M0019/98B

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

THESE DE MAGISTER

Présentée par: **Melle LAOUAR Sihem**
Sous la Direction du: **Professeur M. A. AIT ALI**

THEME

OPTIMISATION DE LA PUISSANCE MECANIQUE DE REFRIGERATION D'UN CYCLE CASCADE DE LIQUEFACTION DE GAZ NATUREL ENDOREVERSIBLE

Soutenue publiquement devant le jury composé de:

C.E. CHITOUR	**Professeur ENP**	**Président**
M.A. AIT ALI	**Professeur ENP**	**Rapporteur**
R.KERBACHI	**Professeur ENP**	**Examinateur**
S.LARBI	**Docteur chargé de cours ENP**	**Examinateur**
M.TALEB	**Docteur LTH SONATRACH**	**Examinateur**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Résumé - Dans le cadre de l'optimisation des procédés de liquéfaction à cascade, on propose de minimiser la puissance mécanique de réfrigération d'une cascade de cycles multiétagés, destinée à liquéfier du gaz naturel pour une conductance thermique globale donnée. En utilisant l'approche des cycles thermodynamiques endoréversibles, deux modèles mathématiques, permettant de résoudre le problème d'optimisation de façon analytique, seront élaborés. Le premier modèle supposera des écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs de chaleur tandis que le deuxième utilisera des écarts moyens logarithmiques. La comparaison des règles d'optimalité obtenues avec ces deux modèles montre que l'approche des cycles thermodynamiques endoréversibles détermine un type particulier de règles régissant les échanges thermiques dans les cycles cascades. Les résultats théoriques obtenus prouvent la faisabilité des modèles mathématiques élaborés; il est nécessaire de les confronter à la réalité physique pour en adapter l'applicabilité.

Abstract - Within the framework of cascade liquefaction cycles optimisation, it is proposed to minimise the refrigeration power of a multistage cascade for the liquefaction of natural gas for a given overall heat exchanger conductance. Two mathematical models are used along with conceptual endoreversibles cycles to obtain analytical optimal solutions, the first with arithmetic mean temperature differences, the second with logarithmic means. The optimality rules obtained with both models are pertinent to endoreversible cycles; they govern heat exchange conductance and mean temperature differences in cascade cycles. The theoretical results obtained are to be measured to the actual performance of know cycles to ascertain applicabilities.

ملخص – في إطار تحسين منشآت تمييه الغاز الطبيعي نقترح تصغير الاستطاعة الآلية لدورة تمييه متعددة الطوابق بإستعمال مفهوم الديناميك الحرارية القابلة للإنعكاس داخليا. وذلك بحل المعادلات الرياضية المنبثقة عن تصغير الطاقة بطريقة تحليلية و نستعمل نموذجين، النموذج الأول بإستعمال الفارق الحراري الحسابي، و الثاني بإستعمال الفارق الحراري اللوغرتمي. المقارنة بين قوانين التحسين أفضت إلى الحصول على قوانين جديدة تحكم التبادلات الحرارية، و النتائج النظرية المتحصل عليها قابلة للتطبيق بشرط مقارنتها مع الحقائق الفيزيائية.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

Ce travail est dédié à :

Mes très chers parents;

Mes frères particulièrement Soufiane;

Meftah Abdelmalek;

Mes amies Ouazia Sabina et Boubechiche Zakia;

A toute ma famille particulièrement Bezih Samia, Laouar Mériem et Laouar Bahia.

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Ma gratitude et mes plus sincères remerciements vont tout d'abord, à Monsieur le Professeur ***M.A. AIT-ALI*** *dont la bienveillance direction et les précieuses orientations m'ont constamment accompagnée et soutenue durant le développement de cette étude.*

Mes remerciements vont, aussi, au :

Professeur ***C.E. CHITOUR*** *qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse;*

Professeur ***R. KERBACHI;***

Docteur ***M. TALEB;***

Docteur ***S. LARBI;***

J'exprime une reconnaissance toute particulière à :

Messieurs ***A. M. MEFTAH*** *,* ***M. OUAZIA*** *et* ***B. OUAZIA*** *pour leur aide précieuse à la mise en forme de ce document.*

Monsieur ***H. BENNOUR*** *, enseignant à l'ENP, pour ses précieux conseils et sa disponibilité.*

Je ne saurai oublier d'exprimer ma profonde gratitude à la famille ***OUAZIA*** *et* ***LAOUAR*** *d'Alger dont l'aide et les encouragements m'ont été d'un apport sans égal.*

Ce travail doit également beaucoup au personnel de la Bibliothèque de l'ENP et particulièrement ceux du service des Périodiques, qu'il trouve ici le témoignage de ma reconnaissance.

En fin, ma profonde sympathie va à la promotion 1993 et à tous mes amis(es) particulièrement ***A. AMRANE, S. BOUZID, N. MADJOUDJ*** *et* ***S. ZERDOUM*** *.*

Sommaire

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre : 1

GENERALITES

1.1 Le gaz naturel dans le monde 1
1.2 Importance du secteur gazier en Algérie 2
1.3 Transport du gaz naturel 3
1.3.1 Transport par gazoducs 3
1.3.2 Transport par méthaniers 4
1.4 Les principaux cycles de liquéfaction du gaz naturel 4
1.4.1 Cycle dans les usines de grande production 5
1.4.2 Cycle dans les usines de faible production 8
1.5 Nécessité d'optimisation des procédés de liquéfaction 9
1.6 But de l'étude 9
1.7 Organisation de l'étude 10

Chapitre : 2

DETERMINATION DE LA COURBE DE REFROIDISSEMENT DU GAZ NATUREL PAR L'EQUATION D'ETAT STARLING - HAN

2.1 Introduction 11
2.2 Définition et choix de l'équation d'état 11
2.2.1 Définition d'une équation d'état 11
2.2.2 Equation d'état Starling-Han 12
2.3 Calcul des propriétés thermodynamiques d'un mélange et des équilibres des phases liquide-vapeur 12
2.3.1 Définitions de base 12
2.3.2 Calcul des équilibres liquide-vapeur 14
2.3.2.1 Calcul de vaporisation partielle (Flash) 14
2.3.2.2 Calcul du point de bulle 17
2.3.2.3 Calcul du point de rosé 17
2.3.3 Calcul de propriétés thermodynamiques 18

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

2.3.3.1 Fonctions d'état résiduelles....18
2.3.3.2 Calcul de l'enthalpie d'un mélange....19
2.3.3.3 Calcul de l'entropie d'un mélange....20
2.4 Détermination de la courbe de refroidissement du gaz naturel....20
2.5 Conclusion....22

Chapitre : 3

FORMULATION MATHEMATIQUE ET RESOLUTION DU PROBLEME D'OPTIMISATION

3.1 Introduction....23

Partie -1-

MODELE MATHEMATIQUE RELATIF AUX ECARTS DE TEMPERATURE MOYENS ARITHMETIQUES

3.2 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles simplement étagés....26
3.2.1 Cycle de réfrigération endoréversible....26
3.2.2 Cascade simple à trois cycles de réfrigération endoréversibles....28
3.3 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués....34
3.3.1 Cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à un niveau de pression....35
a/ Problème primal....36
b/ Problème équivalent....38
c/ Solution du problème primal....45
3.3.2 Cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à deux niveaux de pression....48
a/ Problème primal....50
b/ Problème équivalent....51
c/ Solution du problème primal....60
3.3.3 Cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à trois niveaux de pression....65

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

3.4 Exemple numérique **71**

3.4.1 Courbe de refroidissement 71

3.4.2 Calcul des flux thermiques soutirés au gaz naturel 73

3.4.3 Puissance de réfrigération minimale et températures optimales 75

3.4.4 Conductances thermiques et écarts de température dans les échangeurs de chaleur 77

Partie -2-

MODELE MATHEMATIQUE RELATIF AUX ECARTS DE TEMPERATURE MOYENS LOGARITHMIQUES

3.5 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles simplement étagés **81**

3.6 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués **82**

3.6.1 Cascade à un niveau de pression 83

3.6.2 Cascade à deux niveaux de pression 85

3.6.3 Cascade à trois niveaux de pression 87

3.7 Exemple numérique **88**

3.7.1 Flux thermiques soutirés au gaz naturel 88

3.7.2 Puissance de réfrigération minimale et températures optimales 88

3.7.3 Conductances thermiques et écarts de température dans les échangeurs de chaleur 91

3.7.4 Détermination des niveaux de pression dans les cycles cascades étudiées 94

3.7.4.1 Cascade à un niveau de pression 94

3.7.4.2 Cascade à deux niveaux de pression 96

3.7.4.3 Cascade à trois niveaux de pression 98

3.8 Conclusions **100**

CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS **102**

ANNEXES **104**

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES **132**

Nomenclature

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Am : écart de température moyen arithmétique;

C : conductance thermique;

Cop : coefficient de performance;

f : fugacité;

Gm : écart de température moyen géométrique;

GN : gaz naturel;

GNL : gaz naturel liquide;

H: enthalpie;

K : constante d'équilibre;

k_{ij} : coefficient d'interaction binaire;

L : nombre de moles de liquide;

Lm : écart de température moyen logarithmique;

M : masse molaire;

$\dot{m}$: débit massique;

N: nombre total de composants d'un mélange;

(n) : condition normale de pression et de température;

P : pression;

$\dot{Q}$: flux thermique;

R : constante des gaz parfaits;

S : entropie ;

(st) : condition standard de pression et de température;

T: température à l'entrée d'un échangeur de chaleur;

t : température à la sortie d'un échangeur de chaleur;

T_F : température initiale du gaz naturel;

T_0 : température finale du gaz naturel;

T_{CI} : température d'entrée de l'eau de refroidissement;

tc_I : température de sortie de l'eau de refroidissement;

T_E : température moyenne arithmétique du gaz naturel;

T_{CE} : température d'évaporation du fluide frigorigène;

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

T_{HC} : température équivalente de condensation du fluide frigorigène;

T_b : température du point de bulle;

T_d : température du point de rosée;

Δt : écart de température à l'entrée d'un échangeur;

ΔT : écart de température à la sortie de l'échangeur;

V: nombre de moles de vapeur;

V: volume molaire;

$\dot{W}$: puissance mécanique de réfrigération;

x_i : fraction molaire du constituant i dans un mélange à l'état liquide;

y_i : fraction molaire du constituant i dans un mélange à l'état vapeur;

Z : facteur de compressibilité;

z_i : fraction molaire totale du constituant i .

Indice

cr : critique;

T : total;

k: kième niveau de pression;

r : réduit;

i,j : différents composants présents dans le mélange, ils varient de 1 à N;

VS : vapeur saturée;

LS : liquide saturé.

Exposant

* : solution optimale du problème primal;

** : solution optimale du problème équivalent;

L : phase liquide;

V : phase vapeur;

0 : état de gaz parfait.

Symbole grec

φ : coefficient de fugacité ;

ρ : inverse du volume molaire.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Chapitre -1-

GENERALITES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

1.1 Le gaz naturel dans le monde

La consommation de gaz se développe rapidement dans le monde. La pénétration du gaz s'est accélérée sur les marchés mondiaux avec un taux de croissance, qui au cours des dix dernières années est passé à 3.4% en rythme annuel, contre 2.6% au cours de la décennie précédente[Jaffre,1994]. Selon les prévisions de l'AIE (Agence Internationale de l'Energie), la demande mondiale augmenterait entre 1990 et 2010 de plus de 50%, soit une demande additionnelle de 1200 milliards de m^3 [Bouhafs, 1994a]. L'origine de cette croissance remonte au «choc énergétique » de 1973-74; où le pétrole qui avant se négociait à moins de 3 $ f.o.b le baril a vu alors son prix quadrupler. Mais aujourd'hui, à la date de cette présentation, le prix du baril est passé en dessous du prix de 1973 en termes constants, c'est à dire en tenant compte du pouvoir d'achat du dollar. Une partie de la demande mondiale en pétrole a commencé à se reporter alors sur le gaz naturel, mais selon un mouvement très lent car la substitution nécessite d'abord la reconversion de certains équipements de combustion et avant tout, la mise à disposition du gaz naturel sur les sites d'utilisation des pays consommateurs souvent situés au-delà des mers.

Au cours du triennal 1991-94, la commission J. " Prospective, stratégie et économie du gaz dans le monde " de l'union internationale de l'industrie du gaz a conclus que la demande de gaz est appelée à progresser rapidement jusqu'à la fin du siècle et au-delà, plusieurs raisons sont avancées :

- importance des réserves mondiales prouvées de gaz naturel qui s'élèvent à 145900 milliards de m^3 (presque 50% des réserves totales des hydrocarbures de la planète), soit 70 années de consommation actuelle, et de l'ordre de 97% des réserves pétrolières [Cornot-Gandolphe, 1993]. Au rythme actuel des découvertes des nouveaux gisements de gaz naturel, les réserves totales récupérables de la planète permettraient même 200 années de consommation actuelle;

- développement de l'usage du gaz comme combustible pour la production de l'électricité, afin de ralentir l'option nucléaire dans certains pays comme les Etats-Unis, l'Allemagne et l'Italie, gros consommateurs d'énergie, particulièrement après la catastrophe de Chernobyl [Ferriter, 1994];

- la combustion du gaz naturel plus propre que celle du pétrole, avec moins d'imbrûlés et moins de CO_2 en particulier, pour la même énergie thermique produite [Ferriter, 1994].

Cependant, les problèmes de transport et de distribution du gaz ont toujours freiné l'extension géographique du marché du gaz. Ces problèmes sont à la fois techniques et

économiques. En effet, l'expédition d'une unité d'énergie sous forme de gaz, depuis la Norvège jusqu'à la France, représente environ le même coût que l'expédition d'une unité énergétique équivalente sous forme de pétrole à partir de la Norvège pour arriver en France après avoir fait deux fois le tour du monde [Ferriter, 1994]. L'explication scientifique est que les gaz requièrent une plus grande énergie que les liquides à transporter.

1.2 Importance du secteur gazier en Algérie

L'Algérie est le pays qui a le plus investi dans la promotion de ses ressources gazières, depuis le début des années soixante par la construction de la première usine de liquéfaction destinée à l'exportation de GNL, la réalisation des complexes GNL des années soixante-dix, et la construction de gazoducs sous-marins Est et Ouest à destination de l'Europe. Ainsi l'Algérie, par le biais de la Sonatrach, affirme son ambition d'être toujours présente sur le marché énergétique Européen, Américain, voire même Asiatique; vue l'importance des réserves prouvées de gaz naturel qui s'élèvent à 3720 milliards m^3 [Dauger, 1996]. La politique de commercialisation de gaz mise en oeuvre depuis presque 30 ans vise aujourd'hui un objectif de doublement des exportations de gaz, pour passer de 30 à 70.10^9 m^3/an et même au-delà [Pétrole et Gaz Arabes, 1996]. Le solde de capacité de liquéfaction sera assuré par deux gazoducs transméditerranéen [Bouhafs, 1994b]:

- l'un à l'Est, allant vers l'Italie à travers la Tunisie, dont la capacité a été portée récemment de 16 à 24.10^9 m^3 après l'installation d'une double station de compression;
- l'autre à l'Ouest, allant vers l'Espagne et le Portugal à travers le Maroc (gazoduc Maghreb-Europe), opérationnel depuis Novembre 1996.

Un contrat de $3-3.5 milliards a été signé le 23 Décembre 1995 [Pétrole et Gaz Arabes, 1996] entre la Sonatrach et British Petroleum pour le développement des champs gaziers d'In Salah. Ce dernier pourrait, en effet, accroître de 30% la production de gaz du groupe mondial britannique. Cet accord constitue un partenariat sur toute la chaîne gazière, de la recherche dans la région d'In Salah, à la commercialisation en Europe du Sud en passant par l'exploitation des champs et le transport du gaz naturel. Le gaz naturel se révèle en effet constituer un atout majeur dont dispose l'Algérie pour soutenir son développement économique.

1.3 Transport du gaz naturel

Généralement, deux solutions s'offrent au transport du gaz naturel sur les grandes distances:

- Transport par gazoducs;
- Transport par méthaniers.

1.3.1 Transport par gazoducs

Le transport par gazoducs représente la solution techniquement la plus simple mais requiert la mise en place d'un réseau de conduites reliant les sites de production et de réception. En 1992, les échanges internationaux par gazoducs ont atteint 258 10^9 m^3 (n) /an , avec une longueur totale de gazoducs qui dépasse le million de km [Cornot-Gandolphe, 1993].

Les principales étapes d'une chaîne de transport par gazoducs sont représentées sur la figure 1.1 [Rojey et al., 1994]. La construction de gazoducs peut durer plusieurs années selon la longueur et la taille de l'ouvrage et la disponibilité des équipements en conduite d'acier de gros diamètres, 48 pouces (1.22 m) et plus, et en station de recompression disposées environ tous les 50 km; donc si l'on considère que la capacité de production des conduites en acier pour l'Algérie est de 100 km par an pour le 48 (1.22 m) pouces et 60 km par an pour le 54 pouces (1.32 m), on réalise qu'un ouvrage de 500 km nécessiterait un délai de production de 3 à 5 ans selon que l'on dispose déjà d'un stock partiel ou que l'on approvisionne le complément sur le marché international. Le transport par gazoducs consomme aussi beaucoup d'énergie pour la recompression, entre 1 et 1.5% de la quantité transportée par 50 km . La compétitivité des gazoducs va être remise en cause par les distances supérieures à 1500 km, pour lesquelles un calcul approximatif donne une auto consommation de plus de 50% de la capacité nominale.

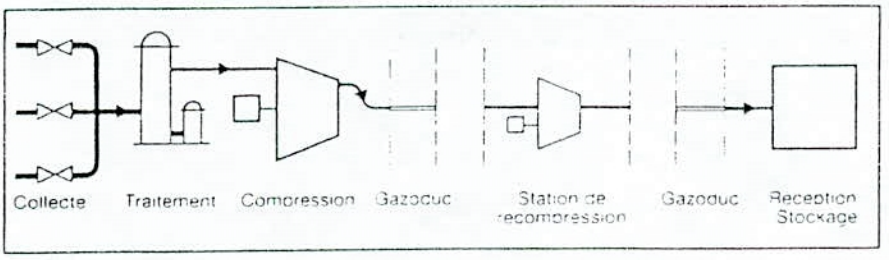


Fig.1.1 Chaîne de transport par gazoduc.

1.3.2 Transport par méthaniers

L'alternative au transport par gazoducs est la liquéfaction du gaz naturel, celle-ci consiste à réduire environ 600 fois le volume spécifique du gaz afin d'être transporté par méthaniers. Les premières expériences de liquéfaction de gaz naturel datent de 1934 en URSS et de 1940 aux Etats-Unis; mais c'est en 1964 que la première chaîne internationale de liquéfaction la CAMEL (Compagnie Algérienne de Méthane liquide) (Arzew, Algérie) entrait en service. En 1992, le commerce international de GNL atteint 81.10^9 m^3 (n), soit 24% du commerce international du gaz naturel [Cornot-Gandolphe, 1993], il devrait s'accroître d'ici 2010, passant de $116\text{-}130.10^9$ m^3 (n) en 2000 à $184\text{-}212.10^9$ m^3 (n) en 2010, soit presque un triplement en 20 ans [Cornot-Gandolphe, 1991]. Les principales étapes d'une chaîne de transport de GNL sont représentées par la figure1.2 [Rojey et al. 1994].

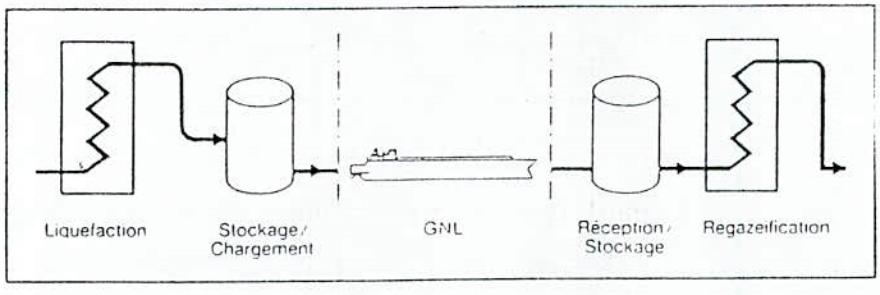


Fig. 1.2 Chaîne de transport de GNL.

Les installations de liquéfaction ainsi que les méthaniers représentent les principaux investissements de la chaîne GNL. Une part importante de cet investissement, relative aux installations de liquéfaction et de régazéification, est indépendante de la distance. Au contraire pour le transport par gazoducs, l'investissement nécessaire varie d'une manière quasi proportionnelle avec la distance [Karnic et Valais, 1991]. De ce fait le transport sous forme de GNL ne se justifie pour des raisons strictement économiques, qu'au-delà d'une certaine distance de 1500 à 2000 km en général.

1.4 Les principaux cycles de liquéfaction du gaz naturel

Les cycles de liquéfaction de gaz naturel peuvent être classés, selon la capacité de production des usines, en deux grandes catégories:

- les cycles dans les usines de grande production qui sont tous du type MRC (cycle à réfrigérant mixte) à l'exception de l'usine CAMEL et Phillips-Marathon qui sont du type cascade classique.

- les cycles dans les usines de faible production qui sont en général des cycles à détente utilisés pour écrêter les pointes saisonnières (peak- shaving).

1.4.1 Cycle dans les usines de grande production

Les deux premières usines de liquéfaction de gaz naturel de grande production ayant utilisé le cycle à cascade (classique) sont : l'exe-usine CAMEL (Arzew, Algérie) ($3x1416.10^3$ m^3 (st)/j, 21789 ch/millions m^3/j) mise en service en 1964 et de l'usine de Phillips-Marathon (Kenai, Alaska) (2 x 2449.10^3 m^3 (st)/j, 17658 ch/million m^3/j) mise en service en 1969 [Ait-Ali, 1975]. On reconnaît ici l'influence de la température ambiante sur la puissance mécanique de réfrigération.

Le cycle à cascade sous sa forme la plus simplifié est constitué d'une succession de circuits de réfrigération interconnectés, chaque circuit précèdent étant utilisé en partie pour pré-refroidir le fluide cryogènique du circuit suivant (voir figure1.3a et figure1.3b [Bourguet, 1973]). En général, le Propane, l'Ethylène et le Méthane sont utilisés comme réfrigérants.

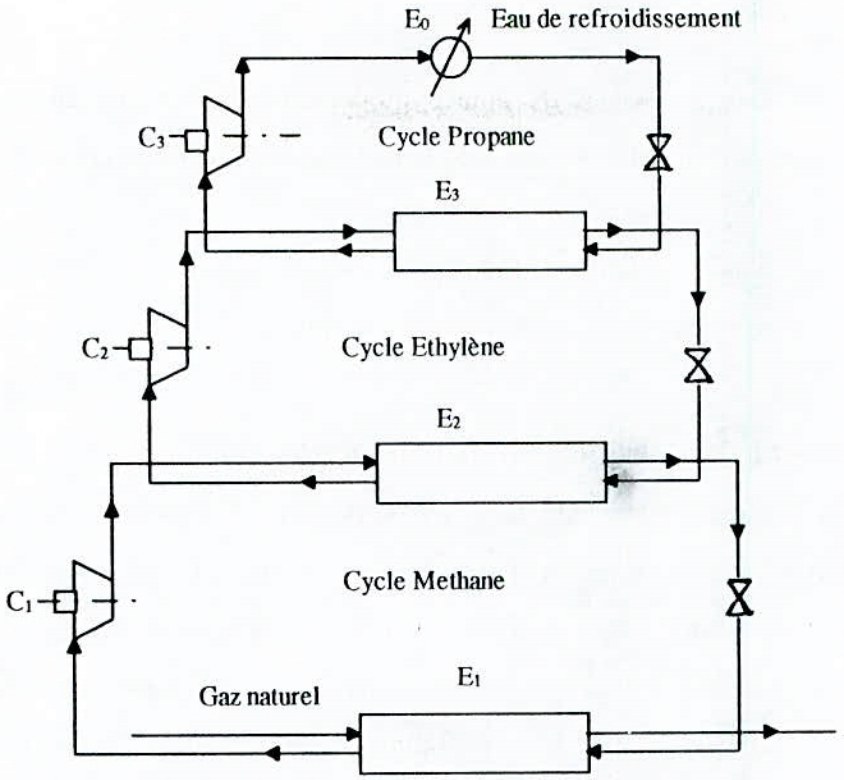


Fig. 1.3a Système de cascade simplifié montrant les principes de la méthode

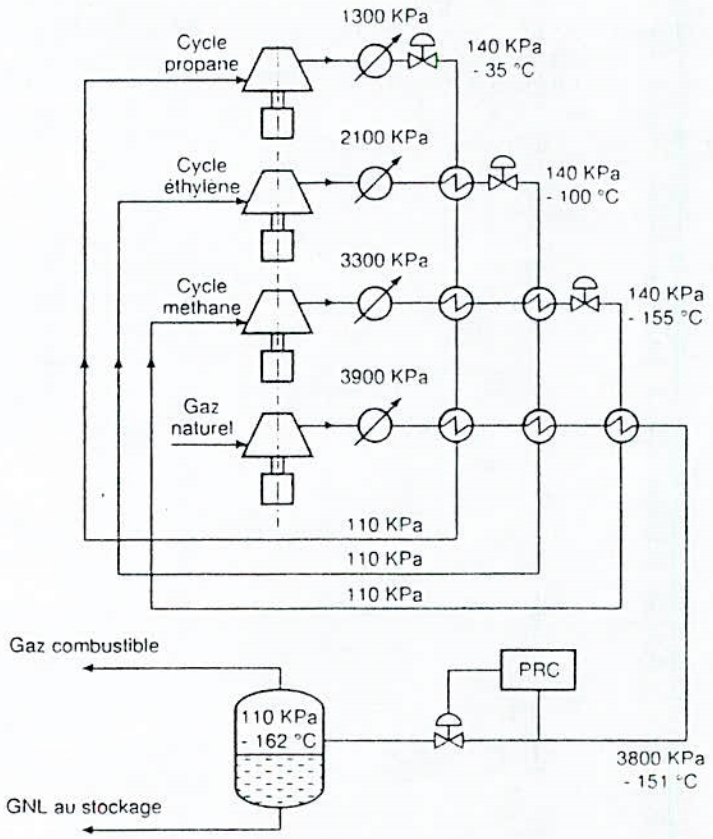


Fig. 1.3b Système de cycle à cascade modifié

Afin de réduire les irréversibilités (ou pertes de travail mécanique) dues aux transferts thermiques et améliorer ainsi le rendement de la cascade, chaque fluide frigorigène est détendu en plusieurs étages de pression; la température est donc abaissée par paliers successifs selon le profil enthalpie-température schématisé sur la figure 1.4 [Dufresne, 1985].

Cependant, la puissance de liquéfaction des cycles cascades, jugée excessive, a sans doute servi de stimulant majeur pour la recherche d'un cycle de liquéfaction plus efficace, moins complexe et plus souple : il s'agit du cycle à fluide unique ou cycle à réfrigérant mixte MRC.

Ce dernier utilise un seul fluide frigorigène sous forme d'un mélange d'hydrocarbures gazeux et d'Azote. Des séparateurs de phases liquide et vapeur sont utilisés pour modifier la composition du fluide cryogénique de telle sorte que les évolutions suivies dans le diagramme enthalpie-température par le réfrigérant et le gaz naturel se rapprochent; il en résulte une réduction des irréversibilités dues aux transferts thermiques dans les échangeurs de chaleur.

La figure 1.4 reproduit le profil des températures pour un cycle à cascade classique, un cycle à réfrigérant mixte et celui du gaz naturel à liquéfier.

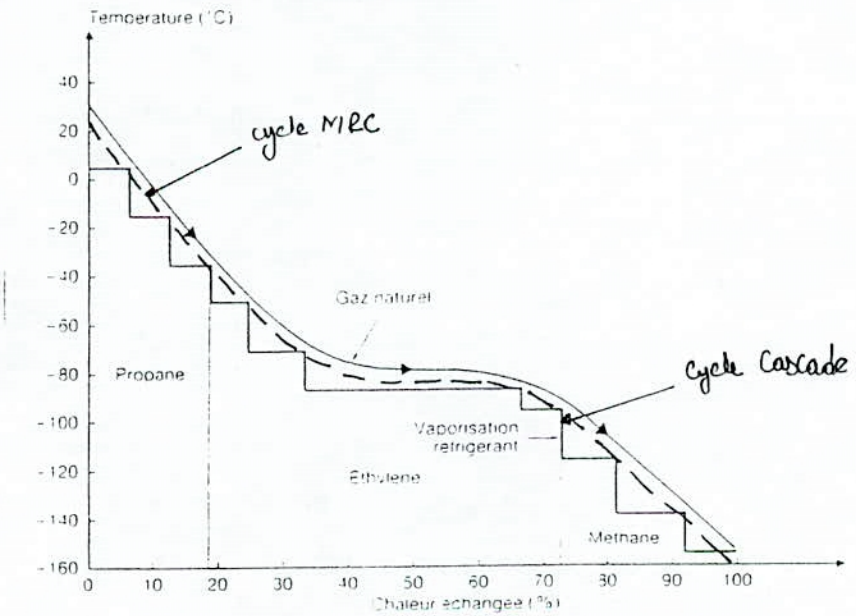


Fig. 1.4 Liquéfaction du gaz naturel Profil enthalpie-température

Le premier cycle à réfrigérant mixte à deux pressions à été mis en service à Marsa-El-Brega (Libye) en 1970 (4×2725.10^3 m^3 (st)/j, 28888 ch/million m^3 /j); mais sa consommation énergétique s'est révélée encore plus élevée que celle de la cascade [Ait-Ali, 1975]. L'argument thermodynamique mis en avant pour le cycle à réfrigérant mixte n'a pas tenu ses promesses pour réduire l'écart de température dans les échangeurs de chaleur. Les quelques explications scientifiques avancées à l'époque incriminaient les irréversibilités thermiques qu'introduit la condensation d'un mélange de constituants de volatilité très différente. Pour cette raison, des cycles utilisant un réfrigérant mixte mais opérant avec un cycle de pré-réfrigération en tête (cycle Propane) ont été conçus en vue d'obtenir un bon compromis entre simplicité de conception et performances énergétiques. Cette disposition augmente la capacité de production par module de liquéfaction.

Le cycle à réfrigérant mixte s'est en fait imposé dans l'industrie du GNL non pas par sa puissance de réfrigération, qui est en fait plus élevée, mais plutôt par sa simplicité de réalisation et son investissement réduit pour une capacité de production donnée. Cependant, lorsque l'argument de la taille de l'usine de GNL n'est pas prépondérant, le cycle cascade classique conserve un léger atout pour la puissance de réfrigération et sa simplicité opérationnelle.

1.4.2 Cycle dans les usines de faible production (écrêtage de pointes)

Les usines d'écrêtage de pointes ont pour objectif de liquéfier et stocker le gaz naturel disponible dans des périodes chaudes, afin de le vaporiser plus tard pour satisfaire les demandes importantes pendant les périodes froides. Ces usines sont conçues pour remplir la capacité de stockage sur une période allant de 200 à 250 jours. Le vaporisateur à haute capacité sera capable de vaporiser le GNL stocké en environ 10 à 12 jours [Gas Development Corporation, 1976].

Les premiers cycles de liquéfaction à cascade ont été développés pour les usines d'écrêtement de la demande saisonnière aux U.S.A., dont la première grande réalisation remonte à 1942 (141.10^3 m^3 (st)/ j ou l'équivalent de 235 m^3 / j de GNL). A présent, les cycles de liquéfaction les plus utilisés sont les cycles de détente; où le refroidissement est accompli à mesure que le gaz perd de sa pression, en passant par un moteur ou par une turbine qui en extraira le travail tout en abaissant la température du gaz.

1.5 Nécessité d'optimisation des procédés de liquéfaction

Pour des motifs économiques évidents, car il s'agit bien de l'élément d'investissement majeur, les exploitants des usines de GNL ont toujours cherché à réduire la puissance mécanique nécessaire à l'entraînement des compresseurs de liquéfaction . Cette dernière est liée :

- d'une part aux variations des conditions ambiantes; car bien que la plupart des installations de liquéfaction soient situées dans des régions où les conditions ambiantes ne varient pas beaucoup, des variations saisonnières peuvent avoir une influence notable sur la capacité de production;

- d'autre part à la composition du gaz naturel à liquéfier et à la taille des échangeurs de chaleur en particulier ceux à basse température.

A cet effet, les fournisseurs de procédés et d'équipements ne peuvent pas prévoir de façon précise l'exploitation de leurs matériels dans les conditions réelles; autrement dit, une installation destinée à liquéfier un gaz de composition donnée ne le sera pas avec autant d'efficacité pour un gaz de composition différente, ce qui constitue avec le vieillissement du gisement ou l'exploitation d'un autre gisement un grand problème pour les exploitants des usines. Une première solution consiste à observer soigneusement et régulièrement les installations en marche puis pratiquer de légères modifications de réglage et observer leurs effets pour sélectionner le meilleur point de consigne de chaque réglage. Dans le domaine industriel, cette méthode d'exploitation manuelle ne peut être fiable. Il est donc préférable de faire appel au préalable aux méthodes d'optimisation analytiques et/ou numériques, pour déterminer les conditions optimales de fonctionnement des installations afin de maximiser la production.

Les méthodes analytiques nécessitent l'établissement d'un modèle mathématique susceptible de décrire, de manière relativement simple et fidèle, le système thermodynamique à optimiser.

1.6 But de l'étude

La minimisation de la puissance mécanique requise à l'entraînement des compresseurs des cycles cascades constitue un problème d 'optimisation d'une grande importance en particulier pour la réalisation d'usines de liquéfaction pour satisfaire la demande croissante des exportateurs de GNL au-delà des mers. Pour résoudre ce problème, on procède généralement par simulation numérique longue et coûteuse.

Le but de cette étude est de procéder de façon analytique (plutôt que par simulation numérique) à la minimisation de la puissance mécanique d'une cascade de trois cycles de réfrigération (Propane-Ethylène-Méthane) imbriqués, à un, deux et trois niveaux de pression chacun.

En utilisant l'approche relativement récente des cycles thermodynamiques endoréversibles (irréversibilités limitées au niveau des échangeurs de chaleur) [Ait-Ali, 1994] [Ait-Ali, 1995],[Laouar, 1997], [Laouar, 1998a] et [Laouar, 1998b], on propose d'établir deux modèles mathématiques. Le premier modèle tiendra compte des écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs de chaleur tandis que le deuxième utilisera des écarts moyens logarithmiques.

Cette nouvelle approche permettra de dégager des règles d'optimalité susceptibles de déterminer rapidement les effets du nombre de cycles sur la solution optimale pour une taille d'échangeurs de chaleur donnée.

La modélisation des cascades réelles par des modèles simplifiés permet, en réalité, de cerner plus facilement les solutions optimales, toute en sauvegardant l'essentiel de la problématique physique.

1.7 Organisation et présentation de l'étude

On a préconisé de subdiviser ce travail plusieurs parties, développant chacune un élément important rentrant dans l'élaboration du modèle mathématique dont il est question:

. Le **deuxième chapitre** étayera la détermination de la courbe de refroidissement du gaz naturel à liquéfier;

. Dans le **troisième chapitre**, il sera fait état de la formulation mathématique et de la résolution du problème d'optimisation. Deux modèles mathématiques relatifs aux écarts arithmétiques et logarithmiques de température des échangeurs de chaleur seront présentées. Chacune de ces modélisation sera suivie d'une application numérique des résultats trouvés;

. Conclusion générale et recommandations;

. Annexes.

Chapitre -2-

DETERMINATION DE LA COURBE DE REFROIDISSEMENT DU GAZ NATUREL PAR L'EQUATION D'ETAT STARLING - HAN

2.1 Introduction

La détermination de la courbe de refroidissement et de liquéfaction du gaz naturel nécessite un calcul précis des équilibres des phases liquide-vapeur du mélange considéré. Pour cela plusieurs équations d'état peuvent être utilisées [Edmister et Lee, 1984].

Depuis les travaux de Vander Waals en 1873, un grand nombre d'équations d'état ont été proposées [Edmister et Lee, 1984]. Le choix de telle ou telle équation reste dicté par la recherche d'un compromis entre la simplicité de la forme mathématique, l'étendue du domaine d'application et la précision souhaitée [Starling, 1973].

2.2 Définition et choix de l'équation d'état

2.2.1 Définition d'une équation d'état

Une équation d'état est une relation entre les grandeurs caractéristiques d'un fluide: P,ϱ, T et la composition z_i (i=1àN) du mélange. On peut l'écrire sous la forme suivante :

$$f (P, T, \rho, z_1 , ..., z_n) = 0$$

ou encore :

$$f (P_r , T_r , Z , z_1 , ..., z_n) = 0$$

où :

ρ : désigne l'inverse du volume molaire;

P_r , T_r : pression et température réduites;

Z : Coefficient de compressibilité.

La fonction d'état exprimée en termes des paramètres réduits, est dite généralisée. Il y a généralement deux types d'équations d'état :

- les équations d'état cubiques, qui sont exprimées sous forme d'un polynôme en volume de degrés trois. On peut citer entre autres les travaux de Redlich-Kuong (1949), Soave (1972), Peng et Robinson (1976), Harmens et Knapp (1980), Stryjek et Vera (1986), Sheng et Lu (1990) ...etc.

- les équations d'état non cubiques, telles que les équations de Benedict-Webb-Rubin (1942), Starling-Han (1972), Lee-Kesler (1975), Shah et al. (1996).

