

UNIVERSITE D'ALGER

12/75

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

المدرسة لوطنية للعلوم الهندسية  
- المكتبة -  
THESE DE FIN D'ETUDE



**THEORIE**  
**DES PHENOMENES D'ATTENTE**  
**ET SES APPLICATIONS**



SUJET

PROPOSE PAR :

M<sup>ME</sup> C. STIRBV

ETUDIE PAR :

M<sup>R</sup> A. MESSAOUDI

PROMOTION 1975

المدرسة لوطنية للعلوم الهندسية  
— المكتبة —

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
BIBLIOTHÈQUE

I N T R O D U C T I O N

Ière PARTIE

ETUDE THEORIQUE

- CHAPITRE I : PHENOMENE D'ATTENTE Page 8
- A - Introduction
  - B - Description d'un phénomène d'attente
  - C - Exemples de cas réels de phénomènes d'attente.
- CHAPITRE II : LES PROCESSUS ALEATOIRES Page 13
- A - Généralités
  - B - Nature aléatoire des arrivées et services
  - C - Processus stockastique
  - D - Processus de poisson
- CHAPITRE III : FILE D'ATTENTE A UNE SEULE STATION Page 23
- A - Introduction
  - B - Equations d'états
  - C - Régime permanent
  - D - Les éléments caractéristiques en R.P.
  - E - Conclusion
- CHAPITRE IV : FILE D'ATTENTE A PLUSIEURS STATIONS Page 32
- A - Introduction
  - B - Equations d'état
  - C - Les éléments caractéristiques en R.P.
  - D - Conclusion
- CHAPITRE V : SYSTEME DE CAPACITE FINIE Page 36
- A - Introduction
  - B - Système à station unique
  - D - Système à plusieurs stations
  - D - Conclusion

IIème PARTIE

ETUDE PRATIQUE - ETUDE FAITE DANS UNE  
USINE DE BETON (faite en ROUMANIE)

Page 46

- I - Présentation
- II - Le processus de travail
- III - Organigramme de l'étude
- IV - Formulation du processus
- V - Les arrivées et les durées de services
- VI - Calcul des éléments caractéristiques du problème
- VII - Calcul de la fonction économique
- VIII - Situation future de l'usine
- IX - Conclusion.

ETUDE FAITE DANS UN PORT

A - EXPOSE DU PROBLEME

Page 66

- I - Origine du problème
- II - Présentation du problème
- III - Objectif à atteindre
- IV - Formulation du problème

B - ORGANIGRAMME DU MODELE

Page 71

C - MESURES ET OBSERVATIONS

Page 73

- I - Intervalle de temps
- II - Arrivées des bateaux
- III - Durée de service
- IV - Discipline d'attente
- V - Les coûts d'attente

D - DONNEES ET HYPOTHESES

Page 75

- I - Les arrivées des bateaux
- II - Durée de service.

E	E - LOI DE DISTRIBUTION DES ARRIVEES ET SERVICES	Page
	F - CALCUL DES ELEMENTS CARACTERISTIQUES DU PROBLEME	Page
	G - OPTIMISATION DE LA FONCTION ECONOMIQUE	Page
	H - RESULTATS ET COMMENTAIRES	Page
	I - GENERALISATION	
	CONCLUSION	

J'ai l'agréable devoir de remercier  
gracieusement toute personne m'ayant  
aidé à la préparation de ce travail.

Bois

## III INTRODUCTION

-----

- \* La file d'attente est un mal de notre époque, un mal inévitable à moins de supprimer toute liberté, de planifier tout ce qui concerne l'homme et la matière.
- \* La file d'attente se manifeste quotidiennement aux guichets de poste, de banque, aux arrêts des bus et même devant les restaurants (surtout universitaires).
- \* Les formes de la file d'attente ne sont pas toujours visibles. Dans les entreprises, l'embouteillage aux standards téléphoniques, aux services de dactylographie ou aux ateliers des pièces détachées occasionnent des pertes de temps coûteuses.
- \* La file d'attente apparaît aussi aux entrées des gares et à l'approche des aérodromes ou des ports.
- \* Si l'attente est inévitable, elle peut quelquefois être contrôlée. Ce qui a encouragé les chercheurs économistes et les gestionnaires à résoudre ce problème. La solution qui vient immédiatement à l'esprit étalement des pointes de trafic. Mais il est important de connaître à quelles conditions un tel remède, entraînant souvent des frais supplémentaires élevés, peut être rentable et dans quelles mesures il réduit les files et les temps d'attente.
- \* Dans cette thèse, nous allons essayer d'étudier le processus d'attente, d'analyser le problème d'engorgement dans un môle du port et d'apporter une solution économique à ce problème de taille.

**PARTIE II**

ETUDE THEORIQUE.

LES PHENOMENES D'ATTENTE.

CHAPITRE.1

I-A- INTRODUCTION

Les files d'attente ou < queues > sont des phénomènes familiers que nous observons très fréquemment dans notre activité personnelle. Quand nous nous rendons à la poste, à la gare, au restaurant, chez le coiffeur; bien souvent nous devons < attendre > ou < faire la chaîne > pour être servi.

Ces phénomènes se manifestent dans de nombreux problèmes économiques et industriels, le cas d'une usine où les machines qui tombent en panne d'un instant à l'autre, attendent l'intervention d'un mécanicien pour les réparer : elles forment alors une file d'attente.

Ce n'est pas étonnant de voir un phénomène d'une importance pareille attirer l'attention des mathématiciens, statisticiens et économistes qui se sont donnés à fond pour apporter les solutions à un problème où une attitude scientifique devant le hasard peut être observée.

Les efforts de ces chercheurs ont abouti enfin à l'établissement des éléments constitutifs d'une théorie appelée < THEORIE DES PHENOMENES D'ATTENTE >.

En réalité, cette théorie remonte à l'ouvrage du Danois < ERLANG > publié en 1909 après dix ans de travaux pour essayer de résoudre le problème des centraux téléphoniques.

Ce n'est que récemment après le développement de la recherche opérationnelle que la théorie d'ERLANG a dépassé le trafic téléphonique pour se voir appliquer à des phénomènes très divers de notre vie sociale et économique.

I - B - DESCRIPTION D'UN PHENOMENE D'ATTENTE.

I.B.1. Caractéristiques.

On dit qu'un problème d'attente se pose lorsque les unités demandant un service attendent, ou lorsque les personnes et les installations susceptibles de les servir attendent elles aussi.

On a l'habitude d'appeler les arrivées, les consommateurs, les clients ou les unités qui demandent un service ; et l'ensemble de personnes et installations qui rendent ce service : Une station, Celle-ci peut être composée d'un ou plusieurs postes.

Un phénomène d'attente est constitué de trois (3) caractéristiques essentielles.

a) Des unités ( ou clients) arrivant à des intervalles de temps réguliers ou irréguliers à un point donné.

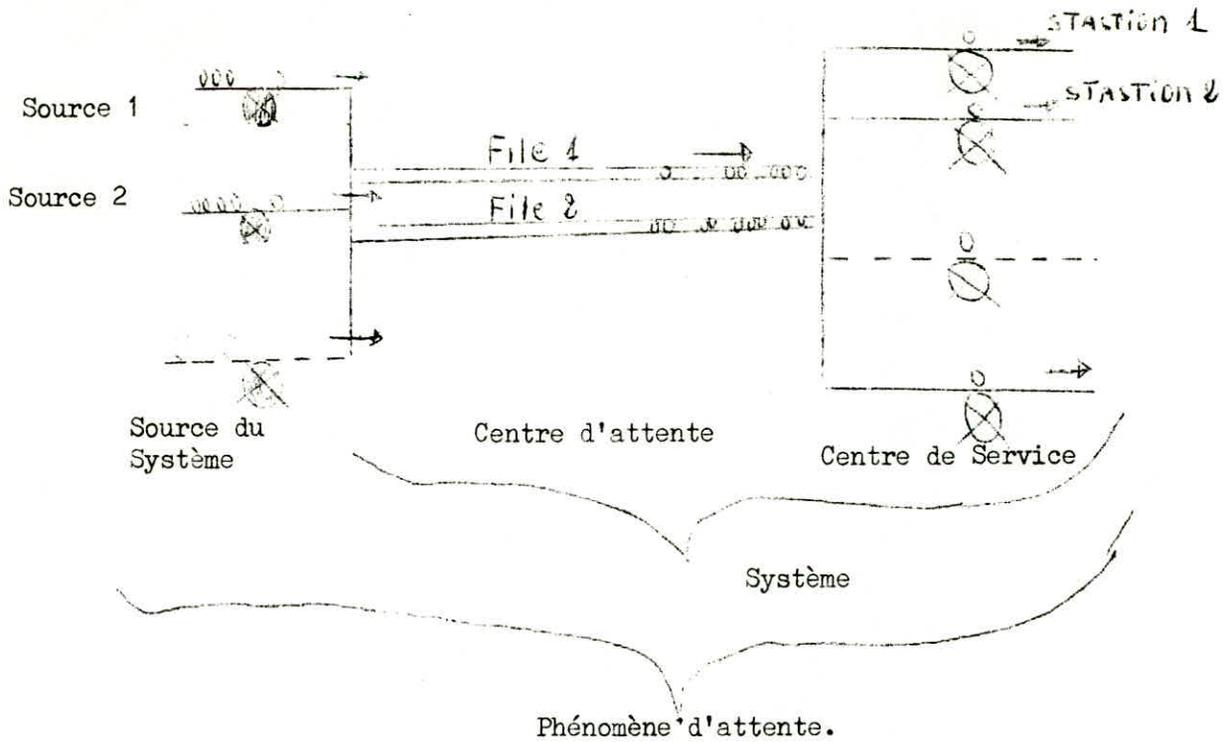
- Exemple: Les arrivées des bateaux dans un port.

b) Une partie des unités qui attendent leur tour c'est la file d'attente (ou centre d'attente).

c) Un centre de service (ou station) composé d'un ou plusieurs postes.

Exemple: Dans un port, une mole constituée de plusieurs quais destinés à l'acconage (chargement et déchargement) des bateaux.

Pour fixer les idées, on présente la structure d'un phénomène d'attente par un schéma simple:



Pour l'exemple du port:

- Le système considéré est le port.
- La source du système : les ports étrangers.
- Le centre d'attente : la Rade
- Le centre de service : l'ensemble des quais (sont-entendu les manutentionnaires et les engins de levage).

I - B.2. NOTION DU TEMPS:

L'apparition d'une file d'attente est due surtout à la manière dont se produisent les arrivées et les services:

- Soit les arrivées et les services se produisent à des intervalles de temps irréguliers.
- Soit à des arrivées et services constants mais avec un temps de service supérieur à l'intervalle de temps qui sépare deux arrivées successives,
- Le temps d'arrivée est le moment où l'unité (ou le client) rejoint la file pour attendre son tour. Ces temps peuvent être:

- a) Séparés par des intervalles de temps égaux.
- b) Séparés par des intervalles de temps irréguliers mais déterminés.

c) Séparés par des intervalles aléatoires c'est à dire connus en probabilité, c'est le cas rencontré dans notre étude.

- La durée d'attente est le temps écoulé entre le moment d'arrivée à la file et le moment où elle a été quittée.

- La durée de service est le temps écoulé entre le début et la fin du service. Souvent on inclut cette durée dans la durée d'attente

La durée de service peut être:

- a) Connue
- b) Variable mais déterminée
- c) Aléatoire.

Dans le deuxième chapitre, nous revenons avec détails sur l'aspect aléatoire des arrivées et service qui restent l'origine de l'apparition d'une file d'attente.

### I-B.3 NOTATIONS:

Dans l'étude, ces notations sont utilisées malgré qu'elles ne soient pas universelles.

m = Nombre d'unités dans le phénomène.

n = Nombre d'unités dans le système.

v = Nombre d'unités dans le file = longueur de la file.

j = Nombre d'unités en cours de service.

$$j = n - v$$

s = Nombre de stations de service.

p = Nombre de stations inoccupées.

I - C - EXEMPLES DE CAS REELS DE PHENOMENE D'ATTENTE

Ci dessous, on a regroupé quelques cas de phénomènes d'attente souvent rencontrés en réalité.

ARRIVEES	NATURE DE SERVICE	STATIONS DE SERVICE
Bateaux	Chargement Déchargement	Docks
Avions	Atterrissage	Pistes
Appels Téléphoniques	Commentaires	Standards
Voitures	Contrôle de Douanes	Douaniers
Machines à réparer	Réparation	Mécaniciens
Voyageurs	Déplacement	Bus Trains
Courrier	Dactylographie	Dactylos
Message	Décodage	Décodeurs

CHAPITRE II

LES PROCESSUS ALEATOIRES.

II -A- GENERALITES.

La résolution de nombreux problèmes d'attente comprend deux étapes très différentes:

- a) Statistique: Détermination de la loi de probabilité du système à étudier.
- b) Economique: Recherche de l'optimum économique.

Si la deuxième étape ne présente pas en général de difficultés théoriques comme pratiques, la première reste l'outil principal de l'analyse du problème.

II -B- NATURE ALEATOIRE DES ARRIVEES ET SERVICES.

Dans la plupart des problèmes d'attente, les deux entités arrivées et durées de service se produisent au hasard, c'est à dire les causes de leur réalisations sont indépendantes ou nombreuses qu'on ne peut dégager une loi régissant leurs apparitions. Comme les arrivées et les durées de services sont aléatoires, il convient de leur attacher une probabilité et en tirer suivant certaines hypothèses fixées une loi de probabilité caractérisant l'évolution probabiliste de ces deux événements.

Les lois de probabilité fréquemment utilisées en pratique sont exposées sur le tableau suivant:

NATURE	NOM DE LA DISTRIBUTION	EXPRESSION	Formule	moyenne Variance E(X), $\sigma^2$	OBSERVATIONS
DISCONTINU-	la Binomiale	n épreuves effectuées au cours d'elles un événement peut se réaliser avec une probabilité p ou ne se réalise pas avec une probabilité (1-P) et K(0,1,...n) le nombre des réalisations	$P_k = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$	$E(X) = np$ $\sigma^2 = np(1-p)$	employée dans les jeux du hasard et les problèmes d'échantillonnage.
	Loi de Poisson	Correspond à une distribution binomiale dans laquelle p est faible et n très élevé. Elle dépend que du paramètre $m=np$	$P_k = e^{-m} \frac{m^k}{k!}$	$E(X) = \sigma^2 = m = np$	utilisée surtout pour les phénomènes d'attente où K nombre des arrivées à un guichet ou un port
CONTINU	Loi Normale ou loi de Gauss-Laplace.	- Forme limite du Binomiale en K/n pour n très élevé - Loi régissant des fluctuations des variables aléatoires celles-ci résultant des causes nombreuses additives et indépendantes très rencontrés en réalité.	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X) = m$ $\sigma^2 = \sigma^2$	On peut utiliser la loi normale réduite où $z = \frac{x-m}{\sigma}$ et $E(X) = 0$ $\sigma^2 = 1$
	Loi Log-Normale ou loi de GALTON	* x tend vers une loi log normale si ln x tend vers une loi normale. - Loi des fluctuations mais lorsque les caractères ont une racactère multiplicatif et non additif.	$E(X) = e^{m+\sigma^2/2}$ $\sigma^2 = e^{m+\sigma^2} \sqrt{1-e^{-6\sigma^2}}$	Des cas d'application - Distribution des revenus d'une population - Teneurs dans un Gisement	

On a dit que pour en tirer une loi de probabilité il faut que certaines hypothèses soient satisfaites. Ce sont justement les hypothèses les plus fréquemment rencontrées pour les arrivées des unités dans un phénomène d'attente. L'énoncé des ces hypothèses nous conduit à la description de ce qu'on appelle «le processus de Poisson» qui est lui même un cas particulier très important des processus stochastiques ou aléatoires.

## II - C. PROCESSUS STOCHASTIQUES:

Dans tous les cas de phénomène d'attente que nous avons évoqué, on est en présence d'un système pouvant prendre un certain nombre d'états,  $E_n$  ( $n=0,1,2 \dots$ ) et cela d'une manière aléatoire.

C'est à dire que le hasard intervient dans.

- a) les changements d'états qui se font à des instants aléatoires appelés : dates.
- b) Le passage en un de ces instants d'un état à un autre état aléatoire.

Ce qui fait l'originalité de ce modèle probabiliste appelé Processus — c'est le caractère (a) c'est à dire les changements d'états liés par des lois de probabilité se succèdent à des intervalles aléatoires: c'est un processus stochastiques.

## II - D. PROCESSUS DE POISSON:

Ce qui rend notre problème compliqué, est la conjugaison de deux phénomènes aléatoires.

- les arrivées des unités au Rasard
- Le temps aléatoire passé par l'unité à la station.

Alors, peut-on caractériser statistiquement la manière dont des bateaux arrivent au port et la durée de leur séjour?

Considérons une suite d'événements identiques qui se succèdent dans le temps (par exemple les arrivées des bateaux). Le nombre  $n$  d'événements produits dans l'intervalle de temps  $t$  est une variable aléatoire appelée  $N$  et

$$p_n(t) = \text{Prb}(N=n)$$

et nous ferons les hypothèses suivantes:

1°) Les événements sont indépendants

2°) La probabilité d'arrivée d'un événement pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est proportionnelle à  $\Delta t$  et égale à  $\lambda \times \Delta t$  et qu'il arrive deux événements pendant  $\Delta t$  est infiniment petite par rapport à  $\Delta t$ .

3°) Le phénomène est stationnaire c'est à dire que  $p_n(t)$  ne dépend que de l'intervalle de temps  $\Delta t$  et non du temps initial (homogénéité du système).

En utilisant ces hypothèses, on écrit

\*  $p_n(t)$  = la probabilité que  $n$  événements se produisent au temps  $t$  ( $n=0,1,2,3,\dots$ )

$$* p_1(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o_1(\Delta t) \quad (1)$$

où  $o_1(\Delta t)$  = Probabilité pour que 2, 3, ... événements se produisent durant  $\Delta t$  : des infiniment petits par rapport à  $\Delta t$ .

- E se produit durant  $\Delta t$  0 ou 1 fois (suivant les hypothèses (2 et 3) avec la probabilité =

$$p_0(\Delta t) + p_1(\Delta t) \quad (2)$$

$$\text{mais : } p_0(\Delta t) + p_1(\Delta t) + p_2(\Delta t) + \dots = 1 \quad (3)$$

$$\text{ou } 1 - p_0(\Delta t) - p_1(\Delta t) = p_2(\Delta t) + \dots \quad (4)$$

Quelle loi de distribution suit  $p_n(t)$  avec  $n=0,1,2,3,\dots$ ?

E est un événements qui se produit (exemple: les arrivées des bateaux).

E se réalise n fois durant  $t + \Delta t$  suivant plusieurs éventualités: soit  $\times$  n fois dans l'intervalle de temps t

et (probabilités composées)

0 fois dans l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

$\times$  (n-1) fois dans l'intervalle de temps t

et

1 fois dans l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

$\times$  (n-2) fois dans l'intervalle de temps t.

et

2 fois dans l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

$\times$ (n-3)...

-----  
si nous voulons satisfaire les hypothèses fixées, on aura seulement deux éventualités de réalisation de E.

Nombre d'événements à	
$t$	$t + \Delta t$
n-1	1
n	0

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t) - \lambda \Delta t p_0(t) - O_5(\Delta t)}{\Delta t} \quad (18)$$

$$\frac{O_5(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$$

$$\text{Enfin: } \boxed{p_0'(t) = -\lambda \cdot p_0(t); n=0} \quad (19)$$

$$\text{et } \frac{d p_0(t)}{d t} = -\lambda p_0(t)$$

$$\frac{d p_0(t)}{p_0(t)} = -\lambda dt$$

En intégrant, on aura :

$$\log p_0(t) = -\lambda t + C.$$

$$\text{ou } p_0(t) = e^{-\lambda t + C} = e^{-\lambda t} \cdot e^C = K \cdot e^{-\lambda t}$$

Au début de l'intervalle  $t$ , on a :

$$p_0(0) = 1 \quad \text{et } p_n(0) = 0.$$

$$\text{et } K = e^C = p_0(0) = 1$$

$$\boxed{\text{Pour } n=0, p_0(t) = e^{-\lambda t}} \quad (20)$$

Pour  $n \geq 1$ , il faut résoudre l'équation générale (17) à l'aide de la transformation de Laplace.

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt \quad \text{ou } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda h(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$\text{Posons } P_n(s) = \mathcal{L} p_n(t).$$

$$\mathcal{L} p_n'(t) = s P_n(s)$$

$$\text{et } \mathcal{L} p_{n-1}(t) \cdot \lambda \mathcal{L} p_n(t) = \lambda P_{n-1}(s) - \lambda P_n(s)$$

$$\mathcal{L} p_n'(t) = s P_n(s) = \lambda P_{n-1}(s) - \lambda P_n(s)$$

$$sP_n(s) + \lambda P_n(s) = \lambda P_{n-1}(s)$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{\lambda}{\lambda + s} \cdot P_{n-1} \quad (21)$$

On a pour  $n=0$ ,  $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$P_n(s) = \mathcal{L} p_n(t) = \mathcal{L} e^{-\lambda t}$$

$$\mathcal{L} h(t) = e^{-\lambda t}, g(s) = \mathcal{L} h(t) = \mathcal{L} e^{-\lambda t} = \frac{s}{\lambda + s}$$

$$\text{et } P_0(s) = \frac{s}{\lambda + s}$$

D'après la relation (21), on déduit :

$$P_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} P_0 = \frac{\lambda s}{(\lambda + s)^2}$$

$$P_2(s) = \frac{\lambda^2 s}{(\lambda + s)^3}$$

⋮

$$P_n(s) = \frac{\lambda^n s}{(\lambda + s)^{n+1}}$$

$$\text{et } p_n(t) = \mathcal{L}^{-1} P_n(s) = \mathcal{L}^{-1} \frac{\lambda^n s}{(\lambda + s)^{n+1}}$$

$$p_n(t) = \lambda^n \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{(\lambda + s)^{n+1}}$$

$$\text{et } \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{(\lambda + s)^{n+1}} = \frac{t^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$$

Enfin :

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Telle est la fonction de densité de la loi de Poisson.

