

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



École Nationale Polytechnique - Laboratoire de Commande des Processus

En collaboration avec l'Ecole Supérieure des Sciences Appliquées d'Alger

Département d'automatique

Projet de fin d'études

Mémoire soutenu en vue de l'obtention du grade d'ingénieur en automatique

Régulateurs Optimaux en Robotique

Présenté par : **Anis BOUSCLET**

Sous la direction de : **Rachid ILLOUL** et **Nassim SIAD**

Soutenu publiquement le 14/07/2021 devant le jury composé de :

Président	M.S. BOUCHERIT	Professeur	ENP
Encadreur	R. ILLOUL	MC/A	ENP
Co-encadreur	N. SIAD	MC/A	ESSA
Examineur	M. TADJINE	Professeur	ENP

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



École Nationale Polytechnique - Laboratoire de Commande des Processus

En collaboration avec l'Ecole Supérieure des Sciences Appliquées d'Alger

Département d'automatique

Projet de fin d'études

Mémoire soutenu en vue de l'obtention du grade d'ingénieur en automatique

Régulateurs Optimaux en Robotique

Présenté par : **Anis BOUSCLET**

Sous la direction de : **Rachid ILLOUL** et **Nassim SIAD**

Soutenu publiquement le 14/07/2021 devant le jury composé de :

Président	M.S. BOUCHERIT	Professeur	ENP
Encadreur	R. ILLOUL	MC/A	ENP
Co-encadreur	N. SIAD	MC/A	ESSA
Examineur	M. TADJINE	Professeur	ENP

ENP 2021

ملخص:

تتمثل مساهمة هذه الأطروحة في إظهار أن مشكلة التحكم الأمثل للأنظمة الروبوتية يمكن حلها من خلال نهج الهندسة الريمانية. هذا يؤدي إلى تبسيط وإثراء PMP بفضل هندسة مساحة التكوين. استغلال بعض الأعمال الحديثة Chao Liu et al, S. Berkane et al, S. Sacoon et al, لقد أظهرنا أن المنظمين الأمثل لمعيار هندسي لها هيكل منظم نسبي مشتق ، كما نعطي جانبًا لالتحكم الأمثل منظم التتبع لـ F. Bullo و R. Murray. الكلمات المفتاحية: الروبوتات ، الهندسة الريمانية ، التحكم الأمثل ، التحكم الهندسي ، PMP ، البرمجة الديناميكية ، منظم PD.

Abstract :

The contribution of this thesis is to show that the problem of optimal control of robotic systems can be solved by the Riemannian geometry approach. This leads to the simplification and enrichment of the PMP by the geometry of the configuration space.

Exploiting some recent work, notably that of A. Sacoon et al, S. Berkane et al, Chao Liu et al, we show that the optimal regulators for a geometric criterion have a structure of Riemannian proportional derivative (PD) regulator, we also give an optimization aspect of the tracking regulator of F. Bullo and RM Murray.

Keywords: Robotics, Riemannian Geometry, Optimal Control, Geometric Control, PMP, Dynamic programming, PD regulator.

Résumé:

La contribution de ce mémoire consiste à montrer que le problème de commande optimale des systèmes robotiques peut être résolu par l'approche de la géométrie riemannienne. On aboutit à la simplification et enrichissement du PMP grâce à la géométrie de l'espace de configurations.

Exploitant quelques travaux récents, notamment ceux d'A. Sacoon et al, S. Berkane et al, Chao Liu et al, on montre que les régulateurs optimaux pour un critère géométrique ont une structure de régulateur proportionnel dérivé riemannien, on donne également un aspect d'optimisation du régulateur de poursuite de F. Bullo et R.M. Murray.

Mots Clés : Robotique, Géométrie Riemannienne, Commande Optimale, Contrôle Géométrique, PMP, Programmation Dynamique, Régulateur PD.

Remerciements

Je tiens à remercier le Bon Dieu pour m'avoir donné la patience, le courage et la motivation afin d'accomplir ce travail.

Je remercie mes Parents et mes amis pour leurs encouragements qui ne cessent jamais de me propulser vers la voie du succès.

Je remercie mes encadreurs, de m'avoir orienté et dirigé pour mener à bien ce travail.

Un grand merci pour les membres du jury d'avoir examinés, corrigés, et améliorés ce mémoire.

Table des matières

Liste des Figures

Liste des Symboles

1 Introduction

1.1 Introduction générale	10
1.2 Contributions du mémoire	11

2 Généralités

2.1 La robotique classique	13
2.2 Variétés différentielles	18
2.2.1 Sous-variété de \mathbb{R}^n	18
2.2.2 Espace tangent	19
2.2.3 Crochet de Lie	21
2.3 Variétés riemanniennes	22
2.3.1 Dérivée covariante	23
2.3.2 Courbure	24
2.3.3 Application exponentielle	28
2.4 Distance géodésique	28
2.5 Groupes de Lie	30

3 Modélisation géométrique des robots

3.1 Équations du mouvements	35
3.2 Théorème de l'énergie cinétique	36
3.3 Fonction de l'outil	36

4 Régulation des robots

4.1 Régulation de la configuration	41
4.2 Régulation de l'outil	42
4.3 Régulation de l'outil sous contrainte	44
4.4 Poursuite de référence	47

5 Synthèse d'observateur

5.1	Théorie de contraction	49
5.2	Équation de Jacobi pour l'observateur de Luenberger	50
5.3	Observateur riemannien	51
5.4	Application	53
6	Commande optimale des robots	
6.1	Ensemble accessible	57
6.1.1	Application entrée sortie :	57
6.1.2	Condition suffisante de contrôlabilité	59
6.2	Résultats d'existence	59
6.2.1	Commande optimale en temps	59
6.2.2	Commande optimale en critère	60
6.3	PMP en robotique	63
6.3.1	Application en régulation optimale	65
6.3.2	Application au problème d'évitement d'obstacles	66
6.4	Régulation et poursuite optimale	67
6.4.1	Théorie HJB en Robotique	67
6.4.2	Stratégie de commande optimale	68
6.4.3	Solutions de viscosité	68
6.4.4	Théorie LQR	69
6.4.5	Poursuite optimale	71
7	Applications	
7.1	Régulation et Poursuite optimale du corps rigide	76
7.2	Simulations	77
	Conclusion	83
	Bibliographie	88

Table des figures

2.1	Bras manipulateur [21]	14
2.2	Insuffisance de l'observateur de Luenberger - bras manipulateur	15
2.3	Corps rigide [8]	16
2.4	Insuffisance de l'observateur de Luenberger - corps rigide	17
2.5	Erreur de l'observateur de Luenberger - corps rigide	17
2.6	Coordonnées sphériques [59]	18
2.7	Espace des configurations du bras manipulateur [31]	19
2.8	Espace tangent [60]	19
2.9	Fibré tangent [4]	20
2.10	Différentielle [60]	21
2.11	Transport parallèle [7]	23
2.12	$K < 0$, $K = 0$, $K > 0$ [4]	25
2.13	Application de Gauss [4]	25
2.14	Modèles de la géométrie riemannienne [60]	26
2.15	Variation de géodésique [4]	27
2.16	Stabilité et instabilité du flot géodésique [8]	27
2.17	Instabilité exponentielle [7]	27
2.18	Application exponentielle [7]	28
2.19	Distance géodésique [4]	29
2.20	Stabilité du flot géodésique lorsque la courbure est positive [7]	31
2.21	Observateur de Luenberger pour un corps rigide (boule)	32
2.22	Erreur d'observation de Luenberger (boule)	33
3.1	Mouvement d'un robot [58]	35
3.2	Industrie automobile	36
3.3	Organe terminal [18]	37
3.4	Configuration singulière	38
3.5	Fonction d'outil	38
4.1	Inverse de l'exponentielle [60]	41
4.2	Régulation de la configuration du bras [31]	42
4.3	Régulation de l'outil [20]	42
4.4	Régulation de l'outil du bras [31]	44

4.5	Régulation sous contrainte [19]	44
4.6	Force de contact [8]	45
4.7	Régulation du bras sous contrainte de rester dans l'ellipse [31]	46
5.1	Contraction [25]	49
5.2	Convergence de l'observateur riemannien- corps rigide	53
5.3	Erreur d'observation riemannienne - corps rigide	54
5.4	Convergence de l'observateur riemannien- bras manipulateur	55
6.1	Temps optimalité	60
6.2	Problème de l'évitement d'obstacles [52]	66
6.3	Compatibilité de la paire $(\frac{1}{2}d_g^2, P)$ [25]	72
7.1	Poursuite optimale de $R_{ref}.[1, 0, 0]$	78
7.2	Erreur de poursuite de $R_{ref}.[1, 0, 0]$	78
7.3	Poursuite optimale de $R_{ref}.[0, 1, 0]$	79
7.4	Erreur de poursuite de $R_{ref}.[1, 0, 0]$	79
7.5	Poursuite optimale de $R_{ref}.[0, 0, 1]$	80
7.6	Erreur de poursuite de $R_{ref}.[1, 0, 0]$	80
7.7	Régulation optimale de l'orientation vers I , première colonne de R	81
7.8	Régulation optimale de l'orientation vers I , deuxième colonne de R	81
7.9	Régulation optimale de l'orientation vers I , troisième colonne de R	82

Liste des Symboles

PMP	Principe du Maximum de Pontryaguine.
LQR	Régulateur Linéaire Quadratique.
AC	Fonction Absolument Continue.
AD	Fonction Absolument Différentiable.
HJB	Théorie d'Hamilton Jacobi Bellman.
PD-Riemannien	Régulateur de la forme $u = k \exp_q^{-1}(q^*) - k' \cdot v$.
M	Espace de Configurations.
$\langle, \rangle = g$	Énergie Cinétique.
(M, g)	Système Robotique.
W	Potentiel de pesanteur.
$V(q)$	Potentiel fictif.
$V(q, v)$	Fonction Valeur.
D	Connexion de Levi-Civita.
$\frac{D}{Dt}$	Dérivée Covariante.
R	Tenseur de Courbure.
$T_q M$	Espace Tangent de M en q .
u	Couple de Commande.
TM	Fibré Tangent de M .
T^*M	Fibré Cotangent de M .
J	Coût de commande.
\exp_q	Application Exponentielle en q .
\log_q	Inverse de l'Exponentielle en q .
T	Temps Terminale.
∇	Gradient Covariant.
$g_q^\#$	Isomorphisme Espace Tangent - Cotangent.
g_q^\flat	Inverse de $g_q^\#$.
$U = \frac{1}{2}d_g^2(p, q)$	Énergie Cinétique Minimale Transférant p à q .
\square^\times	Isomorphisme Naturel de $A_3(\mathbb{R})$ vers \mathbb{R}^3 .
\square_\times	Inverse de \square^\times .
K	Courbure de Gauss.
P	Transport Parallèle.

$SO(3)$	Groupe de Lie des Rotations d'un Corps Rigide.
G	Métrie de Sasaki sur TM déduite d'une métrie g de M .
H	Hamiltonien.
S	Surface de Contrainte Géométrique de l'Outil.
x	Fonction de l'Outil.
E_T	Espace de Travail.
x_d	Position de l'outil désirée.
q^*	Configuration de Consigne.
q_{ref}	Configuration de Référence Variable.
$AC(q)$	Espace des Champs de Vecteurs Absolument Continus sur q .
L^2	Espace des Fonctions Mesurables de Carrées Intégrables.
L^1_{loc}	Espace des Fonctions Mesurables Localement Intégrables.
H^1	Espace de Sobolev.
$\Gamma^1_{loc}(q)$	Espace des Champs de Vecteurs Mesurables Localement Intégrables sur q .
N	Hypersurface de M .
Φ	Submersion qui vérifie $S = \Phi^{-1}(0)$.
$A_3(\mathbb{R})$	Espace des Matrices Antisymétriques.
tr	Trace d'une Matrice.
$I_q(\cdot)$	Opérateur Inverse de la Dérivation Covariance sur la courbe q .
$skew(A)$	Partie Antisymétrique de A .
R^T	Transposée de R .
R^{-1}	Inverse de R .
\times	Produit Vectoriel.
Ad	Représentation Adjointe de G .
\mathfrak{g}	Algèbre de Lie de G .
ad	Représentation Adjointe de \mathfrak{g} .
$[X, Y]$	Crochet de Lie de X et Y .
ϕ_t^X	Flot de X à l'instant t .
\exp	Exponentielle Matricielle.
\log	Logarithme Matricielle.
$L_X g$	Dérivée de Lie de g dans la Direction X .
$inj(M)$	Rayon d'injectivité de (M, g) .
L_g	Translation à gauche par g .
R_g	Translation à droite par g .
I	Tenseur d'inertie en \mathfrak{g} .
ad^*	Représentation co-adjointe de \mathfrak{g}^* .
$(T_q M, \langle, \rangle_q)$	Système linéarisé de (M, g) en q .
P_A	Projection orthogonale sur le sous espace vectoriel A de $T_q M$.
A^\perp	sous espace de $T_q M$ orthogonale à A .
v_L	Prolongement invariant à gauche de $v \in \mathfrak{g}$ en un champ de vecteur sur G .

1.1 Introduction générale

La **Robotique** est une discipline qui a révolutionnée l'industrie et la médecine, l'agriculture et d'autres domaines. Les robots permettent de remplacer les ouvriers ou le chirurgien et permet de gagner en temps, en précision en vitesse, en énergie et en argent.

La difficulté causée par les systèmes robotiques est que les dynamiques mis en jeux sont **non linéaires**. L'approche classique consiste à modéliser l'espace des configurations du robot par un espace euclidien, et d'appliquer le principe du moindre action de **Hamilton** pour dériver les équations du mouvement (équations d'**Euler-Lagrange**) et d'appliquer ensuite les techniques classiques de stabilisation qui découle des travaux de **Lyapunov** et **LaSalle**. Cependant, cette approche si élégante et **riche** en informations, ne se comporte pas bien vis à vis des problèmes d'**optimisations** et de régulation sous **contrainte**.

Les travaux avec **M.C. Belhadjoudja** sous la direction de **M. Tadjine** dans le cadre d'un **séminaire de l'ENP** consistait à montrer que la **géométrie riemannienne** est le bon outil pour réguler sous contrainte. Le but de ce travail sera de montrer que ce même outil est compatible avec la **commande optimale** des robots.

1.2 Contributions du mémoire

Les contributions de ce mémoire sont une suite logique de celles du séminaire de l'**École Nationale Polytechnique** en 2020, qui consistait à mettre en relation l'absence des singularités de la fonction de l'outil à la validité du régulateur de l'outil libre ou sous contrainte géométrique.

1) On reformule le **principe du maximum de Pontryaguine** pour les systèmes robotiques en mettant en évidence des quantités géométriques (dérivée covariante, courbure, gradient covariant...), et on montre que ceci permet de retrouver des résultats très récents publiés en Janvier 2021 [53].

2) On établit la **théorie LQR** en robotique en bénéficiant de la structure de variété riemannienne de l'espace des phases, ainsi que la formulation géométrique de la **théorie d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)**.

3) On donne également un aspect d'**optimisation** du **régulateur de poursuite** [30].

Les résultats **nouveaux** sont **encadrés** et **colorés** en **gris**, ceux qu'on **redécouvre** via les nouveaux résultats ou en donnant une preuve alternative sont **encadrés uniquement**.

CHAPITRE 2

Généralités

2.1 La robotique classique

L'espace de configuration d'un robot est modélisé par \mathbb{R}^n où n est nombre de degrés de libertés du robot. Le principe de moindre action de Hamilton sur le lagrangien donne les équations de mouvement

$$G(q)q'' + \frac{1}{2}G(q)' + S(q, q')q' + g(q) = \tau. \quad (2.1)$$

Ceci permet de résoudre le problème de régulation vers une configuration $q^* \in \mathbb{R}^n$ [11] [14] [57] par le couple

$$\tau(q, q') = g(q) - K_p \cdot (q - q^*) - K_v \cdot q'. \quad (2.2)$$

L'approche classique, avec tous ses succès, ne se couple pas facilement avec les problèmes de régulation sous contrainte de l'outil et des problèmes d'optimisation.

Pour le problème d'optimisation, la formule générale qui donne la vitesse angulaire Ω^* optimisant un critère euclidien J (LQR) en fonction de l'orientation (R) d'un corps rigide pour la cinématique $R' = R\Omega$ est [45] [44]

$$\Omega^*(R) = -\frac{R_d^T R - R^T R_d}{\sqrt{1 + \text{tr}(R_d^T R)}}, \quad (2.3)$$

$$J(\Omega) = \int_0^\infty [\text{tr}(I - R_d^T R) + \frac{1}{2}|\Omega|^2] dt. \quad (2.4)$$

Ce régulateur qui stabilise l'orientation vers R_d n'est pas un retour proportionnel de l'orientation, ceci empêche à priori une théorie LQR en robotique.

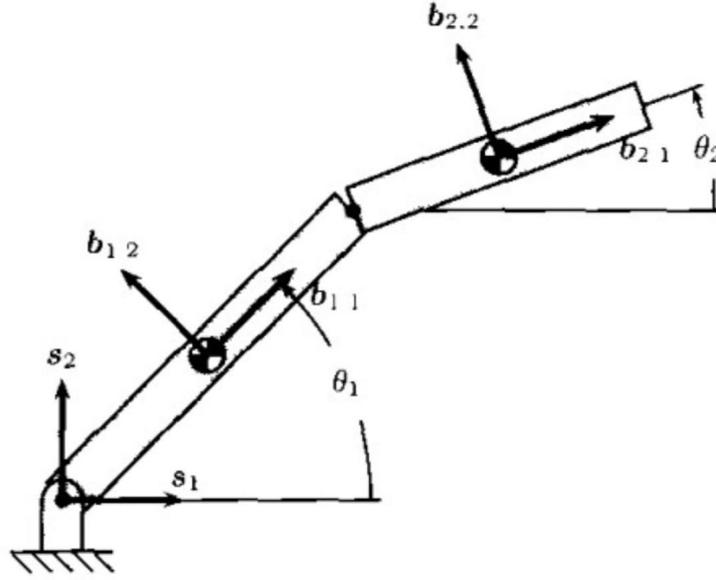


FIGURE 2.1 – Bras manipulateur [21]

Pour le problème de régulation sous la contrainte (rester sur la surface S), les configurations possibles appartiennent au sous-ensemble $N = x^{-1}(S)$ de \mathbb{R}^n pour une certaine fonction x . Cet ensemble n'est pas nécessairement un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La contrainte "outil doit rester dans S " est équivalente à " configuration doit rester dans N ".

On aboutit a un formalisme naturellement adapté pour attaquer le problème de régulation sous contrainte de façon géométrique [8] [18] [1].

La sensibilité par rapport aux conditions initiales reste l'un des plus grands obstacles pour aboutir à des observateurs performants.

Par exemple, si on essaie d'observer la vitesse d'un bras manipulateur par l'observateur de Luenberger

$$[\hat{\theta}^i]' = \hat{\omega}^i - k_1(\hat{\theta}^i - \theta^i), \quad (2.5)$$

$$[\hat{\omega}^i]' = - \sum_{j,k=1}^2 (\Gamma_{j,k}^i(\hat{\theta}) \hat{\omega}^j [\hat{\theta}^k]') - 3.(\theta^i - \theta_d^i) - k_2(\hat{\theta}^i - \theta^i). \quad (2.6)$$

On trouve les résultats suivants.

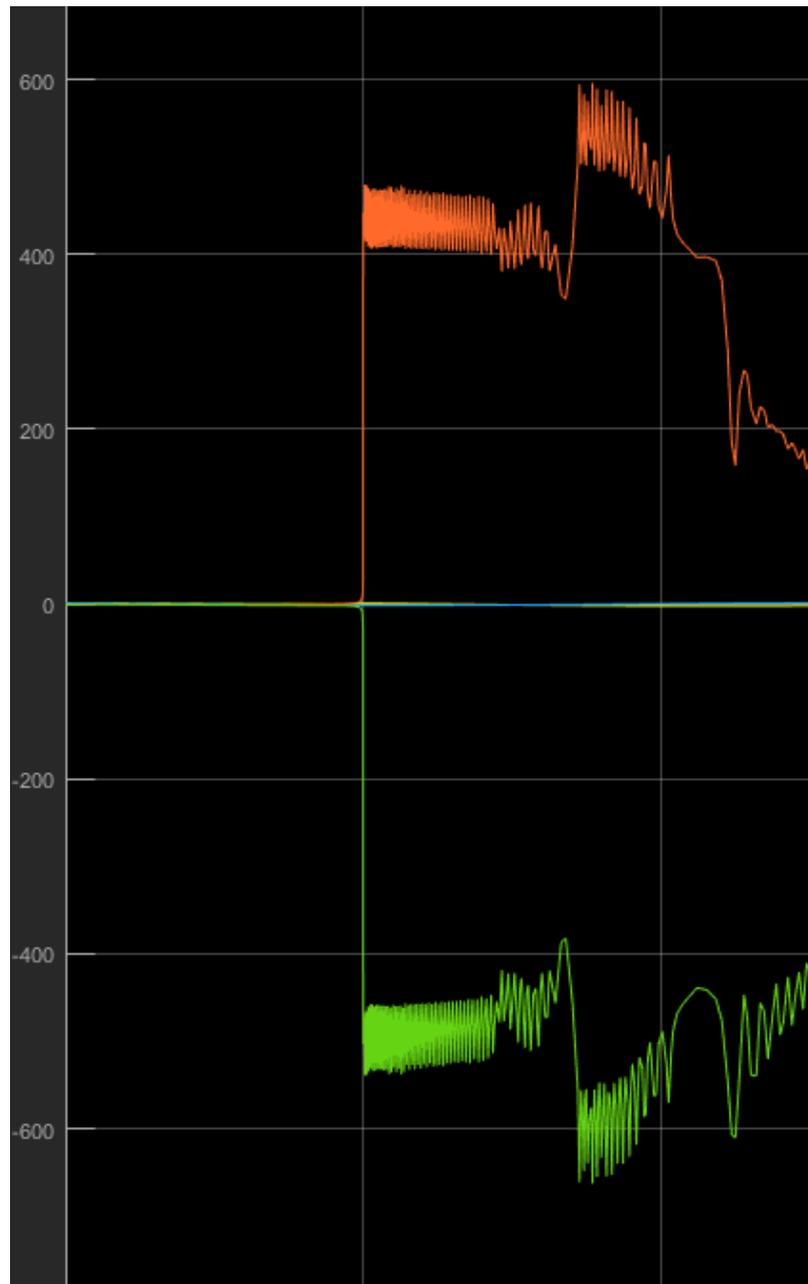


FIGURE 2.2 – Insuffisance de l'observateur de Luenberger - bras manipulateur

Dans la figure 2.2, les deux courbes en vert et rouge sont les vitesses observées, celles en bleu et jaune sont les vitesses réelles, l'axe des abscisses correspond au temps en secondes, et l'axe des ordonnées aux vitesses angulaires deux bras en rad/s.

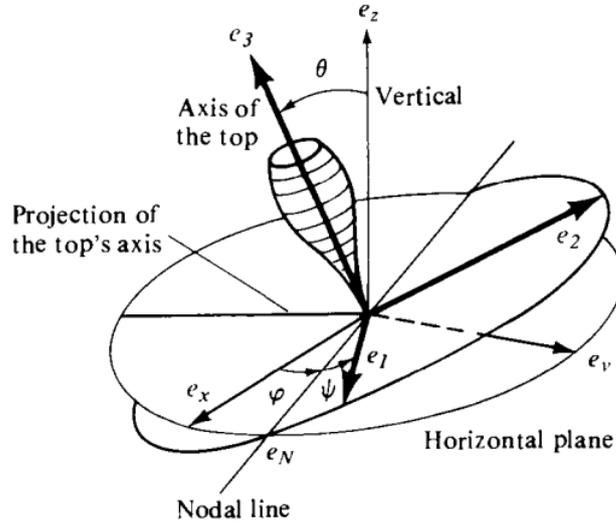


FIGURE 2.3 – Corps rigide [8]

De même, Pour l'orientation d'un corps rigide dont la dynamique est

$$R' = R\Omega, \quad (2.7)$$

$$\Omega' = I^{-1} \cdot (I\Omega \times \Omega) - 2I^{-1}[\text{skew}(R)]^\times, \quad (2.8)$$

Avec $\text{Skew}(R) = \frac{R-R^T}{2}$.

$I = [2, 2, 8]$, $R(0) = \exp([0.82, 0.21, 0.73]^\times)$, $\hat{R} = \exp([0.7, 0, 0.8]^\times)$.

