UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

PROJET DE FIN D'ETUDES

APPLICATION DU MODELE DE LEONTIEF A L'ENTREPRISE

Proposé par :

Mr BOUMAHRAT
Mr COSOR

Etudié par :

Mr S. AOUED
Mr M. HENNI

PROMOTION 1975

Nous dédions ce travail :

A NOS PARENTS,

A NOS FAMILLES,

A TOUS NOS AMIS.

Nous remercions Messieurs BOUMAHRAT et COSOR pour l'aide qu'ils nous ont apportée dans l'élaboration de ce rapport.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à tous ceux qui ont contribué à notre formation.

-o- SOMMAIRE -o-

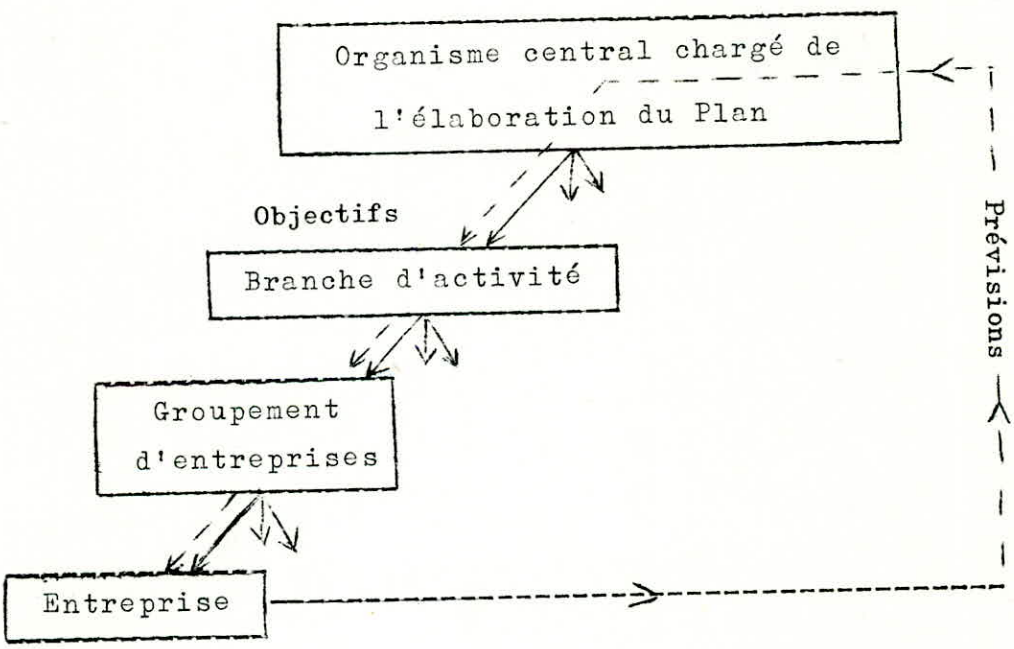
INTRODUCTION

Une définition qui a été donnée d'un plan est la suivante: C'est un projet , c'est-à-dire un ensemble d'objectifs à atteindre et la fixation des moyens à mettre en oeuvre pour y parvenir. Dans le domaine industriel par exmple,les objectifs du second plan quadriennal(1974-1977) consistent,entre autres,à porter certaines productions à des niveaux plus élevés,en prévision de besoins plus grands dus au développement général prévu de l'économie.

Les techniques de réalisation d'un plan nécessitent la mise en place de structures appropriées au développement prévu des différentes activités économiques ainsi que les moyens matériels et humains que ce développement exigera.

La planification implique donc une économie dont on maitrise les développements et les orientations.

Dans une économie où l'étatisation des secteurs productifs est assezpoussée, ainsi que leur interdépendance dans le cas d'une forte intégration (qui un est un des objectifs principaux dans la stratégie globale du développement de notre pays), la réalisation d'un plan se ramène au niveau de l'entreprise; d'une part parce que c'est la cellule économique de base où, par définition de l'entreprise, se déroule l'activité proprement dite de production de biens et services et d'autre part par ce que l'on sera naturellement amené, une fois les objectifs globaux déterminés, à les assigner, dans une proportion en rapport avec leurs dimensions, aux organes d'exécution et, par suite, à l'entreprise.



Pour la contribution de l'entreprise à la réalisation du Plan, nous utilisons un modèle à la fois prospectif (on l'utilise pour les prévisions) et explicatif (des structures productives): le modèle input-output ou entrées sorties de Léontief.

PRESENTATION

Le système des relations interindustrielles de Léontief a été principalement conçu pour expliquer les structures productives de l'économie Américaine. (cf."Structure de l'économie Américaine 1919-1939" de Léontief).

Par la suite, une autre application non moins importante du modèle s'avéra être très efficace dans l'analyse prospective des activités économiques.

Le tableau d'échanges inter-industriels, algébriquement iterprété est en effet un important outil de prévision pour la planification.

Nous nous proposons de montrer que le modèle,généralement utilisé en macro-économie,peut être transposé à l'échelle de l'entreprise productive,où le processus technologique de fabrication des outputs produits est un ensemble d'unités de production,utilisatrices d'inputs provenant du même ensemble.

Il s'agit alors de prévoir les productions nécessaires de chaque unité afin de satisfaire les cosommations intermédiaires des autres unités et la demande finale.

PREMIERE PARTIE

PRESENTATION GENERALE

DU

MODELE DE LEONTIEF

GENERALITES

Un modèle économique est conçu à partir d'hypothèses de base et de définitions de variables qu'il utilise.

Les variables utilisées sont de deux types:

_Les variables exogènes: elles représentent directement ou indirectement les causes du phénomène étudié, et pour lesquelles des informations statistiques sont disponibles.

exemple: Dans le modèle linéaire représentatif de la consommation C en fonction du revenu R, celui-çi représente la variable exogène. $(C= aR + c')$

ces variables sont aussi appelées variables "explicatives".

_Les variables endogénes : elles représentent des phénomènes pour lesquels a cune information n'est disponible quant aux causes soit qu'elles soient elles-mêmes inconnues, soit qu'on ne puisse en déterminer les valeurs numériques. Ce sont les variables à expliquer. La prévision de leurs valeurs peut se faire à partir de celles de séries passées.

Le modèle de Léontief n'est pas à proprement parler un modèle mathématique, ç'est à dire un modèle où les variables utilisées sont liées entre elles par des relations de structure.

Il consiste plutot à expliciter les relations fonctionnelles entre les différentes variables, et selon les différentes variantes dans lequel on l'utilise.

Exemple : Soit X_i la production d'un bien i ; X_{ij} ses utilisa-tions dans les autres secteurs et Y_i la demande finale du bien i . Le modèle utilise donc des variables exogènes (demande finale) ou endogènes (production) mais peuvent elles-mêmes faire l'objet d'estimations préalables à l'aide de modèles explicatifs ou par l'analyse de séries chronologiques passées (cas de la demande finale).

1.1 Définitions :

* Consommation intermédiaire de produits :

Au cours de l'activité productive de l'entreprise ,des produits disparaissent soit par incorporation dans des produits plus élaborés, soit par destruction dans le procéssus de production : Ils constituent la consommation intermédiaire de l'entreprise . L'usure ou la dépréciation de l'équipement durable ne fait pas partie de la consommation intermédiaire. Mais on classe dans celle-ci les biens durables de faibles valeurs (petit outillage) et les dépenses d'entretien qui sont nécessaires pour assurer au matériel sa durée normale d' utilisa-tion .

* Consommation finale :

La consommation finale d'un bien est la quantité de ce bien qui, par usure ou destruction , permet de satisfaire directement les bes-oins des agents économiques intérieurs sans concourir à l'accroisse-ment de la production .

* Branche :

C'est l'ensemble des unités de production qui ont la caractéris-tique commune de produire la même catégorie de biens ou de services.

Cette définition générale est celle donnée par la comptabilité française.Pour la comptabilité nationale,le critére qui détermine la composition des branches est la nature du produit qui les constitue

Pour cela ,on utilise la nomenclature des produits qui donnent également les correspondances entre les codifications du tarif douanier algérien et de la nomenclature douaniere de Bruxelle(N.D.B.), ceci afin de classifier les importations.La derniere nomenclature de produits utilisée par le secrétariat du plan a été faite en 1969.

Donc pour la CNA,la branche est l'activité qui élabore,à partir des autres produits de la nomenclature,un produit de cette nomenclature,et un seul,tout produit étant pbtenu à partir d'une seule branche.Cette distinctiom des produit étant sera tres utile lorsqu'il s'agira d'établir l'équilibre ressource-emploi.

*Secteur:

C'est l'ensemble des entreprise dont l'activité principale est la même.Les entreprises d'un même secteur peuvent avoir des activités secondaires ou accessoires variées et differentes les unes des autres.

Exemple:les vêtements et les fils sont tous deux produits par le secteur "Industries textiles",mais le premier appartient à la branche Habillement(18,6)tandis que le second appartient à la branche "Fils et Filés".

Le regroupement des entreprises en secteurs est surtout intéressant pour les études où importe que soit préservée l'unité de décision st de gestion,constituée par l'entité élémentaire "entreprise".

I.2 Hypothèses simplificatrices du modéle:

a) L'activité économique nationale est répartie en branches homogènes caractérisées par des produits spécifiques et des unités de productions de taille à peu près compqrables?

Cette hypothése est necessaire car dans le modéle de Léontief, le tableau d'échanges inter-industriels est censé décrire toute l'activité économique d'un pays et aboutit à un équilibre ressources-emplois des produits.

b) Dans chaque branche on suppose qu'il existe une solution simple entre la production totale des outputs produits par la branche et les achats de biens ou facteurs (inputs) necessités par cette production.

Ceci est l'hypothése fondamentale du modéle input-output. La relation a la forme d'une fonction linéaire et homogène:

$$x_{ij} = a_{ij} . X_j$$

avec: -x_{ij}: achat de biens i par la branche j

-X_j : production totale de la branche j

-a_{ij}: coéfficient constant de production ou rapport de transformation du produit intermédiaire i en bien j.

a_{ij} étant supposé constant, le modéle est donc statique.

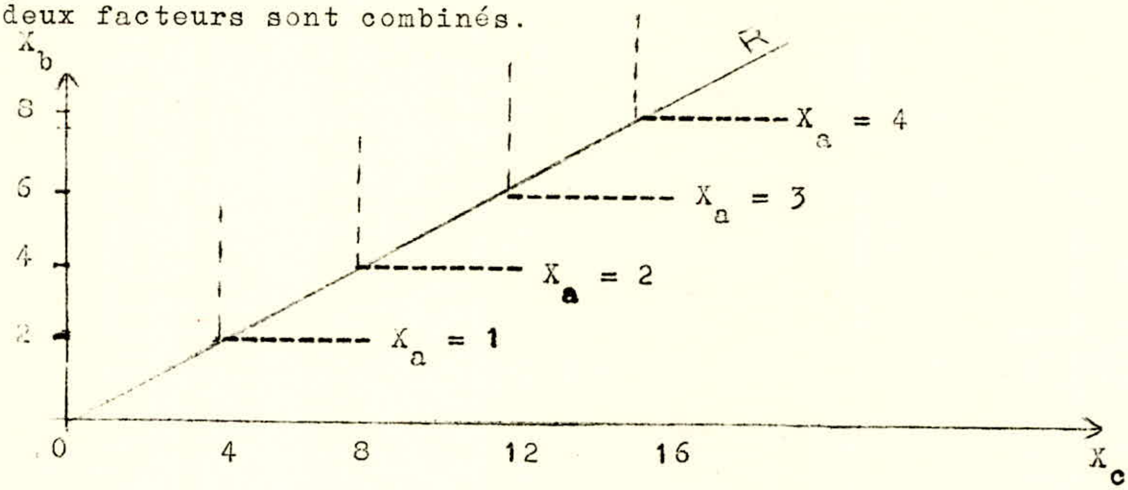
Les processus de fabrication fixés, la constance des coéfficients de production implique que la technique demeure neutre du point de vue des allocations de ressources et des facteurs, autrement dit que la production n'est fonction que des inputs. En fait la capacité de production est étroitement liée au volume et au niveau technologique des équipements dont on dispose.

Cette hypothèse de constance des coéfficients techniques peut être illustrée au moyen d'isoquantes d'un type particulier.

Supposons par exemple que pour produire une unité de produit X_a, deux unités de bien X_b sont necessaires. (nous faisons abstraction des facteurs primaires et du travail.)

