

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département d ' Électrotechnique

Laboratoire de Recherche en Electrotechnique



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique



Thèse de Doctorat en Sciences
Spécialité électrotechnique

Présentée par :
Abdelali Allal

***Applications des méthodes statistiques et
stochastiques dans la compatibilité
électromagnétique***

Soutenue publiquement le 14/05/2025 devant le jury composé de :

Composition du jury :

Président	Mekhaldi Abdelouahab	Professeur, ENP
Directeur de thèse	Teguar Madjid	Professeur, ENP
Co-Directeur de thèse	Boubakeur Ahmed	Professeur, ENP
Examineur	ABDI Sif-Eddine	MCA, U.Yahia Farès Médéa
Examineur	HASNI Mourad	Professeur, USTHB
Examineur	MOULAI Hocine	Professeur, USTHB
Examineur	TAHMI Redouane	Professeur, ENP

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

Département d ' Électrotechnique

Laboratoire de Recherche en Electrotechnique



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique



Thèse de Doctorat en Sciences
Spécialité électrotechnique

Présentée par :
Abdelali Allal

***Applications des méthodes statistiques et
stochastiques dans la compatibilité
électromagnétique***

Soutenue publiquement le 14/05/2025 devant le jury composé de :

Composition du jury :

Président	Mekhaldi Abdelouahab	Professeur, ENP
Directeur de thèse	Teguar Madjid	Professeur, ENP
Co-Directeur de thèse	Boubakeur Ahmed	Professeur, ENP
Examineur	ABDI Sif-Eddine	MCA, U.Yahia Farès Médéa
Examineur	HASNI Mourad	Professeur, USTHB
Examineur	MOULAI Hocine	Professeur, USTHB
Examineur	TAHMI Redouane	Professeur, ENP

ملخص

إن ظهور الترددات العالية وانخفاض أبعاد الأنظمة الإلكترونية قد وضع التوافق الكهرومغناطيسي في قلب المراحل الحاسمة في التصميم والتشخيص. دفعت التكاليف المرتفعة للدراسات التجريبية المحاكاة العددية إلى مرتبة أداة أساسية لفهم فيزياء الأنظمة المعقدة. ومع ذلك، تفترض معظم عمليات المحاكاة نموذجًا رياضيًا حتميًا لوصف المشكلة الفيزيائية بأكملها، وهو ليس كافيًا دائمًا للأنظمة المعقدة. علاوة على ذلك، غالبًا ما تهمل عمليات المحاكاة التقليدية تأثير حالات عدم اليقين المتعلقة ببيانات المدخلات مثل خصائص المواد والهندسة والظروف الحدودية. ولهذه الشكوك تأثير مباشر على النتائج المحصل عليها، مما يحتم أخذها بعين الاعتبار في النمذجة العددية.

وفي هذا السياق يصبح إدخال الأساليب الاحصائية والعشوائية في مجال التوافق الكهرومغناطيسي أمرًا حتميًا. تهدف هذه الأطروحة إلى استغلال هذه الطرق لغرضين: تحسين حساب المجالات الكهربائية بالقرب من خط الطاقة الهوائية وتقدير تأثير عدم اليقين المرتبط بهندسة خط النقل على إشارة الخرج. .
كلمات البحث : عدم اليقين، المجال الكهربائي، الاقتران الكهرومغناطيسي، خط النقل، التحسين، مونت كارلو، التجميع العشوائي، جاليركين، متعدد الحدود الفوضي. اقتران كهرومغناطيسي.

Abstract

The advent of high frequencies and the reduction in the dimensions of electronic systems have placed electromagnetic compatibility at the heart of crucial stages in design and diagnosis. The high costs of experimental studies have propelled numerical simulation to the rank of an essential tool for understanding the physics of complex systems. However, most simulations assume a deterministic mathematical model to describe the entire physical problem, which is not always adequate for complex systems. Furthermore, conventional simulations often neglect the impact of uncertainties related to input data such as material properties, geometry and boundary conditions. These uncertainties have a direct impact on the obtained results, making it imperative to take them into account in numerical modeling.

In this context, the introduction of statistical and stochastic methods in the field of electromagnetic compatibility becomes imperative. This thesis aims to exploit these methods for two purposes: to optimize the calculation of electric fields near an overhead power line and to estimate the impact of uncertainties linked to the geometry of a transmission line on the output signal. .

Keywords ; Uncertainty, Electric field, Electromagnetic coupling, Transmission line, Optimization, Monte Carlo, Stochastic collocation, Galerkin, Chaos polynomial, crosstalk

Résumé

L'avènement des fréquences élevées et la réduction des dimensions des systèmes électroniques ont placé la compatibilité électromagnétique au cœur des étapes cruciales en conception et diagnostic. Les coûts élevés des études expérimentales ont propulsé la simulation numérique au rang d'outil essentiel pour appréhender la physique des systèmes complexes. Cependant, la plupart des simulations présupposent un modèle mathématique déterministe pour décrire l'intégralité du problème physique, ce qui n'est pas toujours adéquat pour les systèmes complexes. De surcroît, les simulations conventionnelles négligent souvent l'impact des incertitudes liées aux données d'entrée telles que les propriétés des matériaux, la géométrie et les conditions aux limites. Ces incertitudes ont un retentissement direct sur les résultats obtenus, rendant impérative leur prise en compte dans la modélisation numérique.

Dans ce contexte, l'introduction des méthodes statistiques et stochastiques dans le domaine de la compatibilité électromagnétique devient impérative. Cette thèse a pour objectif d'exploiter ces méthodes pour deux finalités : optimiser le calcul des champs électriques à proximité d'une ligne électrique aérienne et estimer l'impact des incertitudes liées à la géométrie d'une ligne de transmission sur le signal de sortie.

Mots Clés : Incertitude, Champ électrique, Couplage électromagnétique, Ligne de transmission, Optimisation, Monte Carlo, Collocation stochastique, Galerkin, polynôme de Chaos, diaphonie

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à l'âme de mon père, qui a toujours été pour moi une source inépuisable d'inspiration, de force et de courage. Son héritage continue de guider mes pas chaque jour.

À ma mère, avec tout mon amour et ma reconnaissance pour son soutien infailible. Je garde l'espoir sincère de sa guérison prochaine et lui dédie ce travail comme un témoignage de ma gratitude éternelle.

À mes enfants, qui illuminent ma vie de leur joie et de leur innocence. Ils sont ma plus grande motivation et ma plus belle réussite.

À toute ma famille, dont l'affection et la bienveillance m'ont porté dans les moments les plus difficiles. Votre présence a été un pilier essentiel dans ce parcours.

À mes amis, pour leur soutien, leurs encouragements et leur présence précieuse tout au long de cette aventure. Vous avez été une source de réconfort et de force.

REMERCEMENTS

Avant toute chose, je tiens à exprimer ma gratitude envers le Bon Dieu, qui m'a donné la force et la persévérance nécessaires pour mener à bien ce travail. Sans Sa guidance, je n'aurais pas pu surmonter les défis rencontrés tout au long de ce parcours exigeant.

Je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à mes promoteurs, le Professeur Ahmed Boubakeur et le Professeur Madjid Tegar, pour leur accompagnement précieux tout au long de cette aventure scientifique. Leur expertise, leur disponibilité et leurs conseils avisés m'ont permis d'approfondir mes connaissances dans le domaine de la compatibilité électromagnétique et de développer des compétences essentielles. Leur confiance en mon travail a été une source d'inspiration et de motivation constante.

Je tiens également à remercier mes collègues et amis pour leur soutien indéfectible. Leurs encouragements, nos échanges enrichissants et leur présence bienveillante ont été d'une grande aide, particulièrement dans les moments les plus difficiles.

Table des matières

Liste des tableaux	
Liste des figures	
Liste des abréviations	
Introduction générale	14
Chapitre 1 : Incertitudes et compatibilité électromagnétique	
I.1 Introduction.....	18
1.2 Historique.....	18
1.3 Concepts de la compatibilité électromagnétique.....	19
1.3.1 Définition de la comptabilité électromagnétique	19
1.3.2 Les éléments déterminants de la compatibilité électromagnétique	19
1.3.3 Perturbation électromagnétique	20
1.3.4 Niveaux de compatibilité.....	20
1.3.5 Les perturbations électromagnétiques	21
1.3.6 Les différents modes de couplage.....	22
1.3.6.1 Les modes de couplage conduit.....	22
1.3.6.2 Mécanisme de couplage.....	23
1.3.7 Règlementations CEM.....	26
1.3.7.1 Les directives CEM	26
1.3.7.2 Les normes CEM.....	27
1.4 Analyse et propagation d'incertitudes en CEM	27
1.5 État de l'art : Approches statistiques et stochastiques	28
1.5.1 Les méthodes statistiques	28
1.5.1.1 La méthode de Monté Carlo	28
1.5.1.2 Autres méthodes statistiques	28
1.5.2 Les méthodes stochastiques	29
1.5.2.1 Méthode des Polynômes de Chaos	29
1.5.2.2 Méthode de collocation stochastique.....	30
1.5.2.3 la méthode stochastique de Galerkin	31
1.5.2.4 La méthode Unscented Transform.....	32
1.5.2.5 Méthode des perturbations	34
1.6 Objectif de notre thèse	34
1.7 Conclusion	35
1.8 Références Bibliographiques	36
Chapitre 2 Ligne de transmission	
2.1 Introduction.....	44
2.2 Les équations de Maxwell	44
2.3 Les ondes électromagnétiques	45
2.3.1 Les ondes sphériques	46
2.3.2 Polarisation des ondes planes monochromatiques	47

2.3.3 Mode de propagation	47
2.4 Les lignes de transmission	48
2.4.1 Définition	48
2.4.2 Types de lignes de transmission.....	48
2.4.3 Les paramètres linéiques d'une ligne de transmission	49
2.4.4 Méthodes d'extraction des paramètres linéiques	52
2.5 Modélisation des lignes de transmission	54
2.6 Analyse de lignes multi-conductrices	56
2.6.1 Analyse des lignes multiconducteurs dans le domaine fréquentiel	57
2.6.2 Analyse des lignes multiconducteurs dans le domaine temporel	59
2.6.2.1 La solution pour les lignes sans pertes	60
2.6.2.2 La méthode des différences finies en domaine temporel	60
2.7 Interaction entre un champ électromagnétique externe et une ligne de	
2.7.1 Modèle de Taylor	62
2.7.2 Modèle d'Agrawal	63
2.7.3 Modèle de Rachidi	63
2.8 Rayonnements électromagnétiques des lignes de transmission	64
2.8.1 Méthode des moments	65
2.8.2 Méthode de charge fictive	67
2.9 Conclusion	67
2.10 Références bibliographiques	69
Chapitre 3 Méthodes Statistiques et Stochastiques	
3.1 Introduction	76
3.2 Introduction à la probabilité	76
3.2.1 Processus aléatoires	76
3.2.2 La probabilité	76
3.2.3 Variable aléatoire	78
3.2.4 La fonction de densité de probabilité	78
3.2.5 Les moments statistiques.....	78
3.2.6 Les lois de probabilité	79
3.2.6.1 Loi de Poisson	80
3.2.6.2 Loi uniforme	80
3.2.6.3 Loi Normale	80
3.2.6.4 Loi de Weibull	81
3.3 Théorie de l'estimation	82
3.3.1 Estimation par la méthode des moments	82
3.3.2 La méthode du maximum de vraisemblance	82
3.4 Les incertitudes	83
3.4.1 Méthodologie générale de prise en compte des incertitudes	83
3.5 Méthodes de calcul de propagation des incertitudes	84
3.5.1 Méthodes statistiques	85
3.5.1.1 La méthode de Monte Carlo	85

3.5.1.2 La méthode de Quasi Monte Carlo	85
3.5.1.3 Méthodes de réduction de la variance	85
3.5.1.3.1 Échantillonnage stratifié	85
3.5.1.3.2 Échantillonnage pondéré	86
3.5.1.3.3 Variables de contrôle	87
3.5.2 Les méthodes Stochastiques	88
3.5.2.1 La méthode de perturbations stochastiques.....	88
3.5.2.2 La méthode Unscented Transformation	89
3.5.2.3 La méthode des polynômes de chaos	91
3.5.2.4 La méthode stochastique de Galerkin	93
3.5.2.5 Méthode de la collocation stochastique	95
3.6 Conclusion	98
3.7 Références Bibliographiques	99
Chapitre 4 Approches statistiques et stochastiques pour la CEM	
4.1 Introduction	103
4.2. Première application	103
4.2.1 Optimisation de la méthode de charges fictives par des Méthodes	
4.2.2 Algorithme élaboré	105
4.2.3 Application de l' Algorithme	107
4.2.4 Résultats et discussion	112
4.3 Deuxièmes Application : Estimation de l'Impact des Incertitudes des Paramètres	
4.3.1 Énoncé du problème	113
4.3.2 Le cas déterministe	113
4.3.3 Le cas indéterministe	115
4.3.4 Calcul des indices statistiques par la méthode de Monte-Carlo	116
4.3.5 Méthodes stochastiques	118
4.3.5.1 Approche du chaos polynomial	118
4.3.5.2 Méthode de Galerkin stochastique	120
4.3.5.3 Méthode de collocation stochastique	123
4.3.5.4 Méthode Unscented Transform	125
4.3.6 Comparaison des résultats	127
4.3.7 Résultats et discussion	128
4.4 Troisième application : Étude de sensibilité d'une ligne de transmission	
4.4.1 Énoncé du problème	129
4.4.2 Domaine temporel	130
4.4.3 Domaine fréquentiel	133
4.4.4 Résultats et discussion	135
4.5 Conclusion	136
4.5 Références Bibliographiques	138
Conclusion générale	141

Liste des tableaux

Tableau	Description	Page
Tableau 3.1	Les familles de polynômes orthogonaux	95
Tableau 4.1	Estimations des Paramètres de Weibull	110
Tableau 4.2	Estimations des moyennes et des écarts type de Cr et Ca	111
Tableau 4.3	Comparaison des résultats mesurés et calculés	112
Tableau 4.4	Calcul de Coefficients de Chaos polynomial pour les paramètres linéiques (L et C)	120
Tableau 4.5	Points et poids de la quadrature Gaussienne à trois points	124
Tableau 4.6	Nomenclature associée aux paramètres géométriques et composants de la ligne	130
Tableau 4.7	les niveaux de susceptibilité	135

Liste des figures

Figure	Description	Page
Figure 1.1	Éléments déterminants de la CEM.	20
Figure 1.2	Représentation graphique des notions fondamentales de la CEM	21
Figure 1.3	Le mode différentiel	23
Figure 1.4	Le mode commun	23
Figure 1.5 .	Principe du couplage par impédance commune.	24
Figure 1.6a	Principe du couplage par diaphonie capacitive	24
Figure 1.6b	Principe du couplage capacitif carte à châssis	24
Figure 1.7	Principe du couplage inductif.	25
Figure 1.8	Le couplage par champ électrique	25
Figure 1.9	Le couplage par champ magnétique	26
Figure 2.1	Les Modes de propagation d'une onde	47
Figure 2.2	Câble coaxial	48
Figure 2.3	Guide d'onde rectangulaire	49
Figure 2.4	Strip-line	49
Figure 2.5	Cellule PEEC : (a) cellule volumique, (b) cellule surfacique	53
Figure 2.6	Modèles PEEC	54

Liste des figures

Figure 2.7	Schéma équivalent d'un tronçon de ligne de longueur Δx	55
Figure 2.8	Ligne de transmission multiconducteurs	57
Figure 2.9	Disposition des composantes du champ électromagnétique dans une cellule de Yee.	60
Figure 2.10	Ligne de transmission simple excitée par un champ électromagnétique	62
Figure 3.1	Exemples de forme de distribution normale	81
Figure 3.2	Formes de distributions de Weibull	82
Figure 3.3	Polynômes d'Hermite	92
Figure 4.1	Disposition Spatiale des Conducteurs i, j et leurs images	105
Figure 4.2	Disposition des points de contour, charges fictives et point de test	106
Figure 4.3	Dimensions de la ligne de transmission aérienne	108
Figure 4.4	Histogramme de C_r	109
Figure 4.5	Histogramme de C_a	109
Figure 4.6 :	Fonction de densité de probabilité estimée de C_r	110
Figure 4.7	Fonction de densité de probabilité estimée de C_a	110
Figure 4.8	Répartition du champ électrique	111
Figure 4.9	Schéma du circuit	113
Figure 4.10	La source d'excitation	114
Figure 4.11	Le signal de sortie pour le cas déterministe	115
Figure 4.12	La moyenne du signal de sortie	117

Liste des figures

Figure 4.13	L'écart type du signal de sortie	117
Figure 4.14	Circuit équivalent d'une ligne de transmission monofilaire avec paramètres stochastiques	122
Figure 4.15	La moyenne du signal à la charge par la méthode de Galerkin stochastique	123
Figure 4.16	L'écart type du signal à la charge par la méthode de Galerkin stochastique	123
Figure 4.17	Moyenne du signal à la charge par la méthode de CSM	125
Figure 4.18	L'écart type du signal à la charge par la méthode de collocations stochastiques	125
Figure 4.19	Comparaison entre résultats de la moyenne	127
Figure 4.20	Comparaison entre résultats de l'écart type.	128
Figure 4.21	Schéma du circuit	129
Figure 4.22	Comparaison de l'écart type de NEXT	130
Figure 4.23	Comparaison de l'écart type de FEXT	131
Figure 4.24	Indice de Sobol total pour NEXT	132
Figure 4.25	Indice de Sobol total pour FEXT	132
Figure 4.26	Indice de Sobol pour la moyenne et l'écart type de NEXT	133
Figure 4.27	Indice de Sobol pour la moyenne et l'écart type de FEXT	133
Figure 4.28	Sensibilité de NEXT avec marge de confiance 99.7%	134
Figure 4.29	Analyse de la sensibilité de la ligne	135

Liste des symboles et abréviations

Symboles alphanumériques

σ	Conductivité électrique (S/m)
J	Densité de courant induit (A/m^2)
ρ	Densité volumique de charges électriques (C/m^3)
δ	Épaisseur de peau (m)
λ	Longueur d'onde (m)
μ	perméabilité magnétique (H/m)
μ_0	perméabilité magnétique du vide (H/m)
μ_r	perméabilité magnétique relative
ε	permittivité électrique (F/m)
ε_0	permittivité électrique du vide (F/m)
ε_r	permittivité électrique relative
ω	Pulsation (rd/s)
\vec{E}	Vecteur champ électrique (V/m)
\vec{H}	Vecteur champ magnétique (A/m)
\vec{B}	Vecteur d'induction magnétique (T)
\vec{k}	Vecteur de propagation d'onde (rad/m)

Abréviations

BEM	Méthode des Éléments de Frontière
CEM	La compatibilité électromagnétique
FDM	Méthode des Différences Finies
FDTD	La méthode des différences finies dans le domaine temporel
FEM	Méthode des Éléments Finis
FEXT	La diaphonie à l'extrémité éloignée
HF-FEM	Méthode des Éléments Finis en Haute Fréquence
MMC	La méthode de Monte Carlo
NEXT	La diaphonie à l'extrémité proche
PEEC	la méthode des éléments partiels et équivalents en circuit.
SCM	Méthode de collocations stochastiques
SGM	Méthode de Galerkin stochastique
TE	Transversales électriques
TEM	Transversales électromagnétiques
TM	Transversales magnétiques
UTM	La méthode Unscented Transform

Introduction Générale

Introduction générale

Avec l'augmentation des fréquences et la miniaturisation des systèmes et dispositifs électroniques et électriques, la compatibilité électromagnétique est devenue une étape très importante, que ce soit en phase de conception ou de diagnostic [1]. Comme les études expérimentales sont coûteuses, la simulation numérique est devenue un outil important pour étudier et comprendre la physique des systèmes complexes [2]. Malgré les progrès continus dans la précision des techniques informatiques, la plupart des simulations numériques supposent que l'ensemble du problème physique peut être décrit par un modèle mathématique déterministe [3]. Cependant, ce n'est pas toujours le cas pour la représentation de systèmes complexes. Ce qui n'est pas moins abordé dans les simulations conventionnelles, c'est l'effet des incertitudes sur les données d'entrée telles que les propriétés des matériaux, la géométrie, les conditions aux limites, etc [4]. Toutes ces incertitudes peuvent affecter les quantités de production qui comptent pour nous. Pour mieux prédire les comportements de la physique des systèmes, des facteurs d'incertitude doivent être pris en compte dans la modélisation numérique [5].

L'introduction des méthodes statistiques et stochastiques dans la discipline de la compatibilité électromagnétique est devenue une nécessité [6]. L'objectif de nos travaux est d'utiliser des méthodes statistiques et stochastiques dans le domaine de la compatibilité électromagnétique. Premièrement, pour optimiser le calcul des champs électriques au voisinage d'une ligne électrique aérienne et deuxièmement, pour estimer l'impact de l'incertitude de la géométrie d'une ligne de transmission sur le signal en sortie. Ce manuscrit présente ainsi les aspects théoriques de ce travail de thèse. Il est organisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre rappelle les concepts de base de la compatibilité électromagnétique. Nous évoquons ensuite la nécessité d'anticiper ces différentes phases de tests et l'importance de prendre en compte les incertitudes durant la phase initiale de conception. Nous passons aussi en revue l'état de l'art de l'utilisation des méthodes stochastiques et statistiques dans le domaine de la compatibilité électromagnétique.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des lignes de transmission, puisqu'elles représentent le problème majeur de la CEM. Nous avons commencé par une partie théorique, ensuite nous avons discuté de la modélisation des lignes de transmission et de l'analyse dans le domaine fréquentiel et temporel. Différentes méthodes analytiques et numériques sont étudiées, ainsi que l'interaction entre un champ électromagnétique externe et une ligne de transmission.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes statistiques et stochastiques. Nous y expliquons les méthodes les plus importantes.

Le quatrième chapitre est divisé en trois parties principales.

La première partie de cette thèse s'attache à l'optimisation du calcul du champ électromagnétique autour d'une ligne électrique aérienne, via une méthode stochastique appliquée à la méthode des charges fictives. Cette optimisation permet de déterminer les

Introduction Générale

emplacements les plus pertinents des charges sur les conducteurs, assurant ainsi une meilleure précision, validée par une erreur réduite à 1,11 % au point de crête, une convergence rapide, et une bonne adaptabilité à différentes configurations géométriques.

La deuxième partie s'intéresse à l'évaluation de l'impact des incertitudes géométriques sur la tension en charge d'une ligne de transmission, en comparant plusieurs méthodes stochastiques : Monte Carlo (référence), Galerkin stochastique (SGM), collocation stochastique (SCM) et Unscented Transform (UTM). La méthode SGM offre une bonne fidélité dans l'estimation de l'écart-type, en particulier autour des pics temporels, mais présente une précision moindre sur la moyenne, tout en étant coûteuse en calculs. En revanche, les méthodes SCM et UTM, plus rapides, assurent un bon compromis entre précision et efficacité, avec des erreurs généralement inférieures à 5 % par rapport à Monte Carlo, ce qui les rend bien adaptées à une application pratique aux lignes de transmission

Enfin, la troisième partie complète cette étude en s'intéressant à la sensibilité de la ligne de transmission aux variations géométriques, dans les domaines temporel et fréquentiel. Cette analyse approfondie permet de mieux comprendre comment les paramètres géométriques influencent la diaphonie (NEXT et FEXT) selon les fréquences et instants d'analyse. Elle met en évidence le rôle dominant de la distance entre conducteurs en domaine temporel, particulièrement lors des transitoires, et une influence plus équilibrée des paramètres en domaine fréquentiel. De plus, elle valide l'efficacité des méthodes stochastiques (UTM pour les écarts-types rapides, indices de Sobol pour la hiérarchisation) pour cette étude, offrant ainsi une continuité naturelle et complémentaire avec les deux premières applications, qui portent sur la modélisation précise du champ électrique et la prise en compte des incertitudes.

Ce manuscrit se termine par une conclusion générale qui synthétise les principales contributions de cette thèse et propose des perspectives pour des travaux futurs.

References Bibliographiques

- [1] Ott, H. W. 'Electromagnetic Compatibility Engineering'. John Wiley & Sons. 2009
- [2] Soofastaei, A. "Introductory Chapter: Advanced Analytics and Artificial Intelligence Applications", IntechOpen, DOI: 10.5772/intechopen.8978 2019
- [3] EmanouilAtanassov, Ivan T. Dimov,"What Monte Carlo models can do and cannot do efficiently,Applied Mathematical Modelling", Volume 32, Issue 8,2008, Pages 1477-1500,ISSN 0307-904X, doi.org/10.1016/j.apm.2007.04.010.
- [4] Xiu, D., & Karniadakis, G. E., 'Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos.', Journal of Computational Physics, 187(1), 137-167, 2003
- [5] Wenshan, C., Chang, L., & Ke, Y., 'A statistical approach to electromagnetic compatibility analysis'. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 59(3), 898-905, 2017.
- [6] P. Sumant, H. Wu, A. Cangellaris, and N. Aluru, "Reduced-order models of finite element approximations of electromagnetic devices exhibiting statistical variability", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 60, no. 1, pp. 301–309, Jan. 2012. doi: 10.1109/TAP.2011.2167935.

Chapitre 1

Incertitudes et compatibilité
électromagnétique

I.1 Introduction

L'analyse de la compatibilité électromagnétique (CEM) est devenue un outil indispensable et préliminaire dans la phase de conception de tout projet industriel faisant intervenir de l'électronique, tel que la conception d'un appareil élémentaire électrique et/ou électronique, ou la conception d'un système [1].

Généralement, un problème CEM est difficile à résoudre car la grande variété de causes profondes possibles de la perturbation observée rend difficile l'identification de l'origine exacte du problème. Un exemple de cause profonde est la dérive dans la fabrication d'un appareil, c'est-à-dire que de petites perturbations par rapport à la situation nominale se produiront au fil du temps, ce qui conduira à un appareil légèrement différent (emplacement, longueur, forme, etc.). Les perturbations peuvent affecter négativement le fonctionnement de l'appareil.

En effet, les modèles de simulation numérique utilisés pour la prédiction d'une interférence ne donnent des résultats acceptables que si les paramètres d'entrée qu'on leur fournit sont parfaitement connus [2]. Cependant, certaines structures étudiées en CEM sont décrites par des facteurs inconnus ou parfois mal définis.

Dans ce chapitre un concept sur la compatibilité électromagnétique est présenté, ainsi que l'importance de la prise en compte des incertitudes dans l'analyse de la comptabilité électromagnétique.

Afin de comprendre la prise en compte des incertitudes dans l'analyse de la compatibilité électromagnétique, un état de l'art des différentes méthodes statistiques et stochastiques est présenté dans ce chapitre.

1.2 Historique

Les interférences de l'environnement électromagnétique ont commencé à être reconnues comme un sujet d'importance pratique dans les années 1920 [3]. Avec le début des transmissions de diffusion radio, les interférences du bruit radio ou bien bruit électromagnétique, ont été perçues avec inquiétude par les fabricants d'équipements électriques et les entreprises de services publics d'électricité aux États-Unis [4]. Les premiers cas enregistrés des interférences électromagnétiques ont été documentés en 1927 par la Fédéral Aviation Agency. Ils ont observé qu'un altimètre d'un avion donnait des lectures erronées et que le problème était causé par des interférences générées par le système d'allumage de l'avion [5]. Un peu plus tard, en 1933, en une réunion de la commission électrotechnique internationale à Paris, il a été recommandé de créer un Comité spécial international sur les interférences radio pour traiter le problème émergent des interférences électromagnétiques [6]. Deux questions importantes initialement abordées par le Comité spécial international sur les interférences radio étaient les limites acceptables des interférences radio et les méthodes de mesure de ces brouillages.

Pendant la Seconde Guerre mondiale, l'utilisation d'appareils électroniques, principalement des radios, des appareils de navigation et des radars, s'est accélérée. Les cas d'interférences entre les radios et les appareils de navigation à bord des aéronefs ont commencé à augmenter. Par

exemple, en 1945, la première norme militaire CEM a été publiée, intitulée « Mesures d'interférence Radio, Méthodes de 150 kHz à 20 MHz » [7]. Celles-ci étaient généralement facilement corrigées en réattribuant les fréquences de transmission dans un spectre peu encombré ou en éloignant physiquement les câbles des sources d'émission de bruit pour empêcher les câbles de capter ces émissions. Ces solutions aux interférences pourraient être facilement mises en œuvre afin de corriger tout problème d'interférence électromagnétique. Cependant, les augmentations les plus importantes du problème d'interférence se sont produites avec les inventions de composants électroniques à haute densité tels que le transistor bipolaire dans les années 1950, le circuit intégré (CI) dans les années 1960 et la puce à microprocesseur dans les années 1970. Le spectre de fréquences est également devenu plus encombré avec la demande accrue de transmission de voix et de données. Cela a nécessité une planification considérable en ce qui concerne l'utilisation du spectre et se poursuit aujourd'hui [8].

En raison de la fréquence croissante des interférences du système numérique avec les communications filaires et radio, la Fédéral Communications Commission (FCC) des États-Unis a publié un règlement en 1979 qui exigeait que les émissions électromagnétiques de tous les « appareils numériques » soient inférieures à certaines limites [9]. En 1989, Le conseil des communautés européennes émit la directive 89/336/CEE qui constitue l'un des premiers fondements de la réglementation. En avril 1992 la directive 92/31/CEE fixe la date d'application obligatoire de la réglementation CEM au 1er Janvier 1996, et un an plus tard la directive 93/68/CEE définit le marquage CE proprement dit [10].

Ces dernières années et avec l'avancement de la technologie, la CEM est devenue de plus en plus importante, et plusieurs recherches dans différents domaines ont été menées, y compris : l'aéronautique [11], l'électronique de puissance [12], les télécommunications [13], les instrumentations médicales [14], le ferroviaire [15], les satellites [16], les cartes électroniques [17] et la mécatronique [18] ... etc.

1.3 Concepts de la compatibilité électromagnétique

1.3.1 Définition de la comptabilité électromagnétique

Selon le vocabulaire électrotechnique international VEI 161-01-07 [19], la compatibilité électromagnétique est : l'aptitude d'un équipement ou d'un système à fonctionner dans son environnement électromagnétique de façon satisfaisante et sans produire lui-même des perturbations électromagnétiques intolérables pour tout ce qui se trouve dans cet environnement.

1.3.2 Les éléments déterminants de la compatibilité électromagnétique

Dans un circuit électronique, une perturbation électromagnétique est produite naturellement par un composant, agressant un autre composant se trouvant dans son environnement. Le composant producteur de la perturbation est appelé source et l'élément qui subit la perturbation est appelé victime. Le chemin qu'emprunte une perturbation électromagnétique pour modifier le fonctionnement normal de la victime est appelé le couplage ou mode de propagation (figure 1.1).



Figure 1.1 Eléments déterminants de la CEM.

1.3.3 Perturbation électromagnétique

Une perturbation électromagnétique est tout phénomène électromagnétique susceptible de dégrader les performances d'un appareil, d'un équipement ou d'un système. La perturbation électromagnétique peut être de la nature d'un bruit électromagnétique, ou d'un signal indésirable, ou d'une charge dans le milieu de propagation lui-même.

1.3.4 Niveaux de compatibilité

Afin de pouvoir quantifier les effets des perturbations émises ou reçues par un module ou composant électronique, différents niveaux et marges d'immunité et d'émissivité ont été définis [1]. Le respect de ces critères assure une bonne compatibilité entre les équipements partageant le même environnement électromagnétique.

Nous citons les niveaux suivants:

- **Limite d'Émission Électromagnétique**

La limite d'émission électromagnétique est la valeur maximale d'énergie électromagnétique qu'un appareil ou un système est autorisé à émettre dans le spectre électromagnétique, selon les réglementations en vigueur. Cela vise à éviter les interférences avec d'autres dispositifs électroniques.

- **Marge d'Émission**

La marge d'émission représente la différence entre le niveau d'émission réel d'un dispositif ou d'un système et la limite d'émission définie par les normes et réglementations. Une marge d'émission positive indique que le dispositif émet moins d'énergie que la limite permise.

- **Marge de Compatibilité**

La marge de compatibilité est la marge de sécurité entre les niveaux d'émission et les niveaux d'immunité dans un environnement électromagnétique. Cela garantit que les dispositifs fonctionnent de manière fiable et sans interférences indésirables dans leur environnement.

- **Niveau de Compatibilité**

Le niveau de compatibilité fait référence à la capacité d'un dispositif ou d'un système à fonctionner correctement sans causer d'interférences dans un environnement électromagnétique donné.

- **Marge d'Immunité**

La marge d'immunité mesure la capacité d'un dispositif ou d'un système à fonctionner de manière fiable malgré les niveaux d'interférence électromagnétique présents dans son environnement. Une marge d'immunité positive indique une bonne résistance aux interférences.

- **Niveau d'Immunité**

Le niveau d'immunité représente le niveau d'interférence électromagnétique qu'un dispositif ou un système peut supporter sans subir de défaillance ou de perte de performance.

Ces termes cités ci-dessus et schématisés à la figure 1.2 sont particulièrement importants dans le domaine de la compatibilité électromagnétique pour garantir le bon fonctionnement des appareils électroniques dans des environnements où ils peuvent être soumis à diverses sources d'interférences électromagnétiques.

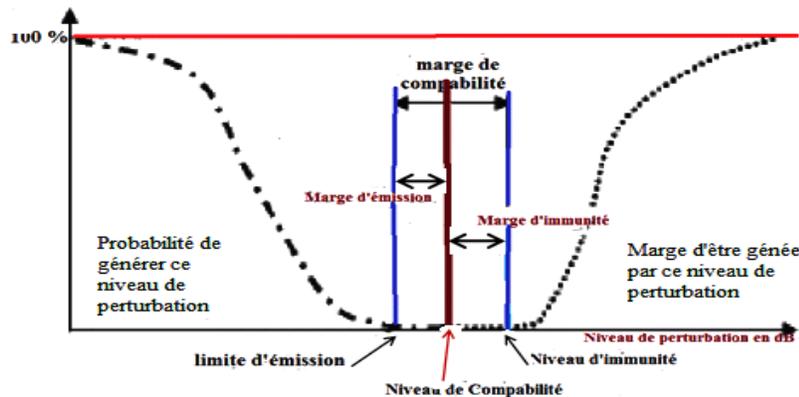


Figure 1.2 Représentation graphique des notions fondamentales de la CEM

1.3.5 Les perturbations électromagnétiques

Une interférence électromagnétique est la perturbation d'un système par un autre circuit ou phénomène extérieur. La Communauté Européenne définit de la manière suivante la notion de perturbations électromagnétiques : ce sont des « phénomènes électromagnétiques susceptibles de créer des troubles de fonctionnement d'un dispositif, d'un appareil ou d'un système. Une perturbation électromagnétique peut être un bruit électromagnétique, un signal non désiré ou une modification du milieu de propagation lui-même » [20].

Les perturbations considérées en compatibilité électromagnétique (CEM) sont des ondes électromagnétiques parasites générées de façons très variées. Leurs sources se classent en deux grandes catégories : elles peuvent être d'origine transitoire (phénomènes brefs dans le domaine temporel) ou continue/harmonique (phénomènes périodiques dans le domaine fréquentiel) [1]. Ces deux types de perturbations se distinguent par la spécificité de leurs effets sur les équipements perturbés.

- **Les parasites transitoires** peuvent créer pendant une durée très brève des surtensions ou des surintensités. Ceci entraîne des dysfonctionnements de courte durée et parfois la destruction des équipements. Ces vecteurs de perturbations peuvent être regroupés en différentes catégories [1] :

O **La foudre** : est définie comme une décharge électrique d'une longueur de plusieurs kilomètres associée à une impulsion de courant transitoire de très forte amplitude. La source la plus commune de la foudre est la séparation des charges dans les nuages d'orage, les cumulo-nimbus. Les orages les plus fréquents font suite à des fronts froids. A l'arrivée d'un de ceux-ci, la masse

d'air froid s'infiltrer sous l'air chaud et le soulève; ceci engendre des turbulences dans l'air chaud rejeté en altitude: ainsi se forment les nuages d'orage ou les cumulo-nimbus [21].

O **Les décharges électrostatiques** : elles sont particulièrement pénalisantes dans le domaine spatial.

O **Les perturbations de type industriel** : elles regroupent tous les phénomènes qui ne sont pas d'origine naturelle.

