UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Economie

8/73

2EX

THESE

DE FIN D'ETUDES

MODELE DE PREVISION DES STRUCTURES DE FAMILLE PAR LES CHAINES DE MARKOV

Etudiée par

Louardi BAHLOUL

Patronnée par

V. DOLIATOVSKI

PROMOTION 1973

MODELE DE PREVISION
DES STRUCTURES
DE FAMILLE
PAR LES CHAINES
DE
MARKOV

A Mon Pére, à Ma Mére

A mes Fréres et Soeurs,

Je Dédie ce Travail.

-=-=-=-=-=- *REMERCIEMENT S* -=-=-=-=-=-

Que /)/)onsieur V.DOLIATOV SKI trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour toutes les traductions de textes **russes** *et les conseils qu'il m'a prodigués tout au long de cette étude.*

Je tiens à remercier monsieur DAMINE.A pour sa collaboration dactylographique.

-=- SOMMAIRE -=-

-=-= INTRODUCTION -=-=-

Comme toute réalisation économique nécèssite un recensement des potentialités en matiéres premiéres et en main d'oeuvre de maniére à répondre au mieux au besoin du pays ou de la région, tout plan de progrés social exige la connaissance des potentialités humaines actuelles et futures afin de pouvoir déterminer son impact sur l'élément concerné qu'est la population . La connaissance des potentialités actuelles peut-être déterminée par un recensement, quant à celles du futur nous ne disposons que d'un seul moyen : la prévision .

L'étude que nous nous proposons est celle de la prévision de la répartition de l'ensemble de la population entre les différentes structures de famille par un modéle mathématique qui répond aux caractéristiques suivantes : facilité de mise en oeuvre , prix de revient faible et une bonne précision . Cette étude permet à celui qui a la charge d'établir ce plan social de déterminer - avec une certaine marge d'erreur- les divers équipements que l'on souhaite mettre à la disposition de la population, à savoir les établissements scolaires, les dispensaires, les hopitaux, les logements etc....

Elle permet surtout une meilleure planification quant à la construction et à l'attribution des logements si l'on décide que ces deux derniéres soient fonction de la taille des familles.

Chapitre I

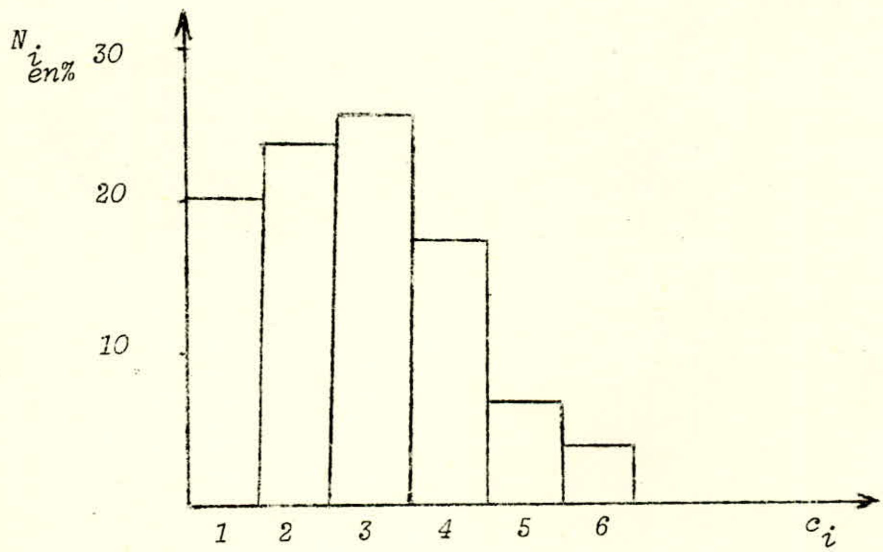
Notions sur la structure démographique et méthodes existantes.

§1.1 Notions sur la structure démographique :

Une structure de famille est l'ensemble de personnes vivant sous le même " toit " et liées par des relations filiales. Dans toute notre étude nous assimilerons la structure de famille à la famille elle-même sans tenir compte des liens qui unissent les différents membres qui la composent .

Nous dirons q'une famille est de type c_i , si c_i membres la composent. Nous noterons N_i le cardinal des familles de type c_i. Nous disposons de plusieurs méthodes pour caractériser l'ensemble des structures de famille :

a) L'histogramme $N_i = f(c_i)$, $f (c_i)$ étant une fonction à variable discréte.

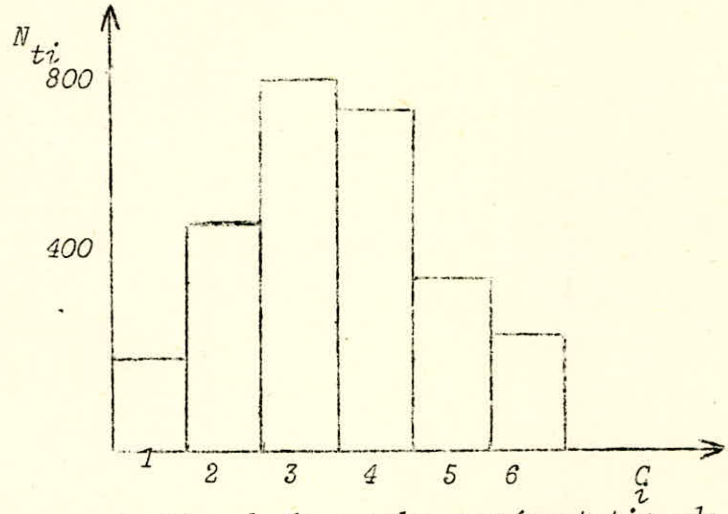


Du fait que cet histogramme nous donne les n couples (N_i, c_i), si n est le nombre de familles différentes, nous pourrons approximer la courbe représentative de la loi d'évolution des structures de famille.

Remarquons que le maximum de la fonction $N_i = f(c_i)$ doit être au moins en $c_i = 3$ ou au-dela pour qu'il n'y ait pas de vieillissement de la population mais plutôt un accroissement de la population du fait même du phénomene d'évolution de la population.

b) L'histogramme de la population par type de famille :

$N_{ti} = N_i \cdot (c_i)$, N_{ti} étant la population totale du type de famille c_i



Là encore une approximation de la courbe représentative de la loi d'évolution du phénomene est possible.

Cette représentation nous permet de déterminer la surface vitale par personne

§ 1.2 Notions générales :

D'aprés notre définition de la structure de famille, nous pouvons définir la structure démographique comme l'ensemble des structures de famille. Le nombre de structures est fini et varie suivant le lieu géographique et les conditions sociales; il est fort dans les pays en voie de développement mais faible dans les pays industrialisés.

La structure de famille comme nous l'avons définie reunit toutes les familles ayant le même effectif mais ces familles d'une même structure peuvent-être trés différentes par les relations filiales qui lient les membres qui les composent.

L'exemple suivant nous fait bien voir cet état de chose :

Soit S l'effectif total d'une famille, nous pouvons l'exprimer par la relation suivante :

$$S = P_1 + P_2 + P_3 + E_1 + E_2$$

où P_1 = (1 ou 2 p) désigne les grands parents.

P_2 = (1 ou 2 p) désigne le couple principal

P_3 = (1 ou 2 p) désigne le fils ou la fille marié ou encore des proches parents.

$E_1 = 1,2...$ désigne les filles

$E_2 = 1,2,..$ désigne les garçons

Exemple $S = 5 = P_1 + P_2 + P_3 + E_1 + E_2$

F_1 : $S = 5 = 1 + 2 + 0 + 1 + 1$

F_2 : $S = 5 = 1 + 2 + 1 + 0 + 1$

Ces deux familles F_1 et F_2 sont trés différentes par leur constitution mais appartiennent à la même structure ($c_i = 5$) telle que nous l'avons définie.

Nous remarquons que plusieurs facteurs influent sur la structure démographique; parmi ceux-ci nous avons particuliérement :

a) L'age de mariage : c'est à dire l'age moyen des gens en période de mariage

b) La croissance des familles qui, elle même dépend d'autres facteurs

d) Le dédoublement des familles: on entend par dédoublement le fait que l'enfant quitte le foyer paternel pour fonder son propre foyer.

Nous défirissons l'état d'une famille à la date t, comme le nombre de personnes qui la composent à cette date t.

Et, nous dirons qu'une famille change d'état si : cette famille étant à la date t à l'état E_t , se trouve à la date t' à l'état $E_{t'}$ avec $t' > t$.

Comme E_t et $E_{t'}$ sont des nombres, il y aura changement d'état si $E_t \neq E_{t'}$, et ceci lors :

- d'une naissance
- d'un mariage
- d'un divorce
- d'un déces
- d'un dédoublement de famille comme nous l'avons défini précédemment
- ou d'une migration

§1.3 Distribution des familles :

Pour représenter la distribution des familles suivant le type, deux méthodes sont nécessaires parcequ'elles nous donnent les principales informations sur la population.

La premiére est $N_i = f(c_i)$: elle nous permet de determiner le nombre total de logements par type de famille, mais ne nous donne pas le nombre total de personnes par type de famille. La seconde est l'histógramme du nombre total de personnes par type de famille, ce qui nous permet de déterminer l'espace vital par personne.

La loi d'évolution de cette distribution des familles pourrait-être déterminée par une approximation de la courbe représentative de cette distribution à partir de l'une des caractéristiques définies au § 1.1 . Nous disposons de plusieurs méthodes d'approximation d'une fonction, si nous connaissons un nombre suffisant de valeurs de cette fonction pour le même nombre de valeurs de la variable, parmi celles - çi:

1- La méthode du polynôme d'interpolation de Lagrange, qui est une méthode générale : Connaissant n valeurs de la fonction pour n valeurs de la variable nous approximons cette fonction par un polynôme de degré n et qui prend les mêmes valeurs que la fonction à approximer pour les mêmes n valeurs de la variable. Toutes les autres méthodes du polynome d'interpolation sont basées sur le même principe mais applicablesàdes domaines (ou intervalles)bien définis. .

2- La méthode du polynôme d'interpolation de Newton qui elle-même se divise en deux méthodes : celle du polynôme ascendant- et celle du polynôme descendant.

3. La méthode du polynôme d'interpolation de Stirting dont l'utilisation sera particuliérement préçise pour les points x voisins de la valeur initiale a.

4. La méthode du polynôme d'interpolation de Bessel dont l'utilisation sera particuliérement précise pour les points x voisins du milieu de l'intervalle $a + \frac{h}{2}$, a étant la valeur initiale de la variable x et h le pas.

Ces trois derniéres méthodes sont utilisées lorsque la variable prend des valeurs en progression arithmétique.

5° La méthode des moindres carrés :

Approximation par un polynôme déterminé:

soient $a_0 \ldots\ldots, a_n$ les valeurs de la variable x et $b_0, \ldots, b_n$ les valeurs de la fonction $f(x)$ à approximer.

Soit $F(x)$ le polynôme de degré m qui prend les mêmes valeurs que $f(x)$ pour les mêmes valeurs de la variable.

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i\, x^i \quad \text{avec } m < n$$

On définit le résidu (ou erreur) r_i comme la différence entre la fonction approximative $F(x_i)$ et la valeur correspondante y_i :

$$r_i = F(x_i) - y_i \qquad \text{avec } i=0,\ldots,n$$

$$\text{Posons : } E = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i}^{n} \left[F(x_i)-y_i\right]^2$$

pour que la fonction $F(x)$ corresponde le plus possible à celle qui régit le phénomene étudié et qui nous donne les points (x_i, y_i) , il faut que E soit minimum

$$\text{Ce qui donne : } \frac{\partial E}{\partial A_k} = 2 \sum_{i=0}^{n} (F(x_i)-y_i) \frac{\partial F(x_i)}{\partial A_k} = 0 \quad k= 0,\ldots m$$

$$\text{or } \frac{\partial F(x_i)}{\partial A_k} = x_i^k \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} (A_0 x_i^0 + A_1 x_i^1 + A_2 x_i^2 + \ldots + A_m x_i^m - y_i)\, x_i^k = 0$$

$$\text{ou encore} \quad \sum_{i=0}^{n} (A_0\, x_i^0 + A_1\, x_i^1 + \ldots + A_m\, x_i^m)\, x_i^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k\, y_i$$

Ce qui donne la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i}^{n} (x_i^o)^2 & \sum\limits_{i}^{n} (x_i^o)\,(x_i^1) \;\ldots\; & \sum\limits_{i}^{n} (x_i^o)\,(x_i^m) \\ \sum\limits_{i}^{n} (x_i^1)\,(x_i^o) & \sum\limits_{i}^{n} (x_i^2) & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i}^{n} (x_i)^m\,(x_i^o) & \ldots\ldots\ldots\ldots & \sum\limits_{i}^{n} (x_i)^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i}^{n} (x_i^o)\, y_i \\ \sum\limits_{i}^{n} (x_i^1)\, y_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i}^{n} (x_i^m)\, y_i \end{bmatrix}$$

La résolution de ce systéme de (m+1) équations à m+1 inconnues nous donne les valeurs correspondantes de $A_i \quad i = 1, \ldots m$

Et la fonction de distribution sera alors approximée par le: polynôme :

$F(x) = A_o + A_1\, x + A_2\, x^2 \; + A_m\, x^m$ *où les* A_i *sont determinés .*

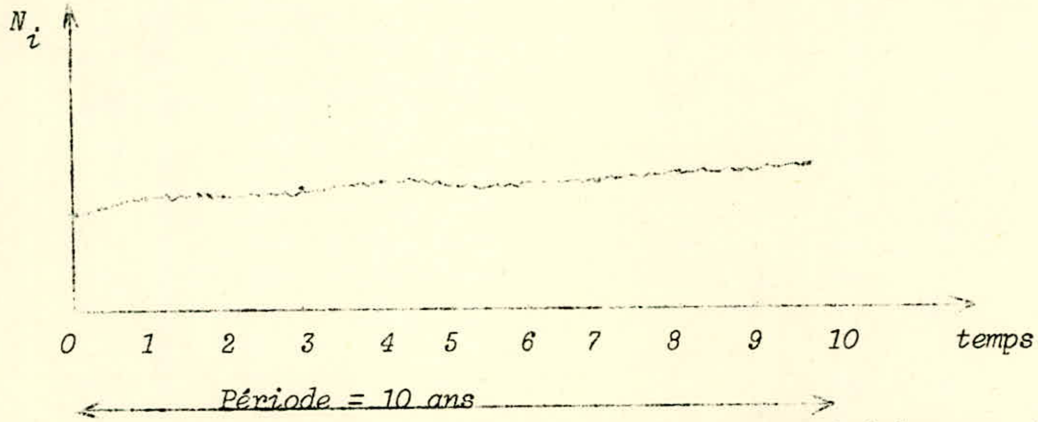
L'écriture matricielle précédente devient plus simple du fait que $x_i^o = 1$

et $\sum\limits_{i=o}^{n} (x_i^o)^2 = n + 1$

$$\begin{bmatrix} n+1 & \sum\limits_{i}^{n} x_i & \sum\limits_{i}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i}^{n} x_i^m \\ \sum\limits_{i}^{n} x_i & \sum\limits_{i}^{n} x_i^2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i}^{n} x_i^m & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \sum\limits_{i}^{n} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_o \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i}^{n} x_i\, y_i \\ \ldots\ldots \\ \sum\limits_{i}^{n} x_i^m\, y_i \end{bmatrix}$$

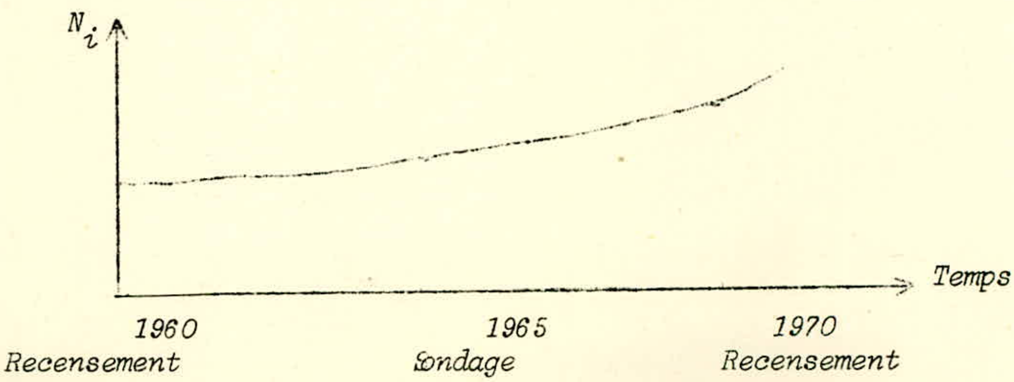
1.4 Les méthodes de prévisions existantes :

1 - La méthode des prévisions à séries temporaires consiste à faire des sondages sur échantillons limités pour chaque type de famille , à des intervalles de temps réguliers, et ceçi pour une période déterminée .
Exemple :l'intervalle de temps séparant deux sondages sucessifs etant l'année et la période étant dix années. Ce qui nous donnerait le graphique suivant pour chaque type de famille.



A partir de ces informations nous pourrons faire une prévision pour la même période, par extrapolation de ce phénoméne dans l'avenir.

2- La méthode d'interpolation différe de la précédente par le mode d'obtention des informations statistiques .
En effet, au lieu de faire plusieurs sondages à des intervalles de temps réguliers et relativement petits, on se limite à un entre deux recensements .
Et, l'intervalle de temps qui sépare les deux recensements sera dit " intervalle de prévision " et sera égal à la période prévisionnelle .
Les résultats de ce sondage et resencements étant portés sur un repére orthonormé, nous approximerons la loi d'évolution de chaque structure de famille par l'une des méthodes déja citées au § 1.3.