L'observateur de Luenberger est

$$\hat{R}' = \hat{R}(\hat{\Omega} - 2[I^{-1}[\text{skew}(R^T \cdot \hat{R})]^\times]_\times), \quad (2.9)$$

$$\hat{\Omega}' = I^{-1} \cdot (I \cdot \hat{\Omega} \times \hat{\Omega}) - 2I^{-1}[\text{skew}(R)]^\times - 2I^{-1}[\text{skew}(R^T \cdot \hat{R})]^\times. \quad (2.10)$$

avec $\Omega(0) = [0.8, -0.5, 0.6]$, $\hat{\Omega}(0) = [0, 0, 0]$.

Remarque : La nomination **Luenberger** est due au fait que Skew apparaît lorsqu'on calcule le gradient de $\frac{1}{2}\text{tr}(I - R)$ qui est un potentiel Euclidien.

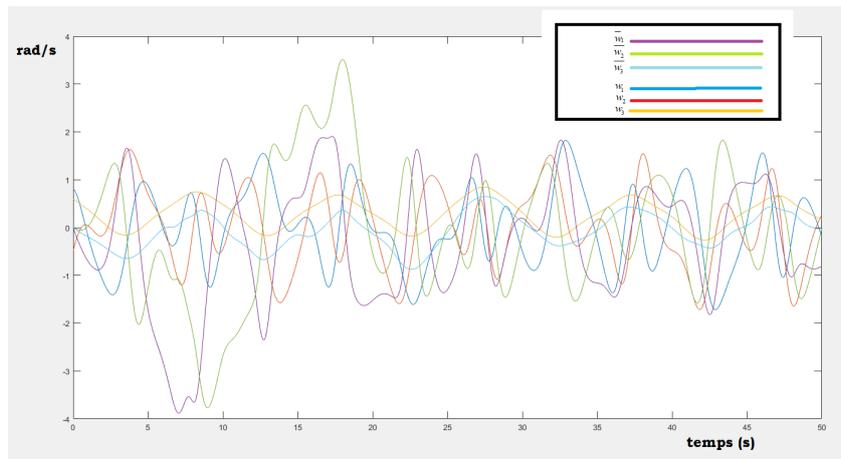


FIGURE 2.4 – Insuffisance de l'observateur de Luenberger - corps rigide

Les courbes dans la figure 2.4 en rouge et bleu et orange sont les vitesses de rotation instantanées réelles, et celles en vert et mauve et bleu ciel sont les vitesses observées.

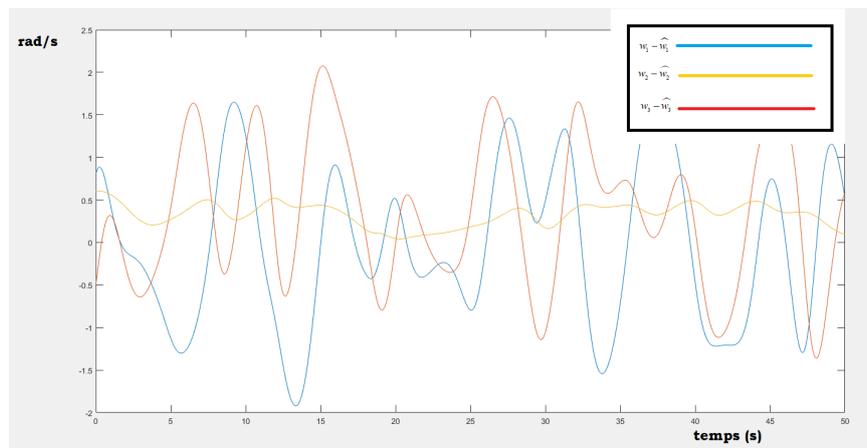


FIGURE 2.5 – Erreur de l'observateur de Luenberger - corps rigide

Les graphes dans la figure 2.5 représentent les erreurs d'observation de Luenberger, on voit que l'observateur n'est pas performant pour des raisons qu'on ignore a priori. On verra que la géométrie permet d'expliquer l'origine de cette insuffisance via la notion de courbure.

Dans cet humble travail, on utilise une approche géométrique, celle des variétés riemanniennes, pour compléter les travaux dans [1] [31], et ce en montrant que l'approche géométrique permet d'alléger le **PMP** et d'établir une **théorie LQR en robotique**.

2.2 Variétés différentielles

D'un point de vue informel, les variétés différentielles sont la généralisation naturelle des courbes et des surfaces, sauf qu'elles peuvent être de dimension supérieure [5] [6] [58]. Par exemple, l'espace des configurations d'un corps rigide ayant trois points non alignés, est le produit direct de l'espace des orientations par l'espace des positions $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ qu'on regarde comme une variété de dimension 6 [8] [21].

Plus précisément, une variété différentielle peut être décrite de plusieurs manières. Par exemple, la sphère de rayon 1 peut être décrite par :

i) immersion : latitude et longitude.

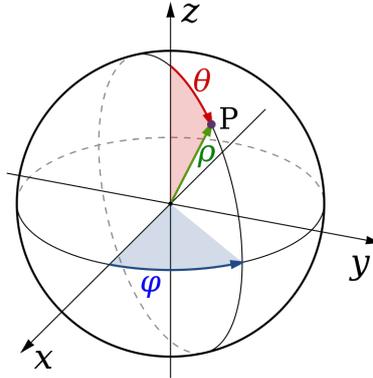


FIGURE 2.6 – Coordonnées sphériques [59]

ii) submersion : en utilisant $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, la sphère devient $S = f^{-1}(0)$.

2.2.1 Sous-variété de \mathbb{R}^n

Un robot est constitué de s corps rigides, reliés à leurs extrémités par des articulations rotoïde ou prismatiques. Ces liaisons sont appelées contraintes holonomes qui empêchent les corps rigides de se déplacer comme bon leurs semblent.

L'espace de configuration M est alors une sous-variété de $(\mathbb{R}^3 \times SO(3))^s$, les coordonnées locales sont reliés aux contraintes holonomes par le résultat suivant [8] [21].

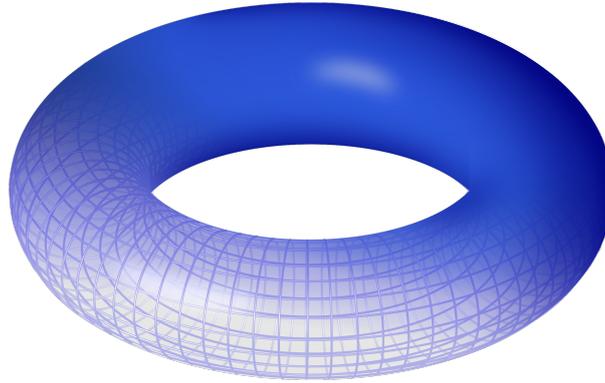


FIGURE 2.7 – Espace des configurations du bras manipulateur [31]

Théorème 2.2.1. Soit un sous-ensemble $M \subset (\mathbb{R}^3 \times SO_3(\mathbb{R}))^s$, alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1) Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V_x de x dans $(\mathbb{R}^3 \times SO_3(\mathbb{R}))^s$ et une submersion $f : V_x \rightarrow \mathbb{R}^{6s-n}$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = M \cap V_x$.

2) Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V_x de x dans $(\mathbb{R}^3 \times SO_3(\mathbb{R}))^s$, un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^n et une immersion $r : U \rightarrow M \cap V_x$.

On appelle n la dimension de M , c'est aussi le nombre de degrés de liberté du robot.

2.2.2 Espace tangent

L'espace tangent en $x \in M$, est l'espace $T_x M$ des vecteurs de vitesses $v = \gamma'(0)$, de toutes les trajectoires $\gamma(t)$ de M passant par x à l'instant 0. C'est un espace vectoriel de dimension n .

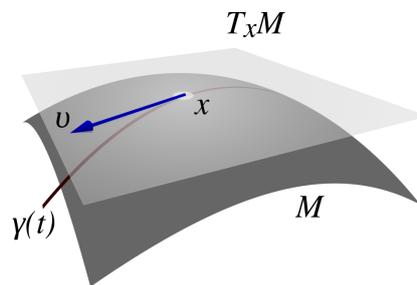


FIGURE 2.8 – Espace tangent [60]

Par exemple, si $f : V_x \rightarrow \mathbb{R}^{6s-n}$ est une contrainte holonome alors $T_x M = \text{Ker}(df_x)$. Pour une immersion r l'espace tangent est $T_x M = \text{Im}(dr_0)$.

L'ensemble de tous les espaces tangents est aussi une variété notée TM de dimension deux fois celle de M .

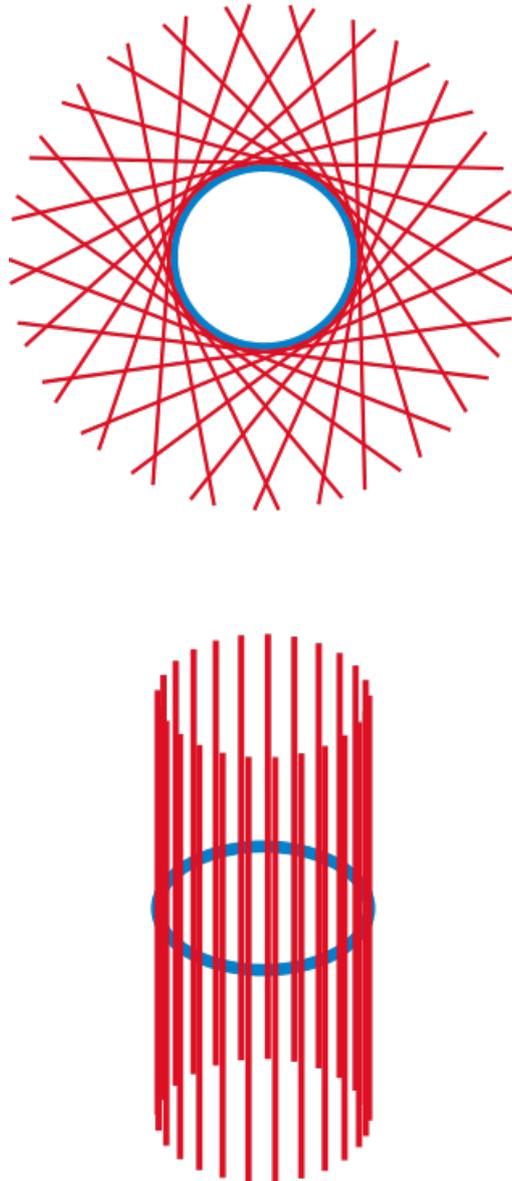


FIGURE 2.9 – Fibré tangent [4]

Par exemple, pour $M = \mathbb{R}^n$ on a $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
 La différentielle d'une fonction lisse $\phi : M \rightarrow N$, entre variétés différentielles, est alors l'application linéaire $d\phi_x : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} N$ définie par

$$d\phi_x(v) = (\phi \circ \gamma)'(0).$$

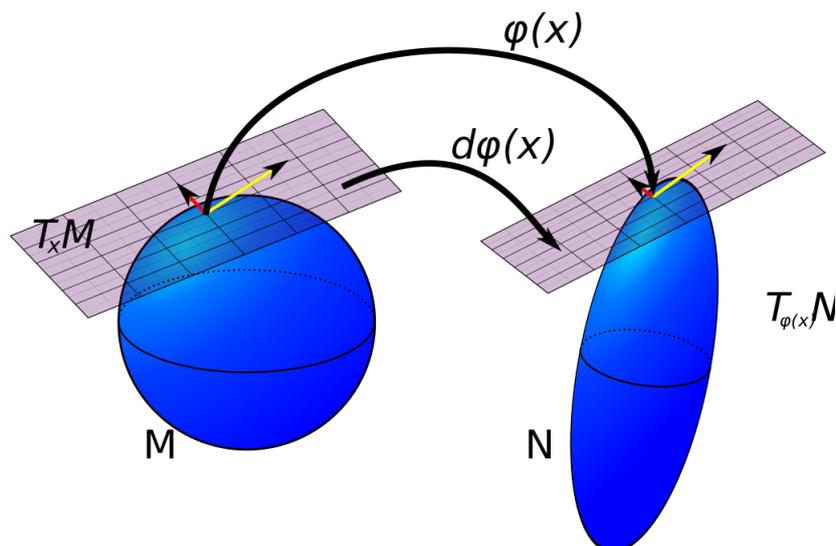


FIGURE 2.10 – Différentielle [60]

Cette définition ne dépend ni de la courbe γ ni de sa paramétrisation. On parlera de fonction lisse pour parler de fonctions de classe C^∞ .

2.2.3 Crochet de Lie

Un champ de vecteurs est une application $V : M \rightarrow TM$ telle que $V(x) \in T_x M$. Le flot ϕ^V du champ de vecteurs V est juste le flot (réduit) de l'équation différentielle $\gamma' = V(\gamma)$.

Le crochet de Lie mesure le défaut de commutativité du flot de deux champs de vecteurs

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\phi_{-t}^X [Y(\phi_t^X)]. \quad (2.11)$$

Par exemple, un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n est juste une application lisse $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de la forme

$$X(p) = (p, F(p))$$

où F est une fonction lisse. Si $F(p) = V$ est constante, son flot vaut

$$\phi_t^X(p) = p + t.V.$$

Un autre exemple intéressant est le champ de vecteurs $X(p) = (p, A.p)$, où $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$ est une matrice. Son flot est

$$\phi_t^X(p) = \exp(tA)p.$$

Les champs de vecteurs sont aussi pratiques juste pour calculer la différentielle des fonctions, par la formule suivante.

$$df_p(X(p)) = X.f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\phi_t^X(p)). \quad (2.12)$$

2.3 Variétés riemanniennes

Le produit scalaire euclidien est l'outil de base de la géométrie euclidienne. Il permet de calculer les longueurs et les angles. On parlera ainsi d'espace euclidien pour signifier qu'un espace vectoriel est muni d'un produit scalaire.

L'idée derrière les variétés riemanniennes, est de considérer des produits scalaires qui sont aussi fonction de la position. Ceci a l'avantage de simplifier le formalisme avec un petit coût, celui du calcul différentiel covariant, et qu'on va introduire dans la prochaine section. Dans la pratique, l'énergie cinétique d'une bille contrainte à rester dans une surface $S \subset \mathbb{R}^3$, est une fonction positive quadratique en vitesse. Elle ne dépend pas de la position pour la simple raison qu'elle est immergée dans \mathbb{R}^3 qui possède une paramétrisation globale.

Une structure riemannienne sur une variété M est la donnée d'un produit scalaire \langle, \rangle_p sur $T_p M$ en chaque point $p \in M$, et dont la variation est lisse.

Le point de vue innovant d'Arnold [8] est de voir l'espace de configuration d'un corps rigide fixé en un point comme la variété $SO(3)$, qui est le groupe des rotations de \mathbb{R}^3 . Le mouvement du corps rigide est alors décrit par une courbe $g(t)$ dans $SO(3)$. L'énergie cinétique est alors déterminée par la vitesse angulaire et ne dépend pas de la position du corps dans l'espace. L'énergie cinétique est alors une métrique riemannienne invariante par les rotations

$$T(t) = \frac{1}{2} \langle g'(t), g'(t) \rangle_{g(t)}. \quad (2.13)$$

Ce point de vue a été généralisé pour décrire le mouvement d'un robot dans l'espace de configuration, en prenant pour métrique riemannienne l'énergie cinétique.

Ceci permettra d'interpréter les problèmes de la robotique comme des problèmes de géométrie, ce qui revient à mesurer des distances, des angles et des volumes, qui tiennent compte de l'inertie du robot.

On parlera ainsi des géodésiques comme des analogues des droites dans l'espace euclidien.

2.3.1 Dérivée covariante

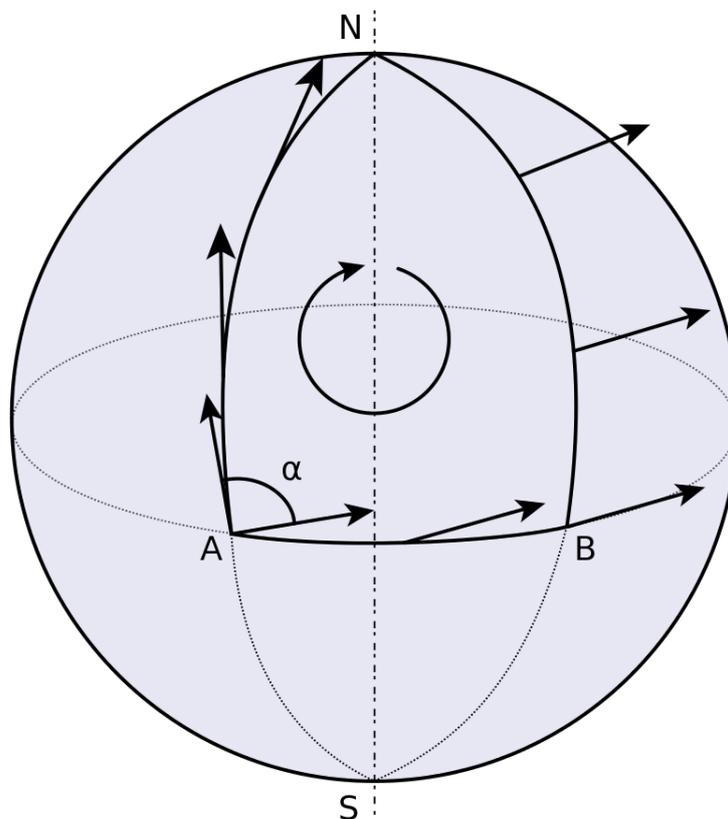


FIGURE 2.11 – Transport parallèle [7]

Le transport parallèle d'un vecteur tangent à une surface le long d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est défini comme suit : le point à l'origine du vecteur suit la courbe et le vecteur lui-même évolue continûment en préservant l'angle que fait le vecteur avec la courbe ainsi que sa longueur.

Par ce biais, à chaque vecteur tangent du point initial $\gamma(0)$, on associe un vecteur tangent au point final $\gamma(1)$, qu'on note par $P(\gamma(1), \gamma(0)) : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(1)}M$. Cette application étant linéaire et préservant la longueur et les angles.

On associe à une structure riemannienne un calcul différentiel adapté, où le transport parallèle joue le rôle du flot. Plus précisément, soient deux champs de vecteurs X, Y , alors la dérivée covariante du champ Y dans la direction X au point $p \in M$, se calcule comme suit

$$\nabla_X Y(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P(\gamma(0), \gamma(t))(Y(\gamma(t))) \quad (2.14)$$

où γ est une courbe telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X(p)$. Ceci ne dépend ni de la courbe ni de sa paramétrisation.

Une géodésique est alors une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ qui est auto-parallèle. En terme d'équation ça donne

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0. \quad (2.15)$$

Qui est une EDO homogène d'ordre 2. On préférera dans la suite la notation suivante

$$\frac{D\gamma'}{Dt} = 0, \quad (2.16)$$

qui est plus adaptée pour le calcul des variations.

De même que pour la dérivée de Lie, on exprime la différentielle covariante d'une fonction $U \in C^\infty(M)$ comme étant le champ de vecteurs ∇U défini par

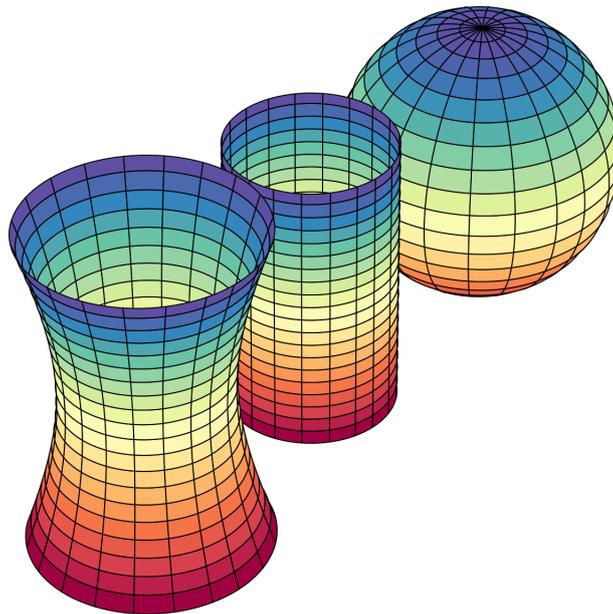
$$dU_q(v) = \langle \nabla U(q), v \rangle. \quad (2.17)$$

De même, on peut dériver tout type de tenseur covariant ou contravariant. Ainsi on montre l'existence d'une unique connexion dite de Levi-Civita, pour laquelle la métrique est parallèle

$$\nabla \langle, \rangle = 0. \quad (2.18)$$

2.3.2 Courbure

Sur une surface S , on fixe une mini région D et on la transporte parallèlement comme pour les vecteurs, on obtient une nouvelle région D' dont l'aire peut être différente. Le facteur K de différence $Aire(D') = K.Aire(D)$ est la courbure (moyenne). Quand on passe à l'infinitésimal ($Aire(D) \rightarrow 0$) on obtient la courbure en un point.

FIGURE 2.12 – $K < 0$, $K = 0$, $K > 0$ [4]

L'outil adapté pour calculer cette variation est l'application de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, définie par $N(p)$ est le vecteur normal sortant de la surface au point p . Elle mesure la variation de l'aire par la normale.

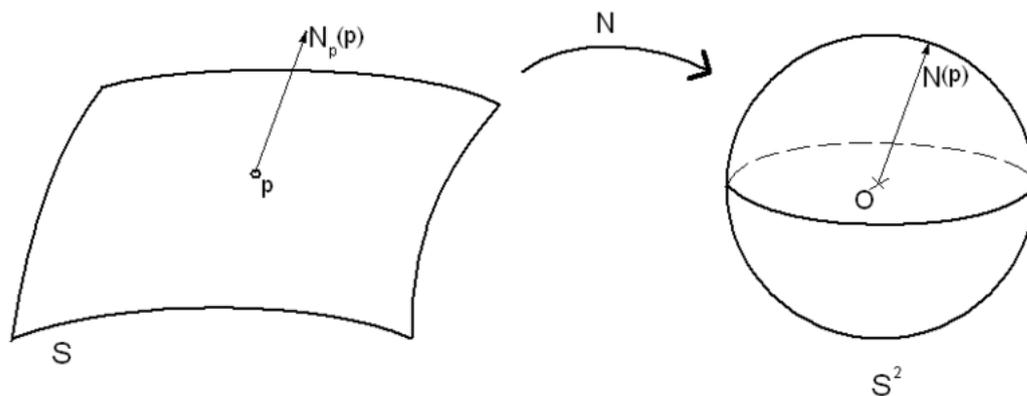


FIGURE 2.13 – Application de Gauss [4]

La courbure de Gauss est alors

$$K_{Gauss}(p) = \det(dN_p). \quad (2.19)$$

Une sphère est courbée positivement car lorsqu'on fait varier la normale, l'aire balayée par la normale est plus grande que l'aire sur la surface.

Sur un plan, les deux aires sont identiques, pour une hyperbole, l'aire balayée par la normale est plus petite que l'aire sur l'hyperbole.

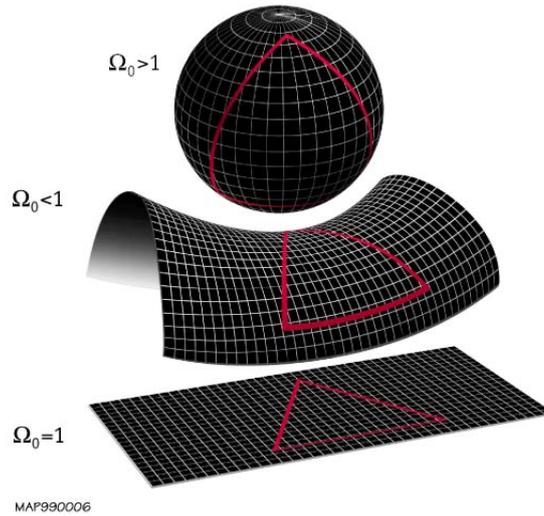


FIGURE 2.14 – Modèles de la géométrie riemannienne [60]

On montre que la courbure est intrinsèque [4], c'est à dire qu'elle est invariante par des applications qui préservent les distances et les angles.

Dans la suite, on utilisera plutôt la courbure scalaire $K_{scal} = 2K_{Gauss}$.

En dimension supérieure, le tenseur de courbure R défini par

$$R(X, Y).Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z, \quad (2.20)$$

encode la variation de l'aire, il est lié à la courbure de scalaire par

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \quad (2.21)$$

Plus précisément, le tenseur R est lié à la sensibilité par rapport aux conditions initiales de l'équation des géodésiques par l'équation de Jacobi

$$\frac{D^2 J}{Dt^2} + R(J, \gamma') \gamma' = 0, \quad (2.22)$$

où $J : I \rightarrow TM$ est un mouvement virtuel qui représente une variation locale de la géodésique γ .