O **L'impulsion électromagnétique d'origine nucléaire**

L'impulsion électromagnétique d'origine nucléaire (IEMN) est le résultat d'une explosion nucléaire à très haute altitude, provoquant des dommages électroniques d'une extrême gravité. Les champs électriques peuvent atteindre des valeurs crêtes de 50 kV/m au niveau du sol, sur une zone circulaire d'un rayon de 1500 km. Les effets de l'IEMN se manifestent dans la plage de fréquences [0 - 100 MHz]. [22].

O **Les armes à faisceaux dirigés (AFD)** :

Les armes à faisceaux dirigés (AFD), également connues sous le nom d'armes de nouvelle génération, se distinguent par leur capacité à focaliser leur énergie et leur densité de puissance dans une direction spécifique. Un exemple de telles armes est représenté par les armes ultra large bande (ULB). Leurs spectres englobent des gammes de fréquences allant de quelques centaines de mégahertz à quelques dizaines de gigahertz

Ces armes, dites de nouvelle génération, ont la particularité de pouvoir concentrer leur énergie et leur densité de puissance suivant une direction privilégiée. Les armes ultra large bande (ULB) en sont un exemple. Leurs spectres couvrent des plages de fréquence allant de quelques centaines de mégahertz à quelques dizaines de gigahertz [23].

- **Les parasites harmoniques,**

Les parasites harmoniques, tout aussi préjudiciables, se propagent sur des périodes plus étendues, durant lesquelles ils emmagasinent de l'énergie susceptible de chauffer les composants sensibles par effet Joule [24].

1.3.6 Les différents modes de couplage

On appelle couplage le processus par lequel l'énergie du perturbateur (source) atteint la victime. Les perturbations peuvent se propager de deux manières : soit en conduction, soit en rayonnement.

Dans le premier cas les perturbations interviennent soit en mode commun (MC) soit en mode différentiel (MD).

Dans le second cas les perturbations sont rayonnées sous forme de champ électrique et de champ magnétique.

1.3.6.1 Les modes de couplage conduit

Les modes de couplage électromagnétique font référence aux différentes manières dont les champs électromagnétiques peuvent interagir entre eux ou avec des structures électriques ou électroniques.

Mode différentiel

Egalement connu sous les appellations de mode « série », mode « normal » ou mode « symétrique », ce mode est couramment utilisé pour la transmission des signaux utiles. Un exemple concret est présenté à la Figure 1.3, où la communication entre l'émetteur et le récepteur s'effectue grâce à un même courant I_{MD} . Celui-ci circule du côté de l'émetteur vers le récepteur, puis revient en sens contraire du récepteur vers l'émetteur.

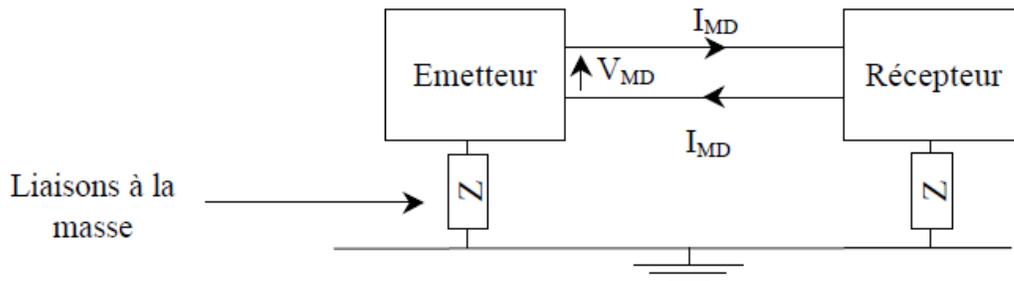


Figure 1.3 Mode différentiel

Mode commun

Le mode commun est très peu utilisé pour les signaux utiles, il correspond souvent à un mode parasite. Il est aussi appelé mode « parallèle », mode « longitudinal », ou mode « asymétrique » (Figure 1.4).

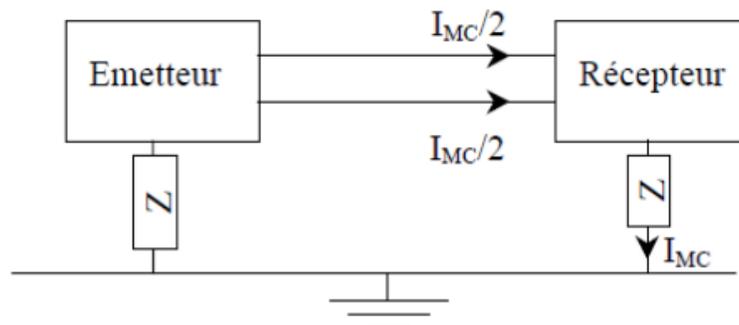


Figure 1.4 Mode commun

Les tensions de mode commun se développent entre les fils de liaisons et la référence de potentiel : masses des appareils, fil de protection équipotentielle.

1.3.6.2 Mécanisme de couplage

Les mécanismes de couplage électromagnétique décrivent les processus spécifiques par lesquels les champs électromagnétiques peuvent interférer avec des systèmes électriques. Cela peut inclure des phénomènes cités ci-dessous.

- le couplage par impédance commune

C'est un couplage de type conduit. Dans un couplage par impédance commune, le dispositif perturbateur possède une impédance commune avec la victime. Aux bornes de cette

impédance commune se trouve une tension générée par le courant passant dans le perturbateur (Figure 1.5). La victime subit cette tension parasite car elle est aussi connectée à cette impédance.

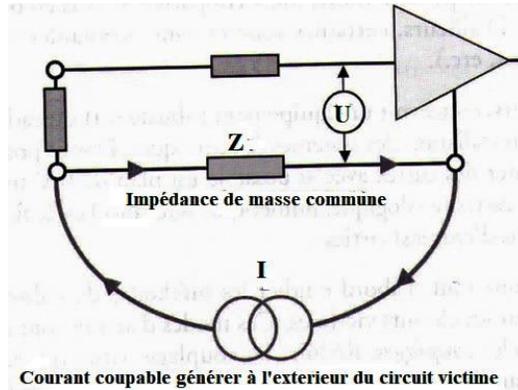


Figure 1.5 Principe du couplage par impédance commune.

• le couplage capacitif

Le couplage électromagnétique capacitif se produit entre deux conducteurs figure 1.6a ou entre un conducteur et un plan de masse parfaitement conducteur (châssis) figure 1.6b. Il se manifeste à travers une capacité électrique, permettant ainsi le passage d'énergie électrique perturbatrice entre les composants.

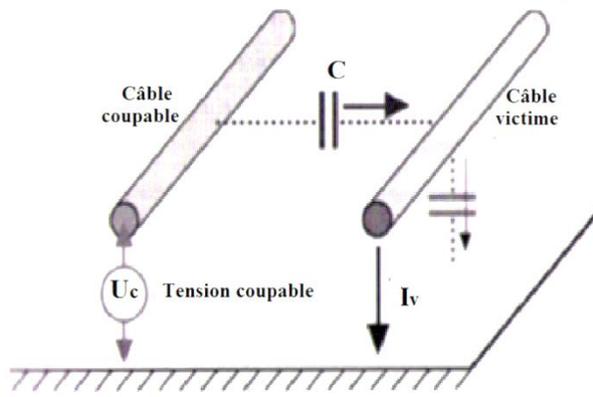


Figure 1.6a Principe du couplage par diaphonie capacitive

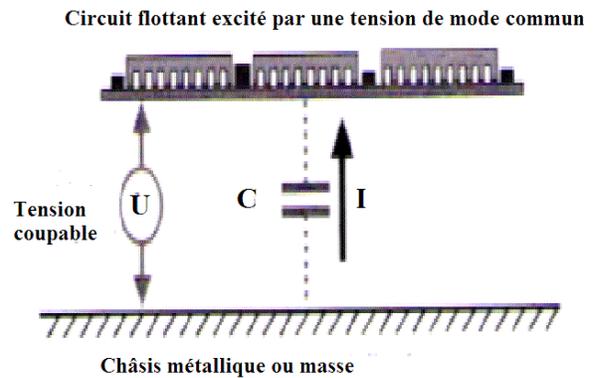


Figure 1.6b Principe du couplage capacitif carte à châssis

• Le couplage inductif

C'est un couplage de type conduit. Dans le cas du couplage inductif, il existe dans le circuit perturbateur un courant susceptible de produire des perturbations. À proximité de ce circuit se trouve un circuit victime. Le courant du conducteur du circuit perturbateur produit autour de lui un champ magnétique. Ce champ magnétique induit un courant parasite dans le circuit victime (Figure 1.7). On rencontre ce type de couplage dans le phénomène de diaphonie inductive.

Le conducteur du circuit perturbateur se trouve dans le même câble que le conducteur du circuit victime, et induit dans ce dernier une tension parasite. Plus l'impédance du circuit victime est faible, plus cette tension induit une énergie perturbatrice importante.

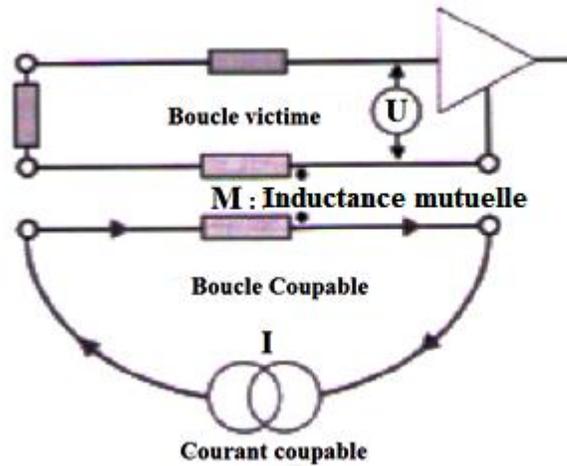


Figure 1.7 Principe du couplage inductif.

• Le couplage par champ électrique

C'est un couplage de type rayonné en champ proche. Le couplage par champ électrique est aussi appelé couplage champ à fil. C'est un champ électrique incident qui va produire une perturbation sur une victime. Remarquons qu'il est de même nature que le couplage capacitif, puisque la capacité de couplage amène des lignes de champ sur la victime (Figure 1.8). La différence ici, c'est que le perturbateur est plus éloigné. Au lieu d'identifier le perturbateur lui-même, on identifie le champ électrique qui en est issu.

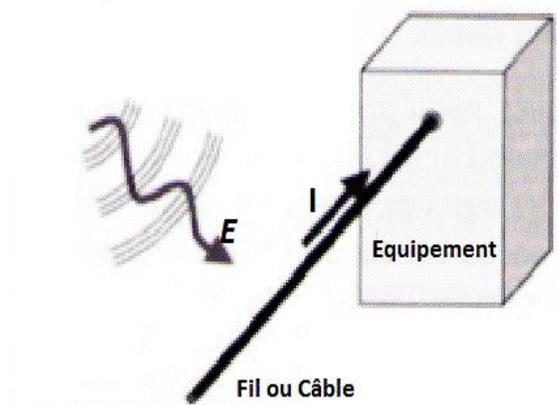


Figure 1.8 Le couplage par champ électrique

• Le couplage par champ magnétique

C'est un couplage de type rayonné en champ proche. Il est aussi appelé couplage champ à boucle. Le champ magnétique issu du perturbateur traverse le circuit victime et induit dans celui-ci une tension parasite (Figure 1.9). Remarquons là aussi que ce couplage est de même nature que le couplage inductif. Au lieu d'identifier le perturbateur lui-même, on identifie le champ magnétique qu'il a généré comme étant la perturbation. On rencontre ce type de couplage lors d'un coup de foudre à proximité de la victime. La tension induite dans la boucle est donc importante du fait de la variation importante de l'intensité du courant, mais aussi de la rapidité de la montée de ce courant.

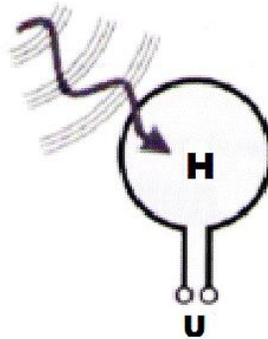


Figure 1.9 Le couplage par champ magnétique

• Le couplage par champ électromagnétique

C'est un couplage de type rayonné en champ lointain. Souvent, un perturbateur émet à la fois du champ électrique et du champ magnétique. C'est l'ensemble de ces deux champs qui atteint la victime. Cependant, même si un perturbateur n'émet au départ qu'un champ électrique, les équations de Maxwell montrent qu'à une certaine distance de cette source, un champ magnétique apparaîtra aussi, pour former une onde plane électromagnétique. Il en est de même si le perturbateur n'émet au départ qu'un champ magnétique. Aux hautes fréquences, c'est le mode de couplage le plus courant.

1.3.7 Règlementations CEM

1.3.7.1 Les directives CEM

Lors de l'étude de la Compatibilité Électromagnétique (CEM) d'un nouveau produit, il est essentiel de commencer par comprendre l'environnement dans lequel ce produit sera placé. La directive CEM est claire quant à ces exigences : le produit ne devra ni perturber, ni être perturbé par l'environnement dans lequel il est censé être situé. Cela est en accord avec la directive européenne 2014/30/UE [25], qui s'inscrit dans la continuité des mesures prises par le Conseil de la Communauté Européenne pour éliminer les obstacles commerciaux au sein de l'Union Européenne. Bien que l'on reconnaisse les avantages économiques de la libre circulation des biens entre les États membres, il reste complexe d'harmoniser les normes techniques et de

parvenir à une reconnaissance mutuelle des résultats. Auparavant, les normes étaient principalement nationales.

1.3.7.2 Les normes CEM

Les directives CEM ne contiennent pas d'indications détaillées comme des valeurs limites ou des procédés de mesure. En effet, elles ne donnent que des exigences qualitatives. Ce sont les normes qui imposent les contraintes quantitatives à la mise en conformité d'un produit. Ces exigences sont établies par des instances comme le Comité Européen de Normalisation Electrotechnique (CENELEC) ou encore l'Institut Européen de Normalisation en Télécommunications (ETSI). Ces organismes travaillent en étroite collaboration avec les instances nationales et internationales comme la Commission Electrotechnique Internationale (CEI) et le Comité International Spécial des Perturbations Radioélectriques (CISPR).

1.4 Analyse et propagation d'incertitudes en CEM

Les équipements électroniques et / ou électriques se développent de plus en plus avec le développement de la science et de la technologie, et l'environnement électromagnétique est de plus en plus complexe et encombré. Les équipements sont souvent confrontés à des interférences électromagnétiques multi sources et multifréquences. Etant donné que ces interférences électromagnétiques peuvent être sources de graves conséquences sur le bon fonctionnement des équipements, leur prédiction représente un enjeu majeur dans le domaine de la Compatibilité Electromagnétique (CEM). En vue de répondre à ce besoin de prédiction des interférences électromagnétiques au sein des systèmes électriques et/ou électroniques modernes, de nombreuses méthodes numériques déterministes, basées sur une modélisation des champs électromagnétiques, ont été développées. Parmi ces méthodes on peut citer à titre d'exemple

- La méthode des différences Finies dans le domaine temporel [26];
- La méthode des Volumes Finis dans le domaine temporel [27];
- La méthode des moments basée sur la résolution d'équations intégrales [28];
- La méthode de modélisation des lignes de transmission par des matrices [29].

Dans la plupart des cas étudiés, les diverses méthodes déterministes de modélisation numérique démontrent leur efficacité en fournissant des résultats précis. Cependant, les interférences électromagnétiques sont définies par un grand nombre de paramètres qui, dans la pratique, sont souvent entachés d'incertitudes tels que l'angle d'incidence, la polarisation, l'amplitude, etc. Par conséquent, ces incertitudes peuvent avoir un réel impact sur la Compatibilité Electromagnétique des équipements au sein des systèmes électriques et électroniques. Ainsi, la quantification de ces effets sur les réponses des modèles électromagnétiques de simulation numérique revêt une importance capitale au sein de la communauté CEM [30]. Dans cette optique, plusieurs chercheurs ont exploré l'intégration des approches probabilistes en Compatibilité Electromagnétique (CEM), conduisant ainsi à l'émergence de diverses méthodologies. Par exemple, des travaux récents ont été proposés dans la littérature [31-33] pour plus de détails (voir le paragraphe 1.5).

Ces méthodes se répartissent en deux catégories distinctes : les méthodes statistiques et les méthodes stochastiques

1.5 État de l'art : Approches statistiques et stochastiques

1.5.1 Les méthodes statistiques

1.5.1.1 La méthode de Monté Carlo

La simulation de Monte Carlo [34] reste à ce jour la méthode stochastique la plus simple et la plus utilisée dans tous les domaines et est souvent utilisée comme référence lorsqu'il est question de valider des méthodes approchées. Elle consiste à effectuer des calculs déterministes pour un grand nombre de tirages des paramètres considérés comme aléatoires et qui suivent une loi de probabilité donnée. Plusieurs travaux dans le domaine CEM sont basés sur cette méthode; par exemple,

En 2017 : Elle est utilisée pour quantifier l'incertitude statistique des mesures d'émission dans une chambre réverbérante [35],

En 2018 : Elle est utilisée dans l'approche probabiliste pour l'évaluation de la susceptibilité d'une piste droite d'un circuit imprimé en présence d'un champ électromagnétique aléatoire [36],

En 2019 : Elle est utilisée dans la prédiction des effets de couplage des ondes électromagnétiques avec un faisceau de paires de fils torsadés multiples au-dessus d'un plan de masse avec une torsion aléatoire non-uniforme où les pas de torsion des fils sont considérés comme des fonctions stochastiques spatiales [37],

En 2020 : Elle est utilisée pour évaluer l'influence des vibrations aléatoires de conducteurs d'une ligne de haute tension, sur la diaphonie entre les conducteurs de la ligne [38].

En 2021 : Elle est utilisée pour analyser la diaphonie des paires de fils torsadés dont les paramètres géométriques sont incertains [39].

1.5.1.2 Autres méthodes statistiques

L'inconvénient de la méthode Monté Carlo est qu'elle est gourmande de temps. Ceci a donné lieu à l'élaboration de plusieurs variantes de cette méthode, communément appelées méthodes de réduction de variance. Sans être exhaustif, on peut citer parmi les plus populaires :

En 2002 : de nouvelles méthodes de réduction de variance ont été proposées dans [40] ;

En 2007 : Le calcul des moments statistiques de la tension induite par un champ électromagnétique incident déterministe sur un fil mince qui ondule de manière aléatoire au-dessus d'un plan de masse parfaitement conducteur a été présenté dans [41] ;

En 2008 : Afin de pouvoir réaliser la prédiction du modèle de couplage champ-carte, une étude paramétrique du couplage entre champ électromagnétique et les pistes de circuit imprimé, illuminé par une onde plane, est réalisée par les plans d'expériences [42] ;

En 2020 : Une nouvelle méthode d'estimation de la diaphonie pour une paire torsadée à pas non uniforme est proposée sur la base de la méthode de Monte Carlo (MMC) et de l'algorithme d'optimisation par antennes adaptatives du scarabée (Adaptive Beetle Antennae Search) [43].

1.5.2 Les méthodes stochastiques

1.5.2.1 Méthode des Polynômes de Chaos

Elle consiste en une projection de la réponse aléatoire du modèle considéré sur une base de polynômes orthogonaux, communément appelés polynômes chaos ; une telle projection permet alors d'approcher aisément les moments statistiques de la réponse aléatoire du modèle [43].

Au fil des années, elle a été mise en œuvre dans le cadre de plusieurs applications en compatibilité électromagnétique telles que :

En 2008 : La simulation stochastique d'une liaison numérique avec des paramètres de substrat variables [44] ;

En 2010 : L'analyse stochastique des circuits dynamiques via la théorie du chaos polynomial d'Hermite [45] ;

En 2011 :

- L'analyse stochastique d'une interconnexion muticonductrice [46] ;
- Une comparaison entre deux solutions alternatives pour la simulation des conducteurs aériens et des interconnexions avec l'inclusion des effets des incertitudes des paramètres, à savoir la méthode polynômes de Chaos et la méthode de modélisation de surface de réponse (Response Surface Modeling) [47] ;
- La simulation des conducteurs aériens et des interconnexions avec l'inclusion des effets des incertitudes des paramètres dans les structures d'interconnexion qui permet de calculer les informations quantitatives sur la sensibilité de la réponse de la ligne de transmission à la variabilité des paramètres [48] ;

En 2012

- La simulation stochastique d'une ligne de transmission excitée par des champs d'ondes planes aléatoires [49] ;
- Utilisée pour l'analyse statistique des câbles multiconducteurs et des interconnexions de circuits imprimés présentant des variations internes, telles que des fluctuations de section transversale ou le couplage de champ aléatoire [50].

En 2014 : La simulation stochastique d'une ligne de transmission dont les paramètres linéiques (inductance et capacitances) sont de nature aléatoire [51] ;

En 2015 :

- L'application de l'expansion de polynômes de chaos aux lignes de transmission en cascade où les impédances caractéristiques sont données de manière stochastique et indépendantes les unes des autres [52] ;
- Une méthode de collocation probabiliste multiéléments a été utilisée pour caractériser statistiquement les réseaux de lignes de transmission multiconducteurs soumis à un grand nombre d'incertitudes de fabrication tels que les emplacements et les largeurs des conducteurs [53] ;
- La méthode stochastique basée sur les polynômes de Chaos a été utilisée pour évaluer l'impact des variations de paramètres aléatoires d'un faisceau de conducteurs, dues à des propriétés physiques incertaines ou incontrôlables et au positionnement des fils, sur les

matrices de capacité et d'inductance linéiques et sur la réponse pertinente du conducteur aérien [54] ;

- L'évaluation statistique de la capacitance d'une ligne coaxiale, en supposant qu'elle est affectée par des incertitudes électriques et géométriques, a été réalisée par une expansion polynomiale non intrusive du chaos [55].

En 2019 :

- Une approche hiérarchique pour l'analyse des lignes de transmission, selon laquelle les tensions et les courants de ligne sont modélisés comme des expansions de chaos polynomial qui sont fonction des paramètres par unité de longueur, plutôt que des paramètres géométriques et matériels sous-jacents a été présentée dans [56] ;
- Une méthode nouvelle et itérative a été présentée dans [57] pour effectuer la réduction de l'ordre du modèle d'un circuit équivalent linéaire, en le décomposant en sous-circuits plus petits et en analysant la sensibilité globale basée sur la variance au moyen d'une expansion de Polynômes de Chaos afin d'extraire les indices de Sobol qui mesurent l'impact relatif des éléments du circuit.

En 2020 : L'expansion polynomiale du chaos a été utilisée pour modéliser l'incertitude de la capacité et de l'inductance par unité de longueur des conducteurs aériens avec des paramètres géométriques et matériels aléatoires [31].

D'autres variétés de polynômes de chaos ont été aussi appliquées, comme :

En 2015 : une technique découplée basée sur les polynômes de chaos et la méthode traditionnelle de Galerkin stochastique est utilisée pour la simulation stochastique de circuits non linéaires (amplificateur micro-ondes avec jusqu'à 25 paramètres aléatoires) [58].

En 2017 : Une nouvelle méthode appelée méthode de surface équivalente moyenne (mean equivalent area method) pour évaluer la validité des résultats de l'analyse d'incertitude dans les simulations CEM d'une ligne de transmission a été utilisée pour déterminer si la méthode MCM et la méthode du chaos polynomial généralisé (gPC) ont atteint la convergence [59].

En 2019 : Un méta modèle hybride Tchebychev - polynômes de chaos a été utilisé pour la quantification de l'incertitude des réseaux de lignes de transmission multiconducteurs [60].

En 2021 :

- Une méthode de polynômes de chaos anisotrope a été utilisée en [61] ;
- La méthode de polynômes de chaos a été aussi adaptée avec recherche de correspondance orthogonale (Orthogonal Matching Pursuit) [32].

En 2022 : L'utilisation de différentes techniques basées sur le Polynôme de Chaos pour la quantification de l'incertitude des circuits radio fréquence RF [33].

1.5.2.2 Méthode de collocation stochastique

Le principe de cette méthode de collocation stochastique (SCM) consiste à approcher les moments statistiques de la quantité aléatoire d'intérêt par le calcul des solutions d'une grille de points déterministes et prédéterminés (points de collocation) et des poids de collocation. Ces points et poids de collocation, données par la règle de quadrature (ou d'intégration) de Gauss, sont choisis en fonction des lois de probabilité des variables aléatoires d'entrée du modèle considéré [62].

En contexte CEM, la méthode de collocations stochastiques a été mise en œuvre.

En **2007**, la méthode collocation stochastique a été utilisée, et ceci pour évaluer la puissance moyenne rayonnée par un fil dans une chambre réverbérante [63].

En **2009**,

- La méthode de collocations stochastiques a été utilisée pour déterminer numériquement le champ électromagnétique dans une chambre réverbérante à brassage de modes [64] ;
- La méthode de collocations stochastiques a été utilisée pour déterminer l'influence de l'incertitude sur l'angle de propagation d'une onde plane sur le taux d'absorption spécifique [65] ;
- La méthode de collocation stochastique a été aussi utilisée pour caractériser statistiquement les phénomènes d'interférence et de compatibilité électromagnétique sur des plateformes électriquement grandes et chargées, afin de déterminer les tensions couplées aux broches d'alimentation de cartes informatiques blindées et interconnectées par un câble, ainsi qu'aux bornes de câbles situés dans la baie d'un cockpit d'avion [66].

En 2011 : Une nouvelle approche de la modélisation aléatoire de systèmes complexes en compatibilité électromagnétique (CEM) qui vise à calculer des moments statistiques d'ordres élevés et à étudier l'impact des incertitudes des paramètres sur divers sujets CEM, notamment les lignes de transmission [67].

En 2012 : Pour résoudre un problème CEM stochastique d'une ligne de transmission où les paramètres aléatoires sont la fréquence de la source et la hauteur de la ligne, la méthode collocation stochastique et la méthode Unscented Transform ont été utilisées [68],

En 2013 : Une méthode adaptative de collocation stochastique multiéléments a été utilisée pour quantifier les incertitudes dans la compatibilité électromagnétique et les phénomènes d'interférence impliquant des plates-formes électriquement grandes, multi-échelles et complexes [69],

En 2015 :

- La simulation des équations de Maxwell harmoniques dans le domaine temporel a été faite pour un guide d'onde coplanaire dont le matériau est incertain [70] ;
- La propagation d'onde à une dimension avec incertitude dans les paramètres du milieu a été étudié dans [71],

En 2018 :

- L'efficacité de blindage a été analysée par la méthode de collocations stochastiques [72] ;
- Elle a été utilisé aussi dans le domaine du radar à pénétration de sol, de l'exposition humaine aux champs électromagnétiques et des systèmes de mise à la terre [73].

1.5.2.3 la méthode stochastique de Galerkin

Les méthodes stochastiques de Galerkin (SGM) sont basées sur un formalisme de résidus pour construire des systèmes d'équations gouvernant les modes stochastiques. Dans le contexte stochastique, elle fut proposée par Ghanem et Spanos [74] comme méthode de calcul pour

déterminer le développement en polynômes de chaos de la solution d'équations linéaires stochastiques [75].

En 2005 : Une approche probabiliste basée sur des expansions précises d'ordre élevé des processus stochastiques généraux a été utilisée pour le calcul des sensibilités globales des mesures d'intérêt tel que les sections efficaces radar dans les applications de diffusion, pour une variété de types d'incertitudes [76]

En 2011 : Une solution efficace pour la simulation des conducteurs de ligne et des interconnexions avec l'inclusion des effets des incertitudes des paramètres a été donnée par [66].

En 2013 :

- Une méthode de modélisation stochastique a été développées pour analyser des effets de variabilité, induits par le processus de fabrication, sur les structures d'interconnexion terminées par des charges non linéaires générales. La technique est basée sur la résolution des équations stochastiques pertinentes des télégraphistes dans le domaine temporel au moyen de la méthode stochastique de Galerkin [78] ;
- Une stratégie de modélisation alternative pour l'analyse stochastique des interconnexions complexes à grande vitesse qui incluent des lignes de transmission à pertes et dispersives a été utilisée par [79].

En 2019 : Le développement d'un modèle généralisé d'un conducteur de paires de fils torsadés multiples au-dessus d'un plan conducteur avec une torsion aléatoire non uniforme pour prédire les effets de couplage des ondes électromagnétiques [80].

En 2020 :

- Une hybridation de la méthode classique de Galerkin stochastique avec des techniques de perturbation pour accélérer l'analyse statistique des structures de lignes de transmission muticonductrices non uniformes avec des paramètres affectés par l'incertitude a été proposée [81] ;
- Une technique qui permet d'estimer l'information statistique des propriétés électriques d'une ligne de transmission dont la forme est variable, en utilisant une méthode stochastique de Galerkin [82] ;
- Pour prédire la diaphonie d'un faisceau de conducteurs aléatoires, un algorithme de réseau-neuronal basé sur la propagation optimisée par la méthode de recherche des antennes de scarabée (the beetle antennae search method BAS-BPNN) combinée avec la méthode stochastique de Galerkin a été utilisé [83] ;
- Il y a eu aussi le développement d'un modèle généralisé d'un conducteur de paires de fils torsadés multiples au-dessus d'un plan conducteur excité par un champs d'ondes planes aléatoire [84].

1.5.2.4 La méthode Unscented Transform

La méthode Unscented Transform (UTM) est similaire à la méthode de collocation stochastique dans le sens où elle vise à estimer certains moments de la distribution statistique. Toutefois, elle le fait en utilisant des points sélectionnés de manière déterministe, appelés points

sigma, qui sont associés à des poids. Ces points et poids dépendent de la distribution de probabilité des variables stochastiques [85].

La méthode Unscented Transform a été mise en œuvre en contexte CEM dans :

En 2007 : Une combinaison de la méthode Unscented Transform avec la méthode des Moments afin de calculer la valeur attendue et l'écart type de l'impédance d'entrée d'un fil et d'un dipôle micro ruban avec paramètre aléatoire [86].

En 2008 :

- Le calcul de la fréquence dominante d'une cavité résonnante de guide d'onde avec une couche diélectrique insérée. La permittivité du diélectrique était une variable aléatoire [87] ;
- L'analyse statistique de la tension induite de masse avec l'incertitude causée par la variation de la permittivité électrique relative et de la conductivité dans les systèmes de mise à la terre [88] ;
- L'analyse statistique de problèmes non linéaires : couplage de fils dans une enceinte [89] ;
- -Une technique de modélisation des effets de l'incertitude de fabrication dans les simulations électromagnétiques des dispositifs micro-ondes (un filtre micro ruban pseudo-elliptique) a été présentée dans [90].

En 2009 : Elle a été mise en œuvre dans [91] afin de caractériser, d'un point de vue statistique, l'efficacité de blindage d'une boîte métallique possédant une ouverture.

En 2011 :

L'estimation de la réponse statistique d'un élément sous test non linéaire dans une chambre réverbérante [92].

La méthode Unscented Transform et la méthode de collocation stochastique ont été combinées pour résoudre un problème de compatibilité électromagnétique stochastique (ligne de transmission) avec les incertitudes concernant la source (fréquence) et la géométrie de la ligne (longueur, hauteur) [93].

En 2012 :

- La méthode Unscented Transform comme alternative efficace de propagation de l'incertitude pour les grands systèmes dimensionnels [94] ;
- L'article [95] examine les techniques expérimentales et de simulation pour quantifier la variation statistique du couplage dans une enceinte contenant plusieurs cartes de circuits imprimés.

En 2016 : Une méthode améliorée basée sur la quadrature de Gauss-Legendre et la méthode Unscented Transform pour estimer les caractères statistiques des problèmes EMC/EMI avec des paramètres stochastiques. Le problème de couplage du champ électromagnétique et de la ligne de transmission a été étudié dans [96].

En 2019 : Une analyse des propriétés statistiques des paires de fils torsadés soumises à une impulsion électromagnétique stochastique en haute altitude a été menée. La moyenne et l'écart-type de l'amplitude des tensions d'interférence ont été déterminés en considérant l'angle d'incidence et l'angle de polarisation de ladite impulsion comme des variables aléatoires [97].

En 2021 : La méthode Unscented Transform ainsi que l'expansion de Cornish-Fisher pour estimer la valeur de 2% des surtensions de commutation. Les incertitudes considérées sont les instants d'excitation des trois phases [98].

1.5.2.5 Méthode des perturbations

La méthode des perturbations [99] qui est une méthode très employée dans le domaine des éléments finis stochastiques, se base sur un développement en séries de Taylor des paramètres considérés comme aléatoires. Dans la pratique, ces développements sont tronqués à l'ordre deux, ce qui a l'avantage de ne faire appel qu'aux deux premiers moments statistiques des paramètres stochastiques.

La méthode des perturbations a été mise en œuvre en contexte CEM en :

En 2002 : Pour calculer les propriétés de transmission et de réflexion des lignes de transmission à pertes inhomogènes [100].

En 2013 : Pour analyser les lignes de transmission simples et différentielles non uniformes dans le domaine fréquentiel; les non-uniformités sont considérées comme des perturbations par rapport à une ligne uniforme nominale [101].

En 2014 : Pour élaborer une technique de perturbation en deux étapes pour modéliser les lignes de transmission à plusieurs conducteurs non uniformes dans le domaine fréquentiel [102]. Les non-uniformités sont traitées comme des perturbations par rapport à la ligne muticonductrice uniforme nominale.

2015 : En considérant la désadaptation d'impédance des lignes de transmission comme une petite quantité, une nouvelle théorie de perturbation d'impédance basée sur le modèle de ligne de transmission localisée a été établie pour les lignes de transmission à extrémité unique et couplées [103].

En 2016 : Pour élaborer une technique de perturbation itérative et adaptative pour l'analyse des lignes de transmission non uniformes [104]. Les variations des paramètres par unité de longueur en fonction du lieu sont interprétées comme des perturbations par rapport à leurs valeurs moyennes le long de la ligne.

En 2017 : La techniques des perturbations a été appliquée à l'analyse de l'intégrité du signal d'un câble coaxial avec un rayon de blindage incertain, et à l'évaluation de la susceptibilité rayonnée d'un fil excité par une onde plane incidente avec une polarisation incertaine [105].

En 2020: Pour l'analyse dans le domaine temporel des lignes de transmission non uniformes, avec la prise en compte de la variation des paramètres par unité de longueur [106].

1.6 Objectif de notre thèse

Cette recherche doctorale a pour objectif principal d'étudier l'impact des incertitudes géométriques sur les modèles de compatibilité électromagnétique, en particulier pour une ligne de transmission au-dessus d'un plan conducteur. L'accent est mis sur la quantification probabiliste

des effets de ces incertitudes, en calculant notamment la moyenne et la variance du signal de sortie en fonction des variations des paramètres linéiques, telles que la hauteur de la ligne.

Le second objectif est d'optimiser, grâce aux méthodes statistiques, le calcul du champ électrique généré par une ligne aérienne de haute tension, en employant la méthode des charges fictives. L'optimisation concerne la détermination des emplacements optimaux des charges fictives pour une meilleure précision des calculs.

Enfin, le troisième objectif porte sur l'étude de la sensibilité de la ligne de transmission aux incertitudes géométriques, à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel. Cette analyse permet de mieux comprendre l'impact des variations de paramètres tels que la hauteur, la distance entre conducteurs et le rayon des câbles sur la diaphonie (NEXT et FEXT), en tenant compte des variations temporelles et fréquentielles.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les concepts généraux de la compatibilité électromagnétique (CEM), ainsi que son importance dans la conception et la modélisation des systèmes électriques et/ou électroniques.

Nous avons également évoqué l'importance d'introduire l'incertitude dans ces analyses, car tout environnement contient des paramètres incertains que ce soit les dimensions, les formes, les composants, ...etc.

Afin de clarifier l'importance de la prise en compte des hiérarchies, l'ensemble des travaux antérieurs utilisant des méthodes statistiques ou stochastiques a été présenté. Nous avons conclu que les méthodes statistiques sont plus précises mais elles ont un inconvénient en termes de temps de calcul. Nous avons constaté aussi que la plupart des méthodes traitait les lignes de transmissions.

Vu l'importance des lignes de transmission dans l'analyse CEM, le chapitre suivant sera consacré à l'analyse et la modélisation de ces dernières.

