

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE-CIVIL

Année Universitaire 2026-2027

**Calcul des Structures par
la Méthode d'Analyse Intervalle et la Méthode
des Éléments Finis Stochastiques**

Cours et exercices corrigés

**M. DEMIDEM
M.Sc. Chargé de cours**

mustapha.demidem@g.enp.edu.dz

Table des matières

Partie I : Notions de Statistiques

- 1 - Introduction générale
- 2 - Généralités sur les statistiques
 - 2.1 - Définition d'une population en statistiques
 - 2.2 - Définition d'un échantillon en statistiques
 - 2.3 - Objectif des statistiques
 - 2.4 - Types de statistiques
 - 2.5 - Domaine d'utilisation des statistiques
 - 2.6 - Définition d'une variable aléatoire
 - 2.7 - Définition d'un champ aléatoire
 - 2.8 - Définition des quantiles en statistiques
 - 2.9 - Propriétés fondamentales en statistiques
- 3 - Théorie des probabilités
 - 3.1 - Propriétés des probabilités
 - 3.2 - Probabilités conditionnelles, utilisation de la formule de **Bayes**
 - 3.3 - Généralisation de la formule de **Bayes**
 - 3.4 - Définition d'une fonction de densité de probabilité (FDP)
 - 3.4.1 - Lois de probabilités
 - 3.5 - Définition d'une fonction de densité de probabilité conjointe (FDPC)

Partie II : Notions d'Analyse Intervalle

- 4 - Généralités sur l'analyse intervalle
- 5 - Notions concises sur l'analyse Intervalle
 - 5.1 - Opérations sur les intervalles
 - 5.2 - Théorème d'extension
- 6 - Méthode intervalle appliquée en MEF
 - 6.1 - Application
 - 6.2 - Conclusion
- 7 - Méthode intervalle appliquée aux problèmes de valeurs propres
 - 7.1 - Application
 - 7.2 - Modélisation et équations d'équilibre dynamiques
 - 7.3 - Calcul de la réponse dans la base physique
 - 7.4 - Conclusion

Partie III : Notions d'Eléments Finis Stochastiques

- 8 - Généralités sur les éléments finis déterministes et stochastiques
- 9 - Représentation d'un champ stochastique
- 10 - Discrétisation d'un champ stochastique
- 11 - Formulation de la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS)
- 12 - Méthode d'expansion en séries de **Taylor** pour la (MEFS)
- 13 - Méthode de discrétisation du point central
 - 13.1 - Avantages de la méthode du point central
 - 13.2 - Inconvénients de la méthode du point central
- 14 - Approche performante de la méthode des éléments finis stochastiques

Avant-propos

Le calcul moderne des structures est essentiellement basé sur l'approche cinématique de la méthode des éléments finis (MEF), dont l'utilisation trône en seigneur dans le domaine de la mécanique appliquée en comparaison avec d'autres méthodes de calcul. En effet, la simplicité de la modélisation par la (MEF), la précision des résultats et le coût raisonnable de l'analyse, ont fait que son champ d'application s'est étendu à un vaste domaine en ingénierie : (les solides, les fluides, la statique, la dynamique, le linéaire, le non linéaire, le stationnaire et le transitoire). Cependant, la conception de certaines structures de plus en plus avant-gardistes, a manifestement induit de nouveaux défis relatifs aux performances propres de ces structures. L'origine de ces défis réside (entre autres) en l'absence d'une prise en charge adéquate relative aux incertitudes de certains paramètres utilisés dans l'analyse de ces ouvrages. Le design final peut être sérieusement affecté le cas échéant.

Par ailleurs, toute structure est susceptible de présenter une certaine forme de stochasticité causée par le caractère aléatoire de son chargement, et les différentes fluctuations de ses propriétés mécaniques et/ou géométriques. Une analyse déterministe qui néglige la nature réelle de ces paramètres, ne peut en aucune manière répondre aux exigences des codes de construction en vigueur, qui stipulent que ces paramètres doivent être impérativement décrits par un processus stochastique, ou une approche équivalente, dont les propriétés statistiques sont estimées par des campagnes de mesures.

En fait, l'analyse des structures à paramètres incertains peut être faite, soit en utilisant la méthode de l'analyse intervalle qui produit une enveloppe de solutions comprises entre une bande supérieure et une bande inférieure, soit en utilisant une méthode qui cumule à la fois la puissance et l'élégance de la (MEF) d'une part, le prestige et l'efficacité d'un champ ou processus aléatoire d'autre part : j'ai cité la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS), dont la représentation du champ aléatoire et sa discrétisation constituent des points clés de cette méthode.

Le présent travail est organisé comme suit :

La partie I est dédiée à des notions de statiques et leurs objectifs, aux différentes propriétés fondamentales en statistiques, aux variables et champs aléatoires, et aux lois de probabilité les plus couramment utilisées.

La partie II est réservée à l'analyse intervalle et son application à un ouvrage souterrain (tunnel de Toulon), et à une deuxième application concernant un problème dynamique. Cette approche (analyse intervalle) est très pratique dans le domaine de l'ingénierie.

La partie III a trait au concept de la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS), à la représentation d'un champ aléatoire et sa discrétisation, à la formulation de la (MEFS), et à des exercices corrigés.

Il est à noter que cet ouvrage n'est qu'une modeste contribution, qui concerne principalement le domaine de la mécanique stochastique, considérée comme une discipline à la fois vaste, complexe et captivante. De ce fait, l'ouvrage se veut un document didactique qui vise à rendre accessible autant que possible, l'aspect pratique et méthodologique du calcul stochastique. Présentement, ce dernier fait l'objet d'un développement très intense dans le domaine de la recherche appliquée, et exhibe un intérêt de plus en plus grandissant par rapport à des systèmes structuraux, dont certains de leurs paramètres sont susceptibles de présenter des imperfections mécaniques et/ou géométriques. L'incidence de ces imperfections doit être absolument intégrée dans les calculs, au risque de compromettre la sécurité et la serviabilité de ces structures. A ce titre, la méthode des éléments finis stochastiques est tout indiquée à l'effet de tacler efficacement cette problématique.

Enfin, j'espère que ce travail ouvre la voie à de réelles perspectives aux lecteurs qui désirent investir ce domaine, afin de réaliser des travaux de recherche de qualité dans le domaine de Génie Civil incha'Allah. A d'autres contributions au service des étudiants incha'Allah.

Partie I

Notions de Statistiques

1 - Introduction générale :

En mécanique appliquée (mécanique des solides et des fluides), l'application des principes théoriques de la physique a pour objectif principal la conception, l'analyse et le dimensionnement des différents types de systèmes (en statique et en dynamique) avec un niveau de sécurité requis, conformément aux codes de constructions en vigueur, qui stipulent la nécessité de prendre en ligne de compte tous types d'aléas ou d'imperfections relatives aux mesures de certains paramètres utilisés dans les calculs, au risque de compromettre l'intégrité structurelle des différents projets à réaliser ou d'affecter leurs performances.

A ce titre, il importe de noter que les incertitudes relatives aux systèmes à paramètres, sont généralement analysées à travers l'identification des paramètres incertains d'une part, et l'utilisation de l'une des approches suivantes d'autre part :

- Inférence statistique
- Description aléatoire
- Concept des probabilités conditionnelles
- Méthode de l'analyse intervalle
- Méthode des éléments finis stochastiques

2 - Généralités sur les statistiques :

Les statistiques sont une branche des mathématiques qui sert à collecter, analyser et interpréter des données afin de comprendre des phénomènes complexes allant de simple description (moyenne, médiane ...etc...), à l'inférence sur des populations entières à partir d'échantillons, et ce en utilisant des méthodes appropriées telles que les méthodes graphiques qui permettent de faire un examen rapide sur l'ensemble des données, et les méthodes numériques qui permettent de calculer, d'une manière plus approfondie, les différentes tendances centrales et de dispersion d'une série quelconque de données.

2.1 - Définition d'une population en statistiques :

Une population en statistiques est un ensemble de valeurs d'une caractéristique mesurable quelconque telle que : le poids, la taille, le QI ...etc...

2.2 - Définition d'un échantillon en statistiques :

Un échantillon en statistiques est un sous-ensemble d'une population dont la mesure d'une caractéristique donnée est basée sur des observations concrètes. L'intérêt des calculs statistiques à partir d'un échantillon est la prédiction de cette caractéristique par rapport à l'ensemble de la population (c'est des statistiques dites inférentielles).

Il est à noter que **Bessel** préconise l'utilisation de (N-1) observations au lieu de (N) dans le calcul de la variance et de l'écart type d'un échantillon.

Exp1 : Vérification de la résistance en traction de 20 boulons choisis d'une manière aléatoire sur une population de 2000 boulons (soit un échantillon de 1%).

Exp2 : Dépouillement de 100 bulletins de vote, choisis d'une manière aléatoire dans un bureau de vote afin de prédire l'issue de l'élection à l'échelle de la circonscription.

2.3 - Objectif des statistiques :

L'objectif des statistiques consiste à réduire la difficulté à comprendre des phénomènes complexes d'une part, et à estimer les indicateurs des différentes propriétés statistiques d'une série de données d'autre part.

2.4 - Types de statistiques :

On distingue deux types de statistiques :

- 1- **Statistiques descriptives** : elles permettent de décrire certaines propriétés telles que (la médiane, les quartiles, les déciles ...etc...). Si la caractéristique étudiée est mesurable on parle de statistiques descriptives quantitatives, et si la caractéristique étudiée est non mesurable on parle alors de statistiques descriptives qualitatives (les couleurs des yeux, niveau des études ...etc...).
- 2- **Statistiques inférentielles** : elles consistent à tirer des conclusions sur une population à partir de l'étude d'un échantillon, et ce en utilisant certaines propriétés statistiques telles que la moyenne $E(X)$, la variance $Var(X)$... etc...

2.5 - Domaine d'utilisation des statistiques :

- 1- Etude des phénomènes sociaux
- 2- Aide à la décision aux entreprises économiques
- 3- Analyse d'échantillons dans les laboratoires et les usines de production
- 4- Etudes prospectives (démographie, projets d'infrastructures, emplois ...etc...)
- 5- Sondages

2.6 - Définition d'une variable aléatoire :

Une variable aléatoire (X) est un concept théorique issu de la théorie des probabilités, et qui concerne une caractéristique mesurable dont les valeurs sont sujettes à un processus aléatoire.

(X) : représente l'ensemble des valeurs possibles d'une expérience aléatoire.

x : représente une des valeurs que la variable aléatoire (X) peut prendre.

Il est à noter qu'on doit distinguer trois types de variables aléatoires :

- 1- Une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs entières concrètes de type : le résultat de 10 lancers d'un dé : [1, 6, 2, 4, 6, 6, 3, 4, 6, 1].
Ce résultat peut être classé par modalités : [1(2), 2(1), 3(1), 4(2), 6(4)].
- 2- Une variable aléatoire continue qui prend des valeurs dans un intervalle.
Si l'on considère la taille d'un homme comme une variable aléatoire (X) sur un intervalle [0.5m , 2.5m], alors $x=1.75m$ est une des valeurs de (X) .
- 3- Soit (X) une variable aléatoire quelconque. Si l'on construit une nouvelle variable aléatoire (Z) telle que $Z = X - E(X)$, alors (Z) est dite variable aléatoire centrée. Si l'on divise (Z) par l'écart type $\sigma(X)$, alors (Z) est dite variable aléatoire centrée et réduite ayant une moyenne $E(Z) = 0$, et une variance $Var(Z) = 1$.

2.7 - Définition d'un champ aléatoire :

Un champ aléatoire est un concept théorique issu de la théorie des probabilités, et qui concerne une grandeur qui varie de façon aléatoire dans un espace à plusieurs dimensions spatiales (x, y, z) ou spatio-temporelles. Autrement dit, c'est la généralisation d'une variable aléatoire ordinaire à un ensemble de données spatialement corrélées. La température $T(x,y)$ dans une ville peut être considérée comme un champ aléatoire en deux dimensions.

2.8 - Définition des quantiles en statistiques :

Les quantiles sont des valeurs qui divisent une série de données en sous-groupes de tailles égales. On distingue les quartiles, les déciles et les percentiles.

Les quartiles :

Les quartiles (Q_1, Q_2, Q_3) sont des valeurs qui divisent une série de données en quatre parties d'effectifs égaux (25% pour chaque partie).

Remarque importante :

les (N) valeurs de la série sont classées par ordre croissant.

Q1 : valeur en dessous de laquelle se trouvent 25% des données.

Q2 : valeur en dessous de laquelle se trouvent 50% des données.

Q3 : valeur en dessous de laquelle se trouvent 75% des données.

P(Q1) : position du premier quartile qui se situe à (N/4).

P(Q2) : position du deuxième quartile qui se situe à (2N/4).

P(Q3) : position du troisième quartile qui se situe à (3N/4).

(Q1 - Q3) : représente l'écart interquartile qui permet de mesurer la dispersion de 50 % des valeurs centrales de la série.

Les déciles :

Les déciles (D1, D2, ...etc... D10) sont des valeurs qui divisent une série de données en dix parties d'effectifs égaux (10% pour chaque partie).

Les percentiles :

Les percentiles (P1, P2, ...etc... P100) sont des valeurs qui divisent une série de données en cent parties d'effectifs égaux (1% pour chaque partie).

Exp1 : Soit la série statistique ordonnée (*ord*) suivante (voir tableau ci-dessous). On demande de calculer les quartiles.

$X_i(ord)$	7	8	8	9	10	10	11
		Q1		Q2		Q3	

$P(Q1)=(N/4)=(7/4)=1.75 \Rightarrow Q1=8$ (on arrondi 1.75 à la 2eme valeur)

$P(Q2)=(2N/4)=(14/4)=3.5 \Rightarrow Q2=9$ (on arrondi 3.5 à la 4eme valeur)

$P(Q3)=(3N/4)=(21/4)=5.25 \Rightarrow Q3=10$ (on arrondi 5.25 à la 6eme valeur)

$(Q3-Q1)=(10-8)=2$, une dispersion faible des valeurs entre Q3 et Q1

Exp2 : Soit la série statistique suivante (voir tableau). Calculez les quartiles.

X_i	10	1	8	3	16	14	12	15	6
$X_i(ord)$	1	3	6	8	10	12	14	15	16
			Q1		Q2		Q3		

$P(Q1)=(N/4)=(9/4)=2.25 \Rightarrow Q1=6$ (on arrondi 2.25 à la 3eme valeur)
 $P(Q2)=(2N/4)=(18/4)=4.5 \Rightarrow Q2=10$ (on arrondi 4.5 à la 5eme valeur)
 $P(Q3)=(3N/4)=(27/4)=6.75 \Rightarrow Q3=14$ (on arrondi 6.75 à la 7eme valeur)
 $(Q3-Q1)=(14-6)=8$, une dispersion assez sensible des valeurs.

Exp3 : Soit la série statistique suivante (voir tableau). La variable (X) représente l'ancienneté des fonctionnaires d'une entreprise donnée. On demande de calculer :

La moyenne $\bar{X}$, la classe modale de la série et son mode, l'ancienneté qui correspond à la **valeur médiane** (Q2), les quartiles (Q1 et Q3) et quelques déciles.

$(n_{cc}$: représente l'effectif cumulé croissant)
 $(f_{cc}$: représente la fréquence cumulée croissante)

Classes X_i	Centres c_i	Effectifs n_i	n_{cc}	f_i	$f_i c_i$	f_{cc}
]0 , 8]	4	15	15	18.75%	0.75	18.75%
]8 , 16]	12	24	39	30%	3.6	48.75%
]16 , 24]	20	14	53	17.5%	3.5	66.25%
]24 , 32]	28	18	71	22.5%	6.3	88.75%
]32 , 40]	36	9	80	11.25%	4.05	100%
		N=80			$\sum = 18.2$	

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum n_i c_i = \sum f_i c_i = 18.2 \text{ ans}$$

La classe modale correspond à l'effectif le plus élevé de la série (**24**), d'où la classe modale est]8 , 16], et le mode est égal à $(8+16)/2=12$.

Le calcul de la médiane, les quartiles et les déciles peut se faire dans le domaine des effectifs ou celui des fréquences (Q2 : entre [**39** , **53**] n_{cc} ou [**48.75%** , **66.25%**] f_{cc}).

$$P(Q2) = 0.5N = 40 \text{ ou } 50\%$$

L'interpolation linéaire d'un point quelconque entre (X_2 , X_1) nous donne :

$$\frac{X_2 - X_1}{f_2 - f_1} = \frac{Q2 - X_1}{0.5N - f_1} \Rightarrow \frac{Q2 - 16}{40 - 39} = \frac{24 - 16}{53 - 39} \Rightarrow Q2 = 16.57 \text{ ans}$$

$$\frac{X_2 - X_1}{f_2 - f_1} = \frac{Q2 - X_1}{50\% - f_1} \Rightarrow \frac{Q2 - 16}{50\% - 48.75\%} = \frac{24 - 16}{66.25\% - 48.75\%} \Rightarrow Q2 = 16.57 \text{ ans}$$

Domaine des effectifs pour (Q1 et Q3).

$$\frac{X_2 - X_1}{f_2 - f_1} = \frac{Q1 - X_1}{0.25N - f_1} \Rightarrow \frac{Q1 - 8}{20 - 15} = \frac{16 - 8}{39 - 15} \Rightarrow Q1 = 9.67 \text{ ans}$$

$$\frac{X_2 - X_1}{f_2 - f_1} = \frac{Q3 - X_1}{0.75N - f_1} \Rightarrow \frac{Q3 - 24}{60 - 53} = \frac{32 - 24}{71 - 53} \Rightarrow Q3 = 27.11 \text{ ans}$$

Domaine des fréquences pour D9.

$$\frac{X_2 - X_1}{f_2 - f_1} = \frac{D9 - X_1}{90\% - f_1} \Rightarrow \frac{D9 - 32}{90\% - 88.75\%} = \frac{40 - 32}{100\% - 88.75\%} \Rightarrow D9 = 32.88 \text{ ans}$$

2.9 - Propriétés fondamentales en statistiques :

Afin de modéliser l'incertitude relative aux mesures des différentes caractéristiques que l'on peut considérer dans des calculs pratiques, on fait appel aux quatre propriétés fondamentales suivantes :

- 1- Le premier moment statistique $E(X)$, l'espérance ou la moyenne d'ensemble.
 - 2- Le deuxième moment statistique $Var(X)$ ou la variance.
 - 3- Le troisième moment statistique qui sert à calculer le coefficient SK (Skewness) ou le coefficient d'asymétrie de **Fisher**.
 - 4- Le quatrième moment statistique qui sert à calculer le coefficient K (Kurtosis) ou le coefficient d'aplatissement de **Pearson**.
- L'espérance $E(X)$ ou la moyenne d'ensemble représente le centre de gravité d'une série de données, ou d'une variable aléatoire quelconque. Elle décrit comment les valeurs d'un ensemble sont réparties. En générale, ces valeurs sont présentées soit sous forme de tableaux (effectifs ou fréquences), soit sous forme de graphes (histogrammes ou courbes).

$$E(X) = \bar{X} = \frac{\sum_1^N X_i}{N} \quad , \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$f(x)$: représente la fonction de densité de probabilité (**FDP**)

- La variance $Var(X)$ mesure la dispersion des valeurs d'une série donnée par rapport à la moyenne d'ensemble. On note que $\sigma(X)$ est l'écart type.

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E(X))^2 = E[X^2] - (\bar{X})^2$$

$$Var(X) = \frac{\sum_1^N (X_i - \bar{X})^2}{N}, \quad E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

L'écart type $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ est un indicateur de dispersion de même genre que la moyenne d'ensemble si bien que le coefficient de variation C_v est adimensionnel, $C_v = \sigma(X)/E(X)$.

La formule de **Bienaymé-Tchebychev** ($1 - \frac{1}{k^2}$) stipule que 75% ($k = 2$) des valeurs d'une distribution se situent entre $-2 \sigma(X)$ et $+2 \sigma(X)$ de la moyenne ($\bar{X}$), et 90% pour ($k = 3$) et ce quelque-soit la loi de probabilité sauf pour le cas de la loi normale.

Pour la loi normale, 95% des valeurs se situent entre $-2 \sigma(X)$ et $+2 \sigma(X)$ de la moyenne ($\bar{X}$), et 99% des valeurs se situent entre $-3 \sigma(X)$ et $+3 \sigma(X)$ de ($\bar{X}$).

$$Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$$

$$Var(X + \alpha) = Var(X)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

La covariance $Cov(X, Y)$ mesure la variation conjointe de deux variables aléatoires (X, Y). Autrement dit, c'est l'espérance du produit de leurs écarts par rapport à leurs moyennes respectives. La $Cov(X, Y)$ est > 0 si (X, Y) tendent à augmenter ou diminuer simultanément. La $Cov(X, Y)$ est < 0 si l'une des deux variables aléatoires tend à augmenter et la deuxième tend à diminuer. La $Cov(X, Y) = 0$ s'il n'y a aucune **corrélation linéaire** entre (X) et (Y).

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum_1^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{N}$$

$$Cov(X, X) = Var(X)$$

$$Cov(X, \alpha) = 0$$

Le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

La fonction d'inter-corrélation $R_{XY}(\tau)$, (FIC) mesure la similarité entre deux variables aléatoires (X, Y) au décalage $(\tau = k \cdot \Delta T)$, elle s'écrit comme suit :

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t) \cdot Y(t + \tau)]$$

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

La fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau)$, (FAC) est une mesure de la capacité de prédiction de valeurs futures $X(t + \tau)$ sur la base d'observations passées $X(t)$.

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t) \cdot X(t + \tau)]$$

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$$

$R_{XX}(\tau = 0) = E[X^2(t)]$: c'est la valeur maximale de cette fonction.

La fonction d'autocorrélation $R_{XX}(k)$, au décalage (k) pour des valeurs discrètes s'écrit comme suit :

$$R_{XX}(k) = \frac{1}{(N - k)} \sum_{i=1}^{N-k} (X_i - \bar{X})(X_{i+k} - \bar{X})$$

Variance concernant des valeurs regroupées par modalités :

Si l'on considère n_i le nombre de scores de la valeur X_i , alors on a :

$$Var(X) = \frac{\sum_1^N n_i (X_i)^2}{N} - (\bar{X})^2$$

$$f_i = \frac{n_i}{N} \text{ fréquence des scores : } Var(X) = \sum_1^N f_i (X_i)^2 - (\bar{X})^2$$

$$\sum f_i = 1$$

Exp : Calculez la moyenne, la variance, l'écart type et le coefficient de variation du tableau de fréquences ci-dessous.

X_i	0(2)	1(1)	2(4)	3(2)	4(1)
f_i	0.2	0.1	0.4	0.2	0.1

$$E(X) = \sum f_i X_i = (0.2)(0) + (0.1)(1) + (0.4)(2) + (0.2)(3) + (0.1)(4) = 1.9$$

$$Var(X) = \sum_1^N f_i(X_i)^2 - (\bar{X})^2 = (0.2)(0)^2 + (0.1)(1)^2 + \dots (0.1)(4)^2 - (1.9)^2$$

$$Var(X) = 1.49$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 1.22$$

$$C_v = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = 0.64 < 1 \Rightarrow \text{une faible dispersion.}$$

Variance concernant des valeurs regroupées par classes :

Si l'on considère n_i le nombre d'occurrences des classes où c_i est le centre de ces classes, alors on a :

$$Var(X) = \frac{\sum_1^N n_i (c_i)^2}{N} - (\bar{X})^2$$

$$Var(X) = \sum_1^N f_i(c_i)^2 - (\bar{X})^2, \quad f_i = \frac{n_i}{N}$$

Exp : Calculez la moyenne, la variance, l'écart type et le coefficient de variation du tableau de fréquences ci-dessous.

X_i	$]0, 100]$	$]100, 200]$	$]200, 300]$
f_i	0.3	0.5	0.2

$$E(X) = \sum f_i c_i = (0.3)(50) + (0.5)(150) + (0.2)(250) = 140$$

$$Var(X) = \sum_1^N f_i(c_i)^2 - (\bar{X})^2 = (0.3)(50)^2 + (0.5)(150)^2 + (0.2)(250)^2 - (140)^2$$

$$Var(X) = 4900$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 70$$

$$C_v = \frac{\sigma(X)}{E(X)} = 0.5 < 1 \Rightarrow \text{une faible dispersion.}$$

- Le coefficient d'asymétrie de **Fisher** (skewness) est un indicateur de forme relatif à l'étalement d'une distribution quelconque de valeurs. Ce coefficient est noté SK ou γ_1 .

$$SK = \frac{E[(X - E[X])^3]}{(\sigma(X))^3} \quad , \quad E[X^3] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \cdot f(x) dx$$

$$SK = \left[\frac{\sum_1^N (X_i - \bar{X})^3}{N} \right] / (\sigma(X))^3$$

SK = 0 pour une distribution symétrique (la loi normale)
 SK > 0 pour une distribution plus étalée à droite du pic
 SK < 0 pour une distribution plus étalée à gauche du pic

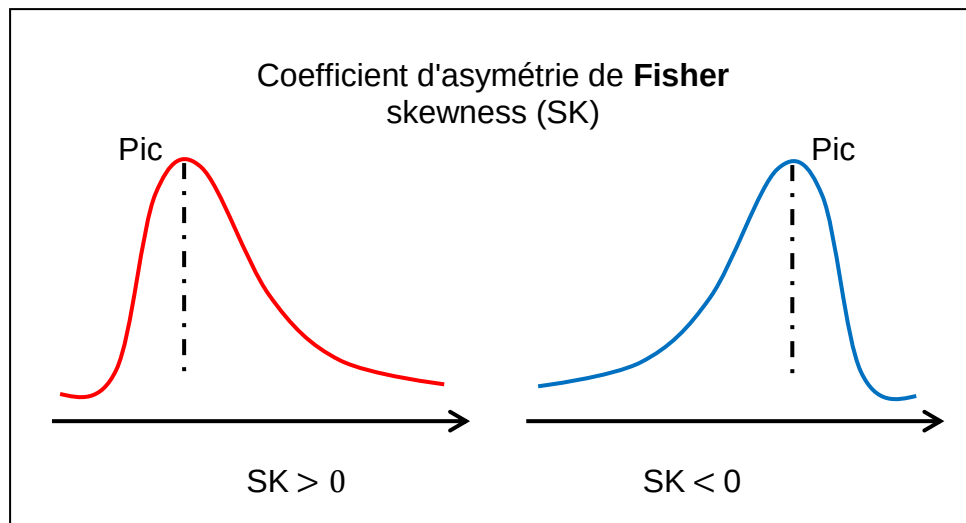


Fig. 2.1 Coefficient d'asymétrie (skewness)

Remarque importante : La loi normale est le repère de comparaison standard en statistiques, son skewness SK=0 et son kurtosis $K = \beta_2 = 3$.

