M0033/02A

République Algérienne Démocratique & Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique




*Département d'Hydraulique*

Stage effectué à

**l' Institut Nationale de Recherche en Informatique & en Automatique**
*INRIA-Rocquencourt*

**Mémoire de Magister en hydraulique**

# L'hydrodynamique des rivières & les systèmes d'information géographique

Soutenu par:

**Mlle Souad TALAMALI**

Jury:

| | | |
|---|---|---|
| Président: | **Mounir Khaled BERRAH** | Professeur (ENP) |
| Rapporteurs: | **Fadi DABAGHI** | Docteur (INRIA) |
| | **Saadia BENMAMAR** | Chargé de cours (ENP) |
| | **Ahmed KETTAB** | Professeur (ENP) |
| Examinateurs: | **Amar BILEK** | Docteur (ENP) |
| | **Miloud BERKANI** | Docteur (ENP) |
| | **Boualem REMINI** | M.C. (univ. de Blida) |

Promotion 2001-2002

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



# Remerciements

*Ce travail de recherche présenté dans ce mémoire a été mené au sein de l'action COSIVIE à l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique de Rocquencourt), sous la direction du Dr. F. DABAGHI, coordonnateur du projet.*

*Mes premiers remerciements vont donc à lui, qui m'a chaleureusement acceuillie dans son équipe. Je le remercie également pour sa disponibilité et son aide durant toute la période de l'élaboration de ce travail.*

*Que Mr. le professeur M.K. BERRAH, Directeur de l'ENP trouve l'expression de ma reconnaissance pour m'avoir confié ce stage et d'avoir présider mon jury, j'espère avoir été à la hauteur de ses attentes.*

*J'adresse ma plus vive reconnaissance à Mlle S. BENMAMAR chargé de cours au département d'hyraulique, d'avoir suivi mon travail tout le long de ces deux années. Toujours disponible, elle a su me soutenir, me conseiller et m'encourager à chaque fois que celà été nécessaire.*

*Je remercie Mr. le professeur A. KETTAB responsable de la post-graduation au niveau du département d'hydraulique de l'ENP pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.*

*Mes remerciements sont adressés aux membres de jury Mr BERKANI, Mr BILEK et Mr REMINI, d'avoir accepter d'examiner ce travail et d'apporter leurs critiques.*

*Je remercie Mr. le professeur D. OUAZAR, coordonnateur marocain des projets ESIMEAU, CRUCID et WADI pour son aide et ses précieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer tout le long de mon stage.*

*Je tiens également à remercier les thésards de l'action COSIVIE, N. GUELMI, M. ABDELOUAHED, B. NAKHLE et M. HASSINE ainsi que tous les chercheurs du bâtiment 16 à l'INRIA, particulièrement, Mr. A. HASSIM, Mr. A. MAROCCO, Mr. P. FREY et Mr. E. SALTEL pour leurs aides et leurs conseils pendant toute la période de mon stage.*

*Je ne saurais oublier le Dr. M. HENICHE, associé de recherche au departement de genie chimique à l'Ecole Polytechnique de Montréal pour sa disponibilité par ces mails qui m'ont aidé à avancer pendant ce travail.*

*Pour finir, mes chaleureux remerciements sont adressés à mon frère Nabil pour son soutien moral, à tous mes amis(e) ( Khaled, Kais, Rabah, Mourad, Lynda, Faiza ...) pour leur gentillesse et leur patience et à tous ceux qui, de loin ou de près, ont contribué à la réalisation de ce travail.*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



*A mes parents,*
*a tous ceux qui me sont chers,*
*je dédie ce modeste travail.*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

## ملخـــــص

تكرر الفيضانات في الأنهار يفرض تطوير نماذج رقمية تسمح بتحديد المواقع المعرضة لمثل هذه الحوادث. تمثيل سريان المياه ذات السطح الحر يتعلق غالبا بنوعية المنطقة و مميزات الأنهار المدروسة. تحرك المياه في الوديان يتم في كل الاتجاهات الفضائية و لذلك يتطلب تمثيلا رقميا ذو بعد ثلاثي.

الطبيعة الثلاثية الأبعاد لسريان المياه ليست مهمة في كل الحالات ، خاصة عندما تكون النسبة عرض – عمق النهر كبيرة جدا . عندها ، تسمى حركة المياه "مياه قليلة العمق".

في رسالة الماجستير هذه ، نقدم نموذجا رقميا بطريقة العناصر المتناهية لحل معادلات سان فونوا ذات بعد شبه ثلاثي (بعد 2.5) للحصول على تطور السطح الحر و توزيع سرعة المياه. إن تعيين موقع سطح المياه يتعلق بالشروط المطبقة على حدود المجال المدروس . في هذه الرسالة، كرس جزء معتبر للدراسة الرياضية لحدود المجال، لتحليل الحالات الفيزيائية المتعددة التي تظهر على حدود مجال السريان وتطبيقها في نموذج العناصر المتناهية.

النموذج المقدم يؤكد بطريقة إيجابية العديد من التجارب الرقمية التي نفذت لدراسة تقاربية الحلول المعطاة بهذا النموذج و لتثبيت صحة هذا الأخير.

و في الأخير، نقدم طراز أصلي مطور لتسهيل طريقة استغلال المستعمل لكل النماذج المقترحة التي تساعد على معالجة الحلول بطريقة توضيحية و تحديد الأماكن المعرضة للفيضانات.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

# Résumé

La présence de plus en plus fréquente des inondations dans les rivières incite à développer des outils de simulation numérique permettant de déterminer très précisément les zones inondables. La modélisation des écoulements à surface libre dépend généralement de chaque région et des caractéristiques de chaque rivière étudiée. Le mouvement de l'eau dans les cours d'eau se réalise dans toutes les directions de l'espace ; il nécessite par conséquent une modélisation tridimensionnelle. La nature tridimensionnelle de l'écoulement n'est pas importante dans toutes les situations, particulièrement, quand le rapport largeur-profondeur est très grand. Dans de tels cas, l'écoulement est appelé " eau peu profonde ".

Dans cette thèse de magister, on présente un modèle numérique d'éléments finis qui résout les équations de Saint Venant 2.5D pour obtenir l'évolution de la surface libre et les champs de la vitesse. La détermination de la position de la surface libre dépend des conditions aux limites appliquées à chaque cas étudié. Dans ce mémoire , une bonne partie est consacrée à l'étude mathématique des conditions aux limites, à l'analyse des cas physiques qui se présentent aux limites du domaine d'écoulement et leur application dans le modèle numérique élément finis.

Le modèle répond plus ou moins de manière satisfaisante à de nombreux tests numériques qui ont été effectués pour étudier la convergence numérique des solutions issues du modèle et de valider ce dernier.

A la fin, on présente un prototype d'aide à la décision développé afin de faciliter aux utilisateurs la manipulation de différents logiciels permettant l'exploitation graphique des résultats et de localiser les zones qui risquent d'être inondées.

**Mots-clés:** Eau peu profonde, Saint-Venant, méthode des éléments finis, Frontière libre, conditions aux limites, couvrant-découvrant des éléments

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

# Abstract

The frequent presence of the floods in the rivers encourages to develop tools for digital simulation to determine the easily flooded zones very precisely. The modeling of the free surface flows, generally, depends on each area and the characteristics of each studied river. The movement of water in the rivers is carried out in all the directions of space; it requires consequently a three-dimensional modeling. The three-dimensional nature of the flow is not significant in all the situations, particularly, when the width-depth ratio is very large. In such cases, the flow is called "shallow water".

In this magister thesis, one presents a digital finite elements model, which solves the 2.5D Saint Venant equations to obtain the evolution of the free surface and the velocity fields. The determination of the free surface position depends on the boundary conditions applied to each studied case. In this memory, a large part is devoted to the mathematical study of the boundary conditions, of the physical cases analysis that arise at the limits of flow domain and their application in the digital finite element model.

The model answers more or less satisfactorily many numerical tests, which were carried out to study the numerical convergence of the solutions resulting from the model and to validate this last.

At the end, one presents a prototype of aid decision developed in order to facilitate to the users handling various software allowing the graphic exploitation of the results and to locate the zones, which are likely to be flooded.

**Keywords:** Shallow water, Saint-Venant, finite element method, free boundary, boundary conditions, wetting-drying elements

BIBLIOTHÈQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

# Table des matières

**Table des figures** xvii

**Notations** 1

**Introduction** 5

**1 Aspect phénomènologique des écoulements** 9

1.1 Les différents types d'écoulements . . . . . 11

1.1.1 Les précipitations directes à la surface libre du cours d'eau . . . . . 12

1.1.2 Les écoulements de surface . . . . . 13

1.1.3 Les écoulements de subsurface . . . . . 14

1.1.4 Les écoulements souterrains . . . . . 14

1.2 La réponse hydrologique . . . . . 14

1.3 Transformation de la pluie en hydrogramme de crue . . . . . 16

1.4 Etude des écoulements: rappels sur l'hydraulique fluviale . . . . . 18

1.4.1 Définitions et notations . . . . . 18

1.4.2 Régimes d'écoulements . . . . . 20

1.4.3 Propriétés générales de l'écoulement . . . . . 21

1.4.4 Forme de la surface libre . . . . . 24

1.5 Turbulence et couche limite . . . . . 30

1.5.1 Turbulence: c'est quoi? . . . . . 30

1.5.2 Equations de l'hydrodynamique pour un écoulement turbulent . . . 31

1.5.3 Modèles de turbulence . . . . . 33

1.5.4 Notion de la couche limite . . . . . 36

**2 Modélisation mathématique en hydraulique fluviale** 39

2.1 Modèles de Navier-Stokes . . . . . 40

2.1.1 Equations de base . . . . . 40
2.1.2 Conditions initiales et aux limites . . . . . 43
2.1.3 Modèle Navier-Stokes incompressible à $\rho$ constante . . . . . 44
2.1.4 Modèle Navier-Stokes semi-compressible à $\rho$ variable . . . . . 45
2.1.5 Modèle Navier-Stokes 2D . . . . . 45
2.2 Modèles de Saint-Venant . . . . . 46
2.2.1 Modèle Saint-Venant 2.5D . . . . . 46
2.2.2 Modèle Saint-Venant 1D . . . . . 55
2.3 Position du problème . . . . . 58

**3 Modélisation numérique: FESWMS** **61**
3.1 Description générale de FESWMS . . . . . 61
3.2 Modèle mathématique . . . . . 62
3.2.1 Récapitulation des équations moyennées . . . . . 62
3.2.2 Termes correctifs du mouvement . . . . . 63
3.2.3 Modèle de turbulence . . . . . 65
3.2.4 Conditions initiales et aux limites . . . . . 66
3.3 Formulation variationnelle . . . . . 71
3.4 Discrétisation spatiale . . . . . 74
3.4.1 Expressions résiduelles . . . . . 74
3.4.2 Expressions des dérivées . . . . . 75
3.4.3 Application des conditions aux limites . . . . . 78
3.4.4 Présentation de la surface libre:-frontière mobile- . . . . . 81
3.5 Discrétisation temporelle . . . . . 84
3.6 Algorithme de résolution . . . . . 85
3.6.1 Organigramme de résolution . . . . . 85
3.6.2 Linéarisation du système . . . . . 87
3.6.3 Intégration numérique . . . . . 88
3.6.4 Résolution du système . . . . . 89
3.7 Maillage du domaine d'écoulement . . . . . 92
3.7.1 Géométrie et préparation de la BD . . . . . 92
3.7.2 Génération du maillage $P^1$ . . . . . 93
3.7.3 Génération du maillage $P^2$ . . . . . 94

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



**4 Analyse paramétrique et résultats numériques** **95**

4.1 Analyse paramétrique . . . . . 95

4.1.1 Viscosité turbulente artificielle et le coefficient de frottement . . . . 95

4.1.2 Le pas d'espace (Maillages -taille/qualité- et le facteur de tolérance) 105

4.1.3 Le facteur de relaxation et critères de convergence . . . . . 108

4.1.4 Temps de simulation et influence du pas de temps . . . . . 111

4.2 Résultats numériques . . . . . 112

4.2.1 Canal rectangulaire . . . . . 112

4.2.2 Canal trapézoïdal . . . . . 120

**5 Prototype d'un outil d'aide à la décision** **129**

5.1 Plate-forme ESIMEAU . . . . . 131

5.2 Application onde de crue . . . . . 132

5.3 Application onde de crue / SIG Arcview . . . . . 133

5.4 Application onde de crue / Maillage . . . . . 133

5.4.1 Maillage prés-process . . . . . 134

5.4.2 Maillage de calcul . . . . . 134

5.5 Application onde de crue / Simulation . . . . . 135

5.6 Application onde de crue / Visualisation: . . . . . 135

**Conclusion & perspectives** **143**

**Bibliographie** **145**

**A Description sommaire de quelques modèles numériques de simulation des crues** **151**

A.1 Phoenics . . . . . 151

A.2 FLUENT . . . . . 151

A.3 HYDROSIM . . . . . 152

A.4 TELEMAC . . . . . 152

A.5 HEC-2 . . . . . 152

**B Aperçu sur les logiciels utilisés** **155**

B.1 Logiciel de maillage EMC2 . . . . . 155

B.2 Logiciel de maillage YAMS . . . . . 156

B.3 La bibliothèque MODULEF . . . . . 157
B.4 Logiciel de visualisation MEDIT . . . . . 158
B.5 Logiciel de visualisation VISU . . . . . 158
B.6 Présentation du logiciel SMS . . . . . 158

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

# Table des figures

1.1 Processus hydrologiques . . . . . 10
1.2 Ecoulement par dépassement de la capacité d'infiltration (Ra) et écoulement par saturation (Rb) . . . . . 12
1.3 Chemins d'écoulement de l'eau sur le versant . . . . . 12
1.4 Principe de la réponse hydrologique d'un bassin versant . . . . . 15
1.5 Transformation de la pluie en hydrogramme de crue . . . . . 16
1.6 Hydrogramme de crue . . . . . 17
1.7 Eléments géométriques . . . . . 18
1.8 Ecoulement permanent . . . . . 20
1.9 Ecoulement non-permanent . . . . . 21
1.10 Répartition de la vitesse . . . . . 21
1.11 Profil logarithmique de la vitesse . . . . . 22
1.12 Répartition de la pression- écoulement uniforme . . . . . 22
1.13 Répartition de la pression- écoulement concave . . . . . 23
1.14 Répartition de la pression- écoulement convexe . . . . . 23
1.15 Courbe des profondeurs normales . . . . . 24
1.16 Energie spécifique . . . . . 25
1.17 Calcul de l'énergie spécifique . . . . . 27
1.18 Lignes d'eau du régime graduellement varié en canal uniforme . . . . . 29
1.19 Couche limite sur une paroi plane . . . . . 36
1.20 Sous Couches d'une couche limite turbulente . . . . . 37
1.21 Profil de vitesse aux trois zones de la couche limite . . . . . 37

2.1 Les différents modèles en hydraulique . . . . . 41
2.2 Notations du modèle de Saint-Venant 2.5D . . . . . 46
2.3 Notations du modèle de Saint-Venant 1D . . . . . 57

3.1 Définition du domaine de calcul . . . . . 68
3.2 Calcul d'un point de repère à l'amont($P_0$) et à l'aval ($P_0'$) d'un barrage . . 69
3.3 Calcul d'un point de repère à l'amont($P_0$) et à l'aval ($P_0'$) d'une vanne . . . 70
3.4 Calcul d'un point de repère à l'amont d'une chute brusque . . . . . 71
3.5 Elément à six noeuds . . . . . 74
3.6 Section transversale amont . . . . . 80

3.7 Technique de mur fictif . . . . . 82
3.8 Technique d'approximation en escalier . . . . . 82
3.9 Différents états d'un élément . . . . . 83
3.10 Organigramme du modèle FESWMS . . . . . 86
3.11 Les points d'intégration de Gauss . . . . . 89
3.12 Types de maillage . . . . . 93
3.13 Maillage surfacique 3D . . . . . 94
3.14 Maillage $P^1$ iso $P^2$ . . . . . 94

4.1 Géométrie du domaine d'écoulement - canal trapézoïdal . . . . . 96
4.2 Maillage non structuré -canal trapézoïdal- vu par MEDIT . . . . . 97
4.3 Maillage structuré fin -canal trapézoïdal- vu par MEDIT . . . . . 97
4.4 Variation de la viscosité artificielle $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$ . . . . . 100
4.5 Variation de la viscosité artificielle $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$ . . . . . 100
4.6 Variation de la viscosité artificielle $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$ . . . . . 100
4.7 Variation de la viscosité artificielle $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$ . . . . . 101
4.8 Variation de la viscosité artificielle $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$ . . . . . 101
4.9 Variation de la viscosité artificielle $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$ . . . . . 101
4.10 Variation du module de la vitesse $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$ . . . . . 102
4.11 Variation du module de la vitesse $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$ . . . . . 102
4.12 Variation du module de la vitesse $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$ . . . . . 102
4.13 Variation du module de la vitesse $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$ . . . . . 103
4.14 Variation du module de la vitesse $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$ . . . . . 103
4.15 Variation du module de la vitesse $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$ . . . . . 103
4.16 Variation de la viscosité artificielle à la section d'entrée . . . . . 104
4.17 Variation de la viscosité artificielle à la section intermédiaire . . . . . 104
4.18 Variation de la viscosité artificielle à la section de sortie . . . . . 105
4.19 Etude de l'erreur en fonction du pas d'espace . . . . . 107
4.20 Géométrie du domaine d'écoulement - une pente . . . . . 109
4.21 Maillage de calcul -canal à section rectangulaire, 1 pente- vu par VISU . . 109
4.22 Variation du facteur de relaxation en fonction le nombre d'itération . . . . 110
4.23 Diminution de l'erreur relative pour les trois maillages . . . . . 111
4.24 Solution du régime uniforme (a) . . . . . 114
4.25 Solution du régime permanent (a) . . . . . 114
4.26 Solution du régime non permanent (a) . . . . . 115
4.27 Solution du régime non permanent (b) . . . . . 115
4.28 Solution du régime non permanent (c) . . . . . 116
4.29 Géométrie du domaine d'écoulement - trois pentes . . . . . 117
4.30 Maillage de calcul -canal à section rectangulaire, 3 pentes- vu par MEDIT 117
4.31 Condition aux limites . . . . . 118
4.32 Solution calculée à t=0mn . . . . . 118
4.33 Solution référence à t=0mn . . . . . 118
4.34 Solution calculée à t=6mn . . . . . 119

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



4.35 Solution référence à t=6mn . . . . . 119
4.36 Solution calculée à t=12mn . . . . . 119
4.37 Solution référence à t=12mn . . . . . 119
4.38 Solution du régime uniforme . . . . . 122
4.39 Section d'entrée à x=0m . . . . . 123
4.40 Section intermédiaire à x=500m . . . . . 123
4.41 Section de sortie à x=1000m . . . . . 123
4.42 Solution du régime permanent . . . . . 124
4.43 Section d'entrée à x=0m . . . . . 125
4.44 Section intermédiaire à x=250m . . . . . 125
4.45 Section de sortie à x=1000m . . . . . 125
4.46 Variation de la hauteur t=5mn . . . . . 126
4.47 Variation de la vitesse t=5mn . . . . . 126
4.48 Variation de la hauteur t=60mn . . . . . 126
4.49 Variation de la vitesse t=60mn . . . . . 126
4.50 Variation de la hauteur t=120mn . . . . . 126
4.51 Variation de la vitesse t=120mn . . . . . 126
4.52 Section d'entrée à x=0m . . . . . 127
4.53 Section d'entrée à x=0m . . . . . 127
4.54 Section interne à x=500m . . . . . 127
4.55 Section interne à x=500m . . . . . 127
4.56 Section de sortie à x=1000m . . . . . 128
4.57 Section de sortie à x=1000m . . . . . 128

5.1 Plate-forme ESIMEAU/Application mère . . . . . 131
5.2 Application onde de crue/Prévention contre les risques d'inondation . . . . 132
5.3 Ouverture du projet -onde de crue- par Arcview . . . . . 133
5.4 Construction du maillage prés-process par EMC2 . . . . . 134
5.5 Exécution du modèle numérique FESWMS . . . . . 135
5.6 Visualisation de la hauteur H à t=0h par VISU . . . . . 136
5.7 Visualisation de la vitesse U à t=1.826h par MEDIT . . . . . 136
5.8 Visualisation de la côte de la surface libre à t=0h par SMS . . . . . 137
5.9 Visualisation du maillage d'exploitation par Arcview . . . . . 138
5.10 Courbe de la grandeur U(t) d'un point du maillage . . . . . 139
5.11 Courbes des grandeurs U,V et H(t) d'un point du maillage . . . . . 139
5.12 Courbes des grandeurs U,V et H(t) d'un point quelconque du domaine . . 140
5.13 Courbe de la ligne d'eau et variation de la vitesse le long du canal . . . . . 141
5.14 Courbe de la surface d'eau et variation de la vitesse à une section transversale du canal . . . . . 141
5.15 Coupe transversale au milieu du canal . . . . . 142

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

# Notations

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | Facteur pour l'itégration en temps |
| B | Largeur superficielle |
| $\beta_{uu}, \beta_{vu}, \beta_{vv}$ | Coefficients de correction du mouvement |
| $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ | Facteurs pour l'itégration en temps |
| $C$ | Coefficient de Chézy |
| $C_\mu$ | Coefficient semi-empirique |
| $c_f$ | Coefficient de frottement |
| $D_h$ | Profondeur hydraulique |
| $D$ | Diamètre hydraulique |
| $\delta_{ij}$ | Symbole de Kronecker |
| $\delta$ | Epaisseurde la couche limite |
| $\delta'$ | Angle de la tangente avec l'axe des x |
| $E$ | Energie spécifique |
| $E_t$ | Energie totale |
| $\varepsilon$ | Taux de dissipation de l'energie |
| $e$ | Energie spécifique interne |
| F | Infiltration |
| $f$ | Coefficient de frottement adimensionnel de Weishbach Darcy |
| $Fr$ | Nombre de Froude |
| $f_g$ | Force de gravité |
| $f_c$ | Force de Coriolis |
| g | Accélération de la pesanteur |
| $H$ | Hauteur d'eau |
| $h$ | Côte de la surface libre |
| $h_c$ | Hauteur Critique |
| $h_n$ | Hauteur normale |
| $h_k$ | Coefficient empirique |
| $I$ | Pente du fond |
| $I_c$ | Pente Critique |
| $J$ | Pente hydraulique |
| $K$ | Débitance |

| | |
|---|---|
| $k$ | Energie cinétique turbulente |
| $\kappa$ | Constante de Van Karman |
| $\widetilde{l}$ | Longueur caractéristique |
| $l_m$ | longueur de mélange |
| $\lambda$ | Coefficient de Poisson |
| $M_G$ | Foces extérieures |
| $\mu$ | Viscosité dynamique du fluide |
| $\mu_t$ | Viscosité dynamique turbulente |
| $n$ | Coefficient de Manning |
| $\overrightarrow{n}$ | Vecteur normal |
| $\nu, \nu_0$ | Viscosité cinématique du fluide |
| $\nu_t$ | Viscosité cinématique turbulente |
| $\widetilde{\nu}$ | Viscosité artificielle de l'écoulement |
| $N_n$ | Niveau normal |
| $N_c$ | Niveau critique |
| $\omega$, | Facteur de relaxation |
| $\underline{\omega}$, $\Omega$ | Vitesse angulaire de la terre |
| P | Précipitation |
| Pd | Précipitation directe |
| $p$ | Pression |
| $p_f$ | Pression au fond |
| $p_a$ | Pression atmosphérique |
| $\overline{p}$ | Pression moyenne en temps |
| $p'$ | Pression des fluctuations |
| $\varphi$ | La latitude |
| $P_m$ | Périmètre mouillé |
| Q | Débit |
| q | Débit unitaire |
| Ra | Ruissellement par dépassement de la capacité d'infiltration |
| Rb | Ruissellement par saturation |
| Rs | Ruissellement de surface |
| $R_h$ | Rayon hydraulique |
| $\rho$ | Masse volumique |
| $Re$ | Nombre de Reynolds |
| $S_m$ | Section mouillée |
| $s$ | Abscisse curviligne |
| $\Delta t$ | pas de temps |
| $t$ | Variable de temps |
| $T$ | Température |
| T | Tolérance |
| $\tau$ | Tenseur des contraintes de Reynolds |
| $\tau^F$ | Tenseurs de contraintes au fond |
| $\tau^S$ | Tenseurs de contraintes à la surface |
| $\theta$ | Facteur d'itégration en temps |

| | |
|---|---|
| $u$, $v$, $w$ | Vitesses ponctuelles |
| $U$, $V$, $W$ | Vitesses moyennes en espace |
| $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ | Vitesses moyenne en temps |
| $u'$, $v'$, $w'$ | Vitesses des fluctuations |
| $\widetilde{u}$ | Vitesse caractéristique |
| $u_*$ | Vitesse de frottement |
| $U_{max}$ | Vitesse maximale |
| $x$, $y$, $z$ | Composantes cartésiennes |
| $\zeta$ | Conductivité thermique |

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

# Introduction

L'intérêt accordé à la thématique de l'eau et des récentes crues survenues un peu partout à travers le monde font que la modélisation de la propagation des ondes de crue/submersion est de plus en plus actuelle et ceci afin d'éviter les catastrophes et les dégâts humains et matériels qui peuvent en découler.

L'analyse des ondes de submersion engendrées par une crue ou une rupture de barrage est le plus souvent menée dans le but d'établir les cartes du risque d'inondation des surfaces dans la vallée à l'aval, en vue de préparer les plans correspondants de protection civile. En effet, lorsque le danger de rupture ou d'inondation ne peut être écarté par la prise de mesures appropriées (vidange rapide de réservoir, ... ), l'évacuation préventive des populations menacées par un effacement éventuel de barrage ou par l'imminence d'un violent orage est la seule mesure qui puisse être réellement efficace, à condition d'être effectuée au bon moment: il s'avère dès lors nécessaire de concevoir un système d'alarme et d'établir un plan d'alerte adéquat basé sur des estimations fiables du temps d'arrivée du flot dévastateur ainsi que des zones susceptibles d'être submergées à l'aval.

La complexité de la prévision du plan d'eau et des débits lâchés dans la vallée à l'aval est liée au caractère exceptionnel de l'écoulement transitoire aggravé par l'ampleur des débits. L'étude des écoulements exceptionnels engendrés par une crue, une détérioration de barrage, un glissement de terrain dans un réservoir, de fortes marées, etc., ne peut se baser simplement sur les observations effectuées sur les cours d'eau en temps normal. Comparé à l'écoulement quotidien, l'écoulement exceptionnel connaît en effet un élargissement du domaine d'écoulement par dépassement du lit majeur, la submersion de zones habitées ou boisées, un écoulement à travers des obstacles (routes, ponts, ...), le charriage de matériaux solides de très grande dimension, et une modification profonde conséquente de la morphologie d'un lit affouillable.

Pour ce qui est des pays méditerranéens, ces phénomènes ne posent pas seulement des problèmes par leur rareté, ils peuvent être à l'origine de catastrophes provoquant des pertes humaines et matérielles considérables. En effet, les grands changement climatiques survenus ces dernières années aussi bien au nord (France, Allemagne, Italie...) qu'au sud de la méditerranée (Maroc et l'Algérie dernièrement), marquées par des inondations jamais connues par le passé, devrait inciter les acteurs vers une meilleure compréhension du phénomène.

Il ressort de ce qui vient d'être dit plus haut, tout l'intérêt que l'on doit porter à l'élément hydrologique qui régit le comportement de l'eau de surface. C'est sous l'impul-

sion des PTM[1], directement touchés par ce problème et répondant du même coup aux propriétés de l'UE[2] en terme de préservation de l'environnement, que le projet CruCID[3] a été mis en place pendant les trois ans passés, suivi par le lancement du nouveau projet WADI[4] le 1er Avril 2001, ainsi que la coopération interuniversitaire Franco-Algérienne CMEP[5] au sein de l'action COSIVIE[6].

Il s'agit de développer un système d'information intégré pour la régularisation et l'aménagement des bassins versants, permettant leur gestion, protection et leur restauration ainsi que de satisfaire la demande en eau potable dans le cadre d'une politique de développement durable. La stratégie conceptuelle du projet répond à un schéma d'interaction à la fois souple et dynamique d'un ensemble d'outils numériques (couplage entre les modèles de simulation et les sytèmes d'information), pouvant fournir à tout décideur un support à la décision. Ce projet s'appuie sur un réseau de partenaires euro-méditerranéens constitués dans le cadre de ESIMEAU[7], un projet communautaire sur l'apport des technologies de l'informations liée à la maîtrise des ressources en eau (hydro-informatique). Ce Consortium sera élargi aux partenaires concernés par le problème des crues ( Agences de la météorologie, d'hydraulique,...)

Ce travail de Mémoire de Magister s'inscrit dans le programme de CMEP et dans la première phase du projet WADI dont l'objectif est l'analyse hydraulique et numérique d'un code de propagation d'ondes de crues, FESWMS (Finite Element Surface Water Modelling System), afin de l'adapter aux objectifs de ce projet et élargir les champs d'application de ce dernier en termes de conditions aux limites. Il sera utilisé comme code de référence pour la validation des résultats d'un éventuel code qui devra être développé ultérieurement au sein du groupe.

FESWMS sert à simuler les écoulements à surface libre aussi bien en régime permanent que non permanent. Il se base sur un modèle type Saint-Venant 2.5D issu des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles intégrées ou moyenées sur la profondeur où la répartition de la pression est supposée hydrostatique. Sous ces hypothèses le modèle doit restituer les champs de vitesses (U,V) et le tirant d'eau H en tout point du domaine de calcul de l'écoulement même en présence d'obstacles ou ouvrages tels que les ponts, les ilots, etc...

L'importance de la modélisation mathématique et numérique des écoulements à surface libre nécessite une bonne compréhension des phénomnes physiques (les causes et les conséquences). Dans ce sens, on a décrit la phénomènologie des écoulements dans le premier chapitre de ce mémoire.

Dans le deuxiéme chapitre, on présente les différents modèles mathématiques (Navier Stokes et Saint Venant) existants pour la modélisation des écoulements à frontière libre.

Quant au chapitre 3, il expose les parties physique et numérique du modèle FESWMS.

1. Pays Tiers Méditerranéens
2. Union Européenne
3. modélisation numérique des Crues via le Calcul Intensif Distribué
4. WAter supply watersheD planning and management: an Integrated approch
5. Comité Mixte d'Evaluation et de Prospective
6. Couplage de modèles pour la SImulation numrique pour des problématiques en VIronnementalEs
7. Elaboration d'un Système Intégré pour la gestion et la Modélisation des ressources en EAU

On focalise notre attention sur le traitement des conditions aux limites amont et aval. Une bonne partie est consacrée à la prise en compte de frontière mobile, il s'agit de la surface libre (modèle couvrant-découvrant). Par ailleurs, l'algorithme de résolution est exposé ainsi qu'une méthodologie de construction des maillages de calcul est présentée à la fin de ce chapitre.

Le modèle hydrodynamique FESWMS est ensuite appliqué à une série de cas tests numériques puis soumis à une analyse paramétrique en vue d'une étude de la convergence numérique des solutions données par ce code. Ceci fait l'objet du chapitre 4 de ce présent travail.

Le chapitre 5 est consacré à la présentation d'un prototype d'aide à la décision développé au sein de l'action COSIVIE et l'exploiter pour illustrer les résultats numériques afin de pouvoir déterminer les zones inondables.

En conclusion, on dresse le bilan du travail réalisé et on ouvre des perspectives sur la suite du projet WADI et le programme de coopération CMEP.

# Chapitre 1

# Aspect phénomènologique des écoulements

Les écoulements représentent une partie essentielle du cycle hydrologique. L'eau précipitée sur un bassin versant se répartit en eau interceptée, évaporée, infiltrée et écoulée. La quantité d'eau collectée puis transportée par la rivière résultera des précipitations directes à la surface même du cours d'eau et des écoulements de surface et souterrain parvenant à son exutoire. La proportion entre ces deux types d'écoulements est définie par la quantité d'eau infiltrée dans le sol.
Les différents processus hydrologiques participant à la génération de crue sont représentés de manière schématique dans la figure (1.1). L'analyse des écoulements et la compréhension des processus générateurs font l'objet de la section suivante de ce chapitre [68].

De par la diversité de ses formes, on ne peut plus aujourd'hui parler d'un seul type d'écoulement mais bien des écoulements. On distingue dans un premier temps deux grands types d'écoulements, à savoir : les écoulements "rapides" et par opposition, les écoulements souterrains qualifiés de "lents". Les écoulements qui gagnent rapidement les exutoires pour constituer les crues se subdivisent en écoulement de surface et écoulement de subsurface :

- L'écoulement de surface ou ruissellement est constitué par la frange d'eau qui, après une averse, s'écoule plus ou moins librement à la surface des sols. L'importance de l'écoulement superficiel dépend de l'intensité des précipitations et de leur capacité à saturer rapidement les premiers centimètres du sol, avant que l'infiltration et la percolation, phénomènes plus lents, soient prépondérants.

- L'écoulement de subsurface ou écoulement hypodermique comprend la contribution des horizons de surface partiellement ou totalement saturés en eau ou celle des nappes perchées temporairement au-dessus des horizons argileux. Ces éléments de subsurface ont une capacité de vidange plus lente que l'écoulement superficiel, mais plus rapide que l'écoulement différé des nappes profondes.

Ces processus qui se produisent à des vitesses très différentes, mobilisent des eaux d'âge, d'origine et de cheminement très distincts, et permettent d'expliquer la plupart des comportements hydrologiques rencontrés sur les bassins versants, depuis les crues de

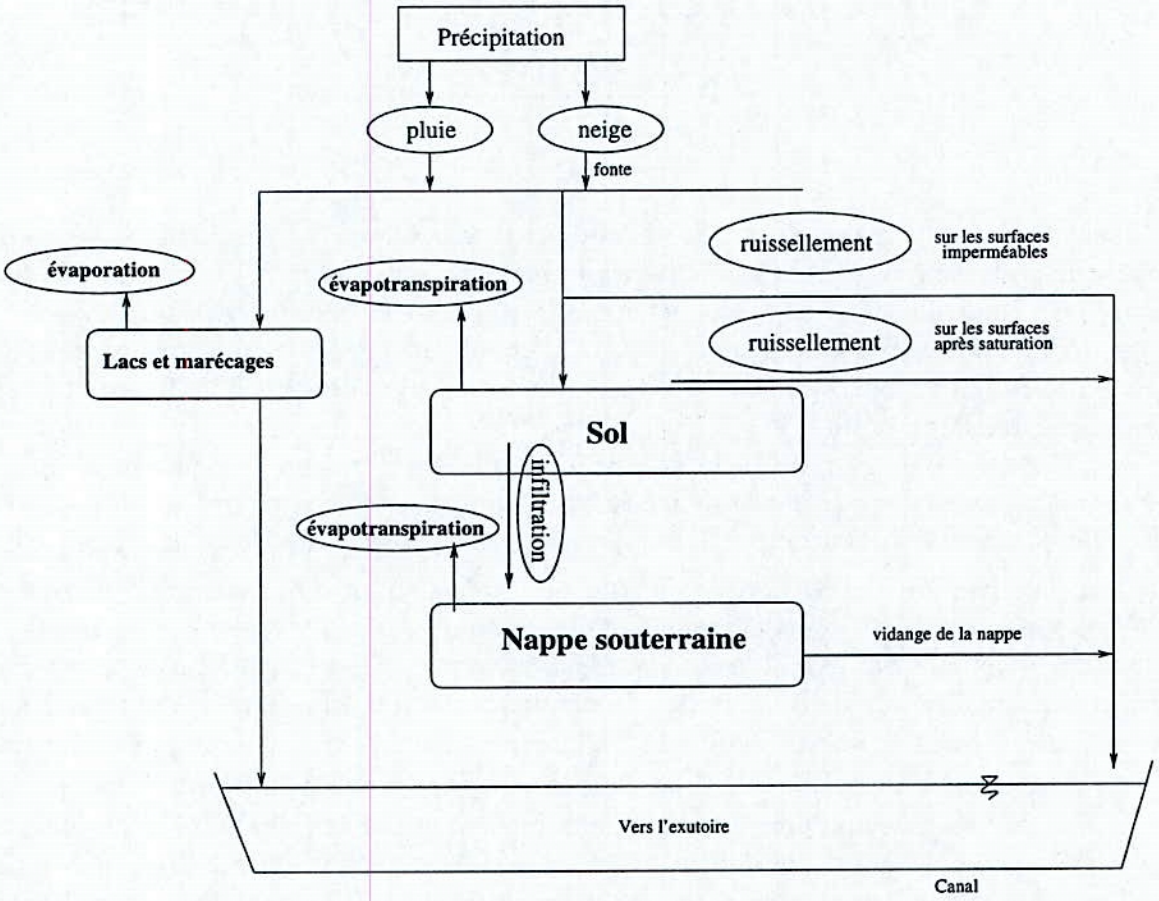



FIG. 1.1 – *Processus hydrologiques*

« ruissellement pur » jusqu'aux crues où la contribution à l'écoulement final est essentiellement hypodermique ou phréatique.
Les éléments les plus importants dans la génération des crues sont finalement les écoulements de surface et de subsurface et les précipitations directes à la surface du cours d'eau, l'écoulement souterrain n'entrant que pour une faible part dans la composition du débit de crue [68].

## 1.1 Les différents types d'écoulements

Les développements relatifs à l'étude des processus sont relativement récents. Globalement, les processus régissant la génération des écoulements sont encore mal connus. Ceci est dû en partie au fait que les réponses aux deux questions essentielles de l'hydrologie sont multiples. On peut finalement tenter de répondre - du moins partiellement - aux deux questions " quel est le devenir de l'eau des pluies? " (Penmann, 1963) et " quelle est la provenance de l'eau des rivières? " (Hewlett, 1961), en distinguant dans un premier temps quatre cheminements principaux de l'eau à la rivière (Ward et Robinson, 1990):

- Précipitations directes (Pd) à la surface libre du cours d'eau.
- Ecoulement de surface ("overland flow") ou ruissellement de surface. La notion de "ruissellement" traduisant assez mal les processus physiques de génération de l'écoulement, est de plus en plus souvent abandonné au profit de la notion "d'écoulement".
- Ecoulement de subsurface (Rs) ("subsurface flow", "throughflow", "interflow") que l'on peut aussi traduire par "écoulement rapide interne".
- Ecoulement souterrain ("groundwater flow").

On peut également décomposer l'écoulement de surface par rapport aux modalités de l'écoulement (les causes).

- Ecoulement par dépassement de la capacité d'infiltration Ra ou ruissellement hortonien ("excess infiltration overland flow", "Horton overland flow").
- Ecoulement par saturation(Rb)("excess saturation overland flow") constitué par l'écoulement en surface des précipitations directes tombées sur les surfaces saturées.

La figure suivante (figure 1.2) illustre schématiquement ces deux processus d'écoulement sur un versant et les différents types d'écoulements cités ci-dessus [68]:

La classification adoptée ici n'est pas la seule existante. Par exemple, Dunne (1978) propose de classer les écoulements en cinq processus essentiels qui sont respectivement (figure 1.3):
Chemin 1 : Ecoulement de surface par dépassement de la capacité d'infiltration,
Chemin 2 : Ecoulement de base ou souterrain,
Chemin 3 : Ecoulement de subsurface,
Chemin 4 : Ecoulement sur surfaces saturées (ruissellement par saturation),

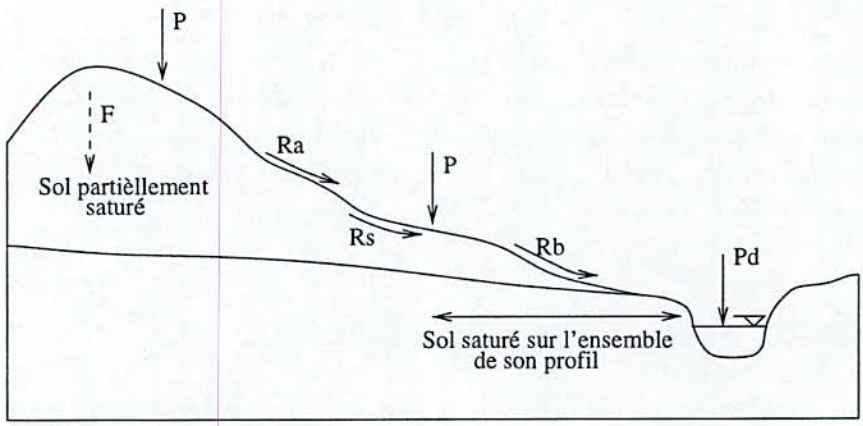



FIG. 1.2 – *Ecoulement par dépassement de la capacité d'infiltration (Ra) et écoulement par saturation (Rb)*

Chemin 5 : Précipitations directes à la surface des cours d'eau.

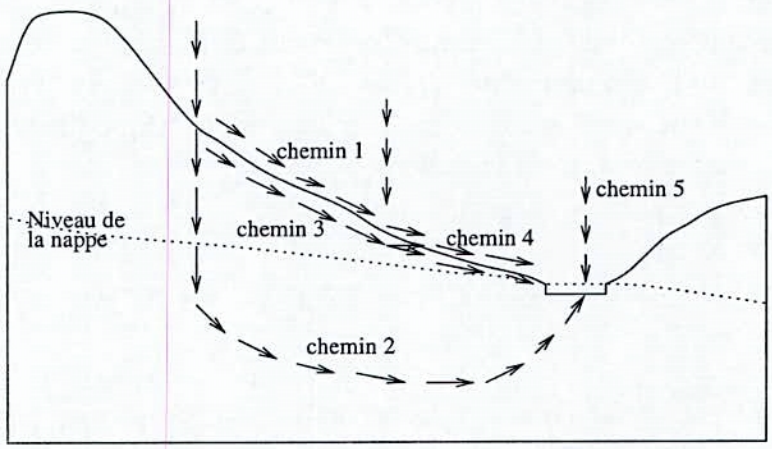



FIG. 1.3 – *Chemins d'écoulement de l'eau sur le versant*

### 1.1.1 Les précipitations directes à la surface libre du cours d'eau

Parmi les processus de génération des crues, le premier qui peut être souligné est bien évidemment la contribution directe de la précipitation sur la surface des cours d'eau du bassin versant. Cependant, ce type de processus est considéré comme marginal du fait que la surface occupée par les cours d'eau de type pérenne ne représente qu'une très faible fraction de la surface totale du versant. L'importance des précipitations directes croît toutefois suite à des précipitations de longues durées ou avec le développement du réseau hydrologique qui présente alors d'importantes zones lacustres ou marécageuses [68].

### 1.1.2 Les écoulements de surface

**• Ecoulement par dépassement de la capacité d'infiltration**

L'écoulement par excès d'infiltration est un écoulement de surface. Il apparaît lorsque l'intensité de la pluie dépasse la capacité maximale du sol à absorber l'eau. Cette capacité, caractérisée par l'infiltrabilité du sol, est supposée décroissante dans le temps jusqu'à une valeur constante. Dans un sol homogène avec une nappe profonde, cette capacité finale d'infiltration atteint en règle générale la conductivité hydraulique à saturation. L'écoulement de surface se produit donc lorsque la capacité d'infiltration devient inférieure à l'intensité des précipitations. En cas d'averse, le processus d'écoulement se développe en deux phases :

Au début de l'averse, la capacité d'infiltration est en général supérieure à l'intensité de la pluie et celle-ci s'infiltre intégralement. La teneur en eau et la charge hydraulique en surface croissent jusqu'à ce que la teneur en eau à saturation et la pression atmosphérique soient atteintes. On définit alors le seuil de submersion ou temps de submersion (ts) comme la durée entre le début de la précipitation et le moment où la surface du sol est saturée. Le temps de submersion marque ainsi le début de l'écoulement. Pour un sol donné, le temps de submersion est d'autant plus court que l'intensité de la pluie est grande et que l'humidité initiale du sol est importante.

Par la suite, l'intensité de la pluie devient plus importante que la capacité d'infiltration. L'écoulement subsuperficiel est alors constitué par la différence entre ces deux termes. L'écoulement par dépassement de la capacité est considéré comme pertinent pour expliquer la réponse hydrologique des bassins en climats semi-arides ainsi que lors de conditions de fortes intensités pluviométriques. Il est généralement admis que même des sols naturels présentant une conductivité hydraulique élevée en climats tempérés et humides peuvent avoir une capacité d'infiltration inférieure aux intensités maximales des précipitations enregistrées [68].

**• Ecoulement sur surfaces saturées**

L'écoulement sur surfaces saturées se produit lorsque la capacité du sol à stocker l'eau est épuisée et lorsque la capacité à transmettre latéralement le flux d'eau est dépassée. Par conséquent, la quantité d'eau qui est supérieure à la capacité du sol et à la transmission latérale par écoulement de subsurface, ne pourra pas s'infiltrer et va s'écouler en surface. Le développement de conditions saturées à la surface du sol peut résulter de l'écoulement latéral d'une nappe profonde ou perchée. La remontée de la nappe à partir d'un niveau peu perméable ou à partir d'une nappe préexistante peut aussi être à l'origine de ce développement. Dans ces trois cas, il s'agit donc d'une saturation "par dessous". La convergence des écoulements en plan, la concavité en section verticale des lignes d'écoulement, les pentes faibles et les sols minces favorisent la saturation " par dessous". La saturation "par dessus" est quant à elle favorisée par les conditions évoquées dans le paragraphe précédent ainsi que par la présence d'un horizon peu perméable à faible profondeur et de fortes précipitations [68].

### 1.1.3 Les écoulements de subsurface

La condition essentielle pour voir apparaître des écoulements de subsurface est que la conductivité hydraulique latérale du milieu doit être nettement supérieure à la conductivité verticale. Dans ce cas, l'eau s'écoule latéralement en zone non-saturée, par un mécanisme type "toit de chaume" ou dans le cas d'un écoulement en zone saturée, lorsqu'une nappe perchée se forme dans la partie supérieure d'un horizon peu perméable.

Des conditions particulièrement favorables existent là où une couche de sol, mince et perméable, couvre un substratum quasi imperméable. Il se peut aussi que plusieurs niveaux superposés d'écoulement de subsurface se forment. Ces niveaux correspondent à des changements de texture et/ou de structure dans le sol. L'écoulement de subsurface en régime non-saturé peut devenir l'écoulement de base dans des terrains de forte pente, et domine généralement dans les régions humides aux sols couverts de végétation et bien drainés ; une frange saturée réduite au pied du versant étant continuellement alimentée par les écoulements non-saturés [68].

### 1.1.4 Les écoulements souterrains

L'eau souterraine joue un rôle aussi important dans la génération des écoulements et notamment dans la composante "débit de base" de l'hydrogramme. Dans cette section, on considère essentiellement les écoulements profonds dont l'étude complète appartient à l'hydrogéologie et présentons une méthode d'investigation expérimentale devenue désormais classique : l'utilisation de traceurs pour déterminer notamment la contribution de l'écoulement souterrain à l'écoulement total dans un cours d'eau.

En terme de processus, l'eau qui rejoint la nappe peut être considérée comme de l'eau souterraine. Une partie de cette eau, après percolation, va transiter à travers l'aquifère avec une vitesse de quelques mètres par jour à quelques millimètres par an avant de rejoindre le cours d'eau souvent par le biais d'un phénomène de résurgence de la nappe. L'écoulement de base assure ainsi le débit des rivières en l'absence de précipitations et soutient les débits d'étiage.

Si l'on s'attache à la zone de résurgence - ou zone de contact - de la nappe, on doit noter que celle-ci n'existe pas nécessairement. Il peut donc s'avérer, dans certaines situations, que la nappe souterraine n'apporte aucune contribution à l'écoulement de la rivière. Cette situation peut notamment se produire dans des climats semi-arides à arides présentant un faible module pluviométrique : le toit de la nappe étant plus bas que le fond de la rivière, la nappe va drainer le cours d'eau [68].

## 1.2 La réponse hydrologique

Dans la section précedante, on a décrit les principaux processus intervenant dans la génération des écoulements sur un bassin versant. Cependant, les tâches de l'ingénieur hydrologue et du chercheur ne s'arrêtent pas ici car il reste à comprendre les relations qui existent entre l'impulsion ou la sollicitation - sous forme de précipitations - reçue par le

bassin et sa réponse hydrologique se traduisant à l'exutoire de ce dernier par une variation temporelle de débit.
La manière dont réagit le bassin lorsqu'il est soumis à une sollicitation se nomme réponse hydrologique. Elle est schématiquement représentée à la figure (1.4) ci-dessous.

