

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Mécanique



Laboratoire de Génie Mécanique et Développement

DOCTORAL THESIS  
in: Mechanical Engineering

Option : Clean and Renewable Energy Mechanical Systems

*Entitled*

---

**Thermoelastic deformation of a medium weakened  
by an annular crack**

---

*Presented by:*  
Zakaria BAKA

*Publicly defended on June 23, 2024, before a Jury composed of:*

Said RECHAK	Professor, ENP	Chair
Belkacem KEBLI	Professor, ENP	Supervisor
Brahim Elkhilil HACHI	Professor, U. Djelfa	Examiner
Hichem FERDJANI	Professor, U. Blida	Examiner
Yacine BELKACEMI	MCA, ENP	Examiner



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Mécanique



Laboratoire de Génie Mécanique et Développement

DOCTORAL THESIS  
in: Mechanical Engineering

Option : Clean and Renewable Energy Mechanical Systems

*Entitled*

---

**Thermoelastic deformation of a medium weakened  
by an annular crack**

---

*Presented by:*  
Zakaria BAKA

*Publicly defended on June 23, 2024, before a Jury composed of:*

Said RECHAK	Professor, ENP	Chair
Belkacem KEBLI	Professor, ENP	Supervisor
Brahim Elkhilil HACHI	Professor, U. Djelfa	Examiner
Hichem FERDJANI	Professor, U. Blida	Examiner
Yacine BELKACEMI	MCA, ENP	Examiner

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département de Génie Mécanique



Laboratoire de Génie Mécanique et Développement

## THÈSE DE DOCTORAT

en: **Génie Mécanique**

Option : **Systèmes Mécaniques à Energies Propres Renouvelables**

*Intitulé*

---

### **Etude du problème thermo-élastique d'un milieu ayant une fissure annulaire**

---

*Présenté par :*

Zakaria BAKA

*Soutenue publiquement en 23 Juin 2024, devant le Jury composé de :*

Said RECHAK	Professeur, ENP	Président
Belkacem KEBLI	Professeur, ENP	Directeur de Thèse
Brahim Elkhalil HACHI	Professeur, U. Djelfa	Examinateur
Hichem FERDJANI	Professeur, U. Blida	Examinateur
Yacine BELKACEMI	MCA, ENP	Examinateur

ENP 2024

## ملخص :

هذا البحث يدرس السلوك الحراري الميكانيكي لوسط يحتوي على شقوق من خلال تحليل التوصيل الحراري والتشوهات المرنة والحرارية المرنة داخل وسط يحتوي على شق دائري أو حلقي. يتم صياغة هذه المسائل على شكل مشكلات قيم حدودية مختلطة، و تبسط إلى معادلات تكاملية مزدوجة أو ثلاثة باستعمال نظرية التحويل التكاملية لهنكل. ثم يتم استنتاج الحلول من خلال مجموعات لا نهائية من المعادلات الجيرية باستخدام بعض العلاقات التكاملية وصيغ جمع جيجبناور.

وبالتالي، يتم الحصول على صيغ دقة لعدة متغيرات فيزيائية، بما في ذلك الحقول الحرارية والميكانيكية، معامل شدة تدفق الحرارة و معاملات شدة الإجهاد في الوضع المختلط  $I - II$ . يؤكّد التوافق الممتاز مع المحاكاة الرقمية والتائج الموجودة سابقاً حالات محددة صحة الحلول التي تم الحصول عليها. توفر التمثيلات البيانية رؤى قيمة حول سلوك هذه الكميات الفيزيائية وتأثير المعاملات المختلفة عليها، مثل حجم و عمق الشق.

يساهم هذا البحث بشكل كبير في فهم سلوك التوصيل الحراري والتشوه المرن أو الحراري لوسط يحتوي على شقوّق.

**الكلمات الفتاحة:** توصيل الحرارة؛ التشوه الحراري المرن؛ الشق؛ مشكلة القيم الحدودية المختلطة؛ المعادلات التكاملية؛ عامل شدة الإجهاد.

---

## Résumé:

Cette recherche s'intéresse au comportement thermo-mécanique des milieux fissurés en analysant la conduction thermique, les déformations élastiques et thermo-élastiques d'un milieu contenant une fissure circulaire ou annulaire. Formulés en tant que problèmes aux conditions aux limites mixtes, ces derniers sont résolus par la technique de transformation intégrale de Hankel, les réduisant à des équations intégrales doubles ou triples. Les solutions sont ensuite dérivées à l'aide de systèmes infinis d'équations algébriques en utilisant certaines relations intégrales et les formules d'addition de Gegenbauer.

En conséquence, des expressions analytiques explicites pour divers paramètres clés sont obtenues, incluant les champs thermiques et mécaniques, le facteur d'intensité de flux thermique et les facteurs d'intensité de contrainte en mode mixte  $I-II$ . Un excellent accord avec les simulations numériques et les résultats existants pour des cas limites valide les solutions obtenues. Des représentations graphiques fournissent des informations précieuses sur le comportement et la dépendance de ces grandeurs

physiques vis-à-vis de divers paramètres, tels que la taille et la profondeur de la fissure.

Cette recherche contribue de manière significative à la compréhension de la conduction thermique, de la déformation élastique et thermo-élastique dans des milieux fissurés.

**Mots-clés:** Conduction thermique; Déformation thermo-élastique; Fissure; Problème aux conditions limites mixtes; Équations intégrales; Facteur d'intensité de contrainte.

---

### **Abstract:**

This research investigates the thermo-mechanical behavior of cracked media by analyzing heat conduction, elastic and thermoelastic deformations within a medium containing a circular or annular crack. Formulated as mixed boundary value problems, the problems are solved using the Hankel integral transform technique, reducing them to dual or triple integral equations. Solutions are then derived through infinite sets of algebraic equations utilizing some integral relations and Gegenbauer's addition formulas.

Consequently, closed-form expressions for various key parameters are obtained, including thermal and mechanical fields, heat flux intensity factors and mixed mode *I-II* stress intensity factors. Excellent agreement with numerical simulations and existing results for limiting cases validates the obtained solutions. Selected graphical representations provide valuable insights into the behavior and dependence of these physical quantities on various parameters, such as the size and depth of the crack.

This research contributes significantly to the understanding of thermo-mechanical behavior in cracked media.

This research significantly contributes to the understanding of heat conduction, elastic and thermoelastic deformations in cracked media.

**Keywords:** Heat conduction; Thermoelastic deformation; Crack; Mixed boundary value problem; Integral equations; Stress intensity factor.

**confidentielle**