Portons, dans un repére, en abcisses les quantités de bien X_c et en ordonnées les quantités de bien X_b pour produire 1,2,3,...,n uni--tés de bien X_a.

Ces quantités produites se situent sur un segment OR issu de l'origine et dont la pente mesure le rapport fixe b/c selon lequel les deux facteurs sont combinés.



Les isoquants sont formés par le segment en pointillés se coupant à angles droits aux points correspondant aux differentes valeurs de X_a

Cette illustration met en relief le fait que si l'un des biens intermédiaires s'accroit, la quantité de l'autre restant inchangée aucune production supplémentaire ne peut être obtenue; Autrement-dit le produit marginal de ce facteur est nul.

Dans la réalité on utilise souvent la relation :

$$X_{ij} = \overline{X}_{ij} + a_{ij}.X_j$$

Le paramètre a_{ij} est alors appelé coéfficient d'input marginal; $\overline{X}_{ij}$ est une constante qui ne varie pas avec le niveau de production.

La connaissance de l'ensemble des coéfficients a_{ij} permet de préciser les structures technico-économiques de la production et les interdépendances fonctionnelles entre les branches d'activité .

c) Les fonctions de production décrites par le modèle sont à base de relation de complémentarité. Dans la réalité, les facteurs de production sont toujours plus ou moins concurrents et la variation des prix peut provoquer des substitutions dans les utlisations de produits intermédiaires.

* La fonction de production dans le modèle:

La forme de la fonction de production $X_j = f(X_{1j}, X_{2j}, \ldots, X_{nj})$ exige, pour la production d'un output donné, la fourniture d'un minimum de chaque input :

$$X_{ij} \quad a_{ij} \cdot X_j \qquad (i = 1, n)$$

L'absence de substitution entre inputs peut être expliquée de deux manières :

- Létat de la technologie est telle qu'aucune substi-tution n'est possible.

- Les prix changent et il n'est pas possible de chan-ger les proportions d'inputs sans tenir compte de la forme de la fonction de production.

$$X_j = a_{j1} \cdot X_1 + a_{j2} \cdot X_2 + \ldots + a_{jn} \cdot X_n$$

Si l'on diminue la quantité de l'input 1 d'une unité, la produc-tion de l'output j va diminuer de a_{j1}. Pour la ramener à son niveau antérieur il faut, par exemple, augmenter l'utilisation du facteur (2) de a_{j1} / a_{j2} unités.

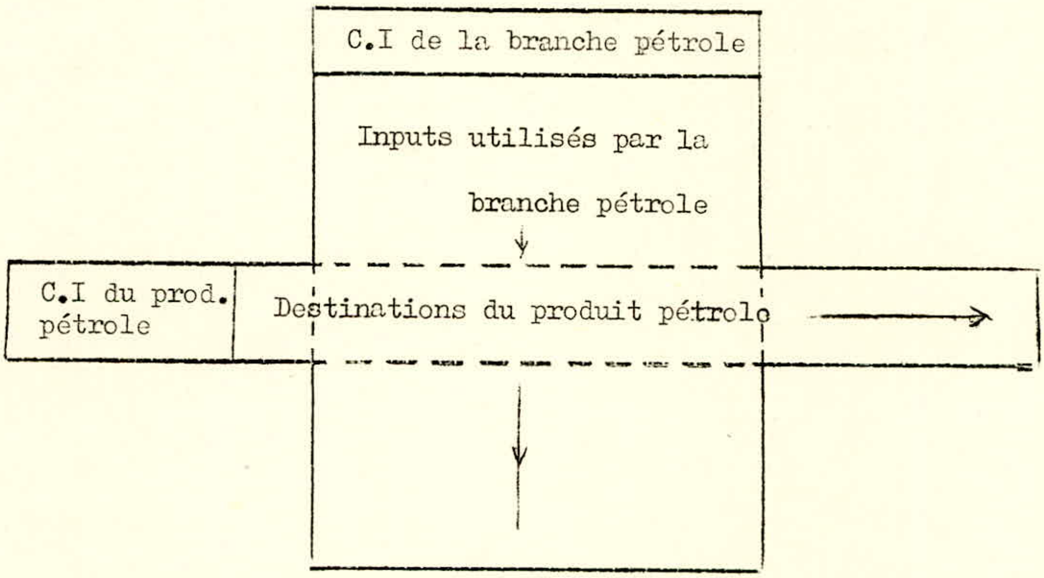
La meilleure combinaison possible des facteurs de production conduit à la résolution d'un programme linéaire, que nous verrons plus loin. Léontief a choisi la première alternative pour justifier la non substitution dans son modèle.

d) L'utilisation du modèle à des fins prévisionnelles suppose une évaluation assez valable de la demande finale.

I.3 Le tableau d'échanges interindustriels:

La principale fonction du T.E.I est de décrire le flux des biens et services d'une branche à une autre. Il est aussi appelé matrice de transactions.

Il englobe tous les biens et services produits dans une économie. Chaque branche y apparait deux fois: Comme producteur d'output et comme utilisateur d'inputs



.Pour les chiffres(cf. T.E.I année 1969)

3.1) Exemple de T.E.I

Il s'agit du tableau des échanges interindustriels de léconomie Algérienne de l'année 1969.

L'activité à été agrégée en 15 branches, correspondant à 14 produits. La branche commerce étant conventionnellement supposée ne pas produire de biens et services.

Il a été établi avec les prix d'utilisation de l'année 1969.

TABLEAU DES ECHANGES

PRODUITS	Importations	Droits & taxes import	Productions brutes	MARGES COMMERCIALES						Total ressources	CONSOMMATIONS			
				Cons. interm.	Cons. adminis.	Cons. ménages	F B C F	Export.	Total marges		Agricult.	Industries aliment.	Pétrole	Auto énergie équipem
Agriculture	464,1	36,6	3311,5	153,4	11,2	310,4	-	47,3	522,3	4334,5	255,8	1917,9	-	-
Industries aliment	351,3	64,8	3565,4	99,5	18,3	834,0	-	175,7	1127,5	5109,0	45,0	477,1	-	-
Pétrole	60,2	21,4	3502,5	352,5	72,2	302,7	-	21,0	748,5	4332,6	60,5	18,1	242,1	53,0
Auto,équip.énergie	-	-	1176,2	-	-	-	-	-	-	1176,2	-	-	-	-
Energie autre que pétrole	17,0	2,0	369,2	-	-	-	-	-	-	358,2	34,3	15,1	12,5	3,6
Mines	15,7	3,1	184,5	5,8	-	1,8	-	4,0	11,6	214,9	-	-	26,0	-
Matériaux de const	72,4	33,2	310,0	43,6	0,5	17,0	-	-	64,1	476,7	3,0	10,4	1,7	55,0
Méc. élec.auto	2481,9	483,3	1256,3	169,4	9,5	120,0	343,6	6,8	649,3	4870,8	17,0	28;3	61,1	195,3
Produits chimiques	594,1	149,0	493,3	110,8	11,4	190,0	-	4,3	316,5	1552,9	149,7	11,9	19,1	17,1
Textiles cuirs	605,6	313,6	1443,4	84,7	14,3	357,0	-	7,6	463,6	2826,2	4,5	5,5	-	-
Industries divers	318,8	102,4	498,3	70,4	8,4	141,4	-	4,3	224,5	1144,0	18,0	35,7	5,1	15,0
B T P	-	-	2043,0	-	-	-	-	-	-	2043,0	5,4	6,0	20,8	40,0
Transports	-	-	1079,7	-	-	-	-	-	-	1079,7	19,0	18,9	71,2	142,7
Autres services	90,0	-	2848,7	-	-	-	-	-	-	2938,7	144,3	24,0	132,1	222,4
TOTAL	5071,1	1209,4	22082,0	1090,2	145,8	2274,3	343,6	271,0	4124,9	32487,4	756,5	2568,9	591,7	744,1
				Valeurs ajoutées							2555,0	996,5	2910,8	432,1

INTERINDUSTRIELS 1969

Unité : million de D.A.

INTERMEDIAIRES												CONSOMMATIONS FINALES		F B C F					
énergie autre que pétrole	Mines	Mat. de constr.	Mécan. élec. auto	Produits chimiques	Textiles cuirs	Industries diverses	B T P	Trans-ports	Autres services	Commerce	Total C.I produits	Administ.	Ménages	Aminist.	Ménages	Entre-prises	Variations de stocks	Exportations	Total Emplois
-	-	-	-	-	49,2	39,3	-	0,4	31,9	-	2294,5	55,4	1679,6	-	-	-	100,8	204,2	4334,5
-	-	-	-	34,2	17,9	2,8	-	3,0	142,2	-	722,2	105,0	3727,2	-	-	-	202,2	756,8	5109,0
14,6	6,8	12,0	19,6	3,0	8,2	3,4	77,4	78,6	39,1	53,8	690,2	94,0	365,0	-	-	-	64,4	3119,0	4332,6
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1176,2	-	-	1176,2
40,1	7,7	13	8,3	4,3	4,0	5,7	5,6	8,0	12,6	11,4	186,2	84,0	118,0	-	-	-	-	-	388,2
-	-	-	-	13,5	-	0,1	-	-	-	-	39,6	0,2	10,3	-	-	-	24,9	139,9	214,9
-	0,4	75,0	4,5	1,6	-	3,3	197,7	-	2,3	3,9	358,8	2,7	91,0	-	-	-	23,2	1,0	476,7
28,8	19,2	15,7	572,1	12,8	22,3	13,3	262,7	68,6	144,6	10,6	1466,4	90,3	361,0	88,4	-	2687,4	78,5	98,9	4870,8
-	13,7	0,5	24,2	179,9	47,0	28,2	23,6	20,2	43,9	28,7	607,7	95,4	729,9	-	-	-	94,1	25,8	1552,9
-	-	-	1,5	0,5	677,9	3,6	14,0	5,2	6,6	7,0	726,3	91,3	1842,6	-	-	-	118,8	47,2	2826,2
2,6	4,3	8,2	14,0	21,7	10,7	142,4	41,8	13,4	42,6	59,3	435,4	56,7	555,9	-	-	-	50,3	45,7	1144,0
12,1	1,0	1,8	10,0	4,4	7,9	2,4	20,1	4,6	38,0	16,5	191,0	209,8	30,0	973,1	120,0	519,1	-	-	2043,0
2,2	34,0	17,5	53,0	9,3	18,9	14,0	89,7	45,0	16,6	168,0	720,0	34,6	272,5	-	-	-	-	52,6	1079,7
5,6	7,9	15,3	32,2	7,3	20,7	16,5	154,1	95,4	104,2	118,5	1100,5	115,5	1541,7	60,0	-	121,0	-	-	2938,7
100,0	95,0	159,0	740,0	292,5	888,7	275	886,7	342,4	624,6	477,7	9538,8	1034,9	11324,7	1121,5	120,0	4503,7	352,8	4491,0	32487,4
269,2	89,5	151,0	516,3	200,8	558,7	223,3	1156,3	737,3	2224,1	3647,2	16668,1								

La destination de la production de chaque produit est détaillée en lignes. La production totale de la branche pétrole évaluée en MDA se répartit comme suit suit:(Importation: 60,2 ; droits et taxes afférents à l'importation: 21,4 ; production brute:3502,5 ; etc...)

Le total des ressources (Importation + Droits et Taxes à l'importation + Production brute + Total marge) est égal au total des emplois (Cosom.interm.+ Consomm. finale + FBCF + Variation de stocks + Exportations).

En ligne sont détaillées les consommations intermédiaires de chaque lors du processus de production.

En bas du tableau (T.E.I) sont données les valeurs ajoutées de chaque branche.

V A d'une branche: Valeurs des outputs - Valeurs des inputs consommés.

3.2) Autre disposition du T.E.I :

En vue d'une analyse plus fine de l'activité économique globale, on peut donner au T.E.I la disposition suivante: (voir page suivante).