Partant de l'hypothése que le phénomene d'évolution du nombre de familles de type c_i , dont nous avons déterminé la loi par approximation, suivra la même loi dans l'avenir et au moins pour la période de prévision, nous pourrons alors faire notre prévision pour cette période . Le recensement de toutes les données que nécessitent ces deux méthodes et leur traitement statistique s'avérent lents , coûteux et même difficiles à organiser . C'est pourquoi la recherche d'une nouvelle méthode simple , moins coûteuse et assez précise devient nécessaire, et , nous pensons que celle qui répond à ces caractéristiques et qui est de plus en plus utilisée dans le domaine prévisionnel est le modéle mathématique.

Chapitre 2: Processus de Changement des Structures de Famille

§ 2.1 Notions sur les chaines de Markov :

a) Définition de la chaine .

Soit F une famille de sous ensemble de ∂ formant un corps borélien et telle que ∂ et tout élément E de ∂ (c'est à dire tout état possible E du systéme Σ) fasse partie de F.

Soient des instants $t_1 < t_2 < t_3 \ldots\ldots < t_n < t < \tau$ quelconques et en nombre quelconque .

Soient, d'autre part, R un sous ensemble de ∂, et $E_1, E_2, \ldots, E_n, E$ des états possibles quelconques de Σ .

Posons : $P_n\ (t_1, E_1\ ;\ t_2, E_2,\ \ ;\ \ldots\ ;\ t\ ,\ E\ ;\ \tau\ ,\ R)$ la probabilité que E^{τ} appartienne à R (c à d que le systéme à l'instant τ soit à l'état $E \in R$) conditionnellement quand $E^{t1} = E_1$, $E^{t2} = E_2$, $\ldots E^{t} = E$.

Si cette probabilité Pn (t_i , E_i ; t, E ; τ ,R) ne dépend pas des t_i etE_i et cela quel que soit t_i et E_i , n , t, τ ,R , nous dirons alors que l'évolution de Σ est une chaine (ou processus) de MARKOV .

Donc cette probabilité P_n (t_i , E_i ; τ, R) se réduit à P_o (t,E, τ, R) qui est l'élément fondamental de la définition de la chaine. Cette probabilité est appelée probabilité de passage (du systéme d'un état E à l'instant t, à un état de R à l'instant τ).

D'autre part P (t,E; τ ,R) étant une probabilité, nous avons

$$\forall\, t, n, E, \tau \text{ et } R : \qquad \begin{aligned} &P\ (\ t,E;\tau,R) \geq o \\ &P(\ t,E;\tau,\ \partial) = 1 \end{aligned}$$

b) Propriétés :

Si l'on désigne par P_i (t) la probabilité que le systéme soit à l'état E_i à la date t, le " vecteur d'état "
S 'écrira : $\left[P(t)\right] = \left[\ P_1\ (t),\ P_2\ (t),\ \ldots\ldots p_m(t)\right]$
Et si l'ensemble des états est fini, et est : $E_1, \ldots, E_m$.

La propriété markovienne"de la chaine aléatoire " s'exprime par la relation :

$$P_j(t+1) = \sum_{i=1}^{m} p_i\ (t)\ .\ p_{ij} \qquad j = 1,m$$

Et, nous appellerons " matrice de transition " de la chaine de MARKOV , La matrice $[P]$ formée par les p_{ij}

$$[P] = \begin{bmatrix} p_{11} \cdots\cdots\cdots p_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{m1} \cdots\cdots\cdots p_{mm} \end{bmatrix}$$

lorsque $[P]$ est indépendante de la date considérée, on dit que la chaine de MARKOV est stationnaire .

D'autre part, si la probabilité $P(t,E;\tau, R)$ qui est fonction de t et τ ne depend que de $(\tau - t)$ $\forall E$ et R , le processus est dit homogéne (dans le temps).

La matrice $[P]$ est irréductible si tous les états appartiennent à la même classe d'équivalence autrement dit si le graphe associé est fortement connexe.

Elle est réductible dans le cas contraire du fait qu'il existe au moins deux classes d'équivalence.

Elle sera dite périodique , si le graphe associé posséde une boucle.

Si enfin $[P(t)] = [P\ (o)]$ $\forall t$; $[P(o)]$, étant le vecteur initial, sera dit vecteur d'état permanent.

La méthode de résolution des chaines markoviennes sera exposée lors de la construction du modéle.

§2.2 Présentation du processus de changement des structures de famille comme chaine.

Considérons l'ensemble des jamilles que l'on répartit entre différentes classes E_1, E_2 ....E_n . Chaque classe représentant la structure ou le type tel qu'il a été défini dans le premier chapitre. Nous définirons donc l'état E_i d'une famille par le nombre i de personnes qui la composent.

Remarquons tout d'abord que le nombre d'états est fini; d'une part par la période de la ménopause et d'autre part parceque nous avons défini une famille comme l'ensemble de personnes occupant le même logement et ayant entre elles des liens " filiaux ", mais encore que ce logement ne peut " contenir" plus de n personnes. Le nombre n étant normalement défini par les services de l'habitat de la ville ou de la région.

Une famille peut donc avoir n états possibles .

Le changement d'état d'une famille ne peut se produire qu' à des instants déterminés $t_o < t_1 < t_2$ ...... qui sont des dates.

Chaque famille a une probabilité $p_i(t)$ de se trouver à la date t dans l'état E_i.

Nous pouvons représenter l'ensemble des probabilités $p_i(t)$ par un vecteur dans un espace dont le nombre de dimensions est égal au nombre d'états possibles .

(ce nombre étant fini et égal à n comme nous venons de le voir) du systéme .
On pourra alors le représenter sous la forme suivante :

$$\left[P(t)\right] = \left[p_1(t)\ ,\ p_2(t), \ldots p_n(t)\right]$$

avec $p_i(t) \geqslant o$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 \quad t = t_o, t_1, \ldots$

Pour que ce processus de changement des structures de famille soit pris comme chaine de MARKOV , il nous faut vérifier la probabilité conditionnelle suivante:
A toute paire $(E_i\ ,\ E_j)$, il est possible d'associer une probabilité conditionnelle p_{ij}, probabilité que le systéme se trouve à l'état E_j à la date t_2, sachant qu'il était dans l'état E_i à la date t_1 avec $t_1 < t_2$. En effet toute famille étant à la date t_1 dans l'état E_i sera à la date suivante $t_2 (t_1 < t_2)$:
Soit dans le même état E_i et alors on lui associera la probabilité $p_{ii}(t)$
Soit dans l'état E_j ($j \neq i$) et on lui affectera la probabilité $p_{ij}(t)$ $(j \neq i)$.
Dans le premier cas ceci se traduit par le fait que la famille considérée a gardé le même effectif durant toute la période $t_2 - t_1$; et dans le deuxiéme cas son effectif a changé ce qui veut dire qu'il y a eu naissance, mariage ou divorce....
Ainsi le phénoméne de changement des structures de famille est une chaine de Markov, à condition que le vecteur d'état initial $\left[p(o)\right]$ soit connu. Il est possible de déterminer à partir des données statistiques sur les structures de famille. Ce processus étant une chaine de Markov, il sera régi par la relation fondamentale suivante :

$$p_j(t_2) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t_1)\ .\ p_{ij} \qquad j=1,\ldots n$$

ou en écriture matricielle : $\left[p(t_2)\right] = \left[p(t_1)\right] . \left[\mathcal{C}\right]$
$\left[\mathcal{C}\right]$ étant une matrice carrée (n,n) dont les éléments sont les p_{ij} tels que :

$$p_{ij} \geqslant o \quad et \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad i=1,2\ldots n$$

Cette matrice est une matrice stochastique et est appelée " matrice de transition ".
Si $t_1 < t_2 < t_2 < \ldots\ldots < t_n$ et $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots\ldots t_n - t_{n-1} = 1$ période nous aurons :

$$\left[P(t+1)\right] = \left[P(t)\right] . \left[\mathcal{C}\right]$$

et si l'on prend la date origine $t_1 = o$

$$[P(n)] = [P(o)] \cdot [\mathcal{T}]^n$$

en supposant que $[\mathcal{T}]$ est indépendante du temps, la chaine sera dite stationnaire.

§ 2.3 Application des chaines de Markov stationnaires à la prévision .

L'ensemble N des familles ayant été divisé en sous-ensembles c_i (types), d'effectifs N_i correspondant aux types de structures, on peut assimiler le rapport $N_i(t)/N$ à la probabilité pour une famille d'appartenir au type c_i

Si donc il est possible d'estimer les fréquences de passage d'une classe à une autre, correspondant aux probabilités de passage définies précédemment, on pourra prévoir la composition de la population de ces familles à l'époque $T + \theta$ par la formule :

$$[p(T+\theta)] = [p(T)][\mathcal{T}]^{\theta}$$

La matrice $[\mathcal{T}]$ a pour éléments les fréquences de passage $n_{ij}(t) / N_i(t)$, où $n_{ij}(t)$ désigne le nombre de familles passant du type c_i au type c_j entre les instants t et t+1 .

Il faut donc estimer les coefficients $p_{ij} = \dfrac{n_{ij}(t)}{N_i(t)}$ de la matrice $[\mathcal{T}]$.

Cette estimation est possible dés lors que l'on posséde un nombre suffisant d'observations passées du vecteur état $[p(t)]$, avec $t \leqslant T$. La connaissance des vecteurs résulte généralement de recensements ou de sondages.

Supposons que m vecteurs états passés soient connus pour les époques $t_1, t_2, \ldots t_m \leqslant T$. L'application de la relation fondammentale du processus markovien stationnaire entre ces différentes époques permet d'obtenir c_m^2 équations matricielles de la forme :

$$(I) \qquad [p(t_j)] = [p(t_i)] \cdot [\mathcal{T}]^{tj-ti}$$

S'il y a n types la matrice $[\mathcal{T}]$ est une matrice $n \times n$. Il y a donc n^2 coefficients à estimer , mais ceux-çi sont liés par n relations de la forme :

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, n$$

Il n'y a donc en fait que $n^2 - n$ coefficients à estimer. Si aucune autre condition n'est imposée à priori aux probabilités de passage il faut donc au moins n-1 équations matricielles(1) pour pouvoir estimer les p_{ij}, autrement dit $c_m^2 \geqslant n-1$, chacune d'elles se traduisant en effet par n équations non linéaires en p_{ij}. Ses calculs sont généralement fort complexes et nécessitent l'utilisation d'un ordinateur .

§ 2.4 Exemple de matrice de transition et graphe associé :

a) Construction de la matrice de transition :

Etant donné un echantillon sur ces structures, nous déterminerons les probabilités de passage p_{ij} , si nous disposons de certaines informations statistiques relatives à chaque structure, à savoir :

- Le nombre de famillesdans chaque structure c_i de cet échantillon: N_i .
- Le nombre de famillesdans chaque structure c_i qui sont restées dans le même état E_i à la date $t + 1$: n_{ii}
- Enfin le nombre de famillesdans chaque structure c_i qui sont passées à l'état E_j à la date $t+1$: n_{ij}

Nous déterminerons alors : $p_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{N_i}$ la probabilité de passage d'une famille à l'état E_i à la date t à l'état E_j à la date $t+1$.

L'ensemble des p_{ij} forme l'ensemble des éléments de la matrice de transition.

On verifie facilement la propriété " stochastique " de la matrice .

Soit l'échantillon suivant :

		n_{ij}	p_{ij}
0.343	1	69	
	2 (1+1)	33	0.163
	2 + 1 p	8	0.010
	2 + 1p+1p	2	0.010
	2 +2 n d	26	0.129
	2+1p+2d n	18	0.090
	2+2 dn+[illegible]	17	0.085
	2+2 dn+2gp	11	0.055
	2+2dn+1gp+1p	16	0.080
	1 -1	1	0.005

2 : couple principal
2d n: couple secondaire
2 gp: couple des grands parents
1p: l'enfant
1 $\overline{c}$m: frére ou soeur du maitre ou de la maitresse de maison
I : désigne divorce
- : décés

$N_1 = 201$

75 0.308 (2)

	n_{ij}	p_{ij}
2+1p	7	0.029
2+1p+1p	3	0.013
2+1p+1p+1p	2	0.008
2+2 dn	46	0.189
2+2dn+1gp	34	0.140
2+2dn+1p	27	0.111
2+2dn+2gp	29	0.119
2+2dn+1p+1c$\bar{m}$	13	0.053
2-1	3	0.013
1 I 1	4	0.017

$N_2 = 243$

138 0.525 (3)

	n_{ij}	p_{ij}
3+1p	6	0.023
3+1p+1p	2	0.008
(2)+(2)	1	0.004
3+2dn	33	0.126
3+1p+2dn	22	0.084
3+2dn+1c$\bar{m}$	18	0.069
3+2dn+1gp	15	0.058
3+2gp+1c$\bar{m}$	20	0.076
1 I 1+1p	2	0.008
3 - 1	5	0.019

$N_3 = 262$

71 0.391 (4)

	n_{ij}	p_{ij}
4+1p	7	0.039
3+(2)	2	0.012
4 +2dn	36	0.198
4+1 c$\bar{m}$	14	0.077
4+1gp	17	0.094
4+2gp	8	0.044
4+1gp+1c$\bar{m}$	13	0.072
4+1c$\bar{m}$+1c$\bar{m}$	9	0.050
3 I 1	1	0.006
4 - 1	3	0.017

$N_4 = 181$

32 0.442 (5)

	n_{ij}	p_{ij}
4 +2p	3	0.041
4+2p	3	0.041
5+1c$\bar{m}$	13	0.180
5+1gp	16	0.227
5 -1	3	0.041
4 I1	1	0.014
3 I 2	1	0.014

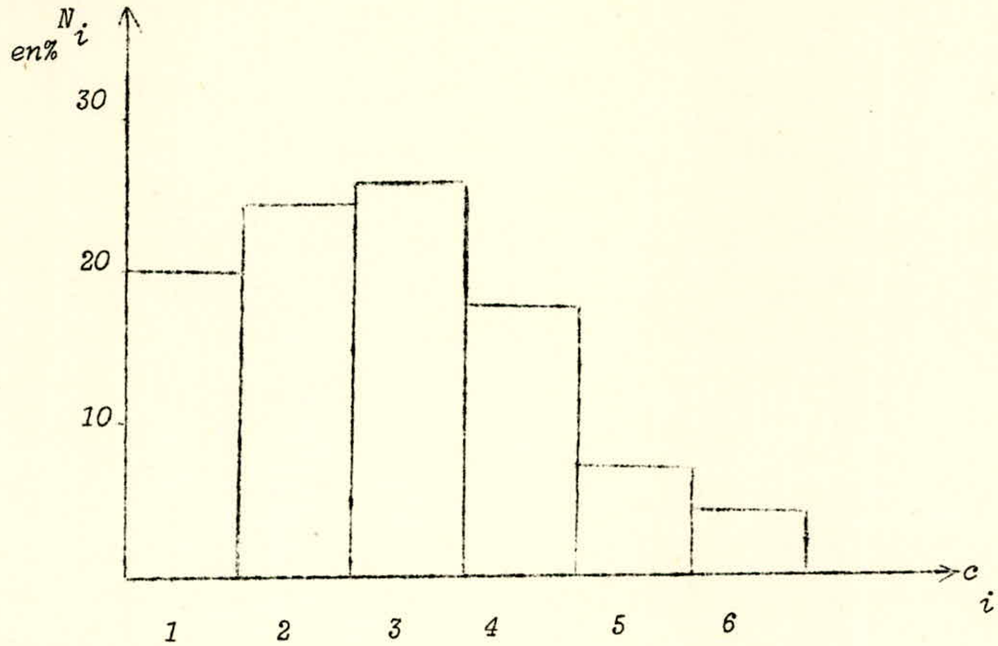
$N_5 = 72$

22 0.538 (6)

	n_{ij}	p_{ij}
6-1	5	0.122
3 I 2+1p	3	0.073
2+I 2dnI 1cm+1gp	7	0.170
2+2gp I 2dn	4	0.097

$N_6 = 41$

D'où l'histogramme :



a) Matrice detransition :

Nous avons vu que le passage d'une famille donnée d'un état E_i à un état E_j peut se faire de diverses maniéres. Soit une famille à l'état E_i (ç à d qu'elle se compose de i membres), elle peut passer à l'état E_{i+1} soit par mariage d'un élément, soit par naissance, soit par migration etc....

Ce phénoméne s'illustre dans l'échantillon suivant, avec $E_i = \bigcup_k E_i^k$

k : structure familiale. Si nous tenons compte de ces diverses maniéres de passage d'un état à un autre pour chaque type de famille, nous aurons à construire une matrice de passage de grande dimension où chaque structure familiale constituerait un état.Mais nous ne pouvons nous permettre une telle étude vu la difficulté de dénombrement de toutes ces structures et l'absence de données sous cette forme .