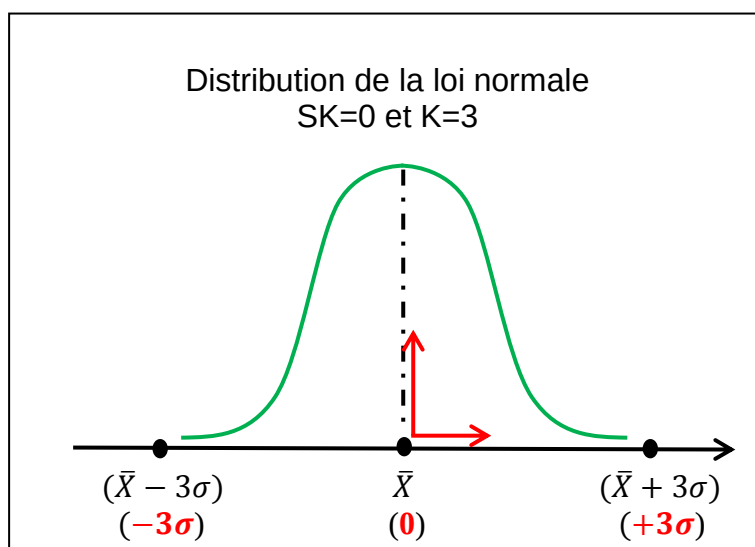


Fig. 2.2 Distribution de la loi normale

- Le coefficient d'aplatissement de **Pearson** (kurtosis) est un indicateur de forme relatif à l'amplitude du pic (grand pic ou un petit pic) d'une distribution quelconque de valeurs. Ce coefficient est noté K ou β_2 .

$$K = \frac{E[(X - E[X])^4]}{(\sigma(X))^4} \quad , \quad E[X^4] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot f(x) dx$$

$$K = \left[\frac{\sum_1^N (X_i - \bar{X})^4}{N} \right] / (\sigma(X))^4$$

$\beta_2 = 3$ pour une distribution normale (mésokurtique)

$\beta_2 > 3$ pour une distribution plus pointue (leptokurtique), plus de valeurs aberrantes

$\beta_2 < 3$ pour une distribution plus plate (platykurtique), moins de valeurs aberrantes

Afin de faciliter l'interprétation d'une distribution quelconque par rapport à la loi normale, un changement de variable est introduit afin de positionner le kurtosis à zéro. Ce dernier est appelé excès de kurtosis : $\gamma_2 = \beta_2 - 3$

$\gamma_2 = 0$ pour une distribution normale (mésokurtique)

$\gamma_2 > 0$ pour une distribution plus pointue (leptokurtique)

$\gamma_2 < 0$ pour une distribution plus plate (platykurtique)

Exp : Montrez que la série suivante présente un skewness ($SK = \gamma_1 > 0$), c'est-à-dire: la série est plus étalée à droite du pic, et ayant un kurtosis ($\gamma_2 < 0$), c'est-à-dire: un pic plus plat par rapport à celui de la loi normale.

X_i	]0 , 100]	]100 , 200]	]200 , 300]
f_i	0.3	0.5	0.2

$$\bar{X} = 140 \quad , \quad Var(X) = 4900 \quad , \quad \sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = 70$$

$$SK = \gamma_1 = \frac{[0.3(50 - 140)^3 + 0.5(150 - 140)^3 + 0.2(250 - 140)^3]}{(\sigma(X))^3 = (70)^3} = 0.13 > 0$$

$$\beta_2 = \frac{[0.3(50 - 140)^4 + 0.5(150 - 140)^4 + 0.2(250 - 140)^4]}{(\sigma(X))^4 = (70)^4} = 2.039$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = -0.96 < 0$$

Remarque : Le calcul du moment statistique brut d'ordre quatre est laborieux.

$$E[X^4] = (\bar{X})^4(\beta_2 C v^4 + 4\gamma_1 C v^3 + 6C v^2 + 1)$$

Pour une (V. A.) qui suit la loi uniforme : $E[(X - E[X])^4] = \beta_2(\bar{X})^4 C v^4 = 1.8(\bar{X})^4 C v^4$

Pour une (V. A.) qui suit la loi normale : $E[(X - E[X])^4] = \beta_2(\bar{X})^4 C v^4 = 3(\bar{X})^4 C v^4$

3 - Théorie des probabilités :

La théorie des probabilités est un outil mathématique qui permet de modéliser le hasard et l'incertitude à l'effet de quantifier le degré de probabilité d'événements lors d'expériences aléatoires avec des valeurs comprises entre $[0, 1]$.

Un événement (ω) est le résultat d'une expérience aléatoire, dépend de ce que l'on cherche à observer et constitue un sous-ensemble de (Ω). (Ω) étant l'espace des événements qui contient l'ensemble des résultats possibles.

Remarque importante :

A chaque élément ω_i de l'espace des événements (Ω) correspond une valeur réelle x_i associée à la variable aléatoire (X) telle que la probabilité $P(X = x_i) = P_i$.

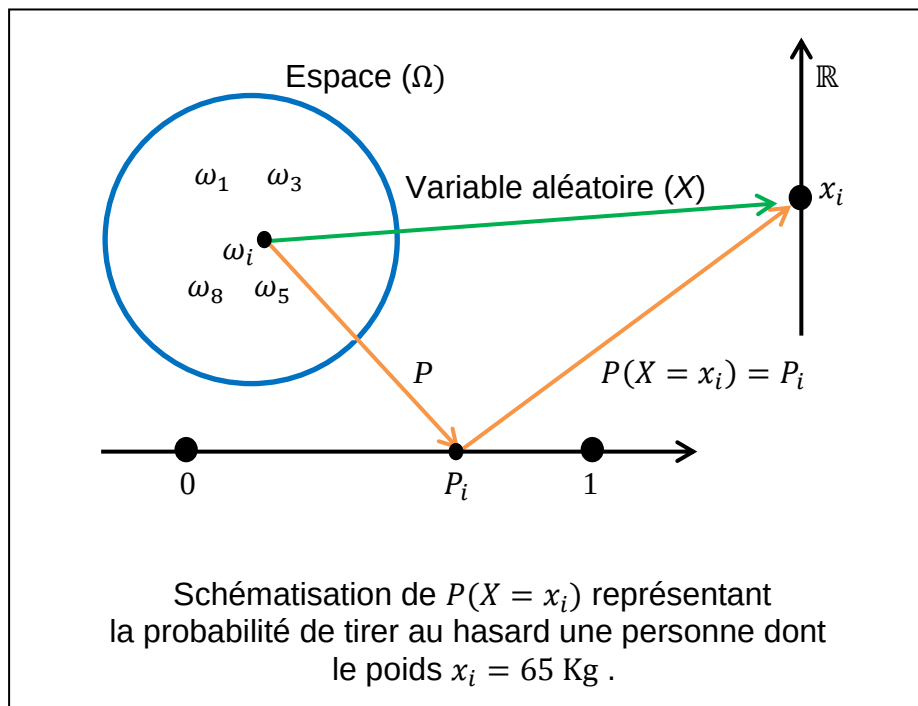


Fig. 3.1 Schématisation de la probabilité $P(X = x_i)$

3.1 - Propriétés des probabilités :

- Si A est un événement aléatoire, alors sa probabilité est $P(A)$
- La probabilité $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ est dite probabilité du contraire
- Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si (Ω) est l'espace des événements, alors $P(\Omega) = \sum_1^n P(\omega_i) = 1$

3.2 - Probabilités conditionnelles, utilisation de la formule de Bayes :

Le fait de savoir qu'un événement s'est produit peut modifier la probabilité à accorder à un autre événement, ceci nous contraint à inverser les probabilités conditionnelles $P(A \setminus B)$ afin de retrouver la cause à partir de l'effet. Autrement dit, il est impératif d'actualiser les probabilités, à la lumière de nouvelles observations, et de procéder à leur inversion $P(B \setminus A)P(A)$ afin de trouver une issue à la problématique posée. L'utilisation de la formule de **Bayes** est tout indiquée pour ce type de problèmes :

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \setminus A)P(A)}{P(B)}$$

A : est un événement de type effet

B : est un événement de type condition ou cause

$P(A)$: probabilité de A , $P(B)$: probabilité de B

$P(A \setminus B)$: probabilité de A sachant que B s'est produit

Exp : Une usine produit 400 boulons dont 1% sont défectueux, une deuxième usine produit 300 boulons dont 2% sont défectueux. Si on tire au hasard un boulon parmi le lot total (400+300=700) et on constate qu'il est défectueux, quelle la probabilité pour que ce boulon provienne de la première usine ?

Solution

A : est un événement (le boulon provient de l'usine No 1)

B : est un événement (le boulon provient de l'usine No 2)

D : est un événement (le boulon est défectueux)

On doit résoudre :

$$P(A \setminus D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \setminus A)P(A)}{P(D)}$$

$$P(A \setminus D) = \frac{(1\%) \frac{(400)}{700}}{(1\%) \frac{(400)}{700} + (2\%) \frac{(300)}{700}} = \left(\frac{4}{10} \right) = 40\%$$

3.3 - Généralisation de la formule de Bayes :

La formule de **Bayes** peut-être généralisée en utilisant la notation indicielle suivante :

$$P(A_i \setminus D) = \frac{P(D \setminus A_i)P(A_i)}{P(D)} = \frac{P(D \setminus A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(D \setminus A_k)P(A_k)}$$

3.4 - Définition d'une fonction de densité de probabilité (FDP) :

Une fonction de densité de probabilité $f(x)$ est une loi de probabilité qui modélise des phénomènes naturels (d'une manière générale) par une courbe. Cette dernière décrit la probabilité qu'une variable aléatoire (X) se trouve dans un certain intervalle. Pour trouver la probabilité (P) qui garantit que la variable aléatoire (X) se trouve dans l'intervalle $[a, b]$, il est nécessaire de calculer l'expression suivante : $\int_a^b f(x)dx$.

3.4.1 - Lois de probabilités :

- 1- La loi uniforme discrète : si on lance une pièce une seule fois, on dira qu'on a une équiprobabilité telle que la probabilité $P(\omega_p) = P(\omega_f) = 0.5$, (c'est l'expérience de **Bernoulli** : c'est-à-dire un essai à deux issues, pile ou face).

$$E[X] = P, \quad Var(X) = P(1 - P)$$

Autre équiprobabilité : un dé lancé une seule fois, donne lieu à six (6) issues.

$P(X=i) = 1/6$, ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$), $n = 6$. Les valeurs de (X) sont des entiers.

$$E[X] = \frac{1}{2}(n + 1), \quad Var(X) = \frac{1}{12}(n^2 - 1)$$

- 2- La loi uniforme continue sur un intervalle $[a, b]$: $f(x) = \frac{1}{(b-a)}$

$$P = \frac{\text{l'intervalle de l'événement}}{\text{l'intervalle } (b - a)}$$

$$E[X] = \frac{1}{2}(b + a) \quad , \quad Var(X) = \frac{1}{12}(b - a)^2$$

Exp1 : Un enseignant arrive toujours en classe entre 8h et 9h, calculez la probabilité pour qu'il arrive entre [8h15 , 8h30].

$$P(X = [8h15 , 8h30]) \quad , \quad P = \frac{(8h30-8h15)=15 \text{ min}}{(9h-8h)=60 \text{ min}} = 25\%$$

Exp2 : Si l'on choisit un nombre (X) au hasard dans l'intervalle [10 , 20], calculez la probabilité $P(X = [14 , 18]) = ?$

$$P(X = [14 , 18]) = \frac{(18 - 14) = 4}{(20 - 10) = 10} = 40\%$$

3- **La loi binomiale discrète** : Elle s'applique lorsque l'on réalise (n) lancers d'une pièce, et on souhaite calculer la probabilité d'avoir (k) fois le côté pile ou le côté face.

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n - k)!} P^k (1 - P)^{n-k}$$

$$E[X] = nP \quad , \quad Var(X) = nP(1 - P)$$

Exp1 : Si l'on effectue 3 lancers d'une pièce de monnaie, calculez la probabilité d'avoir 2 fois le côté pile. **La probabilité de base (P) = 0.5**

On note que lorsque l'on souhaite avoir 2 fois le côté pile en réalisant 3 lancers, il est sous-entendu que l'issue du troisième lancer sera le côté face $(1 - P)^{n-k}$.

$$P(X = k = 2) = \frac{3!}{2!(3 - 2)!} (0.5)^2 (1 - 0.5)^{3-2} = \left(\frac{3}{8}\right) = 37.5\%$$

$(2)^{n=3} = 8$ combinaisons : **PPP, PPF, PFF, PFP** et **FFF, FFP, FPP, FPF**

Exp2 : Pour $n=3$ et $k=3$, la probabilité $P(X = k = 3) = \left(\frac{1}{8}\right) = 12.5\%$

4- **La loi exponentiel** : $f(x) = (\lambda)e^{-\lambda x}$, avec $x \geq 0$ et $\lambda = \frac{1}{E[X]}$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Cette loi peut être utilisée pour estimer la durée de vie d'un composant électronique.

5- **La loi normale** $N(\bar{X}, \sigma)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-0.5\left(\frac{x-\bar{X}}{\sigma}\right)^2}$

La loi normale est une loi de probabilité en forme de cloche symétrique par rapport à $E(X)$ où la majorité des valeurs s'y regroupent de part et d'autre.

Remarque : La distribution de certaines variables aléatoires telles que le poids, la taille, le QI et la longévité convient tout à fait à la loi de probabilité de la loi normale.

6- **La loi normale centrée et réduite** $\bar{N}(0, 1)$: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5z^2}$

Le maximum de la probabilité $f(z = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.399$

Les probabilités relatives aux lois normales sont calculées comme suit :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \bar{X}}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \bar{X}}{\sigma}\right) = \int_{\frac{a - \bar{X}}{\sigma}}^{\frac{b - \bar{X}}{\sigma}} f(z)dz$$

La fonction de répartition $F(x)$ est une fonction qui permet de calculer la probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur $\leq$ à un réel x .

Remarque : la fonction $F(x)$ cumule l'ensemble des probabilités jusqu'à la valeur x . On note que $F(x)$ est une fonction croissante comprise entre $[0 \leq F(x) \leq 1]$.

$$[-\infty \leq x \leq +\infty]$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

7- **La loi de Poisson** $P(\lambda)$: C'est une loi discrète qui permet de calculer la probabilité de (k) **événements rares** dans un intervalle donné. (λ) représente le taux moyen d'occurrences. Le nombre événements (k) est un entier ≥ 0 . On note que dans cette loi, l'espérance $E[X] = Var(X) = \lambda$.

$P(\lambda)$ est une loi asymétrique, mais plus le taux moyen d'occurrences λ est grand ($\lambda > 10$), plus elle tend vers la loi normale (symétrique).

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Exp1 : Une usine produit des boulons d'ancrage (charpente métallique). Trois pour cent (3%) des boulons sont défectueux. Sur un lot de 100 boulons produits, calculez $P(X = k = 0)$, $P(X = k = 2)$ par la loi de **Poisson**.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad , \quad \lambda = (n)(P) = (100)(0.03) = 3$$

$$P(X = k = 0) = \frac{(3^0) e^{-3}}{0!} \approx 5\% \quad , \quad P(X = k = 1) = \frac{(3^1) e^{-3}}{1!} \approx 15\%$$

Exp2 : Un radar a enregistré 120 véhicules qui passent un péage autoroutier en une heure, que vaut le taux moyen d'occurrences (λ) pour un intervalle temporel de 5 minutes. Calculez la probabilité $P(X = k = 6)$ voitures).

$$\lambda = \left(\frac{120}{60}\right)(5) = 10 \text{ voitures/5 minutes}$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad , \quad P(X = k = 6) = \frac{10^6 e^{-10}}{6!} = 6.3\%$$

Exp3 : Le tableau ci-dessous résume les données concernant le nombre d'absents par jour dans une classe de cours sur une période de 200 jours.

(X) : V. A. nombre absents/j	0	1	2	3	4	5
Effectifs n_i (j)	86	82	22	7	2	1
f_i	0.43	0.41	0.11	0.035	0.01	0.005
$P(\lambda)$	0.449	0.359	0.144	0.038	0.0080	0.001
B(n,P)	0.448	0.360	0.144	0.038	0.0075	0.001

$$E[X] = \sum X_i f_i = (0)(0.43) + (1)(0.41) + (2)(0.11) + \dots + (5)(0.005) = 0.8$$

Le taux moyen $\lambda = E[X] = 0.8$ absent / j

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{(0.8)^k e^{-0.8}}{k!}$$

Il est à noter que la loi binomiale peut être approchée d'une manière très satisfaisante par la loi de **Poisson** si le nombre total d'occurrences (n) est supérieur à 50, la probabilité (P) est inférieure à 0.1 et (n)(P) ≤ 10.

$$P(X = k) = \frac{n!}{k! (n - k)!} P^k (1 - P)^{n-k}$$

Dans notre cas, n = 200, P = (0.8/200) = 0.004 et (n)(P) = 0.8 ≤ 10.

$P(X < 3 \text{ absents}) = 0.449 + 0.359 + 0.144 = 0.952$ (voir tableau, $P(\lambda)$).

Le nombre de jours correspondant à $P(X < 3) = (0.952)(200) = 190.4$ jours.

Le nombre de jours théorique = 86 + 82 + 22 = 190 jours.

3.5 - Définition d'une fonction de densité de probabilité conjointe (FDPC) :

Une fonction de densité de probabilité $f(x)$ est une loi de probabilité qui modélise des phénomènes naturels par une courbe qui décrit la probabilité qu'une variable aléatoire (X) se trouve dans un certain intervalle [a , b].

Une fonction de densité de probabilité conjointe $f_{\alpha(x_1), \alpha(x_2)}(u, v)$ caractérise la distribution de probabilité simultanée de plusieurs variables aléatoires continues. Autrement dit, la (FDPC) généralise le concept de la fonction de densité de probabilité à une seule variable aléatoire afin de modéliser le comportement conjoint de deux variables aléatoires ou plus. La (FDPC) fournit une information probabiliste plus complète par rapport à la (FDP) d'une quelconque variable aléatoire. Lorsque cette dernière fonction de probabilité est obtenue à partir de la (FDPC), elle est dite fonction de densité de probabilité marginale (FDPM), elle s'écrit pour la (i-ème) variable aléatoire comme suit :

$$f(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2 \dots x_{i-1}, x_n, x_{i+1} \dots x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$$

Partie II

Notions d'analyse intervalle

4 – Généralités sur l'analyse intervalle :

Dans le domaine de Génie Civil, toute grandeur mesurable utilisée dans les calculs telle que : (le module de **Young** E , la contrainte admissible du sol σ_{sol} , la résistance à la compression du béton f_{c28} , la résistance à la traction des boulons...etc...), est sans nul doute susceptible d'être associée à un certain taux d'incertitude, qui représente la dispersion des valeurs probables par rapport à la valeur réelle. Ces incertitudes doivent être prises en considération dans les calculs, et ce afin de palier à tout risque qui pourrait compromettre la performance des différents ouvrages à analyser.

Il est à noter par ailleurs, que les causes qui engendrent les incertitudes dont il est question, et que l'on doit prendre en considération dans l'analyse, peuvent être résumées comme suit :

- L'imprécision des appareils de mesure.
- Les erreurs de lecture.
- Les conditions du protocole expérimental (température, vibrations, ...etc...).

Compte-tenu de ce qui vient d'être mentionné ci-dessus, il devient incontournable de prendre en charge ces incertitudes par un moyen de calcul avéré, et ce à l'effet de garantir des résultats qui répondent, d'une manière fiable, aux exigences de sécurité et de serviabilité relatives aux différents types de construction à réaliser. Dans ce qui suit, on présentera la théorie de l'analyse intervalle que l'on peut utiliser dans les domaines statique et dynamique, et qui produit des résultats dans une plage bornée par une bande inférieure et une bande supérieure.

5 - Notions concises sur l'analyse Intervalle :

Dans cette section, nous allons donner un bref aperçu sur l'analyse intervalle et ses propriétés. Soient $I(R), I(R^n)$ et $I(R^{m \times n})$ l'ensemble de tous les intervalles réels fermés relatifs aux scalaires, vecteurs et matrices.

Soit un mesurande intervalle X^I appartenant à l'ensemble $I(R)$ tel que $X^I = [\underline{X}, \bar{X}]$, où $\underline{X}$ et $\bar{X}$ sont la bande inférieure et la bande supérieure de X . On peut aussi écrire X^I sous la forme suivante :

$$X^I = [X^C - \Delta X, X^C + \Delta X]$$

X^C et ΔX , représentent respectivement la valeur centrale de X^I et son incertitude.

$$X^C = \frac{(\bar{X} + \underline{X})}{2} \quad \text{et} \quad \Delta X = \frac{(\bar{X} - \underline{X})}{2}$$

En termes d'intervalle, le mesurande X^I peut-être écrit sous la forme suivante :

$$X^I = [X^C + \Delta X^I] \quad , \quad \Delta X^I = [-\Delta X, \Delta X]$$

Des expressions similaires peuvent être développées pour les vecteurs et matrices intervalles appartenant respectivement aux ensembles $I(R^n)$ et $I(R^{m \times n})$.

$$V^I = [\underline{V}, \overline{V}]$$

$$V^I = [V^C - \Delta V, V^C + \Delta V]$$

$$V^I = [V^C + \Delta V^I] \quad , \quad \Delta V^I = [-\Delta V, \Delta V]$$

$$V^C = \frac{(\overline{V} + \underline{V})}{2} \quad , \quad v_i^C = \frac{(\overline{v}_i + \underline{v}_i)}{2} \quad , \quad \Delta v_i = \frac{(\overline{v}_i - \underline{v}_i)}{2}$$

Les expressions des matrices intervalles s'écrivent comme suit :

$$A^I = [\underline{A}, \overline{A}]$$

$$A^I = [A^C - \Delta A, A^C + \Delta A]$$

$$A^I = [A^C + \Delta A^I] \quad , \quad \Delta A^I = [-\Delta A, \Delta A]$$

$$A^C = \frac{(\overline{A} + \underline{A})}{2} \quad , \quad a_{ij}^C = \frac{(\overline{a}_{ij} + \underline{a}_{ij})}{2} \quad , \quad \Delta a_{ij} = \frac{(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})}{2}$$

5.1 - Opérations sur les intervalles :

- Addition de deux intervalles : $[a, b] + [c, d] = [(a + c), (b + d)]$
- Soustraction de deux intervalles : $[a, b] - [c, d] = [(a - d), (b - c)]$
- Multiplication : $[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$
- Division de deux intervalles : $[a, b] \div [c, d] = [(a, b)] \times [(1/d, 1/c)]$
- Addition d'un scalaire k à un intervalle : $[a, b] + k = [(a + k), (b + k)]$
- L'addition d'un scalaire k est commutative : $[a, b] + k = k + [a, b]$
- Soustraction d'un scalaire k à un intervalle : $[a, b] - k = [(a - k), (b - k)]$
- Soustraction d'un intervalle à un scalaire k : $k - [a, b] = [(k - b), (k - a)]$
- Intervalle précédé d'un signe (-) : $-[a, b] = [-b, -a]$

5.2 - Théorème d'extension :

Soit f une fonction à n variables réelles x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Par extension intervalle de f , on sous-entend que la fonction intervalle jointe (JF) à n variables intervalles X_i^I , ($i = 1, 2, \dots, n$) admet la propriété spécifique suivante :

$$\text{Pour toute valeur } x_i \in X_i^I, F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Exp : Soit le polynôme suivant : $f(x, a) = \frac{xa}{1-x}$, calculez $F([2, 3], [0, 1])$.

Avec $X^I = [2, 3]$ et $A^I = [0, 1]$, l'extension de la fonction $f(x, a)$ s'écrit comme suit :

$$F(X^I, A^I) = \frac{X^I A^I}{1-X^I}$$

$$f(x, a) = \frac{xa}{1-x} = \frac{xa - a}{1-x} + \frac{a}{1-x} = -\left[a + \frac{a}{x-1}\right]$$

$$\left[A + \frac{A}{X-1}\right] = \left[[0, 1] + \frac{[0, 1]}{[2, 3]-1}\right] = \left[[0, 1] + [0, 1]\right] = [0, 2]$$

$$F([2, 3], [0, 1]) = -\left[A + \frac{A}{X-1}\right] = [-2, 0]$$

6 - Méthode intervalle appliquée en MEF :

En éléments finis, l'équilibre matriciel en statique s'écrit comme suit :

$$[K]\{\hat{u}\} = \{\hat{F}\}$$

$$[K] = \iiint_v [B]^T [D] [B] dv$$

$$[B] = [L][N]$$

$[K]$: matrice des raideurs

$[L]$: opérateur différentiel

$[N]$: matrice des fonctions d'interpolation

$[D]$: matrice d'élasticité

$\{\hat{F}\}$: vecteur des forces nodales

$\{\hat{u}\}$: vecteur des déplacements nodaux

$$K^I = [\underline{K}, \overline{K}] \quad , \quad D^I = [\underline{D}, \overline{D}] \quad , \quad F^I = [\underline{F}, \overline{F}]$$

$$K^C = \frac{(\overline{K} + \underline{K})}{2} \quad , \quad \Delta K = \frac{(\overline{K} - \underline{K})}{2} \quad , \quad \dots \text{ etc } \dots$$

Comme une application potentielle de la méthode intervalle dans le domaine de la MEF, on peut citer les tunnels dont les hauteurs de couverture sont généralement composées de (n) couches ayant chacune des caractéristiques géométriques et mécaniques différentes (hauteur h_i , poids spécifique γ_i et un module de **Young** E_i). Ces différents paramètres sont souvent affectés par des incertitudes dont l'incidence sur le calcul des tassements peut s'avérer problématique par rapport à la sécurité de ces ouvrages si elles ne sont pas prises en considération dans l'analyse.

