République Algérienne Démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

M0007/00B

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Mécanique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

THESE DE MAGISTER EN GENIE MECANIQUE
Option : Construction

Présentée par : RIACHE Lakhdar
Ingénieur en Génie mécanique

Thème :

ETUDE DE LA LUBRIFICATION ELASTOHYDRODYNAMIQUE DES ENGRENAGES SPIRO-CONIQUES

Soutenue le 07 juin 2000 devant le Jury composé de :

S. RECHAK	**Professeur**	**ENP**	**Président.**
H. BELHANECHE	**Docteur**	**ENP**	**Rapporteur.**
S. LARBI	**Maître de conférence**	**ENP**	**Examinateur.**
A. BETTAYEB	**Docteur**	**U.R.D.M.A/ERMA Aéro**	**Examinateur.**
T. KIRATI	**Docteur**	**U. Boumerdes**	**Examinateur.**
M. BOUCHALLAH	**Chef de département**	**SNVI, Rouiba**	**Invité.**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse le Docteur Hacène BELHANECHE chargé de recherche à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger pour avoir dirigé ce travail avec compétence et professionnalisme, pour tous les conseils précieux qu'il m'a prodigués, pour le libre accès à sa documentation, pour l'intérêt qu'il porte aux travaux de recherche, pour les fortes impulsions qu'il sait donner. Je mesure la chance d'être un de ses collaborateurs.

J'exprime toute ma reconnaissance à monsieur S. RECHAK professeur à l'ENP pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse

Je remercie vivement le Docteur KIRATI Tayeb de l'Université de Boumerdès de l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger mon travail.

C'est pour moi un devoir agréable de remercier monsieur S. LARBI Maître de Conférence à l'ENP pour avoir accepté de juger mon travail en faisant partie du jury.

Toute ma reconnaissance va au docteur A. BETTAYEB de l'U.R.D.MA./ERMA Aéro de Dar El Beida ; je lui exprime mes sincères remerciements pour sa participation au jury de ma thèse.

Je remercie vivement Monsieur BOUCHALLAH Abdellah, Chef de Département Etude et Qualification pour avoir répondu favorablement à notre invitation.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Résumé

L'objectif de notre travail est d'étudier la lubrification élastohydrodynamique des engrenages spiro-coniques et de concevoir un modèle mathématique basé sur une simulation d'usinage et de proposer une méthode de résolution du système obtenu.

Le modèle est conçu à partir de l'équation générale de Reynolds et l'équation de l'énergie ; sa résolution est exécutée par la méthode des différences finies qui s'adapte le mieux à ce type d'engrenage.

Mots clés

Engrenage spiro-conique, lubrification élastohydrodynamique, contact Hertzien, différences finies, équation de Reynolds, équation de l'énergie .

Abstract :

The aim of our work is the study of the elastohydrodynamic lubrication of spiral conical gears and conceive a mathmatical model based on tooling simulation and to propose a method to solve the obtained system.

The model is built from general Reynolds and energy equations ; The solution is performed with finite differences which is suited for this gear model.

Key words

Spiral conical gear, elastohydrodynamic lubrication, Hertzian contact, finite differences, Reynolds equation, energy equation

ملخص:

هدف هذا الدراسة هو تكوّين نموذج رياضي لتشحيم الهدروديناميكي المطاطي للتشابك المخروطي اللولبي الشكل مبني على التظاهر الإستصناعي و عرض طريقة لحل النظام المسئول عليه.

االنموذج الرياضي متركب على اساس معادلة " رينلدس" العامة و معادلة الطاقة . و حل هذا النمدج منفذ على طريقة الفارق التاتام االتي تنسجم تماما مع هذا النوع من التشابك .

كلمات مفتحية

التشابك المخروطي اللولبي الشكل ، التشحيم الهدروديناميي المطاطي، ملامسة هرتز ، طريقة الفارق التاتام ، معادلة " رينلدس" ، معادلة الطاقة .

TABLE DE MATIERES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE 1. LUBRIFICATION ELASTOHYDRODYNAMIQUE

1.1. Introduction..... 6
1.2. Equation Généralisée de la mécanique des films minces visqueux..... 6
1.2.1. Hypothèses d'études..... 8
1.2.2. Equation de Reynolds Généralisée..... 9
1.3. Conditions aux limites..... 11
1.3.1. Première condition..... 12
1.3.2. Deuxième condition..... 12
1.4. Description de la méthode..... 13
1.4.1. Domaine d'étude..... 13
1.4.2. Approximation de l'équation de Reynolds..... 14
1.5. Hauteur du film d'huile..... 16
1.5.1. Hauteur élastohydrodynamique..... 17
1.5.2. Hauteur géométrique..... 18
1.5.3. Déformation élastique..... 18
1.5.4. Conclusion..... 18

CHAPITRE 2. GEOMETRIE DE LA DENTURE

2.1. Introduction..... 20
2.2. Méthode d'obtention des dentures..... 20
2.3. Types de profils..... 21
2.3.1. Denture à profil conique..... 21
2.3.2. Denture à profil constant..... 22
2.3.3. Types de spirales..... 23
2.3.4. Types d'engrenages coniques à denture spirale..... 24
2.4. Paramètres d'une roue génératrice..... 24
2.5. Types de fraises..... 25
2.6. Machines de taillage..... 26
2.7. Réglages machines..... 27
2.7.1. Positionnement de la fraise..... 27
2.7.2. Positionnement de la pièce..... 28
2.8. Méthode de taillage des dents..... 28
2.8.1. Taillage avec génération..... 29
2 .8.2. Taillage sans génération..... 30
2.8.3. Conclusion..... 30

CHAPITRE 3. MODELE MATHEMATIQUE

3.1.Introduction..... 32
3.2.Coordonnées homogènes..... 32
3.3.Hypothèses de taillage..... 33

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

3.4. Taillage du pignon..... 33
3.4.1. Réglage de l'outil..... 34
3.4.1.1. Représentation de l'arête tranchante..... 34
3.4.1.2. Orientation de la fraise..... 34
3.4.1.3. Position du centre de la fraise..... 35
3.4.2. Positionnement de la pièce..... 35
3.4.3. Mouvements relatifs pièce/outil..... 36
3.4.4. Position d'engrènement du train d'engrenage..... 36
3.6. Taillage de la roue..... 38
3.6.1. Représentation de l'arête tranchante de l'outil..... 38
3.6.2. Position de Taillage..... 38
3.6.3. Position d'engrènement..... 39
3.7. Surfaces actives des dentures..... 39
3.7.1. Surface active du pignon..... 40
3.8. Vitesse relative fraise/pignon..... 41
3.9. Vecteur normal à la surface du pignon..... 42
3.10. Equation de la surface du pignon..... 43
3.11. Composantes des vitesses du fluide..... 43
3.12. Rayons de courbures..... 44
3.13. Flanc actif de la roue..... 45
3.14. Conclusion..... 45

CHAPITRE 4. EPAISSEUR DU FILM D'HUILE

4.1. Généralités..... 47
4.2. Détermination du repère local..... 47
4.2.1. Origine du repère..... 47
4.2.2. Vecteurs unitaires du repère local..... 49
4.3. Matrice de passage au repère R_L..... 50
4.3.1. Eléments de la matrice de passage..... 51
4.4. Hauteur géométrique..... 52
4.5. Déformation élastique..... 53
4.6. Charge sur la dent..... 54
4.7. Conclusion..... 55

CHAPITRE 5. TEMPERATURE DU FLUIDE

5.1. Introduction..... 57
5.2. Echange énergétique..... 57
5.2.1.Conditions aux limites..... 58
5.3. Résolution de l'équation générale de l'énergie..... 60
5.4. Transfert de chaleur..... 61
5.5. Conditions aux limites..... 61
5.6. Résolution de l'équation..... 62
5.7. Conclusion..... 63

CHAPITRE 6. PROCEDURE ET SCHEMA DE RESOLUTION

6.1. Introduction..... 65
6.2. Schéma de résolution..... 66
6.3. Equation du point de contact..... 66

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

6.4. Application de la Méthode de Newton-Raphson.... 68
6.5. Calcul des éléments du système.... 69
6.6. Valeurs des éléments du système d'équation.... 71
6.7. Forme récurrente itérative.... 74
6.8. Critère d'arrêt.... 74
6.9. Hauteur géométrique.... 75
6.9.1. Notations.... 76
6.9.2. Critère d'arrêt et précision des résultats.... 77
6.9.2.1. Critère d'arrêt.... 77
6.9.2.2. Tests de validation.... 78
6.10. Equation de pression et de température.... 78
6.10.1. Critère d'arrêt.... 80
6.10.2. Organigramme (schéma) de résolution.... 80
6.11. Données numériques et résultats.... 81
6.11.1. Résultats.... 82
6.11.2. Interprétations.... 83
6.12. Comparaison des résultats.... 84
6.13. Conclusion.... 85
6.14. Résultats.... 87

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale.... 95

ANNEXE I. DIFFERENCES FINIES

AI.1. Introduction.... 98
AI.2. Formule De Taylor.... 98
AI.3. Dérivée première.... 98
AI.4. Dérivée seconde.... 100

ANNEXE II. MATRICES DE PASSAGE

AII.1. Introduction.... 102
AII.2. Passage de R_T à R_1.... 102
AII.2. Passage de R_1 à R_2.... 104
AII.3. Passage de R_2 à R_3.... 105

BIBLIOGRAPHIE 107

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nomenclature

ρ : Masse volumique du fluide à 20°c ;
ν : Viscosité cinématique ;
μ : Viscosité dynamique du fluide à 50°c ;
β : Angle du socle ;
δ : Angle du porte fraise ;
α : Angle de pied ;
ω_0 : Vitesse angulaire de la fraise ;
ω_1 : Vitesse angulaire du pignon ;
φ_1 : Angle d'engrènement ;
Ψ_b : Angle du berceau ;
θ_c : Taux de dilatation cubique ;
Ψ_e : Angle de l'excentrique ;
$\varepsilon_{i,j}$: Tenseur des taux de déformation ;
$\sigma_{i,j}$: Tenseur des contraintes ;
σ_i : Pente de la fraise (i = 1, 2) ;
$\varepsilon_{i,j}$: Tenseur des taux de déformations ;
α_p : Coefficient de piezoviscosite du fluide ;
α_p : Coefficient de piezoviscosite du fluide ;
α_T : Coefficient de dilatation thermique du fluide ;
ε_x : Taux d'expansion des divisions suivant l'axe ox ;
Δx : Division unitaire suivant l'axe ox ;
ε_y : Taux d'expansion des divisions suivant l'axe oy ;
Δy : Division unitaire suivant l'axe oy ;
b : Décalage vertical (pignon) ;
c : Décalage vertical (roue) ;
C_p Chaleur massique à pression constante du fluide ;
d Base coulissante ;
d_{ij} Déformation élastique au point « i,j » ;
E : Module d'élasticité du métal ;
E_{ij} Elément de division du plan tangent de position « i,j » ;
e_p Excentricité de la fraise (pignon) ;
f Recul machine (pignon) ;
ξ Angle de pied ;
g Recul machine (roue) ;
m Excentricité de la fraise (roue) ;

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

f_i : Forces massiques extérieures ;
h_{ij} Hauteur de l'élément de division ;
k_c : Conductibilité thermique du fluide ;
k_s : Conductibilité thermique du métal de la denture ;
N_1 : Fréquence de rotation du pignon ;
P : Pression du fluide ;
r_{0i} : Rayon de la fraise (i = 1, 2) ;
t : Variable de temps ;
T : Température du fluide ;
T_0 : Température initiale du fluide ;
T_a : Température ambiante ;
T_p : Température du corps du pignon ;
T_r : Température du corps de la roue ;
u_i : Composantes de la vitesse du fluide suivant l'axe « i » ;
U_{ij} : Vitesse de la surface « i » suivant « x_j » ;
x_i : Variables d'espace (i = 1, 2, 3) .

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Les engrenages spiro-coniques ont un large champ d'application et sont très utilisés dans les mécanismes avec renvoi d'angle nécessitant une transmission de grandes puissances tels que les ponts arrières des engins et véhicules lourds, les boites de transmissions d'hélicoptères, etc...[1]

Ils sont caractérisés par leur grande capacité de charge, avec un transfert progressif de celle-ci d'une dent à l'autre. Ces caractéristiques font qu'ils sont de plus en plus utilisés dans les transmissions à très hautes performances et qu'ils rentrent dans les catégories des mécanismes où la formation du film d'huile et sa stabilité constituent une priorité fondamentale.

Les exigences essentielles dans l'application des engrenages spiro-coniques étant :

- La résistance aux très hautes charges ;
- L'amélioration de la durée de vie des mécanismes ;
- La diminution des vibrations ;
- L'augmentation du rendement grâce à la diminution des frottements ;
- La réduction des bruits.

Si ces exigences sont satisfaites en partie par l'utilisation de matériaux à haute performance, par la géométrie propre des engrenages spiro-coniques, ainsi que dans les soins apportés dans leur taillage, la lubrification et la formation du film d'huile entre les dentures joue un rôle essentiel dans la réalisation des quatre dernières exigences.

En effet, le rôle du graissage dans les mécanismes de transmission de très grandes puissances devient de plus en plus prépondérant et primordial dans la plupart des cas. La réduction des frottements permettant l'augmentation du rendement et la diminution de l'usure sont les premières fonctions dévolues au graissage, principalement dans les mécanismes de transmission de grandes puissances ; Le graissage joue également un rôle important dans la protection contre la corrosion et l'amortissement des bruits et des vibrations [2, 3].

La géométrie très complexe des engrenages spiro-coniques rend leur analyse plus difficile que pour les autres types d'engrenages, car il n'existe pas de méthode analytique permettant la description de leur profil afin d'étudier facilement leur lubrification.

L'étude de la lubrification des engrenages spiro-coniques ainsi que leur géométrie d'ailleurs doivent donc passer impérativement par une simulation numérique basée sur le procédé de taillage de la denture.

Il existe plusieurs types de profils de dentures d'engrenages spiro-coniques en fonction de la spirale (spirale logarithmique, "spiral circular cut", spiral en développante...), de la hauteur et de la largeur de la denture (hauteur et largeur constantes, hauteur et largeur variables) [1, 4,5].

L'analyse de la lubrification du type d'engrenage spiro-conique retenu permet la prédiction de la formation du film d'huile et sa nature dans les différentes conditions d'utilisation de l'engrenage. L'étude des efforts permet la prédétermination du champ des contraintes dans la denture, le champ de température sur celle-ci et dans le film d'huile contribuant ainsi à définir la limite de sa stabilité.

L'objectif de notre travail est de développer un logiciel qui, basé sur une simulation de taillage, permet en fonction de différents paramètres, de prévoir :

- Le champ de pression dans le film d'huile ;
- Le champ thermique sur la denture et à travers le film d'huile ;
- La formation du film d'huile et son épaisseur ;
- Le champ des taux de contraintes dans la denture.

Pour cela, nous donnerons les équations qui régissent le phénomène global de lubrification de deux surfaces de formes quelconques que nous adapterons ensuite aux spécificités du profil des engrenages spiro-coniques. Nous présenterons une méthode de résolution des équations non linéaires puis un organigramme de traitement du problème global.

Pour l'écoulement du fluide visqueux (huile) entre les dentures, nous utiliserons l'équation généralisée de Reynolds [6, 7] que nous adopterons à la spécificité du profil de la denture spiro-conique en nous basant sur la simulation de son taillage.

Pour traiter les déformations élastiques des dents et les contraintes dans leurs structures nous utiliserons l'équation d'élasticité générale [8, 9] appliquée à la surface des dentures spiro-coniques.

Nous déterminerons l'épaisseur du film d'huile en sommant les déformations élastiques, la séparation géométrique et la hauteur hydrodynamique[10,11,12].

La température à travers l'épaisseur du fluide et à la surface des dents sera traitée à partir de l'équation générale de l'énergie et l'équation de Laplace.

Notre travail se compose donc de six chapitres.

Dans le chapitre 1, nous déterminerons les équations qui régissent le phénomène de la lubrification élastohydrodynamique (EHD) entre deux surfaces quelconques ainsi que l'expression de la hauteur du film d'huile.

Le chapitre 2 traitera de la géométrie des engrenages spiro-coniques et de leur spécificité. Nous donnerons une description sommaire des machines spéciales servant à la fabrication des engrenages spiro-coniques et dont la cinématique sert de base à la simulation numérique.

Le chapitre 3 sera consacré à l'élaboration du modèle mathématique. Nous y présenterons la procédure de taillage ainsi que sa simulation numérique à l'aide de coordonnées homogènes et les matrices de passage d'une étape à la suivante. Nous y donnerons les équations paramétrées des surfaces des dentures qui serons résolues au chapitre 5.

Le chapitre 4 sera consacré au calcul de la hauteur du film d'huile servant à la résolution de l'équation généralisée de Reynolds et l'équation générale de l'énergie. Pour cela, nous déterminerons le repère local lié au point de contact et dans lequel l'épaisseur du film est calculée.

Au chapitre 5, on traitera l'aspect thermique de la lubrification : échanges thermiques, température du fluide et distribution de température sur la surface des dentures.

Dans la première partie du chapitre 6, nous présenterons la procédure retenue pour la résolution des équations obtenues dans les chapitres précédents ainsi que son application aux engrenages spiro-coniques.

La seconde partie sera consacrée à la résolution des équations numériques ainsi obtenues, à la présentation des différentes méthodes retenues pour leur résolution ainsi qu'à l'élaboration d'un organigramme global de résolution.

Chapitre 1

LUBRIFICATION ELASTOHYDRODYNAMIQUE (E.H.D)

1.1. INTRODUCTION

La lubrification des engrenages joue un rôle extrêmement important sur les performances des machines et l'existence du film d'huile entre les surfaces de dentures devient capitale dans la transmission des grandes puissances [13].

En effet, la réduction des frottements pour un rendement mécanique maximum et la minimisation de l'usure sont les premières fonctions dévolues au graissage des machines, principalement pour les couples à grandes puissances [2, 3]. Le Graissage assure également la protection contre la corrosion et l'amortissement simultané du bruit et des vibrations. La lubrification a toujours été une préoccupation majeure des concepteurs de systèmes mécaniques depuis la naissance de l'industrie à ce jour.

Compte tenu de leur utilisation dans la transmission de très grandes puissances à des vitesses très élevées, les engrenages spiro-coniques entrent dans les catégories des mécanismes où la formation du film d'huile et sa stabilité constituent une priorité fondamentale.

Dans ce chapitre, nous présenterons les équations qui régissent les phénomènes de la lubrification avec écoulement visqueux entre deux surfaces de forme quelconque en mouvement relatif l'une par rapport à l'autre. Nous donnerons par la suite une méthode pour leur adaptation aux spécificités des surfaces de la denture spiro-conique. La résolution des équations ainsi obtenues sera traitée au chapitre six.

1.2. EQUATION GENERALISEE DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

Les équations générales de la mécanique des films minces visqueux permettent (compte tenu des conditions géométriques et cinématiques) de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince, en particulier sa portance [2, 14, 15]. Ces équations qui définissent le phénomène sont déduites des quatre lois fondamentales de la mécanique des milieux continus appliquées à un fluide Newtonien.

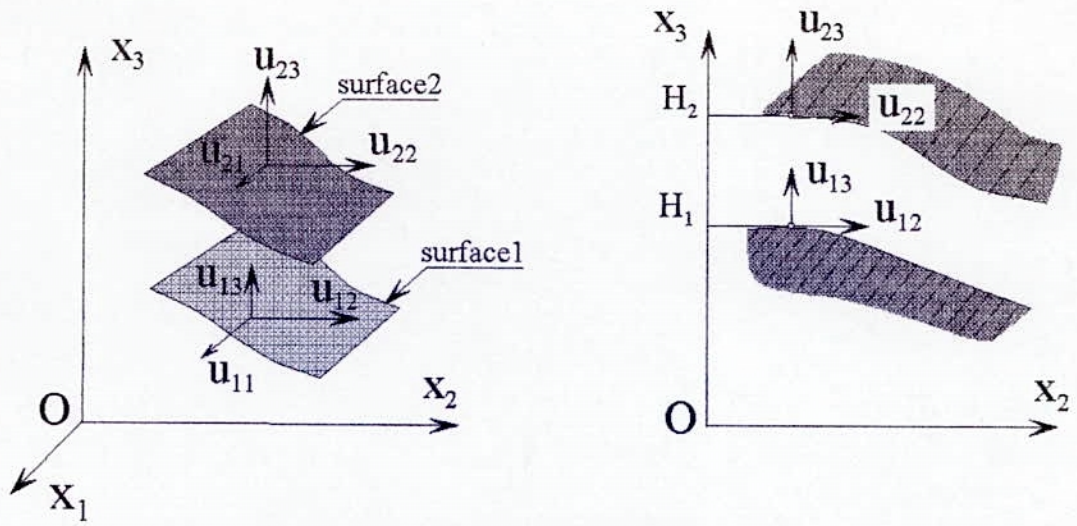


Figure 1.1. Système d'axes et de notations

Dans le un repère cartésien de la figure (1.1), ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

- ***loi de conservation de la masse :***

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

- ***loi fondamentale de la dynamique :***

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho . f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.2}$$

- ***loi de comportement rhéologique qui pour un fluide newtonien s'écrit sous la forme :***

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda \theta_c).\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1.3}$$

- ***loi pour la conservation de l'énergie pour un fluide newtonien :***

$$\rho . C_p \frac{DT}{Dt} = \alpha_T . T \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_c \frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \lambda\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.4}$$

dans lesquelles x_i représentent les variables d'espace (avec i = 1, 2, 3), t la variable de temps, u_i les composantes de la vitesse du fluide suivant les axes d'étude, et ρ la masse volumique du fluide; f_i désigne les forces massiques extérieures, $\sigma_{i,j}$ le tenseur des contraintes, k_c le coefficient de conductibilité thermique du fluide.

T et P désignent respectivement la température et la pression du fluide ; $\varepsilon_{i,j}$ est le tenseur des taux de déformations, θ_c est le taux de dilatation cubique, δ_{ij} est le symbole de Kronecker et (λ ,μ) sont les coefficients de Navier. C_p : chaleur massique à pression constante ; $\alpha_T = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_p$ est le coefficient de dilatation calorimétrique à pression constante.

Notre étude est faite lorsque le régime d'équilibre est atteint.

En reportant l'équation (1.3) ci-dessus dans l'équation (1.2), en négligeant les forces massiques extérieures, et après quelques transformations, on obtient l'équation [3] :

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial u_j}\right) + \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \mu}{\partial x_j} \qquad (1.5)$$

1.2.1. HYPOTHESES

Dans notre étude, nous considérons que :

- le régime d'équilibre est atteint $\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0\right)$;
- le milieu est continu ;
- le fluide est newtonien ;
- l'écoulement est laminaire ;
- les forces massiques extérieures sont négligeables ;
- il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois en contact la courbure du contact est négligeable ;
- l'épaisseur du film d'huile est toujours négligeable devant les autres dimensions ;
- les forces massiques extérieures sont négligeables.

On obtient alors l'équation de la mécanique des films minces généralisée [6, 15] :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(g_1.\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(g_1.\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[U_{21}(R_H-f_1)+U_{11}.f_1\right]-\rho_2 U_{21}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\rho_1 U_{11}\frac{\partial H_1}{\partial x_1}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[U_{22}(R_H-f_1)+U_{12}.f_1\right]-\rho_2 U_{22}\frac{\partial H_2}{\partial x_2}+\rho_1 U_{12}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}+\frac{\partial R_H}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial H_2}{\partial t}+\rho_2 U_{23}-\rho_1 U_{13} \quad (1.6)$$

avec :

$$R_H=\int_{H_1}^{H_2}\rho(x_1,x_2,t)dx_3 \quad (1.7)$$

$$f_1=\frac{1}{J_H}.\int_{H_1}^{H_2}\frac{R_H}{\mu}dx_3 \quad (1.8)$$

$$g_1=\int_{H_1}^{H_2}\frac{R_H}{\mu}\left(x_3-\frac{k_1}{l_1}\right)dx_3 \quad (1.9)$$

$$l_1=\int_{H_1}^{H_2}\frac{1}{\mu}dx_3 \quad (1.10)$$

$$k_1=\int_{H_1}^{H_2}\frac{x_3}{\mu}dx_3 \quad (1.11)$$

où U_{ij} étant la composante de la vitesse de la surface "i" suivant l'axe "x_j" , ρ_1 et ρ_2 étant les masses volumiques du fluide sur les parois 1 et 2 (fluide identique sur les deux parois : $\rho_1=\rho_2=\rho$).

1.2.2. EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE

Très souvent, on admet que la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film [15, 16] et on place l'origine du système d'axes sur l'une des parois du contact (figure 1.2).

Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente en tout point de cette paroi (cas fréquent en lubrification) l'équation de la mécanique des films minces visqueux se simplifie, car en plaçant l'origine du système d'axe sur cette paroi, on peut poser :

$$H_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad H_2 = h \tag{1.12}$$

Si par ailleurs, on utilise les coordonnées cartésiennes xyz, les conditions aux limites des vitesses s'écrivent :

Sur la paroi 1 : pour $z = 0$ $u = U_1$ $v = V_1$ $w = W_1$

Sur la paroi 2 : pour $z = h$ $u = U_2$ $v = V_2$ $w = W_2$

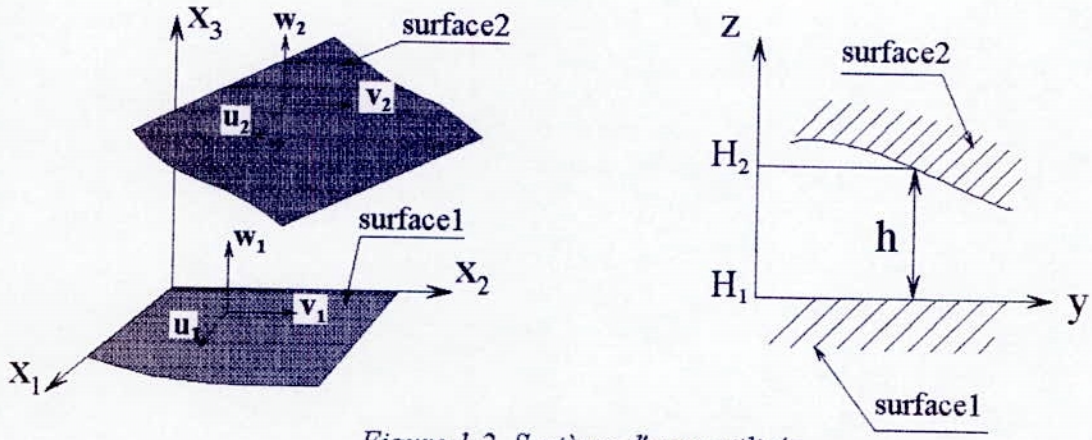


Figure 1.2. Système d'axes utilisés

Pour un écoulement permanent, lorsque l'équilibre est atteint, on obtient l'équation généralisée simplifiée de Reynolds pour les fluide visqueux [6,18]. Le repère étant celui représenté par la fig.1.2, sur la surface de la denture, son expression est :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_2.\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f_2.\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\frac{k_2}{g_2}(U_2-U_1)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\frac{k_2}{g_2}(V_2-V_1)\right]-\rho(W_2-W_1) \quad (1.13)$$

avec

$$g_2 = \int_0^h \frac{1}{\mu}.dz \tag{1.14}$$

$$k_2 = \int_0^h \frac{z}{\mu}.dz \tag{1.15}$$

$$f_2 = \rho \int_0^h \frac{z}{\mu}.\left(z - \frac{k_2}{g_2}\right)dz \tag{1.16}$$

avec

U_1 ,V_1 , W_1 : composantes de la vitesse du pignon

U_2 ,V_2 , W_2 : composantes de la vitesse de la roue

h : épaisseur du film d'huile

Leurs expressions calculées sont données au chapitre III, égalité (3.33).

1.3. CONDITIONS AUX LIMITES

Dans ce paragraphe, pour éviter la représentation de l'ensemble de la géométrie de la denture de l'engrenage, on se propose de traiter l'équation de Reynolds sur les surfaces actives représentées par les deux flancs actifs des dents en engrènement. En dehors de ce domaine la pression est supposée constant et est égale $p_0 = 0$ (valeur ambiante donnée).

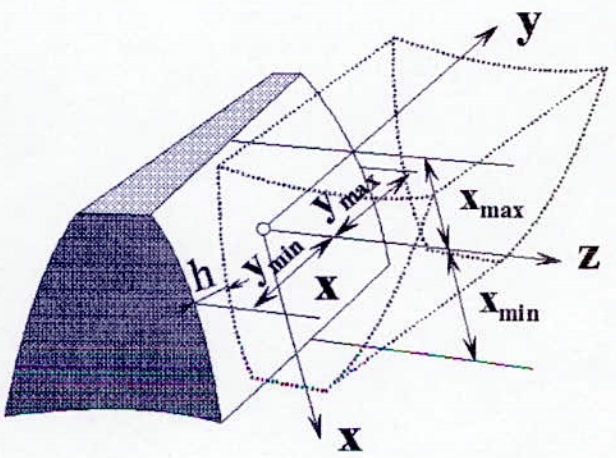


Figure 1.3. Repère local

Le débit d'huile Q est constant et assez abondant pour ne pas provoquer de rupture :

$$Q = \vec{n}\left(\vec{v}.\frac{h}{2} - \frac{h^3}{12\mu}.\vec{grad}.p\right)$$

avec $\vec{v} = \left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right)$

1.3.1. PREMIERE CONDITION

Cette condition spécifie qu'en dehors de la zone d'action, la pression absolue est nulle ($p_0 = 0$), soit (fig. 1.3) :

$$\begin{aligned} &1° \quad p(x_{min}, y) = 0 \\ &2° \quad p(x_{max}, y) = 0 \\ &3° \quad p(x, y_{miun}) = 0 \\ &4° \quad p(x, y_{max}) = 0 \end{aligned} \qquad (1.17)$$

1.3.2. DEUXIEME CONDITION

Cette condition connue sous le nom de «condition de Reynolds » spécifie que la pression de contact ne saurait être négative, soit :

$$p = 0 \quad si \quad \partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0 \qquad (1.18)$$

Le cas de l'éventualité où la pression est négative se produit entre autres s'il y a rupture dans l'alimentation en huile. La définition de ces conditions et leur prise en compte dans les modèles de calculs est toujours un sujet de recherche ;

La résolution de l'équation (1.13), dont les coefficients sont non linéaires, peut être réalisée par différentes méthodes d'approximations, entre autres par la méthodes des éléments finis [4, 10, 17] cette méthode a été appliquée par B.E. EIDERBERG et J.F. BOOKER [4] pour l'étude de la lubrification des surfaces poreuse et B.J HAMROCK [10] dans le cas d'un contact ponctuel

La méthode que nous avons retenue, est la méthode des différences finies qui s'apprête le mieux aux cas des engrenages spiro-coniques, méthode qui n'exige pas la définition analytique de la géométrie de la denture ni de la définition de l'ensemble de sa configuration. Les points des flancs actifs des dentures sont seuls nécessaires.

Ceux-ci seront facilement déterminés par une simulation de taillage. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons la manière dont nous nous proposons d'adapter l'équation de REYNOLDS à la denture spiro-conique.

1.4. DESCRIPTION DE LA METHODE

Cette méthode est basée sur le principe de taillage de la denture spiro-conique. C'est une méthode couramment utilisée pour le traitement de systèmes complexes. Elle est traitée en détail par Dr; HERMANN dans l'étude du contact ponctuel entre deux sphères [1] et V. SIMON pour l'étude de la lubrification des engrenages hypoïdes [18].

Le film d'huile est étudié dans un repère orthogonal dont l'origine coïncide avec le point de contact des surfaces des dents en engrènement (fig.1.3) ; Le plan XOY est confondu avec le plan tangent commun à ces deux surfaces ; celui-ci est partagé en pavés $E_{i,j}$ (fig.1.4) de manière telle que l'incrémentation soit uniforme ou progressive (non uniforme, avec coefficient constant).