1.8 Références bibliographiques

- [1] Wenshan, C., Chang, L., & Ke, Y.. 'A statistical approach to electromagnetic compatibility analysis'. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 59(3), 898-905. 2017
- [2] Madrigal, M., 'Uncertainty in the analysis of electromagnetic interference'. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 46(1), 23-34, 2004
- [3] O. M. Woodward, "Electromagnetic Interference with Radio and Television Reception," in Proceedings of the IRE, vol. 28, no. 3, pp. 244-251, March 1940.
- [4] Anderson, L. R. 'Broadcasting: Voice and Accountability: A Public Interest Approach to Policy, Law, and Regulation'. Oxford University Press, 2012
- [5] E. E. Donaldson, w. R. Free, d. W. Robertson and j. A. Woody, "field measurements made in an enclosure," in proceedings of the ieee, vol. 66, no. 4, pp. 464-472, april 1978, doi: 10.1109/proc.1978.10938.
- [6] https://web.archive.org/web/20100310145109/http://www.iec.ch/zone/emc/emc_cis.htm
- [7] JAN-I-225 – Interference Measurement, Radio, Methods of, 150 kilocycles to 20 Megacycles (For components and complete assemblies) – 14 June 1945
- [8] A.Charoy, "Compatibilité Electromagnétique", Edition DUNOD, 2000.
- [9] http://www.fcc.gov/ccb/local_competition/#docs .
- [10] Andrei-Marius Silaghi, Alexandru Motateanu, Relu Aipu and Aldo De Sabata Conference: 2018 IEEE 24th International Symposium for Design and Technology in Electronic Packaging (SIITME), Year: 2018, Page 173 DOI: 10.1109/SIITME.2018.8599267
- [11] Reinaldo J. Perez, "Subsystem EMC for Aircraft," in Handbook of Aerospace Electromagnetic Compatibility , IEEE, 2019, pp.483-535, doi: 10.1002/9781119082880.ch9.
- [12] Mohsen Asoodar, Baris Ciftci, Aravind Mohanaveeramani, Mehrdad Nahalparvari, Hans-Peter Nee, "A Measurement-Based Method for Characterizing Parasitic Inductances in Power Electronic Circuits", 2021 23rd European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'21 ECCE Europe), pp.1-9, 2021.
- [13] M. Vautier "étude des phénomènes de couplage électromagnétique dans les faisceaux de câbles multifilaires de télécommunications" thèse de l'université de clermont-ferrand, 1993.
- [14] Kourtiche D1, Nadi M, Souques M, Magne I. Implants médicaux et champs électromagnétiques basses fréquences 0-100 khz. Radioprotection 2014; 49: 241-48. Doi: 10.1051/radiopro/201412
- [15] Frugier, d., & Viennot, f. (2018). Compatibilité électromagnétique du système ferroviaire - bases, contexte et référentiels. Sciences et techniques transverses appliquées aux systèmes ferroviaires. <https://doi.org/10.51257/a-v1-trp3013>
- [16] V. Pronenko, v. Korepanov, f. Dudkin and s. Belyayev, "electromagnetic compatibility in very small spacecrafts," 2015 1st ursi-atlantic radio science conference (ursi at-rasc), 2015, pp. 1-1, doi: 10.1109/ursi-at-rasc.2015.7303041.
- [17] F. De Paulis and m. H. Nisanci, "signal integrity and crosstalk analysis of pcbs within a pecmcbandgap metallic cavity," 2021 IEEE International Joint EMC/SI/PI and EMC Europe Symposium, 2021, pp. 988-993, doi: 10.1109/emc/si/pi/emceurope52599.2021.9559198.
- [18] Z. Yong, y. -t. Zhang and y. -g. Huang, "design of vehicular engine control unit based on emc analysis," 2011 international conference on electrical and control engineering, 2011, pp. 5841-5844, doi: 10.1109/iceceng.2011.6058101.
- [19] <https://www.electropedia.org/iev/iev.nsf/display?openform&ievref=161-01-07>
- [20] <https://www.electropedia.org/iev/iev.nsf/display?openform&ievref=161-01-05>

- [21] P. Druet : le risque foudre et les installations classées pour la protection de l'environnement (icpe) – ineris-dra, septembre 2001
- [22] Magnien Maurice. L'impulsion électromagnétique nucléaire, l'iemn. In: Bulletin d'histoire de l'électricité, n°23, juin 1994. Électricité, armement, défense. Pp. 133-148. DOI : <https://doi.org/10.3406/helec.1994.1242>
- [23] Clayton, R., " Introduction to Electromagnetic Compatibility (2nd ed.) ". IEEE Press.2001
- [24] Ott, H. W, "Electromagnetic Compatibility Engineering. " John Wiley& Sons.2009.
- [25] Parlement européen et Conseil de l'Union européenne, " Directive 2014/30/UE du Parlement européen et du Conseil du 26 février 2014 relative à l'harmonisation des législations des États membres concernant la compatibilité électromagnétique". Journal officiel de l'Union européenne, L 96, 29 mars 2014.
- [26] Taflove, A., &Hagness, S. C.," Computationalelectrodynamics: The finite-difference time-domainmethod (3rd ed.)". Artech House.2005
- [27] Leveque, R. J. " Finite volume methods for hyperbolic problems ". Cambridge University Press. 2002
- [28] Harrington, R. F., " Field computation by moment methods. Macmillan". 1993
- [29] Collin, R. E., " Foundations for Microwave Engineering". IEEE Press. 1991
- [30] Paulsen, U. S., & Kim, O. S., " Probabilistic modeling in electromagnetic compatibility: A review ". IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 46(2), 149-157. 2004
- [31] P. Manfredi, "uncertainty quantification of cable inductances and capacitances via mixed-fidelity models," 2020 international symposium on electromagnetic compatibility - emceurope, 2020, pp. 1-5, doi: 10.1109/emceurope48519.2020.9245657.
- [32] A . Papadopoulos, t. Zygiridis, e. Glytsis and n. Kantartzis, "an adaptive sparse anisotropic polynomial-chaos expansion algorithm applied to emc problems," in ieeeelectromagnetic compatibility magazine, vol. 10, no. 2, pp. 80-87, 2nd quarter 2021, doi: 10.1109/memc.2021.9477248.
- [33] Chordia and j. N. Tripathi, "uncertainty quantification of rf circuits using stochastic collocation techniques," in ieeeelectromagnetic compatibility magazine, vol. 11, no. 1, pp. 45-56, 1st quarter 2022, doi: 10.1109/memc.2022.9780345.
- [34] J. G. Anderson, "montecarlo computer calculation of transmission-line lightning performance," in transactions of the american institute of electrical engineers. Part iii: power apparatus and systems, vol. 80, no. 3, pp. 414-419, april 1961, doi: 10.1109/aieepas.1961.4501060.
- [35] M. Magdowski and r. Vick, "montecarlo simulation of the statistical uncertainty of emission measurements in an ideal reverberation chamber," 2017 international symposium on electromagnetic compatibility - emceurope, 2017, pp. 1-6, doi: 10.1109/emceurope.2017.8094737.
- [36] G. P. Veropoulos, p. J. Papakanellos and c. Vlachos, "a probabilistic approach for the susceptibility assessment of a straight pcb trace excited by random plane-wave fields," in ieeetransactions on electromagnetic compatibility, vol. 60, no. 1, pp. 258-265, feb. 2018, doi: 10.1109/temc.2017.2704911
- [37] O. Gassab, l. Zhou and w. Yin, "stochastic analysis of multi-twisted bundle of twisted-wire pairs (mtb-twp) above ground plane with random non-uniform twisting," 2019 international symposium on electromagnetic compatibility - emceurope, 2019, pp. 421-426, doi: 10.1109/emceurope.2019.8871803.
- [38] M. Li, g. Zhang, r. Zhu and l. Wang, "the preliminary results of crosstalk analysis under vibration stress," in ieeelatters on electromagnetic compatibility practice and applications, vol. 2, no. 4, pp. 165-168, dec. 2020, doi: 10.1109/lemcpa.2020.3043513.
- [39] Y. Chi, h. Jiang, c. Wang and y. Mu, "uncertainty analysis of crosstalk involving twisted pair of

- wires," 2021 IEEE 3rd International Conference on Civil Aviation Safety and Information Technology (ICCSIT), 2021, pp. 773-776, doi: 10.1109/iccasit53235.2021.9633715.
- [40] L. Musso, v. Berat, Flaviocanavero, and b. Demoulin. A plane wave monte-carlo simulation method for reverberation chambers. 2002.
- [41] O. O. Sy, j. A. H. M. Vaessen, m. C. Van Beurden, a. G. Tjihuis and b. L. Michielsen, "probabilistic study of the coupling between deterministic electromagnetic fields and a stochastic thin-wire over a PEC plane," 2007 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, 2007, pp. 637-640, doi: 10.1109/iceaa.2007.4387382.
- [42] H. Tarhini, c. Gui, a. Reineix, s. K. Karam, b. Pecqueux, and j.-c. Joly, "étude paramétrique de la Susceptibilité des cartes électroniques par les plans d'expériences numériques," in 14ème colloque international Et exposition sur la compatibilité électromagnétique et journées scientifiques d'ursifrance-cem 2008-cnfrs/ursi
- [43] Q. Liu, y. Zhao, w. Yan, c. Huang, a. Mueed and z. Meng, "a novel crosstalk estimation method for twist non-uniformity in twisted-wire pairs," in IEEE Access, vol. 8, pp. 38318-38326, 2020, doi: 10.1109/access.2020.2976136.
- [44] Wiener, Norbert "The Homogeneous Chaos". American Journal of Mathematics. 1938, 60 (4): 897-936. Doi:10.2307/2371268. JSTOR 237126
- [45] P. Manfredi, i. S. Stievano and f. G. Canavero, "alternative spice implementation of circuit uncertainties based on orthogonal polynomials," 2011 IEEE 20th Conference on Electrical Performance of Electronic Packaging and Systems, 2011, pp. 41-44, doi: 10.1109/epeps.2011.6100181.
- [46] S. Stievano and f. G. Canavero, "response variability of high-speed interconnects via Hermite polynomial chaos," 2010 IEEE 14th Workshop on Signal Propagation on Interconnects, 2010, pp. 3-6, doi: 10.1109/spi.2010.5483597.
- [47] S. Stievano, p. Manfredi and f. G. Canavero, "parameters variability effects on multiconductor interconnects via Hermite polynomial chaos," in IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, vol. 1, no. 8, pp. 1234-1239, Aug. 2011, doi: 10.1109/tcpmt.2011.2152403.
- [48] P. Manfredi, m. Fontana, i. S. Stievano and f. G. Canavero, "comparison of stochastic methods for the variability assessment of technology parameters," 2011 XXXthursi General Assembly and Scientific Symposium, 2011, pp. 1-4, doi: 10.1109/ursigass.2011.6050749.
- [49] S. Stievano, p. Manfredi and f. G. Canavero, "stochastic analysis of multiconductor cables and interconnects," in IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 53, no. 2, pp. 501-507, May 2011, doi: 10.1109/temc.2011.2119488.
- [50] P. Manfredi and f. G. Canavero, "polynomial chaos representation of transmission-line response to random plane waves," International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMCEurope, 2012, pp. 1-6, doi: 10.1109/emceurope.2012.6396723.
- [51] P. Manfredi and f. G. Canavero, "statistical analysis of multiconductor cables and interconnects with internal variability and field coupling," 2012 42nd European Microwave Conference, 2012, pp. 348-351, doi: 10.23919/eumc.2012.6459107.
- [52] P. Manfredi and f. G. Canavero, "numerical calculation of polynomial chaos coefficients for stochastic per-unit-length parameters of circular conductors," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 50, no. 3, pp. 74-82, March 2014, art no. 7026309, doi: 10.1109/tmag.2013.2284140.
- [53] Preibisch, p. Triverio and c. Schuster, "efficient stochastic transmission line modeling using polynomial chaos expansion with multiple variables," 2015 IEEE MTT-S International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization (NEMO), 2015, pp. 1-4, doi: 10.1109/nemo.2015.7415076.

- [54] Yücel, h. Bağcı and e. Michielssen, "an me-pc enhanced hdmr method for efficient statistical analysis of multiconductor transmission line networks," in *ieee transactions on components, packaging and manufacturing technology*, vol. 5, no. 5, pp. 685-696, may 2015, doi: 10.1109/tcpmt.2015.2424679.
- [55] P. Manfredi and f. Canavero, "efficient statistical extraction of the per-unit-length capacitance and inductance matrices of cables with random parameters", *adv. Electromagn.*, vol. 4, pp. 22-30, may 2015.
- [56] Kouassi, s. Lalléchère, j. -. Bourinet, p. Bonnet and m. Fogli, "uncertainty assessment of a coaxial line's capacitance in a stochastic context," 2015 international conference on electromagnetics in advanced applications (iceaa), 2015, pp. 1526-1529, doi: 10.1109/iceaa.2015.7297379.
- [57] P. Manfredi and r. Trincherro, "a hierarchical approach to the stochastic analysis of transmission lines via polynomial chaos," 2019 *ieee 23rd workshop on signal and power integrity (spi)*, 2019, pp. 1-4, doi: 10.1109/sapiw.2019.8781644.
- [58] Ö. F. Yildiz, h. Brüns and c. Schuster, "variance-based iterative model order reduction of equivalent circuits for emc analysis," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 61, no. 1, pp. 128-139, feb. 2019, doi: 10.1109/temc.2018.2845676
- [59] P. Manfredi, d. Vandeginste, d. De zutter and f. G. Canavero, "generalized decoupled polynomial chaos for nonlinear circuits with many random parameters," in *ieee microwave and wireless components letters*, vol. 25, no. 8, pp. 505-507, aug. 2015, doi: 10.1109/lmwc.2015.2440779.
- [60] Bai, l. Wang, d. Wang, a. P. Duffy and g. Zhang, "validity evaluation of the uncertain emc simulation results," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 59, no. 3, pp. 797-804, june 2017, doi: 10.1109/temc.2016.2621182.
- [61] K. Prasad and s. Roy, "reduced dimensional chebyshev-polynomial chaos approach for fast mixed epistemic-aleatory uncertainty quantification of transmission line networks," in *ieee transactions on components, packaging and manufacturing technology*, vol. 9, no. 6, pp. 1119-1132, june 2019, doi: 10.1109/tcpmt.2018.2880995.
- [62] T. Zygiridis, g. Kommatas, a. Papadopoulos and n. Kantartzis, "modeling of stochastic emc problems with anisotropic polynomial chaos expansions," in *ieee electromagnetic compatibility magazine*, vol. 10, no. 2, pp. 70-79, 2nd quarter 2021, doi: 10.1109/memc.2021.9477236.
- [63] Xiu, D. (2015). Stochastic Collocation Methods: A Survey. In: Ghanem, R., Higdon, D., Owhadi, H. (eds) Handbook of Uncertainty Quantification. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11259-6_26-1
- [64] F. Diouf, f. Paladian, m. Fogli, c. Chauviere and p. Bonnet, "emission in reverberation chamber: numerical evaluation of the total power radiated by a wire with a stochastic collocation method," 2007 18th international zurich symposium on electromagnetic compatibility, 2007, pp. 99-102, doi: 10.1109/emczur.2007.4388205.
- [65] Pierre Bonnet et al. "Numerical simulation of a Reverberation Chamber with a stochastic collocation method ", *ComptesRendusPhysique*, Volume 10, Issue 1, 2009, Pages 54-64, ISSN 1631-0705, <https://doi.org/10.1016/j.crhy.2008.12.001>.
- [66] Silly-carette, d. Lautru, m. . -f. Wong, a. Gati, j. Wiart and v. Fouadhanna, "variability on the propagation of a plane wave using stochastic collocation methods in a bio electromagnetic application," in *ieee microwave and wireless components letters*, vol. 19, no. 4, pp. 185-187, april 2009, doi: 10.1109/lmwc.2009.2015481.
- [67] H. Bagci, a. C. Yucel, j. S. Hesthaven and e. Michielssen, "a fast stroud-based collocation method for statistically characterizing emi/emc phenomena on complex platforms," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 51, no. 2, pp. 301-311, may 2009, doi: 10.1109/temc.2009.2015056.
- [68] F. Paladian, p. Bonnet and s. Lalléchère, "modeling complex systems for emc applications by

considering uncertainties," 2011 xxxthursi general assembly and scientific symposium, 2011, pp. 1-4, doi: 10.1109/ursigass.2011.6050692.

[69] S. Lalléchère, p. Bonnet, i. El baba, f. Paladian, "an electromagnetic compatibility problem via unscented transform and stochastic collocation methods" , aces journal, vol. 27, no. 2, february 20121054-4887 © 2012 acessubmitted on: oct. 3, 2011accepted on: jan. 25, 2012

[70] Yücel, h. Bağcı and e. Michielssen, "an adaptive multi-element probabilistic collocation method for statistical emc/emi characterization," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 55, no. 6, pp. 1154-1168, dec. 2013, doi: 10.1109/temc.2013.2265047.

[71] P. Benner, j. Schneider, uncertainty quantification for maxwell's equations using stochastic collocation and model order reduction, *international journal for uncertainty quantification*, 5, 195-208 (2015)

[72] Bai, g. Zhang, l. Wang and a. Duffy, "uncertainty analysis in emc simulation based on stochastic collocation method," 2015 *ieee international symposium on electromagnetic compatibility (emc)*, 2015, pp. 930-934, doi: 10.1109/isemc.2015.7256290.

[73] Bai, g. Zhang, a. P. Duffy and l. Wang, "dimension-reduced sparse grid strategy for a stochastic collocation method in emc software," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 60, no. 1, pp. 218-224, feb. 2018, doi: 10.1109/temc.2017.2699691.

[74] DraganPoljak et al. «Stochastic Collocation Applications in Computational Electromagnetics Mathematical Problems in Engineering Volume 2018, Article ID 1917439, 13 pages <https://doi.org/10.1155/2018/1917439>

[75] R. Ghanem& p. Spanos – stochastic finite elements : a spectral approach, dover, 2003, 2nd edition. (cité en pages 7, 10, 20 et 21.)

[76] Chauviere, j. S. Hesthaven and l. Lurati, "computational modeling of uncertainty in time-domain electromagnetics," workshop on computational electromagnetics in time-domain, 2005. Cem-td 2005., 2005, pp. 32-35, doi: 10.1109/cemtd.2005.1531705.

[77] S. Stievano, p. Manfredi and f. G. Canavero, "stochastic analysis of multiconductor cables and interconnects," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 53, no. 2, pp. 501-507, may 2011, doi: 10.1109/temc.2011.2119488.

[78] Biondi, d. Vandeginste, d. De zutter, p. Manfredi and f. G. Canavero, "variability analysis of interconnects terminated by general nonlinear loads," in *ieee transactions on components, packaging and manufacturing technology*, vol. 3, no. 7, pp. 1244-1251, july 2013, doi: 10.1109/tcpmt.2013.2259896.

[79] P. Manfredi, d. Vandeginste, d. De zutter and f. G. Canavero, "uncertainty assessment of lossy and dispersive lines in spice-type environments," in *ieee transactions on components, packaging and manufacturing technology*, vol. 3, no. 7, pp. 1252-1258, july 2013, doi: 10.1109/tcpmt.2013.2259295.

[80] O. Gassab, l. Zhou and w. Yin, "stochastic analysis of multi-twisted bundle of twisted-wire pairs (mtb-twtp) above ground plane with random non-uniform twisting," 2019 international symposium on electromagnetic compatibility - emceurope, 2019, pp. 421-426, doi: 10.1109/emceurope.2019.8871803.

[81] X. Wu, p. Manfredi, d. Vandeginste and f. Grassi, "a hybrid perturbative-stochastic galerkin method for the variability analysis of nonuniform transmission lines," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 62, no. 3, pp. 746-754, june 2020, doi: 10.1109/temc.2019.2922407.

[82] T. Sekine, s. Usuki and k. T. Miura, "variability analysis of a non-uniform transmission line using stochastic galerkin method," 2020 international symposium on electromagnetic compatibility - emceurope, 2020, pp. 1-6, doi: 10.1109/emceurope48519.2020.9245845.

[83] Huang, y. Zhao, w. Yan, q. Liu and j. Zhou, "a new method for predicting crosstalk of random cable bundle based on bas-bp neural network algorithm," in *ieee access*, vol. 8, pp. 20224-20232, 2020,

doi: 10.1109/access.2020.2969221.

[84] O. Gassab, s. Bouguerra, l. Zhou, z. -g. Zhao and w. -y. Yin, "stochastic analysis of multitwisted cables with random parameters excited by random plane-wave fields," in *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 62, no. 5, pp. 2084-2095, oct. 2020, doi: 10.1109/temc.2019.2954142.

[85] Uhlmann, J. K. . *Dynamic Map Building and Localization: New Theoretical Foundations*. Phd thesis, University of Oxford, Robotics Research Group, Department of Engineering Science.1995

[86] R. A. X. De menezes, a. Ajayi, c. Christopoulos, p. Sewell and g. A. Borges, "efficient extraction of statistical moments in electromagnetic problems solved with the method of moments," 2007 *sbmo/ieemtt-s international microwave and optoelectronics conference*, 2007, pp. 757-760, doi: 10.1109/imoc.2007.4404370.

[87] R. A. X. Demenezes, a. Ajayi, c. Christopoulos, p. Sewell, and g. A. Borges. "efficient computation of stochastic electromagnetic problems using unscented transforms. " *science, measurement technology, iet*, 2(2) :88–95, 2008. 2, 12, 13

[88] B. J. Pereira, l. R. A. X. De menezes and g. A. Borges, "statistical analysis of induced ground voltage using the tlm+ut method," 2008 *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 2008, pp. 1-4, doi: 10.1109/ISEMC.2008.4652014.

[89] R. A. X. De menezes, d. W. P. Thomas, c. Christopoulos, a. Ajayi and p. Sewell, "the use of unscented transforms for statistical analysis in EMC," 2008 *International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC Europe*, 2008, pp. 1-5, doi: 10.1109/EMCEurope.2008.4786803.

[90] R. A. X. De menezes, a. O. Paredes, h. Abdalla and g. A. Borges, "modeling device manufacturing uncertainty in electromagnetic simulations," 2008 *IEEEMTT-S International Microwave Symposium Digest*, 2008, pp. 1385-1388, doi: 10.1109/MWSYM.2008.4633036

[91] R. A. X. Demenezes, d. Thomas, and christochristopoulos. *AccountingFor uncertainty in EMC studies*. Proc. Emc09, pages 753–756, 2009. 12, 13

[92] W. P. Thomas, o. A. Oke, l. R. A. X. De menezes and c. Christopoulos, "the use of unscented transforms in modeling the statistical response of nonlinear scatterer in a reverberation chamber," 2011 *xxxthursi general assembly and scientific symposium*, 2011, pp. 1-4, doi: 10.1109/ursigass.2011.6050745.

[93] S. Lalléchère, p. Bonnet, i. E. Baba and f. Paladian, "unscented transform and stochastic collocation methods for stochastic electromagnetic compatibility," *cem'11 computational electromagnetics international workshop*, 2011, pp. 24-29, doi: 10.1109/cem.2011.6047322.

[94] Ferber, M., Vollaire, C., Krähenbühl, L. And AntônioVasconcelos, J. (2014), "Adaptive unscented transform for uncertainty quantification in EMC large-scale systems", *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, Vol. 33 No. 3, pp. 914-926. <https://doi.org/10.1108/COMPEL-10-2012-0212>

[95] W. P. Thomas, j. Paul and c. Christopoulos, "statistical variation of coupling within a circuit cabinet," 2012 *ESA Workshop on Aerospace EMC*, 2012, pp. 1-5.

[96] Y. -j. Yan, m. Lin, y. -j. Yan and x. -l. Liu, "a method to calculate the statistic characters of the transient electromagnetic pulse coupling into stochastic transmission lines," 2016 *11th international symposium on antennas, propagation and EM theory (ISAPE)*, 2016, pp. 183-186, doi: 10.1109/isape.2016.7833939.

[97] Y. Yan, j. Wei, f. Huang, b. Wang and w. Cai, "the study on statistic characters of the transient response of twisted wire pairs illuminated by a stochastic electromagnetic pulse," 2019 *joint international symposium on electromagnetic compatibility, sapporo and asia-pacific international symposium on*

- electromagnetic compatibility (emcsapporo/apemc), 2019, pp. 231-234, doi: 10.23919/emctoky.2019.8893856.
- [98] Lennerhag and m. H. J. Bollen, "application of unscented transform for efficient calculation of statistics for electromagnetic transients," in *ieee transactions on power delivery*, doi: 10.1109/tpwr.2021.3129538.
- [99] Carl M. Bender, "Perturbation Theory", *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*, Academic Press, 2003, Pages 715-727, ISBN 9780122274107, <https://doi.org/10.1016/B0-12-227410-5/00963-7>.
- [100] Wenger, t. Gustafsson, and I. Svensson, "perturbation theory for inhomogeneous transmission lines," *ieee trans. Circuits syst. I, fundam. Theory appl.*, vol. 49, no. 3, pp. 289–297, mar. 2002.
- [101] Chernobryvko, d. Vandeginste and d. De zutter, "a two-step perturbation technique for nonuniform single and differential lines," in *ieee transactions on microwave theory and techniques*, vol. 61, no. 5, pp. 1758-1767, may 2013, doi: 10.1109/tmtt.2013.2255886.
- [102] Chernobryvko, d. D. Zutter, and d. V. Ginste, "non-uniform multiconductor transmission line analysis by a two-step perturbation technique," *ieee trans. Compon. Packag. Manuf. Technol.*, vol. 4, no. 11, pp. 1838–1846, nov. 2014.
- [103] Yin et al., "impedance perturbation theory for coupled uniform transmission lines," *ieee trans. Electromagn. Compat.*, vol. 57, no. 2, pp. 299–308, apr. 2015
- [104] Manfredi, d. D. Zutter, and d. V. Ginste, "analysis of non-uniform transmission lines with an iterative and adaptive perturbation technique," *ieee trans. Electromagn. Compat.*, vol. 58, no. 3, pp. 858–867, jun. 2016.
- [105] R. Trincherio, i. S. Stievano and p. Manfredi, "worst-case emc investigation of single-wire transmission lines based on taylor arithmetic," *2017 ieee international symposium on electromagnetic compatibility & signal/power integrity (emcsi)*, 2017, pp. 86-89, doi: 10.1109/isehc.2017.8077846.
- [106] Y. Zhang, c. Liao, r. Huan, y. Shang and h. Zhou, "analysis of nonuniform transmission lines with a perturbation technique in time domain," in *ieee transactions on electromagnetic compatibility*, vol. 62, no. 2, pp. 542-548, april 2020, doi: 10.1109/temc.2019.2906251.

Chapitre 2

Lignes de Transmission

2.1 Introduction

Les lignes de transmission représentent l'une des technologies électromagnétiques les plus importantes. L'étude de la propagation des tensions et des courants le long des lignes de transmission est historiquement née de l'utilisation croissante de fils et câbles électriques pour la télégraphie et plus tard la téléphonie au milieu du 19^{ème} siècle [1, 2]. Leur utilisation pour guider les signaux électriques d'un point à un autre a une longue histoire qui remonte aux débuts du télégraphe [3–13].

Le modèle mathématique d'un tel système, largement connu sous le nom de modèle de ligne de transmission, a été étudié et utilisé dans une grande variété de domaines de l'électrotechnique, allant de la transmission de l'énergie électrique à la propagation d'effets électromagnétiques indésirables tels que la diaphonie.

Ce deuxième chapitre permet de réviser les concepts de base des lignes de transmission, la modélisation et l'analyse des lignes multiconducteurs, l'effet d'un champ électromagnétique sur une ligne de transmission et le calcul du rayonnement électromagnétique des lignes de transmission en haute fréquence et en basse fréquence.

2.2 Les équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivent tous les phénomènes électromagnétiques classiques. C'est un système d'équations aux dérivées partielles qui lient entre elles différents champs de vecteurs électriques et magnétiques. Ces équations regroupent d'une part le théorème d'Ampère, la loi de Faraday et les lois de conservations magnétiques et électriques.

La formule de Maxwell-Gauss stipule que la divergence du champ électrique est proportionnelle à la distribution de charges électriques.

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

La formule de Maxwell-Flux (aussi connue sous le nom de Maxwell-Thomson stipule que la divergence du champ magnétique est nulle

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

La formule de Maxwell-Ampère stipule que le rotationnel du champ magnétique dépend d'une variation du champ électrique au cours du temps

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon \mu} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\text{Et} \quad (2.5)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (2.6)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.7)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Ainsi que la loi de conservation de la charge :

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.8)$$

Tel que :

\vec{E} : champs électrique en V/m – \vec{B} : champ d'induction magnétique en Tesla

\vec{D} : champs déplacement électrique en C/m² – \vec{H} : champ magnétique A/m

ε : permittivité électrique du milieu

μ : perméabilité magnétique du milieu

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (2.9)$$

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (2.10)$$

Avec

ε_r : permittivité électrique relative

ε_0 permittivité électrique du vide = $8,85418782 \times 10^{-12}$ F/m

μ_r : perméabilité magnétique relative

μ_0 : perméabilité magnétique du vide = $4\pi 10^{-7}$ T m/A.

2.3 Les ondes électromagnétiques

Les équations de Maxwell sous forme différentielle sont valables à tout moment pour chaque point de l'espace. Nous étudierons d'abord les solutions aux Équations de Maxwell dans les régions dépourvues de source, à savoir dans les régions où $\mathbf{J} = 0$ et $\rho = 0$. Les sources doivent exister en dehors des régions d'intérêt afin de produire des champs dans ces régions. Ainsi dans les régions sans source dans l'espace libre, les équations de Maxwell deviennent les équations de propagation vérifiées par le champ. En prenant le rotationnel de l'équation Maxwell-Faraday (équation 2.3), et en appliquant la formule du double produit vectoriel, on obtient ainsi :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad (2.11)$$

De même pour l'équation Maxwell-Ampère (équation 2.4) on a :

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

En dehors des sources, les équations 2.11 et 2.12 se réduisent à :

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

On en déduit que le champ électrique E et d'induction magnétique B régissent l'équation d'onde. La vitesse étant:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (2.15)$$

ainsi

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

Et

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Dans le cas où le milieu est le vide, cette vitesse est celle de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (2.18)$$

En régime monochromatique, on a

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r}) \exp(-j\omega t)] \quad (2.19)$$

Les équations 2.16 deviennent les équations de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{v^2} \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.20)$$

Les Solutions canoniques de l'équation d'onde pour les ondes planes s'écrivent:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[E_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)] \quad (2.21)$$

Avec k : t le vecteur d'onde

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.22)$$

2.3.1 Les ondes sphériques

En régime monochromatique, une onde sphérique divergente se propageant dans le vide est de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[\frac{E_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)}{|\vec{r}|} \right] \quad (2.23)$$

2.3.2 Polarisation des ondes planes monochromatiques

On peut réécrire les équations de Maxwell dans le vide pour des ondes planes monochromatiques, sous la forme:

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.24)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.25)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{E} = i\omega\vec{B} \quad (2.26)$$

$$i\vec{k} \cdot \vec{B} = -i\omega\epsilon\mu\vec{E} \quad (2.27)$$

- Les champs E et B sont transverses (normaux à k) et perpendiculaires entre eux ;
- (E, B, k) forment un trièdre direct ;
- Les champs E et B subissent le même déphasage.

2.3.3 Mode de propagation

Dans un repère cartésien (x,y,z), nous présentons les différentes ondes à la figure 2.1.

Les ondes transversales électriques (TE) sont caractérisées par : Le champ électrique E perpendiculaire à k et le champ magnétique H parallèle à k. Dans ce cas-ci, $E_z = 0$ et $H_z \neq 0$

Les ondes transversales magnétiques (TM) sont caractérisées par : Le champ magnétique H perpendiculaire à k et le champ électrique E parallèle à k. Dans ce cas-ci, $H_z = 0$ et $E_z \neq 0$

Les ondes transversales électromagnétiques (TEM) sont caractérisées par : le champ électrique E et le champ magnétique H perpendiculaire à k. Dans ce cas-ci, $H_z = E_z = 0$

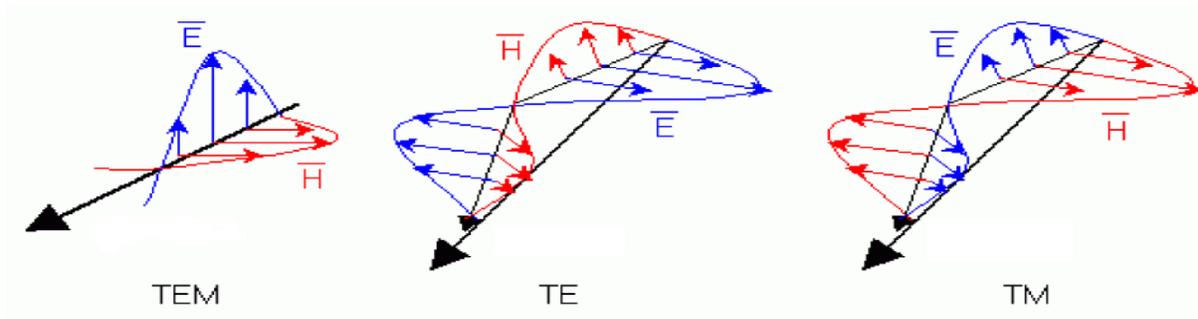


Figure 2.1 les Modes de propagation d'une onde

2.4 Les lignes de transmission

2.4.1 Définition

Une ligne de transmission est un ensemble de deux ou plusieurs conducteurs acheminant de concert un signal électrique, d'une source (ou émetteur) vers une charge (ou récepteur). Dans sa configuration minimale, elle est constituée d'un câble (conducteur de ligne) et d'un connecteur. Elle peut également comporter un ou plusieurs conducteurs de masse ou un blindage, un raccord arrière, des éléments de protection ou d'adaptation, et parfois de dérivation.

2.4.2 Types de lignes de transmission

Les lignes de transmission utilisées peuvent être généralement classifiées en trois catégories distinctes :

1- Lignes Multiconducteurs :

- Câble Coaxial ;
- Ligne Coplanaire ;
- Ligne Strip-line ;
- Ligne Micro-ruban ;
- Ligne à Fente.

2- Lignes Mono-conducteurs :

- Guide d'Ondes Rectangulaire ;
- Guide d'Ondes Circulaire ;
- Guide d'Ondes Elliptique ;
- Ligne Coaxiale ;
- Ligne de Transmission Symétrique ;
- Ligne de Transmission Non-symétrique ;

3- Structures aux Limites Ouvertes :

- Tiges Diélectriques ;
- Guides d'Ondes Ouverts.

Nous présentons trois exemples ; Câble coaxial (figure 2.2) ; Guide d'onde rectangulaire (figure 2.3) ; Ligne Strip-line (figure 2.4)

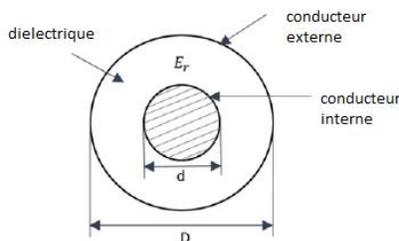


Figure 2.2 Câble coaxial

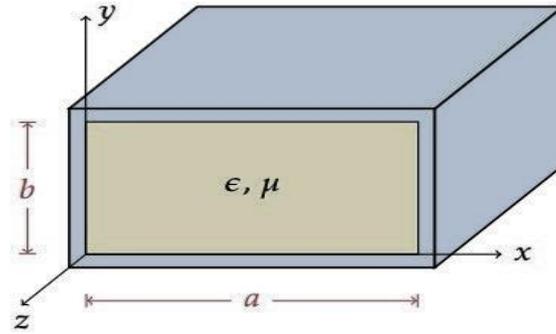


Figure 2.3 Guide d'onde rectangulaire



Figure 2.4 strip-line

2.4.3 Les paramètres linéiques d'une ligne de transmission

La résistance linéique

Pour les basses fréquences, le courant se distribue uniformément dans la section du conducteur, la résistance linéique R_0 du conducteur est calculée par la relation 2.28 [14]

$$R_0 = \frac{1}{\sigma \pi r^2} \quad (2.28)$$

Où r : rayon du conducteur (rn) et σ la conductance

Lorsque la fréquence augmente, cette résistance augmente du fait des effets de peau et de proximité (si l'on considère le cas d'une ligne multiconducteurs). Lorsque la profondeur de peau est petite devant le diamètre du conducteur (ce qui, en général, intervient pour des fréquences de quelques centaines de kHz à quelques MHz), la résistance linéique R d'un conducteur plein s'exprime par la relation approchée (équation 2.29) :

Si $\delta(f) \ll r$

$$R(f) = R_0 \left[\frac{r}{2 \delta(f)} + \frac{1}{4} \right] \quad (2.29)$$

L'inductance

Les entrées de la matrice d'inductance L par unité de longueur relie le flux magnétique total ψ pénétrant dans le i ème circuit, par unité de longueur de ligne, à tous les courants de ligne le produisant comme suit (équation 2.30) [14]:

$$\psi = LI \quad (2.30)$$

ou, sous forme développée (équation 2.31)

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Si nous interprétons les relations ci-dessus d'une manière similaire aux paramètres à n ports nous obtenons les relations suivantes (équations 2.32 et 2.33) pour les entrées de L :

$$l_{ii} = \left. \frac{\psi_i}{I_i} \right|_{I_k=0} \quad \text{sauf pour } k=i \quad (2.32)$$

$$l_{ij} = \left. \frac{\psi_i}{I_j} \right|_{I_k=0} \quad \text{sauf pour } k=j \quad (2.33)$$

Les entrées l_{ii} sont les selfs du i -ième circuit, et les entrées l_{ij} avec $i \neq j$ sont les mutuelles inductances entre le i ième et le j ième circuit.

