



Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Civil
Laboratoire de Génie Sismique et de
Dynamique des Structures



Thèse de Doctorat en Sciences en Génie Civil

Intitulée

Analyse probabiliste des fondations superficielles sur des sols $c-\varphi$ à l'aide des méthodes de surface de réponse de 2^{ème} ordre

Présentée par :

CHEMALI Badreddine

Magister en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique

Devant le Jury composé de :

N. BOURAHLA	Professeur, ENP	Président
B. TILIOUINE	Professeur, ENP	Directeur de Thèse
M. MOHABEDDINE	MCA, ENP	Examineur
E. DJAKAB	Professeur, USTHB	Examineur
K. SENDJAK	MCA, UMBB	Examineur
M. OUANANI	MCA, UNIV-DJELFA	Examineur
M. HAMMOUTENE	Professeur, ENP	Invité

Juillet 2024



Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Civil
Laboratoire de Génie Sismique et de
Dynamique des Structures



Thèse de Doctorat en Sciences en Génie Civil

Intitulée

Analyse probabiliste des fondations superficielles sur des sols $c-\varphi$ à l'aide des méthodes de surface de réponse de 2^{ème} ordre

Présentée par :

CHEMALI Badreddine

Magister en Génie Civil, Ecole Nationale Polytechnique

Devant le Jury composé de :

N. BOURAHLA	Professeur, ENP	Président
B. TILIOUINE	Professeur, ENP	Directeur de Thèse
M. MOHABEDDINE	MCA, ENP	Examineur
E. DJAKAB	Professeur, USTHB	Examineur
K. SENDJAK	MCA, UMBB	Examineur
M. OUANANI	MCA, UNIV-DJELFA	Examineur
M. HAMMOUTENE	Professeur, ENP	Invité

Juillet 2024

ملخص:

تم استخدام مؤشر الموثوقية β_{HL} Hasofer-Lind للتحقق من قابلية تطبيق العديد من نماذج سطح الاستجابة الخطية وغير الخطية بناءً على تقنيات تجارب التصميم لتقييم السلامة في ظل التحميل العشوائي، ضد فشل قدرة التحمل للأساسات الضحلة التي تركز على تربة $c-\phi$ ذات المتغيرات المرتبطة متعددة المتغيرات. تم فحص نتائج الموثوقية التي تم الحصول عليها باستخدام **FORM / SORM** المقترنة بهذه النماذج بواسطة طريقة محاكاة مونت كارلو. لقد ثبت أن تطبيق هذه النماذج يقلل بشكل كبير من وقت التنفيذ ومتطلبات الذاكرة، مع كون مخطط التصميم المركب المركزي هو الأكثر دقة. ويستنتج أيضاً أن اعتبار الارتباط يؤثر بشكل كبير على مؤشر الموثوقية من أجل القيم الكبيرة من معامل الاختلاف لزوايا احتكاك التربة. وجد أن مؤشر الموثوقية حساس لمعامل الاختلاف لزوايا احتكاك التربة والحمل المطبق، خاصة في حالة المتغيرات اللوغاريتمية الموزعة بشكل طبيعي. بالإضافة إلى ذلك، أظهرت النتائج الاحتمالية أن مؤشر الموثوقية يتناقص بشكل كبير مع زيادة الضغط المطبق، وأن هناك فرق كبير بين قيم مؤشرات الموثوقية المحسوبة، على أساس افتراض التوزيع الطبيعي مقارنة بالتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي، وخاصة بالنسبة للأقل نطاقات التحميل المطبقة

الكلمات المفتاحية :

الأساسات السطحية، تباين التربة، التحميل العشوائي، أسطح الاستجابة من الدرجة الثانية، التصميم المركب المركزي.

Abstract :

The HL-Reliability Index is utilized to investigate the applicability of several linear and nonlinear response surface models based on design experiments techniques to evaluate the safety under random loading, against bearing capacity failure of shallow foundations resting on c- ϕ soils with multivariate correlated variables. The reliability results obtained using FORM / SORM coupled with these models, are checked by Monte Carlo simulation method. It is demonstrated that the application of these models significantly reduces the execution time and memory requirements, with the central composite design scheme being the most accurate. It is also concluded, that consideration of correlation, significantly affects the reliability index for large values of soil friction angle uncertainty. The reliability index is found to be highly sensitive to uncertainties of soil friction angle and applied loading, especially for the case of lognormally distributed variables. In addition, the probabilistic results show that reliability index decreases substantially with the increase of the applied pressure, and that there is significant difference between the reliability indices values computed, based on the assumption of normal distribution as compared to lognormal distribution, especially for the lower ranges of applied loading.

Keywords

shallow foundations, soil variability, random loading, 2nd order response surfaces, central composite design.

Résumé :

L'indice de fiabilité β_{HL} est utilisé pour étudier l'applicabilité de plusieurs modèles de surface de réponse linéaire et non linéaire basés sur des techniques d'expériences de conception pour évaluer la sécurité sous chargement aléatoire, contre la défaillance de la capacité portante des fondations superficielles reposant sur des sols de type $c-\phi$ à paramètres corrélés. Les résultats de fiabilité obtenus à l'aide de FORM/SORM couplé à ces modèles, sont vérifiés par la méthode de simulation de Monte Carlo. Il est démontré que l'application de ces modèles réduit considérablement le temps d'exécution et les besoins en mémoire, le schéma de « central composite design » étant le plus précis. Il est également conclu que la prise en compte de la corrélation affecte de manière significative l'indice de fiabilité pour les grandes valeurs d'incertitude de l'angle de frottement du sol. L'indice de fiabilité s'avère sensible aux incertitudes de l'angle de frottement du sol beaucoup plus qu'à celle de la cohésion et du chargement qui ont approximativement la même influence, en particulier dans le cas de variables lognormalement distribuées. De plus, les résultats probabilistes montrent que l'indice de fiabilité diminue considérablement avec l'augmentation de la pression appliquée, et qu'il existe une différence significative entre les valeurs d'indices de fiabilité calculées, sur la base de l'hypothèse de distribution normale par rapport à la distribution lognormale, en particulier pour les gammes inférieures de chargement appliqué.

Mots clés

Fondations superficielles, variabilité du sol, chargement aléatoire, surfaces de réponse de 2^{ème} ordre, central composite design.

Remerciements

Nous remercions notre Dieu **ALLAH**, le tout puissant de nous avoir donné le courage, la force, la patience et la volonté pour mener à terme ce travail.

يقول النبي ﷺ من لا يشكر الناس لا يشكر الله

Cette thèse de Doctorat en sciences est l'aboutissement d'un travail de recherche effectué au sein du laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures L.G.S.D.S, sis à l'Ecole Nationale Polytechnique, sous la direction du **Professeur Tiliouine Boualem**.

La réalisation de cette thèse de Doctorat n'aurait pas été possible sans le soutien et la participation de plusieurs personnes avec lesquelles j'ai étroitement collaboré et qui m'ont fait part de leurs connaissances et de leur savoir-faire; je souhaite ici exprimer toute ma gratitude.

Je remercie mon directeur de Thèse Mr. **Tiliouine Boualem**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP), pour l'attention qu'il a portée à ce travail. Ses précieuses orientations et conseils m'ont soutenu tout au long de mes recherches. Sa supervision et son expérience m'ont été essentielles dans la réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également au Professeur **N. BOURAHLA** de l'ENP qui m'a fait l'honneur d'accepter la lourde tâche de présider le jury de thèse. Qu'il trouve ici, l'expression de mes sentiments reconnaissants.

Je tiens également à remercier les Professeurs, **M. HAMMOUTENE** de l'ENP, **E.DJAKAB** de l'USTHB, **M. MOHABEDDINE** de l'ENP, **K.SENDJAK** d'UMBB et **M. OUANANI** de l'Université de Djelfa pour avoir accepté de faire partie du jury de thèse et d'en examiner tous les aspects scientifiques et techniques. Qu'ils trouvent ici, le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Enfin, dans le souci de n'oublier personne, que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, que ce soit par leurs amitiés, leurs conseils ou leur soutien moral, trouvent ici dans ces quelques lignes l'expression de ma profonde gratitude.

Dédicaces

Je dédie ce modeste Travail de Recherche à :

- *Mes Parent*
- *Mon épouse et mes enfants*
- *Tous mes frères et sœurs*
- *Tous mes amis*
- *Tous les membres de l'équipe de laboratoire de Génie
Sismique et de Dynamique de Structures*

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Nomenclature

1	Introduction générale	16
1.1	Problématique	16
1.2	Objectifs	18
1.3	Organisation de la thèse	19
2	Incertitudes sur les caractéristiques du sol et du chargement	22
2.1	Introduction	22
2.2	Sources d'incertitude	22
2.3	Types d'incertitude	23
2.4	Distribution de probabilité et coefficient de variation	24
2.5	La corrélation entre les paramètres du sol	26
2.6	Conclusion :	29
3	Les méthodes probabilistes	31
3.1	Introduction	31
3.2	La méthode de Monte Carlo.....	32
3.3	La méthode de Second Order Second Moment	33
3.4	First Order Reliability Method.....	35
3.5	Second Order Reliability Method	38
3.6	Conclusion	41
4	La méthodologie des surfaces de réponse	44
4.1	Introduction	44
4.2	Schémas de conception expérimentale	45
4.3	Comparaison entre les schémas d'échantillonnage	48

4.4	Méthode de fiabilité couplée à une surface de réponse	49
4.5	Conclusion	53
5	Résultats Numériques.....	55
5.1	Introduction	55
5.2	Analyse de fiabilité de la sécurité des fondations sur des sols à paramètres corrélés.....	55
5.1.1	Comparaison entre les méthodes probabilistes.....	56
5.2.2	Résultats de la méthode de surface de réponse obtenue à partir de l'équation de Meyerhof.....	58
5.2.3	Effet de la corrélation des paramètres du sol sur l'indice de fiabilité par rapport à la défaillance de la capacité portante.....	62
5.3	Analyses de sensibilité de l'indice de fiabilité.....	63
5.3.1	Sensibilité de l'indice de fiabilité aux distributions normale et lognormale des variables du sol et du chargement	63
5.3.2	Sensibilité de l'indice de fiabilité à la réduction du nombre de variables aléatoires	65
5.3.3	Sensibilité de l'indice de fiabilité aux incertitudes sur les variables de chargement et de résistance au cisaillement du sol	66
5.4	Conclusion.....	69
	Conclusions générales.....	72
	Références.....	74
	Annexes.....	80
	Annexe A.....	80
	Annexe B.....	82
	Annexe C.....	84
	Annexe D.....	88

Liste des tableaux

- Tableau 2.1** Résumé des coefficients de variation des paramètres du sol donnée par la littérature.
- Tableau 2.2** Résumé des coefficients de corrélation entre les paramètres du sol donnée par la littérature.
- Tableau 2.3** Coefficient de corrélation entre les paires des paramètres d'entrée du sol
- Tableau 4.1** Comparaison entre les schémas d'échantillonnage
- Tableau 5.1** Propriétés statistiques des variables d'entrée aléatoires du sol et du chargement
- Tableau 5.2** Indice de fiabilité par rapport à la défaillance de la capacité portante à l'aide des méthodes MCS, RSM pour $k=4$ variables aléatoires avec les caractéristiques statistiques suivantes ($\mu_\phi=33^\circ$ - $\text{CoV}\phi = 5\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³ - $\text{CoV}\gamma = 10\%$; $\mu_c=12$ kPa - $\text{CoV}c = 30\%$; $\mu_{D_f}=1$ m - $\text{CoV}D_f = 10\%$)
- Tableau 5.3** Répétition unique de central composite design CCD montrant 15 combinaisons de variables de sol d'entrée ($k = 3$) et la capacité portante correspondante obtenue à partir de l'équation de Meyerhof
- Tableau 5.4** L'indice de fiabilité β_{HL} en supposant des distributions normales (ND) et log-normales (LND) des paramètres non corrélés et corrélés du sol
- Tableau 5.5** Valeurs de l'indice de fiabilité β , points de conception correspondants et probabilités de défaillance à partir du critère de capacité portante ultime pour différentes pressions appliquées ($\mu_\phi=33^\circ$ - $\text{CoV}\phi=5\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³- $\text{CoV}\gamma=10\%$; $\mu_c=12$ kPa- $\text{CoV}c=30\%$; $\text{CoV}q=20\%$)
- Tableau 5.6** Analyse de sensibilité de l'indice de fiabilité à la réduction du nombre de variables ($\mu_\phi=33^\circ$ - $\text{CoV}\phi = 5\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³- $\text{CoV}\gamma=10\%$; $\mu_c=12$ kPa- $\text{CoV}c=30\%$; $\mu_{D_f}=1$ m- $\text{CoV}D_f=10\%$; $\mu_q=460$ - $\text{CoV}q=20\%$)

Tableau 5.7. Indice de fiabilité contre la rupture de capacité portante en utilisant la RSM-CCD couplées à la méthode SORM pour $k=4$ variables aléatoires φ , c , γ et q ($\mu_\varphi=33^\circ$ - $CoV_\varphi = 10\%$; $\mu_\gamma=15.8 \text{ kN/m}^3$ - $CoV_\gamma = 10\%$; $\mu_c=12 \text{ kPa}$ - $CoV_c = 30\%$; $\mu_q =460\text{kPa}$ - $CoV_q = 20\%$).

Liste des figures

- Figure 2.1** Incertitude dans les estimations des propriétés du sol (KULHAWY, 1992).
- Figure 2.2** Exemple d'une forte corrélation linéaire positive (a), d'une forte corrélation linéaire négative (b) et aucune corrélation(c).
- Figure 3.1** Calcul de la probabilité de défaillance Pf avec la méthode MCS.
- Figure 3.2** L'algorithmme numérique pour calculer l'indice de fiabilité β_{HL} .
- Figure 3.3** Fonctions d'état limite linéaires et non linéaires.
- Figure 3.4** Rotation de l'axe dans l'espace normalisé.
- Figure 4.1** Différents type schémas de conception expérimentale dans l'espace codé pour k=3.
- Figure 4.2** Algorithme numérique pour l'analyse fiabiliste en utilisant la méthode de surface de réponse.
- Figure 4.3** Procédure pour obtenir un indice de fiabilité en utilisant la méthode de surface de réponse.
- Figure 5.1** Comparaison des valeurs expérimentales et prédites de q_{ult} .
- Figure 5.2** Graphique de probabilité normale pour q_{ult} en utilisant le modèle RSM-CCD.
- Figure 5.3** Représentation 3D pour q_{ult} en utilisant l'équation (5.1).
- Figure 5.4** Tracé de contour pour q_{ult} obtenu à partir du modèle RSM-CCD et de l'équation (5.1).
- Figure 5.5** Indice de fiabilité de la capacité portante ultime pour les distributions normales (ND) et lognormales (LND) des variables d'entrée du sol ($\mu_{\varphi}=33^{\circ}$ - $CoV \varphi =5-15\%$; $\mu_{\gamma}=15.8kN/m^3$ - $CoV\gamma=10\%$; $\mu_c=12kPa$ -

CoVc=30%).

Figure 5.6 Indice de fiabilité par rapport à différents niveaux d'incertitudes en utilisant une distribution normale ($\mu_\phi=33^\circ$, $\mu_c=12\text{kPa}$, $\mu_q=460\text{kPa}$).

Figure 5.7 Résultats de l'analyse de fiabilité utilisant le modèle RSM-CCD et MCS, par rapport à la pression appliquée pour différents CoV ϕ ($\mu_\phi=33^\circ$; $\mu_\gamma=15.8 \text{ kN/m}^3$ -CoV $\gamma=10\%$; $\mu_c=12 \text{ kPa}$ -CoVc=30%; CoVq=20%).

Figure 5.8 Résultats de l'analyse de fiabilité utilisant le modèle RSM-CCD et MCS, par rapport à la pression appliquée pour différents ;

Figure 5.9 Coefficient de variation de la probabilité de défaillance en fonction du nombre d'échantillons en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo.

Nomenclature

Les principales notations et symboles utilisées dans la présente thèse sont rassemblés ci-après :

μ : Moyenne

σ : Ecart type

CoV : le coefficient de variation

$Var[X]$: La variance

COV : la covariance

ρ : le coefficient de corrélation

PDF : Fonction de densité de probabilité

$g(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}})$: La fonction de performance

X'_i : la variable aléatoire réduite

\bar{y} : Le niveau limite (valeur admissible)

P_f : la probabilité de défaillance

R : La fiabilité

β_{HL} : L'indice de fiabilité Hasofer-Lind

Φ : est la fonction de distribution normale standard cumulée

α_i : Les cosinus directeurs

MPP ou X^* : le point de conception le plus probable

κ_i : Les courbures principales de la fonction d'état limite au MMP

R : La matrice de rotation

D ($n \times n$) : La matrice de dérivée de second ordre de la fonction de performance

MCS : la méthode de Simulation de Monte Carlo

FOSM: First Order Second Moment

SOSM: Second Order Second Moment

FORM: First Order Reliability Method

SORM: Second Order Second Moment

φ : Angle de frottement interne

c : Cohésion du sol

γ : poids spécifique du sol

q : la pression appliquée sur la fondation

RSM : Response Surface Methodology

b_0, b_i, b_{ii} et b_{ij} : Les coefficients de régression

SD: Saturated Design

BBD: Box-Behnken Design

CCD: Central Composite Design

q_{ult} : La capacité portante ultime

N_c, N_q et N_γ : les approximations de Meyerhof pour les facteurs de capacité portante
(Terme de surface, terme de profondeur et terme de cohésion respectivement)

s_c, s_q et s_γ : Les facteurs de forme

d_c, d_q et d_γ : Les facteurs de profondeur

D_f : la profondeur d'encastrement

INTRODUCTION GENERALE

1 Introduction générale

1.1 Problématique

La capacité portante ultime est un élément clé dans l'analyse, la conception et l'évaluation de la sécurité des fondations superficielles reposant sur des sols. Bien que la plupart des travaux de recherche sur le comportement des fondations superficielles soient essentiellement de nature déterministe, il y a une attention croissante au développement et à l'utilisation des méthodes probabilistes pour évaluer la fiabilité et la performance des fondations contre la rupture de la capacité portante dans des conditions incertaines de sol et de chargement. Pour accomplir cette tâche, un critère d'indice de fiabilité est généralement utilisé comme mesure de la sécurité du système. En variante, un critère de probabilité de défaillance peut également être utilisé comme indicateur de défaillance du système. Normalement, une valeur d'indice de fiabilité comprise entre $\beta = 3,0$ (c'est-à-dire la probabilité de défaillance $P_f = 1,3 \cdot 10^{-3}$) et $\beta = 4,0$ (c'est-à-dire $P_f = 3,17 \cdot 10^{-5}$) est acceptée pour une bonne performance du système dans un environnement et des conditions de chargement données.

Des recherches probabilistes des fondations superficielles sur les sols cohésifs (par exemple, Griffiths et al., 2002 ; Sivakumar et al., 2006 ; Lingwanda, 2018) et les sols sans cohésion (par exemple, Puła et Zaskórski, 2015 ; Lakehal et Tiliouine 2020), y compris des matériaux granulaires (par exemple, Dodagoudar et Shyamala, 2015 ; Ivandić et al, 2022) ont été réalisés par différents chercheurs. De plus, des évaluations de sécurité des fondations superficielles reposant sur des sols $c-\phi$ ont été effectuées par divers auteurs (par exemple, Cherubini a, 2000 ; Massih et al, 2008 ; Kawa and Puła 2019, pour n'en nommer que quelques-uns).

Dans ce cas cependant, il est à noter que contrairement aux sols sableux ou argileux, caractérisés par un seul paramètre de résistance, la capacité portante ultime et donc la sécurité des fondations superficielles, reposant sur des sols de type $c-\phi$, est essentiellement en fonction de sa résistance inhérente au cisaillement par frottement et par sa cohésion.