En conclusion, lorsque des événements (exemple les arrivées des bateaux à un port) se produisent de telle sorte que les trois hypothèses énoncées ci-dessus, sont satisfaites, le phénomène constitue un processus de Poisson dont la loi de probabilité est la loi de Poisson.

$\lambda$  est appelé taux moyen de réalisation de E, (dans notre cas  $\lambda$  est le taux moyen des arrivées de bateaux par unité de temps).

Une déduction intéressante concernant la distribution des intervalles séparant la réalisation de deux événements successifs (deux arrivées successives de bateaux) qui constituent comme nous venons de le voir un processus de Poisson.

Soit  $\theta$  la variable aléatoire représentant ces intervalles  $f(\theta)$  sa densité de probabilité.

$P(\theta)$  sa fonction de répartition complémentaire.

par définition  $P(\theta) = \Pr(\Theta > \theta)$

$P(\theta)$  = la probabilité conditionnelle que, un événement E venant de se réaliser à l'instant t, il n'y en ait pas dans l'intervalle  $(t, t+\theta)$ -

Cette probabilité s'écrit =

- 22 -

$$f(\theta) = \frac{(\lambda\theta)^0 \cdot e^{-\lambda\theta}}{0!} = e^{-\lambda\theta}$$

En a donc

$$L(\theta) = \Pr(\Theta > \theta) = e^{-\lambda\theta}$$

En dérivant, on aura la fonction de densité  $f(\theta)$ :

$$f(\theta) = \Pr(\theta < \Theta < \theta + d\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta} \text{ et } \theta > 0$$

la moyenne  $E(\theta)$  et l'écart. type  $\sigma_\theta^2$  de la distribution exponentielle des intervalles des réalisations poissoniennes:

$$E(\theta) = \int_0^{\infty} \theta f(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} \Pr(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\theta} \cdot d\theta$$

$$E(\theta) = -\frac{1}{\lambda} \left[ e^{-\lambda\theta} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$\frac{1}{\lambda}$  = temps moyen entre deux événements successifs  
 $\lambda$  et  $\lambda$ : taux moyen des réalisations (ex: arrivée) par unité de temps.

$$\text{et } \sigma_\theta^2 = \int_0^{\infty} \theta^2 f(\theta) d\theta = [E(\theta)]^2$$

$$\bullet E(\theta) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow [E(\theta)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\bullet \int_0^{\infty} \theta^2 f(\theta) d\theta = \frac{2}{\lambda^2} \text{ (après intégration par partie)}$$

$$\text{donc } \sigma_\theta^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

II CHAPITRE III

II- FILE D'ATTENTE A UNE SEULE STATION

\*\_\*\*

I - INTRODUCTION

Dans tout problème d'attente, on a à connaître les cinq (5) facteurs du phénomène qui sont symbolisés ainsi : A/B/S/L/E, où :

- A = symbolise la loi de distribution des arrivées. Elle peut être celle de poisson ou binomiale...
- B = la distribution de la durée de service qui peut être : constante, exponentielle, d'Erlang E ou arbitraire.
- S = nombre de stations de service  
S = 1, 2, 3, .....
- L = symbolise la capacité du système. Elle peut être finie (pour les systèmes ouverts) ou infinie (pour les systèmes fermés).
- E = note la discipline d'attente qui peut être :
  - \* FIFO ≠ First In First out (1er arrivé, 1er servi)  
= file d'attente ordonnée.
  - \* SIRO = Served In Randon Order (servi au hasard)  
= file désordonnée.
  - \* LIFO = Last In First out (dernier arrivé, 1er servi)

Ces facteurs nous permettent de connaître des grandeurs intéressantes du problème une fois résolu. Ces grandeurs sont classées en deux groupes :

- Les grandeurs liées à l'état du système, par exemple, le nombre n d'unités dans le système et le nombre v d'unités dans la file à l'instant, t. A ces grandeurs sont attachées diverses probabilités (probabilité qu'il y ait n unités dans le système, probabilité qu'il y ait v unités dans la file).
- Les grandeurs indépendantes de l'état du système, par exemple, le temps d'attente d'une unité dans la file auquel on peut attacher une probabilité ou le temps de séjour d'unité dans le système (c'est-à-dire le temps d'attente plus la durée de service).

Pour illustrer ces grandeurs, on fait une analyse sur une file de type M/M/1/∞/FIFO, dont les arrivées sont poissonniennes avec un taux moyen,  $\lambda$ , et la durée de service est exponentielle avec un taux moyen,  $\mu$ , et ayant une seule station et les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée.

## II - EQUATIONS D'ETAT

Nous voulons déterminer le nombre d'unités dans le système et la probabilité qu'on peut lui attribuer. Comme cette grandeur est liée à l'état du système, nous devons tout d'abord étudier l'évolution du système dans le temps, ce qui constitue un processus dont les changements d'état est aléatoire.

Comme la file est du type M/M/1/∞/FIFO nous pouvons faire les hypothèses suivantes :

- La probabilité qu'une unité arrive dans le système pendant l'intervalle de temps,  $dt$ , est égale à  $\lambda dt$ , tel que  $\lambda$  est le nombre moyen d'arrivées par unité de temps.
- La probabilité que la fin du service d'une unité se produise pendant,  $dt$ , est égale à  $\mu dt$ , tel que  $\mu$  est l'intervalle de temps moyen de service.
- La probabilité d'existence de deux ou plusieurs arrivées ou deux ou plusieurs services pendant,  $dt$ , est infiniment petit par rapport à,  $dt$ ,
- Le taux d'arrivées est inférieur à celui de service ( $\lambda < \mu$ ).

Avec ces hypothèses, on peut formuler les changements d'état du système et les probabilités de transition et enfin la matrice de transition.

	<u>changements d'état</u>	<u>probabilité de transition</u>
$n = 0$	$E_0 \rightarrow E_0$ (aucune arrivée)	$1 - \lambda dt$
	$E_0 \rightarrow E_1$ (1 arrivée)	$\lambda dt$
	$E_1 \rightarrow E_0$ (1 fin de service)	$(1 - \lambda dt)(\mu dt) = \mu dt$
$n \geq 1$	$E_n \rightarrow E_n$	$(1 - \lambda dt)(1 - \mu dt) + (\lambda dt)(\mu dt)$ $1 - \lambda dt - \mu dt$
	$E_n \rightarrow E_{n-1}$	$(1 - \lambda dt)(\mu dt) = \mu dt$
	$E_n \rightarrow E_{n+1}$	$(\lambda dt)(1 - \mu dt) = \lambda dt$

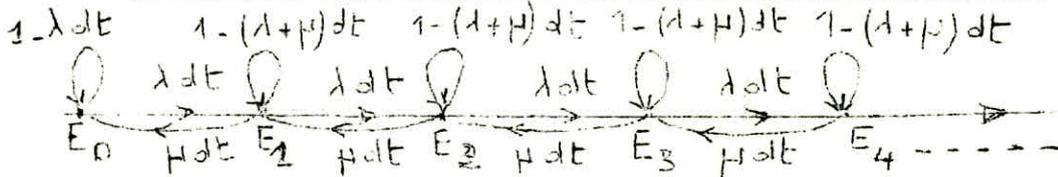
.../...

On en déduit la matrice de transition [2], et le graphe correspondant =

Etat à t + dt

	n=0	n=1	n=2	n=3
n=0	$1 - \lambda dt$	$\lambda dt$	0	0
n=1	$\mu dt$	$1 - (\lambda + \mu) dt$	$\lambda dt$	0
n=2	0	$\mu dt$	$1 - (\lambda + \mu) dt$	$\lambda dt$
n=3	0	0	$\mu dt$	$1 - (\lambda + \mu) dt$

Etat  
à  
t



A l'aide de cette matrice de transition [2], il nous sera possible de calculer la probabilité pour qu'il y ait n unités dans le système à l'instant, t, :  $p_n(t)$ .

Puisque on sait :  $[p(t+dt)] = [p(t)] [2]$

On peut écrire :

Pour  $n > 0$

$$(1) \quad p_n(t+dt) = p_n(t) [1 - (\lambda + \mu) dt] + p_{n+1}(t) [\mu dt] + p_{n-1}(t) [\lambda dt]$$

Pour  $n = 0$

$$(2) \quad p_0(t+dt) = p_0(t) [1 - \lambda dt] + p_1(t) [\mu dt]$$

ou encore :

$$(3) \quad p_n(t+dt) - p_n(t) = - p_n(t) [(\lambda + \mu) dt] + p_{n+1}(t) [\mu dt] + p_{n-1}(t) [\lambda dt]$$

$$(4) \quad p_0(t+dt) - p_0(t) = p_0(t) [-\lambda dt] + p_1(t) [\mu dt]$$

Enfin, on a les équations d'état du système :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} p_n(t) = - (\lambda + \mu) p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-1}(t) ; n > 0 \\ \frac{d}{dt} p_0(t) = - \lambda p_0(t) + \mu p_1(t) ; n = 0 \end{cases}$$

.../...

La solution de ce système d'équations, compte tenu des conditions aux limites :

à  $t = 0$ , on a  $n = 0$  ce qui dit :

$$p_0(0) = 1 ; p_1(0) = 0 ; \dots \dots \dots p_n(0) = 0$$

est assez compliquée car on a une infinité d'équations et chaque équation fait intervenir les solutions d'autres équations.

Au moyen du transformé de CARSON-LAPLACE, on aboutit à quelque chose de ce genre.

$$p_n(t) = \text{EXP}(-(\lambda + \mu)t) \times \\ - \dots \times \left[ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n/2} \cdot I_n(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot I_{n+1}(2\sqrt{\lambda\mu}t) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \sum_{k=2}^{n=\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-k/2} \cdot I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t) \right]$$

où  $I_n(x) = i^{-x} \times J_n(ix)$

$J_n(x)$  = fonction de Bessel modifiée de 2<sup>e</sup> espèce d'ordre n.

$p_n(t)$  va évoluer suivant t et n, et on se pose la question suivante : comment sera le système au bout d'un certain temps infini ?

III - REGIME PERMANENT

Un système a un régime permanent lorsque pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $p_n(t)$  tend asymptotiquement vers  $p_n$  indépendant du temps.

C'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n$

et qu'il existe au moins  $n_1$  tel que  $p_{n_1} \neq 0$

Dans ce régime les équations différentielles d'état deviennent

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} p_n(t) = 0 = -(\lambda + \mu) \cdot p_n + \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} ; n > 0 \\ \frac{d}{dt} p_0(t) = 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 ; n = 0 \end{cases}$$

OU :

$$(8) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) p_n = \mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} & n > 0 \\ \lambda p_0 = \mu p_1 & n = 0 \end{cases}$$

et on pose :  $\frac{\lambda}{\mu} = \psi < 1$

et d'après (8) :

$$(9) \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \psi \times p_0$$

$$(10) \quad p_{n+1} = \frac{1}{\mu} [(\lambda + \mu) p_n - \lambda p_{n-1}]$$

$$(11) \quad p_{n+1} = (1 + \psi) \times p_n - \psi \times p_{n-1}$$

#### IV - LES ELEMENTS CARACTERISTIQUES EN REGIME PERMANENT

##### 1 - CALCUL DE $p_0$ ET $p_n =$

Notons qu'un régime permanent est une limite du régime stationnaire.

La condition d'existence d'un régime stationnaire est que

$$\frac{\lambda}{\mu} = \psi < 1$$

d'après

$$(12) \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \times p_0 = \psi \times p_0$$

$$(13) \quad p_2 = \psi p_1 = \psi^2 \cdot p_0$$

$$(14) \quad p_3 = \psi \cdot p_2 = \psi^3 \cdot p_0$$

$$(15) \quad p_n = \psi \cdot p_{n-1} = \psi^n \cdot p_0$$

et on sait que :  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

(16)  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \times \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n = 1$

(17)  $\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n = (1 + \psi + \psi^2 + \dots) = \frac{1}{1 - \psi}$

donc :

(18)  $p_0 \left( \frac{1}{1 - \psi} \right) = 1$

(19) et  $\boxed{p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \psi}$  avec  $\frac{\lambda}{\mu} = \psi < 1$

A l'aide de l'équation (15), on tire :

(20)  $\underline{p_n = \psi^n \cdot p_0 = \psi^n \times (1 - \psi)}$

$p_0$  = probabilité qu'il n'y ait pas d'unités dans le système

$p_n$  = probabilité que le système contienne n unités.

Le calcul de  $p_0$  et  $p_n$  suppose que la série figurant au second membre de l'équation (17) est convergente, ce qui exige  $\lambda/\mu = \psi < 1$ , c'est pourquoi, on insiste sur le fait que  $\psi < 1$  qui est la condition d'existence d'un régime stationnaire.

La quantité,  $\psi$ , joue un rôle très important, elle exprime le degré de saturation du système. Elle est appelée ; coefficient d'utilisation ou intensité du trafic. Pour le phénomène n'admet pas le régime permanent et la file devient de plus en plus grande car la durée moyenne  $1/\mu$  est supérieure à l'intervalle moyen  $1/\lambda$  entre les arrivées, alors les  $p_n(t)$  tendent quel que soit n vers zéro.

IV - 2 - CALCUL DE Pr (N > n) =

Pr (N > n) = probabilité que le système contienne un nombre d'unités supérieur à n. Elle s'obtient en cumulant les probabilités pour n = n + 1, n + 2, n + 3, .....

$$\begin{aligned}
 \text{Pr } (N > n) &= p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3} \dots \\
 (21) \quad &= (\psi^{n+1} + \psi^{n+2} + \dots) p_0 \\
 &= (\psi^{n+1} + \psi^{n+2} + \dots) (1 - \psi)
 \end{aligned}$$

$$\text{Pr } (N > n) = (1 - \psi) \psi^{n+1} \times (1 + \psi + \psi^2 + \dots)$$

$$\text{Pr } (N > n) = \psi^{n+1}$$

$$(22) \quad \text{Pr } (N > 0) = \psi$$

$$(23) \quad \text{Pr } (N = 0) = 1 - \psi = p_0$$

IV - 3 - CAUCUL DU NOMBRE MOYEN D'UNITES DANS LE SYSTEME  $\bar{n}$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \psi^n \times (1 - \psi)}{\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n}$$

$$\bar{n} = (1 - \psi) \times \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \psi^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n}$$

$$= (1 - \psi) (\psi + 2\psi^2 + 3\psi^3 + 4\psi^4 + \dots)$$

$$= (1 - \psi) \cdot \psi \cdot (1 + 2\psi + 3\psi^2 + 4\psi^3 + \dots)$$

$$= (1 - \psi) \cdot \psi \cdot \left[ \frac{d}{d\psi} (1 + \psi^2 + \psi^3 + \psi^4 + \dots) \right]$$

$$= (1 - \psi) \cdot \psi \cdot \frac{d}{d\psi} \left( \frac{1}{1 - \psi} \right)$$

$$= \psi \cdot (1 - \psi) \cdot \frac{1}{(1 - \psi)^2}$$

(24) et

$$\bar{n} = \frac{\psi}{1 - \psi}$$

Si la file est du type M/G/1/∞/FIFO, c'est-à-dire que les arrivées sont poissonniennes et la durée de service  $\theta$  est arbitraire, on utilise la formule suivante due à Kendall.

$$(25) \quad \bar{n} = \psi + \frac{\omega^2 + d^2 \cdot \psi^2}{2(1 - \psi)}$$

IV - 4 - CALCUL DU NOMBRE MOYEN D'UNITES DANS LA FILE

Appelons  $v$  = la longueur de la file

$$\begin{aligned} \text{si } n = 0 & \quad v = 0 \\ n > 0 & \quad v = n - 1 \end{aligned}$$

$\bar{v}$  = la longueur moyenne de la file, ou le nombre moyen d'unités dans la file.

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot p_n}{\sum_{n=2}^{\infty} p_n} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} np_n}{\sum_{n=2}^{\infty} p_n} - \frac{\sum_{n=2}^{\infty} p_n}{\sum_{n=2}^{\infty} p_n} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} np_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n} - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n} \sum_{n=0}^{\infty} n p_n - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n} + \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n} p_n \\ &= \bar{n} - p_1 - 1 + p_0 + p_1 \end{aligned}$$

$$\bar{v} = \bar{n} - 1 + p_0$$

$$\bar{v} = \frac{\psi}{1 - \psi} - (1 - p_0) = \frac{\psi}{1 - \psi}$$

(26)

$$v = \frac{\psi^2}{1 - \psi}$$

IV - 5 - CALCUL DU TEMPS DE SEJOUR

Le temps de séjour d'une unité dans le système est composé du temps d'attente dans la file et de la durée de service. Cette grandeur n'est pas liée à l'état du système, elle n'est régie que par le taux des arrivées.

Appelons  $\bar{U}$  : temps d'attente moyen dans le système

$\bar{W}$  : temps d'attente moyen dans la file

$\bar{U} - \bar{W}$  représente la durée moyenne de service.

$$\bar{U} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{\psi}{1 - \psi} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda/\mu}{(1 - \lambda/\mu)} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

(27)

$$\bar{U} = \frac{1}{\mu(1 - \psi)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\bar{W} = \frac{\bar{V}}{\lambda} = \frac{\psi^2}{1-\psi} \times \frac{1}{\lambda} \equiv \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\psi}{1-\psi}$$

(28)

$$\boxed{\bar{W} = \psi \times \bar{U}}$$

$$\bar{U} - \bar{W} = \bar{U} - \psi \bar{U} = \bar{U} (1 - \psi) = \frac{(1 - \psi)}{\mu (1 - \psi)}$$

(29)

$$\boxed{\bar{U} - \bar{W} = 1/\mu}$$

et  $1/\mu$  = temps moyen de service

Si les arrivées sont poissonniennes et la durée de service  $O$  a une distribution arbitraire de variance  $\sigma_0^2$ , le temps d'attente  $\bar{W}$  devient :

$$\bar{W} = \bar{U} - \bar{O} = \frac{1}{\lambda} \left[ \psi + \frac{\lambda^2 \sigma_0^2 + \psi^2}{2(1-\psi)} \right]$$

$$\bar{W} = \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda^2 \sigma_0^2 + \psi^2}{2(1-\psi)}$$

V - EN CONCLUSION : A ce type de problème, on s'est limité au cas où les arrivées sont poissonniennes et les durées de service exponentielles car il est très rencontré en pratique

On doit admettre que la quantité  $\psi (= \lambda/\mu)$  constitue l'essence du problème d'attente. Si  $\psi$  augmente par suite  $(1 - \psi)$  diminue, ce qui veut dire que la solution d'un problème de file d'attente exige un compromis entre le coût de la réduction du nombre moyen d'unités dans le système (le système est l'ensemble des unités en attente et celles en cours de service) et le coût associé des installations et employés constituant le service.

II- FILE D'ATTENTE A PLUSIEURS STATIONS

\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*

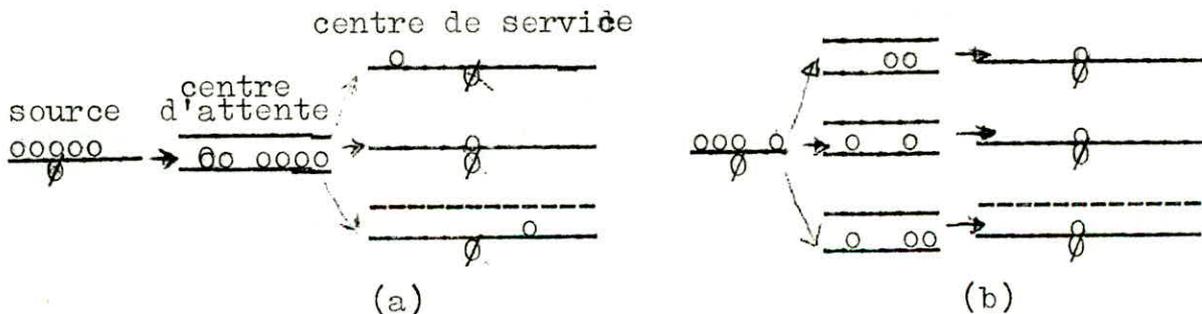
I - INTRODUCTION

Envisageons maintenant le cas où le centre de service comprend plusieurs stations de service c'est-à-dire qu'on va étudier une file du type M/M/S/∞/FIFO.

Avant de commencer, nous faisons quelques hypothèses dans le but de simplifier l'étude.

- Pas de préférence des unités pour les stations.
- On peut départager la file entre plusieurs stations et une personne qui arrive est supposée se ranger dans une de ces files directement. On suppose en plus que la personne qui arrive rejoint indifféremment une de ces files (va et vient entre les files = JOCKEYNG).

Avec ces hypothèses, on passe du cas (a) au (b).