En effet, le problème des tassements en surface constitue un enjeu majeur particulièrement dans les grandes villes, où tout le tissu urbain (bâtiments, ponts, trémies, stations de métro ...etc...) peut être affecté par ces déformations (affaissements) dont les conséquences sur la sécurité de ces constructions pourraient être dommageables.

Il est à noter que les différents modèles qui peuvent être adoptés en excavation souterraine sont au nombre de trois. Le modèle de contrôle en contrainte est souvent utilisé par le biais de la méthode convergence-confinement qui produit des résultats analytiques ou numériques tout à fait probants. Dans le cas analytique, le déplacement élastique en clé de voûte est donné par : $\Delta_e = \frac{1}{E}(1 + \vartheta)\alpha R\sigma_0^v$. Le coefficient d'anisotropie α est donné par : $\alpha = [0.5(1 + K_0) + 0.5(1 - K_0)(3 - 4\vartheta)]$. Lorsque les contraintes initiales sont isotropes, le coefficient des terres au repos K_0 est égal à ($K_0 = 1$), et par conséquent $\alpha = 1$.

Dans le cas anisotrope, les contraintes principales sont liées par la relation suivante : $\sigma_0^{(2)} = K_0\sigma_0^{(1)}$. La contrainte $\sigma_0^{(1)}$ est verticale, et $\sigma_0^{(2)}$ est horizontale avec $\sigma_0^{(1)} > \sigma_0^{(2)}$. Ainsi, le vecteur contrainte initiale qui s'exerce sur la paroi se décompose en une contrainte normale radiale σ_0^R et une autre tangentielle $\sigma_0^{R\theta}$.

$$\sigma_0^R = \frac{1}{2}\sigma_0^v\{(1 + K_0) - (1 - K_0)\cos 2\theta\}$$

$$\sigma_0^{R\theta} = \frac{1}{2}\sigma_0^v\{(1 - K_0)\sin 2\theta\}$$

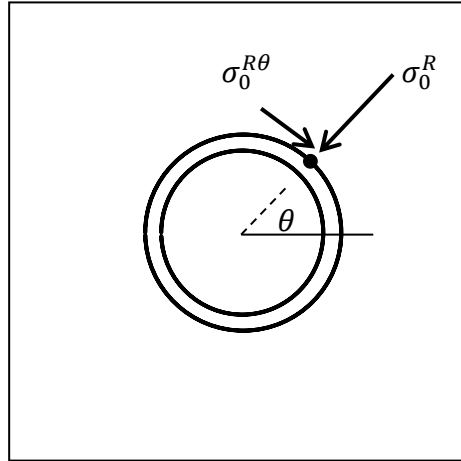


Fig. 6.1 Contraintes initiales anisotropes

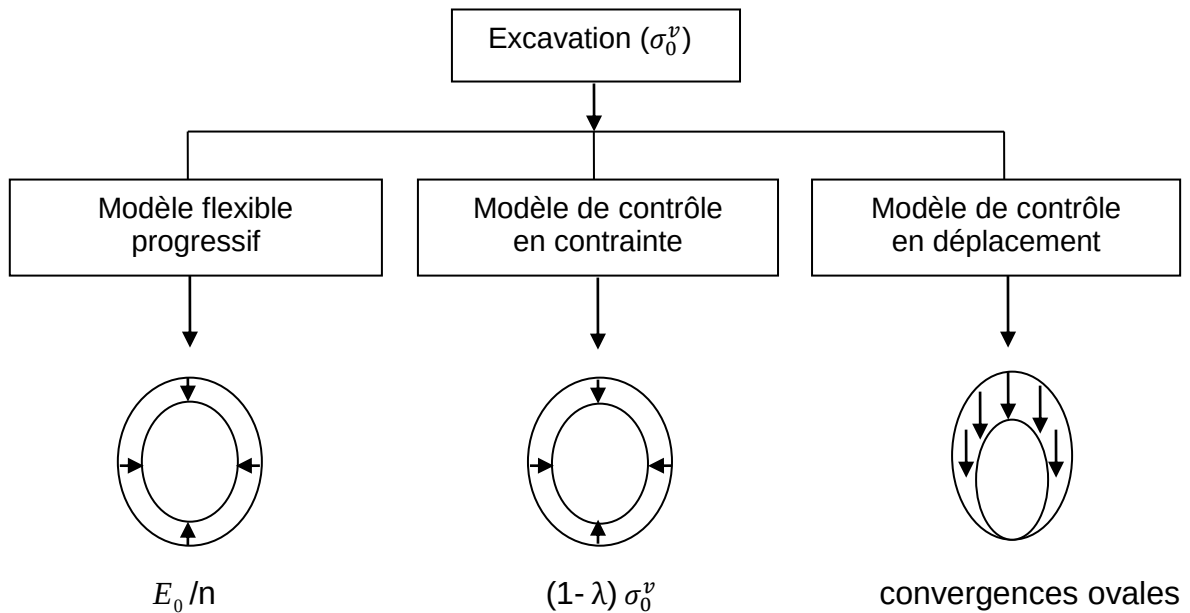


Fig. 6.2 Modèles d'excavation souterraine

Dans le cas où l'on utilise une méthode numérique (MEF), l'application du chargement se fait en deux phases. Le chargement de la première phase se fait avant la pose du soutènement et vaut $(\lambda_d \sigma_0^v)$, et le second chargement se fait après la pose du soutènement et vaut $(1 - \lambda_d) \sigma_0^v$. On note que λ_d est le taux de déconfinement à une certaine distance (d) du front de taille.

$$\lambda_d = 0.25 + 0.75 \left\{ 1 - \left[\frac{0.75R}{(0.75R + d)} \right]^2 \right\}$$

Les expressions en bande inférieure et bande supérieure de l'équilibre matriciel pour les tunnels s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \iiint_v [B]^T [\underline{D}] [B] dv \right\} \{ \underline{u} \} = \{ \hat{F}(\underline{\gamma}) \}$$

$$\left\{ \iiint_v [B]^T [\underline{D}] [B] dv \right\} \{ \overline{u} \} = \{ \hat{F}(\overline{\gamma}) \}$$

le vecteur des forces nodales à appliquer sur la voûte du tunnel sont déterminées en se basant sur la méthode des poids des terres. Les contraintes sont liées aux déformations par la matrice d'élasticité $[D]$ en déformations planes.

$$\{ \hat{F}(\gamma) \} = \sum_1^N \gamma_i h_i = \sigma_0^v$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

6.1 - Application :

On se propose de calculer la cuvette de tassement du tunnel de Toulon qui est un ouvrage souterrain composé de deux tubes parallèles à deux voies de circulation. Les longueurs des tubes sud et nord sont respectivement égales à 3395 m et 2800 m. La profondeur du tunnel $H_0=36$ m, le rayon $R=5.6$ m et la hauteur totale $H_T=41.6$ m. Le tunnel est creusé dans un massif rocheux composé de deux couches ayant des caractéristiques géométriques et mécaniques différentes : $h_1=25.5$ m, $\gamma_1=20$ KN/m³, $E_1=100$ MPa et $h_2=16.1$ m, $\gamma_2=24$ KN/m³, $E_2=150$ MPa.

Après étude de convergence, le modèle par éléments finis retenu est composé de (24x24=576) éléments quadrilatères à quatre nœuds et de 625 nœuds (pour un quart du tunnel). Chaque nœud a deux degrés de liberté (u,v). Les dimensions géométriques du modèle sont ($H_T \times H_T = 41.6$ m x 41.6 m).

On prend comme incertitudes les valeurs suivantes : $\Delta E = 30$ MPa et $\Delta \gamma = 2$ KN/m³.

$$E_1 = [\underline{E}_1, E_1^C, \overline{E}_1] = [70, 100, 130] \text{ MPa}$$

$$\gamma_1 = [\underline{\gamma}_1, \gamma_1^C, \overline{\gamma}_1] = [18, 20, 22] \text{ KN/m}^3$$

$$E_2 = [\underline{E}_2, E_2^C, \overline{E}_2] = [120, 150, 180] \text{ MPa}$$

$$\gamma_2 = [\underline{\gamma}_2, \gamma_2^C, \overline{\gamma}_2] = [22, 24, 26] \text{ KN/m}^3$$

La contrainte initiale du massif s'écrit : $\sigma_0^v = \sum_1^N \gamma_i h_i$

$$\sigma_0^v = [(\underline{\gamma}_1 h_1 + \underline{\gamma}_2 h_2), (\gamma_1^C h_1 + \gamma_2^C h_2), (\overline{\gamma}_1 h_1 + \overline{\gamma}_2 h_2)]$$

$$\sigma_0^v = [0.8132, 0.8964, 0.9796] \text{ MPa}$$

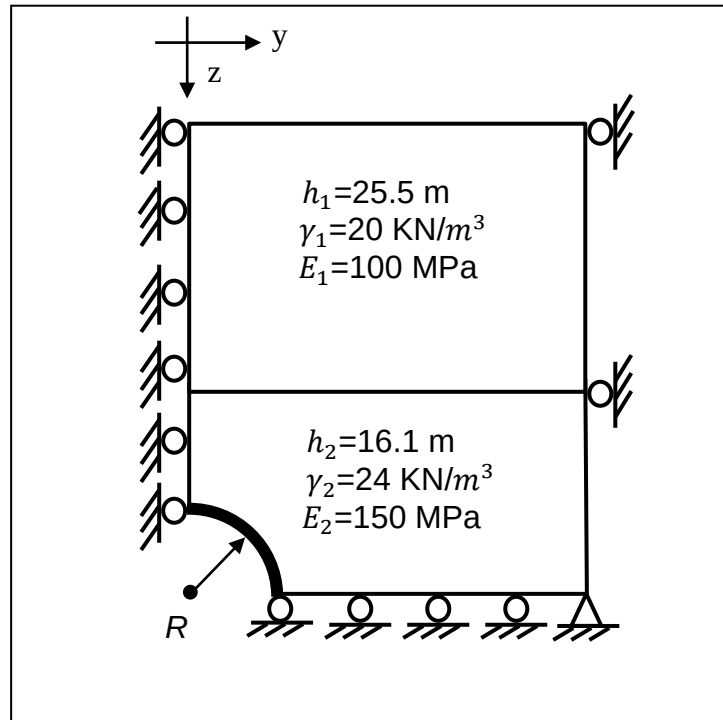


Fig. 6.3 Modélisation du tunnel de Toulon par la (MEF)

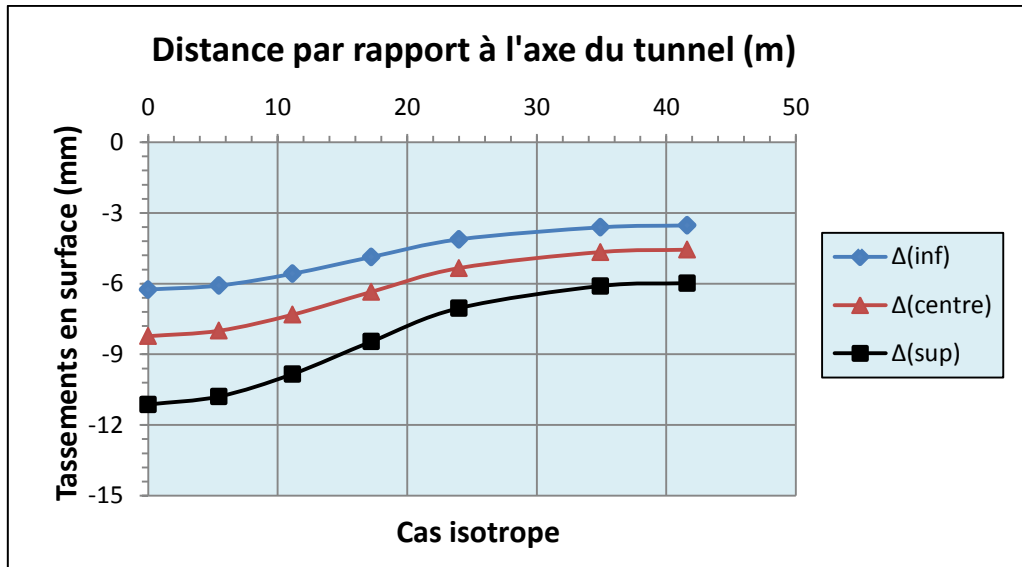


Fig. 6.4 Tassements en surface, cas isotrope

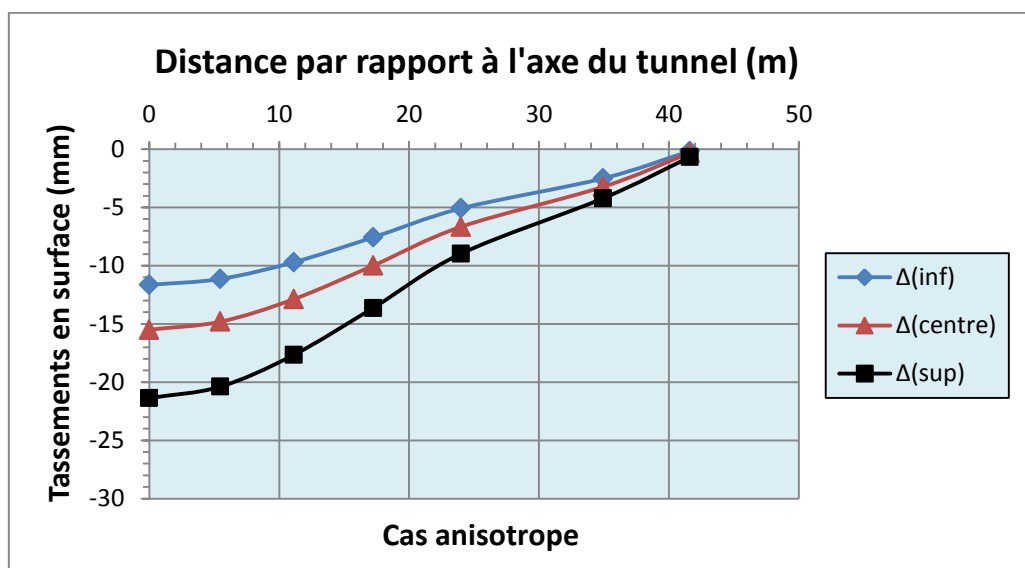


Fig. 6.5 Tassements en surface, cas anisotrope

6.2 - Conclusion :

En adoptant des incertitudes $\Delta E = 30 \text{ MPa}$ et $\Delta \gamma = 2 \text{ KN/m}^3$ dans l'analyse, le modèle (MEF) a produit un écart en terme de tassements en surface, entre la solution centrale et les deux bandes supérieure et inférieure, de plus de 20%. Par ailleurs, il est à noter que l'influence du module de **Young** peut-être considérable dans le calcul des ouvrages souterrains. Enfin, les tassements en surface dans le cas anisotrope sont beaucoup plus importants que dans le cas isotrope.

7 - Méthode intervalle appliquée aux problèmes de valeurs propres :

La détermination des caractéristiques dynamiques des structures (pulsations propres, périodes propres et vecteurs propres) fait appel à l'utilisation de la matrice des masses $[M]$ et la matrice des raideurs $[K]$, dont les éléments sont susceptibles d'être affectés par des incertitudes qui pourraient sensiblement affecter les résultats de l'analyse.

La solution des problèmes aux valeurs propres peut-être accomplie (à titre d'exemple) par la méthode de **Rayleigh-Quotient Iteration** (RQI) ou par la méthode de **Deif**. Ces méthodes produisent de très bons résultats des différentes caractéristiques dynamiques en bandes inférieures et bandes supérieures, mais non sans efforts de programmation et de temps de calcul relatifs à la tolérance de la convergence.

$$\lambda_i < K, M > = (\min, \max) \frac{u^T K u}{u^T M u}$$

$$\lambda_i = \omega_i^2, \quad \omega_i : \text{représente la pulsation du mode } i$$

En s'inspirant d'un système (masse-ressort) à un seul degré de liberté, la méthode intervalle peut être utilisée en introduisant directement les incertitudes dans la matrice des masses et la matrice des raideurs, et ce à l'effet de calculer les caractéristiques dynamiques en bandes inférieures et bandes supérieures à travers la solution de l'équation dynamique en vibrations libres ci-dessous. Cette méthode est directe, rapide et produit des résultats très précis.

$$\text{Dét}\{ [K] - \omega^2 [M] \} \{a_i\} = \{0\}, \quad \omega^2 = \lambda$$

$$K^I = [\underline{K}, \bar{K}], \quad M^I = [\underline{M}, \bar{M}]$$

$$\lambda^I = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] = \left[\frac{\underline{K}}{\underline{M}}, \frac{\bar{K}}{\bar{M}} \right]$$

$$\lambda^c = \frac{(\bar{\lambda} + \underline{\lambda})}{2}, \quad \Delta\lambda = \frac{(\bar{\lambda} - \underline{\lambda})}{2}, \quad \Delta X = \frac{(\bar{X} - \underline{X})}{2}$$

7.1 - Application :

Comme application, on se propose d'étudier les caractéristiques dynamiques et la réponse en terme de déplacements d'un bâtiment (R+4) à usage d'habitation en portique auto-stable à deux travées. La distance entre les poteaux est égale à 4 m, la hauteur des poteaux du rez-de-chaussée est égale à 3.4 m, la hauteur des poteaux des étages est égale à 3 m, la section des poteaux (0.3 m x 0.3 m), la section des poutres (0.3 m x 0.4 m), la résistance du béton à la compression $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ et le module de **Young** instantané $E = 11000(f_c^{28})^{1/3} = 32164 \text{ MPa}$.

La rigidité totale de chaque niveau est égale à $K_i = (3) \left(\frac{12EI}{h_i^3} \right)$

La masse totale de chaque niveau est égale à $M = G + 20\%Q$, G comprend la masse du plancher, des poutres, des poteaux, des cloisons périphériques et des cloisons de séparation. Q étant les charges d'exploitation.

Poids de la dalle	600 Kg/m ²
Cloisons périphériques	120 Kg/m ²
Cloisons de séparation	100 Kg/m ²
L'acrotère	100 Kg/ml
Charges d'exploitation Q	250 Kg/m ²
M_1	36 t
$M_2 = M_3 = M_4$	35 t
M_5	32 t
K_1	19885.64 KN/m
$K_2 = K_3 = K_4 = K_5$	28947.60 KN/m

7.2 - Modélisation et équations d'équilibre dynamiques :

Le bâtiment (R+4) est modélisé par un système de masses-ressorts équivalents. Les raideurs des ressorts simulent les rigidités des poteaux, et les masses du modèle simulent celles des planchers et des éléments qui leurs reviennent.

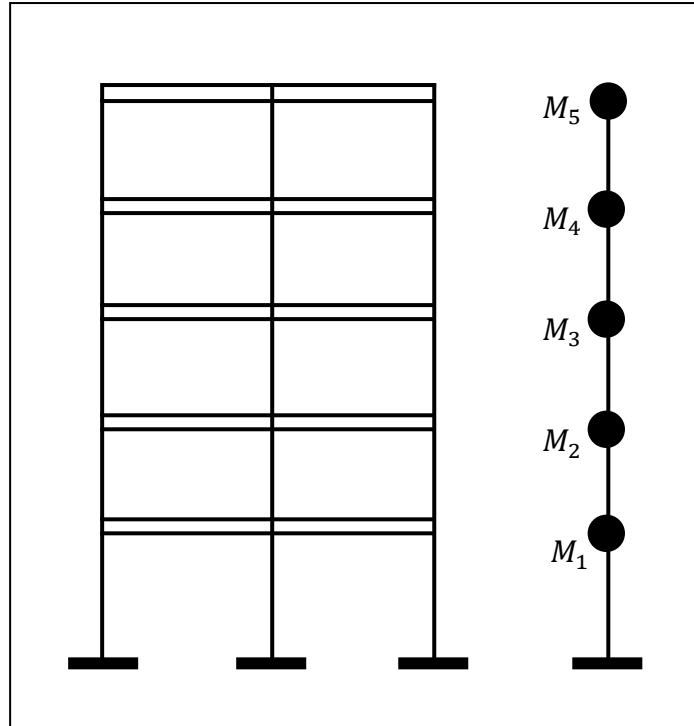


Fig. 7.1 Modélisation du bâtiment en système masses-ressorts

Les équations d'équilibre dynamiques s'écrivent comme suit :

$$M_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 - K_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + K_2 (x_2 - x_1) - K_3 (x_3 - x_2) = 0$$

$$M_3 \ddot{x}_3 + K_3 (x_3 - x_2) - K_4 (x_4 - x_3) = 0$$

$$M_4 \ddot{x}_4 + K_4 (x_4 - x_3) - K_5 (x_5 - x_4) = 0$$

$$M_5 \ddot{x}_5 + K_5 (x_5 - x_4) = 0$$

La matrice des raideurs du modèle adopté s'écrit comme suit :

$$[K] = \begin{bmatrix} (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3 & (K_3 + K_4) & -K_4 & 0 \\ 0 & 0 & -K_4 & (K_4 + K_5) & -K_5 \\ 0 & 0 & 0 & -K_5 & K_5 \end{bmatrix}$$

La matrice diagonale des masses du modèle adopté s'écrit comme suit :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5 \end{bmatrix}$$

On prend comme incertitudes pour les coefficients de raideurs K_i et les masses M_i les valeurs suivantes : $\Delta K = 10\%$ et $\Delta M = 3\%$, soit $\cong 1 t$ pour chaque masse.

La résolution du système d'équations aux valeurs propres produit les pulsations propres et les vecteurs propres pour les bandes centre, inférieure et supérieure.

$\underline{\omega}_1$	$\underline{\omega}_2$	$\underline{\omega}_3$	$\underline{\omega}_4$	$\underline{\omega}_5$
7.19	21.29	34.21	44.68	51.46
V.P.(a_{i1})	V.P. (a_{i2})	V.P. (a_{i3})	V.P. (a_{i4})	V.P. (a_{i5})
36.82 (10^{-3})	88.92 (10^{-3})	99.36 (10^{-3})	78.35 (10^{-3})	41.86 (10^{-3})
59.41 (10^{-3})	92.81 (10^{-3})	2.44 (10^{-3})	-89.94 (10^{-3})	-86.38 (10^{-3})
77.76 (10^{-3})	38.61 (10^{-3})	-98.43 (10^{-3})	-10.15 (10^{-3})	102.22 (10^{-3})
90.56 (10^{-3})	-39.75 (10^{-3})	-40.10 (10^{-3})	97.64 (10^{-3})	-82.79 (10^{-3})
96.90 (10^{-3})	-93.23 (10^{-3})	83.09 (10^{-3})	-63.88 (10^{-3})	35.16 (10^{-3})

ω_1^C	ω_2^C	ω_3^C	ω_4^C	ω_5^C
7.69	22.76	36.58	47.77	55.02
V.P.(a_{i1})	V.P. (a_{i2})	V.P. (a_{i3})	V.P. (a_{i4})	V.P. (a_{i5})
37.36 (10^{-3})	90.22 (10^{-3})	100.75 (10^{-3})	79.36 (10^{-3})	42.36 (10^{-3})
60.28 (10^{-3})	94.09 (10^{-3})	2.30 (10^{-3})	-91.31 (10^{-3})	-87.98 (10^{-3})
78.90 (10^{-3})	39.05 (10^{-3})	-99.87 (10^{-3})	-10.08 (10^{-3})	103.66 (10^{-3})
91.88 (10^{-3})	-40.45 (10^{-3})	-40.46 (10^{-3})	98.95 (10^{-3})	-84.05 (10^{-3})
98.30 (10^{-3})	-94.62 (10^{-3})	84.41 (10^{-3})	-65.00 (10^{-3})	35.83 (10^{-3})

$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
8.18	24.22	38.93	50.83	58.55
V.P. (a_{i1})	V.P. (a_{i2})	V.P. (a_{i3})	V.P. (a_{i4})	V.P. (a_{i5})
37.93 (10^{-3})	91.58 (10^{-3})	102.19 (10^{-3})	80.40 (10^{-3})	42.87 (10^{-3})
61.20 (10^{-3})	95.43 (10^{-3})	2.13 (10^{-3})	-92.74 (10^{-3})	-89.19 (10^{-3})
80.09 (10^{-3})	39.49 (10^{-3})	-101.38 (10^{-3})	-9.99 (10^{-3})	105.17 (10^{-3})
93.26 (10^{-3})	-41.19 (10^{-3})	-40.81 (10^{-3})	100.32 (10^{-3})	-85.37 (10^{-3})
99.76 (10^{-3})	-96.07 (10^{-3})	85.81 (10^{-3})	-66.18 (10^{-3})	36.53 (10^{-3})

7.3 - Calcul de la réponse dans la base physique :

On considère que le portique auto-stable étudié est implanté dans une région de zone IIa (groupe d'usage 2, bâtiment courant). On suppose par ailleurs, que la répartition de l'effort tranchant à la base (V) du portique, donne lieu à (5) forces F_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) de type échelon appliquées aux différents étages. On note que les conditions initiales pour une force de type échelon sont :

$$\begin{cases} X(t = 0) = 0 \\ \dot{X}(t = 0) = 0 \\ \ddot{X}(t = 0) \neq 0 \end{cases}$$

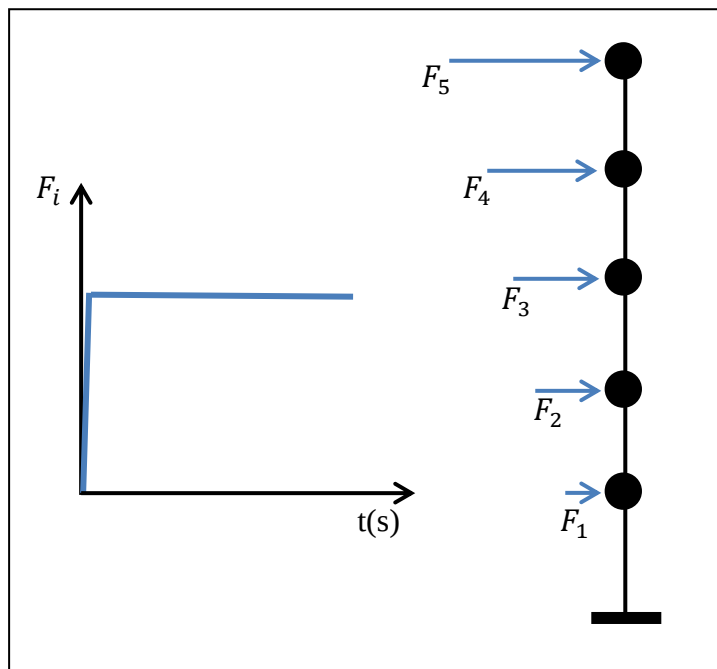


Fig. 7.2 Répartition de l'effort tranchant sur les différents étages

L'effort tranchant à la base $V = \frac{ADQ}{R}W$. En zone IIa, le coefficient $A=0.15$, $R=5$, $Q=1.1$, $\xi=5\%$, $S_2(T_1=0.15s, T_2=0.40s)$ et $\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} = 1$, d'où $D=1.55$.