La probabilité de passage s'exprimerait alors par :

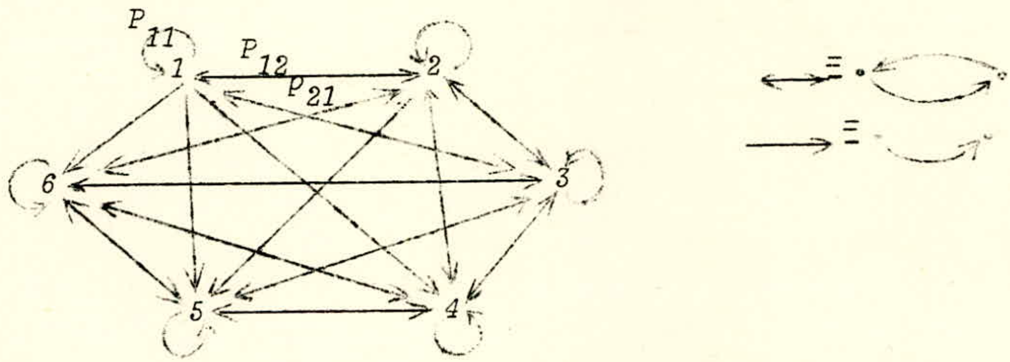
$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_i(E_j^k)$$

L'ensemble des p_{ij} $i = 1,n$; $j = 1,n$ constitue la matrice de transition.

$$
\begin{array}{cc|cccccc|}
 & & & & E_j & & & \\
 & \text{Etats} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0.343 & 0.163 & 0.040 & 0.139 & 0.175 & 0.135 \\
 & 2 & 0.030 & 0.308 & 0.029 & 0.202 & 0.259 & 0.172 \\
 & 3 & 0.008 & 0.019 & 0.525 & 0.027 & 0.134 & 0.287 \\
E_i & 4 & 0 & 0.006 & 0.017 & 0.391 & 0.222 & 0.364 \\
 & 5 & 0 & 0 & 0.014 & 0.055 & 0.442 & 0.389 \\
 & 6 & 0 & 0.170 & 0.073 & 0.097 & 0.122 & 0.538 \\
\hline
\end{array}
$$

b) Graphe associé à la matrice de transition :

Nous aurons un chemin entre deux états E_i et E_j et dans le sens ij, s'il existe une probabilité de passage p_{ij} , non nulle.



A partir de ce graphe nous pouvons suivre l'évolution d'une famille donnée et par conséquent déterminer sa "trajectoire " depuis son état initial jusqu'à l'état final qui doit correspondre à la date de prévision.

Propriétés et contraintes imposées au modéle :

a- Nous avons supposé que les éléments p_{ij} sont constant et par conséquent la matrice de transition est indépendante de la date considérée. Cette hypothése nous donne la propriéré stationnaire de la chaine. Nous pouvons au cas où les résultats du modéle ne semblent assez précis, revenir sur cette supposition.

b- Nous avons déja vu au § précédent que le processus est homogéne du fait que les p_{ij} ne dépendent que de la période $(t_f - t_i)$.

c- La matrice de transition est irréductible puisque tous les états appartiennent à la même classe (le graphe est fortement connexe).

Chapitre 3. Prévisions par différentes Méthodes .

§ 3.1 L'interpolation

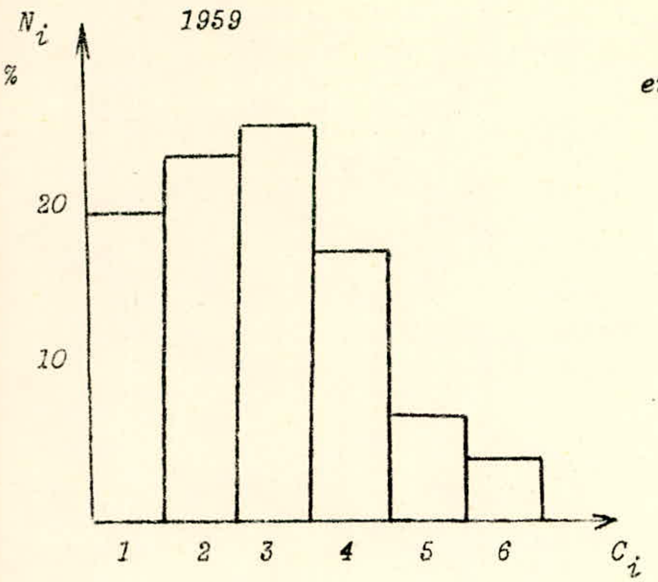
a- L'interpolation parabolique : ayant n valeurs y_1 , $y_2, \dots y_n$ de la fonction f(x) pour n valeurs x_1 , $x_2, \dots x_n$ de la variable x nous pouvons traduire cette fonction par un polynome P(x) qui prend les valeurs de la fonction pour les mêmes valeurs $x_1, \dots, x_n$. Ce polynome P(x) s'exprime sous la forme suivante dite forme de Lagrange :

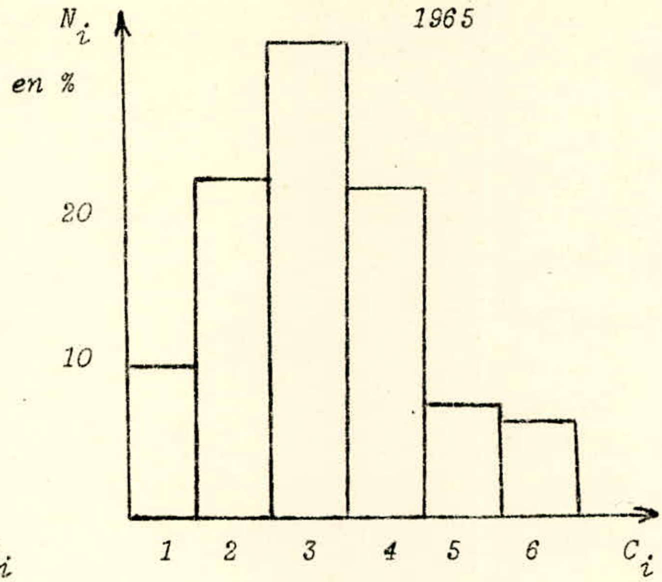
$$P(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

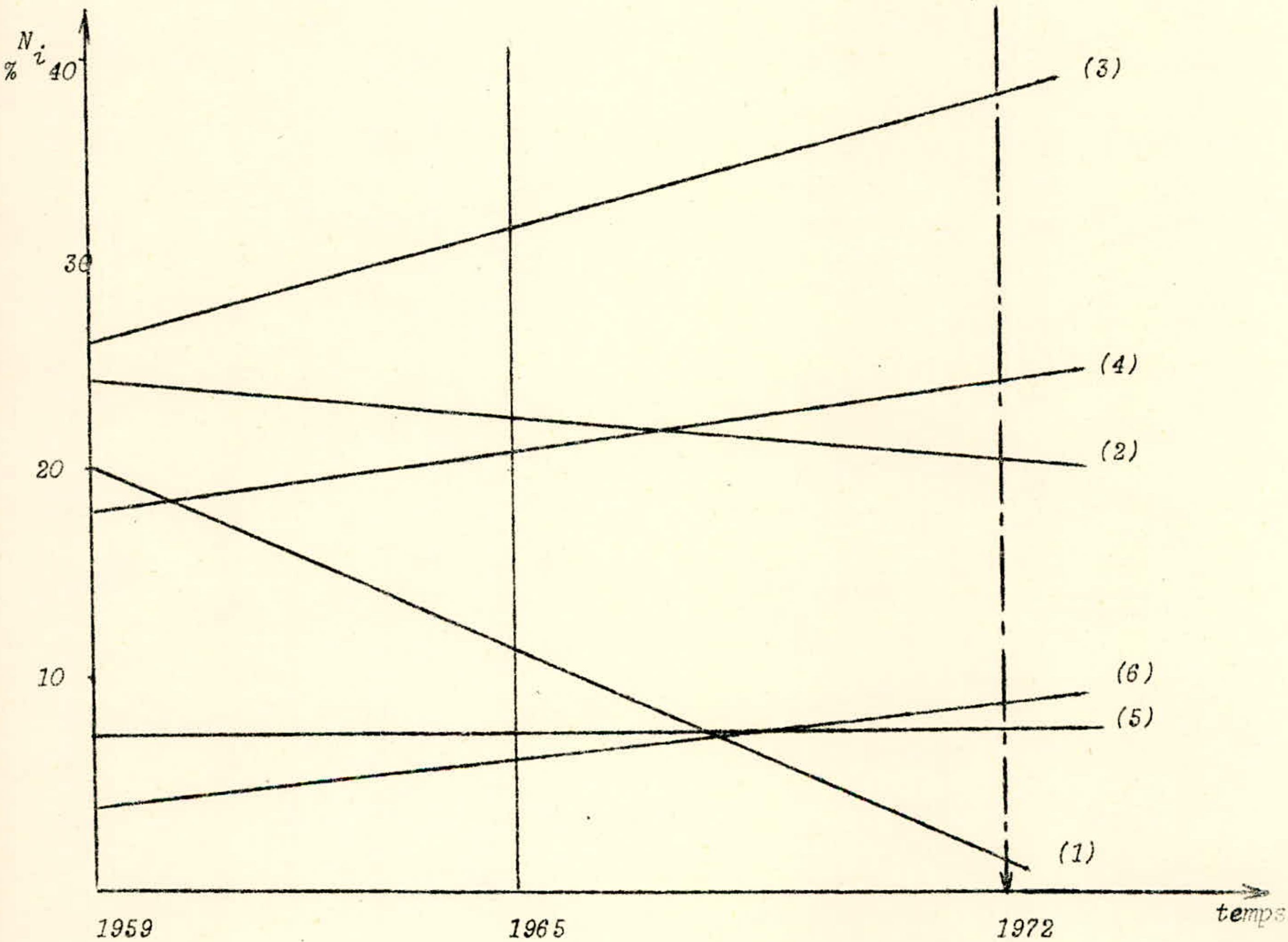
b- L'interpolation liénaire ; c'est un cas particulier d'interpolation parabolique. En effet nous l'aurons pour n = 2 , ce qui veut dire que nous connaissons deux points de la fonction qui se reduit à une droite d'équation :

$$P(x) = y_1 + (x-x_1) \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

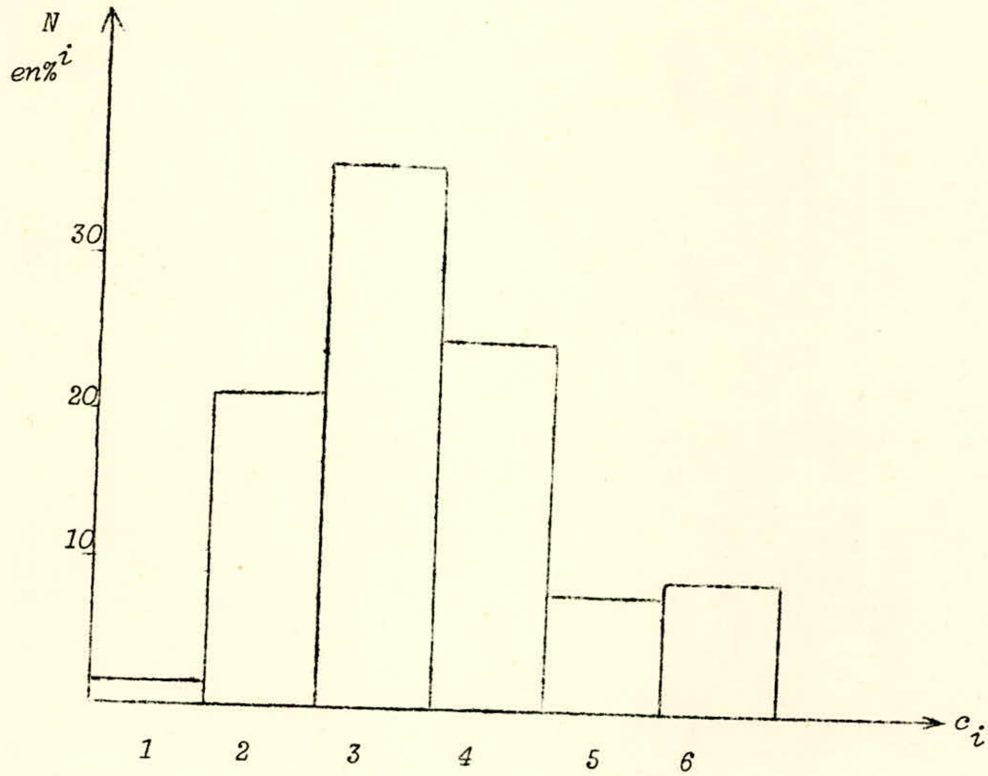
Connaissant les valeurs N_{ci1} et N_{ci2} pour le type c_i à deux dates de recensement t_1 et t_2 , nous pourrons porter ces points (N_{ci1} , t_1) et (N_{ci2} , t_2) dans le repére orthonormé (N_{ci}, t) et tracer graphiquement la droite qui passe par ces deux points. Puis par projection, sur les axes du repére, des points de cette droite, déterminer N_{ci} (le nombre de familles de type c_i) à la date t. Ayant le nombre de familles par type de structure des années 1959 et 1965, il serait intéréssant à partir de ces données de prévoir par extrapolation le nombre de familles par type de structure pour l'année 1972. Et, comme nous disposons des résultats du recensement de cette même année, nous pourrons faire la comparaison entre les résultats de cette prévision et les résultats réels.


1959
N
i
%
20
10
1
2
3
4
5
6
C
i


1965
N
i
en %
20
10
1
2
3
4
5
6
C
i


N
i
%
40
30
20
10
(3)
(4)
(2)
(6)
(5)
(1)
1959
1965
1972
temps

Histogramme de la prévision de 1972 par l'interpolation linéaire.



Remarquons que la méthode de prévision par l'interpolation linéaire fastidieuse aux limites c'est à dire pour les types 1,5 et 6 est par contre pour les types 2,3 et 4 elle donne une assez bonne approche de l'histogramme réel que nous verrons au chapitre 5.

§ 3.2 La méthode des moyennes :

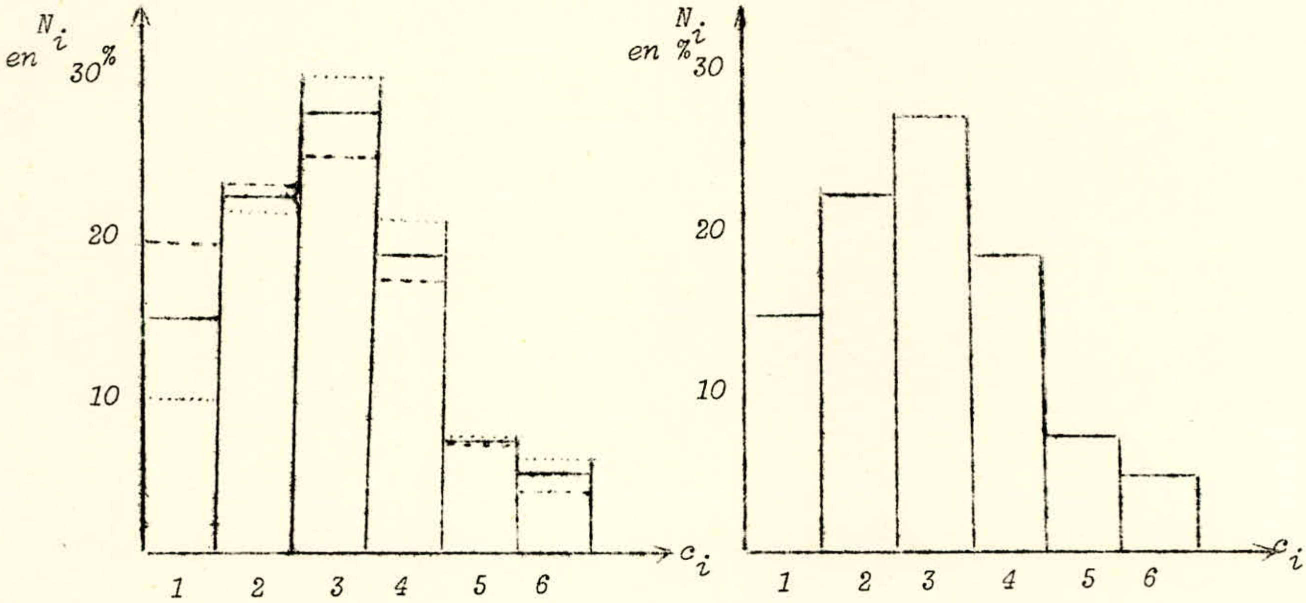
Etant donné les informations statistiques relatives aux recensements effectués à différentes dates, et considérant que le phénoméne d'évolution pour un type de famille donné ne change pas trop dans le temps, nous pouvons appliquer la méthode dite " des moyennes ".
Elle consiste à tracer l'histogramme de l'année de prévision à partir des histogrammes des différents recensements.
Si n est le nombre de recensements effectués à différentes dates, pour le type de famille c_i la prévision sera :

$$N_{im} = \frac{\sum_{k=0}^{n} N_{ik}}{n}$$

Nous construirons l'histogramme de la prévision tel que $N_{it} = N_{im} \begin{matrix} + & N_i \text{ sup} \\ - & N_i \text{ inf} \end{matrix}$

où t est la date de prévision.

Nous pouvons faire la même application que celle du paragraphe 3.1



---- : *histogramme de l'année 1959*

.... : *histogramme de l'année 1965*

—— : *histogramme prévisionnel de l'année 1972*

Nous constatons que cette méthode donne une meilleure prévision, pour l'ensemble des différents types de famille, que la précédente . Nous voyons que l'histogramme prévisionnel est semblable à celui des années 1959 et 1965.

§ 3.3 *La méthode exponentielle* :

C'est peut être la seule méthode qui prend en compte les facteurs qui influent sur la structure de la famille.

Ces mêmes facteurs influent sur le type de logements, ce sont :

1- *Le développement de nouvelles formes d'organisation sociale de la population.*

2- *L'augmentation des normes de l'espace vital par personne.*

3- *La dynamique des structures de famille et des compositions démographiques des populations.*

4- *La dynamique des structures de logements.*

5- *Les perspectives de développement des bases industrielles et des constructions de logements.*

D'autre part l'analyse de données démographiques dans le temps nous fait voir que le changement des structures de famille est lié à certains facteurs principaux à savoir :

a- Le niveau des naissances qui est en baisse dans presque tous les pays.

b- La diminution de la mortalité en général et de la mortalité infantile en particulier.

c- L'augmentation de l'espérance de vie (longévité moyenne) de la population. Ce qui a comme conséquence une augmentation du nombre de familles comprenant des personnes âgées et même une certaine stabilisation des familles avec le même nombre de membres.

d- La migration de plus en plus grande vers les villes.

e- L'augmentation du niveau de vie aussi bien de vue matériel qu'intellectuel.