La capacité

Les entrées de la matrice de capacité C par unité de longueur relie la charge totale sur le i ème conducteur par unité de longueur de ligne à toutes les tensions de ligne qui le produisent (équation 2.34) [14]

$$Q = CV \quad (2.34)$$

Ou, sous forme développée,

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n c_{1k} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & \sum_{k=1}^n c_{2k} & \cdots & -c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \cdots & \sum_{k=1}^n c_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Les c_{ii} et c_{ij} peuvent être calculés (équations 2.36 et 2.37)

$$c_{ii} = \left. \frac{q_i}{V_i} \right|_{V_k=0} \quad \text{sauf pour } k=i \quad (2.36)$$

$$C_{ij} = \frac{q_i}{V_j} \Big|_{V_k=0} \quad \text{sauf pour } k=j \quad (2.37)$$

En tenant compte du fait que la charge peut être reliée à la matrice des coefficients de potentiels P par l'équation 2.38, l'équation 2.34 peut être reformulée sous une autre forme (équation 2.39) qui lie la tension, la charge Q et la matrice des coefficients de potentiels P .

$$C = P^{-1} \quad (2.38)$$

$$V = PQ \quad (2.39)$$

Où, sous forme développée (équation 2.40),

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

où

$$p_{ii} = \frac{V_i}{q_i} \Big|_{q_k=0} \quad \text{sauf pour } k=i \quad (2.41)$$

$$p_{ij} = \frac{V_i}{q_j} \Big|_{q_k=0} \quad \text{sauf pour } k=j \quad (2.42)$$

La conductance

La matrice de conductance par unité de longueur G relie le courant de conduction transversal total passant entre les conducteurs par unité de longueur de ligne à toutes les tensions de ligne qui le produisent (équation 2.43) [14]

$$I_t = GV \quad (2.43)$$

Où

I_t : courant transversal total

Où, sous forme développée (équation 2.44)

$$\begin{bmatrix} I_{t1} \\ I_{t2} \\ \vdots \\ I_{tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n g_{1k} & -g_{12} & \cdots & -g_{1n} \\ -g_{21} & \sum_{k=1}^n g_{2k} & \cdots & -g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_{n1} & -g_{n2} & \cdots & \sum_{k=1}^n g_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

où

$$G_{ii} = \left. \frac{I_{ti}}{V_i} \right|_{V_k=0} \quad \text{sauf pour } k=i \quad (2.45)$$

$$G_{ij} = \left. \frac{I_{ti}}{V_j} \right|_{V_k=0} \quad \text{sauf pour } k=j \quad (2.46)$$

2.4.4 Méthodes d'extraction des paramètres linéiques

L'extraction des paramètres linéiques (R, L, C, G) des lignes de transmission peut être réalisée par diverses méthodes, voici quelques-unes des méthodes couramment utilisées :

Afin de générer un modèle de ligne de transmission approprié, très souvent, les paramètres de circuit équivalents (R, L, C et G) doivent être connus à l'avance.

Diverses méthodes ont été utilisées par les chercheurs pour effectuer l'analyse des lignes de transmission, ces méthodes peuvent être classées par quatre catégories : Analytiques, numériques, expérimentales et semi analytique ;

I. Les méthodes analytiques

- Méthode des Ondes Transversales (TEM) [15] ;
- Méthode ABCD [16] ;
- Méthode de Télégraphie [17] ;
- Méthode de Smith [18] ;
- Méthode de Paramètres Distribués [19] ;

II. Les méthodes numériques

- Méthode des Éléments Finis (FEM) [20] ;
- Méthode des Différences Finies (FDM) [21] ;
- Méthode du Domaine Spectral [22] ;
- Méthode des Éléments de Frontière (BEM) [23] ;
- Méthode des Éléments Finis en Haute Fréquence (HF-FEM) [24] ;

III. Les méthodes expérimentales

- Méthode des Paramètres S [25] ;
- Méthode de l'Impédance Caractéristique (Z_c) et de la Constante de Propagation (γ) [26] ;

IV. Les méthodes semi analytique

- La méthode PEEC (Partial Equivalent Element Circuit) [27] ;

Il est important de noter que le choix de la méthode dépend souvent de la précision requise, des conditions expérimentales et du type de ligne de transmission étudiée. Certains types

de lignes de transmission peuvent nécessiter des méthodes spécifiques pour une extraction précise des paramètres.

Présentation de la méthode du circuit équivalent aux éléments partiels (PEEC)

La méthode PEEC (la méthode des éléments partiels et équivalents en circuit.) est largement employée pour caractériser les lignes de transmission, se distingue par son aptitude à analyser des structures complexes exigeant une considération précise des détails géométriques. Cette méthode repose sur le concept du circuit équivalent aux éléments partiels, dérivé de l'équation du champ électrique total en un point M, tel que $\overline{OM} = \vec{r}$; et donnée par l'équation 2.47:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \frac{\vec{J}(\vec{r}, t)}{\sigma} + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \varphi(\vec{r}, t) \quad (2.47)$$

Où

\vec{E}_i est le champ électrique incident,

\vec{J} est la densité de courant,

\vec{A} est le potentiel vecteur magnétique

φ est le potentiel électrique scalaire.

La méthode PEEC découpe la structure en éléments discrets tels que des polyèdres ou des polygones, assignant à chacun un circuit équivalent qui rend compte de son comportement électromagnétique. On distingue deux types de cellules : la cellule volumique (figure 2.5a) et la cellule surfacique (figure 2.5b). La cellule volumique peut être modélisée comme cellule conductrice (figure 2.6a) ou cellule diélectrique (figure 2.6b). La cellule surfacique a le modèle illustré à la figure 2.6c. Ces circuits équivalents sont ensuite interconnectés pour représenter l'ensemble de la structure. Ceci permet une analyse précise des interactions électromagnétiques au sein de systèmes complexes [28].

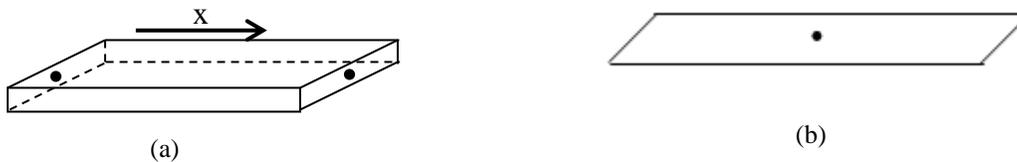


Figure 2.5 Cellule PEEC : cellule volumique, (b) cellule surfacique

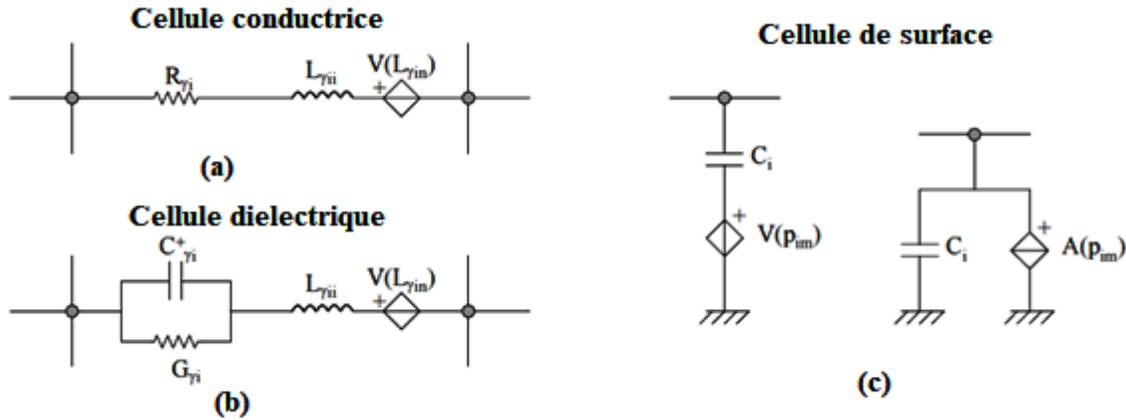


Figure 2.6 Modèles PEEC :

(a) Cellule conductrice, (b) Cellule diélectrique ; (c) Cellule de surface

Les calculs des éléments partiels des cellules de volume ou de surface dépendent de la forme de ces cellules; par exemple pour une cellule de volume de forme parallélépipède rectangulaire, l'inductance (L), la capacité (C) et la résistance (R) peuvent être calculés par les équations 2.48-2.50:

$$L = \frac{\mu l}{2a} \quad (2.48)$$

$$C = \frac{\varepsilon a l}{l} \quad (2.49)$$

$$R = \frac{\rho l}{a} \quad (2.50)$$

Où

μ : est la perméabilité magnétique du matériau à l'intérieur du parallélépipède

ε : est la permittivité électrique du matériau à l'intérieur du parallélépipède

l : est la longueur du parallélépipède dans la direction de (l'inductance, la capacité ou la résistance)

a : est la section transversale du parallélépipède dans la direction de (l'inductance, la capacité ou la résistance)

2.5 Modélisation des lignes de transmission

Aux fréquences où la longueur de la ligne de transmission est inférieure à un dixième de longueur d'onde, la ligne de transmission peut être approximée à l'aide des lois de tension et de courant de Kirchhoff. Un signal dans une ligne de transmission réfléchira dans les deux sens pour finalement se stabiliser. Le temps de stabilisation du signal est plus court que la période du signal pour un signal basse fréquence. Un signal haute fréquence aura une période comparable au temps d'établissement de la ligne de transmission.

Le circuit équivalent localisé d'une ligne de transmission est illustré à la figure 2.7 [29]

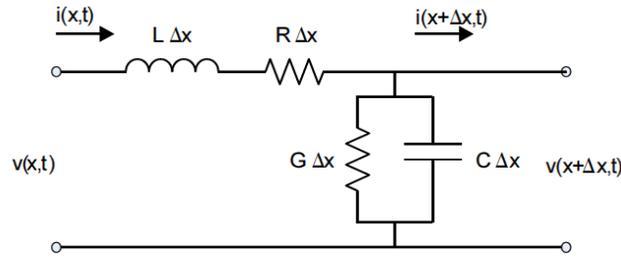


Figure 2.7 Schéma équivalent d'un tronçon de ligne de longueur Δx

En utilisant la loi des nœuds de Kirchhoff, dans le domaine temporel, nous avons :

$$i(x, t) - G\Delta x v(x + \Delta x, t) - C \Delta x \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} - i(x + \Delta x, t) = 0 \quad (2.51)$$

Et pour la loi des mailles de Kirchhoff :

$$v(x, t) - R\Delta x i(x + \Delta x, t) - L \Delta x \frac{\partial i(x + \Delta x, t)}{\partial t} - v(x + \Delta x, t) = 0 \quad (2.52)$$

La forme différentielle des équation 2.51 et 2.52, est donnée par les équations 2.53 et 2.54

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -R i(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -G v(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.54)$$

Les équations 2.53 et 2.54 sont les équations des télégraphistes.

En notation harmonique on a les équations 2.55 et 2.56 :

$$\frac{dV}{dx} = -(R + j\omega L)I = -ZI \quad (2.55)$$

$$\frac{dI}{dx} = -(G + j\omega C)V = -YV \quad (2.56)$$

Où

Z : L'impédance série de la ligne (Ω/m)

Y :L'admittance parallèle de la ligne (S/m).

Les équations 2.55 et 2.56 sont résolues simultanément, ce qui donne les équations d'onde pour V et I.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -(R + j\omega L) \frac{dI}{dx} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V \quad (2.57)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = -(G + j\omega C) \frac{dV}{dx} = (G + j\omega C)(R + j\omega L)I \quad (2.58)$$

La constante de propagation complexe s'écrit par la relation 2.59

$$\gamma = \sqrt{(G + j\omega C)(R + j\omega L)} \quad (2.59)$$

On pose

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.60)$$

Avec α est appelé coefficient d'atténuation et β est appelé coefficient de phase.

Coefficient d'atténuation (α) : Il mesure l'atténuation du signal le long de la ligne de transmission. Plus α est grand, plus le signal est atténué rapidement.

Coefficient de phase (β) : Il représente le changement de phase du signal lorsqu'il se propage le long de la ligne. Plus β est grand, plus le signal subit un changement de phase important.

Les coefficients α et β peuvent être calculés par les équations 2.61 et 2.62

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega RC + GL)^2 + (RG - \omega^2 LC)^2} \quad (2.61)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega RC + GL)^2 - (RG - \omega^2 LC)^2} \quad (2.62)$$

L'introduction de la constante de propagation complexe dans les équations 2.57 et 2.58, permis d'écrire ces équations sous la forme (équations 2.63 et 2.64)

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I \quad (2.61)$$

En divisant l'équation 2.60 par l'équation 2.61, nous obtenons l'impédance caractéristique Z_c ,

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (2.63)$$

2.6 Analyse de lignes multi-conductrices.

L'analyse expérimentale ou théorique des liaisons filaires peut être effectuée dans les domaines temporels (régime transitoire) et fréquentiel (régime harmonique). Au cas par cas, ces deux approches duales présentent chacune des avantages particuliers.

Analyse Fréquentielle : En se focalisant sur le domaine fréquentiel, on explore le comportement des signaux sur une plage de fréquences. Cette approche permet une compréhension détaillée des réponses en fréquence de la ligne de transmission, mettant en lumière les résonances, les atténuations et les retards associés à différentes composantes fréquentielles. Cela s'avère crucial dans la conception de systèmes de communication et de réseaux qui opèrent à des fréquences spécifiques [30].

Analyse Temporelle : L'approche temporelle, quant à elle, se concentre sur l'évolution des signaux au fil du temps. Elle offre une perspective dynamique, permettant d'observer les réponses transitoires de la ligne. Cela peut être particulièrement essentiel pour comprendre les réactions de la ligne à des signaux d'impulsion ou à des changements brusques dans les conditions d'excitation [31].

Le choix entre l'analyse temporelle et fréquentielle dépend largement des exigences spécifiques de l'application. Par exemple, dans les systèmes de transmission de données à haut débit, l'analyse fréquentielle peut aider à optimiser les performances en éliminant les distorsions indésirables, tandis que dans les systèmes de contrôle où la réponse transitoire est critique, l'analyse temporelle peut être privilégiée.

Il est important de noter que, souvent, ces deux approches ne sont pas exclusives l'une de l'autre, mais plutôt complémentaires. Une analyse complète pourrait impliquer des investigations dans les deux domaines pour garantir une conception robuste et une performance fiable du système de transmission.

2.6.1 Analyse des lignes multiconducteurs dans le domaine fréquentiel

La solution générale pour une ligne à $(n+1)$ -conducteurs

L'analyse des lignes de transmission à $n+1$ conducteurs dans le domaine fréquentiel revêt une grande importance dans les domaines de l'électromagnétisme appliqué et des systèmes de communication. Cette approche permet d'étudier le comportement des signaux électromagnétiques sur une plage de fréquences donnée [29].

Le cas général d'une ligne de transmission multiconducteurs est illustré à la figure 2.8. Les $n + 1$ conducteurs sont parallèles entre eux et à l'axe z . Les réseaux terminaux à la source (à $z = 0$) et à la charge (à $z = \mathcal{L}$) sont illustrés sous forme de représentations équivalentes de Thevenin généralisées qui contiennent des sources d'excitation localisées.

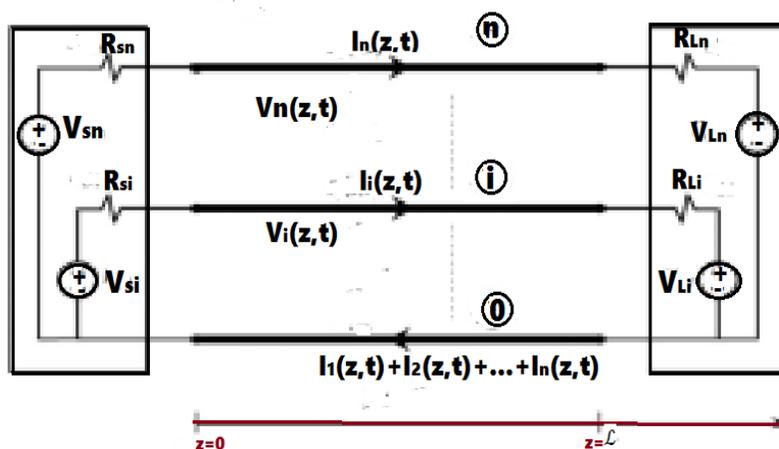


Figure 2.8 ligne de transmission multiconducteurs

Nous supposons que la variation temporelle des sources d'excitation de la ligne est sinusoïdale et que la ligne est en régime permanent. Par conséquent, les tensions et courants de ligne sont également sinusoïdaux avec une amplitude et un angle de phase et la même fréquence que les sources. Ainsi, les n tensions de ligne et les n courants de ligne dans le domaine temporel sont obtenus à partir de leur forme harmonique de la manière habituelle comme :

$$V_i(z, t) = \text{Re}\langle \hat{V}_i(z) e^{j\omega t} \rangle \quad (2.63)$$

$$I_i(z, t) = \text{Re}\langle \hat{I}_i(z) e^{j\omega t} \rangle \quad (2.64)$$

où $\text{Re}(\cdot)$ désigne la partie réelle de la quantité complexe incluse,

Les tensions et courants en régime harmonique ont une amplitude et un angle de phase tels que (équations 2.65-2.66)

$$\hat{V}_i(z) = V_i(z) e^{j\theta_i(z)} \quad (2.65)$$

$$\hat{I}_i(z) = I_i(z) e^{j\theta_i(z)} \quad (2.66)$$

$\omega = 2\pi f$ est la pulsation d'excitation (ainsi que la pulsation des tensions et courants de ligne résultants)

$$V_i(z, t) = V_i(z) \cos(\omega t + \theta_i(z)) \quad (2.67)$$

$$I_i(z, t) = I_i(z) \cos(\omega t + \theta_i(z)) \quad (2.68)$$

En remplaçant toutes les dérivées temporelles dans les équations de la ligne de transmission multiconducteurs du domaine temporel par $j\omega$, les équations des télégraphistes dans le domaine fréquentiel en régime harmonique sont données, sous forme matricielle:

$$\frac{d\hat{V}(z)}{dz} = -\hat{Z}\hat{I}(z) \quad (2.69)$$

$$\frac{d\hat{I}(z)}{dz} = -\hat{Y}\hat{V}(z) \quad (2.70)$$

Où

$$\hat{Z} = R + j\omega L \quad (2.71)$$

$$\hat{Y} = G + j\omega C \quad (2.72)$$

La deuxième dérivée :

$$\frac{d^2\hat{V}(z)}{dz^2} = \hat{Z}\hat{Y}\hat{V}(z) \quad (2.73)$$

$$\frac{d^2\hat{I}(z)}{dz^2} = \hat{Y}\hat{Z}\hat{I}(z) \quad (2.74)$$

Les équations (2.69) et (2.70) sont interdépendantes en raison de la nature complète des matrices ZY et YZ . Le principe fondamental de la méthode de résolution consiste à les désolidariser à l'aide d'une transformation de similarité [3-7]. Nous procédons ainsi à un changement de variables pour décomposer les équations différentielles du second ordre dans (2.73) et (2.74), les reformulant sous la forme de n équations distinctes.

La transformation de similarité est une technique mathématique qui vise à simplifier ou diagonaliser des systèmes d'équations. Dans le contexte de l'analyse fréquentielle d'une ligne de transmission multiconducteurs, elle est utilisée pour découpler les équations (2.73) et (2.74), qui sont couplées en raison des matrices ZY et YZ [29].

En employant la technique des transformations de similarité, la tension et le courant peuvent être exprimés en fonction des deux transformations de similarité, notées \hat{T}_v et \hat{T}_i (équations 2.75 et 2.76)

$$\hat{V}(z) = \hat{T}_v \hat{V}_m(z) \quad (2.75)$$

$$\hat{I}(z) = \hat{T}_i \hat{I}_m(z) \quad (2.76)$$

Les matrices complexes $n \times n$ \hat{T}_v et \hat{T}_i doivent être non singulières ; c'est-à-dire que \hat{T}_v^{-1} et \hat{T}_i^{-1} doivent être définies. Par exemple, nous pouvons choisirons \hat{T}_v et \hat{T}_i de manière à satisfaire les conditions suivantes (équations 2.77-2.78)

$$\hat{T}_v^{-1} \hat{Z} \hat{Y} \hat{T}_v = \hat{\gamma}^2 \quad (2.77)$$

$$\hat{T}_i^{-1} \hat{Y} \hat{Z} \hat{T}_i = \hat{\gamma}^2 \quad (2.78)$$

où γ est la constante de propagation complexe

Après le découplage des équations 2.73 et 2.74 Par l'utilisation des transformations de similarité, la résolution générale des équations de ligne de transmission multiconducteurs devient plus aisée, on peut ainsi entreprendre la résolution en résolvant un système d'équations simplifiées.

2.6.2 Analyse des lignes multiconducteurs dans le domaine temporel

Bien qu'il existe des techniques d'intégration numérique très robustes et des outils très fiables et largement utilisés tels que SPICE [32-35] pour la simulation dans le domaine temporel des circuits, et en raison de l'absence d'une solution unique à tous types de problèmes de ligne de transmission, l'analyse des lignes de transmission est devenue un vaste sujet de recherche [36–39].

Les lignes sans pertes et à faibles pertes peuvent être analysées efficacement en utilisant la méthode des caractéristiques [37,40]. Le principal problème de la simulation des lignes de transmission avec pertes est la conversion du domaine fréquentiel au domaine temporel. Les lignes couplées avec pertes sont caractérisées dans le domaine fréquentiel et de nombreuses techniques ont été proposées pour la transformation dans le domaine temporel. Elles peuvent essentiellement être classées en trois groupes :

- 1) techniques basées sur la transformée de Fourier inverse [41–44] ;
- 2) techniques basées sur la transformée de Laplace inverse [45–47] ;

3) techniques rationnelles ou basées sur l'approximation de Pad [36 ,48-54],

Chaque méthode a ses propres avantages et inconvénients en termes de précision, d'efficacité et de généralité.

2.6.2.1 La solution pour les lignes sans pertes

Dans le cas d'une ligne sans pertes, les équations des télégraphistes sont données par les équations 2.79 et 2.80 :

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \tag{2.79}$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \tag{2.80}$$

Les équations non couplées du second ordre sont (équation 2.81 et 2.82):

$$\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial t^2} \tag{2.81}$$

$$\frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z^2} = CL \frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial t^2} \tag{2.82}$$

L'objectif est de déterminer la solution générale de ces équations et l'incorporation des conditions terminales. Certains travaux antérieurs sont représentés par [55–64].

2.6.2.2 La méthode des différences finies en domaine temporel

La méthode des différences finies en domaine temporel repose sur l'approximation des dérivées spatiales et temporelles de la tension V et le du courant I en par des différences finies.

Les équations des télégraphistes peuvent être écrites sous forme en utilisant les différences centrales [65,67] et selon le schéma de Yee [68] (figure 2.9).

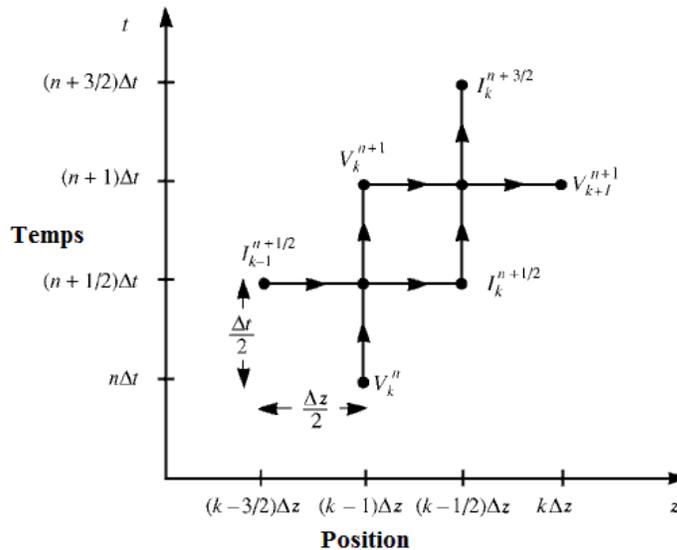


Figure 2.9 Disposition des composantes du champ électromagnétique dans une cellule de Yee.

Pour découpler la tension V et le courant I de l'équation 2.79 et 2.80, le courant est discrétisé dans espace avec un demi pas pour assurer le décalage entre V et I (équations 2.83 et 2.84) :

$$V_k^n = V((k-1)\Delta z, n\Delta t) \quad (2.83)$$

$$I_k^n \equiv I\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta z, n\Delta t\right) \quad (2.84)$$

Avec $k=1,2,\dots, ndz$ où ndz : nombre total de discrétisations dans l'espace

Et $n=1, 2, \dots, ndt$ où ndt : nombre total de discrétisations dans le temps

Les équations des télégraphistes peuvent s'écrire sous forme discrétisées (équations 2.85 et 2.86)

:

$$(V_{k+1}^{n+1} - V_k^{n+1}) = -\frac{\Delta z}{\Delta t} L(I_k^{n+3/2} - I_k^{n+1/2}) \quad (2.85)$$

$$(I_k^{n+1/2} - I_{k-1}^{n+1/2}) = -\frac{\Delta z}{\Delta t} C(V_k^{n+1} - V_k^n) \quad (2.86)$$

Leur résolution donne les relations de récursivité pour les points intérieurs le long de la ligne comme :

Pour $k=2,3,\dots, ndz$

$$V_k^{n+1} = V_k^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} C^{-1}(I_k^{n+1/2} - I_{k-1}^{n+1/2}) \quad (2.87)$$

Avec ndz : le nombre total de points.

Pour $k=1,2,\dots, ndz$

$$I_k^{n+3/2} = I_k^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta z} L^{-1}(V_{k+1}^{n+1} - V_{k-1}^{n+1}) \quad (2.88)$$

La deuxième équation de ligne de transmission donnée par l'équation (2.118) est discrétisée à la source selon le schéma de la figure 2.9 par l'équation 2.122 :

$$\frac{2}{\Delta z} \left[I_1^{n+1/3} - \frac{I_S^{n+1} + I_S^n}{2} \right] = -\frac{1}{\Delta t} C[V_1^{n+1} - V_1^n] \quad (2.89)$$

Les équations (2.117 et 2.118) sont résolues pour donner les relations de récurrence des tensions à la source et à la charge :

$$V_1^{n+1} = V_1^n - \frac{2\Delta t}{\Delta z} C^{-1} I_1^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{\Delta z} C^{-1} [I_S^{n+1} + I_S^n] \quad (2.90)$$

$$V_{ndz+1}^{n+1} = V_{ndz+1}^n - \frac{2\Delta t}{\Delta z} C^{-1} I_{ndz}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta z} C^{-1} [I_L^{n+1} + I_L^n] \quad (2.91)$$

Pour $n=1, 2, \dots, ndt$

Dans les équations 2.89, 2.90 et 2.91, on note respectivement I_S et I_L les $n \times 1$ vecteurs des courants respectivement à la source et à la charge.

2.7 Interaction entre un champ électromagnétique externe et une ligne de transmission

Considérons le cas d'une ligne aérienne monofilaire sans pertes située à la hauteur h au-dessus d'un sol parfaitement conducteur (figure 2.10). La ligne est excitée par un champ électromagnétique transitoire externe non uniforme, le champ exciteur (\vec{E}^e, \vec{B}^e) , qui est déterminé en l'absence du fil aérien mais en tenant compte de la présence du plan de masse. A noter que le champ total (\vec{E}, \vec{B}) est donné par la somme du champ exciteur et du champ dit diffusé (\vec{E}^s, \vec{B}^s) , qui est le champ produit par la réaction du fil au champ exciteur. En intégrant les équations de Maxwell le long du contour de la figure 2.10 et en utilisant l'approximation de la ligne de transmission, il est possible de dériver une paire d'équations décrivant le couplage du champ électromagnétique externe à la ligne aérienne. Ces équations sont résumées ci-dessous dans trois formulations différentes mais équivalentes proposées par différents auteurs [69].

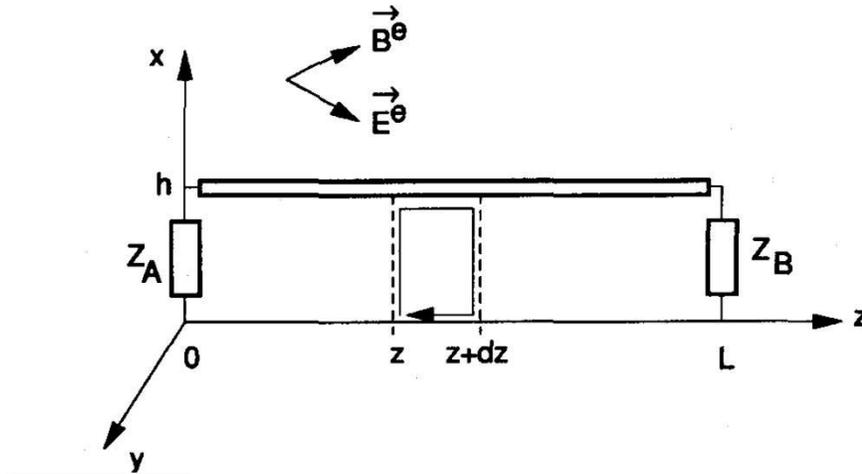


Figure 2.10 Ligne de transmission simple excitée par un champ électromagnétique

2.7.1 Modèle de Taylor,

Dans ce modèle, le champ électrique vertical exciteur (source de courant) et le champ d'induction magnétique horizontal (transverse) exciteur (source de tension) apparaissent explicitement comme les termes sources [70].

$$\frac{dV(z)}{dz} + j\omega L I(z) = j\omega L \int_0^h B^e(x, z) dx \quad (2.92a)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} + j\omega C V(z) = -j\omega C \int_0^h E^e(x, z) dx \quad (2.92b)$$

Où $V(z)$ et $I(z)$ sont respectivement la tension et les courants le long de la ligne ; C et L sont la capacité de ligne par unité de longueur et l'inductance de ligne.

Les conditions aux limites sont

$$V(0) = -Z_A I(0) \quad (2.93)$$

$$V(L) = Z_B I(L) \quad (2.94)$$

Les seconds membres des équations 2.93 et 2.94 sont les termes sources, qui sont exprimés en termes d'induction magnétique transversale et de composantes électriques verticales du champ d'excitation.

2.7.2 Modèle d'Agrawal

Dans ce modèle, les deux équations de couplage, sont exprimées en termes de tension diffractée et de courants totaux [71] ;

$$\frac{dV^s(z)}{dz} + j\omega LI(z) = E_z^e(h, z) \quad (2.95)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} + j\omega CV^s(z) = 0 \quad (2.96)$$

Où $V^s(z)$ est la tension diffusée, rapportée à la tension totale par l'équation suivante :

$$V^s(z) = V(z) - V^e(z) = V(z) + \int_0^h E^e(x, z) dx \quad (2.97)$$

Les conditions aux limites, écrites en termes de tension diffusion sont :

$$V^s(0) = -Z_A I(0) + \int_0^h E_x^e(x, 0) dx \quad (2.98)$$

$$V^s(L) = Z_B I(L) + \int_0^h E_x^e(x, L) dx \quad (2.99)$$

2.7.3 Modèle de Rachidi

Dans le modèle de Rachidi, seul le champ magnétique apparaît explicitement comme un terme de source de courant [72]

$$\frac{dV(z)}{dz} + j\omega LI^s(z) = 0 \quad (2.100)$$

$$\frac{dI^s(z)}{dz} + j\omega CV(z) = -\frac{1}{L} \int_0^h \frac{\partial B_z^e(x, z)}{\partial y} dx \quad (2.101)$$

où $I^s(z)$ est le courant diffusé lié au courant total par :

$$I(z) = I^s(z) + I^e(z) = I^s(z) + \frac{1}{L} \int_0^h B_y^e(x, z) dx \quad (2.102)$$

Le terme $I^e(z)$ est appelé courant d'excitation. Les conditions aux limites sont

$$I^s(0) = -\frac{V(0)}{Z_A} - \frac{1}{L} \int_0^h B_y^e(x, 0) dx \quad (2.103)$$

$$I^s(L) = \frac{V(L)}{Z_B} - \frac{1}{L} \int_0^h B_y^e(x, L) dx \quad (2.104)$$

2.8 Rayonnements électromagnétiques des lignes de transmission

Les lignes de transmission jouent un rôle crucial dans le domaine de l'électrotechnique et de l'électronique, formant un pilier fondamental de tout système électrique et électronique. Elles assurent la transmission des signaux essentiels entre les dispositifs et les composants électroniques, tout en agissant souvent comme des intégrateurs pour les signaux indésirables (perturbations). De ce fait, une compréhension approfondie des processus de couplage électromagnétique avec les lignes de transmission à conducteurs multiples est essentielle, notamment dans une perspective de compatibilité électromagnétique (CEM), en vue d'évaluer et de protéger un système électrique contre tout couplage involontaire ou intentionnel.

- **Pour les hautes fréquences**

Lorsque les fréquences deviennent élevées et que la longueur d'onde devient comparable à la dimension transversale de la ligne, les modèles classiques de lignes de transmission atteignent leurs limites [73-74]. De plus, les bandes de fréquences utilisées et les interférences prévues ont constamment augmenté au cours des dernières décennies. Les méthodes numériques directes, telles que la méthode des moments, ne sont adaptées que pour des cas spécifiques et nécessitent des ressources informatiques considérables pour de grands systèmes. Ainsi, le développement de méthodes analytiques ou analytiques-numériques pour évaluer l'interaction entre les champs à haute fréquence et les lignes de transmission à fil mince semble être une approche plus efficace.

Plusieurs études ont été menées sur ce sujet. Par exemple, dans [75], un modèle amélioré de ligne de transmission pour un fil fin a été développé en se basant sur les équations différentielles du flux magnétique par unité de longueur et de la charge électrique par unité de longueur, ainsi que sur les connexions intégrales entre ces grandeurs et l'intensité du courant et le potentiel, respectivement. Une autre méthode avancée nommée (Le modèle équivalent à deux ports d'une ligne de transmission) [76-77] a été appliquée pour résoudre l'équation intégrale du champ électrique pour un fil fin au-dessus du sol en utilisant des séries de polynômes orthogonaux. Dans [78], l'accent a été mis sur l'interaction du champ externe avec des lignes finies. Les équations intégrales correspondantes de la ligne de transmission ont été résolues par une transformation spatiale de Fourier. Dans [79], les auteurs ont introduit une résistance uniforme aux radiations pour décrire les pertes dans la ligne finie. Le problème du couplage haute fréquence à une ligne de transmission finie a été brièvement abordé dans [80].

Toutes les méthodes analytiques-numériques décrites dans [75–78] nécessitent des solutions numériques d'équations intégrales. Pour éviter cette procédure, deux méthodes ont été

proposées dans [73-71] : la méthode d'itération et l'approche asymptotique. La première ne nécessite qu'une intégration et donne de bons résultats, même dès la première itération

- **Pour les basses fréquences :**

- **Champs électromagnétiques rayonnés par les lignes haute tension**

La connaissance de la distribution du champ électrique joue un rôle essentiel dans la conception et l'analyse des appareils et systèmes de haute tension. Pour un système physique simple, il est généralement possible de trouver une solution analytique. Ces solutions sont :

- A. Solutions analytiques basées sur les équations de Carson et l'intégrale de Pollaczek [79],
- B. Méthode des coefficients du potentiel de Maxwell [80]
- C. Méthode de Mark et Mengele et son extension [81]
- D. Méthode des images successives [82].
- E. Transformations conformes [83]

Cependant, dans de nombreux cas, la plupart des applications réelles sont si complexes qu'il est extrêmement difficile, voire impossible, de trouver les solutions analytiques. Dans de tels cas, des méthodes numériques sont employées pour les calculs de champ électrique. Les méthodes numériques couramment utilisées sont :

- A. Méthode de Simulation de Charge en Surface [84] ;
- B. Méthode de Simulation de Charge en Surface [85] ;
- C. Méthode des Différences Finies [86] ;
- D. Méthode des Éléments de Frontière [87] ;
- E. Méthode des Éléments Finis [88] ;
- F. Méthode de l'Électrode Équivalente [89] ;
- G. Méthode de Monte Carlo [90] ;
- H. Méthodes des moments [91] ;
- I. La méthode des équations intégrales [92].