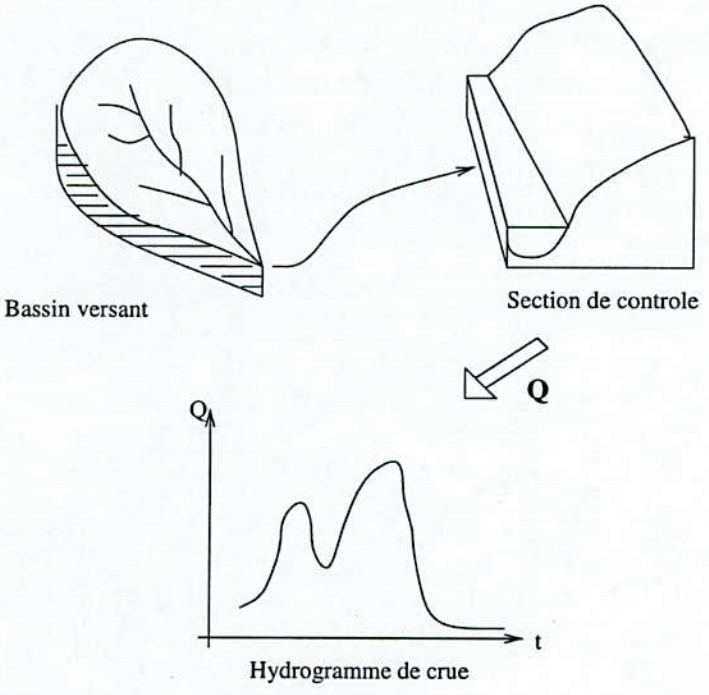



FIG. 1.4 – *Principe de la réponse hydrologique d'un bassin versant*

En fait, une averse tombant sur un bassin versant aura pour conséquence, en une station de contrôle située sur le cours d'eau, une réponse pouvant être nulle (absence de modification de l'écoulement ou absence de crue) ou positive (écoulement modifié ou crue). En fonction de ce qui a été vu précédemment, cette réponse peut être [68]:

- *Rapide*: La réponse rapide est imputable aux écoulements de surface ou, par exemple, à un effet piston, ou encore à l'effet de la macroporosité du sol.
- *Retardée*: C'est notamment le cas lorsque la réponse hydrologique est due principalement aux écoulements souterrains.

  De plus, la réponse peut être différenciée selon que cette dernière est :
- *Totale*: Dans ce cas, la réponse hydrologique est composée à la fois par des écoulements de surface et souterrains.
- *Partielle*: c'est à dire lorsque la réponse est la résultante d'un ou l'autre des processus décrit précédemment.

## 1.3 Transformation de la pluie en hydrogramme de crue

Dans le cadre d'une description des processus selon le principe établi par Horton, la transformation de la pluie en hydrogramme (representation de debits dans le temps) de crue se traduit par l'application successive de deux fonctions, nommées respectivement fonction de production et fonction de transfert.

- La fonction de production permet de déterminer le hyétogramme (distribution dans le temps de l'intensite d'une pluie) de pluie nette à partir de la pluie brute.
- La fonction de transfert permet quant à elle de déterminer l'hydrogramme de crue résultant de la pluie nette (la pluie nette est la fraction de pluie brute participant totalement à l'écoulement) (Figure 1.5).

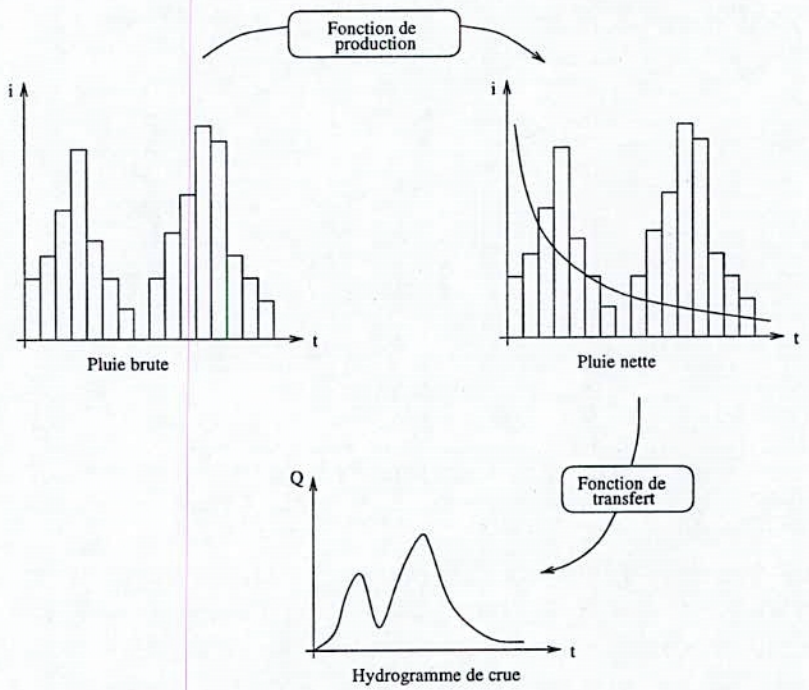



FIG. 1.5 – *Transformation de la pluie en hydrogramme de crue*

Le passage du hyétogramnme de pluie à l'hydrogramme de crue fait intervenir toutes les caractéristiques météorologiques, physiques et hydrologiques du bassin versant considéré. Dès lors, on comprendra aisément que la détermination d'une relation analytique rigoureuse entre précipitations et débits est une tâche très difficile. Toutefois, l'analyse de séries de couples pluies-débits permet d'obtenir des informations pertinentes sur la fonction de transfert du bassin versant.

L'hydrogramme de crue présente la forme générale d'une courbe en cloche dissymétrique (figure 1.6) que l'on divise en quatre parties : tarissement (avant la pluie nette),

crue, décrue et tarissement (après la recension hydropluviométrique étudiée).

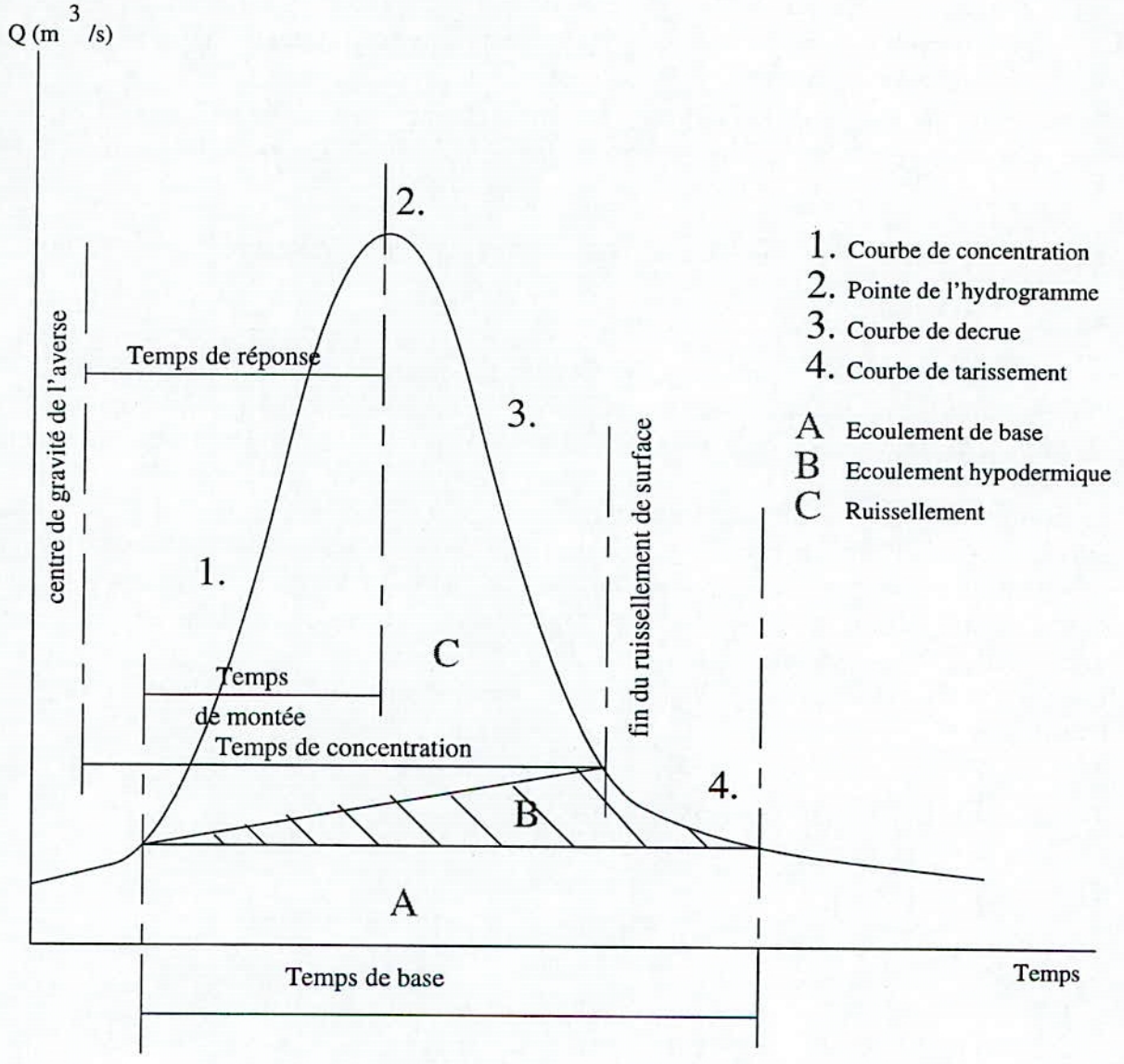



FIG. 1.6 – *Hydrogramme de crue*

On définit alors des temps caractéristiques:

- *Temps de réponse du bassin $t_p$ (ou "lag")* - Intervalle de temps qui sépare le centre de gravité de la pluie nette de la pointe de crue ou parfois du centre de gravité de l'hydrogramme dû à l'écoulement de surface.
- *Temps de concentration $t_c$* - Temps que met une particule d'eau provenant de la partie du bassin la plus éloignée "hydrologiquement" de l'exutoire pour parvenir à

celui-ci. On peut estimer $t_c$ en mesurant la durée comprise entre la fin de la pluie nette et la fin du ruissellement direct (i.e. fin de l'écoulement de surface).

- *Temps de montée* $t_m$ - Temps qui s'écoule entre l'arrivée à l'exutoire de l'écoulement rapide (décelable par le limnigraphe) et le maximum de l'hydrogramme dû à l'écoulement de surface.
- *Temps de base* $t_b$ - Durée du ruissellement direct, c'est-à-dire la longueur sur l'abscisse des temps de la base de l'hydrogramme dû à l'écoulement de surface.

## 1.4 Etude des écoulements: rappels sur l'hydraulique fluviale

Les écoulements de l'eau dans les réseaux de drainage sont à surface libre. Ils font l'objet principal de l'hydraulique fluviale. Ceux sont des écoulements turbulents et tridimensionnels. La vitesse de l'eau varie en intensité et en direction dans le temps et dans l'espace.
La compréhension des phénomènes hydrodynamiques passe par la maîtrise de plusieurs paramètres, à savoir, l'action combinée du frottement au fond et du vent en surface, des accélérations locales et l'accélération de Coriolis, de la turbulence de l'écoulement et de la stratification, etc, autant de facteurs à mettre en évidence pour disséquer le comportement de l'eau en mouvement.
Pour toutes ces raisons, on va donner certains rappels qu'on utilisera tout en long de ce travail [28].

### 1.4.1 Définitions et notations

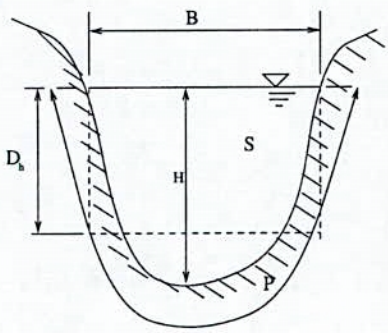



FIG. 1.7 – *Eléments géométriques*

• **Section mouillée** $S_m$: une portion de la section transversale occupée par le liquide.

• **Périmètre mouillé** $P_m$: la longueur de la ligne de contact, la surface mouillée et le lit de rivière mais ne comportant pas la surface libre.

• **Rayon hydraulique $R_h$:** caractéristique géométrique du canal, est une unité référentielle à un canal cylindrique. Il permet l'homogénéisation de la section transversale le long du canal. Il est donnée par le quotient de la surface mouillée et le périmètre mouillé, donc:

$$R_h = \frac{S_m}{P_m}$$

• **Largeur superficielle B:** est la largeur du canal à sa surface libre.

• **Profondeur hydraulique $D_h$ :** est une hauteur calculée en considérant que le canal est de forme rectangulaire. Elle est donnée par le quotient entre la surface mouillée et la largeur du canal.

$$D_h = \frac{S_m}{B}$$

• **Débitance:** Elle représente la mesure de la capacité du transport d'eau dans une section transversale.

$$K = \frac{Q}{\sqrt{J}}$$

avec,
$Q$: le débit
$J$ : la pente hydraulique

• **Nombre de Froude:** c'est le rapport entre les forces d'inertie et de pesanteur.

$$Fr = \frac{Q}{S_m\sqrt{gH}}$$

ou pour un canal très large

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

avec,
U, H sont respectivement la vitesse et la hauteur de l'écoulement.

* $Fr > 1$ : l'écoulement est supercritique ou torrentiel
* $Fr < 1$ : l'écoulement est subcritique ou fluvial
* $Fr = 1$ : l'écoulement est critique

• **Nombre de Reynolds:** c'est le rapport entre les forces d'inertie et de viscosité.

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

avec,
$D$ : le diamètre hydraulique
$\nu$: la viscosité cinématique moléculaire du fluide.

* $Re < 2000$ : écoulement laminaire
* $2000 < Re < 2300$ : écoulement de transition
* $Re > 2300$ : écoulement turbulent

### 1.4.2 Régimes d'écoulements

Une classification des écoulements peut se faire selon la variation de la profondeur, $H$ ou $D_h$, par rapport au temps et à l'espace.

• **Variabilité dans le temps**

Le mouvement est permanent si les vitesses, moyenne U, et ponctuelle u, ainsi que la profondeur $H$ ou $D_h$ restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent, le débit est constant : $Q = U.S_m$, entre les diverses sections du canal sans apport latéral (figure 1.8) .

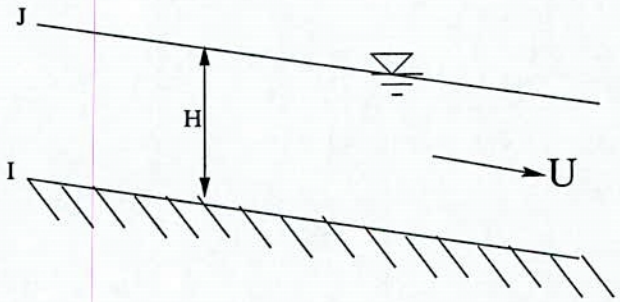



FIG. 1.8 – *Ecoulement permanent*

L'écoulement est non permanent si la profondeur,$D_h$, ainsi que les autres paramètres varient avec le temps. Par conséquent le débit n'est pas constant. Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent, néanmoins, les variations temporelles sont souvent suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme permanent, du moins dans un intervalle de temps relativement court (figure 1.9) [28].

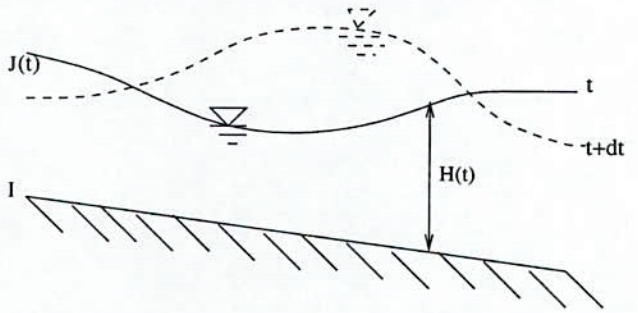



FIG. 1.9 – *Ecoulement non-permanent*

• **Variabilité dans l'espace**

Le mouvement est uniforme, si la profondeur $D_h$ ainsi que les autres paramètres, restent invariables dans les différentes sections du canal. La ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a $I = J$.

Le mouvement est non uniforme ou varié si la profondeur Dh, ainsi que les autres paramètres, changent dans les diverses sections du canal. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre, $I \neq J$.

### 1.4.3 Propriétés générales de l'écoulement

• **Répartition de la vitesse**

La distribution de la vitesse dans une section du canal dépend de différents facteurs, tels que la forme de la section, la rugosité du canal et de la présence des courbures. Dans un canal large, l'écoulement peu profond ou dans un canal très lisse, la vitesse maximale peut souvent être trouvée sur la surface libre ou au dessous (près) de la surface libre. Sur une courbure du canal, la vitesse augmente considérablement sur le côté convexe, dû à l'action centrifuge de l'écoulement (figure 1.10)[28].

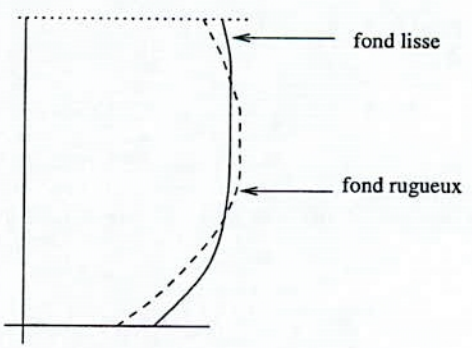



FIG. 1.10 – *Répartition de la vitesse*

Et plus précisément, la forme des courbes de répartition des vitesses dans une section transversale est un profil logarithmique par domaine ($z < 0.2h$ et $z \geq 0.2h$). Nulle à la

paroi, la vitesse ponctuelle $u$ croit rapidement et elle atteint sa valeur maximale soit à la surface ou proche de la surface libre (figure 1.11) [28].

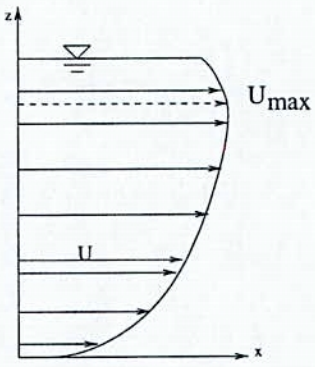



FIG. 1.11 – *Profil logarithmique de la vitesse*

• **Répartition de la pression**

La distribution de la pression à la section transversale du canal est identique à la distribution de la pression hydrostatique ; c'est à dire, la distribution est linéaire et peut être représentée par une ligne droite AB (figure 1.12) [11].

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho g z cos\alpha + p_f) = 0 \tag{1.1}$$

Il résulte: $\rho g z cos\alpha = -p_f$ et au fond: $p_f = \rho g h cos\alpha$

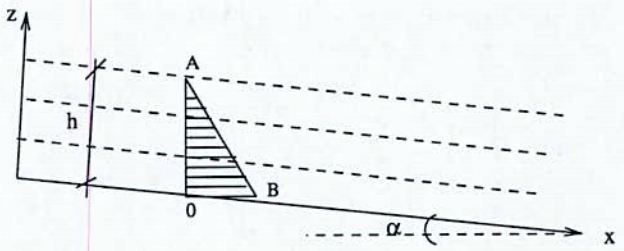



FIG. 1.12 – *Répartition de la pression- écoulement uniforme*

Proprement dit, l'application de la loi hydrostatique pour la distribution de pression dans une section d'un canal est valable sauf si les couches de l'écoulement n'ont aucune composante d'accélération dans le plan de la section. En présence des courbures, l'écoulement est théoriquement connu en tant qu'écoulement curviligne. L'effet de la courbure doit produire des composantes d'accélération ou des forces centrifuges normales à la direction de l'écoulement. Un écoulement curviligne peut être convexe ou concave. Dans

les deux cas, la distribution non linéaire de pression est représentée par la ligne AB' (figures 1.13 et 1.14) au lieu de la distribution droite AB. Il est supposé que toute les lignes d'écoulement sont horizontales à la section d'étude.

$$V.\frac{V}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{n}(p + \rho gz) \tag{1.2}$$

$\frac{V^2}{r}$ est l'accélération centrifuge d'une masse qui se déplace selon une ligne courbe.

$$p + \rho gz = -\rho \int_0^z \frac{V^2}{r} dn + C^{te} = -\rho \frac{V^2}{r} z + C^{te}$$

Pour un point au fond du canal ($z = 0$), la pression $P = P_f$ et pour un point de la surface libre ($z = h$) la valeur de la pression $P = P_{atm}$ , on écrit:

$$P_f = \rho gh + \rho \frac{V^2}{r} h \tag{1.3}$$

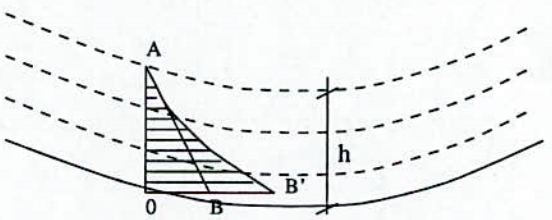



FIG. 1.13 – *Répartition de la pression- écoulement concave*

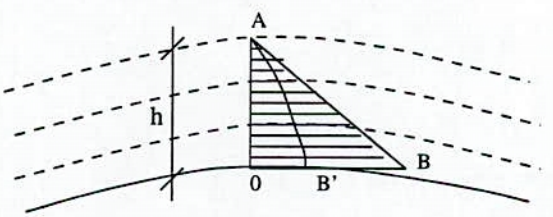



FIG. 1.14 – *Répartition de la pression- écoulement convexe*

### 1.4.4 Forme de la surface libre

Les écoulements graduellement variés sont caractérisés par une variation progressive des divers paramètres hydrauliques le long du courant.
La courbe représentant la ligne d'eau d'un tel mouvement est généralement appelée courbe de remous; le remous en un point est la différences entre la profondeur du courant et la profondeur normale du régime uniforme pour le débit considéré.
La courbe de remous est parfois appelée "*axe hydraulique*" ou "*ligne d'eau*"[9]. Pour définir la forme de la surface libre, il est utile de définir certaines notions.

- **Régime uniforme et éléments normaux d'un écoulement uniforme**

On appelle profondeur normale $h_n$ pour le débit $Q$ et la pente géométrique $I$, la profondeur du courant dans la partie uniforme du mouvement. La surface libre, parallèle au fond et distante de celui ci de $h_n$, définit le niveau normal $N_n$ correspondant.
D'une manière générale, on désigne par éléments normaux, les éléments géométriques de la section ($R_h$,$S_m$,P,....) correspondant à la profondeur $h_n$. Elle se calcule en associant les deux formules suivantes:

Formule de l'écoulement en régime uniforme (Chézy): $U = C\sqrt{R_h I}$
Formule du débit: $Q = U.S_m$
Soit $Q = S_m C\sqrt{R_h I} = f(h)$

avec, $C$: le coefficient de Chézy donné par la formule de Manning: $C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}$
$n$: désigne le coefficient de Manning.

Pour un canal de pente et de rugosité données, à chaque valeur du débit Q correspond une valeur définie de la profondeur normale $h_n$ déduite des formules ci-dessous.
Si $Q$ varie, $h_n$ varie également et dans le même sens que $Q$. La courbe $h_n(Q)$ a l'allure indiquée (figure 1.15), c'est la courbe des profondeurs normales.

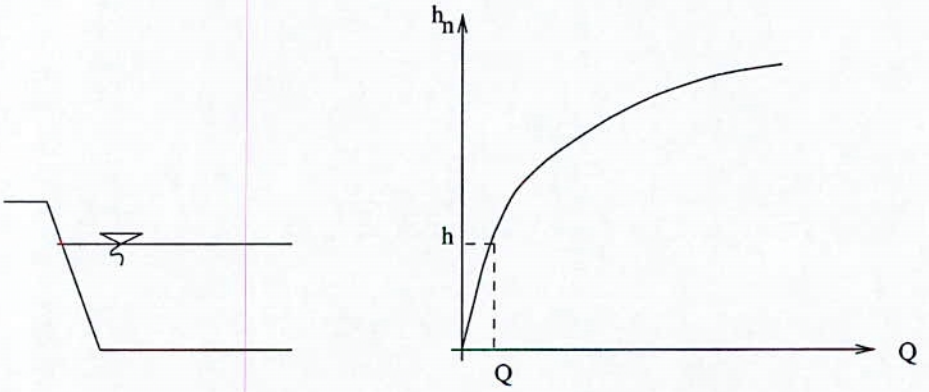



FIG. 1.15 – *Courbe des profondeurs normales*

La relation $Q = U.S_m = S_m C\sqrt{R_h I}$ montre que le régime uniforme n'est possible qu'en canal descendant ($I > 0$).
Pour $I = 0$ (canal horizontal), la profondeur normale serait infinie. Lorsque le régime n'est plus uniforme, la profondeur dans une section déterminée diffère de $h_n$. Lors de l'étude des régimes variés, le régime uniforme, même s'il n'apparaît pas, sera toujours choisi comme référence, sa profondeur constituera un paramètre entièrement défini, une fois données le débit et les caractéristiques du canal[12].

- **Energie spécifique et régime critique d'écoulement**

L'énergie spécifique (charge spécifique) dans une section transversale mouillée est la valeur moyenne de l'énergie des molécules du liquide de cette section par unité de poids du liquide, cette énergie étant rapportée à l'axe horizontal passant par le point le plus bas de la section. Cette notion de l'énergie spécifique joue un rôle essentiel dans l'étude des écoulements variés. Considérons une section transversale S et désignons par (figure 1.16) :
$U$ : la vitesse moyenne dans cette section,
$H$ : la profondeur maximale,
$I$ : la pente du fond.

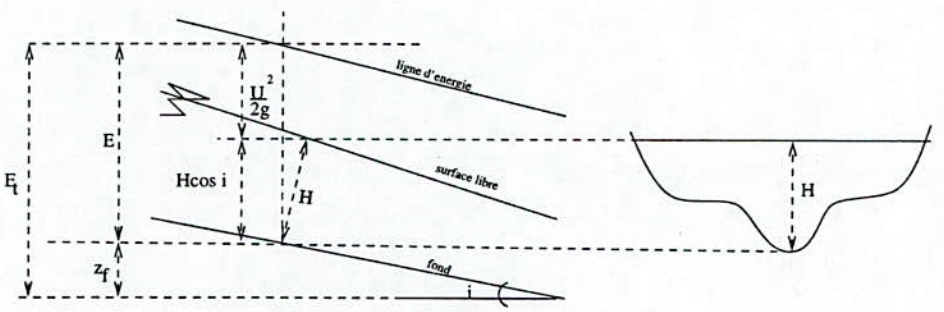



FIG. 1.16 – *Energie spécifique*

Par définition, l'énergie spécifique dans la section S sera :

$$E = H + \frac{U^2}{2g} \tag{1.4}$$

Où, en introduisant le débit Q:

$$E = H + \frac{Q^2}{2g{S_m}^2} \tag{1.5}$$

Si on désigne par $z_f$ la cote du point le plus bas et par $E_t$ l'énergie totale dans cette section, on voit que :

$$E_t = E + z_f \tag{1.6}$$

L'énergie spécifique représente donc la distance verticale de la ligne d'énergie au point le plus bas de la section.

L'équation (1.5) s'écrit:

$$Q^2 = 2gS_m{}^2(E - H) \tag{1.7}$$

Ce qui montre que $Q$ est nul pour $S_m = 0$, c'est dire H=0 ou H=E.
La valeur maximale de $Q$ s'obtiendra en annulant la dérivée de $\frac{Q^2}{2g}$ par rapport à $H$, soit :

$$\frac{d}{dH}\left(\frac{Q^2}{2g}\right) = \frac{d}{dH}\left[S_m{}^2(E - H)\right] = 0 \tag{1.8}$$

$$2S_m\frac{dS_m}{dH}(E - H) - S_m{}^2 = 0 \tag{1.9}$$

avec, $\frac{dS_m}{dH} = B$, largeur superficielle de la section.

Ou enfin,

$$\frac{Q^2B}{gS_m{}^3} = 1 \tag{1.10}$$

Il y correspond pour la profondeur h une valeur $h_c$ qu'on appelle "profondeur critique" et le régime correspondant, caractérisé par l'équation (1.10) est le "régime critique". La profondeur critique $h_c$ pour un canal donné est donc celle correspondant :

- Au débit maximal pour une énergie spécifique donnée.
- A l'énergie spécifique minimale pour un débit donné [9].

Lorsque la profondeur $h$ prend la valeur $h_c$, on dit que le régime critique est atteint ; la surface libre occupe alors le " niveau critique" $N_c$. On appellera les éléments critiques les éléments géométriques de la section ($R_h$,$S_m$,B...) calculés pour la profondeur $h_c$.

**• Equation différentielle du mouvement**

L'équation différentielle du mouvement permanent se déduit en appliquant le théorème de Bernoulli entre deux sections S1 et S2 de l'écoulement[9].

$z_1$ et $z_2$ étant les côtes du fond respectivement en $S_1$ et $S_2$.
L'équation de Bernouilli appliquée entre $S_1$ et $S_2$ permet décrire:

$$E_1 + z_1 = E_2 + z_2 + J\triangle s \tag{1.11}$$

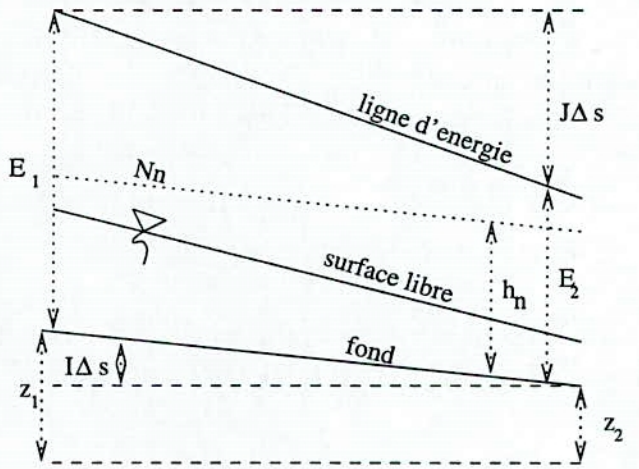



FIG. 1.17 – *Calcul de l'énergie spécifique*

En posant:

$E_1 - E_2 = \triangle E, \qquad z_{1-}z_2 = I\triangle s$

il vient: $\triangle E = I\triangle s - J\triangle s$

et à la limite: $\dfrac{dE}{ds} = I - J$

on peut écrire:

$$\frac{dE}{ds} = \frac{\partial E}{\partial H}\frac{dH}{ds} = \frac{\partial}{\partial H}\left(H + \frac{Q^2}{2gS_m{}^2}\right)\frac{dH}{ds} = \left(1 - \frac{Q^2}{2gS_m{}^3}\frac{\partial S_m}{\partial H}\right)\frac{dH}{ds} \tag{1.12}$$

$$\frac{dE}{ds} = I - J = \left(1 - \frac{Q^2}{2gS_m{}^3}\right)\frac{dH}{ds} \tag{1.13}$$

et finalement :

$$\frac{dH}{ds} = I\frac{1 - \dfrac{J}{I}}{1 - \dfrac{Q^2B}{gS_m{}^3}} \tag{1.14}$$

- **Classification des lignes d'eau**

L'équation (1.14) est donc l'équation différentielle $ds = f(H)dH$ de la ligne d'eau en mouvement graduellement varié pour un écoulement en régime permanent à filets sensiblement parallèles se déplaçant en bloc en canal uniforme et de faible pente. Les courbes intégrales de l'équations (1.14) sont représentées par la figure (1.18) en fonction de la

pente du lit et pour un débit donné (échelle verticale exagérée). Les écoulements graduellement variés sont groupés en différentes classes. En cas d'un canal descendant $I > 0$, parcouru par un débit donné, l'allure des courbes dépend essentiellement:

- de la valeur comparée de la pente $I$ du lit et de la pente critique $I_c$.
- de la position de la ligne d'eau par rapport aux niveaux $N_n$ et $N_c$

Ces types de courbes seront donc repérables à l'aide d'une double classification. On caractérisera la classe du phénomène par une lettre majuscule M, S et C dépendant de la pente:

| | | |
|---|---|---|
| M | pour | $I < I_c$ |
| S | pour | $I > I_c$ |
| C | pour | $I = I_c$ |

et l'on présentera par un chiffre, allant de 1 à 3, la région susceptible d'être occupée par la ligne d'eau. Dans le cas général, en effet, les droites $N_n$ et $N_c$ séparent l'espace occupé par le liquide en trois régions, numérotées de 1 à 3 en allant de la surface vers le fond, la région 1 étant au dessus de $N_n$ et $N_c$, la région 3 en dessous, et la région 2 entre $N_n$ et $N_c$, cette dernière disparaissant cependant pour la classe C. Il y a donc un total de huit régions distinctes, chacune d'elles sera, en définitive, repérée par un symbole, tel que S2, associant la lettre de la classe au numéro de la région. On joigne aussi les deux classes suivantes, correspondant aux pentes nulles ou négatives. ($I \leq 0$)

| | | |
|---|---|---|
| Classe H | pour | $I = 0$ |
| Classe A | pour | $I < 0$ |

La classe C représente la limite commune des courbes M et S avec disparition de la région 2 par suite de la coïncidence du niveau normal et du niveau critique. Les courbes H et A constituent un cas limite des courbes M pour lesquelles la région 1 a disparu, la profondeur normale n'étant pas définie en canal horizontal ou ascendant, puisque le régime uniforme n'y est pas possible. Une étude des conditions aux limites de l'équation différentielle (1.14), nous permettera de noter préalablement que le numérateur $1 - \frac{J}{I}$ s'annule pour $h = h_n$ et que son dénominateur $1 - \frac{Q^2 B}{g S_m{}^3}$ s'annule pour $h = h_c$. Soulignons enfin que l'expression $\frac{S_m{}^3}{B}$ est une fonction croissante de la profondeur, au moins pour les sections rectangulaires ou évasées vers le haut. Dans l'étude de ces conditions aux limites, il conviendra de considérer comme dénués de toute signification physique, les arcs de courbe pour lesquels les hypothèses de base cessent d'être valables, c'est à dire ceux de faible profondeur. Ces arcs de courbes sont, de ce fait, représentés en pointillés [12].

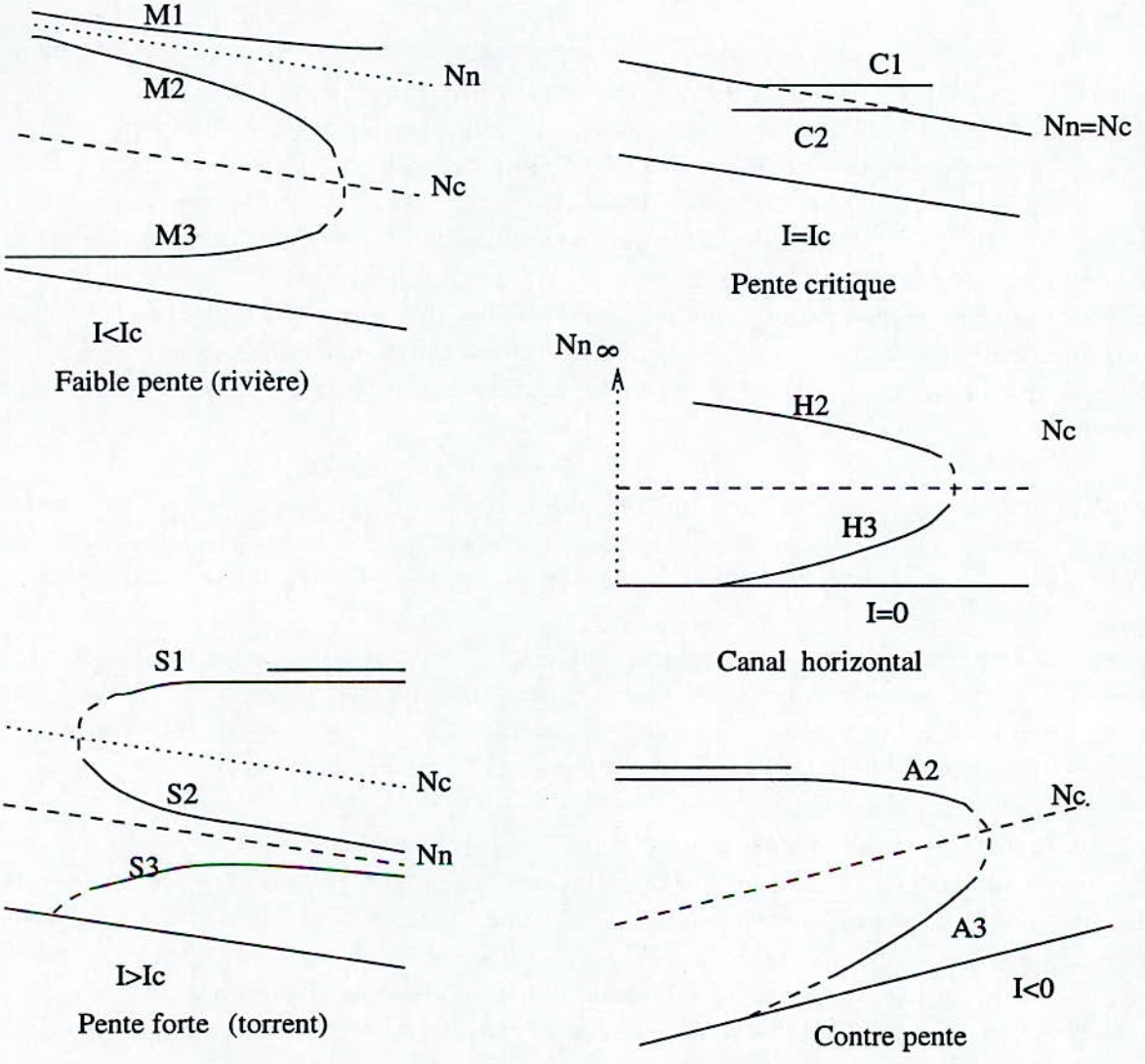



FIG. 1.18 – *Lignes d'eau du régime graduellement varié en canal uniforme*

## 1.5 Turbulence et couche limite

Les écoulements de l'eau sont trés complexes. Ils font intervenir de nombreux phénomènes, tel que la turbulence.

### 1.5.1 Turbulence: c'est quoi?

Avant de donner une définition précise, examinons deux exemples. Lorsque nous ouvrons doucement un robinet, le filet d'eau qui coule est lisse et homogène: il s'agit d'un écoulement laminaire. Puis, si nous ouvrons davantage, l'écoulement devient irrégulier et sineux: nous sommes en présence d'un écoulement turbulent. Ce même phénomène s'observent avec la fumée de cigarette: juste au dessus de la cigarette, son écoulement est laminaire mais, un peu plus haut, la fumée ondule de manière complexe turbulente.
Un écoulement turbulent est donc composé de "filets fluides" qui au lieu de conserver leur individualité en glissant uniquement les uns sur les autres comme dans un écoulement laminaire, échangent entre eux des particules fluides. Ainsi, le fluide zigzague, s'enroule sur lui même et semble se déplacer au hazard autour de la direction générale de l'écoulement [8].

Cet état désordonné survient en réalité lorsque la vitesse du fluide devient supérieure à une limite au delà de laquelle la viscosité ne suffit plus à régulariser les mouvements. Ainsi, l'écoulement est caractérisé par le nombre adimensionnel de Reynolds [8].

La définition suivante est proposée par Hinze: " *Le mouvement turbulent d'un fluide représente une condition irrégulière de l'écoulement, dans lequel les diverses grandeurs présentent des variations aléatoires dans l'espace et dans le temps, de telle sorte que des valeurs moyennes statiquement distinctes puissent être évoluées*" [27].

La turbulence joue un rôle majeur dans l'écoulement des fluides réels. En mouvement turbulent, l'intensité et la direction de la vitesse ponctuelle varient sans aucune régularité. La turbulence n'est pas une propriété intrinsèque du fluide, sauf à travers la viscosité, mais elle dépend de la mémoire de l'écoulement. La force de frottement due à la turbulence est la plupart du temps supérieure à celle due à la viscosité. Par conséquent, la perte de charge engendrée par la turbulence est en général plus importante que celle engendrée par la viscosité [27].

Pour un écoulement turbulent, la vitesse en un point, $(u, v, w)$, indique que les fluctuations aléatoires de haute fréquence, $(u', v', w')$ se superposent à des vitesses moyennes temporelles, $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$. Ainsi, on considère que la vitesse instantannée, $u$, est la somme d'une vitesse moyenne, $\overline{u}$, et d'une vitesse due au fluctuations, $u'$, on écrit [27]:

$$\begin{cases} u = \overline{u} + u' \\ v = \overline{v} + v' \\ w = \overline{w} + w' \end{cases} \tag{1.15}$$

et pour la pression,

$$p = \overline{p} + p' \tag{1.16}$$

Les valeurs moyennes de la vitesse et de la pression instantannées sont définies par les relations suivantes:

$$\begin{cases} \overline{u} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u dt \\ \overline{v} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} v dt \\ \overline{w} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} w dt \\ \overline{p} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} p dt \end{cases} \tag{1.17}$$

L'intervalle de temps, T, doit être suffisament important pour englober un grand nombre de fluctuations de vitesse et le vecteur de vitesse moyenne doit conserver une valeur fixe quel que soit cet intervalle [27].

### 1.5.2 Equations de l'hydrodynamique pour un écoulement turbulent

Les équations de Navier-Stokes sont générales, donc applicables aux écoulements laminaires et turbulents. Cependant, pour un écoulement turbulent, les forces qui agissent sur un élément de volume doivent être complétées par des forces dues à la turbulence. Cela se fait en utilisant les valeurs instantannées de la vitesse et de la pression définies par le système (1.15) [27].

Au moyen de la définition des termes instantatnnés et leurs propriétés statistiques, on peut montrer que les valeurs moyennes temporelles des termes linéaires, tels que $\dfrac{\partial u'}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u'}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \dfrac{\partial v'}{\partial t}$,...etc.,et des termes mixtes tels que $\overline{u}u', \overline{v}v'$,...etc.,sont nulles. Par contre les termes quadratiques tels que $u'^2, u'v', u'w'$,...etc. restent différents de zéro.

Ensuite, en utilisant l'équation de la continuité, on obtient le système d'équations de Reynolds donné par:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{u}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\overline{u} - \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right)\right] \\ \dfrac{d\overline{v}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\overline{v} - \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\overline{v'u'}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\overline{v'w'}\right)\right] \\ \dfrac{d\overline{w}}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu\nabla^2\overline{w} - \left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\overline{w'u'}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\overline{w'v'}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'^2}\right)\right] \end{cases} \tag{1.18}$$

Avec les arguments précédents, l'équation de continuité pour un fluide incompressible, s'écrit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial v'}{\partial y} + \dfrac{\partial w'}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

En observant les équations de Reynolds, on constate que les vitesses moyennes d'un écoulement turbulent sont décrites par les mêmes équations que pour un écoulement laminaire, sauf que les tensions laminaires sont modifiées par des tensions supplémentaires, appellées aussi tensions virtuelles dues à la turbulence [27]. On peut donc les exprimer par un tenseur comme suit:

$$\tau = \mu \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial x}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial y}\right) \\ \left(\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right) \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

avec,
$\mu$ étant la viscosité dynamique du fluide
$\rho$ la masse volumique

Dans le système d'équations de Reynolds, on constate que, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Ces équations n'ont pas de solutions directes. On est confronté à un problème de fermeture où la principale difficulté réside dans la formulation adéquate des tensions de Reynolds. Etant donné qu'une formulation théorique est trop compliquée, des méthodes semi-empiriques (modèles de turbulence) basées sur des expériences ont été développées pour résoudre ce problème.

### 1.5.3 Modèles de turbulence

L'objectif de l'ensemble des modèles de turbulence consiste alors à estimer les termes fluctuants qui posent problème de fermeture du système d'équations, en utilisant un nombre réduit de nouvelles inconnues et d'équations correspondantes.

La première possibilité est de résoudre les équations exactes de ces termes d'ordre 2. Cependant, ces équations ne permettent pas la fermeture du système sans faire appel à des corrélations d'ordre de plus en plus élevé. Chaque corrélation d'ordre $m$ fait apparaître dans son équation de nouvelles corrélations d'ordre $(m+1)$. Nous avons donc affaire à une hierarchie infinie d'équations et pour résoudre le problème, nous sommes contraints d'introduire un modèle de fermeture [8].

Il est alors courant d'utiliser soit:

- des modèles de fermeture du premier ordre consistant à modéliser les corrélations en les reliant directement au mouvement moyen: ceux sont des modèles reposant sur le concept de la viscosité turbulente;
- des modèles de fermeture du second ordre, pour lesquels les équations des corrélations sont résolues après avoir modélisé directement les termes inconnus d'ordre 3.

Il existe un nombre relativement important de modèles de fermeture plus ou moins complexes. Nous allons présenter dans ce qui suit les caractéristiques principales des modèles les plus utilisés [8].

**• Les modèles reposant sur le concept de viscosité turbulente**

Les modèles issus de ce concept évaluent le tenseur de Reynolds à partir de quantités moyennes connues. C'est Boussinesq qui le premier en 1877 a proposé une analogie avec la loi de Newton qui postule la proportionnalité du tenseur des contraintes visqueuses $\tau_{ij}$ avec le taux de déformation à l'aide de la viscosité moléculaire dans le cas d'un écoulement visqueux en régime laminaire.

Le tenseur de Reynolds est donc supposé fonction du taux de déformation moyen par l'intermédiare d'une viscosité dynamique turbulente $\mu_t$ et fonction également de l'énergie cinétique turbulente $k$:

$$-\rho\overline{u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} \tag{1.21}$$

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_j u_j} \tag{1.22}$$

La viscosité dynamique turbulente $\mu_t$ appelée plus couramment viscosité turbulente, est une grandeur qui, contrairement à la viscosité moléculaire, n'est pas une propriété

physique du fluide; sa valeur change d'un point à l'autre selon le domaine et le type d'écoulement.

Le terme complémentaire $-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$ est introduit pour que, par contraction du tenseur de Reynolds, la modélisation soit correcte [67].

Le problème se résume maintenant à la détermination de la viscosité turbulente. C'est le choix de la forme de la viscosité qui différencie les modèles qui utilisent ce concept. En fait, ces modèles sont souvent classés selon le nombre d'équations de transport écrites pour les grandeurs turbulentes afin de déterminer la distribution de la viscosité turbulente. Nous avons choisi de décrire les plus connus: modèles du premier ordre à savoir, les modèles à 0 équation, à 1 équation et le modèle à deux équations de transport [8].

### a. Modèles à 0 équation

Ils consistent à relier les flux turbulents et les grandeurs moyennes sans introduire de nouvelle équation. On peut relier linéairement les tensions de Reynolds et le gradient de la vitesse. La viscosité turbulente $\nu_t$ qui a pour dimension une longueur au carré sur le temps est proportionnelle à une échelle de vitesse turbulente $\widetilde{u}$ et une échelle de longueur $\widetilde{l}$ . Ces deux valeurs doivent être par ailleurs caractéristiques du mouvement turbulent de grande échelle (défini par les tourbillons de plus grande taille). On peut citer dans cette catégorie de modèles; le modèle de viscosité turbulente constante et le modèle de longueur de mélange. Ces deux modèle se basent sur le principe [8]:

$$\nu_t = A\,\widetilde{l}\,\widetilde{u} \tag{1.23}$$

avec, A une constante.

#### Modèle de viscosité turbulente constante

Dans ce modèle, la longueur $\widetilde{l}$ et la vitesse $\widetilde{u}$ caractéristiques sont remplacés respectivement par la hauteur de l'écoulement $H$ et la vitesse de frottement $u_*$.

et la viscosité turbulente s'écrit de nouveau:

$$\nu_t = C_\mu\, H\ \ u_* \tag{1.24}$$

$C_\mu$ , étant un coefficient semi-empirique.

#### Modèle de longueur de mélange

Pour ce modèle, la longueur $\widetilde{l}$ est caractéristique des plus grands tourbillons et la vitesse turbulente $\widetilde{u}$ est liée aux propriétés de l'écoulement moyen et plus particulièrement au gradient de vitesse moyen à l'origine du processus d'étirement des tourbillons de plus grande taille. Finalement, $\widetilde{u}$ est choisi de la façon suivante:

$$\widetilde{u} = B\widetilde{l}\left|\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right| \tag{1.25}$$

où, B est une constante.

En combinant (1.23) et (1.25) et en absorbant les deux constantes dans une nouvelle longueur caractéristique $l_m$ appelée "longueur de mélange ", il vient:

$$\nu_t = l_m^2\left|\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}\right| \tag{1.26}$$

La longueur de mélange $l_m$ , qui apparaît comme la seule inconnue du modèle, peut être déterminée empiriquement pour des cas simples à partir de la configuration géométrique du domaine [8].