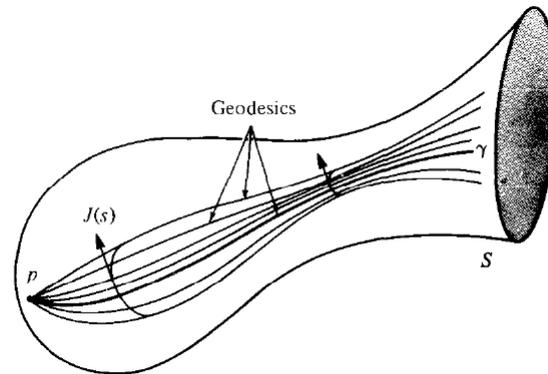


FIGURE 2.15 – Variation de géodésique [4]

La déviation géodésique est liée au signe de la courbure.



FIGURE 2.16 – Stabilité et instabilité du flot géodésique [8]

Lorsque la courbure est négative (figure 2.17), il apparaît que l'instabilité géodésique est exponentielle, ce qui explique le fait que l'observateur de Luenberger diverge.

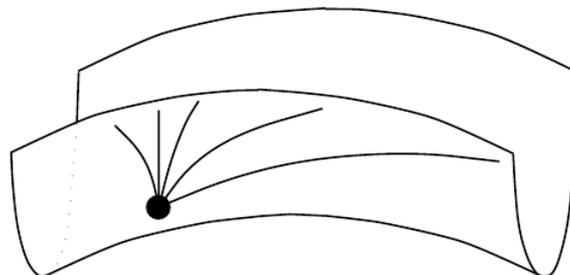


FIGURE 2.17 – Instabilité exponentielle [7]

2.3.3 Application exponentielle

L'application exponentielle associe à un vecteur tangent l'image par la géodésique après un temps unitaire, on la note $\exp_x : V_x \subset T_x M \rightarrow M$.

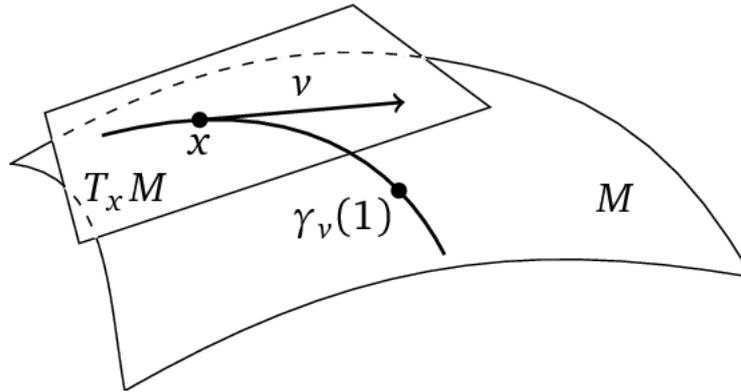


FIGURE 2.18 – Application exponentielle [7]

Lorsque l'exponentielle est définie sur $T_x M$ on dit que la variété est complète.

Ceci est équivalent au fait que les géodésiques soient définies sur \mathbb{R} , lorsque la variété M est compacte, elle est complète, on se placera dorénavant dans cette hypothèse.

L'exponentielle est un difféomorphisme local, on appelle rayon d'injectivité en x le plus grand rayon $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset T_x M$ dans lequel l'exponentielle reste un difféomorphisme. Lorsque $x, y \in M$ vérifient $d_g(x, y) < inj_x M$, il existe une unique géodésique minimisante (minimise la distance) les reliant, l'application $P(x, y) : T_y M \rightarrow T_x M$ est le transport parallèle le long de cette géodésique.

2.4 Distance géodésique

La distance géodésique est une distance naturelle sur la variété riemannienne, elle mesure l'éloignement entre deux points en tenant compte de la métrique \langle, \rangle

$$d_g(q_0, q_1) = \inf_{q \in \Omega(q_0, q_1)} \int_0^1 \sqrt{\langle q'(t), q'(t) \rangle} dt, \quad (2.23)$$

où $\Omega(q_0, q_1)$ est l'ensemble des courbes reliant q_0 à q_1 dans M en un temps unitaire.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut montrer [1] [4] que la quantité $\frac{1}{2} d_g^2(q_0, q_1)$

correspond à l'énergie cinétique minimale permettant de transférer le robot de q_0 à q_1 .

$$\frac{1}{2}d_g^2(q_0, q_1) = \inf_{q \in \Omega(q_0, q_1)} \frac{1}{2} \int_0^1 \langle q'(t), q'(t) \rangle dt \quad (2.24)$$

Cette discussion donne un sens aux critères mis en jeu dans la partie commande optimale.

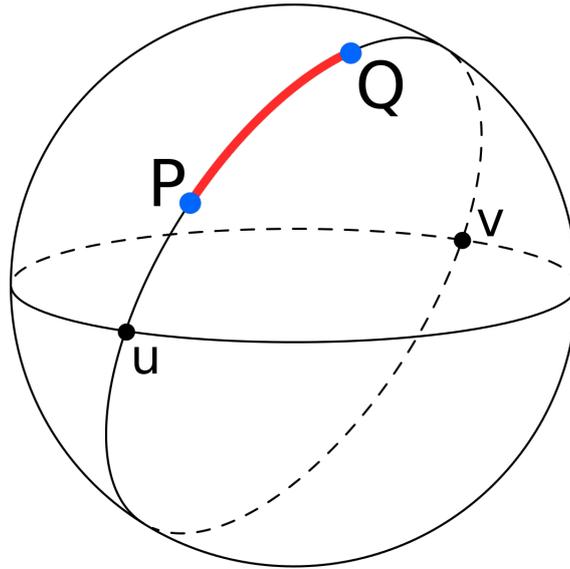


FIGURE 2.19 – Distance géodésique [4]

Soit $q \in M$, on a $d_g(q, \exp_q(v)) = |v|_g$ pour $v \in V_q$, la fonction $U = \frac{1}{2}d_g^2(q, \cdot)$ est différentiable sur V_q , le gradient covariant vaut $\nabla U(p) = -\exp_q^{-1}(p)$ pour $p \in V_q$.

Comme le calcul de l'application exponentielle est souvent difficile, on fera deux approximations

- 1) $\exp_q^{-1}(p) \approx p - q$ dans une variété quelconque.
- 2) $\exp_R^{-1}(P) \approx R \log(R^T \cdot P)$ dans $SO(3)$.

2.5 Groupes de Lie

Les groupes de Lie sont une généralisation naturelle du groupe $SO(3)$, c'est à dire un groupe qui soit une variété différentielle pour laquelle le produit et l'inverse soient des fonctions lisses, on appelle translation à gauche par g la multiplication à gauche par g .

La considération de cette structure permet de trivialisier le fibré tangent $TG = G \times \mathfrak{g}$, avec \mathfrak{g} est l'espace tangent au neutre. On peut identifier \mathfrak{g} avec l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche, comme le crochet de Lie commute avec le pullback, on peut le restreindre à \mathfrak{g} .

La considération d'une métrique riemannienne pour laquelle les translations à gauche sont des isométries permet de restreindre l'étude à un produit scalaire sur \mathfrak{g} qu'on note I , et ceci simplifie l'implémentation de l'observateur riemannien ainsi que du régulateur de poursuite, et ce en simplifiant le calcul du tenseur de courbure, et en approximant le transport parallèle par des translations à droite.

On montre [32] [33] que lorsque la métrique est invariante à gauche, la connexion de Levi-Civita est invariante à gauche, de même pour le tenseur de courbure. Ceci permet de restreindre ces opérateurs à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

L'équation des géodésiques devient l'équation d'Euler-Poincaré

$$v' = I^\# ad_v^*(I^b v), \quad (2.25)$$

avec v est la vitesse ramenée à \mathfrak{g}

$$v = [d(L_g)_e]^{-1}(g'). \quad (2.26)$$

Lorsque $G = SO(3)$ v est la vitesse de rotation instantanée dans la base liée au solide.

On fixe une base (e) de \mathfrak{g} , et on calcule les coefficients $C_{i,j}^k$ tels que

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{i,j}^k e_k, \quad (2.27)$$

on définit les $\Gamma_{i,j}^k$ par

$$D_{e_i}^{\mathfrak{g}} e_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{i,j}^k e_k, \quad (2.28)$$

un calcul permet d'avoir

$$\Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} (C_{i,j}^k - \sum_{r,s=1}^n I^{k,s} (I_{i,r} C_{j,s}^r + I_{j,r} C_{i,s}^r)), \quad (2.29)$$

avec $I_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$, et on a

$$R(e_i, e_j) e_k = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{r=1}^n [\Gamma_{j,k}^r \Gamma_{i,r}^l - \Gamma_{i,k}^r \Gamma_{j,r}^l - C_{i,j}^r \Gamma_{r,k}^l] \right) e_l, \quad (2.30)$$

ainsi

$$R_{i,j,k}^l = \sum_{r=1}^n [\Gamma_{j,k}^r \Gamma_{i,r}^l - \Gamma_{i,k}^r \Gamma_{j,r}^l - C_{i,j}^r \Gamma_{r,k}^l]. \quad (2.31)$$

Ainsi on voit qu'il est très simple de calculer la dérivée covariante, le crochet de Lie et même le tenseur de courbure de champ de vecteurs invariants à gauche, les formules pour des champs de vecteurs quelconques s'en déduit facilement à partir de là.

Pour $X \in \Gamma(TG)$ on écrit $X = X_i \cdot e_{i,L}$, avec $e_{i,L}$ est le champ de vecteur invariant à gauche qui prolonge e_i , on a

$$[X, Y] = (dX_k(Y) - dY_k(X) + \sum_{i,j=1}^n [X_i Y_j C_{i,j}^k]) e_{k,L}, \quad (2.32)$$

$$D_X Y = [dY_k(X) + (\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k X_i Y_j)] e_{k,L}, \quad (2.33)$$

$$R(X, Y)Z = [\sum_{i,j,l=1}^n R_{i,j,l}^k X_i Y_j Z_l] e_{k,L}. \quad (2.34)$$

Lorsque la métrique est invariante à gauche et à droite, deux choses intéressantes se produisent, la première c'est que l'exponentielle matricielle est la même que l'exponentielle de la métrique [21], la seconde c'est que la courbure est positive [33].

Lorsque la courbure est positive (figure 2.20), le flot géodésique est stable [7], ainsi on peut croire que l'observateur de Luenberger converge. C'est vrai pour l'orientation d'une boule de masse volumique uniforme. Celle ci introduit une métrique bi-invariante sur $SO(3)$, la courbure est donc positive, les simulations montrent que dans ce cas l'observateur de Luenberger converge.

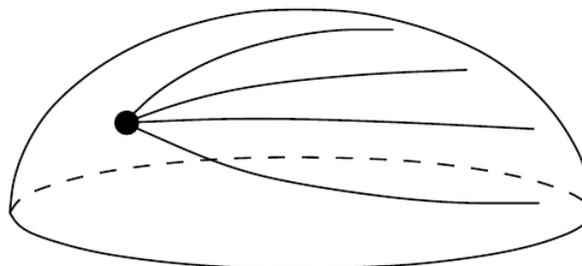


FIGURE 2.20 – Stabilité du flot géodésique lorsque la courbure est positive [7]

On appuie cette discussion par les simulations suivantes sur une boule (Tenseur d'inertie $= 2I_3$), dont la dynamique est la suivante

$$R' = R\Omega,$$

$$\Omega' = -2I^{-1}[\text{skew}(R)]^\times. \quad (2.35)$$

L'observateur de Luenberger est

$$\hat{R}' = \hat{R}(\hat{\Omega} - 2[I^{-1}[\text{skew}(R^T \cdot \hat{R})]^\times]_\times),$$

$$\hat{\Omega}' = -2I^{-1}[\text{skew}(R)]^\times - 2I^{-1}[\text{skew}(R^T \cdot \hat{R})]^\times. \quad (2.36)$$

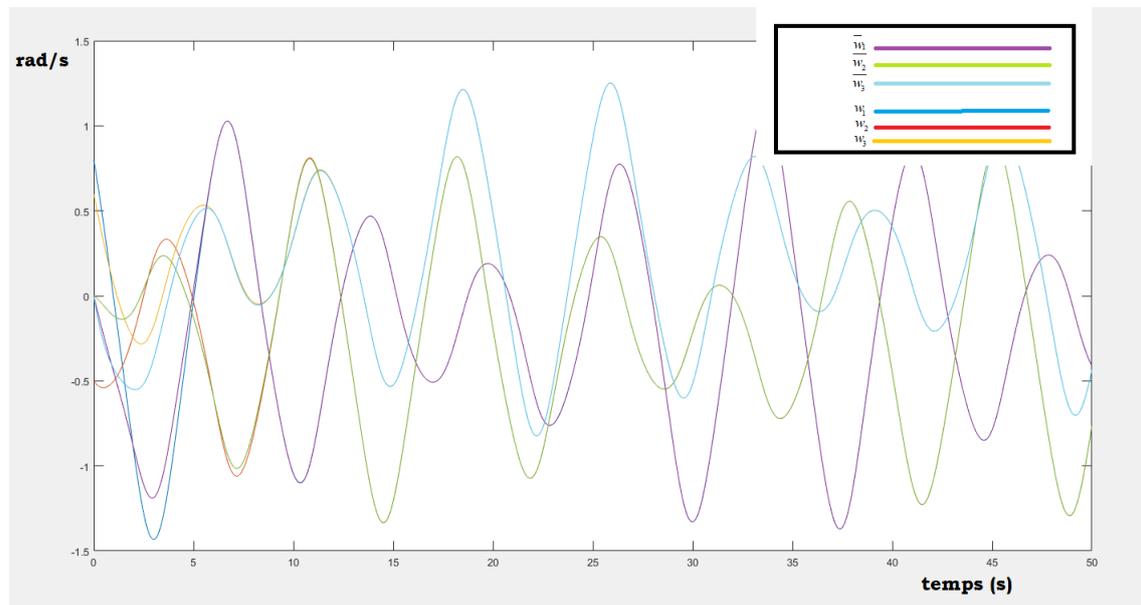


FIGURE 2.21 – Observateur de Luenberger pour un corps rigide (boule)

Les courbes dans la figure 2.21 en rouge et bleu et orange sont les vitesses de rotation instantanées réelles, et celles en vert et mauve et bleu ciel sont les vitesses observées. On voit bien qu'il y'a bonne performance, ceci est du à la positivité de la courbure.

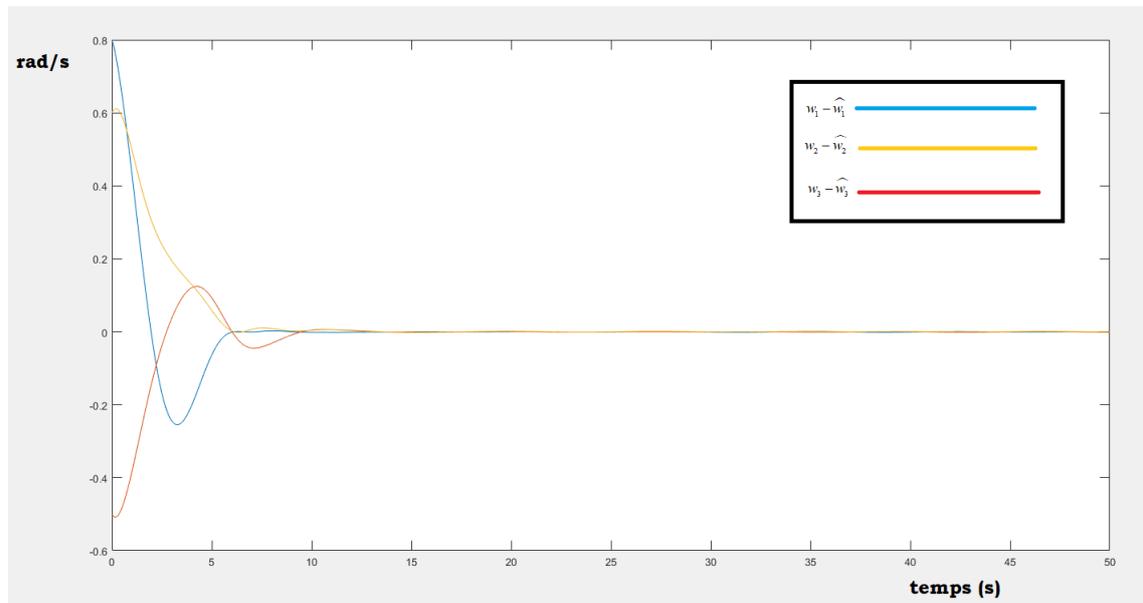


FIGURE 2.22 – Erreur d’observation de Luenberger (boule)

Les erreurs d’observation dans la figure 2.22 montrent que l’observateur de Luenberger est performant quand la courbure est positive.

CHAPITRE 3

Modélisation géométrique des robots

En ce qui va suivre, on présente l'approche géométrique, qui modélise l'espace des configurations par une variété riemannienne. On établit les équations du mouvement ainsi que le théorème de l'énergie cinétique.

3.1 Équations du mouvements

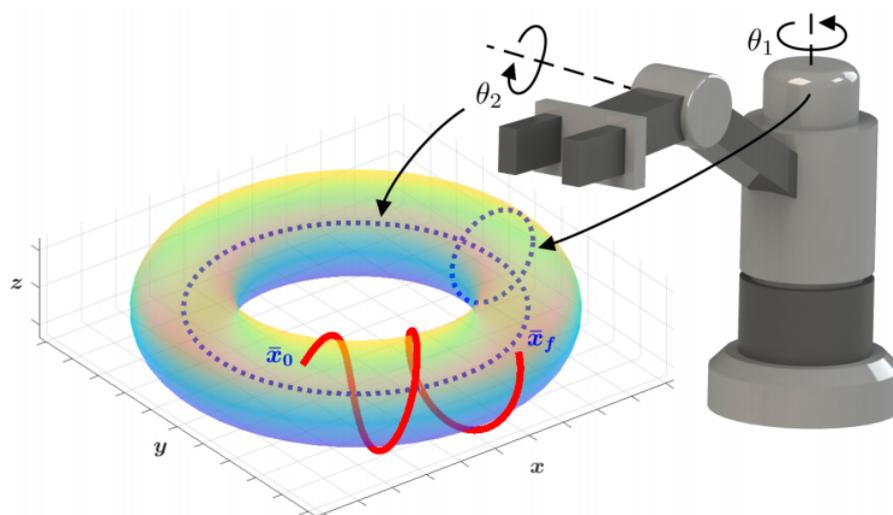


FIGURE 3.1 – Mouvement d'un robot [58]

Soit (M, g) un système robotique, et $W \in C^\infty(M)$ une énergie potentielle. On suppose que la trajectoire minimise le Lagrangien $L(q, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - W(q)$, en faisant le calcul des variations on aboutit à l'équation suivante

$$\frac{Dq'}{Dt} = -\nabla W(q). \quad (3.1)$$

En théorie du contrôle, on dispose d'une loi de commande pour pouvoir asservir le robot. L'équation est donc :

Dynamique Robotique

$$\frac{Dq'}{Dt}(t) = -\nabla W(q(t)) + g_{q(t)}^\#(u(t)), \quad (3.2)$$

pour $u \in \Gamma_{loc}^1(I, T^*M)$.

Une version du théorème de Cauchy-Lipschitz [39] [48] énonce qu'il existe une unique solution localement **AD** de l'équation précédente.

On retrouve ainsi l'équation de Newton. Le terme de gauche quantifie un défaut de parallélisme, et le terme de droite est une force extérieure.

Il s'agit du célèbre énoncé "la trajectoire d'un objet reste parallèle le long d'elle même tant qu'il n'y a pas de forces extérieurs qui s'y appliquent".

3.2 Théorème de l'énergie cinétique

Les fonctions de Lyapunov qu'on utilisera ont la forme d'une énergie mécanique, et donc exprimer la variation de cette énergie au moyen de la commande permettrait d'avoir les bonnes inégalités mis en jeux dans les théorèmes de stabilité [10] [11].

On a le résultat suivant pour toute trajectoire de la dynamique robotique [1] [21].

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |v(t)|^2 + W(q(t)) \right] = u(t)(v(t)), \quad (3.3)$$

presque partout dans le temps.

3.3 Fonction de l'outil



FIGURE 3.2 – Industrie automobile

En industrie, le problème de régulation de l'organe terminale est abordé. Dans ce qui suit, on expose des définitions et des hypothèses utiles pour la suite.

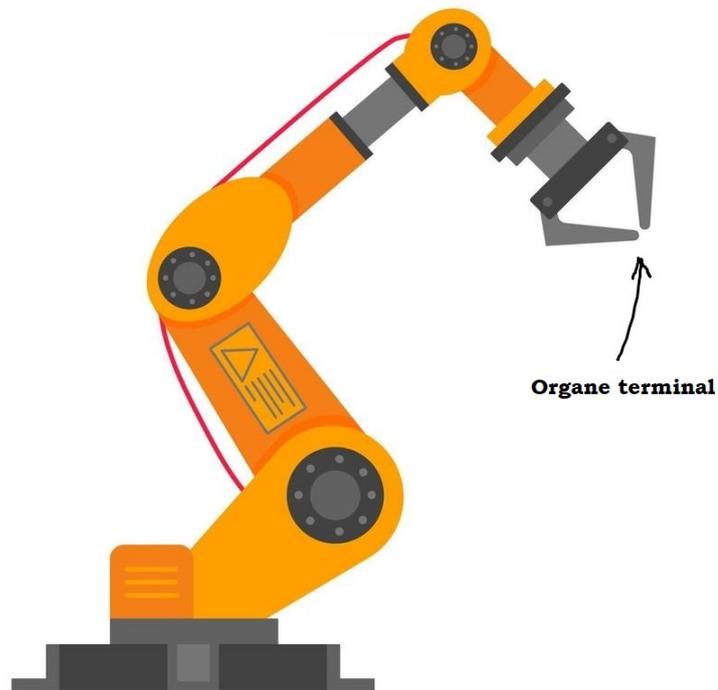


FIGURE 3.3 – Organe terminal [18]

La fonction de l'outil associe à chaque configuration la position de l'organe terminale du robot dans \mathbb{R}^3 .

Une configuration est dite singulière si, lorsqu'on fait varier localement la configuration, l'outil ne peut pas se déplacer dans toutes les directions, plus précisément si $q \in M$ pour laquelle dx_q n'est pas surjective.

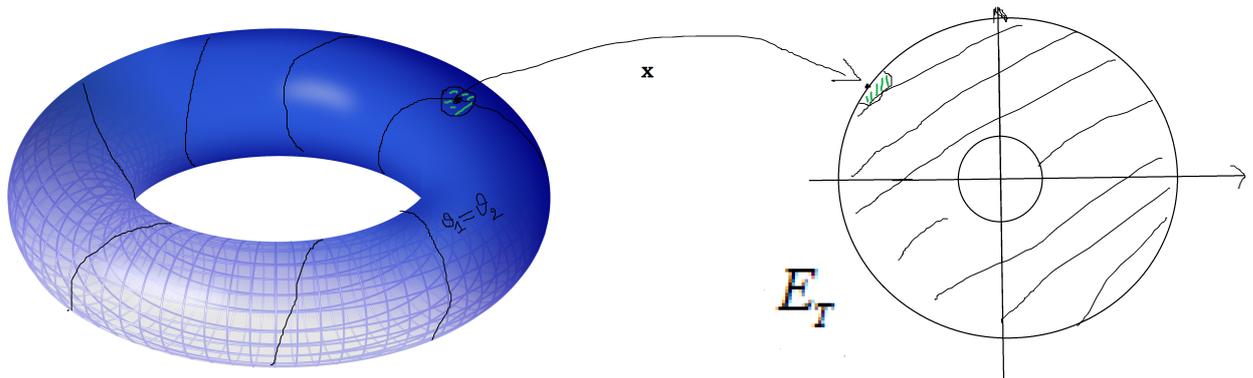


FIGURE 3.4 – Configuration singulière

L'espace de travail est l'ensemble de toutes les positions que peut atteindre l'outil, $E_T = x(M)$.