Nous avons adopté l'incrémentation progressive à coefficient constant pour l'avantage qu'elle a à donner une meilleure définition au voisinage du point de contact et de simplifier les calculs là où la précision n'est pas indispensable. La méthode à incrémentation constante, qui donne une précision égale sur l'ensemble du domaine d'étude ne rend pas compte de façon correcte des valeurs au voisinage du point de contact.

1.4.1. DOMAINE D'ETUDE

Le plan d'étude est partagé de façon que (fig. 1.4) les dimensions des mailles soient en augmentation progressive et constante.

Si Δx est la longueur de la maille située entre le nœud d'abscisse x_{i-1} et x_i, la longueur de la maille suivante (située entre le nœud d'abscisse x_i et x_{i+1}) est alors $\varepsilon_x \Delta x$, ε_x étant une constante choisie en fonction de la précision désirée.

Soit donc :

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x$$

$$x_{i+1} - x_i = \varepsilon_x \Delta x$$

De même pour les ordonnées des nœuds

$$y_i - y_{i-1} = \Delta y$$

$$y_{i+1} - y_i = \varepsilon_y . \Delta y$$

ε_y constante choisie

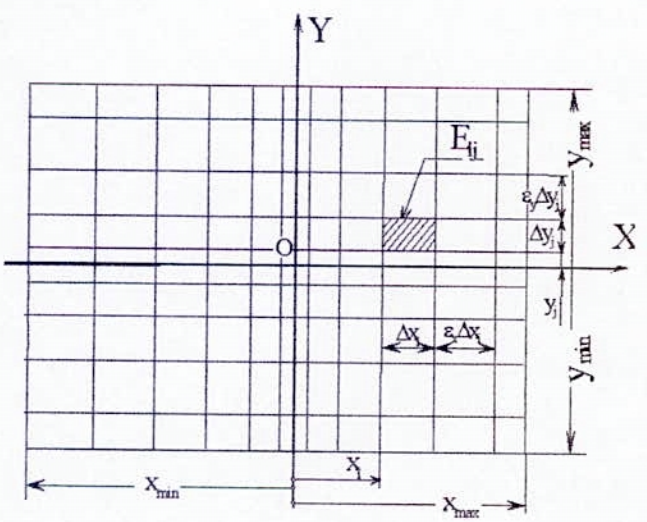


figure 1.4. Division du plan tangent

De cette façon, le plan d'étude sera partagé en pavés parallélépédiques $E_{i,j}$ de hauteur constante $h_{i,j}$ auxquels sera appliquée individuellement l'équation de REYNOLDS, (fig1.15).

La précision des calculs sera d'autant plus grande que la base de ces élément est plus petite.

Dans ces conditions l'équation (1.13) appliquée à l'élément $E_{i,j}$ du plan d'étude (fig.1.5), on obtient :

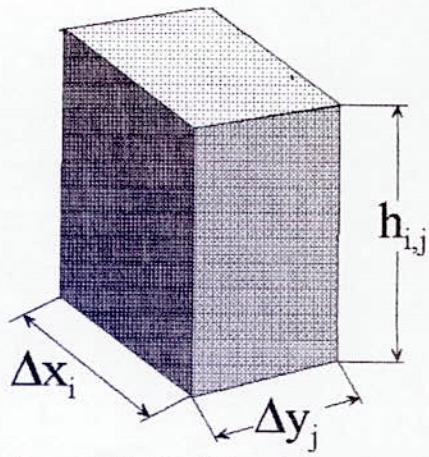


figure 1.5. Pavé du plan tangent

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f_{i,j}.\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f_{i,j}.\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{i,j}\frac{k_{i,j}}{g_{i,j}}(U_2-U_1)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_{i,j}\frac{k_{i,j}}{g_{i,j}}(V_2-V_1)\right)-\rho_{i,j}(W_2-W_1) \qquad (1.20)$$

De même, les expressions (1.14) à (1.16) appliquées à l'élément $E_{i,j}$ deviennent :

$$k_{i,j}=\frac{1}{2\mu}h_{i,j}^2 \qquad (1.21)$$

$$g_{i,j}=\frac{1}{\mu}h_{i,j} \qquad (1.22)$$

$$f_{i,j}=\rho_{i,j}\frac{h_{i,j}^3}{12\mu_{i,j}} \qquad (1.23)$$

$$\frac{k_{i,j}}{g_{i,j}}=\frac{1}{2}h_{i,j} \qquad (1.24)$$

1.4.2. APPROXIMATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS

En utilisant les approximations par les différences finies des dérivées premières et secondes appliquées à la méthode que nous avons retenue (voir Annexe I), les différents termes de l'équation (1.3) deviennent :

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x}.\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{-\varepsilon_x^2.f_{i-1,j}+(\varepsilon_x^2-1)f_{i,j}+f_{i+1,j}}{\varepsilon_x(\varepsilon_x+1)\Delta x}.\frac{-\varepsilon_x^2.p_{i-1,j}+(\varepsilon_x^2-1)p_{i,j}+p_{i+1,j}}{\varepsilon_x(\varepsilon_x+1)\Delta x} \qquad (1.25)$$

$$f_{i,j}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=2.f_{i,j}\,\frac{\varepsilon_x p_{i-1,j}-(\varepsilon_x+1)p_{i,j}+p_{i+1,j}}{\varepsilon_x(\varepsilon_x+1)\Delta x^2} \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{-\varepsilon_y^2.f_{i,j-1}+(\varepsilon_y^2-1)f_{i,j}+f_{i,j+1}}{\varepsilon_y(\varepsilon_y+1)\Delta y}\cdot\frac{-\varepsilon_y^2 p_{i,j-1}+(\varepsilon_y^2-1)p_{i,j}+p_{i,j+1}}{\varepsilon_y(\varepsilon_{y+1})\Delta y} \tag{1.27}$$

$$f_{i,j}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=2.f_{i,j}\,\frac{\varepsilon_y.p_{i,j-1}-(\varepsilon_y+1)p_{i,j}+p_{i,j+1}}{\varepsilon_y(\varepsilon_y+1)\Delta y^2} \tag{1.28}$$

En portant les égalités (1.25) à (1.28) dans l'équation (1.20) et en arrangeant les termes, on obtient l'équation fondamentale suivante :

$$\boxed{A_{p,}\ .\ P_{i,j}\ =\ B_p} \tag{1.29}$$

Dans cette équation, $P_{i,j}$ (inconnue à déterminer) représente la pression au point « i,j » et A_p et B_p sont définies par les expressions suivantes :

$$A_p = A_x + A_y\ ; \qquad B_p = B_x + B_y + B_o \tag{1.30}$$

où

$$A_x = A_{1x}f_{i-1,j} + A_{2x}f_{i,j} + A_{3x}f_{i+1,j} \qquad A_y = A_{1y}f_{i,j-1} + A_{2y}f_{i,j} + A_{3y}f_{i,j+1} \tag{1.31}$$

$$A_{1x}=-\frac{\varepsilon_x-1}{(\varepsilon_x+1)\Delta x^2} \qquad A_{2x}=\frac{(\varepsilon_x-1)^2-2\varepsilon_x}{\varepsilon_x^2\Delta x} \qquad A_{3x}=\frac{\varepsilon_x-1}{\varepsilon_x^2(\varepsilon_x+1)\Delta x^2} \tag{1.32}$$

$$A_{1y} = -\frac{\varepsilon_y - 1}{(\varepsilon_y + 1)\Delta y^2} \qquad A_{2y} = \frac{(\varepsilon_y - 1)^2 - 2\varepsilon_y}{\varepsilon_y^2 \Delta y^2} \qquad A_{3y} = \frac{\varepsilon_y - 1}{\varepsilon_y^2 (\varepsilon_y + 1)\Delta y^2} \tag{1.33}$$

et

$$B_x = B_{1x} f_{i-1,j} + B_{2x} f_{i,j} + B_{3x} f_{i+1,j} + B_{4x} \qquad B_y = B_{1y} f_{i,j-1} + B_{2y} f_{i,j} + B_{3y} f_{i,j+1} + B_{4y} \tag{1.34}$$

Avec

$$B_{1x} = -\frac{\varepsilon_x^2}{(\varepsilon_x + 1)^2 \Delta x^2} \qquad B_{2x} = \frac{\varepsilon_x - 3}{(\varepsilon_x + 1)\Delta x^2} \tag{1.35}$$

$$B_{3x} = \frac{1}{(\varepsilon_x^2 + 1)^2 \Delta x^2} \qquad B_{4x} = \rho_{i,j} \cdot \frac{-\varepsilon_x^2 \lambda_{i-1,j} + (\varepsilon_x^2 - 1)\lambda_{i,j} + \lambda_{i+1,j}}{\varepsilon_x (\varepsilon_x + 1)\Delta x} (U_2 - U_1) \tag{1.36}$$

$$B_{1y} = -\frac{\varepsilon_y^2}{(\varepsilon_y + 1)^2 \Delta y^2} \qquad B_{2y} = \frac{\varepsilon_y - 3}{(\varepsilon_y + 1)\Delta y^2} \tag{1.37}$$

$$B_{3y} = \frac{1}{(\varepsilon_y^2 + 1)^2 \Delta y^2} \qquad B_{4y} = \rho_{i,j} \cdot \frac{-\varepsilon_y^2 \lambda_{i,j-1} + (\varepsilon_y^2 - 1)\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j+1}}{\varepsilon_y (\varepsilon_y + 1)\Delta y} (V_2 - V_1) \tag{1.38}$$

$$B_0 = -\rho_{i,j} (W_2 - W_1) \tag{1.39}$$

Avec :

$$\lambda_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{g_{i,j}} \tag{1.40}$$

1.5. HAUTEUR DU FILM D'HUILE

La résolution de l'équation (1.20) nécessite la connaissance de la hauteur du film d'huile $h_{i,j}$ pour chaque élément $E_{i,j}$. Cette hauteur est composée par la somme d'une hauteur hydrodynamique h_0, d'une hauteur géométrique $l_{i,j}$ et de la déformation élastique $d_{i,j}$. (fig. 1.6) :

$$h_{i,j} = h_0 + l_{i,j} + d_{i,j} \tag{1.41}$$

1.5.1. HAUTEUR HYDRODYNAMIQUE

h_0 est la hauteur du film d'huile au niveau du centre de contact avant la déformation du profil. Sa valeur basée sur l'expérience est donnée par différentes formules selon les auteurs.

Pour notre part, nous choisissons de calculer la hauteur minimale nécessaire pour la formation du film d'huile sous des effets hydrodynamiques déterminés, selon les résultats de l'étude menée par D.DOWSON [19]. Selon cette étude, la hauteur minimale nécessaire pour la formation d'un film entre deux surfaces quelconques se mouvant à des vitesses v_1 et v_2, et, due uniquement aux effets hydrodynamiques, est donnée par l'expression générale :

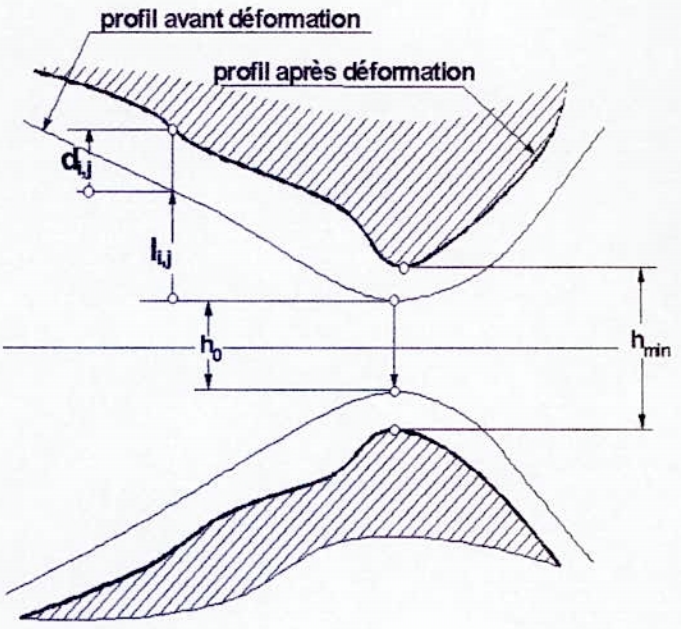


Figure 1.6. Hauteurs du film d'huile

$$h_0 = \frac{2.65.\alpha_p^{0.54}.(\nu.V_m)^{0.7}\rho_c^{0.43}}{E^{0.3}w_{i,j}} \qquad (1.42)$$

où :

α_p = coefficient de piezoviscosité du fluide ;

E : module d'élasticité du matériau ;

$$V_m = \frac{1}{2}(v_p + v_r), \qquad (1.43)$$

avec

$$v_p = \sqrt{U_1 + V_1 + W_1} \quad \text{et} \quad v_r = \sqrt{U_2 + V_2 + W_2} \qquad (1.44)$$

ν : viscosité cinématique ;

ρ_r : rayon de courbure équivalent au point de contact.

avec $$\frac{1}{\rho_r} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \qquad (1.45)$$

$w_{i,j}$: charge sur la denture correspondant à la pression s'exerçant au point i,j.

L'expression de la charge supportée par la dent est :

$$W = \int_{x\,min}^{x\,max} \int_{y\,min}^{y\,max} p.dy\,.dx \qquad (1.46)$$

où p est la pression appliquée sur la surface active de la dent .
L'équation (1.46) sera résolue numériquement par son expression numérique équivalente donnée au chapitre 4, paragraphe 6.

1.5.2. HAUTEUR GEOMETRIQUE

La hauteur géométrique $l_{i,j}$ est la longueur entre un point de la surface active de la dent du pignon et le point correspondant de la surface active de la dent de la roue d'un point quelconque $M(x_i , y_j)$ avant la déformation de la surface active de la denture. Cette hauteur est due uniquement à la configuration géométrique de cette surface. Sa détermination nécessite la connaissance topographique de la surface du flanc de la denture considérée. Son expression finale est donnée au paragraphe 4.4 par l'expression (4.25).

1.5.3. DEFORMATION ELASTIQUE

C'est la différence entre la hauteur de deux points correspondants avant et après la déformation élastique des surfaces actives (fig. 1.6). Son expression finale est donnée au paragraphe 4.5 par l'expression (4.26).

1.5.4. CONCLUSION

Pour la résolution de l'équation fondamentale que nous avons obtenue, connaissant la hauteur hydrodynamique, il nous faut calculer la valeur de chacune des deux autres hauteurs : hauteur géométrique et hauteur élastique pour chacun des pavés. Le sujet du chapitre suivant sera donc l'étude de la géométrie de la denture spiro-conique basée sur le modèle retenu.

Chapitre 2

GEOMETRIE DE LA DEN-TURE SPIRO-CONIQUE

2.1. INTRODUCTION

La représentation géométrique de la denture spiro-conique est un problème extrêmement complexe et qu'il n'existe pas de solutions analytiques pour la décrire. Sa description se fera par l'intermédiaire d'une simulation d'usinage basée sur la méthode de taillage retenue pour sa fabrication ; Les coordonnées des différents points sur la surface seront déterminées par une simulation numérique de la méthode.

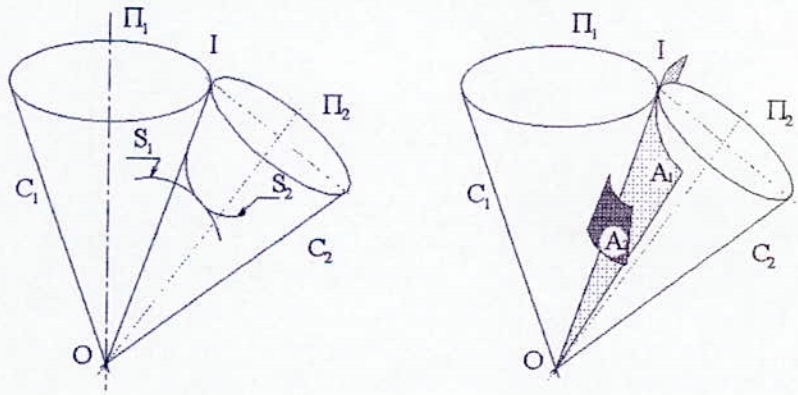
Il existe deux méthodes pour la fabrication des engrenages spiro-coniques [1, 5]. Le présent chapitre sera consacré à l'étude de la fabrication des engrenages spiro-coniques ; nous y décrirons leur géométrie, les machines-outils et méthodes utilisées pour leur fabrication.

2.2. METHODE D'OBTENTION DES DENTURES

Les surfaces des dentures du pignon et de la roue d'un engrenage spiro-conique peuvent être obtenues par deux méthodes :

1°- méthode des enveloppes :

Dans cette méthode, une surface S_1 liée au cône primitif C_1 d'axe de rotation Π_1 de la roue d'un couple d'engrenage, enveloppe une surface S_2 liée à un autre cône primitif C_2 d'axe de rotation Π_2, tangent le long de leur génératrice commune, au cône C_1. (fig. 2.1a)



a- *Méthode des enveloppes* b- *Méthode des roulettes*

Figure 2.1. Taillage des engrenages spiro-coniques

Dans cette méthode, la surface de la denture de la roue est taillée sans génération (surface obtenue par un procédé analogue au brochage), tandis que celle de la denture du pignon est engendrée par un ensemble générateur (cône primitif de la roue et la surface de la denture de la roue). Cette méthode (méthode formate et Helix Form) est très peu utilisée pour la génération d'un engrenage concourant [1].

2°- Méthode des roulettes :

Une surface conique A_1 de sommet O roule sans glisser sur deux cônes primitifs C_1 et C_2 tangents le long de leur génératrice commune OI. Pendant le roulement de la surface A_1 une surface A_2 liée à A_1 enveloppe deux surfaces S_1 et S_2 (fig. 2.2-b) S_1 et S_2 représentent les dentures du pignon et de la roue ; Les dentures conjuguées du pignon et de la roue sont obtenues par génération à partir du même ensemble générateur matérialisé par la surface primitive A_1 et la surface génératrice A_2.

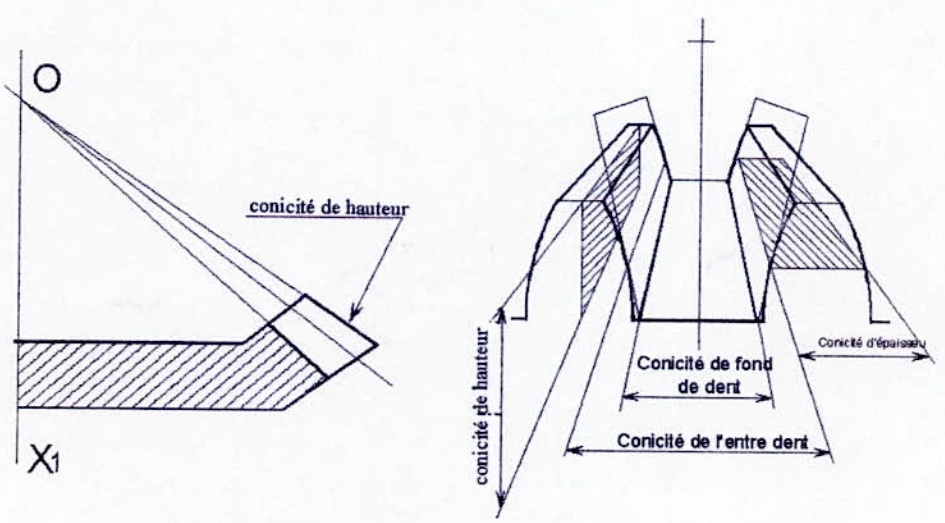
2.3. TYPES DE PROFILS

Deux types de profils sont actuellement utilisés pour les dentures des engrenages spiro-coniques et hypoïdes :

- denture à profil conique ;
- denture à profil constant.

2.3.1. DENTURE A PROFIL CONIQUE

Gleason Work [20] a adopté, pour la denture spiro-conique une denture conique variable [1,23] dont les dimensions vont en diminuant du gros bout au petit bout (figure 2.2).



a – Conicité de la roue dentée

b – Conicités des éléments de la denture

Figure 2.2. Denture à profil conique

Ces engrenages possèdent quatre paramètres de conicité :

- ***conicité de hauteur :*** diminution de la hauteur mesurée perpendiculairement au plan primitif le long de la dent.
- ***conicité d'épaisseur :*** diminution de l'épaisseur de la dent mesurée dans le plan primitif.
- ***conicité de l'entre dent :*** diminution de la largeur de l'entre dent le long de la dent mesurée dans le plan primitif.
- ***conicité de la largeur entre pointes (fond de dent) :*** diminution de la largeur de l'entre pointes de la dent mesurée dans le plan de pied.

En plus des quatre conicités, Gleason définit deux autres types de conicités, qui sont :

*1- **Conicité normale :***

Les dimensions de hauteur et d'épaisseur de la dent sont proportionnelles à la distance d'une section donnée au sommet du cône primitif. Par conséquent, les sommets du cône primitif et du cône de pied coïncideront et les côtés de la dent convergeront au sommet du cône primitif [1,21].

2- ***Conicité duplex :***

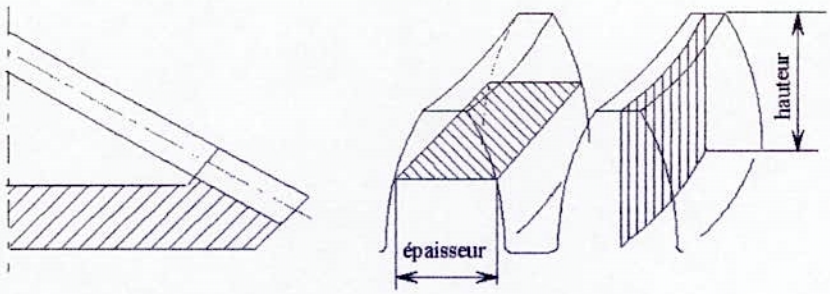
Elle est caractérisée par une conicité de largeur entre pointes nulle sur toute la largeur de denture sur les deux membres (pignon et roue). Cette conicité est obtenue par inclinaison de la ligne de pied autour de n'importe quel point du pied le long de la dent. Le sommet du cône de pied ne coïncide pas avec le sommet du cône primitif.

Afin de produire une denture conique, l'axe de la fraise frontale doit être normal à la génératrice du cône de pied [22].

2.3.2. DENTURE A PROFIL CONSTANT

Dans ce type de profil l'ensemble des éléments (hauteur et épaisseur de la dent, largeur de l'entre dent) sont constants. (figure 2.3)

Ce type de denture est plus rigide que les précédents, mais nécessite un usinage très soigné pour éliminer les vibrations dues aux interférences qui naissent en fonctionnement.



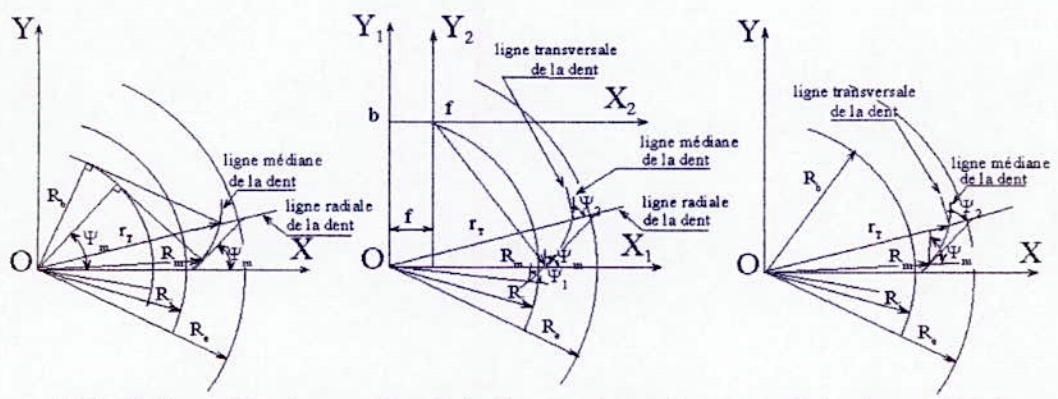
a – Roue dentée *b – Denture à paramètres constants*

Figure 2.3. Denture à profil constant

2.3.3. TYPES DE SPIRALES

Il existe plusieurs types de spirales. Les plus fréquents sont :

- ***Spirale logarithmique :*** c'est la forme théorique de ce type d'engrenage ; elle a l'avantage d'assurer un angle constant entre la ligne médiane et la ligne radiale de la denture, mais l'inconvénient réside dans la difficulté de sa fabrication (figure 2.4.a).
- ***Spirale circular-cut :*** la spirale théorique est remplacée par un cercle dont les paramètres (rayon, position, mouvements, …) permettent de rapprocher le plus possible de la spirale. Cette méthode utilise un outil circulaire de rayon r_T et dont la position est définie par deux paramètres b et f par rapport à l'origine (figure 2.4.b).
- ***Spirales en développante :*** le taillage de ce type de denture utilise une fraise mère basée sur la méthode des développantes. (figure 2.4.c)



a – Spirale logarithmique. *b – Spirale circular cut .* *c – Spirale en développante.*

figure 2.4. Types de spirales

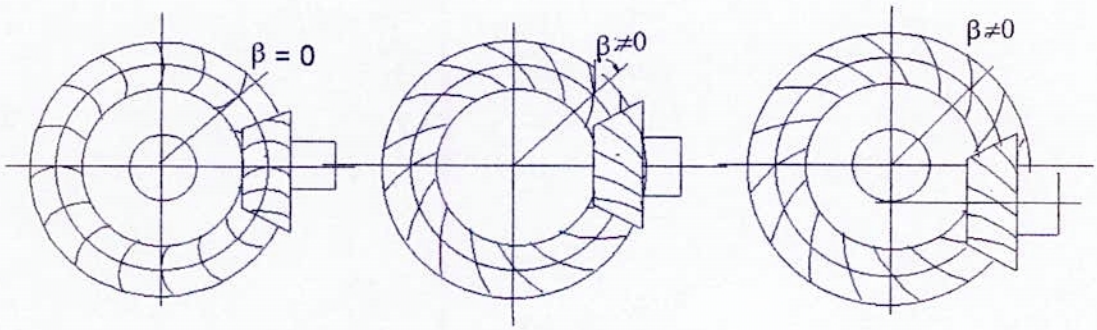
2.3.4. TYPES D'ENGRENAGES CONIQUES A DENTURE SPIRALE.

Ces types d'engrenages ont surtout été développés par la firme GLEASON. On en distingue trois types :

- ***Engrenage Zerol*** : dans ce type d'engrenage, les axes du pignon et de la roue sont concourants ; l'angle de la spirale moyen "α" pour la denture est nul (fig. 2.4.a.).

- ***Engrenage spiro-conique*** : les axes du pignon et de la roue sont également concourants mais l'angle moyen de la spirale n'est plus nul. (fig. 2.4. b)

- ***Engrenages hypoïdes*** : pour ce type d'engrenage, les axes ne sont plus concourants et l'angle moyen de la spirale n'est pas nul.



a - Engrenage Zerol *b - Engrenage spiro-conique* *c - Engrenage hypoïde*

Figure 2.5. Types d'engrenages à dentures spirales

2.4. PARAMETRES D'UNE ROUE GENERATRICE.

Pour l'usinage des engrenages spiro-coniques, on utilise le principe de taillage par roue génératrice à la différence des engrenages cylindriques ou hélicoïdales dont le taillage passe par le concept de la crémaillère génératrice [5].

Les dents de la roue génératrice dépendent de la forme du type de denture à usine (conique droit, hélicoïdale ou spirale). La roue génératrice est caractérisée par :

- *son plan primitif* : le cône primitif est réduit à un plan tournant sur lui-même autour de l'axe OX (fig. 2.6).Où O est le sommet du cône et I_1I_2 la largeur de la denture.

- *Sa surface génératrice :* elle est définie par son intersection M_1M_2 , où M_1M_2 est un arc de cercle de rayon R_i de centre O_1 , telle que la tangente T qui lui est menée par le point moyen M fasse un angle β(angle de la spirale) avec la génératrice OM, (fig. 2.6).

La surface A_2 est une surface d'égale pente, engendrée par des droites s'appuyant sur M_1M_2 et inclinée d'un angle constant sur le plan primitif.

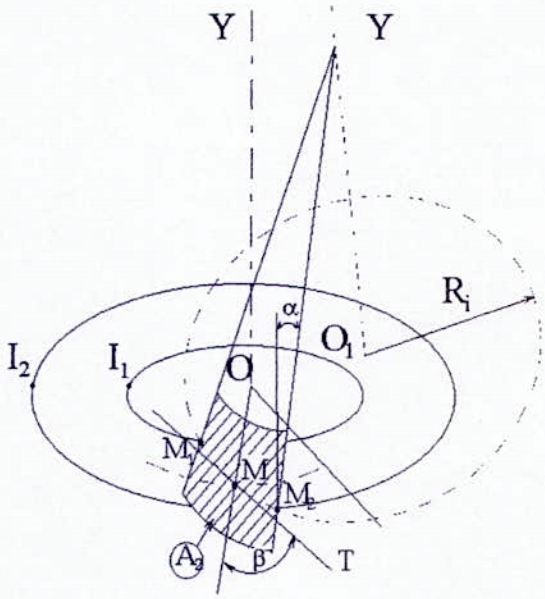


figure 2.6. Roue plate génératrice

2.5. TYPES DE FRAISES

L'outil de coupe utilisé pour le taillage engrenages spiro-coniques avec des machines GLEASON se présente sous forme de tourteau avec des lames tranchantes inclinées droites ou parfois sphérique [1, 21].

Il existe trois principaux types d'outils utilisés sur les machines Gleason :

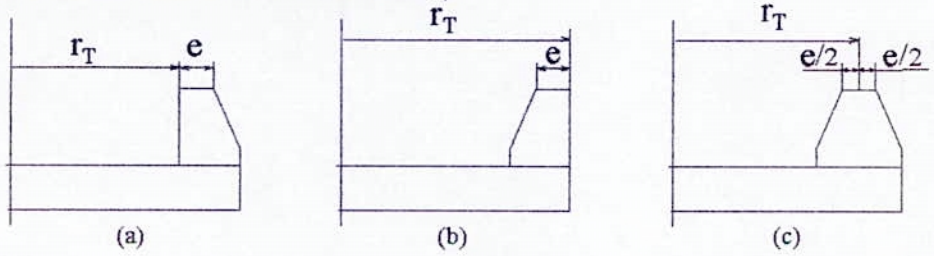
1°) outil à arête tranchante extérieure pour le taillage du flan concave de la denture (figure 2.7-a).

2°) outil à arête tranchante intérieure pour le taillage du flan convexe de la denture (figure 2.7-b)

3°) outil à tranchants alternés intérieur et extérieur pour le taillage mixte (figure 2.7-c)

Les caractéristiques de chaque outil sont :

- son rayon r_T ;
- la largeur entre pointes e_p ;
- l'angle d'inclinaison des tranchants ;
- les rayons de raccordement des tranchants σ ;



a - Fraise à tranchant extérieur. *b - Fraise à tranchant intérieur.* *c - Fraise à tranchants alternés.*

figure 2.7 .Types de fraises

2.6. MACHINES DE TAILLAGE

L'usinage des engrenages spiro-coniques se fait à l'aide de machines de taillage spécifiques conçues pour permettre l'utilisation d'une large gamme de roues génératrices.