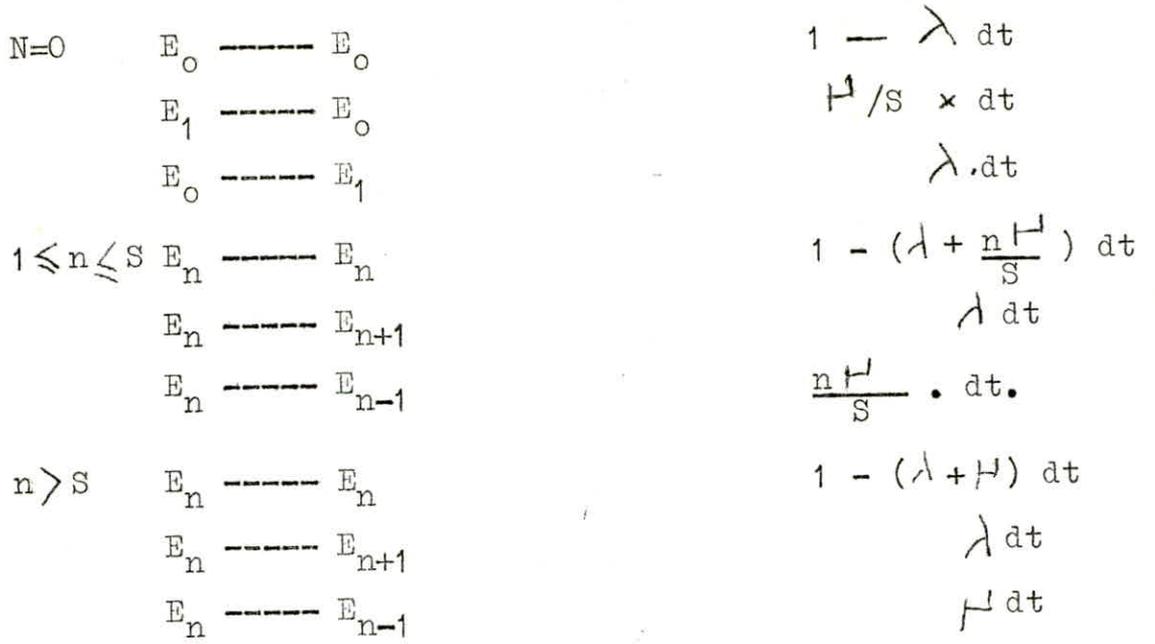
Les S stations ont un même temps de service et le taux global de l'ensemble des stations est  $\mu$ . Une station a un taux de service égal soit à zéro ou à  $\mu/S$ .

II - EQUATIONS D'ETATS

L'analyse est identique à celle faite pour le problème d'une seule station.

Les changements du système entre t et t + dt sont :

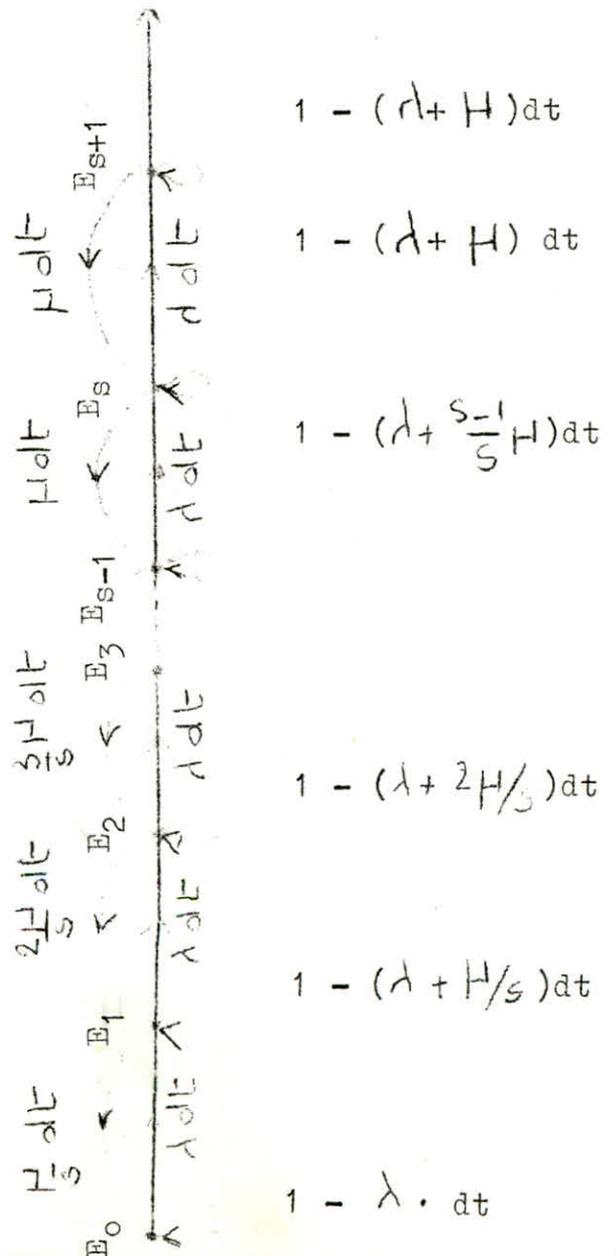
- Arrivée d'un client sans départ :  $E_n$  -----  $E_{n+1}$
- Départ sans arrivée :  $E_n$  -----  $E_{n-1}$
- Ni arrivée, ni départ :  $E_n$  -----  $E_n$



La matrice de transition et le graphe correspondants seront :

Etat à  $t + dt$

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=S-1$	$n=S$	$n=S+1$
$n=0$	$1 - \lambda \text{ dt}$	$\lambda \text{ dt}$	0	0	0	0	0
$n=1$	$\frac{H}{S} \text{ dt}$	$1 - (\lambda + \frac{H}{S}) \text{ dt}$	$\lambda \text{ dt}$	0	0	0	0
$n=2$	0	$2 \frac{H}{S} \times \text{dt}$	$1 - (\lambda + \frac{2H}{S}) \text{ dt}$	$\lambda \text{ dt}$	0	0	0
$n=3$	0	0	0	0	0	0	0
$n=S-1$	0	0	0	0	$1 - (\lambda + \frac{H}{S}) \text{ dt}$	$H \text{ dt}$	0
$n=S$	0	0	0	0	$\frac{H}{S} \text{ dt}$	$1 - (\lambda + \frac{H}{S}) \text{ dt}$	$\lambda \text{ dt}$
$n=S+1$	0	0	0	0	0	$H \text{ dt}$	$1 - (\lambda + H) \text{ dt}$



Les équations en régime transitoire ( $p_n$  en fonction de  $t$ ) sont :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} p_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \frac{\mu}{S} p_1(t) \\ \frac{d}{dt} p_n(t) = -\left(\lambda + n \frac{\mu}{S}\right) p_n(t) + p_{n-1}(t) + \frac{(n+1)}{S} \mu p_{n+1}(t) ; 1 \leq n \leq S \\ \frac{d}{dt} p_n(t) = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) \\ n \geq S \end{array} \right.$$

En régime permanent, c'est-à-dire  $p_n(t) = p_n = \text{Cte}$  pour tout  $n$  et pour un temps infini. Ces équations différentielles (1) deviennent :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \lambda p_0 = \mu/S \cdot p_1 \quad n = 0 \\ (\lambda + \mu/S) p_n = \lambda p_{n-1} + \frac{n+1}{S} \cdot \mu \cdot p_{n+1} ; 1 \leq n \leq S \\ (\lambda + \mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \quad n \geq S \end{array} \right.$$

### III - LES ELEMENTS CARACTERISTIQUES

Et nous déduisons de ces équations, les grandeurs intéressantes à connaître de notre problème :

$$1) \quad p_n \quad p_n = p_0 \cdot \frac{S^n \psi^n}{n!} \quad 1 \leq n < S$$

$$(3) \quad p_n = p_0 \cdot \frac{S^S \psi^n}{S! S^{n-S}} \quad n \geq S$$

$$2) \quad p_0 = \frac{1}{\frac{\psi^S \cdot S^S}{S! (1-\psi)} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{S^n \cdot \psi^n}{n!}}$$

3 - Nombre moyen des stations non occupées

$$(4) \quad \bar{e} = (1 - \psi) S$$

Nombre moyen des stations occupées

$$\bar{j} = S - \bar{e}$$

4) - Nombre moyen d'unités dans la file d'attente.

$$(6) \quad \bar{v} = \frac{S^S \cdot \psi^{S+1}}{S! (1-\psi)^2} \cdot P_0 = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n-S) p_n$$

5) - Nombre moyen d'unités dans le système :

$$(7) \quad \bar{n} = \bar{v} + \bar{j} = \bar{v} + S - \bar{e} = \frac{S^S \cdot \psi^{S+1}}{S! (1-\psi)^2} + \psi S$$

6) - Temps d'attente moyen dans le système :

$$(8) \quad \bar{u} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left[ \frac{S^S \cdot \psi^{S+1}}{S! (1-\psi)^2} + \psi S \right]$$

7) - Temps d'attente moyen dans la file :

$$(9) \quad \bar{w} = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[ \frac{S^S \cdot \psi^S}{S! (1-\psi)^2} \cdot P_0 \right]$$

8) - Probabilité qu'une unité ait à attendre dans la file :

$$(10) \quad \begin{aligned} \Pr(N \geq 0) &= \Pr(N \geq S) \quad \text{car si } n < S : \text{ pas d'attente} \\ \Pr(N \geq S) &= \sum_{n=S}^{\infty} p_n = \frac{S^S \cdot \psi^S}{S! (1-\psi)} \cdot P_0 \end{aligned}$$

#### IV - CONCLUSION :

Le modèle que nous venons d'étudier n'est pas autre que le cas général du premier vu au chapitre.

III - Le problème devient plus difficile si on ne tient pas compte des hypothèses fixées au début, cependant le client choisit entre les files, autrement dit la station ayant un taux de service plus élevé. Le choix des stations devient aléatoire, ce qui nous oblige à attacher une probabilité au choix de la station. En général on suppose que le choix des stations est équiprobable.

▮▮ HAPITRE V

▮▮ SYSTEME DE CAPACITE FINIE  
\*\_\*\*

I - INTRODUCTION

Nous considérons dans cette partie, le cas où le centre de service est destiné à servir un nombre limité d'unités. Ce genre de problème se rencontre notamment à propos de l'entretien des machines ou d'équipements. Malgré que ce n'est pas notre cas en étude, il est intéressant d'établir les éléments caractéristiques de ce type de problème.

II - SYSTEME A STATION UNIQUE ET CAPACITE FINIE

On va se limiter aux files du type M/M/1/L/FIFO où :

m = nombre maximum de clients dans le système  
n = nombre d'unités dans le système.

$$0 \leq n \leq m$$

$$\text{si } n = 0 \quad \lambda_n = m\lambda, \quad \text{si } 1 \leq n \leq m \quad \lambda_n = (m-n)\lambda.$$
$$\mu_n = 0 \quad \mu_n = \mu$$

Les équations d'état sont :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} p_0(t) &= -m\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) & n = 0 \\ \frac{d}{dt} p_n(t) &= -[(m-n)\lambda + \mu] p_n(t) + [(m-n)\lambda] p_{n-1}(t) + \mu \cdot p_{n+1}(t) & 1 \leq n < m \end{aligned} \right.$$

Nous en déduisons les éléments du problème.

1) - Probabilité que le système contienne n unités :

$$p_n = \frac{m! \psi^n}{(m-n)!} \times p_0$$

2) - Probabilité que le système ne contienne pas de clients :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^m \frac{m! \psi^n}{(m-n)!}}$$

3) - Nombre moyen d'unités dans le système :

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^m n p_n = m \frac{1}{\psi} (1 - p_0)$$

4) - Le nombre moyen d'unités dans la file :

$$\bar{v} = \sum_{n=2}^m (n-1) p_n = m - \frac{1 + \psi}{\psi} (1 - p_0)$$

5) - La valeur moyenne de l'inactivité du service :

$$\bar{e} = \sum_{n=0}^m (1 - n) p_n = p_0$$

6) -- Nombre moyen d'unités qui ne sont pas dans le système :

$$(\overline{m - n}) = \sum_{n=0}^m (m - n) p_n = m - \bar{n}$$

$$(\overline{m - n}) = m - \frac{1}{\psi} (1 - p_0)$$

7) - Temps d'attente moyen dans la file :

$$\bar{U} = \frac{\bar{v}}{\lambda (m - \bar{n})} = \frac{1}{(m - \bar{n}) \lambda} \cdot \sum_{n=2}^m (n-1) \cdot p_n$$

$$\bar{U} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{m}{1 - p_0} - \frac{1 + \psi}{\psi} \right]$$

8) - Temps d'attente moyen dans le système :

$$\bar{W} = \frac{\bar{n}}{\lambda (m - \bar{n})} = \frac{m - \frac{1}{\psi} (1 - p_0)}{\mu \psi (m - \bar{n})}$$

$$\bar{W} = \frac{-1}{\mu} \times \left[ \frac{m}{1 - p_0} - \frac{1}{\psi} \right]$$

9) - Probabilité qu'il y ait attente :

$$p(>0) = \sum_{n=1}^m p_n = 1 - p_0$$

III - FILE A PLUSIEURS STATIONS ET CAPACITE FINIE

Ce cas est le général du précédent. Considérons une file du type M/M/S/L/FIFO.

Les équations d'état en régime permanent :

Posons :  $\lambda = \lambda / S$  et  $\lambda' = (m - n)\lambda'$  et  $\psi' = (m - n)\lambda' / \mu'$

$$\begin{cases} n = 0 & \left\{ \begin{array}{l} n \lambda \cdot p_0 = \mu' \cdot p_1 \\ \left[ (m-n) \lambda' + n \mu' \right] p_n = (m-n+1) \lambda' p_{n-1} + (n+1) \mu' p_{n+1} \\ \left[ (m-n) \lambda' + S \mu' \right] p_n = (m-n+1) \lambda' p_{n-1} + S \mu' p_{n+1} \\ n = m & \left\{ \begin{array}{l} S \mu' p_m = \lambda' \cdot p_{m-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases}$$

Les éléments caractéristiques.

1) - Probabilité que le système contienne n unités :

$$p_n = C_m^n \cdot \psi'^n \cdot p_0 \quad ; \quad 0 \leq n \leq S$$

avec

$$C_m^n = \frac{n!}{(m-n)!n!}$$

$$p_n = \frac{n!}{S! S^{n-s}} \cdot C_m^n \psi'^n \cdot p_0 \quad ; \quad s < n \leq m$$

2) - Probabilité pour qu'il n'y ait pas attente :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^s C_m^n \psi'^n + \sum_{n=s+1}^m \frac{n!}{S! S^{n-s}} C_m^n \psi'^n + \dots}$$

3) - Nombre moyen d'unités dans la file :

Remarquons que si  $n \leq S$ , il n'y a pas d'attente, elle ne manifeste que si  $n > S$

$$\bar{v} = \sum_{n=S+1}^{\infty} (n - s) p_n$$

$$= \frac{S^S \cdot p_0}{S!} \sum_{n=S+1}^{\infty} \frac{(n-s)n!}{S^n} \cdot C_m^n \psi'^n r$$

4) - Nombre moyen d'unités dans le système :

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^S n p_n + \sum_{n=S+1}^{\infty} n p_n$$

et remplaçons  $p_n$  par ses valeurs respectives pour  $n$  variant de 0 à  $S$  et de  $(S+1)$  à  $\infty$ .

5) - La valeur moyenne de l'inactivité du service :

$$\bar{e} = \sum_{n=0}^S (S - n) \cdot p_n$$

6) - Temps moyen d'attente dans la file :

$$\bar{U} = \frac{\bar{v}}{(n - \bar{n}) \lambda}$$

7) - Temps moyen d'attente dans le système

$$\bar{W} = \frac{\bar{n}}{\lambda (n - \bar{n})}$$

8) - Probabilité pour qu'il y ait attente :

$$p (> 0) = \sum_{n=S}^{\infty} p_n = \sum_{n=S}^{\infty} \frac{n!}{S! S^{n-S}} C_m^n \psi'^n p_0$$

IV - CONCLUSION :

Avec ces cas, on peut rencontrer d'autres problèmes en pratique comme les files en série ou les files cycliques. Les calculs des éléments sont difficiles à établir en théorie mais facile à manier. En pratique le problème devient plus complexe car on a pas toujours le droit de négliger, ou approximer, ou supposer. Cette complexité rend cette méthode analytique incapable de résoudre tous les problèmes réels, c'est pourquoi en cas de difficultés, on a recours aux méthodes de simulations, malgré qu'elles présentent des difficultés théoriques, leur utilisation en pratique est facile.

&§&

## LE TEST $\chi^2$ DE PEARSON.

Le test  $\chi^2$  est un test global qui porte sur l'ensemble des fréquences constituant une distribution observée et l'ensemble des fréquences théoriques calculées à partir de l'hypothèse qu'il s'agit de tester.

Autrement dit, le test  $\chi^2$ , qui sera décrit ci-dessous, permet d'ajuster une distribution observée qui est en fait la seule dont on dispose expérimentalement avec une des distributions théoriques qu'on connaît (binomiale, Poisson ou normal ---)

Soit  $n_1, n_2, \dots$  les effectifs (ou les fréquences) observées de chaque classe de la distribution observée

$$N = n_1 + n_2 + \dots$$

est la somme des effectifs observés.

Soit  $p_1, p_2, \dots$  les probabilités attribuées à chacune des classes par la distribution théorique avec laquelle on veut ajuster la distribution observée, et  $np_1, np_2, \dots$  sont les effectifs théoriques.

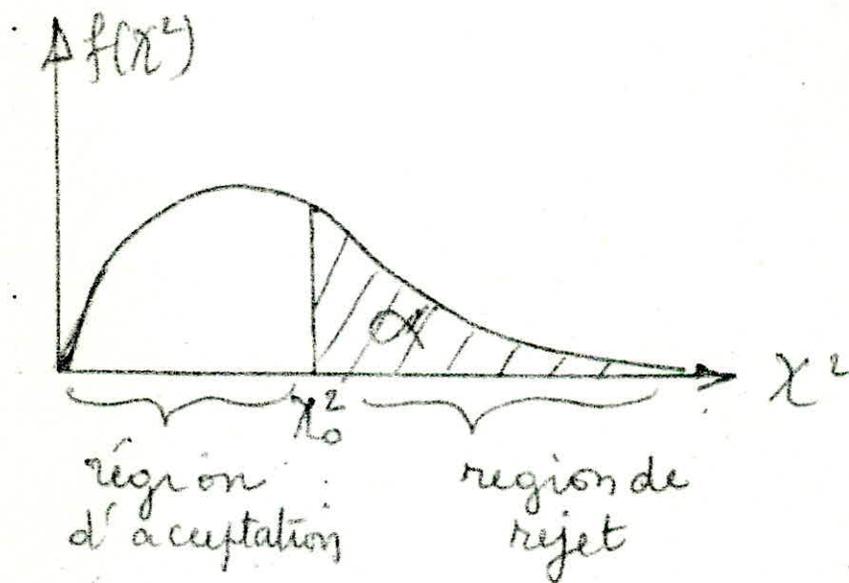
En général les effectifs observés ( $n_1, n_2, \dots$ ) sont un peu différents des effectifs théoriques ( $np_1, np_2, \dots$ ). Cette différence résulte des aléas de l'échantillonnage. La somme algébrique n'apporte aucun élément

intéressant, car elle est identiquement nulle. Comme pour le calcul de la variance, il est logique de penser à la somme de leurs carrés.

$\chi^2$  s'obtient en sommant les carrés de l'écart <sup>de chaque classe</sup> entre les effectifs observés et ceux de référence divisés par l'effectif théorique; c'est-à-dire =

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n_2 - np_2)^2}{np_2} + \dots = \sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

On démontre que  $\chi^2$  suit une loi de probabilité que se schématise ainsi =



Le test  $\chi^2$  s'effectue de la manière suivante =  
 — ayant déterminé les probabilités  $p_1, p_2, \dots$  que la distribution théorique attribue aux différentes classes et en connaissant d'autre part les effectifs observés, on calcule la quantité  $\chi^2$  définie ci-dessous =

Table de  $\chi^2$  -

$\nu \backslash \alpha$	0,05	0,02
1	3,84	5,41
2	5,99	7,82
3	7,82	9,83
4	9,49	11,66
5	11,07	13,38
6	12,59	15,03
7	14,07	14,62
8	15,51	18,16
9	16,92	19,67
10	18,31	21,06
11	19,68	22,61
12	21,03	24,05
13	22,36	25,47
14	23,68	26,87
15	25,00	28,25

- on calcule ensuite le nombre  $\nu$  appelé nombre de degré de liberté caractérisant la distribution de probabilité de  $\chi^2$ .

$$\nu = m - 1 - p$$

où  $m$  = nombre de classe.

$p$  = nombre de paramètres tirés de la distribution théorique de l'observation.

- Enfin, on se fixe un seuil de probabilité  $\alpha$ , (en général 5%). Ce seuil signifie : testant l'hypothèse du bon ajustement de la distribution observée à une certaine distribution théorique, on la rejette si les résultats observant cinq chances sur cent d'être obtenus lorsque cette hypothèse est vraie.  $\alpha$  est aussi le risque de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie.

- Connaissant  $\alpha$  et  $\nu$ , on lit sur la table la valeur de  $\chi^2$  correspondante, c'est-à-dire

$\chi_0^2$  Si  ~~$\chi^2$~~

- Si  $\chi^2$  calculée est inférieure à  $\chi_0^2$  lue sur la table, on accepte l'hypothèse du bon ajustement de la distribution observée à une distribution théorique connue. Dans le cas contraire on la rejette pour choisir une autre loi théorique.

Sur la ~~table~~ page suivante, la table de  $\chi^2$  pour  $\alpha = 5\%$  et  $\nu$  variant de 1 à 15.

**PARTIE II**

ÉTUDE  
DU PHÉNOMÈNE D'ATTÈNEZ  
DANS UNE USINE DE BETON.  
( Traduite du Roumain. )

ETUDE

DU PHENOMENE D'ATTENTE  
DANS UNE MOLE DU PORT

A - EXPOSE DU PROBLEME  
=====

I Origine du phénomène

Les transports maritimes appartiennent à la grande catégorie économique des services. Malgré qu'ils ne créent pas par eux mêmes des produits mais participent directement par leur activité à cette création. C'est pour être dans cette classification que parmi le grand public, le service maritime soit négligé, voire ignoré. Il faut admettre qu'une perturbation sinon une interruption du fonctionnement normal des transports maritimes dans le monde, engendrerait une régression de l'activité économique internationale.

Avec le développement économique mondial, le trafic maritime a connu une profonde évolution, surtout après l'apparition des armements modernes caractérisés par leur grande vitesse et leur capacité de tonnage ; et l'emploi de la technique de la conteneurisation (les marchandises sont mises dans un cadre parallélépipède rectangle à armatures métalliques et ayant des dimensions normalisées : 33 m, 66 m, 99 m de longueur)

Le principal instrument du trafic maritime est "le navire" qui est aussi la cause des signatures des contrats entre les armateurs (possédant l'instrument) et les chargeurs (voulant utiliser l'instrument pour leurs opérations).