Le poids total de la structure $W = \sum M_i \times g = 1730 \text{ KN}$

$$V = \frac{ADQ}{R}W = 88.66 \text{ KN}$$

La période fondamentale $T=0.82s > 0.7s$, d'où $F_t = 7\%TV = 5.06 \text{ KN}$

La répartition de (V) sur les étages est donnée par la formule : $F_i = (V - F_t) \frac{M_i}{\sum_1^5 M_j h_j}$

$$F_i = \begin{pmatrix} 6.39 \text{ KN} \\ 11.69 \text{ KN} \\ 17.17 \text{ KN} \\ 22.65 \text{ KN} \\ 25.71 \text{ KN} \end{pmatrix}$$

Le calcul de la réponse se fait dans un premier temps dans la base modale (en procédant à un découplage des équations dynamiques), puis on détermine la solution dans la base physique $x(t)$.

$$z_i(t) = \frac{2P_i}{\phi^T M \phi \omega_i^2} \sin^2(0.5\omega_i t)$$

$$x_i(t) = \phi \cdot z_i(t)$$

Le découplage des équations dynamiques se fait en considérant les transformations suivantes où ϕ est la matrice modale :

$$\phi^T M \phi = M_{\text{diagonale}}$$

$$\phi^T K \phi = K_{\text{diagonale}}$$

$$P_i = \phi^T F_i$$

Réponse en (mm) relative à la bande supérieure :

$$P_i = \underline{\phi}^T F_i = \begin{pmatrix} 6.81 \\ -0.98 \\ 0.20 \\ -0.16 \\ 0.038 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z}_i(t) = \frac{2P_i}{\Phi^T M \Phi \omega_i^2} \sin^2(0.5 \omega_i t)$$

$$\begin{cases} \bar{z}_1(t) = 263.62 \sin^2(3.60t) \\ \bar{z}_2(t) = -0.44 \sin^2(10.64t) \\ \bar{z}_3(t) = 0.34 \sin^2(17.11t) \\ \bar{z}_4(t) = -0.16 \sin^2(22.34t) \\ \bar{z}_5(t) = 0.029 \sin^2(25.73t) \end{cases}$$

$$x_i(t) = \Phi \cdot z_i(t)$$

$$\bar{X}_i(t) = \begin{Bmatrix} 9.71 \sin^2(3.60t) \\ 15.66 \sin^2(3.60t) \\ 20.50 \sin^2(3.60t) \\ 23.87 \sin^2(3.60t) \\ 25.55 \sin^2(3.60t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.39 \sin^2(10.64t) \\ -0.40 \sin^2(10.64t) \\ -0.17 \sin^2(10.64t) \\ 0.17 \sin^2(10.64t) \\ 0.40 \sin^2(10.64t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.03410 \sin^2(17.11t) \\ 0.00084 \sin^2(17.11t) \\ -0.03378 \sin^2(17.11t) \\ -0.01376 \sin^2(17.11t) \\ 0.02852 \sin^2(17.11t) \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} -0.012297 \sin^2(22.34t) \\ 0.014116 \sin^2(22.34t) \\ 0.001593 \sin^2(22.34t) \\ -0.015324 \sin^2(22.34t) \\ 0.010026 \sin^2(22.34t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.001191 \sin^2(25.73t) \\ -0.002471 \sin^2(25.73t) \\ 0.002909 \sin^2(25.73t) \\ -0.002356 \sin^2(25.73t) \\ 0.001001 \sin^2(25.73t) \end{Bmatrix}$$

Réponse en (mm) relative à la bande inférieure :

$$P_i = \bar{\Phi}^T F_i = \begin{Bmatrix} 7.01 \\ -1.02 \\ 0.22 \\ -0.18 \\ 0.044 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{z}_i(t) = \frac{2P_i}{\Phi^T M \Phi \bar{\omega}_i^2} \sin^2(0.5 \bar{\omega}_i t)$$

$$\begin{cases} \underline{z}_1(t) = 209.44 \sin^2(4.09t) \\ \underline{z}_2(t) = -3.49 \sin^2(12.11t) \\ \underline{z}_3(t) = 0.29 \sin^2(19.47t) \\ \underline{z}_4(t) = -0.13 \sin^2(25.42t) \\ \underline{z}_5(t) = 0.026 \sin^2(29.27t) \end{cases}$$

$$x_i(t) = \emptyset . z_i(t)$$

$$\underline{X}_i(t) = \begin{Bmatrix} 7.94 \sin^2(4.09t) \\ 12.82 \sin^2(4.09t) \\ 16.77 \sin^2(4.09t) \\ 19.53 \sin^2(4.09t) \\ 20.89 \sin^2(4.09t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.32 \sin^2(12.11t) \\ -0.33 \sin^2(12.11t) \\ -0.14 \sin^2(12.11t) \\ 0.14 \sin^2(12.11t) \\ 0.34 \sin^2(12.11t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.029451 \sin^2(19.47t) \\ 0.000615 \sin^2(19.47t) \\ -0.029217 \sin^2(19.47t) \\ -0.011762 \sin^2(19.47t) \\ 0.024729 \sin^2(19.47t) \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} -0.010691 \sin^2(25.42t) \\ 0.012332 \sin^2(25.42t) \\ 0.001328 \sin^2(25.42t) \\ -0.013340 \sin^2(25.42t) \\ 0.008801 \sin^2(25.42t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.001099 \sin^2(29.27t) \\ -0.002287 \sin^2(29.27t) \\ 0.002696 \sin^2(29.27t) \\ -0.002189 \sin^2(29.27t) \\ 0.000937 \sin^2(29.27t) \end{Bmatrix}$$

Remarque importante :

En examinant les amplitudes des déplacements des différents étages dans les différents modes de vibration, on constate que celles du premier mode sont largement supérieures aux amplitudes des autres modes aussi bien pour la bande supérieure (sup) que pour la bande inférieure (inf). En conséquence, les graphes qu'on va tracer concernent seulement la contribution du mode fondamental.

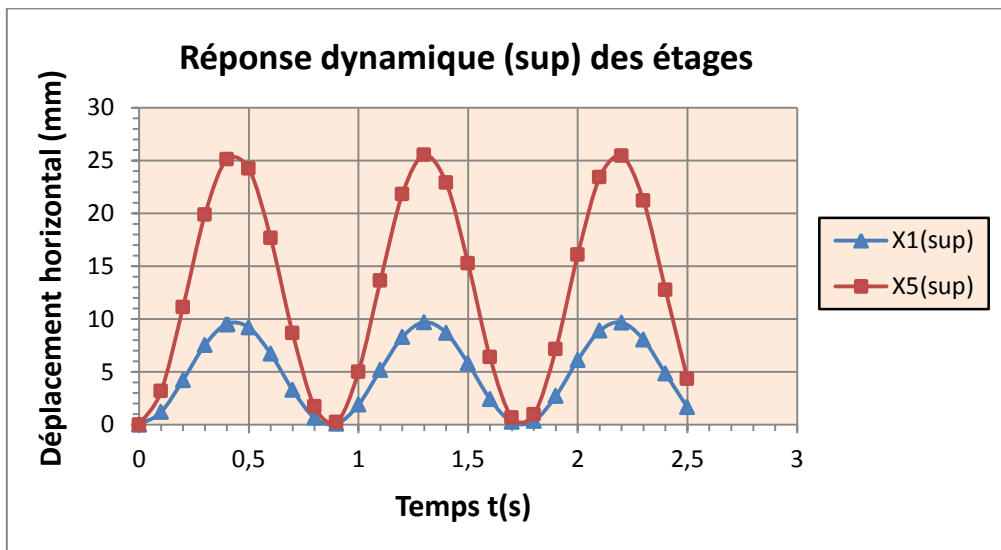


Fig. 7.3 Réponse dynamique (sup) des étages

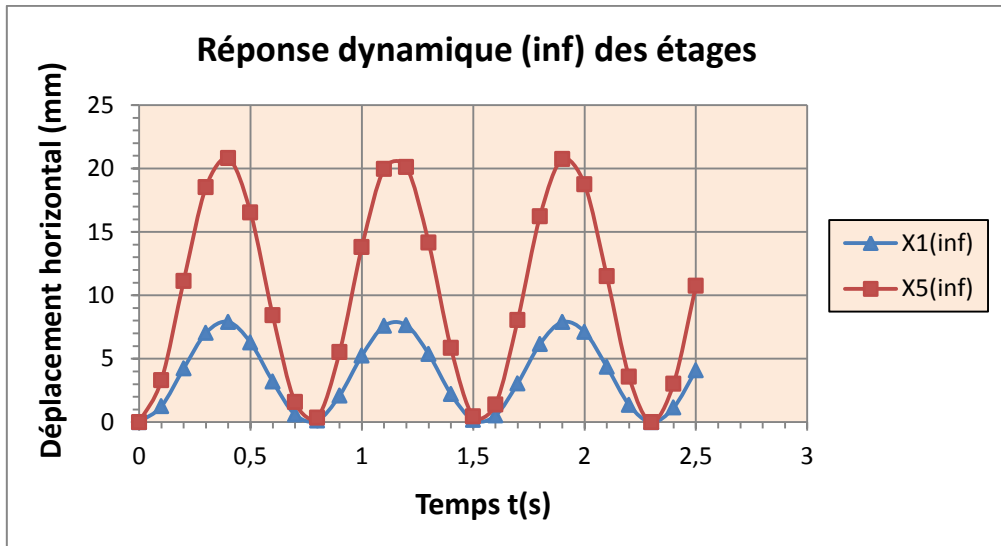


Fig. 7.4 Réponse dynamique (inf) des étages

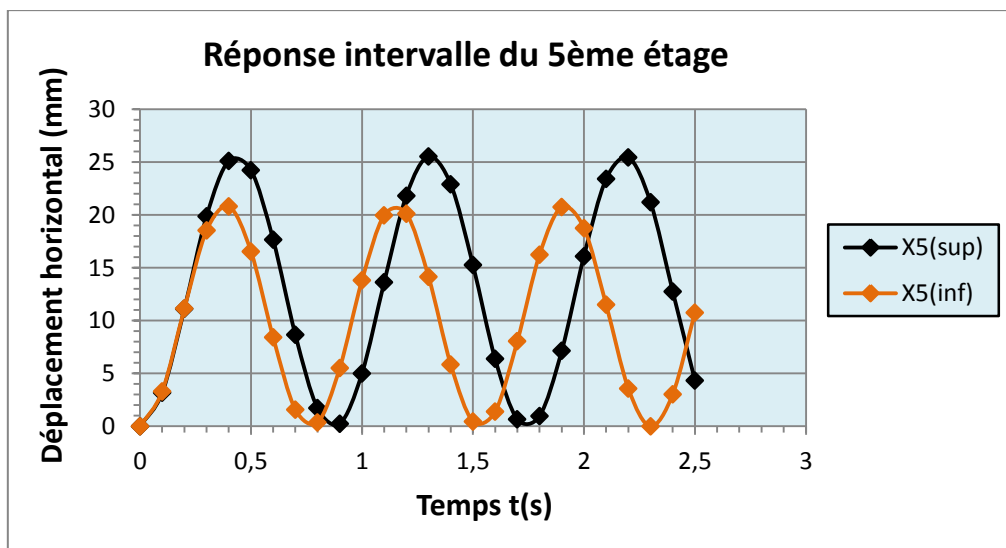


Fig. 7.5 Réponse intervalle du 5ème étage

7.4 - Conclusion :

En adoptant des incertitudes $\Delta K = 10\%$ et $\Delta M = 3\%$ dans l'analyse, le modèle a produit un écart en terme de déplacements entre la bande supérieure et la bande inférieure autour de 20% pour le dernier étage (X5). Autrement dit, l'écart entre la solution centrale et les deux bandes est autour de 10%. Par ailleurs, il est à noter que dans le domaine de la dynamique des structures et celui de l'interaction sol-structures, le calcul des masses est généralement assez précis contrairement à l'évaluation des rigidités et de l'amortissement qui sont souvent impactés par les incertitudes des différents paramètres du modèle adopté.

Partie III

Notions d'Eléments Finis Stochastiques

8- Généralités sur les éléments finis déterministes et stochastiques :

La méthode des éléments finis déterministes (MEFD) est une méthode numérique qui sert à la résolution des équations aux dérivées partielles, qui régissent l'équilibre des éléments de structures moyennant une discrétisation adéquate de ces équations. Le principe consiste à subdiviser la géométrie du domaine étudié en sous-domaines, et à décrire la solution à l'intérieur de chaque petite région (élément) moyennant une combinaison de fonctions continues et de variables nodales. On note que dans les problèmes de mécanique des structures où l'équilibre est régi par la relation matricielle $[K]\{\hat{u}\} = \{\hat{F}\}$, le test de convergence se fait (après plusieurs maillages) sur le gradient des contraintes, et non pas par rapport au les déplacements nodaux $\{\hat{u}\}$.

Dans de la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS), la formulation de cette dernière requiert la représentation du champ stochastique et sa discrétisation en un ensemble de variables aléatoires discrètes, dont les propriétés statistiques dépendent du choix du maillage utilisé dans l'analyse.

9- Représentation d'un champ stochastique :

Les différentes méthodes qui servent à représenter un champ stochastique donné sont résumées **en substance** comme suit :

- A. Les méthodes du point discrétisé (le point central, le point nodal ...).
- B. La méthode de la moyenne locale.
- C. La méthode de l'interpolation.
- D. Les méthodes d'expansion (développement) en séries.
 - D1. Méthode d'expansion en séries de **Kernel**.
 - D2. Méthode d'expansion en séries de **Chaos**.
 - D3. Méthode d'expansion en séries de **Neumman**.
 - D4. Méthode d'expansion en séries de **Taylor**.

Remarque importante :

Le nombre important de méthodes qui servent à représenter un champ aléatoire, dénote clairement l'étendue et la complexité du domaine stochastique. En effet, des limitations assez sévères concernant le coefficient de variation (C_v), l'intervalle nodal qui est limité à une fraction du nombre d'ondes (λ), la taille géométrique des éléments qui dépend de la longueur de corrélation (l_c), les termes d'ordre supérieur des séries et le CPU time, ont été mises en évidence dans la littérature spécialisée, à l'effet de faire le choix qui convient pour la représentation d'un champ stochastique donné. A ce titre, les méthodes d'expansion en séries (D1 ...etc ...D4) sont utilisées dans les problèmes où la matrice de rigidité globale $[K]$ est invoquée. Pour des

raisons d'optimisation, d'efficience et de convenance pratique, l'accent sera mis sur la méthode d'expansion en séries de **Taylor** et la méthode du point central.

10 - Discrétisation d'un champ stochastique :

La discrétisation d'un champ stochastique, qui garantit des résultats satisfaisants, dépend de trois facteurs essentiels :

- 1- La longueur de corrélation (l_c) qui décrit le taux de fluctuation des valeurs du champ aléatoire. La distance entre deux variables aléatoires doit être suffisamment courte afin de pouvoir capter les propriétés essentielles du champ aléatoire. **Der-Kiureghian** et al. (1989) recommande d'utiliser des éléments finis ayant une taille qui varie entre $0.25(l_c)$ et $0.5(l_c)$ afin d'assurer une représentation satisfaisante du champ stochastique. En fait, la longueur de corrélation mesure la distance spatiale ou temporelle au-delà de laquelle les fluctuations de deux grandeurs adjacentes deviennent statistiquement indépendantes.
- 2- Le maillage adopté dans l'analyse ne doit pas être excessivement raffiné, au risque d'induire une très forte corrélation des variables aléatoires, et par conséquent la matrice de corrélation tend à devenir singulière.
- 3- L'intervalle nodal est limité à $0.5(\lambda)$, λ : représente le nombre d'ondes.

11 - Formulation de la méthode des éléments finis stochastiques :

La formulation des éléments finis déterministe (MEFD) peut se faire soit en utilisant le résidu ($\mathbb{R}$), auquel cas on parle de la formulation intégrale, soit en utilisant l'expression de l'énergie potentielle totale minimum (π), auquel cas on parle de la formulation variationnelle. L'expression (π) étant stationnaire, son optimisation ($\delta\pi = 0$) produit l'équilibre.

$$\pi = U - W = \iiint U_0 dv - W = \iiint \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dv - W$$

$$\varepsilon = [L][N][\hat{u}] = [B]\{\hat{u}\}$$

$$\pi = \iiint \frac{1}{2} \{\hat{u}\}^T [B]^T [D] [B] \{\hat{u}\} dv - \{\hat{u}\}^T \{\hat{F}\}$$

$$\delta\pi = 0 \Rightarrow \iiint [B]^T [D] [B] dv \cdot \{\hat{u}\} - \{\hat{F}\} = 0$$

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dv$$

Dans le cas où la matrice des raideurs est déterministe, la solution l'est automatiquement. Cependant, lorsque l'une des grandeurs suivantes : $[K]$, $[C]$, $[M]$ ou le vecteur $\{\hat{F}\}$ est aléatoire, la solution devient alors aléatoire. Il est à noter que l'effort analytique et numérique est tout à fait raisonnable si l'on ne considère dans l'analyse que le vecteur force comme variable aléatoire. Cependant, des difficultés supplémentaires apparaissent quand des paramètres mécaniques (comme le module de **Young**) ou des paramètres géométriques (comme l'épaisseur) sont considérés comme variables aléatoires. Afin de mieux fixer les idées, on considère un problème en contraintes planes où un paramètre mécanique (le module de **Young**) est considéré comme variable aléatoire en deux dimensions $E(x, y)$. La matrice qui lie les contraintes aux déformations (matrice de comportement) s'écrit comme suit :

$$[D] = d \begin{bmatrix} 1 & \vartheta & 0 \\ \vartheta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \vartheta)}{2} \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{E}{(1 - \vartheta^2)}$$

Dès lors que le module de **Young** est considéré comme variable aléatoire spatiale $E(x, y)$, le facteur (d) s'écrit alors comme suit :

$$d = \frac{E_0(1 + f(x, y))}{(1 - \vartheta^2)}$$

E_0 : représente la valeur moyenne de la variable aléatoire (E).

Il est à noter que $f(x, y)$ est un champ aléatoire **Gaussien** homogène et isotrope ayant une moyenne nulle, et une fonction d'autocorrélation R_{ff} .

Par extension de la formulation de la (MEFD), on détermine la matrice de rigidité élémentaire stochastique (K^e) qui se compose de deux parties, l'une est dite non fluctuée (K_0^e), et l'autre est dite fluctuée (K_*^e). La construction de la matrice de rigidité globale est obtenue moyennant la contribution de tous les éléments du modèle adopté où (NE) représente le nombre total d'éléments.

$$K^e = K_0^e + K_*^e = K_0^e(1 + f(x, y))$$

$$K = \sum_{e=1}^{NE} \iiint [B]^T [D_0] [B] dv + \sum_{e=1}^{NE} \iiint f(x, y) [B]^T [D_0] [B] dv$$

$$K = K_0 + K_*$$

L'étape finale consiste à solutionner le système d'équations ci-dessous en utilisant la méthode d'expansion en séries de **Taylor**.

$$(K_0 + K_*)U = F$$

Définitions importantes :

Un champ **Gaussien** est un champ dont la valeur en tout point suit la loi normale.

Un champ homogène (stationnaire) est un champ où aucune position n'est privilégiée, les propriétés statistiques de ce champ (moyenne, variance et covariance) sont invariantes par translation, c'est à dire elles ne dépendent pas de la position spatiale.

Un champ isotrope est un champ où aucune direction n'est privilégiée, les propriétés statistiques de ce champ sont invariantes par rotation, c'est-à-dire si l'on fait tourner le repère d'un angle donné, ces propriétés restent inchangées.

Si le champ est homogène et isotrope, sa fonction de covariance ne dépend que de la distance (le module) entre deux points, et non pas du vecteur séparant les deux points.

Les modèles classiques de fonctions de corrélation sont au nombre de trois, l'un est dit modèle **Gaussien** (utilisé pour des surfaces régulières caractérisées par de grandes valeurs de la longueur de corrélation l_c), le deuxième est dit modèle **Markovien** ou exponentiel (adapté aux surfaces irrégulières ou rugueuses caractérisées par de petites valeurs de l_c), et le troisième modèle concerne le bruit blanc.

La fonction de corrélation **Gaussienne** a la forme suivante : $\rho(r) = \exp\left\{-\left\{\frac{r}{l_c}\right\}^2\right\}$

La fonction de corrélation **Markovienne** s'écrit comme suit : $\rho(r) = \exp\left\{\frac{-r}{l_c}\right\}$

$$r : \text{distance entre deux points, } r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$l_c : \text{longueur de corrélation}$$

Si $r = l_c$, $\rho(r = l_c) = (1/e) = 37\%$. La valeur maximale de $\rho(r)$ est $\rho(0) = 1$.

Si $r < l_c$, la corrélation tend vers (1), ce qui veut dire que les valeurs $E(x, y)$ de deux points sont proches l'une par rapport à l'autre, la corrélation est forte.

Si $r > l_c$, la corrélation tend vers zéro. Les valeurs $E(x, y)$ de deux points sont éloignées l'une par rapport à l'autre (elles sont statistiquement indépendantes).

Le calcul de la longueur de corrélation (l_c) d'un champ aléatoire dont les valeurs sont régulièrement épacées peut se faire en suivant les étapes suivantes :

- A partir de données expérimentales, on calcule la fonction d'autocorrélation $R_{rr}(k)$, pour plusieurs décalages ($\tau = k \cdot \Delta T = k$), puis on divise $R_{rr}(k)$ par $R_{rr}(0)$ pour obtenir la fonction de corrélation normalisée $\rho(r)$. Le calcul de (l_c) peut se faire par intégration : $l_c = \int_0^\infty \rho(r) dr$ (l'aire sous la courbe). Cette méthode est pratique et précise, elle est recommandée pour des champs aléatoires dont la structure est organisée en grille.

$$R_{rr}(k) = \frac{1}{(N-k)} \sum_{i=1}^{N-k} (E_i - \bar{E})(E_{i+k} - \bar{E})$$

- Le calcul de la longueur de corrélation (l_c) peut aussi se faire en ajustant un modèle exponentiel aux valeurs de la fonction de corrélation $\rho(r)$. (l_c) correspond alors à une distance à laquelle la corrélation tombe à $(1/e) = 37\%$.

Le calcul de la longueur de corrélation (l_c) d'un champ aléatoire dont les valeurs sont épacées d'une manière quelconque peut se faire en suivant les étapes suivantes :

- A partir de données expérimentales, on regroupe plusieurs paires de points qui ont approximativement la même distance $r = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$, puis on calcule la fonction d'autocovariance $ACov(r)$, pour chaque groupe de valeurs en utilisant la formule ci-dessous, ensuite les valeurs de $ACov(r)$ sont divisées par $ACov(0)$ pour obtenir la fonction de corrélation normalisée $\rho(r)$. Le calcul de (l_c) peut se faire par intégration : $l_c = \int_0^\infty \rho(r) dr$ (l'aire sous la courbe).

$$ACov(r) = \frac{1}{(N_r)} \sum_{i=1}^{N_r} (E_i - \bar{E})(E_{i+r} - \bar{E})$$

N_r : représente le nombre de paires ayant la même distance (r)

- Le calcul de la longueur de corrélation (l_c) peut aussi se faire en ajustant un modèle exponentiel aux valeurs de la fonction de corrélation $\rho(r)$. (l_c) peut être extraite et correspond à une corrélation qui tombe à $(1/e) = 37\%$.

Remarque importante :

Dans le domaine de Génie Civil et en absence des données expérimentales, l'estimation de (l_c) d'une manière forfaitaire est une pratique courante en mécanique stochastique. Pour un talus, (l_c) varie entre 10% et 30% de sa hauteur. Pour une poutre, (l_c) varie entre 10% et 50% de sa portée globale.

En éléments finis stochastiques, (l_c) doit être compatible avec la taille des éléments afin de capter d'une manière correcte les fluctuations du champ aléatoire. La taille des éléments varie entre 25% et 50% de la longueur de corrélation (l_c) .

12 - Méthode d'expansion en séries de Taylor pour la (MEFS) :

L'application de la méthode d'expansion en séries de **Taylor** pour une matrice de rigidité stochastique, où le champ aléatoire $f(x, y, z)$ est discrétisé par un ensemble de (N) variables aléatoires centrées $\{\alpha_i\}_{i=1,N}$, conduit à l'expression suivante :

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^N K_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots$$

K_0 : représente la matrice de rigidité évaluée avec la valeur moyenne du vecteur des

variables aléatoires : $K_i^I = \left. \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_0}$, $K_{ij}^{II} = \left. \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha_0}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots\}^T$

La résolution du système d'équations d'équilibre $(K_0 + K_*)U = F$, nécessite également l'expansion en séries de **Taylor** du vecteur déplacements (U), et du vecteur forces (F).