L'indice de fiabilité peut être calculé par diverses méthodes probabilistes, notamment les méthodes d'estimation ponctuelle PEM (Christian et Baecher, 2002), les méthodes de fiabilité du premier et du second ordre (FORM et SORM) (Hasofer et Lind, 1974), les méthodes des moments du premier et du second ordre (FOSM, SOSM) (Tiliouine et Chemali, 2016 ; Haldar et Mahadevan, 2017) et la méthode MCS (Ching, 2011). Contrairement aux méthodes approximatives ci-dessus, les résultats MCS peuvent être utilisés pour calculer non seulement les moments statistiques, mais également le PDF de la réponse. La méthode est généralement plus précise que les méthodes mentionnées ci-dessus car elle nécessite que les PDF du système ou des variables de composant soient prescrits. Cependant, il convient de souligner que, lors de l'utilisation de MCS ou de ses variantes (Tiliouine and Chemali, 2016), l'indice de fiabilité ne peut pas être calculé directement et est généralement évalué indirectement à partir de la probabilité de défaillance P_f comme suit $\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f)$ où Φ^{-1} est l'inverse de la distribution cumulative normale standard. En revanche, on cherche naturellement des moyens pour améliorer la convergence de la méthode MCS traditionnelle. L'approche BUS (Bayesian Updating with Structural reliability method) avec SuS (subset simulation) a été appliquée avec succès pour apprendre la distribution spatiale des propriétés du sol et mettre à jour la fiabilité des structures géotechniques, telles que les fondations superficielles et les murs de palplanches, sur la base de données d'essais in situ et de données de surveillance (par exemple Straub et Papaioannou, 2014 ; Straub et coll., 2016). D'autre part, il convient de souligner que diverses méthodologies, telles que la méthodologie FOSM (First-Order Second-Moment) et la méthodologie de surface de réponse (RSM), peuvent être intégrées à l'analyse bayésienne pour améliorer le processus d'évaluation de la fiabilité. Ces méthodes aident à approximer l'effet des variables aléatoires sur la capacité portante (Sivakumar et al., 2006 ; Acharya et Acharya, 2019).

De plus, il est important de noter que l'indice de fiabilité estimé à l'aide des méthodes FOSM ou SOSM n'est pas "invariant" car des fonctions de performance alternatives mais équivalentes conduisent en général à des valeurs différentes de l'indice de fiabilité (Haldar et Mahadevan, 2017). Dans ce travail, et à des fins d'évaluation de la fiabilité, on utilisera cependant l'indice de Hasofer et Lind β_{HL} (défini dans l'espace normal standard, comme la distance la plus courte entre l'origine

des variables aléatoires et la surface d'état limite). Cette définition invariante est largement utilisée dans les études de fiabilité et peut être convertie en une formulation matricielle (Ditlevsen, 1981). En cas de nécessité, la probabilité de défaillance P_f peut être calculée à l'aide de la formule $P_f = \Phi(-\beta_{HL})$. Cependant, lors de l'utilisation de SORM, la formule suivante $P_f = \Phi(-\beta_{HL})(1 + \kappa_j \beta_{HL})$ doit être utilisée afin de tenir compte de la courbure de la surface de réponse au point de conception le plus probable MPP (voir par exemple, Haldar et Mahadevan, 2017 ; Phoon et Ching 2018 pour plus de détails). Il convient également de noter que pour les distributions non normales, les paramètres d'entrée du sol et du chargement doivent être transformés en variables normales équivalentes à l'aide de la procédure de Rackwitz et Fiessler 1978.

Lors de l'étude de fiabilité des fondations superficielles, il convient de noter que le choix du modèle déterministe de la capacité portante ultime (voir par exemple Eurocode 7 ; Móczár et Szendefy, 2017 ; Das, 2017) en vue de déterminer l'indice de fiabilité de la fondation est crucial. En fait, les analyses probabilistes utilisées conjointement avec le facteur de la capacité portante $N\gamma$ de Terzaghi constituent une tâche numérique difficile car les dérivées des variances par les méthodes du premier et du second ordre sont laborieuses, pour ne pas dire extrêmement difficiles (par exemple, Kumbhojkar 1993 ; Lakehal et Tiliouine 2020).

Au contraire, l'utilisation de modèles de surface de réponse du second ordre pour établir des relations fonctionnelles précises entre la capacité portante et les paramètres du sol, permettent de calculer rapidement et précisément ces dérivées et par suite l'indice de fiabilité. Ces aspects numériques sont avantageusement utilisés dans la présente recherche pour extraire efficacement les informations de sécurité souhaitées , comme l'indice de fiabilité, en réduisant ainsi à la fois le temps d'exécution CPU et les besoins en mémoire par opposition aux efforts de calcul excessifs requis par la méthode MCS.

1.2 Objectifs

Contrairement à l'Eurocode 7 qui a une approche semi-probabiliste (Saber Imanzadeh 2005; Ivandić et al, 2022), dans cette étude, une analyse probabiliste à l'état limite de fondations reposant sur des sols de type $c-\phi$ avec des paramètres

corrélés multivariés est présentée. L'indice de fiabilité β_{HL} est utilisé pour étudier l'applicabilité de plusieurs modèles de surface de réponse linéaire et non linéaire basés sur des techniques d'expériences de conception pour évaluer la sécurité sous chargement aléatoire, contre la défaillance de la capacité portante des fondations superficielles reposant sur des sols de type c- ϕ à paramètres corrélés (c-à-d entre les paires des paramètres d'entrée du sol (c, ϕ), (c, γ) et (ϕ , γ)).

Deux distributions statistiques (normale et lognormale) des paramètres de sol d'entrée et de charge appliquée sont considérées. La théorie de la fiabilité est utilisée conjointement avec plusieurs modèles de surface de réponse linéaire et non linéaire pour développer une méthode précise permettant d'effectuer une analyse probabiliste multivariée efficace des fondations peu profondes reposant sur des sols de type c- ϕ .

La sensibilité de l'indice de fiabilité aux réductions successives du nombre de variables aléatoires (c-à-d. : l'importance relative des variables aléatoires), ainsi que les implications d'une éventuelle corrélation croisée entre les paires de paramètres de sol d'entrée ϕ , c, γ sur la variabilité de la capacité portante ultime et sur la sécurité des fondations ont été examinées en détail à l'aide de la technique de simulation de Monte Carlo.

De plus, une comparaison des résultats de fiabilité avec ceux de des méthodes Hasofer-Lind du premier ordre (FORM) et du deuxième ordre (SORM) ainsi que des méthodes Mean Value FORM couplées aux modèles de surface de réponse est effectuée et des conclusions d'intérêt pratique sont formulées.

1.3 Organisation de la thèse

Afin d'atteindre les objectifs de la présente recherche discutés dans la section 1.2, les chapitres suivants seront considérés :

Chapitre 2 : Ce chapitre commence par examiner les principales sources et types d'incertitude dans le domaine géotechnique, soulignant l'importance de l'utilisation de méthodes probabilistes comme alternative à l'analyse déterministe pour quantifier les incertitudes. Les types de distribution typiques et les valeurs de coefficient de variation (CoV) des variables géotechniques et de chargement ainsi que le coefficient

de corrélation (ρ) entre les paires aléatoires des variables du sol sont brièvement décrites.

Chapitre 3 : Ce chapitre décrit certaines techniques probabilistes bien connues pour traiter les incertitudes. Une attention particulière est accordée aux simulations Monte Carlo (MCS), à la méthode First Order Reliability (FORM), à la méthode Second Order Reliability (SORM), aux méthodes First Order Second Moment (FOSM) et Second Order Second Moment (SOSM).

Chapitre 4 : Le but de ce chapitre est de passer en revue quelques méthodes de surface de réponse afin de calculer l'indice de fiabilité. Différents type de schémas de conception expérimentale qui sont souvent utilisés pour générer des points d'échantillonnage expérimentaux pour l'ajustement des surfaces de 2^{ème} ordre sont présentés. L'algorithme numérique pour l'analyse de fiabilité à l'aide de la méthode de la surface de réponse couplé avec SORM est illustré.

Chapitre 5 : Les résultats globaux de l'analyse de fiabilité de la sécurité des fondations sur des sols de types $c - \phi$ avec des paramètres corrélés, ainsi que les résultats d'une analyse de sensibilité de l'indice de fiabilité aux distributions statistiques et les incertitudes des variables aléatoires du sol (ϕ , c , γ) et du chargement sont examinés dans ce chapitre.

Chapitre 6 : Enfin, le document se termine par un résumé des principaux résultats et des principales conclusions.

INCERTITUDES SUR LES CARACTERISTIQUES DU SOL ET DU CHARGEMENT

2 Incertitudes sur les caractéristiques du sol et du chargement

2.1 Introduction

Les propriétés du sol et du chargement sont caractérisées par plusieurs incertitudes. Ces incertitudes peuvent avoir un impact significatif sur la sécurité des fondations et peuvent conduire dans certains cas à des défaillances de la fondation et de la structure (Phoon et Kulhawy, 1999).

L'analyse de la fiabilité des fondations sous chargement aléatoire, sur des sols avec des paramètres corrélés nécessite, entre autres, que le coefficient de variation (CoV) des variables géotechniques et de chargement ainsi que le coefficient de corrélation (ρ) entre les paires aléatoires des variables du sol, soient connus. Ces paramètres sans dimension représentent des mesures pratiques de la dispersion des données autour de la moyenne de l'échantillon et de la corrélation entre les paires des variables du sol, respectivement (Haldar et Mahadevan, 2017).

2.2 Sources d'incertitude

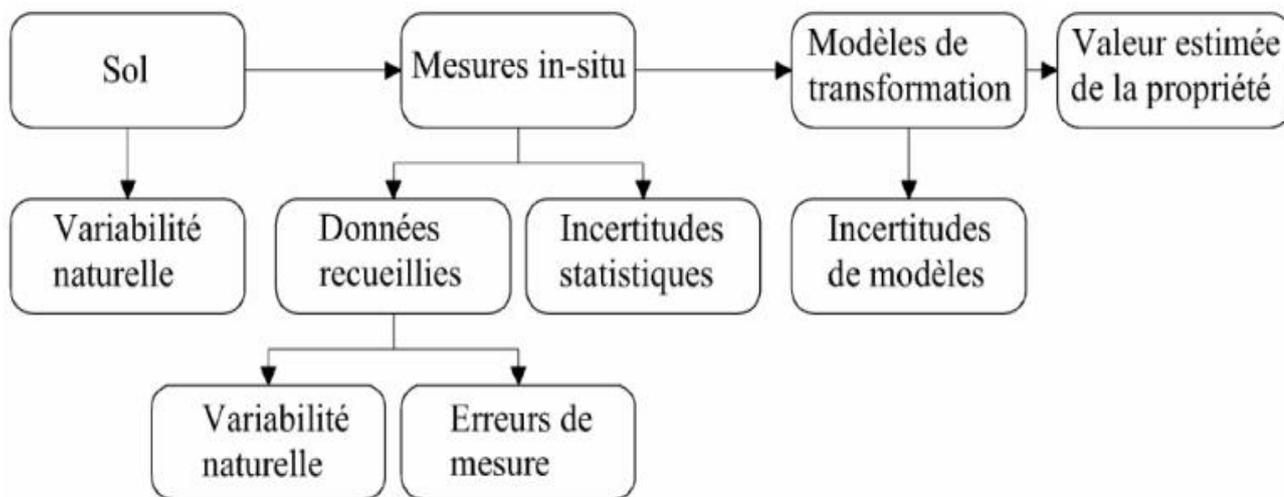


Figure 2.1 : Incertitude dans les estimations des propriétés du sol (Kulhawy 1992)

La variabilité géotechnique résulte de différentes sources d'incertitudes. La figure 2.1 expose les principales sources :

- **La variabilité inhérente** résulte principalement des processus géologiques naturels qui ont créé des couches de sol in situ.
- **L'erreur de mesure** est causée par l'échantillonnage et les tests en laboratoire. Cette erreur est accrue par l'incertitude statistique résultant d'une quantité limitée d'informations.
- **L'incertitude du modèle** est introduite lorsque les mesures sur le terrain ou en laboratoire sont transformées en paramètres d'entrée pour des modèles de conception impliquant des simplifications et des idéalizations.

2.3 Types d'incertitude

Les incertitudes associées à l'ingénierie géotechnique peuvent être divisées en trois catégories : l'incertitude inhérente ou naturelle (aléatoire), les incertitudes dues au manque de connaissance parfaite (épistémique) et l'erreur humaine. L'incertitude aléatoire est attribuée à la variabilité naturelle ou au caractère aléatoire d'une certaine propriété, telle que la variation spatiale des propriétés de la couche de sol, la cohésion et l'angle de frottement. Elle pourrait être quantifiée par des mesures et des estimations statistiques ou par des avis d'experts. Ce type d'incertitude est imprévisible et donc irréductible via la collecte de données plus expérimentales ou l'utilisation de modèles plus raffinés. Pour ce type d'incertitude, le terme probabilité désigne la fréquence d'apparition d'un événement aléatoire, qui est une propriété innée de la nature.

L'incertitude épistémique naît du manque de connaissance d'un système et est liée à des données limitées ou ambiguës, à des erreurs de mesure, à des connaissances incomplètes, à des modèles imparfaits et à un jugement subjectif. Elle peut en principe être quantifiée par des experts, mais pas mesurée. Ce type d'incertitude peut être réduit en collectant davantage de données expérimentales, en améliorant les méthodes de mesure et de calcul et en utilisant des modèles plus raffinés. Pour ce type d'incertitude, le terme probabilité désigne le degré de croyance dans l'occurrence d'un événement aléatoire, qui est une interprétation subjective de l'individu, par ex. le jugement technique d'un expert.

En géotechnique, des incertitudes aléatoires et épistémiques coexistent dans la plupart des applications pratiques.

2.4 Distribution de probabilité et coefficient de variation

Parmi les caractéristiques du sol, l'angle de frottement interne, la cohésion et le poids unitaire du sol sont les variables aléatoires les plus fréquemment utilisées car elles sont spécifiquement liées à la capacité portante du sol et donc à l'analyse de fiabilité des fondations superficielles. Lorsque des données suffisantes ne sont pas disponibles, les valeurs CoV de ces variables peuvent être estimées sur la base soit des valeurs publiées accessibles dans la littérature spécialisée, soit du classique « règle des trois sigma » (Duncan 2000). Les types de distribution typiques et les valeurs du CoV des paramètres du sol publiés dans certaines revues sont résumés dans le **Tableau.2.1**

- Dans la gamme assez restreinte des valeurs courantes de l'angle de frottement φ pour les sols c- φ ($20^\circ \leq \varphi \leq 40^\circ$), le CoV_φ varie typiquement entre 2 et 5 % (Nadim 2007) et peut atteindre 15 % (Phoon et Kulhawy, 1999).
- Pour la cohésion effective, le coefficient de variation varie entre 10 et 70 % (Cherubini, 2000 a).
- Pour le poids unitaire du sol, le coefficient de variation peut atteindre 10 % (Forrest et Orr 2010) ou même plus (Phoon et Kulhawy, 1999).

Dans cette étude, les valeurs illustratives utilisées pour le coefficient de variation des variables d'entrée du sol drainé à long terme sont les suivantes :

- Angle de frottement effective φ : $CoV_\varphi = 5-15\%$;
- Cohésion effective c : $CoV_c = 10-30\%$;
- Poids spécifique du sol γ : $CoV_\gamma = 10\%$.

En ce qui concerne les incertitudes de chargement, le coefficient de variation de la pression appliquée q, est considéré dans ce travail, varier de 10 % à 30 % (Xue et Nag, 2011 ; Ellingwood et Galambos, 1982). De plus, on suppose qu'il n'y a pas de corrélation entre la charge et les variables d'entrée du sol.

Tableau 2.1. Résumé des coefficients de variation des paramètres du sol donnée par la littérature (Wu, 2013).

Variable	N°	CoV (%)	Distribution	Référence
c	C1	16.2–31.6	/	Alonso, 1976
	C2	12–85	/	Becker, 1996
	C3	10–70	/	Cherubini, 2000 a
	C4	12–145	/	Cherubini, 2000 b
	C5	20–40	Normal	Forrest et Orr, 2010
	C6	14.5–106.8	/	Hata et al, 2011
	C7	9–23	/	Lumb, 1970
	C8	20–40	/	Matsuo and Kuroda, 1974
	C9	18–49	/	Nguyen and Chowdhury, 1985
φ	F1	13.8–22.9 ($\tan \varphi$)	/	Alonso, 1976
	F2	5–25	/	Becker, 1996
	F3	5–50	/	Cherubini, 2000 a
	F4	1–87.2	/	Cherubini, 2000 b
	F5	5–15	Normal	Forrest et Orr, 2010
	F6	5.7–76	/	Hata et al, 2011
	F7	12–56	/	Lee et al, 1983
	F8	0.8–5.9 ($\tan \varphi$)	/	Lumb, 1970
	F9	5.8–46.6	/	Matsuo et Kuroda, 1974
	F10	2–5	/	Nadim, 2007
	F11	14–33	/	Nguyen et Chowdhury, 1985
	F12	5–15	/	Phoon,et Kulhawry, 1999
γ	G1	2.5–6.8	/	Alonso, 1976
	G2	4–16	/	Becker, 1996
	G3	3–10	/	Cherubini, 2000 a
	G4	1–27.9	/	Cherubini, 2000 b
	G5	3–7	/	Duncan, 2000
	G6	1–10	Normal	Forrest et Orr, 2010
	G7	1–8	/	Matsuo et Kuroda, 1974
	G8	3–20	/	Phoon,et Kulhawry, 1999

2.5 La corrélation entre les paramètres du sol

Lorsque l'on considère deux ou plusieurs variables aléatoires, il faut définir un indicateur de leur « liaison » qui complète les paramètres qui les caractérisent chacune séparément (moyenne et écart type).

Si X et Y sont deux variables aléatoires, la covariance est définie comme :

$$\text{COV}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad 2.1$$

et le coefficient de corrélation est donné par :

$$\rho_{XY} = \frac{\text{COV}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad 2.2$$

Une corrélation est dite :

- Parfaitement positive si le coefficient de corrélation $\rho_{XY} = +1$, comme le montre la figure 2.2 (a)
- Parfaitement négative si le coefficient de corrélation $\rho_{XY} = -1$, comme l'expose la figure 2.2 (b).
- Cependant, le coefficient de corrélation $\rho_{XY} = 0$, alors les variables ne sont pas corrélées, comme sur la figure 2.2 (c).

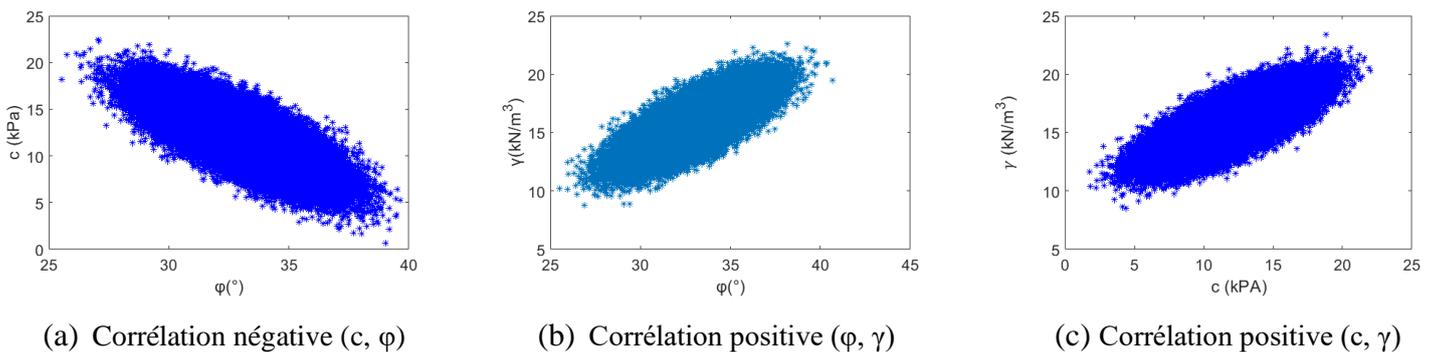


Figure 2.2. Exemple d'une forte corrélation entre les paires des paramètres du sol

Tableau 2.2. Résumé des coefficients de corrélation entre les paramètres du sol donnée par la littérature (Wu, 2013)..

Paires	$\rho_{ij}, i \neq j; i, j = \varphi, c, \gamma$	Observation	Référence		
c, φ	-0.61	Triaxial test (clay)	Cherubini, 2000 a.		
	-0.47				
	0.25	Consolidated undrained triaxial test	Forrest et Orr, 2010 Harr 1987		
	-0.1	Consolidated drained triaxial test	Hata et al 2011		
	-0.81				
	-0.87				
	-0.572				
	-0.554				
	-0.49				
	-0.359				
-0.557	Direct shear test (clay)	Lumb, 1970 Matsuo et Kuroda 1974			
-0.7 to -0.37					
-0.412 (Soil 1)					
0.316 (Soil 2)					
0.369 (Soil 3)					
-0.474 (Soil 3)					
-0.748 (Soil 3)					
γ, c			-0.47	Drained triaxial test	Wolff 1985 Babu, et Srivastava , 2007
			0.25		
			0.5	/	
	0.75				
	0.4	/	Chowdhury et Xu 1992		
	0.5	/	Low et Tang, 1997		
	0.44	Direct shear test (clay)	Matsuo et Kuroda 1974		
	γ, φ	0.25	/	Babu, et Srivastava , 2007	
		0.5			
		0.75			
0.7		/	Chowdhury et Xu 1992		
0.5		/	Low et Tang, 1997		
0.713 (soil 1)		Direct shear test (clay, silt, silt sand)	Matsuo et Kuroda 1974		
0.656 (soil 2)					
0.926 (soil 3)					
0.859 (soil 3)					
-0.943 (soil 3)					

Certains auteurs ont basé leurs études probabilistes sur l'hypothèse que les paramètres de résistances du sol (c , φ) ne sont pas corrélés. Ceci est souvent fait pour simplifier les calculs. Cependant, les paramètres de résistances du sol (c , φ) ne sont pas indépendantes, vue qu'ils sont basées sur le critère de Mohr-Coulomb (déterminer à partir d'une seule observation Wu, 2013). La dépendance entre les variables aléatoires est principalement déterminée par le coefficient de Pearson ρ_p de corrélation linéaire, comme le rapportent Lumb, 1970 ; Cherubini, 1997 ; Forrest et Orr, 2010. Des mesures en laboratoire (Forrest et Orr ; 2010, Hata et al, 2011 ; Lumb, 1970 et Cherubini, 1997) ont montré que c et φ sont corrélées négativement. Mais, ce n'est pas toujours le cas puisque certains résultats de corrélation positive ont été rapportés par Lumb, 1970 et Wolff, 1985. A cet effet, pour avoir une étude plus approfondie sur ce sujet important, des tests expérimentaux réalistes doit être réalisé.