Vu les divergences des intérêts, les armateurs et les chargeurs ne cessent de se livrer à une perpétuelle confrontation. Pour remédier à cela, on a installé des intermédiaires dont le rôle est indispensable dans une pareille situation, car les chargeurs (c'est à dire les clients du transport maritime : les sociétés nationales, les privés...) sont le plus souvent ignorants des pratiques maritimes, et les armateurs (c'est à dire les sociétés de transport maritime nationales ou étrangères) sont peu au courant des problèmes propres aux chargeurs.

Ces intermédiaires possédant une connaissance suffisante des problèmes des deux antagonistes sont en général des sociétés ou compagnies de navigation (Pour l'Algérie c'est la Compagnie Nationale Algérienne de Navigation : CNAN).

A côté des intérêts divergents, l'armateur et le chargeur convergent vers un point commun qui est la disposition d'un établissement portuaire bien équipé et bien organisé et qui peut assurer la sécurité du navire et le chargement et le déchargement dans les meilleurs délais. Cet établissement peut être la société nationale de manutention (SONAMA) et l'office national des ports (ONP). Le rôle de ces deux organismes est essentiellement l'aménagement des accès du port, accroître le nombre et les dimensions des postes à quai et augmenter le nombre et la puissance des engins de manutention.

.../...

## II Présentation du problème

Pour pouvoir définir le système à étudier, il faut l'analyser et déceler ses éléments caractéristiques, autrement dit, il faut en procéder à une micro-étude.

Un port est un établissement de capacité bien déterminée. Il accepte ou envoie des bateaux transportant des produits et des marchandises indispensables pour le déroulement normal des stocks des différentes sociétés et par suite pour le développement économique du pays.

Les bateaux arrivant ou sortant ont des jauges nettes (capacité utile) variant de cent tonneaux (un tonneau = 2,83 tonnes) à neuf mille tonneaux. Les navires sont de cinq types :

- 1) Navires classiques qui sont des cargots à manutention verticale.
- 2) Navires de type car-govin ou de type Roll-out Roll-off désignés pour la manutention horizontale.
  - Ces deux genres de navires sont spécialisés pour le transport des marchandises diverses.
- 3) Les paquebots destinés au transport des passages.
- 4) Les navires citernes pour le transport des liquides et des huiles
- 5) Des navires spéciaux pour le transport des minerais et des céréales.

Mais les produits et les marchandises, malgré leurs diversités peuvent être classées en trois grandes parties :

- 1) - les hydrocarbures : le pétrole et le gaz naturel
- 2) - les produits liquides : le vin, les huiles
- 3) - les marchandises en vrac : le fer, la houille, les céréales, le ciment, le bois et les marchandises diverses ( le tissu, des caisses...) et les produits alimentaires et chimiques.

Une fois accédés au port, les bateaux demandent à ce qu'ils soient servis dans les meilleures conditions et les plus brefs délais. Pour bien traiter ces navires, l'établissement doit disposer d'installations portuaires puissantes et être régi d'une bonne gestion.

## III Objectifs à atteindre

Ce sont ces deux thèmes "servir les bateaux dans les plus brefs délais" et "avoir une bonne gestion et des installations technologiques puissantes", qui constituent le problème crucial qui préoccupe les responsables du port.

.../...

C'est la conjugaison de ces deux phénomènes aléatoires qui sera l'origine de l'apparition d'un phénomène d'attente, autrement dit, du phénomène d'engorgement du port.

L'aspect aléatoire des arrivées et des services rend difficile le contrôle minutieux de toute l'activité portuaire. Ce qui va provoquer des attentes inutiles mais forcées des bateaux pour être servis ou l'inactivité momentanée du personnel et des installations. Comme ces attentes sont inévitables, elles peuvent être minimisées. Pour cela, il faut arriver à un compromis entre le coût occasionné par l'attente du navire et le coût associé de mise en oeuvre d'un dock.

Analysons maintenant les structures du centre de service.

Suivant la nature des marchandises et les produits opérés, on peut classer le centre de service en cinq classes qui, suivant leur importance et leur intensité, peuvent être subdivisées en un certain nombre de stations. Les stations, appelées "moles" possèdent un certain nombre de postes appelés des quais. Donc une mole est un ensemble, de postes à quai ayant mêmes caractéristiques.

Cette classification des structures du centre de service peut être schématisée ainsi :

- 1° Classe : Service des hydrocarbures
  - a) Station pour le pétrole
  - b) Station pour le gaz
  
- 2° Classe : Service des liquides et huiles
  - a) Station pour les vignobles
  - b) Station pour les huiles
  
- 3° Classe : Services spéciaux
  - a) Station pour le fer et le feraille
  - b) Station pour le charbon
  - c) Station pour les céréales
  - d) Station pour le ciment et le bois
  - e) Station pour les machines et matériel lourd
  
- 4° Classe : Service des marchandises diverses
  - a) Station pour le divers (ou marchandises de divers)
  - b) Station pour les produits alimentaires et chimiques
  
- 5° Classe : Service des passagers.

Comme nous ne disposons pas de toutes les données et informations nécessaires pour étudier le grand problème du port, nous nous sommes contentés de l'analyse de ses structures, mais nous allons essayer dans le cadre du possible d'étudier une des classes du port qui est la plus importante de point de vue intensité du trafic. Cette classe est le service des marchandises diverses, station du divers. Il sera possible, après avoir eu des résultats satisfaisants de l'étude de la quatrième classe, d'étendre la méthode aux autres classes.

Précisons alors, que nous allons étudier le problème qui se pose aux services des marchandises de divers.

Une partie des bateaux arrivant au port et transportant des marchandises diverses, se dirigent vers leur mole respective. Ces bateaux arrivent sans horaire déterminée à cette station.

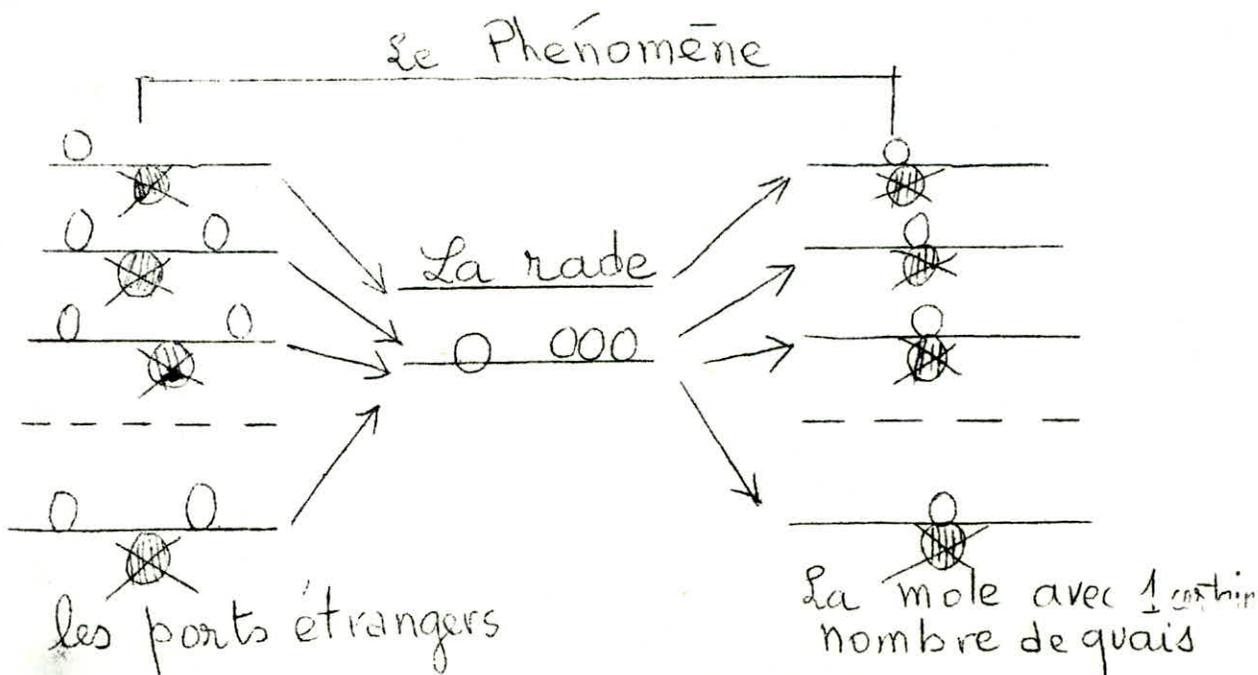
La station des marchandises de divers dispose d'un certain nombre de postes à quai équipés par un certain nombre de manutentionnaires et d'engins de manutention. Après avoir eu l'autorisation de la capitainerie du port pour accéder au port, le bateau se dirige vers un quai libre pour entarquer ou débarquer sa marchandise sinon il doit attendre à l'ancre son tour.

Comme la durée d'acconage d'un bateau est inconnue ou prévue, il va se former alors une file de bateaux qui attendent leur tour. Notre objectif est de minimiser cette attente qui coûte cher.

En somme, les unités qui arrivent aléatoirement sont les bateaux.

- le centre de service est les quais destinés à servir les navires.
- une partie des unités attendent à la rade leur tour. C'est la file d'attente.

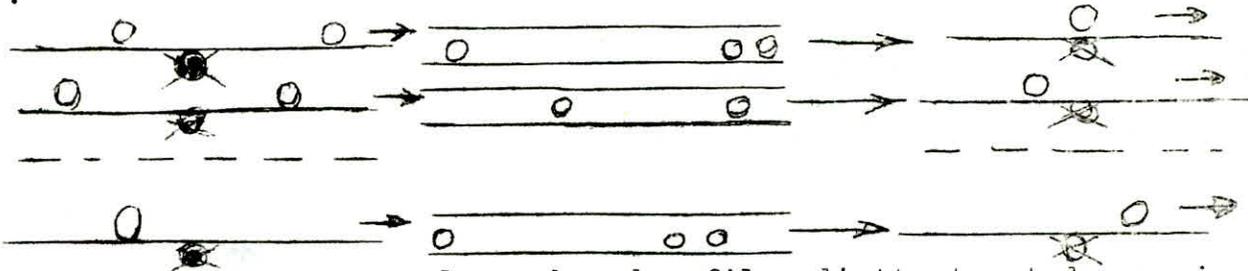
On peut alors schématiser le phénomène :



Pour faciliter l'étude, nous allons se poser quelques hypothèses :

- les quais ont le même taux de service.
- on peut répartir la file entre les quais et un bateau qui arrive est supposé de ranger dans une des files directement.
- en réalité, un bateau peut transporter au maximum deux types de marchandises, on va le supposer transporter un seul type de marchandises (on choisit le type le plus important en capacité)

En tenant compte de ces hypothèses, le schéma du phénomène devient ainsi :



Il faut remarquer que le nombre des files d'attente et des quais n'est pas infinis, mais nous ignorons encore le nombre.

Il faut noter que notre étude sera faite sur un système en régime stationnaire (durant quelques mois). Car des contraintes dépendantes et indépendantes (!) nous empêchent de la faire en régime permanent c'est à dire sur un intervalle de plusieurs années.

B - ORGANIGRAMME DU MODELE

Après avoir présenté et formulé le problème, nous allons dresser maintenant l'organigramme de l'étude :

- données et observations
- choix de l'unité de temps
- déterminer le taux moyen des arrivées et le taux moyen de service par suite le coefficient d'utilisation
- déterminer la loi de probabilité qui régie le rythme des arrivées et celui de la durée de service. Pour cela, il faut utiliser le test
- calcul des éléments caractéristiques du problème :

- 1) Coefficient d'utilisation

$$\psi = \lambda / \mu$$

- 2) La probabilité pour qu'il n'y ait pas d'attente

$$p_0 = \frac{1}{\frac{S! \psi^S}{S!(1-\psi)} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!}}$$

- 3) Le nombre moyen des bateaux qui attendent à l'ancre leur tour

$$\bar{v} = \frac{S! \psi^{S+1}}{S!(1-\psi)^2} \times p_0$$

- 4) Le nombre moyen des bateaux dans le port (ceux des marchandises diverses)

$$\bar{n}_L = \bar{v} + S \cdot \psi$$

- 5) Le nombre moyen des quais inoccupés

$$\bar{e} = (1 - \psi) S$$

- 6) Le temps moyen d'attente dans le port

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{\lambda}$$

- 7) Le temps moyen d'attente à l'ancre

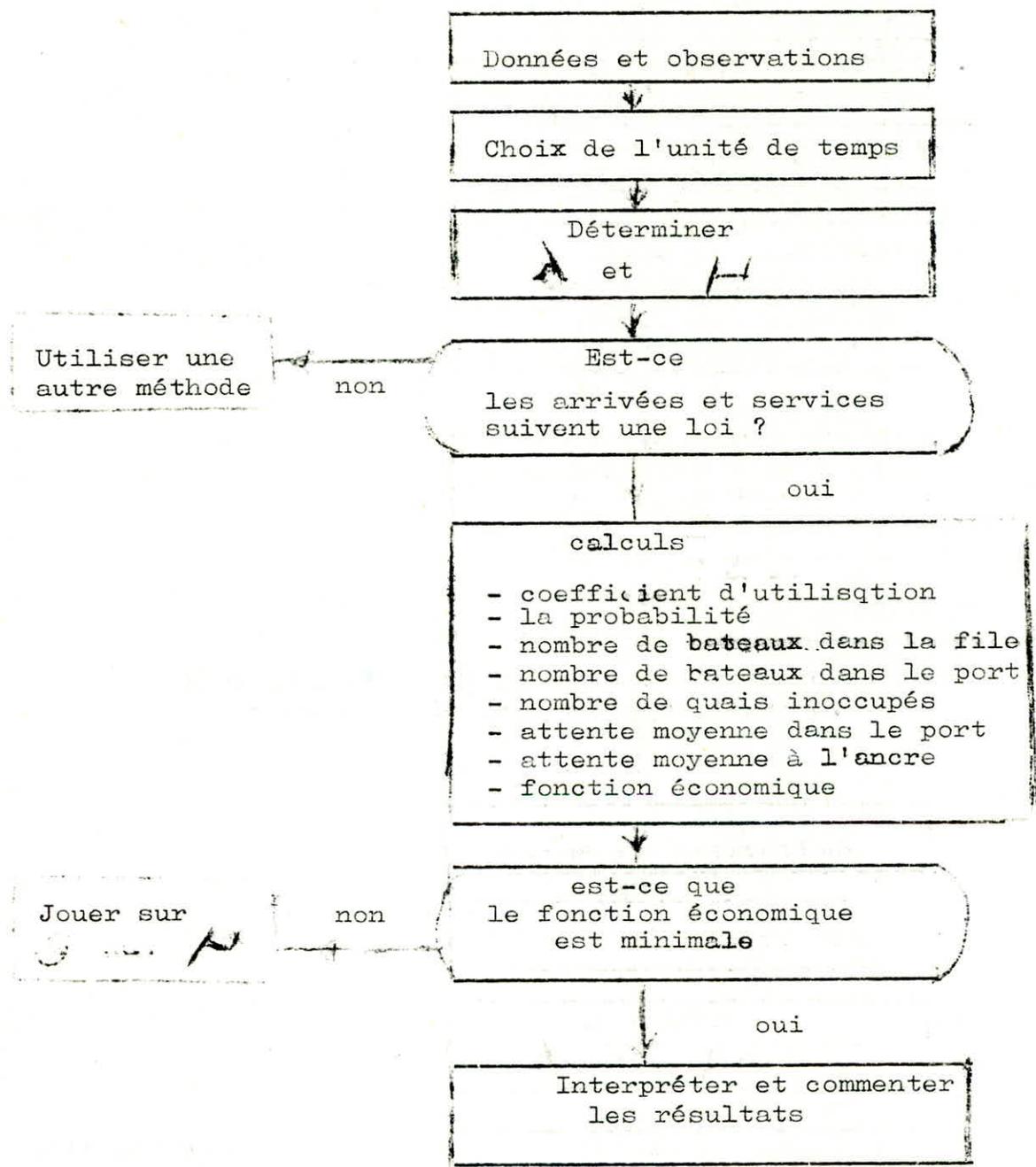
$$\bar{w} = \bar{v} / \lambda$$

- 8) Le coût total d'attente

$$P(S) = C_1 \times \bar{w} + C_2 \times \bar{e}$$

.../...

9) Optimisation du coût total d'attente en jouant sur le nombre de stations ou le taux moyen de service.



C - MESURES ET OBSERVATIONS

I INTERVALLE DE TEMPS

Des contraintes de temps et de travail nous ont obligé de choisir comme intervalle de temps, quatre mois, : janvier, février, mars, et avril de l'année 1974. A cause de la longueur des calculs nous nous limiterons dans une partie de l'étude à une durée de deux mois : janvier et février 1974.

II ARRIVEE DES BATEAUX

On a vu précédemment (on l'a trop répété même) que les arrivées au port par suite à la station des marchandises diverses ne sont pas connues donc aléatoires. Cet aspect aléatoire est dû aux plusieurs facteurs dont les importants sont :

- la grande distance parcourue
- les conditions atmosphériques durant le trajet
- l'état du navire
- le type de transport

a) le tramping (= vagabondage) : le navire faisant du tramping n'a aucun horaire, aucune route déterminés à l'avance, il va de port en port au gré des frêts qu'il a obtenu.

b) le trafic en ligne : il consiste à desservir sur une relation donnée un certain nombre de ports à intervalles de temps plus ou moins déterminés.

Les arrivées et les sorties des bateaux sont enregistrées à la capitainerie du port leur horaire d'arrivée et de sortie, leur jauge nette leur cargaison. Cet enregistrement nous permet d'observer indirectement les arrivées et les sorties des bateaux et nous permet aussi de gagner du temps.

III DUREE DE SERVICE

La durée d'acconage des bateaux est aussi aléatoire car elle dépend de l'importance de chargement et du déchargement de la cadence du service, des caractéristiques des engins de manutention, de l'encombrement du port du temps mort et de l'accostement des bateaux.

Il est vraiment difficile d'observer sur place la durée de service car une observation dure longtemps et cinquante observations durent au minimum un mois, si on sait que nous avons seulement trois à quatre mois pour préparer cette étude.

Comme il nous est difficile d'observer le rythme du service, on va essayer de le déterminer d'après les données qu'on dispose. On connaît la capacité et la nature des marchandises transportées et la célérité du service. Ces deux données nous permettent de déterminer la durée du service malgré qu'elle ne reflète pas exactement l'aspect aléatoire.

La durée d'un service est donnée par :

$$T = T_0 + K \times \frac{C}{v}$$

- ou
- $T_0$  = les temps morts
  - $K$  = coefficient qui dépend de la qualité de la marchandise et l'état du poste à quai
  - $c$  = capacité en tonne de la marchandise transportée
  - $v$  = célérité du service.

Il faut noter que pour bien observer la durée de service, il faut mettre dans chaque poste à quai un dispositif électrique enregistreur. Dès qu'un service commence, on enclenche pour déclencher ensuite à la fin du service. L'appareil enregistre alors la durée propre d'un certain nombre de services. Ensuite on en conclut les fréquences correspondantes à chaque jour.

#### IV DISCIPLINE D'ATTENTE

C'est la discipline de priorité qui est appliquée. Le bateau qui arrive le premier est servi le premier sauf cas exceptionnel. Dans notre cas, on considère que la règle d'attente, est FIFO : 1° arrivé, 1° servi.

#### V LES COUTS D'ATTENTE

##### 1) Coût d'attente des bateaux

Un bateau qui attend, occasionne un coût appelé "le surestaris" qui constitue les frais généraux et les frais d'équipage du navire.

Le surestaris dépend de plusieurs facteurs, les plus importants sont :

- le type du navire (grandeur, importance)
- les caractéristiques technologiques du navire
- l'importance du port

.../...

2) Coût occasionné par une opération navire

Notons qu'une opération navire est soit un chargement ou un déchargement soit les deux à la fois.

Une opération navire est effectuée par un ensemble de manutentionnaires et d'engins de levage. Donc une opération occasionne un coût qui dépend surtout de la célérité de l'acconage.

Ce coût englobe :

- les annuités d'amortissements et les charges d'exploitation des installations technologiques
- les salaires des manutentionnaires

Comme le service concerné n'a pas encore de comptabilité analytique, on n'a pas pu connaître la valeur exacte de ce coût. Pour avancer dans l'étude, on prendra un coût moyen.

D - DONNEES ET HYPOTHESES

\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*

I - LES ARRIVEES DES BATEAUX :

Nous allons dresser le tableau des arrivées journalières des bateaux pour le môle des marchandises diverses et celui des produits spéciaux. Avec ces arrivées, nous établissons les données concernant l'horaire des arrivées et les jauges nettes (qui seront des identificateurs des bateaux) et la capacité transportée avec la nature de la marchandise.

Dans un deuxième, nous allons établir les données concernant les arrivées pour le môle qui nous intéresse qui est celui des marchandises de divers.

Les arrivées journalières inscrites sur le 1er tableau (tableau général) sont celles des quatre premiers mois de l'année 1974 (Janvier - Février - Mars et Avril). Tandis que les données du deuxième tableau (sur lequel va se faire l'étude) sont des deux premiers mois de la même année.

A.3 - ARRIVEES AUX QUAIS DES MARCHANDISES  
EN VRAC

Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants	Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants
1	4	17	4
2	4	18	6
3	1	19	4
4	11	20	6
5	2	21	8
6	6	22	4
7	11	23	6
8	2	24	7
9	6	25	8
10	6	26	5
11	4	27	6
12	3	28	7
13	9	29	0
14	3	30	5
15	4	31	4
16	5		

.../...

A - Tableau général des arrivées aux  
quais de marchandises diverses et aux  
quais spéciaux -

A.1 - Mois de Janvier.