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^N U_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots$$
$$F = F_0 + \sum_{i=1}^N F_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j + \dots$$

Enfin, la solution de l'équation d'équilibre relative aux déplacements (U), et ses dérivées jusqu'à l'ordre (2), sont représentées par les trois formules ci-dessous :

Equation d'équilibre d'ordre (0) :

$$K_0 U_0 = F_0$$
$$U_0 = K_0^{-1} F_0$$

Equation d'équilibre d'ordre (1) :

$$\begin{aligned}
 K_0 U_0 &= F_0 \\
 K_0 U_i^I + K_i^I U_0 &= F_i^I \\
 K_0 U_i^I &= F_i^I - K_i^I U_0 \\
 U_i^I &= K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0)
 \end{aligned}$$

Equation d'équilibre d'ordre (2) :

$$\begin{aligned}
 K_0 U_0 &= F_0 \\
 K_0 U_i^I + K_i^I U_0 &= F_i^I \\
 K_0 U_{ij}^{II} + K_j^I U_i^I + K_{ij}^{II} U_0 + K_i^I U_j^I &= F_{ij}^{II} \\
 U_{ij}^{II} &= K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0)
 \end{aligned}$$

L'approximation du premier ordre (perturbation du premier ordre) est obtenue en opérant une troncature après le deuxième terme dans l'expression de la solution (U). L'espérance, la matrice des covariances et le vecteur des variances de (U) sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 E_1[U] &= U_0 + \sum_{i=1}^N U_i^I E[\alpha_i] = U_0 \\
 Cov_1[U, U^T] &= E[(U - E_1[U])(U - E_1[U])^T] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_i^I (U_j^I)^T E[\alpha_i \alpha_j] \\
 Var_1(U) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N diag[U_i^I (U_j^I)^T] E[\alpha_i \alpha_j]
 \end{aligned}$$

La valeur de l'espérance $E[\alpha_i \alpha_j]$ est déterminée par la matrice des covariances.

L'approximation du deuxième ordre (perturbation du second ordre) est obtenue en opérant une troncature après le troisième terme dans l'expression de la solution (U). L'espérance, la matrice des covariances et le vecteur des variances de (U) sont donnés par les formules suivantes :

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij}^{II} E[\alpha_i \alpha_j]$$

Pour des variables aléatoires **Gaussiennes** centrées et à moyennes nulles, on dispose des relations ci-dessous qui servent à calculer l'espérance du produit de trois variables aléatoires, et celui de quatre variables aléatoires :

$$E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k] = 0$$

$$E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k] = E[\alpha_i]E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_j]E[\alpha_i \alpha_k] + E[\alpha_k]E[\alpha_i \alpha_j] - 2E[\alpha_i]E[\alpha_j]E[\alpha_k]$$

Si les variables aléatoires sont indépendantes, $E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k] = E[\alpha_i]E[\alpha_j]E[\alpha_k]$

$$E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l] = E[\alpha_i \alpha_j]E[\alpha_k \alpha_l] + E[\alpha_i \alpha_l]E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_i \alpha_k]E[\alpha_j \alpha_l]$$

Si les variables aléatoires sont indépendantes, $E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l] = E[\alpha_i]E[\alpha_j]E[\alpha_k]E[\alpha_l]$

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij}^{II} E[\alpha_i \alpha_j]$$

$$Cov_2[U, U^T] = Cov_1[U, U^T] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N U_{ij}^{II} (U_{kl}^{II})^T \cdot \varphi$$

$$Var_2[U] = Var_1[U] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N diag[U_{ij}^{II} (U_{kl}^{II})^T] \cdot \varphi$$

$$\varphi = E[\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l] - E[\alpha_i \alpha_j]E[\alpha_k \alpha_l] = (E[\alpha_i \alpha_l]E[\alpha_j \alpha_k] + E[\alpha_i \alpha_k]E[\alpha_j \alpha_l])$$

Remarques importantes :

- 1- Pour des perturbations du premier et deuxième ordre, la méthode d'expansion en séries de **Taylor** produit des résultats satisfaisants pour de petites valeurs du coefficient de variation ($C_v < 20\%$). Le CPU time mobilisé est raisonnable.
- 2- Les formules de l'espérance, de la matrice des covariances et du vecteur des variances de la solution (U), pour le premier ordre et le deuxième ordre, peuvent être explicitement établies en utilisant la notation intrinsèque (symbolique) suivante :

$$E_1[U] = U_0$$

$$Cov_1(U^{\Delta, \delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$\begin{aligned}
E_2[U^\Delta] &= E_1[U] + \frac{1}{2} U_\Delta^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} \\
Cov_2(U^{\Delta,\delta}) &= Cov_1(U^{\Delta,\delta}) + \frac{1}{4} U_\Delta^{\alpha\beta} \cdot U_\delta^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon} \\
Var_2(U^{\Delta=\delta}) &= Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_\Delta^{\alpha\beta} \cdot U_\delta^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}]
\end{aligned}$$

Les symboles (Δ, δ) indiquent les indices des variables aléatoires de la réponse (out put), et les symboles $(\alpha, \beta, \sigma, \varepsilon)$ indiquent les indices des variables aléatoires (in put).

$MS^{\alpha\beta}$ représente le second moment statistique (la matrice des covariances), et $MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}$ représente le quatrième moment statistique des variables aléatoires d'un nœud.

13 - Méthode de discrétisation du point central :

La méthode de discrétisation du point central est l'une des méthodes la plus utilisée dans sa catégorie afin de représenter un champ aléatoire $H(x)$, (par ses valeurs dans certains points), à grande longueur de corrélation (l_c).

$$H(x) = [H(x_1^c), H(x_2^c), H(x_3^c) \dots H(x_i^c) \dots]$$

$$x_i^c = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$$

x_i^c : coordonnée du centre de l'élément (i)

N : nombre de nœuds de l'élément

x_j : coordonnées nodales de l'élément (i)

13.1 - Avantages de la méthode du point central :

- ✓ La matrice de corrélation est calculée aisément.
- ✓ La matrice de corrélation est définie positive.
- ✓ La fonction de distribution est la même pour le cas continu ou discret (pas de restriction au champ **Gaussien**).

13.2 - Inconvénients de la méthode du point central :

- La taille (h) des éléments est constante.
- La taille élémentaire doit être suffisamment petite afin de pouvoir considérer les différentes propriétés aléatoires comme constantes à travers l'élément. Autrement dit, (h) doit être petit par rapport à (l_c).
- La nécessité d'avoir un maillage raffiné exige un CPU-time très élevé.

Remarque :

Les valeurs du champ aléatoire $H(x)$ peuvent être obtenues en ajustant un modèle théorique aux données, ou générées par une simulation numérique.

14 - Approche performante de la méthode des éléments finis stochastiques :

La méthode des éléments finis stochastique a été développée afin d'analyser des structures, à paramètres incertains, qui sont soumises des forces déterministes ou stochastiques. L'application des méthodes d'expansion en séries de **Taylor**, **Neuman** ...etc... sont utilisées pour représenter le champ aléatoire à prendre en considération dans les calculs. Le développement de la série est limité au second ordre en raison de contraintes pratiques pénalisantes (un effort numérique important et un CPU time extrêmement élevé) pour des structures ayant un nombre important de (d.d.l.). En vue de surmonter certaines difficultés relatives à la précision des calculs, une approche alternative basée sur des déviations (δ) des différents paramètres de l'équilibre a été proposée par **I. Elishakoff**, où le calcul de la moyenne fait appel au moment du second ordre des paramètres incertains du problème traité. Cette approche est relativement simple, et son application concerne des structures soumises à des forces déterministes, et ayant comme paramètres incertains la rigidité (EI), la section (A) ...etc... Les résultats obtenus par cette approche sont plus précis que ceux de la méthode de perturbation en comparaison avec la solution exacte de certains cas. Cependant, on note que cette approche ne trouve sa pleine efficacité que si l'on considère certaines hypothèses simplificatrices de calcul.

$$K = \bar{K} + \delta K = K_b + \delta K$$

$$U = \bar{U} + \delta U = U_b + \delta U$$

$$F = \bar{F} + \delta F = F_b + \delta F$$

$\bar{K} = K_b$: représente la moyenne de la matrice de rigidité stochastique K .

K_0 : représente la matrice de rigidité déterministe évaluée avec la moyenne des paramètres incertains du problème traité.

$$K_b U_b = F_b$$

$$\delta K \cdot U_b + K_b \cdot \delta U = \delta F$$

$$KU = F$$

$$(K_b + \delta K)(U_b + \delta U) = F_b + \delta F$$

$$K_b U_b + K_b \cdot \delta U + \delta K \cdot U_b + \delta K \cdot \delta U = F_b + \delta F$$

$$K_b U_b + K_b \cdot \delta U + \delta K \cdot U_b + \delta K \cdot \delta U = F_b + \delta K \cdot U_b + K_b \cdot \delta U$$

$$K_b U_b + \delta K \cdot \delta U = F_b$$

$$K_b U_b + E[\delta K . \delta U] = F_b$$

Après une série de transformations, on aboutit aux expressions suivantes :

$$A U_b = F_b - E[\delta K . K_b^{-1} . \delta F]$$

$$A = K_b - E[\delta K . K_b^{-1} . \delta K]$$

$$\delta U = K_b^{-1}(\delta F + E[\delta K . \delta U] - \delta K . U_b - \delta K . \delta U)$$

$$\delta U^T = (\delta F^T + E[\delta U^T . \delta K] - U_b^T . \delta K - \delta U^T . \delta K) K_b^{-1}$$

On note que δU peut s'écrire aussi sous la forme suivante si (F) est déterministe :

$$\delta U = -K_b^{-1} . \delta K . U_b$$

$$Cov(U, U^T) = E[\delta U . \delta U^T]$$

$$E[\delta U . \delta U^T] = K_b^{-1}(E[\delta F . \delta F^T] + E[\delta K . U_b U_b^T . \delta K] - E[\delta F . U_b^T . \delta K] - E[\delta K . U_b . \delta F^T]) K_b^{-1}$$

Comme on peut le remarquer, seuls les moments du second ordre sont retenus, ceux d'ordre supérieur sont négligés.

$$Cov(U, U^T) = E[\delta U . \delta U^T] = K_b^{-1} . C . K_b^{-1}$$

$$K_b = K_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}^{II} E[\alpha_i \alpha_j]$$

$$C = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_i^I U_b U_b^T K_j^I E[\alpha_i \alpha_j]$$

$$E[U] = U_b = A^{-1}\{F_b - E[\delta K . K_b^{-1} . \delta F]\}$$

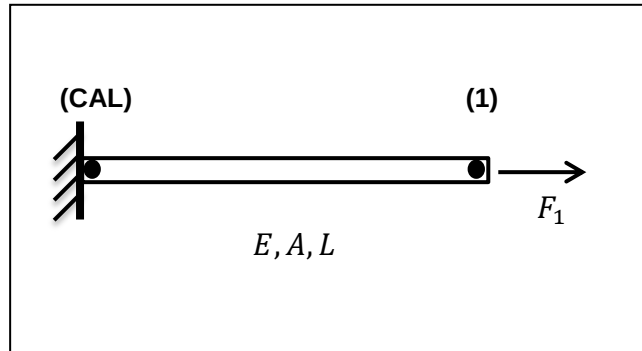
$$\delta K = \sum_{i=1}^N K_i^I \alpha_i$$

K : représente la matrice de rigidité globale

On note à titre d'exemple que si l'on considère le module de **Young** comme variable aléatoire, alors α représente sa fluctuation normalisée.

$$E = E_0 \left(1 + \frac{\delta E}{E_0} \right) = E_0 (1 + \alpha)$$

Exercices corrigés



EXO1 :

Pour la barre suivante, on demande de calculer le premier moment $E(U)$ et le second moment $Var(U)$ de la solution de l'équation d'équilibre $[K]\{U\} = \{F\}$. On considère le module de **Young** (E) comme variable aléatoire qui suit une distribution de la loi uniforme dans l'intervalle $[-a, a]$.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Réaction \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\left[\frac{EA}{L} \right] \{U_1\} = \{F_1\}$$

Les trois équations utilisées en éléments finis stochastiques sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ U_i^I &= K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0) \\ U_{ij}^{II} &= K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0) \end{aligned}$$

Identification des paramètres :

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{E_0 A}{L} \\ U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ F_0 &= F_1 \text{ (déterministe)} \end{aligned}$$

$$K_0 = \frac{E_0 A}{L} \quad , \quad K = \frac{EA}{L} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial E} = \frac{A}{L} \quad , \quad \frac{\partial^2 K}{\partial^2 E} = 0$$

$$F_0 = F_1 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial E} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 E} = 0$$

$$U_0 = (K_0)^{-1} F_0 = \frac{F_1 L}{E_0 A}$$

$$U_i^I = K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0)$$

$$U^E = (K_0)^{-1} (F^E - K^E U_0) = \left(\frac{L}{E_0 A} \right) \left(0 - \frac{A}{L} U_0 \right) = - \frac{F_1 L}{(E_0)^2 A}$$

$$U_{ij}^{II} = K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0)$$

$$U^{EE} = K_0^{-1} (0 - 2K^E U^E - 0) = \left(\frac{L}{E_0 A} \right) \left(0 + 2 \frac{A}{L} \cdot \frac{F_1 L}{(E_0)^2 A} - 0 \right) = \frac{2F_1 L}{(E_0)^3 A}$$

Les formules de l'espérance, de la matrice des covariances et du vecteur des variances de la solution (U), pour le premier et le deuxième ordre, peuvent être explicitement établies en utilisant la notation intrinsèque (symbolique) suivante :

$$E_1[U] = U_0$$

$$Cov_1(U^{\Delta, \delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$E_2[U^{\Delta}] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Cov_2(U^{\Delta, \delta}) = Cov_1(U^{\Delta, \delta}) + \frac{1}{4} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\epsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon}$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\epsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon}]$$

Les symboles (Δ, δ) indiquent les indices des variables aléatoires de la réponse (out put), et les symboles ($\alpha, \beta, \sigma, \epsilon$) indiquent les indices des variables aléatoires d'un nœud (in put).

$MS^{\alpha\beta}$ représente le second moment statistique (la matrice des covariances), et $MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon}$ représente le quatrième moment statistique des variables aléatoires d'un nœud.

$$E_1[U] = U_0 = \frac{F_1 L}{E_0 A}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \left(\frac{-F_1 L}{(E_0)^2 A} \right) \left(\frac{-F_1 L}{(E_0)^2 A} \right) Var(E) = \left(\frac{F_1 L}{(E_0)^2 A} \right)^2 Var(E)$$

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} = \frac{F_1 L}{E_0 A} + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$E_2[U] = \frac{F_1 L}{E_0 A} + \frac{1}{2} \frac{2 F_1 L}{(E_0)^3 A} Var(E) = \frac{F_1 L}{E_0 A} \left(1 + \frac{1}{(E_0)^2} Var(E) \right)$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\epsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon}]$$

$$Var_2[U] = Var_1[U] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N diag[U_{ij}^{II} (U_{kl}^{II})^T] \cdot \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= E[\alpha^4] - E[\alpha^2] \cdot E[\alpha^2] = \left\{ \frac{9}{5} (Cv)^4 - (Cv)^2 \cdot (Cv)^2 \right\} (\alpha^4) = 0.8 (Cv)^4 (\alpha^4) \\ \varphi &= 0.8 (Cv)^4 (\alpha^4) = 0.8 (Cv)^4 (E_0^4) \end{aligned}$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_2[U] = \left(\frac{F_1 L}{(E_0)^2 A} \right)^2 Var(E) + \frac{1}{4} \left(\frac{2 F_1 L}{(E_0)^3 A} \right) \left(\frac{2 F_1 L}{(E_0)^3 A} \right) \varphi$$

$$Var_2(U) = \left(\frac{F_1 L}{(E_0)^2 A} \right)^2 Var(E) + \left(\frac{F_1 L}{(E_0)^3 A} \right)^2 0.8 (Cv)^4 (E_0^4)$$

$$Var_2(U) = \left(\frac{F_1 L}{E_0 A} \right)^2 \{ (Cv)^2 + 0.8 (Cv)^4 \}$$

Résumé :

$$E_1[U_1] = \frac{F_1 L}{E_0 A}$$

$$Var_1(U_1) = \left(\frac{F_1 L}{(E_0)^2 A} \right)^2 Var(E) = \left(\frac{F_1 L}{E_0 A} \right)^2 (Cv)^2$$

$$E_2[U_1] = \frac{F_1 L}{E_0 A} \left(1 + \frac{1}{(E_0)^2} Var(E) \right) = \frac{F_1 L}{E_0 A} (1 + (Cv)^2)$$

$$Var_2(U_1) = \left(\frac{F_1 L}{E_0 A} \right)^2 (Cv)^2 \{ 1 + 0.8 (Cv)^2 \}$$

Remarque : L'écart entre les valeurs de $Var_1(U_1)$ et $Var_2(U_1)$ est très faible.

On considère maintenant la section (A) comme variable aléatoire.

La procédure est la même que précédemment du moment que la section (A) et le module de **Young** (E) sont tous les deux inversement proportionnels aux déplacements (U).

$$E_1[U] = U_0 = \frac{F_1 L}{EA_0}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \left(\frac{-F_1 L}{E(A_0)^2}\right) \left(\frac{-F_1 L}{E(A_0)^2}\right) Var(A) = \left(\frac{F_1 L}{E(A_0)^2}\right)^2 Var(A)$$

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} = \frac{F_1 L}{EA_0} + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$E_2[U] = \frac{F_1 L}{EA_0} + \frac{1}{2} \frac{2F_1 L}{E(A_0)^3} Var(A) = \frac{F_1 L}{EA_0} \left(1 + \frac{1}{(A_0)^2} Var(A)\right)$$

$$Var_2[U] = Var_1[U] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N diag[U_{ij}^{II} (U_{kl}^{II})^T] \cdot \varphi$$

$$\varphi = E[\alpha^4] - E[\alpha^2] \cdot E[\alpha^2] = \left\{ \frac{9}{5} (Cv)^4 - (Cv)^2 \cdot (Cv)^2 \right\} (\alpha^4) = 0.8(Cv)^4 (\alpha^4)$$

$$\varphi = 0.8(Cv)^4 (\alpha^4) = 0.8(Cv)^4 (A_0^4)$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_2[U] = \left(\frac{F_1 L}{(A_0)^2 E}\right)^2 Var(E) + \frac{1}{4} \left(\frac{2F_1 L}{(A_0)^3 E}\right) \left(\frac{2F_1 L}{(A_0)^3 E}\right) \varphi$$

$$Var_2(U) = \left(\frac{F_1 L}{(E_0)^2 A}\right)^2 Var(A) + \left(\frac{F_1 L}{(A_0)^3 E}\right)^2 0.8(Cv)^4 (A_0^4)$$

$$Var_2(U) = \left(\frac{F_1 L}{EA_0}\right)^2 \{(Cv)^2 + 0.8(Cv)^4\}$$

Résumé :

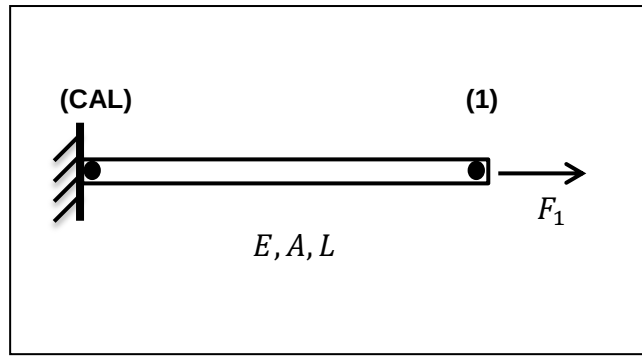
$$E_1[U_1] = \frac{F_1 L}{EA_0}$$

$$Var_1(U_1) = \left(\frac{F_1 L}{E(A_0)^2}\right)^2 Var(A) = \left(\frac{F_1 L}{EA_0}\right)^2 (Cv)^2$$

$$E_2[U_1] = \frac{F_1 L}{EA_0} \left(1 + \frac{1}{(A_0)^2} Var(A)\right) = \frac{F_1 L}{EA_0} (1 + (Cv)^2)$$

$$Var_2(U_1) = \left(\frac{F_1 L}{EA_0}\right)^2 (Cv)^2 \{1 + 0.8(Cv)^2\}$$

Remarque : L'écart entre les valeurs de $Var_1(U_1)$ et $Var_2(U_1)$ est très faible.



Détails des calculs :

Pour la barre suivante, on demande de calculer le premier moment $E(U)$ et le second moment $Var(U)$ de la solution de l'équation d'équilibre $[K]\{U\} = \{F\}$. On considère la section (A) comme variable aléatoire qui suit une distribution de la loi uniforme dans l'intervalle $[-a, a]$.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_1 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Réaction} \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\left[\frac{EA}{L} \right] \{U_1\} = \{F_1\}$$

Les trois équations utilisées en éléments finis stochastiques sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ U_i^I &= K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0) \\ U_{ij}^{II} &= K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0) \end{aligned}$$

Identification des paramètres :

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{EA_0}{L} \\ U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ F_0 &= F_1 \text{ (déterministe)} \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_0 = \frac{EA_0}{L} \quad , \quad K = \frac{EA}{L} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial A} = \frac{E}{L} \quad , \quad \frac{\partial^2 K}{\partial^2 A} = 0$$

$$\mathbf{F}_0 = F_1 \quad , \quad \frac{\partial F_1}{\partial A} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 A} = 0$$

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{K}_0)^{-1} \mathbf{F}_0 = \frac{F_1 L}{EA_0}$$

$$\mathbf{U}_i^I = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}^A = (\mathbf{K}_0)^{-1} (\mathbf{F}^A - \mathbf{K}^A \mathbf{U}_0) = \left(\frac{L}{EA_0} \right) \left(0 - \frac{E}{L} U_0 \right) = -\frac{F_1 L}{E(A_0)^2}$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{II} = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_{ij}^{II} - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}^{AA} = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{0} - 2\mathbf{K}^A \mathbf{U}^A - \mathbf{0}) = \left(\frac{L}{EA_0} \right) \left(0 + 2 \frac{E}{L} \frac{F_1 L}{E(A_0)^2} - 0 \right) = \frac{2F_1 L}{E(A_0)^3}$$

Les formules de l'espérance, de la matrice des covariances et du vecteur des variances de la solution (U), pour le premier et le deuxième ordre, peuvent être explicitement établies en utilisant la notation intrinsèque (symbolique) suivante :

$$E_1[U] = U_0$$

$$Cov_1(U^{\Delta, \delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$E_2[U^{\Delta}] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Cov_2(U^{\Delta, \delta}) = Cov_1(U^{\Delta, \delta}) + \frac{1}{4} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}]$$

Les symboles (Δ, δ) indiquent les indices des variables aléatoires de la réponse (out put), et les symboles ($\alpha, \beta, \sigma, \varepsilon$) indiquent les indices des variables aléatoires d'un nœud (in put).

$$E_1[U] = U_0 = \frac{F_1 L}{EA_0}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \left(\frac{-F_1 L}{E(A_0)^2}\right) \left(\frac{-F_1 L}{E(A_0)^2}\right) Var(A) = \left(\frac{F_1 L}{E(A_0)^2}\right)^2 Var(A)$$

$$Var_2[U] = Var_1[U] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N diag[U_{ij}^{II} (U_{kl}^{II})^T] \cdot \varphi$$

$$\varphi = E[\alpha^4] - E[\alpha^2] \cdot E[\alpha^2] = \left\{ \frac{9}{5} (Cv)^4 - (Cv)^2 \cdot (Cv)^2 \right\} (\alpha^4) = 0.8(Cv)^4 (\alpha^4)$$

$$\varphi = 0.8(Cv)^4 (\alpha^4) = 0.8(Cv)^4 (A_0^4)$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = \left(\frac{F_1 L}{(A_0)^2 E}\right)^2 Var(E) + \frac{1}{4} \left(\frac{2F_1 L}{(A_0)^3 E}\right) \left(\frac{2F_1 L}{(A_0)^3 E}\right) \varphi$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = \left(\frac{F_1 L}{(E_0)^2 A}\right)^2 Var(A) + \left(\frac{F_1 L}{(A_0)^3 E}\right)^2 0.8(Cv)^4 (A_0^4)$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = \left(\frac{F_1 L}{EA_0}\right)^2 \{(Cv)^2 + 0.8(Cv)^4\}$$

Résumé :

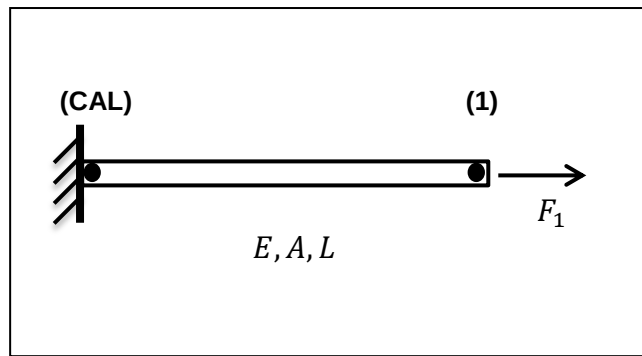
$$E_1[U_1] = \frac{F_1 L}{EA_0}$$

$$Var_1(U_1) = \left(\frac{F_1 L}{E(A_0)^2}\right)^2 Var(A) = \left(\frac{F_1 L}{EA_0}\right)^2 (Cv)^2$$

$$E_2[U_1] = \frac{F_1 L}{EA_0} \left(1 + \frac{1}{(A_0)^2} Var(A)\right) = \frac{F_1 L}{EA_0} (1 + (Cv)^2)$$

$$Var_2(U_1) = \left(\frac{F_1 L}{EA_0}\right)^2 (Cv)^2 \{1 + 0.8(Cv)^2\}$$

Remarque : L'écart entre les valeurs de $Var_1(U_1)$ et $Var_2(U_1)$ est très faible.