Pour les applications en haute tension qui impliquent des problèmes de frontière ouverte, la méthode des charges fictives et la méthode des moments sont normalement préférées car elles ne nécessitent pas de discrétisation de la région de solution.

2.8.1 Méthode des moments

La méthode des moments (MoM) trouve ses premières applications en mécanique et en génie civil [93]. Cependant, en 1996, R. Harrington a démontré que cette méthode pouvait également être utilisée pour résoudre des problèmes en électromagnétisme [94]. Elle consiste à transformer une équation fonctionnelle en une équation matricielle, et est généralement employée avec des formulations intégrales.

Pour les problèmes en électromagnétisme, seule la frontière du conducteur est discrétisée. L'approche de base implique de développer la quantité inconnue à la frontière en utilisant un ensemble de fonctions connues avec des coefficients inconnus. Ensuite, les conditions aux limites sont appliquées pour convertir l'équation résultante en un système linéaire d'équations. Ce dernier

est résolu pour les coefficients inconnus. Vous pouvez trouver une description plus détaillée de cette procédure dans [95]. Les étapes impliquées sont les suivantes :

Pour les problèmes en électromagnétisme, seule la frontière du conducteur est discrétisée. L'approche de base implique de développer la quantité inconnue à la frontière en utilisant un ensemble de fonctions connues avec des coefficients inconnus. Ensuite, les conditions aux limites sont appliquées pour convertir l'équation résultante en un système linéaire d'équations. Ce dernier est résolu pour les coefficients inconnus. Vous pouvez trouver une description plus détaillée de cette procédure dans [95]. Les étapes impliquées sont les suivantes :

a) Pour le conducteur avec des valeurs de potentiel connues à la frontière et une densité de charge inconnue, celle-ci est discrétisée en sous-sections presque carrées.

b) La quantité inconnue (densité de charge) à la frontière est exprimée comme la somme du produit de la quantité inconnue et de la fonction de base de toutes les sous-sections (équation 2.105) [29].

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i p_i \quad (2.105)$$

Où

σ_i est la densité de charge inconnue à chaque sous-section ;

p_i est la fonction de base connue.

Les fonctions de base les plus couramment utilisées sont les fonctions d'impulsion, les fonctions triangulaires par morceaux et les fonctions sinusoïdales par morceaux [29].

c) Un produit interne de la fonction de base et de la fonction de pondération (ou fonction de test) est utilisé pour obtenir l'ensemble linéaire d'équations tout en appliquant les conditions aux limites. Les méthodes les plus couramment utilisées sont la méthode d'appariement de points et la méthode de Galerkin [29].

$$[V] = [K][\sigma] \quad (2.106)$$

Où

$[V]$ est un vecteur de potentiel connu ;

$[\sigma]$ est un vecteur de densité de charge inconnue.

$[K]$ est une matrice carrée,

Dans le contexte de la méthode des moments en électromagnétisme, la matrice K (en Siemens/m) représente la relation linéaire fondamentale entre les densités de charge et les potentiels électriques à différentes positions du système étudié. Nous pouvons dire aussi que K représente la conductance électrique par unité de longueur entre les différentes composantes du système étudié. Chaque élément K_{ij} de la matrice quantifie l'effet d'une composante de charge sur un point de potentiel spécifique, fournissant ainsi un moyen de modéliser les interactions électromagnétiques dans le système.

d) L'ensemble linéaire d'équations est résolu pour les valeurs inconnues à la frontière, qui peuvent ensuite être utilisées pour calculer le potentiel et le champ électrique dans la région d'intérêt.

2.8.2 Méthode de charge fictive

La méthode de simulation de charge a été introduite en 1969 par H. Steinbigler [96]. C'est la technique la plus populaire dans le domaine de l'isolation haute tension et de l'analyse des décharges, la méthode est basée sur l'équation de Laplace (équation 2.140).

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.107)$$

Le principe de cette méthode est de simuler un champ réel avec un champ formé par un nombre fini de charges de simulation (charges ponctuelles et linéaires de longueur infinie et semi-infinie [97] placées en dehors de la région où le champ solution est souhaité: les valeurs des charges discrètes sont déterminées en satisfaisant les conditions aux limites en un nombre sélectionné de points de contour (équation 2.108).

$$[Q_s] = [P]^{-1}[V_b] \quad (2.108)$$

Où:

[V_b] : vecteur des tensions aux points de contour,

[Q_s] : vecteur des charges fictives,

[P]: matrice des coefficients de potentiel calculés par points de contour et charges fictives.

Sur la base du théorème de gradient du champ électrostatique (équation 2.109), du théorème de superposition et du théorème de charges images [98]. Les composants en un point arbitraire M(x,y,z) produits par n charges ponctuelles peuvent être calculés en utilisant les équations (2.110) et (2.111) .

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad V} \quad (2.109)$$

$$E_y(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y - y_i}{R_i^2} + \Gamma \frac{y - y_i}{R_i'^2} \right) \quad (2.110)$$

$$E_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{z - z_i}{R_i^2} + \Gamma \frac{z + z_i}{R_i'^2} \right) \quad (2.111)$$

où

Γ : coefficient de réflexion du sol

R_i : la distance entre le point arbitraire M et le conducteur i

R'_i² : la distance entre le point arbitraire M et l'image du conducteur i

2.9 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre l'importance des lignes de transmission et leur présence dans la plupart des systèmes électriques et électroniques en tant que transporteurs d'informations, d'énergie ou de commandes, elles fonctionnent dans différents environnements électromagnétiques à hautes et basses fréquences, grandes et petites énergies...etc. Ceci en fait des sources d'interférences électromagnétiques car elles sont affectées par leurs environnements

électromagnétiques. Pour ces raisons, l'étude et l'analyse de la compatibilité électromagnétique est une étape très importante dans la conception de tout système dans lequel elles sont présentes.

Malgré le grand nombre de méthodes d'analyse des lignes de transmission, ces méthodes restent incapables de quantifier les effets des incertitudes qui peuvent survenir dans la structure des lignes ou dans ses composants.

2.10 Références bibliographiques

- [1] P. J. Nahin, *Oliver Heaviside*. New York, New York, USA: IEEE Press, 1988.
- [2] R. A. Chipman, « *Theory and Problems of Transmission Lines* ». New York, New York, USA: Mc-GrawHill, Inc., 1968.
- [3] L. A. Pipes, “Matrix theory of multiconductor transmission lines,” *Phil.Mag.*, vol. 24, pp. 97–113, 1937.
- [4] L. A. Pipes, “Steady-state analysis of multiconductor transmission lines,” *J. Appl. Phys.*, vol. 12, pp. 782–789, 1941
- [5] S. O. Rice, “Steady state solutions of transmission line equations,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 20, pp. 131–178, Apr. 1941.
- [6] W. C. Johnson, *Transmission Lines and Networks*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1950.
- [7] L. V. Bewley, *Traveling Waves on Transmission Systems*, 2nd ed. New York, NY, USA: Wiley, 1951.
- [8] Zaborsky and J. W. Rittenhouse, *Electric Power Transmission*. New York, NY, USA: Ronald, 1954.
- [9] S. Hayashi, *Surges on Transmission Systems*. Kyoto, Japan: Denki-Shoin, 1955.
- [10] L. Bergeron, *Water Hammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity*. New York, NY, USA: Wiley, 1961.
- [11] W. Frey and P. Althammer, “The calculation of electromagnetic transients on lines by means of a digital computer,” *Brown Boveri Rev.*, no. 48, pp. 344–355, 1961.
- [12] L. M. Wedepohl, “Application of matrix methods to the solution of traveling wave phenomena in polyphase systems,” *Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 110, pp. 2200–2212, 1963.
- [13] P. I. Kuznetsov and R. L. Stratonovich, *The Propagation of Electromagnetic Waves in Multiconductor Transmission Lines*. New York, NY, USA: Macmillan, 1964.
- [14] P. Grivet, “*Physique des lignes de haute fréquence et d’ultra-haute fréquence*”, Masson & Cie, Tome 1, 1969.
- [15] Smith, C. R., “*Transmission-line networks: An analytical and synthesis approach*”. D. Van Nostrand Company. 1953
- [16] Matthaei, G. L., Young, L., & Jones, E. M. T. , “*Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures*”. Artech House.1980
- [17] Ramo, S., Whinnery, J. R., & Duzer, T. V. , “*Fields and waves in communication electronics*”. John Wiley & Sons.1994
- [18] Smith, P. H., “*An improved transmission-line reflectometer*. *IRE Proceedings*”, 24(3), 277-285. 1936
- [19] Gibson, W. C., “*The Method of Moments in Electromagnetics*”. CRC Press. 2005
- [20] Jin, J. M., “*The finite element method in electromagnetics*” (3rd ed.). John Wiley & Sons. 2014
- [21] Taflove, A., & Hagness, S. C. “*Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method*” (3rd ed.). Artech House. 2005
- [22] Harrington, R. F. “*Time-Harmonic Electromagnetic Fields*”. McGraw-Hill. 1961
- [23] Katsenelenbaum, B. Z. “*Boundary element analysis in computational fracture mechanics*”. CRC Press.2000
- [24] Jin, J. M. “*The Finite Element Method in Electromagnetics*” (4th ed.). John Wiley & Sons. 2015
- [25] Gupta, K. C., Garg, R., & Chadha, R. “*Computer-aided design of microwave circuits*”. Prentice-Hall. 1979

- [26] Pozar, D. M. "Microwave engineering" (3rd ed.). John Wiley & Sons. 2005
- [27] Ruf, T., Fichtner, W., & Wiesbeck, W. "The partial element equivalent circuit (PEEC) technique: A fast and versatile method for the simulation of high-speed interconnects". IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 42(9), 1750-1758. 1994
- [28] A. Ruehli, "Partial element equivalent circuit (PEEC) method and its application in the frequency and time domain," Proceedings of Symposium on Electromagnetic Compatibility, Santa Clara, CA, USA, 1996, pp. 128-133, doi: 10.1109/IEMC.1996.561214.
- [29] M N. O. Sadiku and L. C. Agba, "A simple introduction to the transmission-line modeling," in IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 37, no. 8, pp. 991-999, Aug. 1990, doi: 10.1109/31.56072.
- [30] Clayton R. Paul, "FrequencyDomain Analysis of Multiconductor Lines," in Analysis of Multiconductor Transmission Lines , IEEE, 2008, pp.282-342.
- [31] A. R. Djordjevic, T. K. Sarkar and R. F. Harrington, "Time-domain response of multiconductor transmission lines," in Proceedings of the IEEE, vol. 75, no. 6, pp. 743-764, June 1987, doi: 10.1109/PROC.1987.13797.
- [32] W. Nagel, "SPICE2: A computer program to simulate semiconductor circuits," Univ. California, Berkeley, Tech. Rep. Memo. ERL-M520, May 1975.
- [33] J. M. Gomez, J. I. Alonso and A. R. Djordjevic, "Comments on "SPICE-compatible models for multiconductor transmission lines in Laplace-transform domain" [with reply]," in IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 47, no. 9, pp. 1750-, Sept. 1999, doi: 10.1109/22.788619.
- [34] Y. Tanji, "SPICE model composed of exact poles and residues of multi-conductor lossy transmission lines," 2002 IEEE 11th Topical Meeting on Electrical Performance of Electronic Packaging, 2002, pp. 293-296, doi: 10.1109/EPEP.2002.1057935.
- [35] Raya, M. Magdowski, S. V. Tkachenko and R. Vick, "SPICE-Based Lumped Circuit Model of Multiconductor Lines Excited by an Incident Plane Wave," 2022 International Symposium on Electromagnetic Compatibility – EMC Europe, 2022, pp. 644-648, doi: 10.1109/EMCEurope51680.2022.9901258.
- [36] D. B. Kuznetsov and J. E. Schutt-Aine, "Optimal transient simulation of transmission lines," IEEE Trans. Circuits Syst. I, vol. 43, pp. 110–121, Feb. 1996.
- [37] R. Gupta, S.-Y. Kim, and L. T. Pileggi, "Domain characterization of transmission line models and analyses," IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 15, pp. 184–193, Feb. 1996
- [38] Celik and A. C. Cangellaris, "A general dispersive multiconductor transmission line model for interconnect simulation in SPICE," in IEEE/ACM Int. Conf. Computer-Aided Design, San Jose, CA, Nov. 1996, pp. 563–568.
- [39] J.-F. Mao, J. M. Wang, and E. S. Kuh, "Simulation and sensitivity analysis of transmission line circuits by the characteristics method," presented at the IEEE/ACM Int. Conf. Computer-Aided Design, San Jose, CA, Nov. 1996.
- [40] J. F. H. Branin, "Transient analysis of lossless lines," Proc. IEEE, vol. 37, pp. 2012–2013, Nov. 1967.
- [41] A Djordjevic, T. Sarkar, and R. Harrington, "Analysis of lossy transmission lines with arbitrary nonlinear terminal networks," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-34, pp. 660–666, June 1986.
- [42] J. E. Schutt-Aine and R. Mittra, "Scattering parameter transient analysis of transmission lines loaded with nonlinear terminations," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 36, pp. 529–636, June 1988.

- [43] P. Vakanas, A. C. Cangellaris, and O. A. Palusinski, "Scattering parameter-based simulation of transients in lossy, nonlinearly terminated packaging interconnections," *IEEE Trans. Comp., Packag., Manuf. Technol. B*, vol. 17, pp. 472–479, Nov. 1994
- [44]] I. Maio, S. Pignari, and F. Canavero, "Influence of the line characterization on the transient analysis of nonlinearly loaded lossy transmission lines," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 41, pp. 197–209, Mar. 1994.
- [45] E. C. Chang and S. M. Kang, "Computationally efficient simulation of a lossy transmission line with skin effect by using numerical inversion of Laplace transform," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 39, pp. 861–868, Nov. 1992.
- [46] L. Lu, M. S. Nakhla, and Q.-J. Zhang, "A resetting algorithm for transient analysis of lossy coupled transmission line circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 42, pp. 494–500, Mar. 1994.
- [47]] I. Maio and F. G. Canavero, "Lossy transmission line response via numerical Laplace transform inversion," in *Proc. Int. Symp. Circuits Syst.*, London, U.K., May 1994, pp. 133–136.
- [48] J. Gruodis and C. S. Chang, "Coupled lossy transmission line characterization and simulation," *IBM J. Res. Develop.*, vol. 25, no. 1, pp. 25–41, 1981.
- [49] T. K. Tang and M. S. Nakhla, "Analysis of high-speed VLSI interconnects using the asymptotic waveform evaluation technique," *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 11, pp. 341–352, Mar. 1992.
- [50] J. Bracken, V. Raghavan, and R. Rohrer, "Interconnect simulation with asymptotic waveform evaluation (AWE)," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, pp. 869–878, Nov. 1992.
- [51] Y. Chang, "Transient simulation of nonuniform coupled lossy transmission lines characterized with frequency dependent parameters—Part II: Discrete time analysis," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, pp. 879–892, Nov. 1992.
- [52] S. Lin and E. Kuh, "Transient simulation of lossy interconnects based on the recursive convolution formulation," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, pp. 879–892, Nov. 1992.
- [53] Q. Yu and O. Wing, "Computational models of transmission lines with skin effects and dielectric loss," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 41, pp. 107–119, Feb. 1994.
- [54] L. M. Silveira, I. M. Elfadel, J. K. White, M. Chilukuri, and K. S. Kundert, "An efficient approach to transmission line simulation using measured or tabulated s -parameter data," presented at the *Proc. Design Automation Conf.*, June 1994.
- [55] Amemiya, Time domain analysis of multiple parallel transmission lines, *RCA Review*, 28, 241–276, 1967.
- [56] F.Y. Chang, Transient analysis of lossless coupled transmission lines in inhomogeneous dielectric media, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 18 (9), 616–626, 1970
- [57] C.W. Ho, Theory and computer-aided analysis of lossless transmission lines, *IBM Journal of Research and Development*, 17, 249–255, 1973.
- [58]] K.D. Marx, Propagation modes, equivalent circuits, and characteristic terminations for multiconductor transmission lines with inhomogeneous dielectrics, *IEEE Transactionson Microwave Theory and Techniques*, 21 (7), 450–457, 1973.
- [59] H.W. Dommel and W. S. Meyer, Computation of electromagnetic transients, *Proceedings of IEEE*, 62 (7), 983–993, 1974.
- [60] A.J. Gruodis, Transient analysis of uniform resistive transmission lines in a homogeneous medium, *IBM Journal of Research and Development*, 23 (6), 675–681, 1979.
- [61] A.J. Gruodis and C. S. Chang, Coupled lossy transmission line characterization and simulation,

- IBM Journal of Research and Development, 25 (1) 25–41, 1981.
- [62] A.R. Djordjevic, T.S., Sarkar, and R.F. Harrington, Analysis of lossy transmission lines with arbitrary nonlinear terminal networks, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 34 (6), 660–666, 1986.
- [63] A.R. Djordjevic, T.S. Sarkar, and R.F. Harrington, Time-domain response of multiconductor transmission lines, *Proceedings of IEEE*, 75 (6), 743–764, 1987.
- [64] V.K. Tripathi and J.B. Rettig, A SPICE model for multiple coupled microstrips and other transmission lines, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 33 (12), 1513–1518, 1985.
- [65] Orlandi and C. R. Paul, "FDTD analysis of lossy, multiconductor transmission lines terminated in arbitrary loads," in *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, no. 3, pp. 388-399, Aug. 1996, doi: 10.1109/15.536069
- [66] Vu PhanTu and J. Tlustý, "Higher-order (2,8) FDTD method for solving multiconductor transmission-line equations," 2004 Large Engineering Systems Conference on Power Engineering (IEEE Cat. No.04EX819), 2004, pp. 57-62, doi: 10.1109/LESCPE.2004.1356267.
- [67] Zerrouk, H. Kabbaj and A. Amharech, "Time domain analysis of incident field coupling to a microwave circuit: FDTD approach & PSpice validation," 2017 Mediterranean Microwave Symposium (MMS), 2017, pp. 1-4, doi: 10.1109/MMS.2017.8497069.
- [68] K.S. Yee Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, *IEEE trans. Antennas Propag.*, AP-14 (3) : 302-307, 1966
- [69] C. A. Nucci and F. Rachidi, "On the contribution of the electromagnetic field components in field-to-transmission line interaction," in *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 37, no. 4, pp. 505-508, Nov. 1995, doi: 10.1109/15.477334.
- [70] C. D. Taylor, R. S. Sattenwhite, and C. W. Harrison, "The response of a terminated two-wire transmission line excited by a nonuniform electromagnetic field," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-13, pp. 987-989, 1965.
- [71] K. Agrawal, H. J. Price, and S. Gurbaxani, "Transient response of a multiconductor transmission line excited by a nonuniform electromagnetic field," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. EMC-22, pp. 119-129, May 1980.
- [72] F. Rachidi, "Formulation of the field-to-transmission line coupling equations in terms of magnetic excitation field," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 35, no. 3, pp. 404-407, 1993.
- [73] S. Tkachenko, F. Rachidi, and J. Nitsch, "High-frequency electromagnetic coupling to transmission lines: Electrodynamics correction to the TL approximation," in *Electromagnetic Field Interaction with Transmission Lines: From Classical Theory to HF Radiation Effects*, Southampton, U.K.: WIT Press, 2008, pp. 123–158.
- [74] S. Tkachenko, F. Rachidi, and J. Nitsch, "High-frequency electromagnetic coupling to long loaded non-uniform lines: An asymptotic approach," in *Electromagnetic Field Interaction with Transmission Lines: From Classical Theory to HF Radiation Effects*, Southampton, U.K.: WIT Press, 2008, pp. 159–186
- [75] Maffucci A., G. Miano, and F. Villone, "An enhanced transmission line model for conducting wires," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 46, no. 4, pp. 512–528, Nov. 2004.
- [76] F. Delfino, F. Maradei, R. Procopio, and M. Rossi, "Analysis of several methods for the response evaluation of HF field excited finite lines," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 39, no. 3, pp. 1606–1609, May 2003.
- [77] Brignone, F. Delfino, R. Procopio, and M. Rossi, "An equivalent two-port model for a transmission line of finite length accounting for high-frequency effects," *IEEE Trans. Electromagn.*

- Compat., vol. 56, no. 6, pp. 1657–1665, Dec. 2014.
- [78] D. Larrabee, “Solutions of the transmission line equations modified to include excitation by, and re-radiation of, electromagnetic fields,” IEEE Int. Conf. Electromagn. Compat., 1999, pp. 414–416.
- [79] H Xue, A. Ametani, J. Mahseredjian, I. Kocar et C. F. Mugombozi, «Frequency and Time Responses of Wave Propagation from Low Frequency to High Frequency on Overhead Conductors,» (in press).
- [80] G. E. Adams, “Voltage Gradients on High-Voltage Transmission Lines,” Trans. Amer. Inst. Elect. Eng. Power App. Syst., Part III. , vol. 74, no. 3, pp. 5–11, 1955.
- [81] "A Survey of Methods for Calculating Transmission Line Conductor Surface Voltage Gradients," in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-98, no. 6, pp. 1996-2014, Nov. 1979, doi: 10.1109/TPAS.1979.319379.
- [82] M. P. Sarma and W. Janischewskyj, “Electrostatic field of a system of parallel cylindrical conductors,” IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-88, no. 7, pp. 1069–1079, Jul. 1969.
- [83] Y. Jiang et al. , ' Calculation of Power Frequency Electric Field under Overhead Lines with Sloping Ground by Conformal Mapping' , Shanghai, China International Conference on Information Science and Control Engineering, April 2015 pp 645 - 648
- [84] Singer, H. Steinbigler, P. Weiss, 'A charge simulation method for the calculation of high voltage fields', IEEE Trans. PAS, Vol. 93,pp. 1660-1668, 1974.
- [85] Misaki T, Tsuboi H, Itaka K, Hara T, 'Computation of three-dimensional electric field problems by a surface charge method and its application to optimum insulator design', IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems (Volume: PAS-101, Issue: 3, March 1982) pp 627 - 634
- [86] Izadian , M. Jalili, ' A Generalized FDM for solving the Poisson’s Equation on 3D Irregular Domains', Communications in Numerical Analysis, Volume 2014 (2014), Article ID cna-00201.,
- [87] R. Liu, H. Liu, P. Xie , ' Calculation of the Electric Field from EHV Transmission Lines Based on the Boundary Element Method ', Waikoloa, Hawaii. World Automation Congress Proceedings, 28 September - 2 October 2008
- [88] M. Kumar et al., ' Electric field analysis of extra high voltage (EHV) underground cables using finite element method', Environment and Electrical Engineering and 2017 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC / I&CPS Europe), 2017. pp 1-4
- [89] D. M. Velickovic, 'Equivalent Electrodes Method', Scientific Review, 1996, Belgrade, Number 21 - 22, pp. 207 - 248
- [90] M. Kraus, K. Muller, 'A Monte Carlo method for two- and three-dimensional electrostatic field calculation in materials of different permittivity', Athens, Greece, Int. Symp. High Voltage Engineering, Sept. 1983, p. 1104.
- [91] T. L. Simpson ; C. W. Brice , 'Moment Method Analysis of the Electric Field Under EHV Transmission Lines' , IEEE Power Engineering Review (Volume: PER-7, Issue: 10, Oct. 1987).pp 66 - 67
- [92] F. Vico, M.I F. Bataller, E. A. Daviu, ' An Electric field based low frequency stable integral equation method for multiply connected perfect conductors', Seville, Spain, IEEE MTT-S International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization for RF, Microwave, and Terahertz Applications (NEMO), 17 May - 19 May 2017.
- [93] Y. U. Vorobev, Method of Moments in Applied Mathematics, New York, Gordon & Breach, 1965 (translated from Russian by Seckler).
- [94] R. F. Harrington, "Matrix methods for field problems," in Proceedings of the IEEE, vol. 55, no. 2, pp. 136-149, Feb. 1967, doi: 10.1109/PROC.1967.5433.

- [95] .F. Harrington and IEEE Antennas and Propagation Society, Field computation by moment methods. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1993.
- [96] H Singer, H. Steinbigler P. Weiss, "A charge simulation method for the calculation of high voltage fields", IEEE trans, PAS vol.93, pp1660-1668, 1974.
- [97] S. Chakravorty, "Charge Simulation Method: a critical overview", Ie (I) journal, vol. 78, pp. 210-214, Mar. 1998.
- [98] R. Gómez Martín;" Electromagnetic field theory for physicists and engineers:Fundamentals and Applications "; Springer, New York, 2010

Chapitre 3

Méthodes Statistiques et Stochastiques

3.1 Introduction

La prise en compte de l'incertain dans les problèmes de l'ingénierie est devenue un enjeu industriel car les systèmes étudiés sont de nature complexe au sens où tous les paramètres de conception ne peuvent être complètement déterminés. En effet, pour un système, la modélisation déterministe possède certaines limites malgré les progrès considérables effectués depuis ces dernières années. Pour pallier ces limites, une approche statistique permettant d'estimer l'impact des différents aléas d'entrée sur l'observable de sortie semble pertinente. Les outils de méthodes statiques et stochastiques sont essentiels pour effectuer une telle analyse.

Dans ce chapitre, nous aborderons les concepts de statistiques et les méthodes de calcul de la progression des incertitudes par les méthodes statistiques et stochastiques.

3.2 Introduction à la probabilité

La probabilité mathématique est un concept axiomatique abstrait, et la théorie des probabilités constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain. Elle forme un tout cohérent dont les concepts, les méthodes et les résultats interviennent dans de très nombreux domaines des sciences et des technologies.

3.2.1 Processus aléatoires

Un processus aléatoire ou stochastique est une variable aléatoire qui évolue dans le temps ou dans l'espace ou d'autre domaine d'application. La variable peut avoir un ensemble discret de valeurs à un moment donné, ou un continuum de valeurs. De même, la variable temporelle peut être discrète ou continue. Un processus stochastique est considéré comme complètement décrit si la distribution de probabilité est connue pour tous les ensembles de temps possibles. Un processus stationnaire est un processus qui n'a pas d'origine temporelle absolue. Toutes les probabilités sont indépendantes d'un déplacement de l'origine des temps.

3.2.2 La probabilité [1]

La probabilité est une branche fondamentale des mathématiques qui quantifie l'incertitude inhérente à un événement ou à une situation. Nous citons ci-dessous les principes fondamentaux et les notations mathématiques associées à la probabilité.

Soit Ω l'univers total des résultats possibles d'un processus aléatoire, et soit $X, Y \dots$ les éléments (ou des réalisations) de Ω ;

Une fonction de probabilité P est définie comme une application sur les nombres réels (l'équations 3.1 et 3.2) :

$$P : \{\Omega\} \rightarrow [0:1] \quad (3.1)$$

$$X \rightarrow P(X) \quad (3.2)$$

Cette définition doit satisfaire les axiomes définis par les équations 3.3a et 3.3b suivants :

$$P(\Omega) = 1 \quad (3.3a)$$

$$\text{Si } X \cap Y = \emptyset, \quad \text{alors } P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) \quad (3.3b)$$

à partir de laquelle diverses propriétés utiles (équations 3.4-3.6) peuvent être facilement dérivées.

$$P(\bar{X}) = 1 - P(X) \quad (3.4)$$

$$P(X \cup \bar{X}) = 1 \quad (3.5)$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad (3.6)$$

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \quad (3.7)$$

(Où \bar{X} est le complément de X).

Deux éléments X et Y sont dits indépendants (c'est-à-dire que leurs réalisations ne sont liées en aucune façon) si l'équation 3.8 est vérifiée

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y) \quad (3.8)$$

Probabilité conditionnelle et théorème de Bayes

La probabilité d'un événement X conditionnellement à un événement Y, que l'on note $P(X|Y)$ se définit pour $P(Y) > 0$ par l'équation 3.9

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} \quad (3.9)$$

C'est la probabilité que l'évènement A se produise sachant que B s'est réalisé.

Formule de Bayes

Pour tous événements X et Y tels que $P(X) > 0$ et $P(Y) > 0$ on a la propriété de l'équation 3.10:

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)} \quad (3.10)$$

Formule des probabilités totales

Pour tous les événements X et Y avec $0 < P(X) < 1$, Formule des probabilités totales est donnée par l'équation 3.11 :

$$P(X) = P(X|Y)P(Y) + P(X|\bar{Y})P(\bar{Y}) \quad (3.11)$$

Indépendance

Deux évènements X et Y sont indépendants si et seulement si $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$, alors $P(X|Y) = P(X)$ et $P(Y|X) = P(Y)$.

3.2.3 Variable aléatoire

Une variable aléatoire (également appelée quantité aléatoire ou variable stochastique) est une formalisation mathématique d'une quantité ou d'un objet qui dépend d'événements aléatoires [1]. Il s'agit d'un mappage ou d'une fonction des résultats possibles dans un espace échantillon à un espace mesurable, souvent les nombres réels.

Fonction de répartition

La loi d'une variable aléatoire X se caractérise par sa fonction de répartition F_X équation 3.12

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1] \quad (3.12)$$

$$x \mapsto F_X(x) = P(X \leq x)$$

F_X est croissante et continue à droite.

3.2.4 La fonction de densité de probabilité

Dans de nombreux cas, on souhaite manipuler des données qui peuvent être représentées comme une variable aléatoire à valeur réelle, ou un vecteur à valeur réelle $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. La plupart des intuitions des variables discrètes se transfèrent directement au cas continu, bien qu'il y ait quelques subtilités. On décrit les probabilités d'une variable scalaire à valeur réelle x avec une fonction de densité de probabilité, notée $p(x)$. Toute fonction à valeur réelle $p(x)$ qui satisfait les conditions de l'équation 3.13

$$\forall x \quad p(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad (3.13)$$

On utilise la convention du P majuscule pour les probabilités discrètes et du p minuscule pour les fonctions de densité de probabilité.

Avec la fonction de densité de probabilité, on peut spécifier la probabilité par la variable aléatoire x qui se trouve dans une plage donnée (équation 3.14)

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (3.14)$$

3.2.5 Les moments statistiques

Les moments statistiques se définissent grâce à la densité de probabilité de la façon suivante:

Dans le cas continu (équation 3.15)

$$m_k = \int_{x \in I} x^k p(x) dx \quad (3.15)$$

Dans le cas discret (équation 3.16)

$$m_k = \sum_{i=1}^N x^k p(x) \quad (3.16)$$

Moment d'ordre 1 : C'est la moyenne ou l'espérance (équation 3.17)

$$m_1 = \int_{x \in I} x p(x) dx = E(X) \quad (3.17)$$

Dans le cas discret (équation 3.18) :

$$m_1 = \sum_{i=1}^N x p(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = E(X) \quad (3.18)$$

Moment d'ordre 2 : C'est la variance (équation 3.19)

$$m_2 = \int_{x \in I} x^2 p(x) dx \quad (3.19)$$

Dans le cas discret (équation 3.20)

$$m_2 = \sum_{i=1}^N x^2 p(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (3.20)$$

L'écart type (équation 3.21):

$$\sigma = \sqrt{m_2} \quad (3.21)$$

Moment d'ordre 3 : C'est le Skewness (équation 3.22)

$$m_3 = \int_{x \in I} x^3 p(x) dx \quad (3.22)$$

Dans le cas discret (équation 3.23):

$$m_k = \sum_{i=1}^N x^3 p(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^3 \quad (3.23)$$

Moment d'ordre 4 : C'est le Kurtosis (équation 3.24)

$$m_4 = \int_{x \in I} x^4 p(x) dx \quad (3.24)$$

Dans le cas discret (équation 3.25) :

$$m_k = \sum_{i=1}^N x^4 p(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^4 \quad (3.25)$$

3.2.6. Les lois de probabilité [1]

Les lois de probabilité permettent de décrire les variables aléatoires sous la forme d'une « expérience type » puis d'analyser cette expérience en détail pour pouvoir déduire les principales caractéristiques de toutes les expériences aléatoires qui sont du même type. On s'intéressera ici à quelques lois qui sont très fréquentes.

3.2.6.1 Loi de Poisson

La loi de Poisson ou modèle de Poisson permet la modélisation de l'observation d'un phénomène qui produit des événements à un rythme connu. On s'intéresse à l'observation d'événements et on suppose

1. un seul événement arrive à la fois.
2. le nombre d'événements se produisant ne dépend que du temps de l'observation.
3. les événements sont indépendants.

Considérons X la variable aléatoire qui donne le nombre d'événements observés dans une unité de temps.

On a alors un phénomène de Poisson et la variable aléatoire qui donne le nombre d'événements par unité de temps suit une loi de Poisson, notée $X \sim P(\lambda)$, où λ , est le nombre moyen d'événements par unité de temps.

La loi de probabilité est donnée par la fonction de densité de probabilité (équation 3.26)

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (3.26)$$

L'espérance (équation 3.27):

$$E(X) = \lambda \quad (3.27)$$

La variance (équation 3.28)

$$\text{Var}(X) = \lambda \quad (3.28)$$

L'écart type (équation 3.29)

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda} \quad (3.29)$$

3.2.6.2 Loi uniforme

La loi uniforme de probabilité est un concept fondamental en statistiques et en probabilités. Elle décrit une distribution de probabilité où chaque résultat possible a la même probabilité de se produire. Dans cette distribution, la probabilité d'obtenir n'importe quelle valeur x définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$ est uniformément répartie sur l'intervalle considéré

$$\text{La fonction de densité de probabilité } p(x) = \frac{1}{b-a} \text{ pour } X \in [a, b] \quad (3.30)$$

$$\text{L'espérance : } E(X) = \frac{a+b}{2} \quad (3.31)$$

$$\text{La variance : } \text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12} \quad (3.32)$$

$$\text{L'écart type : } \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad (3.33)$$

3.2.6.3 Loi Normale

La loi normale est très importante en statistique : plusieurs phénomènes ont une loi de probabilité très proche de la loi normale, suffisamment proche pour utiliser cette dernière pour les modéliser. De plus, elle est souvent utilisée pour faire des approximations dans le domaine de l'estimation et des tests d'hypothèses.

La fonction de densité de probabilité $p(x)$ d'une variable aléatoire x définie sur l' intervalle $[-\infty, +\infty]$, est donnée par l'équation 3.34.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \quad (3.34)$$

Tel que μ : est la moyenne et σ est l'ecrt type

On dit que X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 . Et on note : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

La densité a la forme présentée à la figure 3.1 :

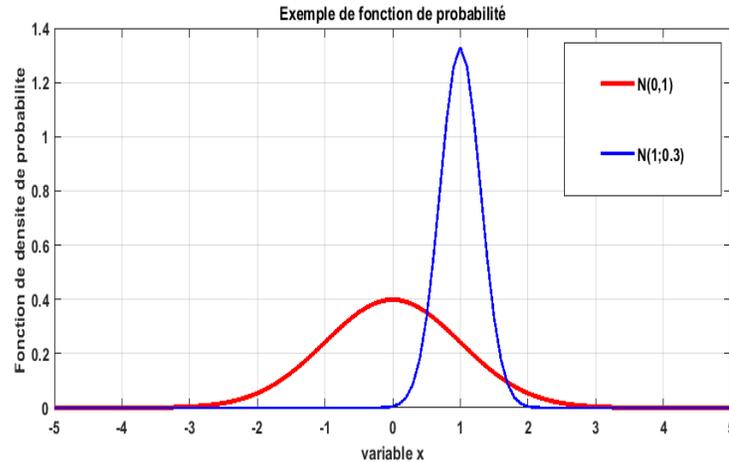


Figure 3.1 Exemples de forme de distribution normale

La loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$, est appelée loi normale centrée réduite ou loi normale standard.

3.2.6.4 Loi de Weibull

En théorie des probabilités, la loi de Weibull, nommée d'après Waloddi Weibull en 1951, est une loi de probabilité continue. La loi de Weibull est un cas spécial de loi d'extremum généralisée au même titre que la loi de Gumbel ou la loi de Fréchet [2].