Jour d'arrivée	Nbre d'arrivées	Tonnes nette en tonnes	Durée de séjour en jours et heures	Capacité transportée en tonne -	heure d'arrivée	Nature de Marchandise	Nbre de Sorties
6	6	159	4j 12h	94	4h 15mn	Divers	3
		1534	4-22-	485	5h 30mn	Fer	
		837	4-12-	308	7h 30mn	Divers	
		2947	17-4-	2400	9h 00	Bois	
		1592	6-5-	1157	12h 30	Divers	
		2802	18-23	7610	15h -	Ciment	
7	11	2135	3j 12h	263	4h -	Divers	3
		994	1j 15h	450	5h 15	Bois	
		570	1-13-	651	5h 30	Divers	
		224	11h	507	5h 30	Divers	
		802	1j -	306	6h 30	-	
		1224	1j 15h	332	4h 30	-	
		1544	5-12-	1398	7h 30	-	
		814	1-8-	501	11h -	Prod. Alim	
		389	2-10-	238	7h -	Divers	
		2559	1-21	6300	16h 20	Produits chim	
		6275	23-	5800	18h 35	Céréales	

Jour d'arrivée	Nbre d'arrivée	Heure d'arrivée	Penge nette	Quantité de sejour	Capacité transporté	Nature de Marchandise	Nbre de sorties
8	2	6h20	298	10 heures	2986	Fer	4
		7h30	1544	1j 2h	1000	Divers	
9	6	0h15	250	4j 15h	335	Divers	3
		6h -	1731	4 - 12 -	618	Bois	
		6h50	181	3 - 10 -	339	Divers	
		6h	5102	23h	443	Divers	
		9h20	793	10j 13h	512	Pds alim	
		12h20	7170	10j 21h	5672	céréales	
10	6	5h -	4942	12 heures	457	Divers	5
		11h30	2387	1j 23h	2545	Bois	
		11h -	5758	13j 6h	1300	Pds aliment	
		11h30	2822	9j 6h	360	Divers	
		14h -	606	2j 2h	2750	Divers	
		15h -	3305	7j 5h	1694	Fer	
11	4	4h	355	17j 13h	340	Divers	2
		5h	927	8j 12h	820	Divers	
		5h30	1070	6j 4h	129	Divers	
		12h45	2066	1j 7h	1000	Houille	
12	3	4h30	707	1j 12h	184	Divers	3
		8h -	1710	11j 10h	2174	Fer	
		13h -	596	4 - 7 -	1630	Divers	
13	9	3h30	285	3j 12h	1025	Divers	5
		4h30	263	13h	244	Divers	
		9h45	278	5j 9h	734	Divers	
		1440	1070	3j 2h	455	Divers	

Jour d'arrivée	Nbre d'arriv	Heure d'arriv	Taupe nette (tonnes)	Durée de séjour (j et h)	Capacité en tonnes	Nature de la marchand	Nbre de sort
14	3	5h25	456	2j 15h	620	Pdts alim	0
		6h35	802	1j 13h	376	Divers	
		8h30	7408	3j 2h	17800	Céréales	
15	4	4h15	1224	4j 15h	886	Divers	4
		4h30	1236	14-13-	1875	Divers	
		11h50	374	2-6-	311	Divers	
		14h40	1099	3-4-	291	Divers	
16	5	7h30	905	5j 13h	1000	Pdts alim	6
		12h40	2066	1j -	2576	Fer	
		14h20	988	9h 5h	618	Fer	
		16h40	6227	9j 2h	17276	Céréales	
		21h30	340	1j 21h	285	Pdts alim	
17	4	6h -	695	5j 20h			4
		6h30	924	12-50-			
		13h -	4819	21heurs	123	Divers	
		13h30	6227	11j 19h	6000	Céréales	
18	6	4h30	390	4j 15h	436	Divers	4
		4h50	1688	20-15-	371	Divers	
		6h10	863	2-10-	924	Pdts alim	
		7h -	602	23j -	1250	Fer	
		20h25	421	5j 23h	979	Pdts alim	
		20h40	585	8-5-	503	Divers	

Jour d'arrivée	Nbre arrivant	Heure d'arrivée	Jauge nette (tonnes)	Durée de séjour	Capacité en tonnes	Nature de Marchandises	Nbre sortant
19	4	7h45	2723	1j 13h	250	Divers	6
		8h -	2748	8j 9h	490	Pds alim	
		11h10	225	11-10-	320	Divers	
		16h5	628	18-1-	1985	Bois	
20	6	9h -	1954	6j 2h	2305	Fer	2
		11h20	948	1-21-	802	Pds alim	
		16h30	767	13j -	460	Fer	
		15h20	285	3j 2h	1033	Fer	
		17h30	1500	13-22-	1950	Fer	
		19h -	903	6j -	339	Divers	
21	8	0h30	4367	11heures	315	Divers	2
		5h -	435	3j 6h	476	Fer -	
		5h15	628	20-12-	1350	Divers	
		5h40	224	1-13-	323	Divers	
		6h -	923	3-13-	1178	Pds alim	
		6h15	802	1-12-	539	Divers	
		14h30	1535	2-5-	100	Divers	
		18h40	2512	16-3-	4160	Bois	
22	4	2h30	1686	3j 15h	313	Divers	7
		11h -	699	3-7-	221	Divers	
		9h30	1966	12heures	12915	Céréales	
		15h45	246	3j 20h	5000	Céréales	
23	6	3h20	1513	7j 15h	2850	Ciment	6
		4h30	2434	10j 8h	642	Divers	
		6h10	570	15heures	436	Divers	

Jour d'arrivée	Nbre Arrivant	heure d'arrivée	Jauge nette (tonneau)	Unité de séjour	Capacité en tonne	Nature de Marchandise	Nbre Sorta-
24	7	<del>6h45</del>	456	11heures	198	Divers	4
		<del>11h25</del>	287	10j 5h	193	Divers	
		<del>14h-</del>	5375	10j 4h			
		4h30	814	1j 4h	550	Bois alim	
		7h20	3302	7j 24h	791	Divers	
		7h30	181	10heures	224	Fer	
		7h45	3307	13-15-	4670	Fer	
		10h20	1869	9-5-	2202	Houille	
		10h25	775	6-7-	655	Divers	
		18h45	313	6-19-	801	Divers	
25	8	1h30	1062	6j 13h	894	Divers	6
		7h-	204	2j 11h	680	Pdts alim	
		8h-	240	3-11-	930	Pdts alim	
		9h-	377	5-2-	292	Divers	
		10h30	1669	8-7-	1524	Bois	
		9h45	1413	12-7-	2700	Fer	
		19h25	863	5-1-	1300	Divers	
		20h45	1700	10-20	1054	Divers	
26	5	5h45	1341	4j 16h	2415	Bois	5
		8h30	278	1j 12h	220	Pdts chim	
		15h30	3176	10-17-	1346	Divers	
		17h30	7213	3-5-	998	Pdts chim	
		19h-	4227	16-15-	6000	Pdts chim	
27	6	<del>3</del> h30	904	5j 11h	100	Divers	2
		10h30	1867	5j 4h	419	Divers	

Jour d'arrivée	Nbre d'arrivées	heure d'arrivée	Tonnage nette (tonneau)	Durée de séjour	Capacité en tonne	Nature de marchandises	Nbre de Sortant
28	7	15h30	285	3j 6h	705	Divers	3
		15h40	1694	12-3-	650	Pdts chimiq	
		17h35	2002	15-	2562	Fer	
		18h10	635	16-3-	928	Divers	
		04h10	1533	2j	200	Divers	
		6h15	224	1j 12h	648	Divers	
		6h15	802	1j 13h	511	Divers	
		7h10	456	2j 12h	666	Divers	
		8h5	570	1j 11h	486	Divers	
		14h15	567	9j 5h	895	Divers	
14h10	8094	5j 17h	17056	Céréales			
29	0	—	—	—	—	6	
30	5	6h25	814	15 heures	375	Pdts alim.	10
		7h20	439	6j 9h	170	Divers	
		9h15	398	5j 10h	386	Divers	
		10h45	1070	6j 7h	1200	Divers	
		12h30	6542	1j 6h	433	Divers	
31	4	4h30	1418	24j 16h	5775	Pdts chim	4
		7h50	4102	19 heures	430	Pdts alim	
		9h30	2510	4j 1h	6845	Divers	
		9h40	2974	15-9-	7600	Ciment	

A. 2 - Mois de fevrier

Jour d'arrivée	Nbre d'arrivées	heure d'arrivée	Jauge nette (tonneaux)	Durée de Séjour	Capacité en tonne	Nature de Marchandise	Nbre de Sortant
1	11	5h -	5679	11j 14h	2800	Divers	5
		6h 50	278	9 heures	113	Divers	
		7h -	863	4j 13h	650	Fer	
		9h 15	345	6j 9h	1105	Polts alim	
		10h 10	1236	6 - 8 -	1760	Fer	
		10h 55	800	4 - 5 -	57	Divers	
		10h 25	6228	3 - 19 -	910	Divers	
		13h 20	3400	4j	174	Divers	
		14h 25	7188	22h	1102	Divers	
		16h 20	181	1j 1h	2278	Houille	
		21h	1070	8j 21h	283	Divers	
2	3	6h 45	5766	19j	4000	céréales	6
		7h 15	877	2j	198	Divers	
		15h 10	290	11j	2000	Ciment	
3	1	18h -	8514	14 heures	347	Divers	2
4	8	5h	224	1j 14h	688	Divers	5
		5h 30	802	2 - 14 -	621	Divers	
		5h 10	865	1 - 9 -	541	Divers	
		6h 30	435	3 - 6 -	345	Polts alim	
		6h 45	249	10 heures	286	Divers	
		9h 25	570	2j 10h	<del>7070</del>	Divers	
		11h 45	2652	10 - 6 -	2120	Divers	
		23h 30	814	1 - 20 -	683 -	Divers Polts alim	

Jour d'arrivée	Nbe d'Arrivée	Heure d'Arrivée	Jauge Nette (tonneau)	Durée de Séjour	Capacité en tonne	Nature de Marchandise	Nbre de Sortant
5	0	-	-	-	-	-	6
6	5	6h10	5679	15j11h	4300	Céréales	7
		9h45	1477	7-11-	1700	Fer.	
		12h-	4678	1-7-	200	Divers	
		13h45	3305	9-3-	4287	Céréales	
		15h	181	2-4-	365	Divers	
7	7	6h	1050	2j3h	727	Divers	5
		8h25	2066	2-22-	1900	Divers	
		8h30	2016	11-9-	945	Bois	
		12h40	585	9-9-	618	Bois	
		13h45	742	5-3-	1000	Produits alim	
		16h45	3306	10j	4027	Fer.	
		17h30	229	9j	744	Produits alim	
8	4	5h45	1346	7j10h	1170	Produits alim	2
		6h40	329	5-11-	456	Divers	
		11h15	9113	11-5-	5000	Céréales	
		21h50	4997	10-19-	872	Divers	
9	2	0h30	1174	5j17h	973	Divers	3
		9h	863	11h-	292	Divers	
10	7	11h30	1809	13j3h	1703	Produits alim	2
		6h30	779	7hemes	57	Divers	
		7h	545	3j12h	180	Divers	
		12h45	2948	20j6h	7735	Ciment	
		15h10	435	1-3-	115	Divers	
		16h30	1815	3-3-	250	Divers	

Jour d'Arrivée	heure d'Arrivée	Nbre d'Arrivée	Touze nette	Durée de Séjour	Capacité en (tonne)	Nature de Marchandise	Nbre de Sortie
		18h20	341	6j	1198	Fer	
11	10	5h15	1950	9j 11h	1705	Produits alim	4
		3h40	814	3-8-	422	céréales	
		5h20	224	1-14-	804	Produits alim	
		6h15	398	5-10-	421	Divers	
		8h-	216	12-4-	222	Divers	
		8h5-	278	1-12-	362	Divers	
		9h30	7188	1-3-	245	Divers	
		10h-	1552	1-5-	328	Produits chim	
		16h-	570	4-2-	439	Produits chim	
		17h-	6123	4-21-	350	Divers	
12	6	6h15	865	1j 13h	355	Divers	9
		7h10	1039	8-11-	3800	Divers	
		7h35	1947	6-12-	2555	Houille	
		7h20	4115	13h-	436	Produits alim-	
		8h20	7011	11j 10h	1644	Divers	
		15h50	240	1j -	286	Divers	
13	4	10h55	195	4j -	300	Produits alim	7
		9h50	214	3j 8h	1000	Produits alim	
		16h25	570	3-4-	929	Divers	
		20h-	299	1j 5h	1009	Divers	
14	2	20h	439	2j -	750	Divers	3
		21h15	5145	15j -	15000	Céréales	

Jauge d'Arrivée	Nbre d'Arrivées	heure d'Arrivée	Jauge nette	durée de Séjour	Capacité en tonne	Nature de Marchandises	Nbre de Sortie
15	3	11h_	1724	1j 8h	225	Divers	5
		17h30	4367	1-4-	6	Divers	
		23h_	2953	24j -	1900	Divers	
16	8	0h10	2396	4j 19h	218	Bois	9
		4h30	3101	7-19-	869	Edts alim	
		7h_	1229	3-9-	390	Houille	
		7h55	2462	10-9-	308	Divers	
		10h20	260	8j	115	Divers	
		14h40	1138	4j 20h	1430	Bois	
		20h10	518	11-14-	1309	Fer -	
		18h50	1815	7j	1515	Divers	
17	2	17h20	1988	9j 21h	2180	Divers	3
		22h45	1526	8-19-	3164	Divers	
18	4	5h10	1160	1j 14h	921	Divers	2
		5h30	224	2-14-	938	Fer	
		7h_	285	2-7-	272	Divers	
		8h_	278	2 -	126	Divers	
19	3	0h25	1162	4j 19h	3450	Houille	2
		2h40	1070	2j 16h	430	Divers	
		20h30	287	6j -	289	Divers	
20	6	5h40	814	1j 15h	495	Pds alim	5
		6h20	162	3-13-	588	Edts Alim	
		7h20	1533	3-77-	530	Divers	
		16h50	181	3-21-	470	Divers	

Jauge d'arrivée	Nbre d' Arrivée	heure d' Arrivée	Jauge Nette -	Durée de Sejour	Capacité en tonne	Nature de Marchandise	Nbre de Sortie
		20h15	1934	11j23h	4200	Ciment	
		22h20	863	3j21h	170	Divers	
21	8	10h10	5679	7j5h	2915	Fer -	4
		10h20	684	7-10-	436	Divers	
		13h5	1869	9-7-	2899	<del>FER</del>	
		14h-	5318	13-7-	6408	Bois	
		14h25	1586	2-7-	346	Divers	
		15h-	7188	1-19-	229	Divers	
		20h55	229	6-23-	132	Divers	
		23h	379	7-13-	767	Fer	
22	9	5h-	7115	6j7h	764	Divers	1
		6h-	863	1-12-	259	Divers	
		6h20	499	3-15-	780	Divers	
		6h45	570	5-12-	893	Divers	
		8h15	7998	11-11-	2943	Fer -	
		9h40	207	5-6-	805	Edts alim	
		11h-	1284	9heurs	2	Divers	
		15h55	1516	1j -	2093	Divers	
		19h40	181	6j14h	154	Divers	
23	5	4h25	1241	8j5h	400	Divers	11
		5h40	398	4-15-	432	Divers	
		7h05	327	10-13-	1034	Edts alim	
		8h55	246	2-11-	319	Edts alim	
		15h45	317	4-2-	281	Divers	
24	3	11h25	1070	4j6h	669	Divers	2
		16h20	1318	7-4-	2700	Bois	
		22h30	1867	10-18-	1711	Divers	

Jour d'Arrivée	Nbre d'Arrivée	heure d'Arrivée	Touge nette (tonnes)	Durée de Séjour	capacité en tonne	Nature de Marchandise	Nbre de Sortie
25	4	6h30	278	1j15h	308	Divers	3
		9h15	1592	11-7-	1850	Divers	
		11h45	3393	1-6-	75	Divers	
		16h20	435	2-1-	254	Divers	
26	4	6h20	256	5j9h	1025	Pots alim	4
		7h10	628	8-7-	1197	Divers	
		8h15	2547	4j	522	Houille	
		12h10	1099	8j5h	534	Divers	
27	5	0h25	3307	8j19h	3708	Divers	5
		6h30	812	5-11-	738	Divers	
		6h30	814	1-8-	469	Pots chim	
		6h40	4102	14heures	436	Pots alim	
		9h10	285	1j5h	323	Divers	
28	6	5h30	439	2j14h	412	Divers	7
		6h	181	1-8-	412	Divers	
		6h30	224	1-13-	680	Divers	
		10h20	323	2j -	150	Divers	
		12h15	443	9j7h	1000	Divers	
		14h30	1032	18-21-	2945	Divers	

A.4 - SORTIES DES QUAIS DES MARCHANDISES

EN VRAC

MOIS DE JANVIER

Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants	Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants
1	0	17	4
2	5	18	4
3	7	19	6
4	2	20	2
5	2	21	2
6	3	22	7
7	3	23	6
8	4	24	4
9	3	25	6
10	5	26	5
11	2	27	2
12	3	28	3
13	5	29	6
14	0	30	10
15	4	31	4
16	6		

A.5 - ARRIVEES AUX QUAIS DES MARCHANDISES

EN VRAC

MOIS DE FEVRIER

Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants	Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants
1	11	15	3
2	3	16	8
3	1	17	2
4	8	18	4
5	0	19	3
6	5	20	6
7	7	21	9
8	4	22	9
9	2	23	5
10	7	24	3
11	10	25	4
12	6	26	4
13	4	27	5
14	2	28	6

A.6 - SORTIES DES QUAIS DES MARCHANDISES  
EN VRAC

MOIS DE FEVRIER

Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants	Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants
1	5	15	5
2	6	16	9
3	2	17	3
4	5	18	2
5	6	19	2
6	7	20	5
7	5	21	4
8	2	22	1
9	3	23	11
10	2	24	2
11	4	25	3
12	9	26	4
13	7	27	5
14	3	28	7

A.7 - ARRIVEES DU MOIS DE MARS  
(POUR LES QUAIS DES MARCHANDISES EN VRAC)

Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants	Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants
1	2	17	3
2	6	18	6
3	3	19	4
4	10	20	7
5	2	21	7
6	1	22	3
7	3	23	6
8	8	24	2
9	5	25	6
10	7	26	2
11	8	27	5
12	9	28	2
13	3	29	7
14	7	30	5
15	6	31	9
16	4		

- 94 -  
 A.8 - SORTIE DES QUAIS DES MARCHANDISES

EN VRAC

MOIS DE MARS

Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants	Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants
1	3	17	3
2	5	18	2
3	6	19	8
4	4	20	7
5	8	21	8
6	7	22	4
7	6	23	5
8	10	24	3
9	4	25	2
10	1	26	5
11	7	27	9
12	5	28	4
13	8	29	0
14	5	30	1
15	3	31	1
16	7		

A.9 - ARRIVEES AUX QUAIS DES MARCHANDISES

EN VRAC

MOIS D'AVRIL

Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants	Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants
1	1	16	4
2	1	17	4
3	3	18	4
4	9	19	2
5	8	20	2
6	3	21	0
7	8	22	5
8	4	23	4
9	4	24	4
10	2	25	7
11	5	26	1
12	4	27	2
13	6	28	0
14	6	29	9
15	8	30	6

A.10 - SORTIE DES QUAIS DES MARCHANDISES  
EN VRAC

MOIS D'AVRIL

Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants	Jour de sortie	Nombre de bateaux sortants
1	5	16	11
2	7	17	11
3	2	18	4
4	6	19	2
5	5	20	5
6	5	21	2
7	1	22	1
8	2	23	3
9	6	24	8
10	7	25	5
11	7	26	4
12	6	27	7
13	6	28	1
14	7	29	3
15	4	30	8

B.1 - TABLEAU DEDUIT DU TABLEAU GENERAL  
DONNANT LES ARRIVEES JOURNALIERES  
DES BATEAUX AU QUA I DE DIVERS

MOIS DE JANVIER

Jour d'arrivée	Nombre des bateaux arrivants	Jour d'arrivée	Nombre des bateaux arrivants
6	3	19	2
7	7	20	1
8	1	21	5
9	3	22	2
10	2	23	4
11	3	24	3
12	2	25	4
13	8	26	1
14	1	27	4
15	4	28	6
16	0	29	0
17	1	30	4
18	3	31	1

$\chi^2$  est calculé, on doit la comparer à  $\chi_0^2$  donnée par la table de  $\chi^2$  de Pearson.

$\chi_0^2$  est caractérisée par les paramètres  $\langle \nu \rangle$  et  $\langle \alpha \rangle$ .

$$\nu = m - 1 - p$$

où  $m =$  nombre de classes  $= 9$

$p =$  nombre de paramètres de la loi théorique tirés de l'observation. Dans notre cas, on a tiré que (AT) la moyenne qui est égal à 3 arrivées / jour; donc  $p = 1$

$$\text{et } \nu = 9 - 1 - 1 = 7$$

Fixons  $\alpha = 5\% = 0,05 =$  le risque d'accepter l'hypothèse que la loi observée est ajustée à la loi de Poisson, alors qu'elle est fautive -

sur la table de  $\chi_0^2$ , on lit pour  $\nu = 7$  et

$$\alpha = 0,05, \chi_0^2 = 14,07$$

$$\text{et } \chi^2 \text{ calculée} = 7,567$$

En conclusion: <sup>comme</sup>  $\chi^2 < \chi_0^2$ , on accepte l'hypothèse que la loi des arrivées est celle de <Poisson> avec un risque, qu'elle soit fautive. ~~de 5~~  
de 5%

Avec 54 jours d'observations, les calculs ont été faisable à la main. Si le nombre d'observations est beaucoup plus grand, on aura des longs calculs à faire. Pour gagner du temps, on les fera par l'intermédiaire de ~~de~~ l'ordinateur.

Sur les deux pages qui suivent, on a dressé l'organigramme du test  $\chi^2$ , puis on l'a traduit sous forme d'un programme Fortran qui sera traité par l'ordinateur.

L'ordinateur a donné comme résultat :

$\chi^2 = 5,95 < \chi_0^2 = 14,07$ ; et l'hypothèse reste toujours acceptée.