En utilisant ces facteurs, nous pourrons proposer une méthode de prévision, dite " exponentielle " si nous disposons des données statistiques suivantes

Δe : le coefficient d'augmentation de la longévité moyenne .

w : le taux moyen par an de diminution de la mortalité infantile.

N_i : le nombre de familles de type c_i à la date à partir de laquelle commence la prévision.

α_j : Les coefficients de changement d'état des familles par j naissances.

Cette méthode s'exprime par les relations suivantes :

Type :	relation :
1	$N_{1n} = N_1 (\Delta e)^n$
2	$N_{2n} = N_2 (\Delta e)^n$
3	$N_{3n} = N_3 (\alpha_1 . \Delta e)^n$
4	$N_{4n} = N_4 (\alpha_2 . (\Delta e)\frac{1}{w})^n$
5	$N_{5n} = N_5 \left[\alpha_3 .(\Delta e)\frac{1}{w}\right]^n$
6	$N_{6n} = N_6 \left[\alpha_4 .(\Delta e)\frac{1}{w}\right]^n$

etc... Pour le reste des types nous appliquerons cette dernière formule avec des α_j variant avec le type.

N_{in} : sera le nombre de familles de type ς_i dans n années.

Comment calculer Δ e, w et α_j ?

Vu que nous ne possédons que les données des recensements effectués aux dates t_0 et t_m, nous déterminerons ces coefficients par la moyenne géométrique qui, dans notre cas, nous est donnée par la formule :

$$\Delta e = \sqrt[m]{\frac{x_m}{x_0}} \qquad w = \sqrt[m]{\frac{k_m}{k_0}} \qquad \alpha_j = \sqrt[m]{\frac{e_{jm}}{e_{j0}}}$$

x_m et x_0 étant respectivement les espérances de vie aux dates et t_0

k_m et k_0 étant respectivement les taux de mortalité infantile aux dates t_m et t_0

e_{jm} et e_{j0} étant respectivement le total des familles qui ont j enfants aux dates t_m et t_0 sur des échantillons de même taille.

Application numérique avec les données de 1959 et 1965 déja utilisées dans les méthodes précédentes.

$t_0 = 1959$ $\qquad t_m = 1965$ $\qquad m=6$

Année de prévision : 1972 $\qquad n=7$

Année	1959	1965
Espérance de vie	60	66
Taux de mortalité infantile	32. 4	29. 5
Famillesayant 1 enfant	152	184
Familles ayant 2 enfants	38	44
Familles ayant 3 enfants	10	11
Familles ayant 4 enfants	4	5

Déterminons les valeurs de Δe,w et les coefficients α_1 , α_2 ,...

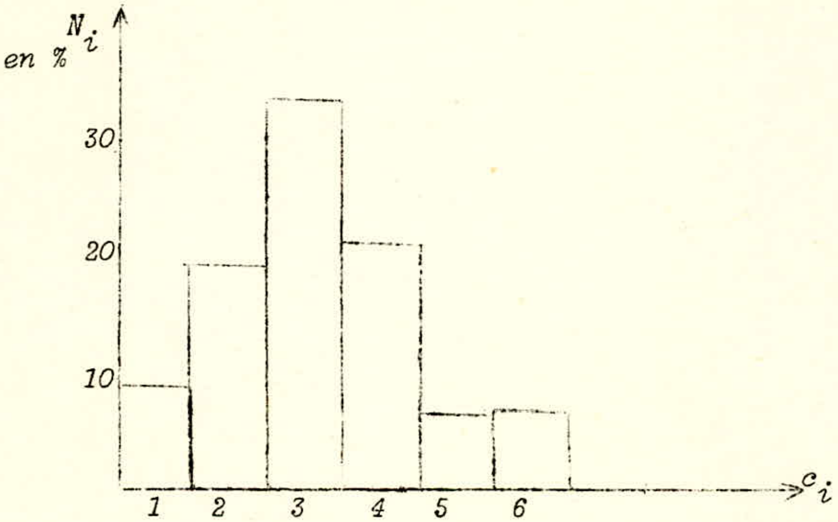
$$\Delta e = \sqrt[6]{\frac{66}{60}} = 1.106 \qquad w = \sqrt[6]{\frac{29.5}{32.4}} = 0.984 \qquad \alpha_1 = \sqrt[6]{\frac{184}{152}} = 1.032$$

$\frac{1}{w} = 1 / 0.984 = 1.016$ $\alpha_2 = 1.025$ $\alpha_3 = 1.016$ $\alpha_4 = 1.038$

ce qui nous donne finalement la prévision suivante pour l'année 1972 :

$i = 1$ .... $N_{1n} = 10.50\ (1.016)^7 = 11.73$
$i = 2$ .... $N_{2n} = 22.75\ (1.016)^7 = 25.43$
$i = 3$ .... $N_{3n} = 31.75(1.032.\ 1.016)^7 = 44.25$
$i = 4$ .... $N_{4n} = 21.00(1.025\ .\ 1.016\ .\ 1.016)^7 = 27.89$
$i = 5$ .... $N_{5n} = 7.75(1.016\ .\ 1.016\ .\ 1.016)^7 = 8.80$
$i = 6$ .... $N_{6n} = 6.25(1.038\ .\ 1.016\ .\ 1.016)^7 = 9.07$

Histogramme prévisonnel de l'année 1972



Comparaison des resultats des différentes méthodes de prévision aux résultats reéls receuillis par le recensement de l'année 1972 .

méthodes / Type	3.1	3.2	3.3
1	1.66	15.3 0	9.24
2	20.66	23.53	20.02
3	36	28.98	34.84
4	24.33	19.60	21.96
5	7.66	7.48	6.93
6	8.83	5.18	7.14

Les chiffres des colonnes 3.1 , 3.2 et 3.3 expriment la répartition en % de l'ensemble des familles entre les différents types.(tableau précédent) . Ces chiffres nous prouvent bien que la méthode qui donne des résultats avec l'erreur la plus faible (6,7 %) est celle qui ne fait pas abstraction des facteurs qui influent sur la structure de la famille

Tableau des erreurs de la prévision

Type	Résultats Réels	Erreur de la Prévision		
		3.1	3.2	3.3
1	11.2	0.851	0.366	0.175
2	21.08	0.019	0.116	0.050
3	32.65	0.102	0.112	0.067
4	20.9	0.164	0.062	0.050
5	7.2	0.063	0.038	0.037
6	6.97	0.266	0.256	0.024
	Erreur Moyenne	0.244	0.158	0.067

Chapitre 4 : Algorithme de la Prévision

§4.1 Schéma Général :

Soient $E_1, E_2, \ldots E_n$ les n états possibles d'une famille. Les indices $1,2,\ldots n$ désignent le type (on dit qu'une famille est de type c_i si elle comprend i membres).

Si à l'instant s la famille se trouve à l'état E_i, à l'instant $t (t > s)$ elle sera à l'état E_j $j=1,\ldots n$ avec la probabilité $p_{ij}(s,t)$ qui est appelée probabilité de passage de E_i en E_j au bout d'un temps $(t-s)$ avec bien entendu : $p_{ij}(s,t) \geq 0$

$$\text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s,t) = 1$$

si $p_{ij}(s,t) = 0$ la transition est impossible.

$p_{ij}(s,t) \geq 0$ signifie que si à la date s la famille est en E_i, à la date t $(t > s)$ elle devra être obligatoirement en l'un des états E_j $j=1,\ldots,n$

Nous désignerons, dans tout ce qui suit, par $X(t)$ la situation de la famille à l'instant t et $p_{ij}(s,t)$ s'écrira alors :

$$p_{ij}(s,t) = P\left[X(t)=E_j / X(s)\right]$$

Cette probabilité conditionnelle s'exprime aussi de la façon suivante :

$P\left[X(t_n) / X(t_1), X(t_2) \ldots, X(t_{n-1})\right]$: probabilité qu'une famille aboutisse à l'état $X(t_n)$ sachant qu'elle est passée par les états $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_{n-1})$ avec $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Et, pour chaque transition nous aurons l'égalité :

$P\left[X(t_n) \leqslant \lambda / X(t_2), \ldots, X(t_{n-1})\right] = P\left[X(t_n) \leqslant \lambda / X(t_{n-1})\right]$

Probabilité pour que la famille soit à l'état E_λ à la date t_n conditionnelle à $X(t_{n-1})$, où λ désigne le nombre de membres relatifs à un type de situation.

Cette égalité exprime la propriété d'homogénité de la chaine, autrement dit qu'une situation donnée ne dépend que de la situation qui lui est antérieure.

Soient les temps $s < t < u$, la probabilité de transition de $X(s)$ à $X(u)$ s'écrit

$$(1) \quad p_{ik}(s,u) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s,t) \cdot p_{jk}(t,u) \qquad \text{avec } 0 \leqslant t < u$$

Cette équation est appelée " équation de Chapman - Kolmogorov " dans le cas discret . Cette transition $E_i \longrightarrow E_k$ à laquelle correspond la probabilité $p_{ik}(s,u)$ peut être schématisée de la façon suivante :

Etats de la famille : $E_i \longrightarrow E_j \longrightarrow E_k$

E_j pouvant être n'importe quelle situation $E_1, \ldots E_n$, c'est pourquoi dans l'équation (1) nous sommons sur l'indice j

Chaque élément de cette somme correspond à la probabilité de passage de E_i à E_k pour j fixé et , l'ensemble de ces éléments représente toutes les possibilités de passage de $E_i \longrightarrow E_k$.

L'équation (1) s'écrit sous forme matricielle :

$$[P(s,u)] = [P(s,t)] \cdot [P(t,u)]$$

La matrice $P(t,t)$ sera la matrice unité .

La chaine de Markov associée au phénoméne d'évolution des structures de famille étant homogéne, la probabilité $p_{ij}(s,t)$ ne dépend que de $(t-s)$ et on pourra l'écrire sous la forme : $p_{ij}(s,t) = p_{ij}(\Delta t)$ où $p_{ij}(t)$ signifiera que le processus se trouvant à l'état E_i à la date initiale $t = 0$, transferera au bout d'un temps t en E_j $j = 1,2,\ldots n$.

Pour les processus homogénes l'équation de Chapman-Kolmogorov s'écrit :

$$(2) \quad p_{ik}(s+t) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s) \cdot p_{ij}(t) \qquad s,t \geq 0$$

$$\text{avec} : p_{ik}(s+t) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(s+t) = 1$$

ou encore sous forme de matrice :

$$[P(s+t)] = [P(s)] \cdot [P(t)]$$

L' équation (2) est la fonction stationnaire markovienne en régime transitoire.

§ 4.2 Equations markoviennes

1-Etude du régime transitoire.

Pour résoudre le probléme c'est à dire determiner les $p_{ij}(t)$

nous ferons appel au théoréme fondamental du processus de Markov.

Théoréme : Pour toute fonction matricielle markovienne $[p_{ij}(t)]$, $\forall i,j$ *il existe une limite pour ces* $p_{ij}(t)$ *lorsque t devient trés grand (et le mouvement de ces limites croit exponentiellement).*

Ce théoréme permet de définir les probabilités de transition des équations différentielles que nous verrons plus bas.

Soit la matrice $[P(t)]$ *continue pour* $t=0$

Les éléments de la matrice $P(t)$ *sont continues d'aprés les conditions :*

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

qui signifient que si le temps de transition $E_i \longrightarrow E_j$ *devient trés petit (autrement dit il n'y a pas de changement d'état possible), la probabilité de passage correspondante tend vers zéro sauf pour* $i = j$ *(le systéme garde sa situation).*

D'autre part les $p_{ij}(t)$ *sont dérivables (l'existence de cette dérivée est exposée dans la théorie générale des chaines markoviennes).*

Posons : $$q_i = \lim_{t \to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0)$$

et $$q_{ij} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = p'_{ij}(0)$$

$Q = [q_{ij}]$ *étant la matrice dont les éléments sont les* q_{ij}

$$Q = \begin{bmatrix} -q_1 & q_{12} \cdots q_{1n} \\ q_{21} & \cdots\cdots\cdots \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ q_{n1} & -q_n \end{bmatrix}$$

Avec : $q_{ij} \geq 0$

et $$\sum_{j \neq i}^{n} q_{ij} = q_i$$

Les dérivées des équations de Chapman-Kolmogorov par rapport à chacune des variables seront :

$$\text{par rapport à } s : p'_{ik}(s+t) = \sum_{j=1}^{n} p'_{ij}(s) \cdot p_{jk}(t) \quad i,k=1,2,\ldots,n$$

$$\text{Par rapport à } t : p'_{ik}(s+t) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s)\, p_{ij}(s) \cdot p'_{ik}(t)$$

Pour s =0 puis t=0 et tenant compte du fait que t et s sont des temps nous aurons deux nouvelles équations :

$$p'_{ik}(t) = \sum_{j} p'_{ij}(0) \cdot p_{ik}(t)$$

et

$$p'_{ik}(t) = \sum_{j} p_{ij}(t) \cdot p'_{ik}(0)$$

Pour i=j et en se référant à l'expression des limites nous aurons :

$$(I) \quad p'_{ik}(t) = -q_i p_{ik}(t) + \sum_{j \neq k} q_{ij}\, p_{ik}(t)$$

$$(II) \quad p'_{ik}(t) = -q_k\, p_{ik}(t) + \sum_{j \neq k} q_{ik}\, p_{ij}(t) \qquad i,k=1,2,\ldots,n$$

Ces deux systémes sont à coefficients constants et c'est ce qui exprime la propriété stationnaire du processus.

Le systéme (I) est dit systéme indirect des chaines de Markov tandis que le (II) est appelé systéme direct.

Les conditions initiales du processus définissent la matrice unité dont les éléments sont :

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

a) Expression du systéme (I) sous forme matricielle et solution :

$$P'(t) = Q \cdot P(t)$$

$$P(0) = I \quad \text{matrice Unité}$$

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = Q \implies \underline{P(t) = P(0)\, e^{Qt}}$$

e^{Qt} : peut se développer en série de puissances croissantes, ce qui nous donne :

$$e^{Qt} = 1 + \frac{tQ}{1!} + \frac{t^2}{2!} Q^2 + \frac{t^3}{3!} Q^3 + \ldots\ldots + \frac{t^n}{n!} Q^n$$

$$\text{et } P(t) = P(0) + \frac{t}{1!} Q.P(0) + \frac{t^2}{2!} Q^2 . P(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!} Q^n . P(0)$$

ou encore :

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} -q_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ q_{n1} & \cdots & \cdots & -q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} -q_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & & \\ q_{n1} & & & -q_n \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Nous utiliserons la même méthode de résolution pour le systéme (II) .

b) Processus de prévision du nombre de familles qui sont dans la situation E_i :

A la date initiale que nous poserons t=0 nous devons avoir le nombre de familles pour chaque type . Soit $N_i(0)$ ce nombre, l'indice $i = 1, \ldots n$ indique le type de famille .

$\sum_{i=1}^{n} N_i(0)$: effectif total de toutes les familles ⇒

$$p_{ii}(0) = \frac{N_i(0)}{N(0)} .$$

Remarquons que la résolution du systéme (I) ou (II) sera alors possible, du fait que l'on connait les probabilités initiales, et, de deux maniéres :

a- Si le nombre d'états possibles est petit nous utiliserons la forme :

$$P(t) = P(0) . e^{Qt}$$

b- Par contre si ce nombre est grand nous ferons appel à la programmation.

Les solutions des équations markoviennes nous donnent la matrice de transition

P(t) et, la multiplication du nombre initial de familles à l'état E_i par P(t) nous donnera le nombre de familles à l'état E_j au bout d'un temps t.

Exemple : soit N_1 (0) le nombre de familles de type i=1 à la date initiale t = 0

$$N_i(0) \quad \overset{t=0}{E_i} \xrightarrow{\quad p_{ij}(t) \quad} \overset{t}{E_j} \qquad N_{ij}(t)$$

et donc $N_1(0) \cdot p_{1j}(t) = N_{1j}(t)$

avec : $$\sum_{j=1}^{n} N_{1j}(t) = N_1(0)$$

Le nombre de familles restant dans le même état est : $N_1(0) \cdot p_{11}(t) = N_{11}(t)$
soit $N_2(0)$ le nombre de familles qui sont à l'état E_2 à la date initiale.
$N_2(0) \cdot p_{2j}(t) = N_{2j}(t)$ *nombre de familles de type i =2 qui passent à l'état E_j à la date t.*

Si nous généralisons : E_i : état initial E_j état final .

$$N_i(0) \cdot p_{ij}(t) = N_{ij}(t)$$

et $$N_j(t) = \sum_{i=1}^{n} N_{ij}(t) .$$

$N_{ij}(t)$ *: Nombre de familles qui sont passées à l'état E_j au bout d'un temps t .*

$N_j(t)$ *: Nombre de familles de type j à cette date t.*

Exemple chiffré :

$i = 1 \quad N_1(0) = 100$ *nombre d'états* $n = 5$

$N_1(0) = 100$

$p_{ij}(t)$		
$P_{11} = 0.05$		$N_{11} = 5$
0.1	j=2	$N_{12} = 10$
0.05	j=3	$N_{13} = 5$
0.15	j=4	$N_{14} = 15$
0.65	j=5	$N_{15} = 65$

$$\sum_{j=1}^{n} N_{1j}(t) = 5+10+5+15+65 = 100 = N_1(0)$$

2.) - Etude du régime permanent :

Si nous avons n états possibles, nous aurons n^2 équations différentielles que nous résoudrons par l'étude assymptotique des fonctions-probabilités $p_{ij}(t)$. Il suffit donc d'étudier la limite de $p_{ij}(t)$ quand $t \to \infty$ (c'est à dire quand l'intervalle de temps correspondant au changement d'état devient grand). Cette limite éxiste d'aprés le théoréme fondamental vu au §4.2 . Le phénoméne d'évolution du changement des structures de famille devient donc permanent du fait que $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) =$ constante c'est d'ailleurs ce qui va nous permettre de considérer que le processus est stationnaire puisqu'il ne dépend plus de la date . $p_{ij}(t) = \text{constant} = p_{ij} \Rightarrow p'_{ij} = 0$

Et les systémes (I) et (II) deviennent des équations algébriques :

$$\sum_{j \neq k}^{n} p_{ij} \cdot q_{ik} = p_{ij}\, q_k$$

quelque soit le régime à étudier il faut déterminer les q_{ij} pour résoudre le systéme.