La formule de la densité de probabilité de la distribution générale de Weibull est donnée par l'équation (3.35) :

$$p(x) = \frac{B}{A} \left(\frac{x-\mu}{A}\right)^{B-1} \exp(-((x-\mu)/A)^B), \quad x \geq \mu; A, B > 0 \quad (3.35)$$

Où B est le paramètre de forme, μ est le paramètre d'emplacement et A est le paramètre d'échelle.

Le cas où $\mu = 0$ et $A=1$, est appelé distribution de Weibull standard.

Le cas où $\mu = 0$ est appelé distribution de Weibull à deux paramètres. L'équation de la distribution standard de Weibull se réduit à l'équation 3.36:

$$p(x) = Bx^{B-1} \exp(-x^B), \quad x \geq 0; B > 0 \quad (3.36)$$

La formule de la fonction de distribution cumulative de la distribution de Weibull est :

$$F(x) = 1 - \exp(-x^B),, \quad x \geq 0; B > 0 \quad (3.37)$$

La fonction de densité de probabilité de Weibull est un outil statistique flexible qui peut être adapté à une variété de distributions de probabilité en fonction des valeurs des paramètres A et B. Ces paramètres influent sur la forme de la distribution de Weibull, permettant ainsi de modéliser différentes situations. La Figure 3.2 probablement illustrée dans un contexte particulier, présente quelques exemples de ces variations pour différentes combinaisons de paramètres. Cela met en évidence la capacité de cette distribution à s'adapter à une large gamme de phénomènes réels,

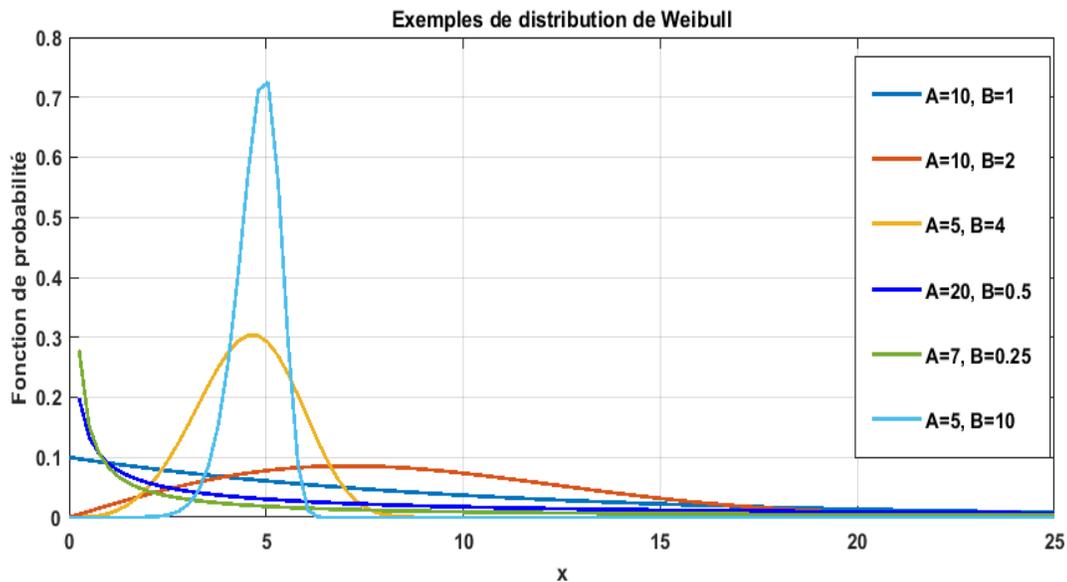


Figure 3.2 formes de distributions de Weibull

3.3 Théorie de l'estimation

3.3.1 Estimation par la méthode des moments

La méthode des moments est un outil d'estimation intuitif qui date du début des statistiques. Elle consiste à estimer les paramètres recherchés en égalisant certains moments théoriques (qui dépendent de ces paramètres) avec leurs contreparties empiriques. L'égalisation se justifie par la loi des grands nombres qui implique que l'on peut "approcher" une espérance mathématique par une moyenne empirique. On est donc amené à résoudre un système d'équations.

L'idée de base est d'estimer une espérance mathématique par une moyenne empirique [3]. Par exemple si on a $E(X) = \varphi(\theta)$, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est donné par l'équation 3.38:

$$\hat{\theta}_n = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.38)$$

Plus généralement, si $E(X) = \varphi(\theta)$, où φ est une fonction inversible, alors l'estimateur de θ par la méthode des moments est donné par l'équation 3.39

$$\hat{\theta} = \varphi^{-1}(\bar{X}) \quad (3.39)$$

où, on remplace le k-ième moment théorique, à savoir $E(X^k)$ (équation 3.40),

$$E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad (3.40)$$

3.3.2 La méthode du maximum de vraisemblance

En 1912, Ronald Aylmer Fisher rédigea son premier article consacré au maximum de vraisemblance. Dans son article de 1912, il propose l'estimateur du maximum de vraisemblance qu'il appelle à l'époque le critère absolu [4]. C'est aussi en 1922, qu'il donne le nom de maximum de vraisemblance à sa méthode [5].

On considère un n-Echantillon $X_1; X_2; \dots; X_n$ de loi P (discrète ou continue). Etant en possession d'une réalisation $x_1; x_2; \dots; x_n$ d'un n-échantillon, une approche naturelle au problème de l'estimation est la suivante: on cherche, parmi toutes les valeurs possibles de θ , celle sous laquelle il était le plus probable d'avoir observé les valeurs $x_1; x_2; \dots; x_n$, en d'autres termes, on cherche la valeur de θ qui explique le mieux les valeurs obtenues. Nous allons à présent construire un estimateur basé sur cette idée.

Fonction de vraisemblance

Soient $X_1; X_2; \dots; X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi. La fonction de vraisemblance est:

Si les X_i sont discrets équation 3.41 :

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i; \theta) \quad (3.41)$$

Si les X_i sont continus équation 3.42:

$$L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i; \theta) \quad (3.42)$$

L'estimation de maximum de vraisemblance de θ . est la valeur $\hat{\theta}_n$ de θ qui rend maximale la fonction de vraisemblance $L(\theta; x_1, \dots, x_n)$. L'estimateur de maximum de vraisemblance de θ est la variable aléatoire correspondante.

3.4 Les incertitudes

On peut définir l'incertitude comme un état de connaissances limitées où il est impossible de décrire exactement l'état existant, un résultat futur ou plus d'un résultat possible. Elle s'applique aux prédictions d'événements futurs, aux mesures physiques déjà effectuées ou à l'inconnu. L'incertitude survient dans des environnements partiellement observables et/ou stochastiques, ainsi qu'en raison de l'ignorance, de l'indolence ou des deux. Elle se pose dans un certain nombre de domaines, y compris la philosophie, la physique, les statistiques, l'économie, la

finance, la psychologie, la sociologie, l'ingénierie, la métrologie, ...etc. Une définition à orientation sociale proposée par Walker et al. [6] est « Tout écart par rapport à l'idéal irréalisable du déterminisme complet ». Dans les modèles, les définitions de l'incertitude se concentrent sur la mesure dans laquelle les données ou le modèle sont une émulation du système réel. Cunha [7] note que l'incertitude du modèle est due au manque de connaissances sur le phénomène d'intérêt et, généralement, est la plus grande source d'inexactitude dans la réponse du modèle informatique. Cuzzolin [8] note que "l'incertitude peut être comprise comme un manque d'informations sur une question d'intérêt pour un certain agent (par exemple, un décideur humain ou une machine), une condition de connaissance limitée dans laquelle il est impossible de décrire exactement l'état du monde ou ses trajectoires futures".

La quantification de l'incertitude est importante pour évaluer et prédire les performances des systèmes d'ingénierie complexes, en particulier en l'absence de données expérimentales ou réelles adéquates. La quantification de l'incertitude est importante pour évaluer et prédire les performances des systèmes d'ingénierie complexes, en particulier en l'absence de données expérimentales ou réelles adéquates

3.4.1 Méthodologie générale de prise en compte des incertitudes

L'ingénierie probabiliste vise à prendre en compte les incertitudes apparaissant dans la modélisation des systèmes physiques et à étudier l'impact de ces incertitudes sur la réponse du système. En tant que science, elle est apparue dans le génie civil et mécanique dans les années 70 bien que des apports pionniers remontent à la première moitié du XXe siècle Mayer [9]; Freudenthal [10] et Lévi [11]. Ce domaine se situe à l'intersection des branches de la physique d'une part et des mathématiques appliquées d'autre part.

Diverses méthodes probabilistes (par exemple, la simulation de Monte Carlo) ont été étudiées pour la propagation de la variabilité physique dans les entrées et les paramètres du modèle, exprimée par des variables aléatoires et des processus ou champs aléatoires. Les méthodes d'éléments finis stochastiques (par exemple, Ghanem et Spanos [12]; Haldar et Mahadevan [13]) ont été développées pour des problèmes mono disciplinaires en mécanique des structures, de la thermique et des fluides.

Classiquement, une étude d'incertitude comporte quatre étapes [14].

1. La spécification du cas d'étude
2. La quantification des sources d'incertitudes
3. La propagation des incertitudes
4. Le classement des sources d'incertitudes

3.5 Méthodes de calcul de propagation des incertitudes :

3.5.1 Méthodes statistiques

3.5.1.1 La méthode de Monte Carlo [15]

Le terme méthode de Monte-Carlo désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est à dire des techniques probabilistes. Le nom de cette méthode fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo. Il n'y a pas de définition précise de ce qu'est une technique de type Monte-Carlo, mais la description la plus habituelle consiste à dire que les méthodes de ce type se caractérisent par l'utilisation du hasard pour résoudre des problèmes centrés sur le calcul d'une valeur numérique. La réponse fournie sera une réponse statistique.

L'une des procédures pour calculer une quantité par la méthode de Monte-Carlo est de la mettre tout d'abord sous la forme d'une espérance. A l'issue de cette étape, il reste à calculer cette quantité par une espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X . Pour ce calcul, il convient de savoir simuler une variable aléatoire selon la loi de X . On dispose alors d'une suite X_i de n réalisations de la variable aléatoire X . On approxime alors $E(X)$ par l'équation 3.43

$$E(X) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.43)$$

3.5.1.2 La méthode de Quasi Monte Carlo [16]

Les méthodes de Quasi-Monte Carlo sont des versions déterministes des méthodes de Monte Carlo. Ces méthodes définissent des séquences d'échantillons déterministes qui ont une divergence plus faible que les séquences aléatoires, c'est-à-dire qu'elles ont une meilleure répartition uniforme dans l'espace des variables d'entrée.

La différence entre les méthodes de Monte-Carlo et quasi-Monte-Carlo tient dans le choix des valeurs x_i . Alors que la méthode de Monte-Carlo utilise une suite de nombres pseudo-aléatoires, la méthode de quasi-Monte-Carlo utilise la suite de Halton, la suite de Sobol ou la suite de Faure, connue pour leur faible divergence. L'un des avantages est de permettre une convergence plus rapide de la méthode par l'utilisation de suites à faible divergence (de l'ordre de σ/N alors que la méthode de Monte-Carlo est en σ/\sqrt{N}) où N est la taille de l'échantillon considéré et σ est l'écart type.

3.5.1.3 Méthodes de réduction de la variance

3.5.1.3.1 Échantillonnage stratifié [17]

Lorsque l'on utilise l'échantillonnage stratifié, on divise la population en groupes homogènes appelés strates qui sont mutuellement exclusifs, puis on sélectionne dans chaque strate des échantillons indépendants.

Considérons la partition suivante : $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = 1$ et appliquons la méthode de Monte Carlo élémentaire séparément sur chaque strate.

On cherche à estimer l'intégrale de l'équation 3.44.

$$\theta = \int_0^1 f(x) dx \quad (3.44)$$

L'estimateur de θ est alors de la forme équation 3.45

$$\hat{\theta}_{STR} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{n_j} \left(\frac{1}{n_j} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) f(\alpha_{i-1} + (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \xi_{ij}) \right) \quad (3.45)$$

où les ξ_{ij} sont des variables uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$.

3.5.1.3.2 Échantillonnage pondéré [18]

Cette méthode est aussi appelée échantillonnage selon l'importance du fait de la présence de la fonction de poids dans l'expression de l'estimateur. L'idée fondamentale de cette technique est de concentrer la distribution des points de l'échantillon dans les parties de la région qui sont plus « importantes » au lieu de les disperser au hasard.

Nous voulons évaluer l'intégrale de l'équation 3.46

$$I = \int_X h(x) f(x) dx \quad (3.46)$$

On appelle échantillonnage pondéré toute méthode proposant d'approcher I à partir de l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n généré selon une loi de densité g par l'approximation de l'équation 3.47

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{f(x_j)}{g(x_j)} h(x_j) \quad (3.47)$$

Cette expression (3.47) provient d'une représentation alternative de I à savoir équation 3.48

$$J = \int_X h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx \quad (3.48)$$

L'estimateur \hat{I}_n converge vers I . La loi de densité g est dite « loi instrumentale » ou « loi d'importance ». Elle peut être sélectionnée parmi les lois faciles à simuler.

L'estimateur de I ne possède une variance finie que si l'espérance

$$E_f \left[h^2(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right] = \int_X h^2(x) \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad \text{est finie}$$

De plus

$$\text{Var}(I_n) = \frac{1}{n} \text{Var} \left(h(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right) \quad (3.49)$$

Où g est la densité de probabilité de la variable aléatoire x .

$$\text{Var}(I_n) = \frac{1}{n} \int_X \left(h(x) \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right)^2 g(x) dx \quad (3.50)$$

3.5.1.3.3 Variables de contrôle [19]

L'idée principale de cette technique de réduction de la variance lors d'une simulation consiste à produire par simulation une variable auxiliaire qui est en corrélation positive avec la variable d'intérêt.

Soit X la variable aléatoire dont on veut estimer la moyenne $\mu = E(X)$, Y la variable d'intérêt obtenue par simulation et $\theta = E(Y)$ sa moyenne. Ici, Y est appelée variable de contrôle.

Construisons l'estimateur de μ (équation 3.51) :

$$X_c = X - a(Y - \theta). \text{ avec } a \in \mathbb{R} \quad (3.51)$$

On a

$$E(X_c) = E(X - a(Y - \theta)) \quad (3.52)$$

Donc X_c est un estimateur sans biais de μ

On obtient

$$\text{Var}(X_c) = \text{Var}(X) + a^2 \text{Var}(Y) - 2a \text{Cov}(X, Y) \quad (3.53)$$

Donc

$$\text{Var}(X_c) < \text{Var}(X) \text{ si } a^2 \text{Var}(Y) - 2a \text{Cov}(X, Y) < 0 \quad (3.54)$$

C'est-à-dire

$$0 < a < \frac{2\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \quad (3.55)$$

Alors $\text{Var}(X_c)$ sera minimisée par la valeur optimale a^* de a

$$a^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \quad (3.56)$$

Ainsi la valeur optimale de $\text{Var}(X_c)$ est $\text{Var}(X_c^*)$ avec

$$\text{Var}(X_c^*) = \text{Var}(X) + \left[\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \right]^2 \text{Var}(Y) - 2 \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \text{Cov}(X, Y) \quad (3.57)$$

$$\text{Var}(X_c^*) = (1 - \rho_{XY}^2) \text{Var}(X) \quad (3.58)$$

Avec

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \quad (3.59)$$

et ρ_{XY} est appelé le coefficient de corrélation entre X et Y , $-1 < \rho_{XY} < 1$

Dans le meilleur des cas possibles, si le coefficient de corrélation est égal à -1 ou 1 , la variance est réduite à zéro.

3.5.2 Les méthodes Stochastiques

3.5.2.1 La méthode de perturbations stochastiques

La méthode de perturbations qui est une méthode très employée dans le domaine des éléments finis stochastiques, initiée par Hien et Kleiber [20] est utilisée par Muscolino [21] pour déterminer la réponse stochastique d'une structure à une excitation déterministe. Elle vise à résoudre des problèmes complexes en décomposant le système étudié en un terme principal et en termes de perturbation. Le terme principal représente le système de base que l'on comprend bien, tandis que les termes de perturbation capturent les effets plus stochastiques qui peuvent influencer le comportement global.

Cette méthode est basée sur le développement en série de Taylor de la réponse autour des valeurs moyennes des variables aléatoires et permet de calculer directement les moyennes et écarts types des solutions. Les variables doivent avoir une faible dispersion, elle repose sur l'idée de décomposer le Hamiltonien du système en un terme dominant H_0 et en termes de perturbation V , Le terme dominant représente le système sous-jacent que l'on comprend relativement bien, tandis que les termes de perturbation décrivent les effets plus subtils ou aléatoires.

Une relation fondamentale dans cette approche est l'expansion perturbative, qui s'exprime par l'équation 3.60 [22]:

$$H = H_0 + V \quad (3.60)$$

Où H est le Hamiltonien total du système.

Cette décomposition permet de représenter le système de manière plus gérable, où encapsule la dynamique principale tandis que V contient les effets stochastiques ou subtils. Une des pierres angulaires de cette méthode est l'expansion perturbative. Les quantités physiques d'intérêt (par exemple l'énergie E d'un système) sont exprimées en séries infinies de termes de perturbation (équation 3.61), chaque terme corrigeant l'approximation du terme dominant.

$$E = E_0 + E_1 + E_2 \dots \dots \dots \quad (3.61)$$

L'énergie totale E est ainsi décomposée en une série d'énergies E_i successives, où E_0 représente l'énergie du terme dominant. Le théorème de Wick [23], souvent utilisé en mécanique statistique quantique, permet de factoriser les expressions contenant des opérateurs de création et d'annihilation, facilitant ainsi la détermination des perturbations.

De plus, pour modéliser les fluctuations aléatoires influençant le système, on introduit des variables aléatoires (moyenne stochastique). Ces dernières capturent les perturbations stochastiques et permettent de décrire les variations dues au processus. L'évolution de la distribution de probabilité des états du système est régie par l'équation de Fokker-Planck (équation 3.62) un outil essentiel dans les systèmes soumis à des processus stochastiques.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \mathcal{L}(P) \quad (3.62)$$

Où

P : la densité de probabilité

\mathcal{L} : Opérateur de Fokker-Planck.

L'opérateur de Fokker-Planck est un opérateur différentiel souvent rencontré en mécanique statistique et en théorie des probabilités. Il est utilisé pour décrire l'évolution temporelle d'une distribution de probabilité sous l'influence de processus stochastiques. Par exemple pour un système à une variable, l'opérateur de Fokker-Planck est représenté par l'équation 3.63

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 D(x)}{\partial x^2} \quad (3.63)$$

Où

$f(x)$: est un terme de drift (qui détermine la tendance du système à évoluer dans une certaine direction)

$D(x)$ est un terme de diffusion (qui quantifie l'ampleur des fluctuations stochastiques).

L'équation 3.62 décrit l'évolution de la densité de probabilité P au fil du temps, En utilisant ces concepts, la méthode des perturbations stochastiques offre une approche systématique pour étudier une variété de phénomènes physiques complexes et aléatoires.

3.5.2.2 La méthode Unscented Transformation

La méthode Unscented Transformation, souvent abrégée UT, est une technique utilisée en estimation d'état, particulièrement dans les filtres de Kalman non linéaires.

Partant du principe qu'il est plus facile d'approximer une fonction de probabilité que d'approximer une fonction ou une transformation non linéaire arbitraire, l'idée centrale de La méthode Unscented Transformation repose sur la sélection d'un ensemble de points de calcul, appelés points sigma associés à des poids w_i , qui capturent la distribution de la variable aléatoire en question. Ces points sont soigneusement choisis pour refléter les moments statistiques de la variable, notamment sa moyenne et sa covariance [24].

Nous considérons ici la même approche de Menezes et al. [25] pour justifier la méthode Unscented Transformation. Pour cela, soit x une variable aléatoire continue de fonction de densité de probabilité $p_x(x)$ et $y = g(x)$ la variable aléatoire construite par une fonction non linéaire lisse $g(x)$ appliquée sur x . En prenant la série de Maclaurin de y avec un nombre arbitraire de termes k , nous pouvons écrire y sous la forme polynomiale (équation 3.64)

$$y = \sum_{i=0}^n \frac{g^{(i)}(0)}{i!} x^i = \sum_{i=0}^n a_i x^i = g(x) \quad (3.64)$$

où $g^{(i)}(0)$ désigne la dérivée i -ième de $g(x)$ évaluée en $x = 0$ et $a_i = \frac{g^{(i)}(0)}{i!}$. En appliquant l'opérateur d'espérance mathématique sur l'équation (3.64), on obtient l'équation 3.65 :

$$E[y] = \sum_{i=0}^n a_i E[x^i] = E[g(x)] \quad (3.65)$$

Principe de base

Dans les méthodes de Monté Carlo, les incertitudes sont prises en compte en représentant tout paramètre incertain par une distribution de probabilité appropriée. Ensuite, des échantillons sont tirés au hasard (la précision des résultats augmente à mesure que davantage d'échantillons sont utilisés), ce qui entraîne une distribution des résultats possibles. Dans UT, les échantillons sont plutôt sélectionnés de manière systématique de sorte que la distribution de probabilité est approximée en utilisant un nombre minimum d'échantillons. Ainsi, le nombre requis de simulations peut être réduit.

Les échantillons utilisés dans la méthode Unscented Transformation sont appelés points sigma. Les points sigma sont sélectionnés et pondérés d'une manière prédéterminée en fonction de la distribution de probabilité à approximer.

Ceci est exprimé de manière mathématique par (3.66), où x et $w(x)$ sont approchés par les points sigma S_i et les poids w_i de sorte que les moments de l'approximation discrète, comme la moyenne ou la variance, correspondent à ceux de la diffusion continue.

$$E(x^k) = \int x^k w(x) dx \approx \sum_i w_i S_i^k \quad (3.66)$$

Les points sigma et les poids peuvent être obtenus à partir de (3.66) via le développement de Taylor [23]. Une approche alternative consiste à considérer l'équation (3.66) comme un problème de quadrature, avec les nœuds et les poids de la quadrature gaussienne correspondant aux points sigma et aux poids. En utilisant cette méthode, le calcul des points sigma et des poids est simple si un polynôme orthogonal existe pour une fonction de distribution donnée [26].

Considérons $P_l(x)$ comme un polynôme de degré l qui est orthogonal à la fonction de pondération $w(x)$. Cela donne l'équation 3.67 :

$$\int x^k w(x) P_l(x) dx = 0 \quad (3.67)$$

Les zéros de $P_l(x)$ donnent des abscisses optimales x_i qui correspondent aux points sigma. Les poids, w_i , sont calculés selon l'équation 3.68

$$w = \frac{1}{P_l'(x)} \int \frac{P_l(x)}{x - x_i} dx \quad (3.68)$$

Cependant, considérons une fonction $h(y)$ où y est une distribution normale avec une moyenne et un écart type. L'espérance de $h(y)$ est calculée par l'équation 3.69

$$E(h(y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) h(y) dy \quad (3.69)$$

Afin d'employer la quadrature de Gauss-Hermite, un changement de variable est utilisé avec l'intégration par substitution (les équations 3.70 et 3.71)

$$E(h(y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) h(\sqrt{2}\sigma x + \mu) dx \quad (3.70)$$

$$E(h(y)) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n w_i h(\sqrt{2}\sigma x_i + \mu) \quad (3.71)$$

Pour une variable aléatoire distribuée gaussienne, cela peut être interprété comme étant les points sigma t multipliés par $\sqrt{2}\sigma$ et ajoutés à μ . Le facteur d'échelle $1/\sqrt{\pi}$, doit être considéré dans l'estimation des moments.

Estimation des moments

Les points sigma transformés ($f(S_i)$) sont utilisés avec les poids w_i pour estimer les moments [27] pour les quatre premiers moments : moyenne, variance, asymétrie et aplatissement par les équations 3.72 -3.75.

$$\hat{\mu} = \sum_i w_i f(S_i) \quad (3.72)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_i w_i (f(S_i) - \hat{\mu})^2 \quad (3.73)$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\sum_i w_i (f(S_i) - \hat{\mu})^3}{\hat{\sigma}^3} \quad (3.74)$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\sum_i w_i (f(S_i) - \hat{\mu})^4}{\hat{\sigma}^4} - 3 \quad (3.75)$$

3.5.2.3 La méthode des polynômes de chaos

Méthodologie des polynômes de chaos

La méthodologie de la méthode des polynômes de chaos est une approche assez récente, qui offre un grand potentiel pour les simulations non déterministes, car elle permet le traitement d'une grande variété de variables et de propriétés stochastiques qui peuvent être décrit par des fonctions de densité de probabilité. La méthode est basée sur une représentation spectrale de l'incertitude où les polynômes de base contiennent le caractère aléatoire, décrit par des variables aléatoires ξ avec des valeurs dans un ensemble Γ , et les coefficients d'expansion inconnus sont déterministes, ce qui donne des équations déterministes. Plus précisément, si u est une variable aléatoire indexée par une variable spatiale $x \in D \subseteq \mathbb{R}^d$ (typiquement, $d = 3$ dans l'espace physique) et le temps $t \geq 0$, L'approximation de $u(x,t,\xi)$ par la méthode des polynômes de chaos est donnée par équation 3.76 [28]

$$u(x, t, \xi) \approx \mathbb{P}^P[u] = \sum_{i=0}^P u_i(x, t) \Psi_i(\xi) \quad (3.76)$$

Dans ce qui précède, u_i sont les coefficients d'expansion déterministes inconnus et représentent le mode aléatoire i de la variable aléatoire u . Ψ_i sont des polynômes à N variables qui sont des fonctions de $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_N)$ où ξ_i est une variable aléatoire à valeurs dans un

ensemble Γ_i . N est le nombre d'incertitudes d'entrée qui est aussi le nombre de dimensions aléatoires. On suppose que ces variables sont indépendantes et à valeurs réelles, et donc $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_N \subseteq \mathbb{R}^N$

Le nombre total de termes $P + 1$ utilisés dans (3.76) dépend de l'ordre le plus élevé du polynôme utilisé (noté p) et du nombre de dimensions aléatoires. Nous avons l'équation 3.77 [29] :

$$P + 1 = \frac{(N + p)!}{N! p!} \quad (3.77)$$

La méthodologie a été formulée à l'origine par Wiener [30] et a été redécouverte beaucoup plus tard et utilisée pour les applications fonction de distribution cumulative par plusieurs groupes, par exemple, Xiu et Karniadakis [31], Lucor et al. [32], Le Maître et al. [33], Mathelin et al. [34], et Walters et Huyse [35] entre autres.

Dans la méthode originale de Wiener [30], la base de projection Ψ_i est constituée de polynômes d'Hermite. Les polynômes d'Hermite sont une suite de polynômes qui a été nommée ainsi en l'honneur de Charles Hermite [36]. Ils sont définis par l'équation 3.78, la figure 3.4 montre quelques exemples de cette série de polynômes.

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n - 2k)!} x^{n-2k} \quad (3.78)$$

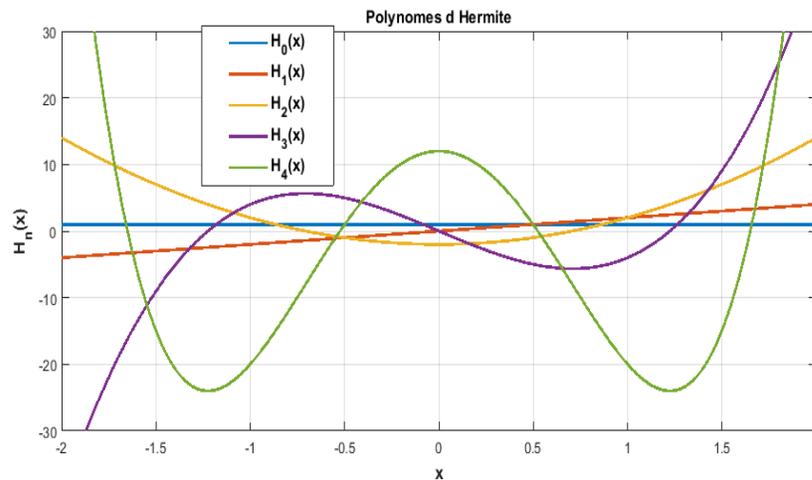


Figure 3.3 Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite sont optimaux pour les variables aléatoires avec une distribution gaussienne. La condition d'optimalité est que les polynômes soient orthogonaux avec une fonction de pondération $\xi \mapsto W_N(\xi)$ qui est exactement la fonction de distribution des probabilités de l'ensemble des variables aléatoires, équation (3.79) :

$$\int_{\Gamma} \Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi) W_N(\xi) d\xi = \langle \Psi_i, \Psi_j \rangle = \gamma_j \delta_{ij} \quad (3.79)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et γ_i est une constante de normalisation. Cependant, avec une mise à l'échelle appropriée, on peut toujours normaliser la base polynomiale de sorte que $\gamma_j := \langle \Psi_j, \Psi_j \rangle = 1 \forall j$. Dans le cas d'une distribution gaussienne multivariée, les polynômes d'Hermite satisfont la condition ci-dessus avec W_N donné par l'équation 3.80

$$W_N \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta \cdot \zeta\right) \quad (3.80)$$

Où $\zeta \cdot \zeta = \sum_{j=1}^N \zeta_j^2$ est le produit scalaire euclidien standard en \mathbb{R}^N . Notez qu'en raison de l'indépendance des incertitudes, la fonction de densité de probabilité est le produit de la fonction de densité de probabilité de chacune des incertitudes, c'est-à-dire $W_N(\zeta) = \prod_{j=1}^V W_1(\zeta_j)$

Une fois les coefficients dans la base du polynôme de chaos obtenus, il est possible d'effectuer des post traitements à moindre coût de calculs pour évaluer une quantité d'intérêt. Par exemple, l'orthonormalité de la base permet d'obtenir directement l'espérance (équation 3.81) et la variance de la réponse (équation 3.82)

$$E[Y] = a_0 \quad (3.81)$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{N-1} a_i^2 \quad (3.82)$$

3.5.2.4 La méthode stochastique de Galerkin

La méthode stochastique de Galerkin [37] se déroule en deux étapes.

- **Etape 1 :**

Tout d'abord, une discrétisation spectrale de l'espace stochastique est construite. Cela permet de représenter discrètement la solution stochastique sous la forme de l'équation 3.83 :

$$Az(r, \theta, \zeta) \approx \sum_{q=0}^Q Az(r, \theta)^{(q)} \psi_q(\xi) \quad (3.83)$$

Où :

r, θ : la coordonnée polaire

$Az(r, \theta)^{(q)}$ une composante ou un mode de la solution stochastique correspondant à une fonction de base spécifique ou à un indice polynomial

$\psi_q(\xi)$ est une fonction mathématique spécifique utilisée pour approximer la solution stochastique dans la méthode stochastique de Galerkin.

L'équation 3.83 est appelée expansion des polynômes de chaos généralisé. elle utilise un ensemble de polynômes orthogonaux multivariés $\Psi = [\Psi_1, \dots, \Psi_Q]^T$ qui sont définis par les

variables aléatoires ξ présentes dans le modèle stochastique. En choisissant les polynômes orthogonaux par rapport à la fonction de densité de probabilité conjointe de ξ , une convergence exponentielle peut être obtenue [38]. Dans le cas de variables aléatoires à distribution gaussienne, on choisira des polynômes d'Hermite et, dans le cas uniformément distribué, des polynômes de Legendre. Le nombre total de polynômes Q dans le développement (3.83) dépend du nombre de variables aléatoires L et de l'ordre P des polynômes Ψ_q comme indiqué par la relation 3.84

$$Q = \frac{(L + P)!}{L! P!} \quad (3.84)$$

- **Etape 2 :**

Une projection de Galerkin est appliquée au résidu (équation 3.85 et 3.86)

$$R(Az) = \mathcal{L}(Az) - f \quad (3.85)$$

$$\langle R(Az) \psi_q \rangle \equiv \int_{\Gamma} R(Az) \psi(y) \rho(y) dy = 0 \quad \forall q = 1, 2 \dots Q \quad (3.86)$$

où

R : le terme résiduel

\mathcal{L} : Operateur qui dépend du domaine d'application spécifique. Par exemple, en électrostatique, il pourrait être représenté par l'opérateur Laplacien

$\rho(y)$: représente la fonction de densité de probabilité associée à la variable aléatoire y

Cela donne un ensemble d'équations aux dérivés partielles déterministes couplées à Q . Pour les non-linéarités générales, l'intégrale dans (3.87) ne peut pas être calculée analytiquement [39]. Elle peut être approximée numériquement ou le problème peut être linéarisé avant d'appliquer la condition de Galerkin. Dans le premier cas, la linéarisation peut être évitée en appliquant une méthode quasi-Newton [40]. Cette dernière approche permet d'appliquer les techniques stochastiques standards de Galerkin pour les équations aux dérivés partielles stochastiques linéaires au problème linéarisé. Puisqu'une linéarisation de Newton est déjà disponible pour le problème déterministe, nous considérons la deuxième approche et étendons la linéarisation de Newton au cas stochastique de Galerkin.

Dans le contexte de la méthode des polynômes de chaos et de la méthode stochastique de Galerkin le choix des polynômes orthogonaux dépend du type de distribution de la variable aléatoire (ζ), tableau 3.1

Tableau 3.1 : Les familles de polynômes orthogonaux

	Variable aléatoire(ζ)	Polynôme associé ($\psi(\xi)$)	Support
Distribution continue	Gaussienne	Hermite	$[-\infty, +\infty]$
	Gamma	Laguerre	$[0, +\infty]$
	Béta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
Distribution discrète	Poisson	Charlier	$\{0,1,2, \dots\}$
	Binomiale	Krawtchouk	$\{0,1,2, \dots, N\}$
	Binomiale négative	Meixner	$\{0,1,2, \dots\}$
	Hypergéométrique	Hahn	$\{0,1,2, \dots, N\}$

3.5.2.5 Méthode de la collocation stochastique

La méthode de collocation stochastique (Xiu et Hesthaven [41], Nobile et al., [42-43], Bieri et Schwab [44], Babuška et al. [45], Beck et al. [46]) a été développée comme une alternative efficace aux méthodes de Monté Carlo basées sur l'échantillonnage déterministe aux points de quadrature et l'interpolation polynomiale lagrangienne. L'idée principale de collocation stochastique est de projeter l'incertitude sur un espace de probabilité avec des propriétés et des conditions connues [47-48]. Des fonctions de base appropriées sont déterminées pour cet espace et des points d'interpolation appropriés sont calculés, sur la base de la distribution d'entrée. Avec un ordre polynomial croissant du développement, une convergence exponentielle peut être obtenue.

Principe de la méthode de la collocation stochastique (Cas unidimensionnel)

Soit f une fonction réelle : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire.

La méthode de CS permet d'obtenir l'espérance et la variance de la réponse aléatoire $Y = f(X)$. Pour cela, elle s'appuie sur le choix d'un nombre limité de réalisations judicieusement choisies de l'observable Y . Le principe consiste à projeter la fonction f sur une base de polynômes de Lagrange (équation 3.88):

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x) \quad (3.88)$$

Où les polynômes de Lagrange sont donnés par l'équation 3.89

$$L_i(x) = \prod_{k=0; k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \quad (3.89)$$

Et on a la propriété de l'équation 3.90

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (3.90)$$

Où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Il convient de mentionner que, bien que les polynômes de Lagrange soient principalement utilisés pour la représentation polynomiale de la sortie stochastique, d'autres types de fonctions de base sont également possibles.

Une fois que la sortie souhaitée a été exprimée sous forme de polynôme dépendant de variables d'entrée aléatoires, l'expression des moments stochastiques peut être facilement dérivée en suivant leurs définitions à partir de statistiques. L'espérance (moyenne) de $f(X)$ est donnée par l'équation 3.91

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^n f_i L_i(x) p(x) dx \quad (3.91)$$

La règle de quadrature de Gauss donne l'équation 3.92

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_i(x) p(x) dx = \sum_{j=0}^n w_j L_i(x_j) \quad (3.92)$$

Compte tenu de la propriété des polynômes de Lagrange on obtient la relation 3.93

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_i(x) p(x) dx = w_i \quad (3.93)$$

La combinaison des deux équations (3.92) et (3.93) conduit à une expression de la moyenne de $f(X)$ par l'équation 3.94

$$E[f(X)] = \sum_{i=0}^n w_i f_i \quad (3.94)$$

De plus, la même approche est utilisée pour évaluer la variance de $f(X)$, qui est par définition donnée par l'équation 3.95

$$\text{var}[f(X)] = E[(f(X)^2)] - (E[f(X)])^2 \quad (3.95)$$

Encore une fois, l'utilisation de l'expansion de la fonction sur la base du polynôme de Lagrange donne la relation 3.97

$$\text{var}[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^n f_i L_i(x) \right) \left(\sum_{i=0}^n f_i L_i(x) \right) p(x) dx - (E[f(X)])^2 \quad (3.96)$$

$$\text{var}[f(X)] = \sum_{i=0}^n w_i f_i^2 - (E[f(X)])^2 \quad (3.97)$$

Comparaison

Chaque méthode parmi les méthodes que nous avons étudiée, a ses propres avantages et inconvénients, et le choix dépendra du type de problème que nous traitons. Nous résumons les avantages et inconvénient de chaque méthode qui sont cités dans la littérature.

