $F(\omega - \omega_0)$
7) $f(at)$	7) $\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
8) $F(t)$	8) $2\pi f(-\omega)$
9) $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$	9) $F(\omega) \cdot G(\omega)$
10) $f(t) \cdot g(t)$	10) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \cdot G(\omega - y) dy$

$$11) \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

ANNEXE "C"

Transformée de Fourier discrète "T.F.D"

Originale	T.F.D
1) $f(n), g(n)$	1) $F(K), G(K)$
2) $\alpha f(n) + \beta g(n)$	2) $\alpha F(K) + \beta G(K)$
3) $f(-n) = f(N-n)$	3) $F(-K) = F(N-K)$
4) $f^*(n)$	4) $F^*(-K)$
5) $f(n-i)$	5) $F(K) e^{-j \frac{2\pi}{N} i K}$
6) $f(n) e^{j \frac{2\pi}{N} i n}$	6) $F(K-i)$
7) $\delta^o(n) = \begin{cases} 1, & (n)=0 \\ 0, & (n) \neq 0 \end{cases}$	7) 1
8) $\sum_{i=0}^{N-1} f(i) g(n-i)$	8) $F(K) \cdot G(K)$
9) $f(n) \cdot g(n)$	9) $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(i) \cdot G(K-i)$
10) $\sum_{i=0}^{N-1} f(i) \cdot g(n+i)$	10) $F(-K) \cdot G(+K)$

$$11) \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} |F(K)|^2$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1_ L.R. Rabiner , R.W. Schaffer .
"Digital Processing of Speech Signals". Prentice-Hall . 1978
- 2_ R. Boite , H. Leich .
"Les Filtres Numériques". Masson . 1980
- 3_ M. Kunt .
"Traitement numérique des signaux". Dunod . 1980 .
- 4_ I. El-Malawany .
"Filtrage numérique". Thèse de doctorat d'état . 1968.
- 5_ P. Fondanèche , P. Gilbertas .
"Filtres Numériques". Masson . 1981
- 6_ E. Roubine .
"Introduction à la théorie de la communication .
Tome 1. Signaux non-aléatoires". Masson . 1979
- 7_ J. Auvray .
"Electronique des signaux échantillonnés et numériques".
Dunod . 1978
- 8_ J. Marcus .
"Echantillonnage et Quantification". Gauthier-Villars . 1965