Contrairement aux paramètres de résistances (c , φ), les données brutes disponibles pour examiner la corrélation entre les autres paires des paramètres du sol (c , γ) et (φ , γ) sont rares. Souvent, dans la littérature (Chowdhury et Xu, 1992; Low et Tang, 1997) le coefficient de corrélation est supposé positif.

Un résumé des coefficients de corrélation entre ces paires est fourni dans le Tableau 2.2.

Tableau 2.3. Coefficient de corrélation entre les paires des paramètres d'entrée du sol

Coefficient de corrélation ($\rho_{ij}, i \neq j; i, j = \varphi, c, \gamma$)	$\rho_{\varphi c}$	$\rho_{c\gamma}$	$\rho_{\varphi\gamma}$
Cas 1 non corrélé	0	0	0
Cas 2 Corrélation faible	-0.25	0.25	0.25
Cas 3 Corrélation modérée	-0.50	0.50	0.50
Cas 4 Forte corrélation	-0.75	0.75	0.75

Les valeurs illustratives des coefficients de corrélation ($\rho_{ij}, i \neq j; i, j = \varphi, c, \gamma$) utilisées dans la présente étude sont résumées dans le Tableau 2.3 conformément aux valeurs typiques trouvées dans la littérature (Chowdhury et Xu, 1992).

2.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous venons de donner un aperçu des différentes formes d'incertitudes liées à l'étude des propriétés des sols, telles que leur variabilité naturelle, leurs connaissances et les modèles que l'on utilise pour évaluer ces propriétés. Les effets d'incertitudes en géotechnique sont pris en compte par l'approche probabiliste qui devient nécessaire pour garantir un certain niveau de sécurité. La modélisation des variables d'entrée sous forme de variables aléatoires étaient utilisés pour prendre en considération : le coefficient de variation et la corrélation entre les paires des paramètres du sol. En résumé, une modélisation statistique rigoureuse des paramètres de conception et un choix éclairé des fonctions de distribution sont essentiels pour concevoir des structures fiables et durables.

Les méthodes probabilistes

3 Les méthodes probabilistes

3.1 Introduction

Dans le cadre probabiliste conventionnel, les incertitudes sont modélisées comme des variables aléatoires avec certaines caractéristiques de distribution. Soit $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m]^T$ désigne le vecteur des variables aléatoires et \mathbf{X} le vecteur des variables déterministes ; la probabilité de défaillance P_f peut être donnée par :

$$P_f = P[g(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}) \leq 0] = \int \dots \int_{g(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}) \leq 0} p_x(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_m \quad (3.1)$$

où $g(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}) = \bar{y} - y(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}})$ est la fonction de performance du système, $P[\cdot]$ dénote la probabilité et $g(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{X}}) \leq 0$ définit l'événement de défaillance, par conséquent, la fiabilité peut être définie comme la zone du PDF de y qui se trouve en dessous du niveau \bar{y} ; $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m]^T$ représente la réalisation de $\bar{\mathbf{X}}$, $p_x(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ est la fonction de densité de probabilité conjointe qui est généralement approximée à l'aide d'ensembles de données mesurés des paramètres du système, y est la variable de performance et \bar{y} est le niveau limite correspondant.

Pour évaluer l'intégrale multivariée dans l'équation (3.1), de nombreuses techniques disponibles telles que les méthodes de Monte Carlo, FORM, SORM, les méthodes de surface de réponse (par exemple Ching, 2011; Farag et Haldar, 2016 ; Tiliouine et Chemali 2017) les méthodes d'estimation ponctuelle (par exemple Nowak et Collins 2012 ; Tiliouine et Chemali 2017) pour n'en nommer que quelques-uns, peuvent être mis en œuvre.

Une mesure de la fiabilité du système peut être donnée par l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind (Hasofer et Lind, 1974) β_{HL}

La fiabilité $R = 1 - P_f$ est liée à l'indice de fiabilité par la relation bien connue :

$$R = \Phi(\beta_{HL}) \quad (3.2)$$

où Φ est la fonction de distribution normale standard cumulée.

3.2 La méthode de Monte Carlo

Dans l'analyse probabiliste, la méthode de Monte Carlo est souvent utilisée lorsque la solution analytique n'est pas réalisable et que le domaine de défaillance ne peut pas être exprimé ou approché par une forme analytique. L'estimation de Monte Carlo de P_f est donnée par

$$P_f = \frac{n}{N} \quad (3.3)$$

où N est le nombre total de simulations et n est le nombre de simulations qui ont des valeurs supérieures aux valeur limite (tel qu'illustré sur la figure 3.1).

Le problème avec la simulation Monte Carlo traditionnelle est que pour obtenir une prédiction précise de la moyenne et de la variance de la réponse, il peut être nécessaire d'effectuer des milliers d'exécutions. Le calcul est très long et coûteux.

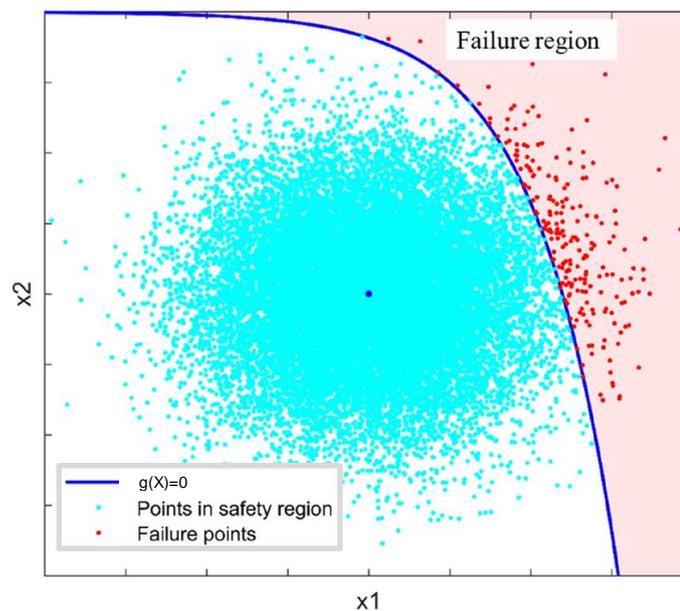


Figure 3.1. Calcul de la probabilité de défaillance P_f avec la méthode MCS

Le pourcentage d'erreur des résultats des simulations de Monte Carlo peut être calculé à l'aide de l'équation (3.4) qui est basée sur l'intervalle de confiance à 95 % pour la probabilité de performances insatisfaisantes.

$$\%error = 200 \sqrt{\frac{1-P_f}{N}} \quad (3.4)$$

où N = le nombre total de simulations et P_f = probabilité de défaillance

Pour plus de détails sur MCS et la manière de générer des nombres aléatoires, le lecteur peut se référer à (par exemple Ching, 2011 et Nowak et Collins 2012).

3.3 La méthode de Second Order Second Moment

La première alternative relativement simple à MCS est la méthode bien connue du Second Order Second Moment, ou en bref SOSM, qui produit une linéarisation autour de la valeur moyenne des variables aléatoires d'entrée d'un problème probabiliste.

Dans cette méthode, un développement en série de Taylor de premier ordre et de second ordre de la fonction de performance autour des moyennes des variables de conception et des paramètres est effectuée (par exemple Harr 1987 ; Tiliouine et Chemali 2016), puis les définitions de la moyenne et de l'écart type sont appliquées, en considérant toutes les variables statistiquement non corrélées et l'expression analytique correspondante sont calculées.

Considérons y en fonction de \mathbf{X} seulement et notons $y^0 = y(\bar{\mathbf{X}})$ la valeur de y lorsque \mathbf{X} prend sa valeur moyenne $\bar{\mathbf{X}}$. Alors le vecteur y peut être développé en une série de Taylor autour de $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}$ comme suit :

$$y(\mathbf{X}) = y(\bar{\mathbf{X}}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial X_i} (X_i - \bar{X}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial X_i \partial X_j} \quad (3.5)$$

où les termes d'ordre supérieur ont été négligés dans le cas présent.

L'application de FOSM ou SOSM produit la moyenne et l'écart type de la variable de réponse. Ces statistiques sont les mêmes que celles concernant la fonction de performance g , car elles sont calculées en différenciant g , et y est une valeur constante.

On peut montrer (par exemple Harr 1987 ; Haldar et Mahadevan 2017) que pour une distribution normale des variables d'entrée \mathbf{X} , les approximations suivantes pour la moyenne et la variance de la fonction de réponse y sont :

➤ **1^{er} ordre (FOSM) :**

$$\bar{y}(\mathbf{X}) = y(\bar{\mathbf{X}}) \quad (3.6)$$

$$Var[\mathbf{X}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial y}{\partial X_i} \right|_{\bar{X}_i} \left. \frac{\partial y}{\partial X_j} \right|_{\bar{X}_j} \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \quad (3.7)$$

➤ **2^{eme} ordre (SOSM) :**

$$\bar{y}(\mathbf{X}) = y(\bar{\mathbf{X}}) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 y}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{\bar{X}_i, \bar{X}_j} \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \quad (3.8)$$

$$Var[\mathbf{X}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial y}{\partial X_i} \right|_{\bar{X}_i} \left. \frac{\partial y}{\partial X_j} \right|_{\bar{X}_j} \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left. \frac{\partial^2 y}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{\bar{X}_i, \bar{X}_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left. \frac{\partial^2 y}{\partial X_i \partial X_j} \right|_{\bar{X}_i, \bar{X}_j} \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \right)^2 \quad (3.9)$$

Notez dans l'équation (3.8) que la réponse moyenne du second ordre, $\bar{y}(\mathbf{X}) =$, n'est pas aux valeurs moyennes de l'entrée $\bar{\mathbf{X}}$, c'est-à-dire $\bar{y}(\mathbf{X}) = y(\bar{\mathbf{X}})$. Il est intéressant de noter que les premiers termes des membres droits de l'équation (3.8) et de l'équation (3.9) représentent une méthode du second moment FO, tandis que les membres droits de l'équation (3.8) et de l'équation (3.9) incluant tous les termes représentent une Méthode du deuxième moment SO étendue ici pour examiner la propagation de l'incertitude des paramètres d'entrés statistiquement corrélés. Les méthodes sont simples avec des difficultés reposant en grande partie sur le calcul des dérivées SD.

Il convient également de noter que le ij^{eme} élément de la matrice de covariance du couple les variables aléatoires d'entrée X_i et X_j est défini par

$$COV_{ij} = \rho \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \quad \text{où } \rho_{ij} = 1 \text{ si } i = j. \quad (3.10)$$

Les éléments de la diagonale principale sont la variance et sont connus grâce à la loi de distribution supposée. Les éléments hors diagonale contiennent la corrélation ρ_{ij} entre les différents variables aléatoires d'entrée. Notez que lorsque les coefficients de corrélation $\rho_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, les variables aléatoires d'entrée \mathbf{X} sont dites non corrélées alors que lorsque $\rho_{ij} = 1$ pour $i \neq j$, elles sont dites entièrement corrélées.

3.4 First Order Reliability Method

Un inconvénient de la méthode FOSM (ainsi que SOSM) est que les résultats dépendent de la valeur moyenne des variables d'entrée pour lesquelles les dérivées partielles de la marge de sécurité sont évaluées (problème d'invariance). De plus, la méthode FOSM n'est exacte que pour les fonctions linéaires, tandis que pour les fonctions non linéaires, des erreurs sont introduites dans l'analyse.

La méthode Hasofer-Lind, également connue sous le nom de First Order Reliability Method, ou en abrégé FORM, permet de surmonter cette difficulté en calculant les dérivées de la marge de sécurité en un point critique de la surface de rupture, également appelé point de conception. Une solution itérative est généralement nécessaire pour trouver ce point, mais le processus a tendance à converger très rapidement.

Dans cette méthode, l'évaluation de l'indice de fiabilité repose principalement sur la transformation/réduction du problème à un système de coordonnées standardisé. Ainsi, une variable aléatoire X_i se réduit à :

$$X'_i = \frac{(X_i - \mu_{X_i})}{\sigma_{X_i}} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.11)$$

où X'_i est une variable aléatoire de moyenne nulle et d'écart type unitaire.

Ainsi, l'équation. (3.11) est utilisé pour transformer la surface à l'état limite d'origine $g(\mathbf{X}) = 0$ en une surface à l'état limite réduite $g(\mathbf{X}') = 0$. Par conséquent, \mathbf{X} désigne le « système de coordonnées d'origine » et \mathbf{X}' décrit le « système de coordonnées transformé ou réduit ». Dans le système de coordonnées normalisé, l'indice de fiabilité Hasofer-Lind β_{HL} correspond à la distance minimale de l'origine des axes (dans le système de coordonnées réduit) à la surface à l'état limite :

$$\beta_{HL} = \sqrt{(X'^*)^T (X'^*)} \quad (3.12)$$

Le point de distance minimale sur la surface à l'état limite est appelé « point de conception ». Il est noté par le vecteur x^* dans le système de coordonnées d'origine et par le vecteur x'^* dans le système de coordonnées réduit. Ces vecteurs représentent les

valeurs de toutes les variables aléatoires, c'est-à-dire X_1, X_2, \dots, X_n au point de conception correspondant au système de coordonnées utilisé.

Pour le cas général d'une surface à état limite non linéaire, la distance minimale (pour n variables aléatoires) pourrait être estimée comme :

$$\beta_{HL} = - \frac{\sum_{i=1}^n X_i'^* \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^{2*}}} \quad (3.13)$$

où $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^*$ est la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle évaluée au point de conception $(X_1'^*, X_2'^*, \dots, X_n'^*)$.

Le point de conception dans les coordonnées réduites est :

$$X_i'^* = -\alpha_i \beta_{HL} \quad (3.14)$$

où α_i sont les cosinus directeurs le long des axes de coordonnées X_i' . Ils sont donnés par :

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'} \right)^{2*}}} \quad (3.15)$$

En utilisant l'équation (3.11), le point de conception (dans l'espace d'origine) est donné par :

$$X_i^* = \mu_{X_i} - \alpha_i \sigma_{X_i} \beta_{HL} \quad (3.16)$$

L'algorithme numérique pour calculer l'indice de fiabilité β_{HL} et le point de conception X_i^* est présenté sur la figure 3.2.

Notons que l'indice de fiabilité Hasofer-Lind β_{HL} peut être utilisé pour estimer une approximation du premier ordre de la probabilité de défaillance lorsque $P_f \approx \Phi(-\beta_{HL})$.

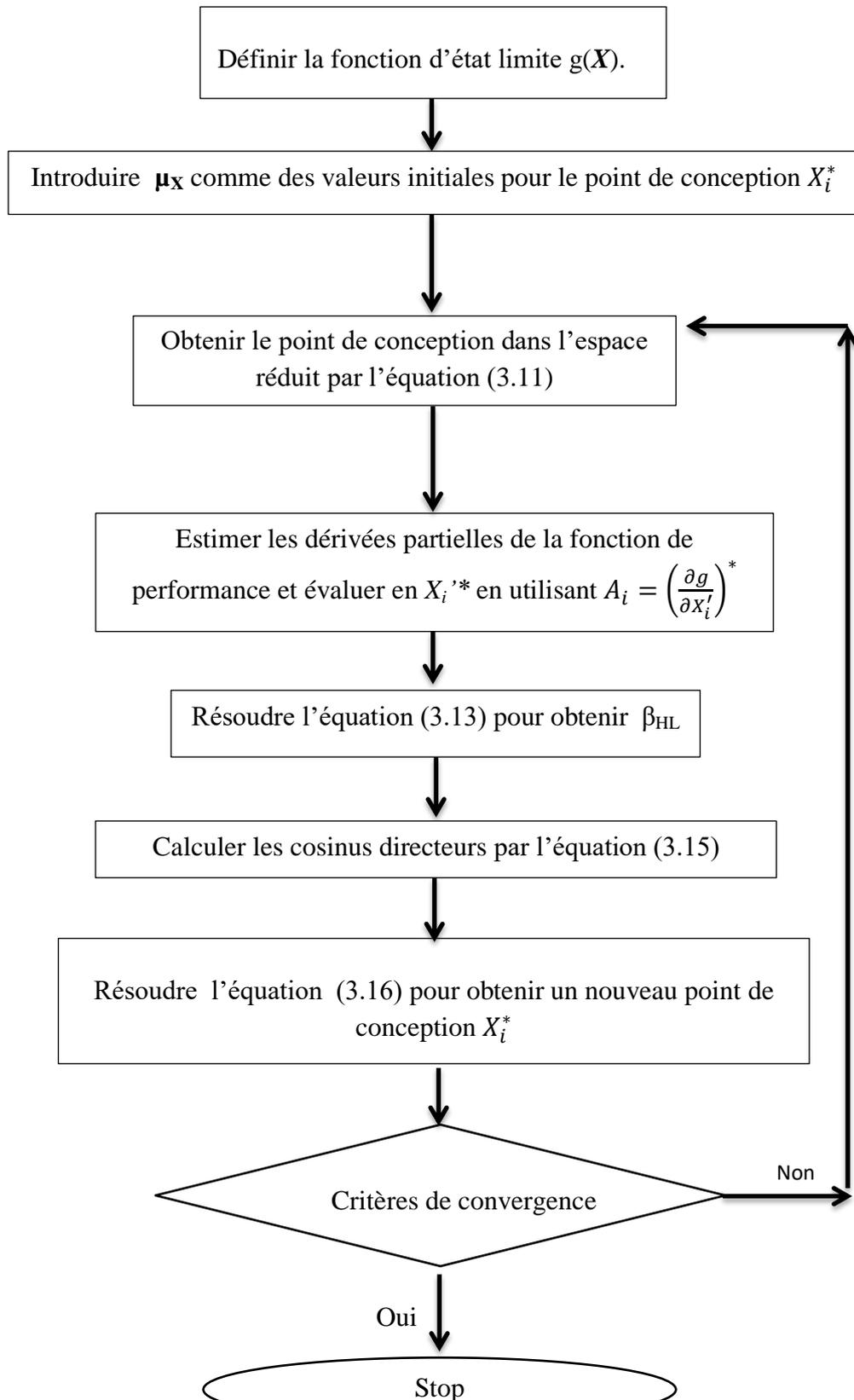


Figure 3.2. L'algorithme numérique pour calculer l'indice de fiabilité β_{HL}

Enfin, il convient également de signaler que pour les distributions non normales, les variables aléatoires doivent être transformés en variables normales équivalentes à l'aide de la procédure de Rackwitz et Fiessler (illustrer sur l'annexe A).

3.5 Second Order Reliability Method

Le calcul de l'indice de fiabilité est simple à déterminer si la fonction de performance est linéaire. Cependant, la majorité des fonctions de performance sont non linéaires. Cette non-linéarité est engendrée par :

- Une relation non linéaire entre les paramètres d'entrés
- Types de distributions
- La transformation de variables aléatoires corrélées en variables aléatoires non corrélées.

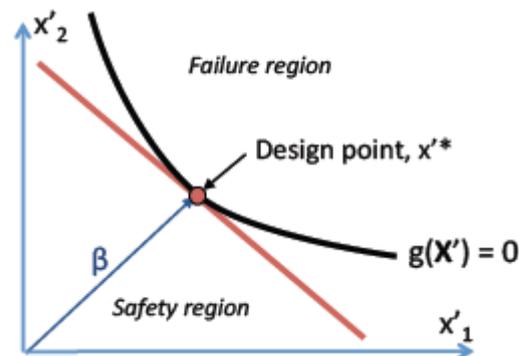


Figure 3.3. Fonctions d'état limite linéaires et non linéaires

Les fonctions de performance linéaires et non linéaires dans l'espace réduit sont présentées dans la figure 3.3. Malgré que les deux régions de défaillance sont différentes [P_f (non linéaires) < P_f (linéaires)], ça n'a pas empêché qu'elles ont une valeur de β identique. Pour les deux fonctions, la méthode FORM rapproche la fonction performance linéaires et non linéaires avec une fonction linéaire et offrira donc la même approximation de P_f . Cette approximation introduit des erreurs dans l'évaluation de P_f . Par conséquent, il est préférable d'utiliser une approximation d'ordre supérieur pour le calcul de P_f .