2.2.2 Equation d'état Starling-Han

Au début des années quarante (1940-42), Benedict-Webb et Rubin ont développé une équation d'état (BWR) à huit paramètres dépendant de la nature des composés purs. A l'origine, cette équation a été établie pour prédire les propriétés thermodynamiques de douze hydrocarbures seulement. Mais depuis, plusieurs investigations ont été menées afin de généraliser son application. Au début des années soixante-dix, Starling et Han sont parvenus, après d'autres tentatives, à généraliser l'équation BWR, avec plus de succès. La nouvelle équation établie est à onze paramètres, elle est connue sous le nom d'équation d'état Starling-Han ou encore BWRS.

Dans cette étude, on a opté pour l'emploi de l'équation d'état généralisée BWRS, utilisée avec succès pour le calcul des équilibres liquide-vapeur et la prédiction des propriétés thermodynamiques des mélanges tel que le gaz naturel. Cette équation est applicable pour une grande gamme de mélange d'hydrocarbures, aussi bien en phase liquide qu'en phase vapeur, et pour un large domaine de températures réduites aussi basses que $T_r = 0.3$ et de densité aussi élevées que $\rho_r = 3$, dans la région liquide cryogénique à température très basse et pression atmosphérique et dans les régions à haute température [Starling, 1973].

L'équation d'état BWRS et les expressions analytiques des principales fonctions thermodynamiques qu'elle permet de calculer sont présentées en annexe A.

2.3 Calcul des propriétés thermodynamiques d'un mélange et des équilibres des phases liquide-vapeur

Avant de s'intéresser en détail aux calculs des équilibres des phases liquide-vapeur, on doit d'abord définir les concepts et les notions de base mises en jeu.

2.3.1 Définitions de base

La fugacité [Edmister, 1984]: la fugacité se présente comme une pseudo pression effective qu'exerce le fluide; elle est définie pour un composant pur, par les deux relations :

$$dG = RTd(\ln f) \tag{2.1}$$

$$\lim_{P \to 0} f = P \tag{2.2}$$

avec :

G : enthalpie libre de Gibbs;

R : constante des gaz parfait;

f : fugacité.

L'équation (2.2) complète la définition de la fugacité; au voisinage d'une pression nulle, la fugacité va tendre asymptotiquement vers la pression.

Pour un constituant i du mélange, la fugacité notée par $\bar{f}_i$ est définie telle que :

$$d\bar{G}_i = RTd\left(\ln \bar{f}_i\right) \tag{2.3}$$

$$\lim_{P\to 0} \bar{f}_i = P\,x_i \tag{2.4}$$

Le produit $P\,x_i$ est la pression partielle du composant i.

La barre est utilisée pour différencier la fugacité du constituant pur de celle du constituant dans un mélange. La fugacité est un concept sur lequel repose le calcul des équilibres liquide-vapeur. Afin de faciliter la convergence des méthodes itératives de ce calcul, on définit la fonction auxiliaire suivante : le coefficient de fugacité.

Le coefficient de fugacité[Edmister et Lee, 1984] : pour un constituant quelconque, ce coefficient est défini par :

$$\bar{\varphi}_i = \frac{\bar{f}_i}{P\,x_i} \tag{2.5}$$

Il représente le rapport de la fugacité sur la pression partielle. Pour un mélange de gaz parfait $\bar{\varphi}_i = 1$. Ce coefficient est exprimé en fonction de T, ρ et de la composition, selon la relation suivante :

$$\ln\bar{\varphi}_i = \ln\frac{\bar{f}_i}{P\,x_i} = \frac{1}{RT}\int_0^{\rho}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial n_i}\right)_{T,\rho,n_j} - \rho RT\right]\frac{d\rho}{\rho^2} - \ln Z \tag{2.6}$$

n_i : nombre de mole du constituant i .

Le coefficient d'équilibre [Vidal, 1973] : K_i est un coefficient d'équilibre, ou encore un coefficient de distribution vapeur-liquide. C'est une mesure de la '' légèreté '' d'un composant, de sa tendance à se concentrer dans la phase vapeur. Il s'exprime en fonction du rapport des coefficients de fugacité de la phase liquide et vapeur :

$$K_i = \frac{(\overline{\varphi_i})^L}{(\overline{\varphi_i})^V} = \frac{\left(\frac{\overline{f_i}}{P\,x_i}\right)^L}{\left(\frac{\overline{f_i}}{P\,y_i}\right)^V} \qquad (2.7a)$$

avec :

L : phase liquide;

V : phase vapeur;

x_i : fraction molaire du constituant i dans la phase liquide du mélange;

y_i : fraction molaire du constituant i dans la phase vapeur du mélange.

à l'équilibre on a:

$$K_i \equiv \frac{y_i}{x_i} \qquad (2.7b)$$

si $K_i > 1$: le composant i se trouve majoritaire dans la phase vapeur;

si $K_i < 1$: le composant i se trouve majoritaire dans la phase liquide, il est considéré comme un composant relativement plus '' lourd ''.

2.3.2 Calcul des équilibres liquide-vapeur

L'équilibre thermodynamique se traduit par un équilibre thermique (égalité des températures), un équilibre mécanique (égalité des pressions), et un équilibre chimique (égalité des potentiels chimiques). Ainsi les trois conditions suivantes doivent être établies :

$$T^V = T^L \quad , \quad P^V = P^L \quad \text{et} \quad f_i^V = f_i^L \qquad (i = 1 \text{ à } N)$$

Les principaux cas de calcul des équilibres liquide-vapeur sont :

- calcul de vaporisation partielle (flash);
- calcul du point de bulle;
-calcul du point de rosée.

2.3.2.1 Calcul de vaporisation partielle (flash)

Il s'agit de rechercher l'état d'un mélange, de composition globale z_i (i=1à N) connue, dans des conditions, de pression et de température, connues également. On doit rappeler que suivant les données initiales du problème, plusieurs autres cas de calcul peuvent se présenter. Ces derniers se résolvent tous de la même manière que le cas précèdent.

Lorsqu'une mole de mélange de composition globale z_i (i= 1àN) subit une vaporisation partielle, elle se trouve répartie en L moles de liquide, de composition x_i (i=1àN), et en V moles de vapeur, de composition y_i (i=1àN). Aux températures et pressions données, la valeur des x_i et des y_i qui résultent d'un calcul '' flash'' doit satisfaire au critère d'équilibre exprimé par la relation (2.7b), et elle doit en outre satisfaire aux exigences du bilan matière qui s'établissent comme suit :

Le bilan global impose évidemment:

$$1 = L + V \tag{2.8}$$

Les bilans molaires des composants sont tels que :

$$z_i = x_i L + y_i V \qquad (i=1\text{àN}) \tag{2.9}$$

Une manipulation des équations (2.7b), (2.8) et (2.9), conduit aux expressions:

phase liquide :

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{z_i}{L + K_i (1 - L)} & (2.10a) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{z_i}{L + K_i (1 - L)} = 1 & (2.10b) \end{cases}$$

phase vapeur :

$$\begin{cases} y_i = \dfrac{K_i z_i}{(1 - V) + K_i V} & (2.11a) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i z_i}{(1 - V) + K_i V} = 1 & (2.11b) \end{cases}$$

On doit noter que les équations (2.10a), (2.10b) et (2.11a), (2.11b) constituent dans un calcul flash la partie relative au bilan matière des phases liquide et vapeur, respectivement..

La méthode de calcul de flash par ordinateur la plus répandue est celle donnée par Rachford et Rice (1952), et qui consiste à résoudre l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{z_i (1 - K_i)}{1 + V(K_i - 1)} = 0 \tag{2.12}$$

Cette méthode a été adoptée par Starling (1973) pour le développement d'un programme informatique de calcul des équilibres liquide-vapeur basé sur l'équation d'état BWRS. L'algorithme de résolution du calcul flash peut être établi comme suit :

1. Donné de P, T et z_i (i=1 à N)

2. Initialisation des K_i (corrélation empirique [Gully, 1959]):

$$K_i = \frac{P_{cri}}{P} e^{\alpha}$$

-si $T_{ri} < 1$:

$$\alpha = (4.92\omega_i + 5.81)\log T_{ri} - 0.0838(4.92\omega_i + 2.06)\left(\frac{36}{T_{ri}} - 35 - T_{ri}^{6} + 42\log T_{ri}\right)$$

-sinon :

$$\alpha = -(16.26 - 73.58\ Z_{cri} + 90\ Z_{cri}^{2})\left(\frac{1}{T_{ri}} - 1\right) - 10^{\left(-8.68\left(T_{ri}-1.8+6.2\ Z_{cri}^{2}\right)\right)}$$

3. Résolution de l'équation (2.12), par rapport à V, par la méthode numérique de Newton-Raphson.

4. Calcul des x_i et y_i (i=1 à N) à partir des équations (2.10a) et (2.11a), respectivement.

5. Calcul des K_i (T, P, x_i , y_i) à partir de la relation (2.7a)

6. Critère d'arrêt :

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - K_i\ x_i)^2 \leq 10^{-5}$$

- si le test de convergence est vérifié, aller à l'étape 7;

- sinon, aller à l'étape 3.

7. imprimer x_i , y_i (i =1àN) , V et L

-si V=1, $y_i = z_i$ (i=1àN) , aller à l'étape 8;

-sinon, si V=0, $x_i = z_i$ (i=1àN) , aller à l'étape 8;

-sinon $(0 < V < 1)$, aller à l'étape 9;

8. Calcul des propriétés thermodynamique à partir des équations (2-17)-(2.20) et (2.21)-(2.24), aller à l'étape 11;

9. Calcul des $\bar{f}_i^{L}$ et $\bar{f}_i^{V}$ (i= 1à N) à partir des relations (2.6).

10 . Critère d'arrêt :

$$\left(\frac{\bar{f}_i^{L}}{\bar{f}_i^{V}} - 1\right) \leq 10^{-3}$$

-si le test de convergence est vérifié, aller à l'étape 11;

-sinon, aller à l'étape 3;

11. Imprimer x_i , y_i (i =1àN) , V , L et les propriétés thermodynamiques (H, S, ...etc)

12. Fin

2.3.2.2 Calcul du point de bulle

Le point de bulle est un état thermodynamique pour lequel il y a apparition de la première bulle de vapeur dans un système entièrement liquide. Les données du problème sont soit la pression, soit la température, d'une part, et d'autre part la composition du mélange qui est entièrement liquide : $x_i = z_i$

comme on a : $L=1$ et $V=0$

La relation (2.11b) devient :

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} K_i \, x_i = 1 \qquad (2.13)$$

Les inconnues sont soit la température, soit la pression, et la composition de la vapeur y_i en équilibre. Par approximations successives et jusqu'à convergence, on cherche à quelle température (ou quelle pression) l'égalité (2.13) est vérifiée.

La relation (2.13) vérifiée, la composition de la phase vapeur en équilibre se calcule à partir de la relation (2.7b), telle que :

$$y_i = K_i \, x_i \qquad (2.14)$$

2.3.2.3 Calcul du point de rosée

Le point de rosée est un état thermodynamique pour lequel il y a apparition de la première gouttelette de liquide dans un système entièrement vapeur. Les données du problème sont soit la pression, soit la température, d'une part, et d'autre part la composition du mélange qui est ici entièrement liquide : $y_i = z_i$

comme au point de rosée on a : $L= 0$ et $V = 1$

La relation (2.10b) devient :

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{K_i} = 1 \qquad (2.15)$$

Les inconnues sont soit la température, soit la pression, et la composition du liquide x_i (i=1àN) en équilibre. Par approximations successives et jusqu'à convergence, on cherche à quelle température (ou quelle pression) l'égalité (2.15) est vérifiée.

La relation (2.15) vérifiée, la composition de la phase vapeur en équilibre se calcule à partir de la relation par (2.7b) :

$$x_i = \frac{y_i}{K_i} \qquad (2.16)$$

2.3.3 Calcul des propriétés thermodynamiques

Une fois le calcul des équilibres liquide-vapeur achevé, on procède au calcul des propriétés thermodynamiques d'un mélange réel en assimilant d'abord le mélange à un mélange de gaz parfait dans les mêmes conditions de température, de pression et de composition, puis en évaluant les déviations par rapport au gaz parfait à l'aide d'équations d'état généralisées [Starling, 1973], [Edmister et Lee, 1984]. On appelle parfois ces écarts : les fonctions d'état résiduelles (departurs functions).

2.3.3.1 Fonctions d'état résiduelles

Outre l'énergie interne U, l'évolution thermodynamique d'un système peut être décrite par les fonctions d'état suivantes [Edmister et Lee, 1984] :

Enthalpie :	$H = U + PV$	(2.17)
Energie libre d' Helmholtz :	$A = U - TS$	
Energie libre de Gibbs :	$G = H - TS$	

Il est souvent plus commode d'exprimer ces fonctions thermodynamiques sous forme différentielles, telles que :

Energie interne :	$dU = TdS - PdV$	(2.18)
Enthalpie :	$dH = TdS + VdP$	
Energie libre d' Helmholtz :	$dA = -SdT - PdV$	
Energie libre de Gibbs :	$dG = -SdT + VdP$	

Moyennant les relations de Maxwell suivantes :

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$$
$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \tag{2.19}$$

les fonctions d'état U, H, A et G peuvent être obtenues en intégrant les équations (2.18). D'où la nécessité de considérer un état de référence où la fonction d'état possède une valeur connue. L'état de référence généralement rencontré est celui de gaz parfait. Les fonctions d'état, dans ce cas, calculées sont appelées fonctions d'état résiduelles (departurs functions), elles expriment l'écart à la loi des gaz parfaits. Ainsi, l'enthalpie et l'entropie résiduelles sont données par les expressions suivantes :

$$H - H^0 = \frac{P}{\rho} - RT + \int_0^{\rho} \left(P - T.\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho^2} \tag{2.20}$$

$$S - S^0 = -R \ln(\rho RT) - \int_0^{\rho} \left(\rho R - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\rho} \right) \frac{d\rho}{\rho^2} \tag{2.21}$$

2.3.3.2 Calcul de l'enthalpie d'un mélange

L'enthalpie d'un mélange est exprimée par :

$$H = \left(H - H^0\right) + H^0 \tag{2.22}$$

Avec :

$H - H^0$: enthalpie résiduelle (équation (2.20));

H^0 désigne l'enthalpie du mélange considéré comme un gaz parfait, telle que :

$$H^0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot H_i^0 \cdot M_i}{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot M_i} \tag{2.23}$$

Avec:

M_i : masse molaire du ième composant du mélange;

H_i^0: enthalpie de gaz parfait du ième composant du mélange, elle est donnée par la corrélation empirique suivante [Passut, 1972]

$$H_i^0 = A + BT + CT^2 + DT^3 + ET^4 + FT^5 \tag{2.24}$$

où :

T: température en degré Rankin;

A,..,F : des paramètres donnés dans l'annexe D (tableau D4).

2.3.3.3 Calcul de l'entropie du mélange

L'entropie d'un mélange est exprimée par :

$$S = \left(S - S^0\right) + S^0 \tag{2.25}$$

Avec :

$S - S^0$: entropie résiduelle (équation (2.21));

S^0 désigne l'entropie du mélange considéré comme un gaz parfait, telle que :

$$S^0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot S_i^0 \cdot M_i - R\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot \ln y_i}{\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot M_i} \tag{2.26}$$

où :

S_i^0 désigne l'entropie de gaz parfait du ième composant du mélange, elle est donnée par la corrélation empirique suivante [Passut, 1972]:

$$S_i^0 = B \ln T + 2CT + \frac{3}{2}DT^2 + \frac{4}{3}ET^3 + \frac{5}{4}FT^4 + G \tag{2.27}$$

avec :

T: température en degré Rankin;

A,..,G : paramètres donnés dans l'annexe D (tableau D4).

2.4 Détermination de la courbe de refroidissement du gaz naturel

Pour déterminer la courbe de refroidissement du gaz naturel, on a utilisé le code de calcul en Fortran publié par Starling (1973). Ce code est formé d'un programme principal ayant pour tâche la lecture de données d'entrée du problème (T, P, composition du mélange, Paramètres critiques, ...etc), fait appel à plusieurs subroutines pour effectuer les calculs d'équilibre liquide-vapeur désirés(calcul du point de bulle, point de rosée, calcul de flash...etc) et enfin afficher les

résultats dans un fichier. Afin de tracer cette courbe de refroidissement sur diagramme T-H (voir figure 2.1), une subroutine appelée "Courbe" a été rajoutée à ce programme informatique.

Subroutine Courbe

La subroutine Courbe est en fait basée sur un calcul flash, elle consiste à calculer la variation de l'enthalpie du gaz naturel (de composition z_i (i=1àN) connue) entre une température initiale T_0 et une température finale T_F pour une pression P constante donnée. Les séquences de calcul de cette subroutine peuvent être résumées par l'organigramme suivant :

1. Donné de P, T_0 , T_F , dT (incrément) et z_i (i=1à N);
2. Initialisation de T ($T = T_0$) ;
3. Calcul de flash ;
5. critère d'arrêt :

$$T < T_F$$

-si le critère est vérifié, aller à l'étape 6;

-sinon, $T = T + dT$, aller à l'étape 3;

6. Stockage de T et H dans un fichier;
7. Fin

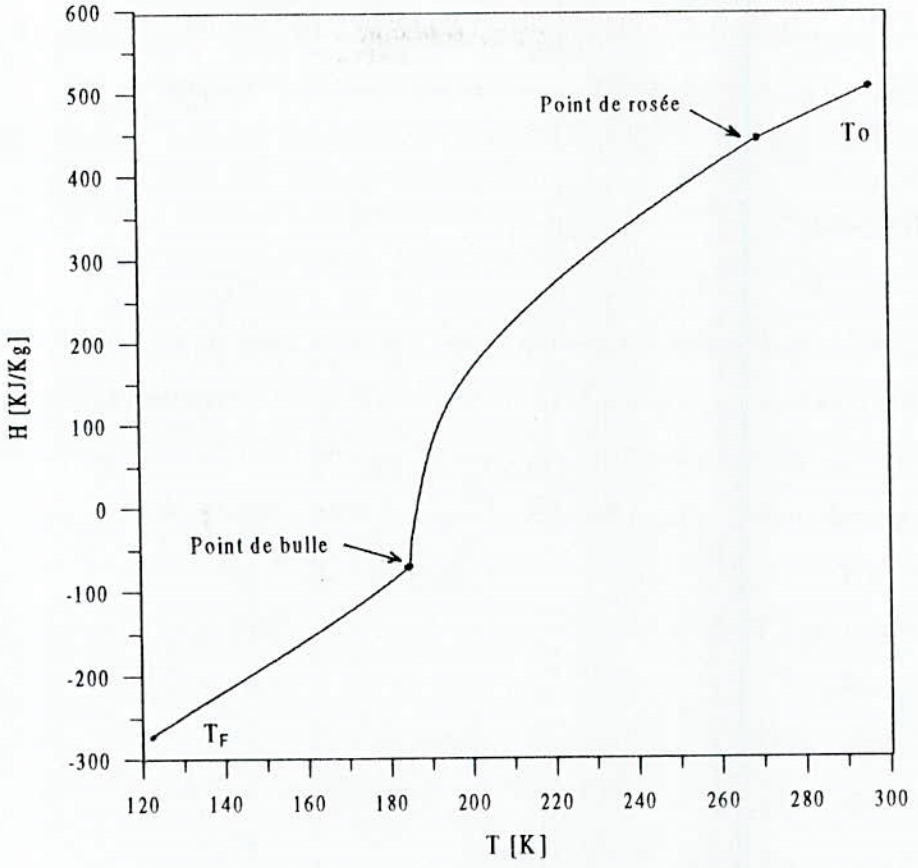


Fig. 2.1 Courbe de refroidissement du gaz naturel

2.5 Conclusion

On vient d'examiner, d'une manière succincte, le principe de calcul des équilibres liquide-vapeur et des propriétés thermodynamiques des mélanges par la méthode des équations d'états. Starling (1973)a exploité cette méthode dans un code de calcul , où il a pu adapter l'équation BWRS à la prévision des équilibres liquide-vapeur. Des modifications ont été apportées à ce code de calcul afin de permettre le tracé de la courbe de refroidissement du gaz naturel nécessaire à cette étude d'optimisation. Quelques commentaires concernant la structure de ce code et les séquences de calcul relatives aux modifications apportées ont été fournis en fin de ce chapitre.

Chapitre -3-

FORMULATION MATHEMATIQUE ET RESOLUTION DU PROLEME D'OPTIMISATION

3.1 Introduction

Soit à réfrigérer le flux d'un gaz dont les températures initiale et finale T_0 et T_F sont données. Si l'on disposait d'un réfrigérant dont la température normale d'ébullition est $T_{CE} \leq T_F - \Delta t$, et la température de condensation $T_{HC} < T_{cr}$,température critique, alors on pourrait considérer le cycle de réfrigération endoréversible [Ait-Ali, 1995]dont le diagramme T-s est représenté ci-dessous en figure 3.1 :

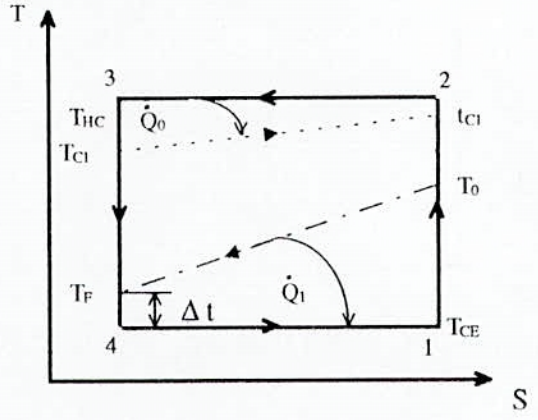


Fig. 3.1 Diagramme T-s d'un cycle de réfrigération endoréversible.

Ce cycle se compose des transformations réversibles suivantes :

1-2 : compression isentropique du réfrigérant pur;

2-3 : condensation isobarique du réfrigérant à la température T_{HC} ;

3-4 : détente isentropique du réfrigérant;

4-1 : évaporation isobarique du réfrigérant la température T_{CE} .

Avec :

T_{CI} ,t_{CI} : respectivement, températures de l'eau de refroidissement à l'entrée et à la sortie du condenseur;

T_{cr} : température critique du réfrigérant;

Δt : écart minimal de température au bout d'un échangeur;

$\dot{Q}_0$: flux thermique rejeté à la source chaude ;

$\dot{Q}_1$: flux thermique soutiré à la source froide.

Mais en pratique, les cycles de réfrigération à compression de vapeur sont les cycles les plus utilisés [Stoecker, 1986]. Dans ces derniers, la vapeur saturée est comprimée, condensée,

détendue puis évaporée pour être comprimée de nouveau. Ces différentes transformations peuvent être représentées sur le diagramme T-s suivant :

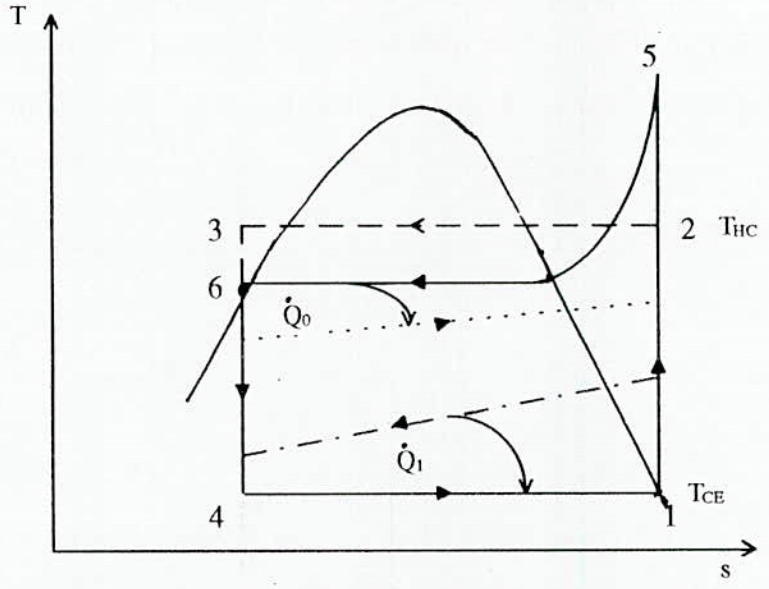


Fig. 3.2 Diagramme T-s d'un cycle de réfrigération à compression de vapeur

1-5 : compression isentropique du réfrigérant pur;

5-6 : refroidissement et condensation isobarique du réfrigérant;

6-4 : détente isentropique du réfrigérant;

4-1 : évaporation isobarique du réfrigérant la température T_{CE};

2-3 : transformation fictive, à la quelle le fluide frigorigène rejette $\dot{Q}_0$ à la température constante T_{HC} , dite température équivalente :

$$T_{HC} = \frac{\dot{Q}_0}{\Delta S} = \frac{\int_{S6}^{S5} T\,dS}{\Delta S} \qquad (3.1)$$

avec : $\Delta S = S_2 - S_3 = S_5 - S_6$

Note : Afin de simplifier la résolution du problème d'optimisation soulevé, il serait préférable de considérer à l'avenir le cycle de réfrigération 1-2-3-4-1 au lieu du cycle 1-5-6-4-1. Donc, les températures inconnues du cycle seront T_{CE} et T_{HC} au lieu de T_{CE} , T_5 , et T_6 .

Pour une application réelle comme la liquéfaction du gaz naturel, la température de réfrigération finale T_F est très basse et par conséquent, l'écart de température entre la source froide et la source chaude dépasse la différence maximale de température opérationnelle que

pourrait accommoder un réfrigérant considéré. Il devient donc nécessaire d'utiliser deux ou plusieurs réfrigérants, généralement le Propane, l'Ethylène et le Méthane, dans des cycles étagés en cascade. Le critère de choix de ces réfrigérants consiste à assurer des transferts thermiques biphasiques, à des températures d'évaporation légèrement au-dessus des températures normales d'ébullition et à des températures de condensation bien inférieures aux températures critiques, pour chacun des réfrigérants.

Dans cette étude, le problème soulevé consiste à optimiser la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles de Propane-Ethylène-Méthane à un, deux et trois niveaux de pression chacun. Le gaz naturel entre à une température ambiante T_0 , il est refroidi par le Propane, liquéfié par l'Ethylène et sous refroidi par le Méthane jusqu'à la température T_F. Le GNL est finalement détendu par effet Joule-Thomson pour être stocké dans des réservoirs à une pression à peine supérieure à la pression atmosphérique.

On rappelle que deux modèles mathématiques relatifs aux écarts de température des échangeurs de chaleur seront présentés dans ce chapitre. Pour des raisons de méthodologie, on propose d'abord de chercher la solution optimale pour une cascade de cycles de réfrigération endoréversibles simplement étagés, puis d'étendre les résultats obtenus à une cascade de cycles endoréversibles imbriqués à un, deux et trois niveaux de pression.

Partie 1:

MODELE MATHEMATIQUE RELATIF AUX ECARTS DE TEMPERATURE MOYENS ARITHMETIQUES.

3.2 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles simplement étagés

La procédure d'optimisation est d'abord initié avec un cycle de réfrigération endoréversible à conductance globale spécifiée [Ait-Ali, 1995] étudié précédemment, et pour lequel tous les transferts de chaleur sont supposés être de types Newtoniens. On doit rappeler que les cycles de réfrigération endoréversibles sont des cycles hypothétiques où toutes les irréversibilités sont transformées en irréversibilités de transfert thermique qui se produiraient dans les évaporateur et condenseur du cycle.

3.2.1 Cycle de réfrigération endoréversible

Soit le cycle de réfrigération endoréversible représenté sur le diagramme T-s de la figure 3.1. On définit respectivement, la température moyenne arithmétique de l'eau de refroidissement, celle du gaz réfrigéré et la conductance thermique globale des échangeurs, comme suit:

$$T_C = \frac{T_{C1} + t_{C1}}{2}$$

$$T_E = \frac{T_0 + T_F}{2} \qquad (3.2)$$

$$C_T = \sum_{i=0}^{1} C_i = \sum_{i=0}^{1} \lambda_i . S_i$$

où:

C_i : conductance thermique de l'échangeur i;

S_i : surface de l'échangeur i;

λ_i : Coefficient de transmission global de chaleur.

Les paramètres du problème sont les températures T_C ,T_E et la conductance thermique globale C_T .

Les variables du problème sont au nombre de sept : ($N_V = 7$)

- deux variables indépendantes : les températures T_{HC} et T_{CE}.

- cinq variables dépendantes : les flux thermiques $\dot{Q}_0$, $\dot{Q}_1$, la puissance de réfrigération $\dot{W}$ et les écarts moyens arithmétiques de température Am_0 et Am_1 .

Les contraintes du problème sont au nombre de cinq ($N_C = 5$) , dont deux sont les définitions des écarts moyens arithmétiques de température (équations (3.5)) :

- une contrainte d'endoréversibilité du cycle, donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\dot{Q}_1}{T_{CE}} - \frac{\dot{Q}_0}{T_{HC}} = 0 \tag{3.3}$$

-une contrainte qui spécifie la conductance thermique globale du cycle :

$$\frac{\dot{Q}_1}{Am_1} + \frac{\dot{Q}_0}{Am_0} = C_T \tag{3.4}$$

avec les définitions des écarts moyens arithmétiques de température considérées comme contraintes:

$$\begin{aligned} Am_0 &= T_{HC} - T_C \\ Am_1 &= T_E - T_{CE} \end{aligned} \tag{3.5}$$

-la relation donnant la puissance de réfrigération :

$$\dot{W} = \dot{Q}_0 - \dot{Q}_1 \tag{3.6}$$

constitue la cinquième contrainte.

Le problème ainsi défini est à N_V-N_C degrés de liberté, soit deux degrés de liberté.

La résolution du système d'équations linéaires (3.3) et (3.4) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{Q}_0}{C_T} &= \frac{\frac{1}{T_{CE}}}{\frac{1}{T_{CE} \cdot Am_0} + \frac{1}{T_{HC} \cdot Am_1}} \\ \frac{\dot{Q}_1}{C_T} &= \frac{\frac{1}{T_{HC}}}{\frac{1}{T_{CE} \cdot Am_0} + \frac{1}{T_{HC} \cdot Am_1}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

La puissance de réfrigération par unité de conductance thermique sera donc exprimée par :

$$\frac{\dot{W}}{C_T} = \frac{\dfrac{1}{T_{CE}} - \dfrac{1}{T_{HC}}}{\dfrac{1}{T_{CE} \cdot Am_0} + \dfrac{1}{T_{HC} \cdot Am_1}} \tag{3.8}$$

Cette équation représente la fonction objective à optimiser, sujette aux contraintes (3.5).

Il a été montré [Ait-Ali, 1995] que l'optimisation de la puissance de réfrigération telle qu'exprimée ci-dessus n'est pas un problème borné; la solution est soit zéro, ce qui correspond à une réfrigération de Carnot, soit infinie, ce qui correspond aux isothermes $T_{CE} = 0$ et $T_{HC} = \infty$
Il y a donc lieu de borner ce problème en fixant $D = T_{HC} - T_{CE}$, c'est à dire en spécifiant une différence de température entre l'isotherme de condensation et l'isotherme d'évaporation du réfrigérant. Le problème ainsi borné n'a plus qu'un degré de liberté. Il s'avère que la puissance de réfrigération avait bien un maximum mais pas de minimum, alors que celui-ci serait plus pertinent; cependant, ce maximum a lieu pour la même température de réfrigération pour laquelle le flux thermique soutiré à la source froide est pratiquement maximal. Les échanges de chaleur dans ce cycle sont régis par la règle d'optimalité suivante :

$$\frac{Am_0^{\bullet}}{Am_1^{\bullet}} = \sqrt{\frac{T_C}{T_E}} \tag{3.9}$$

qui est exacte pour la puissance maximale, mais seulement approximative pour $\dot{Q}_0/C_T$ et $\dot{Q}_1/C_T$ maximum.

Cette procédure d'optimisation est maintenant étendue à une cascade simple à trois cycles de réfrigération endoréversibles à conductance thermique globale et flux thermique soutiré à la source froide fixés. Seulement, vu le nombre important des variables pour le cas des cycles cascades, on a jugé préférable d'exprimer directement les écarts moyens arithmétiques Am_j en termes de température plutôt que de les considérer comme étant des variables indépendantes (procédure adoptée dans la section 3.2.1). Les écarts Am_j seront évoqués uniquement pour exprimer quelques résultats du problème et principalement les règles d'optimalité.

3.2.2 Cascade simple à trois cycles de réfrigération endoréversibles

Une façon de modéliser la puissance de réfrigération, est de considérer le flux thermique total $\dot{Q}_1$ soutiré à la source froide comme paramètre et d'exprimer tous les autres flux en fonction de ce dernier. La puissance de réfrigération à minimiser, exprimée par le rapport $\dot{W}_T / \dot{Q}_1$, est

égale à l'inverse du coefficient de performance. Donc, le problème d'optimisation ainsi défini revient également à maximiser le coefficient de performance de la cascade. Cette modélisation s'appuie sur le diagramme T-s de la figure 3.3; qui est la superposition des trois diagrammes T-s des réfrigérants : Propane, Ethylène et Méthane.

Note : La spécification de $\dot{Q}_1$ conduit à un problème différent de celui d'un cycle de réfrigération endoréversible soulevé au paragraphe 3.2.1.

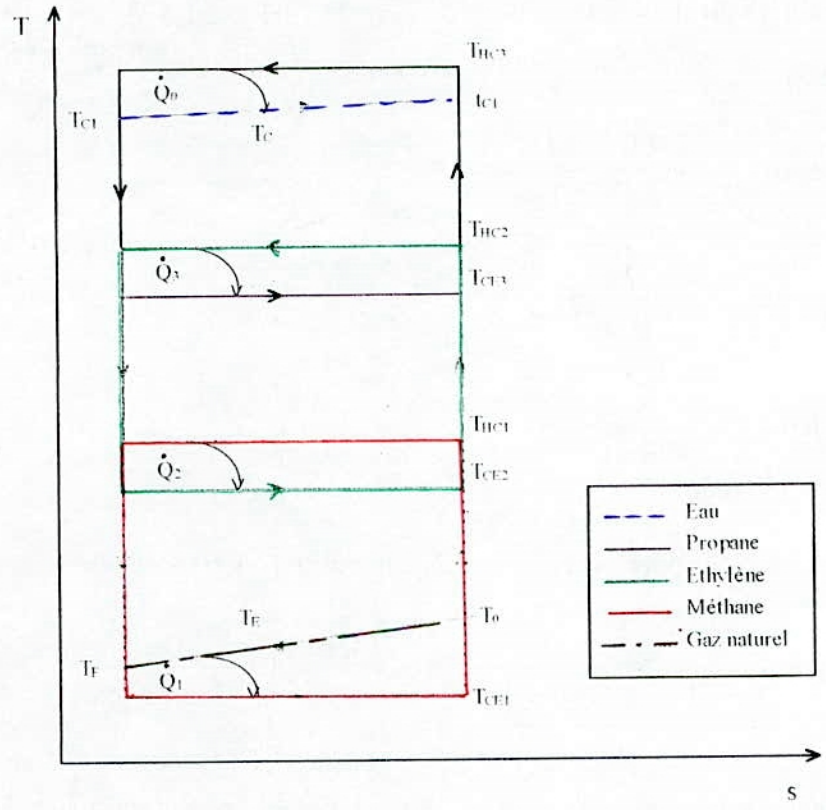


Fig. 3.3 Diagramme T-s d'une Cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles simplement étagés.

Il y a quatre échanges thermiques :

$\dot{Q}_0$: échange Propane-Eau de refroidissement;

$\dot{Q}_1$: échange Méthane-Gaz naturel;

$\dot{Q}_2$: échange Ethylène-Méthane;

$\dot{Q}_3$: échange Propane-Ethylène.

Les paramètres du problème sont : les températures moyennes arithmétiques T_C , T_E (équation (3.2)), la conductance thermique C_T et le flux thermique $\dot{Q}_1$ soutiré au gaz naturel.

Note : En ayant la température d'entrée T_0 et celle de sortie T_F du flux du gaz naturel, on peut à partir de la courbe de refroidissement déterminer le flux thermique $\dot{Q}_1$, pour un débit massique donné.

Les variables du problème sont au nombre de dix : ($N_V = 10$)

-six variables indépendantes : les températures T_{HCi} et T_{CEi} (i = 1à3)

-quatre variables dépendantes : les flux thermiques $\dot{Q}_0$, $\dot{Q}_2$, $\dot{Q}_3$ et la puissance mécanique totale de réfrigération $\dot{W}_T$.

Les contraintes du problème sont au nombre de cinq : ($N_C = 5$)

-trois contraintes d'endoréversibilité exprimées par les relations suivantes :

$$\text{Cycle Propane :} \quad \frac{\dot{Q}_3}{T_{CE3}} - \frac{\dot{Q}_0}{T_{HC3}} = 0$$

$$\text{Cycle Ethylène :} \quad \frac{\dot{Q}_2}{T_{CE2}} - \frac{\dot{Q}_3}{T_{HC2}} = 0 \qquad (3.10)$$

$$\text{Cycle Méthane :} \quad \frac{\dot{Q}_1}{T_{CE1}} - \frac{\dot{Q}_2}{T_{HC1}} = 0$$

- une contrainte qui spécifie la conductance thermique globale des échangeurs du cycle :

$$C_T = \frac{\dot{Q}_1}{T_E - T_{CE1}} + \frac{\dot{Q}_2}{T_{HC1} - T_{CE2}} + \frac{\dot{Q}_3}{T_{HC2} - T_{CE3}} + \frac{\dot{Q}_0}{T_{HC3} - T_C} \qquad (3.11)$$

- la puissance totale de réfrigération, donnée par le premier principe de la thermodynamique, constitue la cinquième contrainte du problème :

$$\dot{W}_T = \dot{Q}_0 - \dot{Q}_1 \qquad (3.12)$$

Le problème comporte donc cinq ($N_V - N_C$) degrés de liberté.