EXO2 :

Pour la barre suivante, on demande de calculer le premier moment $E(U)$ et le second moment $Var(U)$ de la solution de l'équation d'équilibre $[K]\{U\} = \{F\}$. On considère la force (F_1) comme variable aléatoire qui suit une distribution de la loi uniforme.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_1 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{Réaction} \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\left[\frac{EA}{L} \right] \{U_1\} = \{F_1\}$$

Les trois équations utilisées en éléments finis stochastiques sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ U_i^I &= K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0) \\ U_{ij}^{II} &= K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0) \end{aligned}$$

Identification des paramètres :

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{EA}{L} \\ U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ F_0 &= F_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_0 = K = \frac{EA}{L} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial F_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 K}{\partial^2 F_1} = 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial F_1} = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 F_1} = 0 \end{aligned}$$

$$U_0 = (K_0)^{-1} F_0 = \frac{F_0 L}{EA}$$

$$\begin{aligned} U_i^I &= K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0) \\ U^{F_1} &= (K_0)^{-1} (F^{F_1} - K^{F_1} U_0) = \left(\frac{L}{EA} \right) (1 - 0) = \frac{L}{EA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{ij}^{II} &= K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0) \\ U^{F_1 F_1} &= K_0^{-1} (F^{F_1 F_1} - 2K^{F_1} U^{F_1} - K^{F_1 F_1} U_0) = \left(\frac{L}{EA} \right) (0) = 0 \end{aligned}$$

Les formules de l'espérance, de la matrice des covariances et du vecteur des variances de la solution (U), pour le premier et le deuxième ordre, peuvent être explicitement établies en utilisant la notation intrinsèque (symbolique) suivante :

$$E_1[U] = U_0$$

$$Cov_1(U^{\Delta, \delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$\begin{aligned} E_2[U^{\Delta}] &= E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} \\ Cov_2(U^{\Delta, \delta}) &= Cov_1(U^{\Delta, \delta}) + \frac{1}{4} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\epsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon} \\ Var_2(U^{\Delta=\delta}) &= Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\epsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon}] \end{aligned}$$

Les symboles (Δ, δ) indiquent les indices des variables aléatoires de la réponse (out put), et les symboles ($\alpha, \beta, \sigma, \epsilon$) indiquent les indices des variables aléatoires d'un nœud (in put).

$$E_1[U] = U_0 = \frac{F_0 L}{EA}$$

$$\begin{aligned} Var_1(U^{\Delta=\delta}) &= diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}] \\ Var_1(U^{\Delta=\delta}) &= \left(\frac{L}{EA}\right) \left(\frac{L}{EA}\right) Var(F_1) = \left(\frac{L}{EA}\right)^2 Var(F_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2[U] &= E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} = \frac{F_0 L}{EA} + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} \\ E_2[U] &= \frac{F_0 L}{EA} + 0 = \frac{F_0 L}{EA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var_2(U^{\Delta=\delta}) &= Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\epsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon}] \\ Var_2(U^{\Delta=\delta}) &= \left(\frac{L}{EA}\right)^2 Var(F_1) + 0 = \left(\frac{L}{EA}\right)^2 Var(F_1) \end{aligned}$$

Résumé :

$$\begin{aligned} E_1[U_1] &= \frac{F_0 L}{EA} \\ Var_1(U_1) &= \left(\frac{L}{EA}\right)^2 Var(F_1) \\ E_2[U_1] &= \frac{F_0 L}{EA} \\ Var_2(U_1) &= \left(\frac{L}{EA}\right)^2 Var(F_1) \end{aligned}$$

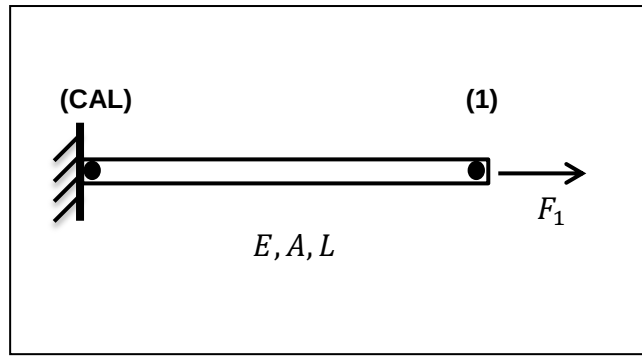
Remarque 1 :

Dans le cas où la variable aléatoire est proportionnelle (au degré un) à la réponse du problème traité, le calcul des propriétés statistiques au second d'ordre est sans objet.

Remarque 2 :

Pour chaque variable aléatoire α_i , la relation ci-dessous est vérifiée.

$$Var(U) = (U_0)^2 \cdot Cv^2(\alpha_i)$$



EXO3 :

Pour la barre suivante, on demande de calculer le premier moment $E(U)$ et le second moment $Var(U)$ de la solution de l'équation d'équilibre $[K]\{U\} = \{F\}$. On considère dans cet exercice deux variables aléatoires corrélées (L, F_1) .

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_1 = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Réaction \\ F_1 \end{Bmatrix}$$

L'équation à résoudre est la suivante :

$$\left[\frac{EA}{L} \right] \{U_1\} = \{F_1\}$$

Les trois équations utilisées en éléments finis stochastiques sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ U_i^I &= K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0) \\ U_{ij}^{II} &= K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0) \end{aligned}$$

Identification des paramètres :

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{EA}{L_0} \\ U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ F_0 &= F_0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_0 = \frac{EA}{L_0}, \quad \frac{\partial K}{\partial L} = \frac{-EA}{(L)^2} = \frac{-EA}{(L_0)^2}, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial^2 L} = \frac{2EA}{(L)^3} = \frac{2EA}{(L_0)^3}, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial L \partial F_1} = 0$$

$$\mathbf{K}_0 = \frac{EA}{L_0}, \quad \frac{\partial K}{\partial F_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial^2 F_1} = 0$$

Les dérivées par rapport à une variable aléatoire sont évaluées en utilisant la valeur moyenne de cette dernière.

$$\frac{\partial F_1}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 L} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial F_1} = 1, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 F_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial L \partial F_1} = 0$$

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{K}_0)^{-1} \mathbf{F}_0 = \frac{F_0 L_0}{EA}$$

$$\mathbf{U}_i^I = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}^L = (\mathbf{K}_0)^{-1} (\mathbf{F}^L - \mathbf{K}^L \mathbf{U}_0) = \left(\frac{L_0}{EA} \right) \left(0 + \frac{EA}{(L_0)^2} \cdot \frac{F_0 L_0}{EA} \right) = \frac{F_0}{EA}$$

$$\mathbf{U}^{F_1} = (\mathbf{K}_0)^{-1} (\mathbf{F}^{F_1} - \mathbf{K}^{F_1} \mathbf{U}_0) = \left(\frac{L_0}{EA} \right) (1 - 0) = \left(\frac{L_0}{EA} \right)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{II} = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_{ij}^{II} - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{II} = -\mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{0} + \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I + \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I + \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}_0)$$

$$i=1, \quad j=1 \quad [(K^{L,L} U^L + K^{L,L} U^L + K^{L,L} U_0) = (2K^{L,L} U^L + K^{L,L} U_0)], \quad \text{Var}(L)$$

$$i=1, \quad j=2 \quad [(K^{L,F_1} U^{F_1} + K^{F_1,L} U^L + K^{L,F_1} U_0) = K^{L,F_1} U^{F_1}], \quad \text{Cov}(L, F_1)$$

$$i=2, \quad j=1 \quad [(K^{F_1,L} U^L + K^{L,F_1} U^{F_1} + K^{F_1,L} U_0) = K^{L,F_1} U^{F_1}], \quad \text{Cov}(F_1, L)$$

$$i=2, \quad j=2 \quad [(K^{F_1,F_1} U^{F_1} + K^{F_1,F_1} U^{F_1} + K^{F_1,F_1} U_0) = 0], \quad \text{Var}(F)$$

$$U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = -\left(\frac{L_0}{EA} \right) \left\{ 2 \left(\frac{-EA}{(L_0)^2} \right) \left(\frac{F_0}{EA} \right) \text{Var}(L) + \left(\frac{2EA}{(L_0)^3} \right) \left(\frac{F_0 L_0}{EA} \right) \text{Var}(L) \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{-EA}{(L_0)^2} \right) \left(\frac{L_0}{EA} \right) \text{Cov}(L, F_1) \right\}$$

$$U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = \left(\frac{2}{EA} \right) \text{Cov}(L, F_1)$$

Les formules de l'espérance, de la matrice des covariances et du vecteur des variances de la solution (U), pour le premier et le deuxième ordre, peuvent être explicitement établies en utilisant la notation intrinsèque (symbolique) suivante :

$$E_1[U] = U_0$$

$$Cov_1(U^{\Delta,\delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$E_2[U^{\Delta}] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Cov_2(U^{\Delta,\delta}) = Cov_1(U^{\Delta,\delta}) + \frac{1}{4} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}]$$

Les symboles (Δ, δ) indiquent les indices des variables aléatoires de la réponse (out put), et les symboles ($\alpha, \beta, \sigma, \varepsilon$) indiquent les indices des variables aléatoires d'un nœud (in put).

$$E_1[U] = U_0 = \frac{F_0 L_0}{EA}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = [U^L \quad U^{F_1}] \begin{bmatrix} Var(L) & Cov(L, F_1) \\ Cov(F_1, L) & Var(F_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^L \\ U^{F_1} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} \frac{F_0}{EA} & \frac{L_0}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(L) & Cov(L, F_1) \\ Cov(F_1, L) & Var(F_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{F_0}{EA} \\ \frac{L_0}{EA} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} \frac{F_0}{EA} & \frac{L_0}{EA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{F_0}{EA} Var(L) + \frac{L_0}{EA} Cov(L, F_1) \\ \frac{F_0}{EA} Cov(F_1, L) + \frac{L_0}{EA} Var(F_1) \end{bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \left(\frac{F_0}{EA}\right)^2 Var(L) + 2 \left(\frac{F_0}{EA}\right) \left(\frac{L_0}{EA}\right) Cov(L, F_1) + \left(\frac{L_0}{EA}\right)^2 Var(F_1)$$

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} = \frac{F_0 L_0}{EA} + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$E_2[U] = \frac{F_0 L_0}{EA} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{EA} \right) Cov(L, F_1) \right\}$$

$$E_2[U] = \frac{F_0 L_0}{EA} + \left(\frac{1}{EA} \right) \cdot Cov(L, F_1)$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}]$$

(Calcul laborieux pour une contribution très faible)

Résumé :

$$E_1[U_1] = \frac{F_0 L_0}{EA}$$

$$Var_1(U_1) = \left(\frac{F_0}{EA}\right)^2 Var(L) + 2 \left(\frac{F_0}{EA}\right) \left(\frac{L_0}{EA}\right) Cov(L, F_1) + \left(\frac{L_0}{EA}\right)^2 Var(F_1)$$

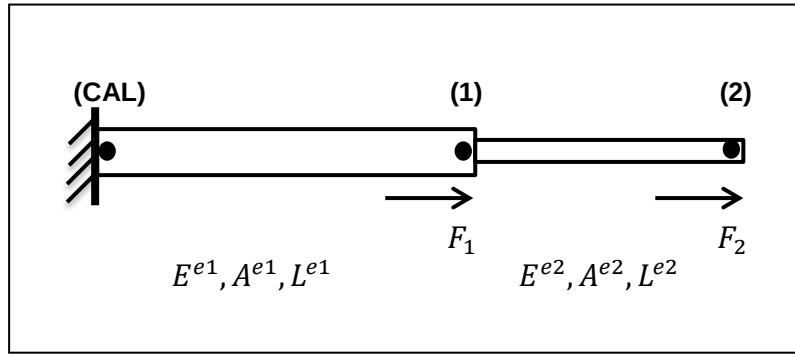
$$E_2[U_1] = \frac{F_0 L_0}{EA} + \left(\frac{1}{EA} \right) \cdot Cov(L, F_1)$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}]$$

(Calcul laborieux pour une contribution très faible)

Remarque pratique :

L'expérience a montré que le calcul au second ordre de l'espérance $E_2(U)$ peut-être réalisé à toute fin de comparaison avec $E_1(U)$. Cependant, le calcul de la variance $Var_2(U)$ n'apporte pratiquement pas de contribution à $Var_1(U)$, très souvent considérée tout à fait satisfaisante comme précision.



EXO4 :

Le système de barres suivant est composé de deux éléments ($e1$) et ($e2$). on demande de calculer le premier moment $E(U)$ et le second moment $Var(U)$ de la solution de l'équation d'équilibre $[K]\{U\} = \{F\}$. On considère dans cet exercice deux variables aléatoires statistiquement corrélées (E^{e1} , E^{e2}).

Données :

$$\begin{aligned} A^{e1} &= 4 \quad , \quad A^{e2} = 2 \\ L^{e1} &= 15 \quad , \quad L^{e2} = 10 \\ F_1 &= 200 \quad , \quad F_2 = 250 \\ E_0^{e1} &= 3000 \quad , \quad E_0^{e2} = 2500 \end{aligned}$$

$$Cov(E^{e1}, E^{e2}) = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 2 & 1.6 \end{bmatrix} (10^5)$$

L'équilibre matriciel s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \frac{E^{e1}A^{e1}}{L^{e1}} & -\frac{E^{e1}A^{e1}}{L^{e1}} & 0 \\ -\frac{E^{e1}A^{e1}}{L^{e1}} & \frac{E^{e1}A^{e1}}{L^{e1}} + \frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} & -\frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} \\ 0 & -\frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} & \frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U^{(1)}=? \\ U^{(2)}=? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Réaction \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Le système à résoudre est représenté par les deux équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \frac{E^{e1}A^{e1}}{L^{e1}} + \frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} & -\frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} \\ -\frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} & \frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Soient : } K_1 = \frac{E^{e1}A^{e1}}{L^{e1}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{E^{e2}A^{e2}}{L^{e2}}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} \\ \frac{1}{K_1} & \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L^{e1}}{E^{e1}A^{e1}} (F_1 + F_2) \\ \frac{L^{e1}}{E^{e1}A^{e1}} (F_1 + F_2) + \frac{L^{e2}}{E^{e2}A^{e2}} (F_2) \end{Bmatrix}$$

Les trois équations utilisées en éléments finis stochastiques sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 &= \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{U}_i^I &= \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_0) \\ \mathbf{U}_{ij}^{II} &= \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_{ij}^{II} - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}_0) \end{aligned}$$

Identification des paramètres :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= K(E_0^{e1}, E_0^{e2}) \\ \mathbf{U}_0 &= \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_0 &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} \frac{E_0^{e1} A^{e1}}{L^{e1}} + \frac{E_0^{e2} A^{e2}}{L^{e2}} & -\frac{E_0^{e2} A^{e2}}{L^{e2}} \\ -\frac{E_0^{e2} A^{e2}}{L^{e2}} & \frac{E_0^{e2} A^{e2}}{L^{e2}} \end{bmatrix}$$

$$K_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{L^{e1}}{\frac{E_0^{e1} A^{e1}}{L^{e1}}} & \frac{L^{e1}}{\frac{E_0^{e1} A^{e1}}{L^{e1}}} \\ \frac{L^{e1}}{\frac{E_0^{e1} A^{e1}}{L^{e1}}} & \frac{L^{e1}}{\frac{E_0^{e1} A^{e1}}{L^{e1}}} + \frac{L^{e2}}{\frac{E_0^{e2} A^{e2}}{L^{e2}}} \end{bmatrix}$$

$$U_0 = K_0^{-1} F_0 \quad , \quad F_0 = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$U_0 = \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} (F_1 + F_2) \\ \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} (F_1 + F_2) + \frac{L^{e2}}{E_0^{e2} A^{e2}} (F_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5625 \\ 1.0625 \end{Bmatrix}$$

$$U_i^I = K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0)$$

$$U^{,E^{e1}} = K_0^{-1} (F^{,E^{e1}} - K^{,E^{e1}} U_0)$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1),E^{e1}} \\ U^{(2),E^{e1}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} & \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} \\ \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} & \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} + \frac{L^{e2}}{E_0^{e2} A^{e2}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} F_1^{,E^{e1}} = 0 \\ F_2^{,E^{e1}} = 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{A^{e1}}{L^{e1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} \right\}$$

$$U^{,E^{e2}} = K_0^{-1} (F^{,E^{e2}} - K^{,E^{e2}} U_0)$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1),E^{e2}} \\ U^{(2),E^{e2}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} & \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} \\ \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} & \frac{L^{e1}}{E_0^{e1} A^{e1}} + \frac{L^{e2}}{E_0^{e2} A^{e2}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} F_1^{,E^{e2}} = 0 \\ F_2^{,E^{e2}} = 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{A^{e2}}{L^{e2}} & -\frac{A^{e2}}{L^{e2}} \\ -\frac{A^{e2}}{L^{e2}} & \frac{A^{e2}}{L^{e2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1),E^{e1}} \\ U^{(2),E^{e1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-U_0^{(1)}}{E_0^{e1}} \\ \frac{-U_0^{(1)}}{E_0^{e1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18,75 \\ -18,75 \end{Bmatrix} (10)^{-5} \quad , \quad \begin{Bmatrix} U^{(1),E^{e2}} \\ U^{(2),E^{e2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{U_0^{(1)} - U_0^{(2)}}{E_0^{e2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix} (10)^{-5}$$

Les formules de l'espérance, de la matrice des covariances et du vecteur des variances de la solution (U), pour le premier et le deuxième ordre, peuvent être explicitement établies en utilisant la notation intrinsèque (symbolique) suivante :

$$E_1[U] = U_0$$

$$Cov_1(U^{\Delta,\delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$E_2[U^{\Delta}] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Cov_2(U^{\Delta,\delta}) = Cov_1(U^{\Delta,\delta}) + \frac{1}{4} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}]$$

Les symboles (Δ, δ) indiquent les indices des variables aléatoires de la réponse (out put), et les symboles ($\alpha, \beta, \sigma, \varepsilon$) indiquent les indices des variables aléatoires d'un nœud (in put).

$$\begin{Bmatrix} U^{(1),E^{e1}} \\ U^{(2),E^{e1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18,75 \\ -18,75 \end{Bmatrix} (10)^{-5} \quad , \quad \begin{Bmatrix} U^{(1),E^{e2}} \\ U^{(2),E^{e2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix} (10)^{-5}$$

$$Cov(E^{e1}, E^{e1}) = \begin{bmatrix} 2.5 & 2 \\ 2 & 1.6 \end{bmatrix} (10^5)$$

$$E_1[U] = U_0 = \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5625 \\ 1.0625 \end{Bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} U^{(1),E^{e1}} & U^{(1),E^{e2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(E^{e1}) & Cov(E^{e1}, E^{e2}) \\ Cov(E^{e2}, E^{e1}) & Var(E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(1),E^{e1}} \\ U^{(1),E^{e2}} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} -18.75 & 0 \end{bmatrix} (10)^{-5} \begin{bmatrix} \mathbf{2.5(10^5)} & \mathbf{2(10^5)} \\ \mathbf{2(10^5)} & \mathbf{1.6(10^5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18.75 \\ 0 \end{bmatrix} (10)^{-5}$$

$$Var_1(U^{(1)}) = (-18.75)^2 (10)^{-10} \cdot \mathbf{(2.5)(10)^5} = 8.79 (10)^{-3}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} U^{(2),E^{e1}} & U^{(2),E^{e2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(E^{e1}) & Cov(E^{e1}, E^{e2}) \\ Cov(E^{e2}, E^{e1}) & Var(E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(2),E^{e1}} \\ U^{(2),E^{e2}} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = [-18.75 \quad -20](10)^{-5} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{2.5}(\textcolor{blue}{10}^5) & \textcolor{blue}{2}(\textcolor{blue}{10}^5) \\ \textcolor{blue}{2}(\textcolor{blue}{10}^5) & \textcolor{green}{1.6}(\textcolor{green}{10}^5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18.75 \\ -20 \end{bmatrix} (10)^{-5}$$

$$Var_1(U^{(2)}) = (-18.75)^2(10)^{-10} \cdot \textcolor{red}{(2.5)}(\textcolor{red}{10})^5 + 2(-18.75)(-20)(10)^{-5} \cdot \textcolor{blue}{2}(\textcolor{blue}{10})^5 + (-20)^2(10)^{-10} \cdot \textcolor{green}{(1.6)}(\textcolor{green}{10})^5$$

$$Var_1(U^{(2)}) = 30.19(10)^{-3}$$

$$Cov_1(U^{\Delta,\delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Cov_1(U^{\Delta,\delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} U^{(1),E^{e1}} & U^{(1),E^{e2}} \end{bmatrix} \cdot MS^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} U^{(2),E^{e1}} \\ U^{(2),E^{e2}} \end{bmatrix}$$

$$Cov_1(U^{\Delta,\delta}) = \begin{bmatrix} U^{(1),E^{e1}} & U^{(1),E^{e2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(E^{e1}) & Cov(E^{e1}, E^{e2}) \\ Cov(E^{e2}, E^{e1}) & Var(E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(2),E^{e1}} \\ U^{(2),E^{e2}} \end{bmatrix}$$

$$Cov_1(U^{\Delta,\delta}) = [-18.75 \quad 0](10)^{-5} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{2.5}(\textcolor{blue}{10}^5) & \textcolor{blue}{2}(\textcolor{blue}{10}^5) \\ \textcolor{blue}{2}(\textcolor{blue}{10}^5) & \textcolor{green}{1.6}(\textcolor{green}{10}^5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18.75 \\ -20 \end{bmatrix} (10)^{-5}$$

$$Cov_1(U^{(1)}, U^{(2)}) = (-18.75)^2(10)^{-10} \textcolor{red}{(2.5)}(\textcolor{red}{10})^5 + (-20)(-18.75)(10)^{-10} \textcolor{blue}{(2)}(\textcolor{blue}{10})^5$$

$$Cov_1(U^{(1)}, U^{(2)}) = 16.29(10)^{-3}$$

$$Cov_2(U^{\Delta,\delta}) = Cov_1(U^{\Delta,\delta}) + \frac{1}{4} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}]$$

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$E_1[U] = U_0 = \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{K}_0)^{-1} \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5625 \\ 1.0625 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_i^I = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}^{E^1} = (\mathbf{K}_0)^{-1} (\mathbf{F}^{E^1} - \mathbf{K}^{E^1} \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}^{E^2} = (\mathbf{K}_0)^{-1} (\mathbf{F}^{E^2} - \mathbf{K}^{E^2} \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{II} = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_{ij}^{II} - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I - \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I - \mathbf{K}_{ij}^{II} \mathbf{U}_0)$$

$$\mathbf{U}_{ij}^{II} = -\mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{0} + \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_j^I + \mathbf{K}_j^I \mathbf{U}_i^I + \mathbf{0})$$

$$i=1 \quad , \quad j=1 \quad \quad [(\mathbf{K}^{E^1} \mathbf{U}^{E^1} + \mathbf{K}^{E^1} \mathbf{U}^{E^1}) = 2(\mathbf{K}^{E^1} \mathbf{U}^{E^1})], \quad \text{Var}(\mathbf{E}^{e1})$$

$$i=1 \quad , \quad j=2 \quad \quad [(\mathbf{K}^{E^1} \mathbf{U}^{E^2} + \mathbf{K}^{E^2} \mathbf{U}^{E^1})], \quad \text{Cov}(\mathbf{E}^{e1}, \mathbf{E}^{e2})$$

$$i=2 \quad , \quad j=1 \quad \quad [(\mathbf{K}^{E^2} \mathbf{U}^{E^1} + \mathbf{K}^{E^1} \mathbf{U}^{E^2})], \quad \text{Cov}(\mathbf{E}^{e2}, \mathbf{E}^{e1})$$

Les termes des covariances sont : $2(\mathbf{K}^{E^1} \mathbf{U}^{E^2} + \mathbf{K}^{E^2} \mathbf{U}^{E^1})$

$$i=2 \quad , \quad j=2 \quad \quad [(\mathbf{K}^{E^2} \mathbf{U}^{E^2} + \mathbf{K}^{E^2} \mathbf{U}^{E^2}) = 2(\mathbf{K}^{E^2} \mathbf{U}^{E^2})], \quad \text{Var}(\mathbf{E}^{e2})$$

$$(\mathbf{K}_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 125 & 125 \\ 125 & 325 \end{bmatrix} (10^{-5})$$

$$(\mathbf{K}^{E^1}) = \frac{4}{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (\mathbf{K}^{E^2}) = \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1),E^1} \\ U^{(2),E^1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-U_0^{(1)}}{E_0^{e1}} \\ \frac{-U_0^{(1)}}{E_0^{e1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18,75 \\ -18,75 \end{Bmatrix} (10)^{-5} \quad , \quad \begin{Bmatrix} U^{(1),E^2} \\ U^{(2),E^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{U_0^{(1)} - U_0^{(2)}}{E_0^{e2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix} (10)^{-5}$$

$$\begin{aligned} U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = & - \begin{bmatrix} 125 & 125 \\ 125 & 325 \end{bmatrix} (10^{-5}) \left\{ (2) \frac{4}{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -18,75 \\ -18,75 \end{Bmatrix} \right. \quad (2.5) \\ & + (2) \frac{4}{15} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix} \quad (2) + (2) \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -18,75 \\ -18,75 \end{Bmatrix} \quad (2) \\ & \left. + (2) \frac{2}{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -20 \end{Bmatrix} \right\} \quad (1.6) \end{aligned}$$

$$U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = - \begin{bmatrix} 125 & 125 \\ 125 & 325 \end{bmatrix} (10^{-5}) \begin{Bmatrix} -12,2 \\ -12,8 \end{Bmatrix}$$

$$U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 0.03125 \\ 0.05685 \end{Bmatrix}$$

$$E_2[U] = \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta}$$

$$E_2[U] = \begin{Bmatrix} 0.5625 \\ 1.0625 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0.03125 \\ 0.05685 \end{Bmatrix}$$

$$E_2[U] = \begin{Bmatrix} E_2[U^{(1)}] \\ E_2[U^{(2)}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.578125 \\ 1.090925 \end{Bmatrix}$$

Résumé :

$$E_1[U] = \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5625 \\ 1.0625 \end{Bmatrix}$$

$$Var_1(U^{(1)}) = 8.79(10)^{-3} \quad , \quad Var_1(U^{(2)}) = 30.19(10)^{-3}$$

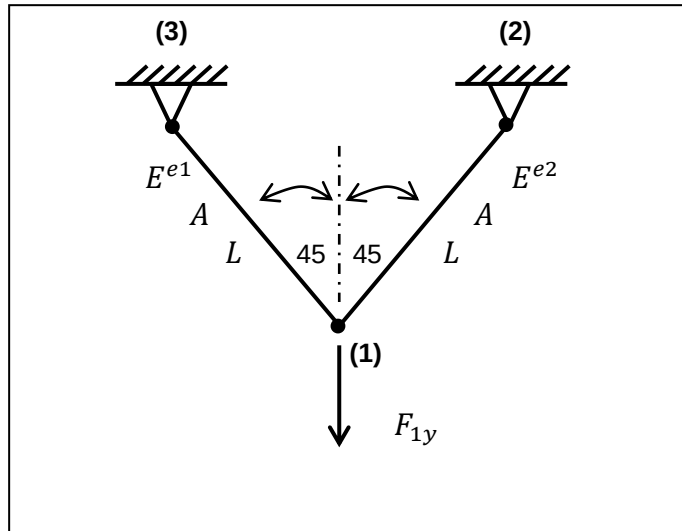
$$Cov_1(U^{(1)}, U^{(2)}) = 16.29(10)^{-3}$$

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$E_2[U] = \begin{Bmatrix} U_0^{(1)} \\ U_0^{(2)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} 0.5625 \\ 1.0625 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0.03125 \\ 0.05685 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.578125 \\ 1.090925 \end{Bmatrix}$$

$$Var_2(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot U_{\delta}^{\sigma\epsilon} \cdot MS^{\alpha\beta\sigma\epsilon}]$$

(Calcul laborieux pour une contribution très faible)



EXO 5 :

La structure en treillis suivante est composée de deux éléments ($e1$) et ($e2$). on demande de calculer le premier moment $E(U)$ et le second moment $Var(U)$ de la solution de l'équation d'équilibre $[K]\{U\} = \{F\}$ en fonction du coefficient de variation C_v . Les modules de **Young** (E^{e1} et E^{e2}) sont considérés comme deux variables aléatoires statistiquement indépendantes $Cov(E^{e1}, E^{e2}) = 0$, et suivent une distribution de la loi uniforme dans l'intervalle $[-a, a]$.