### b. Modèle à 1 équation: modèle de Prandtl

Ces modèles ont pour avantages d'être assez simple et de prendre en compte l'histoire de la turbulence mais le choix de l'echelle est empirique et l'extension au cas tridimensionnel est difficile. Dans le modèle de Prandtl, la vitesse $\widetilde{u}$ caractéristique est remplacée par $\sqrt{k}$ ( $k$ étant l'énergie cinétique) et la longueur $\widetilde{l}$ doit être spécifiée dans chaque cas particulier d'écoulement, elle est, en général choisie proportionnelle à l'épaisseur de l'écoulement et le coefficient de proportionnalité varie d'un écoulement à l'autre. Dans un écoulement de paroi Prandtl pose $\widetilde{l} \simeq y$, on écrit l'équation de $\nu_t$ comme suit [51]:

$$\nu_t = C_\mu\, y\, \sqrt{k} \tag{1.27}$$

$k$ : l'énergie cinétique turbulente, est obtenue par son équation de transport modélisée:

$$\frac{dk}{dt} = \nu_t \left(\overline{U}_{1,2}\right)^2 + \left(\frac{\nu_t}{h_k} k_{,2}\right)_{,2} - \frac{k^{3/2}}{y} \tag{1.28}$$

$C_\mu$ est le coefficient empirique $h_k = 1,5$

### c. Modèle à 2 équations: Modèle $k\varepsilon$

Pour dépasser les limitations du modèle précédent, il existe des modèles de turbulence qui prennent compte le transport des quantités turbulentes en leurs associant des équations de transport différentielles. Le modèle de fermeture $k\varepsilon$ fait partie de cette catégorie de modèles. Dans ce modèle, l'approche dimensionnelle (1.23) pour la viscosité turbulente $\nu_t$ est également utilisé.

La vitesse turbulente $\widetilde{u}$ caractéristique des tourbillons de plus grande taille est choisie égale à $\sqrt{k}$,l'énergie cinétique turbulente $k$, compte tenu de sa définition, une mesure directe de l'intensité des fluctuations turbulentes dans les trois directions.

La longueur $\widetilde{l}$ caractéristique des plus grands tourbillons de plus grande taille est choisie égale à $\left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}\right)$ où, $\varepsilon$ est le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente:

$$\varepsilon = \nu_t \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \tag{1.29}$$

La viscosité turbulente est alors donnée par la relation semi-empirique suivante qui constitue l'hypothèse du modèle $k\varepsilon$ :

$$\nu_t = C_\mu \, \rho \, \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{1.30}$$

Rappelons que $C_\mu$ est un coefficient semi-empirique.

Les deux grandeurs transportées du modèle $k\varepsilon$ sont donc l'énergie cinétique turbulente $k$ et le taux de dissipation de cette énergie [8].

### 1.5.4 Notion de la couche limite

Dans la plupart des écoulements, on a affaire à une surface imperméable. Il s'agit de l'étude de l'écoulement d'un fluide visqueux à la paroi solide. Par phénomène d'adhérence du fluide à la paroi, la vitesse de l'écoulement, par rapport à la paroi, tend vers 0. Cela signifie qu'il y a une zone proche de la paroi où les effets de frottements interne du fluide sont importants. Cette zone s'appelle *"la couche limite"*.

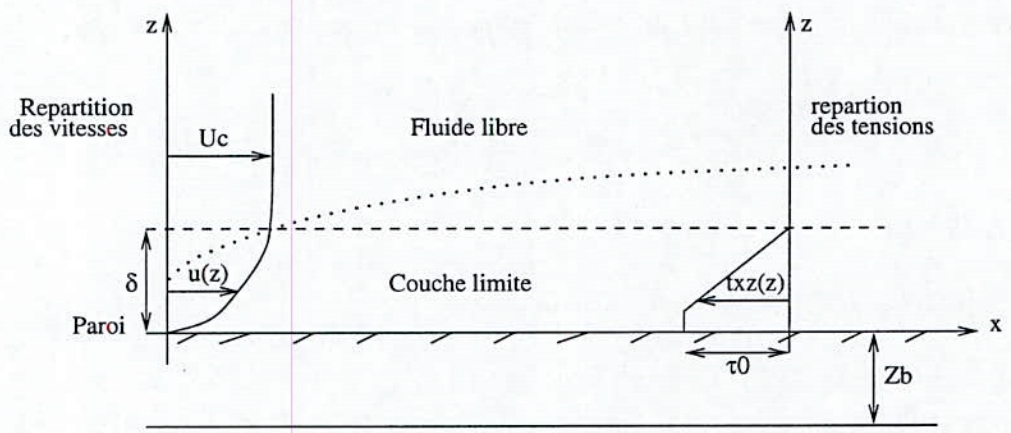



FIG. 1.19 – *Couche limite sur une paroi plane*

L'écoulement à l'intérieur de la couche limite peut se développer de façon laminaire ou turbulente. Un écoulement laminaire est caractérisé par des trajectoires de particules de fluide stables et régulières produisant des couches de fluide contiguës qui glissent les unes

sur les autres et ne se mélangent pas. Par contre, un écoulement turbulent est irréglier. La valeur des variables de l'écoulement comme le vecteur vitesse, la pression, etc. varie aléatoirement autour d'une valeur moyenne établie par rapport aux coordonnées de temps et d'espace. Lors de l'évolution de la couche limite le long d'une paroi, la première partie de la couche est laminaire ( sous couche visqueuse). Puis une zone de transition laminaire-turbulente se développe dans le sens de l'écoulement; au-delà de cette zone la couche limite devient turbulente [49].

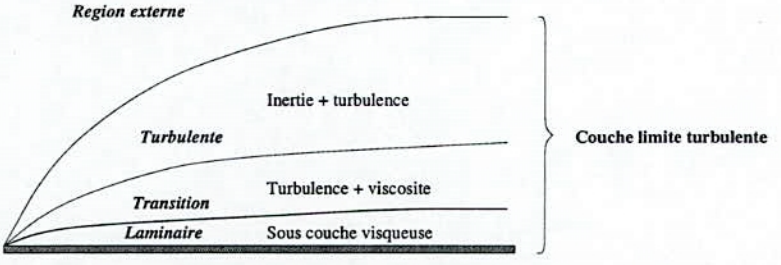



FIG. 1.20 – *Sous Couches d'une couche limite turbulente*

Considérons la couche limite turbulente sur une plaque plane parfaitement lisse. Les expériences montrent que la distribution de la vitesse moyenne dans la couche est constituée de trois zones distinctes citées ci-dessus.

- Dans le *domaine (1)*, à proximité immédiate de la paroi, seul le terme visqueux demeure le terme convectif et le terme turbulent sont négligebles. Ainsi, à la limite $y \to 0$, le profil de vitesse est linéaire.
- Pour le *domaine (2)*, le terme visqueux et le terme turbulent sont du même ordre et le terme convectif est négligeable. Le profil de vitesse est logarithmique.
- Quand au *domaine (3)*, le terme visqueux est négligeable, le terme turbulent et le terme convectif sont du même ordre et la distribution de la vitesse est sensiblement conditionnée par la présence du gradient de pression puisque la vitesse moyenne (dans la couche limite) s'approche de la vitesse de l'écoulement [49], [55].

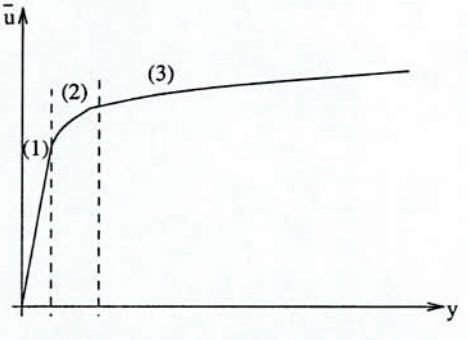



FIG. 1.21 – *Profil de vitesse aux trois zones de la couche limite*

# Chapitre 2

# Modélisation mathématique en hydraulique fluviale

Le problème est d'apparence simple, il est composé par les équations de Navier-Stokes, il est resté longtemps indéchiffrable. Depuis la fin du XIXème siècle et pendant longtemps, seules l'expérimentation et les études sur les modèles réduits ont permis de faire avancer l'état des connaissances en hydraulique, maritime aussi bien que fluviale. Pour utiles qu'ils soient , les modèles réduits souffrent toute fois de quelques inconvénients, par exemple leur prix et le délais de mise en uvre. De plus, les lois de similitude obtenues par des considérations théoriques où le choix des échelles, mettent en évidence des limitations insurmontables: certains phénomènes physiques comme la propagation des vagues et la turbulence, ne peuvent être reproduits rigoureusement sur un même modèle, à moins bien sûr de choisir l'échelle 1. L'idée de la simulation numérique, portée par les progrès exponentiels de l'informatique, s'annonçait donc croissante: plus de limitation théorique, des coûts et des délais bien inférieurs. Les modèles réduits sont aujourd'hui encore des outils indispensables. Si l'on fait remonter à une trentaine d'années, les débuts de la simulation numérique en hydraulique forcé est donc de reconnaître que les espérances des premiers temps ont dû subir en route quelques déconvenues, comme dans les domaines de la traduction automatique ou de la démonstration de théorèmes. L'avancement de l'informatique et de l'outil numérique conjugué à l'expérience acquise sur les modèles physiques ont permis aujourd'hui de pousser plus en avant les limites de nos connaissances par la mise au point d'outils de simulation numérique à la fois précis et économiques [33].

La modélisation de l'hydrodynamique peut être répartie sur plusieurs volets en fonction des hypothèses formulées, de la complexité et surtout de la dimension du problème. La modélisation 1D ou filaire bien que très limitée est adaptée à des cas spécifiques. Elle restitue le débit et le niveau d'eau le long d'une courbe. Les modélisation 2D et 3D sont les plus recherchées puisqu'elles permettent l'accès à un champ d'application beaucoup plus étendu.

- **Modèles 2D**

Nous distinguons deux approches : les modèles 2D vertical et 2D horizontal. Le premier est obtenu au moyen d'une intégration des équations le long de la direction transversale à l'écoulement. On suppose une distribution uniforme des caractéristiques de l'écoulement le long de cette direction. Ce modèle restitue le champ de vitesse le long de la profondeur de l'écoulement. On peut également apporter une hypothèse supplémentaire à savoir une distribution hydrostatique de la pression ; celle-ci ne dépend que du poids de l'eau.

Le modèle 2D horizontal est le plus répondu dans la littérature. La vitesse est moyennée sur la verticale. Si on suppose une distribution hydrostatique de la pression, il s'agit alors du modèle de Saint-Venant. Ce modèle est populaire puisqu'il permet de reproduire les marées avec prise en compte des zones de couvrement et de découvrement, ainsi que les écoulements dans les fleuves et estuaires avec une bonne précision.

- **Modèles 3D**

Dans le cas d'un écoulement complètement tridimensionnel, il faut avoir recours à un modèle 3D, fleuron de la modélisation en hydrodynamique. Même dans ce cas de figure, on peut toujours apporter des hypothèses simplificatrices.

En supposant une répartition hydrostatique des pressions, soit une accélération verticale du mouvement négligeable, ce modèle permet de calculer un champ de vitesse quasi-horizontal variable suivant la profondeur en intensité et en direction. De plus, il permet de prédire également les courants secondaires. Ces derniers sont importants pour l'évaluation de l'érosion et du dépôt de sédiments au fond.

Enfin , le modèle 3D complet est le plus rare. Il regroupe quasiment tous les termes tout en faisant un minimum d'hypothèses sur le comportement de l'écoulement [31].

Le schéma suivant (figure 2.1) résume les différents modèles avec les hypothèses considérées:

## 2.1 Modèles de Navier-Stokes

### 2.1.1 Equations de base

Les équations de Navier-Stokes, qui traduisent la dynamique des fluides sont étudiées en général dans un domaine géométrique tridimensionnel, borné de deux types de frontière: le fond de la rivière (frontière solide) et sa surface (frontière libre). On note $X = (x1, x2, x3) = (x, y, z)$, les coordonnées d'un point de l'espace et t la variable temps. On note $D(t)$, le domaine d'étude et $\Gamma(t)$ sa frontière, $\Gamma_B(t)$ le fond de la rivière et $\Gamma_H(t)$ la surface libre [2].

En notant $u$ la vitesse, $\rho$ la masse volumique, $p$ la pression, $T$ la température, $\tau$ le tenseur de contraintes et $E_t$ l'énergie totale, les équations classiques de conservation et de mouvement du fluide nous donnent :

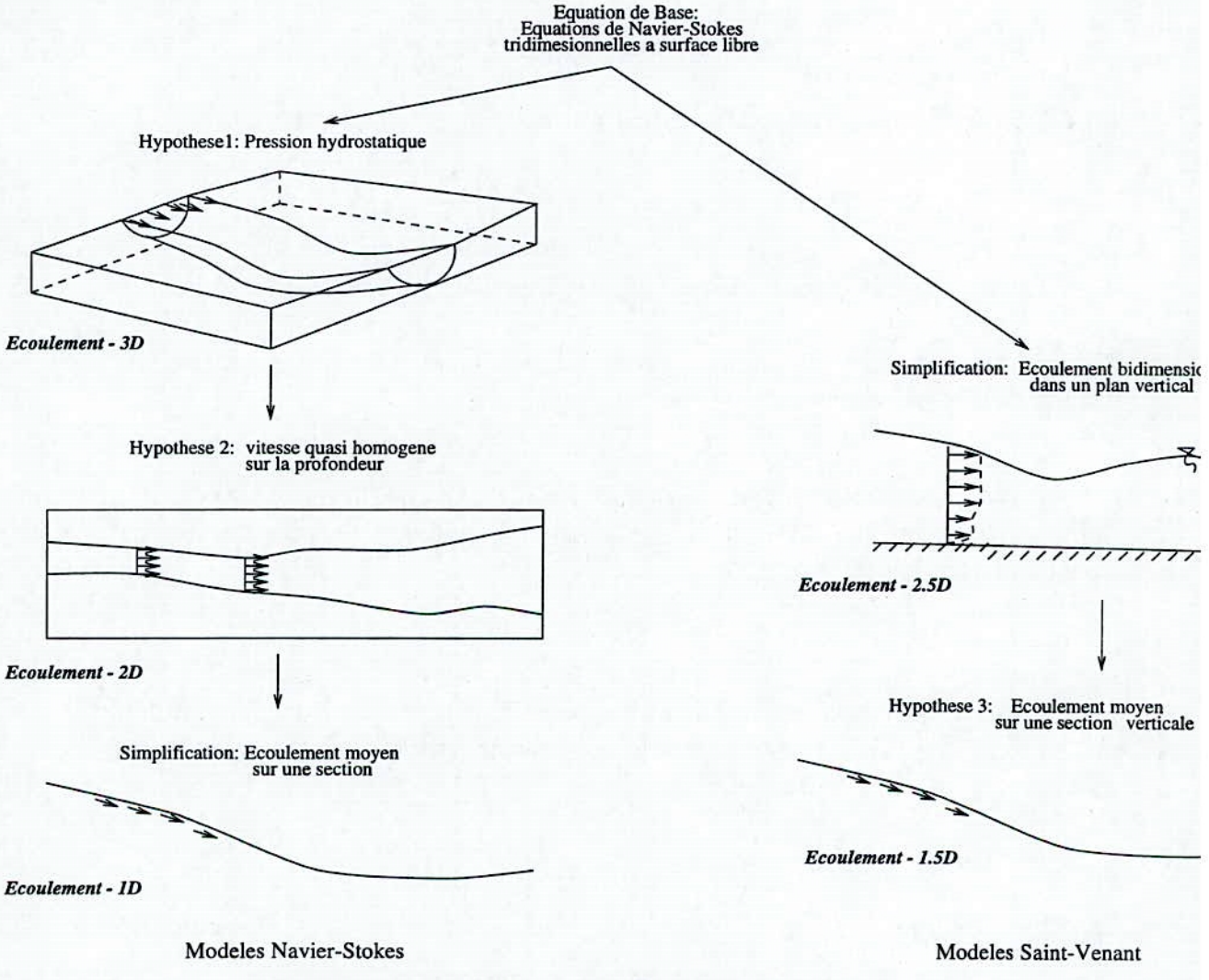



FIG. 2.1 – *Les différents modèles en hydraulique*

- **Equation de conservation de la masse**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho u) = M_G \qquad \text{dans } \mathcal{D} \tag{2.1}$$

$M_G$ représente l'apport éventuel de sources extérieures ou de vidange.

- **Equations de conservation de la quantité de mouvement**

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla.(\rho u u) = -\nabla p + \nabla.\tau + F \qquad \text{dans} \mathcal{D} \tag{2.2}$$

- **Equation de conservation de l'énergie**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_t) + \nabla.(\rho E_t) = \nabla.(\tau u) + \nabla.\zeta\nabla.(T) - \nabla.(pu) + \rho F.u \quad \text{dans } \mathcal{D} \tag{2.3}$$

avec, l'énergie totale $E_t$ donnée par: $E_t = e + \dfrac{u^2}{2}$

où,
$e$ est l'énergie spécifique interne,
$\zeta$ est la conductivité thermique.

On désigne par $F$ les forces extérieures y compris les forces qui agissent sur le continum fluide situé à l'intérieur d'un volume quelconque et limité par une surface fermée. Elles sont de deux types :

*Les forces de volume*

Ce sont les forces de pesanteur et les forces d'inertie traduisant l'action à distance du milieu extérieur sur le système. Ces forces sont constitueés généralement par la force de gravité et la force de Coriolis qui s'écrivent :

- Force de gravité :

$$\vec{f_g} = \rho \vec{g} \tag{2.4}$$

- Force de Coriolis :

$$\vec{f_c} = -2\rho \vec{\omega} \wedge \vec{u} \tag{2.5}$$

où, $\vec{\omega} = \underline{\omega}(\cos\varphi \vec{y} + \sin\varphi \vec{z})$ désigne le vecteur taux de rotation de la terre, $\varphi$ la latitude de l'aire à modéliser ( $\varphi$ est positive dans l'hémisphère Nord et négative dans l'hémisphère Sud ) et $\underline{\omega}$ la vitesse angulaire de la rotation de la terre $\underline{\omega}$=7.27 10-5 rad/s.

Dans un système de coordonnés cartésiens $(x, y, z)$, tel que les directions des vecteurs directeurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ des trois axes coincident respectivement avec l'est, le nord et la verticale radiale, ces deux densités volumiques de forces s'expriment :

$$\overrightarrow{f_g} = \rho g \overrightarrow{z} \tag{2.6}$$
$$\overrightarrow{f_c} = 2\rho\underline{\omega}\left[(v\sin\varphi - w\cos\varphi)\overrightarrow{x} - u\sin\varphi\overrightarrow{y} + u\cos\varphi\overrightarrow{z}\right] \tag{2.7}$$

ce qui conduit, en négligeant l'accélération de Coriolis suivant $\overrightarrow{z}$ devant celle de la pesanteur(ce qui est généralement le cas), à :

$$\overrightarrow{f} = 2\rho\underline{\omega}\,(v\sin\varphi - w\cos\varphi)\overrightarrow{x} - 2\rho\underline{\omega}u\sin\varphi\overrightarrow{y} - \rho g\overrightarrow{z} \tag{2.8}$$

*Les forces de surface*

En hydrodynamique des liquides parfaits ce sont les forces dues à la pression (tensions normales), auxquelles s'ajoutent en hydrodynamique des liquides réels les forces dues au frottement( tensions tangentielles).
L'expression du tenseur des contraintes pour les fluides newtonniens:

- Fluide non visqueux:

$$\tau = 0 \tag{2.9}$$

- Fluide viqueux [47]:

$$\tau = \mu(\nabla u + \nabla u^T) - (\frac{2}{3}\mu - \lambda)(\nabla.u)I_d \tag{2.10}$$

avec,
$\mu$: viscosité dynamique du fluide.
$\lambda$: coefficient de poisson.

### 2.1.2 Conditions initiales et aux limites

L'ensemble des relations (2.1) et (2.2) constitue un système fermé de 4 équations et 4 inconues ($u_{i(i=1,2,3)}$,$p$). Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles, fortement couplées à des coefficients non linéaires, non constants ). Pour aboutir au modèle mathématique, il faut lui ajouter un certain nombre de conditions initiales et aux limites où nous allons préciser quelques aspects.

- **Les conditions initiales**

Les équations faisant intervenir la seule dérivée , les conditions initiales se résument à la connaissance du champ des fonctions ($u_i$, $p$) à un instant $t = t_0$ .

• **Les conditions aux limites**

En raison de la nature des équation s, les conditions aux limites pourront être soit de types Dirichlet, soit de type Newman. On distingue quatre types de frontières dans le domaine d'écoulement, à savoir, la frontière solide, les frontières ouvertes (entrée-sortie) et la frontière libre.

a) En ce qui concerne la frontière solide, l'expérience montre que le glissement du fluide sur une paroi solide s'effectue à une échelle de l'ordre du libre parcours moyen. Cette condition est traduite par $u.n = 0$, (n étant la normale à la paroi). Sous l'hypothèse du milieu continu, le phénomène moléculaire de glissement peut donc être ignoré et l'on considère que le fluide adhère à toute paroi solide.
Dans le cas de non glissement sur la paroi, si $\vec{u_s}$ désigne la vitesse du point S de la surface solide. On écrit donc $\vec{u}(M) = \vec{u_s} = \vec{0}$ pour tout point M du fluide coïncidant avec S.

b) Les frontières ouvertes se résument aux frontières d'entrée et de sortie. A la section d'entrée, on donne généralement un profil de vitesse et à la section de sortie, on peut dans certains cas se donner la hauteur; en général, il faut imposer une condition dite transparente ou absorbante i.e. libre.

c) Pour une frontière libre, la condition est donnée:
   - Soit par la condition cinématique qui se traduit en disant qu'à chaque point la particule fluide suit la tangente à la surface libre (ligne de courant) $\vec{u}.\vec{n} = \vec{0}$ où $\vec{n}$ étant la normale extérieure à la surface.
   - Soit par la condition dynamique, exprimant la variation dans le temps de la surface libre. Elle est donnée en particulier pour un écoulement permanent, irrotationnel pour un fluide incompressible par l'équation de Bernoulli suivante.

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + \frac{gz}{\rho} = cte. \tag{2.11}$$

### 2.1.3 Modèle Navier-Stokes incompressible à $\rho$ constante

Pour une large gamme d'écoulement à surface libre en particulier s'agissant de l'eau (fluide incompressible), sous l'hypothèse de l'incompressibilité, on a:

$$\nabla.u = 0 \tag{2.12}$$

Le système de lois de conservation décrivant ce type d'écoulements se déduit directement du système général (2.1) et (2.2).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\nabla^2 u = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\nabla^2 v = f_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \nu\nabla^2 w = f_z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

### 2.1.4 Modèle Navier-Stokes semi-compressible à $\rho$ variable

Le système d'équations (2.1) et (2.2) décrivant le mouvement de fluide implique directement la formulation Navier-Stokes incompressible à $\rho$ variable (semi-compressible) remplacé par le système [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\nabla^2 u = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\nabla^2 v = f_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \nu\nabla^2 w = f_z \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Où,
$\nu$ est la viscosité cinématique du fluide donnée par : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$
$\mu$ étant la viscosité dynamique.

### 2.1.5 Modèle Navier-Stokes 2D

Le modèle Navier-Stokes 2D est obtenu en posant une hypothèse sur la vitesse ; elle est quasi homogène sur la profondeur, d'où on peut négliger la troisième composante de la vitesse $w$ et le système d'équations s'écrit toujours [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\nabla^2 u = f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\nabla^2 v = f_y \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

plus les conditions aux limites.

## 2.2 Modèles de Saint-Venant

La modélisation des écoulements non stationnaires graduellement variés à surface libre est basée actuellement sur la résolution des équations de Saint Venant. Le modèle de Saint Venant est également appelé modèle des eaux peu profondes, équations d'ondes longues et en anglais "shallow water equations". On distingue aussi deux modèles de Saint Venant.

### 2.2.1 Modèle Saint-Venant 2.5D

Le modèle Saint-venant apparaît sous deux formes fondamentales quand on considère ses variables d'état :

- la forme conservative qui s'appuie sur le niveau d'eau en guise de pression et sur les composantes en $(x, y)$ du débit spécifique $(q_x, q_y)$ pour le mouvement de l'eau ;

- la forme non-conservative qui utilise également le niveau d'eau pour la pression mais traite le mouvement à l'aide des variables primitives de vitesse $(u, v)$.

La figure suivante (2.2) illustre les notations employées dans les deux versions du modèle mathématique [71].

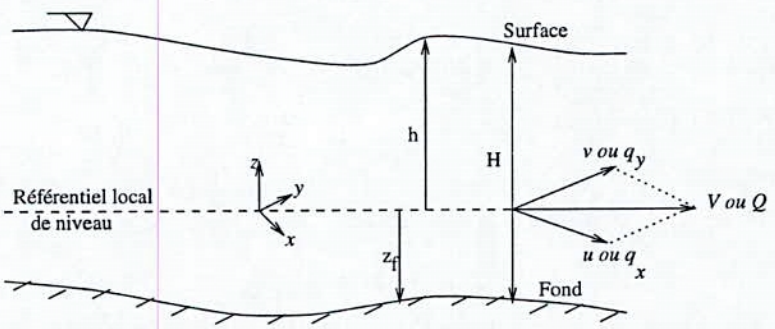



FIG. 2.2 – *Notations du modèle de Saint-Venant 2.5D*

• **Equations de base**

Dans ce cas, les dimensions en x et y sont beaucoup plus importantes que la profondeur de l'eau. Le modèle mathématique de Saint Venant à deux dimensions dans le plan horizontal découle de l'intégration verticale des équations de Reynolds 3D [2].

**Remarque:** pour simplifier l'ecriture, on note les vitesses et la pression moyennes $\overline{u} = u, \overline{v} = v, \overline{w} = w, \overline{p} = p$.

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial x} &= \left(\dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)+f_x \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial y} &= \left(\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right)+f_y \\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial z} &= \left(\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+f_z \end{cases} \tag{2.16}$$

En posant les hypothèses suivantes:

- La composante verticale de la vitesse $w$ ainsi que ces variations (spatiales et temporelles) sont faibles.
- Les variations verticales des deux composantes horizontales $u$ et $v$ sont faibles.
- Les ondes sont de faible amplitude et de longue période. La composante verticale de l'accelélération est négligeable, permettant une répartion hydrostatique de la pression [32].

on obtient un nouveau système représenté par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial x} &= \left(\dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)+f_x \\ \rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial p}{\partial y} &= \left(\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right)+f_y \\ \dfrac{\partial p}{\partial z}=f_z \end{cases} \tag{2.17}$$

et l'équation de continuité:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.18}$$

avec,
$\tau$: tenseur des contraintes de Reynolds donné par:

$$\tau=\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}-\rho\begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$u'$,$v'$ sont les vitesses des fluctuations turbulentes de l'écoulement.

• **Conditions aux limites**

Avant de passer à l'intégration verticale des équations de mouvement, il est utile de compléter le système par les conditions aux limites caractérisant la surface libre et le fond du canal. Ces surfaces sont définies par deux équations qui seront décrites ultérieurement:

**a. Surface libre:** Elle est définie par deux conditions:

**a.1. Condition cinématique**

La surface de l'eau est caractérisée par l'équation qui traduit la variation spatiale et temporelle de la surface libre suivante:

$$S(x,y,z,t) = z - Z_S(x,y,t) = 0 \tag{2.20}$$

La condition cinématique pour la surface libre s'obtient en dérivant la fonction $S(x,y,z,t)$ par rapport au temps:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dZ_S}{dt} = 0 \tag{2.21}$$

Soit:

$$\begin{cases} w = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dZ_S}{dt} \\ \dfrac{dZ_S}{dt} = \dfrac{\partial Z_S}{\partial t} + u\dfrac{\partial Z_S}{\partial x} + v\dfrac{\partial Z_S}{\partial y} \end{cases} \tag{2.22}$$

Le vecteur normal $\vec{n}_s$ en un point quelconque de la surface libre se construit à partir du gradient de la fonction $S(x,y,z,t)$:

$$\vec{n_s} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{\left(-\frac{\partial Z_S}{\partial x}\vec{x} - \frac{\partial Z_S}{\partial y}\vec{y} + \vec{z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z_S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_S}{\partial y}\right)^2 + 1}} \tag{2.23}$$

**a.2. Pression hydrostatique**

L'équation du mouvement suivant la verticale est réduite à:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f_z = -\rho g \tag{2.24}$$

L'intégration de cette dernière équation conduit à une distribution hydrostatique de la pression:

$$p = \rho g\left(Z_S(x,y,t) - z\right) + p_a \tag{2.25}$$

où, $p_a$ désigne la pression atmosphérique.

**b. Fond de la rivière**

Il est caractérisé par:

$$F(x,y,z,t) = z - Z_F(x,y) = 0 \tag{2.26}$$

Cette fonction ne dépend pas du temps; ce qui traduit que le fond est immobile. Ainsi, on suppose que $Z_F = Z_F(x,y)$; le lit de rivière ne change pas et qu'il n' y a pas de dépôt. En dérivant la fonction $F(x,y,t)$, on obtient la condition sur le fond :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dZ_F}{dt} = w - u\frac{\partial Z_F}{\partial x} - v\frac{\partial Z_F}{\partial y} = 0 \tag{2.27}$$

c'est à dire qu'au fond , qui est une limite solide fixe, la vitesse verticale doit être nulle.

On construit de même le vecteur normal $\vec{n}_f$ du fond, à partir du gradient de $F(x,y,z,t)$ :

$$\vec{n_f} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{\left(-\frac{\partial Z_F}{\partial x}\vec{x} - \frac{\partial Z_F}{\partial y}\vec{y} + \vec{z}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z_F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z_F}{\partial y}\right)^2 + 1}} \tag{2.28}$$

Afin d'obtenir un modèle ne faisant intervenir que les variables d'espace horizontales x et y, les deux premières équations de mouvement (2.17) ainsi que l'équation de continuité sont traitées avec un opérateur de moyenne sur la hauteur d'eau.

- **Rappels théoriques**[2]

Pour une fonction quelconque $f(x,y,z,t)$, la moyenne est définie par:

$$\overline{f}(x,y,z,t) = \frac{1}{Z_S - Z_F}\int_{Z_F}^{Z_S} f(x,y,z,t)\,dz \tag{2.29}$$

Les fluctuations $f'$ de la fonction $f$ autour de sa valeur moyenne sont alors définies par :

$$f'(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) - \overline{f}(x,y,z,t) \tag{2.30}$$

En désignant par $g(x,y,z,t)$ une autre fonction quelconque, cet opérateur de moyenne vérifie les relations classiques suivantes :

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}; \qquad \overline{\overline{f}\,\overline{g}} = \overline{f}\,\overline{g}; \qquad \overline{f+g} = \overline{f} + \overline{g}; \qquad \overline{f'} = 0. \tag{2.31}$$

ainsi que la règle de Leibniz pour la dérivation sous le signe intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i}\int_{g_1(\eta_1,\cdots,\eta_p)}^{g_2(\eta_1,\cdots,\eta_p)} f(\xi,\eta_1,\cdots,\eta_p)\,d\xi = \int_{g_1(\eta_1,\cdots,\eta_p)}^{g_2(\eta_1,\cdots,\eta_p)} \frac{\partial f}{\partial \eta_i}d\xi \tag{2.32}$$

$$+f\left(g_2\left(\eta_1,\cdots,\eta_p\right),\eta_1,\cdots,\eta_p\right)\frac{\partial g_2}{\partial \eta_i}$$
$$-f\left(g_1\left(\eta_1,\cdots,\eta_p\right),\eta_1,\cdots,\eta_p\right)\frac{\partial g_1}{\partial \eta_i}$$

Pour simplifier, on désigne désormais par $h(x,y,t)$, la position de la surface libre et par $H(x,y,t)$ la hauteur d'eau totale:

$$h = Z_S\left(x,y,t\right) \qquad \text{et} \qquad H = Z_S\left(x,y,t\right) - Z_F\left(x,y\right) \tag{2.33}$$

L'application de la règle de Leibniz avec les notations ci-dessus sur les dérivées partielles d'une fonction $f$ par rapport aux variables $x$, $y$ et $t$ conduit aux relations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{rcl} H\overline{\dfrac{\partial f}{\partial x}} & = & \dfrac{\partial \overline{Hf}}{\partial x} + f\left(x,y,Z_F,t\right)\dfrac{\partial Z_F}{\partial x} - f\left(x,y,h,t\right)\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ H\overline{\dfrac{\partial f}{\partial y}} & = & \dfrac{\partial \overline{Hf}}{\partial y} + f\left(x,y,Z_F,t\right)\dfrac{\partial Z_F}{\partial y} - f\left(x,y,h,t\right)\dfrac{\partial h}{\partial y} \\ H\overline{\dfrac{\partial f}{\partial t}} & = & \dfrac{\partial \overline{Hf}}{\partial t} - f\left(x,y,h,t\right)\dfrac{\partial h}{\partial t} \end{array}\right. \tag{2.34}$$

L'application de l'opérateur de moyenne (2.29) à l'équation de continuité (2.18) pondéré par $H$, donne:

$$H\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = 0 \tag{2.35}$$

En notant $U, V$ et $W$ les valeurs moyennes des composantes $u, v$ et $w$ de la vitesse:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{H}\int_{z_b}^{z_s} u dz \\ V &= \frac{1}{H}\int_{z_b}^{z_s} v dz \\ W &= \frac{1}{H}\int_{z_b}^{z_s} w dz \end{aligned} \tag{2.36}$$

et en utilisant la règle de Leibniz, l'équation de continuité (2.35) devient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} + u\left(x,y,Z_F,t\right)\frac{\partial Z_F}{\partial x} + v\left(x,y,Z_F,t\right)\frac{\partial Z_F}{\partial y} & \\ -w\left(x,y,Z_F,t\right) - u\left(x,y,h,t\right)\frac{\partial h}{\partial x} & \\ -v\left(x,y,h,t\right)\frac{\partial h}{\partial y} + w\left(x,y,h,t\right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Tenant compte des conditions cinématiques à la surface libre (2.22) et sur le fond (2.26) et de la relation (2.12), l'équation de continuité moyenne s'exprime finalement sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0 \tag{2.38}$$

Le même traitement doit être appliqué aux deux équations du mouvement pour les dérivées horizontales. Pour ce faire, procédons par groupe de termes:

- ***Termes de variation en temps et de transport convectif***

Pour la direction $x$, on prend la moyenne des termes de variation en temps et de transport convectif de l'équation de moment (2.17), on lui rajoute l'équation de continuité pondérée par $u$ que l'on moyenne puis, en se servant de l'équation (2.34) et en utilisant les deux conditions caractérisant la surface libre et le fond (2.22, 2.26), on obtient:

$$H\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} + \overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \overline{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = \frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial H\overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\partial H\overline{uv}}{\partial y} \tag{2.39}$$

On obtient de même pour la direction $y$:

$$H\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial t}} + \overline{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{v\frac{\partial v}{\partial y}} + \overline{w\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial H\overline{uv}}{\partial x} + \frac{\partial H\overline{v^2}}{\partial y} \tag{2.40}$$

Les équations (2.39)-(2.40) s'écrivent encore :

$$\begin{cases} H\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} + \overline{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \overline{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \overline{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = \frac{\partial(HU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_{uu}HU^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_{uv}HUV\right) \\ H\left(\overline{\frac{\partial v}{\partial t}} + \overline{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \overline{v\frac{\partial v}{\partial y}} + \overline{w\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = \frac{\partial(HV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_{vu}HVU\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_{vv}HV^2\right) \end{cases} \tag{2.41}$$

avec,

$$\begin{aligned} \beta_{uu} &= \frac{1}{HU^2}\int_{Z_F}^{Z_S} u^2 dz \\ \beta_{uv} &= \beta_{vu} = \frac{1}{HUV}\int_{Z_F}^{Z_S} uv dz \\ \beta_{vv} &= \frac{1}{HV^2}\int_{Z_F}^{Z_S} v^2 dz \end{aligned} \tag{2.42}$$

$\beta_{uu}$, $\beta_{uv}$, $\beta_{vu}$ et $\beta_{vv}$ sont des termes correctifs qui résultent de l'intégration verticale des équations de conservation de la quantité de mouvement; ils traduisent les variations verticales de U et V et ils sont utilisés pour corriger les termes du flux advectif de la vitesse verticalement intégrée. Ces coefficients de la correction du flux de la vitesse dépendent de la distribution de la vitesse verticale, et souvent sont supposés égaux à l'unité.

- ***Termes de pression***

L'expression de la pression fournie par l'équation du mouvement suivant $z$, les dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$ donnent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial h}{\partial y} \tag{2.43}$$

Les deux équations sont indépendantes de $z$, d'où elles ne seront pas modéfiées par l'opérateur moyen.

$$H\left(\frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x}}\right) = Hg\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad H\left(\frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial y}}\right) = Hg\frac{\partial h}{\partial y} \tag{2.44}$$

- ***Force de Coriolis***

Pour la direction $x$, on a :

$$H\left(\frac{1}{\rho}\overline{f_x}\right) = 2H\underline{\omega}\,(V\sin\varphi - W\cos\varphi) \tag{2.45}$$

expression dans laquelle la valeur moyenne $W$ de la vitesse $w$ peut être négligée devant la valeur moyenne $V$ de la vitesse horizontale $v$ :

$$H\left(\frac{1}{\rho}\overline{f_x}\right) = 2H\underline{\omega}V\sin\varphi = \Omega HV \tag{2.46}$$

et pour la direction $y$, on a :

$$H\left(\frac{1}{\rho}\overline{f_y}\right) = -2H\underline{\omega}U\sin\varphi = -\Omega HU \tag{2.47}$$

- ***Termes de frottement***

On a:

$$\begin{aligned}\frac{H}{\rho}\left(\frac{\partial\overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{\tau_{xz}}}{\partial z}\right) &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial H\overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H\overline{\tau_{xy}}}{\partial y} \\ &+\frac{1}{\rho}\tau_{xx}(x,y,z,t)\frac{\partial Z_f}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\tau_{xx}(x,y,h,t)\frac{\partial h}{\partial x} \\ &+\frac{1}{\rho}\tau_{xy}(x,y,z,t)\frac{\partial Z_f}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\tau_{yy}(x,y,h,t)\frac{\partial h}{\partial y}\end{aligned} \tag{2.48}$$

On désigne par $\overrightarrow{T} = (T_x, T_y)$ le vecteur contrainte défini par: $\overrightarrow{T} = \tau.\overrightarrow{n}$

$\overrightarrow{n}$ étant un vecteur normal unitaire.

*Frottement de surface*

Pour un point de la surface libre, les composantes horizontales de $T$ en ce point sont données par:

$$\begin{aligned} -T_x(x,y,h,t)\,\|\nabla S\| &= \tau_{xx}(x,y,h,t)\frac{\partial h}{\partial x} + \\ &\quad \tau_{xy}(x,y,h,t)\frac{\partial h}{\partial y} - \tau_{xz}(x,y,h,t) \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned} -T_y(x,y,h,t)\,\|\nabla S\| &= \tau_{yx}(x,y,h,t)\frac{\partial h}{\partial x} + \\ &\quad \tau_{yy}(x,y,h,t)\frac{\partial h}{\partial y} - \tau_{yz}(x,y,h,t) \end{aligned} \tag{2.50}$$

ou,

$$\tau_x^S = -\frac{\|\nabla S\|}{\rho H} T_x(x,y,Z_S,t) \tag{2.51}$$

$$\tau_y^S = -\frac{\|\nabla S\|}{\rho H} T_y(x,y,Z_S,t) \tag{2.52}$$

qui représentent les contraintes dûes au frottement du vent.

*Frottement au fond*

Pour un point appartenant au fond, les composantes horizontales de $T$ en ce point sont donc données par:

$$\begin{aligned} -T_x(x,y,Z_F,t)\,\|\nabla F\| &= \tau_{xx}(x,y,Z_F,t)\frac{\partial Z_F}{\partial x} + \\ &\quad \tau_{xy}(x,y,Z_F,t)\frac{\partial Z_F}{\partial y} - \tau_{xz}(x,y,Z_F,t) \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} -T_y(x,y,Z_F,t)\,\|\nabla F\| &= \tau_{yx}(x,y,Z_F,t)\frac{\partial Z_F}{\partial x} + \\ &\quad \tau_{yy}(x,y,Z_F,t)\frac{\partial Z_F}{\partial y} - \tau_{yz}(x,y,Z_F,t) \end{aligned} \tag{2.54}$$

En général, le frottement au fond est supposé proportionnel au carré de la vitesse, ainsi qu'il en découle de la loi de paroi pour un écoulement turbulent. Comme il s'exerce dans la direction opposée à celle de la vitesse, on peut donc l'exprimer sous la forme:

$$\vec{T}(x,y,Z_F,t) = -\rho c_f \|\vec{u}(x,y,Z_F,t)\| \vec{u} \tag{2.55}$$

où, $c_f$ est le coefficient de frottement, dont l'intensité dépend de la rugosité du fond. Le coefficient de frottement s'exprime ainsi en fonction du coefficient de Chézy $C$ ou de Manning $n$ sous la forme:

$$c_f = \frac{gn^2}{H^{1/3}} = \frac{g}{C^2} \tag{2.56}$$

d'où, on peut écrire:

$$\vec{T}(x,y,Z_F,t) = -\rho \frac{g}{C^2} \|\vec{u}(x,y,Z_F,t)\| \vec{u} \tag{2.57}$$

Avec ces définitions, les termes traduisant le frottement du fond dans les équations du mouvement moyen peuvent se mettre sous la forme:

$$\tau_x^F = -\frac{\|\nabla F\|}{\rho H} T_x(x,y,Z_F,t) \tag{2.58}$$

$$\tau_y^F = -\frac{\|\nabla F\|}{\rho H} T_y(x,y,Z_F,t) \tag{2.59}$$

ou:

$$\tau_x^F = \|\nabla F\| \frac{g}{C_h^2} \frac{U\sqrt{U^2+V^2}}{H} \tag{2.60}$$

$$\tau_y^F = \|\nabla F\| \frac{g}{C_h^2} \frac{V\sqrt{U^2+V^2}}{H} \tag{2.61}$$

Enfin, en regroupant les termes de frottement, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{H}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}}\right) &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial H\overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial H\overline{\tau_{xy}}}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{\|\nabla S\|}{\rho} T_x(x,y,h,t) \\ &- \frac{\|\nabla F\|}{\rho} T_x(x,y,Z_F,t) \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \frac{H}{\rho}\left(\overline{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}}\right) &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial H\overline{\tau_{yx}}}{\partial x} + \frac{\partial H\overline{\tau_{yy}}}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{\|\nabla S\|}{\rho} T_y(x,y,h,t) \\ &- \frac{\|\nabla F\|}{\rho} T_y(x,y,Z_F,t) \end{aligned} \tag{2.63}$$

ou,

$$\frac{H}{\rho}\left(\frac{\partial\overline{\tau_{xx}}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\tau_{xy}}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\tau_{xz}}}{\partial z}\right)=\frac{1}{\rho}\left[\tau_x^F-\tau_x^S-\frac{\partial}{\partial x}\left(H\tau_{xx}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(H\tau_{xy}\right)\right] \tag{2.64}$$

$$\frac{H}{\rho}\left(\frac{\partial\overline{\tau_{xx}}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\tau_{xy}}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\tau_{xz}}}{\partial z}\right)=\frac{1}{\rho}\left[\tau_y^F-\tau_y^S-\frac{\partial}{\partial x}\left(H\tau_{yx}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(H\tau_{yy}\right)\right] \tag{2.65}$$

**Remarque:**

L'apparition des composantes horizontales du vecteur contrainte sur le fond, dans les équations moyennes permet de prendre en compte le frottement exercé par le fond sur l'écoulement. La même remarque s'applique aux composantes horizontales du vecteur normal à la surface libre qui permettent de prendre en compte l'action du vent. Les autres termes de frottement, faisant intervenir les valeurs moyennes des contraintes visqueuses traduisent l'effet de la viscosité turbulente de l'écoulement obtenu par un modèle de turbulence (voir chapitre 1.5).

En regroupant les termes, les équations de quantités de mouvement sont données par:

$$\begin{aligned}\frac{\partial HU}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_{uu}HUU\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_{uv}HUV\right)+gH\frac{\partial Z_F}{\partial x}+\frac{1}{2}g\frac{\partial H^2}{\partial x}-\Omega HV\\ +\frac{1}{\rho}\left[\tau_x^F-\tau_x^S-\frac{\partial}{\partial x}\left(H\tau_{xx}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(H\tau_{xy}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial HV}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_{vu}HVU\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\beta_{vv}HVV\right)+gH\frac{\partial Z_F}{\partial y}+\frac{1}{2}g\frac{\partial H^2}{\partial y}+\Omega HU\\ +\frac{1}{\rho}\left[\tau_y^F-\tau_y^S-\frac{\partial}{\partial x}\left(H\tau_{yx}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(H\tau_{yy}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{2.67}$$

### 2.2.2 Modèle Saint-Venant 1D

Le modèle de Saint-venant à une dimension (1D) dans le plan vertical découle de l'intégration latérale des équations de Navier-Stokes (2D). Les équations du mouvement dans les directions horizontale $x$ et verticale $z$ sont données par:[46] et [69]

$$\begin{cases}\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial x}\\ \rho\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial z}-g\end{cases} \tag{2.68}$$

en négligeant la composante verticale de la vitesse qui pour les ondes longues est relativement faible, on déduit:

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=-\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z}-g=0 \end{cases} \tag{2.69}$$

l'intégration de la deuxième équation avec la condition de pression nulle en surface ($z=\eta$) donne:

$$p=\rho g\,(-z+\eta) \tag{2.70}$$

ce qui revient à admettre que la pression est hydrostatique, avec la pression au fond ($z=-h$) donnée par:

$$p=\rho g\,(h+\eta) \tag{2.71}$$

dérivons l'équation (2.70) et portons le résultat dans la première équation du système (2.69), on en déduit:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{2.72}$$

Si le frottement au fond est pris en compte, l'équation de mouvement s'écrit:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{\tau}{\rho(h+\eta)} \tag{2.73}$$

qui avec l'introduction des expressions (2.55) et (2.56) devient:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{g}{C^2}\frac{|u|u}{(h+\eta)} \tag{2.74}$$

Pour passer de la vitesse locale à la vitesse moyenne sur la verticale lors de dérivation, la vitesse moyenne doit théoriquement être corrigée par le facteur $(1+\alpha)$ où $\alpha$ est le coefficient de Coriolis qui est négligeable.
Posons alors $u=U$ , $h+\eta=H$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\pm J$, qui représente la pente du fond. Elle peut être positive ou négative selon la direction du mouvement.
L'équation (2.74) peut s'exprimer par:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+g\frac{\partial H}{\partial x}=\pm gJ-\frac{g}{C^2}\frac{|U|U}{H} \tag{2.75}$$

L'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse, peut se dériver en considérant une couche de fluide d'épaisseur $dx$ et de hauteur $(h + \eta)$ (figure 2.3)

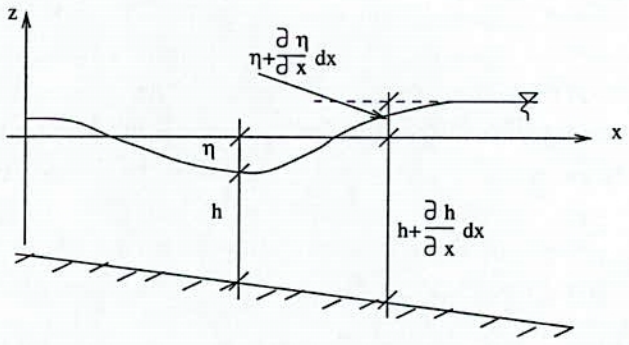



FIG. 2.3 – *Notations du modèle de Saint-Venant 1D*

Dans la direction $x$, le volume massique de l'écoulement entrant en $x$ durant $dt$ est donné par:

$$(h + \eta)udt \tag{2.76}$$

tandis que l'écoulement volumique sortant durant le même temps est égale à:

$$[(h + \eta)u + \frac{\partial(h + \eta)u}{\partial x}dx]dt \tag{2.77}$$

La variation de volume à l'intétrieur de l'élément est donc donnée par la différence entre ce qui est entre et ce qui sort:

$$-\frac{\partial(h + \eta)u}{\partial x}dxdt \tag{2.78}$$

Cette différence doit être égale au changement de volume durant le même temps $dt$:

$$[(h + \eta) + \frac{\partial(h + \eta)}{\partial t}dt]dx - (h + \eta)dx \tag{2.79}$$

ce qui donne:

$$-\frac{\partial(h + \eta)}{\partial x}dxdt = \frac{\partial(h + \eta)}{\partial t}dxdt \tag{2.80}$$

ou bien:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(h + \eta)u}{\partial t} = 0 \tag{2.81}$$

de même, on pose $u = U$ et $H = h + \eta$ , d'où l'équation (2.81) s'écrit de nouveau:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} = 0 \tag{2.82}$$

## 2.3 Position du problème

Certes, l'écoulement d'eau dans les rivières est tridimensionnel ; toutefois, la nature tridimensionnelle de l'écoulement n'est pas importante dans beaucoup de situations d'ingénierie, particulièrement quand le rapport largeur - profondeur est très grand. Dans de tels cas, la distribution horizontale des débits pourrait être d'intérêt principal et la catégorie des modèles 2D peuvent être utilisées avec un grand avantage économique respectivement sur les temps d'analyse, préparation de données,...etc.