A partir des équations (3.10), on peut exprimer les flux thermiques $\dot{Q}_0$,$\dot{Q}_2$ et $\dot{Q}_3$ en fonction des températures et de $\dot{Q}_1$, Tels que :

$$\dot{Q}_0 = \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \cdot \dot{Q}_1$$

$$\dot{Q}_3 = \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \dot{Q}_1 \qquad (3.13)$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \dot{Q}_1$$

En substituant dans la contrainte (3.12) le flux thermique $\dot{Q}_0$ par son expression analytique (3.13), la puissance de réfrigération par unité de flux thermique soutiré à la source froide sera exprimée comme suit :

$$\frac{\dot{W}_T}{\dot{Q}_1} = \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} - 1 \qquad (3.14)$$

Cette équation représente la fonction objective à minimiser, par rapport à T_{HCi} et T_{CEi} (i=1à3), sujette à la contrainte (3.15). Cette dernière n'est autre que la contrainte (3.11) exprimée en fonction des températures et de $\dot{Q}_1$:

$$C_T = \left[\frac{1}{(T_E - T_{CE1})} + \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{1}{(T_{HC1} - T_{CE2})} + \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{1}{(T_{HC2} - T_{CE3})} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE1} \cdot T_{CE2} \cdot T_{CE3}} \cdot \frac{1}{(T_{HC3} - T_C)} \right] \cdot \dot{Q}_1 \qquad (3.15)$$

En appliquant la méthode de Lagrange [Ravindran, 1987] pour la résolution de ce problème, dont les calculs détaillés sont présentés dans l'annexe C, on obtient les conditions nécessaires sous lesquelles la puissance de réfrigération par unité de flux thermique serait minimale:

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^{\cdot}}{Am_3^{\cdot}} = \frac{T_{HC3}^{\cdot}}{T_{CE3}^{\cdot}}$$

Cycle Ethylène: $$\frac{Am_3^{\cdot}}{Am_2^{\cdot}} = \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE2}^{\cdot}} \qquad (3.16a)$$

Cycle Méthane : $$\frac{Am_2^{\cdot}}{Am_1^{\cdot}} = \frac{T_{HC1}^{\cdot}}{T_{CE1}^{\cdot}}$$

Ces conditions représentent les trois règles d'optimalité qui correspondent aux trois degrés de liberté du problème (voir annexe C), soit une règle par contrainte d'endoréversibilité, c'est à dire par cycle endoréversible faisant partie de la cascade.

Les Am_j (j=0à3) désignent respectivement les écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs de chaleur Propane-Eau, Méthane-GN, Ethylène-Méthane et Propane-Ethylène, donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Am_0^{\cdot} &= T_{HC3}^{\cdot} - T_C \\ Am_1^{\cdot} &= T_E - T_{CE1}^{\cdot} \\ Am_2^{\cdot} &= T_{HC1}^{\cdot} - T_{CE2}^{\cdot} \\ Am_3^{\cdot} &= T_{HC2}^{\cdot} - T_{CE3}^{\cdot} \end{aligned} \qquad (3.17)$$

Tenant compte de (3.17), les équations (3.16a) peuvent être exprimées sous une forme particulière de "règle de deux:" [Ait-Ali, 1994],[Laouar, 1997], telles que :

$$\text{Cycle Propane:} \quad \frac{T_C}{T_{HC3}^{\bullet}} + \frac{T_{HC2}^{\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet}} = 2$$

$$\text{Cycle Ethylène:} \quad \frac{T_{CE3}^{\bullet}}{T_{HC2}^{\bullet}} + \frac{T_{HC1}^{\bullet}}{T_{CE2}^{\bullet}} = 2 \qquad (3.16b)$$

$$\text{Cycle Méthane :} \quad \frac{T_{CE2}^{\bullet}}{T_{HC1}^{\bullet}} + \frac{T_{E1}}{T_{CE1}^{\bullet}} = 2$$

L'existence d'un minimum aurait donc lieu si, pour chaque cycle endoréversible faisant partie de la cascade, la somme des rapports de température dans le condenseur et l'évaporateur du cycle est égale à deux.

La solution du système d'équations (3.16b) et (3.15) donne les rapports de températures optimales suivants :

$$\frac{T_E}{T_{CE1}^{\bullet}} = \frac{C_T}{C_T - 4 \cdot \dfrac{\dot{Q}_1}{T_E}} \qquad \frac{T_{HC2}^{\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet}} = \frac{C_T - 8 \cdot \dfrac{\dot{Q}_1}{T_E}}{C_T - 12 \cdot \dfrac{\dot{Q}_1}{T_E}}$$

$$\frac{T_{HC1}^{\bullet}}{T_{CE2}^{\bullet}} = \frac{C_T - 4 \cdot \dfrac{\dot{Q}_1}{T_E}}{C_T - 8 \cdot \dfrac{\dot{Q}_1}{T_E}} \qquad \frac{T_{HC3}^{\bullet}}{T_C} = \frac{C_T - 12 \cdot \dfrac{\dot{Q}_1}{T_E}}{C_T - 16 \cdot \dfrac{\dot{Q}_1}{T_E}} \qquad (3.18)$$

On remarque que les températures optimales $T_{HC3}^{\bullet}$ et $T_{CE1}^{\bullet}$ peuvent être calculées directement à partir de la première et dernière relation; ce qui traduit le fait que la solution du problème est bornée à l'extérieur. Pour ce qui est des températures $T_{HC1}^{\bullet}, T_{CE2}^{\bullet}$ et $T_{HC2}^{\bullet}, T_{CE3}^{\bullet}$, seuls leurs rapports sont évalués; ce qui traduit le fait que la solution du problème n'est pas bornée à l'intérieur, et pour ce faire, on introduit deux contraintes supplémentaires, à savoir la spécification des écarts de température suivants:

$$\begin{aligned} D_1 &= T_{HC1} - T_{CE1} \\ D_3 &= T_{HC3} - T_{CE3} \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Chacun de ces écarts de température est choisi tel que, la pression dans l'évaporateur du cycle de réfrigération correspondant est légèrement supérieure à la pression atmosphérique d'une part, et d'autre part, la température de condensation du réfrigérant est inférieure à sa température critique.

La puissance de réfrigération minimale, par unité de flux thermique, est donnée par l'expression:

$$\frac{\dot{W}_T^*}{\dot{Q}_I} = \frac{T_C}{T_E - 16 \cdot \frac{\dot{Q}_I}{C_T}} - 1 \qquad (3.20)$$

A l'optimum, le coefficient de performance est exprimé par :

$$Cop^* = \frac{T_E - 16 \cdot \frac{\dot{Q}_I}{C_T}}{T_C - T_E + 16 \cdot \frac{\dot{Q}_I}{C_T}} \qquad (3.21)$$

On constate que le coefficient de performance de la cascade se détériore rapidement avec le rapport $\dot{Q}_I / C_T$. Une plus grande conductance thermique globale pour un flux thermique $\dot{Q}_I$ soutiré à la source froide améliorera le coefficient de performance comme il faut s'y attendre. A la limite de $\dot{Q}_I / C_T \longrightarrow 0$, ou C_T infinie, on retrouve le Cop d'un cycle de Carnot:

$$Cop_{Carnot} = \frac{T_E}{T_C - T_E} \qquad (3.22)$$

Un investissement conséquent en échangeurs de chaleur permettra de réduire la puissance de réfrigération $\dot{W}_T / \dot{Q}_I$, et vice versa.

On constate que, si on introduit la température équivalente :

$$\overline{T_E} = T_E - 16 \frac{\dot{Q}_I}{C_T} \qquad (3.23)$$

le coefficient de performance de la cascade serait équivalent au coefficient de performance d'un cycle de réfrigération de Carnot qui fonctionne entre une source froide et une source chaude aux températures $\overline{T_E}$ et T_C , respectivement.

Un résultat remarquable concernant les conductances thermiques des différents échangeurs de la cascade; les quatre conductances s'avèrent toutes égales :

$$C_0^* = C_1^* = C_2^* = C_3^* = \frac{C_T}{4} \qquad (3.24)$$

Ce résultat est la conséquence du fait que le flux thermique évacué par le condenseur et celui récupéré par l'évaporateur se trouvent régis par le même rapport T_{HC} / T_{CE} qui régit le rapport des écarts de température de ce condenseur et cet évaporateur. Donc, l'augmentation du flux thermique en remontant la cascade est accommodée par l'augmentation conséquente de l'écart de température dans les échangeurs. En pratique, cela permettrait de produire les échangeurs en série pour en réduire le coût.

Pour résumer, on peut dire que la minimisation de la puissance de réfrigération d'une cascade à trois cycles endoréversible simplement étagés, à conductance thermique globale et flux thermique soutiré à la source froide spécifiés, est un problème d'optimisation à trois degrés de liberté, auxquels correspond trois règles d'optimalité qui régissent les échanges thermiques dans la cascade considérée. Dans un premier temps, la solution de ce problème s'est avérée partiellement bornée (ou non bornée à l'intérieur), ce qui a nécessité l'introduction de deux contraintes supplémentaires sous forme d'écarts de température (équations (3.19)).

On a de même remarqué que le coefficient de performance de la cascade se détériore rapidement avec le rapport $\dot{Q}_I/C_T$. Une plus grande conductance thermique globale pour un flux thermique $\dot{Q}_I$ soutiré à la source froide améliorera le coefficient de performance comme il faut s'y attendre. Un investissement conséquent en échangeurs de chaleur permettra donc de réduire la puissance de réfrigération $\dot{W}_T / \dot{Q}_I$, le coût des échangeurs étant relativement faible par rapport au coût de la réfrigération et des compresseurs.

3.3 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués

Pour mettre en pratique les remarques précédentes, le flux thermique à soutirer à la source froide est réparti d'abord entre les cycles imbriqués d'une cascade à un niveau de pression, puis à deux niveaux de pression, et finalement à trois niveaux de pression. Pour chacun de ces trois cas, il sera toujours question de minimiser la puissance mécanique de réfrigération de la cascade considérée, pour une conductance thermique totale et un flux thermique soutiré à la source froide donnés. Ces problèmes d'optimisation peuvent être abordés de deux manières :

- la première consiste à former le modèle mathématique composé de la fonction objective et des contraintes du problème; le problème ainsi formulé est dit problème primal. Résoudre le problème primal par la méthode de Lagrange conduit à la résolution d'un grand nombre

d'équations, en particulier lorsque le nombre d'étages dans la cascade est élevé comme c'est le cas en pratique;

- la deuxième méthode, qu'on adoptera ici, consiste à concevoir (pour les mêmes paramètres du problème primal) une autre cascade de cycles frigorifiques, appelée cascade équivalente, qui représente tous les échanges thermiques mis en jeu dans la cascade primale. La cascade équivalente considérée a le mérite de faciliter la résolution du problème, tout en favorisant l'extension des résultats obtenus précédemment. Dans ce cas, le problème est dit problème équivalent, et la solution optimale trouvée sera traduite, par la suite, pour le problème primal.

Dans ce qui suit, on procédera de la manière suivante pour résoudre les problèmes d'optimisation:

a/ - Définition des paramètres, des variables et des contraintes du problème primal;

b/ - Définition des variables et des contraintes du problème équivalent, avec résolution de ce dernier;

c/ - Traduction des solutions du problème équivalent au problème primal.

Note: Par convention, les solutions optimales relatives au problème primal seront notées avec un astérisque en exposant, tandis que celles relatives au problème équivalent seront notées avec deux astérisques en exposant.

3.3.1 Cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à un niveau de pression

Dans une cascade réelle de réfrigération de gaz naturel, le gaz qui entre à la température ambiante n'est pas uniquement refroidi par le Méthane, mais aussi par le Propane et l'Ethylène selon le cycle représenté par la figure 3.4a., où six échanges thermiques sont représentés :

$\dot{Q}_0$: échange Propane - Eau de refroidissement;

$\dot{Q}_1$: échange Gaz naturel - Méthane;

$\dot{Q}_2$: échange Méthane - Ethylène;

$\dot{Q}_3$: échange Ethylène - Propane ;

$\dot{Q}_4$: échange Gaz naturel - Ethylène ;

$\dot{Q}_5$: échange Gaz naturel - Propane.

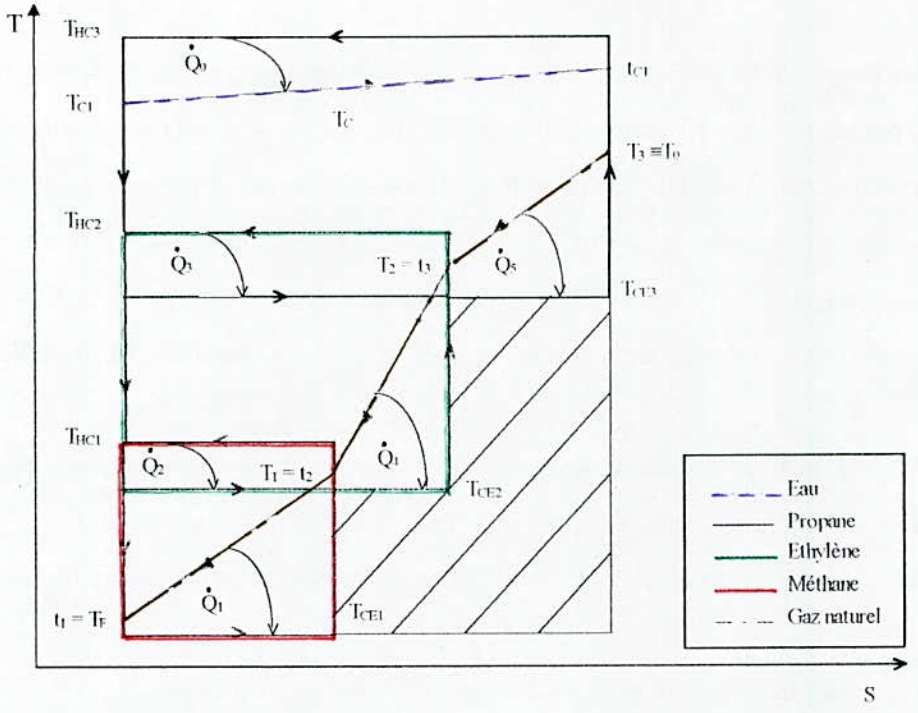


Fig. 3.4a Diagramme T-s de la cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à un niveau de pression

avec :

T_i , t_i : respectivement, la température du gaz naturel à l'entrée et à la sortie d'un évaporateur.

Les flux thermiques $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$ sont déterminés à partir de la courbe de refroidissement du gaz naturel, avec une répartition préalable entre les trois réfrigérants, qui spécifie les températures T_1 et T_2 . Cette répartition découle d'un calcul d'optimisation dont les détails sont donnés dans l'annexe B .

On définit les températures moyennes arithmétiques de refroidissement du gaz naturel, comme suit:

$$T_{Ei} = \frac{T_i + t_i}{2} \qquad (i=1à3) \qquad (3.25)$$

Note : La surface hachurée représente l'économie de travail réalisée sur un cycle endoréversible unique fonctionnant entre T_{CE1} et T_{HC3}.

a/ Problème primal

Les paramètres du problème primal sont les températures T_C , T_{Ei} (i = 1à3) , la conductance thermique globale C_T et les flux thermiques soutirés au gaz naturel $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$.

Les variables du problème primal sont au nombre de dix : ($N_V = 10$)

- six variables indépendantes : T_{HCi} et T_{CEi} (= 1à3).

- quatre variables dépendantes : $\dot{Q}_0$, $\dot{Q}_2$, $\dot{Q}_3$ et $\dot{W}_T$.

Les contraintes du problème primal sont au nombre de cinq : ($N_C = 5$)

- les trois contraintes d'endoréversibilité, établies pour chacun des cycles Propane, Ethylène et Méthane, permettent d'exprimer les flux thermiques $\dot{Q}_0$,$\dot{Q}_2$ et $\dot{Q}_3$ en fonction des températures et des flux thermiques $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_4$, et $\dot{Q}_5$ tels que :

$$\dot{Q}_0 = \dot{Q}_1 \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} + \dot{Q}_4 \cdot \frac{T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE2} \cdot T_{CE3}} + \dot{Q}_5 \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}}$$

$$\dot{Q}_3 = \dot{Q}_1 \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} + \dot{Q}_4 \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \qquad (3.26)$$

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot$$

-la contrainte qui spécifie la conductance thermique globale du cycle :

$$C_T = \frac{\dot{Q}_0}{T_{HC3} - T_C} + \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1} - T_{CE1}} + \frac{\dot{Q}_2}{T_{HC1} - T_{CE2}} + \frac{\dot{Q}_3}{T_{HC2} - T_{CE3}} + \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2} - T_{CE2}} + \frac{\dot{Q}_5}{T_{E3} - T_{CE3}} \qquad (3.27)$$

-la puissance totale de réfrigération, qui est la somme des puissances de réfrigération des cycles Propane, Ethylène et Méthane, constitue la cinquième contrainte :

$$\dot{W}_T = \dot{Q}_0 - \dot{Q}_T \qquad (3.28)$$

où $\dot{Q}_T$ est le flux thermique total soutiré à la source froide, donné par :

$$\dot{Q}_T = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_4 + \dot{Q}_5 \qquad (3.29)$$

Le problème primal est à cinq degrés de liberté.

En substituant l'expression du flux thermique $\dot{Q}_0$ dans la relation (3.28), la puissance de réfrigération à minimiser, exprimée par le rapport $\dot{W}_T / \dot{Q}_T$, sera donnée par :

$$\frac{\dot{W}_T}{\dot{Q}_T} = \frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_T} \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} + \frac{\dot{Q}_4}{\dot{Q}_T} \cdot \frac{T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE2} \cdot T_{CE3}} + \frac{\dot{Q}_5}{\dot{Q}_T} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} - 1 \qquad (3.30)$$

On notera que la spécification des flux thermiques $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$ conduit à maximiser le coefficient de performance de la cascade considérée.

b/ Problème équivalent

Soit la cascade équivalente présentée ci-dessous comportant neuf échangeurs de chaleur de conductivité thermique globale égale à celle des six échangeurs de la cascade primale présentée par la figure 3.4a :

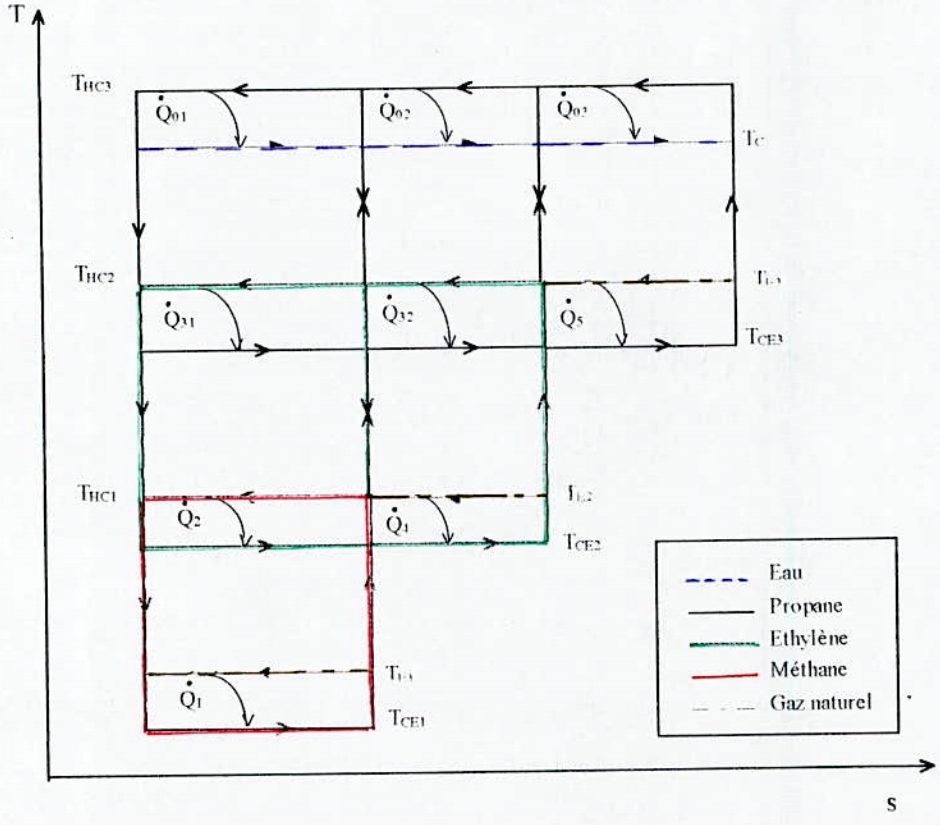


Fig. 3.4b Diagramme T-s de la cascade équivalente à neuf échangeurs de chaleur

avec :

$\dot{Q}_{01}$ - $\dot{Q}_{03}$: échanges Propane- Eau de refroidissement;

$\dot{Q}_1$: échange Méthane-Gaz naturel;

$\dot{Q}_2$: échange Méthane-Ethylène;

$\dot{Q}_{31}$, $\dot{Q}_{32}$: échanges Propane-Ethylène ;

$\dot{Q}_4$: échange Ethylène-Gaz naturel;

$\dot{Q}_5$: échange Propane-Gaz naturel.

D'aprés cette figure, on constate que la cascade équivalente est composée de trois cascades de cycles simplement étagés, ou sous cascades :

- la première sous cascade est formée de trois cycles de réfrigération endoréversibles de Propane, d'Ethylène et de Méthane;
- la seconde est formée de deux cycles de réfrigération endoréversibles d'Ethylène et de Propane ;
- la troisième est formée d'un seul cycle de réfrigération endoréversible de Propane .

Note : On rappelle que, les paramètres du problème équivalent et ceux du problème primal sont les mêmes.

Les variables du problème équivalent sont au nombre de treize: ($N_V = 13$)

- six variables indépendantes : T_{HCi} et T_{CEi} .
- sept variables dépendantes : $\dot{Q}_{0\,p}$, $\dot{Q}_{3\,r}$ et $\dot{W}_T$.

avec : p=1à3 ; r =1à2 ; i = 1à3

Les contraintes du problème équivalent sont au nombre de huit: ($N_C = 8$)

- les six équations d'endoréversibilité relatives aux neuf cycles permettent d'exprimer les flux thermiques $\dot{Q}_{0\,p}$ (p=1à3) , $\dot{Q}_2$ et $\dot{Q}_{3\,r}$ (r=1à2) en fonction des températures et des flux thermiques $\dot{Q}_1$,$\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$, tels que :

Sous cascade Propane- Ethylène- Méthane :

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{01} &= \dot{Q}_1 \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \\
\dot{Q}_{31} &= \dot{Q}_1 \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \\
\dot{Q}_2 &= \dot{Q}_1 \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot
\end{aligned} \qquad (3.31)$$

Sous cascade Propane- Ethylène :

$$\dot{Q}_{02} = \dot{Q}_4 \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}}$$
$$\dot{Q}_{32} = \dot{Q}_4 \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \qquad (3.32)$$

Sous cascade Propane :

$$\dot{Q}_{03} = \dot{Q}_5 \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \qquad (3.33)$$

-la contrainte qui spécifie la conductance thermique globale de la cascade sera exprimée par

$$C_T = \sum_{p=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{0p}}{T_{HC3} - T_C} + \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1} - T_{CE1}} + \frac{\dot{Q}_2}{T_{HC1} - T_{CE2}} + \sum_{r=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{3r}}{T_{HC2} - T_{CE3}} + \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2} - T_{CE2}} +$$
$$\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3} - T_{CE3}} \qquad (3.34)$$

-la puissance totale de réfrigération est exprimée par :

$$\dot{W}_T = \sum_{p=1}^{3} \dot{Q}_{0p} - \dot{Q}_T$$

ou encore :

$$\frac{\dot{W}_T}{\dot{Q}_T} = \frac{\sum_{p=1}^{3} \dot{Q}_{0p}}{\dot{Q}_T} - 1 \qquad (3.35)$$

On compte donc, cinq degrés de liberté pour le problème équivalent.

Après avoir défini les différentes variables et contraintes du problème équivalent, on procède à sa résolution par simple raisonnement à partir des résultats antérieurs et sans calculs détaillés. Ainsi, sachant que la puissance de réfrigération de la cascade équivalente est minimale si la puissance de réfrigération pour chaque sous cascade l'est aussi, donc on peut établir à l'optimum les règles suivantes :

Sous cascade Propane- Ethylène- Méthane :

Cycle Propane : $$\frac{Am_0^{\bullet\bullet}}{Am_3^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet\bullet}} \quad (3.36)$$

Cycle Ethylène : $$\frac{Am_3^{\bullet\bullet}}{Am_2^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet\bullet}}{T_{CE2}^{\bullet\bullet}} \quad (3.37)$$

Cycle Méthane : $$\frac{Am_2^{\bullet\bullet}}{Am_1^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC1}^{\bullet\bullet}}{T_{CE1}^{\bullet\bullet}} \quad (3.38)$$

Sous cascade Propane- Ethylène :

La première règle d'optimalité qui régit l'échange de chaleur dans cette sous cascade est identique à l'équation (3.36) :

Cycle Propane : $$\frac{Am_0^{\bullet\bullet}}{Am_3^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet\bullet}} \quad (3.39)$$

La deuxième règle est telle que :

Cycle Ethylène : $$\frac{Am_3^{\bullet\bullet}}{Am_4^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet\bullet}}{T_{CE2}^{\bullet\bullet}} \quad (3.40)$$

Sous cascade Propane :

Cycle Propane : $$\frac{Am_{03}^{\bullet\bullet}}{Am_5^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet\bullet}} \quad (3.41)$$

Am_j (j=0à5) : désignent respectivement les écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs de chaleurs Propane-Eau, Méthane-GN, Ethylène-Méthane, Propane-Ethylène Ethylène-GN et Propane-GN, tels que :

$$\begin{aligned} Am_0^{\bullet\bullet} &= T_{HC3}^{\bullet\bullet} - T_C & Am_3^{\bullet\bullet} &= T_{HC2}^{\bullet\bullet} - T_{CE3}^{\bullet\bullet} \\ Am_1^{\bullet\bullet} &= T_{E1} - T_{CE1}^{\bullet\bullet} & Am_4^{\bullet\bullet} &= T_{E2} - T_{CE2}^{\bullet\bullet} \\ Am_2^{\bullet\bullet} &= T_{HC1}^{\bullet\bullet} - T_{CE2}^{\bullet\bullet} & Am_5^{\bullet\bullet} &= T_{E3} - T_{CE3}^{\bullet\bullet} \end{aligned} \quad (3.42)$$

On remarque qu'il y a une règle d'optimalité par contrainte d'endoréversibilité, c'est à dire par cycle endoréversible faisant partie de chaque sous cascade. Dans cette formulation équivalente, certaines règles peuvent être identiques, comme c'est le cas de la règle (3.36) et (3.39), ce qui

donne un total de cinq règles d'optimalité correspondant aux cinq degrés de liberté du problème équivalent.

En considérant les équations (3.36), (3.41) et (3.37), (3.40), on obtient respectivement:

$$Am_3^{**} = Am_5^{**} \longrightarrow T_{HC2}^{**} = T_{E3} \tag{3.43}$$

$$Am_2^{**} = Am_4^{**} \longrightarrow T_{HC1}^{**} = T_{E2}\,. \tag{3.44}$$

A présent, il ne reste plus qu'à déterminer les quatre températures optimales T_{HC3}^{**} et T_{CEi}^{**} (i=1à3). Pour cela, en considérant les relations (3.43) et (3.44), on doit résoudre le système formé par les équations (3.36)-(3.38), exprimées en termes de température :

$$\begin{aligned} \frac{T_{E1}}{T_{CE1}^{**}} + \frac{T_{CE2}^{**}}{T_{E2}} &= 2 \\ \frac{T_{E2}}{T_{CE2}^{**}} + \frac{T_{CE3}^{**}}{T_{E3}} &= 2 \\ \frac{T_{E3}}{T_{CE3}^{**}} + \frac{T_C}{T_{HC3}^{**}} &= 2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

et de la contrainte (3.46) qui spécifie la conductance thermique globale de la cascade :

$$C_T = \left(1 - \frac{T_C}{T_{HC3}^{**}}\right)^{-1} \left[4\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}} \frac{T_{E1}}{T_{CE1}^{**}} \frac{T_{E2}}{T_{CE2}^{**}} \frac{T_{E3}}{T_{CE3}^{**}} + 3\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}} \frac{T_{E2}}{T_{CE2}^{**}} \frac{T_{E3}}{T_{CE3}^{**}} + 2\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}} \frac{T_{E3}}{T_{CE3}^{**}} \right] \tag{3.46}$$

La relation (3.46) montre que, l'échange Méthane-Gaz naturel donne lieu à quatre contributions égales, l'échange Ethylène- Gaz naturel à trois contributions égales et l'échange Propane-Gaz naturel à deux contributions égales.

La résolution de ce système est facilitée par la définition des rapports de température suivants :

$$x = \frac{T_{E1}}{T_{CE1}^{**}} \quad ; \quad y = \frac{T_{E2}}{T_{CE2}^{**}} \quad ; \quad z = \frac{T_{E3}}{T_{CE3}^{**}} \quad ; \quad w = \frac{T_C}{T_{HC3}^{**}}$$

Les températures optimales ainsi obtenues sont données par les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
T_{CE1}^{**} &= T_{E1} \cdot \left[\frac{C_T - 4 \cdot \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}} + 2 \cdot \frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}}{C_T + 3 \cdot \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}} + 4 \cdot \frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}} \right] \\
T_{CE2}^{**} &= T_{E2} \cdot \left[\frac{C_T - 3 \cdot \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}} - 8 \cdot \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}}{C_T - 4 \cdot \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}} + 2 \frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}} \cdot} \right] \\
T_{CE3}^{**} &= T_{E3} \cdot \left[\frac{C_T - 12 \cdot \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}} - 6 \cdot \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}} - 2 \cdot \frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}}{C_T - 3 \cdot \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}} - 8 \cdot \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}} \right] \\
T_{HC3}^{**} &= T_C \cdot \left[\frac{C_T - 12 \cdot \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}} - 6 \cdot \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}} - 2 \cdot \frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}}{C_T - 16 \cdot \frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}} - 9 \cdot \frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}} - 4 \cdot \frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}} \right]
\end{aligned}
\qquad (3.47)
$$

Les températures T_{HCi}^{**} et T_{CEi}^{**} (i=1à3) étant toutes déterminées, on peut dire que, la solution du problème est complètement bornée; ce qui n'était pas le cas pour le problème d'optimisation traité précédemment. Cette situation trouve sa justification dans la spécification des flux thermiques soutirés au gaz naturel $\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$, qui a donné lieu à deux règles d'optimalité supplémentaires (équations (3.40) et (3.41)).

La détermination des températures optimales T_{HCi}^{**} et T_{CEi}^{**} (i=1à3) permet l'évaluation des écarts moyens arithmétiques, des flux thermiques et des conductances thermiques des échangeurs de chaleur de la cascade équivalente. Lorsque les flux thermiques spécifiés sont nuls, les écarts de température dans les échangeurs sont nuls, on retrouve bien les valeurs des températures pour une cascade de cycles de réfrigération de Carnot.

La puissance frigorifique minimale par unité de flux thermique est égale à :

$$\frac{\dot{W}_T^{\bullet\bullet}}{\dot{Q}_T} = \frac{T_C}{\dot{Q}_T}\left[\frac{\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}\cdot\left(C_T-\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}}\right)+\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}}\cdot\left(C_T-\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}\right)+\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}\cdot\left(C_T-4\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}\right)}{C_T-16\cdot\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}-9\cdot\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}}-4\cdot\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}}\right]-1 \qquad (3.48)$$

Le coefficient de performance optimal de cette cascade n'est autre que l'inverse du rapport $W_T^{\bullet\bullet}/C_T$:

$$Cop^{\bullet\bullet} = \left[\frac{T_C}{\dot{Q}_T}\cdot\left(\frac{\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}\cdot\left(C_T-\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}}\right)+\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}}\cdot\left(C_T-\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}\right)+\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}\cdot\left(C_T-4\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}\right)}{C_T-16\cdot\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}-9\cdot\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}}-4\cdot\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}}\right)-1\right]^{-1} \qquad (3.49)$$

On pourra noter que, lorsque $\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$ sont nuls, on retrouve la puissance mécanique et le coefficient de performance d'une simple cascade, donnés respectivement par les équations (3.20) et (3.21). Si de plus $\dot{Q}_1$ est nul, la puissance de réfrigération est nulle, ce qui correspond à une cascade de cycles de réfrigération de Carnot dont le coefficient de performance est donné par l'équation (3.22).

Chacune des sous cascades est une cascade simplement étagée, dont l'analyse faite précédemment montre qu'à l'optimum toutes les conductances thermiques sont égales. Ainsi, on peut écrire pour chaque sous cascade les égalités suivantes :

sous cascade Propane- Ethylène - Méthane :

$$C_{01}^{\bullet\bullet} = C_{31}^{\bullet\bullet} = C_2^{\bullet\bullet} = C_1^{\bullet\bullet} = \frac{\dot{Q}_1}{Am_1^{\bullet\bullet}} \qquad (3.50)$$

sous cascade Propane- Ethylène :

$$C_{02}^{\bullet\bullet} = C_{32}^{\bullet\bullet} = C_4^{\bullet\bullet} = \frac{\dot{Q}_4}{Am_4^{\bullet\bullet}} \qquad (3.51)$$

sous cascade Propane :

$$C_{03}^{\bullet\bullet} = C_5^{\bullet\bullet} = \frac{\dot{Q}_5}{Am_5^{\bullet\bullet}} \tag{3.52}$$

Ainsi, pour chaque sous cascade, l'augmentation du flux thermique rejeté par un condenseur est accommodée simplement par l'augmentation conséquente de l'écart moyen de température concerné.

c/ Solution du problème primal

Il est à présent facile d'étendre les résultats du problème équivalent au problème primal, il suffit d'écrire pour cela :

$$\begin{aligned} T_{HCi}^{\bullet} &= T_{HCi}^{\bullet\bullet} \\ T_{CEi}^{\bullet} &= T_{CEi}^{\bullet\bullet} \end{aligned} \qquad (i = 1 \text{à} 3) \tag{3.53}$$

ce qui implique les égalités suivantes entre les écarts moyens arithmétiques de température:

$$\begin{aligned} Am_0^{\bullet} &= Am_0^{\bullet\bullet} & Am_3^{\bullet} &= Am_3^{\bullet\bullet} \\ Am_1^{\bullet} &= Am_1^{\bullet\bullet} & Am_4^{\bullet} &= Am_4^{\bullet\bullet} \\ Am_2^{\bullet} &= Am_2^{\bullet\bullet} & Am_5^{\bullet} &= Am_5^{\bullet\bullet} \end{aligned} \tag{3.54}$$

La substitution des relations (3.53) et (3.54) dans les équations (3.36),(3.37),(3.38),(3.43) et (3.44) (règles d'optimalité pour la cascade équivalente) permet d'établir les cinq règles d'optimalité correspondants aux cinq degrés de liberté du problème primal :

Cycle Propane

$$1^{ére}\ \text{Règle :} \quad \frac{Am_0^{\bullet}}{Am_3^{\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_C}{T_{HC3}^{\bullet}} + \frac{T_{HC2}^{\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet}} = 2 \tag{3.55}$$

$$2^{ème}\ \text{Règle :} \quad Am_5^{\bullet} = Am_3^{\bullet} \quad \text{ou} \quad T_{HC2}^{\bullet} = T_{E3} \tag{3.56}$$

Cette derniére montre qu'à l'optimum, il y a égalité entre les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs du cycle Propane.

Cycle Ethylène

$$1^{ére}\ \text{Règle :}\quad \frac{Am_3^{\bullet}}{Am_2^{\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet}}{T_{CE2}^{\bullet}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{T_{CE3}^{\bullet}}{T_{HC2}^{\bullet}} + \frac{T_{HC1}^{\bullet}}{T_{CE2}^{\bullet}} = 2 \tag{3.57}$$

$$2^{éme}\ \text{Règle :}\quad Am_4^{\bullet} = Am_2^{\bullet} \qquad \text{ou} \qquad T_{HC1}^{\bullet} = T_{E2} \tag{3.58}$$

Cette règle d'optimalité traduit l'égalité entre les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs du cycle Ethylène, à l'optimum.

Cycle Méthane

$$1^{ére}\ \text{Règle :}\quad \frac{Am_2^{\bullet}}{Am_1^{\bullet}} = \frac{T_{HC1}^{\bullet}}{T_{CE1}^{\bullet}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{T_{CE2}^{\bullet}}{T_{HC1}^{\bullet}} + \frac{T_{E1}}{T_{CE1}^{\bullet}} = 2 \tag{3.59}$$

On constate que ces cinq règles d'optimalité se composent de trois règles (équations (3.55), (3.57) et (3.59)) identiques à celles établies pour une cascade simplement étagée(équations (3.16a) ou (3.16b)), plus deux autres règles (équations (3.56) et (3.58)) qui expriment l'égalité entre les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs de chacun des cycles Propane et Ethylène.