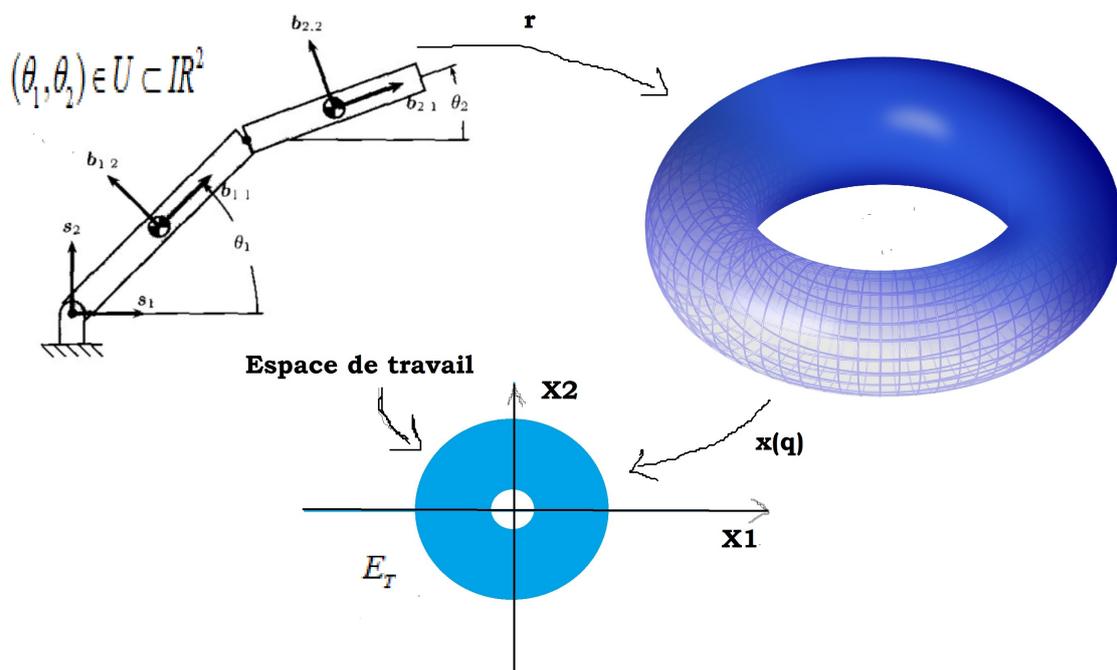


FIGURE 3.5 – Fonction d'outil

L'hypothèse d'absence de singularités permet de constater [1] [31] que pour tout $x_d \in E_T$, $x^{-1}(x_d)$ est une sous variété de dimension $n - 3$ de M .

On dit que $S \subset E_T$ est une surface fortement orientable lorsqu'il existe $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ lisse submersive sur E_T telle que $\Phi^{-1}(0) = S$.

Si S est fortement orientable et la fonction d'outil ne possède pas de point singulier, $N = x^{-1}(S)$ est une hypersurface de M .

La principale contribution apportée dans [31], était de relier la notion de singularité au bon fonctionnement du régulateur de l'outil proposée dans [18] [19] [20].

Également, sous l'hypothèse d'absence de singularité, on montre dans [31] qu'il est possible de maintenir l'outil dans une surface fortement orientable avec une unique composante orthogonale de la loi de commande.

CHAPITRE 4

Régulation des robots

Dans cette partie, on réénonce les résultats dans [1], dans le but d'appuyer la partie de commande optimale ou on montrera que les régulateurs proposées ici sont optimaux pour des critères naturels.

4.1 Régulation de la configuration

Soit un système robotique initialisée en $(q_0, v_0) \in TM$, on veut réguler la configuration vers q^* . En prenant pour fonction de Lyapunov $L(q, v) = \frac{1}{2}d_q^2(q, q^*) + \frac{1}{2}|v|^2$, on montre que la commande $u = \exp_q^{-1}(q^*) - k.v$ stabilise la configuration de $\frac{Dq'}{Dt} = u$ vers q^* dès que $L(q_0, v_0) < \frac{1}{2}inj_{q^*}(M)^2$.

Remarquons que le régulateur précédent a une forme d'un PD-Riemannien, l'inverse de l'exponentielle mesure l'éloignement des deux configurations en tenant compte de l'inertie du robot.

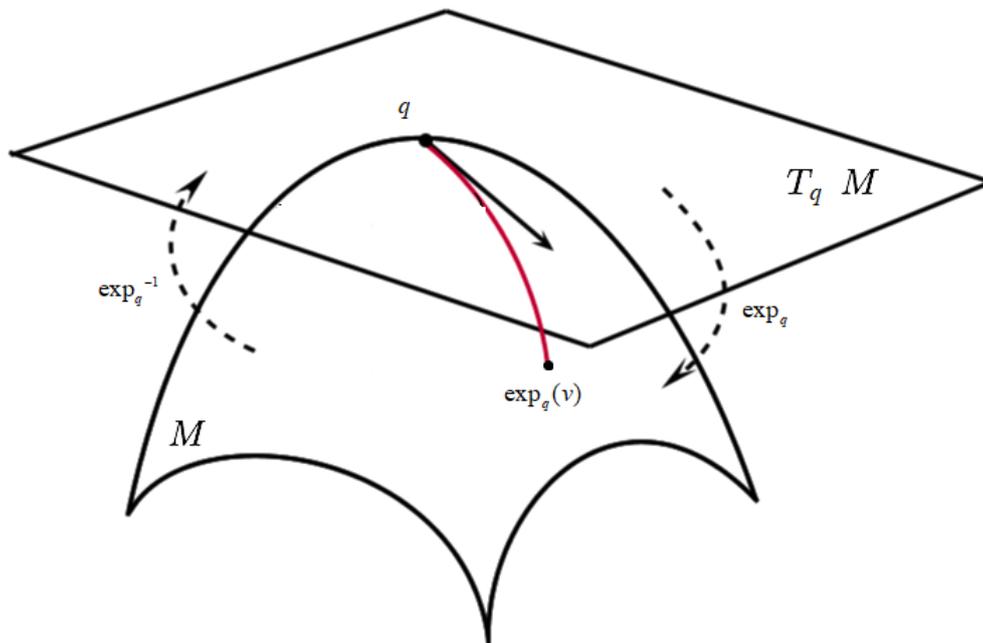


FIGURE 4.1 – Inverse de l'exponentielle [60]

On expose les résultats de [1] [31], où on régule par cette méthode, la configuration du bras manipulateur.

La position de référence est $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi)$. La figure suivante montre l'évolution du bras dans le tore, ainsi qu'une animation.

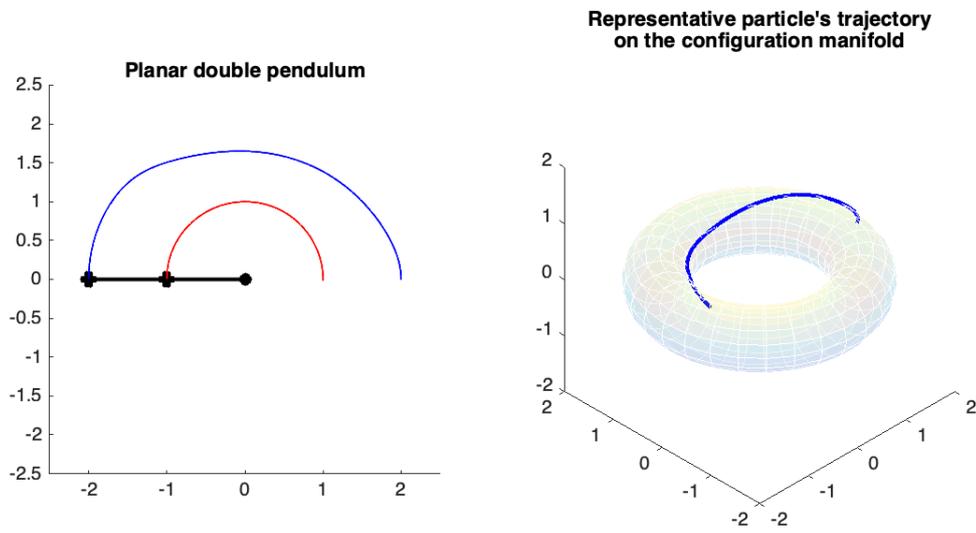


FIGURE 4.2 – Régulation de la configuration du bras [31]

4.2 Régulation de l'outil

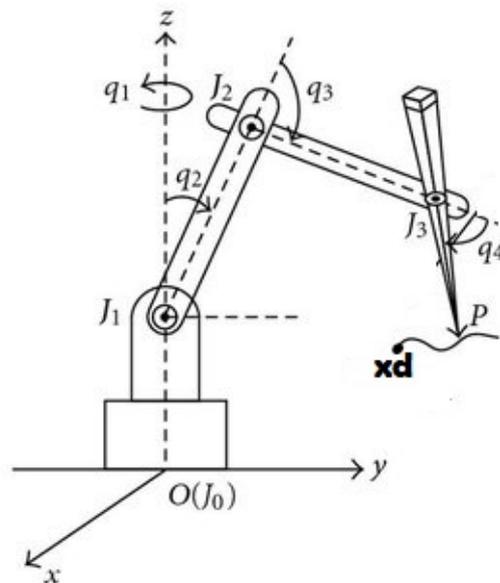


FIGURE 4.3 – Régulation de l'outil [20]

La problématique est l'asservissement globale la position de l'outil du robot. L'idée principale [1] [31] [18] est d'invoquer à l'aide de la commande un potentiel V

$$V(q) = \frac{1}{2} \|x(q) - x_d\|^2, \quad (4.1)$$

qui crée des trous autour des configurations pour lesquels l'outil est dans la position désirée.

S'il n'y a pas de points singuliers [1] [31], l'ensemble des points d'équilibres se réduit à $x^{-1}(x_d)$, le principe d'invariance de LaSalle affirme que ce régulateur répond au cahier des charges.

Théorème 4.2.1. *Supposons que la fonction de l'outil ne possède aucun point singulier, alors pour $x_d \in E_T$, la loi de commande*

$$u = -\nabla V - k.v \quad (4.2)$$

stabilise l'outil vers x_d avec une vitesse nulle de la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = u$.

Preuve :

Les point d'équilibres de la dynamique bouclée sont les points critiques de V , or on a $dV_q(v) = \langle x(q) - x_d, dx_q(v) \rangle$. Ceci permet de voir que les points critiques de V sont exactement $x^{-1}(x_d)$. Comme la fonction $V(q) + \frac{1}{2}|v|^2$ est propre sur TM , et que

$$\frac{d}{dt} [V(q(t)) + \frac{1}{2}|v(t)|^2] = -k|v(t)|^2 \leq 0, \quad (4.3)$$

le plus grand sous ensemble invariant de $M \times 0$ est $\Omega = x^{-1}(x_d) \times 0$.

Par exemple, les simulations dans [31] [1] montrent que la condition d'absence des singularités peut être affaiblie, et ce en appliquant ces lois de commande au bras manipulateur qui contient possède configurations singulières.

Le cahier des charges est de réguler la position de l'outil vers $(-2,0)$.

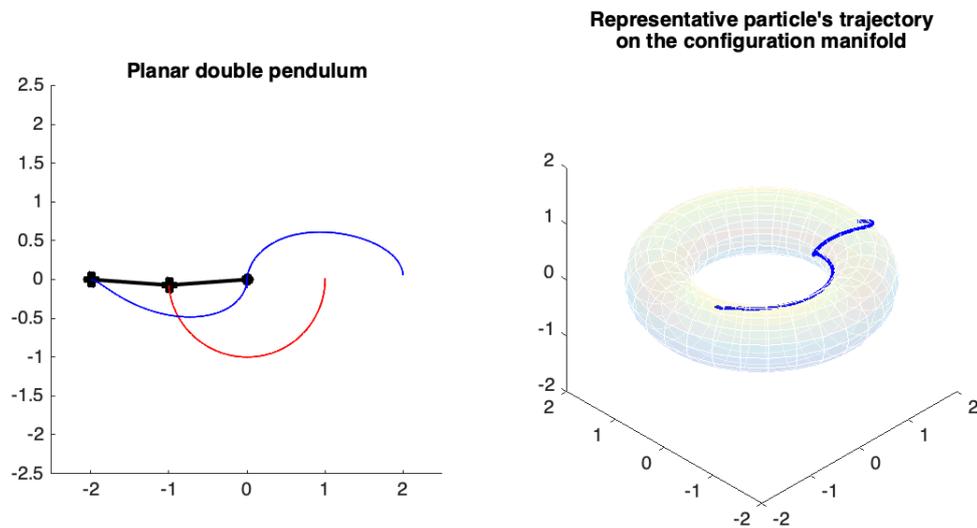


FIGURE 4.4 – Régulation de l'outil du bras [31]

4.3 Régulation de l'outil sous contrainte

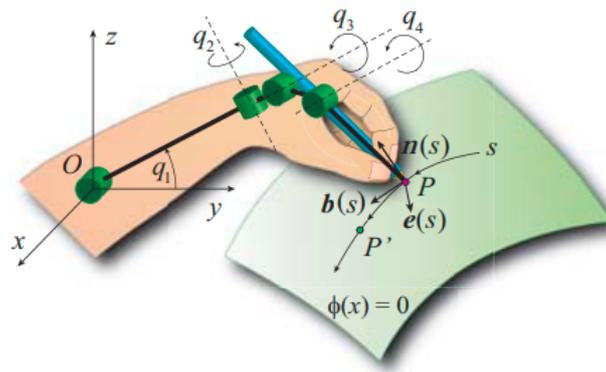


FIGURE 4.5 – Régulation sous contrainte [19]

La problématique principale est d'aboutir à une loi de commande qui permette de maintenir l'outil dans une surface de l'espace de travail.

Le même calcul des variations que celui qui donne l'équation du mouvement permet de voir que si $N \subset M$ est une sous variété, alors les trajectoires qui minimisent le Lagrangien

contraintes à rester dans N vérifient l'équation suivante

$$\frac{Dq'}{Dt} + \nabla U(q) = R \in T_q N^\perp. \quad (4.4)$$

Ceci est une force de contact R qui permet de maintenir la configuration dans N .

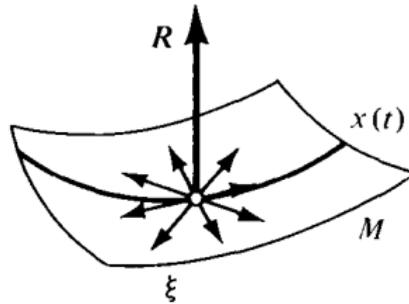


FIGURE 4.6 – Force de contact [8]

Grâce a un calcul inverse [1] [31], on montre le résultat suivant

Théorème 4.3.1. *Soit $S \subset E_T$ une surface fortement orientable, supposons que la fonction de l'outil ne possède aucun point singulier, alors si la position initiale de l'outil est dans S avec une vitesse tangente, il existe une unique composante normale qui maintient l'outil dans S pour la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = u$, explicitement*

$$u^\perp(q, v) = \frac{-\langle D_v \nabla \Psi(q), v \rangle}{|\nabla \Psi(q)|_g^2} \cdot \nabla \Psi(q), \quad (4.5)$$

avec $\Psi = \Phi \circ x$ et Φ vérifie $\Phi^{-1}(0) = S$.

Preuve :

soit $q : I \rightarrow M$ la configuration du robot, on pose $f(t) = \Psi(q(t))$, alors les conditions initiales donnent $f(0) = f'(0) = 0$, calculons $f''(t)$

$$f'(t) = \langle \nabla \Psi(q(t)), q'(t) \rangle,$$

$$f''(t) = \langle \frac{\nabla \Psi(q(t))}{Dt}, q'(t) \rangle + \langle \nabla \Psi(q(t)), u \rangle.$$

Ainsi, en remplaçant u par la loi de commande de énoncé. On trouve $f'' = 0$, et donc $f = 0$.

Avec ce résultat, on peut sous certaines conditions réguler (par les mêmes méthodes précédentes) la configuration ou l'outil tout en respectant la contrainte, comme l'énonce le résultat suivant [31] [1], et ce en utilisant la commande orthogonale pour maintenir l'outil

contraint, et une commande tangentiel pour le ramener à la position désirée.

Théorème 4.3.2. *Soit $S \subset E_T$ une surface fortement orientable, alors si la fonction de l'outil est sans points singuliers et vérifie la condition suivante :*

$$\text{si } q \in N \text{ tel que } x(q) - x_d \in T_{x(q)}S^\perp \text{ alors } x(q) = x_d.$$

Alors la loi de commande $u = u^\perp + u^{\parallel}$ avec :

$$u^{\parallel}(q, v) = P_{(\nabla\Psi(q))^\perp}(-\nabla V(q) - k.v), \quad (4.6)$$

permet de stabiliser l'outil vers $x_d \in S$ tout en restant dans S .

Preuve :

Le théorème 4.3.1 permet de voir que la configuration de $\frac{Dq'}{Dt} = u^\perp + u^{\parallel}$ initialisée dans TN reste dans N . Ainsi $q : I \rightarrow N$ et donc $(\nabla\Psi(q(t)))^\perp = T_{q(t)}N$ et donc en projetant l'équation sur $T_{q(t)}N$ on trouve

$$\frac{D^N q'}{Dt} = P_{T_{q(t)}N}(-\nabla V(q(t))) - k.q'(t).$$

D'autres parts, l'hypothèse supplémentaire sur la surface S est équivalent a l'assertion suivante " **pour $q \in N$ tel que pour tout $v \in T_qN$ $\langle x(q) - x_d, dx_q(v) \rangle = 0$ vérifie $x(q) = x_d$.**" Ainsi, on voit que l'ensemble des points d'équilibres est $x^{-1}(x_d)$, ceci conclut.

A titre d'exemple, voici une simulation tirée de [31] qui montre que la loi de commande développée permet de réguler la position de l'outil du bras manipulateur vers la position $(0,1)$, tout en restant dans l'ellipse d'équation $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$.

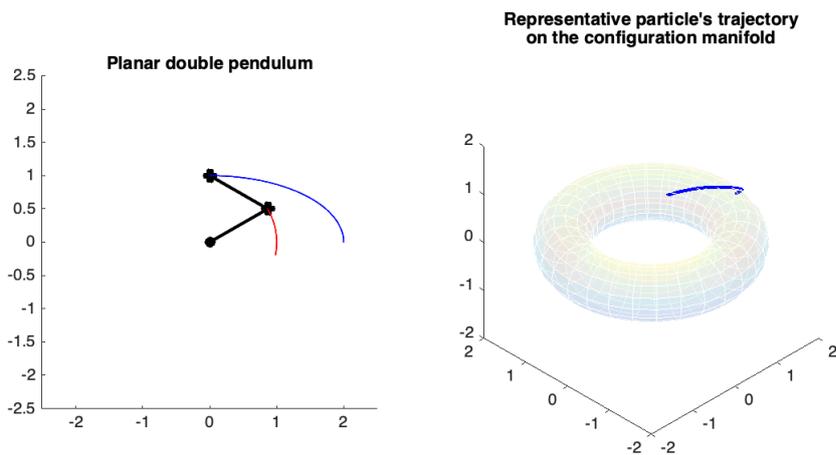


FIGURE 4.7 – Régulation du bras sous contrainte de rester dans l'ellipse [31]

4.4 Poursuite de référence

Les travaux dans [21] [30] énoncent un régulateur de poursuite qui se base sur la géométrie de l'espace des configurations.

Les auteurs considèrent une fonction V qui mesure l'éloignement entre l'état réel et l'état de référence, et appliquent une action feed-forward pour compenser un terme qui empêche d'agir sur la variation de l'erreur en vitesse. Suivi du rajout d'un régulateur PD pour assurer la décroissance de V .

Théorème 4.4.1. *Soit la dynamique $\frac{Dq}{Dt} = u$, et soit une trajectoire lisse de référence sur M , alors le régulateur $u = u_{FF} + u_{PD}$ fait décroître la fonction*

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{1}{2}d_g^2(q_{ref}(t), q(t)) + \frac{1}{2}|v(t) - P(q(t), q_{ref}(t))v_{ref}(t)|^2 \quad (4.7)$$

$$u_{FF}(q, v) = \frac{d}{dt}P(q, q_{ref}(t))v_{ref}(t) + D_v P(q, q_{ref}(t))v_{ref}, \quad (4.8)$$

$$u_{PD} = \exp_q^{-1}(q_{ref}(t)) - k.(v - P(q, q_{ref}(t))v_{ref}). \quad (4.9)$$

Dans l'article [30], les auteurs proposent une formulation du régulateur de poursuite pour le cas d'un groupe de Lie munit d'une métrique invariante à gauche, on énonce ce théorème en expliquant la définition suivante.

Définition 4.4.1. *la fonction de transport est $P : G \times TG \rightarrow TG \times G$ définie par :*

$$P(g, h)(v_h) = d(R_{h^{-1}.g})_h(v_h) \quad (4.10)$$

Lorsque la métrique est invariante à droite, cette fonction de transport coïncide avec le transport parallèle pour certains vecteurs, ceci constitue la motivation principale de cette approximation.

Théorème 4.4.2. *soit (G, I) un groupe de Lie munie d'une métrique invariante à gauche, soit la trajectoire lisse de référence $t \in I \rightarrow g_{ref}(t)$, alors si on prend $\tau = \tau_{FF} + \tau_{PD}$ avec*

$$\tau_{FF} = D_\eta^g(Ad_{g^{-1}g_{ref}(t)}(v_{ref}(t))) + [Ad_{g^{-1}g_{ref}(t)}(v_{ref}(t)), \eta] + Ad_{g^{-1}g_{ref}(t)}(v'_{ref}(t)) \quad (4.11)$$

$$\tau_{PD} = -\log(g_{ref}^{-1}(t).g) - k.(\eta - Ad_{g^{-1}g_{ref}(t)}(v_{ref}(t))) \quad (4.12)$$

rend l'énergie

$$E(t, g, \eta) = \frac{1}{2}d_g^2(g_{ref}(t), g) + \frac{1}{2}|\eta - Ad_{g^{-1}g_{ref}(t)}(v_{ref}(t))|^2, \quad (4.13)$$

décroissante le long des trajectoires du système.

CHAPITRE 5

Synthèse d'observateur

La synthèse de l'observateur de Luenberger est très efficace pour les systèmes linéaires observables, mais pour les systèmes non linéaires elle ne marche que localement. L'idée qu'on expose ici est publiée dans [25] [26], mais on le fera ici avec un calcul intrinsèque.

5.1 Théorie de contraction

La théorie de contraction d'origine énergétique [22] [23] [27] a pour but de comparer l'évolution de la distance sous l'effet d'un champ de vecteur, moyennant une hypothèse sur le tenseur de déformation.

On commence par définir la dérivée de Lie d'une métrique par rapport à un champ de vecteurs,

soit (M, g) une variété riemannienne et $X : I \times M \rightarrow TM$ lisse, on note

$$L_X g_{(t, \phi_t(x))}(d\phi_t(x)(v), d\phi_t(x)(w)) = \frac{d}{ds} [g_{\phi_s(x)}(d\phi_s(x)(v), d\phi_s(x)(w))] |_{s=t} \quad (5.1)$$

avec $x \in M$, $v, w \in T_x M$ et $t \in I$, la dérivée de Lie de g dans la direction X .

La dérivée de Lie de g dans la direction X quantifie la tendance qu'a le champ de vecteurs à faire varier la métrique, si elle est uniformément négative alors elle contracte les distances.