§4.3 <u>Détermination de la période de prévision et des éléments</u> q_{ij} :

a) Période de prévision :

Que ce soit en régime permanent ou transitoire les probabilités de passage p_{ij} ou $p_{ij}(t)$ peuvent être calculées si l'on dispose d'informations statistiques sur les structures de famille antérieures à la date origine $t = 0$, comme nous l'avons déja exposé au §2.3 . Ces probabilités de passage une fois calculées, nous pourrons déterminer pour chaque type de famille la trajectoire de son évolution par la méthode de calcul exposée au début de ce chapitre.

Soit $X(t)$ la trajectoire de ce processus .

A $X(t)$ nous associons le couple (E_k, p_k) où E_k : est un état

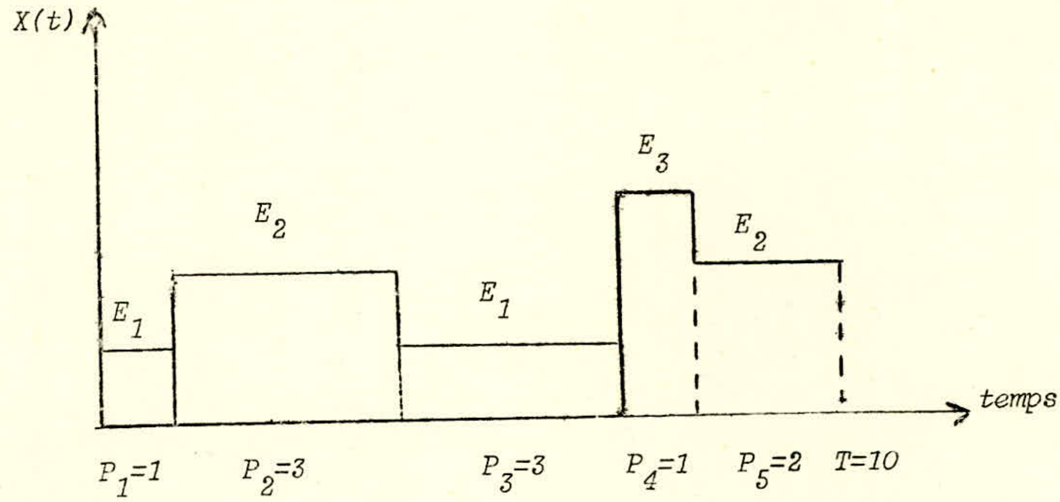
et p_k : le temps durant lequel le systéme garde cet état E_k . avec : $1 \leq k \leq \nu(t)$

$\nu(t)$: étant le nombre de transitions .

Le temps de prévision T appelé encore période de prévision sera défini par les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \leqslant T < \sum_{k=1}^{\nu(t)} p_k + p_{\nu(t)+1}$$

Schématisons ceci par un graphique : pour chaque type de famille nous aurons la trajectoire d'évolution semblable à celle-ci :



trajectoire d'évolution de ce type : $E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_3 \longrightarrow E_2$

b) Approximation des éléments q_{ij}.

Soient t_{ij} le total des durées du système dans l'état E_j sachant qu'il était dans l'état E_i à la date initiale de la période d'observation T. Et J_i : le total des durées du système dans un même état E_i pendant toute la période T . Dans l'exemple précédent, si l'échantillon observé est du type $C_i = 2$, nous aurons :

$$J_2 = p_2 + p_5 = 3+2=5$$

$$t_{21} = p_1 + p_3 = 1+3=4$$

$$t_{23} = p_4 = 1 .$$

A l'aide des t_{ij} et J_i nous pourrons calculer les éléments de la matrice Q par les formules d'approximation (ref. 3) :

$$q_{ij} = \frac{t_{ij}}{J_i} \qquad i \neq j$$

avec l'approximation : $$\left| q_{ij} - \frac{t_{ij}}{J_i} \right| \leqslant \frac{1}{\left[\nu(t)\right]^{1/3}}$$

$$\text{et } q_i = \sum_{j \neq i}^{n} q_{ij} = \frac{\sum_{j \neq i}^{n} t_{ij}}{J_i}$$

Ce qui nous donnera finalement les probabilités :

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} \simeq \frac{t_{ij}}{\sum_{j}^{n} t_{ij}} = \frac{t_{ij}}{t_i}$$

En conclusion notre algorithme de prévision pourrait se composer de quatre points essentiels, à savoir :

1°-Définir les q_{ij} à partir de la base d'informations statistiques.

2°-Construire l'un des systémes (I) ou (II) des équations markoviennes.

3°- Résoudre le systéme pour déterminer les probabilités de transition.

4°- Enfin faire le calcul par la méthode choisie ($p(t)=p(0).e^{Qt}$ par le développement en série de e^{Qt}) et tracer l'histogramme de la prévision.

Chapitre 5 : PROGRAMMATION .

§ 5.1. Présentation des données :

La détermination des éléments q_{ij} par la méthode déja exposée au chapitre 4 nécéssite des informations statistiques sur l'évolution de chaque structure de famille. Il nous faudrait donc comme données statistiques de base les trajectoires sur T années d'un échantillon de taille m_i pour chaque type c_i .

A chaque structure de famille s'associe alors un vecteur dont les composantes dépendront de trois paramètres :

- Le nombre n_{ij} de familles de type c_i qui sont passées à l'état E_j
- L'état E_j dans lequel sont passées ces n_{ij} familles.
- Le temps t_j durant lequel ces familles n_{ij} ont gardé l'état E_j. $j=1,\dots k$

Pour chaque type c_i nous aurons :

E_1	E_2	....	E_i	....	E_k
n_{i1} , t_1	n_{i2} , t_2	....	n_{ii}, t_i	....	n_{ik}, t_k

Une autre méthode de présentation de ces données nous permet de mieux saisir l'évolution de chaque type; elle consiste à utiliser ces données dans une matrice à 3 dimensions(type,temps,effectif).

Cette matrice peut-être décomposée suivant chaque type en matrices simples et, nous aurons alors autant de matrices (temps,état) que de structures de famille. Nous aurons ainsi la possibilité de voir l'évolution de l'échantillon tout au long de la période T d'observation, ainsi nous pourrons déterminer facilement les éléments q_{ij} . Etude de l'evolution du type c_i :

L'unite de temps etant l'année,l'observation se fait d'année en année.

états / années	E_1	E_2	.....	E_i	E_j	....	E_k
1	n^1_{i1}	.....	.....	n^1_{ii}	n^1_{ij}	....	.....
2	n^2_{i1}	.....	.....	.....	.....	....	.....
t	....	....	....	n^t_{ii}	n^t_{ij}	....	n^t_{ik} .....
T	......	......	....	n^T_{ii}	.....	....	n^T_{ii}

Il est évident qu'à chaque instant l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\sum_{j=1}^{k} n_{ij}^{t} = m_i \quad \forall c_i \,, \quad \forall t$$

m_i : étant la taille de l'échantillon de la structure c_i

n_{ij}^{t} : le nombre de familles de structure c_i qui sont passées à l'état E_j et qui gardent cet état durant le temps t.

A partir de ces tableaux nous pourrons calculer les éléments : $q_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$

n_{ij} : nombre total de familles qui ont transité de l'état E_i à l'état E_j durant la période d'observation T

n_i : nombre total de familles qui ont gardé l'état E_i durant la même période d'observation T.

$$q_{ii} = - \sum_{j=1}^{k} q_{ij} \qquad i \neq j$$

Chaque matrice de ce genre nous donnera les k éléments q_{ij} $j = 1, \ldots k$

Tenant compte de la pondération éxigée, les n_{ij} s'expriment par la relation :

$$n_{ij} = n_{ij}^{1} \times \frac{d_1}{T} + \sum_{t=2}^{t=T} (n_{ij}^{t} - n_{ij}^{1}) \cdot \frac{d_t}{T}$$

Comme $d_t = 1$ année $\forall t$

$$n_{ij} = \frac{1}{T} \cdot \left[n_{ij}^{1} + \sum_{t=2}^{t=T} \Delta n_{ij}^{t} \right] \text{avec } \Delta n_{ij}^{t} = n_{ij}^{t} - n_{ij}^{1}$$

D'autre part :

$$n_i = \sum_{t=1}^{t=T} n_{ii}^{t} \cdot \frac{d_t}{T}$$

$$n_i = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{t=T} n_{ii}^{t}$$

D'où
$$q_{ij} = \frac{n_{ij}^1 + \sum_{t=2}^{t=T} \Delta n_{ij}^t}{\sum_{t=1}^{T} n_{it}^t} \qquad \text{et} \quad q_{ii} = - \sum_{j=1}^{k} q_{ij}$$

$i \neq j$ toujours $j \neq i$

§5.2 <u>Algorithme</u> :

a- Recensement de l'ensemble N des structures de famille à la date initiale de prévision et stratification de cet ensemble suivant le type de structure.

b- Détermination du cardinal m_i de l'échantillon pour chaque structure c_i : soit M le cardinal de l'échantillon de l'ensemble des familles.
L'ensemble de familles de chaque type c_i constitue une strate dont le cardinal est N_i .
La taille de l'échantillon de la strate c_i sera :

$$m_i = \alpha_i \cdot M \quad \text{avec } \alpha_i = \frac{N_i}{N}$$

c- L'observation de chaque échantillon m_i pendant la période T nous permet d'établir son tableau correspondant qui résumerait l'évolution de la strate considérée.

d- Calcul des q_{ij}

e- Détermination de la matrice de transition $[P(t)]$

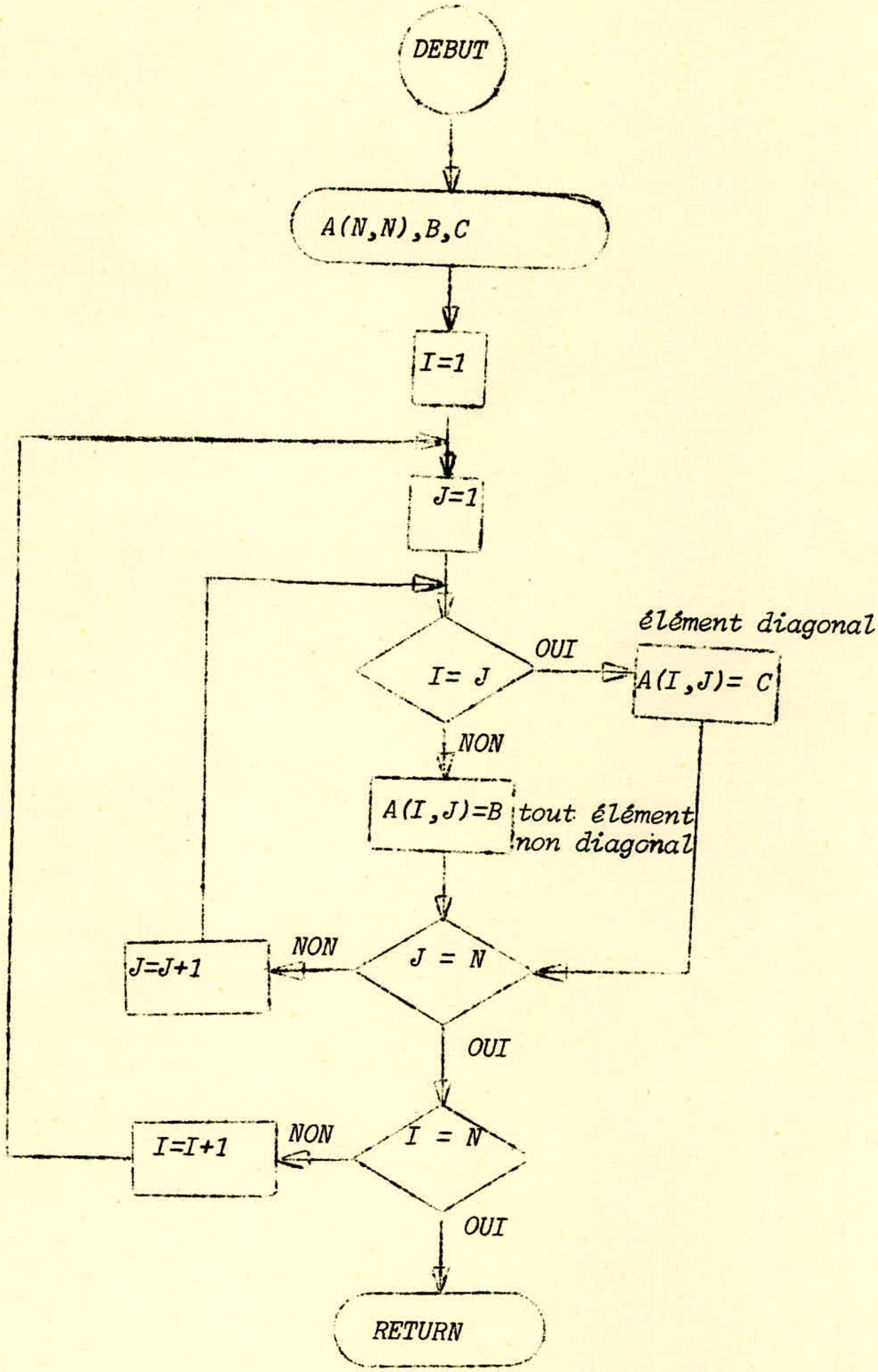
f- Calcul de l'effectif prévisionnel de chaque structure(pour $t=1,\ldots T$)

$$[N_T] = [P(T)] \cdot [N]$$

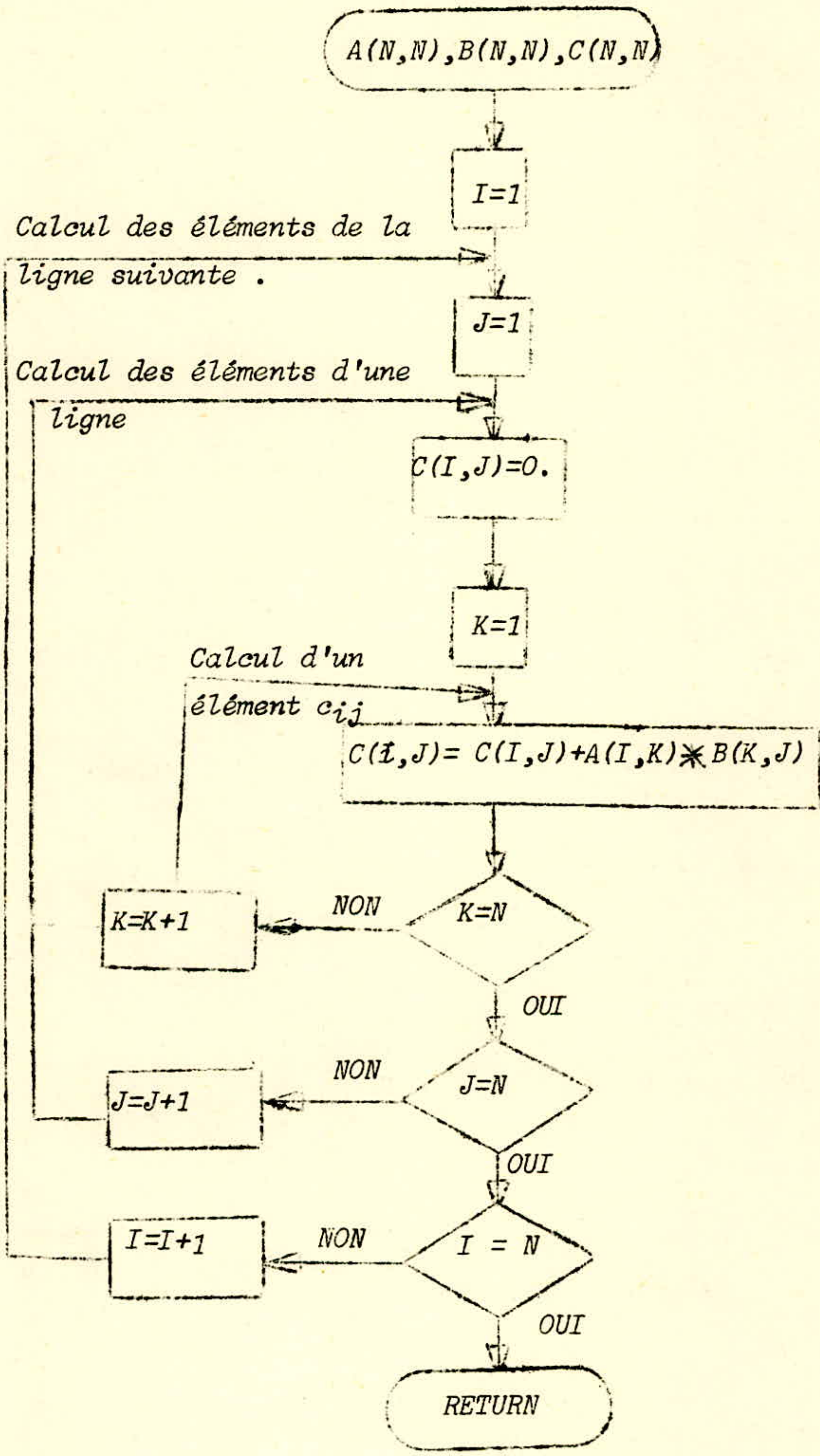
g- Pour pouvoir faire une prévision sur une période de 2 T, il nous faudrait observer pendant la 1° période T l'évolution des structures de famille. Cette évolution est exprimée dans le produit matriciel $[M_t] = [P(t)] \cdot [M]$. Nous pouvons alors prendre cette évolution prévisionnelle comme évolution expérimentale et repartir de c- , en suppossant que l'évolution des différents facteurs qui influent sur la structure de famille , entre autres le progrés technique, la mortalité , la natalité etc..... Suivrant pour des périodes égales les mêmes lois d'évolution.