Données :

$$\begin{aligned} A^{e1} &= A^{e2} = A \\ L^{e1} &= L^{e2} = L \\ F_{1x} &= 0, \quad F_{1y} = F_{1y} \\ E_0^{e1} &= E_0^{e2} = E_0 \\ C_v(E^{e1}) &= C_v(E^{e2}) = C_v \end{aligned}$$

Le système à résoudre après introduction des conditions aux limites est représenté par les deux équations suivantes :

$$\frac{A}{2L} \begin{bmatrix} E^{e1} + E^{e2} & -E^{e1} + E^{e2} \\ -E^{e1} + E^{e2} & E^{e1} + E^{e2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(1x)} \\ V^{(1y)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

Les trois équations utilisées en éléments finis stochastiques sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= K_0^{-1} F_0 \\ U_i^I &= K_0^{-1} (F_i^I - K_i^I U_0) \\ U_{ij}^{II} &= K_0^{-1} (F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0) \end{aligned}$$

Identification des paramètres :

$$\mathbf{K}_0 = K(E_0^{e1}, E_0^{e2})$$

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}_0$$

$$\mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_0$$

$$\frac{A}{2L} \begin{bmatrix} E_0^{e1} + E_0^{e2} & -E_0^{e1} + E_0^{e2} \\ -E_0^{e1} + E_0^{e2} & E_0^{e1} + E_0^{e2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} = ? \\ V_0^{(1y)} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$E_0^{e1} = E_0^{e2} = E_0$$

$$\frac{A}{L} \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} = ? \\ V_0^{(1y)} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} = 0 \\ V_0^{(1y)} = \frac{F_{1y}L}{E_0A} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_0^{-1} = \left(\frac{L}{E_0A} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^I &= \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_0) \\ U^{,E^{e1}} &= K_0^{-1} (F^{,E^{e1}} - K^{,E^{e1}} U_0) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1x),E^{e1}} \\ V^{(1y),E^{e1}} \end{Bmatrix} = \left(\frac{L}{E_0A} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{1x}^{,E^{e1}} = 0 \\ F_{1y}^{,E^{e1}} = 0 \end{Bmatrix} - \left(\frac{A}{2L} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} \\ V_0^{(1y)} \end{Bmatrix} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1x),E^{e1}} \\ V^{(1y),E^{e1}} \end{Bmatrix} = \left(\frac{L}{E_0A} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y}^{,E^{e1}} = 0 \end{Bmatrix} - \left(\frac{A}{2L} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \end{Bmatrix} \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1x),E^{e1}} \\ V^{(1y),E^{e1}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \\ -\frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^I &= \mathbf{K}_0^{-1}(\mathbf{F}_i^I - \mathbf{K}_i^I \mathbf{U}_0) \\ U^{E^{e2}} &= K_0^{-1}(F^{E^{e2}} - K^{E^{e2}} U_0) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1x),E^{e2}} \\ V^{(1y),E^{e2}} \end{Bmatrix} = \left(\frac{L}{E_0 A}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{1x}^{E^{e2}} \\ F_{1y}^{E^{e2}} \end{Bmatrix} = 0 \right\} - \left(\frac{A}{2L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} \\ V_0^{(1y)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1x),E^{e2}} \\ V^{(1y),E^{e2}} \end{Bmatrix} = \left(\frac{L}{E_0 A}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y}^{E^{e2}} \end{Bmatrix} = 0 \right\} - \left(\frac{A}{2L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y}L}{E_0 A} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U^{(1x),E^{e2}} \\ V^{(1y),E^{e2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \\ \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \end{Bmatrix}$$

$$E_1[U] = U_0$$

$$Cov_1(U^{\Delta,\delta}) = U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = diag[U_{\Delta}^{\alpha} \cdot U_{\delta}^{\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}]$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} U^{(1x),E^{e1}} & U^{(1x),E^{e2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(E^{e1}) & Cov(E^{e1},E^{e2}) \\ Cov(E^{e2},E^{e1}) & Var(E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(1x),E^{e1}} \\ U^{(1x),E^{e2}} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} \frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2} & \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(E^{e1}) & Cov(E^{e1},E^{e2}) \\ Cov(E^{e2},E^{e1}) & Var(E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \\ \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(U^{\Delta=\delta}) = Var_1(U^{1x}) = \left(\frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2}\right)^2 Var(E^{e1}) + (0) + \left(\frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2}\right)^2 Var(E^{e2})$$

$$Var_1(V^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} V^{(1y),E^{e1}} & V^{(1y),E^{e2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(E^{e1}) & Cov(E^{e1}, E^{e2}) \\ Cov(E^{e2}, E^{e1}) & Var(E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{(1y),E^{e1}} \\ V^{(1y),E^{e2}} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(V^{\Delta=\delta}) = \begin{bmatrix} \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} & \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var(E^{e1}) & Cov(E^{e1}, E^{e2}) \\ Cov(E^{e2}, E^{e1}) & Var(E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \\ \frac{-F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \end{bmatrix}$$

$$Var_1(V^{\Delta=\delta}) = Var_1(V^{1y}) = \left(\frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \right)^2 Var(E^{e1}) + (0) + \left(\frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \right)^2 Var(E^{e2})$$

$$\begin{aligned} Var(E^{e1}) &= (E_0)^2 (Cv)^2 \\ Var(E^{e2}) &= (E_0)^2 (Cv)^2 \end{aligned}$$

$$Var_1(U^{1x}) = Var_1(V^{1y}) = 2 \left(\frac{F_{1y}L}{2A(E_0)^2} \right)^2 (E_0)^2 (Cv)^2$$

$$Var_1(U^{1x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0 A} \right)^2 (Cv)^2$$

$$Var_1(V^{1y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0 A} \right)^2 (Cv)^2$$

$$Cov_1(U^{(1x)}, V^{(1y)}) = 0$$

$$\begin{aligned} E_2[U] &= E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} . MS^{\alpha\beta} \\ Cov_2(U^{\Delta,\delta}) &= Cov_1(U^{\Delta,\delta}) + \frac{1}{4} U_{\Delta}^{\alpha\beta} . U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} . MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon} \\ Var_2(U^{\Delta=\delta}) &= Var_1(U^{\Delta=\delta}) + \frac{1}{4} diag[U_{\Delta}^{\alpha\beta} . U_{\delta}^{\sigma\varepsilon} . MS^{\alpha\beta\sigma\varepsilon}] \end{aligned}$$

$$E_1[U] = U_0 = \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} \\ V_0^{(1y)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y}L}{E_0 A} \end{Bmatrix}$$

$$E_2[U] = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} . MS^{\alpha\beta}$$

$$U_i^I = K_0^{-1}(F_i^I - K_i^I U_0)$$

$$U^{E^1} = (K_0)^{-1}(F^{E^1} - K^{E^1} U_0)$$

$$U^{E^2} = (K_0)^{-1}(F^{E^2} - K^{E^2} U_0)$$

$$U_{ij}^{II} = K_0^{-1}(F_{ij}^{II} - K_i^I U_j^I - K_j^I U_i^I - K_{ij}^{II} U_0)$$

$$U_{ij}^{II} = -K_0^{-1}(0 + K_i^I U_j^I + K_j^I U_i^I + 0)$$

$$i=1, j=1 \quad [(K^{E^1} U^{E^1} + K^{E^1} U^{E^1}) = 2(K^{E^1} U^{E^1})], \text{ Var}(E^1)$$

$$i=1, j=2 \quad [(K^{E^1} U^{E^2} + K^{E^2} U^{E^1})], \text{ Cov}(E^1, E^2)$$

$$i=2, j=1 \quad [(K^{E^2} U^{E^1} + K^{E^1} U^{E^2})], \text{ Cov}(E^2, E^1)$$

Les termes des covariance sont : $2(K^{E^1} U^{E^2} + K^{E^2} U^{E^1})$

$$i=2, j=2 \quad [(K^{E^2} U^{E^2} + K^{E^2} U^{E^2}) = 2(K^{E^2} U^{E^2})], \text{ Var}(E^2)$$

$$U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = -\left(\frac{L}{E_0 A}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ (2) \left(\frac{A}{2L}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \\ -F_{1y} L \\ \frac{F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \end{Bmatrix} \text{Var}(E^1) \right. \\ \left. + (2) \left(\frac{A}{2L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \\ -F_{1y} L \\ \frac{-F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \end{Bmatrix} \text{Var}(E^2) \right\}$$

$$U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = -\left(\frac{L}{E_0 A}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ (2) \left(\frac{A}{2L}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \\ -F_{1y} L \\ \frac{F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \end{Bmatrix} (E_0)^2 (Cv)^2 \right. \\ \left. + (2) \left(\frac{A}{2L}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \\ -F_{1y} L \\ \frac{-F_{1y} L}{2A(E_0)^2} \end{Bmatrix} (E_0)^2 (Cv)^2 \right\}$$

$$U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta} = \left\{ \frac{0}{\frac{2F_{1y}L}{E_0A}} \right\} (Cv)^2$$

$$E_2[U] = \left\{ \frac{E_2[U^{(1x)}]}{E_2[V^{(1y)}]} \right\} = \left\{ \frac{U_0^{(1x)}}{V_0^{(1y)}} \right\} + \frac{1}{2} U_{ij}^{II} MS^{\alpha\beta}$$

$$E_2[U] = \left\{ \frac{0}{\frac{F_{1y}L}{E_0A}} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{0}{\frac{2F_{1y}L}{E_0A}} \right\} (Cv)^2 = \left\{ \frac{0}{\frac{F_{1y}L}{E_0A}} \right\} + \left\{ \frac{0}{\frac{F_{1y}L}{E_0A}} \right\} (Cv)^2$$

$$E_2[V^{(1y)}] = \frac{F_{1y}L}{E_0A} \{1 + (Cv)^2\}$$

$$Var_2[U] = Var_1[U] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N diag[U_{ij}^{II} (U_{kl}^{II})^T] \cdot \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= E[\alpha^4] - E[\alpha^2] \cdot E[\alpha^2] = \left\{ \frac{9}{5} (Cv)^4 - (Cv)^2 \cdot (Cv)^2 \right\} (\alpha^4) = 0.8(Cv)^4 (\alpha^4) \\ \varphi &= 0.8(Cv)^4 (\alpha^4) = 0.8(Cv)^4 (E_0^4) \end{aligned}$$

$$Var_2[U] = \left\{ \frac{Var_2[U^{(1x)}]}{Var_2[V^{(1y)}]} \right\} = \left\{ \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2 [1 + 0.8(Cv)^2]}{\frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2 [1 + 0.8(Cv)^2]} \right\}$$

Résumé :

$$E_1[U] = U_0 = \left\{ \frac{U_0^{(1x)}}{V_0^{(1y)}} \right\} = \left\{ \frac{0}{\frac{F_{1y}L}{E_0A}} \right\}$$

$$Cov_1(U^{(1x)}, V^{(1y)}) = 0$$

$$Var_1(U) = \left\{ \frac{Var_1[U^{(1x)}]}{Var_1[V^{(1y)}]} \right\} = \left\{ \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2}{\frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2} \right\}$$

$$E_2[U] = \left\{ \begin{matrix} E[U^{(1x)}] \\ E[V^{(1y)}] \end{matrix} \right\} = E_1[U] + \frac{1}{2} U_{\Delta}^{\alpha\beta} \cdot MS^{\alpha\beta}$$

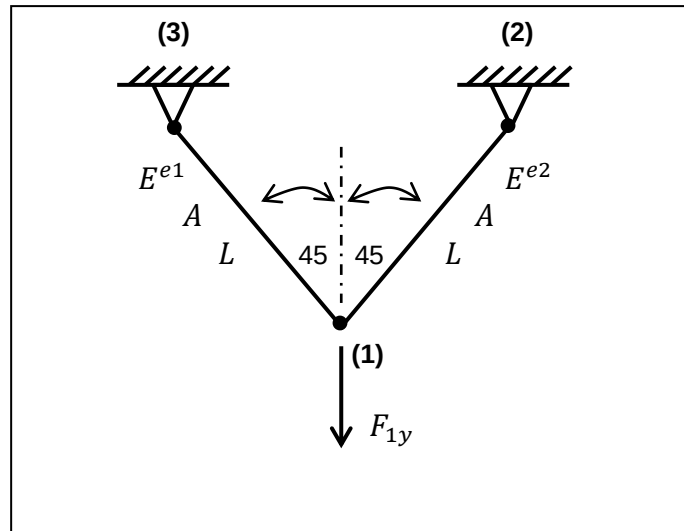
$$E_2[U] = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \end{matrix} \right\} (Cv)^2 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \{1 + (Cv)^2\} \end{matrix} \right\}$$

$$Cov_2(U^{(1x)}, V^{(1y)}) = 0$$

$$Var_2[U] = \left\{ \begin{matrix} Var_2[U^{(1x)}] \\ Var_2[V^{(1y)}] \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2 [1 + 0.8(Cv)^2] \\ \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2 [1 + 0.8(Cv)^2] \end{matrix} \right\}$$

(Calcul laborieux pour une contribution très faible)

Application de l'approche performante à **l'EXO 5**, et comparaison avec la méthode de perturbation (l'expansion de la série de **Taylor** est réalisée jusqu'au second ordre).



Utilisez l'approche performante de **I. Elishakoff** pour calculer le premier moment statistique $E(U)$ et le second moment statistique $Var(U)$. Les modules de **Young** (E^{e1} et E^{e2}) sont considérés comme deux variables aléatoires statistiquement indépendantes, $Cov(E^{e1}, E^{e2}) = 0$, et suivent une distribution de la loi uniforme dans l'intervalle $[-a, a]$.

Données :

$$\begin{aligned}A^{e1} &= A^{e2} = A \\L^{e1} &= L^{e2} = L \\F_{1x} &= 0 \quad , \quad F_{1y} = F_{1y} \\E_0^{e1} &= E_0^{e2} = E_0 \\C_v(E^{e1}) &= C_v(E^{e2}) = C_v\end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, $K_b = K_0$

Le système à résoudre après introduction des conditions aux limites est représenté par les deux équations suivantes :

$$\frac{A}{2L} \begin{bmatrix} E^{e1} + E^{e2} & -E^{e1} + E^{e2} \\ -E^{e1} + E^{e2} & E^{e1} + E^{e2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(1x)} = ? \\ V^{(1y)} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_b \mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b$$

$$\frac{A}{2L} \begin{bmatrix} E_0^{e1} + E_0^{e2} & -E_0^{e1} + E_0^{e2} \\ -E_0^{e1} + E_0^{e2} & E_0^{e1} + E_0^{e2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} = ? \\ V_0^{(1y)} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$S_0 = E_0^{e1} + E_0^{e2} \quad , \quad D_0 = E_0^{e1} - E_0^{e2}$$

$$K_b^{-1} = \left\{ \frac{2L}{A} \right\} \frac{1}{(S_0)^2 - (-D_0)^2} \begin{bmatrix} S_0 & D_0 \\ D_0 & S_0 \end{bmatrix}$$

$$\delta K = \sum_{i=1}^N K_i^J \alpha_i = K_1^{E^{e1}} \alpha_1 + K_2^{E^{e1}} \alpha_2$$

On rappelle que δK représente la déviation de la matrice de rigidité globale K .

$$\delta K = \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \alpha_2$$

α_1 et α_2 sont des fluctuations aléatoires normalisées

$$E = E_0 + \delta E = E_0 \left(1 + \frac{\delta E}{E_0} \right) = E_0 (1 + \alpha)$$

Avant d'introduire les simplifications citées dans l'énoncé du problème, on va d'abord traiter le cas le plus général, puis on déduit notre cas particulier.

$$\delta K = \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} (E_0^{e1}\alpha_1 + E_0^{e2}\alpha_2) & -(E_0^{e1}\alpha_1 - E_0^{e2}\alpha_2) \\ -(E_0^{e1}\alpha_1 - E_0^{e2}\alpha_2) & (E_0^{e1}\alpha_1 + E_0^{e2}\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K]$ est une matrice $[2 \times 2]$ dont les éléments m_{ij} s'écrivent comme suit :

$$m_{11} = m_{22} = S_0(E_0^{e1}\alpha_1 + E_0^{e2}\alpha_2)^2 - 2D_0(E_0^{e1}\alpha_1 + E_0^{e2}\alpha_2)(E_0^{e1}\alpha_1 - E_0^{e2}\alpha_2) + S_0(E_0^{e1}\alpha_1 - E_0^{e2}\alpha_2)^2$$

$$m_{12} = m_{21} = -2S_0(E_0^{e1}\alpha_1 + E_0^{e2}\alpha_2)(E_0^{e1}\alpha_1 - E_0^{e2}\alpha_2) + D_0(E_0^{e1}\alpha_1 + E_0^{e2}\alpha_2)^2 + D_0(E_0^{e1}\alpha_1 - E_0^{e2}\alpha_2)^2$$

Maintenant on va introduire les hypothèses de notre problème : $(E_0^{e1} = E_0^{e2} = E_0)$ et $C_v(E^{e1}) = C_v(E^{e2}) = C_v$. On suppose aussi que les variables aléatoires normalisées α_1 et α_2 suivent une loi de distribution uniforme dans l'intervalle $[-a, a]$, et partagent les mêmes moments statistiques $E[\alpha_1] = E[\alpha_2] = E[\alpha]$, $E[\alpha_1^2] = E[\alpha_2^2] = E[\alpha^2]$, $E[\alpha_1^3] = E[\alpha_2^3] = E[\alpha^3]$ et $E[\alpha_1^4] = E[\alpha_2^4] = E[\alpha^4]$. Les calculs deviennent plus simples.

$$\mathbf{K}_b \mathbf{U}_b = \mathbf{F}_b$$

$$\frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} = ? \\ V_0^{(1y)} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$K_b = K_0 = \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} U_b^{(1x)} = 0 \\ V_b^{(1y)} = \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \end{Bmatrix}$$

$$K_b^{-1} = \left(\frac{L}{E_0 A} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K] = \left\{ \frac{A}{2L} \right\} \left\{ \frac{1}{4E_0^2} \right\} \begin{bmatrix} 8E_0^3 \alpha^2 & 0 \\ 0 & 8E_0^3 \alpha^2 \end{bmatrix} = \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K] = \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} (Cv)^2 & 0 \\ 0 & (Cv)^2 \end{bmatrix}$$

Calcul direct avec les hypothèses simplificatrices du problème :

$$\delta K = \frac{A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha$$

$$E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K] = \frac{A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{L}{E_0 A} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot E(\alpha^2)$$

$$E[\delta K . K_b^{-1} . \delta K] = \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . (Cv)^2$$

$$A = K_b - E[\delta K . K_b^{-1} . \delta K] = \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . (Cv)^2$$

$$A = \frac{E_0 A}{L} \begin{bmatrix} 1 - (Cv)^2 & 0 \\ 0 & 1 - (Cv)^2 \end{bmatrix}$$

$$E[U] = U_b = A^{-1} \{F_b - E[\delta K . K_b^{-1} . \delta F]\}$$

$$E[U] = \frac{L}{E_0 A} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - (Cv)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - (Cv)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix} - 0$$

$$E[U] = \begin{Bmatrix} U_b^{(1x)} \\ V_b^{(1y)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \end{Bmatrix}$$

$$Cov(U, U^T) = K_b^{-1} . C . K_b^{-1}$$

$$C = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_i^I . U_b U_b^T . K_j^I . E[\alpha_i \alpha_j]$$

$$C = \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . (E_0)^2 (Cv)^2$$

$$+ \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . (0)$$

$$+ \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . (0)$$

$$+ \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{A}{2L} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . (E_0)^2 (Cv)^2$$

$$C = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{F_{1y} . (Cv)}{1 - (Cv)^2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cov(U, U^T) = K_b^{-1} \cdot C \cdot K_b^{-1}$$

$$Cov(U, U^T) = \left(\frac{L}{E_0 A}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{F_{1y} \cdot (Cv)}{1 - (Cv)^2}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{L}{E_0 A}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cov(U, U^T) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{F_{1y} L}{E_0 A}\right)^2 \left(\frac{(Cv)^2}{(1 - (Cv)^2)^2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les variances des deux degrés de liberté $U^{(1x)}$ et $V^{(1y)}$ se trouvent dans la diagonale de la matrice des covariances $Cov(U, U^T)$.

$$Var(U^{(1x)}) = Var(V^{(1y)}) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{F_{1y} L}{E_0 A}\right)^2 \left(\frac{(Cv)^2}{(1 - (Cv)^2)^2}\right)$$

$$Cov(U^{(1x)}, V^{(1y)}) = 0$$

Résumé et comparaison des propriétés statistiques :

Méthode de perturbation du premier ordre :

$$E_1[U] = U_0 = \begin{Bmatrix} U_0^{(1x)} \\ V_0^{(1y)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{F_{1y} L}{E_0 A} \end{Bmatrix}$$

$$Cov(U^{(1x)}, V^{(1y)}) = 0$$

$$Var_1(U) = \begin{Bmatrix} Var_1[U^{(1x)}] \\ Var_1[V^{(1y)}] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y} L}{E_0 A}\right)^2 (Cv)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y} L}{E_0 A}\right)^2 (Cv)^2 \end{Bmatrix}$$

Méthode de perturbation du second ordre :

$$E_2[U] = \left\{ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \right\} + \left\{ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \right\} (Cv)^2 = \left\{ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \{1 + (Cv)^2\} \right\}$$

$$Cov(U^{(1x)}, V^{(1y)}) = 0$$

$$Var_2[U] = \left\{ \begin{matrix} Var_2[U^{(1x)}] \\ Var_2[V^{(1y)}] \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2 [1 + 0.8(Cv)^2] \\ \frac{1}{2} \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 (Cv)^2 [1 + 0.8(Cv)^2] \end{matrix} \right\}$$

Approche performante :

$$E[U] = \left\{ \begin{matrix} U_b^{(1x)} \\ V_b^{(1y)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \frac{F_{1y}L}{E_0A} \left(\frac{1}{1 - (Cv)^2} \right) \end{matrix} \right\}$$

$$Var(U^{(1x)}) = Var(V^{(1y)}) = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A} \right)^2 \left(\frac{(Cv)^2}{(1 - (Cv)^2)^2} \right)$$

$$Cov(U^{(1x)}, V^{(1y)}) = 0$$

Les résultats obtenus par la technique de perturbation sont sous-estimés par rapport à ceux obtenus par l'approche performante.