	Secteurs utilisateurs									
	Consommation Interméd.		Demande Finale					Consommation Totale		
	Secteurs 1, . . j . . n	Consommation Interméd. Totale	Investissement	Consommation	Etat	Exportation	Total demande Finale	Consommation Totale	Importation	Production
Secteurs Producteurs 1	X_{11} . X_{1j} . X_{1n}	W_1	I_1	C_1	E_1	EX_1	Y_1	Z_1	M_1	X_1
.	.									
i	X_{i1} . X_{ij} . X_{in}	W_i	I_i	C_i	E_i	EX_i	Y_i	Z_i	M_i	X_i
.	.									
.	.									
n	X_{n1} . X_{nj} . X_{nn}	W_n	I_n	C_n	E_n	EX_n	Y_n	Z_n	M_n	X_n
Total Inputs produits	U_1 . U_j . U_n									
Inputs primaire	V_1 V_j V_n		V_I	V_C	V_E	V_{EX}		V		
Production Totale	X_1 X_J X_n		I	C	E	EX	YY	Z	M	X

Quadrant I:

Il contient la demande finale des biens et services, répartie selon les principaux types de consommateurs.

Quadrant II:

Il constitue la principale partie du T.E.I . Chaque élément X_{ij} indique le montant(en prix constant) la quantité de bien i utilisée par le secteur j. La consommation intermédiaire de chaque bien est donnée par W_i = ${}_j X_{ij}$ et les achats d'un secteur i aux autres secteurs par $U_j = {}_i X_{ij}$.

Quadrant III:

Il donne les utilisations pour chaque secteur des inputs primaires, c'est-à-dire non produits à l'intérieur du système. Le total de la consommation d'inputs primaires par un secteur i, constitue la valeur ajoutée V_i de ce secteur. VA = Outputs produits - outputs utilisés.

Quadrant IV:

Il montre dans quelles proportions suivant les différentes catégories de consommateurs les facteurs primaires interviennent dans la demande finale.

Matrice des coéfficients techniques:

Les coéff techniques sont des ratios $\dfrac{\text{Consommations intermédiaires}}{\text{Production}}$

Ils sont caractéristiques du processus de fabrication et gardent une certaine stabilité dans le temps, quelle que soit la quantité produite et à technique de production inchangée(hypothèse b)

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

3.4)MModèle ouvert, modèle fermé:

Modèle ouvert: Dans un tel modèle, chaque bien, fabriqué par une branche, est produit à l'aide d'un ou plusieurs facteurs primaires, le travail et les biens intermédiaires provenant d'autres branches; le travail n'est pas produit à partir d'autres biens.

Le modèle ouvert suppose que la catégorie d'agents économiques à laquelle est destinée la consommation finale, ne consomme pas de travail.

Le T.E.I prend alors la forme d'un tableau à double entrées.

	1	2 . . .	j	. . .	n	
1	x_{11}	. . . . .	x_{1j}	. . .	x_{1n}	C_1
2	x_{21}	. . . . .	x_{2j}	. . .	x_{2n}	C_2
.						
.						
.						
n	x_{n1}	. . . . .	x_{nj}	. . .	x_{nn}	C_n
Travail	t_1	. . . . .	t_j	. . .	t_n	0

C_i : Dem.finale de bien i

t_j : $Q^{té}$ de travail nécessaire à la production globale du bien j.

Modèle fermé: Dans le modèle fermé, les ménages forment un secteur industriel dont l'activé serait de fournir du travail aux autres secteurs de l'économie et dont les besoins consisteraient en consommations de biens provenant d'autres secteurs. Les inputs de ce nouveau secteur sont représentés par la colonne des consommations finales et les outputs par la ligne "facteurs pri--maires". L'intégration d'une nouvelle ligne et d'une nouvelle colonne au TEI signifie que la fourniture de travail est assurée par les ménages auxquels sont fournis des biens de consommation: Ces biens de consommation deviennent des facteurs primaires intermédiaires et on ne distinguera ni facteurs primaires ni demande finale dans le nouveau système qui fonctionnera alors de façon close.

3.5 Modèle dynamique de Léontief:

La dynamisation du système de Léontief consiste à prendre en compte les stocks de biens constitués par les divers secteurs en même temps que les quantités de biens transmises d'un secteur à un autre.

On appellera :

$x_j(t)$ = quantité de bien j produite par le secteur j au temps t

$x_{ij}(t)$= quantité de bien i transmise au secteur j au temps t

$s_{ij}(t)$= quantité de bien i stockée par le secteur j au temps t

L'hypothèse fondamentale du modèle dynamique est toujours l'existence de coéfficients de proportionnalité a_{ij} et b_{ij} tels que:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j(t)$$

$$s_{ij} = b_{ij} \cdot x_j(t)$$

Les coefficients a_{ij} sont ceux définis dans le modèle statique, les b_{ij} concernent les stocks:

a_{ij} = Nombre d'unités du $i^{\text{ème}}$ produit entrant dans le secteur j par unité de sortie de ce secteur.

b_{ij} = Nombre d'unités du $i^{\text{ème}}$ produit stockées par le secteur j par unité de sortie de ce secteur.

En supposant qu'il y a n secteurs d'activité et une demande finale formée par le vecteur $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t))$, les conditions d'équilibre en quantités s'écrivent:

$$x_i(t) = y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(t) + \sum_{j=1}^{n} (s_{ij}(t) - s_{ij}(t-1)$$

En utilisant les coefficients a_{ij} et b_{ij} on a:

$$x_i(t) = y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}((x_j(t) - x_j(t-1))$$

Sous forme matricielle, nous avons à résoudre le système:

$$x(t) = y(t) + Ax(t) + Bx(t) - Bx(t - 1)$$

ou encore: $x(t)\ (\ I - (\ A + B\ )) + x(t - 1)(B) = y(t)$.

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION

DU MODELE A L'ENTREPRISE

I - DEFINITION -

Avant d'aborder l'utilisation du modèle dans l'entreprise il est nécessaire de reprendre les principales hypothèses simplificatrices du modèle macro-économique.

Nous considérerons dans tout ce qui suit l'Entreprise définie comme un ensemble d'unités de production assurant la production de biens destinés à la demande finale et/ou à la consommation intermédiaire d'unités du même ensemble.
Une quantité de bien destinée à la consommation intermédiaire d'une unité n'appartenant pas à l'entreprise telle qu'elle vient d'être définie est évidemment inclue dans la demande finale.

De par cette définition ,on ne s'intéressera donc qu'à un certain type d'entreprises: celles où l'input ("matières premières") n'est pas nécessairement une ressource naturelle, et l'output nécessairement un produit fini.

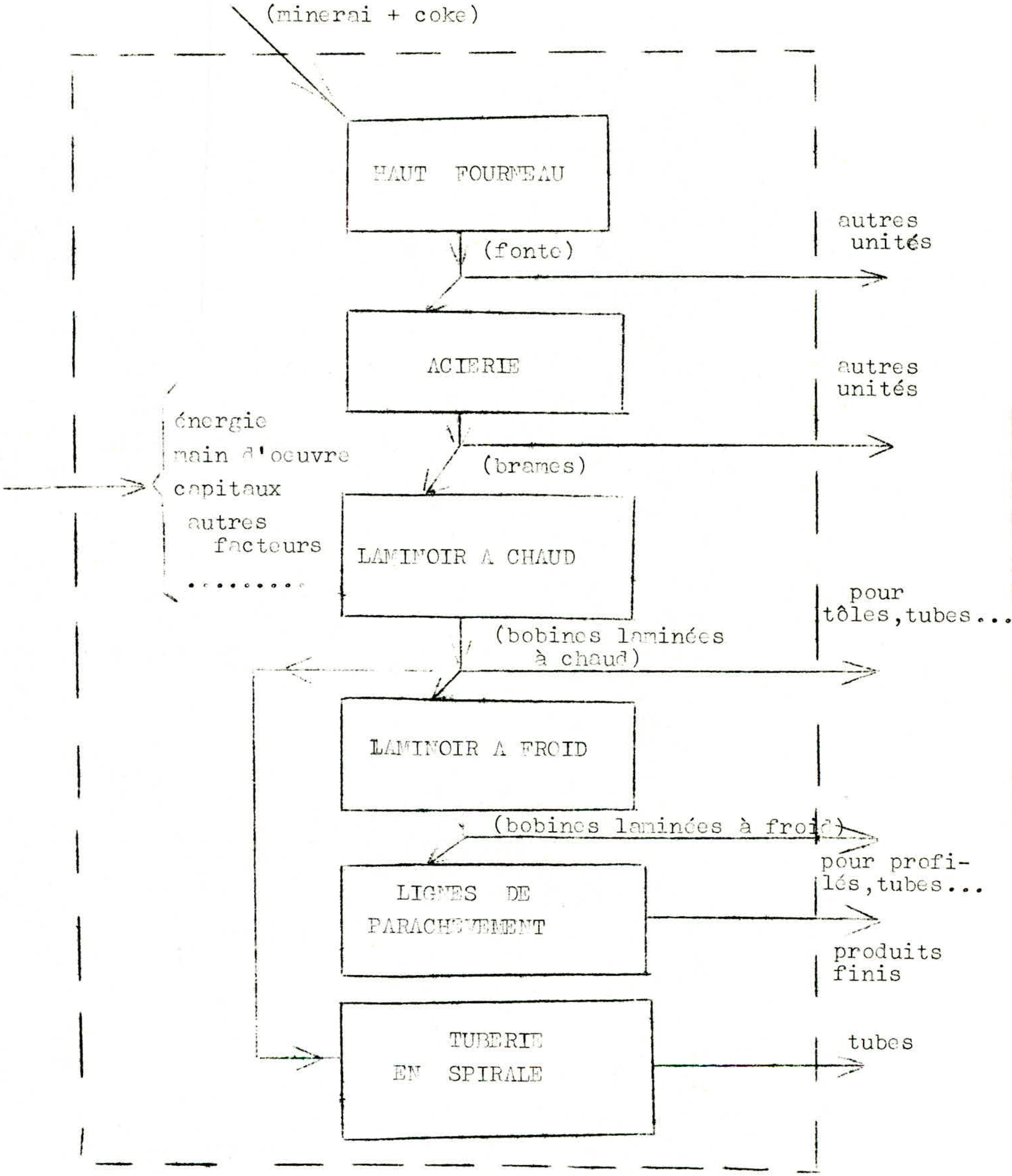
Les inputs suivent plusieurs étapes dde transformation et,après chacune d'elles sont susceptibles d'être soit directement destinées à la consommation finale, soit à la consommation intermédiaire des autres unités.
En général tous les grands complexes industriels répondent à cette définition.

Exemple :

Le complexe sidérurgique d'El-Hadjar avec 7 pricipales unités(ateliers) illustre parfaitement le type d'entreprises auxquel. ' le modèle input-output apporte des réponses globales aux demandes de consommations intermédiaires et de matières premières des différentes unités.

La prévision des productions nécessaires par le modèle Entrées-Sorties permet en même temps celle des éventuels recours à l'importation,dans l'attente d'une intégration totale.

Le shéma suivant montre les principales relations existant entre les différentes unités.


(minerai + coke)
HAUT FOURNEAU
(fonte)
autres unités
ACIERIE
autres unités
(brames)
énergie
main d'oeuvre
capitaux
autres facteurs
....
LAMINOIR A CHAUD
(bobines laminées à chaud)
pour tôles, tubes...
LAMINOIR A FROID
(bobines laminées à froid)
pour profilés, tubes...
LIGNES DE PARACHEVEMENT
produits finis
TUBERIE EN SPIRALE
tubes

II _ HYPOTHESES:

Hypothèse a':

l'hypothèse (a) dans le modèle macro-économique était que toute l'activité du pays soit répartie en en branches homogénes caractérisées par des produits spécifiques. Dans l'entreprise, la répartition de l'activité productive est relativement plus facile, puisque nous n'utilisons pas le modèle comme le fait la Compta- -bilité Nationale, mais en vue d'obtenir un équilibre physique ressources-emplois des produits. Dans l'entreprise, la branche correspondra simplement avec l'unité de production

Unité / Prod	1	2	....	....	n	C.I.	D.F.	Prod. tot.
1	C_{11}	C_{12}	....	....	C_{1n}	$\sum_j C_{1j}$	d_1	P_1
2	⋮				⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮				⋮	⋮	⋮	⋮
n	C_{n1}	....	....	....	C_{nn}	$\sum_j C_{nj}$	d_n	P_n
tot. utilis	U_1	....	....	....	U_n	C.I tot	$\sum_i d_i$	
	V.A.	....	....	....	V_n		$\sum_i V_i$	$\sum_i P_i$

Hypothèse b':

L'hypothèse selon laquelle il existe une relation simple entre output et inputs ($x_{ij} = a_{ij}.X_j$) est plus vraisemblable pour le produit dans l'entreprise que pour la branche en macro-économic -mie: la quantité de l'output produit est directement "explicative" de la quantité des différents inputs utilisés.