§5.3 ORGANIGRAMMES

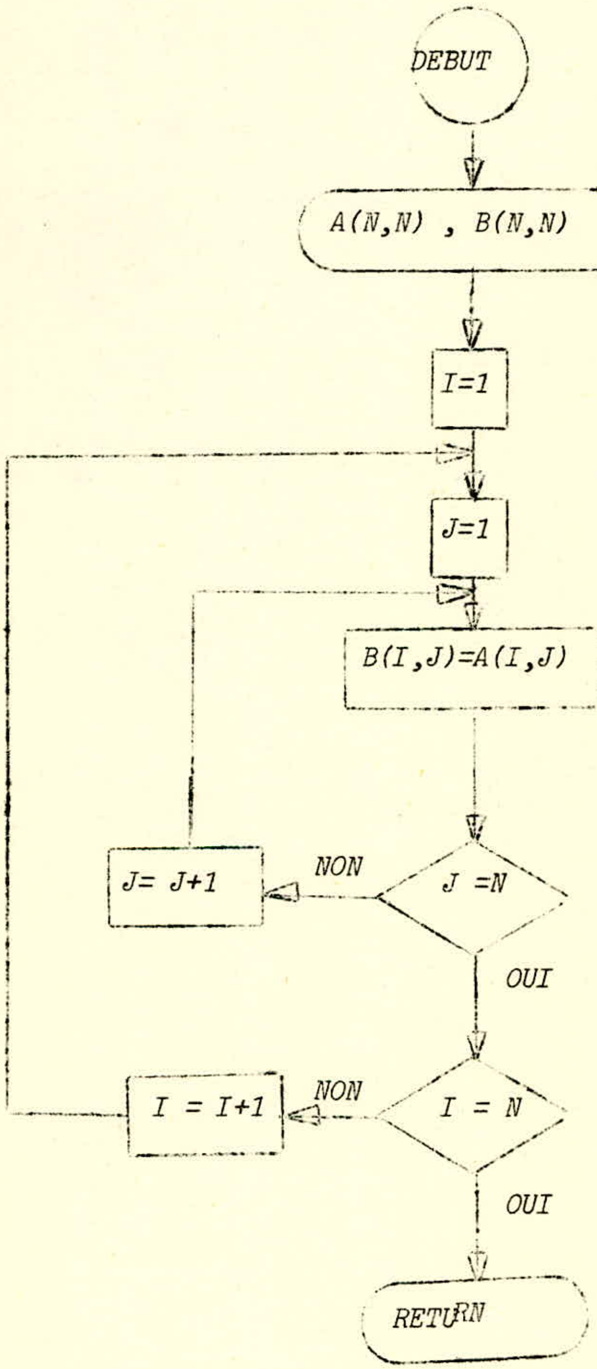
SOUS PROGRAMME AMAL . *Construction de matrices à partir de valeurs données.*



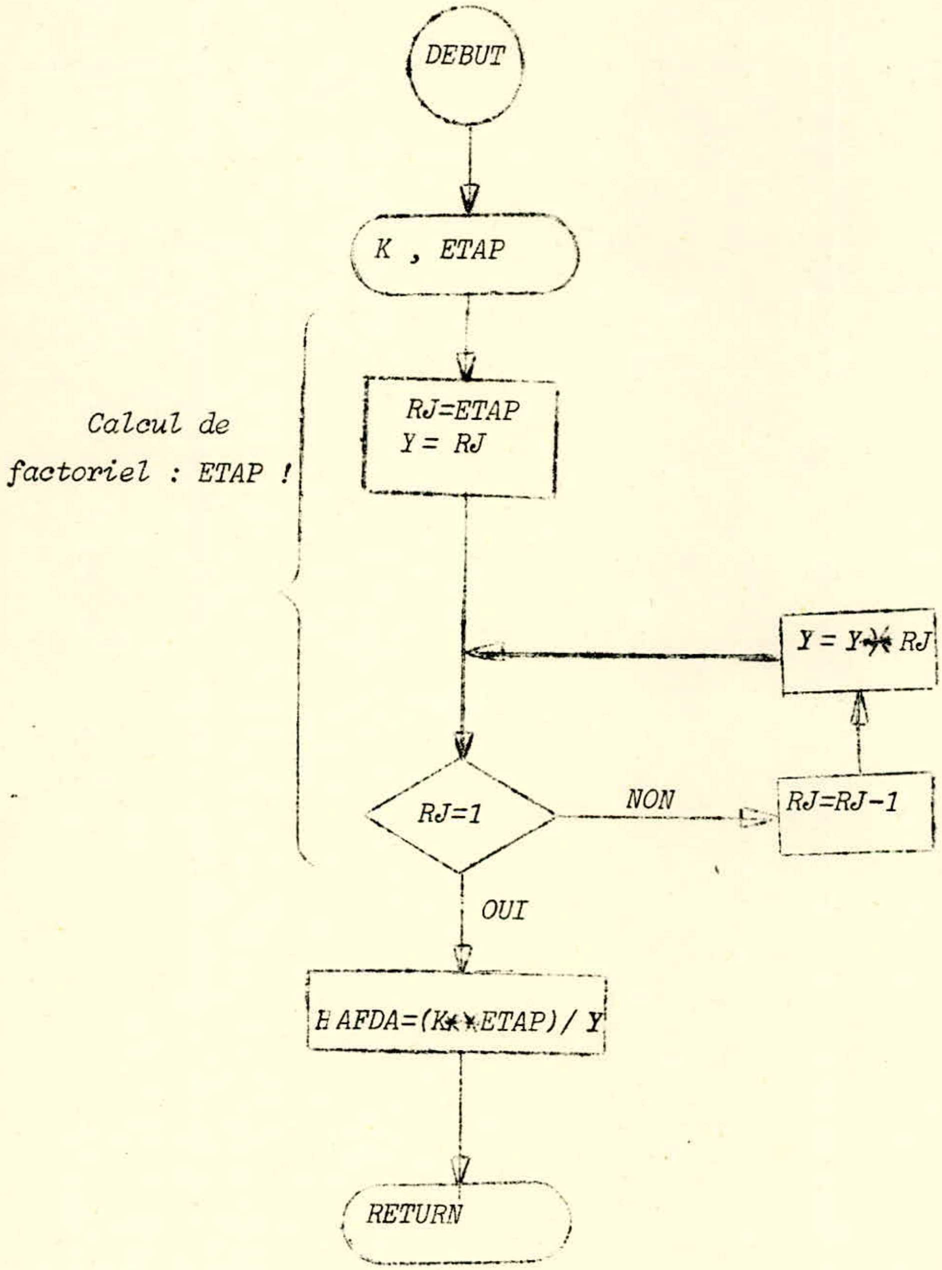
SOUS PROGRAMME SAID : *Multiplication matricielle*



SOUS PROGRAMME YASIN : Egalisation de deux matrices .

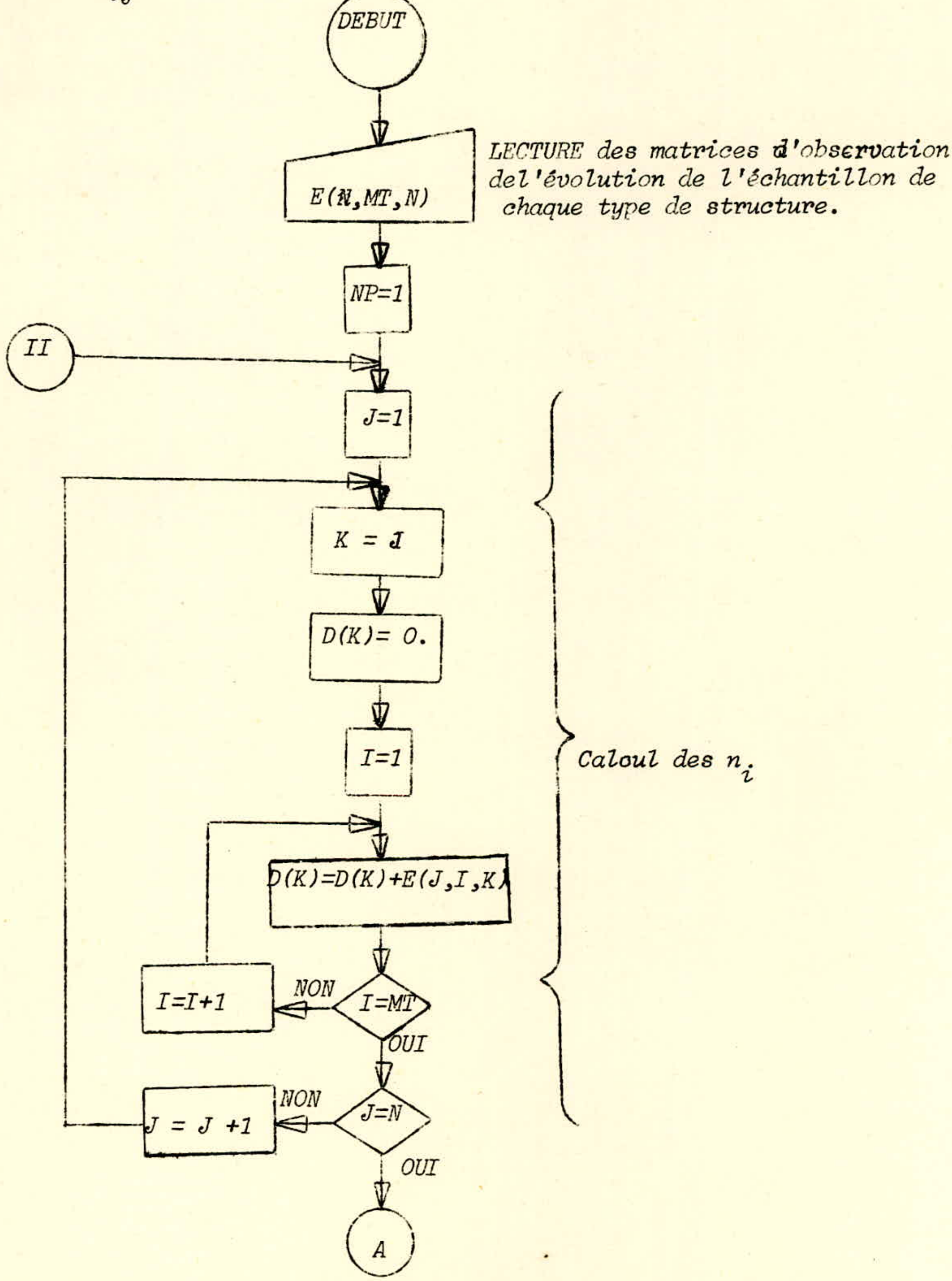


SOUS PROGRAMME HAFDA : Calcul du terme : (T**I) / I !

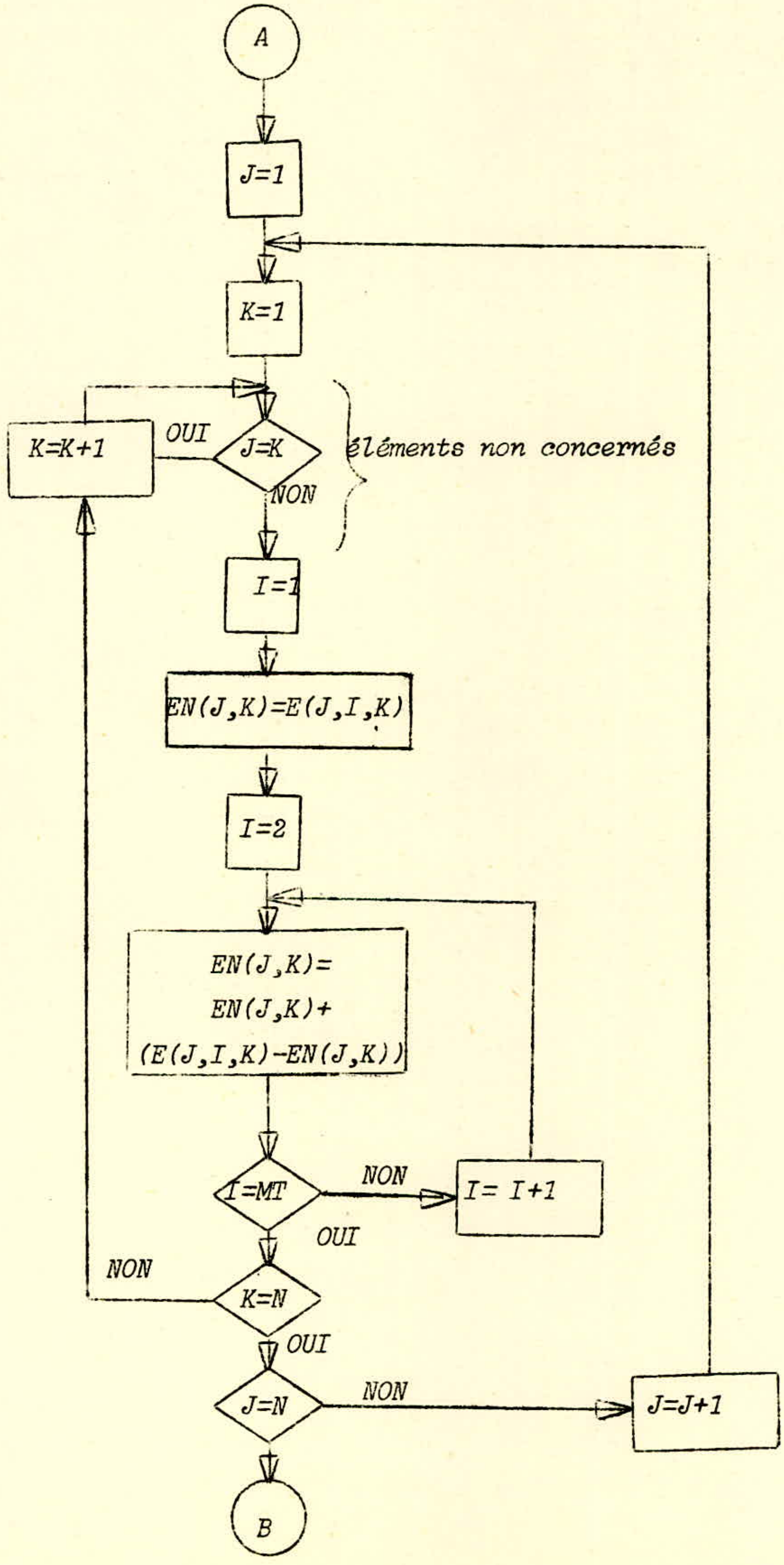


PROGRAMME PRINCIPAL :

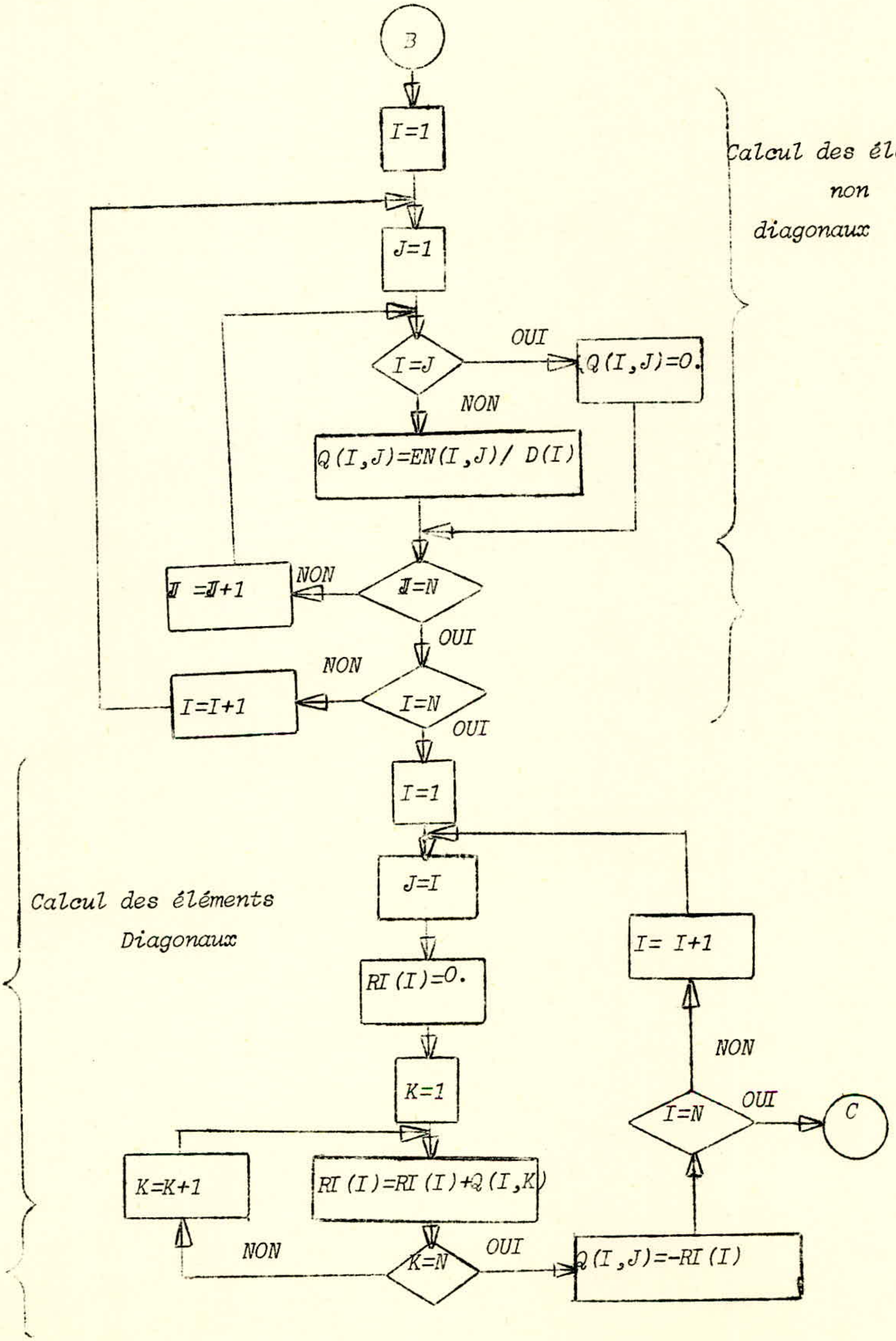
Calcul des éléments n_i et n_{ij} nécessaires à la détermination des éléments q_{ij}