Si on considère les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_0^{\bullet} &= \sum_{p=1}^{3} \dot{Q}_{0p}^{\bullet\bullet} \\ \dot{Q}_2^{\bullet} &= \dot{Q}_2^{\bullet\bullet} \\ \dot{Q}_3^{\bullet} &= \sum_{r=1}^{2} \dot{Q}_{3r}^{\bullet\bullet} \end{aligned} \tag{3.60}$$

on peut vérifier à partir des équations (3.28) et (3.35) l'égalité suivante :

$$\frac{\dot{W}_T^{\bullet}}{\dot{Q}_T} = \frac{\dot{W}_T^{\bullet\bullet}}{\dot{Q}_T} \tag{3.61}$$

La puissance totale de réfrigération de la cascade primale serait donc égale à celle de la cascade équivalente, il en est de même pour les coefficients de performance des deux cascades.

En exprimant chacun des flux thermiques des équations (3.60) en terme d'écart moyen arithmétique de température et de conductance thermique, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} C_0^{\cdot} &= \sum_{p=1}^{3} C_{0p}^{\cdot\cdot} \\ C_2^{\cdot} &= C_2^{\cdot\cdot} \\ C_3^{\cdot} &= \sum_{r=1}^{2} C_{3r}^{\cdot\cdot} \end{aligned} \tag{3.62}$$

Les flux thermiques $\dot{Q}_1$, $\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$ étant les mêmes pour la cascade primale et la cascade équivalente, on peut vérifier que :

$$\begin{aligned} C_1^{\cdot} &= C_1^{\cdot\cdot} \\ C_4^{\cdot} &= C_4^{\cdot\cdot} \\ C_5^{\cdot} &= C_5^{\cdot\cdot} \end{aligned} \tag{3.63}$$

Concernant la répartition des conductances thermiques, la combinaison des équations (3.50)-(3.52),(3.62) et (3.63) permet d'écrire les résultats suivants :

$$\begin{aligned} &\text{Cycle Propane :} && C_0^{\cdot} = C_3^{\cdot} + C_5^{\cdot} \\ &\text{Cycle Ethylène :} && C_3^{\cdot} = C_2^{\cdot} + C_4^{\cdot} \\ &\text{Cycle Méthane :} && C_2^{\cdot} = C_1^{\cdot} \end{aligned} \tag{3.64}$$

Ces relations montrent qu'à l'optimum et pour chaque cycle endoréversible faisant partie de la cascade primale, la conductance thermique du condenseur est égale à la somme des conductances thermiques des évaporateurs. Donc la connaissance des températures optimales T_{CEi} permet d'obtenir les conductances des échangeurs G.N-Méthane, G.N- Ethylène et G.N-Propane; la connaissance de celles-ci permet à son tour d'obtenir immédiatement toutes les autres en sachant que pour chacun des cycles de la cascade, la conductance thermique du condenseur est égale à la somme des conductances thermiques des évaporateurs.

Résumé:

La minimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endorèversibles à un niveau de pression, pour laquelle on spécifie le flux thermique total soutiré au gaz naturel et la conductance thermique globale des échangeurs, est un problème à cinq degrés

de liberté. La résolution de ce problème d'optimisation montre que les évaporateurs Propane-GN et Ethylène-GN constituent des éléments bornant de la solution. Cette puissance atteint un minimum si pour chacun des cycles Propane, Ethylène et Méthane on a :

- la somme des rapports de température, dans le condenseur et le premier évaporateur du cycle, est égale à deux (équations (3.55), (3.57) et (3.59));
- les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs sont égaux (équations (3.56) et (3.58)). Ces deux règles d'optimalité concernent seulement le cycle Propane et Ethylène.

Toutefois, il est encore possible de réduire la puissance de réfrigération en réduisant les irréversibilités dues aux transferts thermiques dans les échangeurs. Cette possibilité est pratiquement réalisable si on multipliait les niveaux de pression dans les évaporateurs GN-Méthane, GN-Ethylène et GN-Propane. Ce problème est abordé ci-après.

3.3.2. Cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à deux niveaux de pression

L'examen de la figure3.4a permet de remarquer que l'on peut réduire les irréversibilités thermodynamiques dues au transfert thermique avec le gaz naturel en multipliant le nombre de niveau de pression des évaporateurs comme il est indiqué sur la figure 3.5a, réalisée avec deux niveaux de pression. On peut dénombrer neuf échangeurs de chaleur différents en ne considérant qu'un condenseur par cycle de réfrigération :

$\dot{Q}_0$: échange Propane- Eau ;

$\dot{Q}_{11}$, Q_{12} : échanges Méthane-G.N;

$\dot{Q}_2$: échange Méthane-Ethyléne ;

$\dot{Q}_3$: échanges Ethyléne-Eau ;

$\dot{Q}_{41}$, Q_{42} : échanges Ethyléne-G.N;

$\dot{Q}_{51}$, Q_{52} : échanges Propane-G.N.

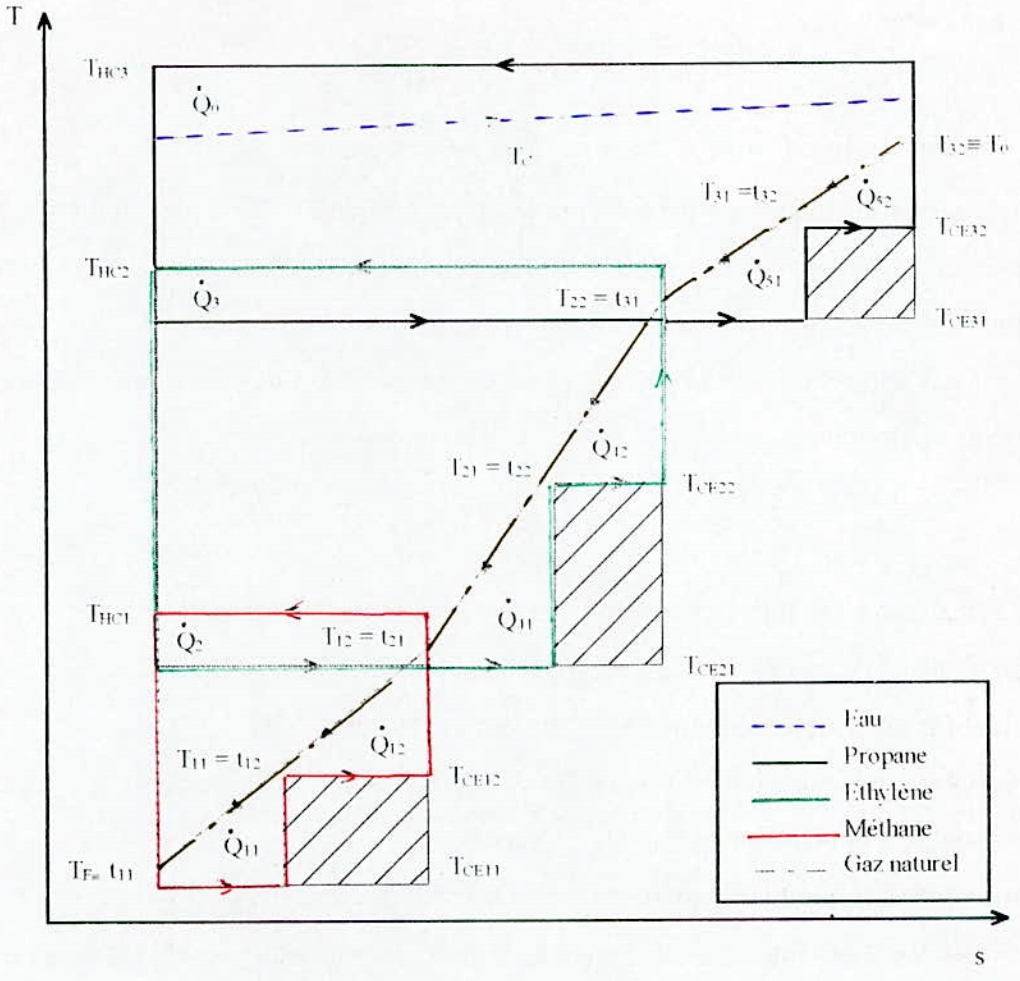


Fig. 3.5a Diagramme T-s d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à deux niveaux de pression.

avec:

T_{ik} , t_{ik} : respectivement, la température du gaz naturel à l'entrée et à la sortie de l'évaporateur du kième niveau de pression.

k : désigne le nombre de niveaux de pression dans les évaporateurs de chacun des cycles de réfrigération (Propane, Ethylène et Méthane) en échanges thermiques avec le gaz naturel.

Les flux thermiques $\dot{Q}_{1k}$, $\dot{Q}_{4k}$ et $\dot{Q}_{5k}$ (k=1à2) découlent d'un calcul d'optimisation qui spécifie les températures T_{11} ,T_{12} ,T_{21} ,T_{22} et T_{31} (le principe de base de ce calcul est donné en annexeB).

On définit les températures moyennes arithmétiques suivantes :

$$T_{Fik} = \frac{T_{ik} + t_{ik}}{2} \qquad (i=1à3),\ (k=1à2) \tag{3.65}$$

Le problème de minimisation de la puissance de réfrigération est maintenant formulé selon l'approche adoptée précédemment pour un seul niveau de pression d'évaporation des réfrigérants avec le gaz naturel.

a/ Problème primal

Les paramètres du problème primal sont les températures T_C , $T_{Ei\,k}$, la conductance thermique globale C_T et les flux thermiques soutirés au gaz naturel $\dot{Q}_{1k}$, $\dot{Q}_{4k}$, $\dot{Q}_{5k}$, (i=1à3) (k=1à2) .

Bien que le nombre de niveaux de pression dans la cascade augmente, le flux thermique total soutiré au gaz naturel demeure constant; il ne dépendra en fait que de la température d'entrée et de sortie de ce dernier :

$$\dot{Q}_T = \sum_{k=1}^{2}\left(\dot{Q}_{1k} + \dot{Q}_{4k} + \dot{Q}_{5k}\right) = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_4 + \dot{Q}_5 \qquad (3.66)$$

$\dot{Q}_1$,$\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$ sont les flux thermiques soutirés au gaz naturel dans la cascade à un niveau de pression, considérée précédemment.

Les variables du problème primal sont au nombre de treize : (N_V = 13)

- neuf variables indépendantes : T_{HCi} et $T_{CEi\,k}$ (i=1à3) (k=1à2).
- quatre variables dépendantes : $\dot{Q}_0$, $\dot{Q}_2$, $\dot{Q}_3$ et $\dot{W}_T$.

Les contraintes du problème primal sont au nombre de cinq: (N_C = 5)

- en écrivant les contraintes d'endoréversibilité pour chacun des cycles de Propane, d'Ethylène et de Méthane on pourra exprimer les flux thermiques $\dot{Q}_0$, $\dot{Q}_2$ et $\dot{Q}_3$ en termes des températures et des flux thermiques $\dot{Q}_{1k}$, $\dot{Q}_{4k}$ et $\dot{Q}_{5k}$ (k=1à2), tels que :

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_0 &= \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}} \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{1k} \frac{T_{HC1}}{T_{CE1k}} + \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}} \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{4k} \frac{T_{HC2}}{T_{CE2k}} + \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{5k} \frac{T_{HC3}}{T_{CE3k}} \\
\dot{Q}_3 &= \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{1k} \frac{T_{HC1}}{T_{CE1k}} + \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{4k} \frac{T_{HC2}}{T_{CE2k}} \qquad (3.67) \\
\dot{Q}_2 &= \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{1k} \frac{T_{HC1}}{T_{CE1k}}
\end{aligned}$$

- la contrainte spécifiant la conductance thermique globale du cycle , s'écrit :

$$C_T = \frac{\dot{Q}_0}{(T_{HC3} - T_C)} + \frac{\dot{Q}_3}{(T_{HC2} - T_{CE3})} + \frac{\dot{Q}_2}{(T_{HC1} - T_{CE2})} + \sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\dot{Q}_{1k}}{(T_{E1} - T_{CE1})} + \frac{\dot{Q}_{4k}}{(T_{E2} - T_{CE2})} + \frac{\dot{Q}_{5k}}{(T_{E3} - T_{CE3})}\right] \tag{3.68}$$

- la puissance totale de réfrigération, qui est la somme des puissances de réfrigération de chacun des cycles de Propane, d'Ethylène et de Méthane, s'écrit :

$$\dot{W}_T = \dot{Q}_0 - \dot{Q}_T \tag{3.69}$$

La puissance de réfrigération à minimiser, désignée par le rapport $\dot{W}_T / \dot{Q}_T$, est donnée par l'expression analytique suivante :

$$\frac{\dot{W}_T}{\dot{Q}_T} = \frac{\left(\frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}} \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{1k} \frac{T_{HC1}}{T_{CE1k}} + \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}} \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{4k} \frac{T_{HC2}}{T_{CE2k}} + \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{5k} \frac{T_{HC3}}{T_{CE3k}}\right)}{\dot{Q}_T} - 1 \tag{3.70}$$

Avant de passer à la formulation du problème équivalent, on doit noter que le problème d'optimisation considéré pour une cascade à deux niveaux de pression est un problème à huit degrés de liberté, soit trois degrés de plus par rapport à celui d'une cascade à un niveau de pression. Chacun de ces degrés supplémentaires correspond en fait à chaque niveau de pression d'évaporation supplémentaire considéré dans la cascade.

b/ Problème équivalent

Afin de concevoir la cascade équivalente, les condenseurs de la cascade primale seront décomposés en six éléments pour le Propane, quatre pour l'Ethylène et deux pour le Méthane, selon la figure 3.5b .On compte au total 18 échanges thermiques :

$\dot{Q}_{01}$ - $\dot{Q}_{06}$: échanges Propane - Eau;

$\dot{Q}_{11}$, $\dot{Q}_{11}$: échanges Méthane - Gaz naturel;

$\dot{Q}_{21}$, $\dot{Q}_{22}$: échanges Méthane - Ethylène;

$\dot{Q}_{31}$ - $\dot{Q}_{34}$: échanges Propane - Ethylène;

$\dot{Q}_{41}$, $\dot{Q}_{42}$: échanges Ethylène - Gaz naturel;

$\dot{Q}_{51}$, $\dot{Q}_{52}$: échanges Propane - Gaz naturel.

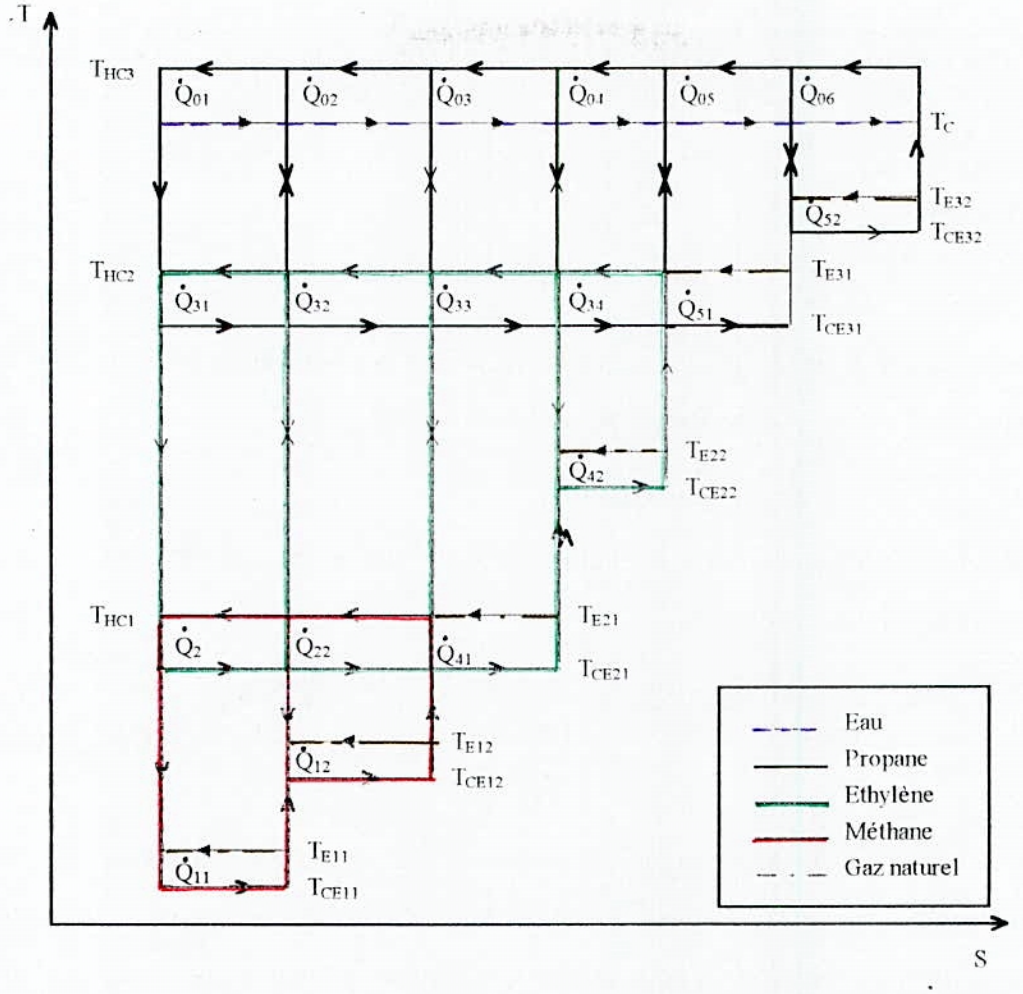


Fig. 3.5b Diagramme T-s de la cascade équivalente à dix huit échangeurs de chaleur

La cascade équivalente est composée de six sous cascades; en partant de la gauche vers la droite, on compte :

- deux sous cascades comportant chacune trois cycles de réfrigération endoréversibles de Propane, Ethylène et Méthane;
- deux sous cascades comportant chacune deux cycles de réfrigération endoréversibles de Propane et Ethylène;
- deux sous cascades comportant chacune un seul cycle de réfrigération endoréversible de Propane.

Les variables du problème équivalent sont au nombre de vingt-deux : ($N_V = 22$)

- neufs variables indépendantes : T_{HCi} et $T_{CEi\,k}$
- treize variables dépendantes : $\dot{Q}_{0p}$, $\dot{Q}_{2m}$, $\dot{Q}_{3r}$ et $\dot{W}_T$.

avec : i=1à3 , k=1à2 , p=1à 6 , m=1à2 et r=1à4

Les contraintes du problème équivalent sont au nombre de quatorze : ($N_C = 14$)

- les douze contraintes d'endoréversibilité relatives aux douze cycles de la cascade équivalente permettent d'exprimer les flux thermiques $\dot{Q}_{0p}$, $\dot{Q}_{2m}$ et $\dot{Q}_{3r}$ en fonction des températures d'évaporation et de condensation d'une part, et des flux thermiques soutirés au gaz naturel, d'autre part :

<u>Sous cascade Propane- Ethylène- Méthane</u>

1ère sous cascade :

$$\dot{Q}_{01} = \dot{Q}_{11} \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE11}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}}$$

$$\dot{Q}_{31} = \dot{Q}_{11} \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE11}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \qquad (3.71)$$

$$\dot{Q}_{21} = \dot{Q}_{11} \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE11}}$$

2éme sous cascade :

$$\dot{Q}_{02} = \dot{Q}_{12} \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE12}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}}$$

$$\dot{Q}_{32} = \dot{Q}_{12} \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE12}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \qquad (3.72)$$

$$\dot{Q}_{22} = \dot{Q}_{12} \cdot \frac{T_{HC1}}{T_{CE12}}$$

<u>Sous cascade Propane- Ethylène</u>

1ère sous cascade :

$$\dot{Q}_{03} = \dot{Q}_{41} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}}$$

$$\dot{Q}_{33} = \dot{Q}_{41} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE21}} \qquad (3.73)$$

$2^{éme}$ sous cascade :

$$\dot{Q}_{04} = \dot{Q}_{42} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE22}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}}$$

$$\dot{Q}_{34} = \dot{Q}_{42} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE22}} \cdot \qquad (3.74)$$

Sous cascade Propane

$1^{ère}$ sous cascade :

$$\dot{Q}_{05} = \dot{Q}_{51} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE31}} \qquad (3.75)$$

$2^{éme}$ sous cascade :

$$\dot{Q}_{06} = \dot{Q}_{52} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE32}} \qquad (3.76)$$

- la contrainte qui spécifie la conductance thermique globale du cycle est telle que :

$$C_T = \sum_{p=1}^{6} \frac{\dot{Q}_{0p}}{T_{HC3} - T_C} + \sum_{r=1}^{4} \frac{\dot{Q}_{3r}}{T_{HC2} - T_{CE3}} + \sum_{m=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{2m}}{T_{HC1} - T_{CE2}} + \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k} - T_{CE2k}} + \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k} - T_{CE2k}} + \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k} - T_{CE3k}} \right] \qquad (3.77)$$

La puissance totale de réfrigération est la somme des puissances de réfrigération des six sous cascades, elle est donnée par la relation suivante qui représente la quatorzième contrainte du problème :

$$\dot{W}_T = \sum_{p=1}^{6} \dot{Q}_{0p} - \dot{Q}_T$$

ou encore :

$$\frac{\dot{W}_T}{\dot{Q}_T} = \frac{\sum_{p=1}^{6} \dot{Q}_{0p}}{\dot{Q}_T} - 1 \qquad (3.78)$$

On passe maintenant à la résolution du problème équivalent de la même manière qu'il l'a été dans la section précédente; donc à l'optimum, on peut écrire les règles d'optimalité suivantes pour chacune des sous cascades :

Sous cascade Propane- Ethylène- Méthane

1er sous cascade

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^{\bullet\bullet}}{Am_3^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet\bullet}}{T_{CE31}^{\bullet\bullet}} \quad (3.79)$$

Cycle Ethylène: $$\frac{Am_3^{\bullet\bullet}}{Am_2^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet\bullet}}{T_{CE21}^{\bullet\bullet}} \quad (3.80)$$

Cycle Méthane: $$\frac{Am_2^{\bullet\bullet}}{Am_{11}^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC1}^{\bullet\bullet}}{T_{CE11}^{\bullet\bullet}} \quad (3.81)$$

2éme sous cascade

Trois règles d'optimalité régissent les échanges dans cette sous cascade, dont les deux premières sont identiques aux règles (3.79) et (3.80) de la première cascade :

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^{\bullet\bullet}}{Am_3^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet\bullet}}{T_{CE31}^{\bullet\bullet}} \quad (3.82)$$

Cycle Ethylène: $$\frac{Am_3^{\bullet\bullet}}{Am_2^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet\bullet}}{T_{CE21}^{\bullet\bullet}} \quad (3.83)$$

Cycle Méthane: $$\frac{Am_2^{\bullet\bullet}}{Am_{12}^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC1}^{\bullet\bullet}}{T_{CE12}^{\bullet\bullet}} \quad (3.84)$$

Sous cascade Propane- Ethylène

Les échanges thermiques, dans chacune des sous cascades Propane- Ethylène, sont régis par deux règles d'optimalité dont la première est identique à la règle (3.79)

1er sous cascade

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^{\bullet\bullet}}{Am_3^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet\bullet}}{T_{CE31}^{\bullet\bullet}} \quad (3.85)$$

Cycle Ethylène: $$\frac{Am_3^{\bullet\bullet}}{Am_{41}^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet\bullet}}{T_{CE21}^{\bullet\bullet}} \quad (3.86)$$

2éme sous cascade

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^{\bullet\bullet}}{Am_3^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet\bullet}}{T_{CE31}^{\bullet\bullet}} \quad (3.87)$$

Cycle Ethylène: $$\frac{Am_3^{\bullet\bullet}}{Am_{42}^{\bullet\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet\bullet}}{T_{CE22}^{\bullet\bullet}} \quad (3.88)$$

Sous cascade Propane

1ére sous cascade

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^{**}}{Am_{51}^{**}} = \frac{T_{HC3}^{**}}{T_{CE31}^{**}} \quad (3.89)$$

2éme sous cascade :

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^{**}}{Am_{52}^{**}} = \frac{T_{HC3}^{**}}{T_{CE32}^{**}} \quad (3.90)$$

avec :

Am_0 , Am_2 et Am_3 désignent, respectivement, les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs Propane-Eau, Ethylène-Méthane et Propane-Ethylène ;

Am_{1k} , Am_{4k} et Am_{5k} (k=1à2) désignent respectivement les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs Méthane-GN , Ethylène-GN et Propane-GN, des deux niveaux de pression de chaque cycle :

$$Am_0^{**} = T_{HC3}^{**} - T_C \qquad Am_3^{**} = T_{HC2}^{**} - T_{CE31}^{**}$$
$$Am_{1k}^{**} = T_{E1k} - T_{CE1k}^{**} \qquad Am_{4k}^{**} = T_{E2k} - T_{CE2k}^{**} \quad (3.91)$$
$$Am_2^{**} = T_{HC1}^{**} - T_{CE21}^{**} \qquad Am_{5k}^{**} = T_{E3k} - T_{CE3k}^{**}$$

On peut finalement compter huit règles d'optimalité qui régissent les échanges thermiques dans la cascade, ce qui correspond bien aux huit degrés de liberté du problème.

En considérant les équations ((3.79), (3.89)) et ((3.80), (3.86)) on peut écrire :

$$Am_3^{**} = Am_{51}^{**} \quad \text{d'où :} \quad T_{HC2}^{**} = T_{E31} \quad (3.92)$$

$$Am_2^{**} = Am_{41}^{**} \quad \text{d'où :} \quad T_{HC1}^{**} = T_{E21} \quad (3.93)$$

En divisant respectivement les équations (3.81),(3.86) et (3.89) par (3.84),(3.88) et (3.90), on obtient les égalités suivantes :

$$\frac{Am_{12}^{**}}{T_{CE12}^{**}} = \frac{Am_{11}^{**}}{T_{CE11}^{**}}$$
$$\frac{Am_{42}^{**}}{T_{CE22}^{**}} = \frac{Am_{41}^{**}}{T_{CE21}^{**}} \qquad (3.94a)$$
$$\frac{Am_{52}^{**}}{T_{CE32}^{**}} = \frac{Am_{51}^{**}}{T_{CE31}^{**}}$$

celles-ci impliquent respectivement les égalités suivantes :

$$\frac{T_{CE12}^{**}}{T_{E12}} = \frac{T_{CE11}^{**}}{T_{E11}}$$
$$\frac{T_{CE22}^{**}}{T_{E22}} = \frac{T_{CE21}^{**}}{T_{E21}} \qquad (3.94b)$$
$$\frac{T_{CE32}^{**}}{T_{E32}} = \frac{T_{CE31}^{**}}{T_{E31}}$$

On remarque que, la considération de deux niveaux de pression a introduit trois nouvelles inconnues ($T_{CEi\,2}$ (i=1à3)) par rapport à un seul niveau de pression. On a donc à résoudre le problème pour neuf températures; dont deux sont données par les relations (3.92),(3.93), et six autres (T_{CEik} , (i=1à3) et (k=1à2)) sont, d'après la relation (3.94b), deux à deux linéairement dépendantes. De ce fait, il reste quatre températures inconnues (T_{HC3}^{**} et T_{CEi1}^{**} (i=1à3)) qu'on doit déterminer en résolvant le système à quatre équations, dont trois règles d'optimalité (3.79)-(3.81) exprimées en termes de températures (règles de deux) :

$$\frac{T_{E11}}{T_{CE11}^{**}} + \frac{T_{CE21}^{**}}{T_{E21}} = 2$$
$$\frac{T_{E21}}{T_{CE21}^{**}} + \frac{T_{CE31}^{**}}{T_{E31}} = 2 \qquad (3.95)$$
$$\frac{T_{E31}}{T_{CE31}^{**}} + \frac{T_C}{T_{HC3}^{**}} = 2$$

et la contrainte (3.77) qui, en tenant compte des résultats obtenus jusqu'à présent, est donnée par:

$$C_T = \left(1 - \frac{T_C}{T_{HC3}^{**}}\right)^{-1} \left[4 \frac{T_{E11}}{T_{CE11}^{**}} \frac{T_{E21}}{T_{CE21}^{**}} \frac{T_{E31}}{T_{CE31}^{**}} \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} + 3 \frac{T_{E21}}{T_{CE21}^{**}} \frac{T_{E31}}{T_{CE31}^{**}} \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} + 2 \frac{T_{E31}}{T_{CE31}^{**}} \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}} \right] \qquad (3.96)$$

Ce système d'équation est similaire à celui formé par les équations (3.45)et (3.46); donc, par analogie avec les résultats obtenus auparavant, on pourra écrire :

$$
\begin{aligned}
T_{CE11}^{**} &= T_{E11}\cdot\left[\frac{C_T-4\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}+2\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T+3\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}+4\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}\right]\\
T_{CE21}^{**} &= T_{E21}\cdot\left[\frac{C_T-3\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}-8\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}}{C_T-4\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}+2\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}\right]\\
T_{CE31}^{**} &= T_{E31}\cdot\left[\frac{C_T-12\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}-6\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}-2\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T-3\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}-8\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}\cdot}\right]\\
T_{HC3}^{**} &= T_{C}\cdot\left[\frac{C_T-12\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}-6\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}-2\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T-16\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}-9\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}-4\cdot\sum_{k=1}^{2}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}\right]
\end{aligned}
\qquad (3.97)
$$

si de plus on considère les égalités données par les relations (7.94b), la solution complète du problème équivalent sera exprimée par les relations suivantes :

$$T_{CE1k}^{**} = T_{E1k} \cdot \left[\frac{C_T - 4 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T + 3 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} + 4 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}} \right]$$

$$T_{CE2k}^{**} = T_{E2k} \cdot \left[\frac{C_T - 3 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 8 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}}{C_T - 4 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}} \right]$$

$$T_{CE3k}^{**} = T_{E3k} \cdot \left[\frac{C_T - 12 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 6 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T - 3 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 8 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}} \right] \qquad (3.98)$$

$$T_{HC3}^{**} = T_C \cdot \left[\frac{C_T - 12 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 6 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T - 16 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 9 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 4 \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}} \right]$$

$$T_{HC2}^{**} = T_{E31} \quad \text{et} \quad T_{HC1}^{**} = T_{E21}$$

avec: k = 1à2.

La puissance minimale de réfrigération, par unité de flux thermique soutiré à la source froide, est égale à :

$$\frac{\dot{W}_T^{**}}{\dot{Q}_T} = \frac{T_C}{\dot{Q}_T} \left[\frac{\sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} \left(C_T - \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} \right) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} \left(C_T - \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}} \right) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}} \left(C_T - 4 \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} \right)}{C_T - 16 \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 9 \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 4 \sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}} \right] - 1$$

(3.99

Cette expression s'annule pour des flux thermiques $\dot{Q}_{1k}$, $\dot{Q}_{4k}$ et $\dot{Q}_{5k}$ (k=1à2) nuls. On note également, que lorsque seuls $\dot{Q}_{12}$,$\dot{Q}_{42}$ et $\dot{Q}_{52}$ sont nuls, on retrouve la puissance de réfrigération d'une cascade à un niveau de pression, donnée par la relation (3.48).

Le coefficient de performance de la cascade à deux niveaux de pression est donné par l'inverse du rapport $\dot{W}_T^{**}/\dot{Q}_T$.

A l'optimum, les conductances thermiques sont réparties de façon égale entre les échangeurs de chaleur de chaque sous cascade :

sous cascade Propane- Ethylène- Méthane

$$1^{er} \text{ sous cascade : } \quad C_{01}^{**} = C_{31}^{**} = C_{21}^{**} = C_{11}^{**} = \frac{\dot{Q}_{11}}{Am_{11}^{**}} \qquad (3.100)$$

$$2^{ème} \text{ sous cascade : } \quad C_{02}^{**} = C_{32}^{**} = C_{22}^{**} = C_{12}^{**} = \frac{\dot{Q}_{12}}{Am_{12}^{**}}$$

sous cascade Propane- Ethylène

$$1^{er} \text{ sous cascade : } \quad C_{03}^{**} = C_{33}^{**} = C_{41}^{**} = \frac{\dot{Q}_{41}}{Am_{41}^{**}} \qquad (3.101)$$

$$2^{ème} \text{ sous cascade : } \quad C_{04}^{**} = C_{34}^{**} = C_{42}^{**} = \frac{\dot{Q}_{42}}{Am_{42}^{**}}$$

sous cascade Propane

$$1^{er} \text{ sous cascade : } \quad C_{05}^{**} = C_{51}^{**} = \frac{\dot{Q}_{51}}{Am_{51}^{**}} \qquad (3.102)$$

$$2^{ème} \text{ sous cascade : } \quad C_{06}^{**} = C_{52}^{**} = \frac{\dot{Q}_{52}}{Am_{52}^{**}}$$

c/ - Solution du problème primal

Afin de traduire les solutions du problème équivalent au problème primal, on doit considérer l'égalité entre les températures optimales suivantes :

$$T_{HCi}^{*} = T_{HCi}^{**} \qquad (i = 1à3) \text{ et } (k = 1à2) \qquad (3.103)$$
$$T_{CEik}^{*} = T_{CEik}^{**}$$

d'où :

$$Am_0^{\cdot} = Am_0^{\cdot\cdot} \qquad Am_3^{\cdot} = Am_3^{\cdot\cdot}$$
$$Am_{1k}^{\cdot} = Am_{1k}^{\cdot\cdot} \qquad Am_{4k}^{\cdot} = Am_{4k}^{\cdot\cdot} \quad (k=1\text{à}2) \qquad (3.104)$$
$$Am_2^{\cdot} = Am_2^{\cdot\cdot} \qquad Am_{5k}^{\cdot} = Am_{5k}^{\cdot\cdot}$$

Pour retrouver les huit règles d'optimalité relatives au problème primal, on doit tenir compte des égalités (3.103) et (3.104) dans les règles d'optimalité établies pour le cascade équivalente :

Cycle Propane

1ère Règle :

$$\frac{Am_0^{\cdot}}{Am_3^{\cdot}} = \frac{T_{HC3}^{\cdot}}{T_{CE31}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE31}^{\cdot}} + \frac{T_C}{T_{HC3}^{\cdot}} = 2 \qquad (3.105)$$

2ème - 3ème Règle :

$$\frac{Am_0^{\cdot}}{Am_{5k}^{\cdot}} = \frac{T_{HC3}^{\cdot}}{T_{CE3k}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{E3k}}{T_{CE3k}^{\cdot}} + \frac{T_C}{T_{HC3}^{\cdot}} = 2 \quad (k=1\text{à}2) \qquad (3.106)$$

Une comparaison des équations (3.105) et (3.106) permet d'exprimer autrement la deuxième et troisième règles d'optimalité, telles que :

pour k=1 : $Am_{51}^{\cdot} = Am_3^{\cdot}$ ou $T_{HC2}^{\cdot} = T_{E31}$ (3.106.1)

ce qui traduit, une fois de plus, l'égalité des écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs du premier niveau de pression du cycle Propane.

pour k=2 : $$\frac{Am_{51}^{\cdot}}{T_{CE31}^{\cdot}} = \frac{Am_{52}^{\cdot}}{T_{CE32}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{CE31}^{\cdot}}{T_{E31}} = \frac{T_{CE32}^{\cdot}}{T_{E32}} \qquad (3.106.2)$$

Cycle Ethylène

1ère Règle :

$$\frac{Am_3^{\cdot}}{Am_2^{\cdot}} = \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE21}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{HC1}^{\cdot}}{T_{CE21}^{\cdot}} + \frac{T_{CE31}^{\cdot}}{T_{HC2}^{\cdot}} = 2 \qquad (3.107)$$

2ème - 3ème Règle:

$$\frac{Am_3^{\cdot}}{Am_{4k}^{\cdot}} = \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE2k}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{E2k}}{T_{CE2k}^{\cdot}} + \frac{T_{CE31}^{\cdot}}{T_{HC2}^{\cdot}} = 2 \quad (k=1\text{à}2) \qquad (3.108)$$

Les relations (3.107) et (3.108) permettent d'écrire, pour le premier et second niveau de pression du cycle Ethylène, les règles suivantes :

pour k=1 : $Am_{41}^{\cdot} = Am_2^{\cdot}$ ou $T_{HC1}^{\cdot} = T_{E21}$ (3.108.1)

Idem pour le cycle Ethylène, à l'optimum, les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs du premier niveau de pression sont égaux.

pour k=2 : $\frac{Am_{41}^{\cdot}}{T_{CE21}^{\cdot}} = \frac{Am_{42}^{\cdot}}{T_{CE22}^{\cdot}}$ ou $\frac{T_{CE21}^{\cdot}}{T_{E21}} = \frac{T_{CE22}^{\cdot}}{T_{E22}}$ (3.108.2)

Cycle Méthane

1ère - 2ème Règle :

$$\frac{Am_2^{\cdot}}{Am_{1k}^{\cdot}} = \frac{T_{HC1}^{\cdot}}{T_{CE1k}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{E1k}}{T_{CE1k}^{\cdot}} + \frac{T_{CE21}^{\cdot}}{T_{HC1}^{\cdot}} = 2 \quad (k=1à2) \qquad (3.109)$$

Une manipulation des équations (3.109) permet d'établir, pour les deux niveaux de pression du cycle Méthane, les règles suivantes.

pour k= 1 : $\frac{Am_2^{\cdot}}{Am_{11}^{\cdot}} = \frac{T_{HC1}^{\cdot}}{T_{CE11}^{\cdot}}$ ou $\frac{T_{E11}}{T_{CE11}^{\cdot}} + \frac{T_{CE21}^{\cdot}}{T_{HC1}^{\cdot}} = 2$ (3.109.1)

pour k=2 : $\frac{Am_{11}^{\cdot}}{T_{CE11}^{\cdot}} = \frac{Am_{12}^{\cdot}}{T_{CE12}^{\cdot}}$ ou $\frac{T_{CE11}^{\cdot}}{T_{E11}} = \frac{T_{CE12}^{\cdot}}{T_{E12}}$ (3.109.2)

Il est important de noter que, la dernière règle d'optimalité des cycles Propane, Ethylène et Méthane (équations (3.106.2), (3.108.2) et (3.109.2)) montre qu'à l'optimum, les températures d'évaporation du premier et second niveau de pression de chacun de ces cycles sont linéairement dépendantes.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux de la section 3.3.1 montre que, cinq règles d'optimalité (équations (3.105), (3.106.1), (3.107), (3.108.1) et (3.109.1)) parmi les huit sont identiques à celles établies pour une cascade à un niveau de pression (équations (3.55)-(3.59)), les trois autres (équations (3.106.2), (3.108.2) et (3.109.2)) traduisent, pour chaque cycle endoréversible de Propane, d'Ethylène ou de Méthane, l'égalité des rapports de température de condensation et d'évaporation dans les évaporateurs du premier et second niveau de pression; autrement dit l'existence d'une dépendance linéaire entre les températures d'évaporation du premier et second niveau de pression de chacun de ces cycles.