Hypothése c':

Pour ce qui estde la substituabilité des produits intermédi- aires, nous conservons l'hypothése de Léontief: l'état de la technologie est tel que la substitution n'est pas possible.

III PREVISION DES PRODUCTIONS NECESSAIRES.

Pour formaliser le problème, considérons une entreprise comportant n unités (c'est-à-dire n produits, chaque unité étant supposée fabriquer un seul produit) présentant entre-elles une certaine interdépendance du point de vue de la fourniture de "matières premières".

En faisant abstraction des facteurs primaires de production (travail, capital,...), le système peut être décrit comme suit:

$$
(I)\left\{\begin{array}{l}
X_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots + x_{1i} + \ldots\ldots + x_{1n} + Y_1 \\
X_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots\ldots + x_{2i} \quad \ldots\ldots + x_{2n} + Y_2 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\\
X_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots\ldots + x_{ii} + \ldots\ldots + x_{in} + Y_i \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
X_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots\ldots + x_{ni} + \ldots\ldots + x_{nn} + Y_n
\end{array}\right.
$$

où X_i désigne la production du bien i.

x_{ij} " " consommation intermédiaire de bien i requise pour la production du bien j.

Y_i désigne la demande finale de biens i(objectif)

Si l'on admet (hypothèse b de Léontief) qu'il existe une relation de proportionnalité linéaire et homogène entre les entrées de biens intermédiaires et le niveau de production de l'unité utilisatrice ($x_{ij} = a_{ij}.X_j$) le système (I) s'écrit:

.../...

$$
(II)\quad \begin{cases}
X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + Y_1 \\
X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + Y_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{in}X_n + Y_i \\
X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + Y_n
\end{cases}
$$

Ce système reproduit l'équilibre Emploi-Ressources pour les différents biens produits par l'entreprise.

après arrangement, on aura :

$$
(II')\quad \begin{cases}
(1-a_{11})X_1 - \dots - a_{1i}X_i - \dots - a_{1n}X_n = Y_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-a_{i1}X_1 - \dots + (1-a_{ii})X_i - \dots - a_{in}X_n = Y_i \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-a_{n1}X_1 - \dots - a_{ni}X_i - \dots + (1-a_{nn})X_n = Y_n
\end{cases}
$$

Sous forme matricielle, le système s'écrit :

$$\left[I-A\right]\left[X\right] = \left[Y\right]$$

Les méthodes de résolution du système sont exposées dans la seconde partie.

.../...

Les méthodes de résolution du système sont exposées dans la dernière partie.

Il existe une autre méthode pour déterminer le vecteur-colonne X: la méthode de l'itération.

On y utilise le résultat suivant: $I-A = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$

d'où $X = IY + AY + A^2Y + A^3Y + \ldots \ldots + A^nY + \ldots$

avec:

IY = production directe pour satisfaire la demande finale.

AY = consommation intermédiaire nécessaire pour porter la production directe IY auniveau requis par la demande finale.

A^2Y = production indirecte pour les consommations indirectes ci-dessous requises.

...etc ....

Généralement, à partir de A^7, lechoc en retour vers la production indirectement nécessaire devient inférieur à la marge d'erreur ou d'approximation que l'on se fixe ordinairement(5%).

Interprétation:

On fait appel, pour interpréter cette formulation de X, à un concept général de l'analyse macro-économique: le multiplicateur simple.

$$R_t = c'R_{t-1} \quad \text{entraine} \quad \begin{array}{l} R_1 = cR_0 \\ R_2 = cR_1 \\ - - - - \\ R_n = cR_{n-1} \end{array}$$

Le revenu R_0 engendre l'année suivante un revenu R_1, lequel engendre à son tour R_2 au cours de l'année 2, et ainsi de suite.

à la limite, n tendant vers l'infini, le revenu I_0 aurait engendré un revenu total

$$I_{total} = I_0 + cI_0 + c^2I_0 + \ldots + c^nI_0 + \ldots$$

$$= I_0 \cdot \frac{(c^n-1)}{c-1}$$

$$= I_0 \cdot \frac{-1}{c-1} = \frac{I_0}{1-c}$$

Le revenu R correspond à la demande finale et la propension à la consommation c au coefficient d'input a_{ij}.
on suppose que la première tranche("incrément") de la production (X_j^1) dans le secteur iest égale à la demande (objectif) Y_i en bien i.On détermine ensuite la part de l'out-put i pour les autres secteurs afin d'assurer la production préçédente.

Ces demandes intersectorielles (first round effects) s'ajoutent pour chaque secteur pour former le second incrément (X_i^2) et ainsi de suite.

Voici la formulation algébrique de la méthode:

$$\Delta X_i^1 = Y_i$$

$$\Delta X_i^2 = \sum_j a_{ij} \Delta X_j^1$$

$$\Delta X_i^3 = \sum_j a_{ij} \Delta X_j^2$$

. . . .

En exprimant les ΔX_j^t en fonction de Y_j,la série devient:

$$\Delta X_i^1 = Y_i$$

$$\Delta X_i^2 = \sum_j a_{ij} \Delta X_j^1 = \sum_j a_{ij} Y_j$$

$$\Delta X_i^3 = \sum_j a_{ij} \Delta X_j^2 = \sum_j a_{ij} . \sum_j a_{ij} Y_j$$

. . . .

$$\Delta X_i^n = \sum_j a_{ij} \Delta X_j^{n-1} = \sum_j a_{ij} . \sum a_{ij} . . \times \sum a_{ij} Y_j$$

On en tire:

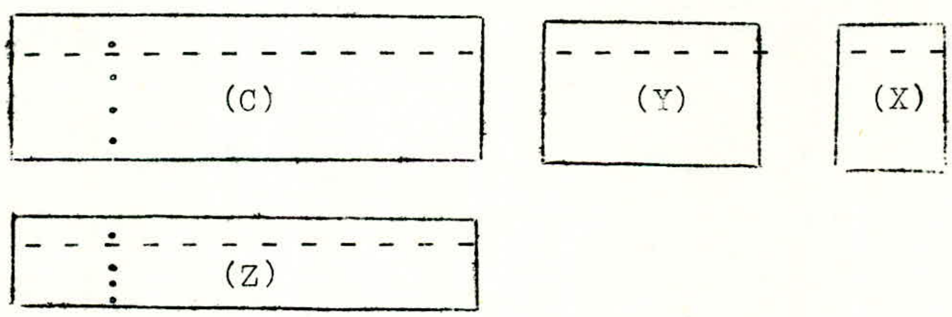
$$X_i^n = \sum_{t=1}^{n} \Delta X_i^t = Y_i + \sum_j a_{ij} Y_j + \sum_j a_{ij} \sum_j Y_j + . . . + \underbrace{\sum a_{ij}}_{n \text{ fois}} Y_j$$

On voit que X_i est la somme des premières composantes des vecteurs IY , AY , A^2Y , ... A^nY , ...

IV_ PREVISIONS DES UTILISATIONS DE FACTEURS PRIMAIRES :

Jusqu'à présent nous n'avons considéré dans le système d'interdépendance que les biens requis par les unités utilisatrices, laissant les facteurs de production en dehors du damier d'échanges.

Nous pouvons faire figurer ces derniers en dessous de la matrice C des consommations intermédiaires totales au moyen d'une seconde matrice Z, l'ensemble des relations étant décrit par le shéma suivant:



Les quantités sont évaluées aux prix d'utilisation. Y est le vecteur-colonne des objectifs (de production) de l'entreprise et Z la matrice des utilisations de facteurs primaires.

Ce shéma permet de définir deux sortes de relations:

_ Horizontalement, les sorties X_i de l'unité i sont données par les relations en ligne:

$$\sum_j x_{ij} + Y_i$$

_ Verticalement, les entrées X_j dans l'unité j sont données par les relations en colonne:

$$\sum_i x_{ij} + \sum_i z_{ij} = X_j$$

Entrées des produits + Entrées des facteurs = Total Entrées

A partir de (C) on calcule (A), matrice des coefficients techniques a_{ij} et à partir de (Z) on construit(F) , matrice des facteurs primaires nécessaires par unité de produit: $f_{ij} = \frac{z_{ij}}{X_j}$

Connaissant (A) et (F), il est alors possible de calculer(Z'), vecteur-colonne des facteurs primaires nécessaires pour porter la production au niveau requis par les objectifs du plan de l'entreprise. On obtient la relation de prévision suivante:

$$Z' = F\ X = F\ [I-A]^{-1}\ Y$$

Pour un ensemble d(Y) d'accroissements donnés des objectifs(du à une éventuelle révision du Plan) ,on aura la projection correspondante des accroissements de facteurs productifs:

$$d(Z') = F\ [I-A]^{-1}\ d(Y)$$

Pour l'entreprise,une répartition en catégories des facteurs productifs peut être la suivante:

_ Le facteur travail (L) apprécié par la valeur des salaires distribués.

_Les équipements, évalués par les amortissements relatifs à la période du plan considéré.

_Les matières premières (N)

_L'énergie

_Les transports

_Autres services

Les utilisations de chaque facteur sont alors:

$$L=\sum_j l_j X_j$$

$$N=\sum_j n_j X_j$$

. . . . . .

-La détermination des facteurs tels que les matières premières, l'énergie, etc ...est relativement facile avec l'utilisation d'une variante du modèle. Il suffit d'en déterminer les coefficients d'utilisation de la même façon que pour les coefficients techniques a_{ij}.

Pour ce qui est de la main d'oeuvre l'évaluation peut être faite à l'aide des salaires distribués, mais une analyse plus fine est nécessaire car un équilibre "par unité" peut masquer des déficits en travailleurs d'une d'une qualification déterminée.

On utilise pour cela des matrices d'emploi.

on suppose que pour atteidre un certain niveau de production dans une unité j, il faut des entrées de travailleurs de différentes qualifications.

Si les coefficients t_{ij} sont constants, on peut définir le total des entrées de travailleurs T_i dans une catégorie professionnelles i en fonction de la production de toutes les unités par la relation: $T_i = \sum_j t_{ij} X_j$

unités / quaif.	A	B	C
q_1	t_{1A}	t_{1B}	t_{1C}
q_2	t_{2A}	t_{2B}	t_{2C}
q_3	t_{3A}	t_{3B}	t_{3C}

Cette méthode, évidemment très simpliste, a l'avantage d'approcher appréciablement la réalité parce qu'elle suppose implicitement que les demandes de main d'oeuvre seront satisfaites d'une façon certaine.

Dans une perspective d'allocation optimale des "ressources humaines" entre les différentes unités, en tenant compte des différentes qualifications et des disponibilités, le problème se ramènerait à la résolution d'un programme linéaire (en entiers), avec l'optimisation d'une fonction objectif qui pourrait être, par exemple, la partie "salaires" du budget de 'fonctionnement' de l'entreprise.

Dans ce domaine donc, l'efficacité du modèle est limitée, parce qu'il suppose que les ressources sont illimitées.

<u>Disposition possible d'un Tableau d'Echanges Inter-unités</u> avec des évaluations en quantités physiques, pour l'établissement de l'équilibre Ressources-Emplois par produit :

.../...

Disposition possible d'un tableau d'échanges interunités (en quantités physiques)

Produits	1	....	....	n	consomm. interm.	Object.	Prod. tot.
1					$\sum_j c_{1j}$	Y_1	X_1
⋮		c_{ij}			⋮	⋮	⋮
⋮					⋮	⋮	⋮
n					$\sum_j c_{nj}$	Y_n	X_n
inputs produits	$\sum_i c_{i1}$	...	..	$\sum_i c_{in}$			
Mat.prem.							
Energie							
Travail		z_{ij}					
....							

Dans le cas où une unité produit n outputs, elle figurera n fois dans le tableau, avec des indices correspondant aux différentes productions. Lorsque les prévisions auront été faites à l'aide d'une variante du modèle, par produit, un simple recoupement suffira pour établir celles des unités.

-V _ AJUSTEMENT DE LA MATRICE DES COEFFICIENTS A_{ij}

V1 Méthodes d'ajustement dans le modèle macro-économique

L'inconvénient majeur du modèle de Liontief est la constance des coéfficients techniques , qui signifie la stabilité des conditions technologiques . Elle signifie aussi que la possibilité de combiner différemment les facteurs de production en fonction de la variation du prix et de l'évolution des techniques n'a pas été envisagée , la fonction de production étant de la forme: $X_j = f(X_{1j} , X_{2j} , \ldots\ldots X_{nj})$.