Pour expliquer la différence entre  $\chi^2$  calculée à la main ( $\chi^2 = 7,567$ ) et celle calculée par l'ordinateur ( $\chi^2 = 5,95$ ), il faut noter que cela est dû à l'interpolation faite en lisant ~~la~~ sur la table de Poisson les valeurs de  $p_i$  et en supposant que les petites variations de la loi sont linéaires.

DEBUT.

DONNEES:  
FOB(I) : fréquences observées  
A(I) : classes  
 $I = 1, M ; \chi^2_0$

SOM = 0,  
SAM = 0.

I = 1

SOM = SOM + A(I)  
SAM = SAM + FOB(I) \* A(I)

I > M

NON

I = I + 1

OUI

$\lambda = \text{SAM} / \text{SOM}$

I = 1

$\text{FTH}(I) = \text{SOM} * \text{EXP}(-\lambda) * \lambda^{**}I / I!$

B

A

Classes	Fréquences observées $n_i$	$p_i$ (loi pois)	Fréquences théoriques $n p_i$	Différence $n_i - n p_i$	$(\text{Diff})^2$ $(n_i - n p_i)$	$\frac{(\text{Diff})^2}{n p_i}$	$\chi^2$
0	3	0.058	3.2	0.2	0.04	0.012	$\chi^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i} = 7.567$
1	9	0.166	9.29	0.29	0.08	0.031	
2	12	0.233	12.8	0.8	0.64	0.050	
3	12	0.221	12.32	0.32	0.10	0.009	
4	9	0.158	8.84	0.16	0.025	0.007	
5	2	0.091	5.09	3.09	9	1.800	
6	3	0.044	2.46	0.54	0.29	0.118	
7	3	0.017	0.95	2.05	4	4.210	
8	1	0.006	0.33	0.67	0.44	1.330	

Classe: <del>1-8</del> $i = 1, \dots, m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
fréquences observées: $n_i$	3	9	12	12	9	2	3	3	1
Moyenne $i \times n_i$	0	9	24	36	36	10	18	21	8
Total des arrivées	<del>151</del> 162 bateaux								
Total des jours d'observations	54 jours								
$\lambda$	$162 / 54 = 3$ arrivées/jour								

Connaissant le taux moyen  $\lambda$  des arrivées, on peut dresser le tableau permettant de calculer la quantité  $X^2$ .

si la loi observée se rapproche à une loi théorique  $\chi^2$   
Posons l'hypothèse que la loi théorique est la loi de  
Poisson dont la formule =

$$p_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} \times e^{-\lambda t}$$

où  $(\lambda t)$  est la moyenne de la loi  
et  $\lambda$  est le taux moyen des arrivées

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

où  $m$  = nombre de classes

$n_i$  = fréquences observées pour la classe  $i$   
( $i = 1, \dots, m$ )

$n$  = fréquences observées pour les  $m$  classes.  
 $n = \sum_{i=1}^m n_i$

$n p_i$  = fréquences théoriques qu'assigne la loi  
de Poisson aux  $m$  classes.

b) - Calcul du taux moyen des arrivées =

## E - Loi de distribution des arrivées des bateaux et de la durée de service -

Comme il nous est impossible de prévoir les arrivées et la durée d'opération des bateaux, mais il est possible de déterminer leur loi de probabilité qui caractérise leur aspect aléatoire. Utilisant les tableaux (B1, B2) et (D1, D2) des fréquences des arrivées et de durée d'accoupage des bateaux pour déterminer la loi de distribution de ces deux phénomènes aléatoires - Pour cela, utilisons le critérium  $\chi^2$  de Pearson qui déjà décrit dans la partie théorique -

### I - Loi de distribution des arrivées =

~~a) Hypothèses~~  
Sur les tableaux B1 et B2 (page ), on a relevé durant 54 jours successifs les arrivées des bateaux aux quais de marchandises diverses le nombre de bateaux arrivants durant chaque jour. L'emploi du test  $\chi^2$  nous permet de vérifier

Jour d'arrivée	Nombre de bateaux arrivants	Jour d'arrivée.	Nombre de bateaux arrivants
1	7	15	3
2	1	16	3
3	1	17	2
4	6	18	3
5	0	19	2
6	2	20	3
7	2	21	4
8	2	22	7
9	2	23	3
10	4	24	2
11	5	25	4
12	4	26	5
13	2	27	1
14	1	28	6

II - DUREE DE SERVICE :

Comme on l'a dit au chapitre "Mesures et Observations", il nous n'est pas possible d'avoir des données précises en ce qui concerne les durées des opérations - navire. Nous allons essayer de les déterminer d'après les données qu'on dispose. La seule donnée qui nous permet d'avoir la durée de service, est la capacité en tonne des marchandises opérées, c'est-à-dire le tonnage. Malgré que le procédé utilisé pour la détermination du rythme du service, ne reflète pas fidèlement l'aspect aléatoire mais il nous suffit pour dire que le rythme du service est exponentiel.

Nous exposons ci-dessous le procédé (qui laisse à désirer, mais il est d'après moi le seul dans une situation pareille) utilisé pour déterminer le rythme du service.

Notons au début qu'une opération-navire est, soit un chargement ou un déchargement soit les deux à la fois.

D'après les responsables de manutention, le port peut effectuer trente (30) opérations-navire par jour.

Pour les mois de Janvier et Février, on a relevé pour les opérations des marchandises en vrac :

Comparons la valeur observée de  $\chi^2$  à la valeur théorique donnée par la table de  $\chi^2$ .

Pour lire  $\chi^2$  sur la table, il faut déterminer comme on l'a précisé auparavant les paramètres ( $v$  et  $\alpha$ ).

or

$$\begin{aligned}v &= m - 1 - p \\ &= 13 - 1 - 1 = 11\end{aligned}$$

$$\alpha = 5\% = 0.05$$

Sur la table on lit pour  $v=11$  et  $\alpha = 0.05$

$$\left. \begin{array}{l} \chi^2_c = 19.68 \\ \chi^2 = 17.85 \end{array} \right\} \Rightarrow \chi^2 < \chi^2_c$$

En conclusion : on accepte l'hypothèse que la loi de distribution des services est celle de poisson avec un risque de 5% qu'elle soit fausse. Ayant la loi des arrivées avec un taux moyen de 3 arrivées/jour et la loi des services avec un taux moyen de 60 services/jour, nous pouvons utiliser la méthode analytique pour calculer les éléments caractéristiques du problème. En ce qui concerne l'organigramme FORTRA pour déterminer la loi des services sont identiques à ceux faits pour les arrivées avec un changement des données (exemple : le nombre des classes, les fréquences observées, le taux moyen...).

Classes i	Fréquences observées $n_i$	$P_i$ (loi poisson)	Fréquences théoriques $n \times p_i$	Différences $n_i - np_i$	$(\text{Diff})^2$ $(n_i - p_i)^2$	$\frac{(\text{Diff})^2}{n \cdot p_i}$	$\chi^2$
1	2	0.014	0.75	1.25	1.56	2	$\chi^2 = \frac{\sum \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \times p_i}}{1} = 17.85$
2	6	0.044	2.37	3.63	13.17	5.5	
3	4	0.086	4.80	0.8	0.64	0.15	
4	9	0.133	7.18	1.82	2.63	0.36	
5	5	0.160	8.64	3.64	15.24	1.76	
6	5	0.160	8.64	3.64	15.24	1.76	
7	4	0.137	7.50	3.5	12.25	1.63	
8	2	0.103	5.56	3.56	12.30	2.2	
9	3	0.068	3.67	0.67	0.44	0.12	
10	1	0.041	2.21	0.21	0.04	0.01	
11	1	0.022	1.18	0.18	0.032	0.02	
12	1	0.011	0.59	0.51	0.26	0.44	
13	1	0.005	0.27	0.73	0.53	1.9	
n	54						

Ci-dessous le tableau des opérations journalières qui sont effectuées pour les mois de Janvier et Février, avec les totaux des capacités à opérer pour chaque jour des deux mois.

Avec les tableaux précédents, nous allons déterminer avec quelques approximations la loi de distribution des nombres des opérations (cette loi ne sera pas la vraie, car on dispose pas d'assez d'observations). Pour cela, nous allons procéder, comme on l'a fait pour déterminer la loi des arrivées, à l'aide du critérium  $\chi^2$  de Pearson.

Notons que la station des marchandises de divers a la possibilité d'exécuter 15 à 20 (au maximum) opérations-navires.

Calculons tout d'abord, le taux moyen des opérations-navires par unité de temps choisi. Pour avoir la même unité de temps que celle des arrivées, on prend : une journée

a) - Taux moyen des opérations-navires

- Notons que nous allons prendre que les jours dont le nombre des opérations varie de 1 à 13, pour supérieur à 13, on prend 15.

- Prenons le nombre exact de jours c'est-à-dire 54 jours (malgré qu'en faisant la somme on aura 48)

Classes $i = 1 \dots 13$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
Fréquences observées $n_i$	2	6	4	9	5	5	4	2	3	1	1	1	1	5
moyenne $i \times n_i$	2	12	12	36	25	30	28	16	27	10	11	12	13	75
Total des opérations et jours.	3			2		9		5		4		J O U R S		
	$329/54 = 6.09 = 6 \text{ opérations/jour}$													

Connaissant alors le taux moyen de service par jour, on peut dresser le tableau permettant de calculer  $\chi^2$

En premier temps, nous avons supposé que la loi théorique des services est exponentielle. Le test  $\chi^2$  nous a montré que la loi observée ne peut être ajustée à une loi exponentielle.

Nous allons poser maintenant l'hypothèse que la loi théorique des services est poissonnienne. Testons avec le critérium  $\chi^2$  la validité de cet ajustement.

Le calcul de  $\chi^2$  est explicite sur le tableau suivant.

NOMBRE D'OPERATIONS  
JOURNALIERES DU MOIS DE FEVRIER

JOURS	capacité totale des bateaux (en tonne)	nombre d'opérations	JOURS	capacité totale des bateaux (en tonne)	nombre d'opérations
1	5439	18,13	21	1143	3,81
2	198	0,66	22	4345	14,48
3	347	1,15	23	1113	3,71
4	2819	9,39	24	2380	7,93
5	0	0	25	<del>2487</del>	<del>8,29</del>
6	565	1,88	26	1731	5,77
7	2627	8,75	27	4769	15,98
8	1328	3,32	28	5649	18,83
9	1265	4,21			
10	602	2			
11	1900	6,33			
12	5085	20,28			
13	1938	6,46			
14	750	2,50			
15	2131	7,10			
16	1938	6,48			
17	6344	21,13			
18	1319	4,39			
19	719	2,39			
20	1970	3,90			

NOMBRE D'OPERATIONS  
JOURNALIERES DU MOIS DE JANVIER

JOURS	capacité totale des bateaux (en tonne)	nombre d'opérations	JOURS	capacité totale des bateaux (en tonne)	nombre d'opérations
6	1559	5,19	26	1346	4,48
7	3695	12,3	27	2152	7,17
8	1000	3,33	28	3406	11,3
9	1317	4,39	29	0	0
10	3567	1,19	30	2229	7,43
11	1289	4,29	31	6845	22,81
12	1814	6,04			
13	4674	15,8			
14	376	1,25			
15	1488	4,96			
16	0	0			
17	123	0,40			
18	4655	15,5			
19	570	1,9			
20	339	1,13			
21	2627	8,75			
22	534	1,76			
23	1469	3,89			
24	2247	7,49			
25	2646	4,82			

On peut procéder autrement pour tester l'hypothèse. On trace les courbes des probabilités en fonction des classes d'observations des arrivées.

La probabilité observée pour qu'il y ait  $i$  arrivées est égale à la fréquence observée de la classe " $i$ " divisée par la somme des fréquences observées. On calcule de la même manière les probabilités théoriques.

Le tableau des probabilités observées et théoriques pour les différentes classes est :

classes " $i$ "	0	1	2	3	4	5	6	7	8
probabilités observées	0.05	0.16	0.21	0.21	0.16	0.05	0.035	0.05	0.018
probabilités théoriques	0.058	0.160	0.233	0.221	0.158	0.091	0.044	0.017	0.006

Ce tableau nous permet de tracer les deux courbes observées et théoriques. On constate que la courbe observée ne diffère pas beaucoup de la courbe théorique qui est un fait la courbe de Poisson. Cette constatation nous amène à considérer que la courbe observée est une courbe de poisson.

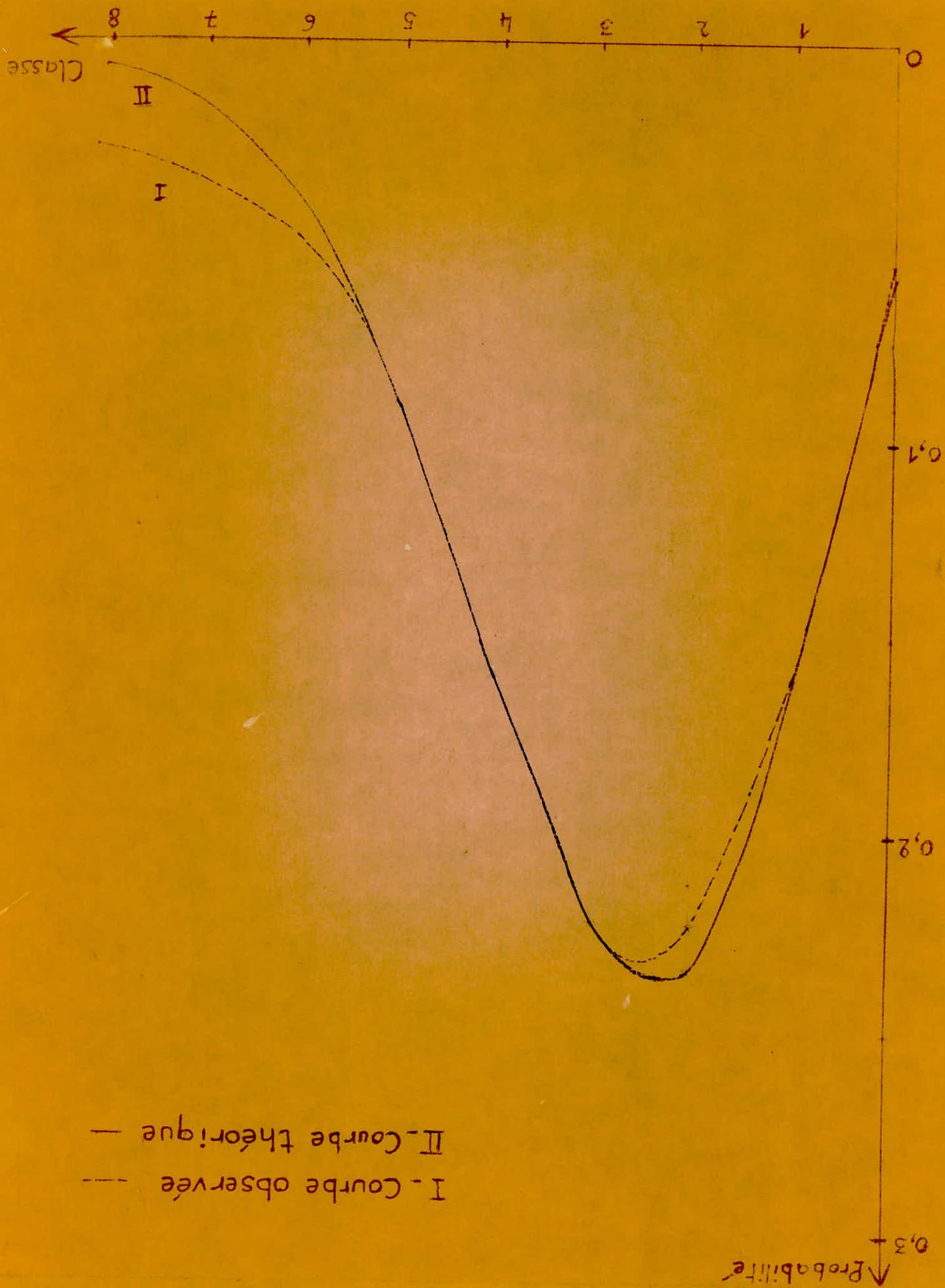
## II - DUREE DE SERVICE

Comme on l'a dit au chapitre "Mesures et Observations", il nous est impossible d'avoir des données précises en ce qui concerne les durées des opérations. Cette contrainte ne nous empêche pas de les déterminer (grossièrement peut-être) d'après les données qu'on dispose. La seule donnée qui peut nous renseigner sur la durée de service, dans notre cas, est la capacité en tonne des marchandises opérées chaque jour. Malgré que ce procédé utilisé ne reflète pas convenablement l'aspect aléatoire des durées de service, mais il est suffisant pour tester si le rythme est exponentiel ou poissonien.

Notons tout d'abord qu'une opération navire est soit un déchargement ou un chargement soit les deux à la fois.

D'après les responsables de manutention, une opération navire porte en moyenne sur un tonnage de 300 tonnes (valeur absorbée)

Cette donnée nous permet d'obtenir le nombre moyen d'opérations effectuées chaque jour. Ce nombre est aléatoire (il dépend de l'état de fonctionnement des installations de manutention et du dynamisme des employés....). On détermine alors la loi de distribution du nombre des opérations-navire, autrement dit la loi de probabilité de la durée de service, par suite le taux moyen de service par jour.



Le tableau des résultats obtenus après le passage du programme par l'ordinateur est :

Classes	Fréquences observées	Fréquences théoriques	QVI
0	3	2,688	0,036
1	9	8,065	0,108
2	12	12,098	0,000
3	12	12,098	0,000
4	9	9,073	0,000
5	2	5,444	2,178
6	3	2,722	0,028
7	3	2,766	2,881
8	1	0,437	0,723

SOMME DES FREQ OBS = 54

SAM = 162.

LAMDA = 3.00

QVI2 = 5.95

QVI2 < QVI20

HYPOTHESE ACCEPTEE

ARRIVEES SONT "A LA POISSON"

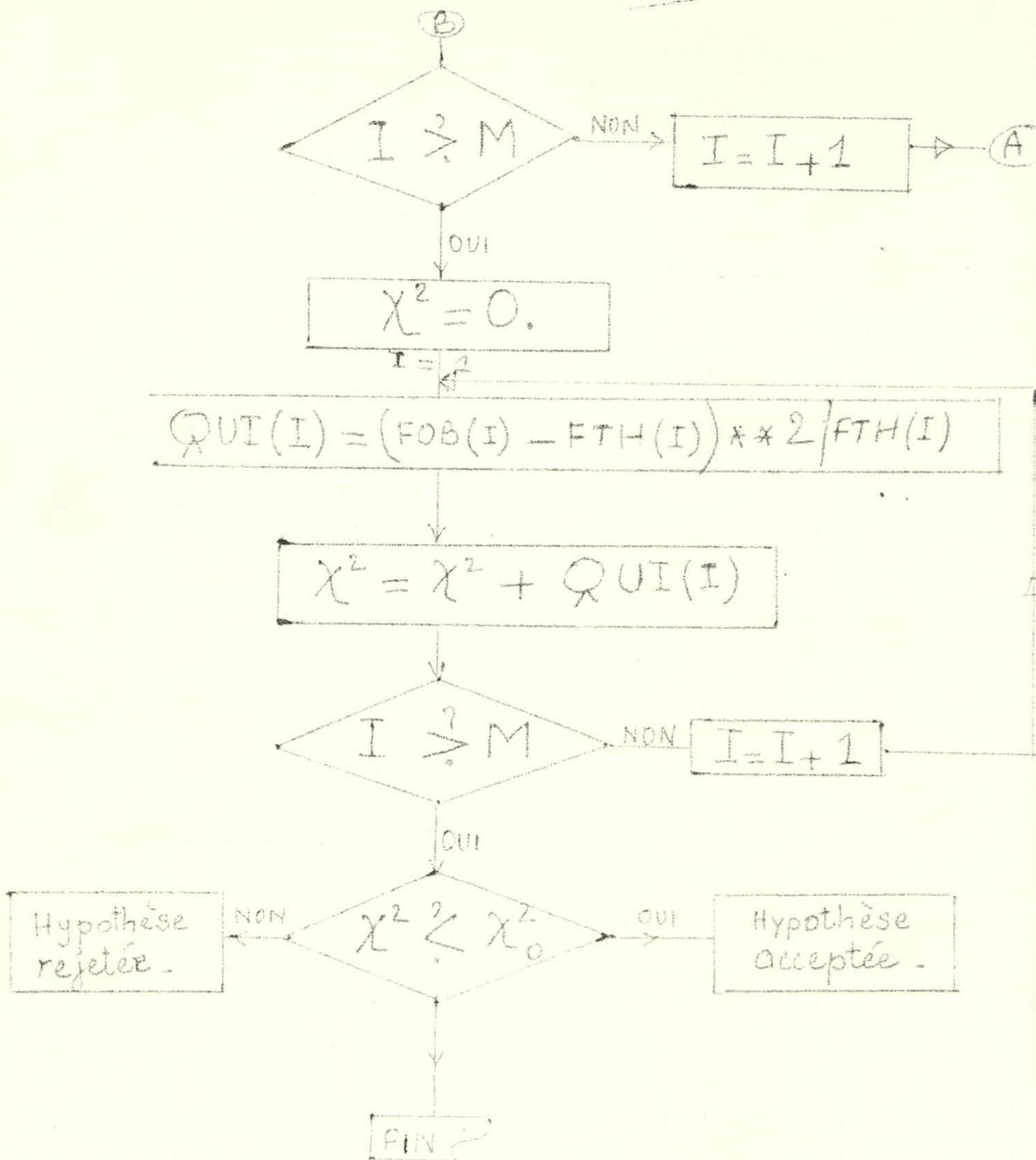
\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*-\*

```

1  DIMENSION FOI (9), A (9), FTH (9), QUI (9)
   READ (2,1) (FOB (I), I = 1,9), (A (I), I = 1,9)
   FORMAT (9F 3.0, 9F 2.0)

   SOM = 0.
   SAM = 0.
   DO 10 I = 1,9
     SOM = SOM + FOB (I)
     SAM = SAM + FOB (I) + A (I)
10  C O N T I N U E
     AMDA = SAM/SOM
     DEB = SOM * EXP (- AMDA)
     DO 20 I = 1,9
       IF (I - 1) 2, 2, 3
2    FTH (I) = DEB
3    J = I - 1
     RJ = FLOAT (J)
     FTH (I) = (FTH (J) * AMDA) / RJ
20  C O N T I N U E
     QUI2 = 0
     DO 30 I = 1,9
       QUI (I) = (FOB (I) - FTH (I) ** 2 / FTH (I)
       QUI2 = QUI2 + QUI (I)
30  C O N T I N U E
     WRITE (3,4)
4    FORMAT (20 X, 'CLASSES', 18 X, 'FRE OBS', 18 X, 'FRE THE'
           18 X, 'QUI')
     DO 40 I = 1,9
       WRITE (3,5) A (I), FOB (I), FTH (I), QUI (I)
5    FORMAT (20X, F4.0, 18X, F6.0, 18X, F8.3, 18X, F8.3)
40  C O N T I N U E
     WRITE (3,6) SOM, SAM, AMDA, QUI2
6    FORMAT (20X, 'SOME FRE OB' F5.0, 5X 'SAM =' F6.0, 5X, 'LAMD='
           F 6.2, 5X 'QUI 2='
1   F6.2) STOP.