Etant donnée les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_0^{\cdot} &= \sum_{p=1}^{6} \dot{Q}_{0p}^{\cdot\cdot} \\ \dot{Q}_3^{\cdot} &= \sum_{r=1}^{4} \dot{Q}_{3r}^{\cdot\cdot} \\ \dot{Q}_2^{\cdot} &= \sum_{m=1}^{2} \dot{Q}_{2m}^{\cdot\cdot} \end{aligned} \qquad (3.110)$$

on vérifie à partir des équations (3.69) et (3.78) l'égalité suivante :

$$\frac{\dot{W}_T^{\cdot}}{\dot{Q}_T} = \frac{\dot{W}_T^{\cdot\cdot}}{\dot{Q}_T} \qquad (3.111)$$

L'expression des flux thermiques des relations (3.111) en fonction des écarts moyens de température et des conductances thermiques, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} C_0^{\cdot} &= \sum_{p=1}^{6} C_{0p}^{\cdot\cdot} \\ C_2^{\cdot} &= \sum_{r=1}^{2} C_{2r}^{\cdot\cdot} \\ C_3^{\cdot} &= \sum_{m=1}^{4} C_{3m}^{\cdot\cdot} \end{aligned} \qquad (3.112)$$

Sachant que la valeur des flux thermiques $\dot{Q}_{1k}$, $\dot{Q}_{4k}$ et $\dot{Q}_{5k}$ (k=1à2) est la même pour les cascades primale et équivalente, et tenant compte des relations (3.104) on pourra écrire :

$$\begin{aligned} C_{4k}^{\cdot} &= C_{4k}^{\cdot\cdot} \\ C_{5k}^{\cdot} &= C_{5k}^{\cdot\cdot} \qquad (k=1à2) \\ C_{1k}^{\cdot} &= C_{1k}^{\cdot\cdot} \end{aligned} \qquad (3.113)$$

De la même manière que pour la cascade à un niveau de pression, l'égalité entre la somme des conductances thermiques des condenseurs et celle des évaporateurs de chaque cycle endoréversible de la cascade primale est vérifiée à l'optimum :

$$\text{Cycle Propane :} \quad C_0^{\cdot} = C_3^{\cdot} + \sum_{k=1}^{2} C_{5k}^{\cdot}$$

$$\text{Cycle Ethylène :} \quad C_3^{\cdot} = C_2^{\cdot} + \sum_{k=1}^{2} C_{4k}^{\cdot} \qquad (3.114)$$

$$\text{Cycle Méthane :} \quad C_2^{\cdot} = \sum_{k=1}^{2} C_{1k}^{\cdot}$$

On peut dire qu'à l'optimum et pour chaque cycle endoréversible, à deux niveaux de pression, faisant partie de la cascade primale, la conductance thermique du condenseur est égale à la somme des conductances thermiques des évaporateurs du premier et second niveau de pression. Tenant compte de ce résultat, on note que la connaissance des températures optimales T_{CEik} permet d'obtenir les conductances des échangeurs G.N-Méthane, G.N- Ethylène et G.N-Propane du premier et deuxième niveau de pression; la connaissance de celles-ci permet à son tour d'obtenir immédiatement toutes les autres.

Une remarque importante peut être faite à ce stade de la résolution du problème, et qui permet de souligner l'existence d'une similitude entre les expressions analytiques des performances optimales d'une cascade à un niveau de pression et celles à deux niveaux de pression. En effet, les performances optimales dans le second cas sont déduites de celles du premier cas en substituant respectivement les termes T_{CEi} , T_{Ei} (i=1,3) , $\frac{\dot{Q}_1}{T_{E1}}$, $\frac{\dot{Q}_4}{T_{E2}}$ et $\frac{\dot{Q}_5}{T_{E3}}$ par T_{CEik} , T_{Eik} ((i=1,3), (k=1,2)), $\sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}$, $\sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}$ et $\sum_{k=1}^{2} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}$.

Résumé :

Pour résumer, on peut dire que la minimisation de la puissance totale de réfrigération d'une cascade à trois cycles de réfrigération endorèversibles à deux niveaux de pression, pour laquelle on spécifie la conductance thermique globale des échangeurs et le flux thermique total soutiré au gaz naturel, est un problème à huit degrés de liberté; soit trois degrés de plus par rapport à une cascade à un niveau de pression.

La résolution de ce problème montre que les échanges thermiques dans la cascade à deux niveaux de pression sont régis par les mêmes règles d'optimalité relatives à une cascade à un niveau de pression, plus trois autres règles (équations (3.106.2), (3.108.2) et (3.109.2)) correspondant aux niveaux de pression supplémentaires considérés dans cette cascade. En effet, la puissance mécanique est minimale si, pour chacun des cycles Propane, Ethylène et Méthane, on a :

- la somme des rapports de température, dans le condenseur et le premier évaporateur du cycle, est égale à deux (équations (3.105), (3.107) et (3.109));
- les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs du premier niveau de pression sont égaux (équations (3.106.1) et (3.108.1)). Ces deux règles d'optimalité ne concernent en fait que le cycle Propane et Ethylène;
- les températures d'évaporation du premier et second niveau de pression du cycle sont linéairement dépendantes (équations (3.106.2), (3.108.2) et (3.109.2)).

Concernant la répartition optimale des conductances thermiques au sein de chaque cycle de la cascade, on a: la conductance thermique du condenseur est égale à la somme des conductances thermiques des évaporateurs du premier et second niveau de pression (équations (3.114)).

3.3.3 Cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à trois niveaux de pression

Afin de réduire d'avantage les irréversibilités thermodynamiques dues aux transferts thermiques avec le gaz naturel, on va considérer, pour chacun des cycles de Propane, d'Ethylène et de Méthane de la cascade à deux niveaux de pression, un niveau de pression d'évaporation supplémentaire. On obtient ainsi la cascade à trois niveaux de pression suivante:

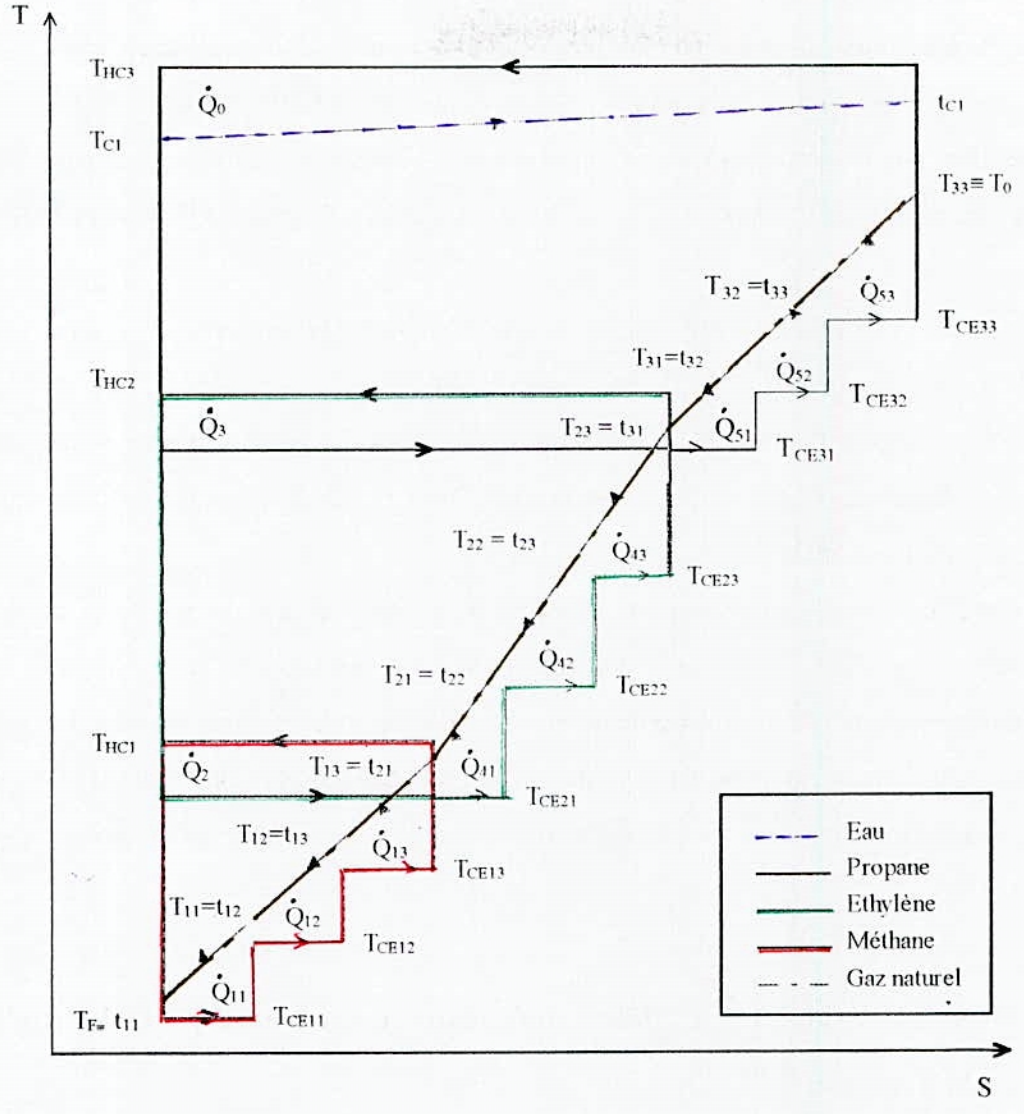


Fig. 3.6 Diagramme T-s d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués à trois niveaux de pression

En suivant la même procédure de calcul adoptée dans les sections précédentes, on pourra vérifier que ce nouveau problème d'optimisation est à onze degrés de liberté. La puissance de réfrigération de la cascade à trois niveaux de pression est minimale sous les conditions (ou onze règles d'optimalité) suivantes :

Cycle Propane

1ère Règle :

$$\frac{Am_0^*}{Am_3^*} = \frac{T_{HC3}^*}{T_{CE31}^*} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE31}^*} + \frac{T_C}{T_{HC3}^*} = 2 \tag{3.115}$$

$2^{ème}$ - $4^{ème}$ Règle :

$$\frac{Am_0^{\cdot}}{Am_{5k}^{\cdot}} = \frac{T_{HC3}^{\cdot}}{T_{CE3k}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{E3k}}{T_{CE3k}^{\cdot}} + \frac{T_C}{T_{HC3}^{\cdot}} = 2 \qquad (k=1à3) \qquad (3.116)$$

pour k=1 : $Am_{51}^{\cdot} = Am_3^{\cdot}$ ou $T_{HC2}^{\cdot} = T_{E31}$ (3.116.1)

pour k=2 à 3 : $\frac{Am_{51}^{\cdot}}{T_{CE31}^{\cdot}} = \frac{Am_{5k}^{\cdot}}{T_{CE3k}^{\cdot}}$ ou $\frac{T_{CE31}^{\cdot}}{T_{E31}} = \frac{T_{CE3k}^{\cdot}}{T_{E3k}}$ (3.116.2)

Cycle Ethylène

$1^{ère}$ Règle :

$$\frac{Am_3^{\cdot}}{Am_2^{\cdot}} = \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE21}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{HC1}^{\cdot}}{T_{CE21}^{\cdot}} + \frac{T_{CE31}^{\cdot}}{T_{HC2}^{\cdot}} = 2 \qquad (3.117)$$

$2^{ème}$ - $4^{ème}$ Règle :

$$\frac{Am_3^{\cdot}}{Am_{4k}^{\cdot}} = \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE2k}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{E2k}}{T_{CE2k}^{\cdot}} + \frac{T_{CE31}^{\cdot}}{T_{HC2}^{\cdot}} = 2 \qquad (k=1à3) \qquad (3.118)$$

pour k=1 : $Am_{41}^{\cdot} = Am_2^{\cdot}$ ou $T_{HC1}^{\cdot} = T_{E21}$ (3.118.1)

pour k=2 à 3: $\frac{Am_{41}^{\cdot}}{T_{CE21}^{\cdot}} = \frac{Am_{4k}^{\cdot}}{T_{CE2k}^{\cdot}}$ ou $\frac{T_{CE21}^{\cdot}}{T_{E21}} = \frac{T_{CE2k}^{\cdot}}{T_{E2k}}$ (3.118.2)

Cycle Méthane

$1^{ère}$ - $2^{ème}$ Règle :

$$\frac{Am_2^{\cdot}}{Am_{1k}^{\cdot}} = \frac{T_{HC1}^{\cdot}}{T_{CE1k}^{\cdot}} \quad \text{ou} \quad \frac{T_{E1k}}{T_{CE1k}^{\cdot}} + \frac{T_{CE21}^{\cdot}}{T_{HC1}^{\cdot}} = 2 \qquad (k=1à3) \qquad (3.119)$$

pour k= 1 : $\frac{Am_2^{\cdot}}{Am_{11}^{\cdot}} = \frac{T_{HC1}^{\cdot}}{T_{CE11}^{\cdot}}$ ou $\frac{T_{E11}}{T_{CE11}^{\cdot}} + \frac{T_{CE21}^{\cdot}}{T_{HC1}^{\cdot}} = 2$ (3.119.1)

pour k=2 à 3 : $\frac{Am_{11}^{\cdot}}{T_{CE11}^{\cdot}} = \frac{Am_{1k}^{\cdot}}{T_{CE1k}^{\cdot}}$ ou $\frac{T_{CE11}^{\cdot}}{T_{E11}} = \frac{T_{CE1k}^{\cdot}}{T_{E1k}}$ (3.119.2)

Une fois de plus, on constate que, huit règles d'optimalité parmi les onze sont identiques à celles établies pour une cascade à deux niveaux de pression, les trois autres (équations (3.116.2), (3.118.2) et (3.119.2) avec k=3) traduisent, pour chaque cycle endoréversible de Propane, d'Ethylène ou de Méthane, l'existence d'une dépendance linéaire entre les températures d'évaporation du premier et troisième niveau de pression de chacun de ces cycles. Une

comparaison faite entre les résultats obtenus, pour une cascade à deux et trois niveaux de pression, permet de souligner une similitude entre les règles d'optimalité établies pour ces deux cascades. En effet, les règles d'optimalité pour une cascade à trois niveaux de pression sont déduites de celles d'une cascade à deux niveaux de pression, en faisant simplement varier le paramètre k de 1 à 3. De ce fait, et par analogie avec les résultats de la section précédente, les performances de la cascade à trois niveaux de pression s'expriment comme suit :

$$T_{CE1k}^{*} = T_{E1k} \cdot \left[\frac{C_T - 4 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T + 3 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} + 4 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}} \right]$$

$$T_{CE2k}^{*} = T_{E2k} \cdot \left[\frac{C_T - 3 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 8 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}}{C_T - 4 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}} \right]$$

$$T_{CE3k}^{*} = T_{E3k} \cdot \left[\frac{C_T - 12 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 6 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T - 3 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 8 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} \cdot} \right] \qquad (3.120)$$

$$T_{HC3}^{*} = T_C \cdot \left[\frac{C_T - 12 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 6 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}{C_T - 16 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 9 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 4 \cdot \sum_{k=1}^{3} \frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}} \right]$$

$T_{HC1}^{*} = T_{E21}$ et $T_{HC2}^{*} = T_{E31}$

avec: k = 1à3.

La puissance de réfrigération minimale, par unité de flux thermique Q_T , est donnée par :

$$\frac{\dot{W}_T}{\dot{Q}_T} = \frac{T_C}{\dot{Q}_T}\left[\frac{\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}\left(C_T - \sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}\right) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}}\left(C_T - \sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}\right) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}\left(C_T - 4\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}}\right)}{C_T - 16\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{1k}}{T_{E1k}} - 9\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{4k}}{T_{E2k}} - 4\sum_{k=1}^{3}\frac{\dot{Q}_{5k}}{T_{E3k}}}\right] - 1 \qquad (3.121)$$

où :

$$\dot{Q}_T = \sum_{k=1}^{3}\left(\dot{Q}_{1k} + \dot{Q}_{4k} + \dot{Q}_{5k}\right) = \sum_{k=1}^{2}\left(\dot{Q}_{1k} + \dot{Q}_{4k} + \dot{Q}_{5k}\right) = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_4 + \dot{Q}_5 \qquad (3.122)$$

A l'optimum et pour chaque cycle endoréversible, on a toujours la conductance thermique du condenseur qui est égale à la somme des conductances thermiques des évaporateurs des trois niveaux de pression :

Cycle Propane : $C_0^{\cdot} = C_3^{\cdot} + \sum_{k=1}^{3} C_{5k}^{\cdot}$

Cycle Ethylène : $C_3^{\cdot} = C_2^{\cdot} + \sum_{k=1}^{3} C_{4k}^{\cdot}$ (3.123)

Cycle Méthane : $C_2^{\cdot} = \sum_{k=1}^{3} C_{1k}^{\cdot}$

Résumé:

Le problème de la minimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endorèversibles à trois niveaux de pression, pour laquelle on spécifie la conductance thermique totale et le flux thermique soutiré au gaz naturel, est un problème à onze degrés de liberté; soit trois degrés de plus par rapport à une cascade à deux niveaux de pression.

La résolution de ce problème montre que les règles d'optimalité régissant les échanges thermiques dans une cascade à trois niveaux de pression sont similaires aux règles d'optimalité établies pour une cascade à deux niveaux de pression. En effet, la puissance mécanique est minimale si, pour chacun des cycles Propane, Ethylène et Méthane, on a :

- la somme des rapports de température, dans le condenseur et le premier évaporateur du cycle, est égale à deux (équations (3.115), (3.117) et (3.119));
- les écarts moyens arithmétiques de température des évaporateurs du premier niveau de pression sont égaux (équations (3.116.1) et (3.118.1)). Ces deux règles d'optimalité concernent toujours le cycle Propane et Ethylène;

- les températures d'évaporation du premier, deuxième et troisième niveau de pression sont linéairement dépendantes (équations (3.116.2), (3.118.2) et (3.119.2)).

A l'optimum, et pour chaque cycle endorèversible faisant partie de la cascade, on a la conductance thermique du condenseur qui est égale à la somme des conductances thermiques des évaporateurs du premier , deuxième et troisième niveau de pression (équations (3.123)).

3.4 Exemple numérique

Afin de mettre en pratique toutes les conclusions et les résultats analytiques obtenus, on va considérer la liquéfaction d'un flux de gaz naturel dont la composition molaire après traitement (élimination de CO_2 , H_2S et H_2O) est donnée par le tableau 3.1. D'autres données du problème sont regroupées dans le tableau 3.2.

Tableau 3.1 Composition molaire du gaz naturel

Composants du Gaz naturel	Formule chimique	Mole %
Méthane	CH_4	85
Ethane	C_2H_6	9
Propane	C_3H_8	2
n-Butane	C_4H_{10}	1.5
n-Pentane	C_6H_{14}	0.5
Azote	N_2	2

[Hawlay, 1978]

Tableau 3.2 Données du problème d'optimisation

Température initiale du GN	T_0	294.27 K
Température finale du GN	T_F	122.05 K
Pression du GN	P	34.48 bar
Débit du GN		1415×10^3 m^3 (st)
Température initiale de l'eau	T_{C1}	297.05 K
Température finale de l'eau	t_{C1}	322.05 K

3.4.1 Courbe de refroidissement

La première étape de cet exemple numérique consiste à établir la courbe de refroidissement du gaz naturel. En utilisant l'équation d'état BWRS (voir chapitre 2), cette courbe peut être représentée sur le diagramme T-H suivant :

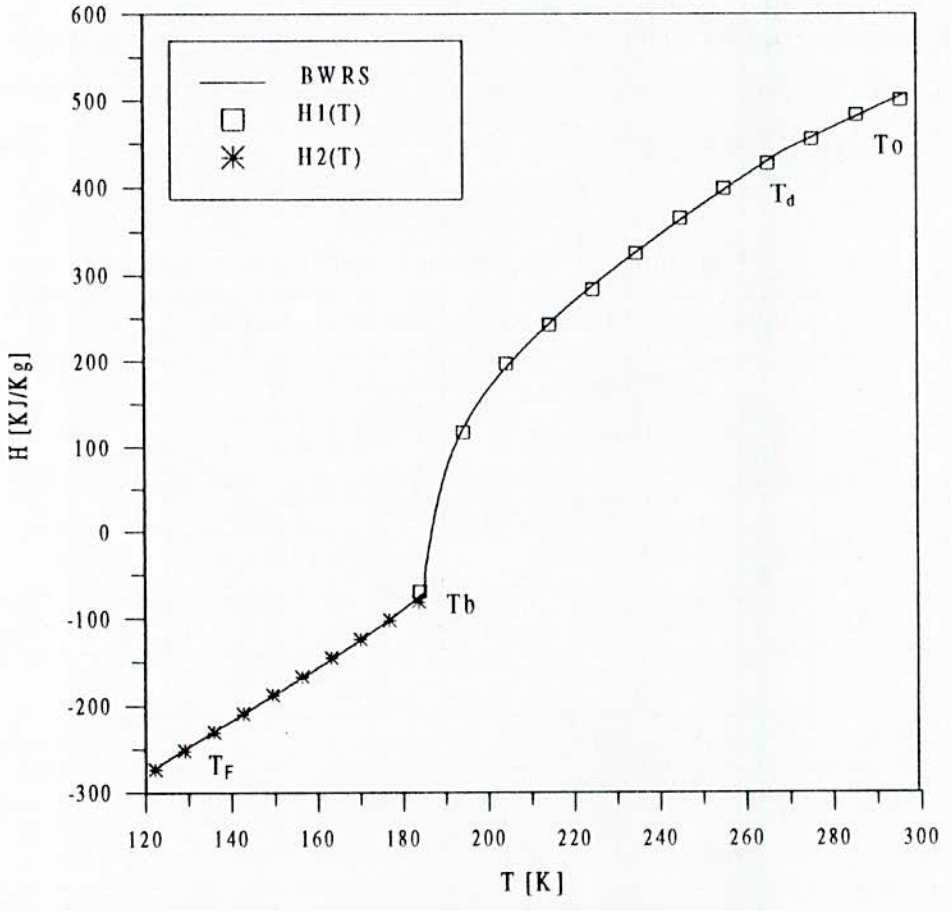


Fig. 3.7 Courbe de refroidissement du gaz naturel

avec :

T_b : température du point de bulle, égale à 183,76 K

T_d : température du point de rosée, égale à 268.54 K

L'allure de cette courbe montre que l'évolution de l'enthalpie du gaz naturel, en fonction de la température, peut être donnée par trois polynômes d'interpolation,tels que:

si $T_d < T < T_0$: polynôme d'interpolation de degré n=1;

si $T_b < T < T_d$: polynôme d'interpolation de degré n >1;

si $T_F < T < T_b$: polynôme d'interpolation de degré n=1.

Cependant, en vue de simplifier les calculs à effectuer ultérieurement (détermination des flux thermiques soutirés au gaz naturel), on a jugé préférable de réduire le nombre de ces polynômes d'interpolation, tels que :

si $T_b < T < T_0$

$$H(T) = H_1(T) = -283846 + 5790.58\ T - 47.11\ T^2 + 0.191013\ T^3 - 3.85673\ 10^{-4}\ T^4 + 3.10146\ 10^{-7}\ T^5$$

si $T_F < T < T_b$

$$H(T) = H_2(T) = -657.196 + 3.136\ T$$

Pour ces polynômes d'interpolation, l'erreur relative maximale commise sur l'enthalpie est de 5%; ce qui est généralement acceptable.

L'interpolation de l'enthalpie par un seul polynôme faciliterait d'avantage les calculs. Mais dans ce cas, les calculs ont montré que l'erreur relative commise sur ces valeurs est d'environ 80%; ce qui n'est pas acceptable. Par conséquent, on se limitera à deux polynômes d'interpolation.

3.4.2 Calcul des flux thermiques soutirés au gaz naturel

Une fois la courbe de refroidissement établie, il devient possible de déterminer les flux thermiques soutirés au gaz naturel par les différents cycles de la cascade, à savoir : cycle Propane, cycle Ethylène et cycle Méthane. En fait, il s'agit de répartir entre ces cycles la charge thermique totale $\dot{Q}_T$ soutirée au gaz naturel, de façon à minimiser la puissance mécanique de réfrigération (voir annexe B). Les résultats obtenus pour une cascade à un, deux et trois niveaux de pression sont regroupés dans les tableaux 3.3-3.5.

Note : Pour éviter toute confusion, on doit rappeler que, les flux thermiques soutirés au gaz naturel: $\dot{Q}_2$, $\dot{Q}_3$, $\dot{Q}_{2k}$ et $\dot{Q}_{3k}$ ont été notés, lors de la formulation mathématique du problème, par: $\dot{Q}_4$, $\dot{Q}_5$, $\dot{Q}_{4k}$ et $\dot{Q}_{5k}$, respectivement.

Tableau **3.3** Flux thermiques soutirés au gaz naturel dans une cascade à un niveau de pression

Evaporateurs	i	T_i [K]	t_i [K]	Q_i [kW]
Propane-GN	3	294	228	2798
Ethylène-GN	2	228	183	5165
Méthane-GN	1	183	122	2631

Tableau **3.4** Flux thermiques soutirés au gaz naturel dans une cascade à deux niveaux de pression

Evaporateurs	i	k	T_{ik} [K]	t_{ik} [K]	Q_{ik} [kW]
Propane-GN	3	2	294	255	1433
		1	255	228	1364.
Ethylène-GN	2	2	228	198	1905
		1	198	183	3260.
Méthane-GN	1	2	183	149	1459.
		1	149	122	1171.

Tableau **3.5** Flux thermiques soutirés au gaz naturel dans une cascade à trois niveaux de pression

Evaporateurs	i	k	T_{ik} [K]	t_{ik} [K]	Q_{ik} [kW]
Propane-GN	3	3	294	269.	846.
		2	269.	246.	1021.
		1	246.	228	930
Ethylène-GN	2	3	228.	207	1117
		2	207.	192	1640.
		1	192	183	2406.
Méthane-GN	1	3	183.	160.	1008
		2	160.	139.	870
		1	139.	122.	752

Pour la cascade simplement étagée, le gaz naturel est refroidi seulement par le Méthane, donc :

$T_1 = T_0$, $t_1 = T_F$ et $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_T$.

Les résultats donnés par les tableaux 3.3-3.5 montrent que, la répartition optimale des flux thermiques soutirés au gaz naturel entre les trois cycles, est telle que :

- pour T_0 (=294.27 K) < T < 228.67 K : le gaz naturel est refroidi par le Propane;

- pour 228.67 K < T < 183.87 K (≅Tb) : le gaz naturel est refroidi par l'Ethylène jusqu'à la température de point de rosée T_d (268.56K), puis liquéfié jusqu'à la température de point de bulle T_b (183.76 K);

-pour 183.87 K (≅Tb) < T < T_F (=122.05 K) : le gaz naturel liquide est sous refroidi par le Méthane.

3.4.3 Puissance de réfrigération minimale et températures optimales

Pour établir la courbe de variation de la puissance de réfrigération totale pour chacune des cascades étudiées, on crée une perturbation des fonctions objectives au voisinage des points optimaux (températures optimales) évalués. L'allure de ces courbes est donnée par la figure 3.8 . Il apparaît clairement sur cette figure que toutes les courbes passent par des minima. Ces derniers correspondent aux puissances de réfrigération minimales $\dot{W}_T^*/\dot{Q}_T$ données par les expressions analytiques (3.48) , (3.99) et (3.121).

On constate aussi que, la puissance de réfrigération minimale diminue avec l'augmentation du nombre de niveaux de pression de la cascade, résultat auquel on s'y attendait.

Les tableaux 3.6-3.8 regroupent les valeurs des températures optimales de condensation et d'évaporation, les écarts de températures à l'entrée des évaporateurs (Propane-GN, Ethylène-GN, Méthane-GN) et les puissances de réfrigération minimales pour les cascades à un, deux et trois niveaux de pression. Les résultats donnés par les tableaux ci-dessous permettent de noter la présence d'écarts de température négatifs, à la sortie des évaporateurs Propane-GN, Ethylène-GN et Méthane-GN : $T_{CE}^* > t$ d'où $\Delta t^* < 0$

Ces infaisabilités sont liées au fait d'avoir supposé des écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs, alors que les chutes de température du gaz naturel dans ces derniers sont si importantes que les solutions obtenus ont divergé. On peut constater d'après les résultats donnés par ces mêmes tableaux que, la déviation par rapport à une solution optimale faisable est d'autant moins importante que le nombre de niveaux de pression dans la cascade

augmente. En effet, on souligne dans un premier temps la disparition de solutions infaisables pour les évaporateurs Propane-GN et Ethylène-GN des cascades à deux et trois niveaux de pression. Dans un second temps on peut constater que les infaisabilités, qui persistent toujours au niveau des évaporateurs Méthane-GN, s'atténuent avec l'augmentation du nombre de niveaux de pression. Ces infaisabilités ne peuvent être évitées, même si on diminuait la conductance thermique globale.

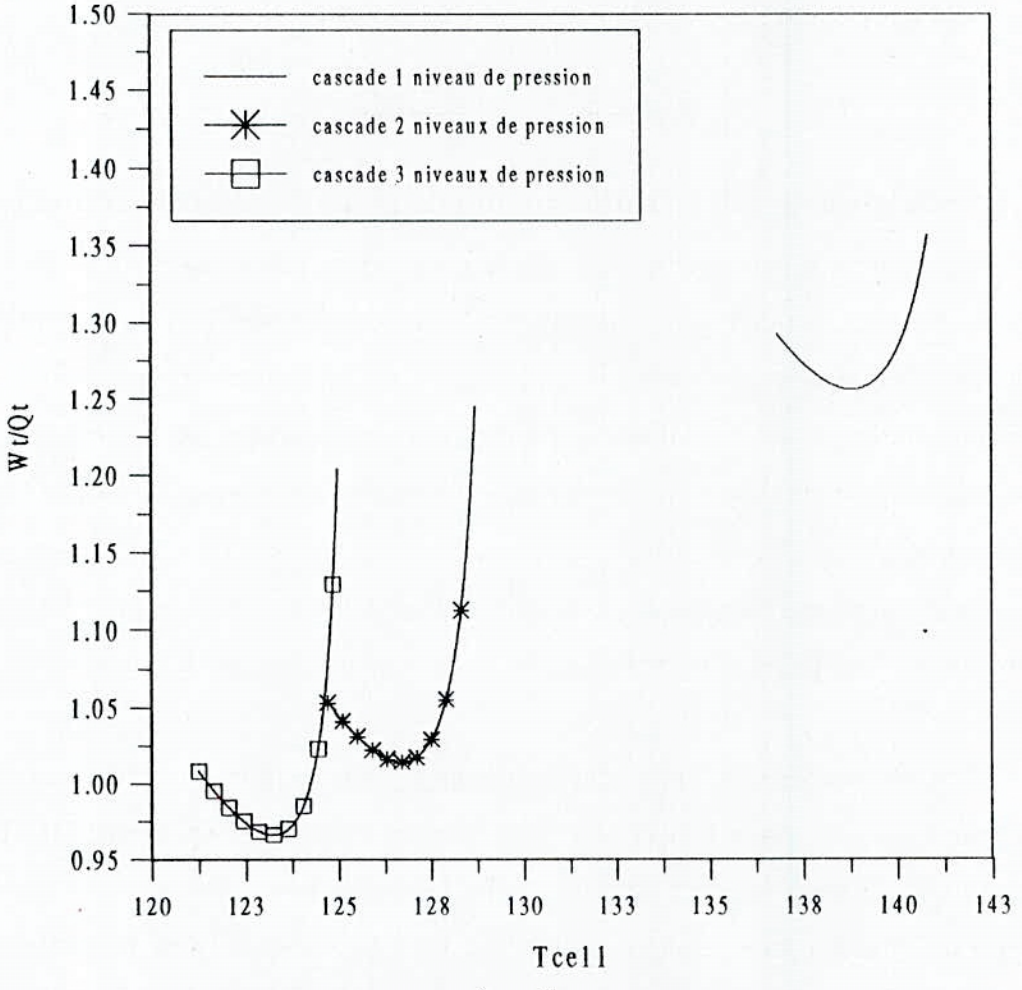


Fig . 3.8 Variation de $\dot{W}_T / \dot{Q}_T$ en fonction de T_{CE11} pour les cascades à un, deux et trois niveaux de pression

Tableau 3.6 Puissance de réfrigération minimale, températures optimales de condensation et d'évaporation pour une cascade à un niveau de pression. C_T = 1667 kW/K

Cycles	i	T_{HCi}^* [K]	T_{CEi}^* [K]	Δti^* [K]	W_T^*/Q_T	Cop^*
Propane	3	354	231.	-3	1.26	0.79
Ethylène	2	261	185	-1		
Méthane	1	206	138.	-16.		

Tableau 3.7 Puissance de réfrigération minimale, températures optimales de condensation et d'évaporation pour une cascade à deux niveaux de pression. C_T =2222 kW/K

Cycles	i	k	$T_{HCi\,k}^*$ [K]	$T_{CEi\,k}^*$ [K]	Δti^* [K]	W_T^*/Q_T	Cop^*
Propane	3	2	340.	251	3.	1.08	0.93
		1		221	7.		
Ethylène	2	2	214	197	1		
		1		176	7		
Méthane	1	2	191	154	-5		
		1		126	-3		

Tableau 3.8 Puissance de réfrigération minimale, températures optimales de condensation et d'évaporation pour une cascade à trois niveaux de pression. C_T =2777 kW/K

Cycles	i	k	$T_{HCi\,k}^*$ [K]	$T_{CEi\,k}^*$ [K]	Δti^* [K]	W_T^*/Q_T	Cop^*
Propane	3	3	332	263	6.	0.97	1.03
		2		240.	5		
		1		221	6.		
Ethylène	2	3	237	204	3.		
		2		187	5		
		1		176.	7		
Méthane	1	3	188	161	-1		
		2		141	-1		
		1		123	-1		

3.4.4 Conductances thermiques et écarts de températures dans les échangeurs de chaleur

D'après les tableaux (3.9)-(3.11), on peut vérifier qu'à l'optimum, la répartition des conductances thermiques des échangeurs de chaleur est régie par une loi simple donnée par les relations (3.64), (3.114) et (3.123). En effet, pour chaque cycle de réfrigération faisant partie de la cascade, la conductance thermique du condenseur est égale à la somme des conductances thermiques des évaporateurs des différents niveaux de pression. Donc, les échangeurs de chaleur de plus grandes conductances thermiques (plus grandes tailles) correspondent aux niveaux de température supérieurs, où les flux thermiques à évacuer sont plus importants.

Tableau 3.9 Conductances thermiques des échangeurs de chaleur d'une cascade à un niveau de pression.[kW/K]

Echangeur	Ethylène	G.N	Eau
Propane	430.92	94.12	525.00
Méthane	185.67	185.67	–
G.N	245.25	–	–

Tableau 3.10 Conductances thermiques des échangeurs de chaleur d'une cascade à deux niveaux de pression. [kW/K]

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	2	574.40	61.92	703.40
	1		66.90	
Méthane	2	240.93	121.35	–
	1		119.60	
G.N	2	114.50	–	-
	1	219.00		

Tableau 3.11 Conductances thermiques des échangeurs de chaleur d'une cascade à trois niveaux de pression, [kW/K].

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	3	717.30	45.32	881.44
	2		59.78	
	1		59.00	
Méthane	3	297.60	100.20	–
	2		99.25	
	1		98.21	
G.N	3	82.40	–	–
	2	131.75		
	1	205.50		

Pour ce qui est des écarts de température, ils sont regroupés dans les tableaux (3.12)-(3.14). La lecture de ces derniers permet de vérifier, pour chacun des cycles Propane et Ethylène faisant partie des cascades étudiées, l'égalité des écarts moyens arithmétiques de température dans les évaporateurs d'un même niveau de pression. On constate aussi que les écarts de température de plus faibles valeurs correspondent aux niveaux de température inférieurs; ce qui correspond au fait que plus le niveau de température est bas, plus faible devra être l'écart de température.

Tableau 3.12 Ecarts de température moyens arithmétiques dans les échangeurs de chaleur d'une cascade à un niveau de pression, [K].

Echangeur	Ethylène	G.N	Eau
Propane	29	29	45
Méthane	21	14	–
G.N	21	–	–

Tableau 3.13 Ecarts de température moyens arithmétiques dans les échangeurs de chaleur d'une cascade à deux niveaux de pression, [K].