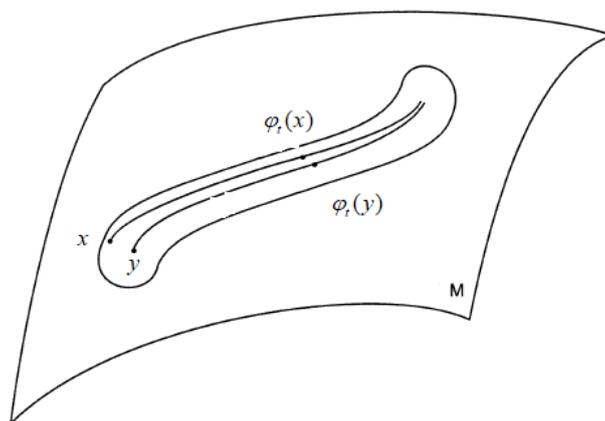


FIGURE 5.1 – Contraction [25]

Théorème 5.1.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne connexe, complète, et soit X un champ de vecteurs non stationnaire lisse et complet, si*

$$L_X g_{(t,x)}(v, v) \leq -\alpha g_x(v, v), \quad (5.2)$$

pour $\alpha > 0$ et $t \in I$ et $(x, v) \in TM$, alors pour tout $x, y \in M$ et $t \geq 0$

$$d_g(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq e^{-\frac{\alpha}{2}t} d_g(x, y). \quad (5.3)$$

Preuve :

On établit une inégalité différentielle sur la longueur $L(t)$ entre les deux images par le flot de x et y au temps t , soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une géodésique minimisante reliant x à y , et soit $\gamma_t(s) := \phi_t(\gamma(s))$ l'image de la géodésique par le flot. Pour tout t , $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow M$ est une courbe lisse régulière reliant $\phi_t(x)$ à $\phi_t(y)$, soit

$$L(t) := \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma_t(s)}\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right)} ds. \quad (5.4)$$

Clairement $L \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$ et on a

$$L'(t) = \int_0^1 \frac{\frac{d}{dt} [g_{\gamma_t(s)}\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right)]}{2\sqrt{g_{\gamma_t(s)}\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right)}} ds, \quad (5.5)$$

intéressons nous au terme du dessus, ce dernier vaut

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [g_{\gamma_t(s)}\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right)] = \frac{1}{2} L_X g_{(t, \gamma_t(s))}\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right) \leq -\frac{\alpha}{2} g_{\gamma_t(s)}\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right), \quad (5.6)$$

et donc ceci donne $L'(t) \leq -\frac{\alpha}{2} L(t)$. Ainsi $L(t) \leq e^{-\frac{\alpha}{2}t} d_g(x, y)$, on conclut trivialement puisque $d_g(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq L(t)$.

5.2 Équation de Jacobi pour l'observateur de Luenberger

L'observateur de Luenberger pour la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = S(q)$ est le suivant.

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{v} + k_1 \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)), \quad (5.7)$$

$$\frac{D\hat{v}}{Dt} = P(\hat{q}, q(t))(S(q(t))) + k_2 \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)). \quad (5.8)$$

On choisit alors une perturbation $h : I \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow TM$ définie par $h(t, s) = (\hat{q}_s(t), \hat{v}_s(t))$ telle que pour tout s les trajectoires vérifient les équations de l'observateur. Par le même calcul que celui qui donne l'équation de Jacobi [4] [5] [7], En notant les déplacements virtuels en configuration et en vitesse respectivement par J et V , où $J(t, s) = \frac{\partial \hat{q}_s}{\partial s}(t)$ et $V(t, s) = \frac{D\hat{v}_s}{Ds}(t)$ et $J(t) = J(t, 0)$, $V(t) = V(t, 0)$. En appliquant $\frac{D}{Ds}$ et en évaluant en $s = 0$ sur les deux équations on trouve

$$\frac{DJ}{Dt} = V + k_1 \cdot D_J \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)), \quad (5.9)$$

$$\frac{DV}{Dt} = R(\hat{q}', J)\hat{v} + D_J P(\hat{q}, q(t))(S(q(t)) + k_2 D_J \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t))). \quad (5.10)$$

5.3 Observateur riemannien

L'équation précédente est l'équation de Jacobi avec des seconds membres. Ainsi, la où la courbure est négative, cet observateur risque de diverger pour les raisons expliquées dans le premier chapitre.

L'idée est de rajouter dans l'équation de l'observateur un terme, qui permet de compenser le tenseur de courbure qui apparaît dans l'équation de Jacobi. En rajoutant

$$R(\hat{v}, \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)))\hat{v}, \quad (5.11)$$

dans la seconde équation de l'observateur, on élimine la courbure. En effet en appliquant $\frac{D}{Ds}$ dans

$$\frac{D\hat{v}}{Dt} = P(\hat{q}, q(t))(S(q(t))) + k_2 \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)) + R(\hat{v}, \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)))\hat{v}, \quad (5.12)$$

et en utilisant l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{D}{Ds} R(\hat{\omega}_s(t), \exp_{\hat{q}_s(t)}^{-1}(q(t)))\hat{\omega}_s(t) &= (D_{J(s,t)} R)(\hat{\omega}_s(t), \exp_{\hat{q}_s(t)}^{-1}(q(t)))\hat{\omega}_s(t) \\ &+ R(V(t, s), \exp_{\hat{q}_s(t)}^{-1}(q(t)))\hat{\omega}_s(t) + R(\hat{\omega}_s(t), \exp_{\hat{q}_s(t)}^{-1}(q(t)))V(t, s) \\ &+ R(\hat{q}_s(t), D_{J(t,s)} \exp_{\hat{q}_s(t)}^{-1}(q(t)))\hat{v}_s(t). \end{aligned} \quad (5.13)$$

On trouve

$$\begin{aligned} \frac{DV}{Dt} &= R(\hat{q}', J)\hat{v} + D_J P(\hat{q}, q(t))(S(q(t)) + k_2 D_J \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)) + (D_J R)(\hat{q}, \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)))\hat{v} \\ &+ R(V, \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)))\hat{v} + R(\hat{v}, \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)))V + R(\hat{v}, D_J \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)))\hat{v} \end{aligned} \quad (5.14)$$

l'équation de Jacobi lorsque $\hat{q} = q$ devient

$$\frac{DJ}{Dt} = V - k_1 J, \quad (5.15)$$

$$\frac{DV}{Dt} = -k_2 J, \quad (5.16)$$

car $D_J \exp_{\hat{q}}^{-1}(q)|_{q=\hat{q}} = -J$, $D_J P(\hat{q}, q)S(q)|_{q=\hat{q}} = 0$ (obtenue par calcul en coordonnées locales), et à partir de là on synthétise une métrique pour laquelle la dynamique est contractante [24] [25].

Ainsi, l'observateur suivant converge une fois les configurations réelle et observée initiales sont suffisamment proches :

Observateur Riemannien

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \hat{v} + k_1 \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)), \quad (5.17)$$

$$\frac{D\hat{v}}{Dt} = P(\hat{q}, q(t))(S(q(t))) + k_2 \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)) + R(\hat{v}, \exp_{\hat{q}}^{-1}(q(t)))\hat{v}. \quad (5.18)$$

Pour les groupes de Lie munit d'une métrique invariante à gauche (G, I) , la dynamique prend la forme [32]

$$g' = v_L, \quad (5.19)$$

$$v' = I^\# \text{ad}_v^* I^\flat v + \mathfrak{s}(g). \quad (5.20)$$

L'observateur riemannien est

$$\hat{g}' = (\hat{v} - k_1 \zeta)_L, \quad (5.21)$$

$$\hat{v}' = I^\# (\text{ad}_{\hat{v}}^* I^\flat \hat{v} + -\frac{k_1}{2} (\text{ad}_\zeta^* I^\flat \hat{v} + \text{ad}_{\hat{v}}^* I^\flat \zeta)) + \frac{k_1}{2} [\zeta, \hat{v}] + \text{Ad}_{\hat{g}^{-1}g}(\mathfrak{s}(g)) - k_2 \zeta + R(\hat{v}, \zeta)\hat{v}, \quad (5.22)$$

avec $\zeta = \log(g^{-1} \cdot \hat{g})$.

En effet, pour une métrique invariante à gauche, les translations à gauche transforment des géodésiques en géodésiques.

Ainsi, on a $\exp_{\hat{g}}(\hat{g}.v) = \hat{g} \exp_e(v)$, si on a $\exp_{\hat{g}}(\hat{g}.v) = g$, alors on trouve $\log_{\hat{g}}(g) = \hat{g}.v$, où $v = \log_e(\hat{g}^{-1}.g)$, de là on déduit que $\exp_{\hat{g}}^{-1}(g) = \hat{g} \log(\hat{g}^{-1}.g)$.

Comme en pratique on peut pas calculer \log_e , on applique le logarithme de la structure de groupe de Lie qui est plus simple à calculer car il ne dépend que de la structure différentielle et non pas de la métrique.

5.4 Application

On se propose d'appliquer l'observateur riemannien à l'observation de la vitesse d'un corps rigide, et du bras manipulateur en se plaçant exactement dans la même situation que celle du premier chapitre.

Pour le corps rigide, en bénéficiant de la structure algébrique (de groupe) et géométrique (structure riemannienne invariante à gauche) de l'espace des configurations.

à présent, on considère la base canonique de \mathbb{R}^3 , ceci permet de donner une base de $\mathfrak{so}(3)$, on calcule les coefficients de la structure d'algèbre de Lie $C_{1,2}^3 = 1$, $C_{1,3}^2 = -1$, $C_{2,3}^1 = 1$, par les formules (équation 2.29, 2.31) on déduit le tenseur de courbure.

$$\dot{\hat{R}} = \hat{R}.(\hat{\Omega} - 2[I^{-1}[\log(R^T.\hat{R})]^\times]_\times), \quad (5.23)$$

$$\dot{\hat{\Omega}} = I^{-1}.[(I.\hat{\Omega}) \times \hat{\Omega} - (I\hat{\Omega} \times \zeta + I\zeta \times \hat{\Omega})] + \zeta \times \hat{\Omega} - 2\zeta - 2.\hat{R}^T.R.I^{-1}[skew(R)]^\times + R(\hat{\Omega}, \zeta)\hat{\Omega}, \quad (5.24)$$

avec $\zeta = I^{-1}[\log(R^T.\hat{R})]^\times$, et $skew(R) = \frac{R-R^T}{2}$. On trouve les résultats suivants

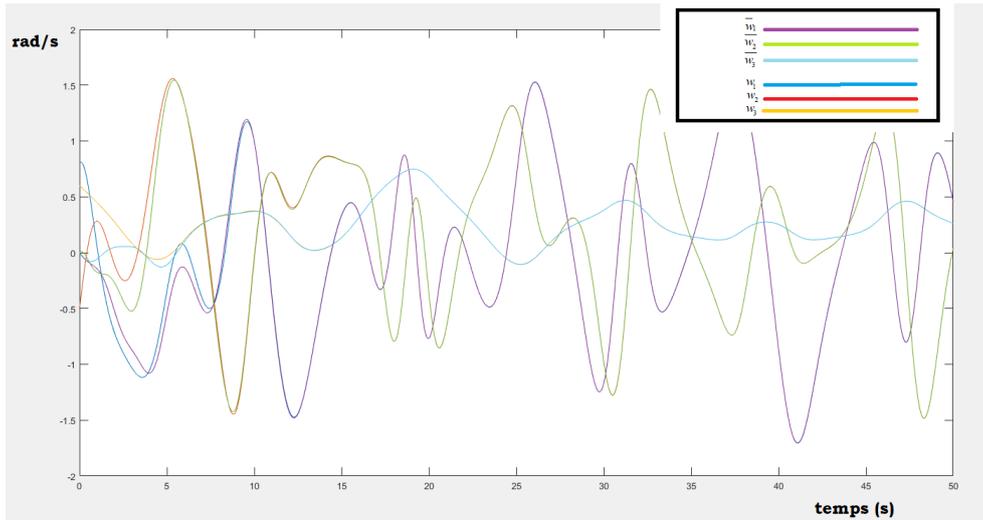


FIGURE 5.2 – Convergence de l'observateur riemannien- corps rigide

Les courbes dans la figure 5.2 en rouge et bleu et orange sont les vitesses de rotation instantanées réelles, et celles en vert et mauve et bleu ciel sont les vitesses observées. On voit qu'il y'a convergence de l'observateur en 10 secondes.

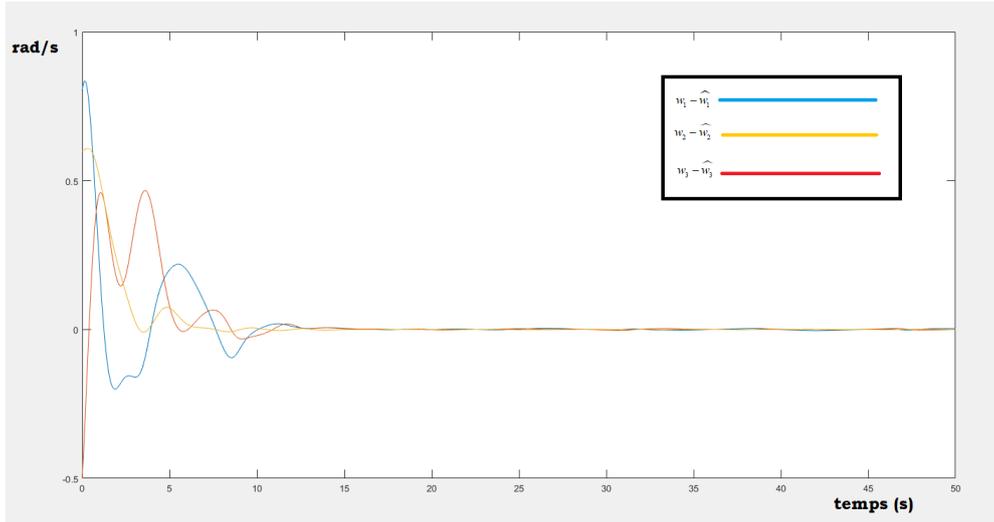


FIGURE 5.3 – Erreur d'observation riemannienne - corps rigide

La figure 5.3 montre que l'observateur riemannien est performant même en présence de région sensible aux conditions initiales (courbure négative).

Remarque : On voit que *skew* n'est qu'une approximation du log (formule 7.1) qu'on utilise dans la formulation riemannienne, ceci laisse à penser que l'approche classique est une approximation de l'approche géométrique.

Pour le bras manipulateur, les équations (après approximations) sont les suivantes

$$[\hat{q}^i]' = \hat{\omega}^i - k_1(\hat{q}^i - q^i), \quad (5.25)$$

$$[\hat{v}^i]' = - \sum_{j,k=1}^n (\Gamma_{j,k}^i(\hat{q}) \hat{v}^j [\hat{q}^k]') + S^i(q) - \sum_{j,k=1}^n (\Gamma_{j,k}^i(q) S^j(q) (\hat{q}^k - q^k)) - k_2(\hat{q}^i - q^i) + \sum_{k,j,l=1}^n R_{k,j,l}^i(q) \hat{v}^k (q^j - \hat{q}^j) \hat{v}^l. \quad (5.26)$$

Justification de l'approximation du transport parallèle :

Si $\frac{DX}{Dt} = 0$ et $X(0) = X_0$ et on cherche une expression de $X(1)$. Il suffit d'écrire la formule

$$\frac{dX^k}{dt}(t) = - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k(q(t)) X^i(t) [q^j(t)]'. \quad (5.27)$$

En intégrant et en approximant on trouve

$$X(1)^k = X_0^k - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k(q(0)) X_0^i (q^j(1) - q^j(0)), \quad (5.28)$$

$$[P(\hat{q}, q)S(q)]^k = S^k(q) - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{i,j}^k(q) S^i(q) (\hat{q}^j - q^j). \quad (5.29)$$

Les simulations donnent

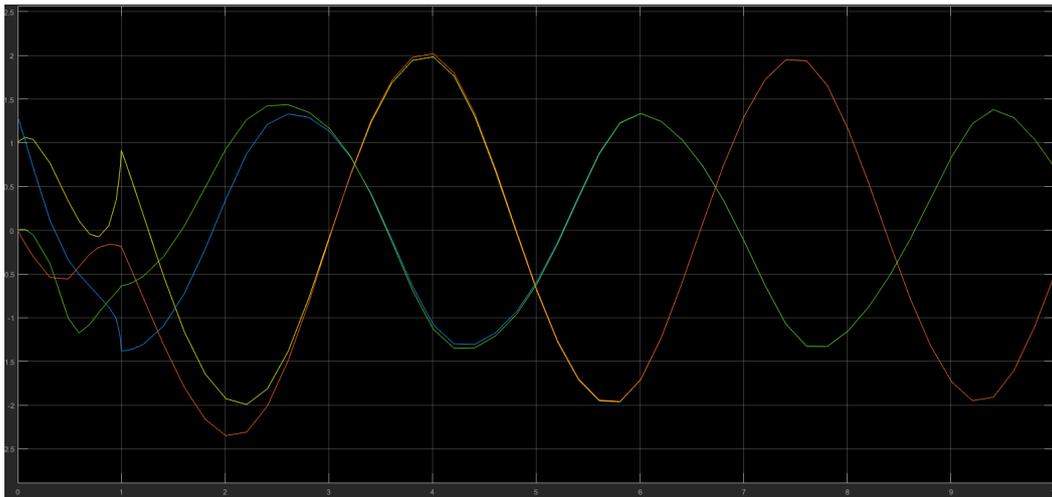


FIGURE 5.4 – Convergence de l'observateur riemannien- bras manipulateur

Dans la figure 5.4, les courbes en jaune et bleue sont celles des vitesses réelles, et celles en rouge et vert sont celles observées, l'axe des abscisses étant celui du temps en secondes, et l'axe des ordonnées étant celui des vitesses angulaires en rad/s. On voit qu'il y'a convergence au bout de 3 secondes, ceci s'explique par le fait que l'observateur riemannien tue la sensibilité par rapport aux conditions initiales grâce au terme de courbure rajouté.

CHAPITRE 6

Commande optimale des robots

Dans ce chapitre, on reformule les théorèmes d'existence de commande optimale, on géométrise le PMP en robotique et l'appliquons à des critères particuliers pour redécouvrir sur des résultats récents. On termine par établir une théorie LQR géométrique et un aspect d'optimisation du régulateur de poursuite.

6.1 Ensemble accessible

L'objet de cette section réside en l'étude de la possibilité d'amener un robot d'un état initial à un état ciblé. On montre ainsi que pour les systèmes totalement actionnée, le système robotique est complètement contrôlable.

6.1.1 Application entrée sortie :

Soit $T > 0$, soit $U \subset L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des commandes admissibles (pour lesquelles la solution de l'équation des robots est définie sur $[0, T]$), alors pour $(q_0, v_0) \in TM$ on pose

$$E_T^{(q_0, v_0)} : U \rightarrow TM, \quad (6.1)$$

définie par $E(u) = (q_u, q'_u)(T)$ telle que q_u est la solution de l'équation du robot.

Clairement U est ouvert et E est lisse par les théorèmes de dépendance en condition initiales [39].

Avant de répondre à la question de pouvoir conduire le robot d'un état initial à une cible, on commence par définir l'ensemble accessible.

Définition 6.1.1. *Ensemble accessible*

L'ensemble accessible du robot depuis un état initial $(q_0, v_0) \in TM$ en temps T est $Acc_T(q_0, v_0) = E_T(U)$.

A présent, on construit un opérateur intégrale qui est inverse de la dérivée covariante, cet opérateur sera essentiel dans la preuve des théorèmes d'existences de commande optimale.

Lemme 6.1.1. *Soit $q : [0, T] \rightarrow M$ AD, alors il existe un unique opérateur linéaire $I : \Gamma^1(q) \rightarrow AC(q)$ qui vérifie $I(\frac{DV}{Dt})(t) = V(t) - P_0^t(V(0))$ pour tout $V \in AC(q)$, et $\frac{DI(V)}{Dt}(t) = V(t)$ presque partout pour tout $V \in \Gamma^1(q)$.*

Preuve :

On construit l'opérateur localement et on l'étend par unicité, il s'agit de résoudre l'équation

$$\dot{W}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \dot{q}^i W^j = V^k,$$

avec condition initiale $W(0) = 0$. On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour construire cette unique solution qui vérifie $\frac{DI(V)}{Dt} = V$. D'autres parts le champ de vecteurs $W = V - P_0^t(V(0))$ vérifie $\frac{DW}{Dt} = \frac{DV}{Dt}$ et $W(0) = 0$, ainsi $W = I(\frac{DV}{Dt})$ par unicité.

Le théorème suivant décrit la topologie de l'ensemble accessible.

Théorème 6.1.1. *Soit le système robotique (M, g) de dynamique*

$$\frac{Dq'}{Dt} = -\nabla W(q) + \sum_{j=1}^m f_j(q)u_j, \quad (6.2)$$

avec $u \in U_\Omega = U \cap L^2([0, T], \Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est un convexe compact.

On suppose qu'il existe un $K \subset TM$ compact tel que pour tout $u \in U_\Omega$ et $t \in [0, T]$ la solution $(q, q')(t) \in K$, alors $Acc_t(q_0, v_0)$ est compact et varie continûment pour la topologie de Hausdorff sur $[0, T]$.

Preuve : Soit la dynamique

$$\begin{aligned} q' &= v \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\nabla W(q) + \sum_{j=1}^m f_j(q)u_j. \end{aligned}$$

On montre la compacité de Acc_t , soient $(q_n(t), v_n(t))$ une suite de Acc_t , comme $u_n \in L^2([0, t], \Omega)$ et que Ω est borné. $\|u_n\|_{L^2}$ est bornée, il existe donc $u \in L^2([0, t], \Omega)$ tel que $u_{\phi(n)}$ converge faiblement vers u (car $L^2([0, t], \Omega)$ est fermé fort par la réciproque du théorème de convergence dominée et le fait que Ω est fermé, et que c'est un convexe puisque Ω est convexe, ainsi le théorème de Mazur [35] conclut que c'est un fermé faible).

D'autres parts, $(q_{\phi(n)}, v_{\phi(n)})$ est bornée dans H^1 , et admet donc une sous suite qui converge faiblement vers $(q, v) : [0, t] \rightarrow TM$, comme $H^1([0, t])$ s'injecte de manière compacte dans $C^0([0, t])$, on conclut qu'il y'a convergence uniforme.

On a donc

$$q(t) = q_0 + \int_0^t v(s)ds, \quad (6.3)$$

$$v(t) = P_0^t(v_0) + I_q(-\nabla W(q) + \sum_{j=1}^m f_j(q)u_j)(t). \quad (6.4)$$

Ceci conclut que u est le contrôle qui engendre la trajectoire (q, v) .

Soit $t, s \in [0, T]$, soit $\epsilon > 0$. Il suffit de prouver qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - s| \leq \delta$ pour tout $y \in Acc_s$ il existe $x \in Acc_t$ tel que $\|x - y\| \leq \epsilon$ on fixe $t < s$, pour le $y \in Acc_s$, on choisit $x = (q_u(t), v_u(t))$

$$y - x = \left(\int_t^s v(\tau)d\tau, [P_0(v_0) + I_q(-\nabla W + f_j u_j)]|_t^s \right).$$

Le fait que ce qu'il y'a a l'intérieur de l'intégrale soit localement intégrable conclut.

Remarque : L'hypothèse de bornitude des trajectoires semble naturelle et est essentielle dans la preuve, de même pour la convexité de Ω .

6.1.2 Condition suffisante de contrôlabilité

Ici on énonce un résultat qui permet de conclure quant a la contrôlabilité des systèmes robotiques, soit donc $T > 0$, on s'intéresse a la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = u$.

Théorème 6.1.2. *Contrôlabilité des systèmes robotiques*

Soit un système robotique totalement actionne et $T > 0$, alors

$$E_T(U) = TM.$$

Preuve :

Il s'agit de prouver qu'il existe une courbe lisse telle que $q : [0, T] \rightarrow M$ qui vérifie $(q(0), q'(0)) = (q_0, v_0)$ et $(q(T), q'(T)) = (q_1, v_1)$. Il suffit de faire évoluer la dynamique $\frac{Dv}{Dt} = -\nabla W(q)$ avec W un potentiel n'admettant pas de point critique en q_0 , ceci permet de se ramener au cas ou $v_0 \neq 0$.

Ensuite, on relie par une ligne géodésique brisée les deux points $\exp_{q_0}(\epsilon v_0)$ et $\exp_{q_1}(-\epsilon v_1)$ pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Ensuite, dans chaque point où la géodésique se brise, on se ramène à une boule (euclidienne), et on fait une approximation par une courbe lisse, on applique ensuite le régulateur de poursuite (action feedforward+ proportionnel dérivée), alors puisque $E(x, v_x, y, v_y) = 0$ implique que $(x, v_x) = (y, v_y)$ (qui découle des propriétés de V et de P), et du fait que l'énergie est décroissante et positive, on déduit que $(q_u, q'_u) = (q, q')$.

6.2 Résultats d'existence

Cette partie est dédiée aux résultats d'existences de commande optimale en temps et en critère.

6.2.1 Commande optimale en temps

On énonce ici un résultat d'existence d'une commande optimale qui permet de piloter le robot d'un état initial à une cible, et ce en temps optimal.

Théorème 6.2.1. Soit (M, g) un système robotique de dynamique

$$\frac{Dq'}{Dt} = -\nabla W(q) + \sum_{j=1}^m f_j(q)u_j.$$

Supposons que les trajectoires sont uniformément bornées, alors s'il existe $T > 0$ $(q_1, v_1) \in Acc_T(q_0, v_0)$, il existe une commande optimale en temps t^* qui pilote le robot depuis son état initial à la cible, de plus $(q_1, v_1) \in \partial Acc_{t^*}$.