La méthode SORM améliore l'évaluation donnée par FORM en incluant des informations sur la courbure (qui est liée aux dérivées du second ordre de la fonction d'état limite par rapport aux variables de base). Le développement en série de Taylor d'une fonction non linéaire générale $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ au point de conception $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$ est donné par :

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} (X_i - X_i^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} (X_i - X_i^*)(X_j - X_j^*) + \dots \quad (3.17)$$

où les dérivées sont évaluées au point de conception.

Pour l'analyse de fiabilité, l'espace des variables normales standard est plus pratique pour une approximation du second ordre de $g(\mathbf{X})$. Dans ce qui suit, X_i et U_i feront respectivement référence à des variables aléatoires dans les espaces normaux standards non corrélés d'origine et équivalents.

Dans l'approximation de la série de Taylor donnée par l'équation (3.17), FORM ignore les termes au-delà du terme du premier ordre, et SORM ignore les termes au-delà du terme du second ordre (impliquant les dérivées du second ordre).

Breitung, 1984 a proposé une solution simple de forme fermée pour le calcul de probabilité en utilisant la théorie de l'approximation asymptotique comme suit :

$$P_f = \Phi(-\beta_{FORM}) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \kappa_i \beta_{FORM})^{-1/2} \quad (3.18)$$

où κ_i représente les courbures principales de la fonction d'état limite au point de conception, et β_{FORM} est l'indice de fiabilité calculé par la méthode FORM.

Le calcul de κ_i est nécessaire pour l'approximation de P_f . Pour cela, les variables aléatoires dans l'espace réduit \mathbf{U} sont pivotées vers l'espace \mathbf{U}' , afin que la dernière variable U_i' coïncide avec le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\alpha}$: le vecteur gradient unitaire de la fonction de performance au point de conception).

Un exemple à deux paramètres est illustré sur la figure 3.4. L'exemple montre que le problème consiste une simple rotation de coordonnées, qui peut être procédée par une transformation orthogonale :

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{R}\mathbf{Y} \quad (3.19)$$

où \mathbf{R} est la matrice de rotation.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (\text{cas à deux variable}) \quad (3.20)$$

où θ est l'angle de rotation des axes dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (Figure.3.4). [13] procurent plus de détail sur la procédure de détermination de la matrice \mathbf{R} à n variables aléatoires,

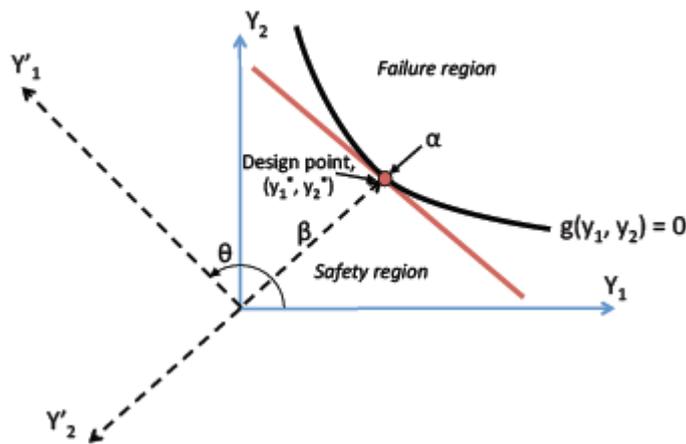


Figure 3.4. Rotation de l'axe dans l'espace normalisé

La matrice \mathbf{A} est ensuite calculée de la manière suivante en utilisant la matrice \mathbf{R} :

$$a_{ij} = \frac{(\mathbf{R}\mathbf{D}\mathbf{R}^T)_{ij}}{|\nabla G(\mathbf{y}^*)|} \quad i,j=1,2,\dots,n-1 \quad (3.21)$$

où \mathbf{D} ($n \times n$) est la matrice de dérivée de seconde ordre de la fonction de performance dans l'espace normal standard évaluée au point de conception et $|\nabla G(\mathbf{y}^*)|$ est la longueur du vecteur gradient dans l'espace normal standard.

La dernière variable Y_n coïncide avec le vecteur β calculé avec l'approche FORM dans l'espace normal tourné. À l'étape suivante, la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice \mathbf{A} ainsi que la dernière ligne du vecteur \mathbf{Y}' sont supprimées pour

prendre en compte ce facteur. L'état limite peut être réécrit en termes d'approximation du second ordre dans cet espace normal standard en rotation \mathbf{Y}' comme :

$$y'_n = \beta + \frac{1}{2} \mathbf{y}'^T \mathbf{A} \mathbf{y}' \quad (3.22)$$

où la matrice \mathbf{A} est de taille $(n - 1) \times (n - 1)$. Enfin, pour calculer P_f , les courbures κ_i de l'équation (3.18) sont évaluées comme les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} ,

La méthode SORM de Breitung utilise une approximation parabolique, dont elle néglige les dérivées de termes mixtes dans le développement en séries de Taylor dans l'équation (3.17). Pour des grandes valeurs de l'indice de fiabilité β (en ingénierie la valeur d'indice de fiabilité est généralement comprise entre 3 et 4) la méthode SORM de Breitung est précise. Cependant, l'évaluation est moins précise pour les petites valeurs de l'indice de fiabilité.

3.6 Conclusion

Les méthodes fiabilistes, basées sur la théorie des probabilités, permettent de prendre en compte les incertitudes et de calculer précisément la fiabilité d'un système. Elles s'opposent aux approches déterministes utilisant des coefficients de sécurité qui manquent de généralité. Ces méthodes se distinguent par leur approche, leur complexité, et leur utilité pour différents types de structures et de problèmes de fiabilité.

Les méthodes FORM et SORM sont des outils puissants en ingénierie de la fiabilité, offrant des avantages significatifs en termes d'efficacité, de précision et de comparabilité. Leur utilisation s'avère cruciale dans le cadre de l'évaluation des risques associés aux défaillances des structures. Mais ces méthodes nécessitent le calcul des dérivées partielles de la fonction de performance $g(\mathbf{x})$ par rapport aux variables aléatoires, ce qui peut s'avérer complexe et coûteux en temps de calcul, surtout pour des problèmes de grande dimension. La méthode de Simulation Monte Carlo permet de résoudre des problèmes avec des régions de défaillance complexes, mais elle nécessite un grand nombre de simulations (c.-à-d. un temps d'exécution élevé) pour des résultats précis.

Les méthodes fiabilistes permettent une conception optimale robuste aux incertitudes en contrôlant le niveau de fiabilité. Elles combinent une analyse mécanique du comportement et une modélisation probabiliste pour identifier et quantifier les scénarios de défaillance.

La méthodologie des surfaces de réponse

4 La méthodologie des surfaces de réponse

4.1 Introduction

Dans ce travail, plusieurs algorithmes basés sur des plans expérimentaux pour modéliser des surfaces de réponses linéaires et non linéaires sont étudiés dans le but de calculer l'indice de fiabilité. L'idée de base de la méthodologie RSM est d'approximer la réponse par une équation polynomiale d'ordre inférieur en utilisant une analyse de régression multiple et une relation de fonction approximative entre \mathbf{Y} (le vecteur de réponse observée) et les variables codées aléatoires d'entrée x_i , $i=1, \dots, k$ avec k nombre de variables aléatoires.

La relation explicite approximative suivante a été employée dans ce travail :

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (4.1)$$

où Y est la réponse observée, b_0 , b_i , b_{ii} et b_{ij} sont des coefficients de régression et ε représente l'erreur impliquée en négligeant d'autres sources d'incertitudes. Les coefficients de régression b_0 , b_i , b_{ii} et b_{ij} peuvent être déterminés efficacement par analyse de régression en utilisant des réponses à certains points de données spécifiques appelés points d'échantillonnage expérimentaux (Myers et al 2016). Le nombre de coefficients de régression est $p = 2k + 1$ pour l'Eq. (4.1) sans termes croisés et $p = (k + 1)(k + 2)/2$ pour Eq. (4.1) y compris les termes croisés.

La méthode des moindres carrés est utilisée pour déterminer l'estimateur de \mathbf{b} tel que donné par Eq. (4.2)

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}\mathbf{X}^t)^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{Y} \quad (4.2)$$

où \mathbf{x} est la matrice expérimentale dans l'espace codé (voir annexe B) et \mathbf{x}^t est sa transposée.

Le modèle de prédiction est alors donné par l'équation (4.3)

$$\hat{Y} = \hat{b}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{b}_i x_i + \sum_{i=1}^k \hat{b}_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \hat{b}_{ij} x_i x_j \quad (4.3)$$

Comme les variables naturelles X_i sont généralement exprimées dans des unités différentes, leurs effets ne sont comparables que s'ils sont convertis en variables codées x_i à l'aide de la relation

$$x_i = \frac{X_i - (\max(X_i) + \min(X_i))/2}{(\max(X_i) - \min(X_i))/2} \quad (4.4)$$

avec $\max(X_i) = \text{mean}(X_i) + h\sigma_i$ et $\min(X_i) = \text{mean}(X_i) - h\sigma_i$, où h est un entier et σ_i sont les écarts-types des variables d'entrée (x_i).

L'équation (4.3) peut ensuite être utilisée pour finalement écrire le modèle de prédiction de surface de réponse du 2^{ème} ordre en termes de variables naturelles. De plus, afin d'examiner l'adéquation du modèle ajusté, un tracé de probabilité normale doit être approximativement le long d'une ligne droite. De plus, les valeurs calculées des coefficients de déterminations multiples (R^2) et R^2 ajusté, donnent également des informations sur l'adéquation du modèle ajusté, où

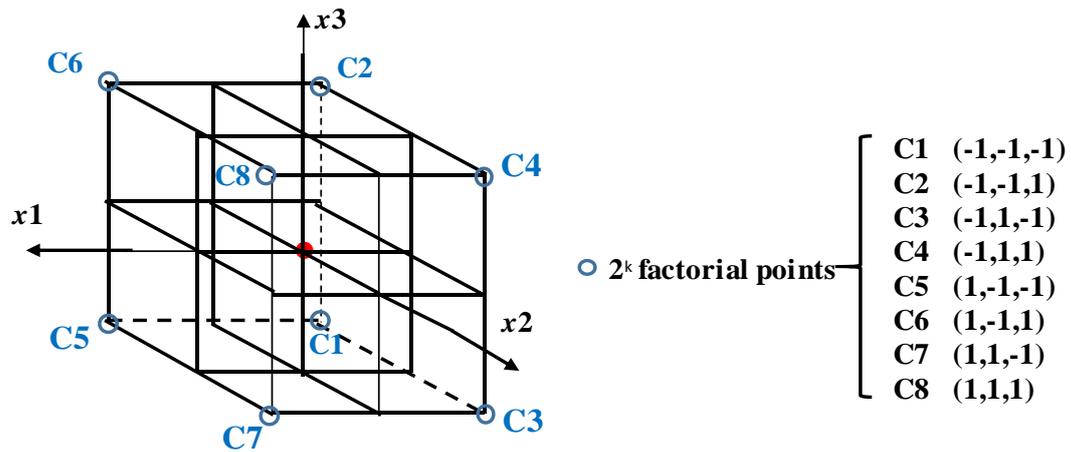
$$R_{adj}^2 = 1 - \frac{L-1}{L-p} (1 - R^2) \quad (4.5)$$

avec L , nombre total d'observations (Myers et al 2016).

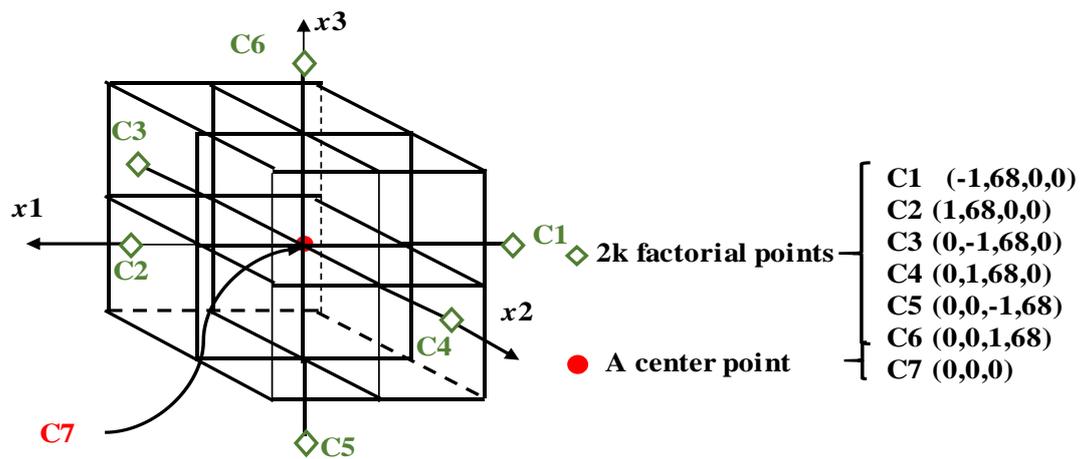
4.2 Schémas de conception expérimentale

Saturated Design (SD), Box-Behnken Design (BBD), Central Composite Design (CCD) sont des schémas de conception expérimentale qui sont souvent utilisés pour générer des points d'échantillonnage expérimentaux pour l'ajustement des surfaces de 2^{ème} ordre. D'excellentes descriptions de ces méthodes peuvent être trouvées dans (Myers et al 2016).

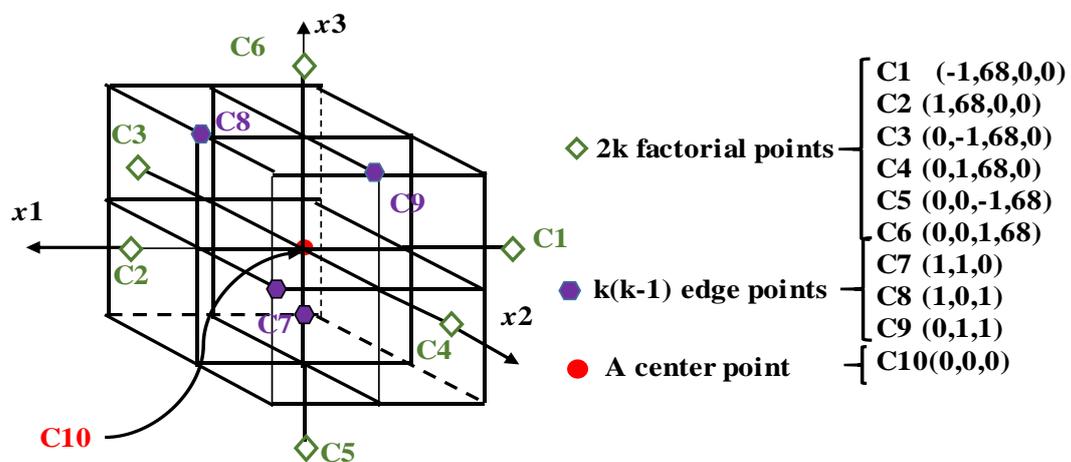
Afin d'optimiser les paramètres de réponse, chaque paramètre du plan d'expérience est étudié à cinq niveaux différents ($-\alpha, -1, 0, +1, +\alpha$). Le choix des cinq niveaux pour chaque variable est requis par ce plan afin d'explorer la région de la surface de réponse proche de l'optimum. Saturated Design (SD) et Central Composite Design (CCD) sont les plans expérimentaux les plus largement utilisés pour modéliser respectivement des surfaces de réponse de second ordre sans et avec termes croisés.



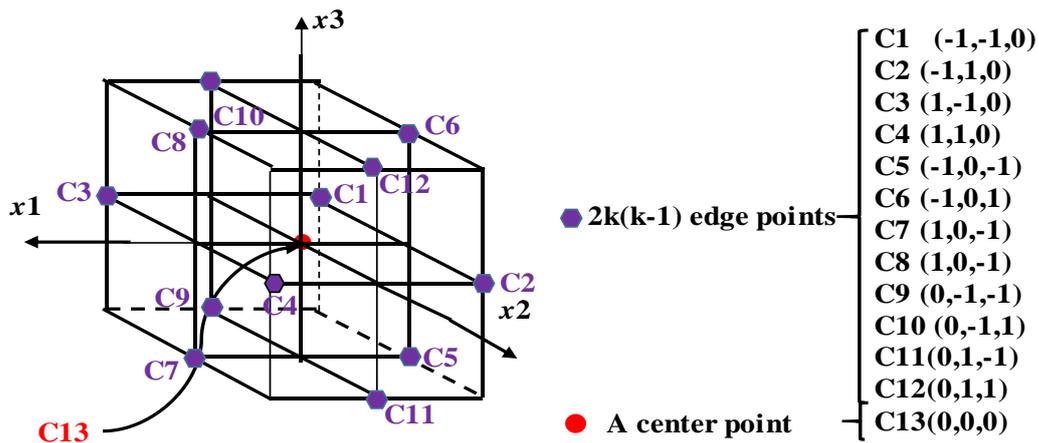
a) Schéma linéaire



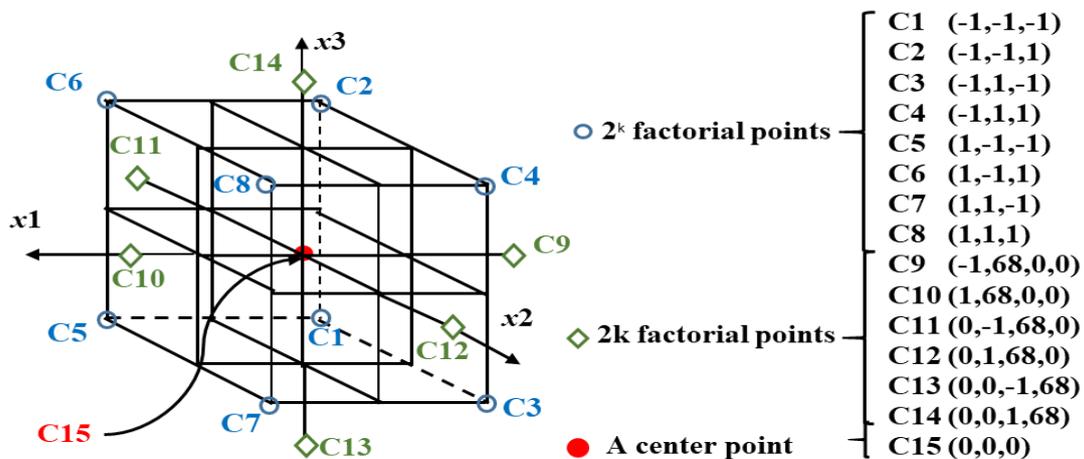
b) Schéma SD sans termes croisés



c) Schéma SD avec termes croisés



d) Schéma BBD



e) Schéma CCD sans termes croisés

Figure 4.1. Différents type schémas de conception expérimentale dans l'espace codé pour $k=3$

Le schéma SD sans termes croisés (illustré sur la **Figure. 4.1.b**, pour $k = 3$ variables) est composé de $2k$ points axiaux $(\pm\alpha, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm\alpha, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, \dots, \pm\alpha)$ et un nombre de répétitions choisi au centre du domaine $(0, 0, 0, \dots, 0)$ ou points centraux, avec $\alpha = (N_f)^{1/4}$ et $N_f = 2^k$.

Le schéma SD avec termes croisés (illustré sur la **Figure. 4.1.c**, pour $k = 3$ variables) est composé de $2k$ points axiaux $(\pm\alpha, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm\alpha, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, \dots, \pm\alpha)$, $k(k-1)$ points des arêtes du cube $(1, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 1, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, \dots, 1, 1)$ et un nombre de répétitions choisi au centre du domaine $(0, 0, 0, \dots, 0)$ ou points centraux, avec $\alpha = (N_f)^{1/4}$ et $N_f = 2^k$.

Le schéma BBD avec termes croisés (illustré sur la **Figure. 4.1.d**, pour $k = 3$ variables) est composé de $2k(k-1)$ points des arêtes du cube $(\pm 1, \pm 1, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm 1, \pm 1, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, \dots, \pm 1, \pm 1)$ et un nombre de répétitions choisi au centre du domaine $(0, 0, 0, \dots, 0)$ ou points centraux.