[illegible]

V.1.1: [illegible]

Elle consiste àsoumettre le modéle à une sorte de " Pré-vision à rebours":les productions totales des années 1919 et 1929 sont recalculées à partir des composantes connues de la demande finale durant ces deux années,mais à l'aide de coéfficients techniques du systéme des prix de l'années 1939.Il compare ensuite les productions calculées aux productions effectives et tire les conclusions sur la validité des coéfficients suivant les écarts de prédictions enregistrées.

V.1.2 La méthode de l'enregistrement périodique du système des relations inter-industrielles (Matuszewski,Pitts et Sawyer) repose sur des hypothéses simples de variation proportionnelles des coéfficients a_{ij}.La validité de la méthode est téstée au moyen du procédé de la prévision à rebours de Léontiéf.

Les prévisions de production pourla période(t,t+n) sontcon-
-frontées avec les productions effectives des branches et donnent lieu à des calculs d'erreur évalués en % de la production réalisée.

Les ajustements des coéfficients sontde trois types différents - $\bar{r}$, $\bar{d}$ et $\bar{u}$.

a) <u>L'ajustement de types $\bar{r}$</u> :on suppose que tous les éléments d'une ligne donnée de la matrice I - A ont subi la même variation relative au cours de la période (t_1,t_2), t_1 étant l'année de base de la matrice des cosommations intermédiaires et t_2 l'année de ré-
-vision de la matrice.

Cette hypothése signifie que l'utilisation d'un bien a changé selon une même proportion dans tous les secteurs utilisateurs(y compris le secteur producteur lui-même pourles autoconsommations) Les auteurs constatent que ce type d'ajustement réduitsensiblement les erreurs de prévision par rapport aux Projections à coéfficients constants .On pose $\left[I-A\right]^{*} = \bar{r}\left[I-A\right]$

Où $\left[I-A\right]^{*}$ est la nouvelle matrice ajustée $\left[I-A\right]$

$\bar{r}$ est la matrice diagonale dont led éléments r_i sont donnés par les p relations :

$$r_i = \frac{Y_i^{t_2}}{X_i^{t_2} - \sum_j a_{ij}.X_j^{t_2}} \qquad (i \text{ et } j = 1,2\ldots,p)$$

La matrice $\bar{r}$ détérminée,on utilise pour la projection au delà de l'année t_2 la relation prévisionnelle:

$$X = \left[I-A\right]^{-1}.\left[\bar{r}\right]^{-1}.Y$$

b) <u>L'ajustement de type $\bar{d}$:</u>

On suppose que tous les éléments d'une ligne donnée de la matrice A ont subi la même variation relative au cours de la période (t_1, t_2).

Cette hypothèse signifie que l'utilisation d'un bien achangé selon une même proportion dans tous les secteurs utilisateurs à l'exception du secteur producicteur.

On pose:

$$\left[I-A\right]^{*} = \left[I-\overline{d}\right]A$$

où: $\left[I-A\right]^{*}$ est la nouvelle matrice ajustée des I-A et $\overline{d}$ une matrice diagonale dont les éléments d_i sont donnés par les p relat--ons:

$$d_i = \frac{X_i^{t_2} - Y_i^{t_2}}{\sum_j a_{ij}.X_j^{t_2}} \qquad (i \text{ et } j = 1,2,\ldots,p)$$

La connaissance de $\overline{d}$ permet l'application au delà de l'année t_2, de la relation prévisionnelle :

$$X = \left[I-\overline{d}\right]A^{-1}.Y$$

c) l'ajustement de type $\overline{u}$

Dans cet ajustement on passe de la relation linéaire et homo--gène $x_{ij} = a_{ij}.X_j$ à la relation simplement linéaire:

$x_{ij} = a_{ij}.X_j + b_{ij}$.

Les coéfficents moyens sont autorisés à varier mais les coéf--ficients marginaux demeurcht constants et doivent être proportion-nels, pour chaque production aux coéfficients moyens observés l'an-née t_1. Cette double contrainte conduit à la relation suivante:

$$X-Y = \overline{u}.A.X + B$$

où $\overline{u}$ est une matrice diagonale ,B un vecteur colonne et A la matrice des coéfficients moyens . Les éléments de $\overline{u}$ et de B se dé-terminent en résolvant simultanément les 2 équtations matricielles suivantes, contenant chacune p relations:

$$(I): X^{t_1} - Y^{t_1} = \overline{u}.AX^{t_1} + B$$

$$(II): X^{t_2} - Y^{t_2} = \overline{u}.AX^{t_2} + B$$

Les éléments diagonaux de $\overline{u}$ s'obtiennent en retranchant : (I) de (II) et les p composantes de B en soustrayant (II) de (I)

L'équation de prévision est :

$$X = \left(I - \overline{u}.A\right)^{-1} . Y + B$$

l'application de la méthode des ajustements périodiques a fait apparaitre des erreurs de prévision qui varient, dans l'ensemble, entre 3% et 8% et permet de prolonger l'utilisation d'un TEI jusqu'à 8 ou 9 ans.

Ses auteurs précisent qu'elle ne donne pas de bons résultats en présence de variations considérables de quelques coefficients (changement total du niveau de la demande finale, modification radicale de la technologie dans un ou plusieurs secteurs productifs,...)

V.1.3. Les variations de prix:

Les relations interindustrielles sont établies à l'aide du système des prix en vigueur l'année de construction de la matrice A. Leur projection donne des estimations en volume, c'est à dire en quantités physiques aux prix de l'année de base. On montre que la nouvelle matrice A(t) des coefficients techniques de l'année t se déduit de la matrice A(o) de l'année de base par la relation $A(t) = \hat{p}\, A(o)\hat{p}^{-1}$ $\left(A(t)_{ij} = \frac{p_i}{p_j} a_{ij}\right.$

avec $\hat{p}$=matrice diagonale formée par les indices des prix

$\hat{p}^{-1}$ = matrice diagonale des inverses des indices précédents. Cet aspect de l'évolution des coefficients techniques ne nous intéresse pas dans le contexte d'une économie intégrée et planifiée et où les échanges se font entre secteurs d'état.

V. 2. Ajustement dans le cas de l'entreprise:

L'élaboration des TEI à l'heure actuelle dans notre pays se fait à 70% à partir d'informations recueillies après des enquêtes industrielles annuelles(faites par les services du Plan auprès des entreprises)et de celles fournies par les statistiques douanières(cas des importations) et la Fiscalité.

Le pourcentage de réponses faites aux enquêtes industrielles ces dernières années est jugé satisfaisant(75%)
Ceçi donne une idée de l'approximation faite lors de l'établissement de la matrice A_{ij}.

Dans l'entreprise,où le plan de production peut être annuel ou semestriel,la saisie des informations statistiques est directe. Il est donc plus aisé de suivre ,à l'aide de méthodes de prévision à court terme, l'évolution des coefficients techniques.

Avant d'aborder l'ajustement de la matrice A,nous présentons un facteur important d'évolution des a_{ij} à l'échelle macroéconomique et qui peut se retrouver dans l'entreprise: l'introduction de nouvelles industries(ou de nouvelles unités).

V.2.1.L'introduction de nouvelles unités:

La matrice de base A(o) passe au format (n+1,n+1) selon l'une des modalités suivantes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première représentation signifie que la nouvelle unité était inexistante à l'époque de base; la seconde qu'elle n'entretenait aucune relation d'échanges avec les anciennes unités.

La matrice A(o) peut être présentée sous l'aspect d'un bloc de matrices:

$$A(o) = \left[\begin{array}{c|c} A(o) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

L'apparition et le développement de la nouvelle unité se traduisent par des acquisitions (vecteur-colonne β) et des fournitures (vecteur-ligne γ) aux autres unités:
pour l'année t, nous avons, sans tenir compte des auto-cosommations de la nouvelle unité:

$$A(t) = \left[\begin{array}{c|c} A_t & \beta \\ \hline \gamma & 0 \end{array}\right]$$

On passe de A(o) à A(t) par l'intermédiaire d'une matrice F, telle que: $A(t) = A(o) \, . \, F$

$$\left[\begin{array}{c|c} A(t) & \beta \\ \hline \gamma & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A(o) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} F_1 & F_2 \\ \hline F_3 & F_4 \end{array}\right]$$

$$F = \left[\begin{array}{c|c} A_o^{-1} \cdot A_t & A_o^{-1}\beta \\ \hline \gamma & 0 \end{array}\right]$$

On voit que la modification de A est fonction:

- de la structure initiale A(o)
- de l'évolution que les coefficients auraient subi, même en l'absence de nouvelle unité: A_t.
- des acquisitions et des fournitures aux autres secteurs: β, γ

V.2.2. Ajustement de la matrice A_{ij}.

** Rappels sur l'estimation par intervalle de confiance:

* Estimation de la moyenne d'une distribution normale:

Etant donné n observations sur une variable aléatoire suivant une loi normale, de moyenne m(qu'on veut estimer) et d'écart-type σ inconnu, alors:

$$Y = \frac{\overline{X} - m}{s}\sqrt{n}$$ est distribuée selon la loi de Student à (n-1)degrés de liberté.

avec $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, moyenne de l'échantillon

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$, estimateur sans biais de la variance

* Estimation de la variance d'une distribution normale:

$$W = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2$$ est distribuée selon la loi du χ_2 à (n-1)degrés de liberté.

d'où la détermination de l'intervalle de confiance pour un seuil donné.

** Ajustement:

On suppose que l'ajustement se fait tous les six mois, avec, comme données, les relevés hebdomadaires des consommations spécifiques et de la production de chaque unité.

On suppose d'autre part que le coefficient a_{ij} suit une loi normale de moyenne a_o et d'écart-type σ, ces 2 paramètres étant préalablement fixés soit après estimation, soit par expérience.

Soit $x_{ij}(k)$ = consommation spécifique du bien i par l'unité j à la $k^{\text{ième}}$ semaine du semestre écoulé.

x_j = production de l'unité j à la $k^{\text{ième}}$ semaine.

Test l'hypothèse

On calcule

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cdot \frac{x_{ij}(k)}{x_j(k)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \cdot a_k$$

$\bar{a}$ suit la loi normale de moyenne a_0 et d'écart type $\sigma/\sqrt{n}$, d'aprés le théorème central limite:

Un caractére X distribué selon une loi quelconque de moyenne m et d'écart type σ ,la moyenne d'un échantillon de taille n (pourvu que n soit suffisamment grand)suit la loi:$N(m, \sigma/\sqrt{n})$.

$\bar{a}$ suit donc la loi $N(a_0, / n)$;Sous forme réduite $(\frac{\bar{a}-a_0}{\quad} n)$ suite la loi $N(0,1)$

Au seuil de confiance $\alpha = 0,95$(par exemple),on a :

$$\text{prob.}(-t_{0,95} \ \frac{\bar{a}-a_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ t_{0,95}),$$ $t_{0,95}$ est donné par la table de la loi de Gauss.

$$\text{prob.}(a_0 - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{a} < \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} + a_0) = 0,95$$

Si la valeur obsérvée $\bar{a}$,pour un semestre,se trouve dans l'in--tervalle $I_\alpha = (a_0 - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, a_0 + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}})$,on rejette l'hypothèse que la moyenne du coéfficient est a_0,et on admet que la valeur $\bar{a}$ est plus représentative pour le semestre écoulé;On l'adopte pour le semestre suivant.Le nouvel écart type retenu est celui du dernier échantil--lon prélevé.

Cette méthode a l'avantage de suivre la tendance à long terme de l'évolution des coéfficients:il peut exister par exemple des équipements pour lesquels l'input introduit est fonction de leur usure.La méthode des moindres carrés a l'avantage de réduire les écarts lors d'une estimation ,mais ne fait pas ressortir la tendanse.

VI. Utilisation du modéle en Programmation Linéaire

La formulation général d'un programme linéaire est la suivan-te:

$$\begin{cases} \text{optimum}(c.x) \\ A.x \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

où x est le vecteur des ressources, A.x b) un système d'iné-quations représentant les contraintes sur les ressources,(x 0) les contraintes logiques de non négativité des variables.Il sägit d'optimiser (maximiser ou minimiser)la fonction objective.