Le modèle Saint-Venant 2.5D, comme il a éte déja décrit, fait partie de cette catégorie. Ce dernier a fait ses preuves et plusieurs cas réels ont été simulés par celui-ci. De plus, il constitue le noyau de calcul au sein de beaucoup de logiciels commerciaux destinés à la gestion des ressources en eau, à la détermination des zones inondables et la protection environnementale. Parmi les logiciels, on cite le FESWMS (Finite Element Surface Water Modelling System). C'est un code de calcul qui résout les équations de Saint Venant dans un environnement éléments finis pour restituer le champ de vitesses (U, V) et le tirant d'eau H en tout point du domaine d'écoulement même en présence d'obstacles (piles de ponts, ilôts, etc.) et dans des situations hydrauliques plus complexes.

Pour atteindre les objectifs des projets euro- méditerranéens CRUCID et WADI et puisqu'il est du domaine public, FESWMS a été choisi par les décideurs du projet parmi plusieurs codes numériques commerciaux. De la, il a été utile de l'analyser, de l'adapter en fonction de nos besoins, ainsi qu'en fonction des outils de maillage et de visualisation qu'on dispose à l'INRIA et de l'utiliser comme code de référence à un éventuel code Navier Stokes 3D qui sera développé au sein du projet.

Ce travail consiste à étudier et analyser d'un point de vue hydraulique et numérique le modèle FESWMS. Cette analyse et synthèse est focalisée sur :

- Un traitement détaillé des conditions aux limites en terme qualitatif et quantitatif.
- La paramétrisation du modèle et le choix adéquat des données, tant sur les paramètres physiques que numériques afin d'aboutir à des résultats proches de la réalité.
- Les maillages éléments finis en taille et en qualité car ils jouent un rôle important dans la convergence numérique.

Les principaux points approfondies au cours de ce travail sont:

- une analyse de différents code existants en hydraulique fluviale (TELEMAC, FLUENT, PHOENICS, FESWMS...) et les critères du choix de FESWMS en fonction de nos objectifs,
- une étude détaillée des modèles mathématiques simplifiés de type Saint-Venant issus des équations de Navier-Stokes tridimentionnelles sous certaines hypothèses admises pour les écoulements à frontière libre de faible profondeur,
- traitement des conditions initiales et aux limites inhérentes à ce modèle, c'est une étape indispensable pour la résolution des systèmes et pour définir les conditions réelles de l'écoulement. De plus, on s'est penché sur l'étude du modèle de turbulence et de la théorie de couche limite utilisée.

- la revue des techniques de résolution des systèmes non linéaires inhérents aux formulations variationnelles discrétisées dans un environnement éléments finis. En particulier, l'utilisation de la méthode directe type factorisation LU de GAUSS combinée à l'algorithme de la méthode frontale. De même, est passée en revue la technique de résolution des systèmes non linéaires par la méthode de Newton et sa variante Quasi-Newton.

Pour valider le modèle numérique, une analyse de sensibilité paramétrique et de convergence numérique de la solution sera présentée sous forme d'une série de tests traités et exploités par des courbes sur différents cas de figure.

De plus, dans le cadre de l'application du système intégré WADI, un effort sera porté sur l'implémentation et la validation des différents protocoles de transfert des informations entre d'une part le SIG (Arcview - outils d'aide à la décision) et d'autre part les modèles numériques simulant le phénomène physique ainsi que les différents générateurs de maillage 2D et 3D (EMC2, YAMS) et les visualiseurs 2D et 3D (VISU, MEDIT). Cet aspect graphique des résultats permet de localiser mieux les zones inondables dans le cours d'eau et de faire face aux risques de submersion.

# Chapitre 3

# Modélisation numérique: FESWMS

Aujourd'hui, il existe un certains nombres de codes numériques bidimensionnels et tridimensionnels conviviaux, aux mailleurs performants, permettant la prédiction d'écoulements des fluides par la résolution des équations de Saint-Venant ou de Navier-Stokes grâce aux méthodes des volumes finis, des différences finies ou des éléments finis. Parmi ces logiciels, on présente brièvement dans l'annexe A les plus connus (PHOENICS, FLUENT, HYDROSIM, TELEMAC et HEC-2D) et suite à quoi le choix à été fait sur le modèle FESWMS, on présente ci-après une analyse détaillée de l'algorithme numérique associé, après une description générale de ce dernier.

## 3.1 Description générale de FESWMS

Finite Element Surface Water Modelling System (FESWMS -2DH) [59] et [60], a été développé par le U.S. Geological Survey. Il est du domaine public et est disponible sur Internet à l'adresse: http://water.usgs.gov/software/feswms.htlm.

FESWMS est un code de calcul qui simule les écoulements surfaciques dans différents systèmes hydrauliques et notamment dans les rivières naturelles et les lacs. Ce code est complet. Il est constitué de trois modules: DINMOD, ANOMOD et FLOMOD.

DINMOD est un pré-processeur pour l'introduction des données. Il permet la préparation du maillage bidimensionnel pour les autres modules du code.

ANOMOD est le post-processeur du logiciel. Il illustre les résultats obtenus par le module de calcul. En effet, il permet de visualiser entre autre le maillage, les champs scalaires de la hauteur de l'écoulement et de la vitesse ainsi que les champs vectoriels de la vitesse.

Le noyau de calcul FLOMOD est le module principal du logiciel. Il résout les équations de Saint Venant 2.5D en formulation $(U, V, H)$ par la discrétisation éléments finis. Il permet en particulier de :

- Simuler les écoulements permanents et non permanents;

- Tenir compte des effets de frottements à la paroi et des contraintes turbulentes;
- Prise en compte optionnelle des contraintes de surfaces dues au vent et à la force de coriolis;
- Etudier des écoulements à surface libre en présence de piles de ponts, barrages ou les écoulements en charge en présence des conduites créant des conditions aux limites plus complexes;
- Simuler les écoulements à frontière libre en utilisant un maillage fixe et des conditions aux limites mobiles (un modèle couvrant-découvrant).
- Calculer le débit à travers une section transversale spécifiée dans le canal.
- Calculer la norme de continuité du flux dans le canal.

## 3.2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique de FESWMS est basé sur les équations de Saint-Venant 2.5D donné par le système d'équations (2.38, 2.66, 2.67).

### 3.2.1 Récapitulation des équations moyennées

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} = 0 \tag{3.1}$$

- **Quantité de mouvement**

$$\frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_{uu} HUU) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_{uv} HUV) + gH\frac{\partial Z_F}{\partial x} + \frac{1}{2}g\frac{\partial H^2}{\partial x} - \Omega HV + \frac{1}{\rho}\left[\tau_x^F - \tau_x^S - \frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{xx}) - \frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{xy})\right] = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_{vu} HVU) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_{vv} HVV) + gH\frac{\partial Z_F}{\partial y} + \frac{1}{2}g\frac{\partial H^2}{\partial y} + \Omega HU + \frac{1}{\rho}\left[\tau_y^F - \tau_y^S - \frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{yx}) - \frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{yy})\right] = 0 \tag{3.3}$$

- **Signification physique des termes**

Le tableau suivant présente la signification physique de tous les termes figurant dans les équations de Saint Venant (en particulier l'équation du moment) et son équivalent dans les équations générales de l'écoulement (Navier Stokes). Suivant x:

| Termes | signification | équivalent |
|---|---|---|
| $\frac{\partial(HU)}{\partial t}$ | termes de variations en temps | $H\frac{\partial u}{\partial t}$ |
| $\frac{\partial}{\partial x}(\beta_{uu}HUU)+\frac{\partial}{\partial y}(\beta_{uv}HUV)$ | termes de transport convectif | $H\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ |
| $gH\frac{\partial Z_f}{\partial x}+\frac{1}{2}g\frac{\partial H^2}{\partial x}$ | terme de pression | $H\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)=H\rho g\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)$ |
| $-\Omega HV$ | force de Coriolis | $H\left(\frac{1}{\rho}f_x\right)$ |
| $\frac{\partial H\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial H\tau_{xy}}{\partial y}$ | termes de frottement | $\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)$ |
| $\tau_x^F$ | terme de frottement au fond | |
| $\tau_x^S$ | terme de frottement du vent à la surface | |

### 3.2.2 Termes correctifs du mouvement

Sous l'effet des frottements au fond, les écoulemnts à surface libre entraîne le developpement d'une couche de cisaillement d'intensité variable selon la verticale. Dans les équations de Saint Venant, la correction des termes du transport convectif est introduite pour tenir compte de cette variation dûe à la rugosité du lit de rivière.

- **Rugosité du fond et coefficient de frottement**

La rugosité des parois dépend à la fois de la macrotexture et la microtexture du revêtement du sol. Elle génère des frottements à la paroi et l'écoulement rencontre une résistance au mouvement. Ces frottements sont caractérisés par un coefficient de frottement $c_f$.
Pour un écoulement dit *normal*, pour lequel la surface libre et le fond ont la même pente $I$ l'équilibre des forces appliquées sur le fond, conduit à l'expression de la contrainte au fond [28]:

$$\tau_0 = \rho g R_h I = \rho u_*^2 \tag{3.4}$$

$u_*$ étant la vitesse de frottement et $R_h$ le rayon hydraulique. Par conséquent

$$u_* = \sqrt{gR_hI} \tag{3.5}$$

L'équation classique de Weishbach Darcy donne pour un écoulement normal:

$$J = I = \frac{f}{4R_h}\frac{U^2}{2g} \tag{3.6}$$

$f$: désigne le coefficient de frottement adimensionnel de Weishbach Darcy, donné par:

$$f = 8(\frac{u_*}{U})^2 = 8c_f \tag{3.7}$$

avec, $U$: la vitesse moyenne de l'écoulement.
D'où:

$$c_f = (\frac{u_*}{U})^2 \tag{3.8}$$

- **Profil de vitesse logarithmique**

Comme il a éte déja décrit avant (paragraphe 1.5.4), les écoulements à surface libre se développent en trois couches distinctes: une couche intérieure dite sous couche visqueuse pour laquelle le profil de vitesse est linéaire, une couche intermédiaire où le profil de vitesse longitudinale moyenne peut être approximé par une relation logarithmique et une couche extérieure pour laquelle le profil est plutôt une relation parabolique. Ces propriétés types peuvent être exploitées pour établir les termes correctifs du mouvement [3].
On exprime les contraintes de Reynolds $\tau_{xz}$ en utilisant la formule semi-empirique dite asymptotique par [27]:

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \rho \kappa^2 z^2 (\frac{\partial u}{\partial z})^2 \tag{3.9}$$

où, $\kappa$ est la constante de Von-Karman.

A l'exception d'une mince zone - la zone visqueuse- très près de la paroi, les tensions dites dues à la viscosité peuvent être ignorées; on écrit alors:

$$\tau_{xz} = \rho \kappa^2 z^2 (\frac{\partial u}{\partial z})^2 \tag{3.10}$$

Comme la contrainte $\tau_{xz}$ est verticalement constante, ce qui est plus ou moins exact dans la zone de la couche limite donc égale à sa valeur à la paroi,$\tau_0$ , on peut écrire:

$$\tau_{xz} = \tau_0 = \rho \kappa^2 z^2 (\frac{\partial u}{\partial z})^2 \tag{3.11}$$

En séparant les variables, on obtient une équation différentielle:

$$du = \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}{\kappa} \frac{dz}{z} \tag{3.12}$$

$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ représente la vitesse de frottement donnée par $u_*$

Pour les écoulements à surface libre, la hauteur de la couche limite $\delta$ est proportionnelle à la hauteur de l'eau $H = z - Z_F$; $\delta = \frac{1}{a}(z - Z_F) = \frac{1}{a}H$.

La répartition logarithmique de la vitesse suivant la verticale est obtenue en intégrant l'équation différentielle (3.12). Elle est donnée par léquation suivante:

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} ln\left(\frac{z - Z_F}{a}\right) \tag{3.13}$$

Comme, $u_* = \sqrt{c_f}U$, on peut écrire en adimensionnel:

$$\frac{u(z)}{U} = \frac{\sqrt{c_f}}{\kappa} ln\left(\frac{z - Z_F}{a}\right) \tag{3.14}$$

Cette dernière représente l'équation de la couche limite (loi de paroi).

Dans le système d'équations (3.2, 3.3), les termes $\beta_{uu}$, $\beta_{uv}$, $\beta_{vv}$, $\beta_{vu}$ sont souvent égaux et sont déterminés en intégrant le profil logarithmique de la vitesse verticale donné par l'équation (3.13).

$$\beta = \frac{1}{HU^2} \int_{Z_F}^{Z_S} u^2 dz \tag{3.15}$$

En posant:

$$\beta_0 = \frac{1}{HU^2} \frac{{u^2}_*}{\kappa^2} a \left[ ln(1 + \frac{H}{Z_F})(ln(\frac{{Z_F}^2 + HZ_F}{a^2}) - 2)\right] \tag{3.16}$$

avec, a: une constante
les termes correctifs $\beta$ sont donnés par:

$$\beta = \beta_0 + C_\beta c_f \tag{3.17}$$

où,

$$C_\beta = \frac{1}{\kappa^2}$$

### 3.2.3 Modèle de turbulence

La notion de viscosité turbulente introduite par boussinesq en 1877, permet d'exprimer les contraintes de Reynolds. La question de détermination des contraintes turbulentes est transférée sur l'évaluation de la viscosité artificielle de l'écoulement [31]:

$$\widetilde{\nu} = \nu_0 + \nu_t \tag{3.18}$$

Le modèle de turbulence à 0 équation de transport (viscosité turbulente constante) a été utilisé pour estimer la viscosité turbulente. Dans ce cas, le profil de vitesse est quadratique:

$$u(z) = \frac{{u_*}^2}{\nu_t}(z - \frac{z^2}{2H}) \tag{3.19}$$

On détermine la viscosité turbulente $\nu_t$, en prenant soin de vérifier la condition de conservation du débit: $\int_0^H u(z)dz = q$.

Moyenant la formule de Chézy, $q = HU$, la viscosité turbulente est donnée par:

$$\nu_t = C_\mu H {u_*}^2 \tag{3.20}$$

et la viscosité totale de l'écoulement:

$$\widetilde{\nu} = \nu_0 + C_\mu H u_* \tag{3.21}$$

$\nu_0$ est la viscosité cinématique de l'eau donnée en fonction de la température par le tableau suivant:

| $T(°C)$ | 0 | 20 | 40 |
|---|---|---|---|
| $\nu_0(m^2/s)$ | $1,789.10^{-6}$ | $1,006.10^{-6}$ | $0,659.10^{-6}$ |

### 3.2.4 Conditions initiales et aux limites

Pour compléter le système d'équations aux dérivées partielles, il est nécessaire de rajouter des conditions initiales (description de l'état de départ) et des conditions aux limites, qui expriment le type de contraintes exercées sur les limites du domaine d'écoulement.

- **Conditions initiales**

Elles correspondent aux valeurs, au temps $t = t_0$ , de la hauteur $H$ et de la vitesse $(U, V)$ en tout point du domaine d'écoulement. Vu que la méthode de Newton (méthode utilisée pour linéariser le système) converge rapidement vers la solution exacte avec un bon conditionnement au départ, il est nécéssaire de choisir une condition initiale adéquate qui permet la convergence en un temps optimisé. Pour cela, on a considéré plusieurs méthodes pour la construction de la solution initiale.

a) La condition initiale proposée dans ce code, à défaut d'une solution initiale réelle ou non, est un démarrage à froid, c'est à dire supposer $U = V = 0$ et $H$ égale à la hauteur maximale du canal : on fait une suite de simulations stationnaires de proche en proche jusqu'à ce que H initiale coïncide avec la condition au limite souhaitée sur H. Ainsi, la solution stationnaire obtenue servira comme solution initiale pour le régime non-stationnaire.

b) On a considéré la même condition i.e. $U = V = 0$ et au lieu de prendre $H = H_{max}$, on choisit une hauteur $H$ proche de la hauteur normale de l'écoulement.

c) Une autre condition initiale qu'on a utilisé consiste à construire un champ de vitesses en profil parabolique tout en vérifiant la condition du débit transité avec une hauteur

toujours constante proche de la hauteur normale de l'écoulement. On procède comme suit:

$$\begin{cases} u(y,z) = a(y)\ z^2 + b(y)z + c(y) \\ v(y,z) = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

Pour un canal de largeur $L$ et à parois lisses, on a:

$$\begin{cases} u(0,z) = 0 \\ u(L,z) = 0 \\ u(\frac{L}{2},z) = u_{\max} \end{cases}$$

En vérifiant la condition du débit: $Q = \int_s uds$ et sachant qu'il faut donner une solution initiale pour les vitesses moyennées, on intègre $u(y,z)$ suivant la profondeur: $U(y) = \frac{1}{H}\int_{Z_f}^{Z_s} u(y,z)\ dz$ . On obtient une solution initiale de forme:

$$\begin{cases} U(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma. \\ V(y) = 0 \\ H = h_n \end{cases}$$

d) La derniere condition initiale qu'on a considéré est de donner un champ de vitesses et une hauteur, en tout point du domaine d'écoulement, qui résultent du régime uniforme. Le régime uniforme est obtenu en supposant que la surface libre est parallèle au fond de la rivière et la distance qui les sépare égale à la hauteur normale de l'écoulement.
Avec un démarrage brut, $U = V = 0$ et $H = h_n$, on laisse le code calculer le champ de vitesses qui sera après quelques itérations plus ou moins uniforme partout et l'on a $U = U_n$ et $V = V_n$. Cette solution uniforme servira comme condition intiale pour le régime permanent et la solution de ce dernier joue le rôle de la solution initiale pour le régime non permanent.

- **Conditions aux limites**

Par limites, on entend frontières du domaine physique d'écoulement. Par conséquent, il est nécessaire de spécifier des conditions aux limites qui permettent d'abord de confiner le débit au domaine d'écoulement, de contrôler le débit qui y transite (habituellement imposé à l'amont) et de régler le niveau d'eau auquel le plan d'eau doit s'ajuster, qu'il s'agit d'un plan d'eau normal ou un plan d'eau régularisé par un ouvrage de retenue ou un seuil.
D'une manière générale, les conditions aux limites sont les conditions au niveau des interfaces comme le montre la figure (3.1).

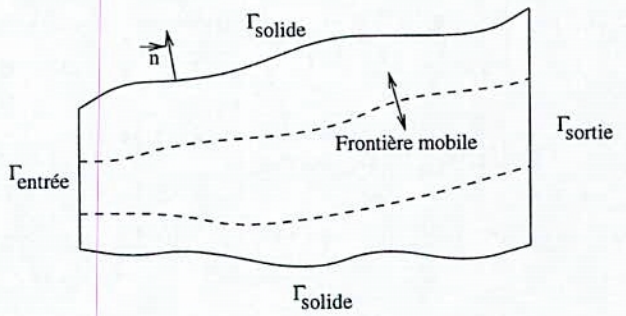



FIG. 3.1 – *Définition du domaine de calcul*

**Frontière solide**

Sur la frontère solide, la condition sur la vitesse doit être imposée. Généralement, pour les fluides réels, une des conditions suivantes est utilisée.

- Adhérance de la particule fluide sur la paroi solide traduite par la vitesse normale $U_n = 0$ et la vitesse tangentielle $U_t = 0$.
- Glissement de la particule fluide sur la paroi solide traduite par la vitesse normale $U_n = 0$ pour l'imperméabilité et $U_t = C^{te}$ pour les contraintes tangentielles sur $\Gamma_{solide}$.

**Frontière libre**

Les conditions aux limites sur les frontières libres sont imposées en fonction du régime d'écoulement.

- Ecoulement fluvial: on peut spécifier une des conditions suivantes:
  - la vitesse $U(U_n, U_t)$ à l'entrée et la hauteur $H$ à la sortie.
  - le débit unitaire $q(q_n, q_t)$ à l'entrée et la hauteur $H$ à la sortie.
  - la hauteur $H$ et la vitesse tangentielle à l'entrée et la hauteur $H$ à la sortie.
  - la hauteur $H$ et le débit unitaire tangentiel à l'entrée et la hauteur $H$ à la sortie.
  - un débit total $Q(t)$ (hydrogramme de crue) à l'entrée et la hauteur $H$ à la sortie.
- Ecoulement torrentiel: on impose,
  - à l'entrée:
    - la vitesse $U(U_n, U_t)$ et la hauteur $H$
    - le débit unitaire $q(q_n, q_t)$ et la hauteur $H$.
  - à la sortie: on impose rien

La valeur de $H$ imposée à l'aval ou à l'amont dépend du type de singularité présente dans le canal. Dans ce qui suit, on présente quelques cas réels pour le calcul de la hauteur imposée. La courbe de remous n'est connue qu'à une constante près , et , pour la

situer, il faut connaître l'un des points par lequel elle doit passer (point de repère). Ce dernier est généralement placé au voisinage immédiat de la singularité dont la présence crée le remous, et sa position se détermine à partir des propriétés hydrauliques de cette singularité. Dans ce qui suit, on admet le cas suivant, qui est assez fréquent : celui où le courant devient torrentiel en traversant la singularité. Lorsqu'il en est ainsi, les propriétés hydrauliques de cette dernière sont relativement simples, en ce sens que le débit qui la traverse ne dépend que de la retenue amont [12],[52].

*Barrage déversoir*

Verticalement le point de repère amont $P_0$ (figure 3.2) se situe à la côte h, au-dessus de la crête du barrage, satisfaisant à la relation classique des déversoirs $Q = mlh\sqrt{2gh}$, dans laquelle $l$ est la largeur nette de l'ouvrage, $m$ son coefficient de débit ; ce dernier dépend à la fois de $h$ et du profil du barrage.

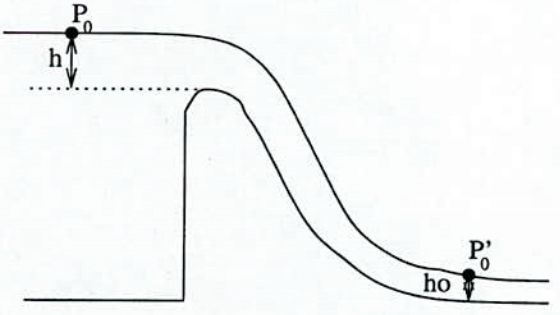



FIG. 3.2 – *Calcul d'un point de repère à l'amont($P_0$) et à l'aval ($P'_0$) d'un barrage*

A l'aval immédiat, le point de repère $P'_0$ est sur la lame déversante, au droit de la section $P'_0$ où cette lame quitte le pied du barrage. L'épaisseur $h_0$ de la lame se calcule à partir du débit unitaire :

$q = V_0 h_0$

$V_0$ étant la vitesse dans la section considérée. S'il l'on admet que cette vitesse dans la section considérée résulte de la transformation intégrale d'énergie potentielle en énergie cinétique, on a:

$$H = \frac{{V_0}^2}{2g} + h_0$$

où $H$ est la charge du liquide à l'amont immédiat du barrage, comptée à partir de l'horizontale passant par $P_0$, De là:

$$V_0 = \sqrt{(2g(H - h_0)}$$

En réalité la vitesse en $P_0'$ a une valeur moindre, par suite des pertes d'énergie subies par le liquide sur le barrage, de sorte que l'on doit poser :

$$V_0 = \alpha\sqrt{(2g(H - h_0)}$$

Le coefficient correctif $\alpha$ est toujours inférieur à 0.9, valeur qui n'est atteinte que pour une paroi absolument lisse et une grande hauteur de déversement : il descend sensiblement en dessous pour les surfaces rugueuses et de faibles chutes.

*Vanne de fond*

A l'amont, le point $P_0$ est contre la vanne (figure 3.4), à la cote $h_0$ au dessus du fond telle que l'on a:

$$q = ma\sqrt{\frac{2gh_0}{1 + \frac{ma}{h_0}}}$$

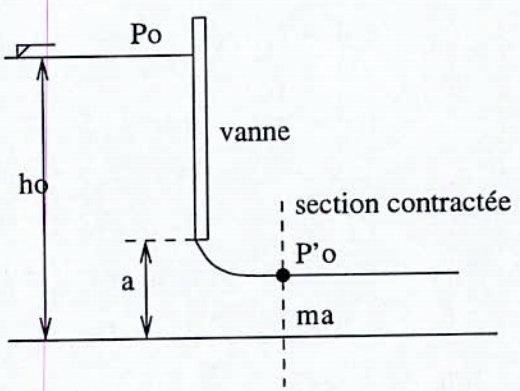



FIG. 3.3 – *Calcul d'un point de repère à l'amont($P_0$) et à l'aval ($P_0'$) d'une vanne*

a, étant l'ouverture de la vanne, m son coefficient de débit, généralement voisin de 0,62 pour une vanne à arrêtes vives et sans contractions latérales fonctionnant en mince paroi. Si $\frac{h_0}{a}$ est grand, cette relation devient:

$$q = ma\sqrt{2}g(h_0 - ma)$$

A l'aval, le point de repère $P_0'$ se situe au droit de la section contractée de la lame liquide émise par la vanne, c'est à dire à une distance assez faible de la vanne ( de l'ordre de 1,3a ) et à la côte $ma$ au dessus du fond.

*Changement brusque de pente*

Dans un changement brusque de pente, le point de repère se place au droit de ce changement (au moins théoriquement). Sa côte dépend de la valeur relative des pentes amont et aval ; en particulier, si le niveau critique est franchi au changement de pente, le point de repère n'est autre que le point de profondeur critique (point c ).

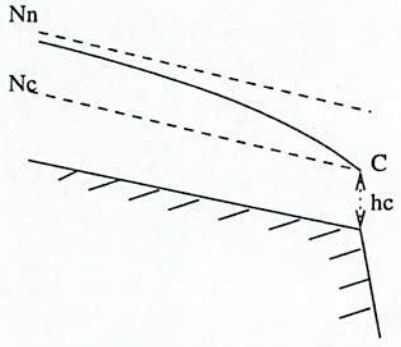



FIG. 3.4 – *Calcul d'un point de repère à l'amont d'une chute brusque*

**Récapitulation:**

| frontière | type d'écoulement | |
|---|---|---|
| | fluvial | torrentiel |
| solide | $U = 0$ ou $U_n = 0$ | |
| entrée | $U_n = U_n^*$ et $U_t = U_t^*$ ou $q_n = q_n^*$ et $q_t = q_t^*$ ou $H = H^*$ et $U_t = U_t^*$ ou $H = H^*$ et $q_t = q_t^*$ (*souvent* $U_t = q_t = 0$) | $U_n = U_n^*$, $U_t = U_t^*$, et $H = H^*$ ou $q_n = q_n^*$ $q_t = q_t^*$, et $H = H^*$ (*souvent* $U_t = q_t = 0$) |
| sortie | $H = H^*$ | Rien |

## 3.3 Formulation variationnelle

Le passage du modèle mathématique à une version numérique qui peut être traité par des moyens informatiques necéssite des méthodes de discrétisation spatiale. Beaucoup de méthodes sont à notre disposition, à savoir:

- La méthode des différences finies,
- La méthode des éléments finis,
- La méthode des volumes finis.

Dans notre cas, la méthode des éléments finis est utilsée pour discrétiser le domaine d'écoulment. Elle est basée sur une formulation intégrale du modèle mathématique. Avant de passer à la formulation variationnelle de notre système d'équations, on donne une brève

introduction de la méthode des éléments finis et son utilisation dans le domaine de l'hydraulique fluviale.

La méthode des éléments finis est une technique d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles. Elle appartient à l'ensemble des méthode de Galerkin et peut être appliquée pour résoudre des problèmes dans des géométries complexes. Sa principale caractéristique est que les solutions discrètes sont cherchées dans un espace de fonctions polynomiales par morceaux. La précision de cette méthode est finie. La technique pour calculer la solution approchée repose essentiellement sur la formulation variationnelle du problème continu : la discrétisation s'effectue alors en approchant le domaine par un maillage, l'espace des fonctions test par espace de polynômes par morceaux [44].

Dans le domaine de l'hydraulique à surface libre, il s'est avéré nécessaire de développer des modèles éléments finis pour reproduire les écoulements turbulents par gravité rencontrés dans les fleuves, estuaires et zones côtières. A cet égard, on peut citer le premier modèle 3D en couches par éléments finis de " Wang" [62] sur la base des travaux des " Lcdertse et al." [43] en différences finies. C'est un modèle basé sur l'hypothèse de répartition hydrostatique des pressions; il est obtenu par une intégration des équations de Navier-Stokes sur plusieurs couches. "King et al." [39] ont repris ce modèle mais en utilisant une approximation verticale facilitant alors la mise en oeuvre.
D'autre part, on cite les travaux de " Le Provost et Poncet" ainsi que ceux de "Daubert et Cahouet", "Hanguel, Hervouet et Pechon" [14] au Laboratoire National d'Hydraulique (LNH) de l'EDF. Le groupe UTC- Université Laval , en collaboration avec le Service Techniques Central des Ports Maritimes et Voies Navigables (STCPMVN), a également apporté une contribution dans le domaine de la modélisation en hydraulique à surface libre par éléments finis en 2D et 3D. "Cochet, Hubert [35] et Zhang [65]" ont développé différents éléments pour la modélisation 2D horizontale de Saint-Venant. "Robert et Leclerc [41]" ont proposé chacun un modèle 3D à pression hydrostatique respectivement en couches et à approximation verticale.
Soulaimani [54], pour sa part a mis en oeuvre un modèle 3D général en représentation Eulerienne - Lagrangienne. De nombreux travaux ont été menés pour développer des éléments finis conformes et plus souples surtout en 3D pour les fluides incompressibles. La règle était qu'il fallait prendre soin d'enrichir l'approximation des vitesses par rapport à celle de la pression / hauteur d'eau. Les éléments développés alors ne sont pas toujours conformes mais sont suffisamment efficaces [31].

De façon générale, cette formulation variationnelle est donnée par l'approche de la méthode des résidus pondérés de Galerkin. Elle est appliquée aux équations de base (3.1,3.2 et 3.3) pour former les termes faibles.

La forme intégrale du modèle s'écrit donc:

$$\int_A \delta U \left\{ \frac{\partial HU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_{uu} HUU) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_{uv} HUV) + gH\frac{\partial Z_f}{\partial x} + \frac{1}{2}g\frac{\partial H^2}{\partial x} - \Omega HV + \frac{1}{\rho}\left[\tau_x^F - \tau_x^S - \frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{xx}) - \frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{xy})\right]\right\} dA = 0 \tag{3.23}$$

$$\int_A \delta V \left\{ \frac{\partial HV}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_{vu} HVU) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_{vv} HVV) + gH\frac{\partial Z_f}{\partial y} + \frac{1}{2}g\frac{\partial H^2}{\partial y} + \Omega HU + \frac{1}{\rho}\left[\tau_y^F - \tau_y^S - \frac{\partial}{\partial x}(H\tau_{yx}) - \frac{\partial}{\partial y}(H\tau_{yy})\right]\right\} dA = 0 \tag{3.24}$$

$$\int_A \delta H \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial HU}{\partial x} + \frac{\partial HV}{\partial y} \right\} dA = 0 \tag{3.25}$$

Les termes de l'intégrale contenant des opérateurs du second ordre sont intégrés par parties afin de pouvoir reproduire le degré de la fonction d'interpolation, en utilisant la formule de Green suivante:

$$\int_A g\frac{\partial f}{\partial x}\, dA = -\int_A f\frac{\partial g}{\partial x}\, dA + \int_S fg\vec{n}\, dS \tag{3.26}$$

où $\vec{n}$ est la normale sortante.

Les formes (3.23, 3.24) deviennent donc:

$$\begin{aligned}\int_A \Bigg\{ \delta U \left[\frac{\partial HU}{\partial t} + gH\frac{\partial Z_f}{\partial x} - \Omega HV + \frac{1}{\rho}\left(\tau_x^F - \tau_x^S\right)\right] - \Bigg(\beta_{uu} HUU\frac{\partial \delta U}{\partial x} \\ + \beta_{uv} HUV\frac{\partial \delta U}{\partial y} + \frac{1}{2}gH^2\frac{\partial \delta U}{\partial x} - H\tau_{xx}\frac{\partial \delta U}{\partial x} - H\tau_{xy}\frac{\partial \delta U}{\partial y}\Bigg)\Bigg\}\, dA \\ + \int_S \Bigg[\eta_x\left(\beta_{uu} HUU\delta U\right) + \eta_y\left(\beta_{uv} HUV\delta U + \frac{1}{2}gH^2\delta U\right) \\ + \left(H\tau_{xx}\delta U\eta_x + H\tau_{xy}\delta U\eta_y\right)\Bigg]\, dS = 0\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}\int_A \Bigg\{ \delta V \left[\frac{\partial HV}{\partial t} + gH\frac{\partial Z_f}{\partial y} - \Omega HU + \frac{1}{\rho}\left(\tau_y^F - \tau_y^S\right)\right] - \Bigg(\beta_{vu} HVU\frac{\partial \delta V}{\partial x} \\ + \beta_{vv} HVV\frac{\partial \delta V}{\partial y} + \frac{1}{2}gH^2\frac{\partial \delta V}{\partial y} - H\tau_{yx}\frac{\partial \delta V}{\partial x} - H\tau_{yy}\frac{\partial \delta V}{\partial y}\Bigg)\Bigg\}\, dA \\ + \int_S \Bigg[\eta_x\left(\beta_{vu} HVU\delta V\right) + \eta_y\left(\beta_{vv} HVV\delta V + \frac{1}{2}gH^2\delta V\right) \\ + \left(H\tau_{yx}\delta V\eta_x + H\tau_{yy}\delta V\eta_y\right)\Bigg]\, dS = 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

## 3.4 Discrétisation spatiale

Afin de transformer le modèle intégro-différentiel en un système d'équations différentielles, il suffit de remplacer les fonctions continues $U, \delta U, V, \delta V, H, \delta H$, par des fonctions paramétriques obtenues par approximation nodale i.e., utilisant comme paramètres les valeurs discrètes de la fonction localisées en différents noeuds de l'élément.

Pour ce modèle, on utilise les éléments triangulaires à six noeuds et des éléments, à huit noeuds et à neuf noeuds. Les valeurs nodales des composantes de la vitesse seront localisées aux différents noeuds de l'élément, cependant, pour éviter les grandes oscillations de la position de la surface libre, les valeurs nodales de cette dernière ne seront localisées qu'aux trois noeuds ou quatre noeuds sommets (figure 3.5).

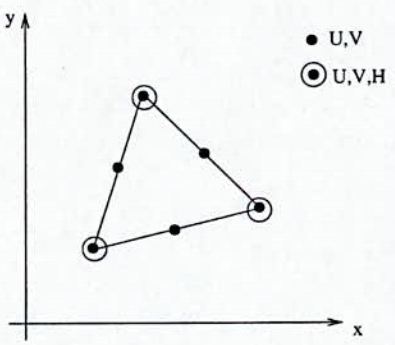



FIG. 3.5 – *Elément à six noeuds*

Les fonctions d'approximation nodale sont basées sur une fonction polynômiale du second degré pour les vitesses ($P^2$) et elles sont linéaires pour les hauteurs d'eau ($P^1$). Soient $(N_1, N_2, ..., N_p)$ et $(M_1, M_2, ..., M_q)$ les fonctions de base, respectivement, de $(U_1, U_2, ..., U_p)$, $(V_1, V_2, ..., V_p)$ et de $(H_1, H_2, ..., H_p)$ .
Ainsi, on écrira:

$$
\begin{aligned}
U &= \Sigma U_i.N_i \\
V &= \Sigma V_i.N_i \\
H &= \Sigma H_i.M_i \\
\delta U &= \Sigma \delta U_i.N_i \\
\delta V &= \Sigma \delta V_i.N_i \\
\delta H &= \Sigma \delta H_i.M_i
\end{aligned}
$$

ceci permettra d'écrire les expressions résiduelles décrites dans le paragraphe ci-après.

### 3.4.1 Expressions résiduelles

Les expressions résiduelles de l'équation de la quantité de mouvement sont données par:

$$
\begin{aligned}
f_{U_i} = & \\
& \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i \left[ H\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial H}{\partial t} + gH\frac{\partial z_f}{\partial x} - \Omega HV + \frac{1}{\rho}\left(\tau_x^F - \tau_x^S\right) \right] \right. \\
& + \frac{\partial N_i}{\partial x}\left[ -\beta HU^2 - \frac{1}{2}gH^2 + 2\widetilde{\nu}H\frac{\partial U}{\partial x} \right] \\
& \left. + \frac{\partial N_i}{\partial y}\left[ -\beta HUV + 2\widetilde{\nu}H\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right] \right\} dA_e \\
& + \sum_e \int_{S_e} N_i \left\{ \left[ \left( \beta HU^2 + \frac{1}{2}gH^2 \right)\eta_x + \beta HUV\eta_y \right] \right. \\
& \left. - \left[ 2\widetilde{\nu}H\frac{\partial U}{\partial x}\eta_x + \widetilde{\nu}H\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\eta_y \right] \right\} dS_e
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{V_i} = & \\
& \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i \left[ H\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial H}{\partial t} + gH\frac{\partial z_f}{\partial y} - \Omega HU + \frac{1}{\rho}\left(\tau_y^F - \tau_y^S\right) \right] \right. \\
& + \frac{\partial N_i}{\partial x}\left[ -\beta HUV + \widetilde{\nu}H\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right] \\
& \left. + \frac{\partial N_i}{\partial y}\left[ -\beta HVV - \frac{1}{2}gH^2 + 2\widetilde{\nu}H\frac{\partial V}{\partial y} \right] \right\} dA_e \\
& + \sum_e \int_{S_e} N_i \left\{ \left[ \beta HUV\eta_x + \left( \beta HVV + \frac{1}{2}gH^2 \right)\eta_y \right] \right. \\
& \left. - \left[ \widetilde{\nu}H\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\eta_x + 2\widetilde{\nu}H\frac{\partial V}{\partial y}\eta_y \right] \right\} dS_e
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

De même, l'équation de continuité (3.1) donne:

$$
f_{H_i} = \sum_e \int_{A_e} M_i \left[ \frac{\partial H}{\partial t} + H\frac{\partial U}{\partial x} + U\frac{\partial H}{\partial x} + H\frac{\partial V}{\partial y} + V\frac{\partial H}{\partial y} \right] dA_e \tag{3.31}
$$

### 3.4.2 Expressions des dérivées

Avec les expressions résiduelles ci-dessus, on se ramène à un système non linèaire à résoudre qui est du type: $F(U,V,H) = (f_{U_i}, f_{V_i}, f_{H_i}) = (0,0,0)$.

Pour ceci, on utilisera la méthode de Newton qui revient à résoudre:

$$
\nabla F(U,V,H).(\Delta U, \Delta V, \Delta H) + F(U,V,H) = 0 \tag{3.32}
$$

De là, on a besoin des dérivées des expressions résiduelles ($\nabla F(U,V,H)$).

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{U_i}}{\partial U_j} = & \\ & \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i N_j \left[ \alpha H + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\tau_x^F}{\rho} \frac{2U^2+V^2}{U(U^2+V^2)} \right] \right. \\ & - 2\beta H U \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + 2\widetilde{\nu} H \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} \\ & \left. - \beta H V \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j + \widetilde{\nu} H \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} dA_e \\ & + \sum_e \int_{S_e} N_i N_j \left[ 2\beta H U \eta_x + \beta H V \eta_y \right] \\ & \left. - 2\widetilde{\nu} H N_i \frac{\partial N_j}{\partial x}\eta_x - \widetilde{\nu} H N_i \frac{\partial N_j}{\partial y}\eta_x \right\} dS_e \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{U_i}}{\partial V_j} = & \\ & \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i N_j \left[ -\Omega H + \frac{\tau_x^F}{\rho} \frac{V}{U^2+V^2} \right] \right. \\ & \left. - \beta H U \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j + \widetilde{\nu} H \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x} \right\} dA_e \\ & + \sum_e \int_{S_e} \left\{ \beta H U \eta_x N_i N_j - \widetilde{\nu} H \eta_x N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\} dS_e \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_{U_i}}{\partial H_j} = & \\ & \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i M_j \left[ \alpha U + \frac{\partial U}{\partial t} - \Omega V + g\frac{\partial z_f}{\partial x} + \frac{\tau_x^F}{\rho c_f}\frac{\partial c_f}{\partial H} \right] \right. \\ & - \frac{\partial N_i}{\partial x} M_j \left[ 2\widetilde{\nu}\frac{\partial U}{\partial x} - \beta U^2 - gH \right] \\ & \left. + \frac{\partial N_i}{\partial y} M_j \left[ \widetilde{\nu}\left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \beta U V \right] \right\} dA_e \\ & + \sum_e \int_{S_e} N_i M_j \left\{ \left[ \beta U^2 + gH + 2\widetilde{\nu}\frac{\partial U}{\partial x} \right] \eta_x \right. \\ & \left. - \left[ \beta U V - \widetilde{\nu}\left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \eta_y \right\} dS_e \end{aligned} \tag{3.35}$$

où:

$$\frac{\partial c_f}{\partial H} = \begin{cases} 0 \\ (\Phi g n^2) / (H^{4/3}) \end{cases} \tag{3.36}$$

avec, $\Phi = 0.151$ pour les unités U.S. ou $\Phi = 0.333$ pour les unités métriques.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{V_i}}{\partial U_j} = & \\ & \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i N_j \left[ \Omega H + \frac{\tau_y^F}{\rho} \frac{U}{U^2+V^2} \right] \right. \\ & - \beta H V \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + \widetilde{\nu} H \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \Big\} dA_e \\ & + \sum_e \int_{S_e} \left\{ \beta H U \eta_y N_i N_j - \widetilde{\nu} H \eta_y N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\} dS_e \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{V_i}}{\partial V_j} = & \\ & \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i N_j \left[ \alpha H + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\tau_y^F}{\rho} \frac{2U^2+V^2}{U(U^2+V^2)} \right] \right. \\ & - \beta H U \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + 2\widetilde{\nu} H \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ & - 2\beta H V \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j + \widetilde{\nu} H \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \Big\} dA_e \\ & + \sum_e \int_{S_e} N_i N_j \left[ 2\beta H U \eta_x + \beta H V \eta_y \right] \\ & - 2\widetilde{\nu} H N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \eta_x - \widetilde{\nu} H N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \eta_x \Big\} dS_e \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{V_i}}{\partial H_j} = & \\ & \sum_e \int_{A_e} \left\{ N_i M_j \left[ \alpha V + \frac{\partial V}{\partial t} + \Omega U + g \frac{\partial z_f}{\partial y} + \frac{\tau_y^F}{\rho c_f} \frac{\partial c_f}{\partial H} \right] \right. \\ & - \frac{\partial N_i}{\partial x} M_j \left[ 2\widetilde{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} - \beta U V - g H \right] \\ & + \frac{\partial N_i}{\partial y} M_j \left[ \widetilde{\nu} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \beta U V \right] \Big\} dA_e \end{aligned}$$

$$+ \sum_e \int_{S_e} N_i M_j \left\{ \left[ \beta U^2 + gH + 2\widetilde{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} \right] \eta_x \right.$$
$$\left. - \left[ \beta UV - \widetilde{\nu} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \eta_y \right\} dS_e \tag{3.39}$$

De même, pour l'équation de continuité:

$$\frac{\partial f_{H_i}}{\partial U_j} = \sum_e \int_{A_e} \left\{ M_i \frac{\partial N_j}{\partial x} [H] + M_i N_j \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \right] \right\} dA_e \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial f_{H_i}}{\partial V_j} = \sum_e \int_{A_e} \left\{ M_i \frac{\partial N_j}{\partial y} [H] + M_i N_j \left[ \frac{\partial H}{\partial y} \right] \right\} dA_e \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial f_{H_i}}{\partial H_j} = \sum_e \int_{A_e} \left\{ M_i \frac{\partial M_j}{\partial x} \left[ \alpha + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right] + M_i \frac{\partial M_j}{\partial x} [U] \right.$$
$$\left. + M_i \frac{\partial M_j}{\partial x} [V] \right\} dA_e \tag{3.42}$$

### 3.4.3 Application des conditions aux limites

La formulation MEF Galerkin conduit à la prise en compte des conditions aux limites compliquées. Elle sont de deux types, naturelles ou essentielles. Les conditions naturelles sont implicitement imposées dans la position du problème et n'exigent aucun traitement supplémentaire. Les conditions imposées de manière explicite sont connues sous le nom de conditions essentielles ou forcées. Elles sont introduites en modifiant les équations discrétisées du mouvement gouvernant la variable en jeu.
Dans une première étape pour le traitement des conditions aux limites, le long d'une frontière (fermée ou ouverte), les expressions résiduelles dans les directions x et y sont d'abord transformées en expressions résiduelles dans les directions tangentes et normales à la frontière. Au noeud i, la trasformation est donnée par [59] et [60]:

$$f_{U_i}^T = f_{U_i} \cos \delta' + f_{V_i} \sin \delta' \tag{3.43}$$

$$f_{V_i}^T = -f_{U_i} \sin \delta' + f_{V_i} \cos \delta' \tag{3.44}$$

où $f_{U_i}^T$ et $f_{V_i}^T$ sont les expressions résiduelles transformées et $\delta'$ est l'angle entre l'axe des x et la tangente à la frontière.

- **Frontières ouvertes:(entrée, sortie)**

1$^{er}$ cas:
Des vitesses U , V et la hauteur H sont appliquées en tant que conditions essentielles à

n'importe quel noeud sur la frontière d'entrée. Ces valeurs sont prescrites au noeud i en remplaçant les expressions résiduelles par :

$$f_{U_i} = U_i^* \qquad f_{V_i} = V_i^* \qquad f_{H_i} = H_i^* \tag{3.45}$$

ou $U_i^*$, $V_i^*$ et $H_i^*$ sont les valeurs au noeud i, et en redéfinissant les dérivées par rapport aux vitesses au noeud j comme suit :

$$\frac{\partial f_{U_i}}{\partial U_j} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial f_{U_i}}{\partial V_j} = 0 \qquad \frac{\partial f_{U_i}}{\partial H_j} = 0 \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial f_{V_i}}{\partial U_j} = 0 \qquad \frac{\partial f_{V_i}}{\partial V_j} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial f_{V_i}}{\partial H_j} = 0 \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial f_{H_i}}{\partial U_j} = 0 \qquad \frac{\partial f_{H_i}}{\partial V_j} = 0 \qquad \frac{\partial f_{H_i}}{\partial H_j} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases} \tag{3.48}$$

$2^{eme}$ cas:
Des débits unitaires suivant les directions x et y sont appliqués au noeud i de la frontière. De la même manière, on redéfinit les expressions résiduelles par :

$$f_{U_i} = U_i H_i + q_{x_i}^* \qquad f_{V_i} = V_i H_i + q_{y_i}^* \tag{3.49}$$

de même leurs dérivées par rapport aux vitesses et la profondeur au noeud j comme suit:

$$\frac{\partial f_{U_i}}{\partial U_j} = \begin{cases} H_i, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial f_{U_i}}{\partial V_j} = 0 \qquad \frac{\partial f_{U_i}}{\partial H_j} = \begin{cases} U_i, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases} \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial f_{V_i}}{\partial V_j} = 0 \qquad \frac{\partial f_{V_i}}{\partial U_j} = \begin{cases} H_i, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial f_{V_i}}{\partial H_j} = \begin{cases} V_i, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases} \tag{3.51}$$

où $q_{xi}^*$, $q_{yi}^*$ sont les débits unitaires au noeud i spécifiés dans les directions x et y.

$3^{eme}$ cas:
On impose $Q(t)$, l'hydrogramme de crue (un débit total) à l'entrée.
Si le débit total normal à la section d'entrée est spécifié, une pente hydraulique constante $J$ le long du canal est assurée. A cette section d'entrée le mouvement est supposé uniforme et l'on a $I$=$J$ ( $I$ est la pente du fond), d'où on peut utiliser les formules empiriques appliquées à l'écoulement uniforme qui sont de type $Q = K\sqrt{I}$ [13].
où, $K = K(h)$ est la débitance donnée par la formule de Chézy:

$$K = CS_m\sqrt{R_h} \qquad \text{ou encore} \qquad K = S_m\sqrt{\frac{gR_h}{c_f}}$$

Le débit imposé à l'éntrée est distribué en débits nodaux en se basant sur la débitance. On suppose que la section d'entrée est découpée en tranches verticales. Elle est définie

par une liste de noeuds qui forment une série d'éléments connectés (figure 3.10).