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	2	20	23	31
	1		20	
Méthane	2	14	12.	–
	1		9	
G.N	2	16	–	–
	1	14		

Tableau 3.14 Ecarts de température moyens arithmétiques dans les échangeurs de chaleur d'une cascade à trois niveaux de pression, [K].

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	3	15.	18	23
	2		17	
	1		15	
Méthane	3	11	10	–
	2		8	
	1		7	
G.N	3	13	–	–
	2	12		
	1	11		

Ces écarts paraissent élevés; mais il y a lieu de noter qu'il s'agit d'écarts hypothétiques qui tiennent comptent des irréversibilités internes aux cycles.

Finalement, on peut dire que, l'approximation mathématique utilisant des écarts moyens arithmétiques de température n'est acceptable que pour de faibles variations de température du fluide à traiter, ou encore pour un nombre de niveaux de pression important (k>4); bien qu'en pratique la complexité résultante pourrait ne pas justifier la réduction supplémentaire de l'énergie de liquéfaction obtenue.

Partie 2:

MODELE MATHEMATIQUE RELATIF AUX ECARTS DE TEMPERATURES MOYENS LOGARITHMIQUES.

Dans cette deuxième partie, le modèle mathématique qui consiste à optimiser la puissance mécanique des cascades à trois cycles de réfrigération endoréversibles adoptera des écarts moyens logarithmiques de température au lieu des écarts moyens arithmétiques. Cette nouvelle approche ne se justifie que pour les échanges thermiques avec le gaz naturel où l'on note d'importantes variations de température de ce dernier. Afin d'améliorer d'avantage les résultats, on propose de considérer également un écart moyen logarithmique au niveau du condenseur Propane-Eau .

La même procédure de résolution, utilisée précédemment, sera adoptée dans cette partie. Pour cela, on propose de traiter la solution optimale pour une cascade simplement étagée, puis d'étendre les résultats obtenus à une cascade imbriquée à un, deux et trois niveaux de pression.

3.5 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles simplement étagés.

Le cycle de la cascade à trois cycles de réfrigération endoréversible simplement étagés a été représenté auparavant par la figure 3.3. La puissance de réfrigération à minimiser est donc donnée par la relation (3.14). On rappelle que ce problème d'optimisation est à trois degrés de liberté. La fonction objective à minimiser est sujette aux contraintes suivantes :

$$C_T = \left[Lm_1^{-1} + \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot Am_2^{-1} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2}}{T_{CE1} \cdot T_{CE2}} \cdot Am_3^{-1} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE1} \cdot T_{CE2} \cdot T_{CE3}} \cdot Lm_0^{-1} \right] \cdot \dot{Q}_1 \qquad (3.124)$$

avec les définitions des écarts de température considérées comme contraintes:

$$Lm_0 = \frac{\Delta T_{C1} - \Delta t_{C1}}{\ln \Delta T_{C1} - \ln \Delta t_{C1}} \qquad \Delta T_{C1} = T_{HC3} - T_{C1}$$

$$Lm_1 = \frac{\Delta T_1 - \Delta t_1}{\ln \Delta T_1 - \ln \Delta t_1} \qquad \Delta t_{C1} = T_{HC3} - t_{C1} \qquad (3.125)$$

$$Am_2 = T_{HC1} - T_{CE2} \qquad \Delta T_1 = T_1 - T_{CE1}$$

$$Am_3 = T_{HC2} - T_{CE3} \qquad \Delta t_1 = t_1 - T_{CE1}$$

En appliquant la méthode d'optimisation décrite en annexe C, on pourra établir les trois règles d'optimalité correspondant aux trois degrés de liberté du problème:

Cycle Propane : $$\frac{Gm_0^*}{Am_3^*} = \frac{T_{HC3}^*}{T_{CE3}^*} \tag{3.126}$$

Cycle Ethylène : $$\frac{Am_3^*}{Am_2^*} = \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE2}^*} \tag{3.127}$$

Cycle Méthane : $$\frac{Am_2^*}{Gm_1^*} = \frac{T_{HC1}^*}{T_{CE1}^*} \tag{3.128}$$

avec les écarts moyens géométriques définis par :

$$\begin{aligned} Gm_0^* &= \left(\Delta T_{C1}^* \cdot \Delta t_{C1}^*\right)^{\frac{1}{2}} \\ Gm_1^* &= \left(\Delta T_1^* \cdot \Delta t_1^*\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.129}$$

On constate qu'une formulation du problème d'optimisation qui considère des écarts moyens logarithmiques (Lm), aboutit à des règles d'optimalité exprimées en termes d'écarts moyens géométriques (Gm) et non logarithmiques; ce qui n'était pas le cas pour le premier modèle (équations (3.16a)). Par ailleurs, ces règles d'optimalité sont les mêmes que celles établies par le premier modèle mathématique. Seule la définition de l'écart de température change. En effet, lorsque les écarts de température à l'entrée et sortie des échangeurs de chaleur sont sensiblement égaux ($\Delta T \cong \Delta t$), on aura des écarts moyens géométriques et arithmétiques de température pratiquement égaux ($Gm \cong Am$).

Les températures optimales T_{HCi}^* et T_{CEi}^* (i=1à3) sont données par la solution du système d'équation non linéaire (3.124)-(3.129) et des contraintes (3.19). On doit noter que la résolution de ce système d'équation non linéaire nécessite des méthodes numériques itératives. Le seul résultat analytique explicite obtenu concerne la répartition des conductances thermiques entre les échangeurs de chaleur du cycle Ethylène :

$$C_2^* = C_3^* \tag{3.130}$$

3.6 Optimisation de la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles imbriqués

3.6.1 Cascade à un niveau de pression

D'après le cycle de la cascade à un niveau de pression donné par la figure 3.4a, on définit les écarts de température à l'entrée et à la sortie des évaporateurs Méthane-GN, Ethylène-GN et Propane-GN, par :

$$\begin{aligned} \Delta T_i &= T_i - T_{CEi} \\ \Delta t_i &= t_i - T_{CEi} \end{aligned} \qquad (i=1\text{à}3) \qquad (3.131)$$

avec : $T_i = t_{i+1}$ (i=1à 2)

On doit rappeler que la minimisation de la puissance de réfrigération d'une cascade à un niveau de pression est problème à cinq degrés de liberté. Dans ce cas, la fonction objective à optimiser, donnée par la relation (3.30), est sujette aux contraintes (3.132) et (3.133) suivantes :

$$\begin{aligned} C_T = &\left[Lm_1^{-1} + \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot Am_2^{-1} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2}}{T_{CE1} \cdot T_{CE2}} \cdot Am_3^{-1} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE1} \cdot T_{CE2} \cdot T_{CE3}} \cdot Lm_0^{-1} \right] \dot{Q}_1 + \\ &\left[Lm_4^{-1} + \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot Am_3^{-1} + \frac{T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE2} \cdot T_{CE3}} \cdot Lm_0^{-1} \right] \dot{Q}_4 + \left[Lm_5^{-1} + \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \cdot Lm_0^{-1} \right] \dot{Q}_5 \end{aligned} \qquad (3.132)$$

$$\begin{aligned} Lm_0 &= \frac{\Delta T_{C1} - \Delta t_{C1}}{\ln \Delta T_{C1} - \ln \Delta t_{C1}} & Am_2 &= T_{HC1} - T_{CE2} \\ Lm_1 &= \frac{\Delta T_1 - \Delta t_1}{\ln \Delta T_1 - \ln \Delta t_1} & Am_3 &= T_{HC2} - T_{CE3} \\ Lm_4 &= \frac{\Delta T_2 - \Delta t_2}{\ln \Delta T_2 - \ln \Delta t_2} & \Delta T_{C1} &= T_{HC3} - T_{C1} \\ Lm_5 &= \frac{\Delta T_3 - \Delta t_3}{\ln \Delta T_3 - \ln \Delta t_3} & \Delta t_{C1} &= T_{HC3} - t_{C1} \\ & & \Delta T_i &= T_i - T_{CEi} \\ & & \Delta t_i &= t_i - T_{CEi} \end{aligned} \qquad (3.133)$$

avec : i = 1à 3

En suivant les mêmes étapes de calcul du paragraphe 3.3.1, on obtient les conditions suivantes sous les quelles $\dot{W}_T/\dot{Q}_T$ est minimale:

Cycle Propane

1ére Règle : $$\frac{Gm_0^{\bullet}}{Am_3^{\bullet}} = \frac{T_{HC3}^{\bullet}}{T_{CE3}^{\bullet}} \quad (3.134)$$

2éme Règle : $$Gm_5^{\bullet} = Am_3^{\bullet} \quad (3.135)$$

Cette règle d'optimalité traduit l'égalité entre l'écart moyen arithmétique de température dans l'échangeur Propane-Ethylène et l'écart moyen géométrique de température dans l'évaporateur Propane-GN.

Cycle Ethylène

1ére Règle : $$\frac{Am_3^{\bullet}}{Am_2^{\bullet}} = \frac{T_{HC2}^{\bullet}}{T_{CE2}^{\bullet}} \quad (3.136)$$

2éme Règle : $$Gm_4^{\bullet} = Am_2^{\bullet} \quad (3.137)$$

L'équation (3.137) montre qu'à l'optimum, l'écart moyen arithmétique dans l'échangeur Ethylène-Méthane est égal à l'écart moyen géométrique de température dans l'évaporateur Ethylène-GN. Il y a lieu de noter que lorsque les profils de température sont parallèles comme pour les échanges thermiques entre les réfrigérants purs, les trois types d'écarts moyens sont égaux : Am = Lm = Gm . Il n'y a que pour les échanges avec l'eau et le gaz naturel qu'on peut noter des différences.

Cycle Méthane

1ére Règle : $$\frac{Am_2^{\bullet}}{Gm_1^{\bullet}} = \frac{T_{HC1}^{\bullet}}{T_{CE1}^{\bullet}} \quad (3.138)$$

où : $$Gm_0^{\bullet} = \left(\Delta T_{C1}^{\bullet} \cdot \Delta t_{C1}^{\bullet}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$Gm_1^{\bullet} = \left(\Delta T_1^{\bullet} \cdot \Delta t_1^{\bullet}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.139)$$
$$Gm_4^{\bullet} = \left(\Delta T_2^{\bullet} \cdot \Delta t_2^{\bullet}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$Gm_5^{\bullet} = \left(\Delta T_3^{\bullet} \cdot \Delta t_3^{\bullet}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour déterminer les températures optimales T_{HCi}^{*} et T_{CEi}^{*} (i=1 à 3), on doit résoudre le système d'équations non linéaires (3.132)-(3.139), ce qui nécessite des méthodes de résolution numériques. Par conséquent, les performances de la cascade ne peuvent être exprimées explicitement, mais elles seront évaluées numériquement après la détermination des températures optimales.

Une comparaison faite entre les relations (3.126)-(3.128) et (3.16a), ou (3.134)-(3.138) et (3.55)-(3.59) montre que, les règles d'ptimalité relatives aux écarts logarithmiques peuvent être déduites de celles relatives aux écarts arithmétiques; pour cela il suffit simplement de remplacer les écarts moyens arithmétiques de température, dans les échangeurs des sources froides et chaude du cycle cascade, par les écarts moyens géométriques de température correspondant. Ces constatations vont permettre l'établissement immédiat des règles d'optimalité pour une cascade à deux et trois niveaux de pression.

3.6.2 Cascade à deux niveaux de pression

Le problème d'optimisation, relatif à une cascade à deux niveaux de pression, est à huit degrés de liberté. La fonction objective exprimée par la relation (3.70) est sujette aux contraintes (3.140) et (3.141) suivantes :

$$C_T = \sum_{k=1}^{2}\left[Lm_{1k}^{-1} + \frac{T_{HC1}}{T_{CE1k}} \cdot Am_2^{-1} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2}}{T_{CE1k} \cdot T_{CE21}} \cdot Am_3^{-1} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE1k} \cdot T_{CE21} \cdot T_{CE31}} \cdot Lm_0^{-1} \right] \dot{Q}_{1k} +$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[Lm_{4k}^{-1} + \frac{T_{HC2}}{T_{CE2k}} \cdot Am_3^{-1} + \frac{T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE2k} \cdot T_{CE31}} \cdot Lm_0^{-1} \right] \dot{Q}_{4k} + \qquad (3.140)$$
$$\sum_{k=1}^{2}\left[Lm_{5k}^{-1} + \frac{T_{HC3}}{T_{CE3k}} \cdot Lm_0^{-1} \right] \dot{Q}_{5k}$$

où :

$$Lm_0 = \frac{\Delta T_{C1} - \Delta t_{C1}}{\ln \Delta T_{C1} - \ln \Delta t_{C1}} \qquad Am_2 = T_{HC1} - T_{CE21}$$

$$Lm_{1k} = \frac{\Delta T_{1k} - \Delta t_{1k}}{\ln \Delta T_{1k} - \ln \Delta t_{1k}} \qquad Am_3 = T_{HC2} - T_{CE31}$$

$$\Delta T_{C1} = T_{HC3} - T_{C1} \qquad (3.141)$$

$$Lm_{4k} = \frac{\Delta T_{2k} - \Delta t_{1k}}{\ln \Delta T_{2k} - \ln \Delta t_{1k}} \qquad \Delta t_{C1} = T_{HC3} - t_{C1}$$

$$\Delta T_{ik} = T_{ik} - T_{CEik}$$

$$Lm_{5k} = \frac{\Delta T_{3k} - \Delta t_{3k}}{\ln \Delta T_{3k} - \ln \Delta t_{3k}} \qquad \Delta t_{ik} = t_{ik} - T_{CEik}$$

avec : i= 1à 3 et k= 1 à 2

Suite aux remarques faites ci-dessus, on peut, à partir des résultats obtenus précédemment, établir les règles d'optimalité régissant les échanges thermiques dans une cascade à deux niveaux de pression; et ceci en remplaçant, dans les équations (3.105)-(3.109.2), les écarts moyens arithmétiques Am_0 , Am_{1k} , Am_{4k} , et Am_{5k} (k=1à2), par les écarts moyens géométriques Gm_0 , Gm_{1k} , Gm_{4k} , et Gm_{5k} (k=1à2), respectivement :

Cycle Propane

1ére Règle : $$\frac{Gm_0^*}{Am_3^*} = \frac{T_{HC3}^*}{T_{CE3}^*} \qquad (3.142)$$

2éme - 3éme Règle : $$\frac{Am_0^*}{Gm_{5k}^*} = \frac{T_{HC3}^*}{T_{CE3k}^*} \qquad (k=1à2) \qquad (3.143)$$

La manipulation des équations (3.142) et (3.143) permet d'exprimer la deuxième et troisième règle d'optimalité comme suit :

pour k=1 : $$Gm_5^* = Am_3^* \qquad (3.143.1)$$

pour k=2 : $$\frac{Gm_{51}^*}{T_{E31}} = \frac{Gm_{52}^*}{T_{E32}} \qquad (3.143.2)$$

Cycle Ethylène

1ére Règle : $$\frac{Am_3^*}{Am_2^*} = \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE2}^*} \qquad (3.144)$$

2éme - 3éme Règle : $$\frac{Am_3^*}{Gm_{4k}^*} = \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE2k}^*} \qquad (k=1à2) \qquad (3.145)$$

Les deux dernières règles d'optimalité du cycle Ethylène peuvent être exprimées autrement, telles que :

pour k=1 : $$Gm_4^* = Am_2^* \qquad (3.145.1)$$

pour k=2 : $$\frac{Gm_{41}^*}{T_{E21}} = \frac{Gm_{42}^*}{T_{E22}} \qquad (3.145.2)$$

Cycle Méthane

$$1^{ére}\text{-}2^{ème}\ \text{Règle}\ \frac{Am_2^*}{Gm_{1k}^*} = \frac{T_{HC1}^*}{T_{CE1k}^*} \qquad (k=1à2) \tag{3.146}$$

$$\text{pour k=1 :} \quad \frac{Am_2^*}{Gm_{11}^*} = \frac{T_{HC1}^*}{T_{CE11}^*} \tag{3.146.1}$$

$$\text{pour k=2 :} \quad \frac{Gm_{11}^*}{T_{E11}} = \frac{Gm_{12}^*}{T_{E12}} \tag{3.146.2}$$

avec :

$$\begin{aligned} Gm_0^* &= \left(\Delta T_{C1}^* \cdot \Delta t_{C1}^*\right)^{\frac{1}{2}} \\ Gm_{1k}^* &= \left(\Delta T_{1k}^* \cdot \Delta t_{1k}^*\right)^{\frac{1}{2}} \\ Gm_{4k}^* &= \left(\Delta T_{2k}^* \cdot \Delta t_{2k}^*\right)^{\frac{1}{2}} \\ Gm_{5k}^* &= \left(\Delta T_{3k}^* \cdot \Delta t_{3k}^*\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \qquad (k=1à2) \tag{3.147}$$

Les températures de condensation et d'évaporation optimales T_{HCik}^* et T_{CEik}^* (i=1à3), (k =1à2) seront données par la résolution du système non linéaire formé par les équations (3.140)-(3.147).

3.6.3 Cascade à trois niveaux de pression

Afin de résoudre le problème d'optimisation pour une cascade à trois niveaux de pression, on procédera de la même manière que pour le cas d'une cascade à deux niveaux (section 3.6.2). De ce fait, les règles d'optimalité qui régissent les échanges de chaleur seront identiques à celles établies pour une cascade à deux niveaux de pression, mais avec un paramètre k variant de 1à 3 au lieu de 1à 2.

Résumé

Pour résumer la deuxième partie de ce chapitre, on peut dire que le modèle mathématique relatif aux écarts moyens logarithmiques a abouti à des règles d'optimalité identiques à celles établies par le premier modèle; seule la définition de l'écart de température a changé.

3.7 Exemple numérique

En considérant les données de l'exemple numérique précèdent, cette nouvelle approche mathématique permet de noter les résultats suivants:

3.7.1 Flux thermiques soutirés au gaz naturel

Les flux thermiques soutirés au gaz naturel sont déjà donnés par les tableaux 3.3-3.5, car leur détermination ne dépend pas du modèle mathématique choisi.

3.7.2 Puissance de réfrigération minimale et températures optimales

Les courbes de variation de la puissance mécanique totale des cascades étudiées peuvent être tracées suite à une perturbation des fonctions objectives au voisinage des points optimaux (températures optimales) évalués. Le résultat de cette perturbation est représenté par la figure 3.9

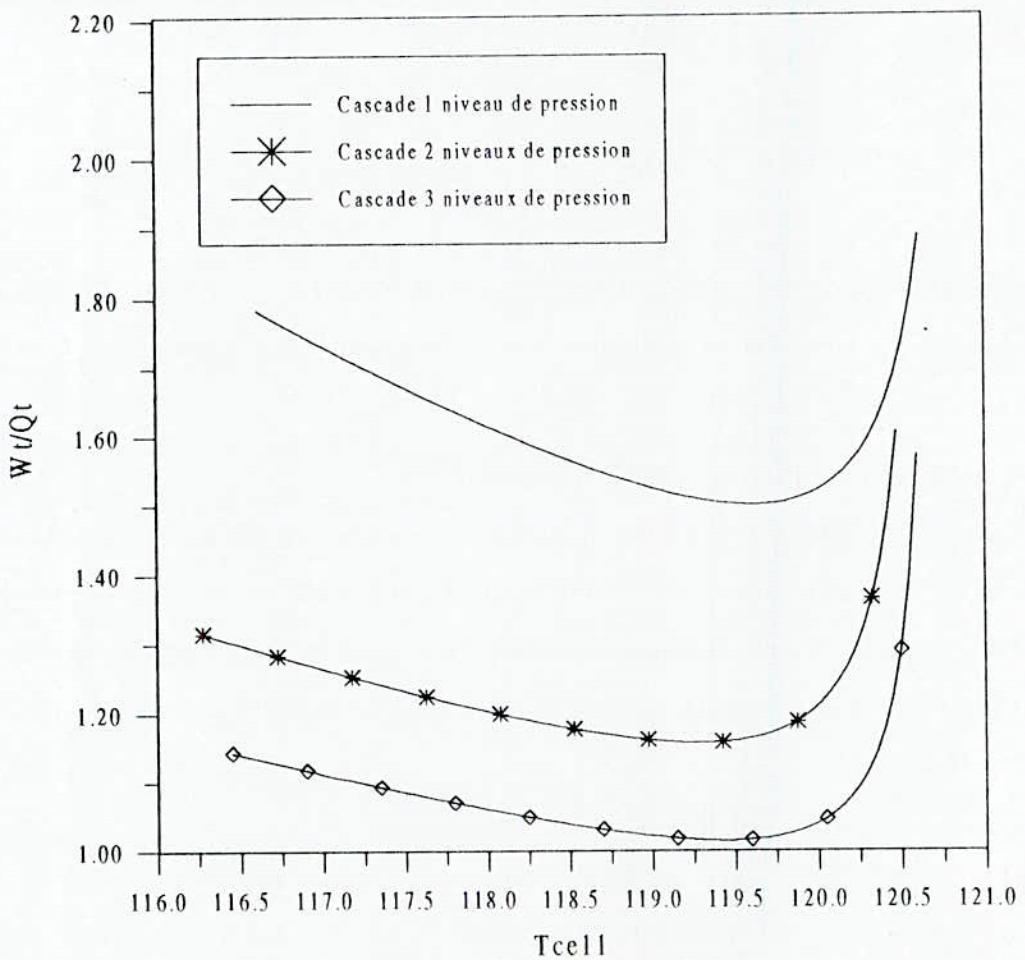


Fig . 3.9 Variation de $\dot{W}_T / \dot{Q}_T$ en fonction de T_{CE11}
pour les cascades à un, deux et trois niveaux de pression

Cette dernière montre la variation de la puissance mécanique, par unité de flux thermique soutiré au gaz naturel, en fonction de la température de réfrigération T_{CE11} pour des cascades à un, deux et trois niveaux de pression. Les minima $\dot{W}_T^*/\dot{Q}_T$ données par les tableaux (3.15)-(3.17) sont respectivement 1.50 ; 1.16 et 1.01. Ces valeurs sont supérieures à celles déterminées par la premier modèle mathématique(voir tableaux (3.6)-(3.8)); ceci s'explique par le fait que pour une conductance thermique globale donnée, l'hypothèse des écarts moyens arithmétiques de température sous estime les températures de réfrigération dans les échangeurs de chaleur, et par conséquent sous estime les puissances mécaniques.

Par ailleurs, l'augmentation du nombre de niveaux de pression dans une cascade engendre systématiquement une diminution conséquente des puissances mécaniques optimales (voir tableaux (3.15)-(3.17)). En effet, on gagne 22.66 % en passant de un à deux niveaux de pression et 12.93 % de deux à trois niveaux. Comme repère pratique, on peut remarquer que la puissance de liquéfaction prédite par la cascade de cycles endoreversibles à trois niveaux de pression est d'environ 53.97% inférieure à la puissance nominale affichée à l'usine ex-Camel: 21789ch/millions m^3/j (617 ch/MMSCFD)[Ait-Ali, 1975] contre seulement 10041 ch/millions m^3/j (284 ch/MMSCFD) dans cette étude. Il y a lieu d'ajouter que ce modèle ne prend pas en compte les irréversibilités internes telles que les pertes de charges et les rendements des compresseurs en particulier.

Les tableaux (3.15)-(3.17) regroupent aussi les valeurs des températures de condensation et d'évaporation optimales ainsi que les écarts de températures à la sortie des évaporateurs Propane-GN, Ethylène-GN et Méthane-GN. On constate que ces températures optimales sont plus ou moins proches de celles données par le premier modèle mathématique (voir tableaux (3.6)-(3.8)). En fait, on note une différence allant de 1% à 13.8% pour une cascade à un niveau de pression, 0.73% à 5.48% pour une cascade à deux niveaux de pression et, finalement, 0.31 % à 3.17% pour une cascade à trois niveaux de pression. On pourrait donc utiliser les écarts moyens arithmétiques, obtenir des règles d'optimalité analytiques et optimiser un cycle cascade par perturbation autour des optima analytiques.

Tableau 3.15 Puissance de réfrigération minimale, températures de condensation et d'évaporation optimales pour une cascade à un niveau de pression. C_T = 1667 kW/K

cycles	i	T_{HCi}^* [K]	T_{CEi}^* [K]	Δt_i^* [K]	$\dot{W}_T^*/\dot{Q}_T$	Cop^*
Propane	3	358	217	10	1.50	0.66
Ethylène	2	240	175	7		
Méthane	1	196	119	2		

Tableau 3.16 Puissance de réfrigération minimale, températures de condensation et d'évaporation optimales pour une cascade à deux niveaux de pression. C_T =2222 kW/K

Cycles	i	k	$T_{HCi\,k}^*$ [K]	$T_{CEi\,k}^*$ [K]	Δt_i^* [K]	$\dot{W}_T^*/\dot{Q}_T$	Cop^*
Propane	3	2	343	245	10	1.16	0.86
		1		218	10		
Ethylène	2	2	237	192	6		
		1		175	8		
Méthane	1	2	189	146	3.		
		1		119	2		

Tableau 3.17 Puissance de réfrigération minimale, températures de condensation et d'évaporation optimales pour une cascade à trois niveaux de pression. C_T =2777 kW/K

Cycles	i	k	$T_{HCi\,k}^*$ [K]	$T_{CEi\,k}^*$ [K]	Δt_i^* [K]	$\dot{W}_T^*/\dot{Q}_T$	Cop^*
Propane	3	3	335	258	8	1.01	0.99
		2		237	9		
		1		219	8.		
Ethylène	2	3	235	201	6.		
		2		186	6		
		1		176	7		
Méthane	1	3	187	156	3		
		2		136	2		
		1		119	2		

La lecture de ces tableaux permet de vérifier la faisabilité des solutions du problème d'optimisation. Ces dernières sont données par la résolution de systèmes d'équations non linéaires, faisant appel ainsi à des méthodes itératives dont la convergence dépend du choix des valeurs d'itération initiales. Il est donc important de souligner que, dans notre cas les solutions optimales données par le premier modèle mathématique constituent un choix judicieux de ces valeurs

3.7.3 Conductances thermiques et écarts de température dans les échangeurs de chaleur

Concernant les conductances thermiques des échangeurs de chaleur, à l'optimum, leur répartition n'est dictée par aucune règle explicite; seul un résultat numérique direct peut être fourni par les tableaux (3.18)-(3.20). On remarque, toujours, que les échangeurs de chaleur de plus grandes conductances thermiques (plus grandes tailles) correspondent aux niveaux de température supérieurs, où les flux thermiques à évacuer sont plus importants.

Tableau 3.18 Conductances thermiques des échangeurs de chaleur d'une cascade à un niveau de pression, [kW/K].

Echangeur	Ethylène	G.N	Eau
Propane	462.33	83.33	553.25
Méthane	210.50	139.54	_
G.N	217.71	_	_

Tableau 3.19 Conductances thermiques des échangeurs de chaleur d'une cascade à deux niveaux de pression, [kW/K].

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	2	600.53	58.13	715.44
	1		64.58	
Méthane	2	257.70	102.90	_
	1		101.76	
G.N	2	106.50	_	_
	1	214.73		

Tableau 3.20 Conductances thermiques des échangeurs de chaleur d'une cascade à trois niveaux de pression, [kW/K].

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	3	747.17	43.73	878.50
	2		58.67	
	1		58.00	
Méthane	3	314.14	88.78	–
	2		88.14	
	1		87.42	
G.N	3	78.45	–	–
	2	128.82		
	1	205.90		

La répartition des températures, donnée par le deuxième modèle mathématique, montre d'après les tableaux (3.21)-(3.23) que les écarts de température diminuent en allant vers les niveaux de température moindres; ce qui permet de conclure encore que la réduction et la minimisation des puissances de réfrigération correspond bien à la minimisation des irréversibilités de transfert thermique pour l'objectif assigné.

Tableau 3.21 Ecarts de température moyens logarithmiques dans les échangeurs de chaleur d'une cascade à un niveau de pression,[K].

Echangeur	Ethylène	G.N	Eau
Propane	28	33	47
Méthane	20	18	–
G.N	23	–	–

Tableau 3.22 Ecarts de température moyens logarithmiques dans les échangeurs de chaleur d'une cascade à deux niveaux de pression, [K].

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	2	19	24	31
	1		21	
Méthane	2	14	14	
	1		11	_
G.N	2	17		
	1	15	_	_

Tableau 3.23 Ecarts de température moyens logarithmiques dans les échangeurs de chaleur d'une cascade à trois niveaux de pression, [K].

Echangeur	k	Ethylène	G.N	Eau
Propane	3	15.	19	24
	2		17	
	1		16	
Méthane	3	11	11	_
	2		9	
	1		8	
G.N	3	14	_	_
	2	12		
	1	11		

3.7.4 Détermination des niveaux de pression dans les cycles cascades étudiés

La résolution des problèmes d'optimisation posés consistait à déterminer, pour un cycle cascade, les températures de condensation T_{HC} et d'évaporation T_{CE}, pour lesquelles la puissance mécanique est minimale. Cependant, il a été noté au début de ce chapitre que, pour un cycle de réfrigération à compression de vapeur, les températures T_{HC} sont des températures fictives (équivalentes) (voir figure 3.2) et non des températures réelles de condensation du fluide frigorigène; en effet, il y a d'abord désurchauffe à température variable puis condensation à température constante. Ainsi, pour compléter la solution des problèmes traités, on doit déterminer les températures des fluides frigorigènes à l'entrée et sortie du condenseur du cycle, notées respectivement par T_5 et T_6 (voir figure 3.2), et les niveaux de pression.

Pour cela on a élaboré un programme informatique en Fortran qui permet de déterminer tous les paramètres thermodynamiques réels des cycles de réfrigération à compression de vapeur (états (1), (5), (6) et (4)) faisant partie des cascades à un, deux et trois niveaux de pression. Ce code de calcul est composé d'un programme principal qui permet la lecture des données des réfrigérants purs (Propane, Ethylène et Méthane) et fait appel à quelques subroutines afin d'effectuer les calculs désirés dont les détailles sont présentés dans l'annexe E. Seuls les résultats finaux relatifs à ce calcul seront présentés ci-dessous.

On va donc s'intéresser à la détermination des paramètres thermodynamiques, notamment des niveaux de pression, correspondant aux températures optimales de condensation et d'évaporation des cycles cascades étudiés précédemment (voir tableaux 3.15-3.17). Les résultats de ce calcul sont donnés par les tableaux (3.24a)-(3.26c) pour une cascade à un, deux et trois niveaux de pression , respectivement.

3.7.4.1 Cascade à un niveau de pression

Les tableaux (3.24a)-(3.24c) regroupent les paramètres thermodynamiques des cycles Méthane, Ethylène et Propane faisant partie de la cascade à un, deux et trois niveaux de pression.

La lecture des tableaux (3.24a) et (3.24c) permet essentiellement de remarquer que la température du Méthane à la sortie du compresseur(T_5=256.96 K) est nettement supérieure à la température d'évaporation du Propane (T_1 = 217.83 K); par conséquent, une amélioration du cycle cascade aura lieu si on considère un échange de chaleur supplémentaire entre le Méthane et le Propane.

Tableau 3.24a Paramètres thermodynamiques du cycle Méthane faisant partie de la cascade à un niveau de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1	119.	1.85	236.57	9.33
2	196.	12.53	378.64	9.33
3	196	128.22	37.31	6.87
4	119	1.85	-56.41	6.87
5	256	35.16	487.07	9.33
6	182	35.16	4.88	6.87

Tableau 3.24b Paramètres thermodynamiques du cycle Ethylène faisant partie de la cascade à un niveau de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1	175	1.44	204.20	6.99
2	246	5.79	286.49	6.99
3	246	105.44	-90.27	5.04
4	175	1.44	-134.45	5.04
5	311	17.47	371.09	6.99
6	239	17.47	-108.24	5.04

Tableau 3.24c Paramètres thermodynamiques du cycle Propane faisant partie de la cascade à un niveau de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1	217	0.55	210.61	5.77
2	358	22.75	389.20	5.77
3	358	41.85	154.10	5.05
4	217	0.55	55.21	5.05
5	378	33.12	408.07	5.77
6	355	33.12	151.73	5.05

3.7.4.2 Cascade à deux niveaux de pression

D'après les résultats donnés par les tableaux (3.25a) et (3.25b), on constate que la température du Méthane à la sortie du compresseur(T_5=230.2 K) est supérieure à la température d'évaporation de l'Ethylène du deuxième niveau de pression (T_{12} = 192.01 K). Donc, pour améliorer le cycle cascade, on pourrait envisager un échange thermique supplémentaire Méthane-Ethylène (2^{eme} niveau de pression). Cette remarque est aussi valable pour l'Ethylène et le Propane (2^{eme} niveau de pression) (voir tableaux (3.25b) et (3.25c)).

Tableau 3.25a Paramètres thermodynamiques du cycle Méthane faisant partie de la cascade à deux niveaux de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1_1	119	1.80	236.06	9.33
a_1	179	8.77	348.47	9.33
1_2	146	8.77	265.71	8.82
M	159	8.77	299.76	9.04
2	189	16.87	351.02	9.04
3	189	82.99	19.35	6.85
4_1	119	1.8	-58.53	6.85
4_2	146	8.77	-22.52	6.85
5	230	34.74	417.68	9.04
6	181	34.74	2.36	6.85

Tableau 3.25b Paramètres thermodynamiques du cycle Ethylène faisant partie de la cascade à deux niveaux de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1_1	175	1.39	203.60	6.99
a_1	216	3.23	250.45	6.99
1_2	192	3.23	216.95	6.83
M	208	3.23	239.60	6.94
2	237	5.62	273.96	6.94
3	237	75.96	-112.66	4.98
4_1	175	1.39	-146.79	4.98
4_2	192	3.23	-136.85	4.98
5	293	14.60	343.34	6.94
6	233	14.60	-124.92	4.98

Tableau 3.25c Paramètres thermodynamiques du cycle Propane faisant partie de la cascade à deux niveaux de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1_1	218	0.56	210.91	5.77
a_1	257	1.84	262.49	5.77
1_2	245	1.84	243.33	5.69
M	255	1.84	260.14	5.75
2	343	17.10	371.04	5.75
3	343	35.72	96.10	4.89
4_1	218	0.56	20.56	4.89
4_2	245	1.84	47.62	4.89
5	362	25.12	390.59	5.75
6	341	25.12	93.61	4.89

3.7.4.3 Cascade à trois niveaux de pression

En analysant les valeurs données par les tableaux (3.26a), (3.26b) et (3.26c), on en déduit que des échanges thermiques entre le Méthane et l'Ethylène du deuxième et troisième niveau de pression du même cycle peuvent avoir lieu. Il en est de même pour l'Ethylène et le Propane du deuxième et troisième niveau de pression du cycle Propane.

Tableau 3.26.a Paramètres thermodynamiques du cycle Méthane faisant partie de la cascade à trois niveaux de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1_1	119	1.82	236.33	9.33
a_1	157	5.42	309.03	9.33
1_2	136	5.42	257.90	8.98
M_1	146	5.42	281.22	9.14
a_2	181	14.04	338.71	9.06
1_3	156	14.04	270.16	8.65
M_2	174	14.04	319.04	8.95
2	187	18.52	340.87	8.95
3	187	71.54	13.55	6.84
4_1	119	1.82	-59.38	6.84
4_2	136	5.42	-34.51	6.84
4_3	156	14.04	-14.24	6.84
5	221	34.43	395.34	8.95
6	181	34.43	0.49	6.84

Tableau 3.26b Paramètres thermodynamiques du cycle Ethylène faisant partie de la cascade à trois niveaux de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
1_1	176	1.48	204.54	6.98
a_1	200.	2.47	232.00	6.98
1_2	186	2.47	212.61	6.88
M_1	197	2.47	227.92	6.96
a_2	225	4.84	257.35	6.91
1_3	201	4.84	223.45	6.75
M_2	225	4.84	258.65	6.91
2	235.	5.75	269.62	6.91
3	235	63.33	-119.66	4.95
4_1	176.	1.48	-149.34	4.95
4_2	186.	2.47	-143.40	4.95
4_3	201	4.84	-136.47	4.95
5	285	13.86	332.14	6.91
6	231	13.86	-129.47	4.95

Tableau 3.26c Paramètres thermodynamiques du cycle Propane faisant partie de la cascade à trois niveaux de pression

Points	T [K]	P [bar]	H [kJ/kg]	S [kJ/kg.K]
l_1	219	0.61	213.20	5.76
a_1	245	1.36	247.05	5.76
l_2	237	1.36	234.35	5.70
M_1	245	1.36	246.09	5.75
a_2	269	2.99	276.96	5.73
l_3	258	2.99	258.94	5.66
M_2	271	2.99	281.01	5.75
2	335	21.88	361.84	5.75
3	335	32.76	72.84	4.82
4_1	219	0.61	8.06	4.82
4_2	237	1.36	24.94	4.82
4_3	258	2.99	41.26	4.82
5	354	21.88	380.99	5.75
6	334	21.88	70.35	4.82

3.8 Conclusions

Deux modèles mathématiques, relatifs aux écarts de température des échangeurs, ont été présentés dans ce chapitre :

- le premier modèle a considéré des écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs de chaleur, il a abouti à des résultats analytiques forts intéressants mais faisables seulement pour de faibles écarts de température entre les réfrigérants et le gaz naturel, ou encore pour un grand nombre de niveaux de pression dans une cascade.

- le deuxième modèle a considéré des écarts moyens logarithmiques de température, il a été caractérisé par l'absence de solutions analytiques explicites. Il a abouti à des résultats plus faisables, donnés par la résolution d'un système d'équations non linéaires.