Ces machines permettent un certain nombre de réglages spécifiques à chaque couple d'engrenages appelés "réglages machines". Ces machines sont composées de trois parties (figure 2.8) :

a- base coulissante ;

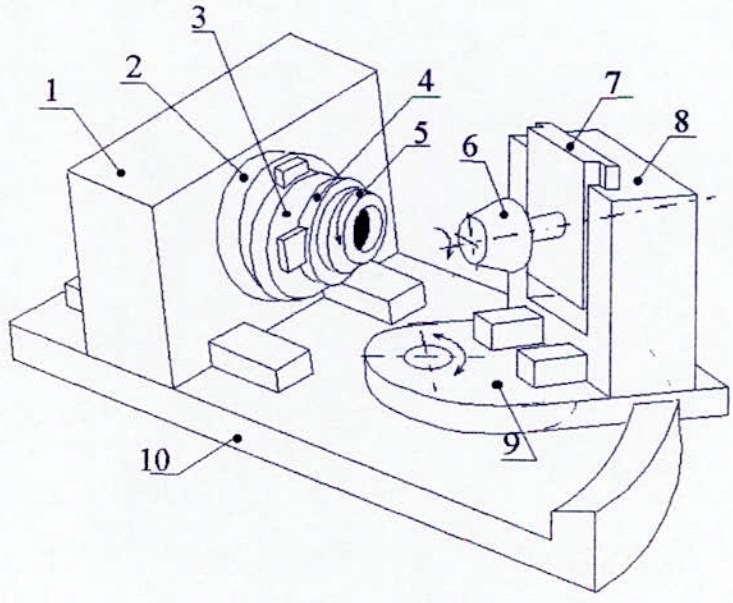
b- chariot ;

c- bâti ;

La base coulissante (1) peut se déplacer parallèlement à l'axe du berceau, permettant son positionnement axial. Celui-ci est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe horizontal. Sur le berceau est monté un excentrique (3) d'axe horizontal et pouvant se décaler de celui du berceau d'une excentricité "e". Le socle d'axe horizontal passant par l'axe de la fraise est réglable en position horizontale (3).

Le porte fraise, s'appuyant sur le socle est réglable en position angulaire par rapport à l'axe du socle (4). L'outil de taillage s'appuie sur la face verticale du porte fraise pendant l'opération de taillage.

Ce mécanisme permet d'obtenir l'inclinaison et l'excentricité de la fraise entre zéro et une valeur supérieure donnée.



1- Base coulissante
2- Berceau
3- Excentrique
4- socle
5- porte fraise
6- pièce à usiner
7- broche
8- poupée
9- chariot
10- bâti

figure 2.8. Machine de taillage universelle Gleason

Le chariot (9) est réglable en position angulaire et porte la poupée qui est réglable en position axiale suivant l'axe de la pièce à tailler, permettant le positionnement du sommet de son cône primitif. La pièce est portée par la broche (7) réglable en hauteur.

La pièce est animée d'un mouvement de rotation uniforme pour un taillage avec génération, elle est immobile pour un taillage sans génération.

Le bâti (10) porte la base coulissante, le chariot et l'ensemble des éléments du mécanisme de la machine.

2.7. REGLAGES MACHINES

L'opération de taillage de la pièce nécessite un certain nombre de réglages de positionnement et de mouvement de la pièce vis à vis de la fraise. Ces réglages concernent :

- Le positionnement de la fraise ;
- le positionnement de la pièce ;
- les mouvements de la pièce et de la fraise.

2.7.1. POSITIONNEMENT DE LA FRAISE

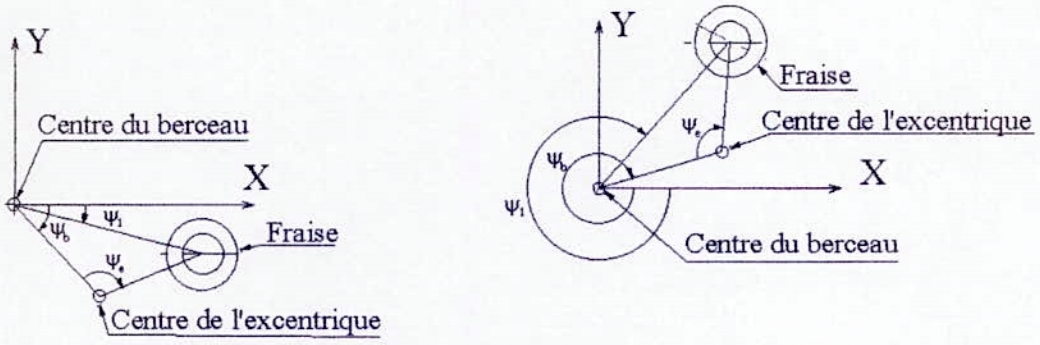
Lors du taillage de la pièce, celle-ci doit être positionnée dans le plan de référence (plan machine) et son axe doit être orienté par rapport à celui du berceau. Cela s'obtient à l'aide des réglages suivants :

a- Angle du berceau Ψ_b *:* c'est le réglage angulaire, du berceau par rapport à son axe[12, 58], il permet de positionner l'axe de l'excentrique par rapport à l'axe de la machine

b- Angle de l'excentrique Ψ_e *:* c'est le réglage angulaire qui permet d'ajuster la distance radiale entre l'axe de la fraise et celui de la machine (figure 2.9)

c- angle du socle β *:* c'est le réglage angulaire du socle qui permet d'ajuster l'orientation et la direction de l'inclinaison de l'axe de la fraise (figure 3.3).

d- angle du porte fraise δ *:* c'est le réglage angulaire du porte fraise qui permet d'ajuster l'angle entre l'axe de la fraise et celui du berceau. (figure 3.3).



a- Génératrice à spirale droite *b- Génératrice à spirale gauche*

figure 2.9. Positionnement de la fraise

2.7.2. POSITIONNEMENT DE LA PIECE

Le positionnement de la pièce est obtenu par le réglage des paramètres suivants :

a- Angle de pied α : il définit l'angle entre l'axe de la pièce à tailler et le plan machine. Il est obtenu grâce à l'orientation de l'axe de la poupée par rapport à l'axe du berceau.

b- Recul machine f : c'est le positionnement du cône primitif par rapport au plan machine; il est obtenu par un déplacement longitudinal de la poupée suivant l'axe de la pièce à tailler.

c- Décalage vertical b : c'est le réglage vertical de la broche ; Il permet de positionner l'axe de la pièce à tailler par rapport au centre machine.

d- Base coulissante d : c'est l'ajustement longitudinal de la base coulissante dans la direction parallèle à l'axe du berceau . Il positionne le point d'intersection de l'axe de la pièce avec l'axe du berceau (fig. 2.10).

2.8. METHODE DE TAILLAGE DES DENTS

Il existe deux méthodes pour le taillage des engrenages spiro-coniques :

- Taillage avec génération (fig. 2.11-a)
- taillage sans génération (fig. 2.11-b)

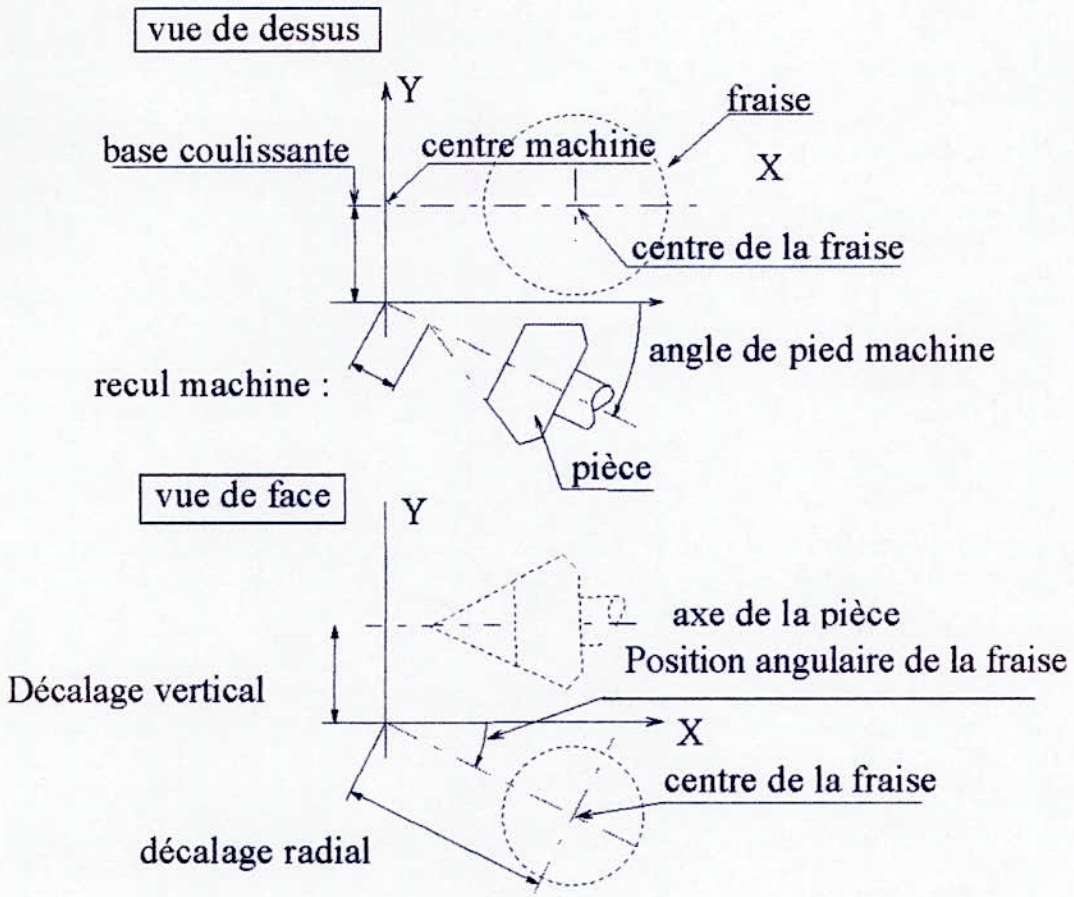


Figure 2.10. Positionnement de la pièce

2.8.1. TAILLAGE AVEC GENERATION

Dans le procédé de taillage par génération, la denture est obtenue par une roue génératrice imaginaire par la méthode des roulette. pendant, l'opération d'usinage, le berceau, qui représente la roue génératrice exécute un mouvement de rotation oscillatoire autour de son axe matérialisant l'axe de rotation de la roue génératrice fictive, tandis que la fraise effectue un mouvement de rotation uniforme autour de son axe.

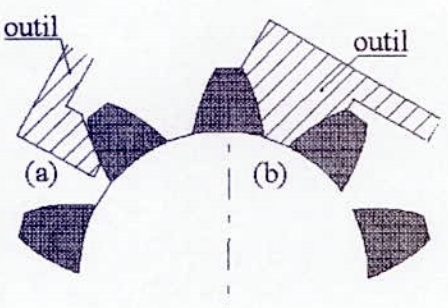


figure 2.11 .Taillage des dents

La pièce à tailler est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe [20]. Pendant le taillage d'un entre-dent, la roue génératrice engrène avec la pièce à tailler et la denture de la roue génératrice enveloppe la surface de denture de la pièce à tailler. A chaque instant, ces deux surfaces sont en contact linéaire suivant une courbe spatiale dont la forme et l'emplacement sur les surfaces en contact changent pendant le processus d'engrènement [20, 22, 23].

2.8.2. TAILLAGE SANS GENERATION

Le taillage sans génération est l'usinage des dentures par la méthode des enveloppes. Elle n'est applicable que pour le taillage des roues dont l'angle primitif est plus grand que 70° [5].

La roue est taillée sans mouvement relatif entre le berceau et la pièce par un procédé analogue au brochage . L'usinage du flanc concave et convexe de la dent se fait en même temps en une seule passe avec un outil de forme.

Les surface des roues ne sont pas générées, par contre, les surfaces des dentures des pignons doivent être générées [24].

2.8.3. CONCLUSION

Les différents types de dentures spiro-coniques, les méthodes de taillage ainsi que les réglages machines associés ont été présentés dans ce chapitre.

Cette présentation est nécessaire étant donné que la denture des engrenages spiro-coniques est obtenue par simulation du procédé d'usinage en tenant compte des différents paramètres de l'usinage.

Chapitre 3

MODELE MATHEMATIQUE

3.1. INTRODUCTION

Comme la représentation de la denture spiro-conique ne possède pas de description analytique, la détermination des points de sa surface se fait à l'aide d'une simulation de taillage basée sur les réglages machines pendant l'usinage des engrenages (réglage de l'outil de coupe et de la pièce à usiner) et les mouvements relatifs de la pièce et l'outil, en tenant compte que chaque point de la surface de la dent appartient à l'arête tranchante de l'outil.

Pour cette représentation, nous utiliserons les coordonnées homogènes.

3.2. COORDONNEES HOMOGENES

Soit un point M_1 de coordonnées (x_1,y_1,z_1) dans le repère cartésien quelconque $O_1.\vec{i}_1.\vec{j}_1.\vec{k}_1$ et M_2 son image dans un autre repère cartésien $O_2.\vec{i}_2.\vec{j}_2.\vec{k}_2$ par une transformation linéaire. La relation entre leurs coordonnées est donc :

$$\begin{aligned} x_2 &= a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + b_1 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 + b_2 \\ z_2 &= a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 + b_3 \end{aligned}$$

Soit, en utilisant une notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La représentation de la relation linéaire par la relation matricielle est un artifice qui permet de remplacer les transformations linéaires (translations, rotation, ...) par une opération sur des matrices.

Dans cette représentation :

les $a_{i,j}$ représentent les cosinus directeurs des vecteurs $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$ dans le repère $O_1.\vec{i}_1.\vec{j}_1.\vec{k}_1$

les b_i représentent les coordonnées de l'origine O_2 dans le repère $O_1.\vec{i}_1.\vec{j}_1.\vec{k}_1$

Cette représentation est dite représentation en coordonnées homogènes.

3.3. HYPOTHESES DE TAILLAGE

Pendant l'opération de taillage, un point qui appartient à la surface de la dent, appartient en même temps à l'arête tranchante de l'outil qui l'a généré.

Le modèle de simulation sera donc basé sur la transformation de chaque point du flanc actif de la dent en un point de la fraise en utilisant les différents réglages machine du processus.

Le procédé de taillage des engrenages spiro-coniques pris en considération pour la simulation numérique est l'usinage des dentures à profil constant par la méthode des enveloppes (taillage sans génération pour la roue est avec génération pour le pignon).

Les corrections nécessaires pour l'élimination des interférences ont été prises en considération dans les paramètres de réglage, [24, 25] il en résulte ainsi un contact ponctuel à la place du contact linéaire théorique.

Le pignon est la roue motrice dont le flanc actif est la surface concave de la dent.

Le flanc actif de la roue menée est la surface convexe de la dent, (figure 1.3).

La position d'engrènement, le plan tangent ainsi que le repère local sont indiqués sur la figure 3.1. L'origine du repère étant située sur le point de contact, h désigne l'épaisseur du film d'huile.

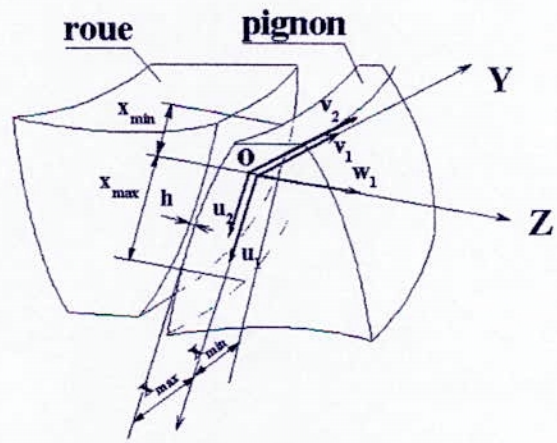


Figure 3.1. Repère local

3.4. TAILLAGE DU PIGNON

La simulation numérique du taillage du pignon sera basée sur le procédé d'usinage par la méthode avec génération.

La roue sera taillée par la méthode sans génération.

Pour les autres types d'engrenages, il suffit de déterminer les matrices de passage pour chaque cas comme il sera expliqué plus loin pour le cas présent, et d'intégrer ensuite celles-ci dans le logiciel de calcul pour avoir l'étude complète du cas désiré.

3.4.1. REGLAGE DE L'OUTIL

3.4.1.1. Représentation de l'arête tranchante

Dans le repère $O_TX_TY_TZ_T$ lié à la fraise, les points de l'arête tranchante de l'outil sont représentés par les paramètres (r_{01} ,τ_1 ,θ ,r_{01} étant le rayon de l'outil) tels que définis dans la fig. 3.2.

La position du point M appartenant à l'arête de l'outil est alors définie par le vecteur :

$$\vec{O_TM} = \vec{r_T} \tag{3.1}$$

avec

$$\vec{r_T} = \begin{bmatrix} -\tau_1 \\ (r_{01} + \tau_1.\mathrm{tg}\sigma_1).\cos\theta \\ (r_{01} + \tau_1.\mathrm{tg}\sigma_1).\sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

σ_1 étant l'angle de l'outil.

3.4.1.2. Orientation de la fraise

Le repère R_0 $(O.X_0Y_0Z_0)$ étant lié au bâti de la machine, (repère fixe), l'orientation de la fraise (inclinaison de sa face) est définie par le réglage de l'angle du socle (angle β) et ce lui du porte fraise (Angleδ). Cette position est définie par le repère R_1 $(O_1X_1Y_1Z_1)$ obtenu par une rotation du plan X_0 O_0 Y_0 autour de l'axe OZ_0 d'un angle β et d'une inclinaison du plan Y_0 O_0 Z_0 d'un angle δ autour de l'axe O_0X_0.

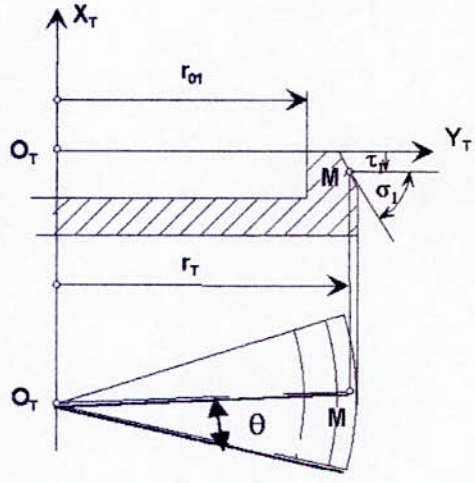


figure 3.2.. Repérage d'un point de l'arête tranchante

La position du point M de la fraise dans le repère R_1 est donnée par le vecteur :

$$\vec{r_1} = [A_1]\vec{r_T} \tag{3.3}$$

où [A_1] est la matrice de passage du repère R_T au repère R_1 (voir Annexe II) dont l'expression est :

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta.\cos\delta & \cos\beta.\cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\beta.\sin\delta & \cos\beta.\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

3.4.1.3. position du centre de la fraise

la position du centre de la fraise O_T est déterminée par l'angle Ψ_1 (obtenu par la combinaison des réglages de l'angle du berceau Ψ_b et l'angle de l'excentrique Ψ_e) et l'excentricité e_p de la fraise (fig. 2.9) ; cette position est définie par repère R_2 dont l'origine est le centre de la fraise $O(\Psi_1, e_p)$ et les axes parallèles à ceux de R_1. (fig. 3.3)

La position du point M de l'outil dans le repère R_2 est alors donnée par le vecteur :

$$\vec{r}_2 = [A_2]\vec{r}_1 \tag{3.5}$$

où [A_2] est la matrice de passage du repère R_1 au repère R_2 (fixe); son expression est

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & e_p\cos\psi_1 \\ 0 & -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & -e_p\sin\psi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

3.4.2. POSITIONNEMENT DE LA PIECE

La position de la pièce est définie par le réglage du décalage vertical b, de la base coulissante d, du recul machine f et de l'angle de pied α.(fig. 2.10). Cette position est définie par le repère R_3 obtenu par (fig. 3.3) :

- une translation de valeur - b du plan $X_2\ O_2Y_2$ dans la direction de l'axe O_2Z_2
- une translation de valeur d du plan $Y_2\ O_2Z_2$ dans la direction de l'axe O_2X_2
- une rotation d'angle α du plan $Y_2\ O_2Z_2$ autour de l'axe O_2X_2
- une translation de valeur f du plan $X_2\ O_2Z_2$ dans la direction de l'axe O_2Y_2

La position du pont M dans le repère R_3 est alors donnée par le vecteur :

$$\vec{r}_3 = [A_3] \cdot \vec{r}_2 \tag{3.5}$$

où $[A_3]$ est la matrice de passage du premier repère au second ; son expression est donc :

$$[A_3] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & -d.\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & -f - d\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

3.4.3. MOUVEMENTS RELATIFS PIECE/OUTIL

Le pignon étant généré, durant le processus de taillage, il effectue un mouvement de rotation autour de son axe avec une fréquence angulaire ω_1 dans le repère R_4 dont l'axe $O_4 Z_4$ est confondu avec l'axe de rotation de la pièce de rotation (fig. 3.4).

Le plan $O_4 X_4 Y_4$ du repère R_4 fait un angle ψ_0 par rapport au plan machine, lié au repère fixe, appelé angle de roulement de la pièce. La valeur de cet angle est lié à l'angle de roulement du berceau ψ_1 par la relation :

$$r_g = \frac{\psi_0}{\psi_1} = \frac{\omega_1}{\omega_0} \tag{3.7}$$

où ω_0 est la vitesse angulaire de la fraise.

Les coordonnées du point M exprimées dans le repère R_4, sont données par la relation :

$$\vec{r}_4 = [A_4]. \vec{r}_3 \tag{3.8}$$

où $[A_4]$ est la matrice de passage de R_3 à R_4

Son expression est :

$$[A_4] = \begin{bmatrix} \cos\psi_0 & 0 & \sin\psi_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

3.4.4. POSITION D'ENGRENEMENT DU TRAIN D'ENGRENAGE

La position d'engrènement du pignon et de la roue est représentée, R_5 fixe est lié au bâti de la machine, par la figure 3.5. Pour compenser les erreurs géométriques relatives à la géométrie spirale des corrections axiales doivent être apportées à la denture pour la suppression des interférences et conduisant à un contact ponctuel à la place d'un contact linéaire théorique selon les travaux réalisés par V. Simon [24].

Le plan $O_0X_0Z_0$ du repère R_0 fait un angle φ (φ angle d'engrènement du pignon avec la roue) avec le plan $O_4X_4Z_4$.

les coordonnées du point M exprimées dans le repère R_0 , sont données par l'expression :

$$\vec{r}_5 = [A_5]. \vec{r}_4 \tag{3.10}$$

avec :

$$[A_5]=\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

φ_1 étant l'angle d'engrènement (figure 3.4)

Un point quelconque de la surface active du pignon en engrènement avec la roue est donné, dans le repère fixe R_0, lié au bâti, par l'expression : ($\vec{r}_{F1} \equiv \vec{r}_5$)

où $\vec{r}_{F1}$ est donné par l'expression :

$$\vec{r}_{F1} = [A_5].[A_4].[A_3].[A_2].[A_1].\vec{r}_T \qquad (3.12)$$

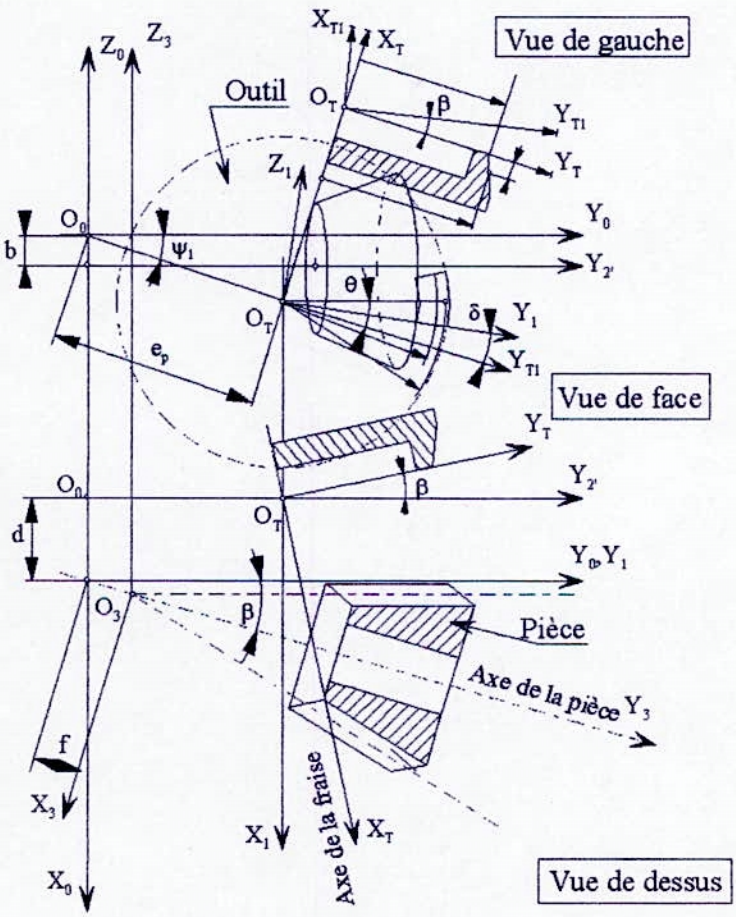


Figure 3.3. Positions pignon/outil pendant l'usinage

3.6. TAILLAGE DE LA ROUE

La simulation numérique du taillage de la roue sera basée sur l'usinage par la méthode sans génération. Les réglages machines et les mouvements pièce /outil en découlent. (chapitre 2 § 8)

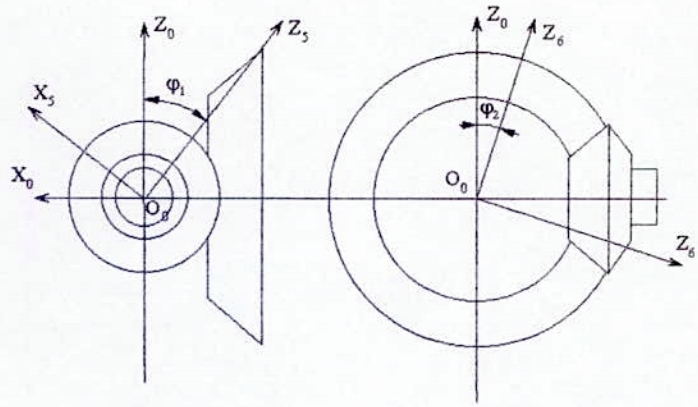


figure 3.4. Position d'engrènement

3.6.1. REPRESENTATION DE L'ARETE TRANCHANTE DE L'OUTIL

Un point M appartenant à l'arête tranchante de l'outil (fig. 3.5) est défini par

- L'angle θ_2 que fait le rayon $O_{T2}M$ avec l'axe $O_{T2}Y_{T2}$,
- La distance τ_2 du point M à l'axe $O_{T2}Y_{T2}$ dans les de l'axe $O_{T2}X_{T2}$.
- Le rayon de la fraise r_{02}

La position du point M sur l'arête tranchante est définie par la relation :

$$O_{T2}\vec{M} = \vec{r}_{T2} \tag{3.12}$$

où le vecteur position $\vec{r}_{T2}$ a pour expression :

$$\vec{r}_{T2} = \begin{bmatrix} -\tau_2 \\ (r_{02} + \tau_2.tg\sigma_2)\cos\theta_2 \\ (r_{02} + \tau_2.tg\sigma_2)\sin\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

σ_2 étant l'angle de pente de la fraise et r_{02} son rayon.

3.6.2. POSITION DE TAILLAGE

La position de la fraise est déterminée par une excentricité de valeur *m* (fig. 3.5). Cette position est obtenue par le déplacement du socle dans la direction de l'axe O_2Y_2 du repère lié au bâti. Cette position est définie par le repère R_{T2} lié à la fraise.

La position de la fraise qui est immobile durant le processus de taillage est obtenue par le réglage de l'angle de pied ξ et le recul machine g et le décalage vertical c.

Cette position est définie par le repère R_6 lié à la pièce à usiner (roue).

Un point M de l'arête tranchante de l'outil, exprimé dans le repère R_6 , est défini par la relation :

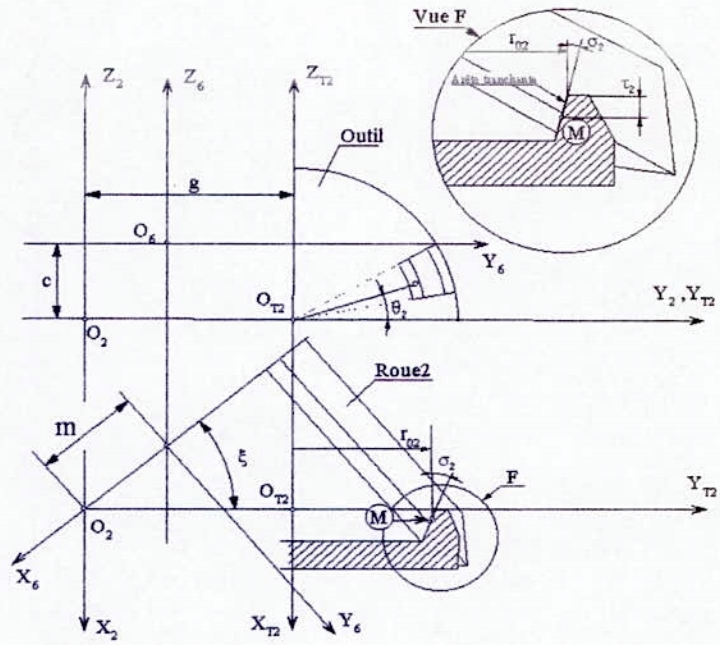


Figure 3.5. Positions roue/outil pendant l'usinage

$$\vec{r}_6 = [A_6] \cdot \vec{r}_{T2} \tag{3.14}$$

$[A_6]$ est la matrice de passage du repère R_{T2} lié à l'outil au repère R_6 lié à la pièce ; son expression est :

$$[A_6] = \begin{bmatrix} \sin\xi & -\cos\xi & 0 & -m.\cos\xi + g \\ \cos\xi & \sin\xi & 0 & m.\sin\xi \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

3.6.3. POSITION D'ENGRENEMENT

La position du train d'engrènement du train d'engrenage est définie par la figure 3.4.

Le passage du repère R_6 lié à la roue au repère fixe est défini par le vecteur :

$$\vec{r}_7 = [A_7] \cdot \vec{r}_6 \tag{3.16}$$

$[A_7]$ représente la matrice de passage du repère R_6 au repère R_0; son expression est :

$$[A_7] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_2 & \sin\psi_2 & 0 \\ 0 & -\sin\psi_2 & \cos\psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Un point quelconque de la surface active de la roue (confondu avec le point homologue de l'arête de la fraise qui l'a engendré) est donné dans le repère fixe d'engrènement par l'expression :

$$\vec{r}_7 = [A_7].[A_6].\vec{r}_{T2} \qquad (3.18)$$

En associant cette expression avec la simulation de taillage à partir du processus d'usinage, on obtient l'ensemble des points de la surface active de la dent de la roue.

3.7. SURFACES ACTIVES DES DENTURES

Pour l'étude de la lubrification de l'engrenage, (calcul de la pression du lubrifiant, de l'épaisseur du film d'huile, de la température du fluide et des surfaces en contact ainsi que leur déformation), il n'est pas nécessaire de connaître la géométrie globale de la dent, mais uniquement celle des surfaces en contact.

Ces surfaces seront obtenues point par point par l'intermédiaire du plan tangent commun en utilisant les équations de contact entre les roues dentées et le tranchant de la fraise d'un côté et en calculant le point de contact entre le pignon et la roue en engrènement de l'autre.

Pour chaque point arbitrairement choisi sur le plan tangent déterminé, on calculera les points homologues sur les surfaces actives des roues dentées.

3.7.1. SURFACE ACTIVE DU PIGNON

Sont désignées comme surfaces actives les deux surfaces en contact des roues dentées :

- Pour le pignon, il s'agit de la surface concave de la dent qui est la surface menante du train.
- Pour la roue, c'est la surface convexe de la dent qui est la surface menée (fig. 3.1).

L'ensemble des points de la surface active du pignon est défini par l'équation de contact entre le tranchant de la fraise et celle du pignon.

L'équation de contact entre la surface du pignon et le tranchant de la fraise a pour expression dans le repère final fixe R_0 :

$$\vec{V}_{(T/1)0}.\vec{n}_{(T)0} = 0 \qquad (3.19)$$

Dans cette expression, $\vec{V}_{(T/1)0}$ représente la vitesse relative de la surface coupante de l'outil T par rapport à celle du pignon 1 dans le repère R_0 et $\vec{n}_{(T)0}$ est un vecteur unitaire orthogonal à la surface de l'outil T dans le repère R_0

3.8. VITESSE RELATIVE FRAISE/PIGNON

La vitesse relative $\vec{V}_{(T/1)0}$ entre le tranchant de la fraise et la surface du pignon en génération est définie par :

$$\vec{V}_{(T/1)0} = \vec{\omega}_{(T)}. \wedge .\vec{r}_2 - \vec{\omega}_{(1)} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_a) \tag{3.20}$$

Dans l'expression (3.20), $\omega_{(T)}$ représente la vitesse angulaire de la fraise dans le repère R_T (lié à l'outil).