Le schéma CCD (illustré sur la **Figure. 4.1.e**, pour $k = 3$ variables) est composé de $N_f = 2^k$ points au sommets du cube, $2k$ points axiaux $(\pm\alpha, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm\alpha, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, \dots, \pm\alpha)$ et un nombre de répétitions choisi au centre du domaine $(0, 0, 0, \dots, 0)$ ou points centraux, avec avec $\alpha = (N_f)^{1/4}$ et $N_f = 2^k$.

4.3 Comparaison entre les schémas d'échantillonnage

Le schéma Saturated Design est moins précise mais plus efficace puisqu'il nécessite un nombre de points d'échantillonnage similaire aux nombre total de coefficients inconnus pour définir la surface de réponse, mais il n'a pas le niveau de précision souhaité. En utilisant Saturated Design, un polynôme de $2^{\text{ème}}$ ordre peut être généré sans et avec des termes croisés et le nombre total d'échantillon nécessaire sera : $2k+1$ et $(k+1)(k+2)/2$, respectivement.

Le CCD est plus précis mais moins efficace car il nécessite un nombre d'échantillon élevé pour construire un polynôme de $2^{\text{ème}}$ ordre. Le nombre nécessaire des points d'échantillonnage expérimentaux pour l'ajustement des surfaces de $2^{\text{ème}}$ ordre pour le CCD est $2^k + 2k + 1$.

Box et Behnken, 1960 ont développé une famille de conceptions efficaces à trois niveaux pour l'ajustement des surfaces de réponse du second ordre. Box-Behnken design est une option efficace et constitue en fait une alternative importante au CCD. Le nombre nécessaire des points d'échantillonnage expérimentaux pour l'ajustement des surfaces de $2^{\text{ème}}$ ordre pour le BBD est $2k(k-1)+1$.

Les schémas d'échantillonnage SD sans et avec termes croisés, BBD et CCD avec termes croisés, sont représentés sur la figure 4.1 pour $k = 3$. D'après la figure, il est très clair que pour $k = 3$, ils nécessiteront respectivement 7, 10, 13 et 15 points d'échantillonnage pour tous les cas dans le but de générer un RS modéliser respectivement des surfaces de réponse de second ordre.

Table 4.1. Comparaison entre les schémas d'échantillonnage

schémas d'échantillonnage	Nombre de variables aléatoires	Nombre des points d'échantillonnage	
SD sans termes croisés	5 20	$2k+1$	11 41
SD avec termes croisés	5 20	$(k+1)(k+2)/2$	21 231
BBD	5 20	$2k(k-1)+1$	41 761
CCD	5 20	2^k+2k+1	43 1048617

Dans le Tableau 4.1, lorsque le nombre total de variables aléatoires est relativement petit, pour $k = 5$, le nombre d'échantillon est 11, 21, 41 et 43 respectivement pour les quatre schémas. Cependant, si k est augmenté à 20, ce qui représente un grand système structurel, les points d'échantillonnage expérimentaux seront respectivement 41, 231, 761 et 1048617. Cet exemple montre clairement, que pour des problèmes relativement petits, le CCD peut être utilisé avec une exactitude garantie. Par contre, pour des grands systèmes structurels, si l'on considère uniquement l'efficacité, le CCD ne sera pas pratique à mettre en œuvre. Cependant, SD et BBD nécessitent une étude plus approfondie compte tenu de l'efficacité et de l'exactitude du système à analyser.

4.4 Méthode de fiabilité couplée à une surface de réponse

En cas de réponse du système analytiquement inconnue ou dans le cas où les dérivées des variances par les méthodes du premier et du second ordre sont laborieuses (voir annexe C), Tandjiria et al, 2000 ont proposé une approche s'est

prouvé efficace et qui sera adopté dans cet étude. Le concept de cette méthode est d'approcher la réponse du système $y(\mathbf{x})$ (par exemple l'équation (4.6)) par une fonction explicite des variables aléatoires, et d'améliorer l'approximation via des itérations. L'algorithme numérique pour l'analyse de fiabilité à l'aide de la méthode de la surface de réponse est illustré sur la figure 4.2.

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k b_{ij} x_i x_j \quad (4.6)$$

où : x_i sont les variables aléatoires (μ_i et σ_i étant leurs valeurs moyennes et écart-type) k est le nombre de variables aléatoires ; et (b_0 , b_i , b_{ii} et b_{ij}) sont des coefficients à déterminer.

Une brève explication de l'algorithme est donnée comme suit :

1. Évaluez la réponse du système $y(\mathbf{x})$ au point de valeur moyenne μ et aux points $2^k + 2k$ chacun à $\mu \pm h\sigma$ où h est choisi égal à 1,64 dans cet article ;
2. Les valeurs $2^k + 2k + 1$ ci-dessus de $y(\mathbf{x})$ sont utilisées pour résoudre l'équation. (4.6) et trouvez les coefficients (b_0 , b_i , b_{ii} et b_{ij}). Ensuite, la fonction de performance $g(\mathbf{x})$ peut être construite pour donner une fonction de surface de réponse provisoire ;
3. Résolvez les équations (3.13) et (3.14) pour obtenir un point de conception provisoire et un β_{HL} provisoire soumis à la contrainte que la fonction de performance provisoire de l'étape 2 soit égale à zéro ;
4. Résolvez l'équation. (3.18) pour obtenir un P_f provisoire ;
5. Répétez les étapes 1 à 4 jusqu'à convergence de P_f . Chaque fois que l'étape 1 est répétée, les $2^k + 2k + 1$ points échantillonnés sont centrés sur le nouveau point de conception provisoire de l'étape 3.

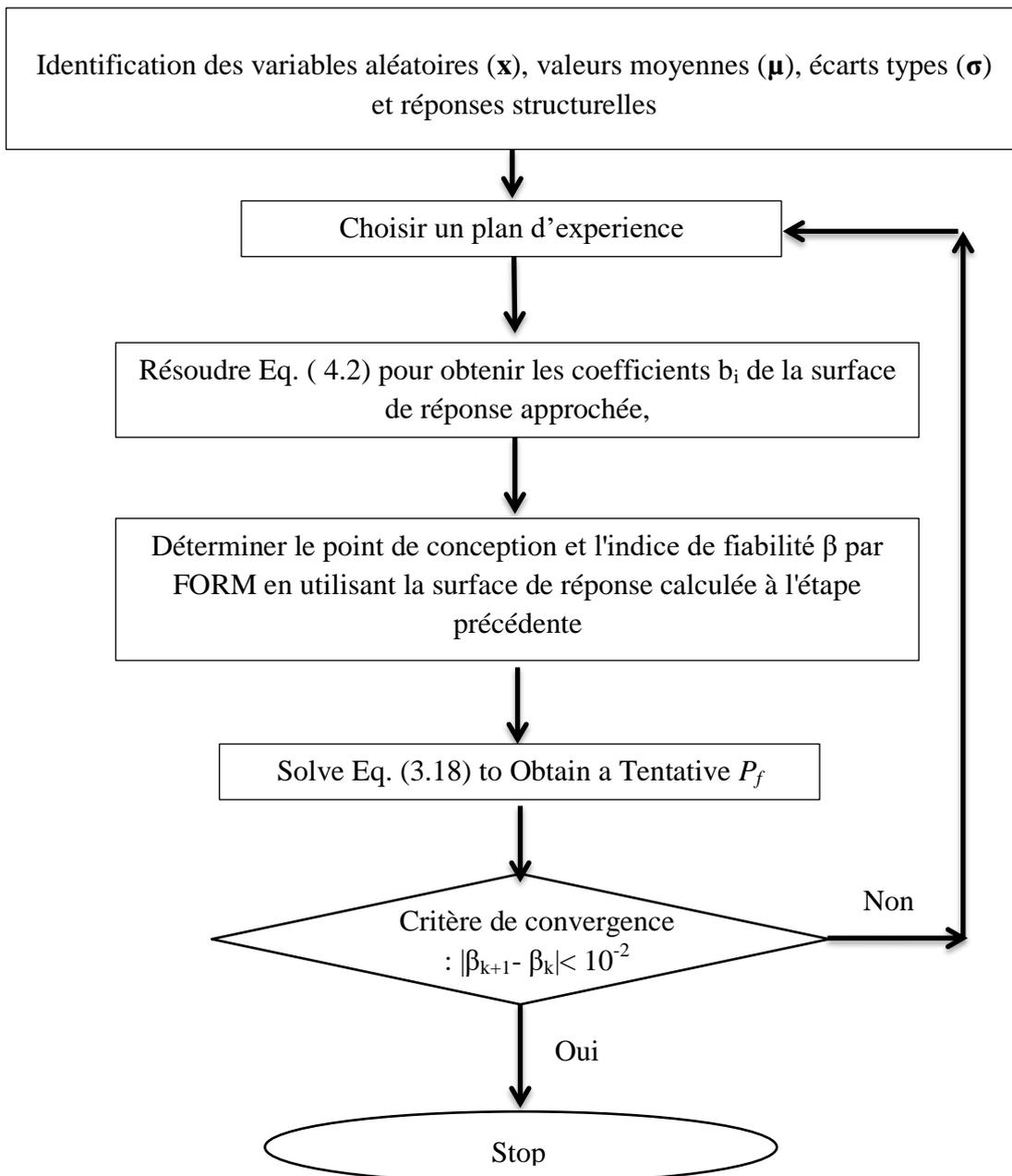


Figure. 4.2. Algorithme numérique pour l'analyse fiabiliste en utilisant la méthode de surface de réponse.

Les évaluations successives pour déterminer β_{HL} en utilisant RSM sont illustrées dans la figure 4.3. La courbe I est la limite réelle de la fonction de performance, qu'est une fonction de deux paramètres dans l'espace d'origine. Le point (C) représente le point de conception. A cet effet, β_{HL} du système est obtenu en trouvant le point C. La première approximation de la fonction de performance est obtenue en supposant le point O comme point d'échantillonnage. Dès que la fonction de performance approximative est définie, la nouvelle valeur de β_{HL} du système ainsi que le nouveau point de conception A situé sur la courbe II sont simplement trouvés en résolvant les équations (3.13) et (3.14) respectivement. Cependant, le point A ne coïncide pas avec C. Pour cela, et on adoptant la même procédure, une deuxième approximation de la fonction de performance (courbe III) est nécessaire en prenant le point de conception A comme point d'échantillonnage pour trouver les coordonnées du point B. Ensuite, le point de conception C sur la courbe IV (la 3^{ème} approximation de la fonction de performance) est obtenue en de la même procédure. Enfin, comme C sur la courbe IV coïncide avec C sur la courbe I où la solution est obtenue, le processus est terminé.

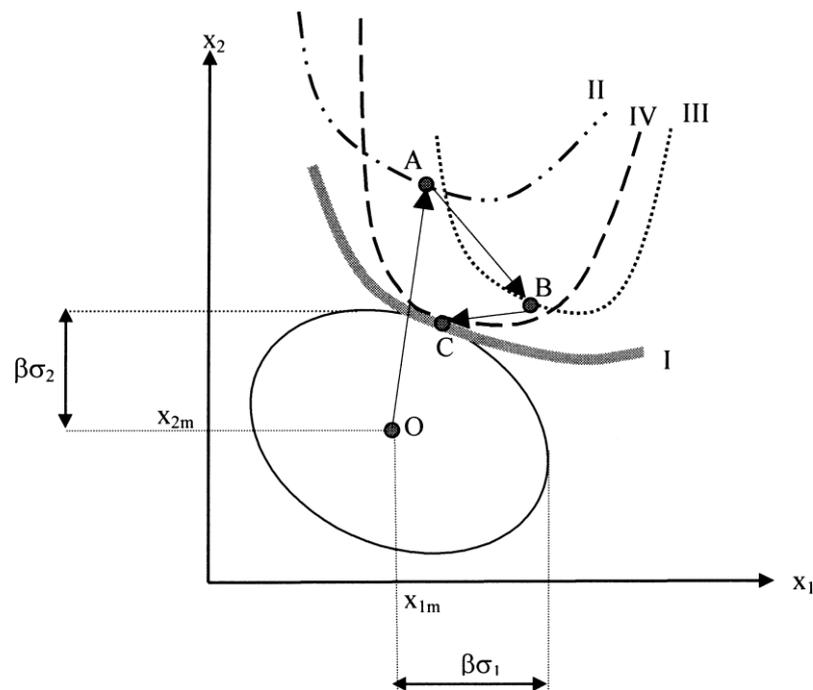


Figure 4.3. Procédure pour obtenir un indice de fiabilité en utilisant la méthode de surface de réponse

4.5 Conclusion :

Les modèles de surface de réponse du second ordre permettent d'établir des relations fonctionnelles précises entre la capacité portante et les paramètres du sol. Cela offre plusieurs avantages numériques pour le calcul de la fiabilité :

- **Calcul rapide et précis des dérivées** : les modèles du second ordre permettent de calculer rapidement et précisément les dérivées de la capacité portante par rapport aux paramètres du sol. Cela est essentiel pour l'évaluation de l'indice de fiabilité.
- **Réduction du temps de calcul et de la mémoire** : L'utilisation de ces modèles réduit significativement le temps d'exécution CPU et les besoins en mémoire par rapport à la méthode de simulation de Monte-Carlo (MCS). La MCS nécessite en effet des efforts de calcul excessifs pour obtenir une bonne estimation de la fiabilité.
- **Extraction efficace des informations de sécurité** : Les modèles de surface de réponse du second ordre permettent d'extraire efficacement les informations de sécurité souhaitées, comme l'indice de fiabilité. Cela est particulièrement avantageux pour l'optimisation de la conception géotechnique.

En conclusion, l'utilisation de modèles de surface de réponse du second ordre offre de nombreux bénéfices numériques pour l'analyse de fiabilité géotechnique, en termes de précision, de temps de calcul et d'extraction des informations critiques. C'est une approche efficace et avantageuse par rapport aux méthodes de simulation plus coûteuses en ressources.

Résultats Numériques

5 Résultats Numériques

5.1 Introduction

La fonction de performance des fondations superficielles reposant sur des sols de type $c-\varphi$ peut être obtenue à l'aide d'une formule de capacité portante. L'une des équations les plus couramment utilisées pour l'analyse de la capacité portante est l'équation de Terzaghi, avec les approximations de Meyerhof pour les facteurs de capacité portante N_c , N_q et N_γ , tous exprimés en termes d'angle de frottement (Meyerhof, 1960). Les facteurs de forme s_c , s_q et s_γ et les facteurs de profondeur d_c , d_q et d_γ sont décrits dans DAS 2017.

$$q_{ult} = cN_c s_c d_c + \gamma D_f N_q s_q d_q + 0.5\gamma B N_\gamma s_\gamma d_\gamma \quad (5.1)$$

où, q_{ult} est la capacité portante ultime, D_f la profondeur d'encastrement et B est la largeur de la fondation en bande.

5.2 Analyse de fiabilité de la sécurité des fondations sur des sols à paramètres corrélées

Dans ce travail, une semelle filante de largeur $B = 1,5$ m à une profondeur $D_f = 1,0$ m, reposant sur un sol de type $c-\varphi$ est considérée. Les valeurs des propriétés du sol et du chargement pour l'analyse conventionnelle et de fiabilité sont présentées dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1. Propriétés statistiques des variables d'entrée aléatoires du sol et du chargement

les variables du sol et du chargement	μ	σ	X_{min}^*	X_{max}^*	x_{min}^*	x_{max}^*	CoV (%)	Distribution
Cohésion (c), kPa	12	3.6	6.08	17.92	-1	+1	30	Normale
Angle de frottement (φ), °	33	1.65	30.29	35.71	-1	+1	5	Normale
Poids unitaire (γ), kN/m ³	15.8	1.58	13.20	18.40	-1	+1	10	Normale
Profondeur de la fondation (D_f), m	1	0.1	0.84	1.16	-1	+1	10	Normale
Pression appliquée (q), kPa	460	92	308.67	611.33	-1	+1	20	Normale

Les limites supérieure et inférieure X_{\max} et X_{\min} sont respectivement basées sur l'hypothèse que les paramètres d'entrée du sol et du chargement suivent une distribution normale avec un niveau de confiance de 90%.

Pour la variable φ , par exemple, les valeurs X_{\max} et X_{\min} sont définies comme suit:

$$\max(X_{\varphi}) = \text{mean}(X_{\varphi}) + h\sigma_{\varphi}$$

$$\min(X_{\varphi}) = \text{mean}(X_{\varphi}) - h\sigma_{\varphi}$$

Où :

- $\text{mean}(X_{\varphi})$ est la moyenne de la distribution.
- σ est l'écart-type de la distribution.
- h est le facteur de confiance, qui est défini comme $h=1.64$ pour un niveau de confiance de 90%.

Pour la variable naturelle φ , les valeurs sont :

- $X_{\max\varphi} = 33 + 1.64 * 1.65 = 35.71^{\circ}$
- $X_{\min\varphi} = 33 - 1.64 * 1.65 = 30.29^{\circ}$

Les variables $X_{\max\varphi}$ et $X_{\min\varphi}$ sont définies dans l'espace codée comme suit :

- $X_{\max\varphi} = \frac{X_{\max} - (\max(X_{\varphi}) + \min(X_{\varphi}))/2}{(\max(X_{\varphi}) - \min(X_{\varphi}))/2} = \frac{35.71 - (35.71 + 30.29)/2}{(35.71 + 30.29)/2} = +1$
- $X_{\min\varphi} = \frac{X_{\min} - (\max(X_{\varphi}) + \min(X_{\varphi}))/2}{(\max(X_{\varphi}) - \min(X_{\varphi}))/2} = \frac{30.29 - (35.71 + 30.29)/2}{(35.71 + 30.29)/2} = -1$

Sur la base des valeurs moyennes des propriétés du sol, la valeur moyenne de la capacité portante ultime de la fondation est calculée comme étant égale à 1388,53 kPa. Pour un facteur de sécurité égal à 3,0, la capacité portante admissible $q_{\text{admissible}}$ du sol de fondation est $q_{\text{admissible}} = 462,84 \approx 460$ kPa.

5.1.1 Comparaison entre les méthodes probabilistes

Basé sur la fonction de performance donnée par équation (5.2), ci-dessous

$$g(\varphi, c, \gamma, D_f) = q_{\text{ult}}(\varphi, c, \gamma, D_f) - q_{\text{admissible}} \quad (5.2)$$

où $g(\varphi, c, \gamma, D_f) > 0$ indique la sécurité tandis que $g(\varphi, c, \gamma, D_f) < 0$ représente la défaillance.

Les expressions analytiques des dérivées du premier ordre et du second ordre correspondant à l'équation capacité portante nécessaires pour une analyse fiabiliste des fondations reposant sur basées sur RSM sont données à l'Annexe D

Tableau 5.2 Indice de fiabilité par rapport à la défaillance de la capacité portante à l'aide des méthodes MCS, RSM pour $k=4$ variables aléatoires avec les caractéristiques statistiques suivantes ($\mu_\varphi=33^\circ$ - $CoV_\varphi = 5\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³- $CoV_\gamma = 10\%$; $\mu_c=12$ kPa - $CoV_c = 30\%$; $\mu_{D_f}=1$ m - $CoV_{D_f} = 10\%$)

Méthode:	MCS	RSM	RSM	RSM	RSM	RSM	RSM
Schéma de conception :		Linear	Linear +interaction	Saturated Design SD	Saturated Design SD	Box-Behnken designs (BBD)	Central composite design CCD
N° points expérimentaux		2^k (16)	2^k (16)	$2k+1$ (9)	$(k+1)(k+2)/2$	$2k(k-1)+1$	$2^k + 2k+1$
β	3.69	3.05	3.20	3.31	3.98	3.85	3.71
Erreur	-	-17.34%	-13.20%	-10.43%	7.94%	4.32%	0.61%
Temps d'exécution (sec)	1796.07	0.023	0.351	0.9596	1.0061	1.0451	1.0728

<p>Linear 2^k: $g = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i$</p> <p>SD($2k+1$) : $g = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2$</p>	<p style="text-align: center;">Linear +interaction</p> <p>2^k: $g = B_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} X_i X_j$</p> <p>BBD+CCD+SD : $g = B_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} X_i X_j$</p>
--	---

Le tableau 3 montre les valeurs de l'indice de fiabilité en utilisant MCS et SORM pour $k = 4$ variables aléatoires normales φ, c, γ, D_f . On voit que la valeur de l'indice de fiabilité β en utilisant SORM couplé au schéma expérimental CCD pour ajuster le modèle de surface de réponse quadratique complète (abrégé ci-après en

RSM-CCD) est le schéma de conception expérimentale le plus précis ($\text{Erreur}_{\text{MCS}}=0.61\%$), avec des temps d'exécutions CPU comparables, par rapport aux schémas SD et BBD.