Quoique la solution analytique relative au premier modèle s'avère parfois infaisable, elle constitue un choix judicieux des valeurs d'itération initiales nécessaires à la résolution du système d'équations non linéaires du deuxième modèle.

Les règles d'optimalté établies par ces deux modèles présentent une grande similarité, ce qui laisse à penser que l'approche des cycles thermodynamiques endoréverssibles détermine une classe particuliére de règles régissant les échanges thermiques dans les cycles cascades en général. En plus de leur meilleure adéquation au problème physique réel qui se pose, l'approche des écarts logarithmiques donne des valeurs plus réelles moindres aux puissances de réfrigération.

CONCLUSION GENERALE

ET

RECOMMANDATIONS

L'étude présentée dans ce mémoire de thèse a été consacrée à l'élaboration d'un modèle mathématique permettant de façon analytique, plutôt que par simulation numérique longue et coûteuse, à minimiser la puissance mécanique d'une cascade à trois cycles de réfrigération imbriqués à plusieurs niveaux de pression, destinée à liquéfier du gaz naturel.

Pour élaborer ce modèle mathématique, on a adopté l'approche des cycles thermodynamiques endoréversibles qui regroupe toutes les irréversibilités au niveau des échangeurs de chaleur.

Le premier chapitre a porté essentiellement sur les généralités concernant l'importance du secteur gazier dans le monde et l'Algérie, les principaux cycles de liquéfaction du gaz naturel et la nécessité d'optimiser ces procédés de liquéfaction.

Il a d'abord été nécessaire de déterminer la courbe de refroidissement et de liquéfaction du gaz naturel, indispensable à l'assise thermodynamique de cette étude; on a examiné, dans ce deuxième chapitre, le principe de calcul des équilibres des phases liquide-vapeur. Cette courbe de refroidissement a permis de calculer la charge thermique soutirée au gaz par chacun des cycles faisant partie de la cascade.

Le troisième chapitre a été consacré aux détails de la formulation mathématique et de la résolution du problème d'optimisation soulevé. En particulier, on s'est attaché à l'élaboration de deux modèles mathématiques :

- le premier modèle était relatif aux écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs de chaleur. Pour des raisons de méthodologie, on a tout d'abord traité le problème d'optimisation pour une cascade simplement étagée. La solution obtenue a été donnée sous forme de règles d'optimalité simples. La méthode de Lagrange choisie pour résoudre ce problème à conduit à la résolution de systèmes dont le nombre d'équations augmente considérablement avec l'augmentation du nombre de niveaux de pression dans la cascade. Pour cette raison, on a été amené à chercher une certaine logique qui a favorisé l'extension des solutions optimales d'une cascade simplement étagée aux cascades imbriquées plus complexes par simple déduction. Cette logique consiste à trouver une solution pour un problème équivalent, puis à traduire cette solution au problème primal.

Ce modèle a permis d'obtenir des résultats analytiques (ce qui est impossible avec les écarts logarithmiques), mais faisables seulement pour de faibles écarts de température entre les réfrigérants et le gaz naturel, ou encore pour un grand nombre de niveaux de pression dans une cascade. De ce fait, on a essayé d'affiner les résultats obtenus en mettant au point un deuxième modèle mathématique ;

- le deuxième modèle mathématique a considéré des écarts moyens logarithmiques de température dans les échangeurs de chaleur. Le problème d'optimisation ainsi formulé a été résolu, dans un premier temps, pour une cascade simplement étagée. La comparaison des résultats obtenus avec ceux fourni par le premier modèle a révélé l'existence d'une similarité; ce qui a permis de déduire directement les solutions optimales pour les cascades imbriquées à plusieurs niveaux de pression. On a confirmé que ce modèle est marqué par l'absence de solutions analytiques souhaitables, mais aboutit à des résultats toujours faisables. Pour compléter la résolution du problème d'optimisation, il a fallu déterminer les niveaux de pression correspondant aux températures optimales calculées, et ceci par la mise au point d'un code de calcul en Fortran basé sur le calcul des équilibres liquide-vapeur par l'équation d'état de BWRS.

La comparaison des règles d'optimalité établies par les deux modèles mathématiques laisse à croire que l'approche des cycles thermodynamiques endoréversibles détermine un type particulier de règles régissant les échanges thermiques dans les cycles cascades. Les résultats obtenus prouvent la faisabilité des modèles mathématiques élaborés, mais ils ne constituent que des résultats théoriques qu'il est nécessaire de confronter à la réalité physique pour juger de leur applicabilité en tant que tels. En effet, c'est au niveau de la comparaison des puissances de réfrigération calculée et observée que réside la validation des modèles proposés ici. Malheureusement, peu de donnée et/ou de résultat des études effectuées sur des cycles cascades réels sont publiés. Evidemment, l'approche des cycles thermodynamiques endoréversibles adoptée dans cette étude constitue une hypothèse simplificatrice qui sur estime les écarts de température mais traduit globalement les irréversibilités thermodynamiques.

Ce travail devrait et gagnerait énormément à être généralisé et amélioré par l'inclusion des irréversibilités internes aux cycles cascades, telles que les pertes de charges et les rendements des compresseurs en particulier.

Expressions analytiques de l'équation d'état BWRS et des fonctions d'état résiduelles

A.1. Equation d'état BWRS [Edmister et lee, 1984]

L'équation d'état BWRS est exprimée par :

$$P = \rho\ RT + \left(B_0RT - A_0 - \frac{C_0}{T^2} + \frac{D_0}{T^3} - \frac{E_0}{T^4}\right)\rho^2 + \left(bRT - a - \frac{d}{T}\right)\rho^3 + \alpha\left(a + \frac{b}{T}\right)\rho^6 + \frac{c\rho^3}{T^2}\cdot\left(1+\gamma\rho^2\right).\exp\left(-\gamma\rho^2\right) \qquad (A1)$$

où:

ρ : désigne l'inverse du volume molaire du mélange ;

R : constante des gaz parfaits;

A_0 , B_0,, C_0 , D_0 , E_0 , a , b, c, d , et représentent les 11 paramètres de l'équation d'état d'un mélange, ils sont calculés grâce à des règles de mélange qui lient les paramètres caractéristiques d'un mélange à ceux des corps purs qui le compose :

$$B_0 = \sum_i^N x_i \cdot B_{0i} \qquad b = \left[\sum_i^N x_i \cdot b_i^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

$$A_0 = \sum_i^N \sum_j^N x_i \cdot x_j \cdot A_{0i}^{\frac{1}{2}} \cdot A_{0j}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - k_{ij}\right) \qquad a = \left[\sum_i^N x_i \cdot a_i^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

$$C_0 = \sum_i^N \sum_j^N x_i \cdot x_j \cdot C_{0i}^{\frac{1}{2}} \cdot C_{0j}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - k_{ij}\right)^3 \qquad d = \left[\sum_i^N x_i \cdot d_i^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

$$D_0 = \sum_i^N \sum_j^N x_i \cdot x_j \cdot D_{0i}^{\frac{1}{2}} \cdot D_{0j}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - k_{ij}\right)^4 \qquad c = \left[\sum_i^N x_i \cdot c_i^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

$$E_0 = \sum_i^N \sum_j^N x_i \cdot x_j \cdot E_{0i}^{\frac{1}{2}} \cdot E_{0j}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - k_{ij}\right)^5 \qquad \gamma = \left[\sum_i^N x_i \cdot \gamma_i^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

$$\alpha = \left[\sum_i^N x_i \cdot \alpha_i^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

N : nombre total des composants du mélange;

k_{ij} : paramètres d'interaction binaire entre les composants i et j du mélange. Ces valeurs sont données, pour quelques hydrocarbures, dans l'annexe D (tableau D2)

x_i : fraction molaire du iéme composant du mélange;

A_{0i} ,B_{0i} , C_{0i} , D_{0i} , E_{0i} , a_i , b_i , c_i , d_i , $_i$ et $_i$ sont les paramètres relatifs à l'équation d'état d'un corps pur :

$$B_{0i} = \frac{(A_1 + B_1 \cdot \omega_i)}{\rho_{cri}} \qquad b_i = \frac{(A_5 + B_5 \cdot \omega_i)}{\rho_{cri}^{\,2}}$$

$$A_{0i} = (A_2 + B_2 \cdot \omega_i) \cdot \frac{R\,T_{cri}}{\rho_{cri}} \qquad a_i = (A_6 + B_6 \cdot \omega_i) \cdot \frac{R\,T_{cri}}{\rho_{cri}^{\,2}}$$

$$C_{0i} = (A_3 + B_3 \cdot \omega_i) \cdot \frac{R\,T_{cri}^{\,3}}{\rho_{cri}} \qquad d_i = (A_{10} + B_{10} \cdot \omega_i) \cdot \frac{R\,T_{cri}^{\,2}}{\rho_{cri}^{\,2}}$$

$$D_{0i} = (A_9 - B_9 \cdot \omega_i) \cdot \frac{R\,T_{cri}^{\,4}}{\rho_{cri}} \qquad \alpha_i = \frac{(A_7 - B_7 \cdot \omega_i)}{\rho_{cri}^{\,3}}$$

$$E_{0i} = (A_{11} - B_{11} \cdot \omega_i \cdot \exp(-3.8 \cdot \omega_i)) \cdot \frac{R\,T_{cri}^{\,5}}{\rho_{cri}} \qquad c_i = (A_8 + B_8 \cdot \omega_i) \cdot \frac{R\,T_{cri}^{\,3}}{\rho_{cri}^{\,2}}$$

$$\gamma_i = \frac{(A_4 + B_4 \cdot \omega_i)}{\rho_{cri}^{\,2}}$$

A_j , B_j (j=1,11) : paramètres donnés dansl'annexe D (tableau D1);

Les propriétés critiques T_{cri} , ρ_{cri} et le facteur accentrique ω_i sont données dans l'annexe E (tableau D3) pour les principaux composants du gaz naturel.

A.2. Coefficient de fugacité

$$RT\ln\overline{\varphi_i} = RT\ln Z + \rho(B_0 + B_{0i})RT + 2\rho\sum_{j=1}^{N} x_j \cdot \left[-(A_{0j}\cdot A_{0i})^{\frac{1}{2}}(1-k_{ij}) - \frac{(C_{0j}\cdot C_{0i})^{\frac{1}{2}}}{T^2}(1-k_{ij})^3 \right.$$

$$\left. + \frac{(D_{0j}\cdot D_{0i})^{\frac{1}{2}}}{T^3}(1-k_{ij})^4 - \frac{(E_{0j}\cdot E_{0i})^{\frac{1}{2}}}{T^4}(1-k_{ij})^5 \right] + \frac{3\rho^2}{2}\left[\left(b^2 b_i\right)^{\frac{1}{3}} RT - \left(a^2 a_i\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\left(d^2 d_i\right)^{\frac{1}{3}}}{T} \right] +$$

$$\frac{3}{5}\alpha\rho^5\left[\left(a^2 a_i\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\left(d^2 d_i\right)^{\frac{1}{3}}}{T} \right] + \frac{3}{5}\rho^5\left(a + \frac{d}{T}\right)\left(\alpha^2\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{3\left(c^2 c_i\right)^{\frac{1}{3}}}{T^2}\rho^2\left[\frac{1-\exp\left(-\gamma\rho^2\right)}{\gamma\rho^2} - \right.$$

$$\left. \frac{\exp\left(-\gamma\rho^2\right)}{2} \right] - \frac{2c}{\gamma T^2}\left(\frac{\gamma_i}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \left(1 + \gamma\rho^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\rho^4\right)\exp\left(-\gamma\rho^2\right) \right] \qquad \text{(A2)}$$

A.3. Enthalpie résiduelle

$$H - H^0 = \left(B_0 RT - 2A_0 - 4\frac{C_0}{T^2} + 5\frac{D_0}{T^3} - 6\frac{E_0}{T^4} \right)\rho + \frac{1}{2}\left(2bRT - 3a - 4\frac{d}{T} \right)\rho^2$$

$$+ \frac{\alpha}{5}\left(6a + 7\frac{d}{T} \right)\rho^5 + \frac{c}{\gamma T^2}\left[3 - \left(3 + \frac{\gamma\rho^2}{2} - \gamma^2\rho^4 \right)\exp\left(-\gamma\rho^2\right) \right] \qquad \text{(A3)}$$

A.4. Entropie résiduelle

$$S - S^0 = -R\ln(\rho RT) - \left(B_0 R + \frac{2C_0}{T^3} - \frac{3D_0}{T^4} + \frac{4E_0}{T^5} \right)\rho - \frac{1}{2}\left(bR + \frac{d}{T^2} \right)\rho^2 + \frac{\alpha d}{5T^2}\rho^5$$

$$+ \frac{2c}{\gamma T^3}\left[1 - \left(1 + \frac{\gamma\rho^2}{2} \right)\exp\left(-\gamma\rho^2\right) \right] \qquad \text{(A4)}$$

Calcul des flux thermiques soutirés au gaz naturel

Soit un flux de gaz naturel à refroidir de T_0 à T_F, à pression constante P. Pour cela, on pourrait concevoir un cycle hypothétique qu'on représente sur le diagramme T-s de la figure B1. Ce dernier se compose de trois cycles de réfrigération endoréversibles simples pris en série, dont chacun refroidit en partie le gaz naturel:

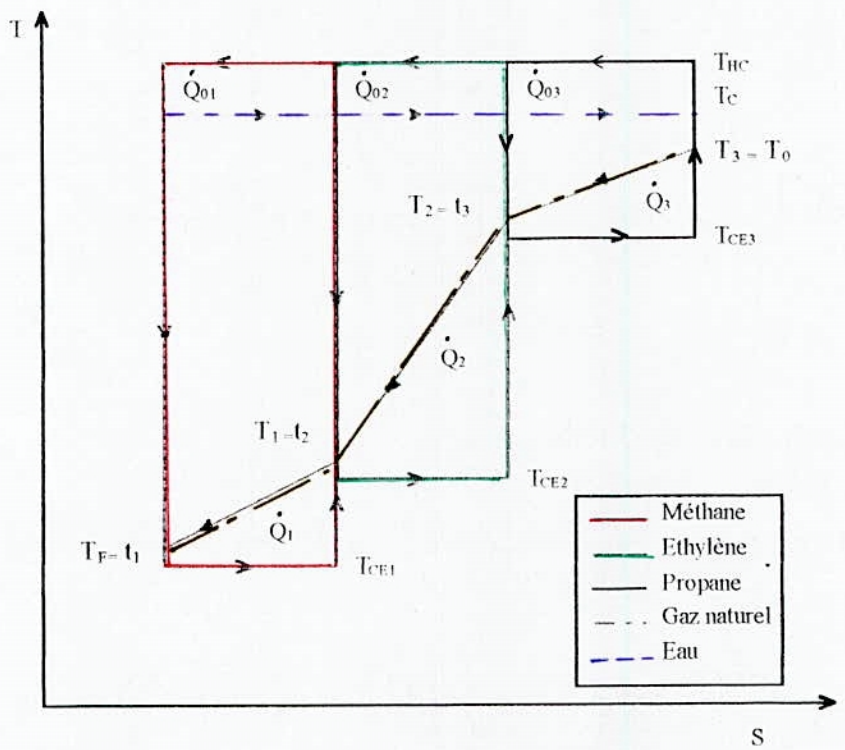


Fig. B1. Diagramme T-s de trois cycles de réfrigération endoréversibles placés en parallèle pour liquéfier du gaz naturel

$\dot{Q}_{01}$: échange Méthane-Eau;

$\dot{Q}_{02}$: échange Ethylène-Eau;

$\dot{Q}_{03}$: échange Propane-Eau;

$\dot{Q}_1$: échange Méthane-Gaz naturel;

$\dot{Q}_2$: échange Ethylène- Gaz naturel;

$\dot{Q}_3$: échange Propane-Gaz naturel;

Note : Les flux thermiques soutirés au gaz naturel, notés par $\dot{Q}_4$ et $\dot{Q}_5$ dans le troisième chapitre seront notés respectivement dans cette partie de l'annexe par $\dot{Q}_2$ et $\dot{Q}_3$.

Le problème qui se pose est de répartir les trois cycles de réfrigération de manière à minimiser la puissance mécanique totale nécessaire pour refroidir le gaz naturel de T_0 à T_F. La répartition ainsi faite détermine les températures T_1 et T_2 (voir figure B1) et par conséquent les flux thermiques $\dot{Q}_i$ (i=1à3) soutirés au gaz .

Les paramètres du problème sont : T_C , T_0 , T_F et Δt

Les variables du problème :

Variables indépendantes : T_1 et T_2

Variables dépendantes : $\dot{W}_T$,T_{HC} , $\dot{Q}_{0i}$, $\dot{Q}_i$ et T_{CEi} (i= 1à3)

En tenant compte des équations d'endorévérsibilité, relatives à chacun des cycles de Propane, Ethylène et Méthane, et du premier principe de la thermodynamique, on pourra exprimer la puissance mécanique totale de réfrigération comme suit :

$$\dot{W}_T = \sum_{i=1}^{3} \dot{Q}_i \cdot \left(\frac{T_{HC}}{T_{CEi}} - 1 \right) \qquad (B1)$$

avec :

$$T_{HC} = T_C + \Delta t \qquad (B2)$$

$$T_{CEi} = t_i - \Delta t \qquad (i= 1à 3) \qquad (B3)$$

$$T_i = t_{i+1} \qquad (i=1à2) \qquad (B4)$$

Cette dernière relation traduit l'égalité des températures du gaz naturel à l'entrée et sortie de deux évaporateurs successifs.

Sachant que le refroidissement du gaz naturel se produit à une pression constante (pertes de charge négligeables), les flux thermiques $\dot{Q}_i$ (i=1à3) peuvent être exprimés en terme d'enthalpies H(T), tels que pour un débit de gaz naturel m_{GN} donné, on a :

$$\dot{Q}_i = \left[H(T_{i-1}) - H(T_i) \right] \dot{m}_{GN} \qquad (i=1à3) \qquad (B5)$$

H(T) est une corrélation (ou polynôme d'interpolation) de l'enthalpie, obtenue à partir de la courbe de refroidissement du gaz naturel.

En substituant les relations (B2)-(B5) dans (B1) on aura :

$$\dot{W}_T = \sum_{i=1}^{3} (H(T_i) - H(t_i)) \cdot \left(\frac{T_C + \Delta t}{t_i - \Delta t} - 1 \right) \dot{m}_{GN} \qquad (B6)$$

avec: $T_3 = T_0$ et $t_1 = T_F$.

La condition nécessaire pour que la puissance mécanique totale de réfrigération soit minimale est:

$$\frac{\partial \dot{W}_T}{\partial T_i} = 0 \qquad (i=1à2) \qquad (B7)$$

Cette condition se traduit par le système de deux équations non linéaires à deux inconnues T_i (i=1à2) :

$$\frac{H(T_{i+1}) - H(T_i)}{Cp\,(T_i)} - \frac{(T_i - \Delta t)}{(t_i - \Delta t)} \cdot (T_i - t_i) = 0 \qquad (i=1à2) \qquad (B8)$$

avec : $Cp\,(T_i) \equiv \left[\frac{\partial H(T_i)}{\partial T_i} \right]_P$

$Cp\,(T_i)$: chaleur spécifique à pression constante du gaz naturel, à la température T_i .

Les températures T_i (i=1à2) seront donc données par la solution du système d'équations non linéaires (B8). En injectant ces valeurs dans la relation (B5) on pourra déterminer les flux thermiques $\dot{Q}_i$ (i=1à3)

En suivant la même procédure de calcul pour chaque intervalle de température $[T_3, T_2]$, $[T_2, T_1]$ et $[T_1, T_F]$, on pourra évaluer les flux thermiques soutirés au gaz naturel dans les évaporateurs d'une cascade à trois cycles de réfrigération endoréversibles à plusieurs niveaux de pression chacun.

Optimisation par la méthode de Lagrange

Soit la fonction objective F, fonction des six variables explicites T_{HCi} et T_{CEi} (i=1à3) :

$$F = \frac{\dot{W}_T}{\dot{Q}_1} = \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} - 1$$

dont on cherche le minimum qui satisfait la contrainte donnée par la relation (C1) suivante :

$$C_T = \left[\frac{1}{(T_{E1} - T_{CE1})} + \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{1}{(T_{HC1} - T_{CE2})} + \frac{T_{HC1}}{T_{CE1}} \cdot \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{1}{(T_{HC2} - T_{CE3})} + \frac{T_{HC1} \cdot T_{HC2} \cdot T_{HC3}}{T_{CE1} \cdot T_{CE2} \cdot T_{CE3}} \cdot \frac{1}{(T_{HC3} - T_C)} \right] \cdot \dot{Q}_1 \qquad \text{(C1)}$$

La méthode utilisée pour résoudre ce problème d'optimisation est celle de Lagrange.

On définit :

$$L = F + \sum_n \lambda_n \cdot g_n \qquad \text{(C2)}$$

L : le Lagrangien de la fonction F;

λ_n : coefficient de Lagrange ;

g_n : contraintes du problème ;

n : nombre de contraintes du problème .

La condition nécessaire pour l'existence d'un minimum est :

$$\frac{\partial L}{\partial T} = 0 \qquad \text{(C3)}$$

Avec :

$T = T_{CEi}$, T_{HCi} (i=1à3) et λ_1

Cette condition se traduit par un système de sept équations non linéaires à sept inconnues (T).

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$: permet seulement de réécrire la contraintes (C1);

La dérivé du lagrangien L par rapport à la variable T_{HC3} permet de déterminer le coefficient de Lagrange λ_1 , tel que:

$$\lambda_1 = \frac{C_T \cdot (T_{HC3} - T_C)^2}{\dot{Q}_1 \cdot T_C} \qquad (C4)$$

Les règles d'optimalités sont données par les dérivés du Lagrangien L par rapport aux variables T_{HC1} , T_{HC2} et T_{CEi} (i=1a3) :

$$\frac{\partial L}{\partial T_{HC1}} = 0 \quad , \frac{\partial L}{\partial T_{HC2}} = 0 \quad , \frac{\partial L}{\partial T_{CE1}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial T_{CE2}} = 0$$

celles-ci impliquent respectivement les égalités suivantes :

$$\frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} + \left(\cdot (T_{HC2} - T_{CE3})^{-1} + \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \cdot (T_{HC3} - T_C)^{-1} - (T_{HC1} - T_{CE2})^{-2} \cdot \frac{{T_{CE2}}^2}{T_{HC2}} \right) \cdot \frac{(T_{HC3} - T_C)^2}{T_C} = 0$$

5.1)

$$\frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} + \left((T_{HC2} - T_{CE3})^{-1} + \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \cdot (T_{HC3} - T_C)^{-1} - (T_{HC2} - T_{CE3})^{-2} \cdot T_{HC2} \right) \cdot \frac{(T_{HC3} - T_C)^2}{T_C} = 0 \qquad (C5.2)$$

$$\frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} + \left[(T_{HC1} - T_{CE2})^{-1} + \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot (T_{HC2} - T_{CE3})^{-1} + \frac{T_{HC2}}{T_{CE2}} \cdot \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \cdot (T_{HC3} - T_C)^{-1} - \right. \qquad (C5.3)$$

$$\left. (T_{E1} - T_{CE1})^{-2} \cdot \frac{{T_{CE1}}^2}{T_{HC1}} \right] \cdot \frac{(T_{HC3} - T_C)^2}{T_C} \cdot = 0$$

$$\frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} + \left((T_{HC2} - T_{CE3})^{-1} + \frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \cdot (T_{HC3} - T_C)^{-1} - \left(T_{HC1} - T_{CE2}^{*} \right)^{-2} \cdot \frac{{T_{CE2}}^2}{T_{HC2}} \right) \cdot \frac{(T_{HC3} - T_C)^2}{T_C} = 0 \qquad (C5.4)$$

$$\frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} + \left(\frac{T_{HC3}}{T_{CE3}} \cdot (T_{HC3} - T_C)^{-1} - (T_{HC2} - T_{CE3})^{-2} \cdot T_{CE3} \right) \cdot \frac{(T_{HC3} - T_C)^2}{T_C} = 0 \qquad (C5.5)$$

On remarque que quatre relations parmi les cinq règles d'optimalité sont deux à deux identiques :

$$\text{Eq. (C5.1)} \equiv \text{Eq. (C5.4)} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial T_{HC1}} = \frac{\partial L}{\partial T_{CE2}} \qquad (C6.1)$$

et

$$\text{Eq. (C5.2)} \equiv \text{Eq. (C5.5)} \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial T_{HC2}} = \frac{\partial L}{\partial T_{CE3}} \qquad \text{(C6.2)}$$

D'après les relations (C6.1) et (C6.2), on en déduit que les températures T_{HC1} ,T_{CE2} et T_{HC2} , T_{CE3} sont linéairement dépendantes :

$$\frac{T_{HC1}}{T_{CE2}} = a_1 \quad \text{et} \quad \frac{T_{HC2}}{T_{CE3}} = a_2$$

Ce résultat revérifie et généralise celui de Chen et Yan (1987) obtenu pour des écarts constants. Ils ont montré qu'un minimum de puissance mécanique, pour des cycles de réfrigération combinés avec période temporelle fixée, est obtenu lorsque le rapport des températures dans l'échangeur de chaleur intermédiaire est constant. Il s'avère que cette solution ne limite pas la transformation thermodynamique au niveau de l'échangeur intermédiaire; ce qui nécessite en pratique l'introduction d'une contrainte supplémentaire.

Pour notre cas, on peut dire que les températures (T_{HC1} ,T_{CE2} , T_{HC2} et T_{CE3}) dans les deux échangeurs intermédiaires ne sont pas des variables indépendantes, seuls leurs rapports le sont, cette surévaluation des variables du problème à fait introduire deux degrés de liberté factices. Le problème d'optimisation soulevé est en fait à trois degrés de liberté aux quels vont correspondre les trois règles d'optimalité (C5.1)-(C5.3). Les manipulations de ces relations aboutissent aux trois règles d'optimalité suivantes ((C7.1)-(C7.3) ou (C9.1)-(C9.3)) :

Cycle Propane: $$\frac{Am_0^*}{Am_3^*} = \frac{T_{HC3}^*}{T_{CE3}^*} \qquad \text{(C7.1)}$$

Cycle Ethylène: $$\frac{Am_3^*}{Am_2^*} = \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE2}^*} \qquad \text{(C7.2)}$$

Cycle Méthane : $$\frac{Am_2^*}{Am_1^*} = \frac{T_{HC1}^*}{T_{CE1}^*} \qquad \text{(C7.3)}$$

Les Am_j (j=0à3) désignent respectivement les écarts moyens arithmétiques de température dans les échangeurs de chaleur Propane-Eau, Méthane-GN, Ethylène-Mèthane et Propane-Ethylène, donnés par les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
Am_0^* &= T_{HC3}^* - T_C \\
Am_1^* &= T_{E1} - T_{CE1}^* \\
Am_2^* &= T_{HC1}^* - T_{CE2}^* \\
Am_3^* &= T_{HC2}^* - T_{CE3}^*
\end{aligned}
\qquad (C8)
$$

En tenant compte de (C8) dans (C7.1)-(C7.3), les règles d'optimalité seront exprimées sous une forme de règle de deux, telles que:

$$a_2^* + \frac{T_C}{T_{HC3}^*} = 2 \qquad (C9.1)$$

$$a_1^* + \frac{1}{a_2^*} = 2 \qquad (C9.2)$$

$$\frac{1}{a_1^*} + \frac{T_E}{T_{CE1}^*} = 2 \qquad (C9.3)$$

avec :

$$
\begin{aligned}
a_1^* &= \frac{T_{HC1}^*}{T_{CE2}^*} \\
a_2^* &= \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE3}^*}
\end{aligned}
\qquad (C10)
$$

Les valeurs de T_{HC3} , T_{CE1} , a_1 et a_2 seront données par la solution du système d'équations(C9.1)-(C9.3) et (C1). Cette solution est considérée comme partiellement bornée (bornée à l'extérieur et non bornée à l'intérieur), du fait que plusieurs valeurs des températures T_{HC1} , T_{HC2} ,T_{CE2} et T_{CE3} peuvent satisfaire la relation (C10). De ce fait on propose d'introduire deux contraintes supplémentaires pour borner totalement la solution, à savoir:

$D_1 = T_{HC1}^* - T_{CE1}^*$, spécifié pour un réfrigérant donné;

$D_2 = T_{HC2}^* - T_{CE2}^*$, spécifié pour un réfrigérant donné.

Tableau D1 : Valeurs des paramètres A_j et B_j utilisés dans l'équation d'état BWRS

j	A_j	B_j
1	0.443690	0.115449
2	1.28438	-0.920731
3	0.356306	1.70871
4	0.544979	-0.270896
5	0.528629	0.349261
6	0.484011	0.75130
7	0.0705233	-0.044448
8	0.504087	1.32245
9	0.0307452	0.179433
10	0.0732828	0.463492
11	0.006450	-0.022143

Source [Starling, 1973]

Tableau D2 : Valeurs des paramètres d'interaction binaires k_{ij} ($k_{ij} \times 100$)

	Méthane	Ethane	Propane	n-Butane	n-Pentane	Azote
Méthane	0	1.0	2.3	3.1	4.1	2.5
Ethane	1.0	0	0.31	0.45	0.6	7.0
Propane	2.3	0.31	0	0.35	0.45	10.0
n-Butane	3.1	0.45	0.35	0	0.1	12.0
n-Pentane	4.1	0.6	0.45	0.1	0	14.8
Azote	2.5	7.0	10.0	12.0	14.8	0

Source [Starling, 1973]

Tableau D3 : Propriétés physiques des composants purs du gaz naturel

	Température critique °F	Pression critique en Psia	Densité critique lb-mole/ft^3	Masse moléculaire	Facteur d'acentricité
Méthane	-116.6	667.8	0.6274	16.043	0.0115
Ethane	90.1	707.8	0.4218	30.070	0.0908
Propane	206.0	616.3	0.3121	44.097	0.1454
n-Butane	305.7	550.7	0.2448	58.124	0.1928
n-Pentane	385.7	488.6	0.2007	72.151	0.2510
Azote	-232.4	493.0	0.6929	28.013	0.0355

Source [Edmister et Lee, 1984]

Tableau D4 : Valeurs des paramètres utilisés dans les corrélations de l'enthalpie et de l'entropie des gaz parfaits.

	A	B	C×10^4	D×10^7	E×10^{11}	F×10^{15}	G
Méthane	-6.977	0.57170	-2.94312	4.23157	-15.26740	19.45261	-0.6560
Ethane	-0.021	0.26488	-0.25014	2.92334	-12.86050	18.22060	0.0822
Propane	-0.738	0.17260	0.94041	2.15543	-10.70986	15.92794	0.2066
n-Butane	7.430	0.09857	2.69180	0.51820	-4.20139	6.56042	0.3516
n-Pentane	27.172	-0.00280	4.40073	-0.86287	0.81764	-0.19715	0.7362
Azote	-0.934	0.2552040	-0.177935	0.158913	-0.322032	0.158927	0.0424

Source [Edmister et Lee, 1984]

Détermination des niveaux de pression dans les cycles cascades étudiés

E.1 Cascade à un niveau de pression

En réalité, chaque cycle de réfrigération faisant partie de la cascade à un niveau de pression (figure 3.4a) peut être représenté par un cycle de compression de vapeur. Si on considère, par exemple, le cycle Méthane, on aura le diagramme T-s suivant :

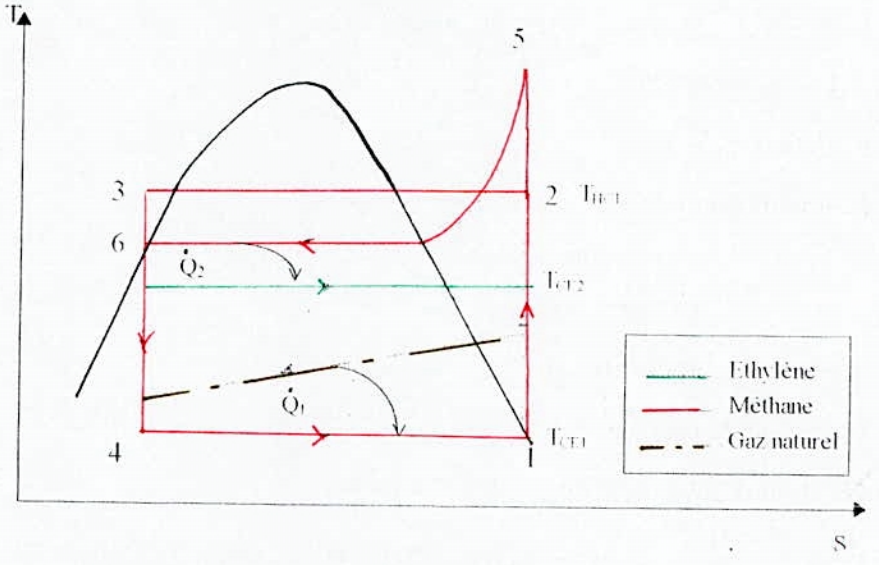


Fig.E.1 Diagramme T-s du cycle de réfrigération à compression de vapeur de Méthane

avec:

(1) : entrée du compresseur, état de vapeur saturée;

(5) : sortie(entrée) du compresseur (condenseur), état vapeur surchauffée;

(6) : sortie(entrée) du condenseur (détendeur), état liquide saturé;

(4):sortie(entrée) du détendeur (évaporateur), état mélange vapeur-liquide;

(2) et (3) : états thermodynamiques factices.

Note : La même représentation sur diagramme T-s peut être faite pour les cycles Propane et Ethylène. Mais dans ce cas, en plus des échanges thermiques avec le gaz naturel, on doit tenir compte des échanges Propane-Ethylène et Ethylène-Méthane ayant lieu dans la source froide de chacun de ces cycles, respectivement.

Pour le cycle Méthane de la cascade à un niveau de pression, les séquences de calcul des paramètres thermodynamiques sont résumées par l'organigramme suivant :

Organigramme :

1. Donner T_{HC1} , T_{CE1} (solutions optimales) , flux thermique $\dot{Q}_1$ soutiré au gaz naturel et les paramètres critiques du réfrigérant
2. Localisation des points (1) et (7) :
   - 2.1 donner $T_1 = T_{CE1}^*$
   - 2.2 appel de la subroutine local1-7
   - 2.3 $S_1 = S_{VS}$, $P_1 = P_{VS}$, $H_1 = H_{VS}$, $S_7 = S_{LS}$, $P_7 = P_{LS}$ et $H_7 = H_{LS}$
3. Localisation du point (2) :
   - 3.1 donner $T_2 = T_{HC1}^*$
   - 3.2 initialisation de P($P = P_{cr}$) , $SS = S_1$
   - 3.3 appel de la subroutine local2
   - 3.4 $S_2 = S$, $P_2 = P$, $H_2 = H$
4. Localisation des points (5) (6) et (3) :
   - 4.1 appel de la subroutine local5-6-3
5. Localisation du point (4) mélange vapeur-liquide :
   - 5.1 $x_4 = \dfrac{S_4 - S_7}{S_1 - S_7}$, $H_4 = x_4(H_1 - H_7) + H_7$, $S_4 = S_3$, $P_4 = P_1$, $T_4 = T_1$
6. Calcul du débit du fluide frigorigène :
   - 6.1 $\dot{m} = \dfrac{\dot{Q}_1}{H_1 - H_4}$
7. Affichage des résultats .

Note : Cette procédure de calcul est appliquée aux cycles Méthane, Ethylène et Propane, respectivement. Seulement, pour les deux derniers cycles, l'étape 6 doit être modifiée, telle que:

Cycle Ethylène : $\dot{m} = \dfrac{\dot{Q}_2^* + \dot{Q}_4}{H_1 - H_4}$ où : $\dot{Q}_2^* = \dot{Q}_1 \dfrac{T_{HC1}^*}{T_{CE1}^*}$ (équations (3.26))

Cycle Propane : $\dot{m} = \dfrac{\dot{Q}_3^* + \dot{Q}_5}{H_1 - H_4}$ où : $\dot{Q}_3^* = \left(\dot{Q}_2^* + \dot{Q}_4\right) \dfrac{T_{HC2}^*}{T_{CE2}^*}$ (équations (3.26))

$\dot{Q}_4$, $\dot{Q}_5$: flux thermiques soutirés au gaz naturel par l'Ethylène et le Propane, respectivement.

Subroutine local1-7

La subroutine local1-7 consiste à déterminer, pour une température connue T, les points de bulle (7) et de rosée (1) du fluide frigorigène pur, c'est à dire la pression de saturation à une température donnée (figure E.2).