Son expression est :

$$\vec{\omega}_{(T)} = \begin{bmatrix} -\omega_T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

où ω_T est la composante suivant l'axe O_TX_T (fig. 3.3). $\omega_{(1)}$ est la vitesse de rotation du pignon dans le repère R_0 , son expression est :

$$\vec{\omega}_{(1)} = \begin{bmatrix} -\omega_1.\sin\alpha \\ -\omega_1.\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Le vecteur $\vec{r}_a$ a pour expression :

$$\vec{r}_a = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Le signe " $\wedge$ " dans l'expression 3.20 représente le produit vectoriel entre vecteurs.

En mettant les expressions (3.21) à (3.23) dans (3.20) et en effectuant les opérations, on obtient l'expression de la vitesse relative :

$$\vec{V}_{(T/1)0} = \begin{bmatrix} \omega_1.(z_2 + b)\cos\alpha \\ \omega_T.z_2 - \omega_1.(z_2 + b)\sin\alpha \\ -\omega_T.y_2 + [y_2.\sin\alpha - (x_2 - d)\cos\alpha] \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

3.9. VECTEUR NORMAL A LA SURFACE DU PIGNON

Un vecteur unitaire $\vec{n}_{(T)T}$ normal à la surface de l'outil dans le repère R_T est défini par l'expression

$$\vec{n}_{(T)T} = \frac{\frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \tau_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \tau_1} \wedge \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \theta} \right\|} \tag{3.25}$$

En dérivant $\vec{r}_T$ à partir de son expression (3.2) par rapport à τ_1 puis par à rapport à θ, on obtient :

$$\frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \tau_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ tg\sigma_1 . \cos\theta \\ tg\sigma_1 . \sin\theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{r}_T}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_1 . tg\sigma_1 . \sin\theta \\ \tau_1 . tg\sigma_1 . \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

finalement, l'expression du vecteur unitaire $\vec{n}_{(T)T}$ normal à la surface de l'outil dans le repère R_T est :

$$\vec{n}_{(T)T} = \frac{\begin{bmatrix} (r_{01} + \tau_1 . tg\sigma_1) tg\sigma_1 \\ (r_{01} + \tau_1 . tg\sigma_1) \cos\theta \\ (r_{01} + \tau_1 . tg\sigma_1) \sin\theta \end{bmatrix}}{\sqrt{(r_{01} + \tau_1 . tg\sigma_1)^2 . (tg^2\sigma_1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta)}} \tag{3.27}$$

et en utilisant les relations trigonométriques, on peut écrire :

$$\vec{n}_{(T)T} = \frac{\begin{bmatrix} tg\sigma_1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}}{\sqrt{(tg^2\sigma_1 + 1)}} = \frac{\begin{bmatrix} tg\sigma_1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\sigma_1}}}$$

Finalement, l'expression du vecteur normal à la surface de l'outil dans le repère R_T est :

$$\vec{n}_{(T)T} = \begin{bmatrix} \sin\sigma_1 \\ \cos\sigma_1 . \cos\theta \\ \cos\sigma_1 . \sin\theta \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

L'expression finale du vecteur normal à la surface du pignon a pour expression :

$$\vec{n}_{(T)0} = [B_2][B_1]\begin{bmatrix} \sin\sigma_1 \\ \cos\sigma_1.\cos\theta \\ \cos\sigma_1.\sin\theta \end{bmatrix} \qquad (3.29)$$

[B_i] sont les matrices égales aux matrices [A_i] auxquelles on supprime la dernière colonne et la dernière ligne.

La surface du pignon dans le repère d'engrènement est définie par le système d'équation :

$$\vec{V}_{(T/1)0}.\vec{n}_{(T)0} = 0 \qquad (3.30)$$

$$\vec{r}_5 = [A_5].[A_4].[A_3].[A_2].[A_1].\vec{r}_T \qquad (3.31)$$

L'équation (3.30) définit les points de la surface active générée par l'outil et l'équation (3.31) les donne dans le repère d'engrènement.

3.10. EQUATION DE LA SURFACE DU PIGNON

L'équation développée de la surface du pignon est obtenue en portant l'expression de la vitesse $\vec{V}_{(T/1)0}$ à partir de l'égalité (3.24) et celle de $\vec{n}_{(T)0}$ à partir de (3.29) dans l'équation (3.30).

Soit :

$$\cos\alpha.\left[\cos(\psi_1-\delta).(B_1.\cos\theta_1 + d.B_3) + \sin\theta_1.\sin(\psi_1-\delta).(B_1.\cos\beta + d) + B_2.(b - e_p.\sin\psi_1)\right] +$$

$$+\frac{1}{r_g.\sin\alpha}.\left[\sin\theta_1.(B_1.\sin\beta + e_p.\sin\delta) - e_p.B_3.\cos\delta\right] + b.\sin\alpha.\left[-B_3.\sin(\psi_1-\delta) + \sin\theta_1.\cos(\psi_1-\delta)\right] = 0 \qquad (3.32)$$

avec :

$$B_1 = r_{01}.tg\sigma_1 + \frac{\tau_1}{\cos^2\sigma_1} \qquad B_2 = tg\sigma_1.\cos\beta - \sin\beta.\cos\theta \qquad B_3 = tg\sigma_1.\sin\beta + \cos\beta.\cos\theta$$

3.11. COMPOSANTES DES VITESSES DU FLUIDE

En supposant qu'il n'y a pas de glissement entre les surfaces des dents et le fluide lubrifiant, et en se basant sur la figure (3.4), les composantes de la vitesse du fluide ont pour expression :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = [B_L][B_7]^{-1}.[B_8]^{-1}.\begin{bmatrix} -\Omega_1.z_5 \\ 0 \\ \Omega_1.x_5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{bmatrix} = [B_L][B_7]^{-1}..\begin{bmatrix} 0 \\ \Omega_2.z_8 \\ \Omega_2.y_8 \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

Ω_1 et Ω_2 étant respectivement la fréquence de rotation du pignon et de roue en engrènement. $[B_L]$ représente la matrice de passage du repère d'engrènement au repère local lié au plan tangent commun et dont l'expression sera calculée ultérieurement.

3.12. RAYONS DE COURBURES

Le calcul de la hauteur hydrodynamique qui est de la forme :

$$h_0 = f(\vec{U}_i, \vec{V}_i, \vec{W}_i, \rho_i)$$

nécessite la connaissance des composantes $(\vec{U}_i, \vec{V}_i, \vec{W}_i$ données par les expressions 3.33) de la vitesse de la surface de la roue étudiée et des rayons de courbures ρ_i de chacune des deux surfaces actives. Le rayon de courbure d'une surface quelconque en un point M est donné par la première relation de FRENET :

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

où ds représente un élément de la courbe en question et τ le vecteur tangent au point M.

Le rayon de courbure à la surface active du pignon et à la surface de la roue ont pour expression respectivement :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\vec{i}_{L1c}}{ds_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\rho_2} = \frac{d\vec{i}_{L2c}}{ds_2} \tag{3.34}$$

Dans les expressions ci-dessus, $\vec{i}_{L1c}$ et $\vec{i}_{L2c}$ représentent les vecteurs tangents au point de contact. Leur expression est donnée par la relation 4.11 dans laquelle, (x_2, y_2, z_2) représentent les cordonnées du point de contact sur la surface du pignon respectivement sur la surface de la roue. ds_1 et ds_2 ont pour expressions :

$$ds_1 = \sqrt{dx_{1L}^2 + dy_{1L}^2 + dz_{1L}^2} \quad \text{et} \quad ds_2 = \sqrt{dx_{2L}^2 + dy_{2L}^2 + dz_{2L}^2} \tag{3.35}$$

x_{1L}, y_{1L}, z_{1L} et x_{2L}, y_{2L}, z_{2L} sont les coordonnées du point de contact dans le repère local.

3.13. FLANC ACTIF DE LA ROUE

L'ensemble des points de la surface active de la roue (surface concave) est défini par l'équation de taillage suivante :

$$\vec{v}_{(T2/2)0}.\vec{n}_{T2/0} = 0 \qquad (3.36)$$

où $\vec{v}_{(T2/2)0}$ représente la vitesse relative entre la surface active de l'outil T_2 et celle de la roue durant le processus de taillage dans le repère R_0.

$\vec{n}_{T2/0}$ représente le vecteur normal à la surface de l'outil T_2 dans R_0 ; son expression est :

$$\vec{n}_{T2/0} = [B_7][B_6]\begin{bmatrix} \sin\sigma_2 \\ \cos\sigma_2 \cos\theta_2 \\ \cos\sigma_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} \qquad (3.37)$$

3.14. CONCLUSION

Les différents points de la surface active de la dent de la roue sont obtenus par l'intermédiaire de l'équation de taillage 3.36 et la relation de position 3.31 dont la résolution est donnée au chapitre 6 paragraphe 5.

Ces résultats permettent le calcul de la hauteur géométrique et hydrodynamique.

Pour le calcul de l'épaisseur du film d'huile, il reste à déterminer la déformation élastique au point de contact.

Chapitre 4

EPAISSEUR DU FILM D'HUILE

4.1. GENERALITES

La résolution de l'équation fondamentale des films minces (1.20 page 14) nécessite le calcul préalable de la hauteur du film d'huile pour chaque point de l'espace considéré.

Pour la mise en application de la méthode des différences finies retenue pour la simulation numérique, le plan tangent commun aux deux surfaces en contact, sera partagé en pavés pour lesquels la hauteur du film d'huile correspondante sera calculée.

Ce chapitre sera consacré à la détermination du plan tangent commun au point de contact et au calcul de la hauteur géométrique qui dépend uniquement de la topographie de la dent en dehors de toute contrainte, au niveau de chaque nœud du maillage de ce plan puis de la déformation élastique. L'épaisseur du film d'huile sera alors totalement déterminée. Elle est égale à la somme des trois hauteurs :

- hauteur hydrodynamique ;
- hauteur géométrique ;
- déformation élastique ;

4.2. DETERMINATION DU REPERE LOCAL

La définition du plan local dans lequel est calculée l'épaisseur du film d'huile (figure 4.1), sera déterminé par le calcul de chacun de ses éléments :

- Origine du repère
- Vecteurs unitaires de chacun des ses axes.
- Matrice de passage du repère fixe final au repère lié au plan local.

La disposition de ce repère dans la position d'engrènement est indiquée sur la figure (3.1) :

L'axe Oz a pour direction la normale à la surface de contact du pignon durant l'engrènement.

4.2.1. ORIGINE DU REPERE

Le plan XOY du plan local est confondu avec le plan tangent commun aux deux surfaces actives des dents en engrènement.

L'origine de ce repère sera localisée sur le point de contact entre

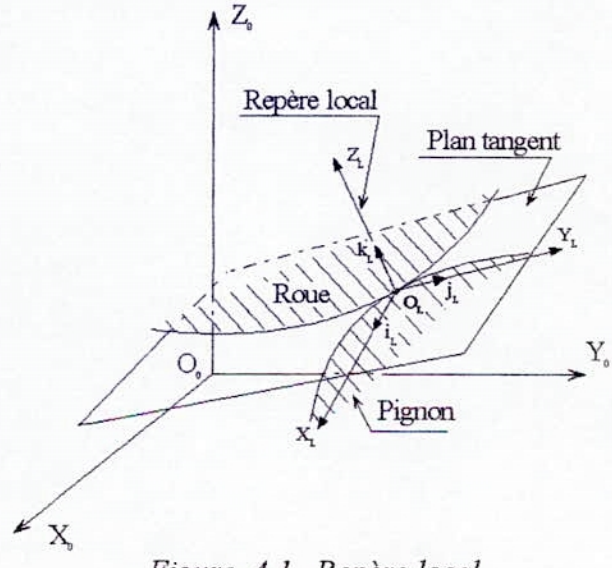


Figure 4.1 Repère local

ces deux surfaces dans leur position de fonctionnement, représentée par la figure (3.4). La localisation de l'origine du repère se réduit au calcul du point de contact par rapport au repère fixe d'engrènement.

Ce point commun aux deux surfaces est défini par le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} &\vec{r}_{1/0} = \vec{r}_{2/0} \\ &\vec{v}_{(1,2)}.\vec{n}_{1/0} = 0 \\ &\vec{n}_{1/0} = \vec{n}_{2/0} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La première relation exprime l'unicité du point de contact $r_{1/0}$ et $r_{2/0}$ étant définis dans le repère fixe R_0, avec :

$$\vec{r}_{1/0} = [A_5].[A_4].[A_3].[A_2].[A_1].\vec{r}_{T1} \tag{4.2}$$

et

$$\vec{r}_{2/0} = [A_8].[A_7].[A_6].\vec{r}_{T2} \tag{4.3}$$

La deuxième relation exprime que ce point appartient au plan tangent ;

$\vec{v}_{(1,2)}$ est la vitesse relative entre la surface du pignon et celle de la roue.

Son expression est :

$$\vec{v}_{(1,2)} = \omega_2 \cdot \begin{bmatrix} i_r.z_{2/0} \\ -z_{2/0} \\ i_r.x_{2/0} + y_{2/0} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

i_r désigne le rapport de réduction entre la fréquence de rotation du pignon et celle de la roue.

Son expression est :

$$i_r = \frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{4.5}$$

$\vec{n}_{1/0}$ est le vecteur unitaire normal à la surface du pignon dans le repère R_0.

Il est égal à :

$$\vec{n}_{1/0} = [B_5].[B_4].[B_3].[B_2].[B_1].\vec{n}_{(T)T} \tag{4.6}$$

soit, en remplaçant $\vec{n}_{(T)T}$ par sa valeur tirée de l'expression (3.28) :

$$\vec{n}_{1/0} = [B_5].[B_4].[B_3].[B_2].[B_1].\cos\sigma_1 \begin{bmatrix} tg\sigma_1 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

$\vec{n}_{2/0}$, vecteur unitaire normal à la surface de la roue dans le repère d'engrènement, est obtenu par une application linéaire associée aux changements de repère ; son expression est :

$$\vec{n}_{2/0} = [B_7].[B_6].\cos\sigma_2 \begin{bmatrix} tg\sigma_2 \\ \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

Au point de contact, les vecteurs unitaires $\vec{n}_{1/0}$ et $\vec{n}_{2/0}$ orthogonaux respectivement à la surface du pignon et à celle de la roue sont confondus, d'où la troisième relation du système (4.1).

En portant les expressions (4.4) et (4.8) dans l'équation (4.1), on obtient l'équation du point de contact suivante :

$$a_1.\sin\psi_2 + a_2.\cos\psi_2 + a_3 - i_r.a_r.a_4 = 0 \qquad (4.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= i_r.(a_6.\cos\theta_2 - g.a_5 + m.tg\theta_2) \\ a_2 &= i_r.[(\sin\theta_2.(g - a_6.\sin\xi_2 - m.\cos\xi_2)] + c.a_4 \\ a_3 &= \sin\theta_2.(m.\sin\xi_2 - a_6.\cos\xi_2) + c.a_5 \\ a_4 &= tg\sigma_2.\sin\xi_2 - \cos\xi_2.\cos\theta_2 \\ a_5 &= tg\sigma_2.\cos\xi_2 + \sin\xi_2.\cos\theta_2 \\ a_6 &= r_{2/0}.tg\sigma_2 + \frac{\tau_2}{\cos^2\sigma_2} \end{aligned} \qquad (4.10)$$

4.2.2. VECTEURS UNITAIRES DU REPERE LOCAL

Le repère local sera complètement défini avec la définition des vecteurs unitaires de chaque axe.

a- Vecteur unitaire suivant l'axe O_LX_L

Un vecteur $\vec{i}_L$ de l'axe O_LX_L dans le plan tangent, est défini par la relation :

$$\vec{i}_L = \frac{\vec{v}_{(1,2)}}{|\vec{v}_{(1,2)}|} \qquad (4.11)$$

$\vec{v}_{(1,2)}$ est la vitesse relative entre le pignon et la roue ; elle est donnée par l'expression (4.4).
L'expression de $\vec{i}_L$ est donc :

$$\vec{i}_L = \begin{bmatrix} \dfrac{i_r.Z_{2/0}}{|\vec{v}_{12}|} \\ \dfrac{-Z_{2/0}}{|\vec{v}_{12}|} \\ \dfrac{i_r.X_{2/0} + Y_{2/0}}{|\vec{v}_{12}|} \end{bmatrix}$$

avec :

$$|\vec{v}_{12}| = \sqrt{i_r^2(Z_{2/0} + a_z)^2 + Z_{2/0}^2 + (i_r X_{2/0} + Y_{2/0})^2}$$

Les valeurs de $x_{2/0}$, $y_{2/0}$ et $z_{2/0}$ sont données par la relation (4.3).

b- Vecteur unitaire suivant l'axe O_LZ_L

Le vecteur unitaire $\vec{k}_L$ de l'axe O_LZ_L, orthogonal au plan tangent, est donné par :

$$\vec{k}_L = \frac{\vec{n}_{1/0}}{|\vec{n}_{1/0}|} \qquad (4.12)$$

$\vec{n}_{1/0}$ est le vecteur normal à la surface du pignon (ainsi qu'à la surface de la roue), donc normal au plan tangent. Sa valeur est donnée par l'expression (4.7).
La représentation de son expression analytique bien que fastidieuse, ne présente aucune difficulté particulière. Sa valeur sera calculée numériquement à partir des expressions (4.7) et (4.12).

c- Vecteur suivant l'axe O_LY_L

Le vecteur $\vec{j}_L$ suivant l'axe O_LY_L est donné par le produit vectoriel des deux précédents :

$$\vec{j}_L = \vec{k}_L \wedge \vec{i}_L \qquad (4.13)$$

4.3. MATRICE DE PASSAGE AU REPERE R_L

Le calcul de l'épaisseur du film d'huile est exécuté dans le repère local lié au plan tangent commun aux deux surfaces de la dent. Le passage du repère d'engrènement à celui-ci, se fait à l'aide d'une isométrie directe représentée par une matrice $[A_L]$ définissant cette application. Cette matrice déterminée, un point appartenant à la surface du pignon sera donc représenté par le vecteur :

$$\vec{r}_L = [A_L].\vec{r}_{1/0} \qquad (4.14)$$

où $[A_L]$ est la matrice de passage au repère local dont il faut déterminer les éléments.

4.3.1. ELEMENTS DE LA MATRICE DE PASSAGE

Les éléments de la matrice de passage au repère local sont définis à partir des paramètres du repère local. Ces éléments seront calculés numériquement à partir des expressions (4.10) à (4.13).

Ses éléments sont obtenus à partir des coordonnées du centre du repère local et des coordonnées de ses vecteurs unitaires.

Les coordonnées de l'origine O_L de R_L dans R_0 sont données par l'expression (4.1), soit :

$$\vec{r}_{OL} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

où b_1, b_2 et b_3 représentent la solution de l'équation (4.9)

les expressions (4.11) à (4.13) donnent ceux des vecteurs unitaires $\vec{i}_L$, $\vec{j}_L$ et $\vec{k}_L$ dans le repère fixe R_0, soit :

$$i_L = \begin{bmatrix} i_{1L} \\ i_{2L} \\ i_{3L} \end{bmatrix} \qquad j_L = \begin{bmatrix} j_{1L} \\ j_{2L} \\ j_{3L} \end{bmatrix} \qquad k_L = \begin{bmatrix} k_{1L} \\ k_{2L} \\ k_{3L} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Les égalités de l'expression (4.16) donnent les éléments de la matrice de passage du repère local au repère fixe R_0. Le passage du repère d'engrènement au repère local s'exécute par l'application inverse.

Un point du plan tangent est exprimé dans le repère fixe par la relation :

$$\vec{r}_{1/0} = [D]\vec{r}_L \tag{4.17}$$

soit en développant :

$$\begin{bmatrix} X_{1/0} \\ Y_{1/0} \\ Z_{1/0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{1L} & j_{1L} & k_{1L} & b_{1L} \\ i_{2L} & j_{2L} & k_{2L} & b_{2L} \\ i_{3L} & j_{3L} & k_{3L} & b_{3L} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Le passage du repère $R_{1/0}$ au repère local se fait à l'aide de la relation inverse :

$$\vec{r}_L = [A_L]\vec{r}_{1/0} \tag{4.19}$$

La matrice de passage $[A_L]$ au repère local R_L est donc définie par :

$$[A_L]=[D]^{-1} \tag{4.20}$$

Où [D] représente la matrice de passage du repère local au repère fixe dont l'expression est :

$$[D]=\begin{bmatrix} i_{1L} & j_{1L} & k_{1L} & b_{1L} \\ i_{2L} & j_{2L} & k_{2L} & b_{2L} \\ i_{3L} & j_{3L} & k_{3L} & b_{3L} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

4.4. HAUTEUR GEOMETRIQUE

La hauteur géométrique (séparation géométrique entre la surface du pignon et celle de la roue en engrènement en dehors de toute contrainte) au niveau d'un point $M(x_i, y_j, z_k = 0)$ arbitrairement choisi sur le plan tangent (fig. 1.6 et 3.1) est définie par l'intersection de la normale au plan tangent commun passant par ce point et les surfaces respectives de la roue et du pignon.

L'intersection d'une droite, de vecteur directeur $\vec{n}_T$ passant par un point arbitraire du plan tangent de coordonnées (x_i, y_j, z_k), avec la surface de la dent du pignon est définie par l'équation :

$$\frac{x_i - X_{1L}}{n_{Tx}} = \frac{y_j - Y_{1L}}{n_{Ty}} = \frac{z_k - Z_{1L}}{n_{Tz}} \tag{4.22}$$

Dans cette expression , X_{1L}, Y_{1L}, Z_{1L} représentent les coordonnées du point sur la surface du pignon.

Son intersection avec la surface de la roue est donnée par l'équation :

$$\frac{x_i - X_{2L}}{n_{Tx}} = \frac{y_j - Y_{2L}}{n_{Ty}} = \frac{z_k - Z_{2L}}{n_{Tz}} \tag{4.23}$$

Dans cette expression X_{2L}, Y_{2L}, Z_{2L} sont les coordonnées du point sur la surface de la roue correspondantes au point du plan tangent de coordonnées (x_i, y_j, z_k) .

n_{Tx} , n_{Ty} et n_{Tz} représentent les composantes du vecteur normal au plan tangent $\vec{n}_T$ dont l'expression est :

$$\vec{n}_T = \begin{bmatrix} n_{Tx} \\ n_{Ty} \\ n_{Tz} \end{bmatrix} = [B_L].\ \vec{n}_{1/0} \qquad (4.24)$$

où $[B_L]$ est égale à la matrice $[A_L]$ à laquelle on supprime la dernière ligne et la dernière colonne.

La hauteur géométrique $l_{i,j}$ est alors donnée par :

$$l_{i,j}(x_i, y_j) = \sqrt{(X_{1L} - X_{2L})^2 + (Y_{1L} - Y_{2L})^2 + (Z_{1L} - Z_{2L})^2} \qquad (4.25)$$

4.5. DEFORMATION ELASTIQUE

La déformation élastique d(x , y) en un point M(x , y) d'un espace régulier donné [09, 11, 14], causée par une pression de répartition continue p(X , Y) est donnée par l'expression générale :

$$d(x,y) = 2.\frac{(1-\mu^2)}{\pi.E}\int_{x.min}^{x.max}\int_{y.min}^{y.max}\frac{p(X,Y)}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}}.dX.dY \qquad (4.26)$$

Dans cette expression, μ représente le coefficient de poisson et E le module d'élasticité du matériau.

Conditions d'utilisation

La validité de cette expression est conditionnée par les hypothèses suivantes :

- la matière utilisée est homogène ;
- le matériau utilisé est isotrope ;
- les contraintes restent inférieures aux limites élastiques du matériau utilisé ;
- les dimensions de la zone de contact restent faibles devant les rayons de courbures des surfaces en contact.

Toutes de ces conditions sont remplies dans le cas des engrenages en général et en particulier des engrenages spiro-coniques.

D'une façon générale l'intégration analytique de l'expression (4.26), ne peut être réalisée que pour les surfaces classiques possédant une équation analytique les définissant. Dans les cas des engrenages spiro-coniques, son intégration se fera numériquement.

L'évaluation numérique de cette intégrale est donnée par l'expression [10, 27] :

$$d_{i,j} = 2\left(\frac{1-\mu^2}{\pi E}\right)\sum_{l=1}^{l=N_x}\sum_{m=1}^{m=N_y} I_{l,m} \tag{4.27}$$

avec :

$$I_{l,m} = p_{l,m}\cdot\left(-x_a.\mathrm{Log}\frac{y_b+\sqrt{x_a^2+y_b^2}}{y_a+\sqrt{x_a^2+y_a^2}} + x_b.\mathrm{Log}\frac{y_b+\sqrt{x_b^2+y_b^2}}{y_a+\sqrt{x_b^2+y_a^2}} - y_a.\mathrm{Log}\frac{x_b+\sqrt{x_b^2+y_a^2}}{x_a+\sqrt{x_a^2+y_a^2}} + y_b.\mathrm{Log}\frac{x_b+\sqrt{x_b^2+y_b^2}}{x_a+\sqrt{x_a^2+y_b^2}}\right)$$

4.6. CHARGE SUR LA DENT

la capacité de charge sur la dent est donnée par l'expression :

$$W = \int_{x\,min}^{x\,max}\int_{y\,min}^{y\,max} p.dy.dx \tag{4.28}$$

Dont l'évaluation numérique est

$$w_{i,j} = \sum_{l=1}^{l=N_x}\sum_{m=1}^{m=N_y} g_{l,m} \tag{4.29}$$

où :

$$g_{l,m} = p_{l,m}.\left[-x_a.\mathrm{Log}\left(y_b+\sqrt{x_a^2+y_b^2}\right)+x_b.\mathrm{Log}\left(y_b+\sqrt{x_b^2+y_b^2}\right)\right.$$
$$\left.-y_a.\mathrm{Log}\left(x_b+\sqrt{x_b^2+y_a^2}\right)+y_b.\mathrm{Log}\left(x_b+\sqrt{x_b^2+y_b^2}\right)\right] \tag{4.30}$$

N_x représente le nombre de division selon l'axe des X

N_y représente le nombre de division selon l'axe des Y

et

$$x_a = x_i - \frac{x_{l-1} + x_l}{2} \qquad x_b = x_i - \frac{x_l + x_{l+1}}{2} \tag{4.31}$$

$$y_a = y_j - \frac{y_{m-1} + y_m}{2} \qquad y_b = y_j - \frac{y_m + y_{m+1}}{2} \tag{4.32}$$

4.7. CONCLUSION

L'épaisseur film d'huile au niveau d'un point du plan tangent a donc pour expression finale :

$$h_{i,j} = h_0 + l_{i,j} + d_{i,j} \tag{4.33}$$

h_0 , $l_{i,j}$ et $d_{i,j}$ sont données respectivement par les expressions (1.42) , (4.25) et (4.27).

Le balayage de l'ensemble des nœuds du plan tangent donnera la configuration tridimensionnelle du film d'huile entre les surfaces des dentures en engrènement.

Chapitre 5

TEMPERATURE DU FLUIDE

5.1. INTRODUCTION

La transmission de puissance par denture entraîne un échauffement du fluide lubrifiant et des surfaces en contact, dû au transfert énergétique entre ces éléments. L'élévation excessive de la température peut entraîner la décomposition de l'huile de lubrification et par suite l'annulation de ses effets. C'est pourquoi il est très important de connaître la forme et la valeur de celle-ci.

Pour déterminer ces paramètres, il est nécessaire de connaître les échanges énergétiques et thermiques entre les parois et le fluide lubrifiant.

Ce chapitre sera consacré au calcul des températures du film d'huile ainsi que le champ thermique sur la surface de la denture.

5.2. ECHANGE ENERGETIQUE

L'échange énergétique entre deux parois et un fluide lubrifiant à la température initiale T_0 se mouvant entre celles-ci à une vitesse $\vec{V}$ de composantes $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ suivant les directions respectives $O\vec{X}$, $O\vec{Y}$, et $O\vec{Z}$, sous une pression P est régi par l'équation générale de l'énergie [15].

Dans notre étude, nous nous proposons d'appliquer celle-ci aux spécificités des dentures spiro-coniques afin de déterminer l'expression de la température du fluide ainsi que le champ thermique sur les surfaces de la denture.

Cette équation a pour expression[18, 30, 31] :

$$\rho.c_p.\left(u.\frac{\partial T}{\partial x}+v.\frac{\partial T}{\partial y}+w.\frac{\partial T}{\partial z}\right)-k_c.\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\alpha_T.T\left(u.\frac{\partial p}{\partial x}+v.\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\nu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] \qquad (5.1)$$

Dans cette équation, u, v et w sont données par les expressions suivantes :

$$u = U_2 + \frac{\partial p}{\partial x}.\int_0^z \frac{z}{\mu}.dz + \frac{1}{g_2}.\left(U_1 - U_2 - k_2.\frac{\partial p}{\partial x}\right)\int_0^z \frac{1}{\mu}.dz$$

$$v = V_2 + \frac{\partial p}{\partial y}.\int_0^z \frac{z}{\mu}.dz + \frac{1}{g_2}.\left(V_1 - V_2 - k_2.\frac{\partial p}{\partial y}\right)\int_0^z \frac{1}{\mu}.dz$$

$$w = -\frac{1}{\rho}.\int_0^z \left[\frac{\partial(\rho.u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho.v)}{\partial y}\right].dz$$

avec :

- ρ : masse volumique du fluide ;
- c_p : chaleur spécifique de fluide ;
- α_T : expansivité thermale du lubrifiant.
- k_c : conductibilités thermiques du fluide
- μ : viscosité dynamique du lubrifiant ;
- U_1, V_1, W_1, composantes de la vitesse de la surface du pignon ;
- U_2, V_2, W_2, composantes de la vitesse de la surface de la roue ;
- g_2 et k_2 sont données par les expressions (1.14) et (1.15) ;

5.2.1. CONDITIONS AUX LIMITES

La température hors de la zone d'action est supposée constante et est égale T_0. Celles du fluide à la frontière (entrée et sortie de la zone d'action) restent également contantes et sont égales à la température ambiante T_0. Ces hypothèses se traduisent par les conditions aux limites suivantes :

a) entrée du fluide :

A la frontière de la zône d'action, l'huile entre avec une température constante ; cela se traduit par les égalités :

a.1. suivant l'axe Ox : $T(x_{min}, y, z) = T_0$ pour $(u)_{x=x\,min} \geq 0$

et

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=x\,min} = 0 \quad \text{pour} \quad (u)_{x=x\,min} < 0 \tag{5.2}$$

a-2. suivant l'axe Oy : $T(x, y_{min}, z) = T_0$ pour $(v)_{y=y\,min} \geq 0$

et

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y\,min} = 0 \quad \text{pour} \quad (v)_{y=y\,min} < 0 \tag{5.3}$$

b) sortie du fluide :

De même la lubrification étant abondante, la température à la sortie est constante est égale à T_0.

Cela se traduit par les égalités suivantes :

b-1 suivant l'axe Ox : $T(x_{max}, y, z) = T_0$ pour $(u)_{x=x\,max} \leq 0$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=x\,max} = 0 \quad \text{pour} \quad (u)_{x=x\,max} > 0 \tag{5.4}$$

b-2 suivant l'axe Oy : $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=y\,max} = 0$ pour $(v)_{y=y\,max} > 0$

et

$$T(x, y_{max}, z) = T_0 \quad \text{pour} \quad (v)_{y=y\,max} \leq 0 \tag{5.5}$$

c) continuité dans le transfert :

L'échange thermique entre les surfaces du pignon et de la roue et le fluide de lubrification est continu cela se traduit par les égalités :

$$k_c \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0} = k_s \cdot \left(\frac{\partial T_2}{\partial z_2}\right)_{z=z_2\,max}$$

$$k_c \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=h} = k_s \cdot \left(\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)_{z=0} \tag{5.6}$$

où : T représente la température du lubrifiant, T_1 , celle du pignon et T_2, celle de la roue ; k_c et k_s représentent respectivement les conductibilités thermiques du fluide et du matériau des engrenages.