De plus, les résultats du RSM-CCD sont en excellent accord avec ceux de la technique de simulation de Monte Carlo contrairement aux résultats obtenus à partir du Saturated design (RSM-SD avec $(k + 1)(k + 2)/2$ et $(2k + 1)$ points échantillons). Il est également à noter que les résultats basés sur le RSM-BBD expérimental sont acceptables, tandis que RSM linéaire et RSM linéaire + les termes d'interaction pour l'ajustement des surfaces de réponse avec des points d'échantillonnage de $2k$ doivent être rejetés par rapport aux résultats de la méthode MCS.

Il est également significatif que le temps d'exécution CPU requis pour générer l'indice de fiabilité par MCS en utilisant l'équation de Meyerhof (1796,07 s) était 1674 fois celui nécessaire pour RSM-CCD (1,0728 s), en utilisant un ordinateur portable avec les caractéristiques suivantes : Intel® Core™ i5 Processeur M 520 à 2,40 GHz. Sur la base de ces résultats, nous ne considérerons dans ce qui suit que le schéma expérimental CCD (sauf indication contraire) pour effectuer des analyses de fiabilité.

5.2.2 Résultats de la méthode de surface de réponse obtenue à partir de l'équation de Meyerhof

Un indice préliminaire de fiabilité du calcul de sensibilité montre que pour la plage de variation des variables d'entrée ϕ , c , γ , D_f , le problème de capacité portante avec $k = 4$ variables peut se réduire essentiellement à un problème avec $k = 3$ variables ϕ , c , γ en utilisant la méthode MCS avec un pourcentage d'erreur sur β ne dépassant pas 4 % (c-à-d $\frac{(\beta_{k=4\text{variables}} - \beta_{k=3\text{variables}})}{\beta_{k=4\text{variables}}} = 4\%$). Sur cette base, seules les variables de sol ϕ , c , γ seront considérées dans l'évaluation de la sécurité du problème de capacité portante à l'aide de l'équation de Meyerhof.

Le tableau 5.3 montre une réplique de central composite design (voir figure 4.1.e) pour la construction d'une surface de réponse pour la capacité portante ultime à l'aide d'un modèle de surface de réponse quadratique complet basé sur 15 combinaisons de variables d'entrée du sol et la réponse correspondante obtenue à partir de l'équation de

Meyerhof. Pour les variables naturelles, par exemple (combinaison 7), les valeurs φ_7 , c_7 et γ_7 sont définies comme suit:

$$\varphi_7 = \text{mean}(X_\varphi) + h\sigma_\varphi = 33 + 1.64 * 1.65 = 35.72^\circ$$

$$c_7 = \text{mean}(X_c) + h\sigma_c = 12 + 1.64 * 3.6 = 17.94 \text{ kPa}$$

$$\gamma_7 = \text{mean}(X_\gamma) - h\sigma_\gamma = 15.8 - 1.64 * 1.58 = 13.2 \text{ kN/m}^3$$

Tableau 5.3. Une réplique de central composite design CCD montrant 15 combinaisons de variables de sol d'entrée ($k = 3$) et la capacité portante correspondante obtenue à partir de l'équation de Meyerhof

No Exp	Variables codées			Variables naturelles			q_{ult} (kPa)
	x_φ	x_c	x_γ	φ (°)	c (kPa)	γ (kN/m ³)	
1	-1	-1	-1	30.28	6.06	13.19	691.20
2	-1	-1	+1	30.28	6.06	18.41	873.66
3	-1	+1	-1	30.28	17.94	13.19	1142.40
4	-1	+1	+1	30.28	17.94	18.41	1324.86
5	+1	-1	-1	35.72	6.06	13.19	1391.72
6	+1	-1	+1	35.72	6.06	18.41	1793.56
7	+1	+1	-1	35.72	17.94	13.19	2129.46
8	+1	+1	+1	35.72	17.94	18.41	2531.31
9	$-\alpha$	0	0	28.42	12	15.8	820.29
10	$+\alpha$	0	0	37.58	12	15.8	2525.58
11	0	$-\alpha$	0	33	2.01	15.8	907.74
12	0	$+\alpha$	0	33	21.99	15.8	1869.31
13	0	0	$-\alpha$	33	12	11.42	1163.70
14	0	0	$+\alpha$	33	12	20.18	1613.35
15	0	0	0	33	12	15.8	1388.53

Basé sur la formule de Meyerhof équation (5.1) et le schéma CCD, l'équation de surface de réponse du 2^{ème} ordre pour la capacité portante est la suivante :

$$q_{ult} = 14402 - 882.8 \varphi - 197.0 \gamma - 96.5 c + 13.445 \varphi^2 - 0.124 \gamma^2 - 0.024 c^2 + 7.726 \varphi \gamma + 4.434 \varphi c - 0.0001 \gamma c \quad (5.3)$$

En traçant les courbes de parité (voir figure 5.1), donnant les valeurs prédites (équation (5.3)) en fonction des valeurs expérimentales (Tableau 5.3), on peut voir que les résultats obtenus à partir du modèle de surface de réponse du 2^{ème} ordre sont en excellent accord avec ceux des résultats expérimentaux de conception. La ligne approximativement droite dans le diagramme de probabilité normale illustré sur la figure (5.2) et les valeurs calculées de R^2 et R^2_{adj} (égales à 99,92% et 99,85% respectivement), confirment l'adéquation du modèle ajusté RSM-CCD de 2^{ème} ordre. On note que ces valeurs de R^2 et R^2_{adj} sont très proches de 100 %, ce qui indique que la majeure partie de la variabilité de la capacité portante est expliquée par le modèle de surface de réponse quadratique entièrement complet du 2^{ème} ordre. En utilisant Second Order Second Moment SOSM [16], les valeurs moyennes ($\mu_{q_{ult}}$) et d'écart type ($\sigma_{q_{ult}}$) de la capacité portante (c'est-à-dire q_{ult}) obtenues sont respectivement de 1412,63 kPa et 363,37 kPa.

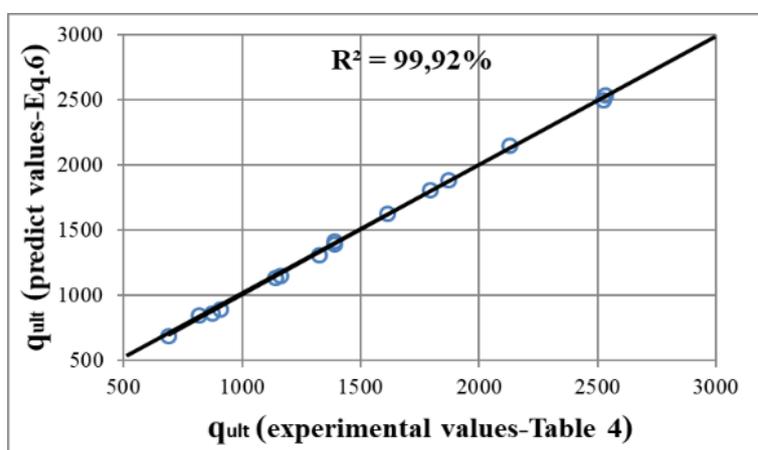


Figure 5.1. Comparaison des valeurs expérimentales et prédites de q_{ult}

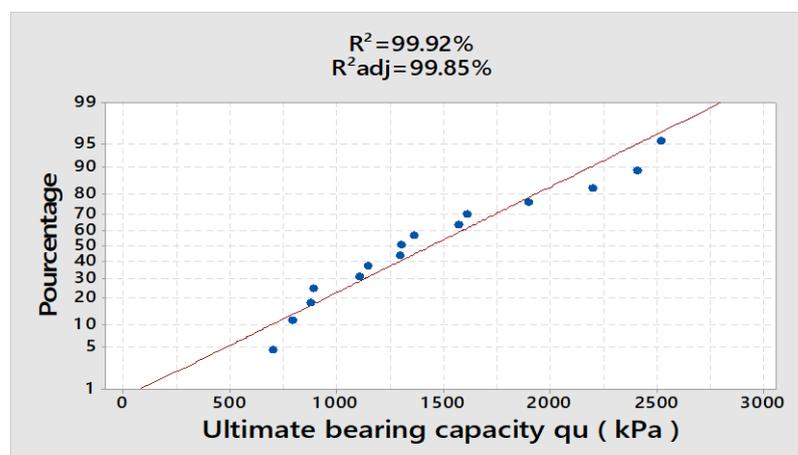


Figure 5.2. Graphique de probabilité normale pour q_{ult} en utilisant le modèle RSM-CCD

Une représentation 3D pour q_{ult} en utilisant équation (5.1) est illustrée à la figure 5.3 tandis que les tracés de contour pour q_{ult} obtenus à partir de RSM-CCD et équation (5.1) sont présentés dans la figure 5.4. Il est clairement observé que pour la plage de variation attendue des paramètres d'entrée du sol considérés dans la présente étude, les résultats de RSM-CCD coïncident pratiquement avec les courbes de niveau obtenues à partir de l'équation de Meyerhof, et que le RSM-CCD quadratique non linéaire complet de la capacité portante ultime est très précis.

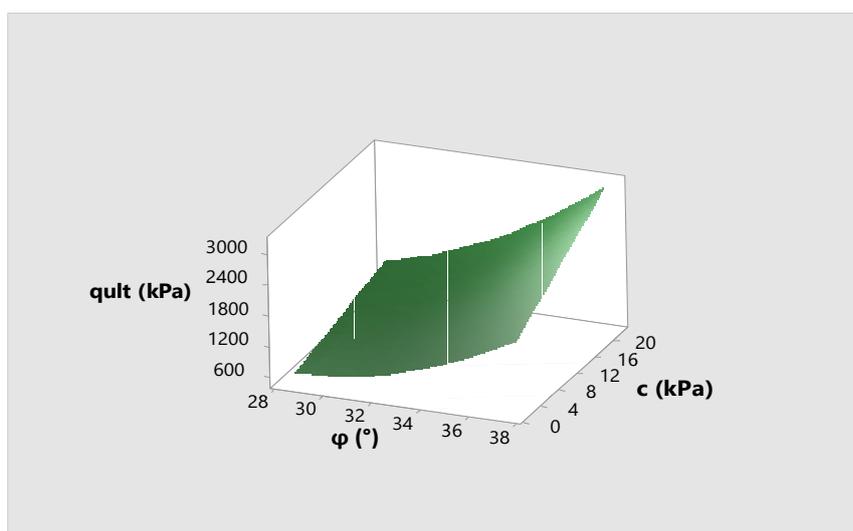


Figure 5.3. Représentation 3D pour q_{ult} en utilisant l'équation (5.1)

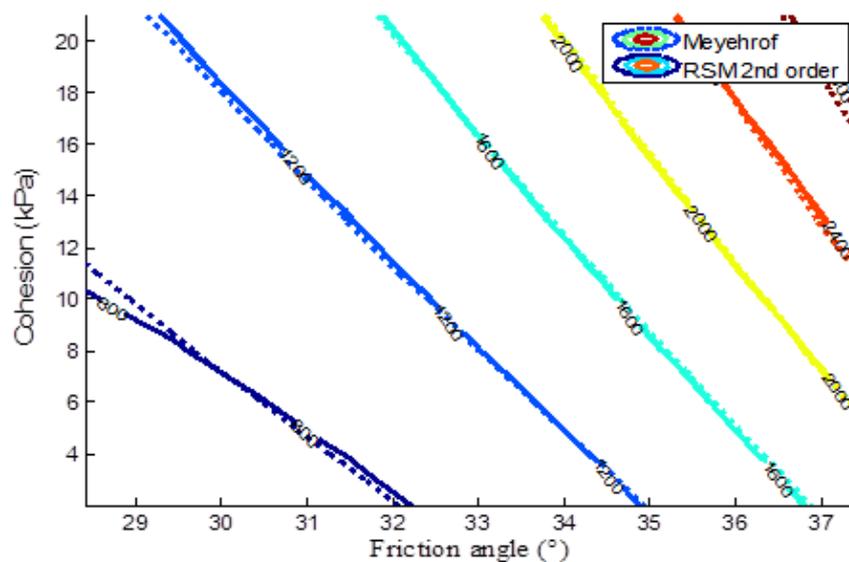


Figure 5.4. Tracé de contour pour q_{ult} obtenu à partir du modèle RSM-CCD et de l'équation (5.1).

5.2.3 Effet de la corrélation des paramètres du sol sur l'indice de fiabilité par rapport à la défaillance de la capacité portante

Pour illustrer l'effet de la corrélation sur l'indice de fiabilité, le tableau 5.4 présente les résultats de l'indice de fiabilité β_{HL} calculé à l'aide de SORM pour les valeurs sélectionnées ci-dessus des paramètres statistiques et pour diverses valeurs du coefficient de corrélation $\rho = 0, 25, 50$ et 75% correspondants respectivement au cas 1, au cas 2, au cas 3 et au cas 4, en supposant des distributions normales et lognormales des variables d'entrée du sol.

Tableau 5.4 L'indice de fiabilité β_{HL} en supposant des distributions normales (ND) et log-normales (LND) des paramètres non corrélés et corrélés du sol

CoV φ (%)	Cas 1		Cas 2		Cas 3		Cas 4	
	ND	LND	ND	LND	ND	LND	ND	LND
5	3.93	4.97	4.02	4.97	4.04	5.05	4.06	5.11
7	3.41	3.96	3.56	4.06	3.70	4.23	3.81	4.54
10	2.71	3.02	2.87	3.14	3.06	3.33	3.29	3.68
15	1.95	2.13	2.05	2.23	2.18	2.38	2.33	2.64

On observe que les variations du coefficient de corrélation ont un effet considérable sur l'indice de fiabilité, particulièrement lorsque le coefficient de corrélation est grand ($\rho = 0,75$; cas 4). Par exemple, pour $CoV\varphi = 10\%$ et $\rho = 0,75$ (cas 4) en supposant des variables d'entrée du sol normales corrélées, $\beta_{HL} = 3,29$ (c'est-à-dire $P_f = 0,0501\%$) alors que $\beta_{HL} = 2,71$ (c'est-à-dire $P_f = 0,3364\%$) lorsque $\rho = 0$ (cas 1). Cela représente une augmentation de $21,4\%$ de β_{HL} (c'est-à-dire une diminution de 85% de P_f). Pour les mêmes valeurs d'incertitudes des variables d'entrée du sol mais pour le cas d'une distribution lognormale, l'augmentation de β_{HL} est égale à $21,85\%$ (soit une diminution de 98% de P_f). En outre, il est clair que l'indice de fiabilité diminue considérablement avec l'augmentation des valeurs de $CoV\varphi$ pour les distributions normales et log-normales. De plus, ces résultats montrent

que la probabilité de défaillance est une indicatrice plus sensible de l'effet de corrélation que l'indice de fiabilité.

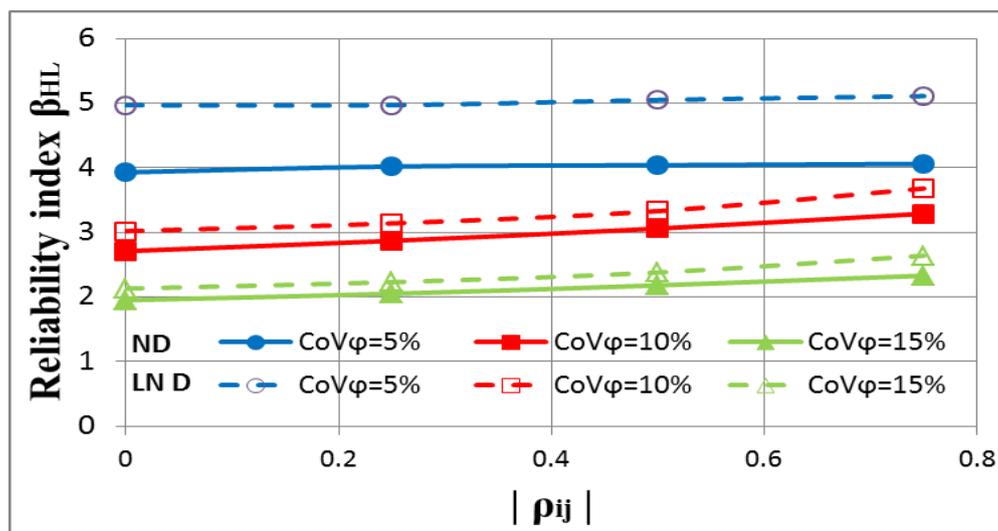


Figure .5.5. Indice de fiabilité de la capacité portante ultime pour les distributions normales (ND) et lognormales (LND) des variables d'entrée du sol ($\mu_\phi=33^\circ$ - CoV ϕ =5-15%; $\mu_\gamma=15.8\text{kN/m}^3$ - CoV $\gamma=10\%$; $\mu_c=12\text{kPa}$ - CoV $c=30\%$)

De même, à partir de la figure. 5.5, on voit que pour le cas de la distribution normale (ND) des variables d'entrée du sol, l'indice de fiabilité augmente légèrement pour des valeurs croissantes de $|\rho_{ij}|$, mais diminue de manière significative avec des valeurs croissantes de CoV ϕ . On peut également noter que la prise en compte de la corrélation entre les paramètres d'entrée du sol affecte marginalement les valeurs de l'indice de fiabilité pour les valeurs inférieures de CoV ϕ . Des tendances similaires sont également observées pour le cas de la distribution lognormale (LND) des variables d'entrée du sol, mais avec des valeurs d'indice de fiabilité plus élevées.

5.3 Analyses de sensibilité de l'indice de fiabilité

5.3.1 Sensibilité de l'indice de fiabilité aux distributions normale et lognormale des variables du sol et du chargement

Les principaux résultats de l'étude de l'influence de la pression aléatoire q appliquée pour deux distributions statistiques (normale et lognormale) sur la sécurité de la fondation sont résumés dans le tableau 6. L'indice de fiabilité Hasofer-Lind β_{HL} ,

les points de conception correspondants (φ^* , c^* , γ^* , q^*) pour différentes valeurs de pression aléatoire appliquée allant de petites valeurs jusqu'à la pression appliquée ultime q_{ult} , sont présentés à l'aide de l'équation (5.4).

$$g(\varphi, c, \gamma, q) = q_{ult}(\varphi, c, \gamma) - q \quad (5.4)$$

Tableau 5.5 Valeurs de l'indice de fiabilité β , points de conception correspondants et probabilités de défaillance à partir du critère de capacité portante ultime pour différentes pressions appliquées ($\mu_\varphi=33^\circ$ -CoV $\varphi=5\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³-CoV $\gamma=10\%$; $\mu_c=12$ kPa-CoV $c=30\%$; CoV $q=20\%$)

Pressions appliquée q (kPa)	σ_q	φ^*	c^*	γ^*	q^*	β_{HL}
Normal variables						
300	60	29.03	0.76	13.94	436.81	4.70
460	92	29.74	4.91	14.58	651.39	3.57
600	120	30.44	7.16	14.94	809.39	2.75
800	160	31.31	9.22	15.28	998.89	1.82
1000	200	32.02	10.52	15.51	1155.47	1.08
1200	240	32.58	11.40	15.68	1285.79	0.48
1388.53	277.71	33.00	15.80	12.00	1388.53	0.00
Lognormal variables						
300	60	29.20	7.28	14.36	685.66	5.23
460	92	30.15	8.26	14.77	817.36	3.72
600	120	30.78	8.94	15.01	916.57	2.80
800	160	31.49	9.75	15.27	1042.85	1.81
1000	200	32.07	10.43	15.46	1157.13	1.06
1200	240	32.57	11.02	15.61	1263.13	0.46
1376.73	275.35	33.00	15.80	12.00	1376.73	0.00

Il ressort clairement du tableau 5.5 que l'indice de fiabilité diminue avec l'augmentation de la pression appliquée jusqu'à s'annuler pour une pression appliquée égale à la valeur moyenne de la capacité portante ultime. Ce cas correspond à un état de défaillance déterministe pour lequel le coefficient de sécurité $F = 1$ obtenu pour les

valeurs moyennes des variables aléatoires. La probabilité de défaillance correspondante est égale à 50 %.

Il est à noter également que pour les plus faibles pressions appliquées, il existe une différence significative entre les valeurs β_{HL} obtenues lors de l'utilisation des distributions statistiques normales et lognormales les variables d'entrée du sol et du chargement. Cependant, cette différence diminue pour la plage supérieure de pression appliquée jusqu'à la valeur moyenne de la capacité portante ultime. On remarque en outre que les valeurs du MPP de la pression appliquée q^* sur la fondation et l'indice de fiabilité β_{HL} sont significativement plus élevés pour une plage inférieure de pression appliquée en supposant une distribution lognormale du sol et des propriétés de chargement.