```



F- CIRCUL DES ELEMENTS CARACTERISTIQUES  
F- PROBLEME.

---

Notre problème se ramène donc à un phénomène d'attente de type:  
M/M/S/\*/FIFO, où

M: implique que le rythme des arrivées est poissonien avec un t-  
-aux moyen de trois arrivées par jour.

M: le rythme des ~~servicés~~ est poissonien avec un taux d'acconage  
de six opérations-navire par jour.

S: nombre de postes à quai qui constituent la station des marchan-  
-disés de divers.

∞: capacité de la mole des marchandises est illimitée c'est-à-dire  
que la mole accepte en général tous qui arrivent.

FIFO: la discipline d'attente dans le port: le premier bateau qui  
arrive est servi le premier, sauf cas exceptionnel.

Les paramètres du problème sont:

--le taux moyen des arrivées:

$$\lambda = 3 \text{ arrivées/jour.}$$

--le taux moyen d'acconage:

$$\mu = 6 \text{ opérations-navire/jour.}$$

le nombre de postes à quai à la station des marchandises de divers:

$$S = 6 \text{ postes à quai.}$$

--la capacité de la station est supposée infinie (puisque il accepte  
presque tous les navires arrivants).

--la discipline d'attente est FIFO.

--Les couts d'attente:

1)-Cout d'attente d'un navire par jour: il était pour l'année 1974  
de l'ordre de 5000.00 DA. Ce cout est lié à l'importance du traf-  
-fic maritime. Dans notre cas on a pris une valeur moyenne.

$$C_2 = 5000.00 \text{ DA/jour/bateau.}$$

2)-Le cout de l'inactivité de la station:

a)-cout de l'inactivité des manutentionnaires autrement le salai-  
-re journalier des manutentionnaires.

On a relevé qu'un manutentionnaire touche 6.75 DA/Heure.

Chaque employé travaille 6h30mn/jour.

(6h30mn: s'appelle une vacation ou SHIFFT.)

Le travail se fait par équipe. Chaque équipe poste à quai est serv-  
-i par trois équipes. Donc le travail est de 19h30mn/jour (ou 20h)

Chaque équipe est constituée en moyenne de 20 manutentionnaires.  
Bar suite chaque quai possède 60 manutentionnaires pour un jour.

Enfin on peut calculer le cout occasionné journalièrement par les manutentionnaires pour un quai.

-Cout par équipe et par heure:  
 $6.75 \times 20 = 135.00 \text{ DA}$

-Cout par équipe et par vacation:  
 $135.00 \times 6.5 = 877.50 \text{ DA}$

-Cout par trois équipes et par jour:  
 $877.50 \times 3 = 2632.50 \text{ DA.}$

Donc le cout occasionné par les employés par poste à quai et par jour est de 2632.50 DA.

b)-Cout de l'inactivité des engins de manutention:  
Ce cout est composé des couts fixes et des couts variables. Comme il nous est vraiment impossible de connaître ces couts (pas de comptabilité analytique !...) on est obligé de prendre des couts fictifs et cela n'aura d'influence sur le modèle schématisant notre problème.

--Les couts fixes sont composés:  
°Des annuités d'amortissement des engins.  
°Les couts d'entretien.

Comme on utilise dans la station des grues de puissance d'acconage variant entre 3t/h et 8t/h, on prendra une puissance moyenne (approximative) c'est-à-dire 5t/h ou 120t/jour. Avec 20 manutentionnaires chaque poste à quai est doté d'une grue de levage.

--Les couts fixes pour une grue: 200.00 DA/jour.

--Les couts variables sont les couts qui se courent lorsque les opérations-navire ont lieu. pour une grue ils sont de l'ordre de 240.00 DA/jour.

En somme, le cout de l'inactivité CI, par poste à quai et par jour est:

$$\begin{aligned} \text{CI} &= \text{couts des employés} + \text{couts fixes des grues} + \text{variables} \\ &= 2632.00 + 200.00 + 240.00 \\ \text{CI} &= 3702.00 \text{ DA/POSTE/Jour.} \end{aligned}$$

Il faut noter que ces couts ne sont qu'approximatifs, c'est pour-quoi il ne faut pas s'étonner si on débouchera sur des résultats numériques qui ne sont pas très proche de la réalité.

Avec ces données, il nous est possible alors de calculer:

I)- L'inactivité du trafic:

Intensité du trafic de la station:

$$\psi = \lambda / \mu = 3. / 6. = 0.5$$

-Intensité par poste à quai

$$\psi/S = 0.5/6. = 0.082$$

2)- La probabilité pour qu'il n'y ait aucun navire en attente dans la mole.

$$P_0 = \frac{1}{S! (1 - \psi/S)} + \sum_{n=0}^{S-1} \frac{\psi^n}{n!}$$

$$P_0 = 1 / \left[ \frac{(0.5)^6}{6! (1 - 0.5/6)} + 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2!} + \dots + \frac{(0.5)^5}{5!} \right]$$

$$P_0 = 0.913.$$

3)- Nombre moyen de bateaux  $\bar{v}$  en attente dans le port:

$$\bar{v} = \frac{\psi^{S+1}}{S \cdot S! (1 - \psi/S)^2} \times P_0$$

$$\bar{v} = \frac{0.5^7}{6 \cdot 6! (1 - 0.5/6)^2} \times 0.913$$

$$\bar{v} = 17.10^7$$

Pratiquement on peut dire que  $\bar{v} = 0$ .

4)-Le taux d'inactivité des postes à quai:

$$\bar{p} = S - \psi$$

$$= 6 - 0.5$$

$$\bar{p} = 5.5$$

5)-Le nombre de bateau  $\bar{n}$  dans la mole (ceux qui attendent + ceux qui sont en train d'être opérés).

$$\bar{n} = \bar{v} + \psi$$

$$\bar{N} = 0.42$$

Pratiquement on constate qu'il y a un navire dans le môle dans deux jours.

6°) - Le temps d'attente moyen  $\bar{u}$  dans le môle -

$$\bar{u} = \bar{n} / \lambda$$

$$\bar{u} = 0.42/3.$$

$$\bar{u} = 0.14 \text{ jour} = 3.36 \text{ heures d'attente par jour.}$$

7°) - Le temps d'attente moyen  $\bar{w}$  dans la file

$$\bar{w} = \bar{v} / \lambda$$

$$\bar{w} = \text{infiniment petit} \quad 0$$

8°) - La probabilité pour qu'il y ait attente :

$$P(>0) = \frac{\psi^s}{s!(1-\psi/s)} \times P_0$$

$$= \frac{(0,5)^6}{6!(1-0,5/6)} \times 0,913$$

$$P(>0) = 0,002$$

9°) - Calcul du coût total d'attente :

$$F(S) = (C_1 \times \bar{p} + C_2 \times \lambda \times \bar{w}) T$$

où T = unité de temps choisie

$$T = 1 \text{ jour}$$

$$C_1 = \text{coût journalier de l'inactivité d'un poste à quai} \\ = 3702,00 \text{ DA}$$

$$\bar{p} = \text{taux d'inactivité d'un poste}$$

$$C_2 = \text{Coût moyen d'attente d'un navire pour une journée} \\ 5000,00 \text{ DA}$$

$$\lambda = \text{taux moyen d'arrivée par jour} \\ = 3. \text{ arrivée / jour}$$

$$\bar{w} = \text{temps d'attente moyen d'un navire à la rade}$$

$$S = \text{nombre de poste à quai}$$

$$F(6) = (3702,00 \times 5,5 + 5000,00 \times 3 \times 0)$$

$$F(6) = 20625,82 \text{ DA (résultat donné par l'ordinateur)}$$

C'est le coût occasionné par l'attente, mais le problème réside en l'optimisation de ce coût d'attente.

**G - OPTIMISATION DE LA FONCTION  
ECONOMIQUE**

**I - OPTIMISATION SUIVANT LE NOMBRE DES POSTES A QUAI S :**

La fonction économique à minimiser est de la forme :

$$f(S) = C_1 \times \bar{P}(S) + C_2 \times \bar{A} + \bar{w}(S)$$

Faisons varier le nombre de postes à quai S et voyons l'influence de cette variation sur  $f(S)$ .

Pour cela dressons le programme FORTRAN dont l'organigramme est sur la page suivante :

.../...

DONNEES -  
 $\lambda, H, c_1, c_2, S=7,6$

$$\psi = \lambda / H$$

$$S = 1.$$

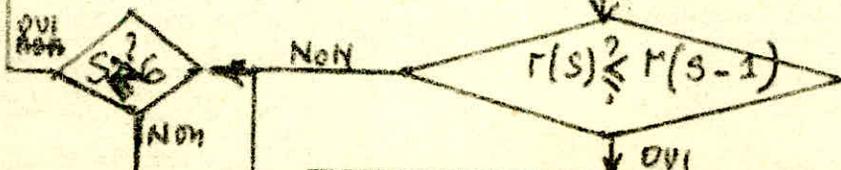
$$\bar{p}(s) = S - \psi$$

calcul de  $p_0(s)$

$$\bar{v}(s) = \frac{\psi^{s+1}}{s \cdot s! (1 - \psi/s)^2} \times p_0$$

$$\bar{w}(s) = \bar{v} / \lambda$$

$$r(s) = c_1 \times \bar{p}(s) + c_2 \times \lambda \times \bar{w}(s)$$



$S \leftarrow S+1$

STOP

Imprimer :  $\psi, s, \bar{p}(s), \bar{v}(s), \bar{w}(s), r(s)$

Tableau des Résultats - (I)

$N = 6 \text{ op/j} ; d = 3, \text{ arr/j} ; \psi = 0.5.$

S	$p_0$	VBAR	ROBAR	NBAR	UBAR (en jour)	WBAR (en jour)	GAMI(S) (en D.A)	GAM2(S) (en D.A)	GAMA(S) (en D.A)
1	0.5714	0.32	0.5	0.75	0.249	0.107	2115.42	1607.14	3722.57
2	0.873	0.02	1.5	0.45	0.152	0.009	5817.42	139.14	5956.87
3	0.7747	0.00	2.5	0.43	0.144	0.001	9519.42	19.76	9539.19
4	0.8506	0.00	3.5	0.42	0.143	0.000	13221.43	4.82	13326.25
5	0.8903	—	4.5	0.42	0.142	—	16923.43	1.31	16924.74
6	0.9133	—	5.5	0.42	0.142	—	20625.43	0.39	20625.82
7	0.9282	—	6.5	0.42	0.142	—	24327.43	0.12	24327.55
8	0.9386	—	7.5	0.42	0.142	—	28029.43	0.03	28029.46
9	0.9463	—	8.5	0.42	0.142	—	42731.43	0.001	31731.44
10	0.9523	—	9.5	0.42	0.142	—	35433.43	0.000	36433.43

En faisant varier le nombre des postes à quai, on constate qu'un poste, un quai suffit pour avec le rythme des arrivées et de services constatés.

Malgré que la solution : mettre sur place un seul poste à quai laisse quelques bateaux attendant à la rade, mais il cause un coût d'attente inférieur.

Nous discuterons plus sur cette solution qui semble, à première vue, non proche de la réalité. Nous expliquerons ce résultat au chapitre "Résultats et Commentaires".

## II - OPTIMISATION SUIVANT LE RYTHME DE SERVICE :

Toujours on a le même problème que celui du paragraphe (I) c'est pourquoi on a laissé à la fin de ce chapitre la présentation du programme FORTRAN. Mais maintenant, au lieu de faire varier  $\bar{S}$ , on va voir ce qu'on aura si  $\mu$  varie

La fonction à optimiser :

$$f(\mu) = c_1 \times \bar{P}(\mu) + c_2 \times \lambda \times \bar{w}(\mu)$$

Les termes indépendants de  $\mu$  sont inchangés. L'ordinateur a donné les résultats suivants :

Nous discuterons le tableau des résultats au chapitre "Résultats et Commentaires".

## III - La sensibilité de la fonction économique en fonction du rythme des arrivées :

Sur les deux tableaux (I) et (II), on a établi les résultats qui se rapprochent de la situation actuelle de mole des marchandises de divers. Voyons comment sera cette situation, si on maintient le rythme de service constant et on observe une variation sensible du rythme des arrivées.

Dressons pour cela, le programme explicitant l'influence de  $\lambda$  sur la fonction économique  $f(\lambda)$ .

La forme de la fonction économique devient :

$$f(\lambda) = c_1 \times \bar{P}(\lambda) + c_2 \times \lambda \times \bar{w}(\lambda)$$

$\lambda$  = varie

$\mu$  et  $S$  sont maintenus constants.

Le tableau des résultats est sur la page suivante :

Tableau des résultats (II)

$d = 3 \text{ ar/j} \quad S = 6. \quad N = 1; 10$

$F$	$P_0$	VBAR	ROBAR	NBAR	UBAR (Jour)	WBAR (Jour)	GAMI (N) (en DA)	GAM2 (N) (en DA)	GAMA (N) (en DA)
1	0.8522	0.21	4.3	7.71	0.571	0.071	16659.00	1065.65	17724.67
2	0.6898	0.02	5.	1.02	0.342	0.009	18510.00	137.93	18647.94
3	0.8262	0.00	5.2	0.75	0.251	0.001	19435.50	20.00	19455.50
4	0.8733	0.00	5.4	0.60	0.200	0.00	19990.80	4.19	19994.94
5	0.8977	0.00	5.5	0.50	0.166	0.00	20361.00	1.15	20362.16
6	0.9133	—	5.5	0.42	0.142	—	20625.43	0.39	20625.82
7	0.9245	—	5.5	0.37	0.125	—	20823.75	0.15	20823.90
8	0.9331	—	5.6	0.33	0.111	—	20978.00	0.06	20978.06
9	0.9398	—	5.7	0.30	0.100	—	21101.40	0.03	21101.43
10	0.9433	—	5.7	0.27	0.90	—	21202.36	0.02	21202.38

### Tableau des Résultats (III)

$$H = 6 \text{ op. Nav/j} ; S = 6. \lambda = 2 ; 6$$

$\lambda$	$P_0$	VBAR	ROBAR	NBAR	UBAR (jou)	WBAR (jou)	GAM1( $\lambda$ ) (D.A)	GAM2( $\lambda$ ) (D.A)	GAMA
2	0.9331	0.00	5.6	0.33	0.166	0.000	20978.00	0.06	20978.06
3	0.8977	—	5.5	0.50	0.166	—	20361.00	1.15	20362.16
4	0.9544	—	5.3	0.66	0.167	—	19714.00	8.79	19752.79
5	0.7906	—	5.1	0.84	0.168	0.001	19127.00	41.32	19168.32
6	0.6898	—	5.	1.02	0.171	0.004	18510.00	137.93	18647.94



## PROGRAMME FORTRAN

\*-\*-\*-\*-\*

(pour optimisation de la fonction des coûts)

```
1 DIMENSION PO (15), VBAR (15), ROBA (15), BVAR (15),  
   UBAR (15), WBAR (15), GAM I  
2 GAM 2 (15), GAMA (15), A (15), B (130)  
   READ (2,1)  AMDA, C1, C2  
   FORMAT (F 2.0, 2F 7.0)  
   D Ø 20      M = 1,15  
   WRITE (3,6)  AMU, PSI  
6   FORMAT ( / 40X, 'MU=' F 7.3, 5X, 'PSI=' F 7.4)  
   WRITE (3,7)  
7   FORMAT (4X 'S' 6X 'PO' 9X 'VBAR' 8X 'ROBA' 5X 'BVAR'  
   8X 'UBAR' 8X 'WBAR' 7X 'GAM 1'  
3   9X 'GAM 2' 10X 'GAMA')  
   RM = FLOAT (M)  
   AMU = RM  
   PSI = AMDA/AMU  
   PSO = 1. - PSI  
   DØ 30 N = 1,15  
   IF (N-1) 4, 4, 3  
4   PO (N) = PSO  
   VBAR (N) = PSI ** 2 / (1. - PSI)  
   ROB A(N) = PSO  
   GOTO 9  
3   FACN = 1  
   RN = FLOAT (N)  
   FACN = FACN * RN  
   A (N) = PSI ** N/ (FACN * (1. - PSI/RN))  
   C = 1.  
   FACI = 1.  
   RI = FLOAT (I)  
   K = N - 1
```

.../...

```

DØ 10 I = 1, K
FACI = FACI * RI
B (I) = PSI ** I / FACI
C = C + B (I)

10 CONTINUE
PO (N) = 1. / (A (N) + C)
VBAR (N) = (PSI ** (N+1) * PO (N) / (RN * FACN ** (1.-PSI
          /RN) ** 2)

9 ROBA (N) = RN - PSI
BNAR (N) = VBAR (N) + PSI
UBAR (N) = BNLAR (N) / AMDA
WBAR (N) = VBAR (N) / AMDA
GAM 1 (N) = C1 * ROBA (N)
GAM 2 (N) = C2 * AMDA * WBAR (N)

GAMA (N) = GAM 1 (N) + GAM 2 (N)
WRITE (3,5) PO (N), VBAR (N), ROBA (N), BNAR (N)
          UBAR (N), WBAR (N), GAM 1 (N)

GAMA (N) = GAM 1 (N) + GAM 2 (N)
WRITE (3,5) PO (N), VBAR (N), ROBA (N), BNAR (N)
          UBAR (N), WBAR (N), GAM 1 (N)

2 GAM 2 (N), GAMA (N)

5 FORMAT (4X, I2, 5X, F6.4, 5X, F 7.2, 5X, F 5.1, 5X,
          F 7.2, 5X, F 8.3, 5X, F 8.3, 3X, F1

2 0.0, 3X, F 10.0, 5X, F 12.0 / )

30 CONTINUE
20 CONTINUE
CALL EXIT
END

```

I - RESULTATS

Récapitulons les résultats obtenus sur un tableau rythme d'arrivée et services poissonniens.

$$\lambda = 3 \text{ arr/j.} \quad \mu = 6.0 \text{ op/j.} \quad \psi = \lambda/\mu = 0.5$$

$$\psi/S = 0.082$$

$$P_0 = 0.913$$

$$\bar{v} = \text{infiniment petit}$$

$$\bar{N} = 0.42$$

$$\bar{Q} = 5.5$$

$$\bar{U} = 3.36 \text{ heures/j.}$$

$$\bar{W} = 0.$$

$$P(\geq 0) = 0.002$$

$$F(6) = 20625.82 \text{ DA}$$

II - INTERPRETATIONS ET COMMENTAIRES

- \*  $\lambda$  est pratiquement exact, mais il peut être plus grand si on travaille sur une durée plus longue.
- \*  $\mu$  n'est qu'une valeur approchée, car comme on l'a expliqué avant, on n'a pu faire des observations sur les durées de service. C'est  $\mu$  qui sera à l'origine des résultats obtenus. Avec une valeur exacte de  $\mu$ , on peut arriver à mieux. C'est pour cela, on a fait varier  $\mu$  de 1 ; 15 pour voir la variation de la fonction des coûts.
- \*  $\psi = 0.5$  et  $\psi/S = 0.082 \ll 1$ , cela signifie qu'on est bien dans un régime stationnaire.  $\psi/S \ll 1$  signifie que le phénomène d'attente ne se pose pas vraiment dans la mole de marchandises de divers. Si  $\lambda$  croît,  $\psi$  se rapproche de l'Unité et l'attente augmente. On ne peut rien déduire sur la situation de la mole avec deux mois d'observations (Janvier, Février), d'autant plus que  $\lambda$  est différente en hiver qu'en été, car en été le trafic maritime est plus dense (conditions atmosphériques favorables à la navigation).
- \*  $P_0 = 0.913$  signifie que tout navire arrivant est servi immédiatement (ou avec une très légère attente).
- \*  $\bar{v} \approx 0$ , comme de n'avoir aucune attente est très forte, le nombre des navires attendant à l'ancre est pratiquement nulle.

\*  $p = 5.5$  signifie que six postes à quai est trop pour servir les bateaux arrivants c'est-à-dire que les manutentionnaires et les engins de manutention sont la plupart du temps inoccupés. C'est pourquoi on doit diminuer le nombre de postes à quai. En réalité, les manutentionnaires ne sont pas inoccupés. S'il n'y a pas de bateaux à servir, ils sont mobilisés à d'autres travaux (évacuation des docks, réparation et nettoyage des engins, dégager les marchandises des postes à quai...).

\*  $\bar{u} = 3.36$  heures/jour

$\bar{w} = 0.00$  heure

$\bar{u} - \bar{w} = 3.36$  heures/jour/opération

$\bar{u} - \bar{w}$  = durée de service ( $1/\mu$ ) = 3.36 heures mais, on a vu que  $1/\mu = 6$  opérations/navire/jour.

donc  $1/\mu = 24/6 = 4$  heures par opération

$1/\mu = 4$  heures/opération

Pourquoi cette différence de résultats ?