Preuve :

Soit $t^* = \inf \{t > 0, (q_1, v_1) \in Acc_t(q_0, v_0)\}$, supposons que $(q_1, v_1) \notin Acc_{t^*}(q_0, v_0)$, soit $\epsilon = \frac{1}{2}d(x_1, x'_1)$ (où x'_1 vérifie la distance minimale, ce point existe en vertu de la compacité des ensembles accessibles). Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que si $t \in [t^*, t^* + \delta]$ alors pour tout $x \in Acc_t$, il existe $y \in Acc_{t^*}$ tel que $\|x - y\| \leq \epsilon$. Par définition de l'infimum, il existe un $t^* < t < t^* + \delta$ qui vérifie $x_1 \in Acc_t$, prenons $x = x_1$ et le y correspondant sera un élément de Acc_t plus proche de x_1 que x'_1 , c'est la contradiction recherchée.

si $x_1 \notin \partial Acc_{t^*}$, alors $x_1 \in \overset{\circ}{Acc}_{t^*}$ et ainsi par continuité il existe un $t < t^*$ tel que $x_1 \in Acc_t$, ceci contredit l'optimalité en temps.

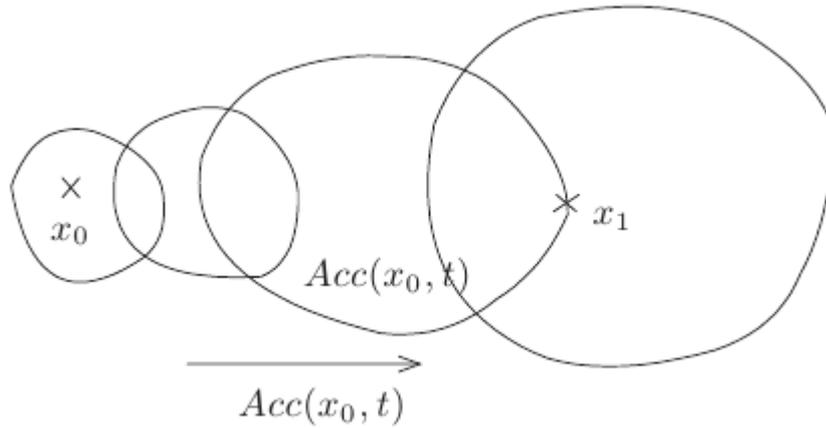


FIGURE 6.1 – Temps optimalité

6.2.2 Commande optimale en critère

On énonce ici un résultat d'existence de commande optimale en critère qui permet de piloter le robot d'un état initial à une cible, on suppose que les contrôles sont à valeurs dans un convexe fermé Ω , on note U_T l'ensemble des contrôles dans $L^2([0, T], \Omega)$ joignant (q_0, v_0) à (q_1, v_1) .

Théorème 6.2.2. *Soit (M, g) un système robotique de dynamique :*

$$\frac{Dq'}{Dt} = -\nabla W(q) + \sum_{j=1}^m f_j(q)u_j$$

on suppose que les trajectoires sont uniformément bornées, alors si $(q_1, v_1) \in \text{Acc}_T(q_0, v_0)$ il existe une commande optimale pour le critère quadratique qui pilote le robot de la position initiale à la cible :

$$J(u) = \int_0^T [\|u(t)\|_R^2 + |v_u(t) - P(q_u(t), q_1)v_1|_g^2 + \frac{1}{2}d_g^2(q_1, q_u(t))] dt \quad (6.5)$$

avec $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve :

Soit $\alpha, \beta > 0$ tels que $\beta \leq R \leq \alpha$, alors $\beta \cdot \|u\|^2 \leq J(u)$, soit $u_n \in U_T$ une suite minimisante, c'est à dire tel que $J(u_n) \rightarrow \inf_{u \in U} J_u$, cette suite est bornée par l'inégalité précédente, et ainsi possède une sous suite qui converge faiblement vers u . Nous allons montrer que $u \in U_T$, on rappelle que $L^2([0, T], \Omega)$ est un fermé faible en raison de sa convexité et de sa fermeture forte (réciproque de convergence dominée).

Soient (q_n, v_n) les trajectoires associées à u_n initialisées à (q_0, v_0) ,

$$q_n(t) = q_0 + \int_0^t v_n(s) ds$$

$$v_n(t) = P_0^t(v_0) + I_{q_n}(-\nabla W(q_n) + f_j(q_n)u_{j,n})(t)$$

de sorte que $(q_n, v_n)(T) = (q_1, v_1)$, comme $(q_n, v_n) \in H^1([0, T])$ est bornée, on peut en extraire une sous suite qui converge faiblement vers $(q, v) \in H^1([0, T])$, comme cet espace de Sobolev s'injecte de manière compacte dans $C([0, T])$, cette suite converge uniformément vers (q, v) , et donc :

$$q(t) = q_0 + \int_0^t v(s) ds$$

$$v(t) = P_0^t(v_0) + I_q(-\nabla W(q) + f_j(q)u_j)(t)$$

ceci affirme que $u \in U$ puisque q, v sont définie sur $[0, T]$, et que $q(T) = q_1, v(T) = v_1$, par ailleurs on a $\|u\|_{R, L^2} \leq \liminf \|u_n\|_{R, L^2}$ (car la norme $\|\cdot\|_{R, L^2}$ est une fonction convexe sur L^2 et continue, ainsi semi-continue inférieurement pour la topologie faible) et ainsi on a donc par convergence uniforme de (q_n, v_n)

$$\inf_{u \in U} J(u) \geq J(u).$$

Les résultats précédents sont des résultats d'existences de commande optimale à conditions terminales sur l'état. En pratique, il est plus simple d'imposer dans le critère un poids qui pénalise l'éloignement de l'état terminale de la consigne, comme on le retrouve dans les énoncés suivants.

Théorème 6.2.3. *Soit (M, g) un système robotique comme précédemment, alors si les trajectoires sont uniformément bornées il existe une commande optimale pour le critère*

$$J(u) = \int_0^T \frac{1}{2} [\|u(t)\|_R^2 + |v_u(t)|_g^2 + d_g^2(q_1, q_u(t))] dt. \quad (6.6)$$

L'importance de ce résultat est qu'il est plus facile de calculer la commande optimale fournie par ce théorème que le précédent, et d'autres parts, il est très difficile en pratique de savoir si la cible est accessible depuis l'état initial.

On a le résultat suivant concernant le problème de poursuite.

Théorème 6.2.4. *Soit $t \in [0, T] \rightarrow q_{ref}(t) \in M$ une trajectoire de référence, alors si les trajectoires sont uniformément bornées, il existe une commande optimale pour le critère*

$$J(u) = \int_0^T \frac{1}{2} [\|u\|_R^2 + |v_u(t) - P(q_u, q_{ref})v_{ref}|_g^2 + d_g^2(q_{ref}(t), q_u(t))] dt. \quad (6.7)$$

6.3 PMP en robotique

La contribution dans cette partie consiste à reformuler le PMP dans ce cadre, en appliquant la formulation au problèmes d'évitement d'obstacles, on redécouvre des résultats très récents.

On s'intéresse comme d'habitude au contrôle optimal de la dynamique robotique

$$\frac{Dq'}{Dt} = -\nabla W(q) + \sum_{j=1}^m f_j(q)u_j.$$

On initialise le robot en (q, v_0) et on le laisse évoluer sous l'influence d'un contrôle $u \in L^2([0, T], \Omega)$, de sorte que la solution soit définie sur $[0, T]$. On s'intéresse à des critères de la forme (semblable aux formules 6.6 6.7)

$$J(u) = \int_0^T L(q_u(t), v_u(t), u(t))dt + g(q_u(T), v_u(T)), \quad (6.8)$$

avec $L : TM \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : TM \rightarrow \mathbb{R}$ sont lisses, et pour le problème de poursuite optimale L est une fonction qui dépend explicitement du temps.

L'idée est de prendre une trajectoire optimale (q^*, v^*, u^*) et d'en faire des perturbations sur le contrôle u_ϵ , et on étudie la solution de la dynamique robotique pour ce contrôle pour les mêmes conditions initiales.

On note $\exp_{(q_0, v_0)}(v'_0, v'_1)$ avec $(v'_0, v'_1) \in T_{(q_0, v_0)}TM$ désigne l'application exponentielle associée à la métrique de Sasaki G .

Soit $s > 0$ et $a \in \Omega$ et $\epsilon > 0$ suffisamment petit tel que $s - \epsilon > 0$ et soit le contrôle de $L^2([0, T], \Omega)$ définie par $u_\epsilon(t) = a$ si $t \in]s - \epsilon, s[$ et $u^*(t)$ sinon.

La première étape consiste à avoir la dynamique robotique lorsque la condition initiale est suffisamment proche de (q_0, v_0) à savoir $\exp_{(q_0, v_0)}(\epsilon(v'_0, v'_1))$.

Lemme 6.3.1. *Soit la dynamique :*

$$\frac{Dq'_\epsilon}{Dt} = -\nabla W(q_\epsilon) + \sum_{j=1}^m f_j(q_\epsilon)u_j,$$

avec $(q_\epsilon(0), v_\epsilon(0)) = \exp_{(q_0, v_0)}(\epsilon(v'_0, v'_1) + o(\epsilon))$, alors $q_\epsilon(t) = \exp_{q(t)}(\epsilon Y(t) + o(\epsilon))$, avec $Y \in \Gamma(q)$, définie par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{D^2Y}{Dt^2} = -D_Y \nabla W(q) + R(q', Y)q' + \sum_{j=1}^m D_Y f_j(q)u_j^*, \quad (6.9)$$

$$Y(0) = v'_0, \quad \frac{DY}{Dt}(0) = v'_1.$$

maintenant on peut énoncer le résultat qui nous est utile.

Lemme 6.3.2. *La dynamique*

$$\frac{Dq'_\epsilon}{Dt} = -\nabla W(q_\epsilon) + f_j(q_\epsilon)u_{\epsilon,j},$$

avec $(q_\epsilon, v_\epsilon)(0) = (q_0, v_0)$ peut être approximée par $q_\epsilon(t) = \exp_{q(t)}(\epsilon Y(t) + o(\epsilon))$, avec $Y(t) = 0$ sur $[0, s]$, et solution de

$$\frac{D^2Y}{Dt^2} = -D_Y \nabla W(q) + R(q', Y)q' + \sum_{j=1}^m D_Y f_j(q)u_j^*, \quad (6.10)$$

avec $Y(s) = 0$, $\frac{DY}{Dt}(s) = \sum_{j=1}^m f_j(q(s)) \cdot (a_j - u_j^*(s))$.

On suppose dans un premier temps que $L = 0$, ainsi on est confronté à un problème de coût terminale, $J(u) = g(q_u(T), v_u(T))$, la prochaine étape consiste à estimer $\frac{d}{d\epsilon} J(u_\epsilon)|_{\epsilon=0}$ en utilisant le lemme précédent, on a $\frac{d}{d\epsilon} J(u_\epsilon) = dg_{(q,v)(T)}(Y(T), \frac{DY}{Dt}(T))$, définissons $(p_1, p_2) \in AC(q)$ solution de

$$\frac{Dp_1}{Dt} = -A^*(p_2), \quad (6.11)$$

$$\frac{Dp_2}{Dt} = -p_1, \quad (6.12)$$

avec $(p_1, p_2)(T) = \nabla g(q(T), v(T))$. Ainsi, la grandeur $\langle p_1, Y \rangle + \langle p_2, \frac{DY}{Dt} \rangle$ est constante. En effet, sa dérivée vaut

$$\langle \frac{Dp_1}{Dt}, Y \rangle + \langle p_1, \frac{DY}{Dt} \rangle + \langle \frac{Dp_2}{Dt}, \frac{DY}{Dt} \rangle + \langle p_2, \frac{D^2Y}{Dt^2} \rangle = -\langle A^*(p_2), Y \rangle + \langle p_2, \frac{D^2Y}{Dt^2} \rangle.$$

En notant A l'opérateur tel que

$$\frac{D^2Y}{Dt^2} = A(Y), \quad (6.13)$$

on conclut en prenant A^* l'opérateur adjoint.

On a $\frac{d}{d\epsilon} J(u_\epsilon)|_{\epsilon=0} = \sum_{j=1}^m (a_j - u_j^*) \langle p_2(s), f_j(q(s)) \rangle$, comme u^* est optimale et que s et a sont arbitraire, on conclut que

$$\sum_{j=1}^m u_j^* \langle p_2(s), f_j(q(s)) \rangle = \min_{a \in \Omega} \sum_{j=1}^m a_j \langle p_2(s), f_j(q(s)) \rangle.$$

Théorème 6.3.1. *PMP pour les systèmes robotiques*

Soit la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = -\nabla W(q) + f_j(q)u_j$, avec $u \in L^2([0, T], \Omega)$, alors si la trajectoire u^* est optimale pour le critère

$$J(u) = \int_0^T L(q_u, v_u, u) dt + g(q_u(T), v_u(T)),$$

ils existent $p_1, p_2 \in AC(q)$ tels que

$$\frac{Dp_1}{Dt} = -A^*(p_2) - \nabla_q L, \quad (6.14)$$

$$\frac{Dp_2}{Dt} = -p_1 - \nabla_v L, \quad (6.15)$$

avec $(p_1, p_2)(T) = \nabla g(q(T), v(T))$, et vérifie le principe de minimisation

$$H(q(t), v(t), p_1(t), p_2(t), u^*(t)) = \min_{a \in \Omega} H(q(t), v(t), p_1(t), p_2(t), a), \quad (6.16)$$

presque partout sur $[0, T]$, avec $H(q, v, p, u) = \langle p_1, v \rangle + \langle p_2, -\nabla W(q) + f_j(q)u_j \rangle + L$.

6.3.1 Application en régulation optimale

Donnons un exemple d'application, on choisit $L = \frac{\alpha}{2}|u|^2$ et $g(q, v) = U(q^*, q) + \frac{1}{2}|v|^2$. Il s'agit d'un problème de régulation en temps fini vers la position $(q^*, 0)$, pour la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = u$. On obtient le résultat suivant déjà obtenu dans [34] par les mêmes méthodes variationnelles que la dérivation de l'équation des géodésiques.

Proposition 6.3.1. *Soit la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = u$ et le critère*

$$J(u) = \int_0^T \frac{\alpha}{2}|u|^2 dt + U(q^*, q_u(T)) + \frac{1}{2}|v_u(T)|^2, \quad (6.17)$$

alors la commande optimale est la solution absolument différentiable de l'équation de Jacobi

$$\frac{D^2u}{Dt^2} = R(v_u, u)v_u, \quad (6.18)$$

avec $u(T) = -\frac{1}{\alpha}v_u(T)$ et $\frac{Du}{Dt}(T) = -\nabla U(q^*, q_u(T))$.

Preuve : Puisque $H(u) = \langle p_1, v \rangle + \langle p_2, u \rangle + \alpha/2 \langle u, u \rangle$ est convexe en u , le minimum est atteint pour $u = -\frac{1}{\alpha}p_2$. Le fait que $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

les équations deviennent

$$\begin{aligned}\frac{Dp_1}{Dt} &= -R(v_u, p_2)v_u, \\ \frac{Dp_2}{Dt} &= -p_1.\end{aligned}$$

Puisque $u = -\frac{1}{\alpha}p_2$ on conclut.

6.3.2 Application au problème d'évitement d'obstacles

On donne une autre application au problème d'évitement d'obstacles [51] [52] [53], l'application du PMP permet de retrouver le résultat suivant

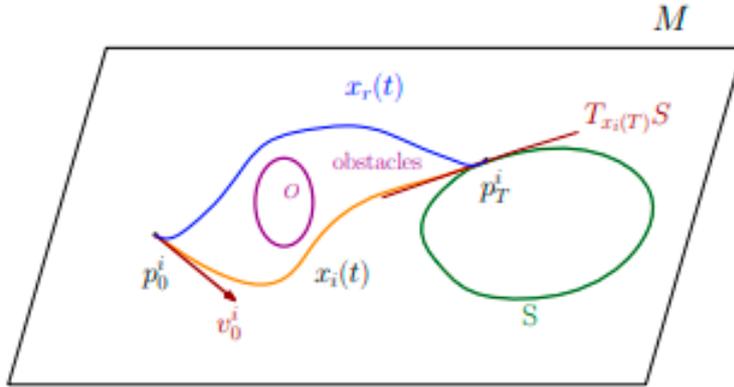


FIGURE 6.2 – Problème de l'évitement d'obstacles [52]

Théorème 6.3.2. *Avoidance Problem on Riemannian Manifolds*

Soit la dynamique robotique $\frac{Dq^i}{Dt} = u$ on désire optimiser le critère

$$J(u) = \int_0^T [U(q^*, q_u(t)) + \frac{1}{2}|v_u(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}|u|^2 + V(q_u(t))]dt, \quad (6.19)$$

avec $V : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction potentielle qui mesure l'éloignement du robot des obstacles. La commande optimale vérifie l'équation suivante

$$\frac{D^2u}{Dt^2} = R(v_u, u)v_u + \frac{1}{\alpha}\nabla(U + V)(q_u) + \frac{1}{\alpha}u, \quad (6.20)$$

avec $u(T) = \frac{Du}{Dt}(T) = 0$.

En générale $V(q) = \sum_{i=1}^o \frac{1}{O_i(q)}$ avec les O_i sont des fonctions lisses et propres sur M , et les obstacles sont les $O_i = \{q \in M, O_i(q) \leq 0\}$.

6.4 Régulation et poursuite optimale

Il s'agit de plonger la question dans un problème plus grand à paramètre et de résoudre une EDP, on commence par donner un aperçu de la théorie d'Hamilton-Jacobi, et on discutera de la notion de solution de viscosité.

6.4.1 Théorie HJB en Robotique

Grâce à un calcul [37] [39] on montre que l'action (si elle est C^1) d'un système mécanique vérifie l'équation d'Hamilton-Jacobi. L'action nous fait penser à la fonction valeur en commande optimale, c'est la principale motivation de l'approche de Bellman. Soit donc la dynamique robotique

$$\frac{Dq'}{Dt} = -\nabla W(q) + \sum_{j=1}^m f_j(q)u_j,$$

avec $u \in L^2([0, T], \Omega)$. Soit $(q, v) \in TM$ et soit $t \in [0, T]$, on note $V : [0, T] \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$V(t, q, v) = \inf_{u \in U_\Omega} \left[\int_t^T L(s, q_u(s), v_u(s), u(s)) ds + g(q_u(T), v_u(T)) \right], \quad (6.21)$$

ou (q_u, v_u) sont solutions de la dynamique robotique, et que $(q_u(t), v_u(t)) = (q, v)$.

Pour $t \leq s \leq t+h$ on pose $u(s) = a \in \Omega$, et pour $s > t+h$ on choisit un contrôle optimal, le coût de ce contrôle vaut

$$\int_t^{t+h} L(s, q(s), v(s), u(s)) ds + V(t+h, q(t+h), v(t+h)) \geq V(t, q(t), v(t)),$$

ainsi on a

$$\frac{V(t+h, q(t+h), v(t+h)) - V(t, q(t), v(t))}{h} + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} L(s, q(s), v(s), a) ds \geq 0.$$

En faisant tendre h vers 0 on trouve

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_q V, q' \rangle + \langle \nabla_v V, \frac{Dv}{Dt} \rangle + L \geq 0,$$

ceci veut dire que

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, q, v) + \inf_{a \in \Omega} [\langle \nabla_q V(t, q, v), v \rangle + \langle \nabla_v V(t, q, v), -\nabla W(q) + f_j(q)a_j \rangle + L(t, q, v, a)] \geq 0.$$

En utilisant un contrôle optimal, on montre en fait que

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t}(t, q, v) + \min_{a \in \Omega} [\langle \nabla_q V(t, q, v), v \rangle + \langle \nabla_v V(t, q, v), -\nabla W(q) + f_j(q)a_j \rangle + L(t, q, v, a)] = 0.} \quad (6.22)$$

C'est l'équation d'Hamilton-Jacobi-Belmann.

6.4.2 Stratégie de commande optimale

La stratégie pour résoudre un problème d'optimisation via la théorie HJB est la suivante, on calcule la valeur minimale du Hamiltonien

$$H(t, q, v, p, u) = \langle p_1, v \rangle + \langle p_2, -\nabla W(q) + f_j(q)u_j \rangle + L(t, q, v, u)$$

et on trouve le u^* optimal, on résout l'équation HJB et on exprime le contrôle optimal en boucle fermée.

On vérifie à présent que le contrôle ainsi construit est optimal

$$\begin{aligned} \int_0^T L(s, q(s), v(s), u(s)) + g(q(T), v(T)) &= - \int_0^T \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_q V, v \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \nabla_v V, -\nabla W(q) + f_j(q)u_j \rangle \right] ds + g(q(T), v(T)) \\ &= - \int_0^T \frac{d}{ds} V(s, q(s), v(s)) ds + g(q(T), v(T)) = V(0, q, v), \end{aligned} \quad (6.23)$$

ceci confirme l'optimalité.

Ainsi, le contrôle optimal vérifie

$$\frac{d}{dt} V(t, q(t), v(t)) = -L(t, q(t), v(t), u(t)),$$

presque partout. En particulier lorsque $L \geq 0$, la fonction valeur est décroissante le long de la trajectoire optimale.

6.4.3 Solutions de viscosité

on peut montrer sous des hypothèses [36] qu'en fait l'équation HJB possède une unique solution en un certain sens. La motivation principale est qu'en fait l'équation d'Hamilton Jacobi ne possède pas en générale une solution globale.

La méthode de caractéristique pose problème lorsqu'on cherche une solution globale, on introduit alors la notion de solution de viscosité qui permet de prouver l'existence.

Il y'a une technique des analystes qui consiste à rajouter un terme de viscosité qui rend l'équation elliptique et donc on dispose de résultats d'existences et même d'estimations uniforme sur les compacts.

L'autre technique consiste à montrer que la fonction valeur est en fait l'unique solution de viscosité de l'équation d'Hamilton Jacobi.

6.4.4 Théorie LQR

Pour ce problème, soit $U = \frac{1}{2}d_g^2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ l'énergie cinétique minimale transférant le robot entre les deux configurations, et soit $\gamma > 0$. On s'intéresse aux systèmes robotiques complètement actionnés

$$\frac{Dq'}{Dt} = u. \quad (6.24)$$

On cherche à réguler le système vers une position $(q^*, 0)$ en minimisant le critère

$$J(u) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}d_g^2(q^*, q_u) + \frac{1}{2}|v_u|^2 + \frac{\alpha}{2}|u|^2 \right] e^{-\gamma t} dt, \quad (6.25)$$

pris sur l'ensemble des contrôles tels que les trajectoires soient uniformément bornées. Nous allons montrer grâce aux travaux de [41] [42] [43] [44] [45] [56] qu'en fait la commande optimale (si elle existe) est unique et est un retour proportionnel dérivée riemannien (6.26) dont les coefficients sont déterminés via une équation de Riccati algébrique (6.27).

Théorème 6.4.1. *La commande qui optimise le critère*

$$J(u) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2}d_g^2(q^*, q_u) + \frac{1}{2}|v_u|^2 + \frac{\alpha}{2}|u|^2 \right] e^{-\gamma t} dt,$$

pour la dynamique robotique $\frac{Dq'}{Dt} = u$ initialisée en (q_0, v_0) avec $d_g^2(q_0, q^*) + \frac{\alpha}{k_3}|v_0|^2 < \text{inj}_{q^*}(M)^2$ est

$$u = \frac{k_3}{\alpha} \cdot \exp_q^{-1}(q^*) - \frac{k_2}{\alpha} v, \quad (6.26)$$

avec $(k_3/\alpha, k_2/\alpha) = R^{-1}B^TK$ et K est l'unique solution définie positive de l'équation algébrique

$$A^TK + K.A - K.B.R^{-1}.B^T.K = -Q. \quad (6.27)$$

Preuve :

Notons $(q, v) \in TM$ la condition initiale du système, alors la fonction $V(q, v) = \inf_u J(u)$ est solution de viscosité de l'équation HJB $H(q, v, \nabla V) = \gamma V$ avec

$$H(q, v, p_1, p_2) = \inf_{u \in T_q M} \langle p_1, v \rangle + \langle p_2, u \rangle + U(q^*, q) + \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{\alpha}{2}|u|^2, \quad (6.28)$$

comme cette fonction est convexe de u pour tout $(q, v) \in TM$ et $(p_1, p_2) \in T_q M^2$ sur $T_q M$, elle atteint son minimum pour $u = -\frac{1}{\alpha}p_2$, comme $p_2 = \nabla_v V$, le calcul de la fonction valeur conclut.