VI.1 Probléme Primal:

Le modèle de Léontief peut être présenté comme un programme linéaire.Soit un systéme à n vecteurs et où tous les facteurs primaires de production sont ramenés à un seul,la valeur ajou-tée f_i necessaires par unité de produit i.Les coéfficients techniques sont représentés par la matrice a_{ij} et les coéf-ficients d'utlisation du facteur primaire par le vecteur ligne F.Etant donné un objectif à atteindre (vecteur colonne Y) et une quantité disponible Z de facteurs productifs,le systéme peut être interprété par le programme linéaire suivant:

$$\begin{cases} a_{ij}\, X \geqslant Y \\ \min Z \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-a_{11})X_1 & -a_{12}X_2- \ldots\ldots -a_{1i}X_i \ldots -a_{1n}X_n \geqslant Y_1 \\ -a_{21}X_1 & (1-a_{22})X_2- \ldots\ldots -a_{2i}X_i \ldots -a_{2n}X_n \geqslant Y_2 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -a_{1i}X_1 \ldots & \ldots\ldots +(1-a_{ii})X_i - a_{in}X_n \geqslant Y_i \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -a_{n1}X_1 & -a_{n2}X_2 \ldots \quad -a_{ni}X_i \ldots +(1-a_{nn}) \geqslant Y_n \end{cases}$$

fontion objectif $\quad \min(f_1X_1 + f_2 X_2 + \ldots f_iX_i + \ldots + f_nX_n)$

contraintes logiques $\quad X_1 \geqslant 0, \quad X_2 \geqslant 0, \ldots, X_n \geqslant 0$

La résolution du programme linéaire tel qu'il est exprimé consiste à déterminer les quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n$, non négatives qui satisfont la demande finale, en minnisant les emplois de fact--eurs productifs. C'est le problème direct ou primal.

VI.2. Problème Dual:

Dans le problème dual, les prix des produits ou le côut des facteurs de production n'intrvenaient pas. Mais il est possible d'introduire des prix et des couts de référence, qui ne sont pas effectifs. L'introduction de ces prix implique une situation telle qu'à long terme les peix tendent à s'égaliser aux couts unitaires auterment dit, et c'est ce que représentent les contraintes, un pro--duit dont le prix serait supérieur au cout de production ne sera pas produit:

(a) $\quad p_i \geqslant a_{1i}p_1 + a_{2i}p_2 + \ldots + a_{ii}p_i + \ldots a_{ni}p_n + f_is$

avec p_i = prix de référence du bien i.

f_i = [illegible] par l'éla-

[illegible]

f_i = coefficient de facteurs primaires nécessaires pour l'élaboration d'une unité de bien i

s = cout du facteur primaire

L'inégalité (a) peut s'écrire:

$$-a_{1i}p_1 - a_{2i}p_2 - \ldots + (1-a_{ii})\, p_i - \ldots - a_{ni}p_n \leq f_i s$$

Elle représente une contrainte du problème dual qui se formule:

contraintes

$$
\begin{array}{l}
(1-a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - \ldots - a_{i1}p_i \ldots - a_{n1}p_n \leq f_1 s \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
-a_{1i}p_1 - a_{2i}p_2 \ldots\ldots + (1-a_{ii})p_i \ldots - a_{ni}p_n \leq f_i s \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
-a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 \ldots\ldots - a_{in}p_i \ldots + (1-a_{nn})p_n \leq f_n s
\end{array}
$$

fonction objectif $\quad \max(p_1Y_1 + p_2Y_2 + \ldots + p_iY_i + \ldots + p_nY_n)$

contraintes logiques $\quad p_1 \geq 0,\ p_2 \geq 0, \ldots, p_n \geq 0$

D'après le théorème de dualité, "si le problème primal a un sens et une solution, le problème dual a un sens et une solution et les optimums; des deux fonctions économiques coincident:

$$f_1sX_1 + f_2sX_2 + \ldots + f_nsX_n = p_1Y_1 + p_2Y_2 + \ldots + p_nY_n$$

COUTS = VALEURS

* Prix de référence:

Les prix de référence sont égaux aux couts marginaux des biens dont ils expriment la valeur: à la limite, le cout d'un bien est égal au revenu qu'il procure. Ces prix sont appelés aussi

[illegible]

[illegible]

prix fictifs ou, "shadows prices", prix comptable, prix sociaux, évaluations objectivement déterminées.

Leur utilisation est fréquente dans les travaux de planification, notamment dans les pays en voie de développement où ils remédient à l'absence de prix, en raison de l'importance de l'auto-consommation et de l'autofourniture. Leur détermination se fait à partir de s, cout de l'unité de l'input primaire, et de f, coéfficient global d'utilisation.

VI.3. Comparaison avec le systéme de Léontief:

On peut noter trois grandes differences entre le système de Léontief $[I-A]\ X = Y$ et sa formulation en programmation linéaire:

1) Dans le programme linéaire, une fonction des niveaux de production X_j $(j = 1,n)$ permet de préférer une solution, parmi les solutions réalisables si elles existent, à une autre: c'est la fonction objectif. Elle consiste généralement à maximiser la production.

2) La production d'un output donné, dans le systéme de Léontief, se fait par une combinaison unique des outputs necessaires:

$$X_j = a_{j1}X_1 + a_{j2}X_2 + \dots + a_{jn}X_n + Y_j$$

Dans un programme linéaire, un niveau de production peut être atteint par différentes combinaisons des inputs, pourvu que l'on reste dans le domaine des solutions possibles. La solution possible c'est-à-dire qui satisfait aux contraintes, et qui optimise (max ou min) la fonction objectif est la solution optimale qui sera retenue.

3) A la différence du système de Léontief, les facteurs pri-maires interviennent dans le programme linéaire au même titre que les inputs (intermédiaires) puisque la solution optimale doit satisfaire à la fois la demande finale et les disponibilités en ressources.

VII. EXEMPLE D'APPLICATION

VII.1. Prévision des productions necessaires:

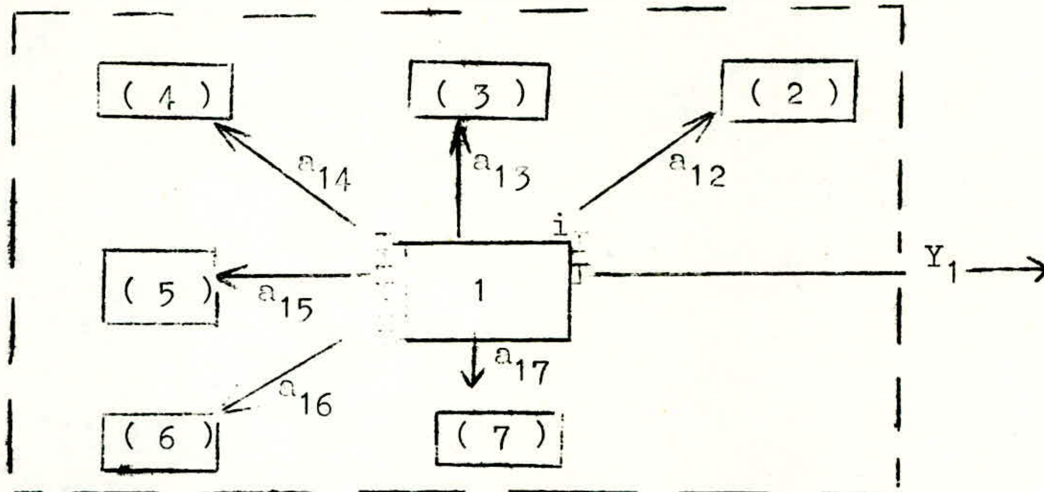
Il s'agit d'une entreprise à 7 unités de production:

1. Centrale thermique.
2. Centrale éléctrique.
3. Station d'eau industrielle.
4. Unité productrice d'acide sulfurique.
5. "" "" "" phosphorique.
6. "" "" de superphosphates.
7. "" "" de tripolyphosphate de sodium.

Les données pour le calcul des productions necessaires sont la matrice A et le vecteur colonne Y suivants:

prods / sect.	Consommations intermédiaires							Y_j
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	0,005	0	0	0	0,4	2	0
2	7	0	0,45	35	40	167	130	0
3	1,05	0	0	30	5	21	75	0
4	0,0086	0	0	0	1,9	2,7	0	2000
5	0	0	0	0	0	0	0	50.000
6	0	0	0	0	0	0	0,6	500
7	0	0	0	0	0	0	0	8.000

Les liaisons de la section 1 (par exemple) peuvent être repré-sentées par le shéma d'interdépendance suivant:



La solution du systéme $X = A.X + Y$ a été faite par la méthode de l'inversion.

$$X = \left[I - A \right]^{-1} . Y$$

on obtient les résultats suivants:

$X_1 =$

$X_2 =$

$X_3 =$

$X_4 =$

$X_5 =$

$X_6 =$

$X_7 =$

VII.2. Autre utilisation du modèle dans l'entreprise:

En macro-économie, on utilise la triangulation pour hiérarchiser les industries en vue d'analyser leur interdépendance.

Etant donné n branches d'activitésen présence;on détermineppour chacune d'elles le nombre de ces relations d'achat avec les (n-1) branches restantes.

Exemple:

	A	B	C	D	E	$\sum x_{ij}$	Y_i	X_i
A	-	12	6	0	0	18	112	130
B	0	-	8	0	0	8	92	100
C	0	0	-	0	0	0	50	50
D	2	5	8	-	5	20	60	80
E	14	6	10	0	-	30	40	70

Par ses achats A domine (D et E)

B " (A,D et E)

C " (A,B,D et E)

E " (D)

D ne domine aucune branche.

L'ordre initial(A B C D E) est devenu (C B A E D):

	C	B	A	E	D	$\sum x_{ij}$	Y_i	X_i
C	-	0	0	0	0	0	50	50
B	8	-	0	0	0	8	92	100
A	6	12	-	0	0	18	112	130
E	10	6	14	-	0	30	40	70
D	8	5	2	5	-	20	60	80

L'obtention d'une matrice triangulaire n'est pas toujours possible:On obtient alors un ordre partiel.

* La hiérarchie est établie par rapport aux achats;elle peut l'être par rapport aux ventes.Si on combine les deux classements, on trouve qu'une ou plusieurs branches occupent une position médiane.Ces branches sont avec un même volme,les fournisseurs et les clients des autres branches.A partir d'elles se propagent des effets d'approvisionnements ("backward linkage effect")et de débouchés("forward linkage effect").

Cette notion a inspiré une stratégie du développement économique pour des pays en voie de développement:porter un effort prioritaire d'investissement sur ces branches.

* Pour l'entreprise la triangulation peut donner,pour chaque secteur,selon une subdivision par activités spécifiques,une analyse plus fine de sa structure et susciter,comme en macro-économie,les politiques d'investissement appropriées.

TROIXIEME PARTIE

METHODES DE RESOLUTION D'UN SYSTEME LINEAIRE DE N EQUATIONS A N INCONNUES

GENERALITES

Nous savons que de trés nombreux problèmes théoriques ou pratiques conduisent à la résolution de systèmes d'équations linéaires. La résolution effective théoriquement simple, devient rapidement trés péniple dès que le nombre des équations augmente ou que les coefficients sont des nombres de plusieurs chiffres.

Les machines modernes sont heureusement capables de résoudre de tels systèmes, mais, pour de multiples raisons, l'ingénieur et le physicien auront encore à résoudre, si on peut dire " à la main " des systèmes de quelques équations à quelques inconnues.

DEFINITIONS

Un système de n équations à n inconnues s'écrira sous la forme générale :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \text{-----------------} + a_{1N}X_N = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \text{-----------------} + a_{2N}X_N = b_2$$

$$\text{-----------------------------------}$$

$$a_{N1}X_1 + a_{N2}X_2 + \text{-----------------} + a_{NN}X_N = b_N$$

Les a_{ij} coeffitions des inconnues, ou indéterminées, sont des scalaires (en général des nombres réels ou complexes); les seconds membres ou termes tous connus sont de la même nature que les X_i (on doit donc pouvoir multiplier les X_i par un nombre, ce qui est le cas lorsque les X_i sont, par exemple, des nombres ou des vecteurs) .

Un système qui n'admet pas de solution est impossible. On dit encore que ses équations sont incompatibles (une équation peut être impossible par exemple $0X = 5$); un système qui admet une infinité de solutions est indéterminé .

On sait d'ailleurs que , dès qu'il en admet plus d'une, il en admet une infinité.(Une équation peut être indéterminée $0X = 0$).

A) - SYSTEME DE CRAMER :

C'est un système qui admet une solution et une seule.

La condition pour qu'un système de Cramer (N équations, N inconnues) admette une solution est que la matrice A formée par les coeffitions des inconnues soit de rang N , c'est-à-dire que le determinant D $|a_{ij}|$ soit non nul $D(A) \neq 0$ (il est appelé determinant principal).