Remarque importante :

Il est à noter que les résultats obtenus ci-dessus, peuvent être comparés aux résultats exacts qui ne sont pas toujours faciles à obtenir. Afin d'illustrer à quel point le calcul analytique (exact) peut être laborieux même pour des structures simples ayant un nombre de (d.d.l.) très limité, et caractérisées par des hypothèses simplificatrices très favorables pour les calculs, on se propose de trouver **la solution exacte** des différentes propriétés statistiques de cet exercice. Pour ce faire, on doit d'abord calculer (d'une manière analytique) l'inverse de la matrice de rigidité [K].

$$\frac{A}{2L} \begin{bmatrix} (E^{e1} + E^{e2}) & -(E^{e1} - E^{e2}) \\ -(E^{e1} - E^{e2}) & (E^{e1} + E^{e2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^{(1x)} = ? \\ V^{(1y)} = ? \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{1y} \end{Bmatrix}$$

$$S = E^{e1} + E^{e2} \quad , \quad D = E^{e1} - E^{e2}$$

$$K^{-1} = \left\{ \frac{2L}{A} \right\} \frac{1}{(S)^2 - (-D)^2} \begin{bmatrix} S & D \\ D & S \end{bmatrix} \quad , \quad (S)^2 - (-D)^2 = 4E^{e1}E^{e2}$$

$$K^{-1} = \left\{ \frac{L}{2A} \right\} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{E^{e1}} + \frac{1}{E^{e2}} \right) & \left(-\frac{1}{E^{e1}} + \frac{1}{E^{e2}} \right) \\ \left(-\frac{1}{E^{e1}} + \frac{1}{E^{e2}} \right) & \left(\frac{1}{E^{e1}} + \frac{1}{E^{e2}} \right) \end{bmatrix}$$

Soient :

$$B^{e1} = \frac{1}{E^{e1}} \quad , \quad B^{e2} = \frac{1}{E^{e2}}$$

$$K^{-1} = \left\{ \frac{L}{2A} \right\} \begin{bmatrix} (B^{e1} + B^{e2}) & (-B^{e1} + B^{e2}) \\ (-B^{e1} + B^{e2}) & (B^{e1} + B^{e2}) \end{bmatrix}$$

Données :

$$A^{e1} = A^{e2} = A$$

$$L^{e1} = L^{e2} = L$$

$$F_{1x} = 0 \quad , \quad F_{1y} = F_{1y}$$

$$E_0^{e1} = E_0^{e2} = E_0$$

$$C_v(E^{e1}) = C_v(E^{e2}) = C_v$$

$$Var(B^{e1}) = Var(B^{e2})$$

$$\begin{cases} U^{(1x)} = (-B^{e1} + B^{e2}) \frac{F_{1y}L}{2A} \\ V^{(1y)} = (B^{e1} + B^{e2}) \frac{F_{1y}L}{2A} \end{cases}$$

En appliquant les hypothèses de calcul, l'espérance de la solution $\{U_b\}$ s'écrit :

$$\begin{cases} U_b^{(1x)} = 0 \\ V_b^{(1y)} = \frac{F_{1y}L}{A} \cdot B_b \end{cases}$$

On rappelle que la variance et la moyenne d'une variable aléatoire (X) qui suit la loi uniforme s'écrivent dans un intervalle $[a \quad , \quad b]$ comme suit :

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad , \quad \bar{X} = \frac{(a+b)}{2}$$

On note que si l'intervalle $[-a, a]$ de ce problème est appliqué au sens strict, la moyenne de la variable aléatoire serait nulle, et par conséquent son coefficient de variation (Cv) tend vers l'infini. Afin d'éviter cette singularité numérique, on doit adopter un autre intervalle qui a la même largeur ($2a$), et qui s'écrit comme suit :

$$[\bar{X} - a \quad , \quad \bar{X} + a]$$

$$\sigma^2(X) = Var(X) = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3}$$

$$Cv = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}} = \frac{a}{\bar{X} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\frac{a}{\bar{X}} = \sqrt{3} \cdot Cv$$

Calcul de l'espérance $E\left(\frac{1}{X}\right)$:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{\bar{X}-a}^{\bar{X}+a} \frac{1}{x} \cdot f(x) dx = \int_{\bar{X}-a}^{\bar{X}+a} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(2a)} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \quad , \quad \textbf{(FDP)}$$

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\bar{X} \cdot Cv \cdot 2\sqrt{3}} \text{Log} \frac{(1 + \sqrt{3} \cdot Cv)}{(1 - \sqrt{3} \cdot Cv)}$$

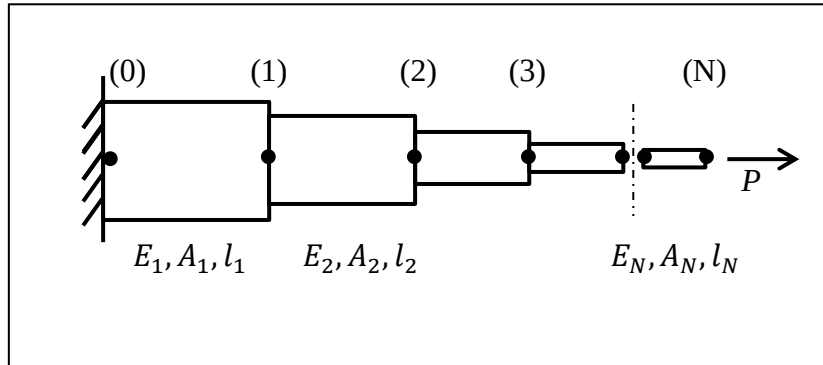
$$E[U] = U_b = \left\{ \begin{matrix} U_b^{(1x)} \\ V_b^{(1y)} \end{matrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} U_b^{(1x)} = 0 \\ V_b^{(1y)} = \frac{F_{1y}L}{A} \cdot B_b = \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot E_0 \cdot Cv} \text{Log} \frac{(1 + \sqrt{3} \cdot Cv)}{(1 - \sqrt{3} \cdot Cv)} \end{matrix} \right\}$$

Enfin, le lecteur est invité à retrouver le résultat exact de $Var(U^{(1x)}) = Var(V^{(1y)})$.

$$Var(U^{(1x)}) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{F_{1y}L}{E_0A}\right)^2 \left\{ \frac{1}{1 - 3(Cv)^2} - \left[\frac{1}{2\sqrt{3} \cdot Cv} \text{Log} \frac{(1 + \sqrt{3} \cdot Cv)}{(1 - \sqrt{3} \cdot Cv)} \right]^2 \right\}$$

Rappel de la MEFD :



La barre non-prismatique suivante est divisée en (N) éléments finis ayant chacun des caractéristiques mécaniques et géométriques différentes. La force (P) est appliquée à son extrémité libre. On demande de calculer le déplacement de la fin $U^{(f)}$.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dU}{dx} \Rightarrow dU = \varepsilon_{xx} \cdot dx = \frac{\sigma_{xx}}{E} \cdot dx = \frac{P}{EA} dx$$
$$dU = \frac{P}{EA} dx$$

Le déplacement (U) s'obtient par intégration de l'élément différentiel (dU) .

Solution générale du problème (contribution de tous les éléments finis) :

$$U^{(f)} = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)} + \dots + U^{(N)} = \sum_1^N U^{(i)}$$
$$U^{(f)} = \int_0^{l_1} \frac{P}{E_1 A_1} dx + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{P}{E_2 A_2} dx + \dots + \int_{l_1+l_2+\dots+l_{N-1}}^{l_1+l_2+\dots+l_N} \frac{P}{E_N A_N} dx$$
$$U^{(f)} = \frac{Pl_1}{E_1 A_1} + \frac{Pl_2}{E_2 A_2} + \frac{Pl_3}{E_3 A_3} + \dots + \frac{Pl_N}{E_N A_N}$$

Solution particulière (les E_i et les l_i sont constants pour tous les éléments) :

$$U^{(f)} = \frac{Pl}{E} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} + \dots + \frac{1}{A_N} \right)$$

Si les sections sont circulaires de rayon R_i chacune :

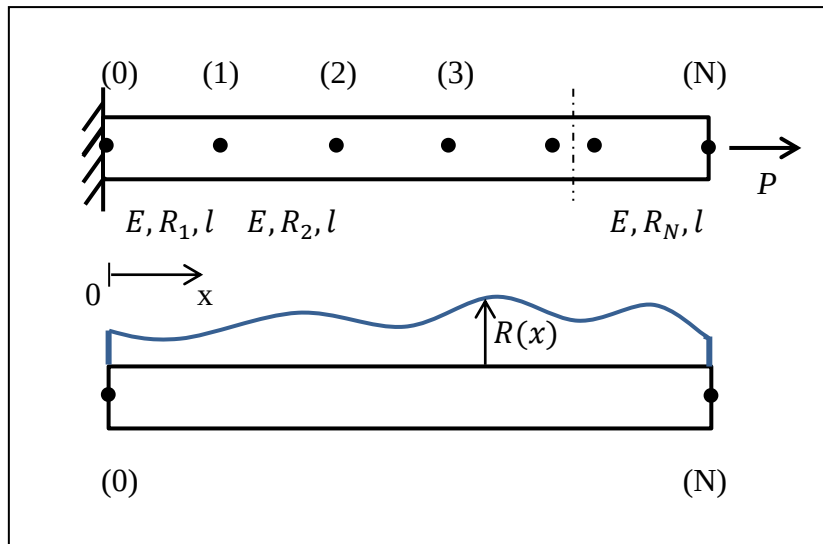
$$U^{(f)} = \frac{Pl}{\pi E} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \dots + \frac{1}{R_N^2} \right) = \beta l \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \dots + \frac{1}{R_N^2} \right)$$
$$\beta = \frac{P}{\pi E}$$

Si les sections sont égales de rayon R_0 :

$$U^{(f)} = \frac{Pl}{\pi E} \left(\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^2} + \dots + \frac{1}{R_0^2} \right) = \left(\frac{\beta l N}{R_0^2} \right) = \frac{\beta L}{R_0^2}$$

EXO 6 :

La barre non-prismatique suivante est divisée en (N) éléments ayant chacun une longueur (l) et un module de **Young** (E) . La section de cette barre est circulaire et ayant un rayon $R(x)$ à champ aléatoire spatialement homogène. R_i représente le rayon $R(x)$ pour l'élément (i) . $R_i = R_0(1 + \alpha_i)$. La distribution de la loi uniforme est utilisée dans les calculs, $[-a, a]$. Déterminez les différentes propriétés statistiques.



$$K_1 = \frac{\pi E}{l} \begin{bmatrix} R_1^2 & -R_1^2 \\ -R_1^2 & R_1^2 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \frac{\pi E}{l} \begin{bmatrix} R_2^2 & -R_2^2 \\ -R_2^2 & R_2^2 \end{bmatrix}, \quad K_i = \frac{\pi E}{l} \begin{bmatrix} R_i^2 & -R_i^2 \\ -R_i^2 & R_i^2 \end{bmatrix}$$

$$R_i = R_0(1 + \alpha_i)$$

$$R_i^2 = R_0^2(1 + \alpha_i)^2 = R_0^2(1 + 2\alpha_i + \alpha_i^2)$$

$$K = \sum_{i=1}^N K_i R_i^2$$

$$K = R_0^2 \sum_{i=1}^N K_i + 2R_0^2 \sum_{i=1}^N K_i \alpha_i + R_0^2 \sum_{i=1}^N K_i \alpha_i^2$$

En appliquant l'opérateur de l'espérance sur K , on obtient la valeur moyenne (K_b).

$$K_b = (1 + (Cv)^2)R_0^2 \sum_{i=1}^N K_i$$

$\left(\frac{\pi E}{l}\right)$, cette constante est intégrée dans les matrices élémentaires K_i

$$K_b^{-1} = \left(\frac{l}{\pi E}\right) \left(\frac{1}{R_0^2(1 + (Cv)^2)}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & N \end{bmatrix}$$

Calcul de δK , $E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K]$ et $A = K_b - E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K]$.

$$\delta K = \sum_{i=1}^N K_i^I \alpha_i = \sum_{i=1}^N 2R_0(1 + \alpha_i)K_i \alpha_i$$

$$E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K] = E[4R_0^2(1 + \alpha_i)^2(\alpha_i)^2 \sum_{i=1}^N K_i \cdot \left(\frac{1}{R_0^2(1 + (Cv)^2)}\right) R_0^2]$$

$$E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K] = \frac{4R_0^2(Cv)^2}{(1 + (Cv)^2)} \sum_{i=1}^N K_i$$

$$A = K_b - E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K] = \frac{(1 - (Cv)^2)^2}{(1 + (Cv)^2)} \cdot R_0^2 \sum_{i=1}^N K_i$$

$$A = K_b - E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta K] = \frac{(1 - (Cv)^2)^2}{(1 + (Cv)^2)} \cdot R_0^2 \cdot \frac{\pi E}{l} \sum_{i=1}^N k_i$$

$$K_i = \left(\frac{\pi E}{l}\right) k_i$$

La moyenne de la (ième) composante du déplacement s'obtient comme suit :

$$U_b = A^{-1}\{F_b - E[\delta K \cdot K_b^{-1} \cdot \delta F]\}$$

$$U_b^{(i)} = \frac{(1 + (Cv)^2)(i\beta l)}{R_0^2(1 - (Cv)^2)^2} \quad , \quad \beta = \frac{P}{\pi E}$$

La moyenne du déplacement de l'extrémité $U_b^{(N)}$ s'écrit comme suit :

$$U_b^{(N)} = \frac{(1 + (Cv)^2)(N\beta l)}{R_0^2(1 - (Cv)^2)^2} = \frac{(1 + (Cv)^2)(\beta l)}{R_0^2(1 - (Cv)^2)^2}$$

$$\delta U = -K_b^{-1} \cdot \delta K \cdot U_b$$

$$K_b = (1 + (Cv)^2)R_0^2 \sum_{i=1}^N K_i \quad , \quad \delta K = \sum_{i=1}^N K_i' \alpha_i = \sum_{i=1}^N 2R_0(1 + \alpha_i)K_i \alpha_i$$

$$\delta U = -\frac{1}{R_0^2(1 + (Cv)^2)} \left(\sum_{i=1}^N K_i \right)^{-1} \cdot 2R_0 \cdot \left(\sum_{i=1}^N K_i \right) \cdot \frac{(1 + (Cv)^2)(\beta l)}{R_0^2(1 - (Cv)^2)^2} \cdot \alpha_i$$

$$\delta U = \frac{-2(\beta l)}{R_0^2(1 - (Cv)^2)^2} \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \dots + \alpha_N \end{array} \right\}$$

$$Var(U^{(N)}) = \frac{4\beta^2 l^2}{R_0^4(1 - (Cv)^2)^4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Cov(\alpha_i, \alpha_j)$$

$$Var(U^{(N)}) = \frac{4\beta^2 l^2 (Cv)^2}{R_0^4(1 - (Cv)^2)^4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij}$$

On suppose que le champ aléatoire $\alpha(x)$ suit une loi de distribution uniforme dans l'intervalle $[-a, a]$, et ayant une fonction de corrélation de type **Markov** $\rho(x_1, x_2)$.

$$\alpha(x) = \frac{R(x)}{R_0} - 1$$

$$\rho(x_1, x_2) = \exp \left\{ \frac{-|x_1 - x_2|}{l_c} \right\}$$

$l_c = d \cdot L$: représente la longueur de corrélation

d : facteur d'échelle de fluctuation

La fonction de densité conjointe de $\alpha(x)$ définit la probabilité que deux variables aléatoires prennent simultanément des valeurs spécifiques. Elle décrit le comportement global et l'interaction entre ces valeurs, elle s'écrit comme suit :

$$f_{\alpha(x_1)\alpha(x_2)}(u, v) = \frac{1}{(2a)^2} \left[1 + \frac{3\rho(x_1, x_2)}{a^2} uv \right]$$

Le résultat exact de la moyenne $U_b^{(N)}$ est donné par l'expression suivante :

$$U_b^{(N)} = \beta \int_0^L E \left[\frac{1}{R^2(x)} \right] dx = \frac{\beta L}{R_0^2(1 - 3(Cv)^2)}$$

Le résultat exact de la variance $Var(U^{(N)})$ est long et laborieux, c'est pratiquement le cas de tous les résultats analytiques, d'où l'intérêt du calcul numérique.

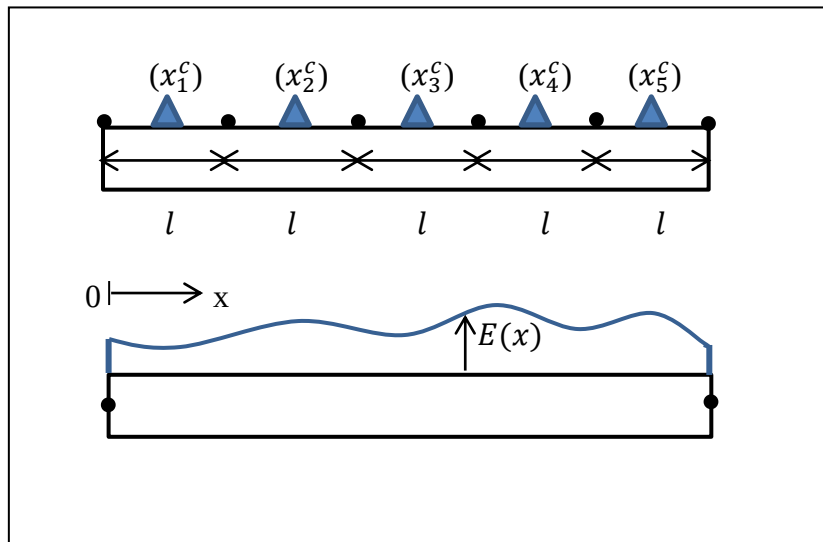
Exemple d'illustration de la méthode du point central :

La poutre ci-dessous, de longueur totale ($L = 5m$), est modélisée par (5) éléments finis ayant chacun une longueur ($l = 1m$) et une inertie constante (I). Le module de **Young** est considéré comme un champ stochastique unidimensionnel $E(x)$.

La représentation du champ $E(x)$ dans les points centraux des éléments peut se faire en ajustant un modèle théorique aux données expérimentales, auquel cas on utilise une formule de type :

$$E[E_i^c] = E_0 \left(1 + \frac{\psi}{L} x_i^c \right)$$

ψ : Coefficient adimensionnel



Etapes à suivre :

1. Discrétisation de la poutre en (05) éléments finis.
2. Evaluation des valeurs $E(x_i^c)$, $[E(x_1^c), E(x_2^c), E(x_3^c), E(x_4^c), E(x_5^c)]$.
3. Définir (E_0) , (l_c) et les valeurs de corrélation $\rho(x_i^c, x_j^c) = \exp\left\{\frac{-|x_i^c - x_j^c|}{l_c}\right\}$
4. Construire la matrice de rigidité stochastique globale K .

$$K = \sum K_i = \text{fct}[E(x_1^c), E(x_2^c) \dots E(x_i^c) \dots]$$

5. Détermination de la moyenne et la variance de la réponse par une méthode appropriée.

En absence de données, la représentation du champ $E(x)$ dans les points centraux des éléments, peut se faire par la simulation numérique de **Monte-Carlo**.

Etapes à suivre :

1. Discrétisation de la poutre en (05) éléments finis.
2. Réalisation d'une analyse déterministe en utilisant un vecteur de valeurs moyennes $M_0 = \{E_0, E_0, E_0, E_0, E_0\}$ et ce, afin d'initialiser les calculs.
3. Calcul des valeurs auto-covariances $ACov(x_i^c - x_j^c)$.

$$ACov(x_i^c - x_j^c) = \sigma^2 \exp\left\{\frac{-|x_i^c - x_j^c|}{l_c}\right\}$$

$$x_i^c = \{0.5m, 1.5m, 2.5m, 3.5m, 4.5m\}$$

Soient : $\sigma(E) = 1$ et $l_c = 2m$.

$$\begin{aligned} |x_1^c - x_1^c| &= 0 & , & & ACov(x_1^c, x_1^c) &= (1)^2 \exp\{0\} = 1 \\ |x_1^c - x_2^c| &= 1 & , & & ACov(x_1^c, x_2^c) &= (1)^2 \exp\{-0.5\} = 0.606 \\ |x_1^c - x_3^c| &= 2 & , & & ACov(x_1^c, x_3^c) &= (1)^2 \exp\{-1\} = 0.368 \\ |x_1^c - x_4^c| &= 3 & , & & ACov(x_1^c, x_4^c) &= (1)^2 \exp\{-1.5\} = 0.223 \\ |x_1^c - x_5^c| &= 4 & , & & ACov(x_1^c, x_5^c) &= (1)^2 \exp\{-2\} = 0.135 \end{aligned}$$

$$ACov(x_2^c, x_1^c), ACov(x_2^c, x_2^c), ACov(x_2^c, x_3^c), \dots \text{ etc ...}$$

$$ACov(x_i^c - x_j^c) = \begin{bmatrix} 1 & 0.606 & 0.368 & 0.223 & 0.135 \\ 0.606 & 1 & 0.606 & 0.368 & 0.223 \\ 0.368 & 0.606 & 1 & 0.606 & 0.368 \\ 0.223 & 0.368 & 0.606 & 1 & 0.606 \\ 0.135 & 0.223 & 0.368 & 0.606 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Réalisation d'une analyse probabiliste, qui sert à propager l'incertitude, en répétant les calculs avec un grand nombre de simulations de **Monte-Carlo**. A chaque simulation, un vecteur du module de **Young** $\{Y\}$ est calculé d'une manière aléatoire en respectant la loi de probabilité choisie, et la structure de la corrélation spatiale du champ stochastique considéré, $Y = M_0 + L \cdot Z_{(j)}$.

$\{Z_{(j)}\}$: représente le (j ème) vecteur de variables aléatoires indépendantes centrées et réduites générées par échantillonnage de **Monte-Carlo** selon la loi normale $N(0,1)$.

5. Résolution du système pour différentes valeurs du module de **Young** $\{Y\}$. Le nombre des simulations de **Monte-Carlo** (N_{SMC}) varient entre 1000 et 10000 réalisations.

Remarque :

Dans le processus de génération des vecteurs $\{Z_{(j)}\}$ par simulation (étape 4), une transformation de **Cholesky** est effectuée sur la matrice des auto-covariances : $ACov(x_i^c - x_j^c) = L \cdot L^T$, L est une matrice triangulaire inférieure et L^T est une matrice triangulaire supérieure. Enfin, pour center le champ aléatoire par rapport à sa valeur moyenne réelle, le vecteur $\{Y\}$ est écrit sous la forme suivante :

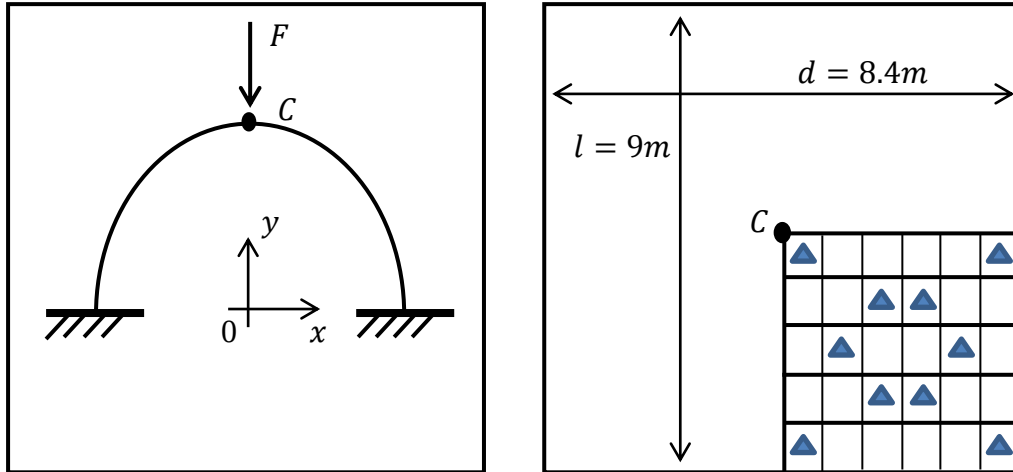
$$Y = M_0 + L \cdot Z_{(j)} \quad , \quad (j): \text{ varie de } [1 - N_{SMC}]$$

Exemple d'illustration d'une coque cylindrique :

La structure en forme de coque cylindrique ci-dessous est encastree à ses deux extrémités, et soumise à une force concentrée (F) au point (C) de la coque. L'épaisseur $t(x,y)$ est considérée comme un champ aléatoire ayant une fonction de corrélation de **Markov**. On donne ($l = 9m$), ($d = 8.4m$), ($\vartheta = 0.3$), ($Cv = 0.25$) et $E(t_i) = t_0 = 0.01m$. La coque est modélisée par ($6 \times 5 = 30$) éléments finis rectangulaires ($1/4$ du domaine).

On suppose que $l_{cx} = 0.15d$, $l_{cy} = 0.10d$ et ($E = 200000$ MPa).

$$\rho(t_i, t_j) = \exp\left\{\frac{-|x_i - x_j|}{l_{cx}}\right\} \exp\left\{\frac{-|y_i - y_j|}{l_{cy}}\right\}$$



Remarque importante :

A travers les exercices qui ont été traités dans cette partie du cours, il devient évident de constater que le calcul par la méthode des éléments finis stochastiques, peut rapidement atteindre ses limites humaines (calculs longs et risque d'erreurs) même pour des structures ayant un nombre de ($d.d.l.$) et de ($V.A.$) très réduits. Afin de surmonter ces difficultés d'ordre pratique, il est recommandé de basculer vers le calcul numérique via l'utilisation des codes de calcul spécialisés tels que :

- ANSYS Design Explorer, couplé à la méthode de **Monte-Carlo** (MCS).
- Isight (**Dassault** Systèmes), couplé au logiciel Abaqus.
- MATLAB / Scilab, (SFEM) Module.

Références bibliographiques

- 1- Cours d'Introduction à l'Analyse Statistique. Université Paris-Dauphin, octobre 2010.
- 2- Probabilités, Statistiques, Signaux Aléatoires. Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (ISIR). *CNRS*, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris.
- 3- Z. P. Qiu, S. H. Chen and J. X. Na. The Bound Set of Possible Eigenvalues of Structures with Uncertain but Non-Random Parameters, november 1996.
- 4- Z. P. Qiu, S. H. Chen and I. Elishakoff. Natural Frequencies of Structures with Uncertain but Non-Random Parameters, Optimization theory and applications, Vol. 86, No. 3, pp. 669-683, september 1995.
- 5- A. Ailane et B. Merzoug. Analyse de la Réponse Statique et Dynamique des Structures compte-tenu des Paramètres incertains, Application aux Tunnels et aux Portiques Auto-Stables. Travail de PFE initié et dirigé par B. Tiliouine et M. Demidem, 2014.
- 6- A. Ailane et B. Merzoug. Utilisation de la Méthode de Rayleigh Quotient Itération pour l'Analyse des Caractéristiques Dynamiques des Structures en Portiques Auto-Stables. Travail de Master initié et dirigé par B. Tiliouine et M. Demidem, 2014.
- 7- O. C. Zienkiwicz and R. C. Taylor. The Finite Element Method, edition 1989.
- 8- K. J. Bathe. Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, edition 1982.
- 9- B. Sudret and A. Der-Kiureghian. Stochastic Finite Element Methods and Reliability, A State of the Art Report, Berkeley University, 2000.
- 10- T. Hisada and S. Nakagiri. Stochastic Finite Element Method Developed for Structural Safety and Reliability, Proceedings of the 3rd ICOSAR, pp. 395-408, 1981.
- 11- I. Elishakoff and J. Ren. Improved Finite Element Method for Stochastic Problems, Chaos. Solitons and Fractals, Vol. 5, No. 5, pp. 833-846, Elsevier Science, 1995.
- 12- M. Keiber and T.D. Hien. The Stochastic Finite Element Method, John Wiley, edition 1992.
- 13- A. Der-Kiureghian and Jyh-Bin Ke. The Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, No. 2, 1988.