5.3.2 Sensibilité de l'indice de fiabilité à la réduction du nombre de variables aléatoires

Tableau 5.6. Analyse de sensibilité de l'indice de fiabilité à la réduction du nombre de variables ($\mu_\varphi=33^\circ$ -CoV $\varphi =5\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³-CoV $\gamma=10\%$; $\mu_c=12$ kPa-CoV $c=30\%$; $\mu_{Df}=1$ m- CoV $D_f=10\%$; $\mu_q=460$ -CoV $q=20\%$)

Nombre de variables	α_φ	α_q	α_c	α_γ	β_{HL}	erreur (%)
SORM 4variables (φ, c, γ, q)	-0.55	0.58	-0.55	-0.22	3.57	
SORM 3 variables (φ, c, q)	-0.58	0.60	-0.55	-	3.67	2.80%
SORM 2 variables (φ, q)	-0.70	0.72	-	-	4.58	28.29%

$$NB : erreur = \frac{(\beta_{k+1} - \beta_{k-1})}{\beta_{k+1}}$$

Le tableau 5.6 présente les résultats de l'analyse de sensibilité de l'indice de fiabilité aux réductions successives du nombre de variables aléatoires. On voit que le problème à 4 variables (φ, c, γ, q) peut être réduit à un problème à 3 variables comprenant les paramètres de résistance et le chargement (φ, c, q) avec des sensibilités également importantes : -0,58, -0,55 et 0,60, respectivement, et un pourcentage d'erreur sur β_{HL} inférieur à 3 %. On observe aussi que pour le cas de 2 variables aléatoires φ et q peut être écartés en pratique. Les facteurs de sensibilité α_{X_i}

($X_i = \varphi, c, \gamma, q$) traduisent l'importance relative des variables aléatoires affectant la fiabilité et peuvent être calculés à l'aide de l'équation (5.5)

$$\alpha_{X_i} = -\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X^*} / \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \Big|_{X^*} \right)^2 \sigma_{X_i}^2} \quad (5.5)$$

où X^* est le point de conception.

5.3.3 Sensibilité de l'indice de fiabilité aux incertitudes sur les variables de chargement et de résistance au cisaillement du sol

Pour étudier les effets de la variabilité des paramètres de résistance du sol et le caractère aléatoire du chargement sur l'indice de fiabilité, la figure 5.6 montre l'indice de fiabilité par rapport aux coefficients de variation des variables de résistance du sol et du chargement. La valeur du facteur de sécurité est prise égale à 3 ($\mu_q = 460$ kPa). Les résultats montrent que l'indice de fiabilité est fortement influencé par le coefficient de variation de l'angle de frottement beaucoup plus que celle de la cohésion et du chargement qui ont approximativement la même influence. Cela signifie que la détermination précise de ces paramètres est essentielle pour obtenir des résultats probabilistes significatifs. Des tendances similaires (non représentées sur la figure) sont également observées pour les variables aléatoires lognormales mais avec des valeurs β_{HL} significativement plus élevées.

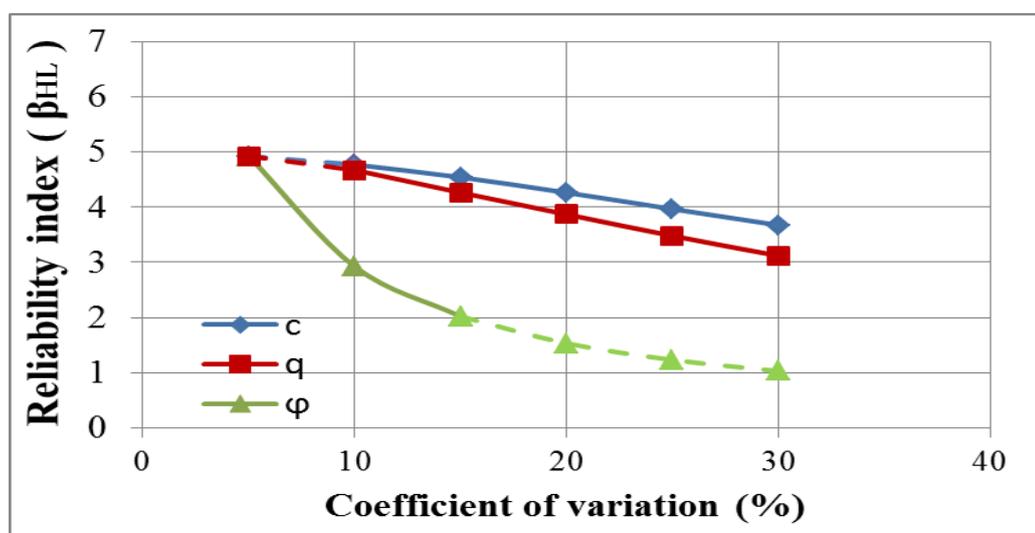


Figure.5.6. Indice de fiabilité par rapport à différents niveaux d'incertitudes en utilisant une distribution normale ($\mu_\varphi=33^\circ$, $\mu_c=12$ kPa, $\mu_q=460$ kPa)

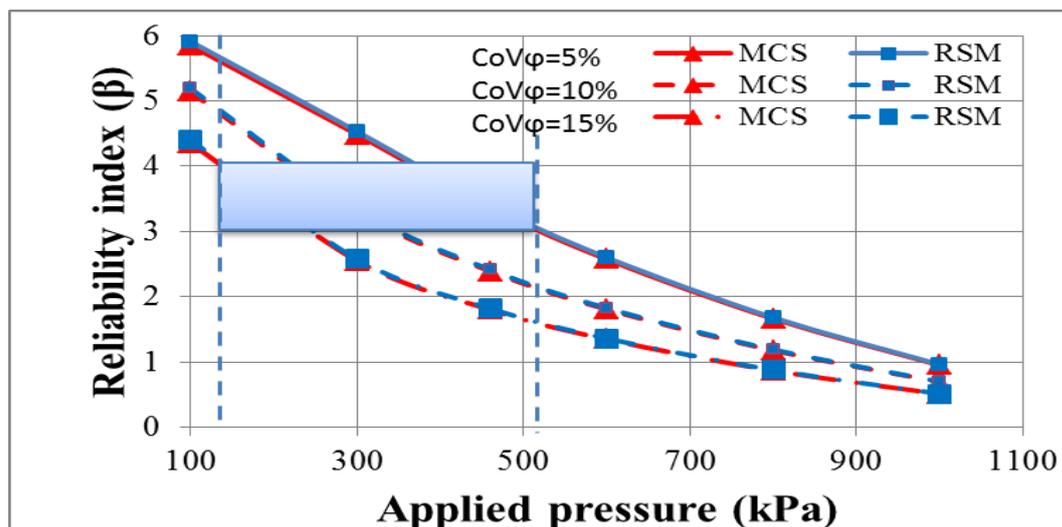


Figure .5.7 Résultats de l'analyse de fiabilité utilisant le modèle RSM-CCD et MCS, par rapport à la pression appliquée pour différents $CoV\phi$ ($\mu_\phi=33^\circ$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³- $CoV\gamma=10\%$; $\mu_c=12$ kPa- $CoV_c=30\%$; $CoV_q=20\%$)

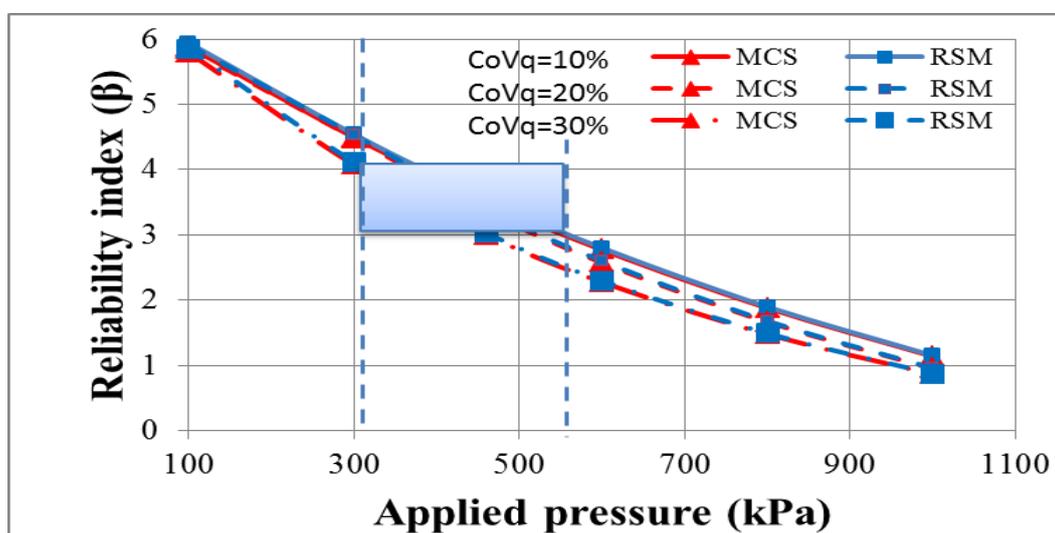


Figure .5.8. Résultats de l'analyse de fiabilité utilisant le modèle RSM-CCD et MCS, par rapport à la pression appliquée pour différents $CoVq$ ($\mu_\phi=33^\circ$ - $CoV\phi=5\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³- $CoV\gamma=10\%$; $\mu_c=12$ kPa- $CoV_c=30\%$)

Les résultats probabilistes présentés à la figure 5.7, montrent que la pression admissible sur la fondation varie de 354 kPa à 515 kPa pour $CoV\phi = 5\%$, de 216 kPa à 351 kPa pour $CoV\phi = 10\%$ et de 130 kPa à 235 kPa pour $CoV\phi = 15\%$ afin d'obtenir des valeurs d'indice de fiabilité β_{HL} comprises entre 3 et 4, comme indiqué dans la zone ombrée. On voit également que la pression admissible calculée à partir de la formule classique de Meyerhof pour la capacité portante ultime pour un facteur

de sécurité égal à 3,0 (c'est-à-dire $q_{all} = 460$ kPa) n'est satisfaisante que dans le cas de $CoV\varphi = 5\%$ car elle est associée à la plage requise d'indice de fiabilité β (3–4).

De même, on peut montrer sur la figure 5.8 que la pression admissible sur la fondation formule classique de Meyerhof pour la capacité portante ultime pour un facteur de sécurité égal à 3,0 est dans le cas présent satisfaisante dans tous les cas de $CoVq$ (10%–30%), car il est associé à la plage requise d'indice de fiabilité β (3–4).

De plus, on peut remarquer que les résultats probabilistes obtenus à partir du modèle RSM-CCD coïncident pratiquement avec ceux obtenus à partir de la méthode MCS. Cependant, il faut noter que le nombre de simulations requises par l'algorithme RSM-CCD ($2k + 2k + 1$) pour $k = 4$ variables (φ, c, γ, q) conduit à $25 \cdot 4$ simulations (voir Tableau 5.7) contre 150000 MCS nécessaire pour atteindre une valeur stable de $CoVP_f < 5\%$ (voir Figure 5.9) considérée dans la présente étude. Il s'ensuit qu'un avantage considérable de l'utilisation de l'algorithme RSM-CCD est en termes de temps d'exécution CPU et de besoins en mémoire.

Tableau 5.7. Indice de fiabilité contre la rupture de capacité portante en utilisant la RSM-CCD couplées à la méthode SORM pour $k=4$ variables aléatoires φ, c, γ et q ($\mu_\varphi=33^\circ$ - $CoV\varphi = 10\%$; $\mu_\gamma=15.8$ kN/m³- $CoV\gamma = 10\%$; $\mu_c=12$ kPa - $CoVc = 30\%$; $\mu_q=460$ kPa- $CoV_q = 20\%$).

Méthode	Itération	φ^*	c^*	γ^*	q^*	β	Erreur (%)	Temps d'exécution
RSM- CCD	1	27,75	15,22	8,33	545,28	2,14		1,1648
	2	26,33	15,26	8,55	537,36	2,41	11,20%	
	3	26,22	15,26	8,46	540,19	2,47	2,43%	
	4	26,18	15,26	8,44	540,98	2,48	0,40%	

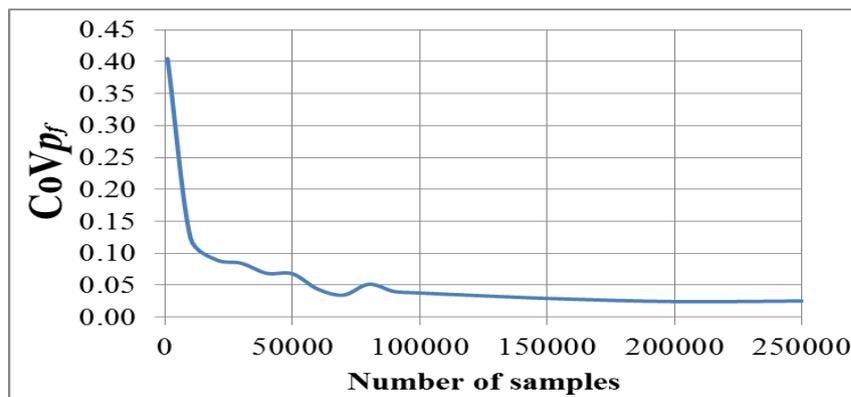


Figure .5.9. Coefficient de variation de la probabilité de défaillance en fonction du nombre d'échantillons en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo

5.4 Conclusion

Des modèles de surface de réponse quadratiques linéaires et non linéaires ont été appliqués pour l'évaluation de la sécurité des fondations superficielles contre la rupture de la capacité portante sous des charges aléatoires et reposantes sur des sols $c-\phi$ présentant des propriétés corrélées multivariées.

Il est montré, que les résultats probabilistes basés sur BBD et CCD sont en bon accord avec les résultats de simulation de Monte Carlo et peuvent réduire considérablement les coûts de calcul dans les analyses de fiabilité.

Les deux cas de distribution normale et lognormale des variables de sol ont montré que la variabilité de la capacité portante ultime du sol est beaucoup plus sensible à l'angle de frottement qu'aux autres paramètres d'entrée. Il a été constaté que, les variations du coefficient de corrélation ont un effet considérable sur l'indice de fiabilité, particulièrement lorsque le coefficient de corrélation est grand ($\rho = 0,75$) et des valeurs du CoV_{ϕ} élevées.

Il est donc essentiel de choisir la distribution qui correspond le mieux aux caractéristiques des données analysées. L'utilisation d'une distribution normale peut être plus conservatrice, mais elle peut également conduire à des décisions non économiques. Une analyse approfondie et une compréhension des implications de

chaque distribution sont nécessaires pour optimiser les résultats des calculs et prendre des décisions éclairées.

Conclusions générales

Conclusions générales

Le travail présenté dans cette thèse a étudié essentiellement l'applicabilité de plusieurs modèles de surface de réponse de 2^{ème} ordre en conjonction avec le modèle déterministe de Meyerhof, pour évaluer la sécurité sous chargement aléatoire, contre la rupture de la capacité portante des fondations superficielles reposant sur des sols de type $c - \phi$ avec des paramètres corrélés. Une comparaison des résultats de fiabilité obtenus à l'aide de la technique MCS avec ceux des modèles de surface de réponse du 2^{ème} ordre basés sur des expériences de conception couplées à SORM a été réalisée. En outre, les implications d'une éventuelle corrélation croisée entre des paires de paramètres d'entrée du sol sur la sécurité des fondations contre la défaillance de la capacité portante ont été examinées pour les distributions : normale et lognormale. De plus, les effets de la variabilité du sol et du caractère aléatoire du chargement sur la sécurité des fondations ont été analysés.

A partir des résultats présentés dans cette étude, les conclusions suivantes peuvent être tirées :

- Les résultats des techniques de conception expérimentales montrent que CCD est plus précis (avec des temps d'exécution CPU pratiquement comparables) que BBD et SD par rapport aux résultats de MCS. Les valeurs de l'indice de fiabilité des termes linéaire et linéaire + interaction ont montré des écarts marqués par rapport aux résultats de simulation de Monte Carlo, ce qui suggère que ces modèles devraient être rejetés dans la pratique.
- Il est également montré que la prise en compte de la corrélation affecte de manière significative l'indice de fiabilité pour les grandes valeurs d'incertitude de l'angle de frottement du sol. Contrairement aux sols sableux, l'hypothèse couramment utilisée de paramètres d'entrée non corrélés s'avère conservatrice comparativement à celle des paramètres corrélés.
- L'indice de fiabilité s'avère très sensible aux incertitudes d'angle de frottement du sol beaucoup plus qu'à celles de la cohésion et du chargement qui ont approximativement la même influence, surtout dans le cas de variables

lognormales. Cela signifie que la détermination précise de ces incertitudes est essentielle pour obtenir des résultats probabilistes significatifs.

- Les résultats probabilistes montrent que l'indice de fiabilité diminue de manière importante avec l'augmentation de la pression appliquée, et qu'il existe une différence significative entre les indices de fiabilité calculés, sur la base des hypothèses de distributions normales et lognormales, en particulier pour les plages inférieures de chargement appliqué.

Références

Acharya, M., & Acharya, I. P. “Reliability analysis of bearing capacity of shallow foundation on $c-\phi$ soil”. *Journal of Advanced College of Engineering and Management*, 5, 71-78. 2019.

Alonso, E.E. “Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays”. *Geotechnique* 26, pp 453–472. 1976.

<https://doi.org/10.1680/geot.1976.26.3.453>

Babu, G.L.S., Srivastava, A. “Reliability analysis of allowable pressure on shallow foundation using response surface method”. *Computers and Geotechnics* 34, 187–194. 2007.

[DOI:10.1016/j.compgeo.2006.11.002](https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2006.11.002)

Becker, D.E. “Limit states design for foundations”. Part II. Development for national building code of Canada. *Canadian Geotechnical Journal* 33 (6), pp 984–1007. 1996.

<https://doi.org/10.1139/t96-125>

Breitung, K. “Asymptotic approximations for multinormal integrals”. *J. Eng. Mech., ASCE*, 110(3), 357–367, 1984.

Box, G.E.P. and Behnken, D.W. “Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables”. *Technometrics*, 2, 455-475. 1960.

<http://dx.doi.org/10.1080/00401706.1960.10489912>

CEN "EN 1997-1:2004/AC:2009 Eurocode 7: Geotechnical Design - Part 1: General Rules", European Committee for Standardization, Brussels, Belgium, 2012.

Cherubini C. “Data and considerations on the variability of geotechnical properties of soils”. In: *Proceedings of the International Conference on Safety and Reliability (ESREL 97)*, vol. 2, Lisbon, pp. 1583–1591. 1997.

Cherubini, C. “Reliability evaluation of shallow foundation bearing capacity on $c-\phi$ soils”. *Canadian Geotech. J.*, 37(1), pp 264-269. 2000 a.

<https://doi.org/10.1139/t99-096>

Cherubini, C., “Probabilistic approach to the design of anchored sheet pile walls”. *Computers and Geotechnics* 26, pp309–330. 2000 b.

[https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(99\)00044-0](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(99)00044-0)

Ching, J. “Practical Monte Carlo based reliability analysis and design methods for geotechnical problems”. INTECH Open Access Publisher. 2011.

<https://doi.org/10.5772/15136>

Chowdhury, R. N., Xu, D. W. “Reliability index for slope stability assessment—two methods compared”. *Reliab. Eng. Syst. Saf.*, 37(2), 99-108. 1992.

[https://doi.org/10.1016/0951-8320\(92\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0951-8320(92)90002-3)

Christian, J. T., & Baecher, G. B. “The point estimate method with large numbers of variables”. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 26(15), pp 1515-1529. 2002.

<https://doi.org/10.1002/nag.256>

DAS, M. “Shallow foundations: bearing capacity and settlement”. CRC press. 2017.

Ditlevsen, O. “Uncertainty modelling: With applications to multidimensional civil engineering systems”, McGraw-Hill, New York. 1981.

Duncan, J.M. “Factors of safety and reliability in geotechnical engineering”. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* 126(4), pp 307–316. 2000.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2000\)126:4\(307\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2000)126:4(307))

Dodagoudar, G. R., & Shyamala, B. “Finite element reliability analysis of shallow foundation settlements. *International Journal of Geotechnical Engineering*”, 9(3), 316-326. 2015.

<https://doi.org/10.1179/1939787914Y.0000000069>

Ellingwood, B. & Galambos, T. V. “Probability-based criteria for structural design”. *Structural Safety* 1(1): 15-26. 1982.

Farag, R., & Haldar, A. “A novel reliability evaluation method for large engineering systems”. *Ain Shams Engineering Journal*, 7(2), 613-625. 2016.

<https://doi.org/10.1016/j.asej.2016.01.007>

Forrest, W.S., and Orr, T.L.L. “Reliability of shallow foundations designed to Eurocode7”. *Georisk*, 4 (4), pp186–207. 2010.

<https://doi.org/10.1080/17499511003646484>

Ivandić, K., Dodigović, F., Soldo, B., & Kovačević, M. S. “Probabilistic Evaluations of Prescribed Safety Margins in Eurocode 7 for Spread Foundations”. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 66(3), pp. 710–719, 2022.