Organigramme :

1. initialisation de P($P=P_{cr}$)
2. donner dP (incrément de la pression)
3. P=P-dP
4. calcul de S , H (à partir de l'équation d'état BWRS)
5. Difs = S_{cr} - S

   si Difs > 0, aller à l'étape 3

   sinon , critère d'arrêt: $dP < 10^{-3}$

   si le critère d'arrêt est vérifié, aller à l'étape 6

   sinon P = P+ dP , dP = dP/2 , aller à l'étape 3
6. $P_{VS} = P$, $S_{VS} = S$, $H_{VS} = H$
7. $P_{LS} = P + dP$, calcul de S et H (équation d'état BWRS)
8. $P_{LS} = P$, $S_{LS} = S$, $H_{LS} = H$
9. Fin

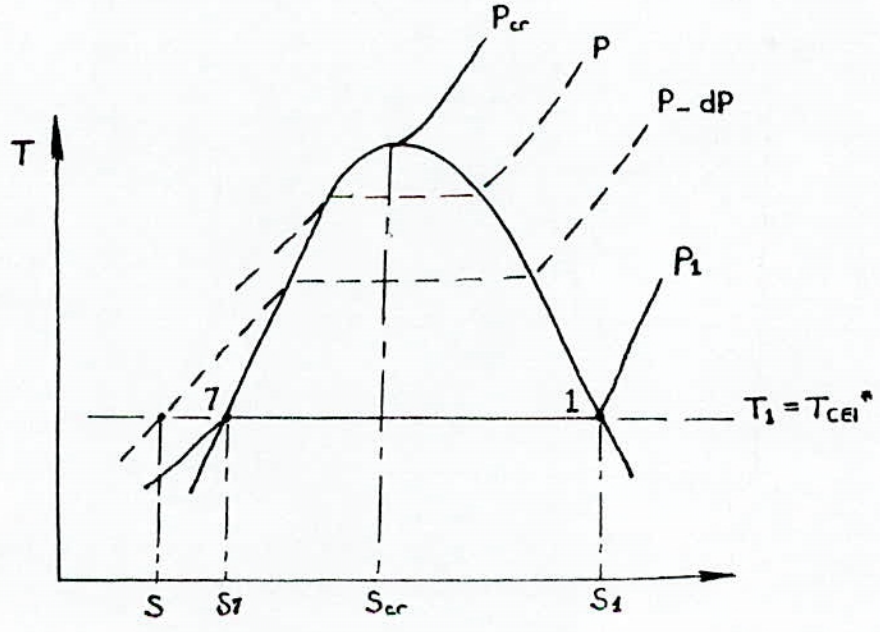


Fig. E.2 Localisation des points de bulle (7) et de rosée (1)

Subroutine local2

La subroutine local2 consiste à déterminer la pression finale (P_2) d'une compression isentropique pour laquelle T_1 , P_1 initiales et T_2 finale sont connues (figure E.3).

Organigramme :

1. donner dP
2. P = P - dP
3. calcul de S et H (équation d'état BWRS)
4. Difs = SS- S

   si Difs > 10^{-3} , aller à l'étape 2.

   sinon :

   si | Difs| < 10^{-3} , aller à l'étape 5.

   sinon P = P+ dP, dP = dP/2 , aller à l'étape 2
5. Fin.

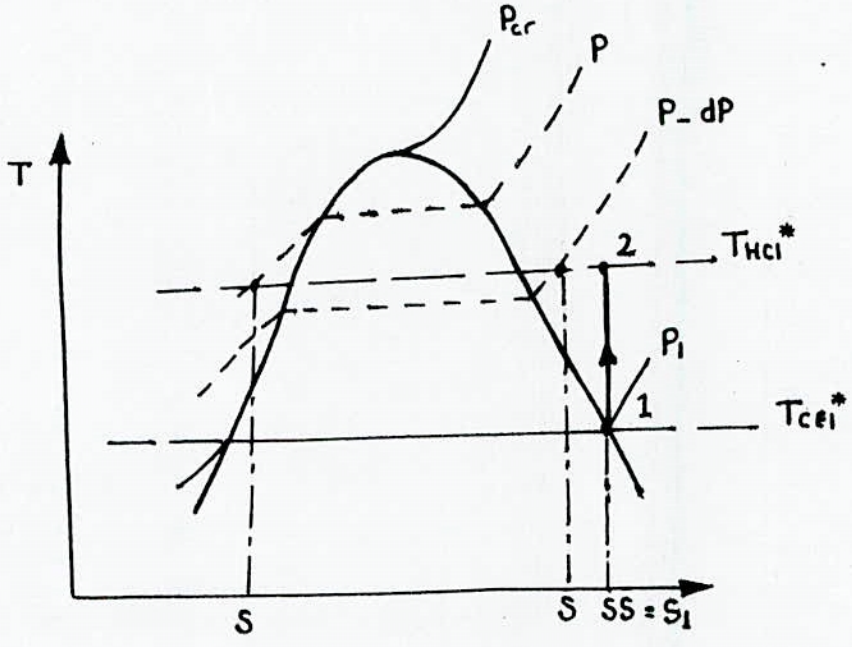


Fig. E.3 Localisation du point (2)

Subroutine local5-6-3

Cette subroutine consiste à déterminer les paramètres thermodynamiques (T et P) aux points (5), (6) et (3), pour lesquels la condition suivante est vérifiée :

$$T_{HC1}{}^{\cdot} = \frac{H_{5e} - H_{6e}}{S_2 - S_{3e}} = \frac{H_{5c} - H_{6c}}{S_2 - S_{3c}} = T_{eq}$$

où :

c : indique la valeur calculée;

e : indique la valeur exacte (à déterminer).

Organigramme :

1.Localisation du point (5) :

1.1 donner dP

1.2 initialisation de P($P=P_2$)

1.3 $P = P + dP$

1.4 initialisation de T ($T=T_2$) , $SS = S_2$

1.5 appel de la subroutine local5

1.6 $P_{5c} = P$, $T_{5c} = T$, $H_{5c} = H$, $S_{5c} = S$

2. Localisation du point (6) :

2.1 donner de $P_{6c} = P_{5c}$

2.2 initialisation de T ($T=T_{5c}$)

2.3 appel de la subroutine local6

2.4 $T_{6c} = T_{LS}$, $H_{6c} = H_{LS}$, $S_{6c} = S_{LS}$

3. Localisation du point (3) :

3.1 donner $T_3 = T_2$

3.2 initialisation de P ($P= P_{cr}$), $SS = S_{6c}$

3.3 appel de la subroutine local2

3.4 $P_{3c} = P$, $H_{3c} = H$, $S_{3c} = S$

4. Calcul de la température équivalente T_{eq}

4.1 $T_{eq} = \frac{H_{5c} - H_{6c}}{S_2 - S_{3c}}$

4.2 Dift = T_{HCl}^{*} - T_{eq}

si | Difs| < 10^{-3} , aller à l'étape 4.3

sinon :

si Dift < 0 , P = P - dP, dP = dP/2 , aller à l'étape 1.3

sinon aller à l'étape 1.3

4.3 $T_{5e} = T_{5c}$, $P_{5e} = P_{5c}$, $S_{5e} = S_{5c}$, $H_{5e} = H_{5c}$

$T_{6e} = T_{6c}$, $P_{6e} = P_{6c}$, $S_{6e} = S_{6c}$, $H_{6e} = H_{6c}$

5. Fin.

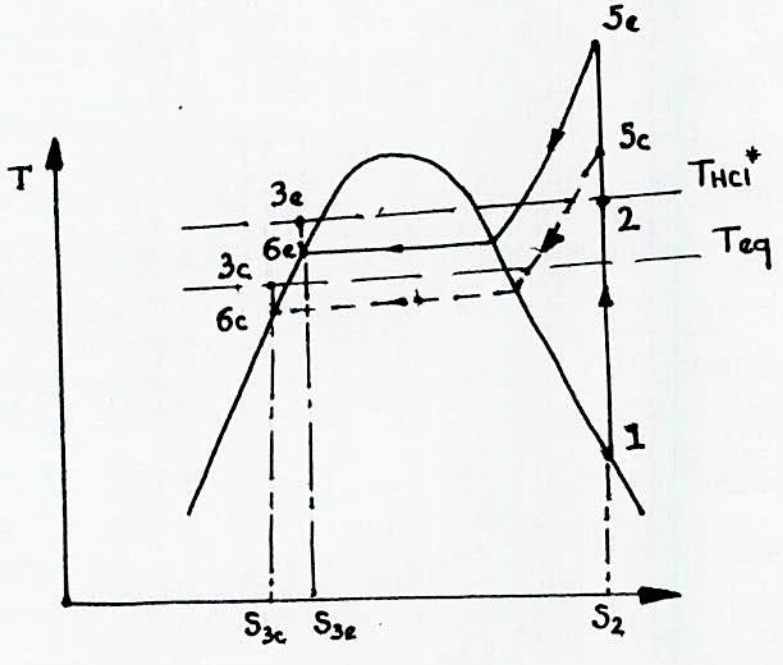


Fig. E.4 Localisation des points (5), (6) et (3).

Subroutine local5

La subroutine local5 permet de déterminer la température finale d'une compression isentropique pour laquelle T,P initiales et P finale sont données.

Organigramme :

1. donner dT
2. T = T +dT
3. calcul de S et H (équation d'état BWRS)
4. Difs = S - SS

   si $|Difs| < 10^{-3}$, aller à l'étape 6.

   sinon :

   si Difs > 0 , T = T- dT, dT = dT/2 , aller à l'étape 2

   sinon aller à l'étape 2.

6. Fin.

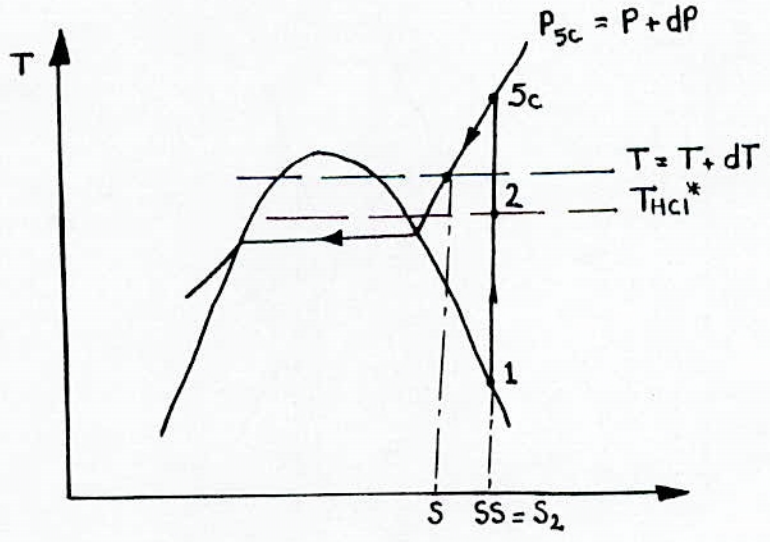


Fig. E.5 Localisation du point (5_c)

Subroutine local6

La subroutine local6 détermine, pour une pression connue, le point de bulle et de rosée du fluide frigorigène pur, c'est à dire la température de saturation à la pression donnée.

Organigramme :

1. donner dT
2. T = T -dT
3. calcul de S et H (équation d'état BWRS)
4. Difs = S - S_{cr}

   si Difs > 0 , aller à l'étape 2.

   sinon :

   si dT $< 10^{-4}$, aller à l'étape 5.

   sinon T = T+ dT, dT = dT/2 , aller à l'étape 2
5. $P_{LS} = P$, $S_{LS} = S$, $H_{LS} = H$
6. $T_{VS} = T + dT$, calcul de S et H (équation d'état BWRS)
7. $P_{VS} = P$, $S_{VS} = S$, $H_{VS} = H$
8. Fin

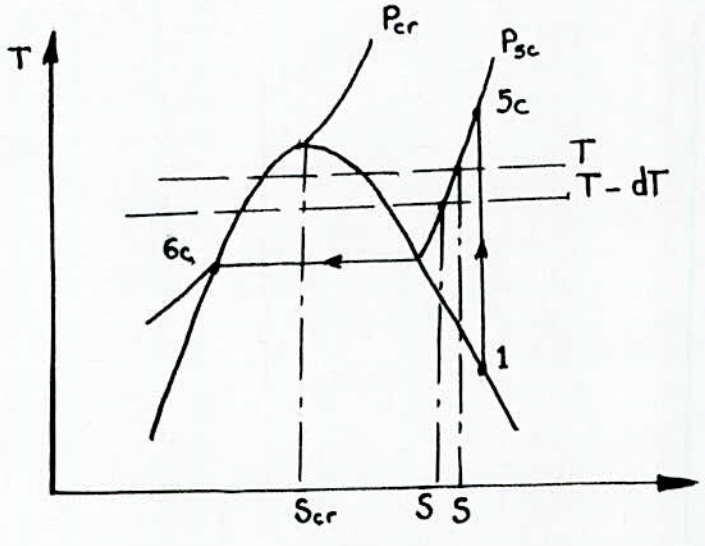


Fig. E.6 Localisation du point (6_c)

E.2 Cascade à deux niveaux de pression

Pour une cascade à deux niveaux de pression (figure 3.5a), le cycle de réfrigération pour chacun des fluides frigorigènes Propane, Ethylène et particulièrement le Méthane peut être donné par le diagramme T-S suivant :

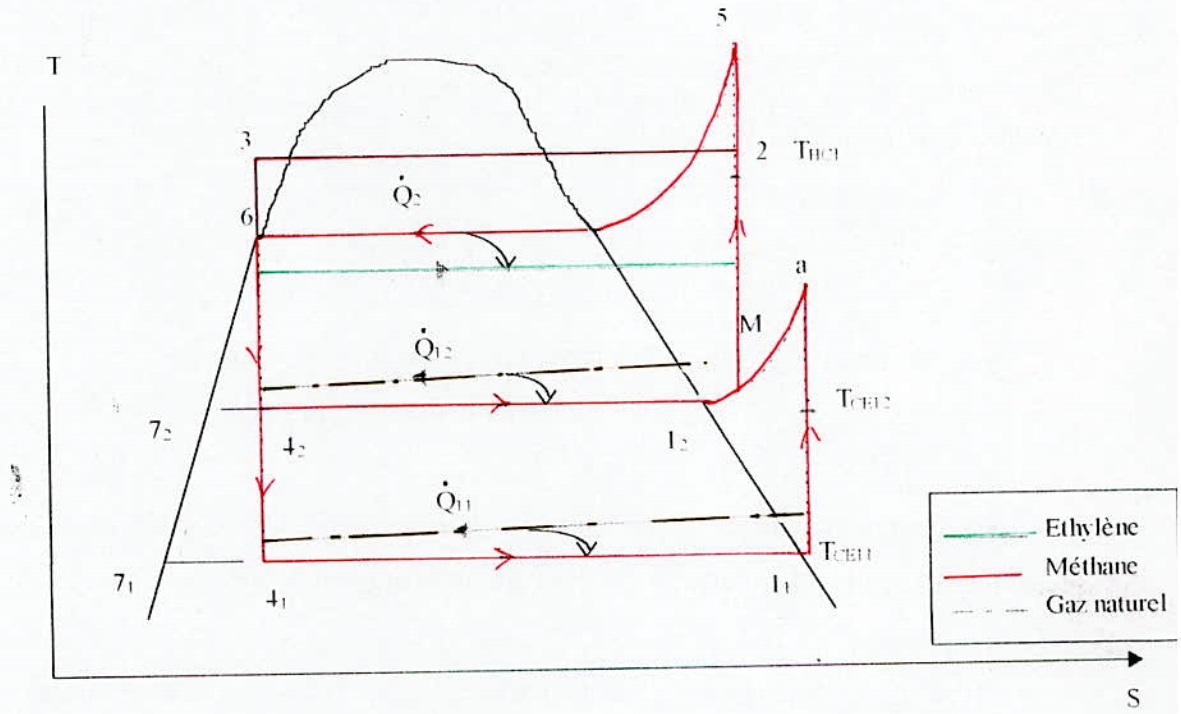


Fig. E.7 Diagramme T-S du cycle Méthane à deux niveaux de pression

où :

(a) : la sortie du compresseur du premier niveau de pression;

(M) : mélange entre le Méthane à la sortie du compresseur du premier niveau de pression (a) et celui à la sortie de l'évaporateur du deuxième niveau de pression (1_2).

Pour uu cycle cascade à deux niveaux de pression, la détermination des paramètres thermodynamiques differt un peu de clle d'un cycle à un niveau de pression. Cette difference consiste à déterminer la température T_M au point de mélange (M) du Méthane qui se trouvait aux états thermodynamiques de vapeur saturée (1_2) et de vapeur surchauffée (a) (voir figure E.7).

pression au point de mélange étant connue : $P_M = P_{12} = Pa$. Au point de mélange, le bilan d'énergie permet d'écrire (figure E.8) :

$$\dot{m}_1 Ha + \dot{m}_2 H_{12} = \dot{m}_T H_M \qquad (E.1)$$

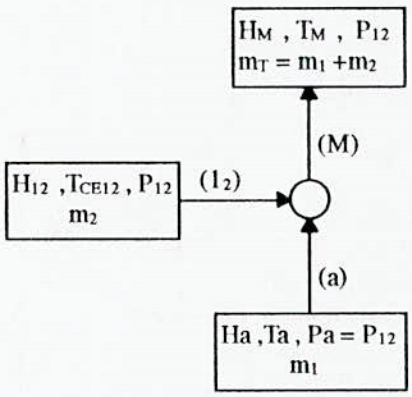


Fig. E.8 Bilan d'énergie au point de mélange
d'une cascade à un niveau de pression

Pour des paramètres thermodynamiques aux points (a) et (1_2) connus, deux cas peuvent se présenter quant à la détermination de la température au point de mélange (M):

1er Cas: si les débits m_k (k=1,2) sont connus, la relation (E.1) permet de déterminer l'enthalpie H_M au point de mélange, après quoi, il suffit de balayer l'intervalle de température [T_{CE12} , Ta] pour retrouver la valeur de T_M correspondant à H_M.

2eme Cas: si les débits m_k (k=1,2) sont inconnus, ce qui correspond à notre étude, la détermination de T_M devient beaucoup plus complexe. Dans ce cas, on procède par itérations (voir organigramme ci-dessous) pour calculer simultanément la température T_M et les débits m_k (k=1,2), pour lesquels l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

$$\dot{Q}_{2C} = \dot{Q}^{*}_{2} \qquad \text{ou} \qquad \left(\dot{m}_1 Ha + \dot{m}_2 H_{12}\right)_C = \left(\dot{m}_T H_M\right)_C$$

avec :

$\dot{Q}_{2C}$: flux thermique rejeté à la source chaude, calculé :

$$\dot{Q}_{2C} = \sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k (H_{5C} - H_{6C})$$

$\dot{Q}^*_2$: flux thermique réellement rejeté à la source chaude (équation (3.67)) :

$$\dot{Q}^*_2 = \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{1k} \frac{T_{HC1}}{T_{CE1k}}$$

L'organigramme présenté ci-dessous englobe les étapes principales de calcul des paramètres thermodynamiques du cycle Méthane à deux niveaux de pression, applicables aussi aux cycles Ethylène et Propane.

Organigramme :

1. Donner T_{HC1} , T_{CE1k} (k=1à2), flux thermique $\dot{Q}_{1k}$ (k=1à2) soutiré au gaz naturel et les paramètres critiques du Méthane.
2. Localisation des points (1_k) et (7_k) (k=1à2): (revoir cascade à un niveau de pression)
3. Localisation du point (a) :
   - 3.1 donner Pa = P12
   - 3.2 initiaisation de T($T=T_{CE12}$) , SS = S11
   - 3.3 appel de la subroutine local5
   - 3.4 Ta = T , Ha = H , Sa = S
4. Localisation du point de mélange (M) :
   - 4.1.1 donner P_M (P_M = P12)
   - 4.1.2 initialisation de T_M ($T_M = T_{CE12}$)
   - 4.1.3 donner dT
   - 4.1.4 $T_M = T_M + dT$
   - 4.1.5 calcul de S_M et H_M (équation BWRS)

   4.2 Localisation du point (2) :(revoir cascade à un niveau de pression, avec $SS=S_M$)

   4.3 Localisation des points (5) (6) et (3) .

   4.4 Localisation des points (4_k) (k=1à2).

   4.5 Calcul des débits de Méthane pour chaque niveau de pression :

$$\dot{m}_k = \frac{\dot{Q}_{1k}}{H_{1k} - H_{4k}} \quad (k=1à2)$$

4.6 $$\dot{Q}_2^* = \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{1k} \frac{T_{HC1}^*}{T_{CE1k}^*} \quad \text{et} \quad \dot{Q}_{2c} = \sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k (H_{5c} - H_{6c})$$

si $\dot{Q}_{2C} = \dot{Q}_2^*$, aller à l'étape 5

sinon, aller à l'étape 4.1.4

5. Fin.

On doit noter que, pour les cycles Propane et Ethylène, les débits m_k (k=1,2) et les flux thermiques rejettés à la source chaude s'expriment comme suit:

Cycle Ethylène :

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}_2^* + \dot{Q}_{41}}{H_{11} - H_{41}} \quad \text{et} \quad \dot{m}_2 = \frac{\dot{Q}_{42}}{H_{12} - H_{42}}$$

$$\dot{Q}_3^* = \dot{Q}_2^* \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE21}^*} + \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{4k} \frac{T_{HC2}^*}{T_{CE2k}^*} \quad \text{et} \quad \dot{Q}_{3C} = \sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k (H_{5c} - H_{6c})$$

Cycle Propane :

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}_3^* + \dot{Q}_{51}}{H_{11} - H_{41}} \quad \text{et} \quad \dot{m}_2 = \frac{\dot{Q}_{52}}{H_{12} - H_{42}}$$

$$\dot{Q}_0^* = \dot{Q}_3^* \frac{T_{HC3}^*}{T_{CE31}^*} + \sum_{k=1}^{2} \dot{Q}_{5k} \frac{T_{HC3}^*}{T_{CE3k}^*} \quad \text{et} \quad \dot{Q}_{0C} = \sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k (H_{5c} - H_{6c})$$

E.3 Cascade à trois niveaux de pression

La figure E.9 représente le diagramme T-S du cycle Méthane à trois niveaux de pression faisant partie de la cascade donnée par la figure (3.6):

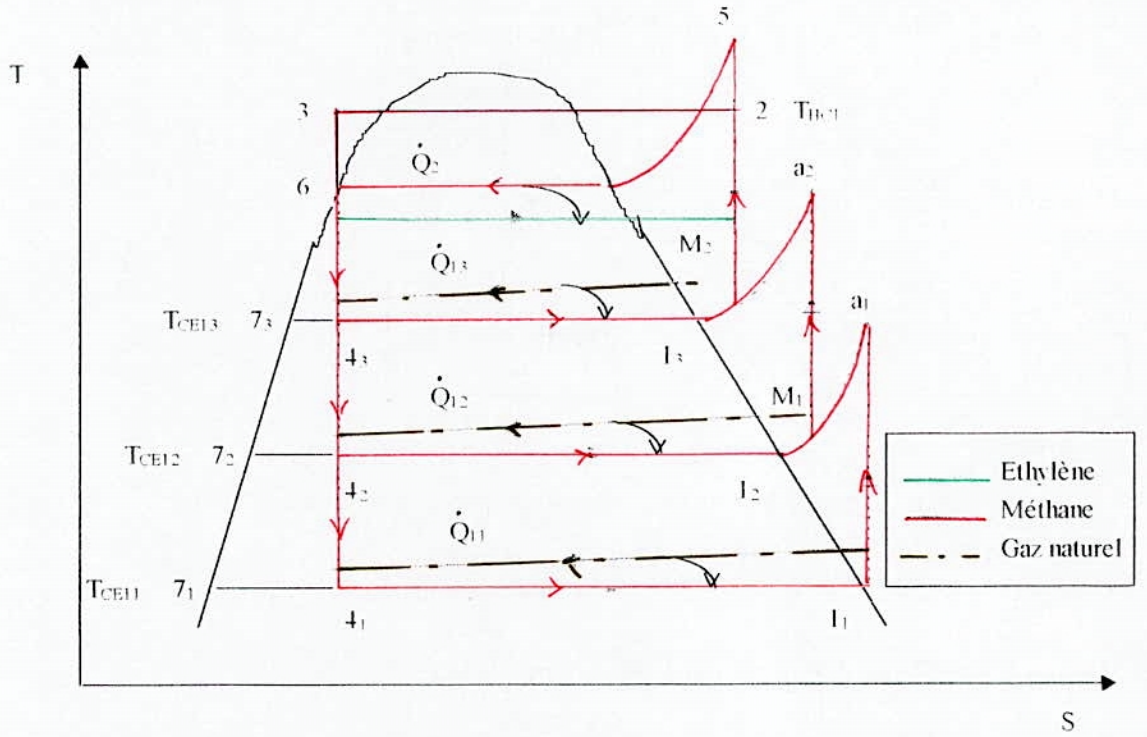


Fig .E.9 Diagramme T-S du cycle Méthane à trois niveaux de pression

où :

(a_1) : la sortie du compresseur du premier niveau de pression;

(a_2) : la sortie du compresseur du deuxième niveau de pression;

(M_1) : mélange entre le Méthane à la sortie du compresseur du premier niveau de pression (a_1) et celui à la sortie de l'évaporateur du deuxième niveau de pression (1_2);

(M_2) : mélange entre le Méthane à la sortie du compresseur du deuxième niveau de pression (a_2) et celui à la sortie de l'évaporateur du troisième niveau de pression (1_3).

Pour déterminer les paramètres thermodynamiques de ce cycle, on applique la procédure de calcul adoptée précédemment pour un cycle à deux niveaux de pression. Puisque la plupart des étapes de calcul ont été explicitées auparavant, on ne détaillera ici que celles qui se réfèrent à la détermination du premier et second point de mélange (M_1) et (M_2). Pour cela, on doit établir un bilan d'énergie en chacun de ces points:

- le bilan d'énergie au premier point de mélange (M_1) :

$$\dot{m}_1 H_{a1} + \dot{m}_2 H_{12} = \left(\dot{m}_1 + \dot{m}_2\right) H_{M1} \qquad (E.2)$$

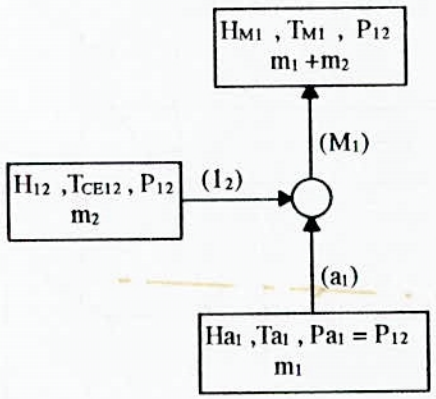


Fig.E.10 Bilan d'énergie au premier point de mélange d'une cascade à deux niveaux de pression

- le bilan d'énergie au deuxième point de mélange (M_2) :

$$\left(\dot{m}_1 + \dot{m}_2\right) H_{a2} + \dot{m}_3 H_{13} = \dot{m}_T H_{M2} \qquad (E.3)$$

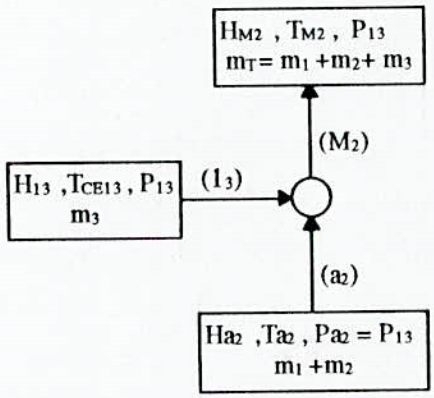


Fig.E.11 Bilan d'énergie au deuxième point de mélange d'une cascade à deux niveaux de pression.

Par analogie avec la section précédente, et pour des paramètres thermodynamiques aux points (a_1), (1_2) et (1_3) connus, deux cas se présentent :

1er Cas : si les débits m_k (k=1,3) sont connus, la détermination des températures aux points de mélange (M_1) et (M_2) passe par les étapes suivantes :

- calcul de H_{M1} à partir de la relation (E.2);
- balayage de l'intervalle de température [T_{CE12} , Ta_1] pour retrouver la température T_{M1} correspondant à H_{M1} ;
- calcul des paramètres thermodynamiques au point (a_2) (subroutine local 5)
- calcul de H_{M2} à partir de la relation (E.3);
- balayage de l'intervalle de température [T_{CE13} , Ta_2] pour retrouver la température T_{M2} correspondant à H_{M2} .

2eme Cas -si les débits m_k (k=1,3) sont inconnus, la détermination des températures aux points de mélange devient beaucoup plus complexe. On procède, alors, par itérations pour déterminer les débits m_k (k=1,3) , les températures T_{M1} et T_{M2} (appartenant à [T_{CE12} , Ta_1] et[T_{CE13} , Ta_2]) pour lesquels les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\dot{Q}_{2C} = \dot{Q}^{*}_{2} \quad \text{ou} \quad \left(\dot{m}_1 Ha_1 + \dot{m}_2 H_{12}\right)_C = \left(\left(\dot{m}_1 + \dot{m}_2\right) H_{M1}\right)_C$$

et

$$\left(\left(\dot{m}_1 + \dot{m}_2\right) Ha_2 + \dot{m}_3 H_{13}\right)_C = \left(\dot{m}_T H_{M2}\right)_C$$

avec :

Q_{2C} : flux thermique rejeté à la source chaude, calculé :

$$\dot{Q}_{2C} = \sum_{k=1}^{3} \dot{m}_k (H_{5C} - H_{6C})$$

$$\dot{m}_k = \frac{\dot{Q}_{1k}}{H_{1k} - H_{4k}} \quad (k=1à3)$$

Q^{*}_{2} : flux thermique réellement rejeté à la source chaude :

$$\dot{Q}^{*}_{2} = \sum_{k=1}^{3} \dot{Q}_{1k} \frac{T_{HC1}}{T_{CE1k}}$$

Pour les cycles Propane et Ethylène, les débits m_k (k=1,3) et les flux thermiques rejettés à la source chaude sont donnés par les expressions suivantes:

Cycle Ethylène :

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}_2^{\cdot} + \dot{Q}_{41}}{H_{11} - H_{41}} \quad \text{et} \quad \dot{m}_k = \frac{\dot{Q}_{4k}}{H_{1k} - H_{4k}} \quad (k=2,3)$$

$$\dot{Q}_3^{\cdot} = \dot{Q}_2^{\cdot} \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE21}^{\cdot}} + \sum_{k=1}^{3} \dot{Q}_{4k} \frac{T_{HC2}^{\cdot}}{T_{CE2k}^{\cdot}} \quad \text{et} \quad \dot{Q}_{3C} = \sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k (H_{5c} - H_{6c})$$

Cycle Propane :

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{Q}_3^{\cdot} + \dot{Q}_{51}}{H_{11} - H_{41}} \quad \text{et} \quad \dot{m}_2 = \frac{\dot{Q}_{52}}{H_{12} - H_{42}}$$

$$\dot{Q}_0^{\cdot} = \dot{Q}_3^{\cdot} \frac{T_{HC3}^{\cdot}}{T_{CE31}^{\cdot}} + \sum_{k=1}^{3} \dot{Q}_{5k} \frac{T_{HC3}^{\cdot}}{T_{CE3k}^{\cdot}} \quad \text{et} \quad \dot{Q}_{0C} = \sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k (H_{5c} - H_{6c})$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] **Ait-Ali, M. A.**, "Natural Gaz Liquefaction Cycles Irreversibilities Analysis," Engineer's Degree thesis, Standford U., 1975.

[2] **Ait-Ali, M. A.**, "Optimum Endoreversible Power Cycle with a Specified Operating Temperature range," *Journal applied physics*, Vol. 76, n° 6, 1994.

[3] **Ait-Ali, M. A.**, "Finite Time Optimum Refrigeration Cycles," *Journal applied physics*, Vol. 77, n° 9, 1995.

[4] **Benebict, M., G. B. Webb, et L. C. Rubin**, *J. Chem. Phys.*, 8, 334 (1940)

[5] **Benebict, M., G. B. Webb, et L. C. Rubin**, *J. Chem. Phys.*, 10, 747(1942)

[6a] **Bouhafs, A.**, "Le Gaz Algérien Situation et Perspectives," 19eme Congrés Mondial du Gaz, *Gaz d'aujourd'hui*, n° 10, 1994.

[6b] **Bouhafs, A.**, "Les Hydrocarbures en Algérie Situation Actuelle et Perspectives," *Pétrole et Gaz Arabes*, Vol. XXVI, n°. 617, Décembre 1994.

[7] **Bourguet, J. M.**, "Les Procédés de Liquéfaction de Gaz Naturel," *Gaz d'Aujourd'hui*, Vol. 85, n° 5, Mai 1973, pp. 249-255.

[8] **Chen, J. et Z., Yan**, "Optimal Performance of an Andoreversible-Combined Refrigeration Cycle," *Journal applied physics*, Vol. 63, n° 10, 1987.

[9] **Cornot-Gandolph, S.**,*World LNG Trade. A New Growth Phase*, Rueil-Malmaison, Centre International d'Information sur le Gaz Naturel et tous les Hydrocarbures Gazeux (Cedigaz), Novembre 1991, 151p.

[10] **Cornot-Gandolph, S.**, *Le Gaz Naturel dans le Monde*, Rueil-Malmaison, Centre International d'Information sur le Gaz Naturel et tous les Hydrocarbures Gazeux (Cedigaz), Juin 1993, 137p

[11] **Dauger, M. J.-M.**, " Evolution du Marché Gazier Européen:Perspective Méditerranéenne," *Pétrole et Gaz Arabes*, Vol. XXVIII, n°. 643, Janvier 1996.

[12] **Dufresne, J.-P.**, "Passé, Présent et Futur du Procédé TEALARC,"*Gaz d'Aujourd'hui*,109, n° 10, 1985, pp. 329-340.

[13] **Edmister, W. C. et B. I. Lee**, *Applied Hydrocarbon Thermodynamics*, Vol. 1, 2nd ed., Gulf Publishing Company, Houston, 1984, 233p.

[14] **Ferriter, J. P.**, "Le Gaz et Notre Avenir Commun : Perspectives Internationales," 111^{éme} Congrés du Gaz, *Gaz d'aujourd'hui*, n° 11, 1994

[15] **Gas Development Corporation**, Fascicule 22 : *Hasards du GNL*, IAP, Juin 1976.

[16] **Gully, A. J.**, *Refining Engineer*, 31, C-34 to C-47, May 1959.

[17] **Harmens, A. et H. Knapp**. *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 19, 291(1980).

[18] **Hawlay, M. C.**, Program for Engineers in liquefied Natural Gas : *Design and Economics for LNG Systems*, IAP, 1978.

[19] **Jaffre, P.**, "Du Producteur au Consommateur Final du Gaz," 111ème Congrés du gaz, *Gaz d'aujourd'hui*,n° 11, 1994.

[20] **Karnic, J. L. et M. Valais**, *L'économie du Gaz Naturel dans L'économie des Hydrocarbures*, Masséron J., Collection "Science et Technique du Pétrole" n° 14, 4e Ed., Editions Technip, Paris, 6e Partie, 1991, pp. 463-511.

[21] **Laouar, S. et M. A. Ait-Ali**, "Optimisation de la Puissance Mécanique d'une Cascade à trois Cycles de Réfrigération Endoréversibles," Actes de la deuxième Journée Scientifique et Technique (JST2) de l'I.N.H, Boumerdes, 5-6 Mai 1997, Vol. 1, pp. 158-161.

[22a] **Laouar, S. et M. A. Ait-Ali**, "Modèle d'une Cascade de Cycles Endoréversibles de Liquéfaction de Gaz Naturel.," Actes de la troisième Journée Scientifique et Technique de Sonatrach (JST3), Alger, 19-22Avril 1998.

[22b] **Laouar, S. et M. A. Ait-Ali**, "Minimisation de la Puissance Mécanique d'une Cascade à trois Cycles de Réfrigération Endoréversibles," Actes de la troisième Conférence Maghrébine de Génie des Procédés (COMAGEP3), Tamanrasset, 10-13 Mai 1998, Vol. 1, pp.189-192.

[23] **Lee, B. I. et M. G. Kesler**, AIChe J., 21, 510 (1975).

[24] **Passut, C. A. et R. Danner**, I & EC, *Process Des. Rev.*, 11, 543 (1972).

[25] **Peng, D. Y. et D. B. Robinson**, *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 15(1), 59 (1976).

[26] **Rachford, H. H. Jr., et J. D. Rice**, *J. Petro. Technol.*, 4, 10, Sec. 1, 19; sec. 2, 3 (1952).

[27] **Ravindran, A., D. T. Phillips, et J. J. Solberg**, *Operations Research Principles and Practice*. 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1987.

[28] **Rédlich, O. et J. N. S. Kwong**, *Chem. Rev.*, 44, 233(1949).

[29] **Rojey, A., Durand, B., Jaffret, C., Jullian, S., et M. Valais**, *Le Gaz Naturel Production Traitement Transport*, Editions Technip, Paris, 1994.

[30] **Sarkis, N.**, "Algérie," *Pétrole et Gaz Arabes*, Vol. XXVIII, no. 643, janvier 1996, p.8

[31] **Shah, V. M., Y.-L. Lin, P. R. Bienkowski, et H. D. Cochran**. *Fluid Phase Equilibria*, 87-93, 116 (1996).

[32] **Sheng, W. et B. C.-Y. Lu**, *Fluid Phase Equilibria*, 71-80, 56 (1990).

[33] **Soave, G.**, *Chem. Eng. Sci.*, 27, 1197 (1972).

[34] **Starling, K. E. et M. S. Han**, *Hydrocarbon Process*, 51 (5), 129 (1972).

[35] **Starling, K. E.**, *Fluid thermodynamic properties for light petroleum systems*, Gulf Publishing Company, Texas, 1973.

[36] **Stoecker, W. F. et J. W. Jones**, *Refrigeration and Air Conditionning*, 2nd ed., Mcgraw-Hill Book Company, New York, 1986, 443 p.

[37] **Stryjek, R. et J. H. Verra**, *Can. J. Chem. Eng.*, 64(2), 323 (1986).

[38] **Vidal, J.**, *Thermodynamique. Méthodes Appliquées au Raffinage et au Génie Chimique*, Vol. 1, Editions Technip, Paris, 1973.