La solution(générale) d'un tel système est alors : $X_p = \dfrac{D_p}{D}$

où D_p désigne le déterminant $|A|$ dans laquelle on remplace le vecteur

Colonne des termes tous connus .

Si le vecteur (b_1 ; b_2 , ... b_N) est nul , la solution triviale est : $X_1 = X_2 = \ldots\ldots = X_N = 0$. (toujours avec Dét $\neq 0$)

<u>Exemple :</u>

$$
(A) \quad \begin{cases} 2X - Y + 3Z = -3 \\ 8X + 2Y + 5Z = 7 \\ X - Y - 3Z = 2 \end{cases}
$$

Les inconnues sont: X , Y et Z ; Dét. = - 61

En remplaçant le vecteur de la première colonne par le vecteur-colonne des termes tous connus on trouve :

$$
\begin{vmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = D_1 = -61
$$

D'où $X = \frac{D_1}{D} = 1$ $\underline{X = 1}$

Pour déterminer Y , on remplace le vecteur-colonne (2) par le vecteur-colonne des termes tous connus .

$$
\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 8 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = D_2 = -122
$$

$Y = \frac{D_2}{D} = 2$ $\underline{Y = 2}$

De la même manière on trouve : $\underline{Z = -1}$

B) - METHODE DE GAUSS :

Opérateurs matriciels

Pour les diverses transformations de la matrice A , en vue de la triangulariser , on utilise les opérateurs matriciels $E_i(C)$ et $E_{ij}(C)$.

a) Pour multiplier une ligne de la matrice par une constante on utilise l' opérateur $E_i(C)$.

$E_i(c).A = A'$, la ligne i de la matrice A est multipliée par le scalaire C

$$E_1(C) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrice unité}$$

$$\text{d'où } E_1(C).\,A = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ca_{11} & Ca_{12} & Ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{la } 1^{\text{ère}} \text{ ligne et la } 2^{\text{ème}} \text{ sont permutées}$$

b) $E_{ij}(C)\,A = A'$: L'opération consiste à ajouter à la ligne i de A , la ligne j qu'on aura multiplier par C .

$$\text{On a : } E_{12}.\,A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_{13}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & C \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } \quad E_{13}(c)A = \begin{bmatrix} a_{11} + Ca_{31} & a_{12} + Ca_{32} & a_{13} + Ca_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Triangularisation :

Soit le système $AX = B$, on considère la matrice (A,B) , pour cela on in--troduit le vecteur b dans la matrice A : $[b] = [a_{i,n+1}]$.

$$(A,B) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

On procède par itération. La 1ère $k = 1$, consiste à annuler les termes a_{i1} de la 1ère colonne de A pour i k. On apliquera successivement à A les opérateurs matriciels qui annulent le 1er terme de chaque ligne i (toujours avec i k) .

$k = 1$: La matrice (A,B) devient : $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

$$a_{21} = 0 \quad ====== \quad E_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$$

$$a_{21} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} = 0$$

$$a_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$$

Ce qui nous donne pour la deuxième ligne :

$$\boxed{a_{2j}^{(k)} = a_{2j}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}}$$

Le terme général à la $k^{\text{ième}}$ itération est:

$$\boxed{a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}}$$

* $a_{ij}^{(k-1)}$: terme a_{ij} à l'itération(k-1)

* a_{kk} : pivot de la transformation

Temps de calcul:

k variant de 1 à N-1 $\begin{cases} i \text{ varie de } k+1 \text{ à } N \\ j \text{ varie de } k+1 \text{ à } N+1 \end{cases}$

Pour i et j inférieurs à k on sait que les termes a_{ij} seront nuls, les calculs seront inutils.

Nombre de divisions:

k = 1   i = 2 , N   ====> N - 1 divisins.

k = 2   i = 3 , N   ====> N - 2   "

- -

k = N-1   i = N   ====> 1   "

Soit un total de: $\sum_{k=1}^{N-1} (N-1) = \frac{(N-1)\,N}{2}$

Nombre de multiplications:

k = 1 $\begin{cases} i = 2 , N \implies (N-1) \text{ multiplications} \\ j = 3 , N+1 \implies N \quad " \end{cases}$ (N - 1) N

k = 2 $\begin{cases} i = 3 , N \implies (N-2) \quad " \\ j = 3 , N+1 \implies (N-1) \quad " \end{cases}$ (N - 2)(N - 1)

- -

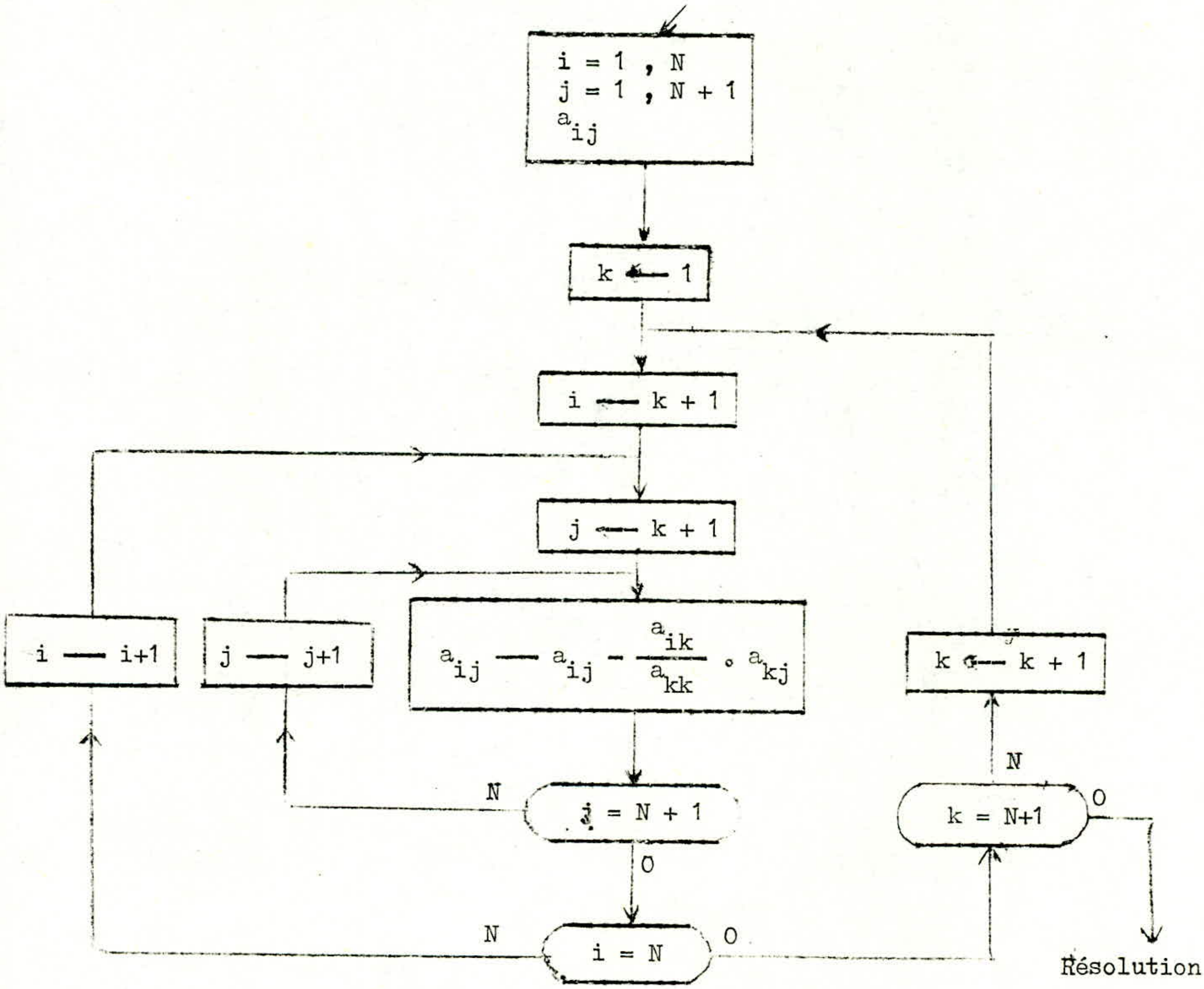
k = N - 1 $\begin{cases} i = N \implies 1 \quad " \\ j = N , N+1 \implies 2 \quad " \end{cases}$ 2 multiplications

Soit un total de : $\sum_{k=1}^{N-1} (N-1)(N-k+1)$

Le nombre de soustractions est égal au nombre de multiplications.

Le nombre total d'opérations est de l'ordre de $\frac{N^3}{3}$

Organigramme (triangularisation):



RESOLUTION:

Lorsque la matrice A est triangularisée, le système s'écrira:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots + a_{1p}X_p + \dots a_{1n}X_n = a_{1,n+1}$$

$$a_{22}X_2 + \dots\dots + a_{2p}X_p + \dots a_{2n}X_n = a_{2,n+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{pp}X_p + \dots a_{pn}X_n = a_{p,n+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{nn}X_n = a_{n,n+1}$$

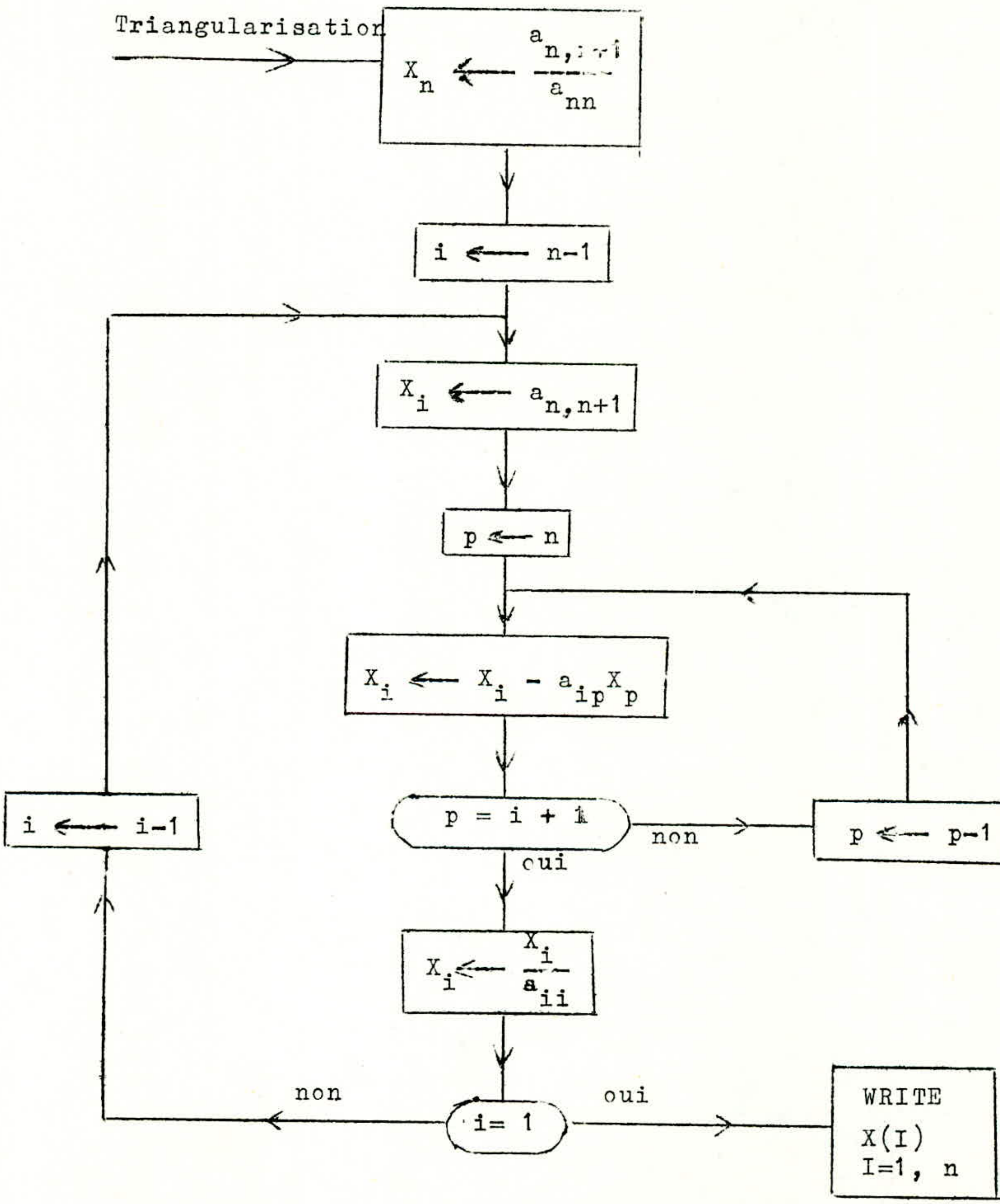
Les solutions du systéme sont données par:

$$X_k = \frac{1}{a_{kk}} . b_k - \sum_{p=k+1}^{N} a_{kp}X_p$$

k variant de N à 1.