Les conditions (5.2) à (5.5) expriment qu'à l'extérieur de la zone de contact la température est constante (égale à T_0 à la frontière), de même qu'il n'y a pas d'échange énergétique en dehors de la zone d'action.

Les conditions (5.6) exprime la continuité dans le transfert de chaleur entre le fluide et les parois des roues.

Pour la résolution de l'équation (5.1), nous adopterons la même méthode que nous avons utilisée pour la résolution de l'équation généralisée de Reynolds (1.13)

De la même façon, le plan d'étude de la température sera le plan tangent aux deux surfaces partagé en pavés progressifs tel que décrit au paragraphe 1.6.

5.3. RESOLUTION DE L'EQUATION GENERALE DE L'ENERGIE

L'équation (5.1) sera remplacée par son approximation par les différences finies puis appliquée à chacun des pavés du plan tangent commun aux deux surfaces en contact. En utilisant les approximations par les différences finies des dérivées premières (Annexe I, expression AI.19 et AI.20) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \frac{u_{i+1,j} + \left(\varepsilon_x^2 - 1\right)u_{i,j} - \varepsilon_x^2 . u_{i-1,j}}{\varepsilon_x \left(1 + \varepsilon_x\right) h} \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = \frac{u_{i,j+1} + \left(\varepsilon_y{}^2 - 1\right)u_{i,j} - \varepsilon_y{}^2 . u_{i,j-1}}{\varepsilon_y \left(1 + \varepsilon_y\right) h} \tag{5.8}$$

L'équation (5.1) devient :

$$\boxed{A_T \,.\, T_{i,j,k} \;=\; B_T} \tag{5.9}$$

Avec :

$$B_T = \nu . \left[(M_u)^2 + (M_v)^2\right] + \rho c_p . \left(A_1 . T_{i-1,j,k} + A_2 . T_{i+1,j,k} + A_3 . T_{i,j-1,k}\right) +$$

$$+ A_4 T_{i,j+1,k} + A_5 T_{i,j,k-1} + A_6 T_{i,j,k+1} + k_0 . [\, 2 . \frac{\varepsilon_x . T_{i-1,j,k} + T_{i+1,j,k}}{\varepsilon_x \left(1 + \varepsilon_x\right) \Delta . x^2} +$$

$$2 . \frac{\varepsilon_y . T_{i,j-1,k} + T_{i,j+1,k}}{\varepsilon_y \left(1 + \varepsilon_y\right) \Delta . y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} . \left(T_{i,j,k-1} + T_{i,j,k+1}\right)] \tag{5.10}$$

où :

$$M_u = U_2 + \frac{1}{\upsilon . g} . (U_1 - U_2) + \frac{1}{\upsilon}\left[h - \frac{k}{g}\right] . \left[\frac{-\varepsilon_x^2 . p_{i-1,j} + \left(\varepsilon_x^2 - 1\right) p_{i,j} + p_{i+1,j}}{\varepsilon_x . \left(\varepsilon_x + 1\right) \Delta . x}\right]$$

$$M_v = V_2 + \frac{1}{\upsilon . g} . (V_1 - V_2) + \frac{1}{\upsilon}\left[h - \frac{k}{g}\right] . \left[\frac{-\varepsilon_y^2 . p_{i,j-1} + \left(\varepsilon_y^2 - 1\right) p_{i,j} + p_{i,j+1}}{\varepsilon_y . \left(\varepsilon_y + 1\right) \Delta . y}\right]$$

et

$$A_T = \rho.c_p.\sum_{l=1}^{l=5} A_l + 2.k_0\left(\frac{1}{\varepsilon_x \Delta x^2} + \frac{1}{\varepsilon_y \Delta y^2}\right) + \alpha_T.\left(u.\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) +$$

$$+ \quad 2.k_0\left(\frac{1}{\varepsilon_x \Delta x^2} + \frac{1}{\varepsilon_y \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right) \tag{5.11}$$

Avec :

$$A_1 = \frac{1}{2.\Delta x}.(u + |u|) \qquad A_2 = \frac{1}{2.\varepsilon_x.\Delta x}(u + |u|) \tag{5.12}$$

$$A_3 = \frac{1}{2.\Delta y}(v + |v|) \qquad A_4 = \frac{1}{2.\varepsilon_y.\Delta y}.(-v + |v|) \tag{5.13}$$

$$A_5 = \frac{1}{2\Delta z}.(w + |w|) \qquad A_6 = \frac{1}{2.\Delta z}.(-w + |w|) \tag{5.14}$$

5.4. TRANSFERT DE CHALEUR

Le transfert de chaleur entre le fluide et les parois des dentures conduit à un champ thermique réparti sur les surfaces des dentures régi par l'équation de Laplace :

pour le pignon :

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z_1^2} = 0 \tag{5.15}$$

pour la roue :

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z_2^2} = 0 \tag{5.16}$$

5.5. CONDITIONS AUX LIMITES

A l'extérieur du champ d'action, la température est supposée constante. Le fluide est supposé assez abondant. Aux frontières, l'échange thermique se fait uniquement entre le fluide et les surfaces des engrenages.

On suppose qu'il n'y a pas de perte par rayonnement. Dans ces conditions, les conditions aux limites sont :

$$k_s.\left(\frac{\partial T_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=x\min} = k_c.[T_1(x_{min}, y_1, z_1) - T_a] \tag{5.17}$$

$$T_1(x_{1max}, y_1, z_1) = T_p \tag{5.18}$$

$$T_2(x_{2min}, y_2, z_2) = T_r \tag{5.19}$$

$$-k_s.\left(\frac{\partial T_2}{\partial x_2}\right)_{x_2=x\max} = k_c.[T_2(x_{max}, y_2, z_2) - T_a] \tag{5.20}$$

$$k_s.\left(\frac{\partial T_1}{\partial y_1}\right)_{y_1=y\min} = k_c.[T_1(x_1, y_{min}, z_1) - T_a] \tag{5.21}$$

$$-k_s.\left(\frac{\partial T_1}{\partial y_1}\right)_{y_1=y\max} = k_c.[T_1(x_1, y_{max}, z_1) - T_a] \tag{5.22}$$

$$-k_s.\left(\frac{\partial T_1}{\partial z_1}\right)_{z_1=z\max} = k_c.[T_1(x_1, y_1, z_{max}) - T_a] \tag{5.23}$$

$$k_s.\left(\frac{\partial T_2}{\partial z_2}\right)_{z_2=z\min} = k_c.[T_2(x_2, y_2, z_{min}) - T_a] \tag{5.24}$$

avec :

T_a : température ambiante, T_p : température du corps du pignon, T_r : température du corps de la roue, k_c : coefficient de transmission thermique du lubrifiant et k_s : conductivité thermique du métal de la denture.

5.6. RESOLUTION DES EQUATIONS DE TRANSFERT DE CHALEUR

En appliquant aux équations (5.15) et (5.16) les relations des différences finies suivantes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2.\frac{T_{i+1,j} + \varepsilon_x.T_{i-1,j} - (1+\varepsilon_x).T_{i,j}}{\varepsilon_x(1+\varepsilon_x).\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2.\frac{T_{i,j+1} + \varepsilon_y.T_{i,j-1} - (1+\varepsilon_y)T_{i,j}}{\varepsilon_y(1+\varepsilon_y)\Delta y^2} \qquad (5.25)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 2.\frac{T_{i,j+1} + \varepsilon_y.T_{i,j-1} - (1+\varepsilon_y)T_{i,j}}{\varepsilon_y(1+\varepsilon_y)\Delta z^2}$$

On obtient l'équation générale suivante :

$$A_{Te}.\ (T_e)_{i,j,k} = B_{Te} \qquad (5.26)$$

Où :

$$B_{Te} = 2.\left[\frac{\varepsilon_x.(T_e)_{i-1,j,k} + (T_e)_{i+1,j,k}}{\varepsilon_x.(1+\varepsilon_x)\Delta x^2} + \frac{\varepsilon_y.(T_e)_{i,j-1,k} + (T_e)_{i,j+1,k}}{\varepsilon_y(1+\varepsilon_y)\Delta y^2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta z^2}.\left[(T_e)_{i,j,k-1} + (T_e)_{i,j,k+1}\right] \qquad (5.27)$$

et

$$A_{Te} = 2.\left(\frac{1}{\varepsilon_x.\Delta x^2} + \frac{1}{\varepsilon_y \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right) \qquad (5.28)$$

avec : e = 1 pour la température du pignon et e = 2 pour la température de la roue.

5.8. CONCLUSION

L'équation générale de l'énergie adaptée à la surface de l'engrenage spiro-conique associée à l'équation de Laplace donne pour chaque point du plan tangent représentant les surfaces en contact, la température du fluide ainsi que celle des surfaces des dentures.

Chapitre 6

PROCEDURE ET SCHEMA DE RESOLUTION

6.1. INTRODUCTION

Pour résoudre l'équation (1.29) qui remplace l'équation (1.13), il faut d'abord calculer la valeur de la hauteur du film d'huile (expression 1.41) en chacun des points de la surface étudiée. D'un autre côté, la détermination de cette hauteur nécessite la connaissance préalable de la pression en chaque point de cette surface pour le calcul de la déformation élastique (expression 4.26). Cette interdépendance de ces deux grandeurs (pression, épaisseur du film d'huile) impose la résolution de cette équation par une méthode d'itération directe par approximations successives de la forme :

$$P_n = f(P_{n-1}) \qquad (6.1)$$

Il en est de même pour la résolution de l'équations du champ thermique dans le fluide (5.9), et l'équation de la répartition de la température à la surface de la denture (5.26). Cette méthode nécessite trois principales étapes :

- ***première étape***

La première étape consiste à calculer la pression approximative dans le fluide par la résolution de l'équation (1.29), en commençant l'itération par des données initiales arbitraires :

$d_{i,j} = 0$, pour la déformation élastique dans le calcul de la hauteur du film d'huile ;

$p_{i,j} = 0$, pour la pression ;

$T = T_0$, pour la température du film d'huile ;

$T_1 = T_p$, pour la température du pignon ;

$T_2 = T_r$, pour la température de la roue .

Dans cette première étape, la hauteur du film d'huile "h" se résume à la somme de la hauteur géométrique "h_0" et la hauteur hydrodynamique "l_{ij}". A partir de cette valeur et $P_0 = 0$, on calcule à l'aide de l'équation (6.1) la pression pour chaque point du plan tangent commun.

La pression du film d'huile connue, la hauteur du film d'huile pour chaque pavé du plan tangent, la température du fluide et le champ thermique sur la surface de la denture seront ainsi déterminées.

- ***deuxième étape***

Avec ces valeurs, l'ensemble des paramètres nécessaires à la résolution de l'équation (1.29) est connu. Cette résolution donne une nouvelle valeur de la pression au niveau de chaque pavé du plan qui permet de calculer la déformation élastique puis la hauteur (épaisseur) du film d'huile entre les dentures et enfin les températures.

- ***troisième étape***

Avec la nouvelle valeur de la pression, on recalculera la déformation élastique, la hauteur du film d'huile, et les températures puis on recommence l'itération.

6.2. SCHEMA DE RESOLUTION

Le calcul de la hauteur du film d'huile nécessite celui de la hauteur géométrique entre les deux surfaces en contact qui se fait en trois étapes :

1°_ Pour un point de contact arbitraire, (pour $\theta = \theta_0$ et $\tau_1 = \tau_{1(0)}$ données) on doit déterminer le point d'engrènement et en déduire le repère local.
Pour chaque point du plan $X_L O_L Y_L$ de ce repère, divisé selon la méthode retenue au chapitre 1, on calculera les points correspondants sur les profils de la denture, puis la hauteur géométrique qui sépare la denture.

2°_ Pour chaque point de contact, on calculera la hauteur hydrodynamique qui additionnée à la hauteur précédente (déformation initiale nulle) permet de recalculer la pression de contact.

3°_ La nouvelle pression permet alors de calculer une déformation élastique au point de contact à l'aide des expressions (4.27) qu'on ajoutera à la hauteur géométrique et hydrodynamique pour obtenir la hauteur totale du film d'huile entre les dentures "$h_{i,j}$ ".

4°_ La hauteur totale du film d'huile obtenue permet alors la résolution de l'équation de Reynolds (1.29), et le calcul des températures puis l'itération est recommencée jusqu'à la précision désirée et définie par l'expression :

$$\frac{|P_{n-1} - P_n|}{P_n} \leq \varepsilon_c \qquad (6.2)$$

ε_c est le critère de précision retenu.

6.3. EQUATION DU POINT DE CONTACT

La méthode que nous avons présentée contient plusieurs équations qui peuvent être résolues par différentes méthodes.
Nous présenterons dans ce paragraphe les méthodes et procédures que nous avons retenues
La connaissance du point de contact nécessite la résolution du système d'équation (4.1).

soit :

$$\vec{r}_{1/0} = \vec{r}_{2/0} \qquad (a)$$

$$\vec{v}_{(1,2)}.\vec{n}_{1/0} = 0 \qquad (b) \qquad (6.3)$$

$$\vec{n}_{1/0} = \vec{n}_{2/0} \qquad (c)$$

soit en se référant aux expressions (3.2), (3.13), (4.2) et (4.3) l'équation (a) devient :

$$[A_5][A_4][A_3][A_2][A_1]\begin{bmatrix} -\tau_1 \\ (r_{01}+\tau_1.tg\sigma_1)\cos\theta \\ (r_{01}+\tau_1.tg\sigma_1)\sin\theta \end{bmatrix} - [A_8][A_7][A_6]\begin{bmatrix} -\tau_2 \\ (r_{02}+\tau_2.tg\sigma_2)\cos\theta_2 \\ (r_{02}+\tau_2.tg\sigma_2)\sin\theta_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.4)$$

et en se référant aux expressions (4.4) , et (4.8) , l'équation (b) devient :

$$\omega_2.\begin{bmatrix} i_r z_{2/0} \\ -z_{2/0} \\ i_r.x_{2/0}+y_{2/0} \end{bmatrix}.[B_7][B_6]\begin{bmatrix} \sin\sigma_2 \\ \cos\sigma_2.\cos\theta_2 \\ \cos\sigma_2.\sin\theta_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (6.5)$$

En remplaçant $\vec{n}_{1/0}$ et $\vec{n}_{2/0}$ par leurs valeurs tirées des expressions (4.7) et (4.8), l'équation (c) devient :

$$[B_5][B_4][B_3][B_2][B_1]\left[\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\sigma_1.\cos\theta \\ \cos\sigma_1.\sin\theta \end{bmatrix}\right] - [B_7][B_6]\begin{bmatrix} \sin\theta_2 \\ \cos\sigma_2.\cos\theta_2 \\ \cos\sigma_2.\sin\theta_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (6.6)$$

Le système d'équations (6.3) peut être résolu par différentes méthodes numériques. Pour notre cas, nous avons retenu la méthode de NEWTON-RAPHSON qui s'adapte le mieux au choix que nous avons retenu initialement pour la résolution de l'équation (1.29). En effet, cette méthode utilise :

1°_ une méthode de résolution matricielle qui s'adapte parfaitement à la méthode des différences finies qui a été retenue.

2°_ nécessite la connaissance de la dérivée première qui se calcule aisément dans notre cas car cela se réduit à déterminer la dérivée d'un seul terme du produit des matrices.

3°_ utilise la méthode itérative directe que nous avons adoptée pour la résolution de l'équation pour la détermination de la répartition de la pression

4°_ converge de façon quadratique et offre la possibilité de vérifier les calculs en cours de traitement.

6.4. APPLICATION DE LA METHODE DE NEWTON-RAPHSON

Les paramètres de réglages machines choisis, ils restent sept paramètres inconnus (τ_1, θ_1, ψ_0, ψ_1, φ_1, ψ_2, ξ,) qui dépendent de la position d'engrènement et qu'il faut déterminer.
La méthode de Newton-Raphson appliquée au système formé par les équations (6.3), on obtient le système d'équations (6.7) suivant :

$$\frac{\partial F_1^{(i)}}{\partial \tau_1}.\Delta\tau_1^{(i)} + \frac{\partial F_1^{(i)}}{\partial \theta}.\Delta\theta_1^{(i)} + \frac{\partial F_1^{(i)}}{\partial \psi_0}.\Delta\psi_0^{(i)} + \frac{\partial F_1^{(i)}}{\partial \varphi_1}.\Delta\varphi_1^{(i)} + \frac{\partial F_1^{(i)}}{\partial \psi_1}.\Delta\psi_1^{(i)} + \frac{\partial F_1^{(i)}}{\partial \psi_2}.\Delta\psi_2^{(i)} + \frac{\partial F_1^{(i)}}{\partial \xi}.\Delta\xi^{(i)} = F_1^{(i)}$$

$$\frac{\partial F_2^{(i)}}{\partial \tau_1}.\Delta\tau_1^{(i)} + \frac{\partial F_2^{(i)}}{\partial \theta}.\Delta\theta_1^{(i)} + \frac{\partial F_2^{(i)}}{\partial \psi_0}.\Delta\psi_0^{(i)} + \frac{\partial F_2^{(i)}}{\partial \varphi_1}.\Delta\varphi_1^{(i)} + \frac{\partial F_2^{(i)}}{\partial \psi_1}.\Delta\psi_1^{(i)} + \frac{\partial F_2^{(i)}}{\partial \psi_2}.\Delta\psi_2^{(i)} + \frac{\partial F_2^{(i)}}{\partial \xi}.\Delta\xi^{(i)} = F_2^{(i)}$$

$$\frac{\partial F_3^{(i)}}{\partial \tau_1}.\Delta\tau_1^{(i)} + \frac{\partial F_3^{(i)}}{\partial \theta}.\Delta\theta_1^{(i)} + \frac{\partial F_3^{(i)}}{\partial \psi_0}.\Delta\psi_0^{(i)} + \frac{\partial F_3^{(i)}}{\partial \varphi_1}.\Delta\varphi_1^{(i)} + \frac{\partial F_3^{(i)}}{\partial \psi_1}.\Delta\psi_1^{(i)} + \frac{\partial F_3^{(i)}}{\partial \psi_2}.\Delta\psi_2^{(i)} + \frac{\partial F_3^{(i)}}{\partial \xi}.\Delta\xi^{(i)} = F_3^{(i)}$$

$$\frac{\partial F_4^{(i)}}{\partial \tau_1}.\Delta\tau_1^{(i)} + \frac{\partial F_4^{(i)}}{\partial \theta}.\Delta\theta_1^{(i)} + \frac{\partial F_4^{(i)}}{\partial \psi_0}.\Delta\psi_0^{(i)} + \frac{\partial F_4^{(i)}}{\partial \varphi_1}.\Delta\varphi_1^{(i)} + \frac{\partial F_4^{(i)}}{\partial \psi_1}.\Delta\psi_1^{(i)} + \frac{\partial F_4^{(i)}}{\partial \psi_2}.\Delta\psi_2^{(i)} + \frac{\partial F_4^{(i)}}{\partial \xi}.\Delta\xi^{(i)} = F_4^{(i)}$$

$$\frac{\partial F_5^{(i)}}{\partial \tau_1}.\Delta\tau_1^{(i)} + \frac{\partial F_5^{(i)}}{\partial \theta}.\Delta\theta_1^{(i)} + \frac{\partial F_5^{(i)}}{\partial \psi_0}.\Delta\psi_0^{(i)} + \frac{\partial F_5^{(i)}}{\partial \varphi_1}.\Delta\varphi_1^{(i)} + \frac{\partial F_5^{(i)}}{\partial \psi_1}.\Delta\psi_1^{(i)} + \frac{\partial F_5^{(i)}}{\partial \psi_2}.\Delta\psi_2^{(i)} + \frac{\partial F_5^{(i)}}{\partial \xi}.\Delta\xi^{(i)} = F_5^{(i)}$$

$$\frac{\partial F_6^{(i)}}{\partial \tau_1}.\Delta\tau_1^{(i)} + \frac{\partial F_6^{(i)}}{\partial \theta}.\Delta\theta_1^{(i)} + \frac{\partial F_6^{(i)}}{\partial \psi_0}.\Delta\psi_0^{(i)} + \frac{\partial F_6^{(i)}}{\partial \varphi_1}.\Delta\varphi_1^{(i)} + \frac{\partial F_6^{(i)}}{\partial \psi_1}.\Delta\psi_1^{(i)} + \frac{\partial F_6^{(i)}}{\partial \psi_2}.\Delta\psi_2^{(i)} + \frac{\partial F_6^{(i)}}{\partial \xi}.\Delta\xi^{(i)} = F_6^{(i)}$$

$$\frac{\partial F_7^{(i)}}{\partial \tau_1}.\Delta\tau_1^{(i)} + \frac{\partial F_7^{(i)}}{\partial \theta}.\Delta\theta_1^{(i)} + \frac{\partial F_7^{(i)}}{\partial \psi_0}.\Delta\psi_0^{(i)} + \frac{\partial F_7^{(i)}}{\partial \varphi_1}.\Delta\varphi_1^{(i)} + \frac{\partial F_7^{(i)}}{\partial \psi_1}.\Delta\psi_1^{(i)} + \frac{\partial F_7^{(i)}}{\partial \psi_2}.\Delta\psi_2^{(i)} + \frac{\partial F_7^{(i)}}{\partial \xi}.\Delta\xi^{(i)} = F_7^{(i)}$$

où

$\Delta\tau_1^{(i)}$, $\Delta\theta_1^{(i)}$, $\Delta\psi_0^{(i)}$, $\Delta\psi_1^{(i)}$, $\Delta\psi_2^{(i)}$, $\Delta\varphi_1^{(i)}$ et $\Delta\xi^{(i)}$ sont les solution du système ci-dessus.

Avec une approximations initiales de $\tau_1^{(i)}$, $\theta_1^{(i)}$, $\psi_0^{(i)}$, $\psi_1^{(i)}$, $\psi_2^{(i)}$, $\varphi_1^{(i)}$, et $\xi^{(i)}$ choisies, on approchera la valeur exacte par l'itération :

$$\tau_1^{(i+1)} = \tau_1^{(i)} + \Delta\tau_1^{(i)}$$

$$\theta_1^{(i+1)} = \theta_1^{(i)} + \Delta\theta_1^{(i)}$$

$$\psi_0^{(i+1)} = \psi_0^{(i)} + \Delta\psi_0^{(i)}$$

$$\psi_1^{(i+1)} = \psi_1^{(i)} + \Delta\psi_1^{(i)}$$

$$\psi_2^{(i+1)} = \psi_2^{(i)} + \Delta\psi_2^{(i)}$$

$$\varphi_1^{(i+1)} = \varphi_1^{(i)} + \Delta\varphi_1^{(i)}$$

$$\xi^{(i+1)} = \xi^{(i)} + \Delta\xi^{(i)}$$

Les expressions $\frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial\tau_1}$, $\frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial\theta_1}$, $\frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial\psi_0}$, $\frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial\psi_1}$, $\frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial\psi_2}$, $\frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial\varphi_1}$ et $\frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial\xi}$ désignent respectivement les expressions $\frac{\partial F_j}{\partial\tau_1}\left(X^{(i)}\right)$, $\frac{\partial F_j}{\partial\theta_1}\left(X^{(i)}\right)$, $\frac{\partial F_j}{\partial\psi_0}\left(X^{(i)}\right)$, $\frac{\partial F_j}{\partial\psi_1}\left(X^{(i)}\right)$, $\frac{\partial F_j}{\partial\psi_2}\left(X^{(i)}\right)$, $\frac{\partial F_j}{\partial\varphi_1}\left(X^{(i)}\right)$, et $\frac{\partial F_j}{\partial\xi}\left(X^{(i)}\right)$.

[X] étant le vecteur dont les composantes sont (τ_1, θ_1, ψ_0, ψ_1, ψ_2, φ_1, ξ,) et [ΔX] le vecteur de composantes ($\Delta\tau_1$, $\Delta\theta_1$, $\Delta\psi_0$, $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$, $\Delta\varphi_1$, $\Delta\xi$,) soit :

$$[X^{(i)}] = [\tau_1^{(i)}, \theta_1^{(i)}, \psi_0^{(i)}, \psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}, \varphi_1^{(i)}, \xi^{(i)}]$$

$$[\Delta X^{(i)}] = [\Delta\tau_1^{(i)}, \Delta\theta_1^{(i)}, \Delta\psi_0^{(i)}, \Delta\psi_1^{(i)}, \Delta\psi_2^{(i)}, \Delta\varphi_1^{(i)}, \Delta\xi^{(i)}]$$

6.5. CALCUL DES ELEMENTS DU SYSTEME

Dans le système (6.7), les F_i représentent les expressions suivantes :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [A_5][A_4][A_3][A_2][A_1]\begin{bmatrix} -\tau_1 \\ (r_{01}+\tau_1.\mathrm{tg}\sigma_1)\cos\theta_1 \\ (r_{01}+\tau_1.\mathrm{tg}\sigma_1)\sin\theta_1 \\ 1 \end{bmatrix} - [A_8][A_7][A_6]\begin{bmatrix} -\tau_2 \\ (r_{02}+\tau_2.\mathrm{tg}\sigma_2)\cos\theta_2 \\ (r_{02}+\tau_2.\mathrm{tg}\sigma_2)\sin\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

où :

F_1 , F_2 et F_3 représentent respectivement la première, la seconde et troisième composante du produit ci-dessus.

De même :

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_5 \end{bmatrix} = [B_5][B_4][B_3][B_2][B_1]\begin{bmatrix} \sin\sigma_1 \\ \cos\sigma_1.\cos\theta_1 \\ \cos\sigma_1.\sin\theta_1 \end{bmatrix} - [B_7][B_6]\begin{bmatrix} \sin\sigma_2 \\ \cos\sigma_2.\cos\theta_2 \\ \cos\sigma_2.\sin\theta_2 \end{bmatrix} \qquad (6.10)$$

F_4 et F_5 représentent respectivement l'expression de la première et la seconde composante du produit matriciel ci-dessus.

F_6 représente l'équation de la surface de la roue en engrènement. Elle est donnée par la deuxième équation du système (6.3), qui, développée, donne :

$$F_6 = a_1.\sin\psi_2 + a_2.\cos\psi_2 + a_3 - i_r.\, a_r\, .\, a_4 \qquad (6.11)$$

avec :

$$a_1 = i_r.(\, a_6.\cos\theta_2 - g.\, a_5 + m.\,\mathrm{tg}\,\theta_2\,)$$

$$a_2 = i_r.[(\,\sin\theta_2\,.\,(\,g - a_6\,.\,\sin\xi - m\,.\,\cos\xi\,)] + c\,.\,a_4$$

$$a_3 = \sin\theta_2\,.\,(\,m\,.\,\sin\xi_2 - a_6\,.\,\cos\xi\,) + c\,.\,a_5$$

$$a_4 = \mathrm{tg}\,\sigma_2\,.\,\sin\xi - \cos\xi\,.\,\cos\theta_2$$

$$a_5 = \mathrm{tg}\,\sigma_2\,.\,\cos\xi + \sin\xi\,.\,\cos\theta_2$$

$$a_6 = r_{2/0}\,.\mathrm{tg}\,\sigma_2 + \frac{\tau_2}{\cos^2\sigma_2}$$

Le système (6.3) contient sept inconnues (τ_1, θ_1, ψ_0, ψ_1, ψ_2, φ_1 , ξ,), mais ne fournit que six équations scalaires ; en effet l'équation vectorielle (6.3.c) ne fournit que deux équations scalaires, car elle concerne une transformation de vecteurs unitaires : la deuxième et la troisième composante sont identiques.