<https://doi.org/10.3311/PPci.18212>

Griffiths, D. V., Fenton, G. A., Manoharan, N. “Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil: probabilistic study”. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 128(9), pp 743-755. 2002.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2002\)128:9\(743\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2002)128:9(743))

Haldar, A., & Mahadevan, S. “Probability, reliability, and statistical methods in engineering design”. J. Wiley & Sons, Incorporated. 2017.

Harr, M.E.. “Reliability-Based Design in Civil Engineering”. McGraw-Hill Inc., New York. 1987.

Hasofer, A. M., & Lind, N. C. “Exact and invariant second-moment code format”. J Eng Mech, 100(1), pp 111-121. 1974.

<https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001848>

Hata, Y., Ichii, K., Ken-ichi, Tokida. “A probabilistic evaluation of the size of earthquake induced slope failure for an embankment”. Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards, 1–16. 2011.

<https://doi.org/10.1080/17499518.2011.604583>

Imanzadeh, S. “Effets de la corrélation entre la cohésion et l'angle de frottement sur la capacité portante d'une semelle de fondation superficielle”. In Rencontres Universitaires de Génie Civil. 2015, May

Kawa, M., & Puła, W. “3D bearing capacity probabilistic analyses of footings on spatially variable c - ϕ soil”. Acta Geotech, pp 1-14. 2019.

<https://doi.org/10.1007/s11440-019-00853-3>

Kulhawy; F. H. “On evaluation of static soil properties”. In Stability and performance of slopes and embankments II (GPS 31), American Society of Civil Engineers, Seed, R. B., Boulanger, R. W., eds, pp. 95-115. 1992.

Kumbhojkar, A.S. “Numerical evaluation of Terzaghi’s $N\gamma$ ”. J. Geotech. Eng. ASCE 119(3), pp 598–607. 1993.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1993\)119:3\(598\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1993)119:3(598))

Lakehal, S. Tiliouine, B. “Safety Assessment of Shallow Foundations Resting on Sandy Soils with Correlated Parameters”. Arab J Sci Eng., 45(5), pp 3829-3841. 2020.

<https://doi.org/10.1007/s13369-019-04264-0>

Lee, I.K., White, W., Ingles, G. “Geotechnical Engineering”. Pitman, Boston. 1983.

Lingwanda, M. I. “Uncertainty, reliability and factor of safety for bearing capacity of shallow foundations in cohesive soils”. Int. J. Comput. Eng. Res.(IJCER), 8(4), pp 22-29. 2018.

[“\[online\] Available at:](#)

[http://www.ijceronline.com/papers/Vol8_issue4/D08042229.pdf”](http://www.ijceronline.com/papers/Vol8_issue4/D08042229.pdf)

Low, B.K., Tang, W.H. “Efficient reliability evaluation using spread- sheets”.
Journal of Engineering Mechanics ASCE 123, 749–752. 1997.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1997\)123:7\(749\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1997)123:7(749))

Lumb , P. “Safety factors and the probability distribution of soil strength”.
Canadian Geotechnical Journal 7, 225–242.1970.

<https://doi.org/10.1139/t70-032>

Massih, D. S., Soubra, A. H., & Low, B. K. “Reliability-based analysis and design
of strip footings against bearing capacity failure”. J. Geotech. Geoenviron.
Eng., 134(7), pp 917-928. 2008.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2008\)134:7\(917\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2008)134:7(917))

Matsuo, M, Kuroda, K. “Probabilistic approach to design of embankments”. Soils
and Foundations 14, 1–17. 1974.

https://doi.org/10.3208/sandf1972.14.2_1

Meyerhof, G. G., “Some recent research on the bearing capacity of foundations”,
Canadian Geotech. J., 1(1), 16, 1963.

<https://doi.org/10.1139/t63-003>

Móczár, B., & Szendefy, J. “Calculation of presumed bearing capacity of shallow
foundations according to the principles of Eurocode 7”. Periodica Polytechnica
Civil Engineering, 61(3), 505-515, 2017.

<https://doi.org/10.3311/PPci.8553>

Myers, R. H., Montgomery, D. C., Anderson-Cook, C. M. “Response surface
methodology: process and product optimization using designed experiments”.
John Wiley & Sons. 2016.

Nadim, F. “Tools and strategies for dealing with uncertainty in geotechnics”.
In Probabilistic methods in geotechnical engineering. pp 71-95. 2007.

https://doi.org/10.1007/978-3-211-73366-0_2

Nguyen, V.U., Chowdhury, R.N. “Simulation for risk analysis with correlated
variables”. Geotechnique 35, 47–58. 1985.

<https://doi.org/10.1680/geot.1985.35.1.47>

Nowak, A. S., & Collins, K. R. “Reliability of structures”. CRC press. 2012.

Phoon, K. K., & Ching, J. (Eds.) “Risk and reliability in geotechnical
engineering”. CRC Press. 2018.

<https://doi.org/10.1201/b17970>

Phoon, K. K., Kulhawy, F. H. “Evaluation of geotechnical property variability”. *Canadian Geotech. J.*, 36(4), pp 625-639. 1999.

<https://doi.org/10.1139/t99-039>

Puła, W., & Zaskórski, Ł. “Estimation of the probability distribution of the random bearing capacity of cohesionless soil using RFEM”. *Struct. Infrastruct. Eng.*, 11(5), pp 707-720. 2015.

<https://doi.org/10.1080/15732479.2014.903501>

Rackwitz, R and Fiessler, B. “Structural reliability under combined random load sequences.” *Comput. Struct.* 9 (5), pp 484–494. 1978.

[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(78\)90046-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(78)90046-9)

Sivakumar Babu, G. L., Srivastava, A., & Murthy, D. S. “Reliability analysis of the bearing capacity of a shallow foundation resting on cohesive soil”. *Canadian Geotech. J.*, 43(2), pp 217-223. 2006.

<https://doi.org/10.1139/t05-099>

Tandjiria, V. The, C., and Low, B. “Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods” *Structural Safety* 22, 335–355, 2011.

Tiliouine B, and Chemali B,. “Uncertainty propagation in dynamics of structures with correlated damping using a nonlinear statistical model” *Int. J. Struct. Eng.* , 7 (2), pp 145 – 159. 2016.

<https://doi.org/10.1504/IJSTRUCTE.2016.076692>

Tiliouine, B., & Chemali, B. “Reliability analysis of shear wall structures with uncertain parameters”. *SMiRT 24 - Busan, Republic of Korea.* August 20-25, 2017.

Wolff, T.F. “Analysis and design of embankment Dam Slopes: A Probabilistic Approach” (Ph.D. thesis). *Purdue University, Lafayette, IN.* 1985.

Wu, X. Z. “Trivariate analysis of soil ranking-correlated characteristics and its application to probabilistic stability assessments in geotechnical engineering problems”. *Soils and Foundations*, 53(4), pp 540-556. 2013.

<https://doi.org/10.1016/j.sandf.2013.06.006>

Xue, J., & Nag, D. “Reliability analysis of shallow foundations subjected to varied inclined loads”. *Geotechnical Safety and Risk. ISGSR* 2011, 1(1), 377-384. 2011.

Annexes

Annexes

Annexe A

Dans la méthode de fiabilité du premier ordre (FORM), les paramètres d'entrées \mathbf{X} sont prétendues d'être distribuées selon une loi normal (Hasofer, A. M., & Lind). A cet effet, l'évaluation de la fiabilité par l'équation (3.13) le calcul de probabilité structurelle donné dans l'équation 3.9 est inadéquat pour une distribution non-normale. Hélas, la majorité des problèmes de fiabilité d'ingénierie estiment que la distribution des paramètres d'entrées incertains est non-normale. Pour cela divers, méthodes ont été développées pour contourner ce problème des variables aléatoires non-normale en effectuant des transformations (telles que Rosenblatt [16], et Hohenbichler et Rackwitz [10]). Une transformation simple et approximative appelée distribution normale équivalente, est exposée ci-dessous.

La distribution normale équivalente est obtenue en utilisant une approximation en série de Taylor (les termes d'ordres supérieurs sont ignorés) de la transformation au point de conception :

$$u_i = \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)] + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]) \Big|_{x_i^*} (x_i - x_i^*) \quad (\text{A.1})$$

où :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)] = \frac{f_{x_i}(x_i)}{\phi(\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)])} \quad (\text{A.2})$$

En remplaçant l'équation (A.2) dans l'équation (A.1), on trouve :

$$u_i = \frac{x_i - [x_i^* - \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)] \phi(\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]) / f_{x_i}(x_i^*)]}{\phi(\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]) / f_{x_i}(x_i^*)} \quad (\text{A.3})$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i'}}{\sigma_{x_i'}} \quad (\text{A.4})$$

où $F_{x_i}(x_i)$ est la fonction de distribution cumulative marginale,

$f_{x_i}(x_i)$ est la fonction de densité de probabilité,

$\mu_{x'_i}$ et $\sigma_{x'_i}$ sont les moyennes et les écarts types équivalentes des distributions normales approximatives, et qui sont données par les formules suivantes :

$$\sigma_{x'_i} = \frac{\phi(\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)])}{f_{x_i}(x_i^*)} \quad (\text{A.5})$$

$$\mu_{x'_i} = x_i^* - \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]\sigma_{x'_i} \quad (\text{A.6})$$

Annexe B

Matrice expérimentale x pour $k=3$ variables codées

➤ Schéma linéaire

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

➤ Schéma SD sans termes croisés

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ 1 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 \\ 1 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 \\ 1 & 0 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 \\ 1 & 0 & 0 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

➤ Schéma SD avec termes croisés

$$x = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_2 x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

➤ Schéma BBD

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}
 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_2 x_3 \\
 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

➤ Schéma CCD

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}
 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 & x_2 x_3 \\
 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1.68 & 0 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Annexe C

Dérivées partielles de l'équation de la capacité portante (l'équation de Terzaghi, avec les approximations de Meyerhof)

$$\triangleright \frac{\partial q_{ult}}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{ult}}{\partial \varphi} = & (c*((2*\tan(\pi/4 + \varphi/2))/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - \\ & 1) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/\tan(\varphi)^2 - (3*\gamma*\tan((7*\varphi)/5)*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)^2/30 + \\ & 1/30)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1))/4 - (c*((2*\tan(\pi/4 + \\ & \varphi/2))/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi))/(\sin(\varphi) - 1) - \\ & (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + (\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) \\ & + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1)))/\tan(\varphi) - (3*\gamma*\tan((7*\varphi)/5)*(\tan(\pi/4 + \\ & \varphi/2)/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi))/(\sin(\varphi) - 1) - \\ & (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + (\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) \\ & + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1))/4 - (3*\gamma*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)/15 + \\ & 1)*((7*\tan((7*\varphi)/5)^2)/5 + 7/5)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + \\ & 1))/4 - (\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)^2/30 + 1/30))/(\sin(\varphi) - \\ & 1) - (\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)/15 + 1))/(\sin(\varphi) - 1) - (c*(\tan(\pi/4 \\ & + \varphi/2)^2/15 + 1/15)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1))/\tan(\varphi) + \\ & (\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)/15 + 1)*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 - \\ & (\pi*\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)/15 + 1)*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + \\ & 1))/(\sin(\varphi) - 1) \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{ult}}{\partial c} = & -(((2*\tan(\pi/4 + \varphi/2))/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - \\ & 1) + 1))/\tan(\varphi) \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{ult}}{\partial \gamma} = & - (3*\tan((7*\varphi)/5)*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + \\ & 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1))/4 - (\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\tan(\pi/4 + \varphi/2)/15 + 1)*(\sin(\varphi) + \\ & 1))/(\sin(\varphi) - 1) \end{aligned} \quad (C.3)$$

$$\triangleright \frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial x_i^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial \varphi^2} = & (2*c*((2*\tan(\varphi/2 + \pi/4))/15 + 1)*(\tan(\varphi)^2 + \\ & 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi))/(\sin(\varphi) - 1) - (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + \\ & 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + (\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - \\ & 1)))/\tan(\varphi)^2 - (3*\gamma*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1)*((7*\tan((7*\varphi)/5))^2/5 + \\ & 7/5)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi))/(\sin(\varphi) - 1) - (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + \\ & 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + (\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - \\ & 1)))/2 - (2*c*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/15 + 1/15)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi))/(\sin(\varphi) - \\ & 1) - (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + \\ & (\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1)))/\tan(\varphi) - \\ & (3*\gamma*\tan((7*\varphi)/5)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/30 + \\ & 1/30)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi))/(\sin(\varphi) - 1) - (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + \\ & 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + (\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - \\ & 1)))/2 - (c*((2*\tan(\varphi/2 + \pi/4))/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\sin(\varphi)*(\sin(\varphi) + \\ & 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 - (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\sin(\varphi))/(\sin(\varphi) - 1) - \\ & (2*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)^2)/(\sin(\varphi) - 1)^2 + \\ & (2*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)^2*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^3 + \\ & (2*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + \\ & (\pi^2*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1)^2)/(\sin(\varphi) - 1) - \\ & (2*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + \\ & (2*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\tan(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1))/\tan(\varphi) \\ & - (3*\gamma*\tan((7*\varphi)/5)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*\sin(\varphi)*(\sin(\varphi) \\ & + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 - (\exp(\pi*\tan(\varphi))*\sin(\varphi))/(\sin(\varphi) - 1) - \\ & (2*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)^2)/(\sin(\varphi) - 1)^2 + \\ & (2*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)^2*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^3 + \\ & (2*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + \\ & (\pi^2*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1)^2)/(\sin(\varphi) - 1) - \\ & (2*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 + \\ & (2*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\tan(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1))/4 - \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned}
& (21*\gamma*\tan((7*\varphi)/5)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1)*((7*\tan((7*\varphi)/5)^2)/5 + \\
& 7/5)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1))/10 - \\
& (3*\gamma*((7*\tan((7*\varphi)/5)^2)/5 + 7/5)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/30 + \\
& 1/30)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1))/2 + \\
& (\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\sin(\varphi)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + \\
& (2*c*((2*\tan(\varphi/2 + \pi/4))/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + \\
& 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/\tan(\varphi) - (2*c*\tan(\varphi/2 + \pi/4)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/2 + \\
& 1/2)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1))/(15*\tan(\varphi)) - \\
& (\gamma*\tan((7*\varphi)/5)*\tan(\varphi/2 + \pi/4)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/2 + \\
& 1/2)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1))/20 + \\
& (2*\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)^2*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 - \\
& (2*\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/30 + 1/30))/(\sin(\varphi) - 1) - \\
& (2*c*((2*\tan(\varphi/2 + \pi/4))/15 + 1)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + \\
& 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1)^2)/\tan(\varphi)^3 + (2*c*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/15 + \\
& 1/15)*((\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/\tan(\varphi)^2 \\
& - (\gamma*\tan(\varphi/2 + \pi/4)*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/2 + \\
& 1/2))/(15*(\sin(\varphi) - 1)) - (\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\sin(\varphi)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + \\
& 1)*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 - (2*\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)^2*(\tan(\varphi/2 + \\
& \pi/4)/15 + 1)*(\sin(\varphi) + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^3 + \\
& (2*\gamma*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2/30 + \\
& 1/30))/(\sin(\varphi) - 1)^2 - (2*\gamma*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi/2 + \\
& \pi/4)^2/30 + 1/30)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1) - \\
& (2*\gamma*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1)*(\tan(\varphi)^2 + \\
& 1))/(\sin(\varphi) - 1) - (\gamma*\pi^2*\exp(\pi*\tan(\varphi))*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1)*(\sin(\varphi) + \\
& 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1)^2)/(\sin(\varphi) - 1) + (2*\gamma*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\cos(\varphi)*(\tan(\varphi/2 + \\
& \pi/4)/15 + 1)*(\sin(\varphi) + 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1)^2 - \\
& (2*\gamma*\pi*\exp(\pi*\tan(\varphi))*\tan(\varphi)*(\tan(\varphi/2 + \pi/4)/15 + 1)*(\sin(\varphi) + \\
& 1)*(\tan(\varphi)^2 + 1))/(\sin(\varphi) - 1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial c^2} = 0 \quad (C.5)$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial \gamma^2} = 0 \quad (C.6)$$

$$\triangleright \frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial \varphi \partial c} = & (((2 * \tan(\varphi/2 + \pi/4))/15 + 1) * ((\exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\sin(\varphi) + 1)) / (\sin(\varphi) - 1) + 1) * (\tan(\varphi)^2 + 1) / \tan(\varphi)^2 - ((\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2 / 15 + 1/15) * ((\exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\sin(\varphi) + 1)) / (\sin(\varphi) - 1) + 1) / \tan(\varphi) - \\ & (((2 * \tan(\varphi/2 + \pi/4))/15 + 1) * ((\exp(\pi * \tan(\varphi)) * \cos(\varphi)) / (\sin(\varphi) - 1) - (\exp(\pi * \tan(\varphi)) * \cos(\varphi) * (\sin(\varphi) + 1)) / (\sin(\varphi) - 1)^2 + (\pi * \exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\sin(\varphi) + 1) * (\tan(\varphi)^2 + 1)) / (\sin(\varphi) - 1))) / \tan(\varphi) \end{aligned} \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial \varphi \partial \gamma} = & (\exp(\pi * \tan(\varphi)) * \cos(\varphi) * (\tan(\varphi/2 + \pi/4) / 15 + 1) * (\sin(\varphi) + 1)) / (\sin(\varphi) - 1)^2 - (3 * (\tan(\varphi/2 + \pi/4) / 15 + 1) * ((7 * \tan((7 * \varphi) / 5))^2 / 5 + 7/5) * ((\exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\sin(\varphi) + 1)) / (\sin(\varphi) - 1) + 1)) / 4 - \\ & (3 * \tan((7 * \varphi) / 5) * (\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2 / 30 + 1/30) * ((\exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\sin(\varphi) + 1)) / (\sin(\varphi) - 1) + 1)) / 4 - (\exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\sin(\varphi) + 1) * (\tan(\varphi/2 + \pi/4)^2 / 30 + 1/30)) / (\sin(\varphi) - 1) - (\exp(\pi * \tan(\varphi)) * \cos(\varphi) * (\tan(\varphi/2 + \pi/4) / 15 + 1)) / (\sin(\varphi) - 1) - \\ & (3 * \tan((7 * \varphi) / 5) * (\tan(\varphi/2 + \pi/4) / 15 + 1) * ((\exp(\pi * \tan(\varphi)) * \cos(\varphi)) / (\sin(\varphi) - 1) - (\exp(\pi * \tan(\varphi)) * \cos(\varphi) * (\sin(\varphi) + 1)) / (\sin(\varphi) - 1)^2 + (\pi * \exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\sin(\varphi) + 1) * (\tan(\varphi)^2 + 1)) / (\sin(\varphi) - 1))) / 4 - \\ & (\pi * \exp(\pi * \tan(\varphi)) * (\tan(\varphi/2 + \pi/4) / 15 + 1) * (\sin(\varphi) + 1) * (\tan(\varphi)^2 + 1)) / (\sin(\varphi) - 1) \end{aligned} \quad (C.8)$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial c \partial \gamma} = 0 \quad (C.9)$$

Annexe D

Dérivées partielles de l'équation de RSM pour la capacité portante

$$q_{ult} = b_0 + b_\varphi x_\varphi + b_c x_c + b_\gamma x_\gamma + b_{\varphi\varphi} x_\varphi^2 + b_{cc} x_c^2 + b_{\gamma\gamma} x_\gamma^2 + b_{\varphi c} x_\varphi x_c + b_{\varphi\gamma} x_\varphi x_\gamma + b_{c\gamma} x_c x_\gamma \quad (D.1)$$

$$\triangleright \frac{\partial q_{ult}}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial x_\varphi} = b_\varphi + 2b_{\varphi\varphi} x_\varphi + b_{\varphi c} x_c + b_{\varphi\gamma} x_\gamma \quad (D.2)$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial x_c} = b_c + 2b_{cc} x_c + b_{\varphi c} x_\varphi + b_{c\gamma} x_\gamma \quad (D.3)$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial x_\gamma} = b_\gamma + 2b_{\gamma\gamma} x_\gamma + b_{\varphi\gamma} x_\varphi + b_{c\gamma} x_c \quad (D.4)$$

$$\triangleright \frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial x_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial x_\varphi^2} = 2b_{\varphi\varphi} \quad (D.5)$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial x_c^2} = 2b_{cc} \quad (D.6)$$

$$\frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial x_\gamma^2} = 2b_{\gamma\gamma} \quad (D.7)$$

$$\triangleright \frac{\partial^2 q_{ult}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial x_\varphi x_c} = b_{\varphi c} \quad (D.8)$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial x_c x_\gamma} = b_{c\gamma} x_\gamma \quad (D.9)$$

$$\frac{\partial q_{ult}}{\partial x_\varphi x_\gamma} = b_{\varphi\gamma} \quad (D.10)$$