ORGANIGRAMME DE RESOLUTION (voir page suivante)

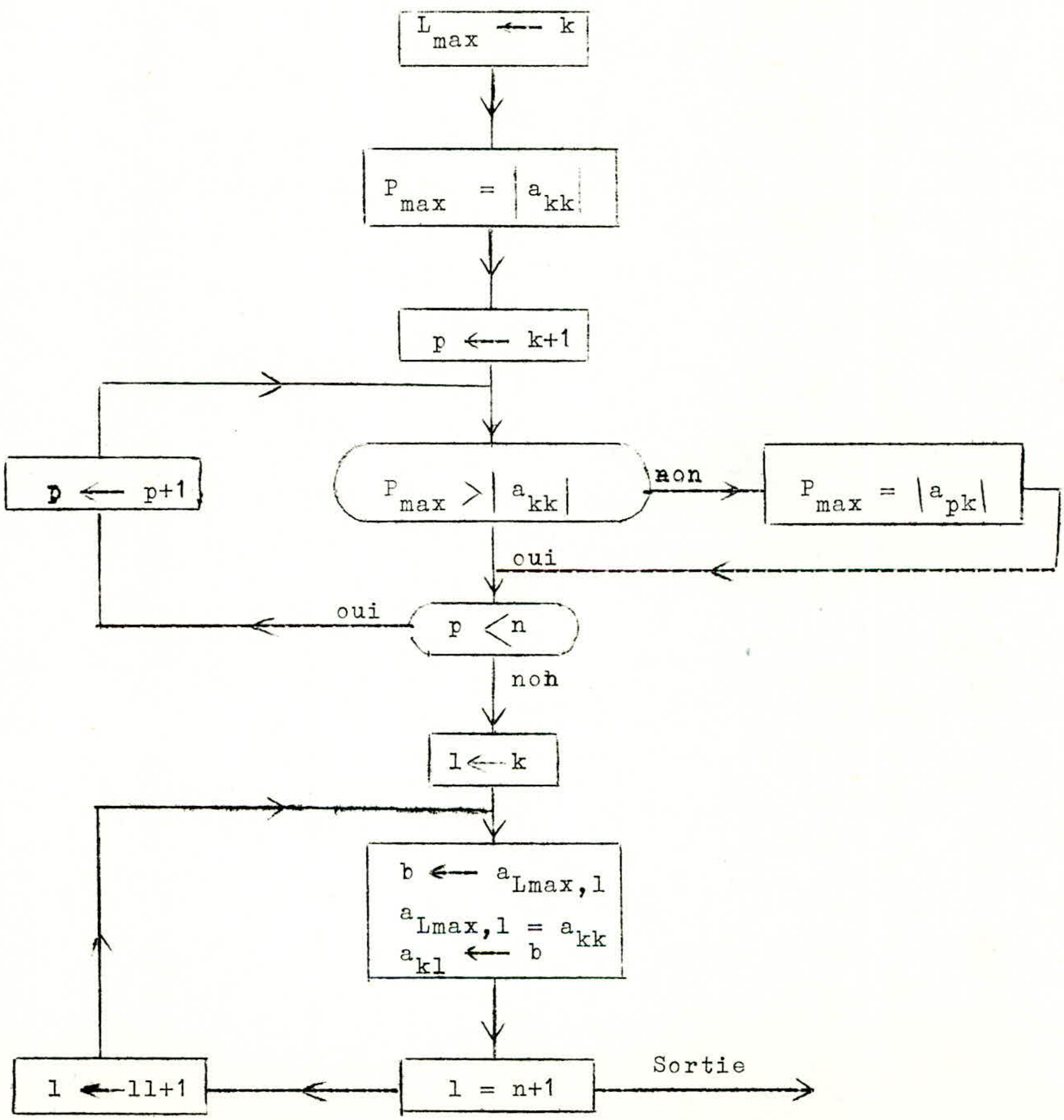
ORGANIGRAMME (de résolution)



PIVOT MAXIMUM:

On prendra comme pivot à chaque itération k l'élément a_{ik} de la colonne k qui est le plus grand en valeur absolue, afin de ne dépasser la capacité du mot mémoire. Pour cela on intervertit la ligne k et la ligne i.

ORGANIGRAMME (recherche du pivot maximum)



c) METHODE DE JORDAN

C'est une méthode de diagonalisation.

Soit le système: $AX = B$, la méthode consiste d'aller de $AX = B$ à à $A'X = B'$, avec A' diagonale.

Théorème de base:

Etant donné une matrice carrée A non singulière, il existe des matrices également non singulières telles que $EA = D$ où D est une matrice diagonale d'ordre n, le problème est de trouver les E.

Algorithme de jordan:

a) Position du problème: $AX = B$. On considère la matrice (A,B) c'est-à-dire on inclut le vecteur colonne b dans la matrice carrée A qui deviendra de dimension $(n,n+1)$

$$(A,B) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

1ère itération(k=1): Il s'agit de faire $a_{i1} = 0$ sauf pour $i = k$, la matrice (A,B) ------$(A,B)^{(1)}$

$$(A,B)^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{p2} & \cdots & a_{p,n+1} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

$N^{\text{ième}}$ itération(k=n) : Toujours avec $i \neq k$.

$$(A,B)^{(n)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & 0 & 0 & a_{2,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & 0 & a_{3,n+1}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

D'où : $\boxed{A^{(n)} X = B^{(n)}}$

$E_1(A,B) \dashrightarrow E_1$ Permet la transformation

$E_2(E_1(A,B))$

$E_3(E_2(E_1(A,B)))$

. . . .

$E_n \ldots\ldots (E_3(E_2(E_1(A,B))))$.

Les opérateurs matriciels $E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots E_n$ permettent d'aller de la matrice initiale (A,B) à la matrice finale $(A,B)^{(n)}$. La transformation ne change en rien le déterminant de la matrice.

Nombre d'opérations:

k variant de 1 à N $\begin{cases} \text{i varie de 1 à N (avec } i \neq k) \\ \text{j varie de k+1 à N+1} \end{cases}$

a) Nombre de multiplications:

Il faut faire intervenir les indices i et j.

Quand k est fixé, on aura:

$$i = 1 \text{ , } N \ (i \neq k) \Longrightarrow N - 1$$
$$j = k+1, N+1 \Longrightarrow N - k + 1$$

Ce qui nous donne: $(N - 1)(N - k + 1)$

b) Nombre d'additions:

On touve: $(n - 1)(N - k + 1)$

c) nombre de divisions:

Dans ce cas j reste constant et i varie de 1 à N $(i \neq k) \Longrightarrow (N - 1)$

Pour k = 1 , N

Nombre de multiplications. $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} (N - 1)(N - k + 1) = \frac{N(N^2 - 1)}{2}$

Nombre d'additions = Nbre de multiplications.

Nombre de divisions = $N(N - 1) + N = N^2$

Remarques:

a) Le terme général à la $k^{\text{ième}}$ itération est donné par la formule de Gauss

b) Pour le système d'ordre élevé n 20, le nombre d'additions et de multiplications est de l'ordre de $n^3/2$ alors qu'il n'est que de $n^3/3$ pour la méthode de Gauss. Mais la méthode de Jordan est intéressante notamment lorsque l'on est à la limite de possibilité de mémoire de l'ordinateur. En effet un programme écrit selon l'algorithme de Jordan est beaucoup plus court qu'un autre écrit selon l'algorithme de Gauss.

Le nombre de mémoire nécessaire est de l'ordre $n^2 + n$.

C) METHODE DE L'INVERSION:

Remarque:

Il n'est pas possible de parler de division de deux matrices. On préfère définir comme il va être fait ci-apres, l'inverse d'une matrice carrée.

Par contre on ne peut définir l'inverse d'une matrice rectangulaire.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée ait un inverse est que sont déterminant ne soit pas nul, autrement dit qu'elle soit régulière (dét. $A \neq 0$).

Si une matrice carrée A régulière peut être réduite à une matrice identité I par la prémultiplication de A en une séquence de matrices E , alors la prémultiplication de I par la même séquence de matrices fournira la matrice inverse A^{-1}.

$$E_k \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot E_1 A = I$$

$$E_K \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot E_1 A A^{-1} = I A^{-1}$$

$$E_K \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot E_1 I = A^{-1}$$

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

On peut arriver à une matrice inverse.

a) La 1ère itération (en vue de transformer la matrice A en une matrice unité I) consiste à faire $a_{11} = 1$ et $a_{i1} = 0 \quad \forall \, i \neq 1$.

$$E_1 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (1) & (1) \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad & (2) & (2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

1) $a_{11} = 1$ nécessite l'application à A de $E_1\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$. Les éléments de la $1^{\text{ère}}$ ligne sont : $a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$ $\quad j = 1 , n$

2) $a_{21} = 0 \Longrightarrow E_{21}(-a_{21})$. Les éléments de la $2^{\text{ème}}$ ligne deviennent:

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} - a_{1j}^{(2)} \cdot a_{21}^{(1)}$$

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} / a_{11}^{(1)} \qquad j = 1 , n$$

Ce qui nous donne pour la $1^{\text{ère}}$ opération (k=1):

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{1j}^{(2)} \cdot a_{i1}^{(1)} \qquad \begin{matrix} i=2,n \\ j\neq 1 \end{matrix}$$

b) La $2^{\text{ème}}$ opération (k = 2) nous donne: $2^{\text{ème}}$ colonne = 0 sauf $a_{22} = 1$ $(i \neq k)$.

$$\text{Soit :} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & a_{13}^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad a_{22} = 1 \Longrightarrow E_2\left(1 / a_{22}^{(2)}\right)$$

$$a_{2j}^{(3)} = a_{2j}^{(2)} / a_{22}^{(2)} \qquad \underline{j = 2 , n}$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{2j}^{(3)} a_{i2}^{(2)}$$

c) La $k^{\text{ième}}$ itération nous donne:

$$a_{kj}^{(k+1)} = a_{kj}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \qquad j = k , n$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k+1)} \cdot a_{ik}^{(k)} \qquad \begin{matrix} i \neq k \\ j = \end{matrix}$$

Il suffit donc d'appliquer l'ensemble des opérateurs E_k sur la matrice unité. les opérateurs E_k sont une combinaison de deux opérateurs élémentaires:

$$E_k\left(1 / a_{kk}^{(k)}\right) \quad \text{et} \quad E_{ik}\left(-a_{ik}^{(k)}\right)$$

Pratiquement on applique E aux 2 matrices accolées ' et I .

Lorsque la matrice A se sera transformée en une matrice I, I le sera en A^{-1}

On a: $A \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} \longrightarrow A^{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^{(n)}$

$$A \longrightarrow A^{(1)}$$

D'où: $A^{(1)} = (1 / a_{11}) . A$

$$A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)}$$

D'où: $A^{(2)} = (1 / a_{22}) . A^{(1)}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\boxed{A^{(n)} = \frac{1}{a_{nn}} . A^{(n-1)}}$$

$$A^{(n)} = \frac{1}{a_{nn}} . \frac{1}{a_{n-1,n-1}} \ldots\ldots\ldots \frac{1}{a_{11}} . A$$

$$\boxed{A = a_{11} . a_{22} . a_{33} \ldots\ldots\ldots a_{nn} (-1)^m}$$

m étant le nombre de permutations.

CONCLUSION

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Par l'avantage qu'il a de donner une vision globale du volume des différentes activités économiques, ainsi que de leurs inter-liaisons, le modèle de Léontief reste très utilisé par les organismes nationaux de planification. Son application aux grands ensembles industriels intégrés conduit à une gestion plus rationnelle des moyens de production.

Quant à notre travail, peu approfondi parce qu'il n'est pas une étude de cas réel, nous espérons qu'il contribuera, au moins de façon indicative, dans des études plus détaillées pour les grands complexes industriels en Algérie.