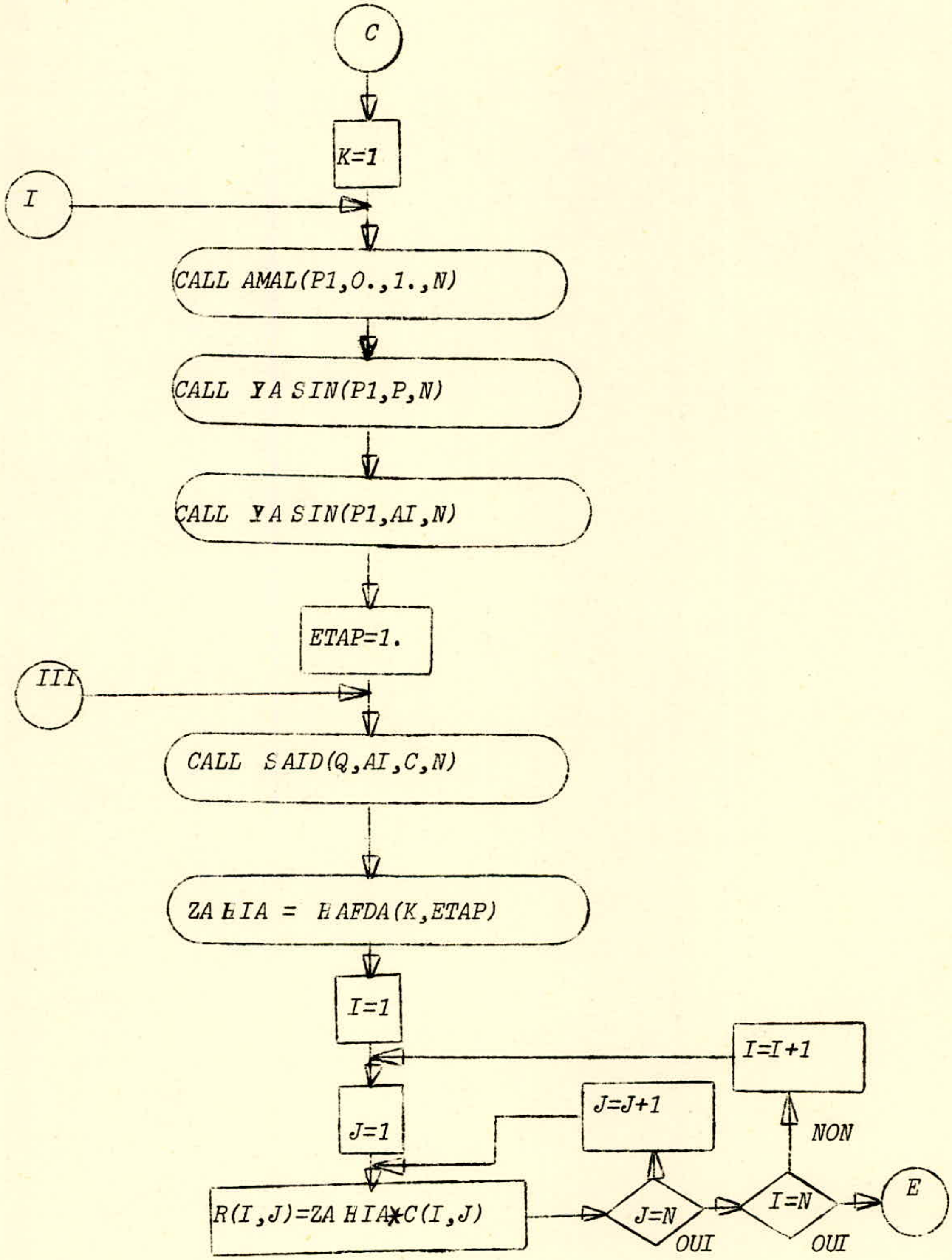
Calcul des éléments n_{ij}



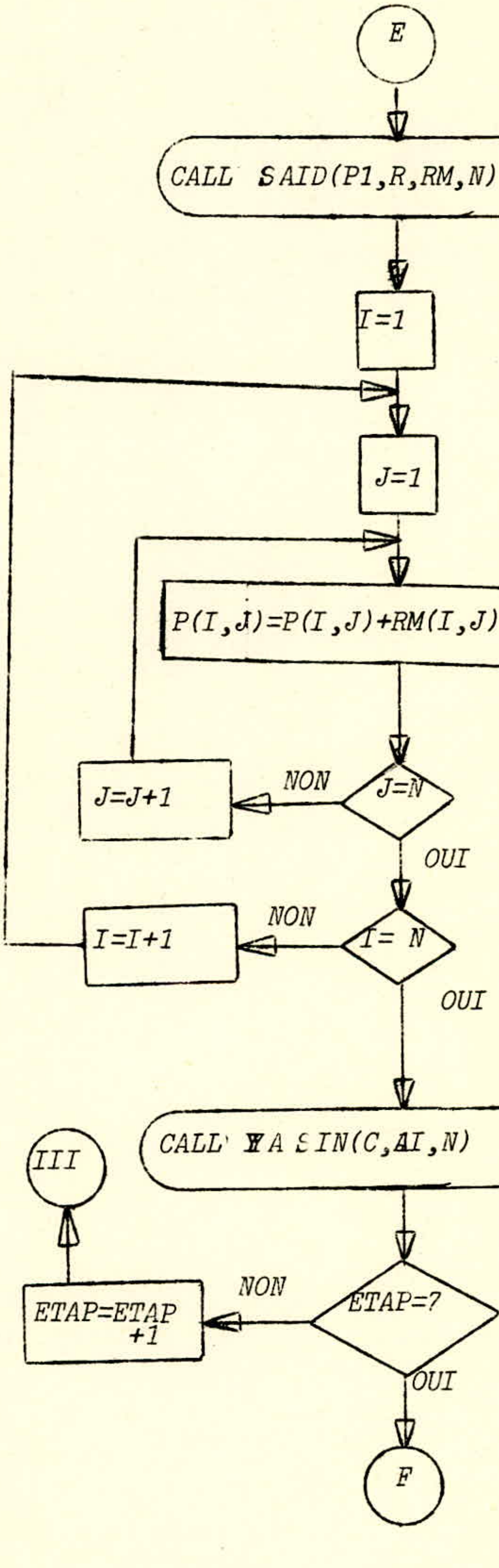
Calcul des éléments q_{ij}



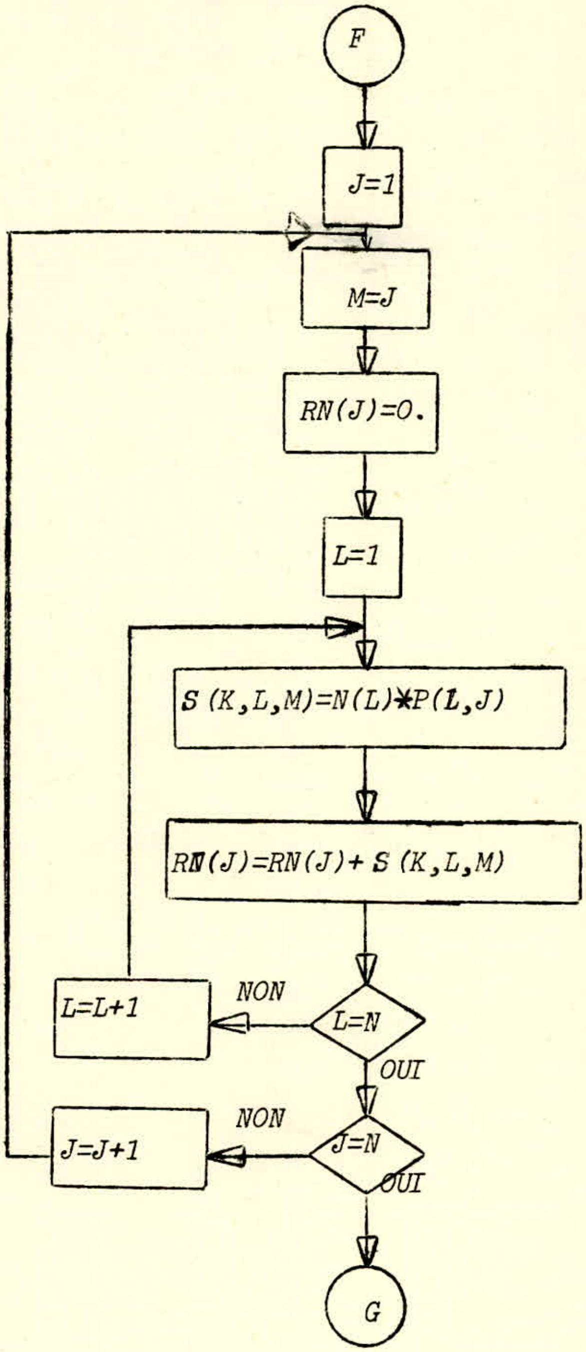
Calcul des éléments $p_{ij}(t)$ de la matrice de transition .



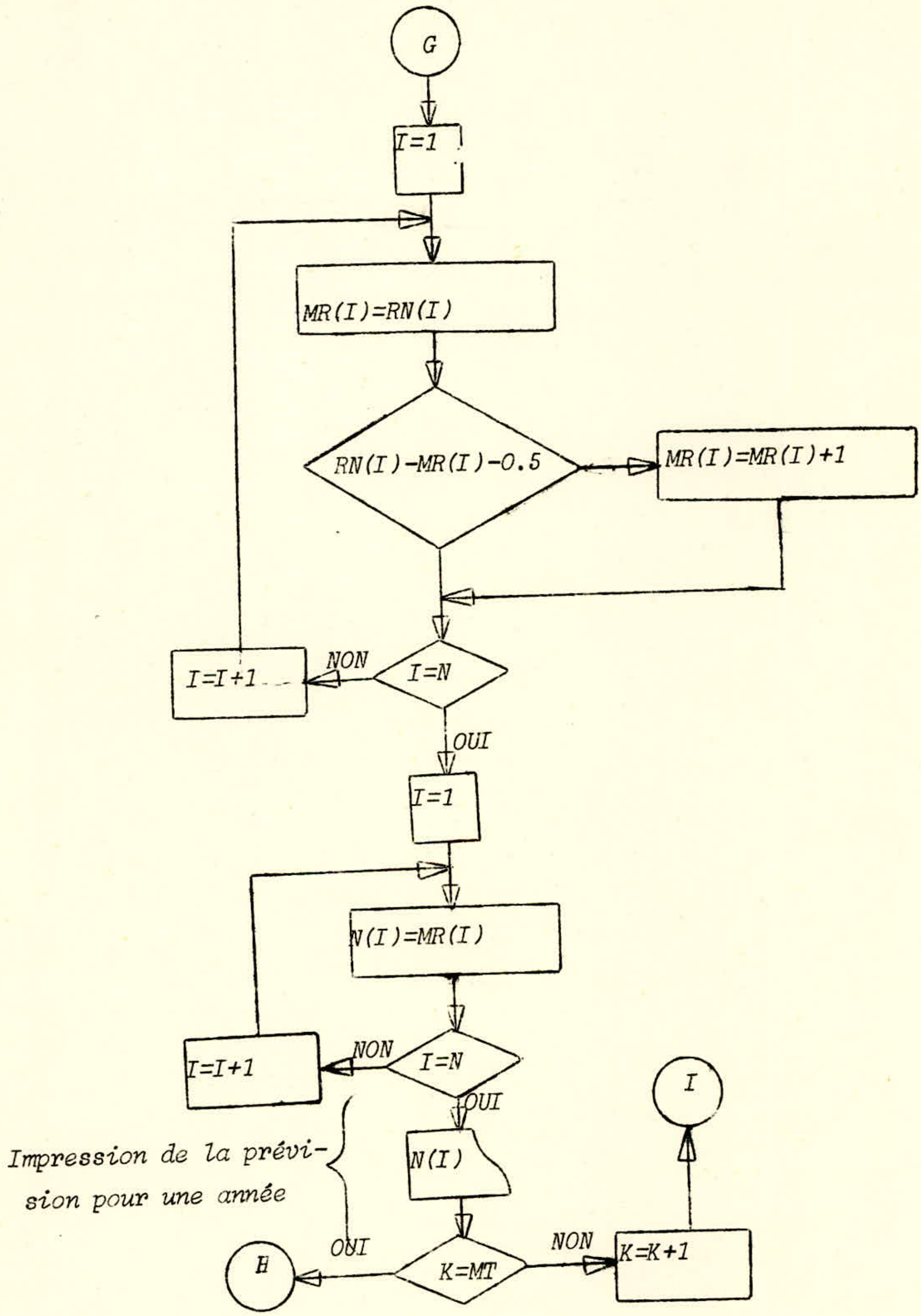
Calcul de P(t) au ETAP)$^{\text{ème}}$ ordre du développement de e^{Qt}



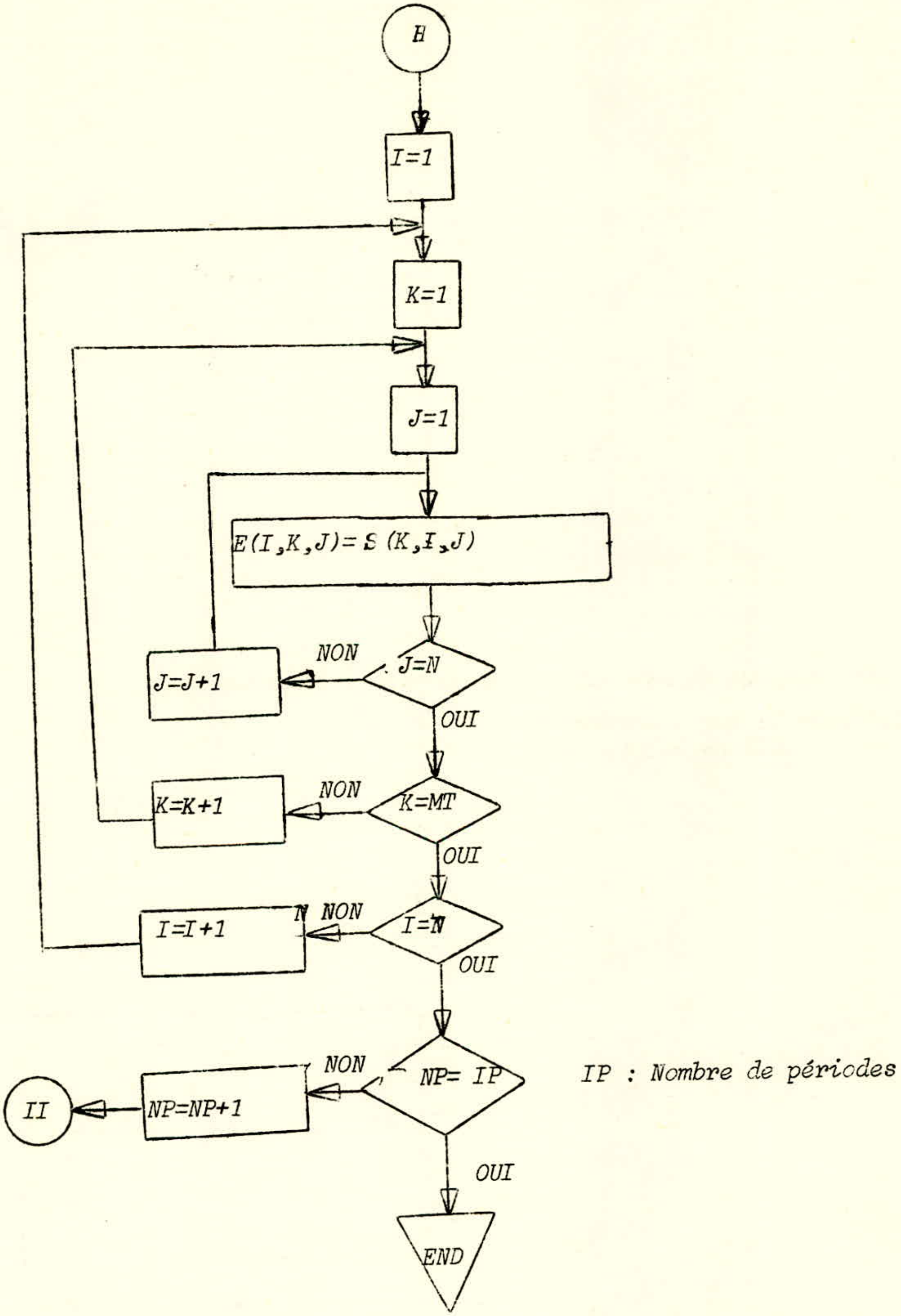
Décomposition de l'échantillon en Matrices d'observation prévisionnelle et calcul de la répartition prévisionnelle de l'ensemble desfamilles



Calcul de l'arrondi et impression des résultats de la prévision année par année .