Comme le point de contact doit appartenir à la surface active du pignon, on se servira de l'équation (3.32, page 43) pour la septième équation scalaire ; soit :

$$F_7 = \cos\alpha\left[\cos(\psi_1-\delta)(B_1.\cos\theta_1 + dB_3) + \sin\theta_1.\sin(\psi_1-\delta)(B_1.\cos\beta + d) + B_2.(b - e_p.\sin\psi_1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{r_g.\sin\alpha}.\left[\sin\theta_1.(B_1.\sin\beta + e_p.\sin\delta) - e_p.B_3.\cos\delta\right] + b.\sin\alpha\left[-B_3.\sin(\psi_1-\delta) + \sin\theta_1.\cos(\psi_1-\delta)\right] \qquad (6.12)$$

avec :

$$B_1 = r_{01}.tg\sigma_1 + \frac{\tau_1}{\cos^2 \sigma_1}$$

$$B_2 = tg\sigma_1.\cos\beta - \sin\beta.\cos\theta_1$$

$$B_3 = tg\sigma_1.\sin\beta + \cos\beta.\cos\theta_1$$

6.6. VALEURS DES ELEMENTS DU SYSTEME D'EQUATIONS.

A partir des F_i on peut calculer les valeurs des $\partial F_i/\partial x_j$ qui forment les éléments du système ci-dessus :

En se référant aux expressions ci-dessus, aux valeurs des $[A_i]$ et des $[B_i]$ au chapitre 3, on obtient :

$$\frac{\partial F_{4-5}}{\partial \tau_1} = \frac{\partial F_6}{\partial \tau_1} = \frac{\partial F_6}{\partial \theta_1} = \frac{\partial F_{6-7}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial F_7}{\partial \psi_2} = \frac{\partial F_6}{\partial \psi_1} = \frac{\partial F_{6-7}}{\partial \xi} = \frac{\partial F_{6-7}}{\partial \psi_0} = 0$$

$$\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \tau_1} = [A_5].[A_4].[A_3].[A_2].[A_1].\begin{bmatrix} -1 \\ tg\sigma_1.\cos\theta_1 \\ tg\sigma_1.\sin\theta_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial \tau_1} = \frac{1}{\cos^2 \sigma_1}.\{\cos\alpha[\cos\theta_1.\cos(\psi_1-\delta) + \cos\beta.\sin\theta_1(\psi_1-\delta)] + (\frac{1}{r_g} - \sin\alpha).\sin\beta.\sin\theta_1\}$$

$$\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \theta_1} = [A_5].[A_4].[A_3].[A_2].[A_1].\frac{\partial r_T}{\partial \theta_1} = [A_5].[A_4].[A_3].[A_2].$$

$$.[A_1].\begin{bmatrix} 0 \\ -(r_{01} + \tau_1.tg\sigma_1)\sin\theta_1 \\ (r_{01} + \tau_1.tg\sigma_1)\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_{4-5}}{\partial \theta_1} = [B_5][B_4][B_3][B_2][B_1]\begin{bmatrix} 0 \\ -\cos\sigma_1.\sin\theta_1 \\ \cos\sigma_1.\cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial \theta_1} = \cos\alpha.\left[\cos\theta_1.\sin(\psi_1-\delta).(B_1.\cos\beta+d.)-\sin\theta_1\cos(\psi_1-\delta).(B_1+d.\cos\beta)+\sin\theta_1.\sin\beta.(b-e_p.\sin\psi_1)\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{r_g}-\sin\alpha\right).[\cos\theta_1.(B_1.\sin\beta+e_p.\sin\delta)+e_p\cos\beta.\cos\delta.\sin\theta_1+b.\sin\alpha].[\cos\beta.\sin\theta_1\sin(\psi_1-\delta)$$

$$+\cos\theta\cos(\psi_1-\delta)]$$

$$\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial[A_5]}{\partial\varphi}.[A_4][A_3][A_2][A_1]r_T = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 & 0 & -\cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}.[A_4][A_3][A_2][A_1]r_T$$

$$\frac{\partial F_{4-5}}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial[B_5]}{\partial\varphi_1}.[B_4][B_3][B_2][B_1]n_{(T)T} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 & 0 & -\cos\varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 \end{bmatrix}.[B_4][B_3][B_2][B_1].\cos\sigma_1\begin{bmatrix} tg\sigma_1 \\ \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \psi_2} = -.\frac{\partial[A_7]}{\partial\psi_2}.[A_6]r_{T2} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\psi_2 & \cos\psi_2 & 0 \\ 0 & -\cos\psi_2 & -\sin\psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.[A_6]r_{T2}$$

$$\frac{\partial F_{4-5}}{\partial \psi_2} = -\frac{\partial[B_7]}{\partial\psi_2}.[B_6].\cos\sigma_2\begin{bmatrix} tg\sigma_2 \\ \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\sin\psi_2 & \cos\psi_2 \\ 0 & -\cos\psi_2 & -\sin\psi_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.[B_6].\cos\sigma_2\begin{bmatrix} tg\sigma_2 \\ \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_6}{\partial \psi_2} = a_1.\cos\psi_2 - a_2.\sin\psi_2$$

$$\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \psi_1} = \left\{[A_5]\begin{bmatrix} -r_g\sin r_g\psi_1 & 0 & r_g\cos r_g\psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_g s\cos r_g\psi_1 & 0 & -r_g\sin r_g\psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}[A_3][A_2][A_1] \quad + \right.$$

$$\left. + \quad [A_5][A_4][A_3]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & -e_p\sin\psi_1 \\ 0 & -\cos\psi_1 & -\sin\psi_1 & e_p\cos\psi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}[A_1]\right\}\begin{bmatrix} -\tau_1 \\ (r_{01}+\tau_1.tg\sigma_1).\cos\theta_1 \\ (r_{01}+\tau_1.tg\sigma_1).\sin\theta_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_{4-5}}{\partial \psi_1} = \left\{ [A_5] \begin{bmatrix} -r_g \sin r_g\psi_1 & 0 & r_g \cos r_g\psi_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -r_g s \cos r_g\psi_1 & 0 & -r_g \sin r_g\psi_1 \end{bmatrix} [A_3][A_2][A_1] + \right.$$

$$\left. + [A_5][A_4][A_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 \\ 0 & -\cos\psi_1 & -\sin\psi_1 \end{bmatrix} .[A_1] \right\} . \begin{bmatrix} -\tau_1 \\ (r_{01} + \tau_1.tg\sigma_1)\cos\theta_1 \\ (r_{01} + \tau_1.tg\sigma_1)\sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_7}{\partial \psi_1} = \cos\alpha.[\sin\theta_1.\cos(\psi_1-\delta).(B_1.\cos\beta + d) - \sin(\psi_1 -\delta).(B_1.\cos\theta_1 + d.B_3) - B_2.e_p \cos\psi_1] -$$

$$- b.\sin\alpha.[B_3.\cos(\psi_1-\delta) + \sin\theta_1.\sin(\psi_1 -\delta)]$$

$$\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \xi} = -[A_7] \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 & g + m.\sin\xi \\ -\sin\xi & \cos\xi & 0 & m.\cos\xi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\tau_2 \\ (r_{02} + \tau_2.tg\sigma_2)\cos\theta_2 \\ (r_{02} + \tau_2.tg\sigma_2)\sin\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_{4-5}}{\partial \xi} = -[B_7] \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 \\ -\sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sin\sigma_2 \\ \cos\sigma_2.\cos\theta_2 \\ \cos\sigma_2.\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \psi_0} = [A_5] \begin{bmatrix} -\sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ -\cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .[A_3][A_2][A_1] \begin{bmatrix} -\tau_1 \\ (r_{01} + \tau_1.tg\sigma_1)\cos\theta_1 \\ (r_{01} + \tau_1.tg\sigma_1)\sin\theta_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_{4-5}}{\partial \psi_0} = [B_5] \begin{bmatrix} -\sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0 \\ -\cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .[B_3][B_2][B_1] \begin{bmatrix} \sin\sigma_1 \\ \cos\sigma_1.\cos\theta_1 \\ \cos\sigma_1.\sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_5 \\ F_5 \end{bmatrix} = [B_5] \begin{bmatrix} -\sin\psi_0 & 0 & \cos\psi_0 \\ -\cos\psi_0 & 0 & -\sin\psi_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .[B_3][B_2][B_1] \begin{bmatrix} \sin\sigma_1 \\ \cos\sigma_1.\cos\theta_1 \\ \cos\sigma_1.\sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

Dans ces expressions, l'écriture $\frac{\partial F_{1-3}}{\partial \tau_1}$ représentent les expressions $\frac{\partial F_1}{\partial \tau_1}$, $\frac{\partial F_2}{\partial \tau_1}$ et $\frac{\partial F_3}{\partial \tau_1}$.

6.7. FORME RECURRENTE ITERATIVE

Pour la résolution des équations nous avons retenu la méthode itérative directe que nous exposons ici. Posons :

$$x_1 = \tau_1 \; ; \; x_2 = \theta_1 \; ; \; x_3 = \psi_0 \; ; \; x_4 = \psi_1 \; ; \; x_5 = \psi_2 \; ; \; x_6 = \varphi_1 \; ; \; x_7 = \xi,$$

[X] est un vecteur de dimension sept ayant pour composantes les sept éléments ci-dessus ; soit :

$[X] = (x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7)$

de même :

$[\Delta X] = (\Delta x_1 , \Delta x_2 , \Delta x_3 , \Delta x_4 , \Delta x_5 , \Delta x_6 , \Delta x_7)$

[F] est une fonction de dimension sept ayant pour composantes ($F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$) ; soit :

$[F] = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7)$

Dans ce cas, si on considère la matrice carrée

$[D(X)] = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) \right]$ dont l'élément en position i,j est $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X)$,

le système (6.5) s'écrit alors sous forme condensée :

$$[D(X^{(i)})] . [\Delta X^{(i)}] + [F(X^{(i)})] = 0 \qquad (6.13)$$

dont la solution, lorsque son Jacobien n'est pas nul, s'exprime par :

$$[\Delta X^{(i)}] = - [D(X^{(i)})]^{-1} . [F(X^{(i)})] \qquad (6.14)$$

d'où la formule itérative récurrente de résolution :

$$[X^{(i+1)}] = [X^{(i)}] - [D(X^{(i)})]^{-1} . [F(X^{(i)})] \qquad (6.15)$$

6.8. CRITERE D'ARRET

Le processus itératif sera arrêté sur un critère d'erreur absolue tolérée ε_a choisie au préalable.

$$\sum_{j=1}^{j=7} \left[X_j^{(i)} - X_j^{i-1} \right]^2 \leq \varepsilon_{a1} \qquad (6.16)$$

La valeur choisie de ε_{a1} pour la résolution numérique est de $\varepsilon_{a1} = 0.001$

6.9. HAUTEUR GEOMETRIQUE

Nous utiliserons la même méthode (itération directe) pour la résolution du système d'équations formé par les égalités (4.22) à (4.25).

Une fois le point de contact déterminé, il faut faire correspondre à chaque point du maillage du plan tangent un point de la surface du pignon et un autre de la surface de la roue.

Pour déterminer les points appartenant aux surfaces des dentures correspondant à un point arbitraire M(x_i,y_j) du plan tangent, cinq inconnues - soit (τ_1, τ_2, θ_1, θ_2, ψ_1) - sont à déterminer.

En utilisant la même notation que précédemment :

$$[X] = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,] = [\tau_1, \tau_2, \theta_1, \theta_2, \psi_1]$$

et

$$[\Delta X] = [\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5,] = [\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\psi_1]$$

De même, posons

$$\begin{aligned}
G_1 &= (x_i - X_{1L})n_{T_y} - (y_j - Y_{1L})n_{T_x} \\
G_2 &= (y_j - Y_{1L})n_{T_z} + n_{T_y}.Z_{1L} \\
G_3 &= (x_i - X_{2L})n_{T_y} - (y_j - Y_{2L})n_{T_x} \\
G_4 &= (y_j - Y_{2L})n_{T_z} + n_{T_y}.Z_{2L} \\
G_5 &= \omega_1.(z_2 + b).\cos\alpha.[\sin\sigma_1 + \omega_T.z_2 - \omega_1(z_2 + b).\sin\alpha]\cos\sigma_1.\cos\theta_1 - \\
&\quad - \{\omega_T.y_{2L} + [y_2 L.\sin\alpha - (x_{2L} - d).\cos\alpha]\}\cos\sigma_1.\sin\theta_1
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Ces égalités sont tirées du système d'équations définissant l'existence des points correspondants au point M(x_i,y_j) du plan tangent.

Pour leur mise sous forme itérative, nous utiliserons les notations indiquées dans le paragraphe suivant.

6.9.1. NOTATIONS :

Nous poserons :

$$\frac{\partial G_j^{(i)}}{\partial \tau_1} = \frac{\partial G_j}{\partial \tau_1}\left(X^{(i)}\right)$$

$$\frac{\partial G_j^{(i)}}{\partial \theta} = \frac{\partial G_j}{\partial \theta}\left(X^{(i)}\right)$$

$$\frac{\partial G_j^{(i)}}{\partial \tau_2} = \frac{\partial G_i}{\partial \tau_2}\left(X^{(i)}\right) \qquad (6.18)$$

$$\frac{\partial G_j^{(i)}}{\partial \psi} = \frac{\partial G_j}{\partial \psi}\left(X^{(i)}\right)$$

$$\frac{\partial G_j^{(i)}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial G_j}{\partial \theta_2}\left(X^{(i)}\right)$$

Notons la matrice carrée $[M(X)] = \left[\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right]$ dont l'élément en position i,j est $\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(X)$

En appliquant la méthode de NEWTON-RAPHSON pour la résolution du système d'équation (4.22) à (4.25), on obtient :

$$[M(X^{(i)})] \cdot [\Delta X^{(i)}] + [G(X^{(i)})] = 0 \qquad (6.19)$$

comme

$$[X^{(i+1)}] = [X^{(i)}] + [\Delta X^{(i)}]$$

on a la forme itérative :

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - M^{-1}[X^{(i)}].G[X^{(i)}] \qquad (6.20)$$

Dans la cinquième équation du système (6.17), x_{2L}, y_{2L} et z_{2L} représentent les coordonnées du point correspondant sur le pignon dans le repère fixe, soit :

$$\begin{bmatrix} x_{2L} \\ y_{2L} \\ z_{2L} \end{bmatrix} = [A_2][A_1]r_{T1} \qquad (6.21)$$

6.9.2. CRITERE D'ARRET ET PRECISION DES RESULTATS

6.9.2.1. *Critère d'arrêt*

Pour arrêter le processus itératif avec une précision acceptable deux possibilités s'offrent à nous :

1°- soit un arrêt sur un critère d'erreur absolue tolérée ε_a choisie au préalable

$$\sum_{j=1}^{j=7} \left[X_j^{(i)} - X_j^{i-1} \right]^2 \leq \varepsilon_{a1} \qquad (6.22)$$

2°- soit un arrêt sur un test d'arrêt optimal par la méthode des permutations - perturbations [26] basée sur la valeur du résidu numérique dont la valeur doit être satisfaisante.

Le résidu ρ_i est défini par :

$$\rho_i = (A_{i1} . X_{i1} + A_{i2} . X_{i2} + \ldots + A_{in} . X_{in} - B_i$$

où A_{ij} et B_{ij} représentent les valeurs machines des coefficients a_{ij} et b_{ij} du système d'équation.

Le test sera donc exécuté sur le résidu normé et qui le quotient du résidu vrai par le résidu théorique (N étant le nombre de chiffres significatifs acceptables):

- dans le cas de troncature :

$$\bar{\rho}_i = \frac{2^N |\rho_i|}{n\sqrt{(A_{i1}.X_{i1})^2 + \ldots + (A_{in}.X_{in})^2 + B_i^2}} \qquad (6.23)$$

Dans le cas d'arrondi :

$$\bar{\rho}_i = \frac{2^N |\rho_i|}{\sqrt{n\left[(A_{i1}.X_{i1})^2 + \ldots + (A_{in}.X_{in})^2 + B_i^2\right]}} \qquad (6.24)$$

6.9.2. 2. *Tests de validation*

Pour la validation de la solution, trois cas se présentent à nous :

1° - cas

L es $\overline{\rho}_i$ (i = 1,2, . . . , n) sont voisins ou inférieurs à un, la solution est acceptable numériquement

2° - cas

L'un au mois des résidus normés $\overline{\rho}_i$ est nettement supérieur à l'unité, mais nettement inférieur à 2^N :

$$1 \ll \overline{\rho}_i \ll 2^N$$

alors, la solution ne satisfait pas numériquement le système , et doit être améliorée par un calcul en simple précision.

3° - cas

L'un au moins des résidus normés a une grandeur comparable à 2^N, alors la solution est mauvaise .

Ce test sera exécuté par un sous-programme appelé « test optimal ».

6.10. EQUATION DE PRESSION ET DE TEMPERATURE

L'équation de pression (1.29),l'équation d 'échange énergétique (5.9) et l'équation d'échange thermique (5.26) seront résolues par la méthode itérative directe de sous-relaxation , car dans notre cas particulier, le système se simplifie considérablement et les matrices utilisées (dimensions trois ou quatre) ne nécessite pas une grande place mémoire dans le calculateur numérique.

Ces trois équations forment le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} A_p \,.\, P_{i,j} &= B_p \\ A_T \,.\, T_{i,j,k} &= B_T \\ A_{Te} \,.\, (T_e)_{i,j,k} &= B_{Te} \end{aligned} \qquad (6.25)$$

Posons

$$[A] = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_T & 0 \\ 0 & 0 & A_{Te} \end{bmatrix}, \quad [b] = \begin{bmatrix} B_p \\ B_T \\ B_{Te} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [X] = \begin{bmatrix} P_{i,j} \\ T_{i,j,k} \\ (T_e)_{i,j,k} \end{bmatrix}$$

Le système (6.25) s'écrit alors :

$$[A] \cdot [X] = [b] \tag{6.26}$$

La méthode de relaxation successive consiste à décomposer la matrice [A] en trois matrices [D], [E] et [F] de la façon suivante :

$$[A] = [D] - [E] - [F] \tag{6.27}$$

où

$[D] = [d_{i,j}]$ est une matrice diagonale telle que $d_{i,i} = a_{i,i}$ et $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$

$[E] = [e_{i,j}]$ est une matrice triangulaire strictement inférieure telle que

$$e_{i,j} = 0 \text{ pour } i \leq j \text{ et } e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ pour } i > j$$

$[F] = [f_{i,j}]$ est une matrice triangulaire strictement supérieure elle que

$$f_{i,j} = 0 \text{ pour } i \geq j \text{ et } f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ pour } i < j$$

et à prendre

$$[A] = [M] - [N]$$

avec

$$[M] = \frac{1}{\varpi_r}([D] - \varpi_R[E])$$

$$[N] = \left(\frac{1-\varpi_R}{\varpi_R}\right)[D] + [F]$$

où ϖ est le paramètre de relaxation.

Le système (6.26) devient alors, écrit sous forme itérative :

$$[X]_{(n+1)} = ([D] - \varpi_r[E])^{-1}[(1-\varpi_r).[D] + \varpi_r[F]] \cdot [X]_{(n)} + \varpi_r([D] - \varpi_r[E])^{-1}.[b] \tag{6.28}$$

qui, en simplifiant devient :

$$[X]_{(n+1)} = (1 - \varpi_r) \cdot [X]_{(n)} + \varpi_r[D]^{-1} \cdot [b] \tag{6.29}$$

avec :

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_{Te}} \end{bmatrix}$$

L'égalité (6.29) est la forme de relaxation successive définitive de résolution du système (6.26) dont l'algorithme est évident.

6.10.1. Critère d'arrêt

Le processus itératif sera arrêté sur une erreur absolue préalablement tolérée ε_a choisie

$$\sum_{j=1}^{j=7}\left[X_j^{(i)} - X_j^{i-1}\right]^2 \leq \varepsilon_{al} \qquad (6.30)$$

6.10.2. ORGANIGRAMME (SCHEMA) DE RESOLUTION

Le schéma global de résolution pour chaque point de contact est le suivant :

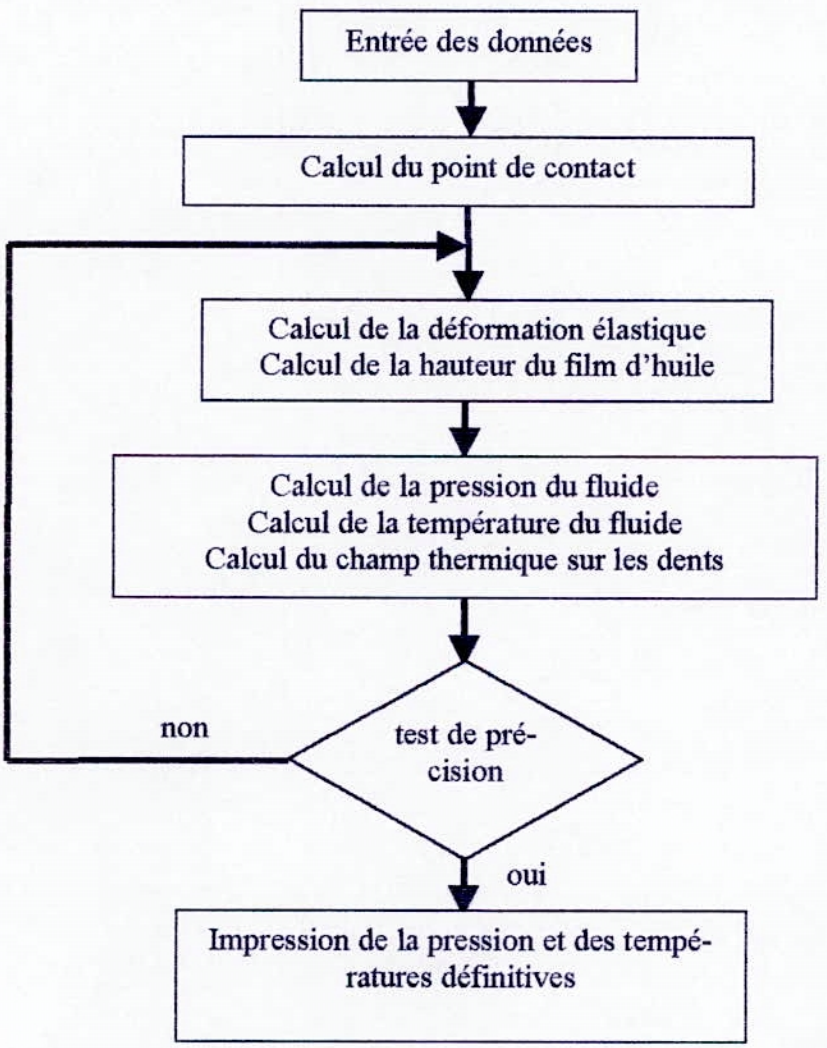


Figure 6.1. Schéma global de résolution

6.11. DONNEES NUMERIQUES ET RESULTATS

Le schéma global de la procédure que nous avons retenue pour la résolution du système est indiqué par la figure 6.1.

Avec les données initiales de réglages machines et des paramètres initiaux donnés au tableau 1 [18] ci-dessous, on détermine le point de contact sur la denture pour lequel on calcule la hauteur géométrique avec une déformation initiale nulle ($d_0 = 0$ et une hauteur hydrodynamique initiale nulle ($l_0 = 0$) qui permet de calculer en première approximation, la pression du fluide sur le plan tangent ainsi que les températures.

chaleur massique à pression constante	$C_p = 1.8\ J.Kg^{-1}.K^{-1}$
Coefficient de dilatation thermique du fluide	$\alpha_T = 6.48 . 10^{-4}\ K^{-1}$
Masse volumique du fluide à 20°C	$\rho = 875\ Kg. m^{-3}$
Coefficient de transmission thermique	$h_c = 30\ W . m^{-2}$
Conductibilité thermique du fluide	$k_0 = 0.114\ W . m^{-1}.K^{-1}$
Conductibilité thermique du métal de la denture	$k_s = 52\ W . m^{-1}.K^{-1}$
Viscosité cinématique à 50°C	ν =200, 300, 600 cSt
viscosité dynamique du fluide à 50°C	μ = 0.14 Pa .s; 0.17; 0.26 ; 0.62
Coefficient de viscosité de pression	$\alpha_p = 1.45.10^{-8}\ Pa^{-1}$
Taux d'expansion des divisions suivant l'axe Ox	ε_x = 1 ; 1.2 ; 1.5
Division unitaire suivant l'axe Ox	Δx = 1 mm
Taux d'expansion des divisions suivant l'axe Oy	ε_y = 1 ; 1.2 ; 1.5
Division unitaire suivant l'axe Oy	Δy= 1 mm
Vitesse de rotation du pignon ($\omega_1 = \pi.D_1.N_1$)	N_1= 1000, 1250,1500, 2000,3000 tr/mn
Température ambiante du fluide	T_a = 60 °C
Température initiale du fluide	T_0= 60 °C
Température du corps du pignon	T_p = 60 °C
Température du corps de la roue	T_r = 60 °C
Angle de l'hélice	β = 22, 25, 30 et 40 degrés
hauteur de la dent	h_m = 29 mm
diamètre primitif du pignon	76.6 mm
diamètre primitif de la roue	181.0 mm
diamètre de tête du pignon	81.5
diamètre de tête de la roue	185.9
nombre de dents du pignon	20 dents
nombre de dents de la roue	40 dents

Tableau I. Données numériques [18]

La valeur de cette pression permet alors de calculer la déformation élastique, la hauteur hydrodynamique qui sert à la détermination de la hauteur totale h du film d'huile. Cette nouvelle valeur de h permet de recalculer une nouvelle valeur de la pression, plus précise que la précédente et par suite des températures plus précises qu'au premier stade.

Avec les nouvelles valeurs, on recommence l'itération jusqu'à la précision désirée.
L'équation de contact est résolue par la méthode de NEWTON-RAPHSON alors que l'équation de Reynolds et celle de l'énergie sont résolues par la méthode de relaxations successives par itération directe.

6.11.1. RESULTATS

Les valeurs numériques ayant servies de base de donnée pour les calculs sont données dans le tableau I.

Les résultats de la distribution de la pression du film d'huile sur le plan tangent commun et du champ thermique du fluide (figures 6.3 à 6.6.) ont été présentés pour deux points du chemin de contact "S_x" correspondant au voisinage du milieu du chemin de contact ($S_x = 0.45$) et à la fin de celui-ci ($S_x = 0.90$) .Pour un point de contact $M(x_l , y_m)$, S_x est défini par la relation :

$$S_x = \frac{\sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{i=l-1 \\ j=m-1}} \left[(x_i - x_{i+1})^2 + (y_j - y_{j+1})^2 \right]^{1/2}}{\sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{i=N \\ j=M}} \left[(x_i - x_{i+1})^2 + (y_j - y_{j+1})^2 \right]^{1/2}}$$

où N et M représentent les divisions du plan tangent selon respectivement les axes Ox et Oy. Cette notation a l'avantage de donner les résultats en fonction de la position relative sur la dent.

Les figures (6.7) et (6.8) montrent la variation de la pression et température maximums sur le chemin de contact en fonction de différentes vitesses utilisées pour une charge constante de 250 daN.

Les figures 6.9 et 6.10 indiquent la configuration de la température, de la déformation élastique et les isobares de la pression sur la surface du flanc actif de la dent (pignon) pour les deux points de contact considérés.

Les figures 6.11 et 6.12 montrent les isobares et isothermes obtenues sur le plan tangent. La figure 6.13 montre l'épaisseur du film d'huile en fonction de l'angle d'hélice de la dent sous différentes charge à vitesse constante (N_1 = 1000 tr/mn) pour une huile de 200 c.st.
Sur la figure 6.14, l'épaisseur du film d'huile est donnée en fonction du type d'huile utilisée (changement de la viscosité cinématique) sous différentes vitesses à charge constante. La figure 6.15 montre la variation de l'épaisseur du film d'huile en fonction de la vitesse sous différentes charges pour une viscosité de 0.16 Pa.s. La figure 6.16 montre la variation simultanée de la

pression maximum et la température maximum en fonction de la vitesse. Sur la figure 6.17 nous présentons ces mêmes grandeurs sur le chemin de contact avec une vitesse constante.

6.11.2. INTERPRETATION

La figure 6.3 qui représente la distribution de la pression sur la surface de la dent et représentée sur le plan tangent, montre qu'au voisinage du milieu du chemin de contact, on observe deux pics de pression (le maximum correspondant au point de contact) séparés par une détente entre les deux.

Par contre vers l'extrémité de la dent (fig. 6.5), la pression est concentrée au voisinage du point de contact et tend rapidement vers zéro dés que l'on s'en éloigne. Le second pic après la détente est très atténué. L'allure de courbes ainsi l'ordre de grandeur correspondent aux valeurs trouvées par B. J. Hamrock et D. Dowson [10] dans leur étude d'un contact EHD ponctuel d'une façon générale dans des conditions et des données similaires aux nôtres.

Pour les différentes charges appliquées sur la dent, la pression maximum, augmente rapidement sur le chemin de contact et tend vers un extremum situé entre 0.6 et 0.7 de celui-ci puis diminue dès que l'on se rapproche de l'extrémité de la dent pour atteindre une valeur sensiblement égale à la valeur d'entrée (fig. 6.7).

Le début de la prise et la sortie de l'engrènement se font pratiquement à pression constante. Par ailleurs, on remarque que la variation de la pression maximum est très accentuée pour les grandes vitesses que pour les faibles vitesses. A très faibles vitesses cette variation est quasiment inexistante et la pression maximum tend à garder la même valeur sur l'ensemble du chemin de contact.

En outre, elle est étroitement liée à la vitesse de rotation des engrenages et augmente avec l'augmentation de celle-ci.

La variation de la température (fig. 6.4. et 6.6) diffère de celle de la pression : le maximum ne correspondant pas au point de contact ; il est situé sur l'extrémité de la dent au côté apposé de l'alimentation en huile. L'allure de la courbe est sensiblement identique pour les deux points. Vers l'extrémité, la température diminue brusquement de la valeur maximale à la valeur minimale : ceci est en parfaite concordance avec nos hypothèses initiales. On peut remarquer également que le maximum de la température épouse sensiblement la courbe de contact entre les dents mais la diminution de celle-ci est, à l'inverse l'allure de la courbe de distribution de la pression, beaucoup plus atténuée. En effet une fois le régime d'équilibre atteint selon notre hypothèse d'étude, la température maximum reste sensiblement constante aux points de contact.

On remarque (fig. 6.8) que la température maximum est liée à la pression maximum : son extremum se situe au voisinage de celui de la pression sur le chemin de contact.

Comme la pression, la température maximum est liée à la vitesse de rotation des roues : La température augmente avec l'augmentation de la vitesse de rotations des roues dentées.

Les figures (6.9) et (6.10) montrent les champs des trois paramètres (pression, température et déformation) sur la surface de la dent pour les deux points choisis.

La figure (6.11) montre l'allure du champ de pression sur le plan tangent correspondant à la surface de la dent. Cette figure montre clairement la concentration de la pression au voisinage du point de contact à la différence de la température (fig. 6.12) dont les isothermes se répartissent sur pratiquement l'ensemble de la dent.

La figure (6.13) montre l'influence de l'angle de l'hélice sur l'épaisseur du film d'huile sous différentes charges.

On remarque donc que, pour une viscosité donnée (choix de l'huile utilisée), l'épaisseur minimale du film d'huile :

- augmente sensiblement avec l'augmentation de la vitesse
- diminue avec la charge appliquée sur la dent
- est optimum pour un angle d'hélice dont la valeur se situe au voisinage de 30°.

La valeur de l'épaisseur minimale du film d'huile augmente proportionnellement avec l'augmentation de la viscosité : on obtient une meilleure stabilité de celle-ci avec les huiles à haute viscosité.

Comme on s'y attend, sous une charge donnée (fig. 6.14), l'épaisseur du film d'huile augmente avec la vitesse de rotation. Cette augmentation est très faible à petites vitesses ; Elle devient importante dès que l'on dépasse les 900 tr/mn. En outre, plus la charge sur la dent est importante, plus l'épaisseur est faible.

Si on superpose la courbe de la pression maximum au niveau d'un point de la surface de la dent et la courbe de la température correspondante (fig. 6.15)., on remarque que la variation des deux grandeurs sont similaires : la température de contact augmente avec l'augmentation de la pression de contact.

Par contre sur le chemin de contact, les variations des deux grandeurs ne sont pas similaires : en effet si pour la pression il y a une variation assez brusque (augmentation accentuée vers un maximum puis diminution rapide vers la valeur initiale) la température maximum reste pratiquement stable sur l'ensemble du chemin (avec une légère augmentation entre $S_x = 0.5$ et $S_x = 0.6$, fig. 6.8).

Pour un point donné (figure 6.16), la température et la pression augmentent proportionnellement avec l'augmentation de la vitesse de rotation.

On déduit de cette analyse que :

-1° les engrenages spiro-coniques s'adaptent parfaitement aux grandes vitesses qui favorisent donc la formation d'un film d'huile minimum assez important.

-2° l'angle optimum de l'hélice pour les engrenages spiro-coniques se situe au voisinage de 30 degrés.

-3° ce sont les huiles à haute viscosité qui favorisent le mieux la formation du film d'huile.

6.12. COMPARAISONS DES RESULTATS

Le tableau 2 ci-dessous indique les valeurs de l'épaisseur du film d'huile comparées à celles de B.J. Hamrock et D. Dowson [10] ainsi que les valeurs de la pression et de la température comparées à celles de Simon [18]. Le tableau 3 montre la comparaison des déformations calculées avec les valeurs de M. Bey et H. Belhanneche [21].

Charge [daN]	Viscosité Pa.s	Vitesse [m/s]	Epaisseur [µm]		Pression max [N/mm^2]		Température max [°C]	
			Calculée	Hamrock	Calculée	Simon	Calculée	Simon
66.7	0.16	1	1.06	1.10	$1.51.10^8$	$1.47.10^8$	63.54	61.33
66.7	0.24	1	0.98	1.02	$1.59.10^8$	$1.53.10^8$	64.05	63.14
66.7	0.16	10	1.48	1.57	$1.60.10^8$	$1.59.10^8$	80.24	78.26
66.7	0.24	10	1.37	1.50	$1.65.10^8$	$1.61.10^8$	82.45	82.12
111.2	0.16	1	0.78	0.83	$1.70.10^8$	$1.60.10^8$	70.18	69.47
111.2	0.24	1	0.93	1.02	$1.75.10^8$	$1.67.10^8$	75.01	71.02
111.2	0.16	10	0.98	1.02	$1.74.10^8$	$1.69.10^8$	83.73	78.01
111.2	0.24	10	1.17	1.26	$1.84.10^8$	$1.79.10^8$	85.57	81.20

Tableau 2. Comparaison des résultats

Charge [daN]	Déplt calculés [µm]	Bey et Belhaneche [28]
20	0.04125	0.04531
100	0.0905	0.0952

Tableau3 . Comparaison des déplacements

6.13. CONCLUSION

L'étude par les différences finies associée à la simulation de taillage des engrenages spiro-conique permet une analyse assez précise des paramètres de la lubrification.

Les valeurs que nous avons obtenues sont en bonne corrélation avec celles obtenues par [10,18 ,21] dont la comparaison est donnée dans les tableaux 2 et 3.

Le programme obtenu est assez souple pour son utilisation à d'autres types d'engrenages de même famille: il suffirait de déterminer les matrices de passage définissant la simulation de taillage est d'y introduire les données.