Settlement parce qu'on a considéré l'unité de temps pour  $\mu$  : un jour : 24 heures (respecter l'unité avec  $\mu$  pour avoir sans unité).

En réalité la station est en marche  $6.5 \times 3 = 19.5$  heures/j.

et  $1/\mu = \frac{19.5}{6} = 3.25$  heures/opération

\*  $p_0 = 0,913$

$p(>0) = 0.002$

Il ne faut pas perdre de vue, que les deux probabilités sont différentes, c'est-à-dire, elles ne sont pas complémentaires. car  $p_0$  = probabilité pour qu'il n'y ait aucun navire dans la môle.

$p(>0)$  probabilité qu'un navire attend dans la file d'attente.

\*  $f^*(6) = 20.625.82$  DA

La fonction du coût est en fonction de S. Elle a pour minimum  $f^*(1) = 3.722.57$  DA comme on l'a dit la meilleure solution "dans notre cas" est pour  $S = 1$ , solution où la fonction des coûts d'attente est minimale.

\* si  $S = \text{constant}$

$\lambda = \text{constant}$

$\mu$  et  $\psi/S$  : variables

$\Gamma(\mu)$  a pour plus petite valeur 17.724.67 DA et pour  $\mu = 1$ .

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} S = 1 \\ \mu = 6 \end{array} \right\} = 3.722.57 \text{ DA}$$

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \\ S = 6 \end{array} \right\} = 17.724.67 \text{ DA}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \left\{ \begin{array}{l} S = 1 \\ \mu = 6 \end{array} \right\} = 3.722.57 \text{ DA} \\ \Gamma \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1 \\ S = 6 \end{array} \right\} = 17.724.67 \text{ DA} \end{array} \right\} \psi = \frac{\lambda}{\mu \cdot S} = 0.082$$

$$\Gamma(S = 1 ; \mu = 6 ; \lambda = C4) < \Gamma(\mu = 1, S = 6, \lambda = C4)$$

Le mieux vaut qu'on dispose d'un poste avec un taux  $\mu = 6$   
que de six (6) postes avec un taux  $\mu = 1$  chacun.

### III)- DECISIONS POUR LA SITUATION FUTURE/:

Comme nos résultats ne sont pas tellement solides, il nous est impossible de prendre des décisions rigoureuses. C'est pourquoi on a préféré tracer les courbes:

$\Gamma(S)$ , avec  $\lambda$  et  $H$  constants.

$\Gamma(H)$ , avec  $S$  et  $\lambda$  constants.

$\Gamma(\lambda)$ , avec  $S$  et  $H$  constants.

Malheureusement, la contrainte de temps nous a empêché d'étudier la fonction  $\Gamma(S, H, \lambda)$  qui reflète convenablement la situation tant actuelle que future du port.

Ces courbes avec les tableaux des résultats nous permettent de se brancher directement sur n'importe quelle situation possible. Les courbes tracées peuvent être une image de la réalité si on a eu la valeur exacte des coûts occasionnés par les engins de manutention.

4  $10^6 \Gamma(s)$

$$\text{GAMA}(s) = \text{GAM.1}(s) + \text{GAM.2}(s)$$
$$(\lambda = 3. ; \mu = 6.)$$

3

2

1

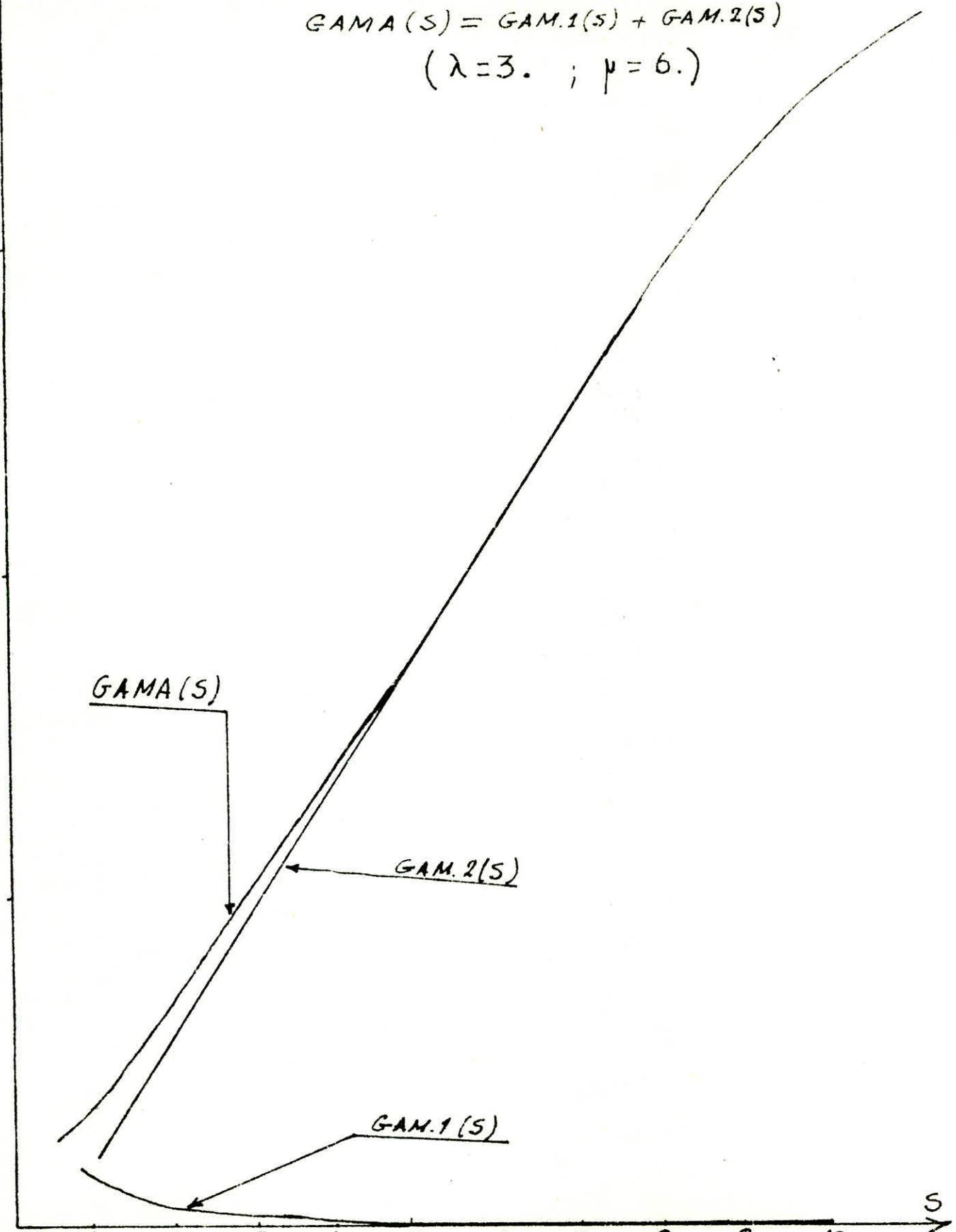
GAMA(s)

GAM.2(s)

GAM.1(s)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 s

s



$\rho \uparrow \Gamma(\lambda)$

$$GAMA(\lambda) = GAM.1(\lambda) + GAM.2(\lambda)$$

( $S=6 ; \mu=6.$ )

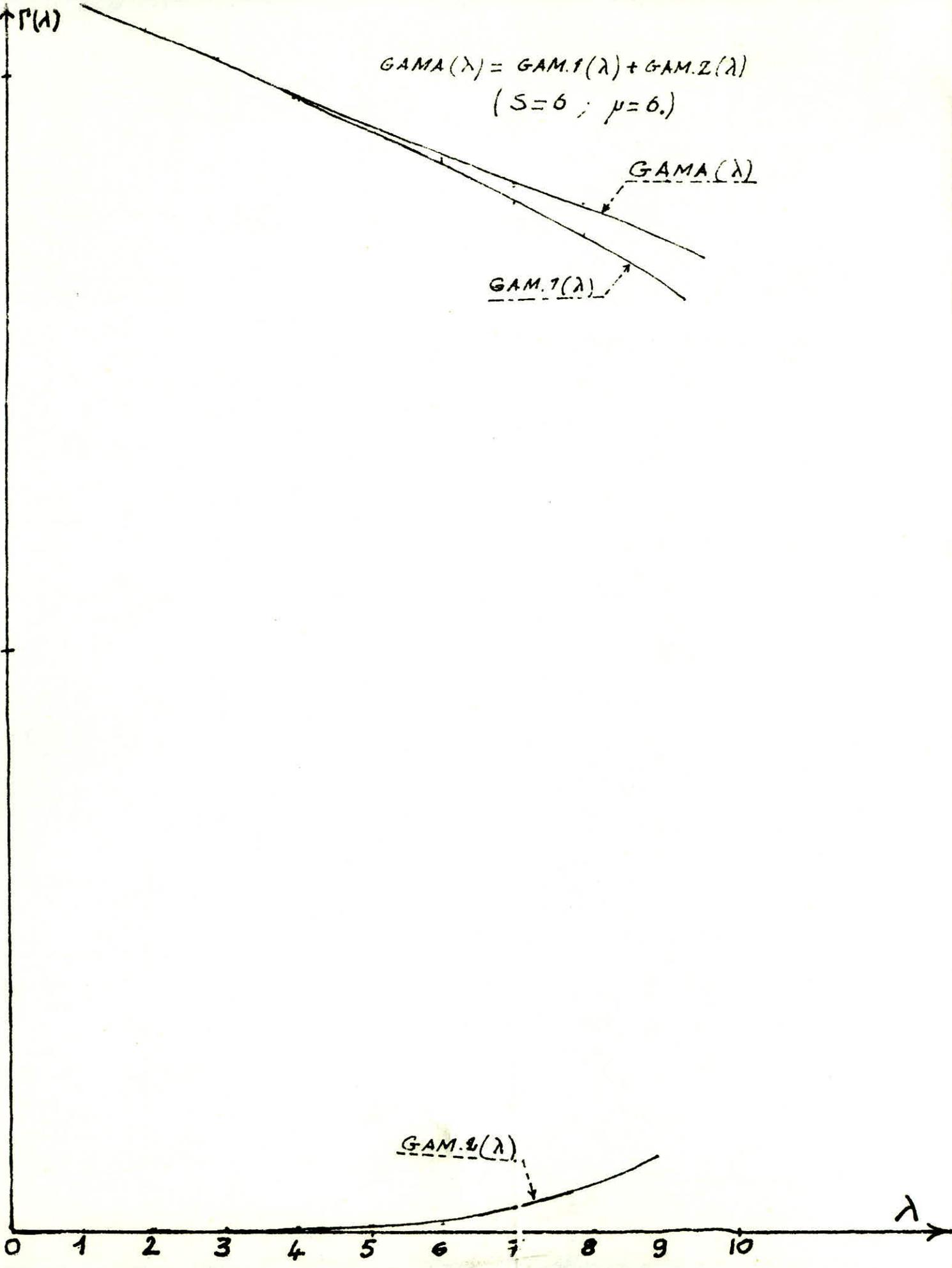
GAMA( $\lambda$ )

GAM.1( $\lambda$ )

GAM.2( $\lambda$ )

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$\lambda$



$10^6 \Gamma(\mu)$

2.

GAMA( $\mu$ )

$$GAMA(\mu) = GAM.1(\mu) + GAM.2(\mu)$$
$$(S=0 ; \lambda=3.)$$

GAM.1( $\mu$ )

1.

GAM.2( $\mu$ )

$\mu$

0

1

2

3

4

5

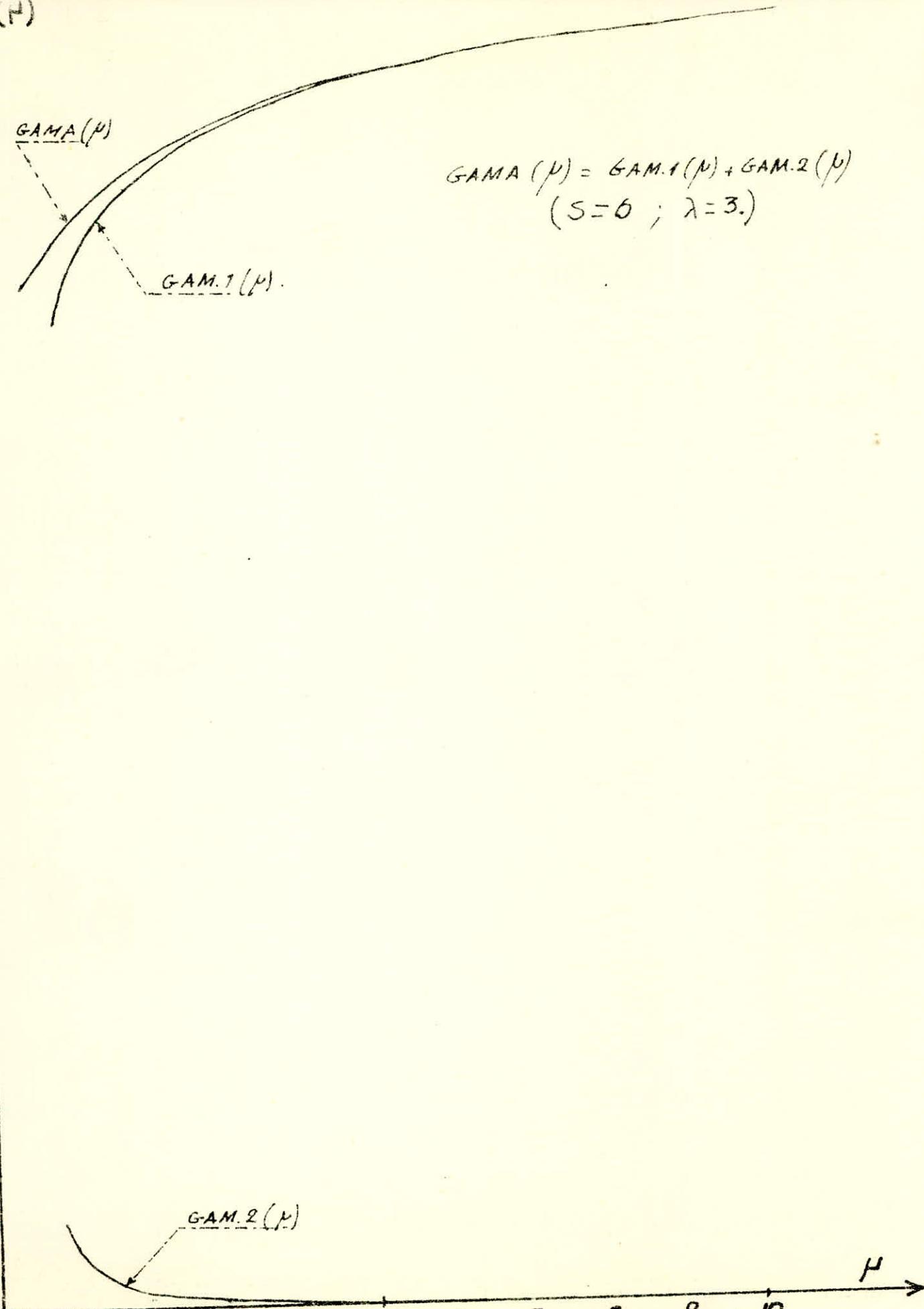
6

7

8

9

10



### III) - GENERALISATION.

Etudiant les tableaux du chapitre -MESURES ET OBSERVATIONS- donnant les arrivées et les sorties durant les quatre mois de l'année 1974 (janvier, février, mars et avril). Nous allons déterminer la loi de distribution des arrivées et des sorties.

Prenons comme unité de temps: le jour.

Sur les deux tableaux qui suivent; on a établi les tests d'ajustement à une loi de Poisson.

Comme mole on a pris celle des marchandises en vrac; c'est-à-dire toutes les moles constituant le port diminuées de celles des hydrocarbures, car la SONATRACH s'en occupe directement et celle des passagers où le problème ne se pose pas (l'attente des passagers ne causent pas de frais).

D'après les tableaux ci-dessus, on écrit:

$$\lambda_{en} = 4.95 \text{ ent/jour.}$$

$$\lambda_{sor} = 4.55 \text{ sort/jour.}$$

Et le rythme des arrivées et des sorties est poissonien.

Si on connaît le rythme par suite le taux des services, on peut résoudre le problème à l'aide de deux méthodes:

--Si  $\psi/S < 1$  on utilise la méthode analytique qui nécessite une étude approfondie sur l'évolution des états du port.

On considérera une seule station (mole des marchandises en vrac) avec 24 postes à quai.

Pour déterminer  $\bar{W}$ , on emploie la formule établie par KENDALL et cela quel que soit la distribution du rythme des arrivées et des services.

$$\bar{W} = \frac{\lambda}{2(1-\psi)} \left( \sigma_v^2 + \frac{1}{N^2} \right) \text{ où } \begin{cases} \lambda = t_x \text{ d'arrivée} \\ \mu = \text{Moyenne des services} \\ \sigma^2 = \text{variances des serv.} \end{cases}$$

--Si  $\psi/S > 1$  alors, on est devant un phénomène de congestion. Pour pouvoir traiter ce cas, il faut utiliser la méthode de Simulation.

a)- La simulation directe: elle consiste à étudier l'évolution état par état de tous les postes constituant la station. Malgré



Tableau des sorties (pour les 4 premiers mois de 1974) -

classes	freq observ	classes * freq obs	$\lambda_s$	$P_n$ (loi de Poisson)	freq théorique	(diff)	(diff) <sup>2</sup>	$\frac{(diff)^2}{Fr. th}$	Somme	$\chi^2$	Conclusion
0	3	0		0,011	1,320	1,68	2,82	2,136			$\chi^2 < \chi^2_{\alpha}$ la loi de distribution des sorties est celle de Poisson
1	7	7		0,056	6,00	1	1	0,766			
2	18	36		0,112	13,440	4,36	19,00	1,414			
3	16	48		0,168	20,16	4,16	17,30	0,858			
4	16	64		0,189	22,68	6,68	44,62	1,967			
5	20	100	$\lambda_{sortie} = 546/120 = 4,55$ sortie par jour	0,170	20,40	0,40	0,16	0,007			
6	13	78		0,128	15,36	2,36	5,56	0,362			
7	14	98		0,082	9,84	4,16	17,30	1,758			
8	6	48		0,046	5,52	0,48	0,230	0,041			
9	3	27		0,023	2,76	0,24	0,057	0,020			
10	2	20		0,010	1,20	0,80	0,64	0,533			
>11	2	22		0,004	0,480	1,520	2,310	4,812			
Total	120	546									

$\chi^2 = 14,074$

$\alpha = 0,05$   
 $\chi^2_{\alpha} (table) = 16,919$

qu'elle donne des résultats grossiers, mais suffisent en pratique

b)- La simulation de l'aléatoire par l'aléatoire: Méthode de MONTE CARLO: une méthode utilisant la table de nombres au hasard. Elle consiste à faire varier un paramètre du système (ex  $\lambda$ ,  $\mu$ , ou S) déduire les états du système.

Malheureusement, beaucoup de contraintes (temps, conditions de travail !...) ne m'ont pas permis de résoudre le grand problème qui préoccupe les responsables du port.

-o- CONCLUSION -o-  
-----

Ce qu'on a pu présenter dans cet ouvrage, est une analyse mathématique et économique du phénomène d'attente. Deux études ont été présentées. Dans la première, on a examiné le côté théorique des files d'attente les plus rencontrées dans la réalité, bien que l'ingéniosité des chercheurs a envisagé les situations les plus complexes : files multiples, files en cascade. Comme on l'a constaté, la méthode analytique est la plus facile à manier pratiquement, malgré sa difficulté mathématique. En cas d'inefficacité de celle-ci, on a recours à une méthode de simulation renforcée par une technique statistique solide.

Dans la deuxième partie, on a traité deux cas pratiques: le premier porte sur une usine de béton en Roumanie où l'attente ne constitue pas un problème fondamental de l'usine, tandis que le deuxième est fait dans un port où le problème d'attente constitue la préoccupation des responsables concernés. Ces deux études montrent que la méthode analytique est à la mesure de résoudre ce problème.

Pour le grand problème d'engagement du port (le cas généralisé de celui étudié), une étude fine et approfondie est nécessaire. On a aperçu que la méthode de simulation s'avère la plus efficace.

Vu qu'on ne dispose pas de données nécessaires et précises, et de temps suffisant, les résultats obtenus ne nous permettent pas de prendre les décisions et les mesures nécessaires pour améliorer la situation future du port.

Si les conditions de travail seront meilleurs, on espère aboutir à mieux.

Enfin je retiens une chose après avoir terminé cette étude, que l'instruction théorique acquise durant ma formation universitaire doit s'engrener avec l'instruction pratique qui sera acquise (je l'espère d'ailleurs..) durant ma future formation professionnelle. Cet engrenage de deux instructions permet d'acquérir de l'expérience et du bon sens qui me permettront d'avancer davantage dans la branche de la science.

## B I B L I O G R A P H I E

---

- A. KAUFMAN et R. CRUON = les phénomènes d'attente  
DUNOD, Paris 1961
- A. KAUFMAN - Modèles et Méthodes de la recherche opérationnelle, tome I - DUNOD, Paris 1970
- P.M. MORSE - Files d'attente stocks et entretien DUNOD,  
Paris 1960
- G. DESBAZEILLE - Exercices et problèmes de recherche  
opérationnelle, DUNOD, Paris 1964
- R. FAURE - Elements de la recherche opérationnelle  
GAUTIER - VILLARD, Paris 1968
- M. GIRAULT - Initiation aux processus aléatoires - DUNOD  
Paris 1959 - tome I.
- C.W. CHURCHMAN, R.L. ACKOFF, E.L. ARNOFF - Elements de  
recherche opérationnelle DUNOD, Paris 1961
- G. WORMS - Méthodes modernes de l'économie appliquée ;  
DUNOD, Paris 1965.