La débitance à travers chaque élément $e$ est définie par:

$$K_e = S_{me}\sqrt{\frac{gR_{h_e}}{c_f}} \tag{3.52}$$

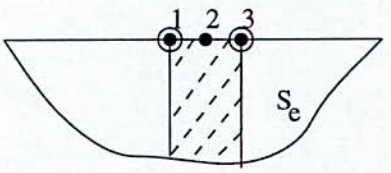



FIG. 3.6 – *Section transversale amont*

La débitance $K_e$ est distribuée sur les noeuds de l'élément comme suit [59]:

$$K_1 = \frac{1}{6}K_e(1-\xi) \qquad K_2 = \frac{2}{3}K_e \qquad K_3 = \frac{1}{6}K_e(1+\xi)$$

avec,

$$\xi = \frac{5\Delta H}{12\overline{H}}, \Delta H = H_3 - H_1, \overline{H} = \frac{H_1 + H_3}{2}$$

Le débit nodal est obtenu par le produit du ratio de la débitance nodale et la débitance totale de chaque élément et le débit total traversant la section transversale.

$$Q_i = \frac{K_i}{\sum K_e}Q_t \tag{3.53}$$

Pour calculer les vitesses et la hauteur en amont, on exprime le débit nodal par:

$$Q_i = a_i^o U_i + b_i^o V_i \tag{3.54}$$

$$a_i^o = \sum_e \int_{S_e^o} N_i H \eta_x dS_e^o \qquad b_i^o = \sum_e \int_{S_e^o} N_i H \eta_y dS_e^o$$

Si le débit nodal est déterminé au noeud i, l'expression residuelle pour le débit tangent à la frontière sera redéfinie comme suit:

$$f_{U_i}^T = a_i^o U_i + b_i^o V_i - Q_i^o \tag{3.55}$$

ainsi que les dérivées des expressions residuelles:

$$\frac{\partial f_{U_i}^T}{\partial U_j} = \begin{cases} a_i^o, \ si \ \ i = j \\ 0, \ si \ \ i \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial f_{U_i}^T}{\partial V_j} = \begin{cases} b_i^o, \ si \ \ i = j \\ 0, \ si \ \ i \neq j \end{cases} \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial f_{U_i}^T}{\partial H_j} = \frac{\partial a_i^o}{\partial H_j} U_i + \frac{\partial b_i^o}{\partial H_j} V_i \tag{3.57}$$

avec,

$$\frac{\partial a_i^o}{\partial H_j} = \sum_e \int_{S_e^o} N_i M_j \eta_x dS_e^o \qquad \frac{\partial b_i^o}{\partial H_j} = \sum_e \int_{S_e^o} N_i M_j \eta_y dS_e^o \tag{3.58}$$

- **Frontières solides**

De la même manière, la frontière solide est traitée en présence des infiltrations normales aux parois latérales du canal (ce qui est rare). Par analogie, les expressions résiduelles s'écrivent comme suit :

$$f_{V_i}^T = a_i^s U_i + b_i^s V_i - Q_i^s \tag{3.59}$$

$Q_i^s$ représente le débit d'infiltration. En général,$Q_i^s = 0$

avec,

$$a_i^s = \sum_e \int_{S_e^s} N_i H \eta_x dS_e^s \qquad b_i^s = \sum_e \int_{S_e^s} N_i H \eta_y dS_e^s$$

et les dérivées des expressions residuelles sont remplacées par:

$$\frac{\partial f_{V_i}^T}{\partial U_j} = \begin{cases} a_i^s, \ si \ i = j \\ 0, \ si \ i \neq j \end{cases} \qquad \frac{\partial f_{V_i}^T}{\partial V_j} = \begin{cases} b_i^s, \ si \ i = j \\ 0, \ si \ i \neq j \end{cases} \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial f_{V_i}^T}{\partial H_j} = \frac{\partial a_i^s}{\partial H_j} U_i + \frac{\partial b_i^s}{\partial H_j} V_i \tag{3.61}$$

avec,

$$\frac{\partial a_i^s}{\partial H_j} = \sum_e \int_{S_e^s} N_i M_j \eta_x dS_e^s \qquad \frac{\partial b_i^s}{\partial H_j} = \sum_e \int_{S_e^s} N_i M_j \eta_y dS_e^s \tag{3.62}$$

### 3.4.4 Présentation de la surface libre:-frontière mobile-

La surface libre constitue à la fois une frontière du domaine et une inconnue du problème. Durant la variation du débit, la surface libre bouge de manière très complexe et crée des parties mouillées et des parties sèches dans le canal. Le modèle éléments finis doit représenter la partie au-dessous de l'eau et introduire correctement les conditions aux limites à chaque instant. La complexité de la question a suscité l'attention des chercheurs et notemment les numériciens. C'est ainsi qu'on recense deux approches fondamentales pour aborder la question [42] et [31].

- Méthode à maillage fixe (Euler)
- Méthode à maillage adaptatif (Euler-Lagrange)

Le choix de l'une ou de l'autre des deux méthodes est subordonné au phénomène physique devant être reproduit.

• **Méthode à maillage fixe**

Cette méthode est également appelée approche Eulerienne car le fluide évolue dans un maillage fixe. On distingue alors trois catégories déléments:

- Eléments entièrement occupés par le fluide (éléments mouillés).
- Eléments partiellement occupés par le fluide (éléments de transition).
- Eléments complètement secs.

On peut citer deux techniques intéressantes utilisées pour cette approche:

- Une technique simple qui consiste à utiliser une condition de mur fictif à la position de la frontière mobile calculée et d'ajuster le calcul de la frontière pour la prochaine étape de temps (figure 3.7). La nouvelle frontière est obtenue par interpolation (extrapolation) de la côte de la surface libre pour obtenir une hauteur d'eau positive [42].

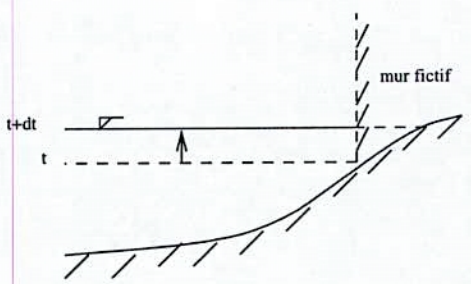



FIG. 3.7 – *Technique de mur fictif*

- Une autre technique consiste à utiliser une approximation en escalier (figure 3.8) de la bathémétrie de la zone de la frontière mobile. Ainsi les éléments entiers sur les zones plates peuvent être basculés d'un état mouillé à un état sec et vis-versa instantanément selon les hauteurs d'eau calculées [42].

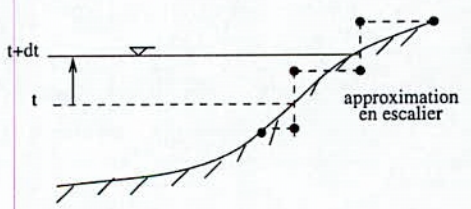



FIG. 3.8 – *Technique d'approximation en escalier*

• **Méthode à maillage adaptatif**

Appelée également méthode mixte Euler-Lagrange du fait que les noeuds se déplacent avec le mouvement du fluide. L'avantage de cette approche c'est qu'elle permet de déterminer avec précision la position de la surface libre. En revanche, les déplacements importants peuvent entrainer une distorsion du maillage bloquants alors les calculs [31].

**Comment repérer la surface libre dans FESWMS?**

La difficulté consiste à développer une technique pour obtenir une frontière pour une solution non stationnaire qui évite la violation de la conservation de la masse et du mouvement. FESWMS utilise une technique couvrant-découvrant des éléments en utilisant un maillage fixe, un élément mouillé est désigné par $ON$ et un élément sec est désigné par $OFF$ (figure 3.9).

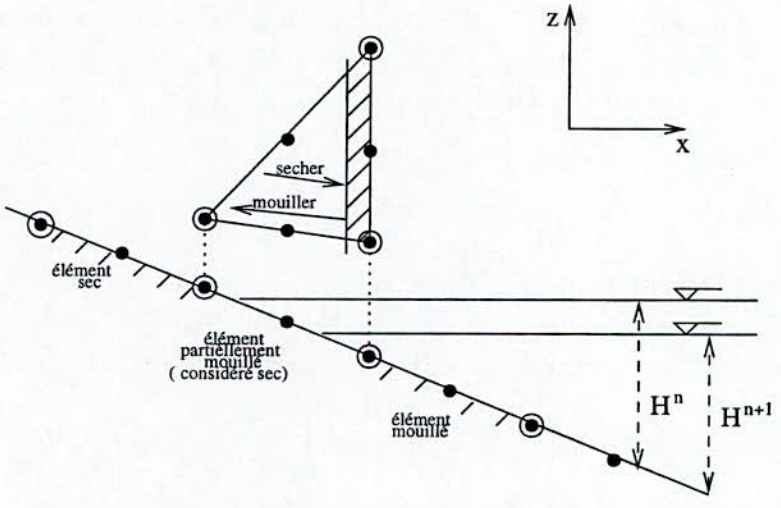



FIG. 3.9 – *Différents états d'un élément*

L'algorithme utilisé est défini comme suit:
*L'élément est mouillé (ON):*
Est-ce qu'il a y un noeud sec parmi les six noeuds de l'élément? Si $H < \varepsilon$ ($\varepsilon = 10^{-}8$)), le noeud est sec. Il suffit qu'un seul noeud soit sec, l'élément bascule $OFF$. On impose $U = V = H = 0$ pour les noeuds non actifs et $U = V = 0$ et $H = H^*$ pour les noeuds actifs.

*L'élément est sec (OFF):*
Est-ce qu'il tourne ON?

- Sur les noeuds mouillés de l'élément ($H > 0$), la côte minimale de la surface libre doit être déterminée ($ws_{min}$).

- Sur les noeuds secs de lélément, l'élévation maximale du sol doit être déterminée ($Z_{gmax}$).
- Si $Z_{gmax} + T < ws_{min} < 10^{35}$ , l'élément bascule *ON* et une hauteur $H_i = ws_{min} - Z_{g_i}$ est attribuée au noeud i, $Z_{g_i}$ est l'élévation du sol à ce noeud.

La tolérance T est une hauteur d'eau fictive utilisée pour augmenter la côte de la surface libre pour avoir plus de possibilité de mouillage des éléments.

## 3.5 Discrétisation temporelle

En général, un schéma d'approximation numérique d'une équation de transport est considéré comme étant stable lorsque les petites erreurs numériques (de troncature, d'arrondis) introduites à un pas de temps donné ne sont pas amplifiées durant l'application successive du schéma [2].

La stabilité du schéma (pour que la solution converge) est assurée par l'application du critère de Courant-Friedrichs-Levy (CFL), qui relie le pas de temps $\Delta t$ au pas d'espace moyen $\Delta x$ et qui s'écrit comme suit:

$$c * \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

N étant la dimension de l'espace spatiale et $c = \frac{dx}{dt}$ étant la vitesse de transport. Cette condition est souvent nécessaire pour assurer la stabilité des schémas explicites ce qui n'est pas le cas pour les schémas implicites qui sont inconditionnellement stables.

La discrétisation temporelle utilise un schéma de différences finies implicite suivant:

$$\frac{\partial U}{\partial t} \simeq \frac{1}{\theta \Delta t}(U - U_0) - \frac{(1-\theta)}{\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_0$$

où: $\theta$ est un facteur de pondération compris entre 0,5 et 1; $\Delta t$ le pas de temps; et l'indice 0 indique l'instant initial.
Un schéma d'intégration par rapport au temps implicite simple (Euler-arrière) est obtenue en prenant $\theta = 1$; le cas $\theta = 0.5$ donnera un schéma de Crank Nicholson.
Cependant, il a été démontré qu'un $\theta = 0.67$ produit une solution stable même pour des pas de temps relativement grands et aussi des solutions précises.

On remarque par ailleurs que l'expression de $\frac{\partial U}{\partial t}$ peut être réarangée de la façon suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha U - \beta_1$$

avec,

$$\alpha = \frac{1}{\theta \Delta t}$$

et

$$\beta_1 = \alpha U_0 + \frac{(1-\theta)}{\theta} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_0$$

Le terme $\beta_1$ est connu puisqu'il n'est fonction que des termes à l'instant 0. On écrit de la même façon les dérivées temporelles de V et H :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha V - \beta_2$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \alpha H - \beta_3$$

avec, $\beta_2$ et $\beta_3$ donnés par:

$$\beta_2 = \alpha U_0 + \frac{(1-\theta)}{\theta} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)_0$$

$$\beta_3 = \alpha U_0 + \frac{(1-\theta)}{\theta} \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_0$$

## 3.6 Algorithme de résolution

En général, les termes non-linéaires apparaissent dans la formulation de problèmes physiques pour deux raisons [2]:

- Les paramètres physiques supposés indépendants de $U_n$ dans un modèle linéaire, tels que les coefficients de conductivité, de viscosité, etc ..., deviennent des fonctions de $U_n$.
- L'exemple de notre cas, dans les équations de Navier-Stockes moyennées , même lorsque les propriétés physiques sont indépendantes de $U_n$ les termes non linéaires apparaissent dans $u\nabla u$.

### 3.6.1 Organigramme de résolution

L'algorithme général du noyau de calcul de FESWMS est donné par l'organigramme suivant (figure 3.10)[59] et [60]:

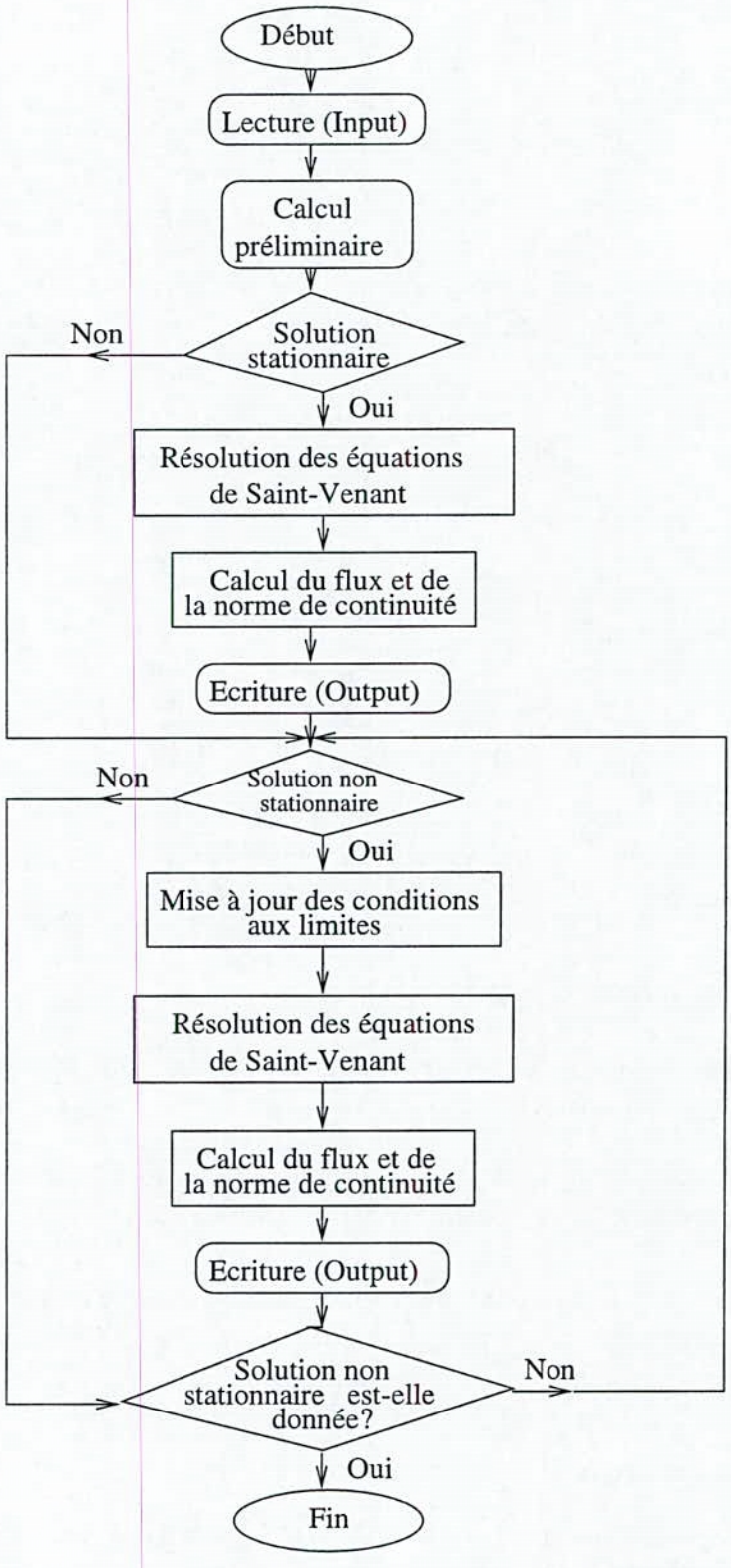



FIG. 3.10 – *Organigramme du modèle FESWMS*

### 3.6.2 Linéarisation du système

La discrétisation de FESWMS, basée sur la méthode des éléments finis type Galerkin, conduit à un système non linéaire. La majorité des algorithmes utilisés conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Le choix d'un algorithme de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- L'unicité de la solution.
- La disponibilité d'une méthode de construction d'une bonne solution initiale.
- La précision et la rapidité de la convergence désirée.
- Le risque de divergence.

En pratique il n'existe pas de méthode générale valable pour tous les cas; la stratégie de résolution doit s'adapter, par expérience, à une classe de problèmes donnés, en faisant appel à une combinaison de différentes méthodes de base.

Dans notre étude, le système non linéaire obtenu est du type:

$$K(a)a = f \tag{3.63}$$

Il est linearisé par la méthode totale de Newton ou la variante quasi-Newton.

**• Méthode de Newton**

La linéarisation du système (3.63) par l'algorithme de Newton peut être résumé ainsi:

$$a_{i+1} = a_i - J(a_i)^{-1} R(a_i) \tag{3.64}$$

où $a_{i+1}$ est le nouveau vecteur solution à calculer, $a_i$ est le vecteur solution connu à la ième itération, $J(a_i)$ est la jacobienne calculée à partir de $a_i$, et $R(a_i) = K(a_i)a_i - f$ est le vecteur résiduel. En pratique, chaque itération est effectuée comme suit:

$$J(a_i)\,\Delta a_i = -R(a_i) \tag{3.65}$$

où $\Delta a_i$ est la valeur incrementale de la solution. Une mise à jour est calculée par:

$$a_{i+1} = a_i + \omega \Delta a_i \tag{3.66}$$

avec $\omega$ est un facteur de relaxation variant entre 0 et 2. Ce facteur permet souvent d'améliorer la vitesse de convergence et sa valeur optimale dépend du problème; elle est déterminée par l'expérimentation numérique [59] et [60].

• **Méthode Quasi-Newton**

Durant la solution complète de Newton, la matrice jacobienne est décomposée en matrices triangulaires supérieures et inférieures. Ces matrices factorisées peuvent être mises à jour d'une simple manière au lieu de les recalculer complètement à chaque itération. La méthode Quasi-Newton est utilisée pour blocker la matrice et réduire le temps de calcul. Cette variante est appliquée par l'algorithme dit de "Broyden". Partant d'une solution initiale estimée $a_0$ (matrice factorisée), l'algorithme de la méthode de Broyden [21] procède comme suit [59] et [60]:

- Pour $i = 1$ à $I$

  1. $\delta_i = \Delta a_{i-1}$
  2. Calcul $\Delta a_i = -J_0^{-1} R(a_i)$
  3. Pour $j = 1$ à $I - 1$

     Calcul $\Delta a_i = \Delta a_i - \rho_j (\delta_i + r_j) \delta_i' \Delta a_i$

  4. $r_i = \Delta a_i - \delta_i$ et $\rho_i = 1/(\delta_i' r_j)$
  5. Calcul $\Delta a_i = \Delta a_i - \rho_i (\delta_i + r_i) \delta_i' \Delta a_i$

- Fin de la boucle $i$

où $\delta_i'$ est le vecteur transposé de $\delta_i$ ou vecteur directeur.

### 3.6.3 Intégration numérique

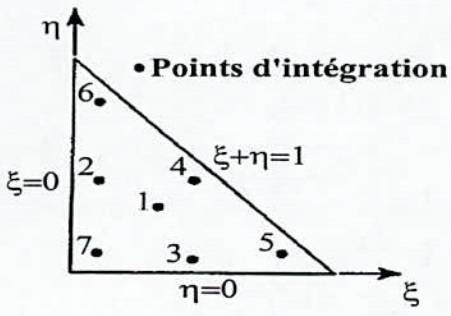
Pour calculer numériquement les différentes intégrales apparaissant dans la formulation variationnelle discrétisée, on utilise la formule d'intégration de Gauss suivante:

$$\int_{A_e} f(x,y)\, dxdy \simeq A_e \sum_{i=1}^{k} w_i f(x_i, y_i)$$

$A_e$ étant la surface de l'élément d'intégration, $f$ la fonction à intégrer, $k$ nombre de points d'intégration numérique et $w_i$ le facteur de pondération associé au $i^{ème}$ point d'intégration de coordonnées $(x_i, y_i)$.

Un processus d'intégration numérique doit prouver une précision suffisante pour assurer la convergence d'une solution de la méthode des éléments finis. D'après Strang et Fix la convergence aura lieu si un processus d'intégration numérique est suffisamment précis pour calculer la surface d'un élément.

Pour cela, une formule d'intégration numérique d'ordre 6 est utilisée; elle s'appuie sur les 7 points de Gauss illustrés sur la figure suivante (3.11) [59], [60] et [2]:




| Numéro du point | Coordonnées ξ | Coordonnées η | Poids d'intégration ω |
|---|---|---|---|
| 1 | 1/3 | 1/3 | 0.225 |
| 2 | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| 3 | $\beta_1$ | $\alpha_1$ | $\gamma_1$ |
| 4 | $\beta_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| 5 | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| 6 | $\beta_2$ | $\alpha_2$ | $\gamma_2$ |
| 7 | $\beta_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |

$\alpha_1 = 0.05971587$ $\alpha_2 = 0.79742698$
$\beta_1 = 0.47014206$ $\beta_2 = 0.10128651$
$\gamma_1 = 0.13239415$ $\gamma_2 = 0.12593918$

FIG. 3.11 – *Les points d'intégration de Gauss*

### 3.6.4 Résolution du système

La résolution du système (3.65) inhérent à l'algorithme de Newton ou Quasi-Newton est effectuée par la méthode directe, factorisation LU de Gauss, combinnée à la méthode frontale pour l'optimisation de la taille mémoire disponible pour le calcul.

**• Méthode Frontale**

C'est une méthode de résolution qui tire profit des particularités des systèmes linéaires associés à la méthode des éléments finis : l'assemblage élément par élément du système linéaire, et son caractère creux. Pour simplifier la présentation, on suppose qu'à chaque noeud de la triangulation $T_h$ est associé une inconnue et une seule.
L'assemblage de la matrice jacobienne A et du second membre b sont résumés par l'algorithme suivant [38]:

*Boucle sur les éléments de la triangulation:*
Pour tout $K \in T_h$ faire
*Boucle sur les noeuds de l'élément:* Pour $A_i \in K$ faire
*Boucle sur les noeuds:* Pour $A_j \in K$ faire Assemblage de la matrice $A$
$A_{i,j} = A_{i,j} + A_{i,j}(K)$
*Fin de la boucle sur les noeuds* $A_j$
- Assemblage du second membre b:
$b_i = b_i + b_i(K)$
*Fin de la boucle sur les noeuds* $A_i$
*Fin de la boucle sur les éléments de* $T_h$

$A_{i,j}(K)$ et $b_i(K)$ représentant les coefficients des matrices et seconds membres élémentaires.

Pour un noeud $N_i$ donné dans un élément K

$$A_{i,j} = A_{i,j} + \sum_{i,j \in K} A_{i,j}(K)$$
$$b_i = b_i + \sum_{i \in K} b_i(K)$$

Les opérations de ces boucles sont donc contenues dans les boucles suivantes

$$A_{i,j} = A_{i,j} + \sum_{k=k_{m(i)}}^{k=k_{M(i)}} A_{i,j}(K)$$
$$b_i = b_i + \sum_{i \in k} b_i(K)$$

- où $K_{m(i)}$ est le plus petit numéro d'élément ayant $N_i$ pour noeud
- et $K_{M(i)}$ est le plus grand numéro d'élément ayant $N_i$ pour noeud.

Au cours de l'assemblage, qui procède suivant un parcours de $T_h$ par numéro d'éléments croissant, pour les éléments de numéro plus petit que $K_{m(i)}$ tous les $A_{i,j}$ et $b_i$ sont nuls. A partir de l'élément numéro $K_{m(i)}$, on commence à calculer ces termes, on dit que le noeud $N_i$ ( ou l'inconnue $i$) est activé(e). Ensuite pour les éléments de numéro plus grand que $K_{M(i)}$, les $A_{i,j}$ et $b_i$ sont définitivement calculés, on dit alors que le noeud $N_i$ (ou l'inconnue $i$ ) est désactivé(e). Cette remarque suggère de garder que les coefficients $A_{i,j}$ et $b_i$ en mémoire centrale, que le temps nécessaire à leur calcul.
Tant que le noeud $N_i$ n'est pas activé aucune place mémoire n'est réservée pour la ligne et la colonne $i$ de $A$.
Dès que le noeud $N_i$ est désactivé, ces termes sont stockés dans une mémoire auxiliaire et la place qu'ils occupaient peut être réutilisée pour stocker les coefficients associés à un noeud $N_{i'}$ nouvellement activé.

L'ensemble des noeuds actifs à un instant donné s'appelle le front. Au cours du parcours de la triangulation, la taille du front ( ou largeur du front ) augmente, passe par un maximum et puis décroit. La place mémoire nécessaire pour effectuer l'assemblage du système linéaire est déterminée par la taille maximale du front. Elle est donnée par le carré du front maximale.

**Remarque:**
*La numérotation des noeuds n'a aucune influence sur la taille du front, par contre la numérotation des éléments est très importante, ainsi la longueur du front se réduit, et le stockage de la matrice A nécessite moins de place mémoire.*

- **Factorisation LU**

Suite à cette remarque et à ces limitations, il est possible d'assembler le système linéaire et de le résoudre. Pour cela, on cherche à décomposer la matrice A par la factorisation de

Gauss $LU$; On écrit le système sous la forme $LUx = b$, on pose $Ux = y$, on résout $Ly = b$, puis on fait la résolution du système triangulaire $Ux = y$.

La diagonale de L étant égale à 1, en intégrant les deux matrices triangulaires $L$ et $U$ dans une même matrice $K$ où la diagonale est égale à celle de $U$, la combinaison de l'assemblage et de la décomposition de Gauss $LU$ s'écrit de la façon suivante:

*Boucle sur les éléments de la triangulation* $T_h$ :
Pour $K \in T_h$ faire
*Boucle sur les noeuds de l'élément* $K$
Pour $N_i$ noeud de $K$ faire
*Boucle sur les noeuds de l'élément* $K$
Pour $N_j$ noeud de $K$ faire
- Assemblage de la matrice $A$
$A_{i,j} = A_{i,j} + A_{i,j}(K)$
*Fin de la boucle sur les noeuds* $N_j$
- Assemblage du second membre $b$:
$b_i = b_i + b_i(K)$
*Fin de la boucle sur les noeuds* $N_i$

*Boucle sur les noeuds à désactiver*
- Sauvegarde sur mémoire auxiliaire de la ligne $k$, de la colonne $k$ et de $b_k$
*Boucle sur les lignes*
Pour $i = 1$ à $n$ faire
*Boucle sur les colonnes*
Pour $j = 1$ à $i - 1$ faire
- Calcul de L

$$K_{i,j} = (A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} K_{ik}.K_{kj})/K_{j,j}$$

$$K_{i,i} = A_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} K_{ik}.K_{kj}$$

Pour $j = i + 1$ à $n$ faire
- Calcul de U

$$K_{i,j} = A_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} K_{ik}.K_{kj}$$

*Fin de la boucle sur les colonnes*
*Fin de la boucle sur les lignes*
*Fin de la boucle sur les noeuds à désactiver*
*Fin de la boucle sur les éléments de la triangulation.*

La boucle sur les noeuds $N_k$ est vide si aucun noeud de l'élément $K$ ne doit être désactivé. A la fin de la boucle sur les éléments, la mémoire auxiliaire contient la matrice

$K$ rangée ligne par ligne, les termes $K_{i,j}$ $(i \leq j)$, $K_{i,j}$ $(i > j)$ de cette matrice ne sont que les termes $U_{i,j}$ respectivement $L_{i,j}$ des matrices décomposées $U$ respectivement $L$ de la matrice $A$. Une lecture inverse du fichier permet alors de terminer la résolution du système linéaire.

La résolution complète du système linéaire $Ax = b$, s'effectue alors suivant $Ly = b$ puis $Ux = y$. Soit:

*Boucle sur les lignes pour Ly*
Pour i=1 à n faire

$$y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} y_k)$$

*Fin de la boucle sur les lignes*
*Boucle sur les lignes pour Ux*
Pour i = n à 1 faire

$$x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} U_{i,k} x_k)/U_{i,i}$$

*Fin de la boucle sur les lignes*

## 3.7 Maillage du domaine d'écoulement

Dans le cadre de la modélisation hydrodynamique, un solveur éléments finis qui permet la résolution des équations aux dérivées partielles nécessite un couplage avec un module d'introduction de données et d'édition de maillage (discrétisation du domaine géographique étudié en éléments simples). La tâche de pré-traitement et de génération de maillage est une étape difficile. La difficulté est liée à l'hétérogénéité des ensembles de données qui diffèrent en précision, en couverture spatiale et en densité. Cette tâche indispensable définit la géométrie du terrain.
La nature quasi-tridimensionnelle du modèle de Saint Venant nécessite un maillage 2D courbe et pour pallier aux problèmes de pré- et post-traitement, on a choisi d'exploiter les moyens développés à l'INRIA au lieu d'utiliser DINMOD et ANOMOD qui ne sont pas intéractifs. Sauf que certains de ces logiciels présentent l'inconvénient d'être des outils de maillage $P^1$; alors que le code de simulation FESWMS se base sur une discrétisation $P^2$. Pour cela, la construction du maillage passe par trois étapes:

- définition de la géométrie,
- génération du maillage $P^1$ ,
- passage du $P^1$ vers le $P^2$ adapté au noyau de calcul.

### 3.7.1 Géométrie et préparation de la BD

Les données topographiques et hydrauliques sont les données qui décrivent la géométrie du domaine d'écoulement. Ceux sont des données collectées et travaillées par des différentes équipes dans les agences concernées sous forme de MNT (Modèle numérique

de terrain) qui est une représentation numérique simplifiée de la surface d'un terrain, en coordonnées altémétriques (le plus souvent exprimées en mètres par rapport au niveau de la mer) et planimétriques calées dans un repère géographique. Ces données peuvent être aussi intégrées dans un système d'information géographique sous forme de thèmes (couches). Cette information joue un rôle important pour la définition:

- des courbes de niveau du terrain,
- des limites physiques du domaine d'écoulement (frontières physiques),
- des sections intermédiaires qui seront utiles pour l'introduction des conditions aux limites et l'exploitation des résultats,
- du niveau d'eau d'eau normal qui permet de définir la zone mouillable et la zone mouillée dans la riviére, etc...

Ces derniers constituent notre petite base de données de départ pour la construction du maillage 2D et 2D courbe $P^1$, ensuite le maillage $P^2$ .

### 3.7.2 Génération du maillage $P^1$

Cette étape consiste à générer une première triangulation de la surface étudiée en agissant sur les éléments choisis de la BD définissant cette surface. La première triangulation sera faite moyennant le logiciel portable, graphique et intéractif d'éditions de maillage 2D EMC2[8] (voir Annexe B), en construisant un maillage 2D structuré ou non structuré (figure 3.12).

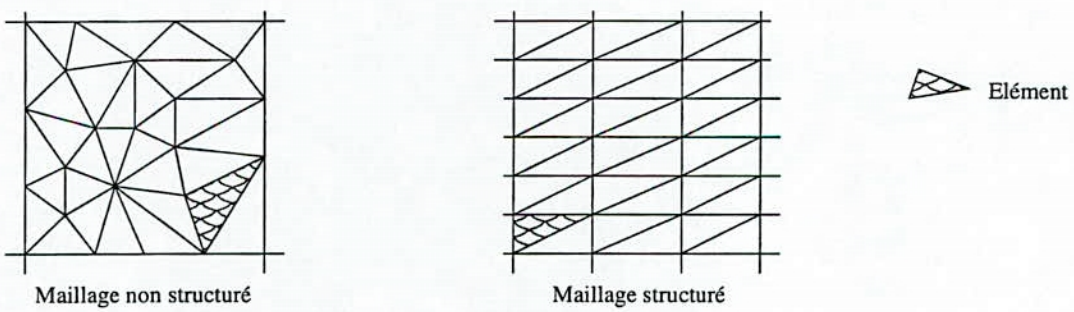



FIG. 3.12 – *Types de maillage*

En raison que, EMC2 n'étant pas un mailleur 3D et ne disposant pas de fonction générique d'interpolation de la composante z, on garde les points de base pour pouvoir leur affecter la composante z. Le maillage 2D courbe (tridimensionnelle) sera donc obtenu par l'affectation à chaque noeud de la triangulation la composante verticale z associée. L'étape suivante consiste à remailler le maillage généré auparavant moyennant le logiciel YAMS[9] (voir annexe B) dans le but d'enrichir (augmenter le nombre de noeuds), simplifier (diminuer le nombre de noeuds) ou optimiser le maillage. Enfin, le maillage $P^1$ obtenu est de type illustré par la figure (3.13).

8. Editeur de Maillage et de Contour en 2 dimensions
9. Yet Another Mesh Simplification

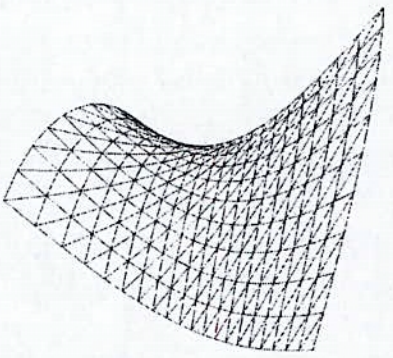


FIG. 3.13 – *Maillage surfacique 3D*

### 3.7.3 Génération du maillage $P^2$

Dans un deuxième temps, le maillage $P^2$ selon le format accepté par le code de simulation sera généré. Pour ce faire, on a recours à quelques sous programmes de la bibliothèque MODULEF[10](voir Annexe B) pour créer un maillage $P^1$ iso $P^2$ i.e. chaque triangle sera divisé en 4 triangles $P^1$ (figure 3.14), ensuite on récupère à la fin les noeuds sommets du premier triangle $P^1$ et les noeuds sommets du triangle intérieur qui constituent les noeuds $P^2$ en utilisant des tables de correspondances .

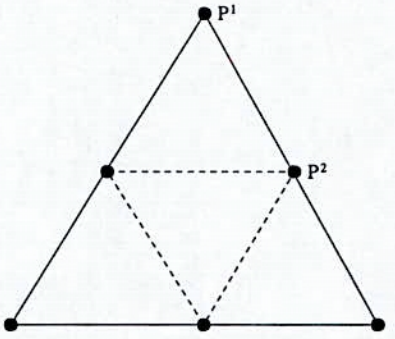



FIG. 3.14 – *Maillage $P^1$ iso $P^2$*

10. bibliothèque MODULaires d'Element Finis

# Chapitre 4

# Analyse paramétrique et résultats numériques

Le noyau du code de calcul FESWMS est relativement performant mais il nécessite un choix judicieux de certains paramètres. En effet ce code s'appuie sur des données à caractère physique et hydraulique telles que les coefficients de frottement, de viscosité turbulente, le débit et/ou la hauteur d'eau à l'entrée ou à la sortie et d'autres à caractère numérique telles que le facteur de relaxation, la taille des maillages éléments finis, la tolérance pour mouiller les éléments et le pas de temps de simulation. L'impact de ces paramètres sur le résultat a été analysé dans l'étude de différents cas de simulation. Dans la première partie de ce chapitre, on présente l'analyse paramétrique et la deuxieme partie consiste à exploiter cette analyse pour illustrer les résultats numériques obtenus en terme de qualité.

## 4.1 Analyse paramétrique

Ce volet consiste à étudier la sensibilité paramétrique du modèle basée sur l'expérimentation numérique. Elle a été effectuée soit sur un canal à section rectangulaire incliné à une pente ou sur un canal à section trapézoïdale. Les courbes présentées ci-après illustrent la sensibilité numérique de chaque paramètre. Cette analyse de sensibilité est illustrée pour chacun de ces paramètres par les courbes dont l'étude a permis d'évaluer l'impact de leur variation sur les solutions attendues tant sur le plan qualitatif que sur le plan coût de calcul.

### 4.1.1 Viscosité turbulente artificielle et le coefficient de frottement

En général, on sait que l'effet de la viscosité turbulente artificielle ne peut s'observer sur un maillage grossier car l'épaisseur de la couche limite est trés faible: il est clair qu'un maillage respectant cette contrainte dans le voisinage de la paroi est irréaliste car nous

nous trouverons avec un maillage à plusieurs millions de degré de liberté. Dans ce sens, plusieurs travaux se sont penchés sur la question avec l'introduction de la notion de la viscosité artificielle pour modéliser la turbulence. Plusieurs modèles ont été établis (voir chapitre 1, paragraphe 1.5.3) et pour notre travail, on s'est restreint au modèle de clôture à 0 équation de transport (voir chapitre 3, paragraphe 3.2.3). Pour évaluer l'effet de la viscosité artificielle, il a été proposé d'effectuer des tests numériques sur deux différents maillages du canal trapézoïdal: un maillage structuré, raffiné au voisinage de la surface libre (figure 4.3) et un autre maillage grossier non structuré (figure 4.2).

**Géométrie:** on considère un canal à section trapézoïdale à fond incliné.
Cas 1: longueur : 1000m pour le maillage non structuré grossier.
Cas 2: longueur : 600m (à des raisons liées à l'espace mémoire de calcul) pour le maillage structuré raffiné.
Pente : $10^{-4}m/m$
Largeur et hauteur : les dimensions sont définies sur la section transversale montrée sur la figure (4.1):

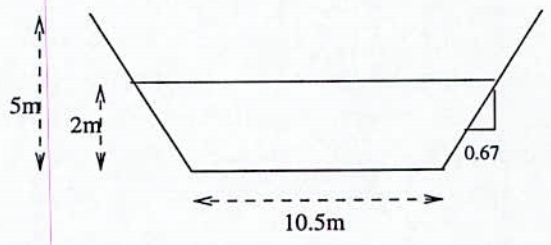



FIG. 4.1 – *Géométrie du domaine d'écoulement - canal trapézoïdal*

**Description éléments finis:**

Les caractéristiqus du maillage non structuré (figure 4.2) sont:
Nombre de Noeuds: 4223 $P^2$
Nombre d'éléments: 2044 triangles

et le maillage structuré fin (figure 4.3):
Nombre de Noeuds: 33873 $P^2$
Nombre d'éléments: 16816 triangles

**Paramètres physiques et numériques:**

| $\rho_{eau}(kg/m^3)$ | $\rho_{air}(kg/m^3)$ | $n$ | $\nu_0(m^2/s)$ | $C_\mu$ | T(m) | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 999.00 | 1.225 | 0.014 | $10^{-6}$ | 0.2-0.4 | 0.3-0.2 | 0.5 |

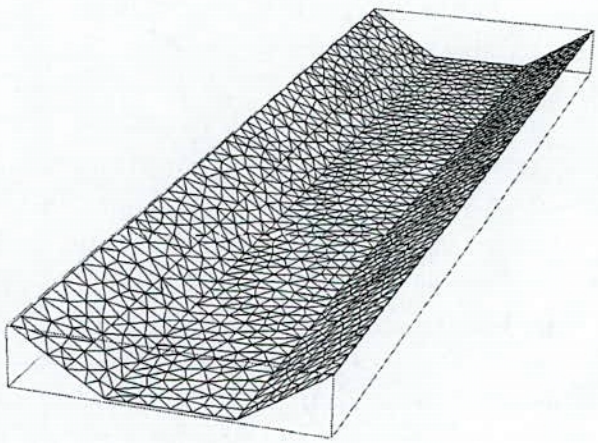


FIG. 4.2 – *Maillage non structuré -canal trapézoïdal- vu par MEDIT*

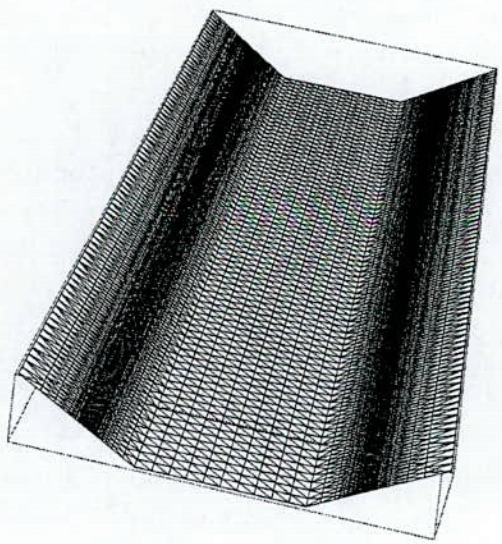


FIG. 4.3 – *Maillage structuré fin -canal trapézoïdal- vu par MEDIT*

**Conditions initiales et aux limites:**

*Conditions aux limites:*

Entrée: Q= 40 $m^3$/s

Sortie (Amont): H =$h_n$=2m

Parois (Aval): U.n = 0 (condition d'imperméabilité)

*Conditions initiales:*

U=V=0 et H=2.1m

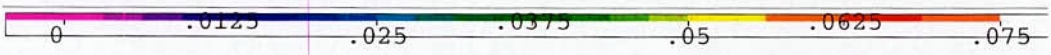
Sur les figures (4.4, 4.5 , 4.6) et sur (4.7, 4.8, 4.9), on visualise une variation globale de la viscosité turbulente artificielle dans l'écoulement. On remarque une variation de la viscosité turbulente sur les parois latérales du canal suivant la variation de la hauteur d'eau. Le maillage fin montre mieux cette variation. Elle est remarquable là où les éléments sont plus petits. En variant le coeficient empirique muliplicatif $C_\mu$ de 0.2 à 0.4, la viscosité turbulente artificielle change et sa valeur augmente globalement de 0.025 à 0.0625. Son effet sur la solution s'observe en visualisant le module de la vitesse sur les deux maillages, sur les figures (4.10, 4.11 , 4.12, 4.13, 4.14, 4.15). La variation de la vitesse en variant $C_\mu$ est nettement observée sur le maillage fin, le maillage grossier ne peut capter ces petites variations.

Par contre, les figures (4.16, 4.17, 4.18) présentent respectivement la variation de la viscosité turbulente artificielle à la section d'entrée du canal, une section intermédiaire et la section de sortie sur les deux maillages. Dans la légende de ces figures, (M f) et (M g) désignent respectivement le maillage fin et le maillage grossier. Cela permet de vérifier le modèle de turbulence utilisé donné par l'équation (3.21), sachant que la vitesse de frottement ne représente que 10% de la vitesse moyenne de l'écoulement.
La viscosité turbulente décrit le mouvement aux très grandes échelles. Elle n'est pas une propriété intrinsèque du fluide mais elle dépend des propriétés locales de l'écoulement et parfois de la surface des éléments.

Le coefficient de la viscosité turbulente artificielle a un certain effet sur la solution. La plus grande influence de la viscosité turbulente se produit là où les gradients de vitesse sont grands. Des coefficients de viscosité turbulente croissants causeront des gradients de vitesse réduits et la distribution horizontale de la vitesse deviendra plus uniforme. Inversement, la diminution des coefficients de viscosité turbulente causera l'augmentation des gradients de vitesse.

L'analyse de ce résultat, en liaison avec d'autres paramètres de la simulation, a permis de conclure que la viscosité turbulente est liée au coefficient de rugosité. Les coefficients de rugosité sont des coefficients empiriques qui ont un grand effet sur la convergence de la solution, des coefficients de rugosité estimés pendant la construction initiale d'un maillage ne devront pas être ajustés beaucoup si des données topographiques suffisantes et précises ont été collectées. Des changements aux coefficients de rugosité doivent être faits soigneusement tel que les valeurs ajustées soient appropriées pour le matériau du lit, la pente du canal et la couverture végétale.
Contrairement à ce qui se passe dans le cas de surfaces lisses, une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les faces de frottement

c'est à dire qu'au delà d'un certain degré de rugosité la configuration mécanique de la surface exerce une influence bien déterminée qu'on appelle "l'intensité de l'agitation de turbulence."