VI.14. RESULTATS

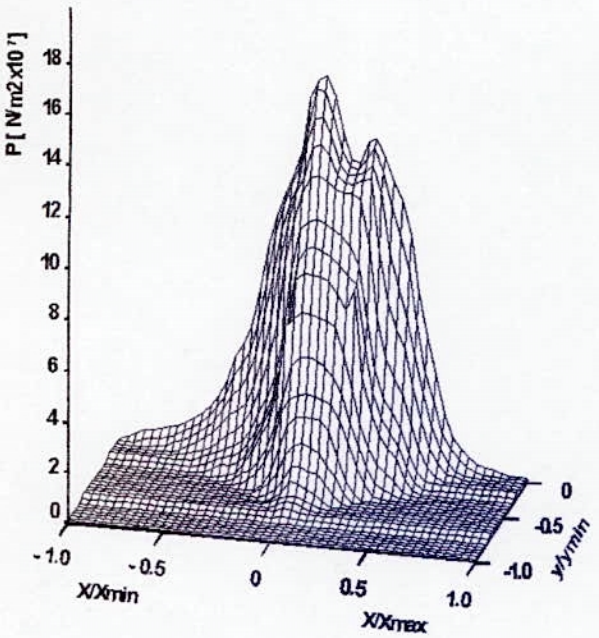


Fig. 6.3. Distribution de la pression pour un point de contact $S_x = 0.45$

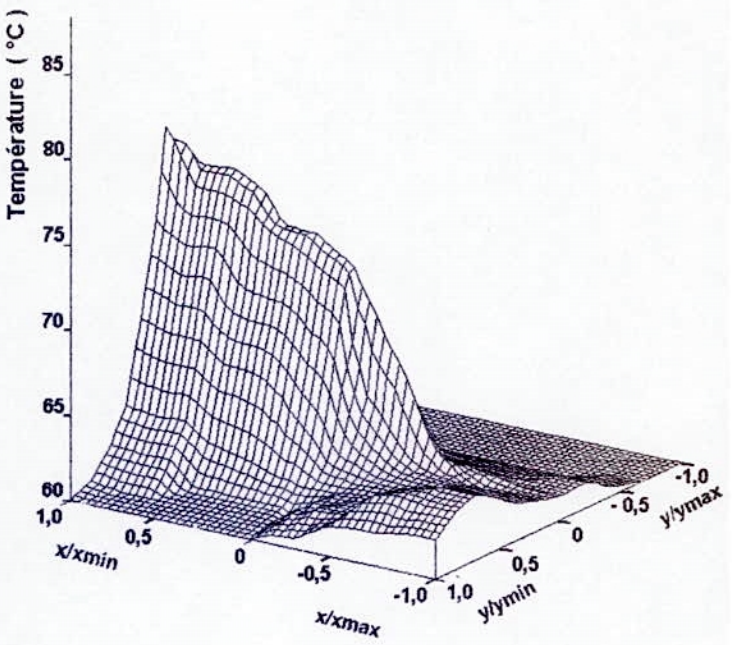


Fig. 6.4. Distribution de la température pour un point de contact $S_x = 0.45$

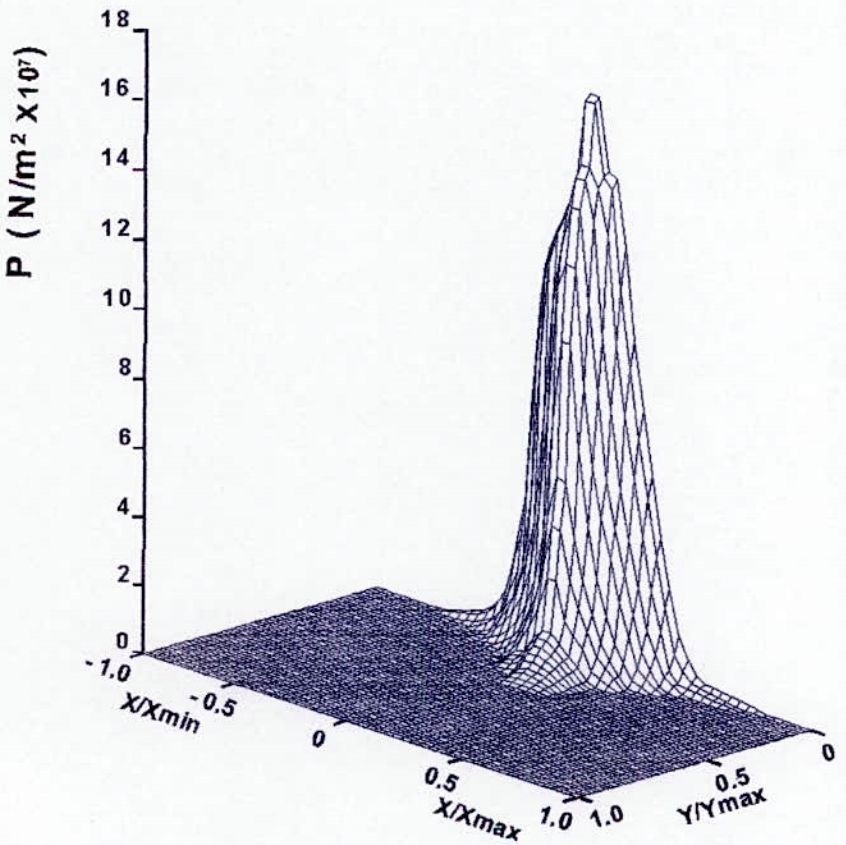


Fig. 6.5. Distribution de la pression pour un point de contact $S_x = 0.90$

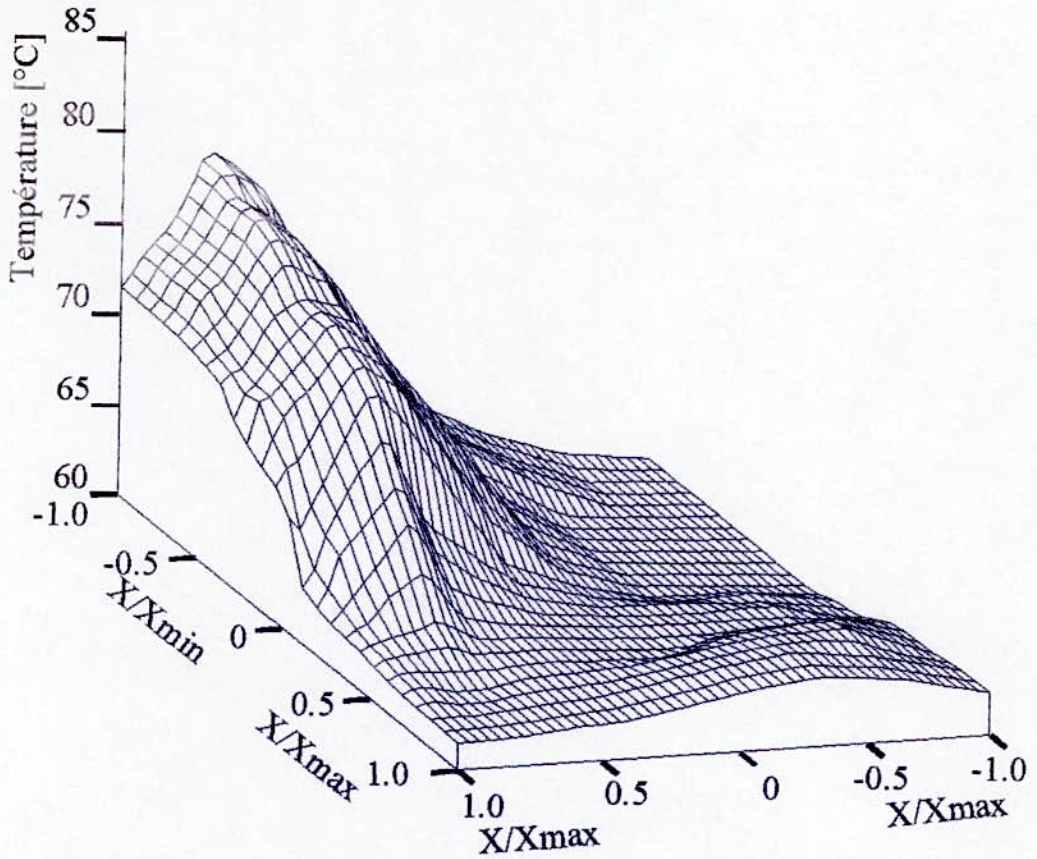


Fig. 6.6. Distribution de la température pour un point de contact $S_x = 0.90$

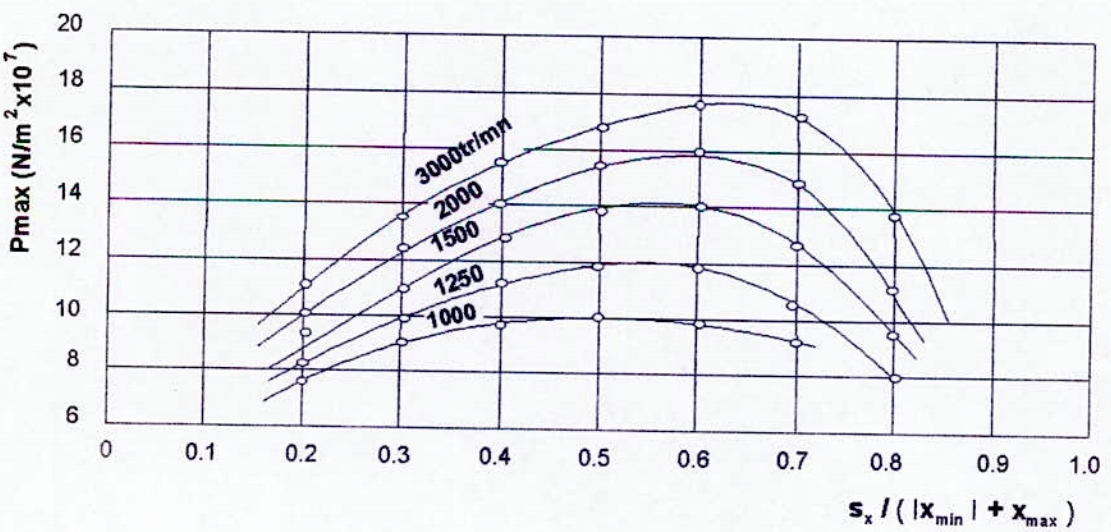


Fig. 6.7. Pression maximum sur le chemin de contact à charge constante [250 daN]

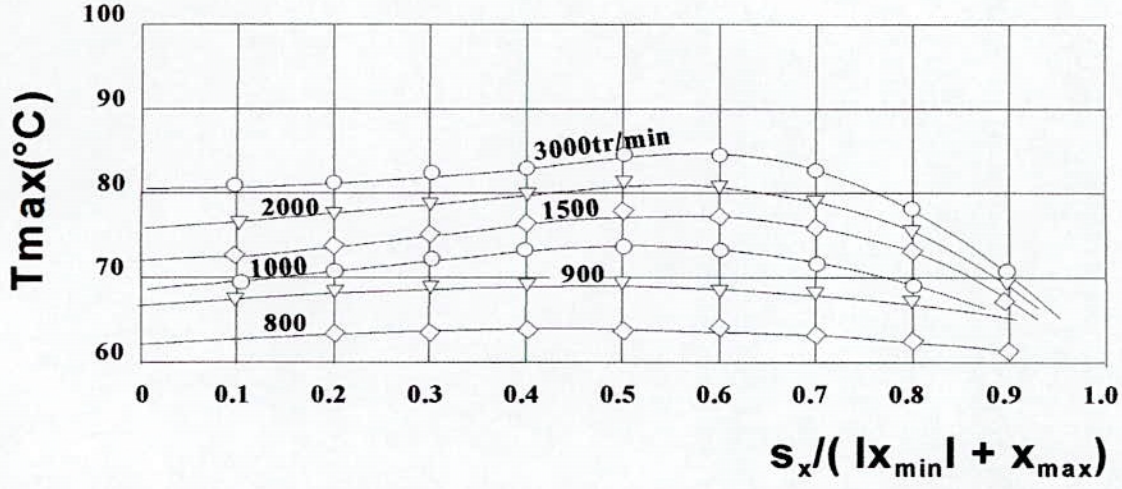


Fig. 6.8. Température maximale sur le chemin de contact à différentes vitesses à charge constante

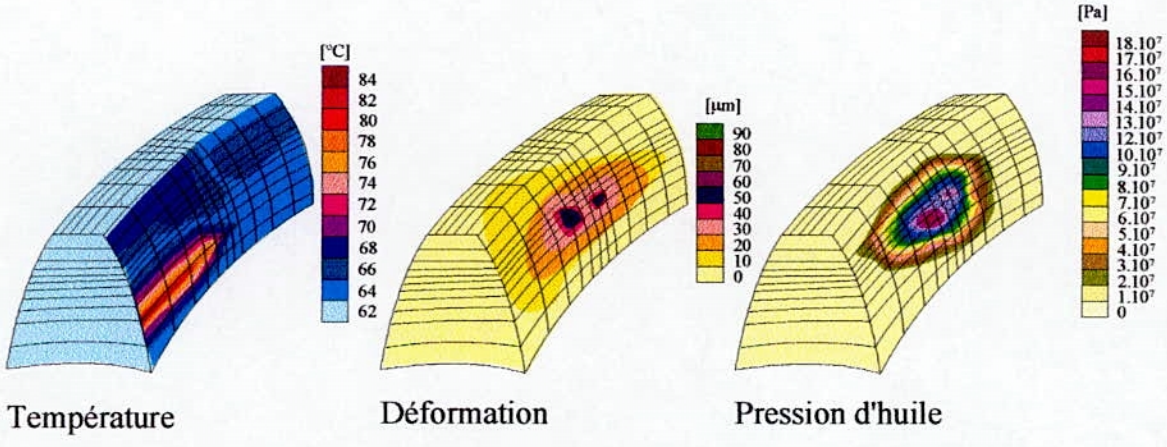


Fig. 6.9. Température, pression d'huile et déformation de la dent pour $S_x = 0.45$

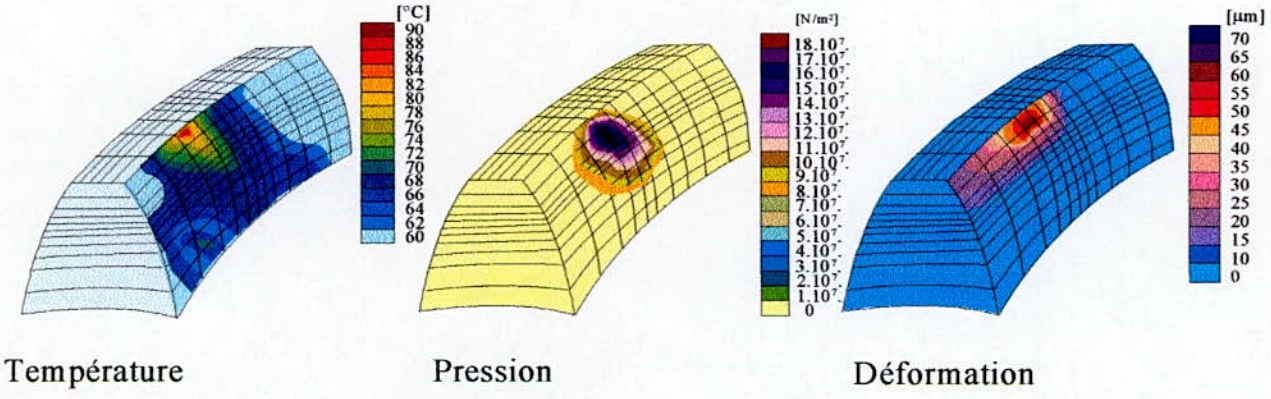


Fig. 6.10. Température, pression d'huile et déformation de la dent pour $S_x = 0.90$

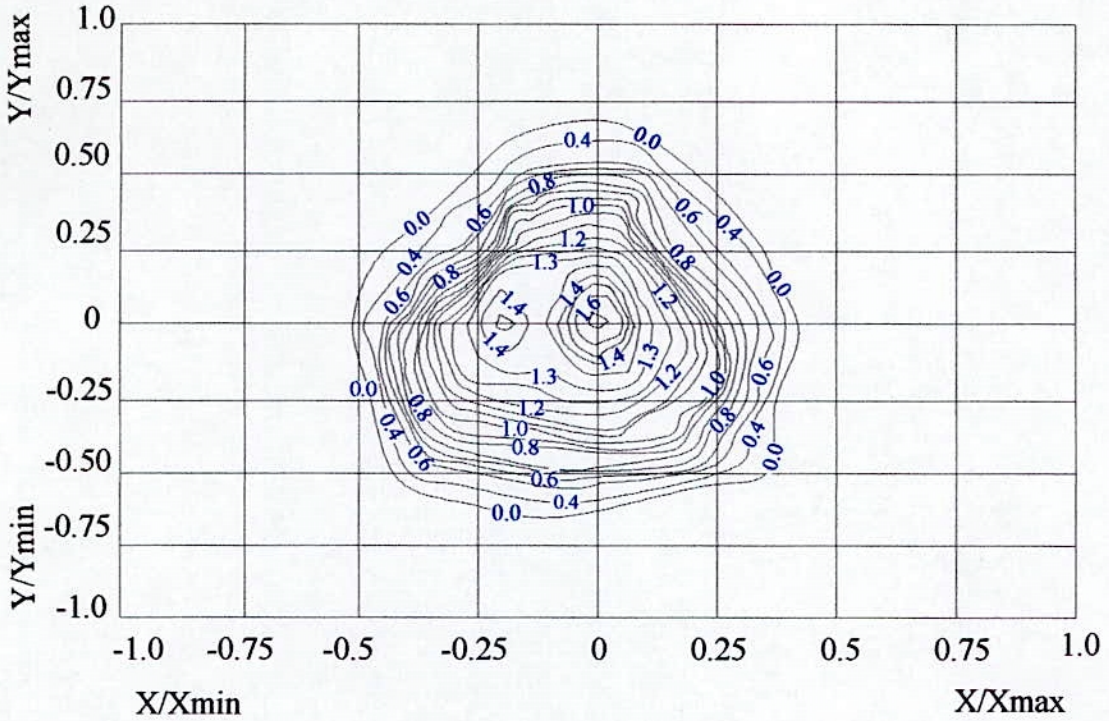


Fig. 6.11. Pression d'huile sur le plan tangent pour un point de contact S_x =0.45 (isobares en giga pascal)

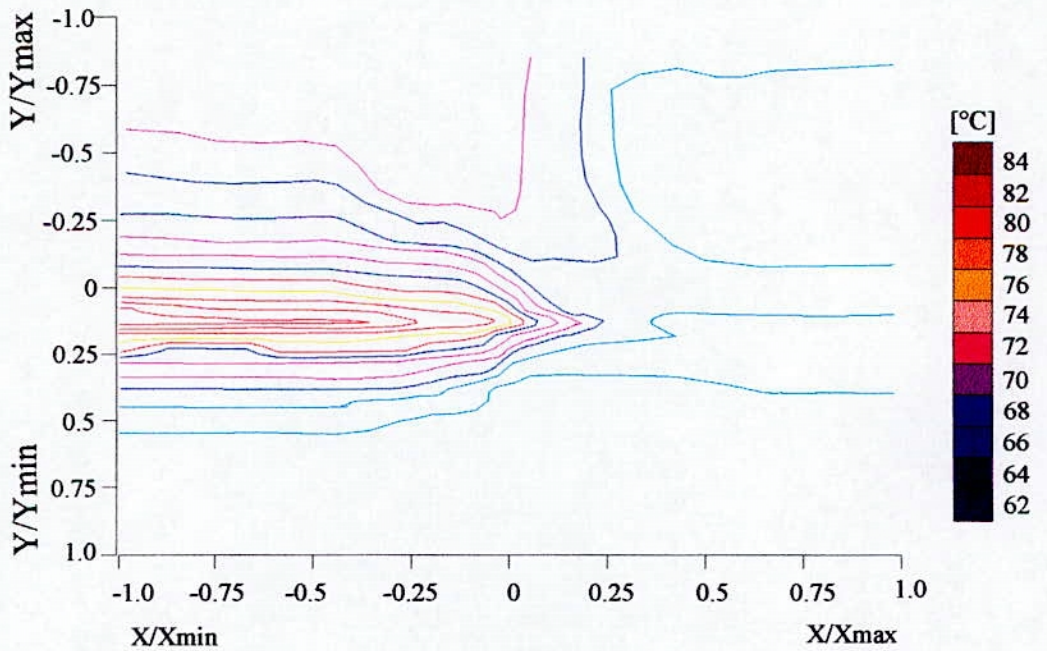


Fig. 6.12. *Champ thermique à la surface de la denture (isothermes en degré Celsius)*

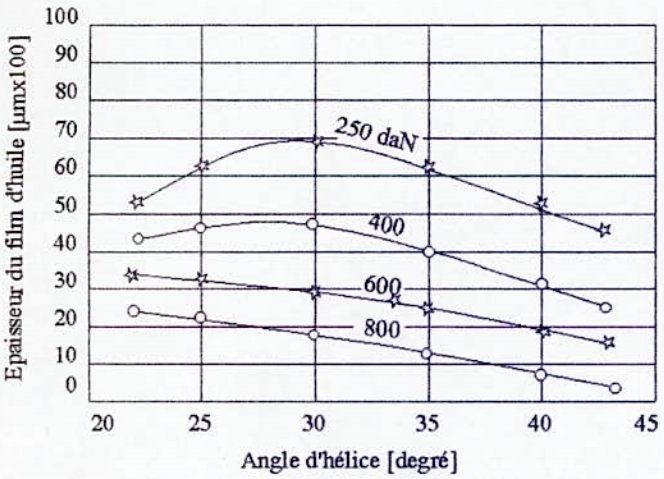


Fig. 6.13. . Epaisseur du film d'huile en fonction de l'angle de l'hélice sous différentes charges (N = 1000 tr/mn viscosité 0.16 Pa.s)

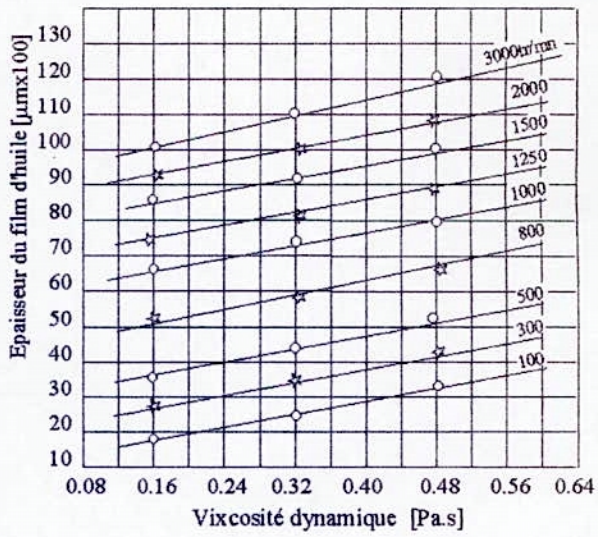


Fig. 6.14. Epaisseur du film d'huile en fonction de la viscosité à différentes vitesses à charge constante (w = 250 daN)

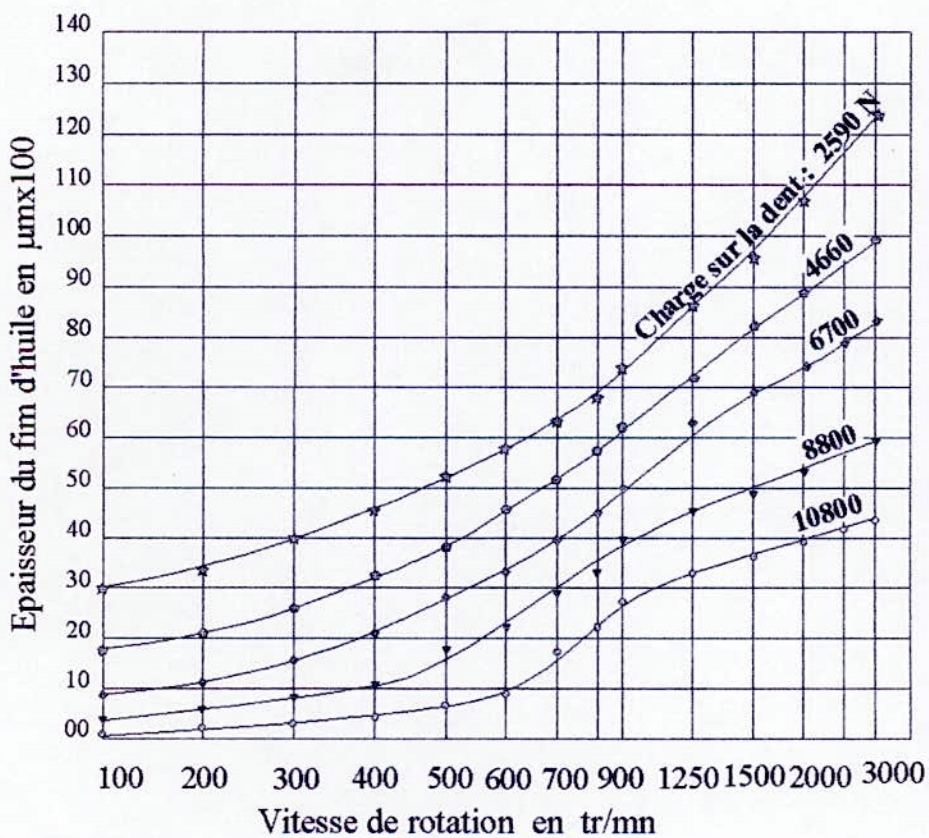


Fig. 6.15. Epaisseur du film d'huile en fonction de la vitesse sous différentes charges pour une viscosité de 0.16 Pa.s

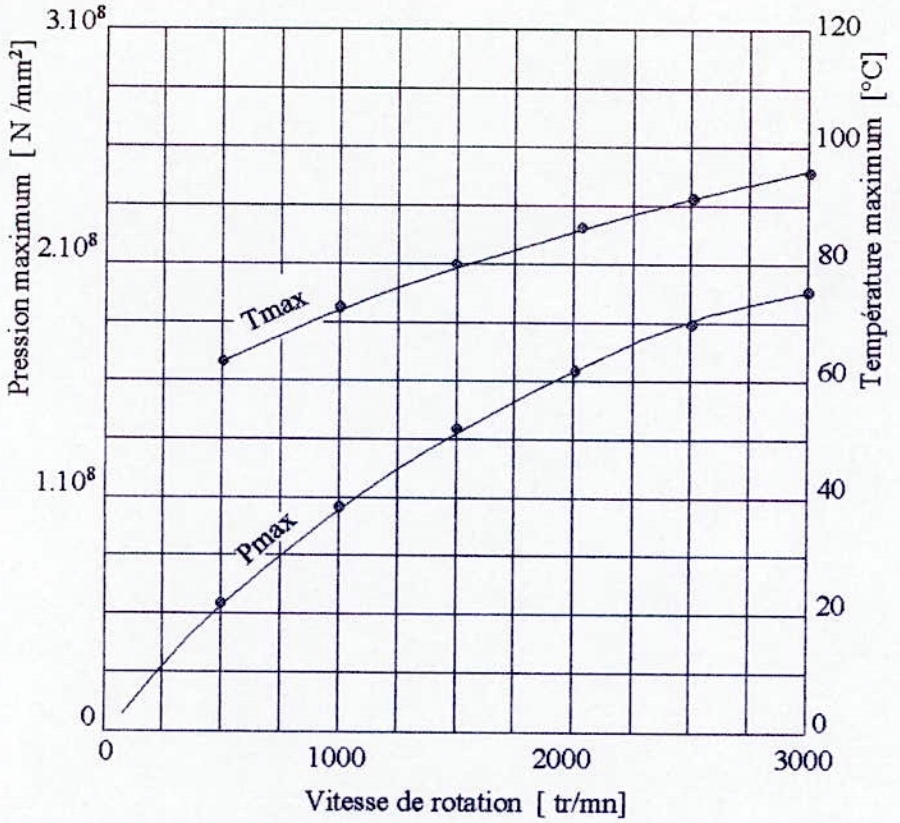


Fig. 6.16. Pression et Températures maximums en fonction de la vitesse de rotation pour (S_x = 0.5)

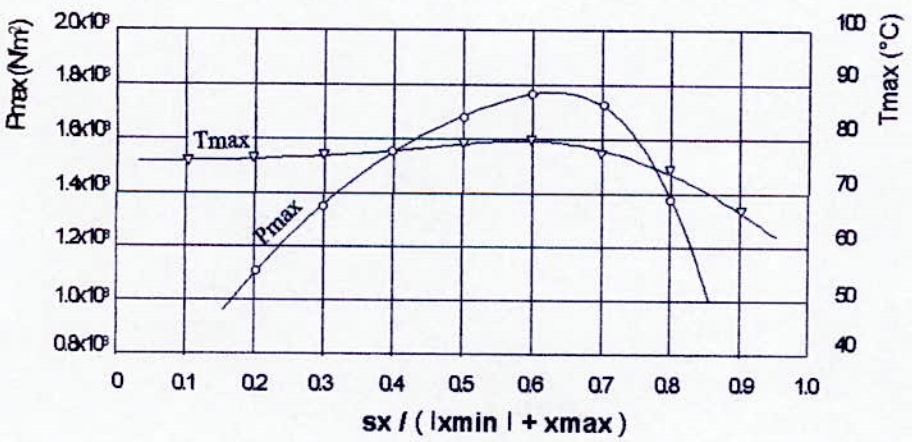


Fig. 6.17. Pression et température maximales sur le chemin de contact à vitesse constante N = 3000 tr/mn

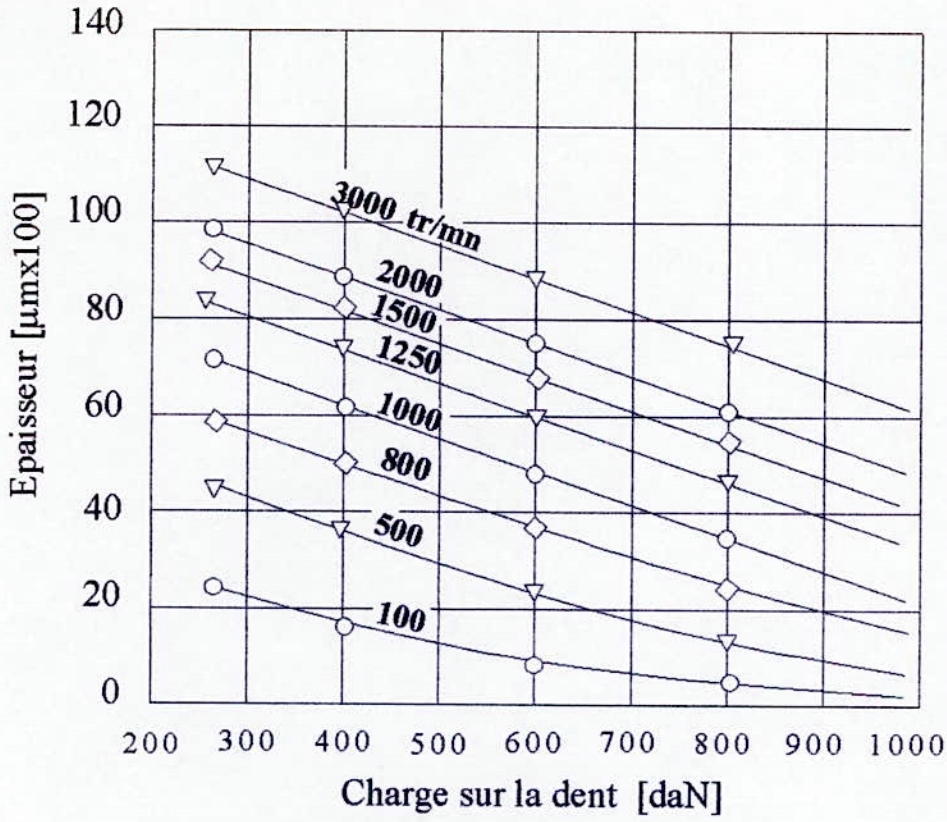


Fig. 6.18. Epaisseur du film d'huile en fonction de la charge à différentes vitesses

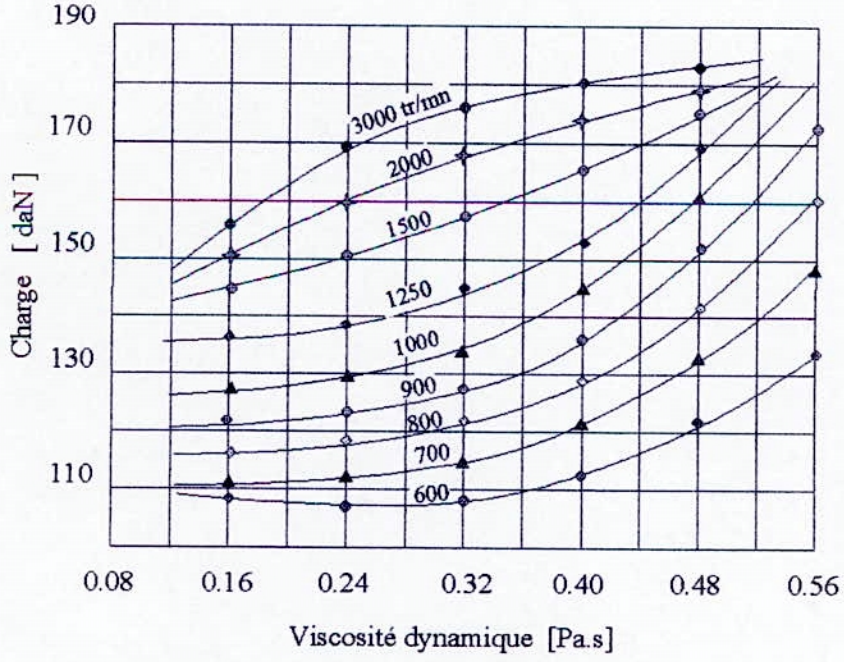


Fig. 6.19. . Charge sur la dent en fonction du type d'huile utilisée

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

L'analyse des paramètres de la lubrification (pression, épaisseur, charge et température) des engrenages spiro-coniques ne peut se faire que numériquement du fait de la complexité de leurs surfaces et de l'inexistence des méthodes analytiques pour les décrire.