1) Méthode de Perturbations Stochastiques:

- **Aperçu** : La méthode de perturbations stochastiques est utilisée pour résoudre des problèmes complexes en décomposant le système en un terme principal bien compris et en termes de perturbation qui capturent les effets stochastiques.
- **Avantages** : Permet de traiter des systèmes avec des effets stochastiques, offre une approche systématique pour améliorer la précision des prédictions physiques.
- **Inconvénients** : Peut-être complexe à mettre en œuvre pour des systèmes fortement non linéaires.

2) Méthode Unscented Transformation:

- **Aperçu** : Cette méthode transforme un problème stochastique en un problème déterministe en utilisant une transformation mathématique appropriée.
- **Avantages** : Peut simplifier considérablement les calculs en convertissant un problème stochastique en un problème déterministe.
- **Inconvénients** : La transformation doit être soigneusement choisie pour garantir la validité du résultat.

3) Méthode de Polynômes de Chaos:

- **Aperçu** : Les polynômes de chaos sont utilisés pour représenter des fonctions aléatoires en termes d'expansion de polynômes orthogonaux. Ils permettent de quantifier la propagation des incertitudes dans un système.
- **Avantages** : Offre une approche puissante pour la quantification des incertitudes, permet de traiter efficacement des systèmes à paramètres aléatoires.
- **Inconvénients** : Peut nécessiter un grand nombre de termes de polynômes pour obtenir une précision suffisante.

4) Méthode de Galerkin Stochastique:

- **Aperçu** : Cette méthode utilise des fonctions de base (généralement polynômes) pour approximer la solution d'un système stochastique. Les coefficients sont déterminés en résolvant un système d'équations.
- **Avantages** : Permet de réduire la dimension de l'espace des solutions, ce qui peut rendre le problème plus gérable.
- **Inconvénients** : Peut nécessiter des calculs intensifs, en particulier pour des systèmes complexes

5) Méthode de Collocation Stochastique:

- **Aperçu** : Cette méthode repose sur le choix de points de collocation où les équations du système stochastique sont évaluées.
- **Avantages** : Peut être plus efficace pour certains types de problèmes que d'autres méthodes numériques.
- **Inconvénients** : Peut être sensible au choix des points de collocation et à la manière dont ils sont répartis.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté une étude bibliographique des principales méthodes statistiques et stochastiques. Les simulations de Monte-Carlo sont capables de résoudre divers types de problèmes, avec une efficacité indépendante de la dimension. Cependant, leur convergence est souvent lente. En revanche, les méthodes stochastiques démontrent une convergence plus rapide, bien qu'elles impliquent un coût croissant avec la dimension. Chaque méthode possède ses avantages et inconvénients, indiquant ainsi que leur choix doit être spécifiquement adapté à la nature du problème à résoudre. En somme, les méthodes stochastiques se posent en alternative aux simulations de Monte-Carlo, avec ces dernières jouant un rôle de référence essentiel.

Dans le chapitre suivant, nous mettrons en œuvre ces différentes techniques dans l'application au problème de la compatibilité électromagnétique

3.7 Références Bibliographiques

- [1] Gnedenko, B.V. (1988). *Theory of Probability* (I.A. Ushakov, Trans.; 6th ed.). Routledge. <https://doi.org/10.1201/9780203718964>
- [2] Papoulis, Athanasios Papoulis; Pillai, S. Unnikrishna, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes" (4th ed.). Boston: McGraw-Hill. 2002, ISBN 0-07-366011-6.
- [3] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.
- [4] Ronald A. Fisher, "On an absolute criterion for fitting frequency curves", *Messenger of Mathematics*, vol. 41 (1912), pp. 155-160
- [5] FISHER, R. A. "On the mathematical foundations of theoretical statistics". *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 222 309]368. wCP18 in Bennett 1971., vol. 1.
- [6] W.E. Walker, P. Harremoës, J. Rotmans, J.P. van der Sluijs, M.B.A. van Asselt, P. Janssen & M.P. Kraye von Krauss (2003) *Defining Uncertainty: A Conceptual Basis for Uncertainty Management in Model-Based Decision Support, Integrated Assessment*, 4:1, 5-17, DOI: 10.1076/iaij.4.1.5.16466
- [7] A Cunha Jr, *Modeling and quantification of physical systems uncertainties in a probabilistic framework*, In: S. Ekworo-Osire; A. C. Gonçalves; F. M. Alemayehu (Org.), *Probabilistic Prognostics and Health Management of Energy Systems*, Springer International Publishing, p. 127-156, 2017. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-55852-3_8
- [8] Cuzzolin, Fabio. "Uncertainty measures: The big picture." *ArXiv abs/2104.06839* (2021): n. pag.
- [9] M. Maier, *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen* (Springer, Berlin, 1926)
- [10] Freudenthal, A. M.: *Safety of Structures*, Transactions ASCE, Vol. 112, 1947, 125–180.
- [11] Levi, R.: *Calculs probabilistes de la sécurité des constructions*, Ann. Ponts et Chaussées, Vol. 119, No. 4, 1949, 493–539.
- [12] R. G. Ghanem, P. D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991. doi:10.1007/ 530 978-1-4612-3094-6
- [13] Haldar, A. & S. Mahadevan, (2000), *Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [14] X. Yan, Q. Luo, P. Zhou and J. Liu, "An Uncertainty Propagation Mechanism Analysis Method for Three-Dimensional Quadrilateral Localization," 2019 *Prognostics and System Health Management Conference (PHM-Paris)*, Paris, France, 2019, pp. 39-44, doi: 10.1109/PHM-Paris.2019.00015.
- [15] Emmanuel Gobet, 'Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques - du linéaire au non linéaire' Éditions de l'École polytechnique, 2013
- [16] Harald Niederreiter. *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. (ISBN 0-89871-295-5)
- [17] Hunt, Neville; Tyrrell, Sidney. "Stratified Sampling". Webpage at Coventry University. Archived from the original on 13 October 2013. Retrieved 12 July 2012
- [18] Efraimidis PS, Spirakis PG. "Weighted random sampling with a reservoir." *Information Processing Letters*, 97(5), 181–185. ISSN 0020-0190. doi:10.1016/j.ipl.2005.11.003.
- [19] Atinc G., Simmering M. J., Kroll M. J. "Control variable use and reporting in macro and micro management research. *Organizational Research Methods*", 15, 57–74.2012

- [20] M. Kleiber and T. D. Hien, 'The stochastic finite element method (basic perturbation technique and computer implementation)', Wiley, Chichester, U.K., 1992. ISBN-0-471-93626-X No. of pages: xiv + 322. <https://doi.org/10.1002/asm.3150100412>
- [21] Impollonia, N., Muscolino, G. Static and Dynamic Analysis of Non-Linear Uncertain Structures. *Meccanica* 37, 179–192 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1019695404923>
- [22] G. VAN KAMPEN, "Stochastic Processes in Physics and Chemistry " (Third Edition), Elsevier, 2007, Pages 193-218, ISSN 09255818, ISBN 9780444529657, <https://doi.org/10.1016/B978-044452965-7/50011-8>.
- [23] Wick, G. C. "The Evaluation of the Collision Matrix". *Phys. Rev.* 80 (2): 268–272. 1950 . [doi:10.1103/PhysRev.80.268](https://doi.org/10.1103/PhysRev.80.268).
- [24] Julier S. J. and Uhlmann J. K., "Consistent unbiased method for converting between polar and cartesian coordinate systems," in *Acquisition, Tracking, and Pointing XI*, vol. 3086, 1997, pp. 110–121
- [25] MENEZES, L. d. et al. 'Efficient computation of stochastic electromagnetic problems using unscented transforms'. *IET Science, Measurement & Technology*, v. 2, n. 2, p. 88, 2008.
- [26] O. A. Oke, "Enhanced unscented transform method for probabilistic load flow studies," Ph.D. dissertation, University of ottingham, 2013.
- [27] L. R. A. X. De Menezes, D. W. P. Thomas, C. Christopoulos, A. Ajayi and P. Sewell, "The use of Unscented Transforms for statistical analysis in EMC," 2008 International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC Europe, 2008, pp. 1-5, [doi: 10.1109/EMCEUROPE.2008.4786803](https://doi.org/10.1109/EMCEUROPE.2008.4786803).
- [28] B. Sudret, Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods, Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, Oct. 2007.
- [29] Xiu, D., Karniadakis, G.: The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 24(2), 619–644 (2002)
- [30] Wiener, N.: The homogeneous chaos. *Am. J. Math.* 60(4), 897–936 (1938)
- [31] Xiu, D. , and Karniadakis, G. E. , 2002, " The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations," *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2), pp. 619–644. [10.1137/S1064827501387826](https://doi.org/10.1137/S1064827501387826)
- [32] Lucor D, Su C, Karniadakis GE (2004) Generalized polynomial chaos and random oscillators. *Int J Numer Methods Eng* 60(3):571–596. <https://doi.org/10.1002/nme.976>
- [33] Olivier Le Maître, 'Développement en polynômes de chaos d'un modèle lagrangien d'écoulement autour d'un profil', *Comptes Rendus Mécanique*, Volume 334, Issue 11, 2006, Pages 693-699, ISSN 1631-0721, <https://doi.org/10.1016/j.crme.2006.10.001>.
- [34] L. IATHÉLIN et al., 'Uncertainty quantification in CFD simulations: a stochastic spectral approach', 2nd International Conference on Computational Fluid Dynamics, Sydney, Australia, July 15-19, 2002
- [35] Walters, R. W. and Huysse, L., *Uncertainty Analysis for Fluid Mechanics with Applications*, Tech. rep., ICASE 2002-1, NASA/CR-2002-211449, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 2002.
- [36] P.-S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, vol. 2, 1812, 194–203 p.
- [37] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic Finite Elements, a Spectral Approach*. Dover, Mineola, New York, 2nd edition, 2003.
- [38] H. Matthies and A. Keese. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Engrg.*, 194:1295–1331, 2005.

- [39] D. Xiu. Fast numerical methods for stochastic computations: a review. *Communications in computational physics*, 5(2-4):242–272, 2009.
- [40] H. G. Matthies. Stochastic finite elements: computational approaches to stochastic partial differential equations. *Z. Angew. Math. Mech.*, 88(11):849–873, 2008.
- [41] D. Xiu, J.S. Hesthaven, High order collocation methods for differential equations with random inputs, *SIAM J. Sci. Comput.* 27 (3) (2005) 1118–1139
- [42] Nobile, F., Tempone, R., Webster, C.G.: An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data. *SIAM J. Numer. Anal.* 46(5), 2411–2442 (2008)
- [43] Nobile, F., Tempone, R., Webster, C.G.: A sparse grid stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM J. Numer. Anal.* 46(5), 2309–2345 (2008)
- [44] BIERI, Marcel, ANDREEV, Roman, et SCHWAB, Christoph. Sparse tensor discretization of elliptic SPDEs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2010, vol. 31, no 6, p. 4281-4304.
- [45] BABUŠKA, Ivo, NOBILE, Fabio, et TEMPONE, Raúl. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM review*, 2010, vol. 52, no 2, p. 317-355.
- [46] BECK, Joakim, TEMPONE, Raul, NOBILE, Fabio, et al. On the optimal polynomial approximation of stochastic PDEs by Galerkin and collocation methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2012, vol. 22, no 09, p. 1250023.
- [47] SANKARAN, Sethuraman et MARSDEN, Alison L. A stochastic collocation method for uncertainty quantification and propagation in cardiovascular simulations. *Journal of biomechanical engineering*, 2011, vol. 133, no 3.
- [48] GRZELAK, Lech A., WITTEVEEN, Jeroen AS, SUAREZ-TABOADA, Maria, et al. The stochastic collocation Monte Carlo sampler: highly efficient sampling from ‘expensive’ distributions. *Quantitative Finance*, 2019, vol. 19, no 2, p. 339-356.

Chapitre 4

Approches statistiques et
stochastiques pour la CEM

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons deux applications des méthodes stochastiques et statistiques. La première application concerne l'optimisation de la méthode des charges fictives pour le calcul des champs électriques d'une ligne électrique de haute tension, La deuxième concerne l'utilisation des méthodes stochastiques à savoir les polynômes de Chaos et Collocations stochastiques, pour estimer l'effet de l'incertitude de l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission sans pertes chargées par une charge non linéaire sur la tension de sortie

4.2. Première application : Optimisation de la méthode charges fictives

4.2.1 Optimisation de la méthode de charges fictives par des Méthodes Statistiques

H. Steinbigler [1] a introduit la méthode de charge fictive 1969. C'est la technique la plus populaire dans le domaine de l'isolation haute tension et de l'analyse des décharges. Cette méthode est basée sur l'équation de Poisson (équation 4.1)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

Où

V : est le potentiel électrique ; ϵ_0 est la permittivité électrique du vide,

ρ : est la densité de charge,

Le principe de cette méthode est de simuler un champ réel avec un champ formé par un nombre fini de charges fictives (charges ponctuelles et linéaires de longueur infinie et semi-infinie [2]) placées en dehors de la région où le champ doit être calculé. Les valeurs des charges discrètes sont déterminées en satisfaisant les conditions aux limites en un nombre sélectionné de points de contour (équation 4.2).

$$[Q_s] = [P]^{-1}[V_b] \quad (4.2)$$

Où:

$[V_b]$: vecteur des potentiels aux points de contour,

$[Q_s]$: vecteur de charges fictives inconnues,

$[P]$: matrice des coefficients des potentiels calculés par points de contour et charges fictives.

A titre d'exemple, pour des lignes aériennes constituées de n conducteurs parallèles placés au-dessus du sol, les éléments de la matrice des coefficients de potentiel sont donnés par la relation suivante :

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{ij}}{d_{ij}}\right) \quad (4.3)$$

Où:

ϵ_0 La permittivité électrique du vide $\approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m

D_{ij} la distance entre la j ième charge ponctuelle et l'image de la i ième charge ponctuelle
 d_{ij} .la distance entre la j ième charge ponctuelle et la i ième charge ponctuelle.

Une fois les valeurs et les positions des charges fictives connues, le potentiel et la distribution du champ n'importe où dans la région peuvent être facilement calculés

$$[V_t] = [P_t][Q_s] \quad (4.4)$$

Où:

$[V_t]$: vecteur des potentiels des points de test,

$[Q_s]$: vecteur de charges de simulation connues,

$[P_t]$: matrice des coefficients de potentiel calculés par points de test et charges fictives

L'erreur et le champ électrique peuvent être calculés à partir de l'équation 4.5:

$$\text{Erreur} = |V_t - V_b| \quad (4.5)$$

Le calcul du champ électrique en un point $M(x,y,z)$ donné dans le plan (yz) en présence de plusieurs conducteurs, est basé sur l'équation (4.6), le théorème de superposition et la théorie des images de charges. Les composantes du champ E en ce point M peuvent être calculées en utilisant les équations (4.7 et 4.8) [3].

La figure 4.1 est mentionnée pour illustrer la géométrie spécifique de deux conducteurs nommés i et j .

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad (4.6)$$

$$E_y(y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y-y_i}{R_i^2} + \Gamma \frac{y-y_i}{R_i'^2} \right) \quad (4.7)$$

$$E_z(y, z) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{z-z_i}{R_i^2} + \Gamma \frac{z+z_i}{R_i'^2} \right) \quad (4.8)$$

Où

Γ : coefficient de réflexion de la surface du sol.

R_i : la distance entre un point arbitraire $M(y,z)$ et le i ème point de charge

R_i' : la distance entre un point arbitraire $M(y, z)$ et l'image de la i ème charge ponctuelle.

Pour bien comprendre les équations 4.7 et 4.8, la figure 4.1 illustre la géométrie élémentaire de deux conducteur i et j .

Γ est un coefficient de réflexion complexe qui représente l'influence de la surface du sol. Il peut être calculé comme suit [4] :

$$\Gamma = \frac{j\omega\epsilon_0 - (\sigma_s + j\omega\epsilon_s)}{j\omega\epsilon_0 + (\sigma_s + j\omega\epsilon_s)} \quad (4.9)$$

Où ω : fréquence angulaire, σ_s : conductivité du sol

ϵ_s : permittivité du sol

Le coefficient de réflexion du sol peut être approximé par $\Gamma = -1$.

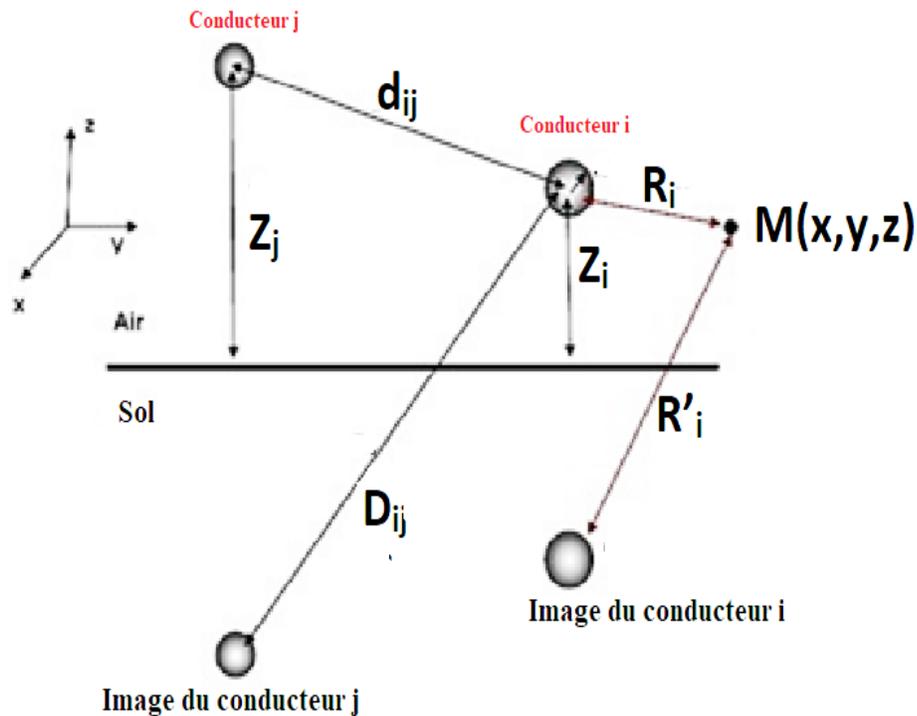


Figure 4.1 Disposition Spatiale des Conducteurs i , j et leurs images

Le but de la méthode d'optimisation est de rendre cette erreur aussi proche que possible de zéro,

4.2.2 Algorithme élaboré

Les méthodes d'optimisation stochastique sont des méthodes d'optimisation qui génèrent et utilisent des variables aléatoires [5].

L'optimisation stochastique peut s'appuyer sur des méthodes d'échantillonnage telles que la méthode de Monté Carlo [6], la méthode Latin hypercubesampling [7] ou la méthode quasi-Monté Carlo [8].

Dans notre travail, nous avons utilisé une optimisation stochastique basée sur l'échantillonnage Monté Carlo. Cet algorithme vise à optimiser la localisation des charges fictives en générant une distribution bivariée de $N \times N$ variables aléatoires $\langle C_r, C_a \rangle$ qui sont respectivement le rapport entre r_c et r_b , θ_c et θ_b selon les équations (4.9-4.11), pour chaque itération, seules les valeurs dont la fonction objectif est inférieure au seuil proposé sont acceptées. La sous-distribution sélectionnée est utilisée pour extraire les plages avec la fonction de densité de probabilité maximale (pdf) et celles-ci sont visualisées par des histogrammes.

Comme le montre la figure 4.2, les points de contour sont disposés à des distances égales sur le périmètre du conducteur et sont déterminés par leurs coordonnées polaires r_c et θ_b^k selon les équations 4.10-4.11. Les charges de simulation sont également disposées à égale distance sur le

périmètre d'un cercle virtuel à l'intérieur du conducteur et sont déterminées par leurs coordonnées polaires r_c and θ_c^k selon les équations 4.10 et 4.12.

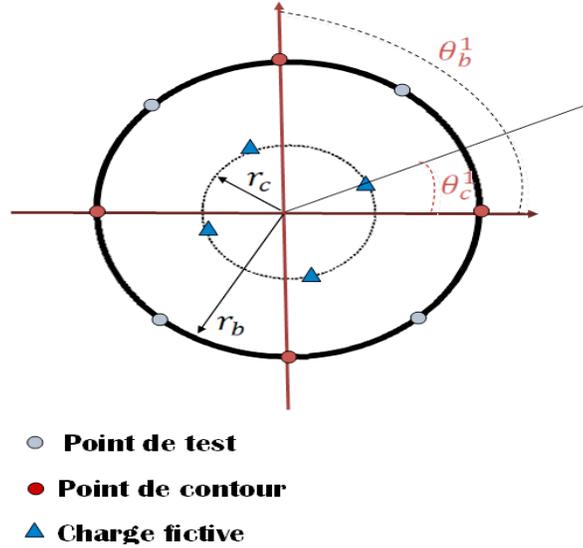


Figure 4.2 Disposition des points de contour, charges fictives et point de test

$$\theta_b^k = \frac{2\pi k}{n_c} (k - 1) \quad (4.10)$$

$$r_c = C_r r_b \quad (4.11)$$

$$\theta_c^k = \theta_b^k + C_a \cdot \frac{2\pi}{n_c} \quad (4.12)$$

où

r_b : Le rayon du conducteur

θ_b^k : L'angle du $k^{\text{ème}}$ point de contour

r_c : Le rayon du cercle virtuel qui contient les charges fictives

θ_c^k : L'angle du $k^{\text{ème}}$ charge fictive

C_r : Le rapport du rayon $0 < C_r < 1$

C_a : Le rapport d'angle $0 \leq C_a < 1$

Notre algorithme utilise des techniques d'optimisation probabiliste basées sur des échantillons aléatoires et l'estimation de densité de probabilité. C'est une approche intéressante pour l'optimisation sous incertitude.

Il est constitué de sept étapes :

1. Définition du Seuil de la fonction objective :

La fonction objective est définie par l'équation 4.13 ;

$$F_{obj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_t - V_b)^2 \quad (4.13)$$

Un seuil $F_{\text{obj_seuil}}$ est défini pour la fonction objective. Cela servira de critère pour sélectionner les solutions.

2. Génération de variables aléatoires :

$N \times N$ paires variables aléatoires (C_r, C_a) sont générées

3. Evaluation de la fonction objective :

La fonction objective est calculé pour chaque paire (C_r, C_a) .

4. Sélection des solutions acceptables :

Seules les paires (C_r, C_a) pour lesquelles la fonction objective est inférieur ou égale à $F_{\text{obj_seuil}}$ sont sélectionnées ; elles sont nommées $(\check{C}_r, \check{C}_a)$

5. Extraire des histogrammes :

Les histogrammes de $(\check{C}_r, \check{C}_a)$ sont extraits.

6. Estimation des fonctions de densité de probabilité :

À partir des histogrammes de l'étape 5, les fonctions de densité de probabilité des $(\check{C}_r, \check{C}_a)$ sont estimées.

7. Sélection de la solution optimale :

On choisit la paire $(\check{C}_r, \check{C}_a)_{\text{optimal}}$ qui maximise les fonctions de probabilité.

4.2.3 Application de l'Algorithme

Afin de valider notre algorithme d'optimisation, nous avons choisi, à des fins de comparaison, une ligne aérienne à haute tension similaire à celle étudiée par A. Mujezinović dans la référence [9]. Cette étude porte sur la distribution du champ électrique autour de lignes de transmission de 400 kV du réseau électrique de Bosnie-Herzégovine, en utilisant la méthode des charges équivalentes pour calculer le champ électrique en des points arbitraires proches des lignes. Les lignes analysées comprennent des configurations avec des pylônes aux dimensions standard ainsi que des pylônes compacts de dimensions réduites. La ligne que nous reproduisons ici, illustrée à la Figure 4.3, correspond aux spécifications des pylônes standards décrites dans [9], avec des dimensions précises des supports et des conducteurs conformes à celles de l'étude. Le champ électrique a été mesuré expérimentalement à une hauteur d'un mètre au-dessus du sol, en accord avec les recommandations du guide [10]. Cette configuration sert ainsi de référence fiable pour comparer et valider la précision de notre algorithme d'optimisation.

Le champ électrique est calculé sans tenir compte de l'effet de l'extrémité du conducteur, de l'affaissement de l'arc et de l'influence du pylône. De plus, les champs électromagnétiques causés par les lignes de transmission aériennes peuvent être approximés par des champs quasi-statiques [11] où le courant de déplacement de champ quasi-statique et les variations du flux magnétique sont négligeables, de sorte que le champ électrique a exactement les mêmes caractéristiques que le champ statique.

On suppose que la composante du vecteur de champ électrique dans la direction x est égale à zéro, alors le vecteur de champ électrique dans le point arbitraire, causé par les n charges ponctuelles, peut être calculé à l'aide des équations. 4.7 et 4.8.

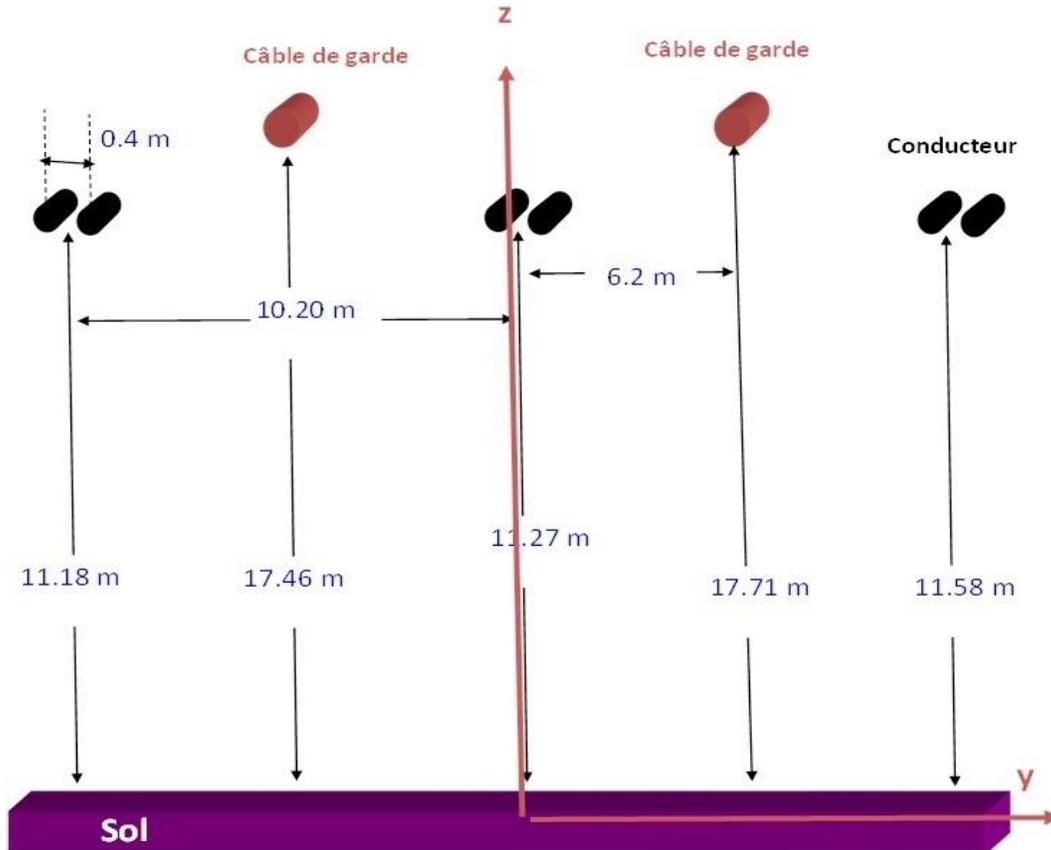


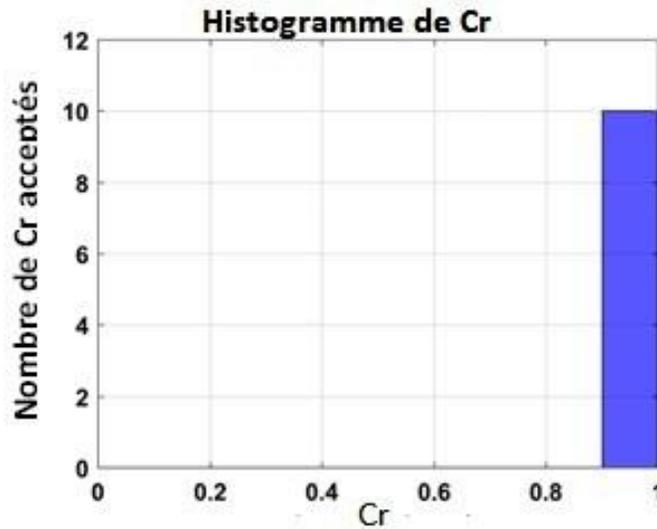
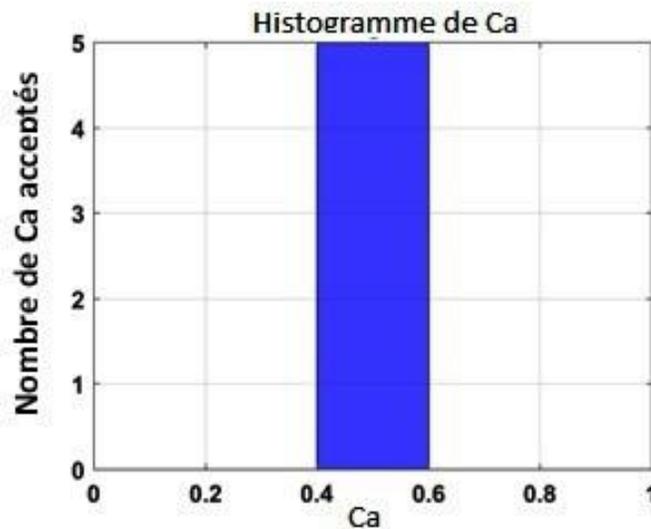
Figure 4.3 Dimensions de la ligne de transmission aérienne [9]

Mise en œuvre de l'Algorithme

L'algorithme cité ci-dessus est exécuté pour un nombre de charge égal à trois et un nombre d'itérations égal à 100, la fonction objectif de seuil est fixée égale à 4×10^{-11} .

1- Extraction des histogrammes :

Une fois les itérations terminées, l'algorithme a accepté 26 paires $(\check{C}_r, \check{C}_a)$. Leurs histogrammes sont représentés aux figures 4.4 et 4.5. Il est bien évident que la plus grande densité de probabilité est concentrée autour de 0,95 pour C_r et 0,5 pour C_a .

Figure 4.4 Histogramme de C_r Figure 4.5 histogramme de C_a

2- Estimation des fonctions de densité de probabilité

À partir des histogrammes obtenus à l'étape 5 figures 4.4 et 4.5, les fonctions de densité de probabilité pour les paires $(\check{C}_r, \check{C}_a)$ sont estimées en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance avec la distribution de Weibull à deux paramètres définie par l'équation 4.14. Cet estimateur de maximum de vraisemblance [12] permet d'estimer les paramètres A et B de la distribution de Weibull. Les résultats de ces estimations sont répertoriés dans le tableau 4.1, tandis que les distributions des estimations sont illustrées aux figures 4.6 et 4.7

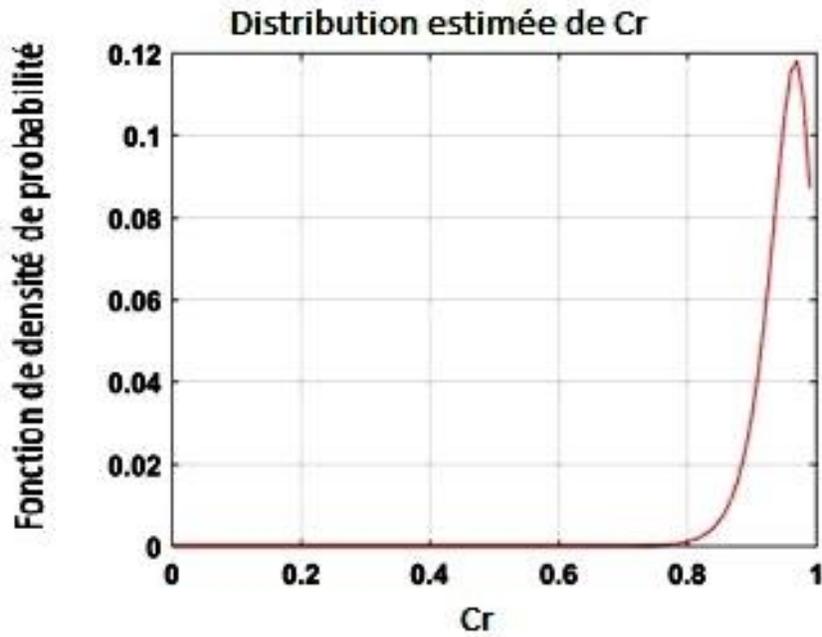
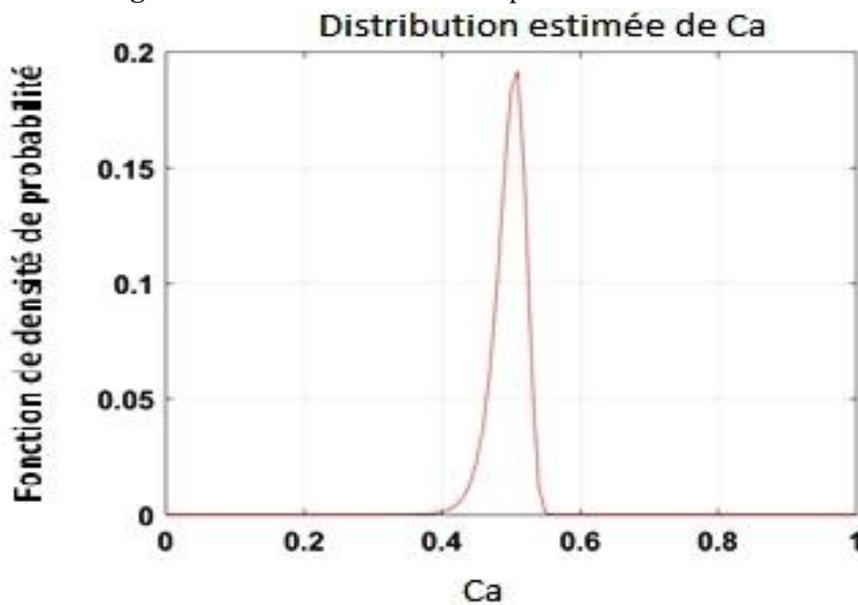
Où

$$f(x|A, B) = B \cdot A^{-B} x^{B-1} e^{-\left(\frac{x}{A}\right)^B} \quad (4.14)$$

$A > 0$ est le paramètre d'échelle et $B > 0$ est le paramètre de forme de la distribution

Tableau 4.1 Estimations des Paramètres de Weibull

Données	paramètre d'échelle	paramètre de forme
C_r Rayon relatif	0,968882	31.02033
C_a Angle relatif	0,507651	27.0408

**Figure 4.6** Fonction de densité de probabilité estimée de C_r **Figure 4.7** Fonction de densité de probabilité estimée de C_a

3- Sélection de la solution optimale :

On choisit la paire $(\check{C}_r, \check{C}_a)_{\text{optimal}}$ qui maximise les fonctions de probabilité.

Ces distributions estimées ont les moyennes et les variances selon le tableau 4.2.

Tableau 4.2 Estimations des moyennes et des écarts type de C_r et C_a

	C_r		C_a
μ_{C_r}	0,9519	μ_{C_a}	0,4975
σ_{C_r}	0,0015	σ_{C_a}	5,2887 10^{-7}

Après l'obtention des fonctions de densité de probabilité pour C_r et C_a , nous avons sélectionné la paire (C_r, C_a) optimale qui maximise ces fonctions (Figure 4.6 - 4.7). En calculant les moyennes et les écarts types des distributions qui sont indiqués au tableau 4.2, nous avons obtenu des plages continues de valeurs situées entre la moyenne moins l'écart type et la moyenne plus l'écart type. Le calcul du champ électrique de la ligne à haute tension mentionnée précédemment a été effectué en choisissant C_a et C_r dans les plages respectives de $[0,9505 - 0,9534]$ et $[0,4970 - 0,4980]$, dont les résultats sont présentés à la Figure 4.8. Pour valider nos résultats, nous avons également calculé le champ électrique à l'aide d'un programme basé sur l'algorithme génétique. Les trois jeux de résultats (calcul du champ électrique par la méthode des charges fictives optimisée par notre algorithme, optimisé par l'algorithme génétique, et les valeurs mesurées) sont résumés dans le Tableau 4.3.