Permutation : Remplacer pour la période suivante l'échantillon d'observation expérimentale par l'échantillon d'observation prévisionnelle.



§5.4- PROGRAMMES - FORTRAN IV :

```
      SUBROUTINE  AMAL (A,B,C,N)
      DIMENSION  A(N,N)
      DO 4 I = 1,N
      DO 1 J =1 , N
      IF (I-J)3,2,3
    2 A(I,J)=C
      GOTO 1
    3 A(I,J)= B
    1 CONTINUE

    4 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Exemple d'appel pour la construction de la matrice unité.

CALL AMAL (P1,O.,1. , 6)

P1 étant une matrice (6 , 6) dimensionnée dans le programme principal .

```
      SUBROUTINE  SAID   ( A,B,C,N)
      DIMENSION  A(N,N),B(N,N),C(N,N)
      DO  2 I = 1, N
      DO  2 J = 1, N
      C(I,J)=0
      DO  2 K=  1, N
2     C(I,J)=C(I,J) + A(I,K)*B(K,J)
      RETURN
      END
```

Exemple d'appel dans un programme principal :

```
CALL  SAID (P1,P2,P,6)
```

P étant la matrice résultat de la multiplication :

$$[P1]*[P2]$$

Les matrices P,P1,P2 sont dimensionnées dans le programme principal.

```
      SUBROUTINE  YASLIN (A,B,N)
      DIMENSION A(N,N),B(N,N)
      DO 1 I =1,N
      DO 1 J =1,N
      B(I,J)=A(I,J)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

-=-=-=-=-=-=

```
      REAL FUNCTION  HAFDA(K,ETAP)
      RJ= ETAP
      Y= RJ
   15 IF(RJ-1.)13,12,13
   13 RJ=RJ-1.
      Y=Y*RJ
      GOTO 15
   12 HAFDA=(K**ETAP)/Y
      RETURN
      END
```

Chapitre 6 : Application :

§6.1 - Approche d'une planification de construction de logements.

Un des problémes importants , qui se pose actuellement sur le plan social à plusieurs pays , est celui de la planification de la construction des logements .

La prévision des structures de famille que nous venons d'exposer permet de faire une approche de cette planification, approche qui a pour but d'optimiser la construction de logements.

Soit $N_h(t)$ le nombre total de familles d'une ville à la date t.

Soient à cette date t :

- $N_h^1(t)$ le cardinal de l'ensemble des familles qui occupent des logements qui correspondent à leurs structures .

- $N_h^2(t)$ le cardinal de l'ensemble des familles qui occupent des logements qui ne correspondent pas à leurs structures.

- $N_h^3(t)$ le cardinal de l'ensemble des familles sans logements .

$$N_h(t) = N_h^1(t) + N_h^2(t) + N_h^3(t)$$

La priorité de constuction et d'attribution des logements revient à l'ensemble $N_h^3(t)$.

Les informations statistiques relatives à cet ensemble $N_h^3(t)$ permettent de déterminer le volume de construction de logements sous les contraintes liées à la ville qui sont :

- Les fonds de la municipalité disponibles à la construction : S_v

- Les fonds d'entreprises et sociétés destinés à la construction de logements du personnel : S_e

- Les capitaux des diverses entreprises du batiment de cette ville : C_e

- Le volume des matériaux de construction et les possibilités d'approvisonnement de la ville:V.

- Le cout de construction des différents type de logements $:Q_{im}$

- Le fond total disponible à la construction à la date t s'exprime par l'égalité : $S(t)=S_v(t)+S_e(t)$

Soient $D_1,\ldots\ldots,D_k$ les différents types de construction

et $Q_{d1},\ldots\ldots,Q_{dk}$ leurs coûts respectifs.

Il nous faut choisir de la façon la plus optimale possible le vecteur :

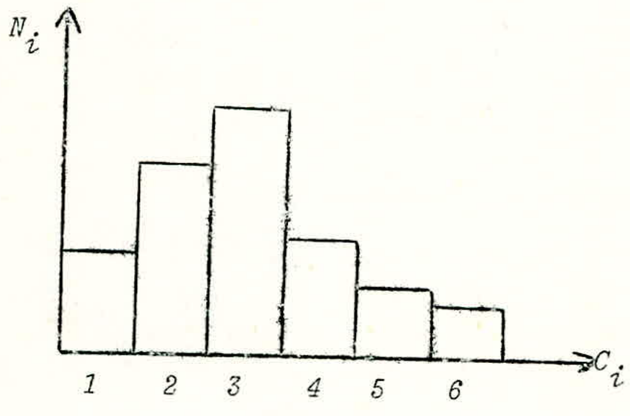
$$n=(n_1(D_1),\ldots\ldots,n_k(D_k))$$

où n est le nombre total de logements à construire et $n_i(D_i)$ le nombre de logements de type D_i . Ce vecteur peut avoir des composantes $n_j(D_j)$ nulles ce qui veut dire qu'il n'y aurait pas de construction de ce type D_j.
La décision consiste donc à déterminer les $n_1,\ldots\ldots,n_k$ sous la contrainte:

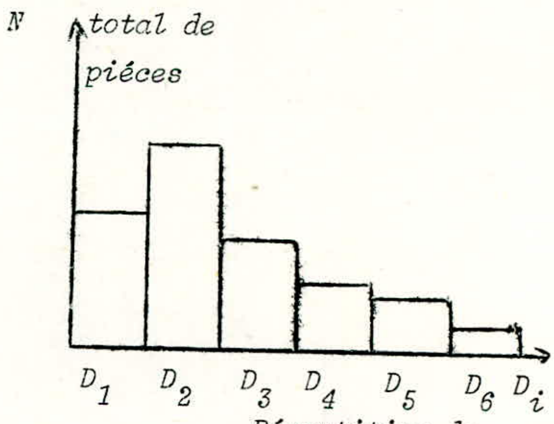
$$\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot Q_i = S(t)$$

Mais en général la construction et l'attribution des logements ne tient pas compte des structures de famille.

§.6.2- Les répartitions structures-logements :



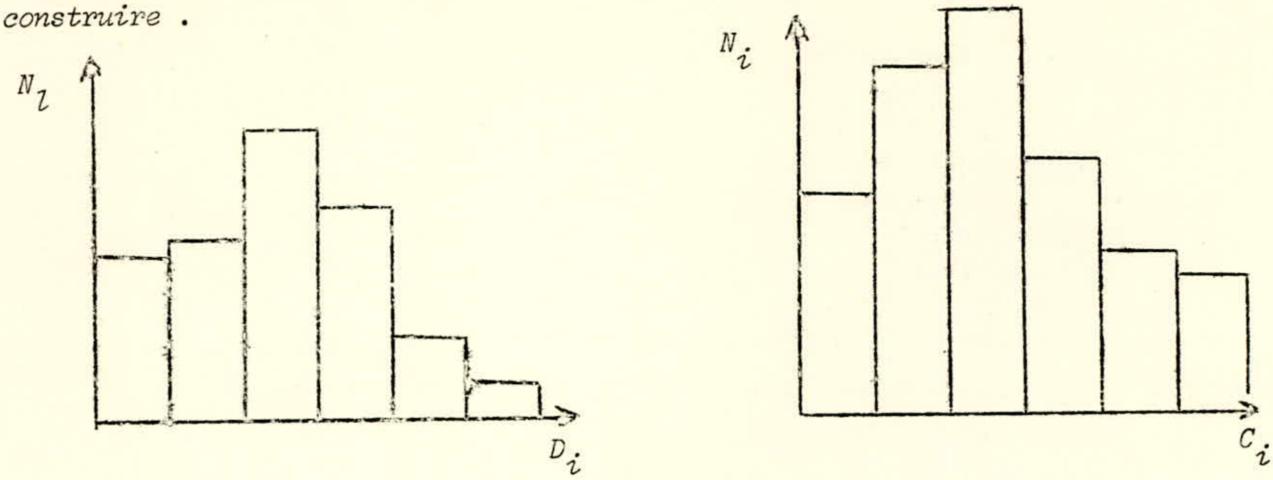
Répartition de la population par type de famille.



Répartition du nombre de pièces par type de logement.

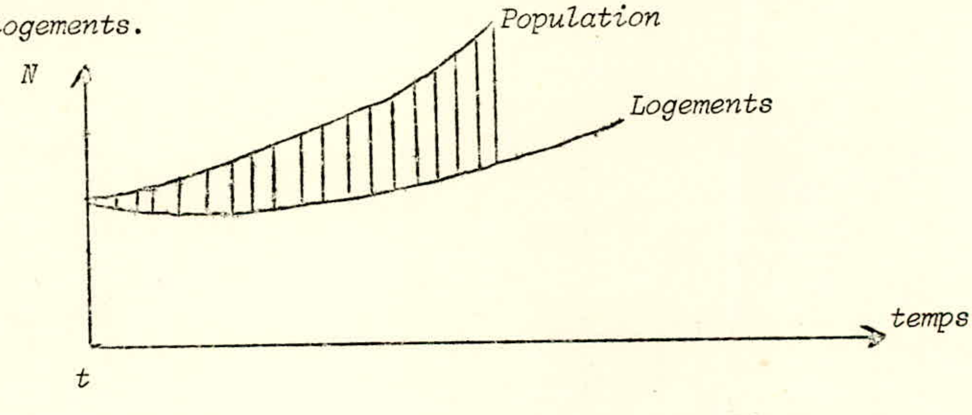
Le rapport de ces deux répartitions nous détermine l'espace vital par personne.

D'autre part soit N_l le nombre total de logements de type l. La superposition des deux répartitions suivantesnous détermine le volume de logemnts à construire .



Le souhaitable c'est d'arriver à un recouvrement total de la répartition des structures de familles par la répartition des logements .

Si nous nous fixons la date origine des temps t, nous pouvons tracer les courbes représentatives des lois d'évolution de la population et des constructions des logements.



Le but de tout effort de planification des logements est de limiter ou encore de diminuer l'aire hachurée et ceci par la construction de nouveaux logements qui satisfaissent aux contraintes déja exposées au §-6-1.

Le probléme sera de résoudre le programme linéaire suivant :

- Soit k l'indice qui désigne le type d'immeuble

  et l l'indice du type d'appartement (nombre de piéces).

  X_k : sera le nombre d'immeubles de type k à construire.

  $N_i(t)$: le nombre de familles de type c_i qui n'ont pas de logements correspondants à leur structure.

$$\sum_k \sum_l m_{lk} \cdot X_k = \sum_i N_i \qquad i = l$$

ou

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ m_{l1} & \cdots & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_l \end{bmatrix}$$

Ce systéme explique le fait que toute structure de famille aura son logement approprié .

Mais il faudrait tenir compte aussi d'une contrainte trés importante qui est l'espace vital et qui se traduit par :

$$d = \frac{\sum_k \sum_i S_{ik} \cdot X_k}{\sum_i N_i} \quad \text{ou} \qquad d. \sum_i N_i = \sum_k \sum_i S_{ik} \cdot X_k$$

S_{ik} : superficie de l'appartement de type i de l'immeuble de type k.

La fonction objectif à minimiser sera la fonction coût :

$$C(X) = \sum_k \alpha_k \cdot X_k$$

où α_k est le coût unitaire de l'immeuble de type k.

La solution de ce programme linéaire en nombres entiers nous donnera les X_k.

-=- CONCLUSION -=-

La plus importante application qui justifie d'ailleurs ce modéle de prévision est la construction des logements comme nous venons de le voir dans ce dernier chapitre. Mais nous aurions souhaité avoir des données statistiques afin de pouvoir déterminer la précision d'un tel modéle, qui à priori doit donner la meilleure approche des résultats réels de l'avenir ne serait-ce que par le fait que :

1) La matrice de transition qui est la base même du modéle se détermine à partir de l'évolution sur une assez longue période d'observation du phénoméne de ces structures de famille .

2) Les probabilités de passage, éléments de cette matrice, prennent en compte , implicitement, tous les facteurs qui influent sur la structure de famille.

Cependant nous aurions pu nous même organiser l'enquête qui nous aurait donné les informations statistiques sous la forme voulue par le modéle si le temps, qui nous était imparti pour l'élaboration de cette étude, nous l'aurait permis.

Cette enquête consiste à :

1) Demander la répartion actuelle des familles par type de structure à la direction des statistiques.

2) Déterminer la taille de l'échantillon de chaque type de structure .

3) Demander les archives de l'habitat de T années, et faire un tirage exhaustif des échantillons.

4) Enfin, à partir de ces échantillons prendre les registres de l'état civil et faire un dépouillement de l'état de ces familles tout au long des T années.

Il est certain que cette enquête serait laborieuse et même difficile à organiser, mais permettrait de mettre à la disposition des services sociaux un moyen efficace de prévenir un environnement meilleur pour les générations futures.

DONNEE S

Ces donnees sont erronnées , nous les utilisons pour vérifier le bon déroulement du programme FORTRAN IV écrit pour un ensemble de six structures de famille .

La répartition de l'ensemble des familles entre ces structures à la date initiale de prévision est la suivante :

$N_1 = 105$; $N_2=227$; $N_3=317$;

$N_4= 210$; $N_5= 77$; $N_6= 62$;

Le cardinal des échantillons est tel que : $m_1= m_2=m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 100$

Les matrices d'observation de l'évolution passée sur unepériode de dix années de chaque type sont les suivantes :

E_1

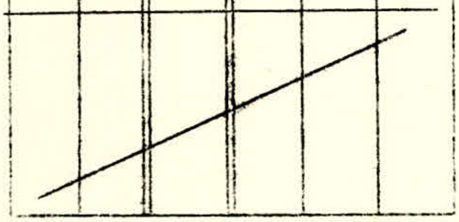
temps d'observation	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1	86	10	2	1	1	0
2	79	13	4	2	1	1
3	65	22	6	3	2	2
4	57	29	7	3	2	2
5	44	34	12	5	3	2
6	37	39	14	5	3	2
7	29	42	17	6	4	2
8	18	50	18	7	5	2
9	11	54	18	8	6	3
10	5	58	19	9	6	3

E_2

temps d'observation	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1	2	68	27	0	3	0
2	2	62	29	3	4	0
3	3	56	30	5	5	1
4	3	48	33	8	7	1
5	4	41	34	11	8	2
6	4	32	37	15	9	3
7	4	26	38	19	10	3
8	5	17	40	23	11	4
9	5	13	41	24	12	5
10	5	6	43	27	13	6

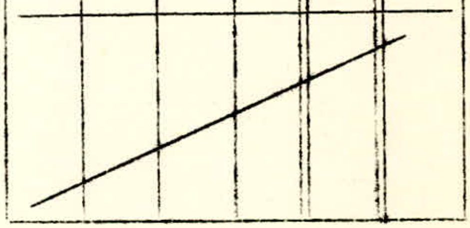
E_3

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1	1	1	90	6	1	1
2	1	1	86	9	2	1
3	1	2	81	11	3	2
4	1	2	76	12	6	3
5	2	3	71	15	6	3
6	2	3	66	17	7	5
7	2	4	62	19	8	5
8	3	4	56	22	9	6
9	3	5	50	24	10	8
10	3	5	46	26	11	9



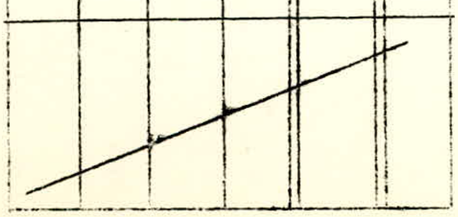
E_4

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
0	1	6	87	4	2
1	2	6	83	5	3
1	2	7	80	6	4
2	2	7	76	8	5
2	3	8	69	11	7
3	3	9	66	11	8
3	4	9	63	12	9
3	4	10	60	13	10
4	4	10	57	14	11
4	5	11	54	15	11



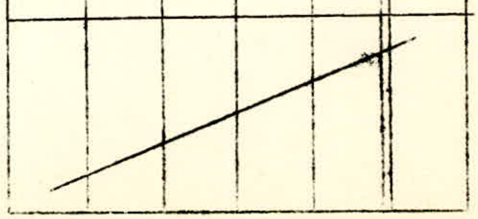
E_5

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1	1	2	2	3	90	2
2	1	2	2	3	89	3
3	2	3	4	4	84	3
4	2	4	5	5	80	4
5	3	5	5	5	78	4
6	3	5	6	6	74	6
7	4	6	7	7	69	7
8	4	7	7	8	67	7
9	5	7	8	9	63	8
10	5	8	9	10	60	8



E_6

E_1	E_2	E_3	E_4	E_6	E_5
1	1	0	2	92	1
2	3	2	4	85	1
2	4	5	7	77	1
3	6	7	9	69	2
3	6	8	12	65	2
4	8	10	17	54	2
4	9	11	19	50	2
5	10	12	21	45	2
5	11	12	23	40	3
5	12	14	24	36	3



-=-= BIBLIOGRAPHIE -=-=

A.KAUFMANN . & R. CRUON : La Programmation Dynamique
pages 163-204- Dunod - 1965

A.BLANC-LAPIERRE & R.FORTET : Théorie des fonctions aléatoires
: § 2 page 195-205- Masson

KASCHKA V. & VELIKI A : Simulation des processus sociaux
Edition Nanka , Moscou 1970

GRUNDMANIS V & RUDZATA : Construction des logements et architecture
N3, 1968

DOLIATOVSKI V. Algorithmes et grammaires formels
I.E.A , Rostov S/Don , 1972

DOLIATOVSKAIA Vera: Une approche de la prevision de la population.
R S/D,1972

-=-=-