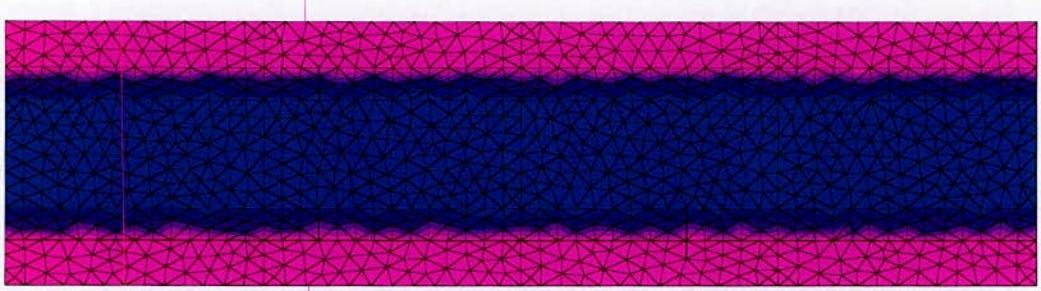



FIG. 4.4 – *Variation de la viscosité artificielle* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$

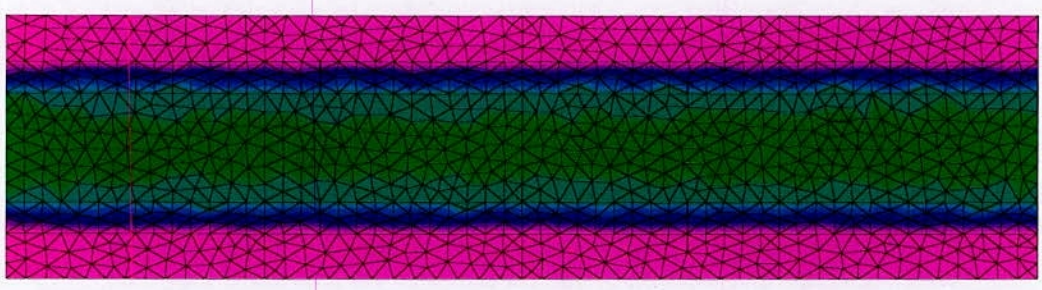


FIG. 4.5 – *Variation de la viscosité artificielle* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$

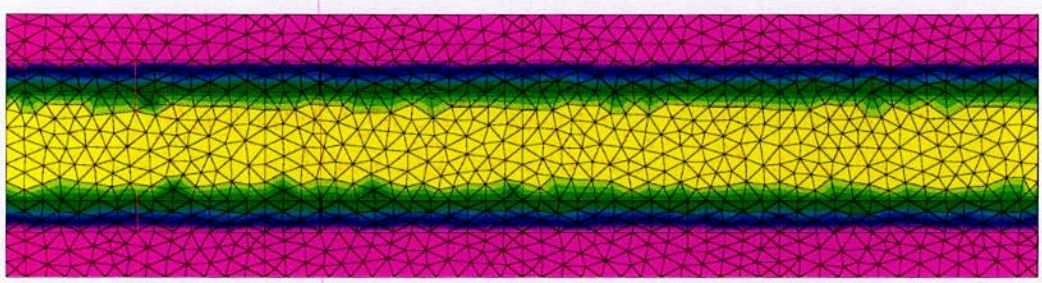


FIG. 4.6 – *Variation de la viscosité artificielle* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$

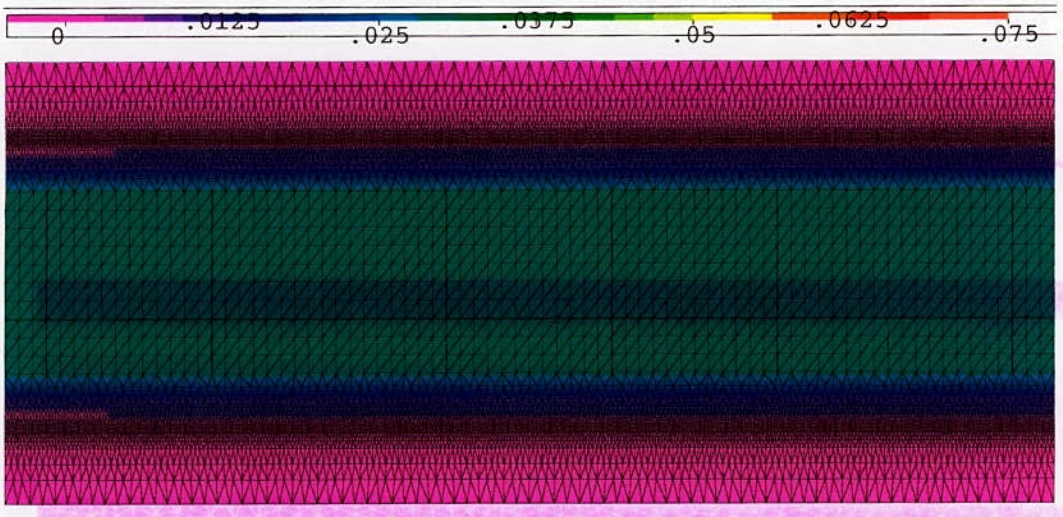



FIG. 4.7 – *Variation de la viscosité artificielle* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$

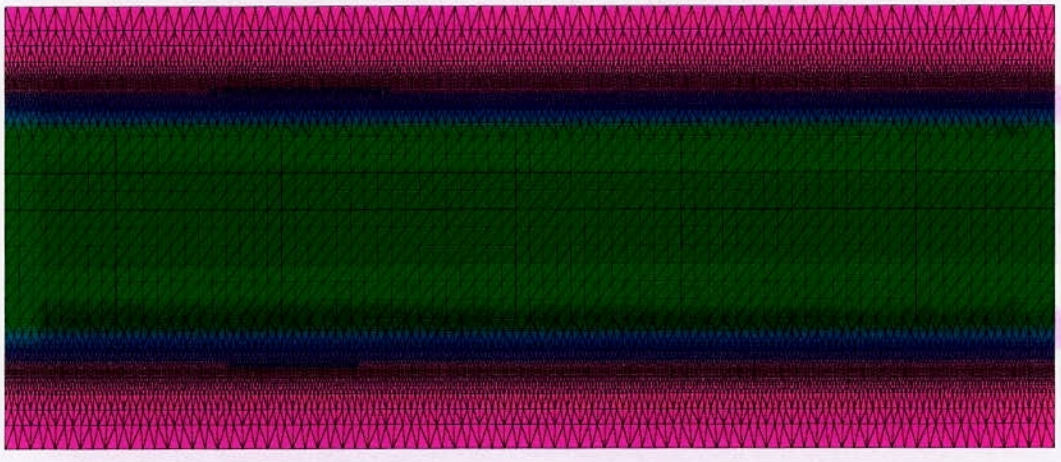


FIG. 4.8 – *Variation de la viscosité artificielle* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$

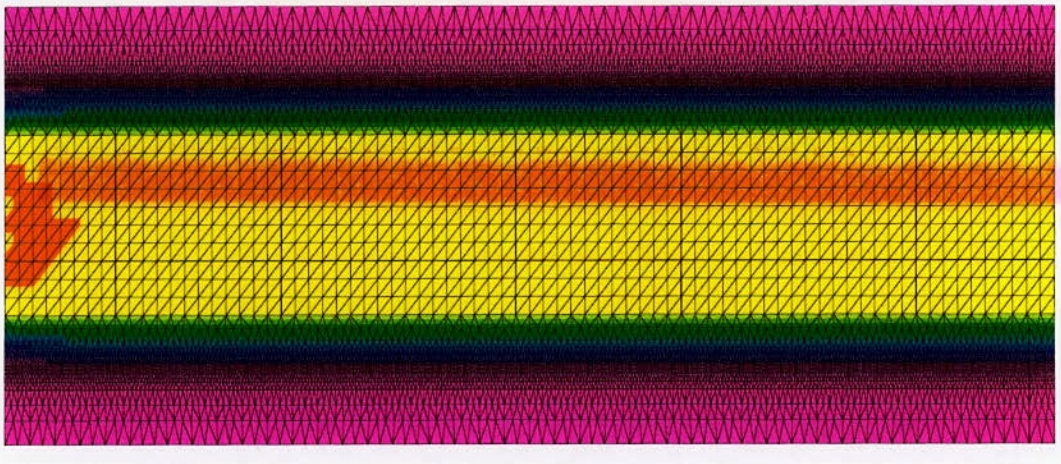


FIG. 4.9 – *Variation de la viscosité artificielle* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$

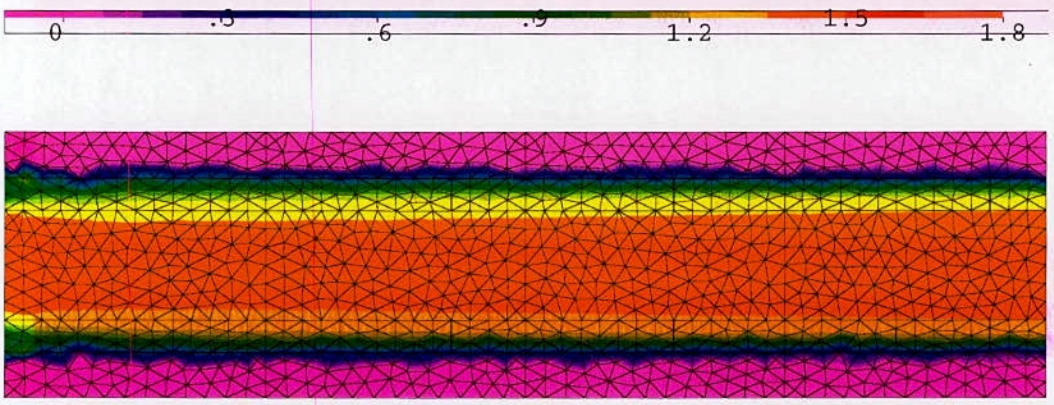



FIG. 4.10 – *Variation du module de la vitesse* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$

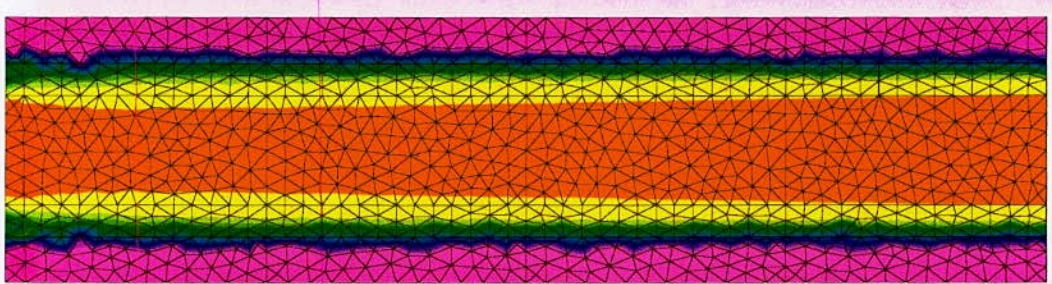


FIG. 4.11 – *Variation du module de la vitesse* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$

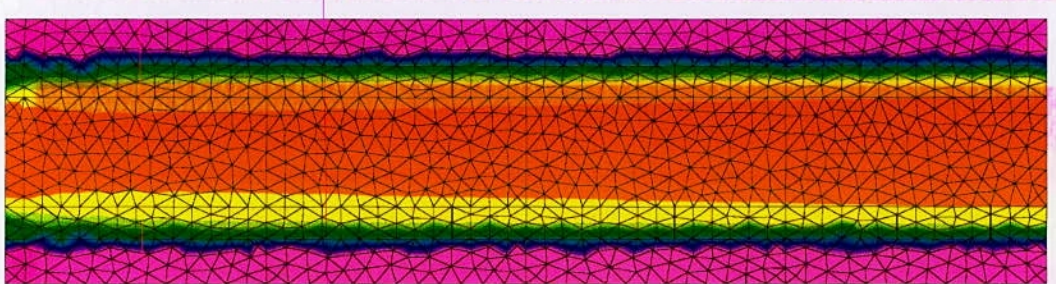


FIG. 4.12 – *Variation du module de la vitesse* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$

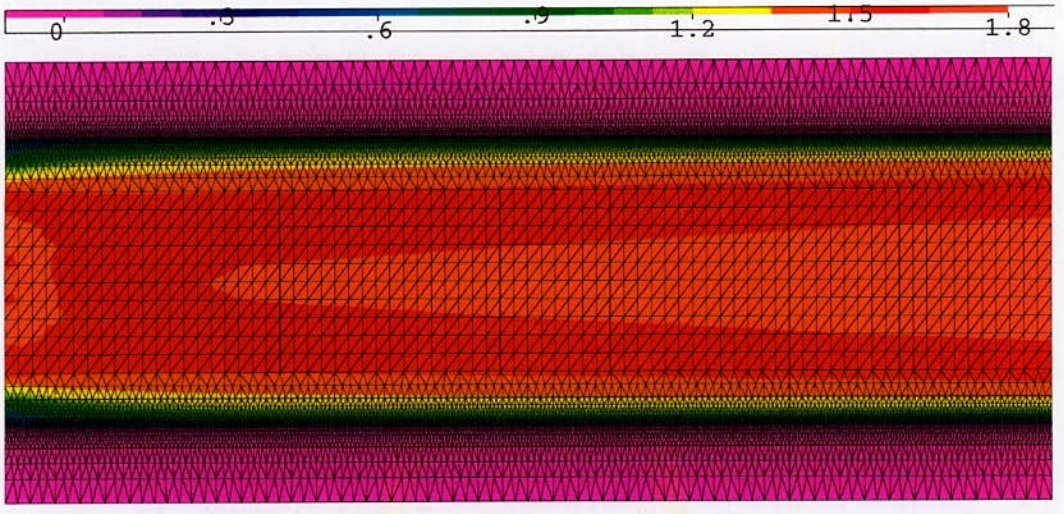



FIG. 4.13 – *Variation du module de la vitesse* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.2$

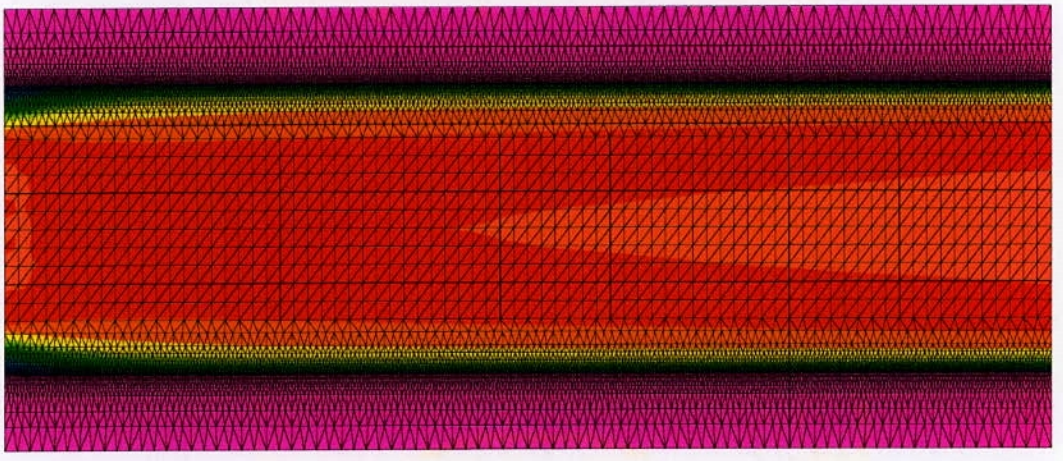


FIG. 4.14 – *Variation du module de la vitesse* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.3$

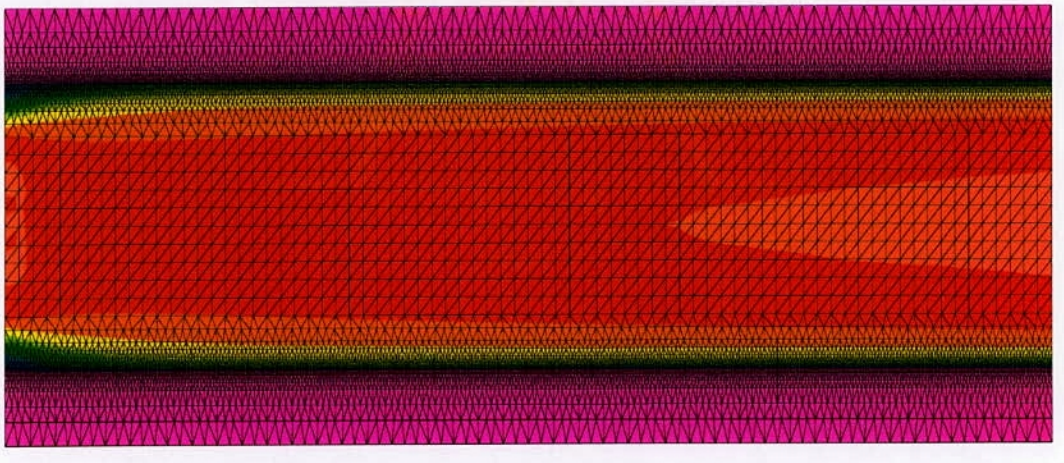


FIG. 4.15 – *Variation du module de la vitesse* $\nu_0 = 10E-6$ $C_\mu = 0.4$

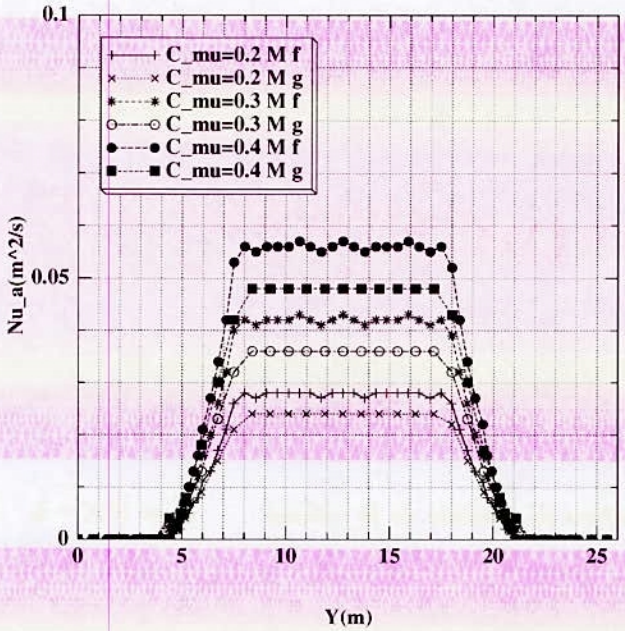



FIG. 4.16 – *Variation de la viscosité artificielle à la section d'entrée*

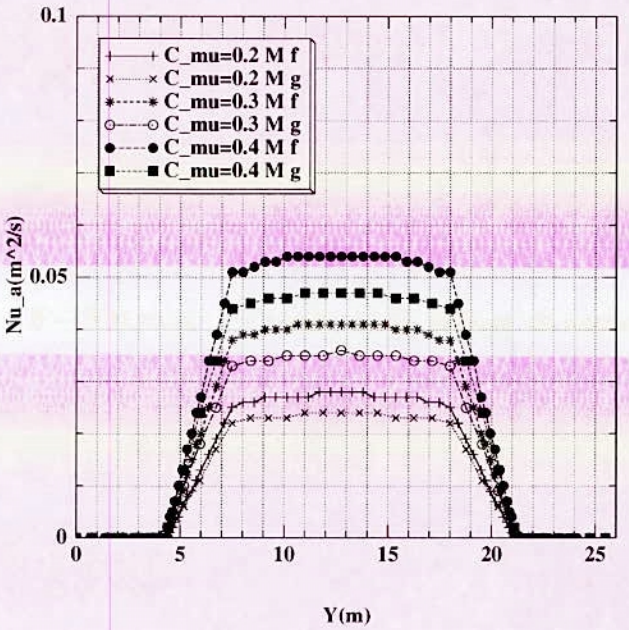



FIG. 4.17 – *Variation de la viscosité artificielle à la section intermédiaire*

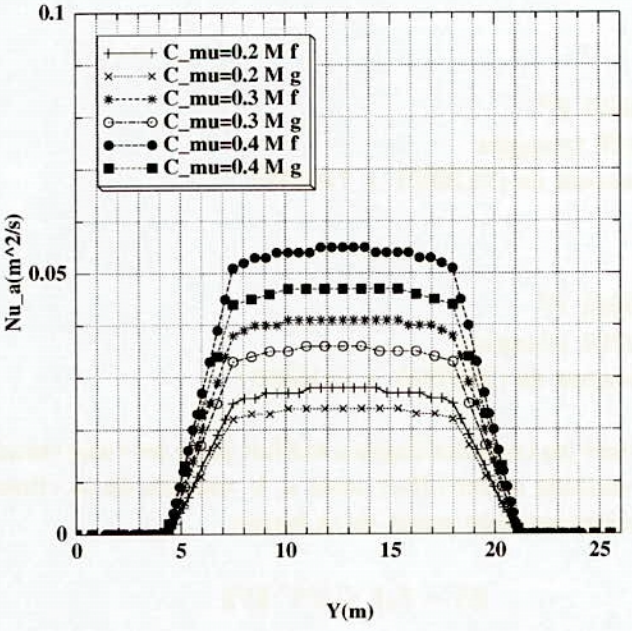



FIG. 4.18 – *Variation de la viscosité artificielle à la section de sortie*

### 4.1.2 Le pas d'espace (Maillages -taille/qualité- et le facteur de tolérance)

La spécification du maillage dépend de la complexité de la géométrie. La construction des maillages éléments finis doit être examinée soigneusement pour assurer les consistances géométriques des éléments surtout au niveau des frontières qui causeront souvent des problèmes de convergence.
Un raffinement de maillage est prévu sur le canal à section trapézoïdale, en augmentant globalement le nombre de noeuds et par conséquent le nombre d'éléments. Pour cela, on a construit un maillage acceptable en nombre de noeuds de taille moyenne $h$. Le raffinement a permis en multipliant le nombre de noeuds par 4 de construire le maillage $\frac{h}{2}$, puis un autre par 16 pour construire le maillage $\frac{h}{4}$ tout en restant dans les normes de la taille mémoire disponible pour le calcul.

**Description éléments finis:**

Le maillage $h$ est constitué de:
Nombre de Noeuds: 4223 $P^2$
Nombre d'éléments: 2044 triangles
avec un nombre d'inconnues de (2x4223 + 1x1056)

Le maillage $\frac{h}{2}$:
Nombre de Noeuds: 16621 $P^2$
Nombre d'éléments: 8176 triangles
avec un nombre d'inconnues de (2x16621 + 1x4155)

Le maillage $\frac{h}{4}$:
Nombre de Noeuds: 65945 $P^2$
Nombre d'éléments: 32704 triangles
avec un nombre d'inconnues de (2x65945 + 1x16486)

Un calcul d'erreur basé les trois maillages a été fait pour les trois variables du problème $(U, V, H)$ et pour une variable mixte $(Hu)$, avec $u$, le module de la vitesse. En supposant que l'erreur du schéma stationnaire serait de la forme:

$$\|S - S_h\| \leq Ch^\alpha \|S\| \tag{4.1}$$

où $S_h$ est la solution approchée de $S$.
On calcule l'erreur en utilisant la norme sup $\|.\|_\infty$ définie comme suit:

$$\|S_{h_1} - S_{h_3}\|_\infty = Sup_{i \in Mh_1} |S_{h_1}(i) - S_{h_3}(i)| \tag{4.2}$$

$$\|S_{h_2} - S_{h_3}\|_\infty = Sup_{i \in Mh_2} |S_{h_2}(i) - S_{h_3}(i)| \tag{4.3}$$

avec $S_{h_1}$, $S_{h_2}$ et $S_{h_3}$ respectivement les solutions du maillage $h$, $\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{4}$; $M_{h_1}$ et $M_{h_2}$ sont les maillages / noeuds associés à $h$ et $\frac{h}{2}$.

Ces tests servent à l'étude de l'erreur entre la solution calculée et la solution analytique et de déduire l'effet du pas d'espace sur la solution. Dans notre cas, puisqu'on ne dispose pas de la solution analytique, on a préviligié la solution du maillage $\frac{h}{4}$ et l'on a $S_{h_3} = S$. Pratiquement, on obtient deux erreurs: une $(h, \frac{h}{4})$ et l'autre $(\frac{h}{2}, \frac{h}{4})$ (ce résultat n'est pas toujours significatif car il nous faut au moins trois points pour déterminer l'ordre de convergence $\alpha$). Le résultat obtenu est reporté sur la figure (4.19).

En supposant que la courbe théorique est linéaire, on détermine l'exposant $\alpha$ par un simple calcul de rapport d'erreur. Des formules (4.1, 4.2 et 4.3), on écrit:

$$e_1 = \frac{\|S - S_h\|}{\|S\|} \leq Ch^\alpha \tag{4.4}$$

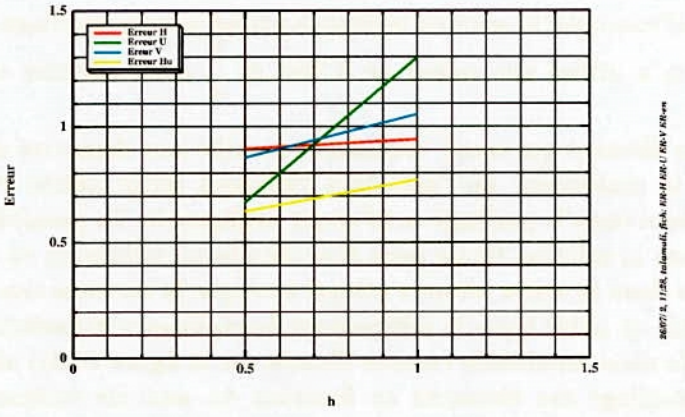



FIG. 4.19 – *Etude de l'erreur en fonction du pas d'espace*

$$e_2 = \frac{\left\| S - S_{\frac{h}{2}} \right\|}{\|S\|} \leq C(\frac{h}{2})^{\alpha} \tag{4.5}$$

Le rapport d'erreur est donc: $\frac{e_1}{e_2} = 2^{\alpha}$ et:

$$\alpha = \frac{loge_1 - loge_2}{log2} \tag{4.6}$$

Par application numérique, $\alpha = 0.945 \approx 1$
Avec les erreurs sur:
maillage $h$: $e_1 = 1.29865$
maillage $\frac{h}{2}$: $e_2 = 0.674329$

Plus le pas d'espace est petit, plus l'erreur diminue et plus les résultats sont précis mais à une certaine taille du maillage, la solution se stabilise et il est inutile de raffiner d'avantage car cela coûtera plus cher en temps de calcul et en taille memoire disponible sur les machines.

L'effet du pas d'espace s'observe aussi sur le choix du seuil de tolérance pour mouiller les éléments. Le seuil de tolérance est une hauteur d'eau fictive utilisée pour déterminer une nouvelle position de la surface libre par le modèle couvrant-découvrant, elle dépend de la taille des éléments et des conditions de l'écoulement. Son besoin est double:

- pour combler les pertes de charge crées par le changement de la position de la surface libre,
- pour éviter tout risque de divergence de la solution car l'état d'un élément peut osciller d'une itération à une autre et ceci peut faire converger vers la solution lentement ou peut ne pas converger.

Dans ce cas, à titre d'exemple, le seuil de tolérance utilisé pour le maillage $h$ est de l'ordre de $0.3m$. Pour $\frac{h}{2}$, on a utilisé une valeur de $0.25m$ et $\frac{h}{4}$ a été effectué avec un seuil de $0.2m$.
Il est possible qu'un élément qui serait réellement mouillé soit désactivé dans la solution finale. Cependant, la profondeur de l'eau dans l'élément serait petite et l'effet de non apparition de l'élément dans le maillage actif serait négligeable. La possibilité de présence d'un élément sec dans la solution finale peut être réduite au minimum en construisant de plus petits éléments dans la zones où on s'attend à ce que la borne active du maillage se produise et pour ceci, un autre type de raffinement de maillage a été effectué au voisinage de la surface libre (la zone mouillable comme illustré sur la figure (4.3)) afin d'augmenter la possibilité de mouillage des éléments en fonction du seuil de tolérance et éviter la violation de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement quand la surface libre bouge.

### 4.1.3 Le facteur de relaxation et critères de convergence

La relaxation est régulièrement utilisée dans les problèmes non linéaires pour éviter que le processus itératif décrit précédemment ne diverge. Elle consiste à diminuer la rapidité des changements d'une variable, d'une itération à l'autre, par l'introduction d'un coefficient de relaxation $\omega$ [8].
Comme on l'a vu précédemment, toutes les inconnues du problème $(U, V, H)$, après avoir déterminé les gradients $(\delta U, \delta V, \delta H)$ par la résolution du système, peuvent être mises à jour sous la forme générale suivante :

$$a_{i+1} = a_i + \omega \Delta a_i \tag{4.7}$$

L'introduction du facteur de relaxation $\omega$ permet l'amortissement des variations des différentes variables du problème. Il peut s'étendre de la valeur 0 jusqu'à 2. Plus il est faible, plus la relaxation est forte et plus la convergence est lente. Mais plus, il est fort, plus la relaxation est faible et plus il y a de chance de faire intervenir des instabilités dans le processus itératif.
Il n'existe pas de méthode générale pour choisir les coefficients de relaxation . Cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de la taille des cellules du maillage et de la procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour le bon déroulement de la procédure itérative. Pour cela, on a effectué des tests numériques sur un canal à section rectangulaire illustré par les figures (4.20, 4.21).

**Géométrie:** on considère un canal à section recatngulaire à fond incliné.

| | |
|---|---|
| Longueur: | 500m |
| Largeur: | 25m |
| Pente: | 0.0028m/m |

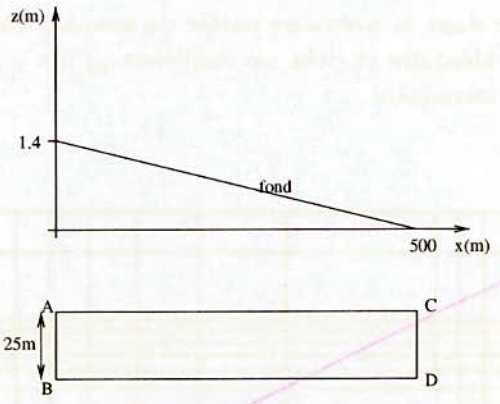



FIG. 4.20 – *Géométrie du domaine d'écoulement - une pente*

**Description éléments finis:** maillage structuré- différences finies.

Le domaine est discrétisé en 58 éléments de taille variable dans la direction x et de 10 éléments de 2.5m dans la direction y (figure 4.21).

Nombre de Noeuds: 2457 $P^2$
Nombre d'éléments: 1160 triangles



FIG. 4.21 – *Maillage de calcul -canal à section rectangulaire, 1 pente- vu par VISU*

**Paramètres physiques et numériques:**

| $\rho_{eau}(kg/m^3)$ | $\rho_{air}(kg/m^3)$ | $n$ | $\nu_t(m^2/s)$ | $\Delta t(mn)$ | T(m) | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 999.00 | 1.225 | 0.03 | 0.1 | 5 | 0.01 | 0.5 |

**Conditions initiales et aux limites:**

*Conditions aux limites:*
Amont (AB): Q= 42 $m^3/s$
Aval (CD): H =$h_c$=0.75m
Parois (AC et BD): U.n = 0 (condition de glissement)
*Conditions initiales:*
U=V=0 et H=1m

Dans un premier test, on a varié le facteur de relaxation $\omega$ et on a prsenté sur la figure (4.22), avec une échelle bilogarithmique, la variation du facteur de relaxation en fonction du nombre d'itération qui permet le choix optimal du facteur $\omega$. On remarque

que la variation est linéaire dans la première partie du graphe, ensuite l'allure a changé pour devenir une variation aléatoire et delà, on confirme qu'il n'y a aucune méthode qui détermine la valeur de $\omega$ à introduire.

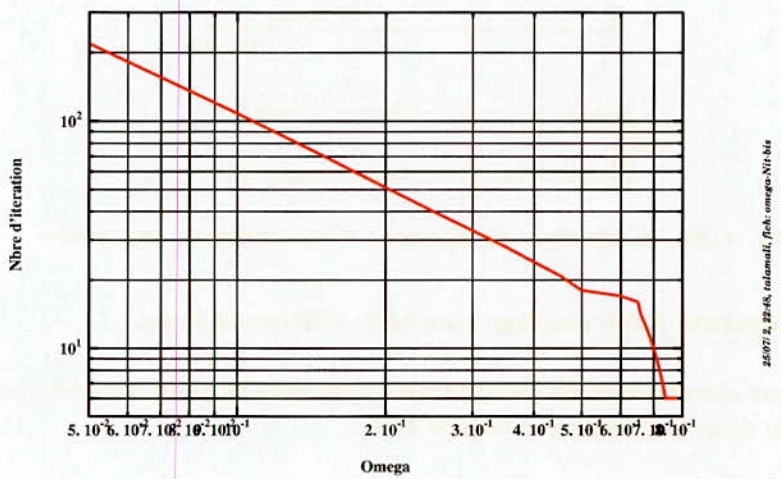



FIG. 4.22 – *Variation du facteur de relaxation en fonction le nombre d'itération*

En ce qui concerne les critères de convergence, on dit qu'une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations. Elle a convergé lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère qui doit être défini par l'utilisateur. Le critère de convergence est donc utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait.
Le critère de convergence utilisé dans FESWMS repose sur de très petites variations des variables du problème (indicateur de convergence) définies par l'utilisateur. A chaque itération, les variations $(\delta U, \delta V, \delta H)$ sont calculées et dès que cette variation passe au delà de la valeur fixée, le processus s'arrête en considérant que les solutions ont convergé et passe à l'itération suivante.

Sur la figure (4.23), on présente en échelle logarithmique la diminution de l'erreur relative calculée pour les différents maillages (h, $\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{4}$) du rectangle. L'indicateur de convergence a été fixé pour les trois maillages à $10^{-2}$ pour les composantes de la vitesse et $10^{-3}$ pour la hauteur. L'erreur relative à été calculée comme suit:
On définit:
L'erreur pour les variables $U$, $V$ et $H$ respectivement par: $e^{U(n)} = U^{(n)} - U^{(n-1)}$, $e^{V(n)} = V^{(n)} - V^{(n-1)}$ et $e^{H(n)} = H^{(n)} - H^{(n-1)}$.
L'erreur relative en $L_2$ en chaque itération est donnée pour la vitesse $U$ par:

$$Er = \frac{\left(\sum_{n=1}^{N} \left(e^{U(n)}\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{n=1}^{N} \left(U^{(n)}\right)^2\right)^{1/2}} \tag{4.8}$$

On dit que la solution converge si la quantité $Er$ diminue et tend vers 0.

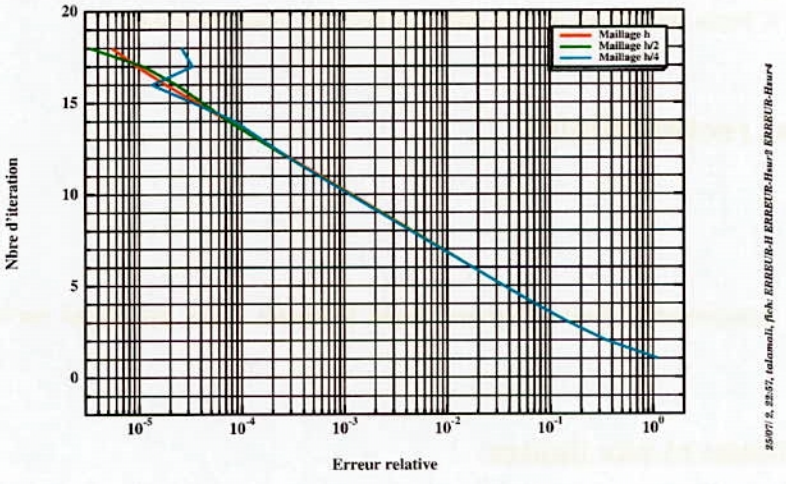



FIG. 4.23 – *Diminution de l'erreur relative pour les trois maillages*

Enfin, un nombre maximum d'itérations pour chaque pas de temps est requis afin que le processus de résolution soit stoppé en cas d'oscillation ou de divergence, même si le critère de convergence n'est pas encore satisfait.

### 4.1.4 Temps de simulation et influence du pas de temps

Dans le cas d'un écoulement non permanent, il suffit de spécifier le temps sur lequel l'utilisateur souhaite étudier son écoulement ou plus précisément le temps de la crue si les données d'un hydrogramme de crue sont disponibles, avec une taille de pas de temps déterminant le nombre d'itérations en temps à utiliser et respectant la continuité de la fonction qui décrit la crue. Plus le pas de temps est petit, plus on évite les discontinuité du flux et plus les résultats sont performants modulo les erreurs d'arrondi.

## 4.2 Résultats numériques

Ce deuxième volet a été consacré à l'étude des résultats de simulation en terme de qualité. Pour cela, on a simulé de différents cas, en vérifiant si les considérations hydrauliques de base sont satisfaits ou en comparant les résultats obtenus avec des résultats de références bibliographiques. L'étude a été faite sur le canal à section rectangulaire à une pente, un autre à trois pentes et sur le canal à section trapézoïdale.

### 4.2.1 Canal rectangulaire

- **Application 1**

On teste un écoulement graduellement varié (fluvial) dans un canal rectangulaire à une pente.

**Conditions initiales et aux limites:**

- **Régime uniforme:**
  *Conditions aux limites:*
  Amont (AB): Q= 42 $m^3$/s
  Aval (CD): H =$h_n$=1m
  Parois (AC et BD): U.n = 0 (condition d'imperméabilité)
  *Conditions initiales:*
  U=V=0 et H=1m

- **Régime permanent:**
  *Conditions aux limites:*
  Amont (AB): Q= 42 $m^3$/s
  Aval (CD): H =$h_c$=0.75m
  Parois (AC et BD): U.n = 0 (condition d'imperméabilité)
  *Conditions initiales:*
  U=V=0 et H=1m

- **Régime non permanent:**
  *Conditions aux limites:*
  Amont (AB): hydrogramme de crue Q(t) donné par le tableau suivant:

| $t(mn)$ | $Q(m^3/s)$ |
|---|---|
| 5 | 42.00 |
| 10 | 43.30 |
| 15 | 44.60 |
| 20 | 47.32 |
| 25 | 48.65 |
| 30 | 50.00 |
| 35 | 48.65 |
| 40 | 47.32 |
| 45 | 46.00 |
| 50 | 44.60 |
| 55 | 43.30 |
| 60 | 42.00 |

Aval (CD): H $=h_c$=0.75m

Parois (AC et BD): U.n = 0 (condition de glissement)
*Conditions initiales:*
Solution du régime permanent.

**Résultats:**

- **Régime uniforme:**
On remarque que la solution du régime uniforme est établie (figure 4.24). La surface libre est parallèle au fond et la distance qui les sépare égale à la hauteur normale de l'écoulement.

- **Régime permanent:**
En supposant que le canal rectangulaire déverse dans un grand réservoir ou dans un lac, la hauteur imposée à la sortie est égale à la hauteur critique de l'écoulement. Cette hauteur d'eau est imposée comme condition aux limites forcée. Le résultat obtenu vérifie bien les considérations de base de l'hydraulique fluviale. La forme du remous est de type M2 (figure 4.25), il est au-dessus du niveau critique et asymptotique au niveau normal de l'écoulement. Cette solution convergeante est considérée bonne, servira comme condition intiale pour le régime non permanent.

- **Régime non permanent:**
Pour le régime non permanent, on présente sur les figures suivantes (4.26, 4.27, 4.28) respectivement la variation de la vitesse, de la hauteur et du débit unitaire durant le temps de simulation.

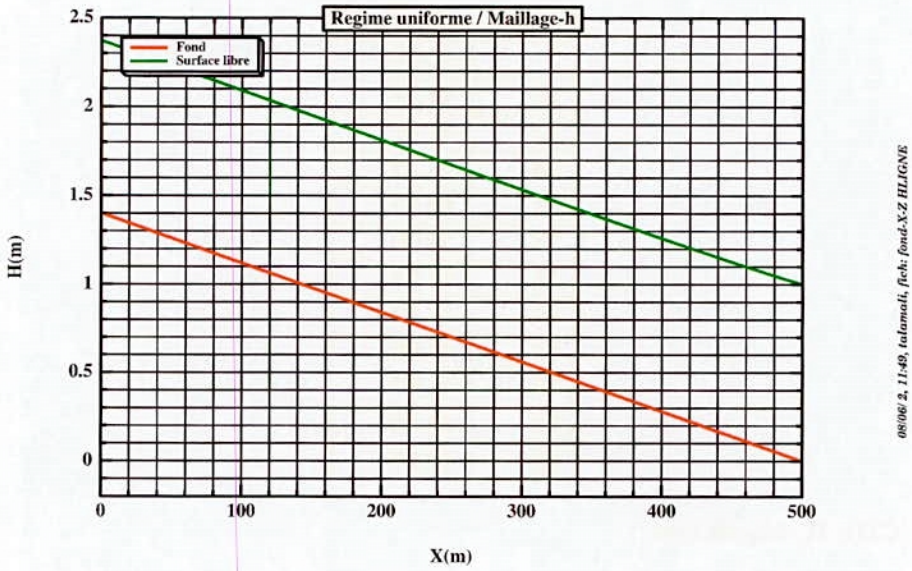



FIG. 4.24 – *Solution du régime uniforme (a)*

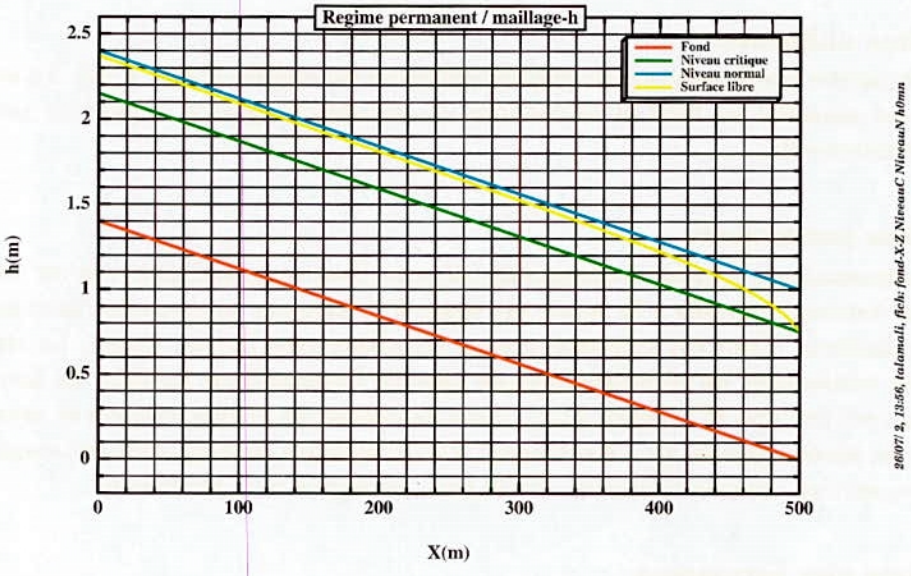



FIG. 4.25 – *Solution du régime permanent (a)*

On remarque dans la première phase du temps -période de crue- qui sétale de t=0mn à t=30mn que la vitesse d'eau augmente accompagnée par une augmentation de la hauteur. Par contre, à partir de t=30mn jusqu'à la fin du temps de la simulation, la déscente de l'hydrogramme de crue -période de décrue- est traduite par une diminution de la vitesse ainsi que de la hauteur. Le fait d'avoir fixé la hauteur d'eau à la sortie du canal a permis l'abaissement de la surface d'eau et on a obtenu une grande vitesse à la section de sortie. L'interprétation seule de ce résultat ne permet pas de valider le modèle et pour cela on a considéré d'autres cas de figure.

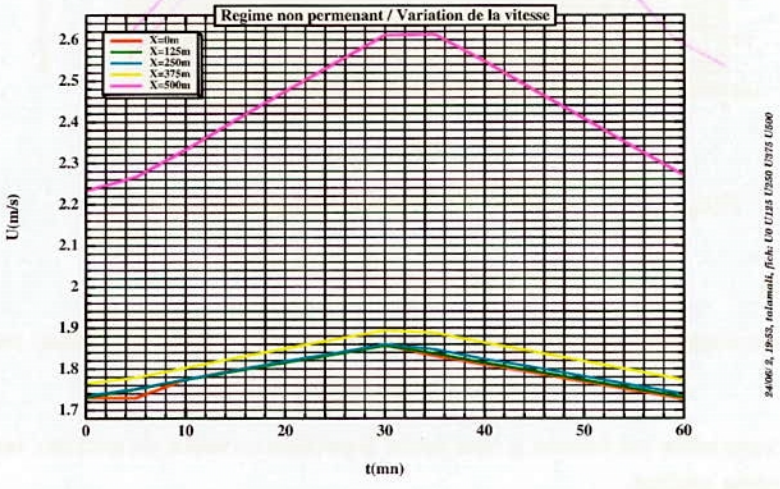



FIG. 4.26 – *Solution du régime non permanent (a)*

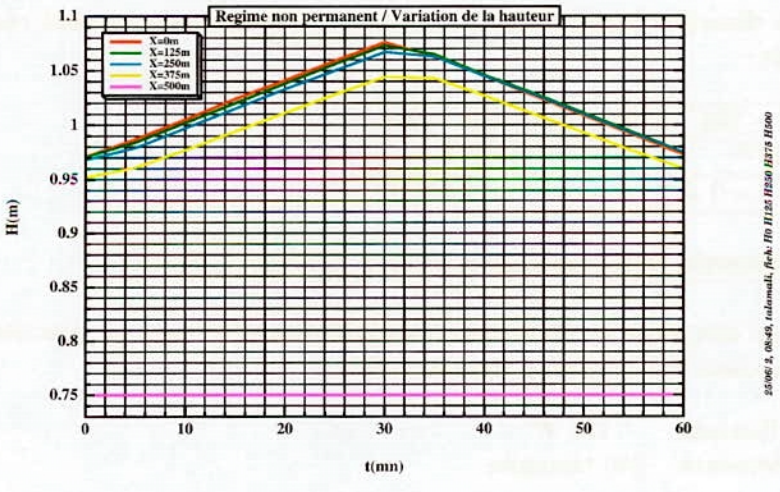



FIG. 4.27 – *Solution du régime non permanent (b)*

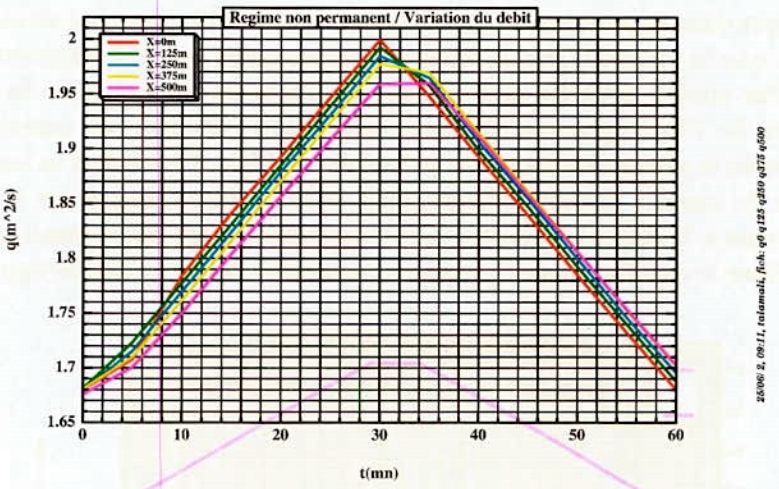



FIG. 4.28 – *Solution du régime non permanent (c)*

- **Application 2**

Dans ce cas, on considère un écoulement pulsé dans un bassin de forme rectangulaire à trois pentes.

**Géométrie:** on considère un bassin à une seule frontière ouverte de section rectangulaire à fond incliné à trois pentes.

Longueur: 500m
Largeur: 25m

La pente dans la direction longitudinale du canal et l'élévation du sol sont résumés dans le tableau suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x(m)$ | $0-100$ | $100-200$ | $200-500$ |
| $I(m/m)$ | $10^{-3}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ |
| $Z_f(m)$ | $1.4-1.3$ | $1.3-0.3$ | $0.3-0.0$ |

**Description éléments finis:** maillage structuré- différences finies.

Le domaine est discrétisé en 35 éléments de taille variable dans la direction x et de 5 éléments de 2.5m dans la direction y (figure 4.30).

Nombre de Noeuds: 781 $P^2$
Nombre d'éléments: 350 triangles

**Paramètres physiques et numériques:**

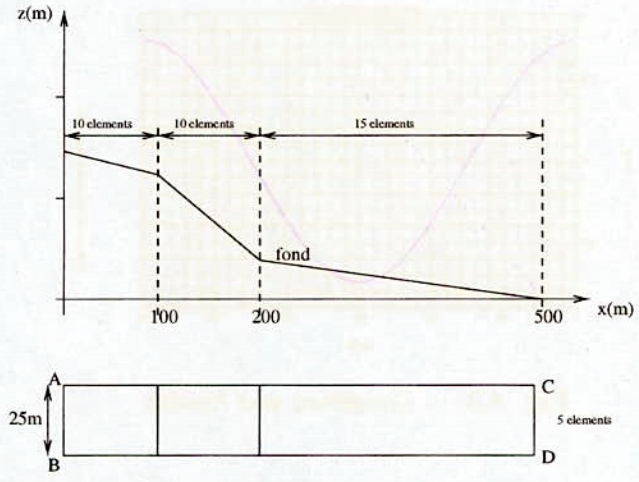



FIG. 4.29 – *Géométrie du domaine d'écoulement - trois pentes*



FIG. 4.30 – *Maillage de calcul -canal à section rectangulaire, 3 pentes- vu par MEDIT*

| $\rho_{eau}(kg/m^3)$ | $\rho_{air}(kg/m^3)$ | $n$ | $\nu_t(m^2/s)$ | $\Delta t(mn)$ | T(m) | $\omega$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 999.00 | 1.225 | 0.03 | 0.1 | 3 | 0.01 | 0.5 |

**Conditions initiales et aux limites:**

- *Conditions aux limites:*
  Aval (CD) : U=V=0 et h varie en fonction sinusoïdale $h = h_0 + \eta cos(\frac{2\pi t}{T})$,
  avec,
  T la période égale à 60mn
  $\eta$ l'amplitude et égale 0.75m
  $h_0$ est la hauteur de référence égale à 1m.
  Parois (AC, BD et AB) : U.n = 0 (condition d'imperméabilité)

- *Conditions initiales:*
  U=V=0 et h=1.75m

**Résultats:**

Les résultats sont illustrés sur les figures (4.32, 4.34, 4.36) comparés aux résultats des références bibliographiques [32] et [42] illustrées par les figures (4.33, 4.35, 4.37) pour les premiers pas de temps. Ici, on a présenté que les trois premiers pas de temps t=0mn, t=6mn et t=15mn. On remarque que le modèle reproduit le mouvement de l'écoulement fluvial dans les premiers pas de temps mais il diverge lors du changement de type d'écou-

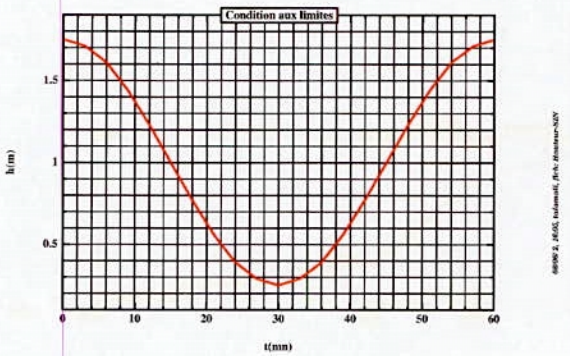



FIG. 4.31 – *Condition aux limites*

lement du fluvial au torentiel (la portion 100m à 300m). Dans la partie sèche, les résultats ont été influencés par la tolérance T. Par conséquent au début de la simulation à t=12mn nous rencontrons une profondeur trés faible qui se produit aux conditions hydrauliques numériques dures en raison des fausses oscillations du niveau de surface de l'eau du même ordre de grandeur que les valeurs de profondeur, et également d'une accélération significative des vitesses qui domine l'écoulement pour 100m <x <220m. Au delà de ces intervalles de temps et d'espaces, le modèle n'a pas pu reproduire la suite des résultats et il faut trouver une procedure qui peut stabiliser la solution et pour éviter les oscillations générées particulièrement par le changement de pente remarquable dans la zone où $I = 10^{-2}m/m$. Ce qu'on peut dire donc, c'est que notre code demande quelques améliorations particulièrement au niveau du modèle couvrant-découvrant pour déterminer la position de la frontière libre pour des cas assez durs.