Ainsi $H(q, v, \nabla V) = \gamma V$ équivaut à l'EDP

$$\langle \nabla_q V, v \rangle - \frac{1}{2\alpha} |\nabla_v V|^2 + \frac{1}{2}d_g^2 + \frac{1}{2}|v|^2 = \gamma V, \quad (6.29)$$

une fonction candidate pour être solution de l'équation HJB est

$$V(q, v) = k_1 \frac{1}{2} d_g^2(q^*, q) + \frac{k_2}{2} |v|^2 - k_3 \langle \exp_q^{-1}(q^*), v \rangle. \quad (6.30)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(q, v) &= - \langle k_1 \exp_q^{-1}(q^*), v \rangle + \langle k_2 v, \frac{Dv}{Dt} \rangle \\ &- \langle k_3 D_v \exp_q^{-1}(q^*), v \rangle - \langle k_3 \exp_q^{-1}(q^*), \frac{Dv}{Dt} \rangle, \end{aligned} \quad (6.31)$$

ainsi $\nabla V = (-k_1 \exp_q^{-1}(q^*) - k_3 D_v \exp_q^{-1}(q^*), k_2 v - k_3 \exp_q^{-1}(q^*))$. En utilisant

$$\frac{1}{2} |\exp_q^{-1}(q^*)|^2 = \frac{1}{2} d_g^2(q^*, q)$$

$$D_v \exp_q^{-1}(q^*) = -v,$$

On obtient $\nabla V = (-k_1 \exp_q^{-1}(q^*) + k_3 v, -k_3 \exp_q^{-1}(q^*) + k_2 v)$ et en remplaçant dans l'équation on trouve

$$\begin{aligned} -k_1 \langle \exp_q^{-1}(q^*), v \rangle + k_3 |v|^2 - \frac{1}{2\alpha} [k_3^2 |\exp_q^{-1}(q^*)|^2 + k_2^2 |v|^2 \\ - 2k_3 k_2 \langle \exp_q^{-1}(q^*), v \rangle] + \frac{1}{2} d_g^2 + \frac{1}{2} |v|^2 = \gamma V \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha} k_3^2\right) \frac{1}{2} d_g^2 + \frac{1}{2} [1 + 2k_3 - \frac{k_2^2}{\alpha}] |v|^2 - [k_1 - \frac{k_3 k_2}{\alpha}] \langle \exp_q^{-1}(q^*), v \rangle = \gamma V \quad (6.33)$$

ainsi les équations de Riccati à résoudre sont :

$$1 - \frac{k_3^2}{\alpha} = \gamma k_1, \quad (6.34)$$

$$1 + 2k_3 - \frac{k_2^2}{\alpha} = \gamma k_2, \quad (6.35)$$

$$k_1 - \frac{k_3 k_2}{\alpha} = \gamma k_3. \quad (6.36)$$

Pour écrire cette équation sous forme de l'équation de Riccati de la théorie LQR, on pose $K = \begin{pmatrix} k_1 & k_3 \\ k_3 & k_2 \end{pmatrix}$, $R = \alpha$, $Q = I_2$, et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -\gamma & 2 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$. L'équation de Riccati prend alors la forme comme pour les systèmes linéaires

$$A^T . K + K . A - K . B . R^{-1} . B^T . K = -W,$$

comme K est définie positive, alors $k_1, k_2 > 0$ et par l'égalité (6.36) on a $k_3 > 0$ il est clair que $C(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$ et donc la paire A, B est complètement commandable, et $Q, R > 0$, alors par le lemme dans [37] dans la partie LQR. On conclut qu'il existe une unique solution définie positive de l'équation ci dessus, et même on retrouve la formule

$$\begin{pmatrix} \frac{k_3}{\alpha} & \frac{k_2}{\alpha} \end{pmatrix} = R^{-1} B^T K, \quad (6.37)$$

qui donne les gains du retour d'état en fonction de K . La fonction

$$L(q, v) = \frac{k_3}{2\alpha} d_g^2(q^*, q) + \frac{1}{2} |v|^2, \quad (6.38)$$

est une fonction de Lyapunov de la dynamique bouclée.

6.4.5 Poursuite optimale

Le but de cette partie est de comprendre le régulateur de poursuite [30] sous un aspect d'optimisation, Pour simplifier on note $U = \frac{1}{2} d_g^2$ et on se donne la dynamique $\frac{Dq'}{Dt} = u$ et le critère

$$J(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} d_g^2(q_{ref}, q_u) + \frac{1}{2} |v_u - P(q_u, q_{ref}) v_{ref}|^2 + \frac{\alpha}{2} |u - u_{FF}|^2 \right] dt.$$

Une fonction candidate pour résoudre l'équation HJB est

$$V(t, q, v) = k_1(t) \cdot U(q_{ref}(t), q) + \frac{k_2(t)}{2} |v - P(q, q_{ref}) v_{ref}|^2 + k_3(t) \langle \text{grad}_q U(q_{ref}, q), v - P(q, q_{ref}) v_{ref} \rangle.$$

Le Hamiltonien est

$$H(t, q, v, p) = \inf_{u \in T_q M} (\langle p, (v, u) \rangle + U(q_{ref}(t), q) + \frac{1}{2} |v - P(q, q_{ref}(t)) v_{ref}(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} |u - u_{FF}(t, q, v)|^2),$$

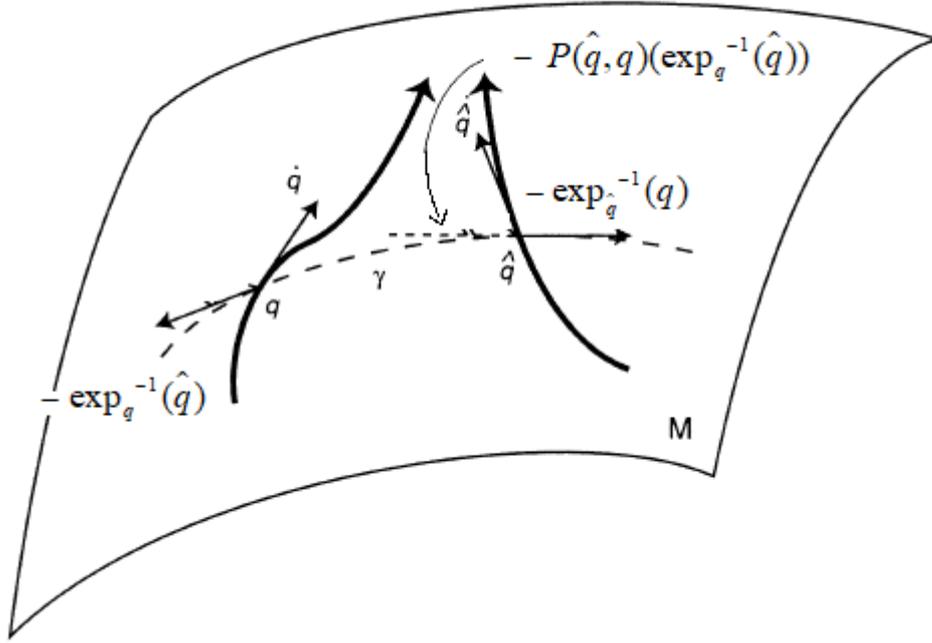
ainsi $u = u_{FF} - \frac{1}{\alpha} p_2$ et on a la formule

$$H(t, q, v, p) = \langle p_1, v \rangle + \langle p_2, u_{FF} \rangle - \frac{1}{2\alpha} |p_2|^2 + U(q_{ref}(t), q) + \frac{1}{2} |v - P(q, q_{ref}) v_{ref}|^2.$$

Un calcul donne

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k_1' U + k_2' |v - P|^2 + k_3' \langle \nabla U, v - P \rangle + k_1 \langle \nabla_1 U, v_{ref} \rangle - k_2 \langle \frac{d}{dt} P, v - P \rangle$$

$$+ k_3 \langle \frac{d}{dt} \nabla_2 U, v - P \rangle + k_3 \langle \nabla_2 U, -\frac{d}{dt} P \rangle.$$

FIGURE 6.3 – Compatibilité de la paire $(\frac{1}{2}d_g^2, P)$ [25]

La compatibilité de la paire $(\frac{1}{2}d_g^2, P)$ implique que $\langle \nabla_1 U, v_{ref} \rangle = -\langle \nabla_2 U, P \rangle$, à présent calculons ∇V , pour cela

$$\frac{d}{ds}V(t, q_s, v_s) = k_1 \nabla_2 U, v \rangle + k_2 \langle D_s v - D_s P, v - P \rangle$$

$$+ k_3 \langle D_s \nabla_2 U, v - P \rangle + k_3 \langle \nabla_2 U, D_s v - D_s P \rangle,$$

en utilisant le fait que $\langle P, P \rangle$ est constant on conclut que $\langle D_s P, P \rangle = 0$, on trouve que

$$\nabla_q V = k_1 \nabla_2 U - k_2 D_s P + k_3 (v - P) - I,$$

$$\nabla_v V = k_2 (v - P) + k_3 \nabla_2 U,$$

telle que $\langle I, v \rangle = \langle \nabla U, D_v P \rangle$. Le terme Hamiltonien devient

$$H = \langle k_1 \nabla U - k_2 D_s P + k_3 (v - P) - I, v \rangle + \langle k_2 (v - P) + k_3 \nabla U, u_{FF} \rangle - \frac{1}{2\alpha} k_2^2 |v - P|^2$$

$$- \frac{1}{2\alpha} k_3^2 |U|^2 - \frac{k_2 k_3}{\alpha} \langle \nabla U, v - P \rangle + U + \frac{1}{2} |v - P|^2.$$

En réarrangeant les termes on trouve que l'équation HJB est

$$\begin{aligned}
& k_1' U + \frac{k_2'}{2} |v - P|^2 + k_3' \langle \nabla U, v - P \rangle + k_1 \langle \nabla U, v - P \rangle \\
& - k_2 \langle \frac{d}{dt} P + D_v P, v - P \rangle + k_3 \langle v - P, v \rangle + k_2 \langle u_{FF}, v - P \rangle + k_3 \langle \nabla U, u_{FF} \rangle \\
& - k_3 \langle \nabla U, \frac{d}{dt} P + D_v P \rangle + k_3 \langle \frac{d}{dt} \text{grad}_q U, v - P \rangle - \frac{1}{2\alpha} k_2^2 |v - P|^2 - \frac{1}{2\alpha} k_3^2 |\nabla U|^2 \\
& \quad - \frac{k_2 k_3}{\alpha} \langle \nabla U, v - P \rangle \\
& \quad + U + \frac{1}{2} |v - P|^2 = 0.
\end{aligned}$$

On conclut qu'en prenant

$$u_{FF}(t, q, v) = \frac{d}{dt} P(q, q_{ref}(t)) v_{ref}(t) + D_v P(q, q_{ref}(t)) v_{ref}(t), \quad (6.39)$$

et en remarquant que $\frac{d}{dt} \text{grad}_q(U) = -P$ l'équation se ramène à

$$\begin{aligned}
& k_1' U + \frac{k_2'}{2} |v - P|^2 + k_3' \langle \nabla U, v - P \rangle, \\
& + k_1 \langle \nabla U, v - P \rangle + k_3 |v - P|^2 - \frac{1}{2\alpha} k_2^2 |v - P|^2 - \frac{1}{2\alpha} k_3^2 |\nabla U|^2 - \frac{k_2 k_3}{\alpha} \langle \nabla U, v - P \rangle, \\
& + U + \frac{1}{2} |v - P|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Ceci se réécrit

$$\begin{aligned}
& k_1' - \frac{k_3^2}{\alpha} + 1 = 0, \\
& k_2' + 2k_3 - \frac{k_2^2}{\alpha} + 1 = 0, \\
& k_3' + k_1 - \frac{k_2 k_3}{\alpha} = 0,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
& K'(t) + A^T.K(t) + K(t).A - K(t).B.R^{-1}.B^T.K(t) = -Q, \\
& K(T) = 0.
\end{aligned} \quad (6.40)$$

Le feedback instationnaire qui optimise le critère est

$$\begin{aligned}
& u = u_{FF} + u_{PD}, \\
& u_{PD}(t, q, v) = \frac{k_3(t)}{\alpha} \exp_q^{-1}(q_{ref}(t)) - \frac{k_2(t)}{\alpha} [v - P(q, q_{ref}(t)) v_{ref}(t)],
\end{aligned}$$

avec $(k_3/\alpha, k_2/\alpha) = R^{-1}B^TK(t)$.

On obtient le théorème suivant

Théorème 6.4.2. *soit la dynamique robotique $\frac{Dq'}{Dt} = u$, une trajectoire de référence lisse est donnée $q_{ref} : [0, T] \rightarrow M$, le régulateur qui optimise le coup*

$$J(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2} d_g^2(q_{ref}(t), q_u(t)) + \frac{1}{2} |v_u(t) - P(q_u(t), q_{ref}(t))v_{ref}(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} |u - u_{FF}(t, q, v)|^2 \right] dt,$$

est un régulateur PD+feedforward $u = u_{FF} + u_{PD}$

$$u_{FF}(t, q, v) = \frac{d}{dt} P(q, q_{ref}(t))v_{ref}(t) + D_v P(q, q_{ref}(t))v_{ref}(t), \quad (6.41)$$

$$u_{PD}(t, q, v) = \frac{k_3(t)}{\alpha} \exp_q^{-1}(q_{ref}(t)) - \frac{k_2(t)}{\alpha} [v - P(q, q_{ref}(t))v_{ref}(t)], \quad (6.42)$$

avec $(k_3/\alpha, k_2/\alpha) = R^{-1}B^TK(t)$ avec

$$K'(t) + A^TK(t) + K(t).A - K.B.R^{-1}.B^T.K = -Q, \quad (6.43)$$

et $K(T) = 0$.

Remarque : Le régulateur de poursuite optimale (équation 6.41 6.42) a exactement la même structure que celui de F. Bullo et R.M. Murray qu'on a vu dans le chapitre 4 (équation 4.7 4.8), sauf que les gains sont déterminés par une équation de Riccati différentielle (équation 6.43).

CHAPITRE 7

Applications

7.1 Régulation et Poursuite optimale du corps rigide

Ici on applique le régulateur de poursuite optimale pour le corps rigide, on choisit la fonction distance carrée qui est lisse localement sur $SO(3)$, ceci suffit car on initialise la configuration suffisamment proche de la configuration de référence.

Pour pouvoir appliquer la théorie LQR, on introduit les matrices suivantes $R = \alpha$, $Q = I_2$, et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -\gamma & 2 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$.

Nous utiliserons la formule de Rodrigues (équation 7.1) [55] [21] qui donne une expression simple du logarithme matriciel $\log : \{R \in SO(3), \text{tr}(R) \neq -1\} \rightarrow \{\eta \in A_3(\mathbb{R}), \|\eta^\times\| < \pi\}$.

$$\log(R) = \frac{\phi(R)}{\sin(\phi(R))} \text{skew}(R), \quad (7.1)$$

avec $\phi(R) = \arccos\left(\frac{\text{tr}(R)-1}{2}\right)$.

La représentation adjointe est $Ad_R(h) = R.h.R^{-1}$, et $ad_\eta(\zeta) = [\eta, \zeta] = \eta.\zeta - \zeta.\eta$. On a les formules suivantes [21] [55]

$$Ad_R(\Omega)^\times = R.[\Omega]^\times, \quad (7.2)$$

$$[\eta, \zeta]^\times = ([\eta]^\times \times [\zeta]^\times). \quad (7.3)$$

La métrique est invariante à gauche, les translations à gauche sont des isométries et donc on a pour tout $R, R_{ref} \in SO(3)$,

$$d(R, R_{ref}) = d(I, R_{ref}^T R), \quad (7.4)$$

en fixant

$$U(R) = \frac{1}{2} d^2(I, R), \quad (7.5)$$

on a déjà vu que $d(I, R) = |\log(R)|$, alors

$$\nabla U(R) = R.\log(R). \quad (7.6)$$

Comme il est difficile de calculer le logarithme associée à la métrique, on calcule le logarithme matriciel.

Le terme proportionnel vaut $\log(R_{ref}^T R)$, et donc l'expression du régulateur PD est :

$$\tau_{PD} = -k_P [\log(R_{ref}^T R)]^\times - k_D . ([\Omega]^\times - R^T R_{ref} . [\Omega_{ref}]^\times), \quad (7.7)$$

avec $(k_P, k_D) = lqr(A, B, Q, R)$.

Le régulateur feedforward est

$$\tau_{FF} = \frac{1}{2} ([\Omega]^\times \times R^T R_{ref} . [\Omega_{ref}]^\times - I^{-1} . (I . R^T R_{ref} [\Omega_{ref}]^\times \times [\Omega]^\times + I . [\Omega]^\times \times R^T R_{ref} [\Omega_{ref}]^\times))$$

$$+R^T R_{ref}[\Omega_{ref}]^\times \times [\Omega]^\times + R^T R_{ref} \cdot [\Omega'_{ref}]^\times, \quad (7.8)$$

à implémenter sur l'équation

$$R' = R\Omega,$$

$$\Omega' = I^{-1} \cdot (I\Omega \times \Omega) + \tau. \quad (7.9)$$

Régulation Optimale :

il s'agit d'un cas particulier du précédent, pour une référence constante $(R_d, 0)$ le régulateur est donc

$$\tau_{PD} = -k_P[\log(R_d^T \cdot R)]^\times - k_D[\Omega]^\times, \quad (7.10)$$

pour $(k_P, k_D) = lqr(A, B, Q, R)$.

7.2 Simulations

Les simulations sont effectués par le logiciel MATLAB, on programme l'équation via un schéma d'Euler plus géométrique.

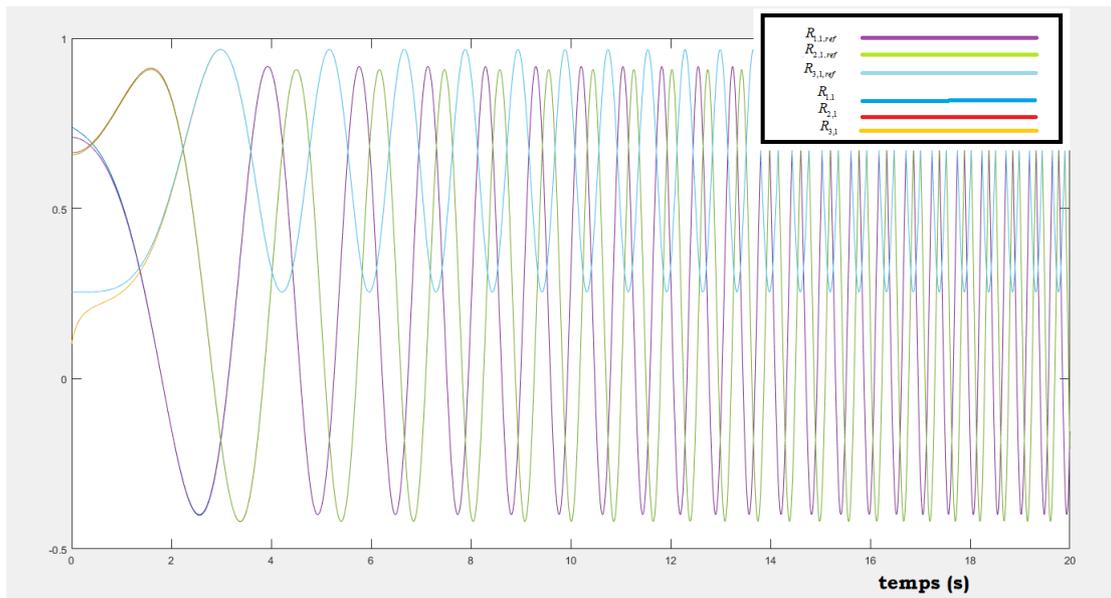
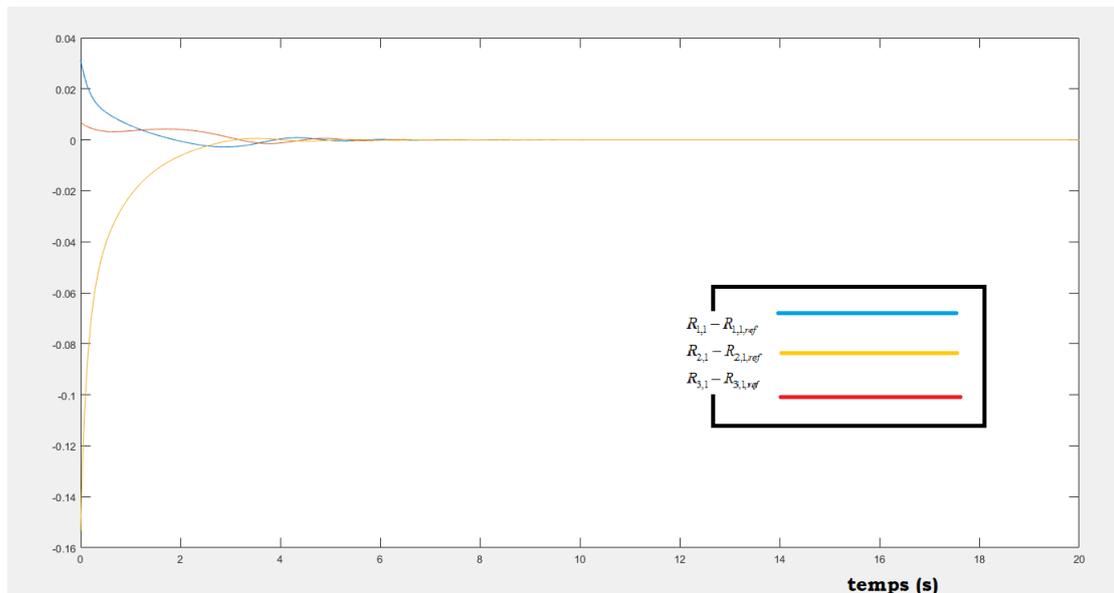
$$R_{i+1} = R_i \cdot \exp(dt \cdot \Omega_i), \quad (7.11)$$

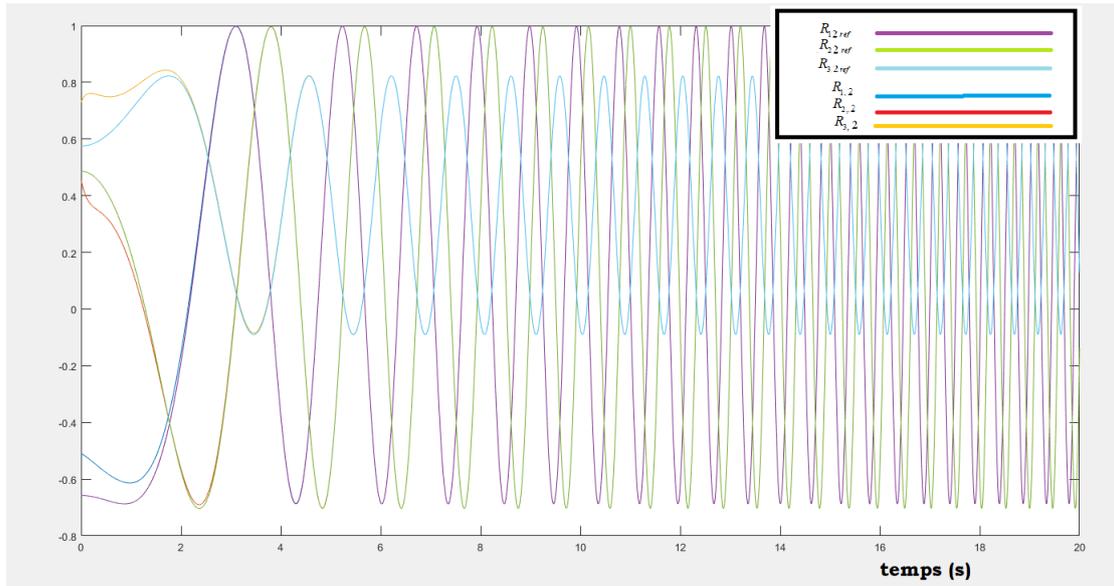
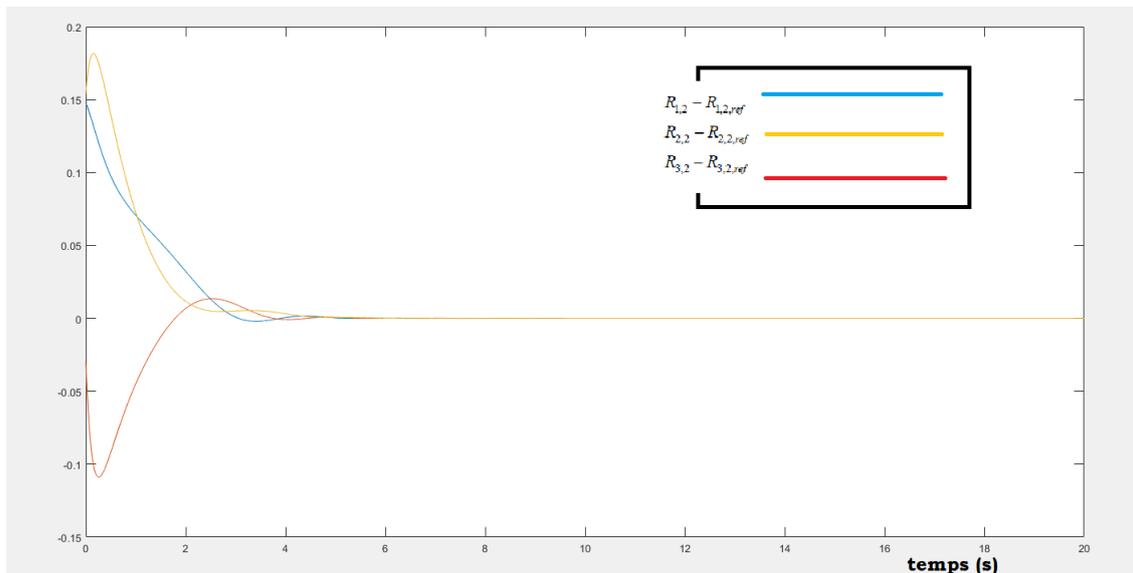
$$\Omega_{i+1} = \Omega_i + dt \cdot (I^{-1}(I \cdot \Omega_i \times \Omega_i) + \tau_i), \quad (7.12)$$