A cet effet, un programme utilisant les approximations par les différences finies a été développé. Ce programme est basé sur :

- le type d'engrenage spiro-conique ;
- le procédé de taillage des dentures ;
- les paramètres de montages sur les machines d'usinage ;
- les paramètres de fonctionnement dans le réducteur .

La méthode de taillage et les paramètres de montage sur les machines d'usinage permettent d'obtenir par simulation numérique la configuration des surfaces des dentures. La position de fonctionnement dans le réducteur permet d'obtenir le chemin de contact entre ces dentures.

Le programme développé est d'une très grande souplesse du fait qu'il peut s'adapter aisément à n'importe quel type d'engrenage. En effet, celui-ci utilise les coordonnées homogènes et l'analyse d'un autre type d'engrenage consiste à introduire des paramètres de taillage dans les matrices de passage.

Le programme développé est d'une grande simplicité car il utilise des sous programmes classiques (opérations sur les matrices, méthodes d'itération directes classiques, programmes graphiques classiques).

Ce qui a permis d'obtenir des résultats fiables et conformes aux résultats obtenus par d'autres auteurs [1,10,18 ,21, 29] dans des études similaires concernant les engrenages spiro-coniques et hypoïdes .

Un post-logicel permet de visualiser les contraintes et les déformations dans la denture et de prévoir les sections dangereuses en fonction des paramètres d'entrée.

Le logiciel que nous avons développé permet de déterminer en fonction des paramètres d'entrée :

- La pression de contact entre les dentures de l'engrenage ;
- l'épaisseur du film lubrifiant ;
- la température du fluide et des surfaces des dentures ;
- les contraintes dans la denture ;
- la charge appliquée sur la denture.

Les résultats du logiciel permettent le choix des paramètres d'utilisation (choix des matériaux, du type d'huile et de la température de fonctionnement).

Pour la continuité de ce travail, nous recommandons une étude qui :

- intégrera les défauts de surface et d'alignement des axes ;
- tiendra compte de la turbulence du fluide de lubrification ;
- tiendra compte de la raréfaction du lubrifiant en différents endroits de la surface.

ANNEXE I

DIFFERENCES FINIES

AI.1. INTRODUCTION

Nous donnons dans cette Annexe les expressions qui nous avons utilisées pour l'approximation des équations généralisée de Reynolds, de l'équation générale de l'énergie et celle de l'échange thermique et nous expliciterons la manière dont elle a été adaptée au maillage du plan d'étude en division progressive.

Les différences finies est une méthode d'approximations de fonctions basée sur la formule de Taylor dont les termes qui contiennent des dérivées supérieures à l'ordre deux sont négligés.

AI.2. FORMULE DE TAYLOR

L'application de la formule de Taylor pour une fonction u(x, y) continûment dérivable donne :

$$u(x+h,y+k)=u(x,y)+h.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+k.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+h^2.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x^2}+k^2.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y^2}+h.k.\frac{\partial u(x,y)}{\partial x\partial y}+\ldots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}(h.\frac{\partial}{\partial x}+k.\frac{\partial}{\partial y})^{n-1}u(x+,y)+R_n \qquad (AI.1)$$

où

$$R_n=\frac{1}{n!}(h.\frac{\partial}{\partial x}+k.\frac{\partial}{\partial y})^n u(x+\xi h,y+\zeta k)$$

avec $\zeta \in]0,1[$ et $\xi \in]0,1[$

AI.3. DERIVEE PREMIERE

En posant

$$u_{i,j}=u(x_0+ih,y_0+jk) \qquad (AI.2)$$

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}(x_0+ih,y_0+jk) \qquad (AI.3)$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0+ih,y_0+jk) \qquad (AI.4)$$

$$u_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x_0+ih,y_0+jk) \qquad (AI.5)$$

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y}(x_0 + ih, y_0 + jk) \qquad (AI.6)$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0 + ih, y_0 + jk) \qquad (AI.7)$$

Pour appliquer ces expressions à la division progressive du plan d'étude (chapitre I), posons :

$$\begin{aligned} x_{i-1} - x_i &= h \\ x_{i+1} - x_i &= \varepsilon_x . h \end{aligned} \qquad (AI.8)$$

et

$$\begin{aligned} y_{j-1} - y_j &= k \\ y_{j+1} - y_j &= \varepsilon_y . k \end{aligned} \qquad (AI.9)$$

On obtient alors à partir de l'équation (AI .1) :

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{x_{i+1} - x_i}{1!}.u_x + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}.u_{xx} + \ldots + R_n \qquad (AI.10)$$

$$u_{i-1} = u_{i,j} + \frac{x_{i-1} - x_i}{1!}.u_x + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!}.u_{xx} + \ldots + R_n \qquad (AI.11)$$

soit :

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \varepsilon_x.h.u_x + \frac{1}{2}.\varepsilon_x^2.h^2.u_{xx} + \ldots + R_n \qquad (AI.12)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h.u_x + \frac{1}{2}.h^2.u_{xx} + \ldots + R_n \qquad (AI.13)$$

On en déduit alors :

$$u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\varepsilon_x.h} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{(1+\varepsilon_x)h} \qquad (AI.14)$$

car

$$x_{i+1,j} - x_{i-1,j} = (x_{i+1,j} - x_{i,j}) + (x_{i,j} - x_{i-1,j}) = \varepsilon_x.h + h$$

d'où

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \varepsilon_x.u_{i,j} - \varepsilon_x u_{i-1,} \qquad (AI.15)$$

De la première égalité l'expression (AI.14), on obtient :

$$u_x = \frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(1+\varepsilon_x)}{\varepsilon_x.h(1+\varepsilon_x)} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} + \varepsilon_x.u_{i+1,j} - \varepsilon_x.u_{i,j}}{\varepsilon_x.(1+\varepsilon_x)h} \qquad (AI.16)$$

En utilisant l'expression (AII.15) :

$$u_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} + (\varepsilon_x . u_{i,j} + \varepsilon_x^2 u_{i,j} - \varepsilon_x^2 u_{i-1,j}) - \varepsilon_x u_{i,j}}{\varepsilon_x . (1+\varepsilon_x) h} \qquad (AI.17)$$

soit :

$$u_x = \frac{u_{i+1,j} + (\varepsilon_x^2 - 1).u_{i,j} - \varepsilon_x^2 . u_{i,j}}{\varepsilon_x . (1+\varepsilon_x) h} \qquad (AI.18)$$

On déduit l'expression finale de la dérivée première :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x = \frac{u_{i+1,j} + (\varepsilon_x^2 - 1) u_{i,j} - \varepsilon_x^2 . u_{i-1,j}}{\varepsilon_x (1+\varepsilon_x) h} \qquad (AI.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y = \frac{u_{i,j+1} + (\varepsilon_y{}^2 - 1) u_{i,j} - \varepsilon_y{}^2 . u_{i,j-1}}{\varepsilon_y (1+\varepsilon_y) k} \qquad (AI.20)$$

AI.4. DERIVEE SECONDE

En multipliant l'expression (A.13) par ε_x on obtient :

$$\varepsilon_x . u_{i-1,j} = \varepsilon_x . u_{i,j} - \varepsilon_x . h . u_x + \varepsilon_x . \frac{h^2}{2!} . u_{xx} + \ldots + \varepsilon_x . R_n \qquad (AI.21)$$

En additionnant membre à membre les expressions (A.12) et (A.21) on obtient :

$$u_{i+1,j} + \varepsilon_x . u_{i-1,j} = u_{i,j} + \varepsilon_x . u_{i,j} + \varepsilon_x^2 . \frac{h^2}{2!} . u_{xx} + \varepsilon_x . \frac{h^2}{2!} . u_{xx} \qquad (AI.22)$$

On en déduit donc :

1°) Dérivée seconde par rapport à x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = 2. \frac{u_{i+1,j} + \varepsilon_x . u_{i-1,j} - (1+\varepsilon_x) u_{i,j}}{\varepsilon_x (1+\varepsilon_x) h^2} \qquad (AI.23)$$

2°) Dérivée seconde par rapport à y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} = 2. \frac{u_{i,j+1} + \varepsilon_y . u_{i,j-1} - (1+\varepsilon_y) u_{i,j}}{\varepsilon_y (1+\varepsilon_y) k^2} \qquad (AI.24)$$

ANNEXE II

MATRICES DE PASSAGE

AII.1. INTRODUCTION

Dans cette annexe, nous expliciterons de façon très simplifiée, la méthode de calcul des matrices de passage d'un repère à un autre représentant les réglages basés sur simulation de taillage. Pour cela nous donnerons les coordonnées dans le repère initial, et en fonction des transformations apportées à ces coordonnées (rotations, translations, etc..) dus aux réglages imposés, soit par la position des engrenages dans la machine soit par les mouvements d'usinage, nous donnerons leurs nouvelles coordonnées dans le repère cible.

AII.2. PASSAGE DE R_T A R_1

Notations :

$\vec{i}_T\ \vec{j}_T\ \vec{k}_T$: vecteurs unitaires dans le repère $R_T(X_T, Y_T, Z_T)$.

$\vec{i}_{T'}\ \vec{j}_{T'}\ \vec{k}_{T'}$: vecteurs unitaires dans le repère $R_{T'}(X_{T'}, Y_{T'}, Z_{T'})$

$\vec{i}_1\ \vec{j}_1\ \vec{k}_1$: vecteurs unitaires dans le repère $R_1(X_1, Y_1, Z_1)$

$\vec{r}_T = (x_T, y_T, z_T)$: coordonnées du point M dans R_T

$\vec{r}_{T'} = (x_{T'}, y_{T'}, z_T)$: coordonnées du point M dan $R_{T'}$

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$: coordonnées du point m dans le repère R_1

Transformations :

$R_{T'}$ se déduit de R_T par une rotation d'angle β autour de $O\vec{Z}_T$ (fig. A 2.1)

On alors dans $R_{T'}$:

$\vec{i}_T = \cos\beta.\vec{i}_{T'} + \sin\beta.\vec{j}_{T'}$

$\vec{j}_T = -\sin\beta.\vec{i}_{T'} + \cos\beta.\vec{j}_{T'}$

$\vec{k}_T = \vec{k}_{T'}$

Le repère R_1 se déduit de $R_{T'}$ par une rotation d'angle δ autour de l'axe $OX_{T'}$ (fig. A 2.2)

On a alors dans R_1 :

$\vec{i}_{T'} = \vec{i}_1$

$\vec{j}_{T'} = \cos\delta\ \vec{j}_1 + \sin\delta.\vec{k}_1$

$\vec{k}_{T'} = -\sin\delta.\vec{j}_1 + \cos\delta.\vec{k}_1$

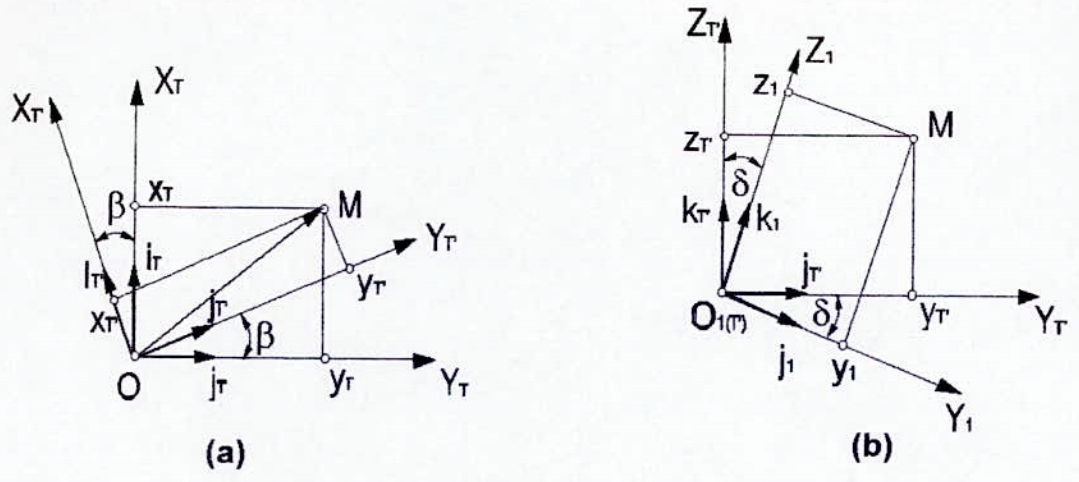


Figure A2.1

Les coordonnées du point M dans le repère R_1 en fonction ses coordonnées dans le repère R_T sont alors :

$$x.\vec{i}_1 + y\vec{j}_1 + z.\vec{k}_1 = x_T\vec{i}_T + y_T\vec{j}_T + z_T\vec{k}_T$$

$$= x_T.(\cos\beta\,\vec{i}_{T'} + \sin\beta\,\vec{j}_{T'}) + y_T(-\sin\beta\,\vec{i}_{T'} + \cos\beta\,\vec{j}_{T'}) + z_T\vec{k}_{T'}$$

$$= x_T[\cos\beta.\vec{i}_1 + \sin\beta.(\cos\delta.\vec{j}_1 + \sin\delta\,\vec{k}_1)] + y_T[-\sin\beta\,\vec{i}_1 + \cos\beta.(\cos\delta\,\vec{j}_1 +$$

$$+ \sin\delta\,\vec{k}_1)] + z_T(-\sin\delta\,\vec{j}_1 + \cos\delta\,\vec{k}_1)$$

soit :

$$x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 = (x_T\cos\beta - y_T\sin\beta)\vec{i}_1 + (x_T\sin\beta.\cos\delta + y_T\cos\beta.\cos\delta - z_T\sin\delta)\vec{j}_1 +$$

$$+ x_T(\sin\beta.\sin\delta + y_T\cos\beta.\sin\delta + z_T\cos\delta\,\vec{k}_1)$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle en utilisant les cordonnées homogènes :

$$\vec{r}_1 = [A_1].\vec{r}_T \qquad \text{(AII.1)}$$

soit

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta.\cos\delta & \cos\beta.\cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\beta.\sin\delta & \cos\beta.\sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} \qquad \text{(AII.2)}$$

Le repère R_1 n'ayant pas subit de translation (coordonnées du sommet O_1 restant inchangées); cette relation peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta.\cos\delta & \cos\beta.\cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\beta.\sin\delta & \cos\beta.\sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(AII.3)}$$

La dernière colonne représente la valeur du vecteur de translation (origine du nouveau repère).

AII.2. PASSAGE DE R_1 A R_2

Dans R_2 :

$$\vec{i}_1 = \vec{i}_2$$

$$\vec{j}_1 = \cos\psi\,\vec{j}_2 - \sin\psi\,\vec{k}_2$$

$$\vec{k}_1 = \sin\psi\,\vec{j}_2 + \cos\psi\,\vec{k}_2$$

et

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i}_2 + y_2\vec{j}_2 + z_2\vec{k}_2 \qquad \text{(AII.4)}$$

Le repère R_2 se déduit de R_1 par une rotation d'angle ψ et d'une translation de e_p (fig. A2.2a)

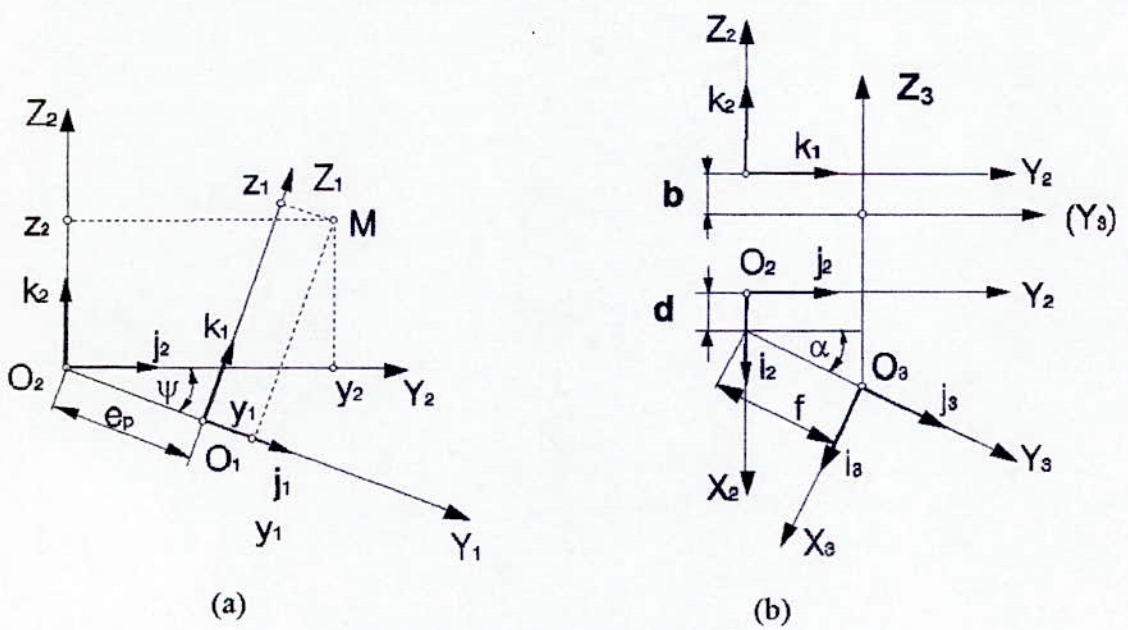


Figure A2.2

on a alors :

$$\vec{r}_2 = e_p \vec{j}_1 + \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2 = e_p \vec{j}_1 + x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1 \vec{k}_1$$

$$\vec{r}_2 = e_p.(\cos\psi \vec{j}_2 - \sin\psi \vec{k}_2) + x_1 \vec{i}_2 + y_1(\cos\psi \vec{j}_2 - \sin\psi \vec{k}_2) + z_1(\sin\psi \vec{j}_2 + \cos\psi \vec{k}_2)$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e_p \cos\psi \\ -e_p \sin\psi \end{bmatrix}$$

qu'on peur écrire également sous la forme :

$$\vec{r}_2 = [A_2] . \vec{r}_1 \qquad \text{(AII.6)}$$

qui, sous forme développée, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & e_p \cos\psi_1 \\ 0 & -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & -e_p \sin\psi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(AII.7)}$$

avec

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_1 & \sin\psi_1 & e_p \cos\psi_1 \\ 0 & -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 & -e_p \sin\psi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(AII.8)}$$

AII.3. PASSAGE DE R_2 A R_3

Le repère R_3 se déduit de R_2 par une translation de longueur b dans le sens OZ_2, une autre translation de longueur d dans le sens de l'axe OX_2 (soit $-d.i_2 + b.k_2$) puis, une rotation d'angle α autour de l'axe OZ_2 et enfin une translation de longueur f dans le sens de l'axe OY_2 ainsi obtenu.

Cela se traduit par :

Dans R_3 :

$$\vec{r}_3 = x_3 \vec{i}_3 + y_3 . \vec{j}_3 + z_3 \vec{k}_3 \qquad \text{(AII.9)}$$

où

$$\vec{i}_2 = \cos\alpha \, \vec{i}_3 + \sin\alpha \, \vec{j}_3$$

$$\vec{j}_2 = - \sin\alpha \, \vec{i}_3 + \cos\alpha \, \vec{j}_3$$

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_3$$

soit donc :

$$\vec{r}_3 = - d.\cos\alpha \, \vec{i}_3 + (-\vec{f} - d\sin\alpha) \, \vec{j}_3 + b\vec{k}_3 + \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_3 = -d.\cos\alpha \, \vec{i}_3 + (-\vec{f} - d.\sin\alpha) \, \vec{j}_3 + b + x_2 \vec{i}_2 + y_2 \vec{j}_2 + z_2 \vec{k}_2$$

$$\vec{r}_3 = -d.\cos\alpha \, \vec{i}_3 + (-- \, d\sin\alpha) \, \vec{j}_3 + b \, \vec{k}_3 + x_2 .(\cos\alpha \, \vec{i}_3 + \sin\alpha \, \vec{j}_3) + y_2 .(- \sin\alpha \, \vec{i}_3 + \cos\alpha \, \vec{j}_3) + z_2 \vec{k}_3$$

$$\vec{r}_3 = (- d.\cos\alpha . + x_2 .\cos\alpha - y_2 .\sin\alpha) \, \vec{i}_3 + (-\vec{f} - d\sin\alpha + x_2 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha) \, \vec{j}_3 + (b + z_2)\vec{k}_3$$

qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & -d.\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & -f - d.\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(AII.10)}$$

On calculera de la même façon les matrices de passage pour le reste des systèmes. Les expressions des matrices de passage sont données au paragraphe correspondant à chaque changement de repère.

Bibliographie

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dr. HERMANN J. STADTFELD. - Handbook of Bevel and Hypoid Gears Calculation -Manufacturing - Optimization -RIT First Edition.

[2] H. M MARTIN. - The lubrication of gear teeth- Engineering, 1916, Vol. 102, p. 199.

[3] J. L. E. GROFF. - Abc Du Graissage - Publication de l'Institut Français du pétrole.

[4] B.E EIDELBERG J.F BOOKER. - Application of finite element method to lubrication squeeze film between poros surfaces - Journal of Lubrication Technology, Jan 1978.

[5] G. HENRIOT . - Traité théorique et pratique des engrenages - ed. Dunod Paris tome 2, 5ème édition, 1983.

[6] D. DOWSON. - A generalized Reynolds Equation for fluid film lubrication - Journal of Mechanical Engineering science, vol.4, p.p. 150 à 170.

[7] J. FRENE F. AUTRINOS M. GODET. - Conditions d'utilisation de l'équation de Reynolds en mécanique des films minces visqueux - Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.4, N)2, 1962, pp. 121-126.

[8] TIMOSHENKO AND GODIER- Theory of elasticity-Mc Graw-Hill 2nd edition , 1951, p.91.

[9] L. SOLOMON. - Elasticité linéaire - Edition Masson & Cie 1968.

[10] B.J HAMROCK D. DOWSON. - Isothermal elastohydrodynamic lubication of point contact -. Journal of Lubrication Technology, April 1976 ,pp. 223-229, July 1976, pp. 375- 383.

[11] B. J HAMROCK and D. DOWSON. - Numerical Evaluation of the Surface Deformation of Elastique Solids Subjected to a Hertzian Contact Stress - NASA TND-7774 Aug.1974.

[12] R. W. SNIDLE and J. F. ARCHARD. - Lubrication at Elliptical contact - Institute of mechanical Engineerings, 1969, Paper N° 17.

[13] L. S AKIN. - EHD lubricant film thikness for power transmission gears - Journal of Lubrication Technology, 1974, pp.336-342.

[14] G. DALMAZ. - Formation and separation of thin viscous film in Hertzian line contact -. Journal of Lubrication Technology, April 1980, vol.102, pp. 330-338.

[15] J. FRENE D. NICOLAS. - Lubrification hydrodynamique - Editions Eyrolles, mars 1990.

[16] P. SAINSORT.- Calcul des conditions de lubrification des engrenages. - These de DEA en mècanique , I.N.S.A , Lyon 1984.

[17] J. WILEY & SONS, INC (NEW YORK).- Applied Numerical method -.Transactions of the ASLE, vol.9, 1966, pp.186-194.

[18] V. SIMON. - Elastohydrodynamic Lubrication of Hypoid gears - Journal of Mechanical Design Jan ; 1981 pp.195-203.

[19] D. DOWSON G.R HIGGINSON. - Anumerical solution to the elastohydrodynamic problem - Journal of Mechanical Engineering Science , 1959. Vol.1, p.6,

[20] GLEASON WORKS. - Theory of 6 axis CNC generation of bevel and hypoid gears - Publication ETI 4208/8-89, Rochester ,New York.

[21] M. BEY. H. BELHANECHE S. LARBI - Modélisation statique des engrenages spiro-coniques par la méthode des éléments finis – 4ème Congrès Mondial des Engrenages et des Transmissions de Puissances. 17-19 avril 1999 , Paris.

[22] G. ROSSELIN L. CLOUTIER. - The generation Space for Parabolic error spiral bevel gear cut by Gleason Method - ASME Iternational Power Transmission and Gearing Conference, 1992, vol 1.

[23] G.B BIBEL K. KUMAR. - A Predictionof contact path and load Sharing in spiral bevel gears -
NASA CR6195305, April 1994.

[24] V. SIMON. - Optimization of the geometry and kinematic of hypoid gears -Ve World Congress on the theory Machines and Mechanismes, Montreal, Sep.1979, pp.1148-1153.

[25] V. SIMON. - Tooth contact analysis for modified hypoid gear -Ive World Congress on the theory Machines and Mechanismes, Newcastle upon Tyne, Sep.1975, pp.87-92.

[26] S.M. ROHDE D. WHICKER A.L. BROWNE. - Dynamic Analysis of Elastohydrodynamic Squeeze films - Journal of lubricationTechnology , July 1976.

[27] K.L WANG H.S CHENG. - A numerical solution to the dynamic tool, film thickness and surface temperature in spur gear -. Journal of Lubrication Technology, Jan. 1970, pp. 231-241.

[28] R. COLBOURNE . - Compensation for spindle tilt in the cutting of spiral bevel gears - ASME – Proceedings of the 1989 international transmission and gearing conference,
Chicago, april 1989, vol.2, pp. 727-743.

[29] D. DOWSON A. WHITAKER. - A numerical procedure for the solution of the elastohydrodynamic problem of rolling and sliding contact lubricated by a Newtonian fluid - Proceeding of the institution of mechanicals engineers, Vol.180, pt.3b 1965-66 pp.57-71.

[30] H. M MARTIN . - Lubication of Gear Teeth - Engineering (London),Vol. 102 ,1976, pp.119-121.

[31] G. M. MARTIN . - Lubrication of Gear teeth - Engineering (London), Vol. 102, 1966, pp. 119 –12

[32] M. SAVAGE, P.C ALTIDIS, D.G LEWICKI , J.J COY & F.L LITVIN .-Tooth contact shift in loaded spiral gear -. ASME Journal of Mechanical Design, vol.113, Sep.1991, pp.346-352.

[33] H.L CHANG Y.C TSAI. - A model of parametrique tooth profiles for spur gears. - Journal of Mechanical Design , March 1972, Vol.114, p.p 9 -16.

[34] S.M ROHDE H.A EZZAR. - A study thermohydrodynamic squeeze film -Journal of Lubrication Technology, April 1974, pp. 198 à 227.

[35] M. SIBONY & JC HARDON. - Approximations et équations différentielles - Herman , Editeurs des sciences et des arts 1980

[36] C. M RODKIEWICZ V. SRINIVASAN. - Elastohydrodynamic lubrication in rolling and sliding contacts - Journal of Lubrication Technology oct.1972 pp. 324 à 329

[37] R. L HUSTON J. J COY. - Surface geometry of circular and spiral bevel gears - Journal of Mechanical Design, july 1976.

[38] H. E. EZZAR and S..M. RHODE. - A Study of the Thermohydrodynamic of Performance Finite Slider Bearing - ASME Journal of Lubrication Technology , july 1973, pp.298-307.

[39] J. VIGNES R. ALT . - Algotithmes numériques Analyse et mise en œuvre - EditionsTechnip, 1981

[40] P. RANGER, C. M. M.ETTLES - Evaluation Of Lubricats Using Optical Elastohydrodynamics - Proceedings of The Royal Society, vol. A346 1975. pp. 227-244.

[41] J. F ARCHARD and E. W COWKING. - Elastohydrodynamic Lubrication Of Point Contacts - Proceedings Instument Mechanical Engineers, Vol.180, 1965/66.

[42] H. S CHENG . - A Numerical Solution Of The Elastohydrodynamic Film Thikness In Ellipticalcontact - Journal of lubrication technology, trans . Asme, Vol.92, Jan. 1970.

[43] D. DOWSON G.R HIGGINSON. - Elastohydrodynamic Lubrication - Pergamon Press, 1966.

[44] Y. P CHIU and L. B SIBLEY. - Contact Shape And New Newtonian Effects In Elastohydrodynamic Lubrication - Lubication Engineering, Feb. 1972.

[45] K. L JOHNSON. - Regimes Of Elastohydrodynamic Lubrication - Journal Mechanical Engineering, Vol.12, 1970.

[46] H. CHRISTENSEN. - Elastohydrodynamic Theory Spherical Bodies In Normal Approach - Journal Of Lubrication Technology , TRANS. ASME, Vol.92, Jan. 1970.

[47] K. HERREBRUGH. - Elastohydrodynamic Squeeze Films Between Two Cylinders In Normal Approach - Journal Of Lubrication Technology , Vol. 92, April 1970.

[48] S . M ROHDE K. P. OB. - A Unified Treatment Of Thick And Thin Film Elastohydrodynamic Problem - Proceedings of royal society, london vol . 343, May 1975.

[49] R. W. ADKINS E. I. RADZIMOVSKI. - Lubication phenomena in spur gears Journal Of Basic Engineering, Sep. 1965

[50] O. LEBECK E. I. RADZIMOVSKI. - The Synthesis Of Thooth Profile Shapes And Spur Gears Of High Load Capacity - Journal Of Engineering For Indutry, 1970.

[51] R. G. MITCHINER H. H. MABIE. - The Under Cutting Of Hobbed Spur Gear Teeth" Mechanisms, Transmissions And Automation In Design , Vol. 105, 1983.

[52] D. W. DARING E. I. RADZIMOVSKI. - Lubricating Film Thikness And Load Capacity Of Spur Gears - Asme Paper No-63, p.85 , 1963.

[53] Y. ATTIA. - Dynamic Loading Of Spur Gear - Journal Of Engineering For Industry , Vol.81, 1959, pp 1-9.

[54] K. ICHIMAYU I. HIRANO. - Dynamic Behavior Of Heavy Loaded Spur Gears - ASME Paper, No. 72, 1972, pp.14-18.

[55] CHABERT G. D. TRAN. - An Evaluation Of Stress And Deflection Of Spur Gear Teeth - Journal of engineering for industry, Feb. 1974.

[56] K. L. WANG H. S. CHENG. - Thermal Elastohydrodynamic Lubrication Of Spur Gears - NASA Contract .

[57] D. NICOLAS J. FRENE. - Les fondements de la lubrification hydrodynamique onde thermique de l'hydraulique et la pneumatique - 10ème édition Janvier 1976, Energie Fluide.

[58] M. BEY. - Modélisation statique des engrenages spiro-coniques par la méthode des éléments finis - ENP 1999.

[59] Z.H FONG C.B TSAI. - A Study of the tooth geometry and cutting machine mechanisms of spiral gears - ASME Journal Of Mechanical Design, vol.113, sept. 1991 .