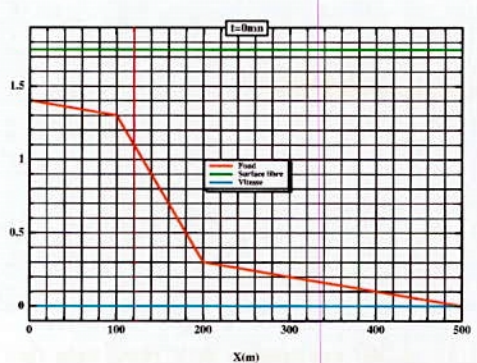



FIG. 4.32 – *Solution calculée à t=0mn*

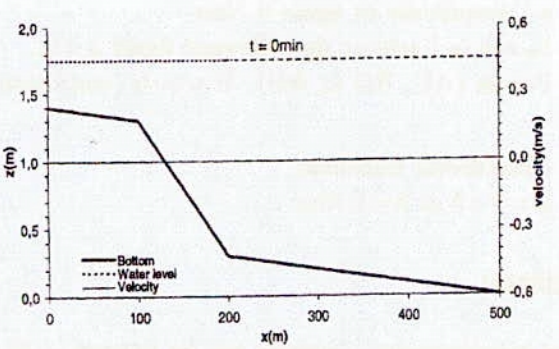



FIG. 4.33 – *Solution référence à t=0mn*

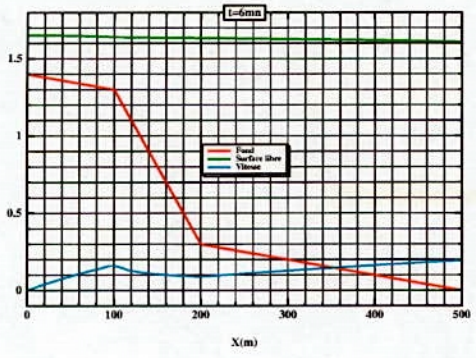



FIG. 4.34 – *Solution calculée à t=6mn*

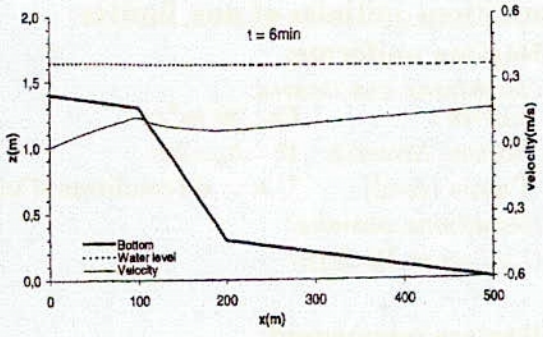



FIG. 4.35 – *Solution référence à t=6mn*

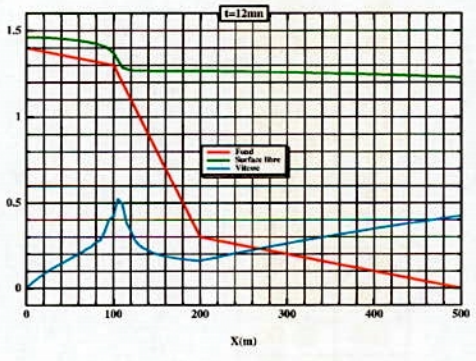



FIG. 4.36 – *Solution calculée à t=12mn*

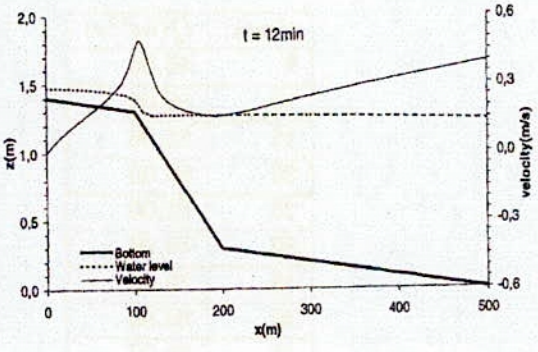



FIG. 4.37 – *Solution référence à t=12mn*

### 4.2.2 Canal trapézoïdal

Dans ce cas, on teste un écoulement graduellement varié (fluvial) dans un canal à section trapézoïdale à faible pente.

**Conditions initiales et aux limites:**

- **Régime uniforme:**
  *Conditions aux limites:*
  Entrée: Q= 40 $m^3/s$
  Sortie (Amont): H =$h_n$=2m
  Parois (Aval): U.n = 0 (condition d'imperméabilité)
  *Conditions initiales:*
  U=V=0 et H=2.1m

- **Régime permanent:**
  *Conditions aux limites:*
  Entrée (Amont): Q= 40 $m^3/s$
  Entrée (Aval): H =$h_c$=1.112m
  Parois (AC et BD): U.n = 0 (condition d'imperméabilité)
  *Conditions initiales:*
  U=V=0 et H=1m

- **Régime non permanent:**
  *Conditions aux limites:*
  Amont: hydrogramme de crue Q(t) donné par le tableau suivant:

| $t(mn)$ | $Q(m^3/s)$ |
|---|---|
| 5 | 45.00 |
| 10 | 50.00 |
| 15 | 55.00 |
| 20 | 60.00 |
| 25 | 65.00 |
| 30 | 70.00 |
| 35 | 75.00 |
| 40 | 80.00 |
| 45 | 85.00 |
| 50 | 90.00 |
| 55 | 95.00 |
| 60 | 100.0 |
| 60 | 95.00 |
| 70 | 90.00 |
| 75 | 85.00 |
| 80 | 80.00 |
| 85 | 75.00 |
| 90 | 70.00 |
| 95 | 65.00 |
| 100 | 60.00 |
| 105 | 55.00 |
| 110 | 50.00 |
| 115 | 45.00 |
| 120 | 40.00 |

Aval: H =$h_c$=2m
Parois: U.n = 0 (condition d'imperméabilité)
*Conditions initiales:*

Solution du régime permanent

**Résultats:**

- **Régime uniforme:**
  Dans les figures ci-dessous (4.38), on présente d'une manière globale la solution du régime uniforme. Le régime uniforme a commencé à s'établir à $x = 300m$. La surface libre présentée par la ligne d'eau est plus ou moins parallèle au fond du canal. Une légère augmentation de la vitesse est accompagnée par une diminution de la hauteur le long du canal et des perturbations de la vitesse (composantes $(U, V)$) et de la surface libre à l'entrée du canal traduit la non stabilisation du régime uniforme. On illustre sur les figures (4.39, 4.40, 4.41) les profils de vitesse et la variation de la hauteur d'eau dans différentes sections du canal. On récupère un profil de forme parabolique. A la section d'entrée, on remarque toujours la perturbation de la vitesse et le profil parabolique s'est amélioré avec l'établissement du régime uniforme le long du canal.

- **Régime permanent:**
  De la même manière, en supposant que le canal déverse dans un lac qui représente un changement de pente brusque, on impose la hauteur critique de l'écoulement. Le remous obtenu est de type M2 (figure 4.42).
  La solution intiale utilisée est la solution du régime uniforme, puisque ce dernier a été établi à la fin. Par conséquent, le régime permanent est établi.
  Par contre, en représentant les profils de vitesse et la variation de la hauteur sur des sections transversales le long du canal (figures 4.43, 4.44, 4.45), le profil de vitesse obtenu est de forme parabolique amélioré d'une section à l'autre. Des petites pertubations présentes sont dûes au maillage qui est grossier et ne représente pas la géométrie réelle du canal. Cela est déja justifié dans la section (sensibilité paramétrique - maillage).

- **Régime non permanent:**
  Sur les figures (4.46, 4.48, 4.50) et (4.47, 4.49, 4.51), on présente respectivement la variation de la hauteur d'eau et les profils de vitesses sur des différentes sections transversales du canal à différents pas de temps. On a obtenu la même allure pour chaque pas de temps. La hauteur d'eau croit dans le temps avec la croissance de l'hydrogramme de crue et inversement elle décroit avec sa décroissance. De même, on remarque un abaissement de la surface libre le long du canal, la hauteur atteint une valeur fixée à la frontière de sortie comme condition aux limites forcées.
  En ce qui concerne la vitesse, les profils sont aussi de même allure parabolique pour tout les pas de temps. La vitesse évolue avec l'évolution de l'hydrogramme de crue et inversement, elle diminue avec le décroissement de l'hydrogramme de crue.

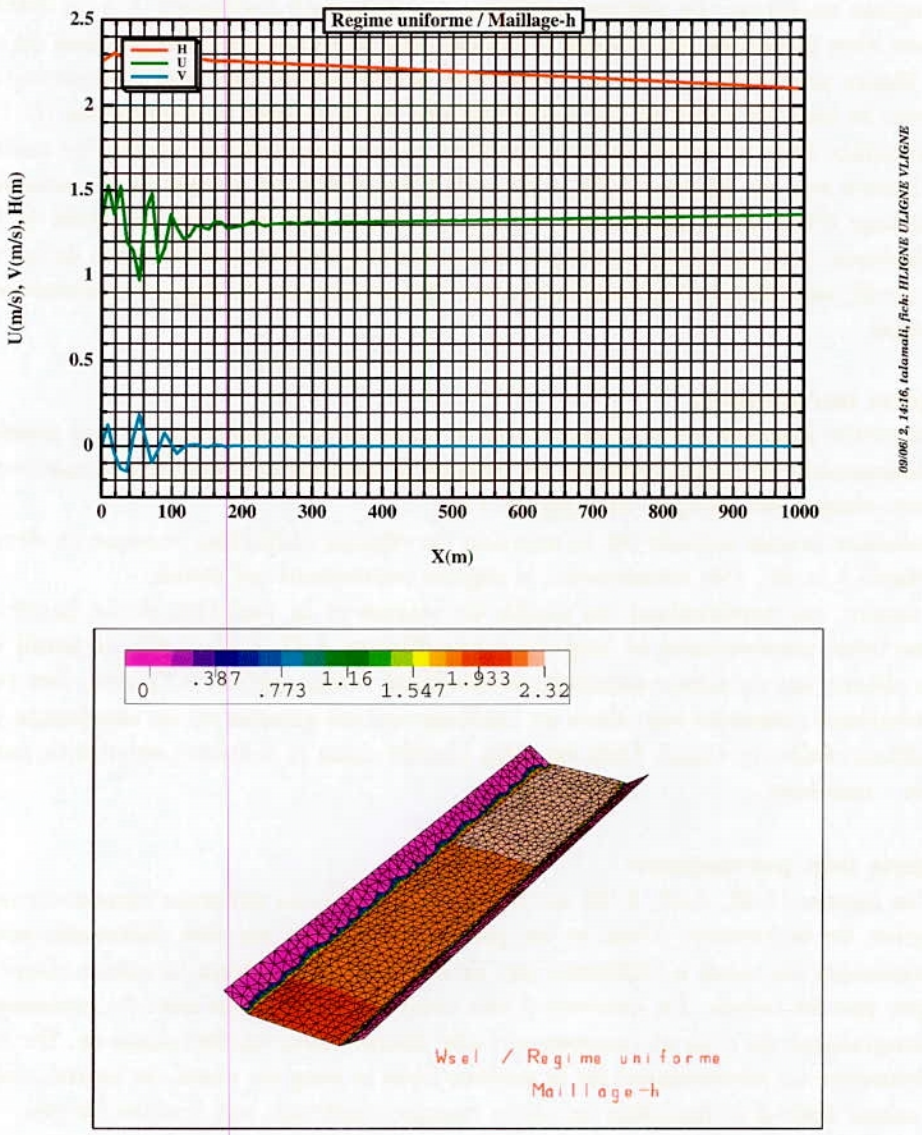



FIG. 4.38 – *Solution du régime uniforme*

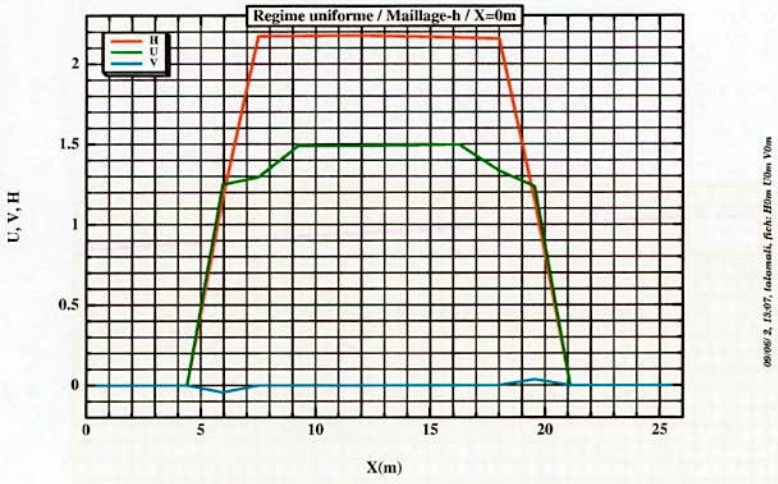



FIG. 4.39 – *Section d'entrée à x=0m*

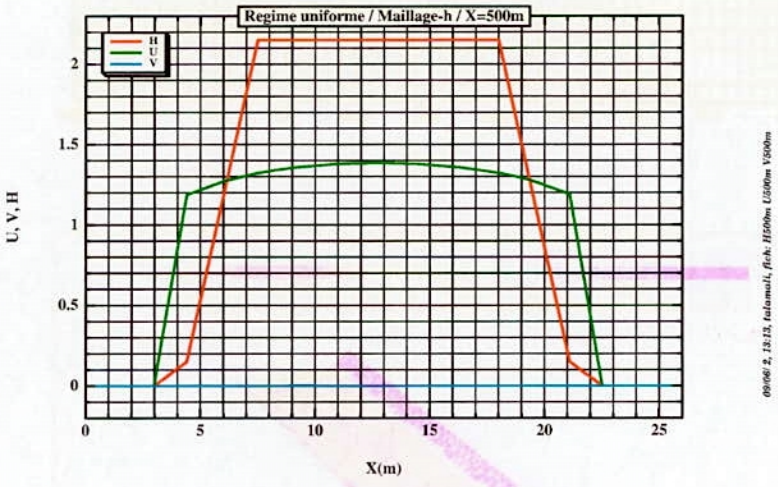



FIG. 4.40 – *Section intermédiaire à x=500m*




FIG. 4.41 – *Section de sortie à x=1000m*

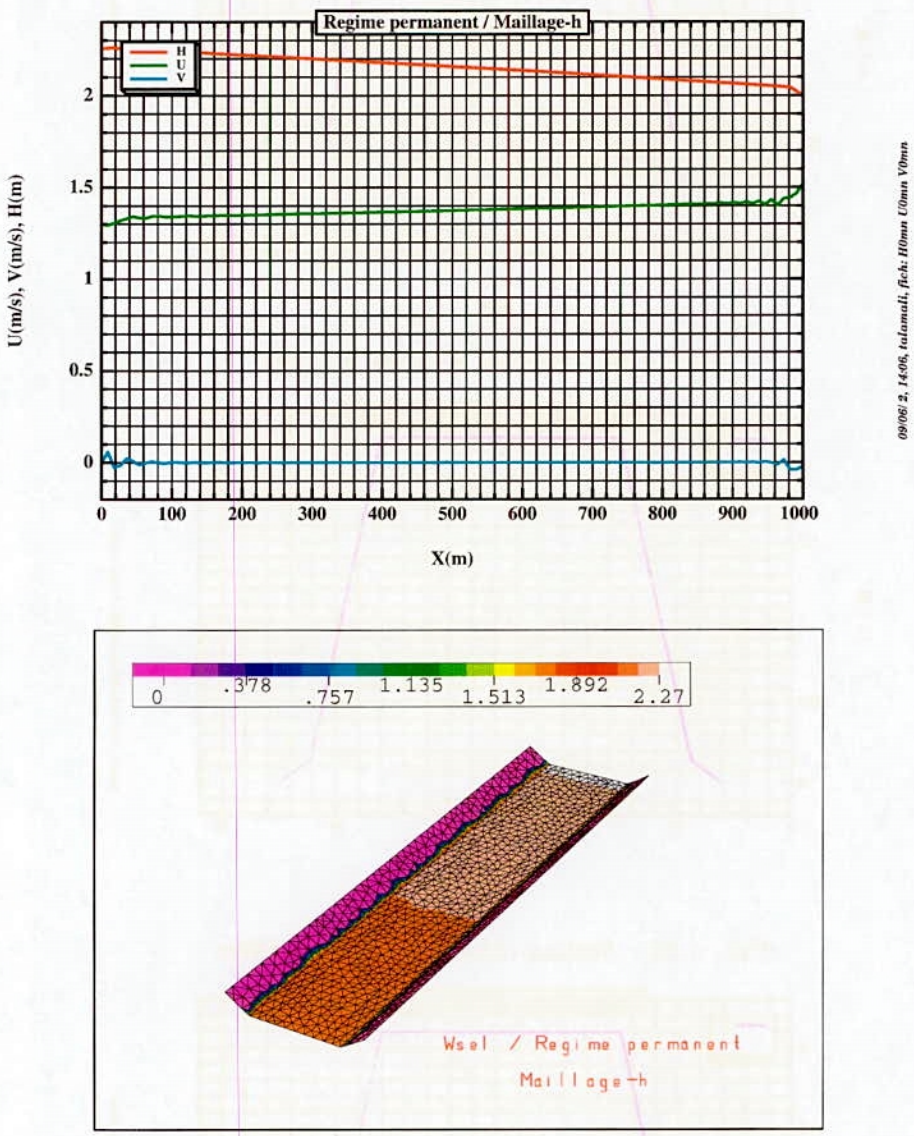



FIG. 4.42 – *Solution du régime permanent*

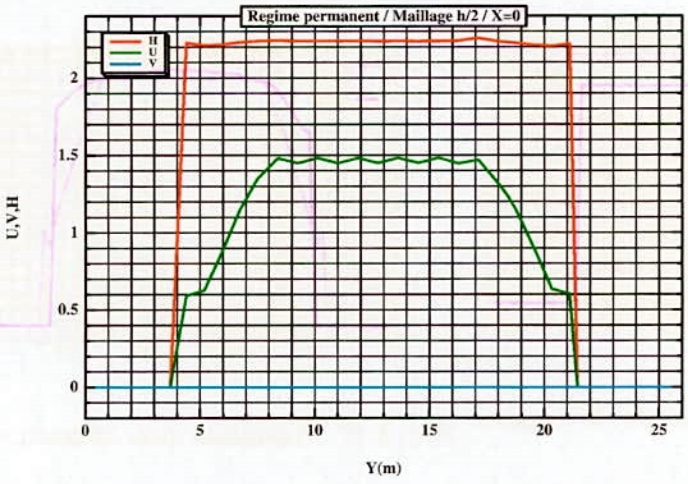



FIG. 4.43 – *Section d'entrée à x=0m*




FIG. 4.44 – *Section intermédiaire à x=250m*

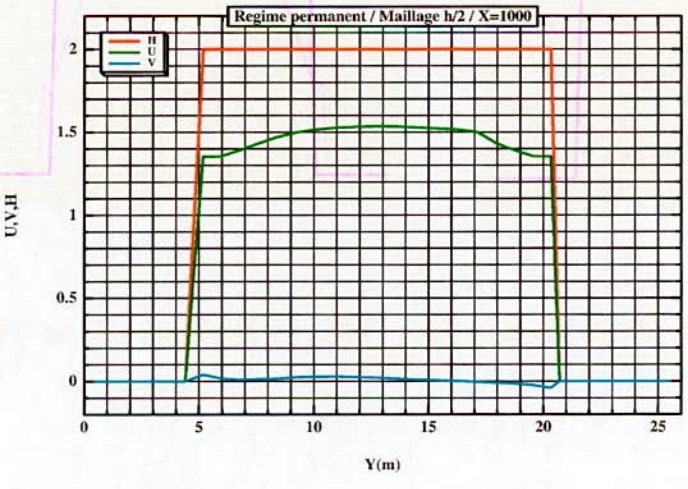



FIG. 4.45 – *Section de sortie à x=1000m*

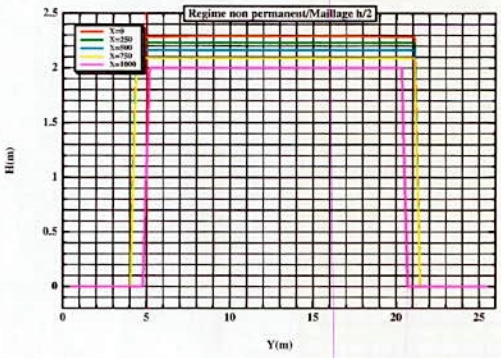



FIG. 4.46 – *Variation de la hauteur t=5mn*




FIG. 4.47 – *Variation de la vitesse t=5mn*

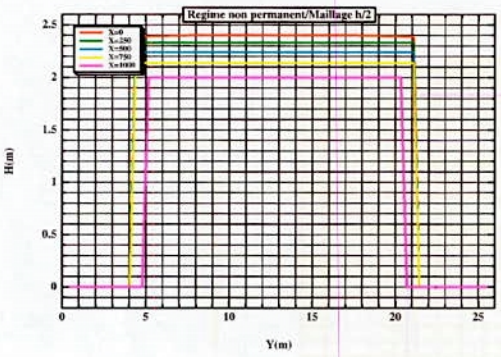



FIG. 4.48 – *Variation de la hauteur t=60mn*

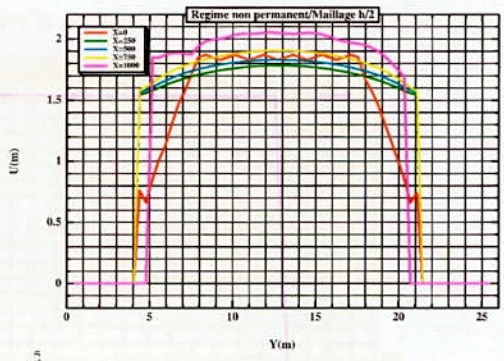



FIG. 4.49 – *Variation de la vitesse t=60mn*

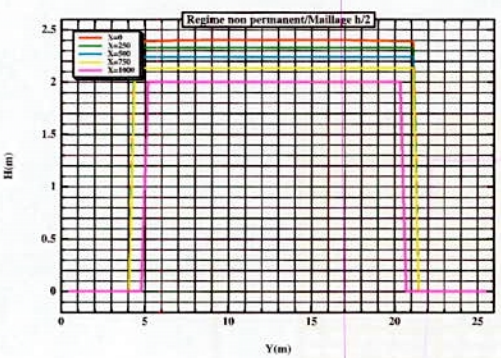



FIG. 4.50 – *Variation de la hauteur t=120mn*

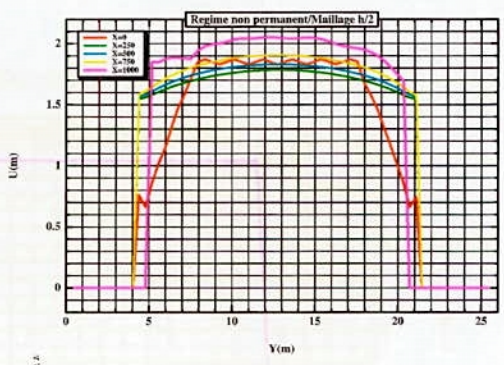



FIG. 4.51 – *Variation de la vitesse t=120mn*

**Comparaison et conclusion:**

La performance des résultats en raffinant le maillage est observée en comparant ses derniers en différentes sections du canal, sur les différents maillages $h$, $\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{4}$, présentés sur les figures (4.52, 4.53, 4.54, 4.55, 4.56, 4.57). Les profils de vitesses deviennent plus lisses d'un maillage à l'autre, les pics de vitesses à la section d'entrée s'éliminent en augmentant le nombre de noeuds et de là, on confirme l'étude de la sensibilité paramétrique en maillage (taille/qualité), plus en augmentant le nombre de noeuds plus le résultat est précis. L'analyse paramétrique de chaque paramètre a permis le bon choix de la valeur appropriée et a rendu le résultat plus cohérent.

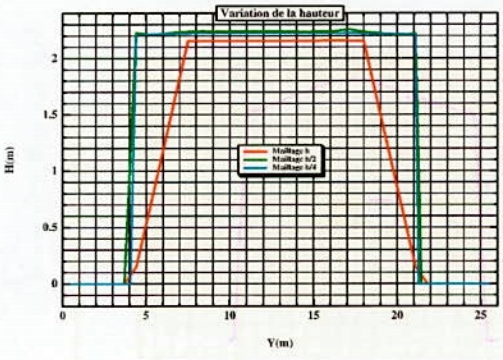



FIG. 4.52 – *Section d'entrée à x=0m*

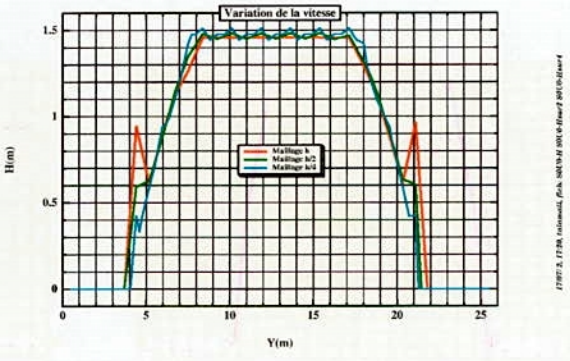



FIG. 4.53 – *Section d'entrée à x=0m*

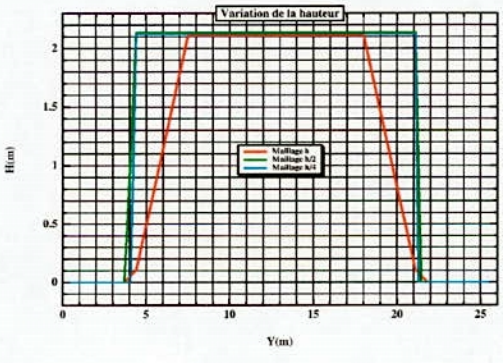



FIG. 4.54 – *Section interne à x=500m*

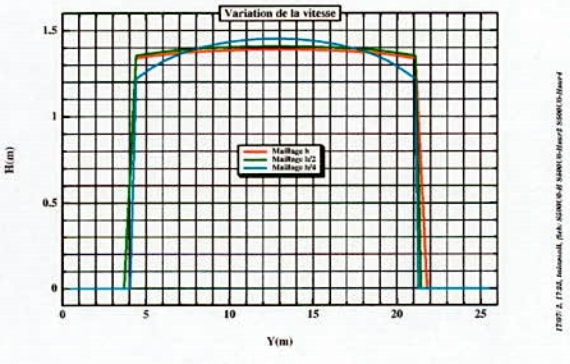
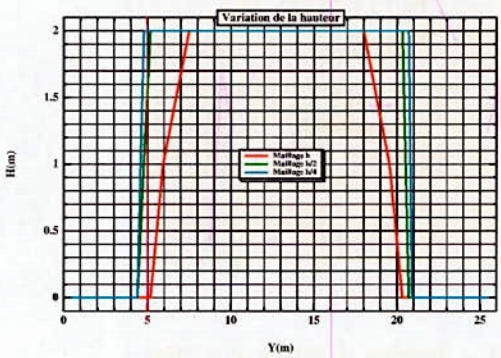



FIG. 4.55 – *Section interne à x=500m*



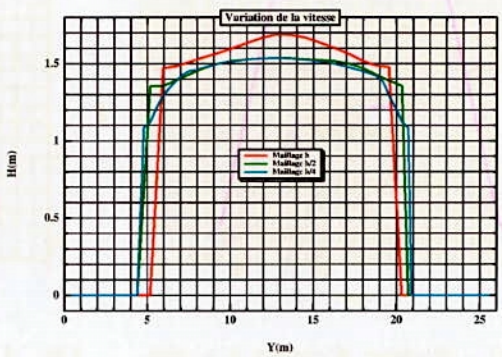




FIG. 4.56 – *Section de sortie à x=1000m* FIG. 4.57 – *Section de sortie à x=1000m*

# Chapitre 5

# Prototype d'un outil d'aide à la décision

Les problématiques de l'eau constituent un domaine prioritaire tant au niveau des instances nationales qu'européennes. La demande croissante en eau douce associée à la diminution de cette ressource, son utilisation intensive ainsi que les divers risques (pollution, inondation, etc) nécessitent une meilleure conception et une exploitation optimale des hydro-systèmes. Pour remédier à ces problèmes, il est necessaire de développer des logiciels de simulation numérique, de gestion, de stockage et de maîtrise des données. Face à cette situation, le projet ESIMEAU a été mis en place en juin 1995 dans un objectif général de développer un système intégré de gestion, de prédiction et de simulation numérique consacrée à l'amélioration de la qualité des eaux et l'étude de l'aération des lacs contre le phénomène d'eutrophisation. Ce contrat a été accompagné deux ans plus tard par un autre contract européen. Il s'agit du projet CRUCID, spécifique à l'étude des crues par l'application des technologies du calcul intensif ditribué HPCN[11] à la modélisation et la simulation numérique des écoulements. Après la réussite de ces deux derniers, le projet WADI a été lancé pour continuer les tâches de travail entammées et d'autres envisagées pour l'aménagement des bassins versants et enfin englober tous les travaux effectués sous un seul système d'information. Les principales actions de recherche suivies pour ces projets peuvent être groupées en deux catégories [55].

- *Actions spécifiques:*
  Ces actions consistent à modéliser, représenter les phénomènes hydriques rapides (crues, inondations, etc) ou plus lents (eutrophisation et transport des sédiments) et ensuite développer des algorithmes et des codes numériques adéquats pour une simulation réaliste en vue d'une meilleure restitution physique de ces phénomèmes. Dans le cadre de ces projets, comme il a été mentionné avant, trois thématiques principales ont été retenues et autour desquelles s'articuleraient les travaux de recherche [55]:
  - La première porte sur la modélisataion numérique du traitment de l'eutrophisation des retenues d'eau (artificielles ou naturelles). L'objectif est de proposer contre ce fléau des remèdes d'aération mécaniques par injection d'air forcée en

11. High Perfermance Computing and Networking

faisant appel d'une part à des méthodes de simulation numérique directes pour la compréhension du phénomène et d'autre part à des techniques de contrôle inverse pour optimiser l'emplacement des aérateurs et la quantité d'air à injecter.

- La deuxième a pour objectif de simuler les écoulements à surface libre, notamment, la thématique des crues pour disposer d'outils permettant une approche plus rationnelle dans la gestion des risques d'inondation et de mise en place des systèmes d'alerte. On rappelle que l'objectif principal de ce présent travail de Magister s'intègre dans ce deuxième volet.
- En amont des problèmes des crues, se pose celui de l'aménagement des bassins versants avec ces propres spécificités (localisation des lits majeurs et lits mineurs des cours d'eau, emplacement des barrages, etc). Ce domaine reste largement à défricher tant du point de vue de la modélisation que celui de la présentation ou de la simulation [52].

- *Actions génériques:*
  Les actions génériques consistent à étudier et développer le concept d'une plate forme pérenne, évolutive et modulaire réalisée sous la forme d'un système intégré prototype montrant sa faisabilité. Cette plate forme contient des outils de gestion, d'analyse et de traitement des données appropriées aux caractéristiques climatologiques et hydriques. En particulier, cette plate forme a donc été conçue afin de [55]:
  - Développer un système d'information intégré dédié à assister les ingénieurs et les décideurs dans la gestion des ressources hydriques.
  - Offrir des outils de traitement des données environnementales, des solveurs numériques, des schémas d'optimisation et des outils de visualisation.
  - Offrir un environnement convivial pour une prise de décision à la fois rapide et précise (utilisation des systèmes d'informations géographiques) [37].

Dans le cadre de ce memoire de Magister, on s'interesse dans une deuxième partie à une des actions génériques du projet à savoir l'utilisation rapide des différents logiciels intégrés (mailleurs, simulateurs, visualiseurs) dans l'application mère du système et l'exploitation des fonctionnalités potentielles des systèmes d'informations géographiques afin d'avoir une étude détaillée et exhaustive des résultats d'une part et de valider les différents protocoles de transfert entre les composants du système intégré d'une autre part pour pouvoir déterminer les zones inondables dans les canaux.

## 5.1 Plate-forme ESIMEAU

La plate-forme ESIMEAU est l'application principale qui fournit un environnement de travail convivial tout en permettant l'intégration de différents logiciels. Les deux principaux éléments de cette application sont les données qui sont stockées dans la base de données et qui peuvent être intégrées selon les besoins de l'utilisateur, et les modèles numériques qui constituent un élément primordial. Ces deux éléments sont accompagnés par les outils de maillage 2D et 3D (EMC2, YAMS, GSH3D[12]) et les visuliseurs 2D et 3D (SMS, VISU et MEDIT). L'application principale illustrée par la figure (5.1) permet à l'utilisateur de choisir une des applications suivantes :

- Eutrophisation et Aération
- Aménagement des bassins versants
- Prévention contre les risques d'inondation.

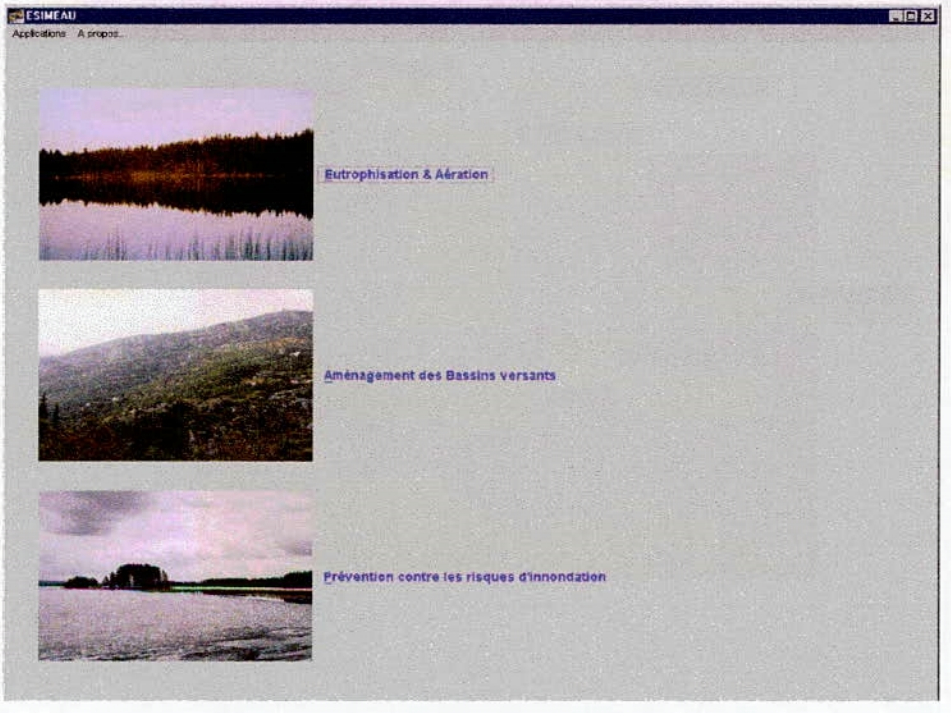



FIG. 5.1 – *Plate-forme ESIMEAU/Application mère*

12. Générateur de maillage en 3 Dimensions

## 5.2 Application onde de crue

L'accès à l'application "Prévention contre les risques d'inondation" (figure 5.2) s'effectue par un simple clic sur le nom de cette dernière. L'application onde de crue s'affiche avec une barre de menus qui permet l'accès à tous les logiciels intégrés et d'effectuer diverses opérations sur les données, selon nos besoins. Parmi ces opérations, on cite:

- **Base de données**: permet d'afficher une fenêtre pour interroger la base de données.
- **SIG**: permet d'ouvrir la fenêtre du SIG Arcview.
- **Maillage**: Cette option permet à l'utilisateur de construire les maillages 2D et 3D.
- **Simulation**: Cette option permet de lancer le code de calcul.
- **visualisation**: Cette option permet d'utiliser les différents aspects de visualisation offerts dans l'application.

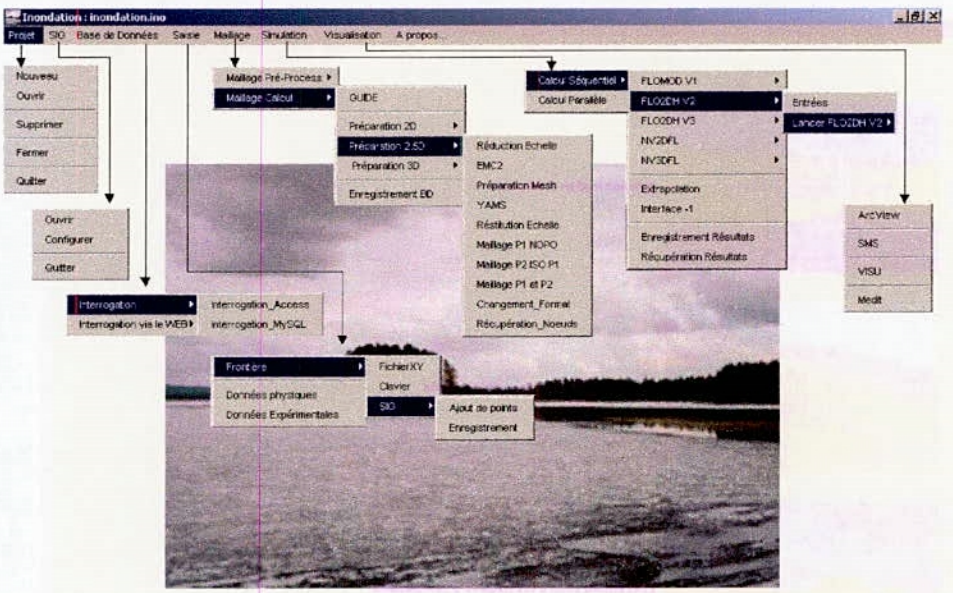



FIG. 5.2 – *Application onde de crue/Prévention contre les risques d'inondation*

## 5.3 Application onde de crue / SIG Arcview

Le SIG est un outil informatique qui permet de gérer différents types de données, qu'on place géographiquement sur un support-carte sous forme de couches de thèmes, tables attributaires, etc. Les SIG offrent les possibilités des logiciels de gestion de base de données (telles que requêtes et analyses statistiques) et ce, au travers d'une visualisation synthétique et au travers d'analyses propres aux cartes. Cependant, Arcview dans l'application permet à l'utilisateur de visualiser le domaine d'étude par les différentes couches de thèmes (limites du domaine, courbes de niveaux, niveau normal de la surface d'eau, etc). Il permet aussi d'extraire un fichier de points frontières (x,y) qui servira comme input dans la phase de préparation du maillage.

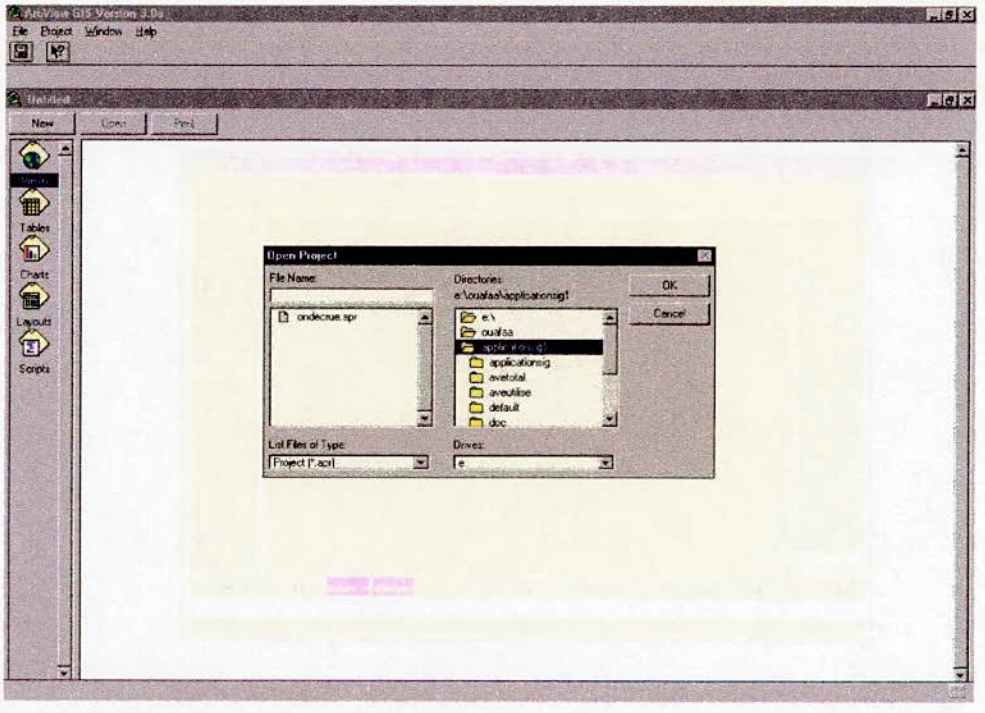



FIG. 5.3 – *Ouverture du projet -onde de crue- par Arcview*

## 5.4 Application onde de crue / Maillage

Le menu maillage de l'interface permet à l'utilisateur de construire deux types de maillage: - un maillage prés-process 2D (maillage pauvre en nombre de points) - un maillage de calcul 2.5D ou 3D (maillage riche)

### 5.4.1 Maillage prés-process

Le maillage prés-process 2D est généré pour deux raisons; il servira comme input pour la préparation du maillage de calcul d'une part. D'autre part, vu que Arcview ne peut charger les maillages lourds et pour une manipulation plus raisonnable des données qui sont associées au maillage de calcul, on a opté pour un maillage de visualisation de taille beaucoup moins importante, rendant la manipulation plus souple. Ce maillage se génère moyenant le mailleur de surface EMC2 (figure 5.4) à partir du MNT donné par le fichier frontière (x,y) crée par Arcview. L'utilisation de ce maillage par la suite nécessite son enregistrement dans la base de données. Cet enregistrement s'effectue dans deux tables maillage base1 et maillage base2 par une connexion SQL (Sequence Quary Language) entre l'interface et le système de gestion de base de données (SGBD Access).

- **Maillage base1:** elle contient les numéros des éléments et leurs connectivié, ainsi qu'un numéro de référence.
- **Maillage base2:** elle contient les numéros des nuds, leurs coordonnées (x,y) et un numéro de référence.

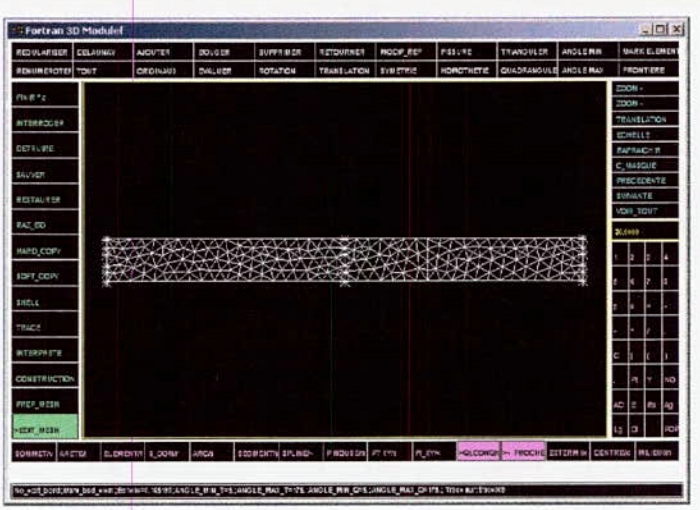


FIG. 5.4 – *Construction du maillage prés-process par EMC2*

### 5.4.2 Maillage de calcul

La nature dimensionnelle d'un maillage dépend de la nature du modèle numérique utilisé. Des sous menus sont prévus dans l'application pour la prépartion des maillages 2D, 2.5D ou 3D.
Le problème traité par le code FESWMS est de nature 2.5D, d'où on a besoin d'un maillage de surface courbe tridimensionnelle. Cette étape de l'interface-maillage permet de générer un maillage riche pour une bonne utilisation de la méthode des éléments finis.

Ce maillage de calcul s'obtient par l'exécution d'une suite d'exécutables constituant une interface f développée moyennant l'éditeur de maillage et de contour 2D (EMC2), un logiciel de remaillage de surface 3D (YAMS) et quelques sous programmes de la bibliothèque MODULEF qui permettent le passage d'un maillage $P^1$ à un maillage $P^2$.
Une fois le maillage est construit, il nécessite aussi son enregistrement dans la base de données pour une exploitation ultérieure.

## 5.5 Application onde de crue / Simulation

La simulation numérique est proposée par plusieurs solveurs: un solveur navier-Stokes 2D, un solveur Navier-Stokes 3D (envisagés pour le futur) et les trois différentes versions de FESWMS nommées, FLOMOD-V1, FLO2DH-V2 et FLO2DH-V3. Les différentes versions nécessitent des fichiers de contrôle de données topographiques, hydrauliques et numériques. Des sous menus dans l'application permettent l'accès a des fenêtres pour l'introduction de ces données suivant le format du modèle numérique choisi et un simple clic sur le boutton "lancer le code", ce dernier s'exécute en local ou sur le serveur. Une fois la simulation est achevée, on prépare les fichiers des résultas appropriés pour VISU, MEDIT par l'interface -f ou par l'extrapolation pour Arcview.

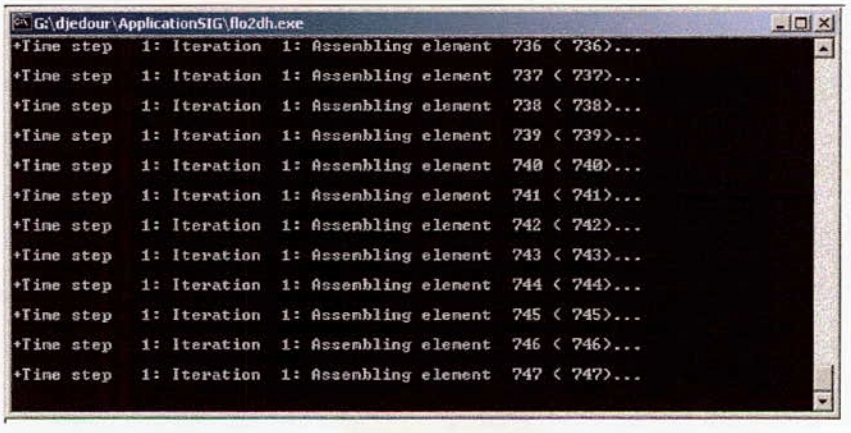



FIG. 5.5 – *Exécution du modèle numérique FESWMS*

## 5.6 Application onde de crue / Visualisation:

Différents logiciels ont été intégrés dans l'interface afin d'avoir une visualisation complète et exhaustive sur chaque point du domaine étudié. Parmi ces logiciels, on a VISU et MEDIT qui sont des visualiseurs 3D très interactifs mais de nature $P^1$. Cet aspect ne pose pas de problèmes puisqu'on récupère à partir du maillage $P^2$ uniquement l'information sur les $P^1$ moyennant une interface -f. Un autre logiciel SMS est intégré pour exploiter

les résultats. Il fournit une visualisation en 2D et contrairement à VISU et MEDIT, il permet une visualisation du maillage $P^2$ ainsi que la solution qui lui est associée. SMS permet de visualiser la solution scalaire ou vectorielle du champ de vitesse. Le menu déroulant permet aussi de lancer VISU,MEDIT, SMS ou Arcview, d'afficher les résultats et d'interpréter les résultas suivant une palette de couleurs ou la légende fournit avec chaque représentation.

- **Présentation par VISU** (figure 5.6):

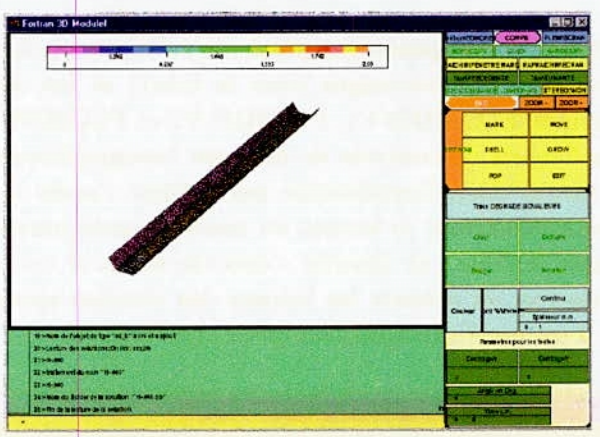


FIG. 5.6 – *Visualisation de la hauteur H à t=0h par VISU*

- **Présentation par MEDIT** (figure 5.7):

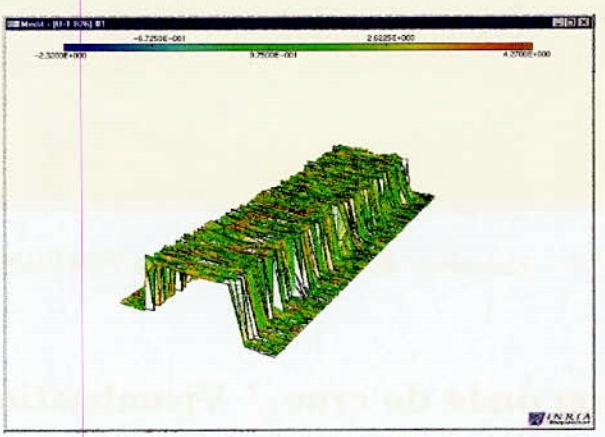


FIG. 5.7 – *Visualisation de la vitesse U à t=1.826h par MEDIT*

- **Présentation par SMS** (figure 5.8):

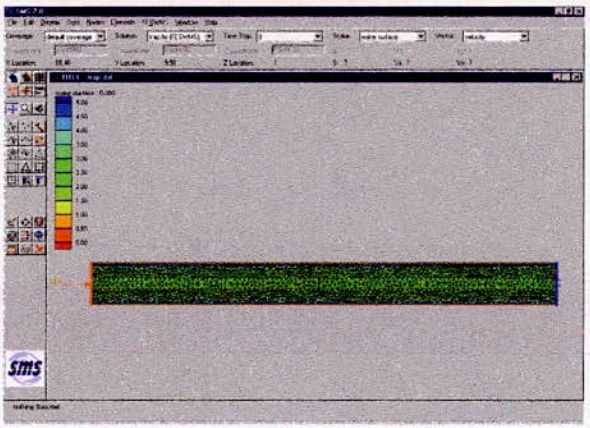


FIG. 5.8 – *Visualisation de la côte de la surface libre à t=0h par SMS*

- **Présentation par Arcview:**

Une autre méthodologie a été utilisée pour l'exploitation des résultats. Elle concerne le système d'information géographique Arcview. Certes, les outils cités ci-dessus offrent des possibilités de visualisation très élaborée, néanmoins, l'information est traitée de façon globale, contrairement au SIG qui en plus d'une visualisation d'ensemble, extrait l'information locale de façon interactive. Ce qui aide mieux à l'interprétation et à la prise de décision. La méthodologie de visualisation dans cette étape nécessite l'extrapolation des résultats sur un maillage d'exploitation. Cette extrapolation permet d'avoir une distribution spatiale et temporelle des grandeurs $(U, V, H)$ à visualiser et nous pourrons les exploiter sous forme: courbes temporelles simples ou multiples, courbes spatiales simples ou multiples, coupes transversales,etc.