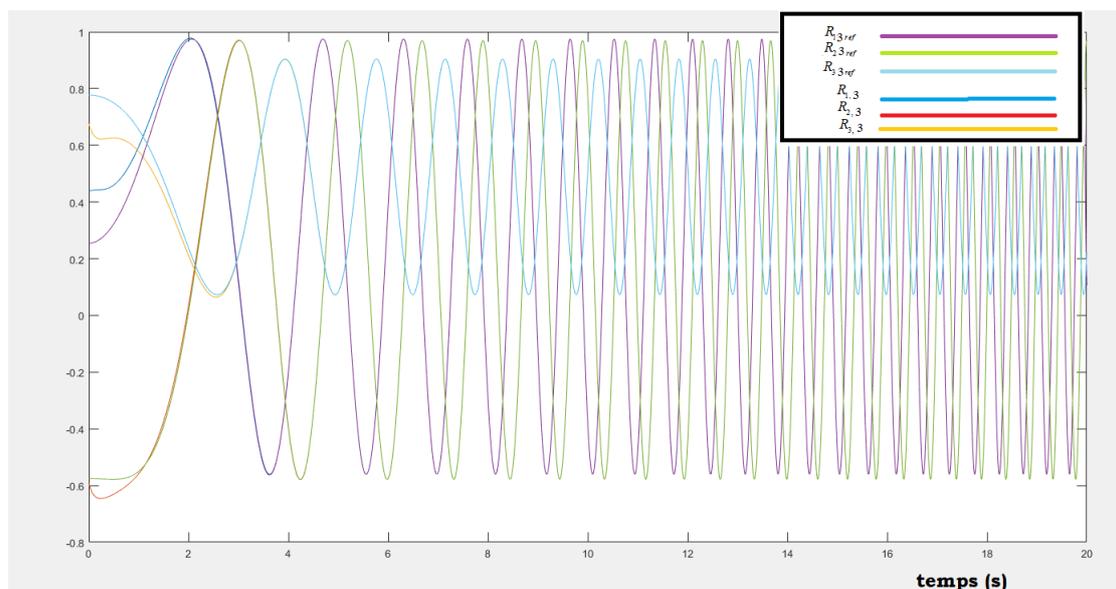
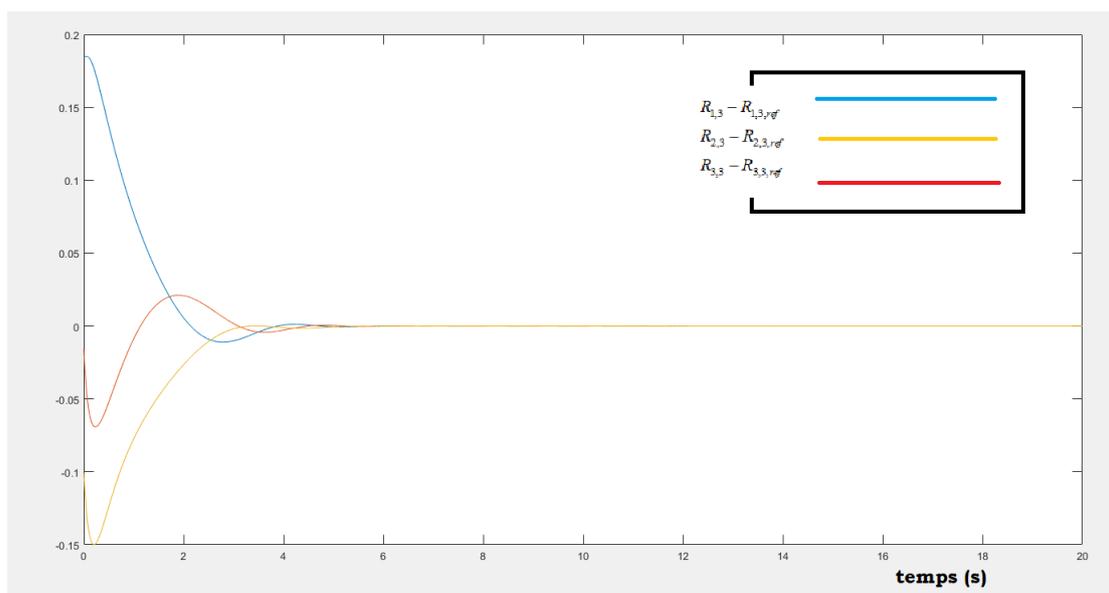
qu'on tire de [55].

On fixe $\gamma = -2$ et $\alpha = 1$, ceci donne $(k_P, k_D) = (8.7852, 8.3357)$, on choisit $\Omega_{ref}(t) = [0.5t, 0.3t, 0.4t]_\times$, et R_{ref} est l'unique trajectoire de SO_3 vérifiant $R'_{ref} = R_{ref}\Omega_{ref}$, les résultats sont donnés dans les figures 7.1, 7.2, 7.3.

On simule dans les figures les vecteurs $R \cdot e_i$ pour e_i la base canonique de \mathbb{R}^3 , ceci permet d'étudier le comportement complet de R , Voici les résultats

FIGURE 7.1 – Poursuite optimale de $R_{ref} \cdot [1, 0, 0]$ FIGURE 7.2 – Erreur de poursuite de $R_{ref} \cdot [1, 0, 0]$

FIGURE 7.3 – Poursuite optimale de $R_{ref} \cdot [0, 1, 0]$ FIGURE 7.4 – Erreur de poursuite de $R_{ref} \cdot [1, 0, 0]$

FIGURE 7.5 – Poursuite optimale de $R_{ref} \cdot [0, 0, 1]$ FIGURE 7.6 – Erreur de poursuite de $R_{ref} \cdot [1, 0, 0]$

Les figures 7.1 7.3 7.5 illustrent les composantes de l'orientation réelle et de référence du corps rigide. Les figures 7.2 7.4 7.6 illustrent les erreurs de poursuites de chaque colonne des orientations, on voit bien qu'il y'a bonne poursuite malgré la haute fréquence de variation de la référence.

Régulation Optimale

On applique le régulateur LQR au corps rigide afin de le stabiliser vers la position d'équilibre $(I, 0)$, cette fois ci on pose $\gamma = -1$ et $\alpha = 0.5$, ceci donne $(k_P, k_D) = (1.4142, 2.7671)$.

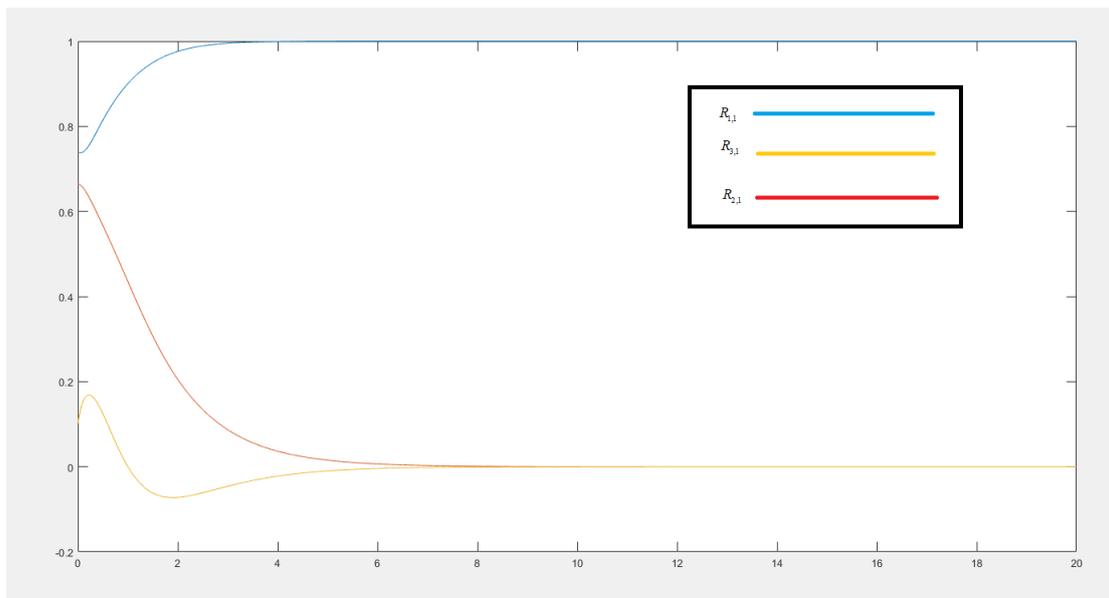


FIGURE 7.7 – Régulation optimale de l'orientation vers I , première colonne de R

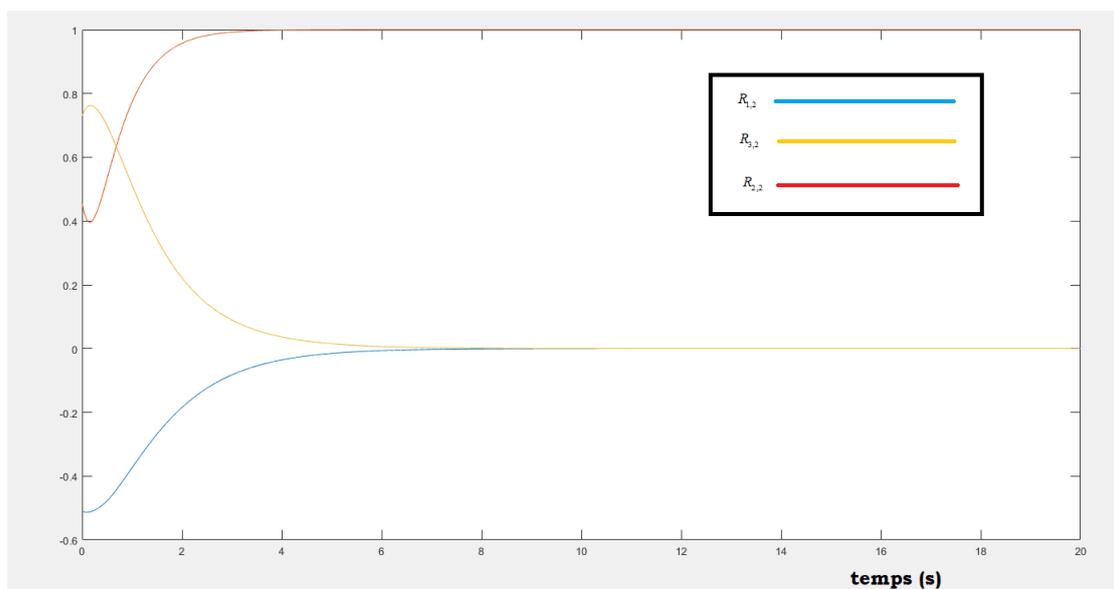


FIGURE 7.8 – Régulation optimale de l'orientation vers I , deuxième colonne de R

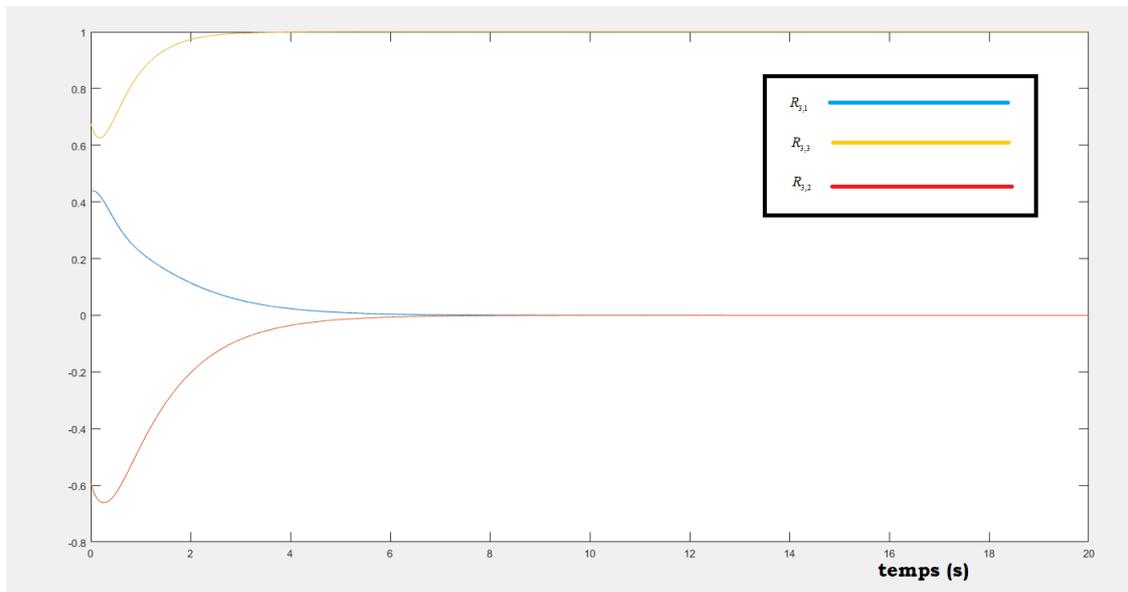


FIGURE 7.9 – Régulation optimale de l'orientation vers I , troisième colonne de R

Les graphes illustrés dans les figures 7.7 7.8 7.9 sont ceux des composantes de l'orientation du corps rigide, on voit bien que les composantes de la diagonale convergent vers 1, et les autres vers 0, ainsi la configuration converge vers l'identité.

La robotique classique et ses limites

La robotique classique assure la régulation de la configuration des robots et la régulation optimale de la cinématique d'un corps rigide.

Cependant, quelques remarques montrent qu'elle se comporte mal vis à vis des problèmes de régulation sous contrainte, et de régulation optimale de la dynamique des robots.

Elle ne permet pas non plus d'expliquer une sensibilité par rapport aux conditions initiales qui est présente dans beaucoup de systèmes robotiques et qui empêche la conception d'observateur performant.

Les avantages et inconvénients de la robotique géométrique

L'approche géométrique assure une modélisation plus proche de la réalité. On peut assurer une régulation sous contrainte de l'outil sous condition d'absence de singularités.

On explique l'origine de la sensibilité par rapport aux conditions initiales par la notion de courbure, et qu'on peut contourner via l'observateur riemannien.

On peut également assurer une régulation ainsi qu'une poursuite optimale par des méthodes algorithmiques.

Cependant, malgré tous ses succès, cette approche nécessite des calculs fastidieux et parfois

difficiles. On a souvent recours à des approximations, en faisant ceci on voit qu'on retombe sur les régulateurs proposées par l'approche Euclidienne. Ainsi, on peut voir la robotique classique comme étant une approximation de la robotique géométrique, un peu comme la mécanique céleste Newtonienne est l'approximation de la relativité générale.

Recherches à suivre

La robotique géométrique est un domaine actif en recherche, La formulation du PMP donnée ici peut être exploitée pour approfondir l'influence de la courbure sur les trajectoires optimales. Le régulateur de poursuite proposée pourra donner naissance à une théorie LQG en robotique.

On pourra également étudier l'influence de la courbure moyenne de N dans M pour aboutir à des résultats de régulation de l'outil sous contrainte.

Bibliographie

- [1] A. Bousclet, M.C. Belhadjoudja, Techniques de Géométrie Riemannienne en Robotique, Séminaires de l'École Nationale Polytechnique, 2020.
- [2] Andrei Kolmogorov S.Fomin, Introductory Real Analysis, Dover Books on Mathematics, 1975.
- [3] Felice Ronga, Analyse Réelle Post-Élémentaire, Verlag nicht ermittelbar, 2007.
- [4] Manfredo Do-Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Dover Publications inc, 2017.
- [5] O'Neill Barrett, Elementary Differential Geometry, Academic Press, 2nd edition, 2006.
- [6] Frank W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag New York, 1983.
- [7] John.Lee, Riemannian Geometry, An Introduction to Curvature, Springer-Verlag New York, 1997.
- [8] Vladimir.I Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, 1989.
- [9] Jean-Louis Basdevant, Variationnal Principels in Physics, Springer, 2010.
- [10] Andrea Bacciotti, Lionel Rosier, Liapounov Functions and Stability in Control Theory, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [11] Suguru Arimoto, Advances in Robot Control, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [12] Hassan Khalil, Nonlinear Systems, Pearson, 2001.
- [13] Jean-Jaques Slotine, Applied Nonlinear Control, Pearson, 1990.
- [14] Suguru Arimoto, Control Theory of Multi-fingered Hands, A Modelling and Analytical-Mechanics Approach for Dexterity and Intelligence, Springer-Verlag London, 2008.

-
- [15] D. Wang, N.H. McClamroch, Position and Force Control for Constrained Manipulator Motion :Lyapunov's Direct Method, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1993.
- [16] Richard M. Murray, Zexiang Li, S.Shankar Sastry, A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press, 1 st edition, 1994.
- [17] J.M Selig, Geometrical Methods in Robotics, Springer-Verlag New York, 1996.
- [18] Suguru Arimoto, Morio Yoshida, Masahiro Sekimoto, Kenji Tahara, A Riemannian Geomtry Approach for Control of Robotic Systems under Constraints, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration Volume 2, 2009.
- [19] Suguru Arimoto, Masahiro Sekimoto, Sadao Kawamura and Ji-Hun Bae, Skilled Motion Plannings of Multi-Body Systems Based upon Riemannian Distance, IEEE Internation Conference on Robotics and Automation, 2008.
- [20] Suguru Arimoto, Morio Yoshida, Masahiro Sekimoto, Kenji Tahara, A Riemannian Geomtry Approach for dynamics and control of object manipulation under constraints, IEEE Internation Conference on Robotics and Automation, 2009.
- [21] Francesco Bullo, Andrew D.Lewis, Geometric Control of Mechanical Systems, Springer-Verlag New York, 2005.
- [22] Winfried Lohmiller, Jean-Jacques Slotine, On Contraction Analysis for Nonlinear Systems, Automatica, 1998.
- [23] W. Lohmiller, J.J. Slotine, On Metric Controllers and Observers for Nonlinear Systems, IEEE, 1996.
- [24] Dimitri Anosov, Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, American Mathematical Society, 1977.
- [25] Rouchon Pierre, Nasradine Aghannan, An Intrinsic Observer for a Class of Lagrangian Systems, IEEE Transaction on Automation and Control, 2003.
- [26] David A.Anisi, Riemannian Observer for Euler-Lagrange Systems, IFAC Proceedings volumes, 2007.
- [27] John W.Simpson-Porco, Francesco Bullo, Contraction Theory on Riemannian Manifolds, Systems Control Letters, 2014.
- [28] Shigeo Sasaki, On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds, Tohuko Math, 1958.
- [29] Shigeo Sasaki, On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds II, Tohuko Math, 1961.
- [30] Francesco Bullo, Richard M.Murray, Tracking for fully actuated mechanical systems : a geometric framework, Automatica, 1999.
- [31] Bousclet Anis, Belhadjoudja Mohamed Camil, An Intrinsic PD-Regulator for Constrained Robotic Manipulators, International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation, 2020.

- [32] D. H. S, Maithripala, Jordan M Berg, An Intrinsic Observer for a Class of Simple Mechanical Systems on a Lie Group, IEEE, 2004.
- [33] John Milnor, Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Group, Advances in Mathematics, 1976.
- [34] Claudio Altafini, Geometric Control Methods for Nonlinear Systems and Robotic Applications, Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology, University of Stockholm, Sweden, 2001.
- [35] H. Brezis, Functional Analysis : Theory and Application, Dunod, 2005.
- [36] A. Bressan, Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations and Optimal Control Problems, Technical report S.I.S.S.A, Trieste, Italy, 2003.
- [37] E. Trelat, Commande Optimale : Théorie et Application, Vuibert, 2005.
- [38] Rudolf E. Kalman, Peter L. Falb, Michael A. Arbib, Topics In Mathematical System Theory, McGraw Hill Education, 1969.
- [39] A. Bressan, Introduction to the Mathematical Theory of Control, Amer Inst of Mathematical Sciences, 2007.
- [40] L.C. Evans, A Mathematical Introduction to Optimal Control Theory, University of California, Berkeley, 2010.
- [41] C.C. Remsing, Control and Integrability on $SO_3(\mathbb{R})$, International Conference of Applied Mathematics and Engineering, London, 2010.
- [42] A. Saccon, A.P. Seguiar, J. Hauser, Lie Group Projection Operator Approach : Optimal Control on $T SO_3(\mathbb{R})$, IEEE Transactions on Automatic Control, 2013.
- [43] A. Bloch, J. Marsden, P. Crouch, A.K. Sanyal, Optimal Control and Geodesics on Quadratic Matrix Lie Groups, Foundations of Computational Mathematics, 2008.
- [44] S. Berkane, A. Tayebi, Some Optimisation Aspects on the Lie Group $SO_3(\mathbb{R})$, IFAC-PapersOnLine 48-3, 2015.
- [45] A. Saccon, J. Hauser, A.P. Aguiar, Exploration of Kinematic Optimal Control on the Lie Group $SO_3(\mathbb{R})$, In 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 2010.
- [46] C.Liu, S. Tang, J. Guo, Intrinsic Optimal Control for Mechanical Systems on Lie Groups, Advances in Mathematical Physics, 2017.
- [47] H. Fleming, W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag New York, 1975.
- [48] B. Lee, L. Markus, Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley Sons Ltd, 1967.
- [49] V. Jurdjevic, Geometric Control Theory, Cambridge University Press, 2008.
- [50] V. Jurdjevic, Optimal Control and Geometry : Integrable Systems, Cambridge University Press, 2016.

-
- [51] A. Bloch, M. Camarinha, L. Colombo, Variational Point-obstacle Avoidance on Riemannian Manifolds, Mathematics of Control, Signals and Systems, 2021.
- [52] A. Bloch, M. Camarinha, L. Colombo, Dynamic interpolation for obstacle Avoidance on Riemannian manifolds, Published Online arxiv,2018.
- [53] A. Bloch, M. Camarinha, L. Colomo, R. Banavar, S. Chandrasekaran, Variational collision and obstacle avoidance of multi-agent systems on Riemannian manifolds, European Control Conference,2020.
- [54] F. Bullo, Nonlinear Control of Mechanical Systems : A Riemannian Geometry Approach, Ph.D Thesis, California Insitute of Technology, 1999.
- [55] S. Berkane, Hybrid Attitude Control and Estimation on $SO_3(\mathbb{R})$, Ph.D Thesis, University of Wastern Ontario, December 2017.
- [56] L. Pontryagin, Mathematical Theory of Optimal Processes, CRC Press, 1987.
- [57] W. Khalil and E. Dombre, Modeling, Identification and Control of Robots, Paris : Hermès science publications, 1999.
- [58] R. Bonnali, A. Bylard, A. Cauligi, T. Lew, M. Pavone, Trajectory Optimization on Manifolds : A Theoritically-Guarenteed Embeeded Sequential Convex Programming Approach, Robotics : Science and Systems, 2019.
- [59] John Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Springer-Verlag New York, 2012.
- [60] O'Neill Barret, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press Inc, 1983.