Les menus déroulants qui s'y présentent offrent les fonctionnalités suivantes:
**Visualisation:** permet de visualiser le maillage d'exploitation (figure 5.6).
**Charger un thème:** c'est un processus d'association du lieu géographique (information topographique) à l'information à traiter (dans notre cas les vitesses U,V et la hauteur H). Trois types de thèmes sont disponibles à charger:

- *simple temporel:* permet de charger une seule grandeur U,V ou H durant le temps de simulation.
- *Multiple temporel:* permet de charger plusieurs grandeurs U,V et H pour le même point durant le temps de simulation.
- *Multiple spatial:* permet de charger plusieurs grandeurs U,V et H sur une ligne le long du canal ou sur une ligne trasversale au canal.

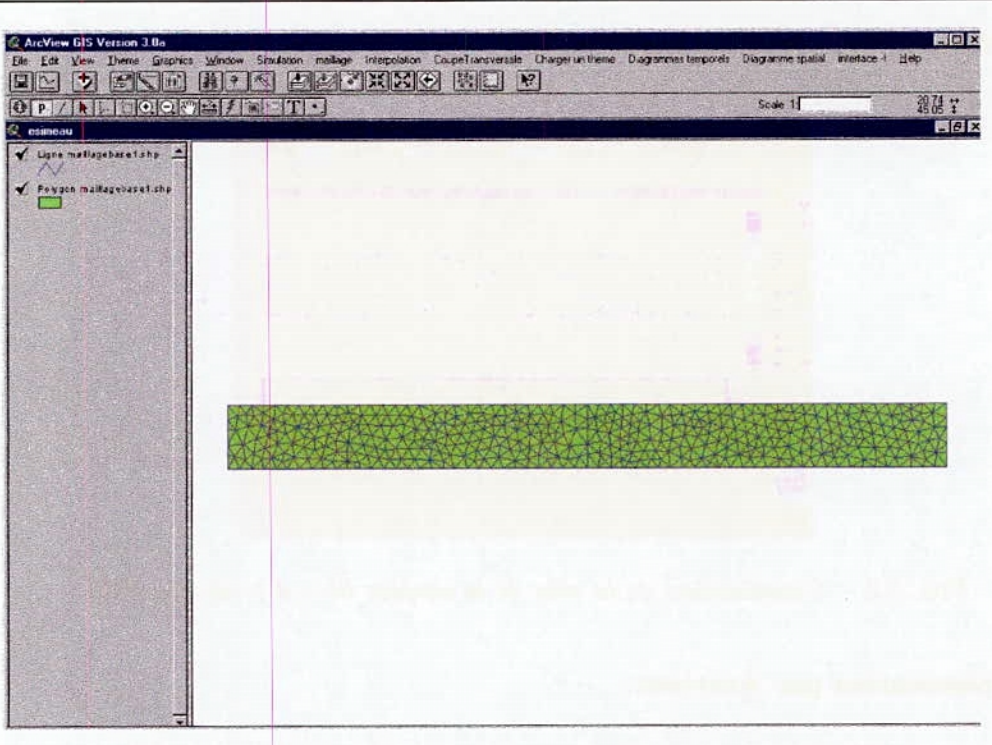



FIG. 5.9 – *Visualisation du maillage d'exploitation par Arcview*

**Diagramme temporel:** permet de visualiser les courbes correspondantes aux au thème chargé auparavant. Trois types de diagrammes sont disponibles:

– *simple sur un point du maillage:*

A l'aide de l'outil qui permet de selectionner un point, on choisit un point du maillage sur lequel on désire avoir les détails sur le résultat. Les valeurs numériques sur ce point sont données par une table attributaire associée à ce thème et l'aspect graphique de la variation de la grandeur choisie est illustrée par une chart (histogramme, courbe, nuage de points, etc). Dans ce cas, on a choisi de voir le résulat sur le noeud noméro 180 du maillage. La variation de la vitesse U sur ce noeud est donnée par la ligne de la table atrributaire sélectionnée ou par le graphe associé sur la figure (5.10). On remarque une augmentation progressive de la vitesse U pendant le temps de la crue et de la décrue. L'augmentation du débit est traduite par la progression de la vitesse.

– *Multiple sur un point du maillage:*

Sur le même noeud 180, on montre la variation des trois variables du problème (U, V et H). Ce tracé est illustré sur la figure (5.11) de différentes manières (courbes, hystogrammes et table). Le canal étant de section uniforme, on remarque que la composante de la vitesse V est nulle à chaque pas de temps suivi d'une progression de la vitesse U et de la hauteur.

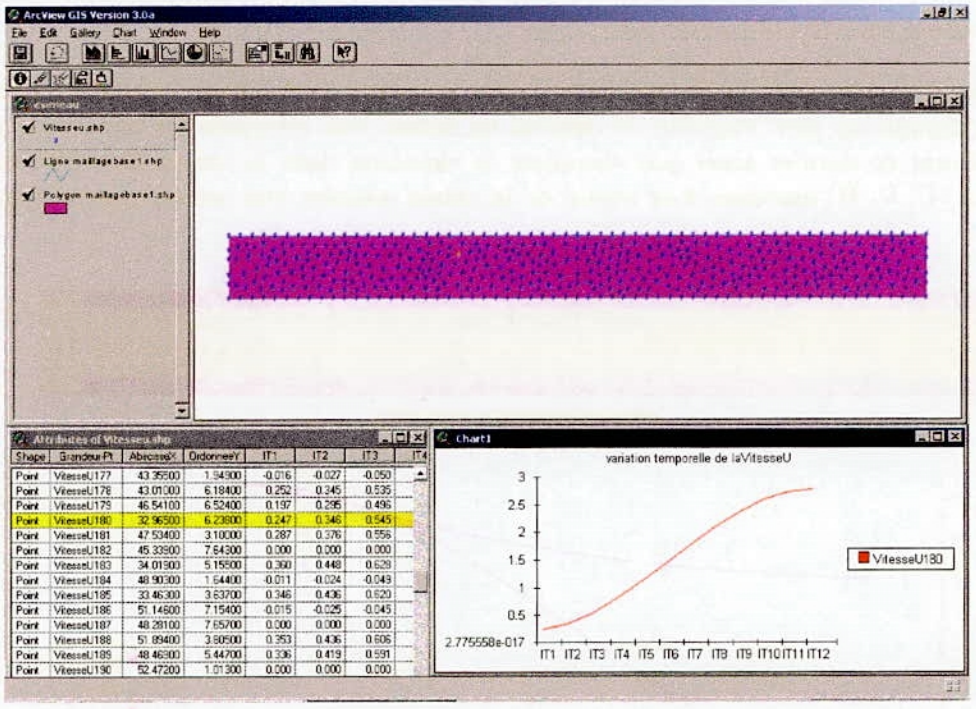



FIG. 5.10 – *Courbe de la grandeur U(t) d'un point du maillage*

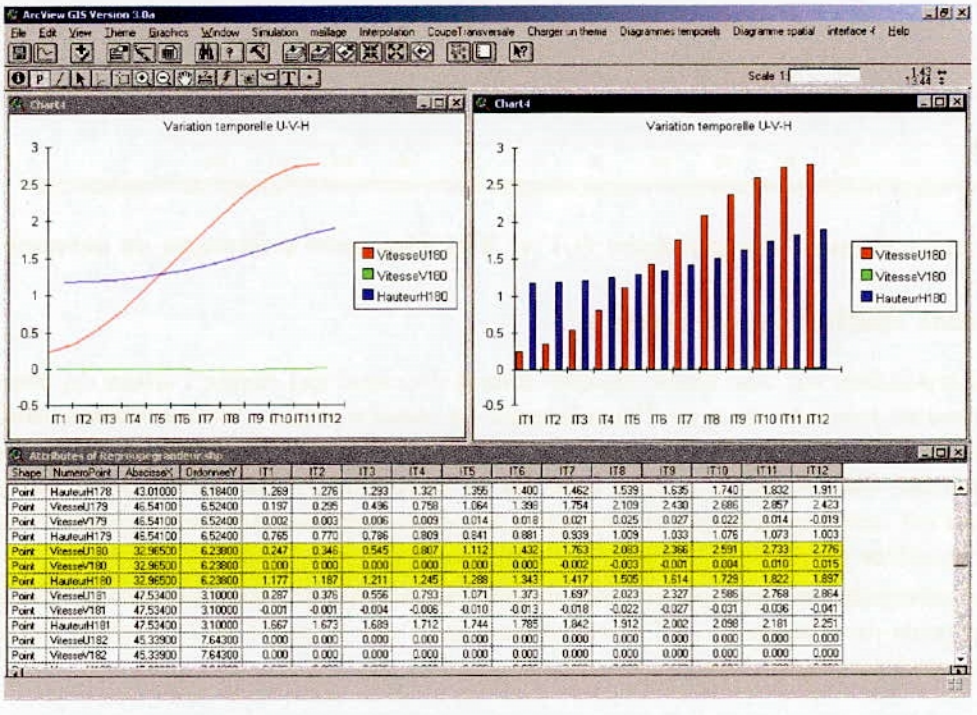



FIG. 5.11 – *Courbes des grandeurs U,V et H(t) d'un point du maillage*

– *Multiple sur un point quelconque:*

Sur un point quelconque (pas forcément qu'il soit un noeud du maillage) selectionné sur le domaine détude, on peut exploiter le résultat en faisant une interpolation sur les noeuds qui entourent ce dernier ainsi que visualiser la variation dans le temps des différentes grandeurs (U, V, H) associées à ce noeud de la même manière que précedamment (figure 5.12).

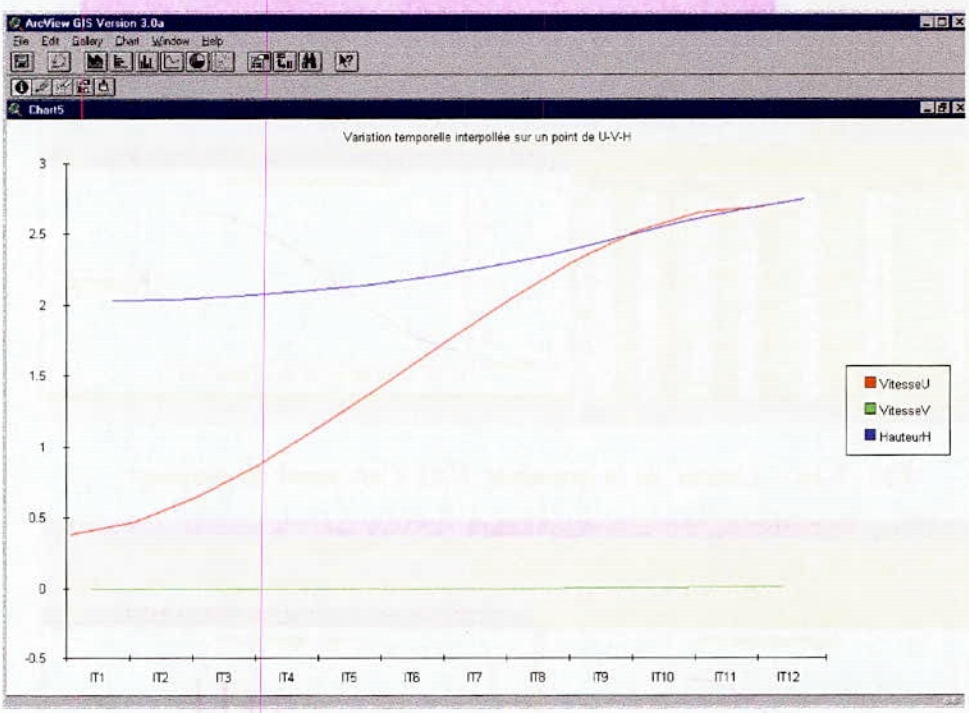



FIG. 5.12 – *Courbes des grandeurs U,V et H(t) d'un point quelconque du domaine*

**Diagramme spatial:** permet l'accès à:

- l'interpolation sur une droite choisie le long du canal qui donne l'allure du remous obtenu en fonction du type d'écoulement. Le canal à section trapezoïdale considéré déverse dans un réservoir (écoulement fluvial) et cela traduit la classe de ligne obtenue M2 illstrée par la courbe bleu sur la figure (5.13). La courbe de la ligne de d'eau est accompagnée par la variation des deux composantes de la vitesse U et V sur le même graphe.
- Une interpolation multiple sur une droite transversale au canal permet de visaliser les profils de vitesses (U, V) transversaux ainsi que le profil de la hauteur défini à cette section (figure 5.14).

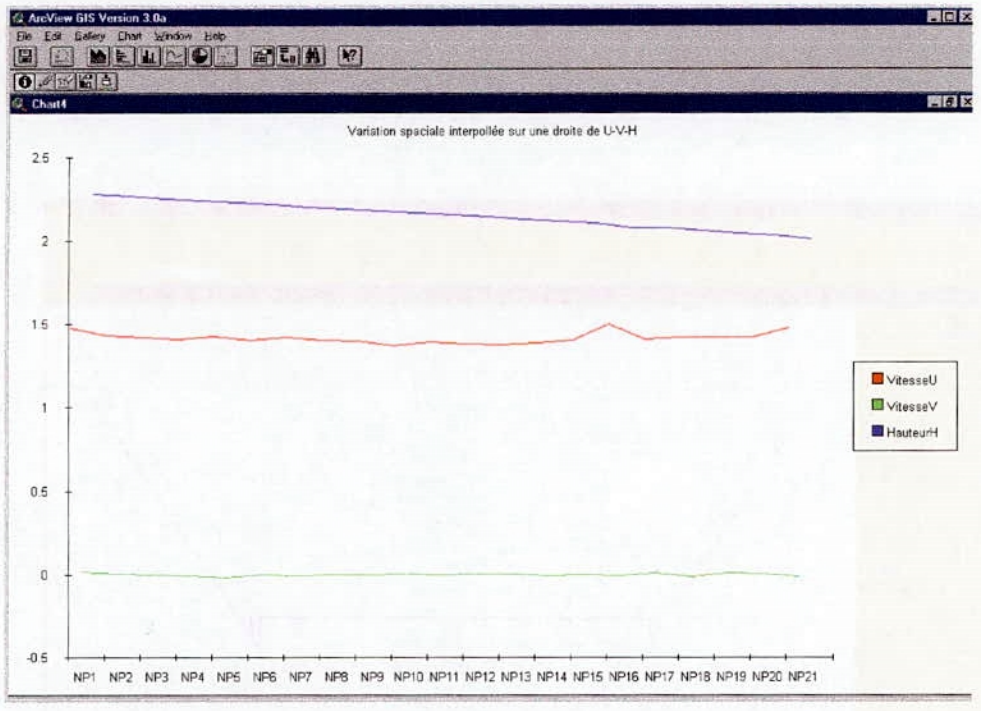



FIG. 5.13 – *Courbe de la ligne d'eau et variation de la vitesse le long du canal*

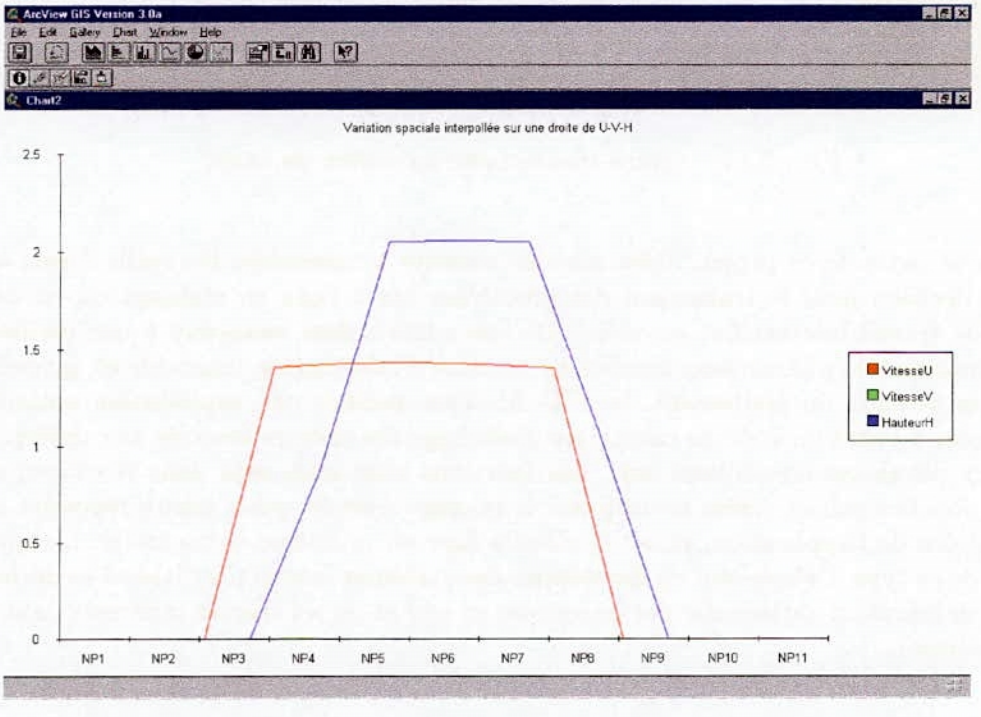



FIG. 5.14 – *Courbe de la surface d'eau et variation de la vitesse à une section transvesale du canal*

**Coupe transversale:** Ce menu permet de lancer le script qui génère une coupe choisie dans le canal à une distance précise et à un instant connu ainsi que la visualisation de cette coupe par deux couches de thèmes (Fond et Surface) pour présenter la surface libre de l'eau.

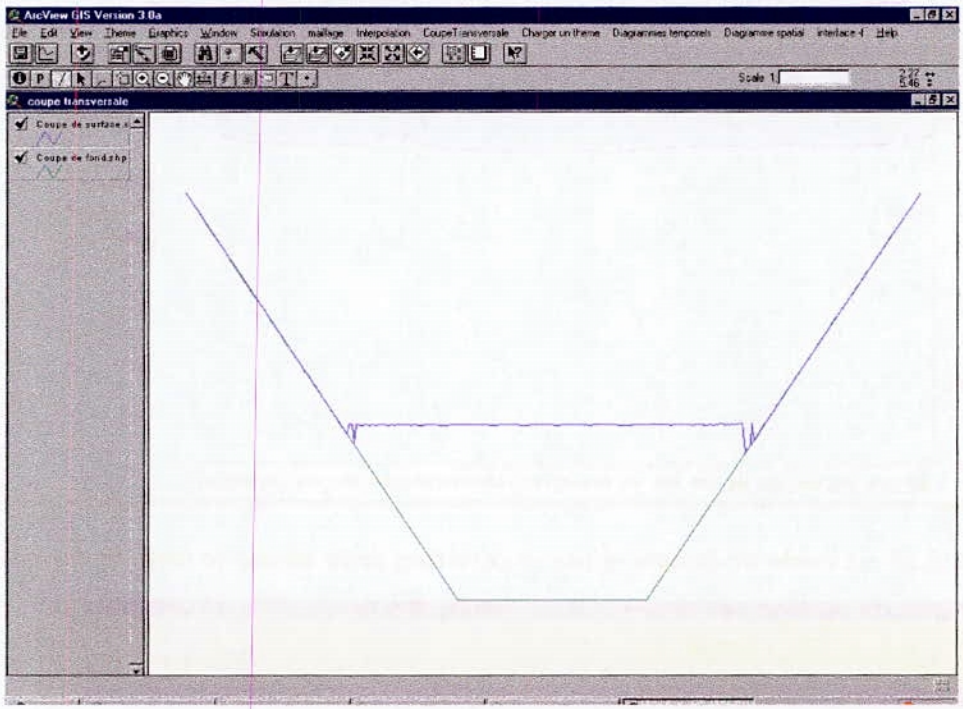



FIG. 5.15 – *Coupe transversale au milieu du canal*

Dans le cadre de ce projet, l'idée motrice consiste à rassembler les outils d'aide à la prise de décision pour le traitement des problèmes liés à l'eau en réalisant un environnement de travail interactif et convivial. De tels outils aident beaucoup à une meilleure compréhension des phénomènes étudiés en rendant l'information maniable et accessible à tous les niveaux du traitement. Le SIG ArcView permet une exploitation optimisée des données à l'aval du code de calcul, par l'affichage des thèmes associés aux différentes grandeurs physiques en utilisant soit, des fonctions existantes déjà dans ArcView, soit d'autres fonctionnalités créées en utilisant le langage Avenue, pour mieux répondre aux spécifications de l'application, sans toutefois la figer au problème qu'on traite. L'objectif à terme de ce type d'études est de développer des systèmes interactifs d'aide à la décision pour la planification rationnelle des ressources en eau et de ses risques inhérents dans les bassins versants.

# Conclusion & perspectives

Les outils de simulations permettant de mieux comprendre le phénomène des crues et par effet induit d'asseoir une politique plus rationnelle dans la gestion des risques d'inondations et d'établir des systèmes d'alertes adéquates sont, aujourd'hui, disponibles en plusieurs types de code numériques.
Dans le cadre des ces projets, FESWMS a été choisi parmi quelques codes car il est du domaine public, il traite en même temps les écoulements à surface libre, les écoulments en charge et le phénomène du transport solide. Le plus important c'est que ce code tient compte de plusieurs paramètres physiques qui rendent les résultats des simulations proches de la réalité et plus significatifs.
Les résultats obtenus aprés un certain nombre de simulations valident plus ou moins le modèle FESWMS. Il est relativement performant mais il nécessite un choix judicieux de certains paramètres physico-numériques. Chaque utilisateur de ce code doit comprendre d'abord le phénomène physique, la mise en équations mathématiques et le traitement numérique de ce phénomène. En effet, les conditions aux limites utilsées sont variées, dépendent du type d'écoulement et des propiétés hydrauliques de la rivière. L'hydrogramme de crue qui représente la réponse hydrologique des bassins versants, il est global, significatif et le plus utilisé pour spécifier la condition aux limites. Il doit être étudié soigneusement avant de l'ajouter au paramètres d'entrée du code. Il est necessaire pour traduire la condition aux limites en vitesse et en hauteur. Pour cela, il faut faire appel à d'autres modèles de type hydrologique pour modéliser le trasfert de l'eau dans le réseau hydrographique. Toutefois, ce sujet ne peut pas être clôt puisqu'il s'agit d'une thématique qui, de part sa nature, est assez complexe à cerner. Ce fait a été mis en exergue dans plusieurs études et analyses récentes effectuées par des organismes indépendants (ESCWA, Banque Mondiale, UNESCO, etc..) aussi bien que par les agences et les bureaux nationaux en charge de la gestion de l'eau. Ceci présente à l'évidence une source de problèmes pour les ingénieurs et les chercheurs en charge de cette ressource vitale.

En ce qui concerne les travaux de recherche, il se développent prioritairement dans deux domaines.

- Dans le domaine de l'évaluation des bilans et des régimes hydrologiques, les travaux sur les méthodes analytiques, conceptuelles et synthétiques de simulation et de modélisation des régimes sont poursuivis. L'identification puis la simulation des processus dominants et de leur variabilité à l'échelle du bassin versant est au coeur de ces développements qui nécessitent la disponibilité de données acquises dans des

observatoires ou par des expériences de terrain. Les mécanismes de genèse spatialisée des débits et de leurs solutés vers les réseaux hydrographiques, incluant les couplages hydrométéorologiques, sont étudiés particulièrement, ainsi que leur occurrence temporelle.

- Dans le domaine des écoulements et des transferts en cours d'eau, les travaux sont fortement infléchis vers l'étude d'aléas complexes associés aux écoulements et à leurs interactions avec le milieu qu'ils traversent : morphodynamique fluviale, stabilité des substrats (en liaison avec leur composition biogéochimique), dynamique des crues, évolution des panaches de rejets permanents, épisodiques ou accidentels. La mise en place de partenariat en chimie est indispensable au développement de plusieurs de ces thèmes, qui intègrent par ailleurs des compétences en mécanique des fluides, en mathématiques appliquées et en hydroinformatique. L'appel aux méthodes de modélisation numérique y est généralisé. Pour autant, la référence à des modèles physiques en laboratoire et à des données de terrain reste indispensable.

L'objectif à terme de ce type d'étude est de développer des systèmes interactifs d'aide à la décision pour la planification rationnelle des ressources en eau et la gestion des risques inhérents dans les bassins versants.

# Bibliographie


[1] Abbott M.B & Basco D., *Computational Fluid Dynamics*, Longman Sci. Techn., Harlow, GB, 1989.

[2] Abdelouaed M., Karrakchou S., Nakle B., Talamali S., *Elaboration et Implémentation HPCN de CRUCID*, INRIA-Rocquencourt,Déc.2000.

[3] Afzlimeh H. & Anctil F., *Vitesse de frottement associée à un écoulement non uniforme et une rugosité relative intermédiaire*, Journal of hydraulic research, 1999

[4] Ambroise B., *la dynamique du cycle de l'eau dans un bassin versant -Processus, Facteurs, Modèles-*, Editions H.G.A, Bucarest, 1999.

[5] Boss International, *Surfacewater Modelling System*, Users Manuel, INC. and Brigham Young University, 1999.

[6] Boss International, *Surfacewater Modelling System*, Tutorial, INC. and Brigham Young University, 1999.

[7] Boss International, *SMS: Surfacewater Modeling System*, Users Manuel- version 7.0,INC and Bingham Yonug University, 1999.

[8] Buil N., *Modélisation 3D du transports de polluants*, thèse de doctorat, Lyon1, 1999.

[9] Carlier M., *Hydraulique générale et appliquée*, Editions Eyrolles, 1986.

[10] Chassaing P., *Turbulence en mécanique des fluides*, INP Toulouse, 2000

[11] Chow V.T., *Open channel hydraulics*, Mc Graw Hill Boob Campany, New York, Toronto, London, 1959.

[12] Crauss E., *Hydraulique des Canaux découverts en régimes permanents*, Edition Eyrolles, 1950.

[13] Cunge J., Holly F. & Verwey A., *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*; Pitman Publ. Ltd, London, GB, 1980.

[14] Daubert O. & Canouet J., *Approche numérique de la houle par les équations de Navier-Stocks.*, Annales des ponts et chaussées, Laboratoire national d'hydraulique, France, 1ère et 2ème parties, 1984.

[15] Djedour M., *Couplage d'un système d'information géographique avec un modèle numérique quasi tridimentionnel des écoulements à surface libre*, PFE-INRIA/ENP, 2001.

[16] Dhatt G. & Touzot G., *Une présentation de la méthode des éléments finis* - Collection université de Compiegne - Deuxième édition, 1981.

[17] El Dabaghi F., *CruCID: Modélisation Numérique des crues via le Calcul Intensif Distribué*, Project program 973070, INCO-DC, 1997.

[18] El Dabaghi F., Kaiss M. & Ouazar D., *Bassins Versants et Crues: Données/SIG/Modèles scalaires*, CRUCID contract, report D4.1, INRIA, december 1999.

[19] El Dabaghi F., Kaiss M. & Ouazar D., *Watersheds Physical and Numerical Modelling Aspects*, ESIMEAU contract, report D.19, INRIA, december 1999.

[20] El Dabaghi F. & Pironneau O., *Stream vectors in three dimensional aerodynamics*, Numer.Math. 48, pp. 561-589, 1986.

[21] Engelman M.S., Strang G. & Bathe K.J., *The application of quasi-Newton methods in fluid mechanics*, international Journal for Numerical methods in Engineering, Vol 17, 707-718, 1981.

[22] ESRI, *Arcview: GIS The Géographic Information System for Everyone*, 1995.

[23] ESRI, *Avenue: Customization and Application Developpement for Arcview*, 1995.

[24] Frey P. & al., *Mesh VIsualisation Tool*, Project GAMMA-INRIA en collaboration avec SIMULOG, 2001.

[25] Frey P. & George P.L., *Yet Another Mesh Simplification*, Project GAMMA-INRIA en collaboration avec SIMULOG, 2001.

[26] Galland J.C., Goutal N. & Hervouet J.M., *TELEMAC: A new numarical model for*

*solving shallow water equations*, Adv. Water Resources (14), 183-148, 1991.

[27] Graf W.H. & Altinakar M.S., *Hydrodynamique*, Eyrolles, Paris, 1991.

[28] Graf W.H. & Altinakar M.S., *Hydraulique fluviale*, tome1, Traité de Génie Civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne, 1993.

[29] Graf W.H. & Altinakar M.S., *Hydraulique fluviale*, tome2, Traité de Génie Civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne, 1993.

[30] Hecht F. & Saltel E., *EMC² Un Logiciel d'édition de maillages et de contour bidimensionnels*, Rapport technique N118, INRIA, Avril 1990.

[31] Heniche M., *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis des écoulements à surface libre.*, thèse de doctorat Dév. Modèles Numériques en Mécanique. Université de Technologie de Compiègne, France, 1995.

[32] Heniche M., Secretan Y., Boudeau P. & M. Leclerc, *A two-dimensional finite element drying-wetting shallow water model for rivers and estuaries*, advances in water resources (23),359-372, 2000.

[33] Hervouet J.M. & Pechon P., *Modélisation numérique des écoulements à surface libre. L'état de l'art au laboratoire national d'hydraulique (LNH).*, La Houille blanche, n° 2, 93-106, 1991.

[34] Holtz K.P. & Nitshe G., *Tidal wave for estuaries with intertidal flats*, Adv. Water Resources, Vol. 5, 1982.

[35] Hubert G., *Modélisation d'écoulements de fluides incompressibles par la méthode des éléments finis.*, thèses de doctorat, Div Modèles Numériques en mécaniques, Université de Compiègne , France, 1984.

[36] INRIA-Simulog, *Bibliothèque MODULaires d'E.F.*, INRIA, 1977.

[37] Jaouhari O., *Système intégré WADI lançant et gérant des tâches à travers le Web dans le domaine de l'ingénierie de l'eau*, PFE-INRIA/ENSIAS, 2002.

[38] Joly P. & Vidrascu M., *Quelques méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires - Exemples d'utilisation dans la bibliothèque MODULEF*, Inria - Rocquencourt, Novembre 1994.

[39] King I.P. & Norton W.R., *Recent application of RMA'S finite element models for two dimensional hydrodynamics and water quality.*, Prod. Of the 2nd int. Comf. On finite element in water resources , Pentch Press, 1978.

[40] Lascaux P. & Theodor R. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, vol. 1, Masson , 1986.

[41] Leclerc M., *Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre par éléments finis : application aux lacs.*, thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, France, 1985.

[42] Leclerc M., Bellamare J.F., Dumas G. & Dhatt G., *A finite element model of estuarian and river flows with moving boundaries*, Adv. Water Resources, Vol. 13, No. 4, 1990

[43] Leender J.J. & Liu S.K., *A three dimensional model for estuaries and coastal seas. Volume 1, Principles of computation.*, Santa Monica California, U.S.A , R-1417-OWRR, 1973.

[44] Maday Y., *Méthodes d'approximation variationnelle pour les équations aux dérivées partielles (EDP)*, cours de DEA, partie II, Paris IV, 2000.

[45] Monro & Donald M., *FORTRAN 77*, Edition Arnold, 1982.

[46] Ouellet Y., *Hydrodynamique des estuaires*, cours GCI-60334, Université ULAVAL, Janvier 1990.

[47] Pironneau O., *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Edition Masson, Juin 1988.

[48] Rappaz J. & Picasso M., *Introduction à l'analyse numérique*, Presses Polytechniques et Universités Romandes, 1998.

[49] Ryhming I., *Dynamique des fluides*, Edition Presses Polytechniques Romandes, 1985

[50] Saltel E. & al., *Visualisateur général 2D/3D dans un environnement E.F.*, INRIA.

[51] Schiestel R., *Modélisation et simulation des écoulements turbulents*, Edition Hermes, 1993.

[52] Sinniger R.O. & Hager W.H., *Constructions hydrauliques - Ecoulements station-*

*naires*, Traité de Génie Civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne, 1989

[53] Souissi N., *Mise ne place d'un système intégré lançant et gérant des tâches à travers le Web*, PFE-INRIA/EMI, 2001.

[54] Soulaimani A., Quellet Y. & G. Dhatt, *Contribution à la résolution numérique des problèmes hydrodynamiques à surface libre.*, rapsort GCS-87-02, Dépt. Génie Civil, Université Laval, Québec (Canada), Août 1987.

[55] Suzanne C., *Introduction à l'étude de la turbulence*, ENSEEIHT-INP Toulouse, 1996

[56] Talamali S., *Conception et mise en place du site Web du projet ESIMEAU* , PFE-INRIA/ENP, 1999.

[57] Théodor R., *Initiation à l'analyse numérique* - Cnam cours A - Deuxième édition - Masson, 1985.

[58] Tinsley O.J. & Junuthula Narasimha R., *An introduction to the mathematical theory of finite elements*, Wiley J. and sons, 1976.

[59] U.S Departement of transportation, *FESWMS-2DH: Finite Element Surface Water Modelling System - Two Dimensional Flow in Horizontal Plane*, Users Manuel-vesion 1, Virginia, 1989 .

[60] U.S Departement of transportation, *FESWMS-2DH: Finite Element Surface Water Modelling System - Two Dimensional Flow in Horizontal Plane*, Users Manuel-vesion 2, Virginia, 1991.

[61] Valin J.M., *Méthodes numériques de résolution des équations d'écoulements en eau peu profondes*, CERCA, Université de Montréal, 1998 (www.cerca.umontreal.ca/science/St-Venant/St-Venant.htm) .

[62] Wang H.P., *Multilevel finit hydrodynamic model of block Island sound*, Finite Element in water resources, P. 469-493, 1975.

[63] Wood W.L., *Introduction to numerical methods for water resources*, Oxford Science Publications, 1993.

[64] Yost S.A. & Rao P., *A moving bonudary approch for one-dimensionnal free surface flow*, Adv. Water Resources, Vol. 23, 2000.

[65] Zhang B., *Modélisation d'écoulements à frontières libres avec front mobiles par éléments finis.* thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, France, 1992.

[66] Zienkiewicz, Olgierd C. & al., *Méthode des éléments finis*, McGraw-Hill, 1979.

[67] *Cours fondamentals de la mécanique des fluides*, INP Toulouse, 1981

[68] *Cours d'hydrologie -EPFL- http://dgrwww.epfl.ch/HYDRAM/e-drologie/chapitres.*

[69] web : http://albinoni.imft.fr/HYDRE/fiches/cosv/SV1DF.htm

[70] Web : http:// www.inrs-eau.uquebec.ca/cequeau/information.htm

[71] Web : www.inrs-eau.uquebec.ca/saguenay/method/frmeth10.html

# Annexe A

# Description sommaire de quelques modèles numériques de simulation des crues

## A.1 Phoenics

PHOENICS est un modèle de calcul des écoulements de fluides (liquides, gaz) par la résolution des équations de Navier-Stokes. Pour la conception du modèle, la méthode des volumes finis a été utilisée pour la discrétisation des équations différentielles. La résolution du système discrétisé est assurée par la méthode de stone prévue pour la résolution des grands tableau. Parmi les théories, principes ou éventuellement les lois générales auxquelles il se réfère sont :

- Modélisation de la turbulence : modèle à viscosité turbulente (k-eps) et modèles à équations d'advection diffusion de flux turbulents.
- Polluants passifs (pas de transformation chimique).
- Transfert de chaleur : convection, radiation, conduction / transfert de chaleur sans solides.
- Fluides non newtoniens : exp : fluides de Bingham.

Les fonctions principales de PHOENICS sont :

- La modélisation des écoulements stationnaires et transitoires des fluides compressibles et incompressible.
- La modélisation des écoulements à frontière libre, des écoulements en charge et des écoulements diphasiques.

## A.2 FLUENT

FLUENT est un logiciel convivial et très généraliste. Il permet à la fois de modéliser des mouvements de fluides, des transferts de chaleur, de masse et des réactions chimiques.

Il résout les équations les équations de Navier-Stokes par la techniques des volumes finis précise au second ordre dans un repère fixe ou mobile. Il permet la modélisation de différents types d'écoulements stationnaires ou transitoires (2D ou 3D), laminaires ou turbulents, incompressibles, compressibles(subsonique, transsonique et supersonique)et les écoulements à surfaces libres et changement de phase.

## A.3 HYDROSIM

HYDROSIM est un logiciel appliqué à l'étude de l'hydraulique fluviale pour des fin de génie civil, de navigation ...etc. il s'appuie sur une formulation conservative des équations bidimensionnelles de Saint-Venant et en régime permanent ou transitoire, résolues avec l'approche des éléments finis et la méthode de résolution GMRES. Il permet la représentation du mouvement des frontières libres dû à la marée et à l'hydraulicité variable (mouvement couvrant-découvrant). Il a la particularité de prise en compte du frottement des plantes aquatiques et de la glace.

## A.4 TELEMAC

TELEMAC est un système constitué d'une chaîne de traitement entière pour le calcul des entités liées à l'eau dans les domaines fluviaux, côtiers, d'estuaires et d'eaux souterraines. Il comporte un pré-processeur pour numériser les données et décrire le problème, le programme de simulation et d'un post-processeur pour afficher et analyser les résultats. Pour la simulation, TELEMAC offre des simulateurs : TELEMAC-2D : il résout les équations de Saint-Venant en formulation (U,V,H), vitesses et profondeur d'eau. Il est appliqué pour prévoir contre les risques d'inondations, des ruptures de barrages et des marrées. Beaucoup de phénomènes physiques sont pris en compte , comme le frottement, la turbulence, la vitesse du vent, les digues submergées ...etc TELEMAC-3D : il résout les trois équations de Navier-Stokes avec une surface libre et une répartition hydrostatique de la pression. TELEMAC-3D peut traiter les effets d'une densité verticale résultant des fluctuations de la température et/ou de salinité. Des problèmes difficiles tels que la simulation d'une cale de sel, ou le maximum de turbidité dans un estuaire peuvent également être abordés.

## A.5 HEC-2

Hydrological Engineering Center (HEC-2, Water surface Profiles) est un code de calcul développé par le département de la Défense Américaine. Il est du domaine public et est disponible sur Internet à l'adresse : http://www.gky.com/-downloads/hec2.htm .

Il a été conçu pour l'étude des crues afin de permettre par exemple, l'aménagement des plaines submergées par les crues ou la détermination des zones touchées par les crues. Il permet de calculer des lignes d'eau des écoulements unidimensionnels, stationnaires,

lentement variables, dans des rivières de section courante quelconque. Tous les types de régime (subcritique ou supercritique) peuvent co-exister. Le modèle est basé sur la résolution de l'équation unidimensionnelle de l'énergie par la méthode pas à pas.

HEC-2 permet de :

- modifier les données introduites pour la section courante et tenir compte par exemple des débordements dans certaines parties de la rivière,
- tenir compte de la présence d'ouvrages sur la rivière, comme les ponts, les cassis ou les barrages ,
- introduire des rugosités variables.

La limitation fondamentale réside dans le fait que c'est un modèle quasi- bidimensionnel (1.5D) et ne traite que le régime permanent ; la crue est étudiée par l'étude de cas les plus défavorables par le passage de débits maximums probables.

# Annexe B

# Aperçu sur les logiciels utilisés

Dans ce qui suit, on présente un bref aperçu sur les logiciels utilisés pendant l'élaboration de ce travail.

## B.1 Logiciel de maillage EMC2

EMC2 est un logiciel d'édition de maillage et de contour en 2 dimensions. Il permet de générer interactivement des maillages bidimensionnels pour la méthode des éléments finis en définissant la géométrie (D.A.O), la discrétisation des contours, les sous-domaines et les numéros de référence (afin d'introduire un lien avec la physique: conditions aux limites, propriétés des matériaux). Il est possible d'éditer un maillage en ajoutant, supprimant, déplaçant des sommets, etc. et en lui appliquant des transformations affines: symétrie, rotation, etc.). Le logiciel est divisé en trois applications principales (exclusives):

1. l'application **CONSTRUCTION:**
   Cette application permet d'éditer et de créer la géométrie du domaine à l'aide de points, de segments, d'arcs de cercle, de splines, de droites et de cercles. Dans notre cas, la géométrie est définie par le nuage de points.
2. l'application **PREP_MESH:**
   Cette application permet de définir la discrétisation sur les entités définissant le bord du domaine et des sous domaines ainsi que les numéros de référence, sur les sous domaines, sur les lignes et sur les points en vue d'entrer des données physiques différentes (conditions initiales, conditions aux limites, etc...). A cette étape, on appliquera essentiellement une référence appropriée à notre domaine d'étude (référence qui reflétera la nature du terrain) et optionnellemnt une référence aux noeuds.
3. l'application **EDIT_MESH:**
   Cette application permet de générer le maillage. En effet, au moment de la commutation on peut modifier la valeur par défaut de certains paramètres du mailleur. Le programme construit un maillage triangulaire des sous domaines définis à l'étape précédente, ou bien de tous les sous domaines si aucun n'a été défini.

## B.2 Logiciel de maillage YAMS

YAMS est un logiciel destiné principalement à la *simplification contrôlée* des triangulations de surfaces en 3D. A partir d'un maillage initiale de surface (composé de triangles et/ou de quadrangles) fourni par l'utilisateur. Le logiciel propose plusieurs options de simplification et/ou d'enrichissement. Il permet l'extraction, à partir d'une triangulation ou d'un maillage hybride (*i.e., composé de triangles et/ou quadrangles*), un maillage qui est une approximation géométrique (linéaire par morceaux) de la surface et qui comporte éventuellement plus d'éléments (si possible) que la donnée initiale. Comme les contraintes en termes de qualité (aspect ratio) des éléments et de taille (nombre d'éléments) du maillage résultant dépendent généralement de l'application envisagée, on peut générer aussi un maillage simplifié (*comportant éventuellement moins d'éléments que la donnée initiale*), qui représente une approximation linéaire par morceaux de la surface conforme à une tolérance géométrique donnée. La génération du maillage est gouverné par des requis de tailles et de qualité des triangles.
Parmi les domaines d'application concernés, citons la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis, la transmission de données discrètes, etc.. Les contraintes de qualité (aspect de forme) des éléments étant liées à l'application envisagée, le logiciel offre plusieurs options de remaillage.

Quelle que soit l'application visée, un contrôle rigoureux de l'écart entre le maillage et la surface sous-jacente est une clé de la modélisation géométrique. Cet écart correspond localement (pour un triangle) à la distance maximale de cet élément par rapport à la surface. Un maillage *géométrique* est donc un maillage satisfaisant cette contrainte. Les différentes options de YAMS se résume à:

1. **Simplification:**
   En principe, la simplification d'un maillage est gouvernée par les propriétés intrinsèques de la surface sous-jacente et éventuellement par une métrique (isotrope). Celle-ci correspond à un champ de tailles scalaire associé aux sommets de la triangulation initiale. L'appauvrissement de la triangulation est une opération itérative qui consiste essentiellement à supprimer les arêtes jugées trop petites (au regard de la carte de tailles), couplée avec une procédure de bascule d'arête et de bougé de points. Dans cette approche, l'opération de réduction d'une arête n'est effectuée que si la qualité et la régularité du maillage courant est préservée (ou pas trop altérée).
2. **Enrichissement:**
   Dans certains cas, la carte de tailles ou la métrique associée à chaque point (spécifiée ou intrinsèque) indique que la densité des éléments est localement insuffisante. Il s'avère donc nécessaire d'*enrichir* le maillage en ajoutant des sommets (*i.e.,* en subdivisant les arêtes jugées trop grandes). YAMS permet de réaliser ce traitement. Pour cela, un support géométrique est construit de manière interne de manière à définir une surface $\Sigma$ globalement de continuité $G^1$. Ce support va servir à émuler le rôle d'un modeleur géométrique, et en particulier va servir à répondre aux requêtes suivantes :
   - étant donné un point et une direction, trouver le point de $\Sigma$ le plus proche,

- trouver la normale en un point de $\Sigma$.

Dans l'approche retenue, on définit un réseau de courbes frontières aux triangles ainsi que les plans tangents transversaux à celles-ci, indépendamment les uns des autres, par interpolation des normales à la surface aux points.

3. **Optimisation:**
Enfin, `YAMS` peut être utilisé pour *optimiser* un maillage donné. Pour cela, il suffit de fournir en entrée un maillage de surface (par exemple généré par `YAMS`), l'algorithme cherchant alors à optimiser les qualités en forme et en taille de celui-ci. Le traitement consiste dans ce cas à appliquer de manière itérative des bascules d'arêtes, des bougés de points et, marginalement, à supprimer

## B.3 La bibliothèque MODULEF

Les modules bibliothèque Modulef sont destinés à résoudre, par la méthode des éléments finis, différents types de problèmes modélisés à l'aide d'équations aux dérivées partielles. Parmi les domaines abordés, on peut citer :

- la thermique stationnaire ou transitoire, linéaire ou non, bi ou tridimensionnelle ;
- l'élasticité bi ou tridimensionnelle dans l'hypothèse des petites et grandes déformations ;
- les matériaux nouveaux ;
- l'écoulement bidimensionnel de fluides.

Le logiciel est très riche d'un point de vue algorithmique ; il comporte entre autres :

- plusieurs algorithmes de maillage en dimension 2 et 3 ;
- des méthodes d'éléments finis directes ou duales (hybrides, mixtes) ;
- plusieurs techniques de résolution de systèmes linéaires par des méthodes directes ou itératives ;
- des techniques de décomposition de domaines.

La conception de cette bibliothèque de programmes résulte de la combinaison d'une approche abstraite et d'une programmation modulaire. En utilisant une analyse descendante, chaque formulation mathématique est décomposée en une succession d'opérateurs. La plupart de ces opérateurs existent déjà dans le code MODULEF et seuls les nouveaux opérateurs sont à incorporer dans le code sous la forme de modules. Cette approche entraîne un gain de temps important pour l'utilisateur qui peut se limiter uniquement à la conception des opérateurs associés à la partie novatrice de son étude.

Grâce à la nature modulaire choisie pour l'organisation de la bibliothèque, les subroutines existantes peuvent être modifiées et il est possible d'ajouter facilement de nouvelles subroutines. De plus, il est facile de calculer la solution d'un problème donné par plusieurs méthodes, et ainsi de comparer différentes approches. Un système interactif de création des données facilite la génération des maillages, la définition des conditions aux limites,

le calcul des matrices, etc., et permet en particulier, l'utilisation de la bibliothèque dans le cadre de l'enseignement.

La bibliothèque MODULEF comprend quelques 3000 procédures écrites en Fortran 77 et conçues de façon à être portables. Pour un utilisateur qui désire appeler des modules, Modulef ressemble à une bibliothèque de sous-programmes Fortran classiques. Un module est un ensemble de subroutines traduisant le calcul correspondant à un processus logique ou à une étape d'un enchainement. Les modules communiquent entre-eux via des structures de données (S.D.), ensemble de tableaux contenant les résultats de l'étape de calcul considérée. La bibliothèque MODULEF est un outil fiable, relativement facile à utiliser et permet de résoudre numériquement des problèmes assez divers.

## B.4 Logiciel de visualisation MEDIT

`Medit` permet de représenter tout maillage (2D et 3D ) conforme (au sens des éléments finis) ou non, dans une fenêtre graphique qui lui est propre. L'utilisateur a le loisir d'agir sur cet "objet" graphique soit en modifiant son "apparence" (filaire, faces cachées, plan de coupe, ...), soit en lui appliquant des transformations (rotation, translation, zoom, ...) à l'aide de la souris. La visualisation simultanée de plusieurs maillages dans des fenêtres graphiques indépendantes est également possible. Par ailleurs, ce logiciel autorise la création d'animations simplifées (par exemple basées sur l'évolution d'un champ de solutions ou l'adaptation de maillage).

## B.5 Logiciel de visualisation VISU

`VISU` est un logiciel de visualisation des maillages éléments finis (2D et 3D ), ainsi que résultats numériques supperposées sur le maillage de calcul. Il présente différents menus interactifs qui permettent:

- de définir les paramétres de la visualisation 2D et 3D;
- de lire différents types de base de données topologiques et de solutions et de les associer dans des fenêtres pour la visualisation:
  1. de créer des solutions associées:
     - carte des h locaux,
     - carte des qualités des éléments,
     - carte des références aux sommets ou aux éléments
  2. de définir des "fonctions" courbes ou surfaces en 2D ou 3D avec différents types de paramétrisation.

## B.6 Présentation du logiciel SMS

C'est un pré- et post-processeur pour la conception, l'analyse et la modélisation des écoulements d'eau de surfaces. Il inclut un environnement de maillage de surfaces et de

courbes en 1, 2 et 3 dimensions. Il inclut aussi des modules de modélisation en différence finies, éléments finis 2D, et en éléments finis 2.5D.
SMS intégre plusieurs codes de calcul, citons à titre d'exemple: FESWMS, STWAVE, ADCIRC,RMA, etc. dont quelques uns sont commentés dans l'Annexe A. SMS présente les champs des solutions scalaires pour les grandeurs modélisées, ainsi que les champs des solutions vectorielles.