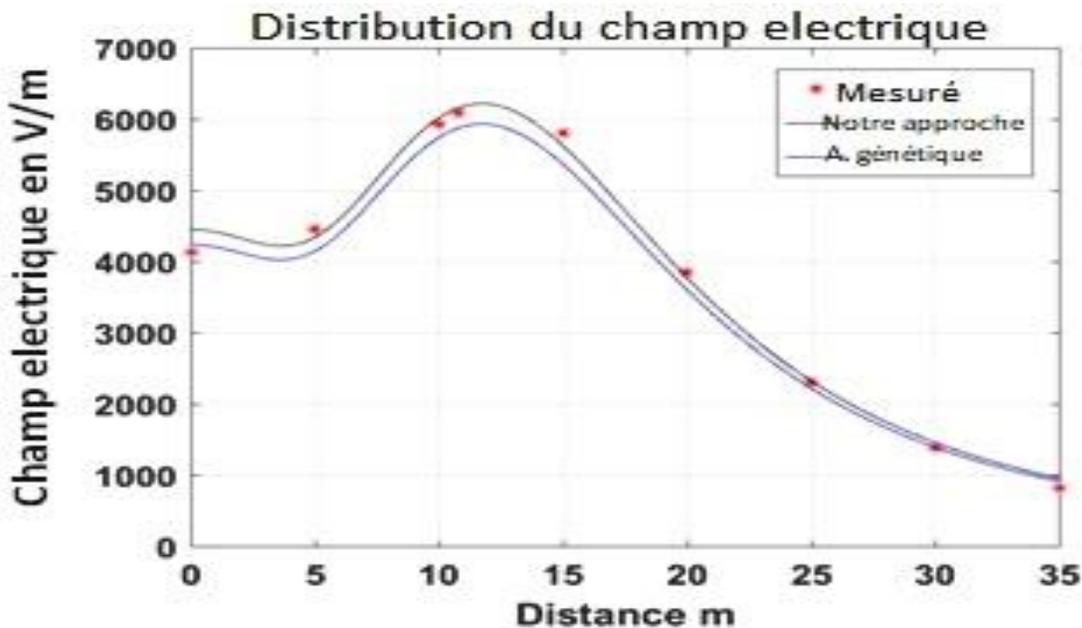


Figure 4.8 Répartition du champ électrique

Tableau 4.3 Comparaison des résultats mesurés et calculés

Distance m	Champ mesuré kV/m	Erreur entre les valeurs du champ électrique mesuré et les valeurs du champ calculé	
		par notre application	par l'algorithme génétique
0	4.13	17,69 %	02,50%
5	4.45	02,50%	06,86 %
dix	5,93	01,44%	03,17%
10.8	6.09	01,11%	03,50%
15	5.81	03,20%	07,66%
20	3,84	01,75 %	06,26%
25	2.30	00,99 %	03,61%
30	1.39	04,69%	00,04 %
35	0,81	16,11 %	10,90%
Moyenne		04,38%	04,95 %

4.2.4 Résultats et discussion

Cette première application porte sur l'optimisation de la Méthode des Charges Fictives (SCM) à l'aide d'une approche stochastique, appliquée à l'analyse du champ électrique en haute tension.

Les mesures montrent une augmentation du champ électrique jusqu'à 10.8 m, suivie d'une décroissance, ce qui correspond à l'atténuation attendue.

La comparaison des résultats montre que notre algorithme présente une meilleure précision que l'algorithme génétique :

- Erreur au point de crête : 1.11 % (notre méthode) contre 3.50 %,
- Erreur moyenne : 4.38 % contre 4.95 %.

L'optimisation par méthode de Monte Carlo a permis d'identifier les valeurs optimales des paramètres Cr et Ca :

- $Cr \approx 0.95$ (rayon relatif),
- $Ca \approx 0.5$ (angle relatif).

Ces valeurs ont été validées par comparaison aux mesures réelles et par la Figure 4.8, qui montre une bonne cohérence du champ simulé.

En plus de sa précision, la méthode proposée se distingue par une convergence rapide et une bonne adaptabilité à d'autres configurations géométriques, grâce à la modélisation probabiliste des paramètres.

4.3 Deuxième application : Estimation de l'Impact des Incertitudes des Paramètres Géométriques d'une Ligne de Transmission

4.3.1 Énoncé du problème

Dans cette application nous sommes intéressés au cas d'une ligne monofilaire de longueur 15 cm, sans perte et sans dispersion, cette ligne est excitée par une impulsion trapézoïdale d'une amplitude d'un Volt et d'une durée de 3ns avec un temps de montée et de descente de 200 ps, cette ligne est chargée par une capacité de 1pF.

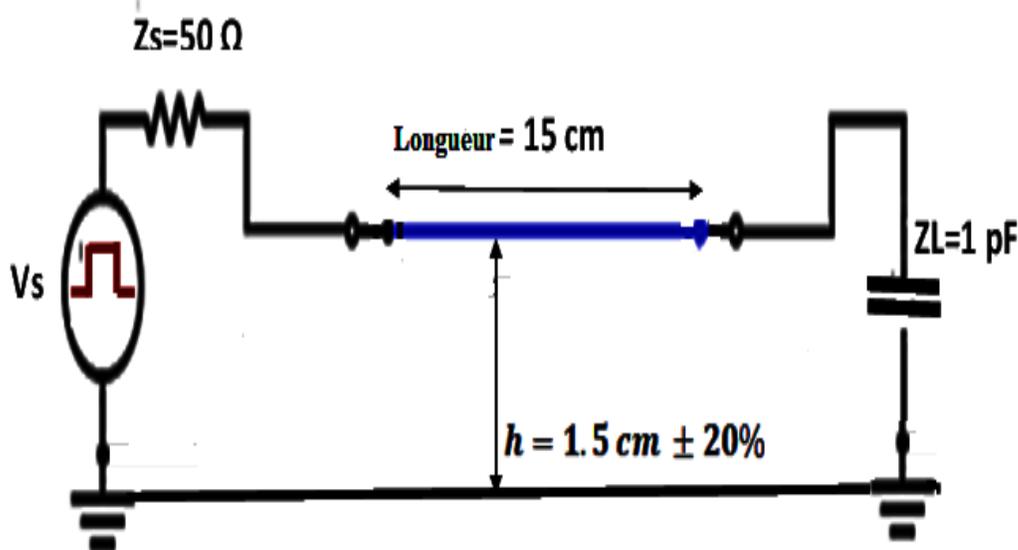


Figure 4.9 Schéma du circuit

Avant de traiter le problème stochastique, nous avons étudié le cas déterministe dans le paragraphe suivant :

4.3.2 Le cas déterministe

Dans le cas déterministe ; la hauteur h est fixée à la valeur moyenne de 1.5 cm. La résolution des équations de télégraphistes nécessite la connaissance des paramètres linéiques de la ligne de transmission (R , L , C et G) à l'avance, les valeurs de R , L , G et C sont affectées par la géométrie de la ligne de transmission et par les propriétés électriques des diélectriques et des conducteurs. Plusieurs méthodes sont conçues pour l'extraction de ces paramètres, dans le cas de notre problème, ces paramètres peuvent être calculés analytiquement [13].

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{h}{r_w} \right) \quad (4.15)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\cosh^{-1} \left(\frac{h}{r_w} \right)} \quad (4.16)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.17)$$

Pour cette ligne de la figure (4.1) :

$$L = 352.55 \text{ nH/m}$$

$$C = 31.56 \text{ pF/m}$$

$$Z_c = 105.7 \Omega$$

La source est une impulsion trapézoïdal d'une amplitude d'un Volt et d'une durée de 3ns avec un temps de montée et de descente de 200 ps, En conséquence, pour bien modéliser les phénomènes électromagnétiques en jeu la limite supérieure de la bande de fréquence à considérer est [14]

$$f_{max} = \frac{10}{\pi t_r} \quad (4.18)$$

Avec t_r le temps de monté du signal

Dans le cas de notre circuit

$$f_{max} = \frac{10}{\pi 200e^{-12}} = 1.5915e^{10} \text{ Hz} \approx 16 \text{ GHz}$$

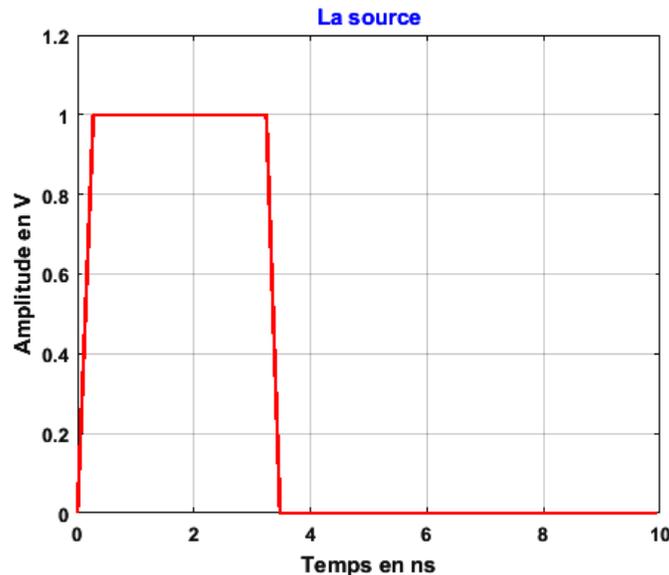


Figure 4.10 La source d'excitation

La résolution des équations 4.19a et 4.19b des télégraphistes par la méthode de différence finies en domaine temporel, nous a donné le signal de sortie Vs représenté à la figure 4.11.

$$\frac{d}{dz} v(z, t) = -L \frac{\partial}{\partial t} i(z, t) \quad (4.19a)$$

$$\frac{d}{dz} i(z, t) = -C \frac{\partial}{\partial t} v(z, t) \quad (4.19b)$$

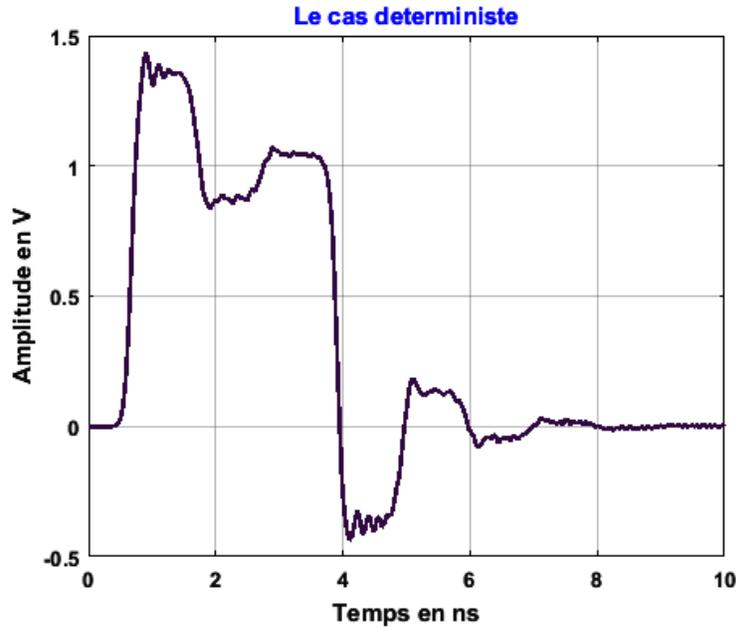


Figure 4.11 Le signal de sortie pour le cas déterministe

4.3.3 Le cas indéterministe

Dans les équations de télégraphiste les paramètres linéiques sont considérées comme des constantes qui sont calculées en fonction de la géométrie de la ligne et des propriétés électriques et magnétiques des conducteurs et diélectriques constituant la ligne. Mais dans le cas où la hauteur h est affectée par l'incertitude, h sera en fonction de sa moyenne, sa variance et une variable aléatoire standardisée ξ qui suit une loi de probabilité. Dans notre cas, elle suit la loi normale et h s'exprime alors comme suit (équation 4.20):

$$h = \mu_h + \sigma_h \xi \quad (4.20)$$

Où

μ_h : la moyenne de h

σ_h ; l'écarttype de h

ξ ; la variable aléatoire standardisée

L et C dépendent de la hauteur h qui elle-même dépend de la variable aléatoire ξ . Les équations 4.15 et 4.16, s'écrivent pour la version stochastique par les équations 4.21 a et b.

$$L(\xi) = \frac{\mu}{2\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{h}{r_w} \right) = \frac{\mu}{2\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w} \right) \quad (4.21a)$$

$$C(\xi) = \frac{2\pi\varepsilon}{\cosh^{-1} \left(\frac{h}{r_w} \right)} = \frac{2\pi\varepsilon}{\cosh^{-1} \left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w} \right)} \quad (4.21b)$$

La tension v et le courant i figurant dans les équations des télégraphistes ne sont plus en fonction de temps et de l'espace seulement, mais aussi en fonction de la variable aléatoire ζ . La version stochastique des équations des télégraphistes, reliant la tension et le courant se propageant le long d'une ligne de transmission sans perte et sans dispersion, s'écrit [15],

$$\frac{d}{dz}v(z, t, \xi) = -L(\xi)\frac{\partial}{\partial t}i(z, t, \xi) \quad (4.22a)$$

$$\frac{d}{dz}i(z, t, \xi) = -C(\xi)\frac{\partial}{\partial t}v(z, t, \xi) \quad (4.22b)$$

Étant donné l'infinité de valeurs possibles pour ζ entre (-1) et (1), cela entraîne une multitude d'équations télégraphiques à résoudre. Par conséquent, il existe une variété infinie de solutions pour la tension v et le courant i , qui ne peuvent toutes être énumérées exhaustivement. Cependant, il est possible de déterminer les indices statistiques de cet ensemble, tels que la moyenne et la variance. À cet effet, des méthodes statistiques et stochastiques sont développées pour les calculer.

Dans les deux paragraphes suivants, nous appliquons les méthodes les plus intéressantes, telles que la méthode de Monté Carlo, la méthode de Galerkin stochastique et la méthode des collocations stochastiques.

4.3.4 Calcul des indices statistiques par la méthode de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo utilisent des nombres aléatoires pour simuler des phénomènes comportant une ou plusieurs variables aléatoires. Le nom provient du célèbre casino de Monte-Carlo.

On considère une simulation de Monte-Carlo élémentaire, visant à évaluer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire en générant un grand nombre N d'échantillons qui suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire, dans ce cas l'espérance et la variance seront calculées pour une fonction f comme suit :

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (4.23)$$

$$Var(f(x)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - \langle f(x) \rangle)^2 \quad (4.24)$$

Nous avons calculé les espérances et les écart-types des solutions des équations des télégraphistes par la méthode des différences finies en domaine temporel, pour $N=100$, 1000 et 10000 itérations, les courbes des espérances sont presque confondues (figure 4.12); alors que les courbes des écart-types sont moins confondues de $t=0$ à $t=5$ ns et s'éloignent à partir de $t=5$ ns pour $N=10000$ (figure 4.13);

Bien que le temps d'exécution pour $N=10000$ est plus élevé que pour $N=100$ et 1000 , nous allons prendre les solutions de $N=10000$ comme référence.

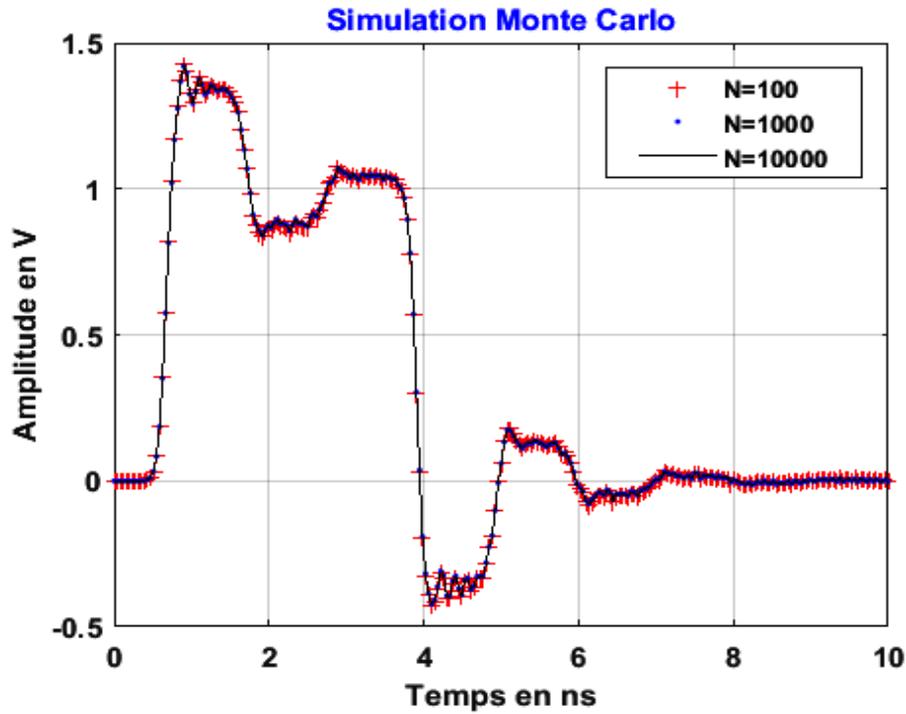


Figure 4.12 La moyenne du signal de sortie

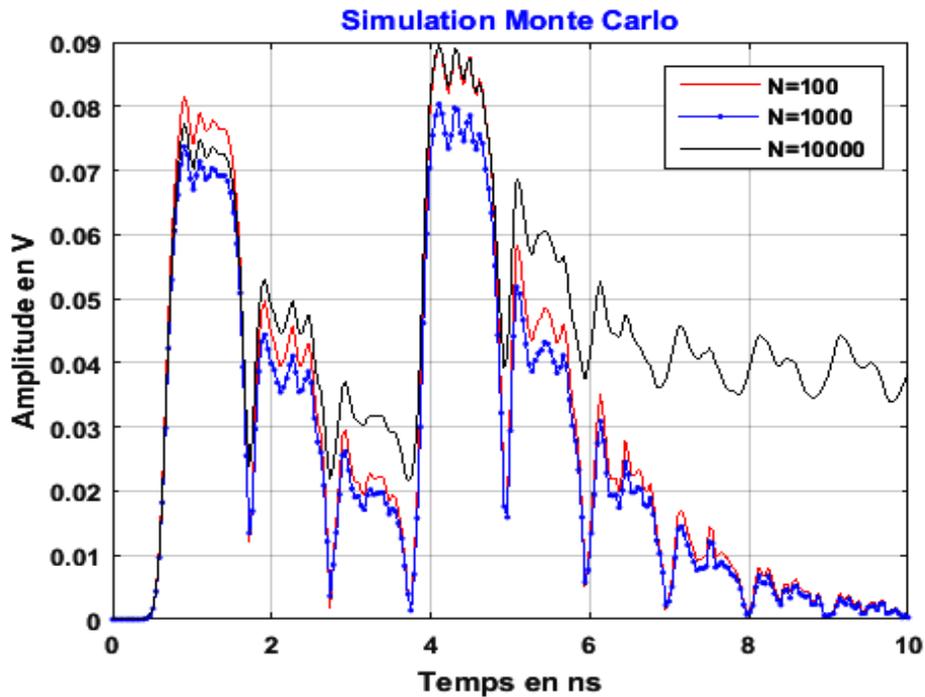


Figure 4.13 L'écart type du signal de sortie

En observant la Figure 4.13, nous notons que les trois courbes qui représentent les réponses calculées par la méthode de Monte Carlo, pour respectivement 100, 1000 et 10000 itérations, convergent dans l'intervalle de temps de 0 à 5 ns. Au-delà de 5 ns, les courbes pour

$N=100$ et $N=1000$ tendent vers zéro, tandis que celle pour $N=10000$ converge vers 0.04 V. C'est pourquoi nous avons choisi de prendre comme référence la méthode de Monte Carlo avec une courbe de 10000 itérations.

4.3.5 Méthodes stochastiques

4.3.5.1 Approche du chaos polynomial

L'idée sous-jacente de la méthode de Chaos polynomial est plutôt de représenter les inconnues stochastiques, dans notre cas, les tensions v et les courants i , par des polynômes de chaos tels que [16].

$$v(t, \xi) = \sum_{i=0}^n v_i(t) \phi_i(\xi) \quad (4.25a)$$

$$i(t, \xi) = \sum_{i=0}^n i_i(t) \phi_i(\xi) \quad (4.25b)$$

Où les $v_i(t)$ et $i_i(t)$ sont les coefficients de chaos polynomial qui restent à déterminer et les ϕ_i sont des polynômes de degré croissant dans la variable standardisée ξ . Ils sont orthonormés selon le produit interne défini par [17]:

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(\xi) \phi_n(\xi) w(\xi) d\xi = \delta_{mn} \quad (4.26)$$

Ce qui signifie que l'intégrale ci-dessus n'est non nulle que lorsque $m=n$. La fonction $w(\xi)$ apparaissant dans l'intégrand est la fonction de densité de probabilité (pdf) de ξ , qui est définie par le modèle statistique attribués aux paramètres aléatoires du problème. Pour ce travail, nous avons choisi la loi de Gauss, pour laquelle la fonction de densité de probabilité est donnée par :

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad (4.27)$$

Alors l'équation 4.26 devient :

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(\xi) \phi_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi = \delta_{mn} \quad (4.28)$$

où

δ_{mn} : est le symbole de Kronecker

Les polynômes orthonormés correspondants qui satisfont (4.26) sont les polynômes d'Hermite normalisés, dont les trois premiers sont [18]:

$$\phi_0 = 1 \quad (4.29a)$$

$$\phi_1 = \xi \quad (4.29b)$$

$$\phi_2 = (\xi^2 - 1)/\sqrt{2} \quad (4.29c)$$

Les deux premiers moments statistiques (la moyenne, et la variance) sont facilement donnés par [19]

$$E\{v(t)\} = v_0(t) \quad (4.30)$$

$$Var\{v(t)\} = \sum_{i=1}^n v_i^2(t) \quad (4.31)$$

1-Détermination des coefficients des polynômes de Chaos

Pour le cas simple de la figure 4.9, les coefficients de l'expansion ci-dessus sont facilement calculés par projection de l'expression analytique des paramètres linéiques par unité de longueur (équations 4.21a et 4.21b) sur les fonctions de base :

$$L_k = \langle L, \phi_k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \phi_k(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.32a)$$

$$C_k = \langle C, \phi_k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi) \phi_k(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.32b)$$

Avec $k=0,1$ et 2 .

Nous avons alors

$$L_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \phi_0(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.33a)$$

$$= \frac{\mu}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh^{-1}\left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

$$L_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \phi_1(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.33b)$$

$$= \frac{\mu}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \cosh^{-1}\left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

et

$$L_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi) \phi_2(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.33c)$$

$$= \frac{\mu}{4\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 - 1) \cosh^{-1}\left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

De même pour C :

$$C_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi) \phi_0(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.34a)$$

$$= \sqrt{2\pi} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^{-1}\left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w}\right)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

$$C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi) \phi_1(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.34b)$$

$$= \sqrt{2\pi} \varepsilon \sqrt{2\pi} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{\cosh^{-1}\left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w}\right)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

et

$$C_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\xi) \phi_2(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) / \sqrt{2\pi} d\xi \quad (4.34c)$$

$$= \sqrt{2\pi} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi^2 - 1)}{\cosh^{-1}\left(\frac{\mu_h + \sigma_h \xi}{r_w}\right)} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi$$

En Utilisant l'intégration numérique par la méthode de quadrature de Gauss, nous obtenons les résultats indiqués dans le tableau 4.4

Tableau 4.4 Calcul de Coefficients de Chaos polynomial pour les paramètres linéiques (L et C)

K	L ₀ /C ₀	L ₁ /C ₁	L ₂ /C ₂
Inductance linéiques	814.48 nH/m	41.811 nH/m	-7.0708 nH/m
Capacité linéique	13.698 pF/m	-0.72565 pF/m	0.16378 pF/m

Les résultats présentés dans le tableau 4.4 revêtent une grande importance pour l'application de la méthode de Galerkin stochastique. Il est pertinent de souligner que l'émergence éventuelle de paramètres linéiques non physiques, tels qu'une inductance négative (L₂), ne compromet pas la passivité,

4.3.5.2 Méthode de Galerkin stochastique

La méthode commence par représenter les paramètres linéiques comme des chaos polynomiaux. Ainsi, l'inductance et la capacitance caractéristiques sont présentées par [20]:

$$L(\xi) = L_0 \phi_0(\xi) + L_1 \phi_1(\xi) + L_2 \phi_2(\xi) \quad (4.35a)$$

$$C(\xi) = C_0 \phi_0(\xi) + C_1 \phi_1(\xi) + C_2 \phi_2(\xi) \quad (4.35b)$$

En remplaçant les Chaos polynomiaux de second ordre de la tension, du courant et des paramètres linéiques dans la version stochastique des équations de télégraphistes (4.22a et 4.22b), nous obtenons:

$$\phi_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} + \phi_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} + \phi_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} = -(L_0 \phi_0 + L_1 \phi_1 + L_2 \phi_2) \left(\phi_0 \frac{\partial i_0}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + \phi_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} \right) \quad (4.36a)$$

$$\phi_0 \frac{\partial i_0}{\partial z} + \phi_1 \frac{\partial i_1}{\partial z} + \phi_2 \frac{\partial i_2}{\partial z} = -(C \phi_0 + C_1 \phi_1 + C_2 \phi_2) \left(\phi_0 \frac{\partial v_0}{\partial t} + \phi_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \phi_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) \quad (4.36b)$$

Pour se débarrasser de la dépendance de ξ dans les équations 4.11 et 4.12, nous utilisons la méthode du test de Galerkin. Cela implique la multiplication des deux côtés de ces équations par ϕ_m ou m représente les valeurs 0, 1 et 2. En exploitant la propriété de l'équation 4.5, nous parvenons ainsi à obtenir l'équation déterministe 4.37a.

$$\frac{\partial}{\partial z} v_m = -(L_0 \alpha_{00m} + L_1 \alpha_{10m} + L_2 \alpha_{20m}) \frac{\partial}{\partial t} i_0 \quad (4.37a)$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial z} v_m = - \sum_{k=0}^2 \left(\sum_{i=0}^2 L_i \alpha_{ikm} \right) \frac{\partial}{\partial t} i_k \quad (4.37b)$$

tel que

$$\alpha_{kmn} = \langle \phi_k, \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(\xi) \phi_m(\xi) \phi_n(\xi) w(\xi) d\xi \quad (4.38)$$

Le calcul des trois équations pour $m = 0, 1, 2$ donne les équations déterministes de type ligne de transmission multi conducteur indépendantes de la variable aléatoire ξ (équations 4.39a et 4.39b) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v_0(z, t) \\ v_1(z, t) \\ v_2(z, t) \end{bmatrix} = -L \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} i_0(z, t) \\ i_1(z, t) \\ i_2(z, t) \end{bmatrix} \quad (4.39a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} i_0(z, t) \\ i_1(z, t) \\ i_2(z, t) \end{bmatrix} = -C \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v_0(z, t) \\ v_1(z, t) \\ v_2(z, t) \end{bmatrix} \quad (4.39b)$$

Avec les nouvelles matrices de paramètres linéiques qui sont [20]:

$$L = L_0 A_0 + L_1 A_1 + L_2 A_2 \quad (4.40a)$$

$$C = C_0 A_0 + C_1 A_1 + C_2 A_2 \quad (4.40b)$$

Pour les polynômes d'Hermite normalisés, ces matrices auxiliaires sont [20]:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Donc le problème stochastique d'une ligne de transmission monofilaire est devenu un problème déterministe de ligne de trois conducteurs (figure 4.14).

Le calcul a abouti aux paramètres linéiques suivants :

$$L = \begin{bmatrix} 814.4791 & 41.8108 & -7.0708 \\ 41.8108 & 804.4794 & 59.1294 \\ -7.0708 & 59.1294 & 804.4794 \end{bmatrix} nH/m$$

$$C = \begin{bmatrix} 13.6977 & -0.7256 & 0.1638 \\ -0.7256 & 13.9293 & -1.0262 \\ 0.1638 & -1.0262 & 13.9293 \end{bmatrix} pF/m$$

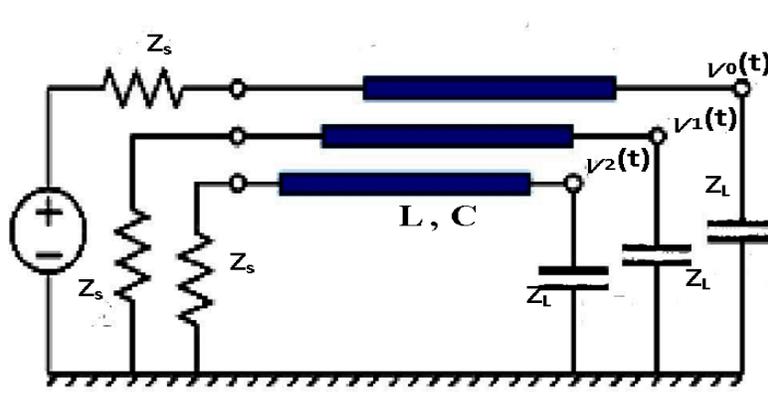


Figure 4.14 Circuit équivalent d'une ligne de transmission monofilaire avec paramètres stochastiques

La résolution des équations 4.39a et 4.39b par la FDTD mène à trouver les tensions $v_0(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$ qui servent à calculer la moyenne par l'équation $E\{v(t)\} = v_0(t)$ et l'écart type par l'équation

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}\{v(t)\}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2(t)}$$

La moyenne et l'écart type sont illustrées respectivement par les figure 4.15 et 4.16.

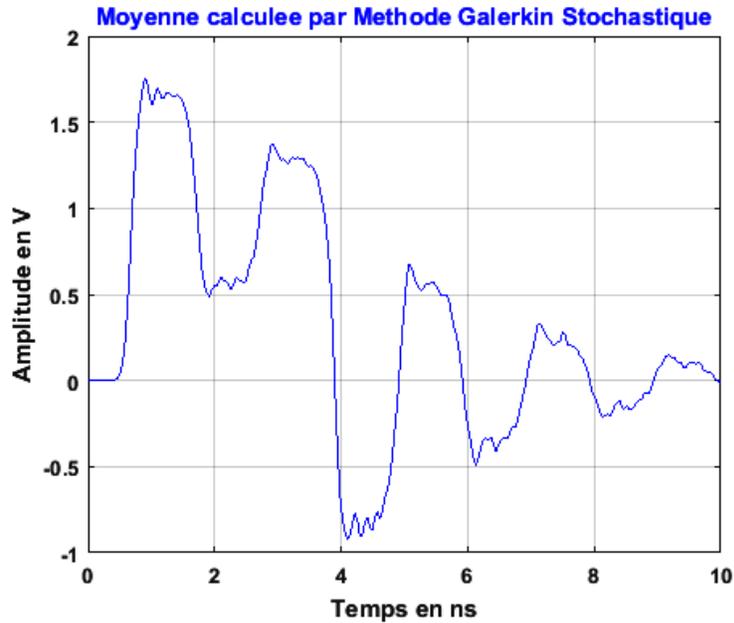


Figure 4.15 La moyenne du signal à la charge par la méthode de Galerkin stochastique

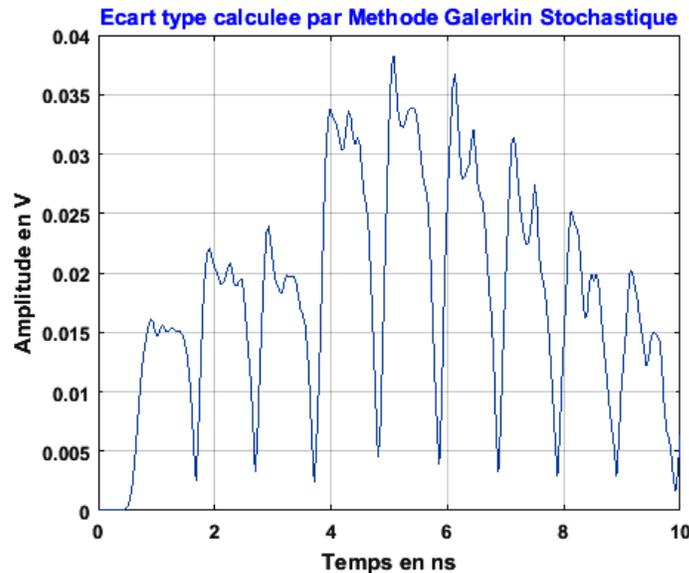


Figure 4.16 L'écart type du signal à la charge par la méthode de Galerkin stochastique

4.3.5.3 Méthode de collocation stochastique

L'idée des méthodes de collocation stochastique (SC) est basée sur l'approximation des formulations intégrales des moments statistiques (i.e. espérance, variance...) par des sommes pondérées de fonctions à calculer et à évaluer en certains points appelés points de collocations.

Pour une fonction f , le principe de la méthode consiste à projeter la fonction f sur une base de polynômes de Lagrange [21] :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^n b_i L_i(x) \quad (4.42)$$

Où les n polynômes de Lagrange $L_i(x)$ forment une base de degré inférieur ou égal $n-1$; ils sont donnés par :

$$L_i(x) = \prod_{j=1; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (4.43)$$

Et vérifient la propriété suivante :

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (4.44)$$

Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et les points x_j sont appelés points de collocation.

La moyenne et la variance du système sont données par :

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (4.45)$$

$$Var(f(x)) = \sum_{i=1}^n w_i f^2(x_i) - \langle f(x) \rangle^2 \quad (4.46)$$

Où x_i : les points de collocation et w_i les poids associés aux points de collocation.

Les points et les poids sont dépendants de la loi de distribution et de la variance des points d'entrées x , par exemple pour la loi de Gauss et une incertitude de 20%, la quadrature Gaussienne à trois points, nous donne les valeurs suivantes tableau 4.5 [22].

Tableau 4.5 Points et poids de la quadrature Gaussienne à trois points

Points	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Poids	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$

L'application de l'équation des télégraphistes pour les points de collocation $n=3, n=5$ et $n=7$ au problème de la figure 4.9 mène aux figures suivantes.

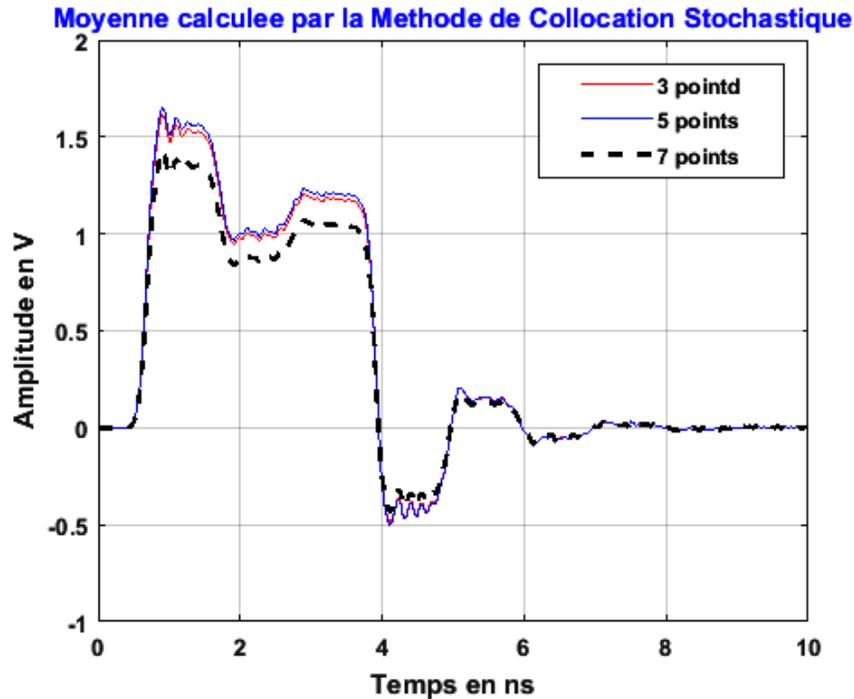


Figure 4.17 moyenne du signal à la charge par la méthode de CS

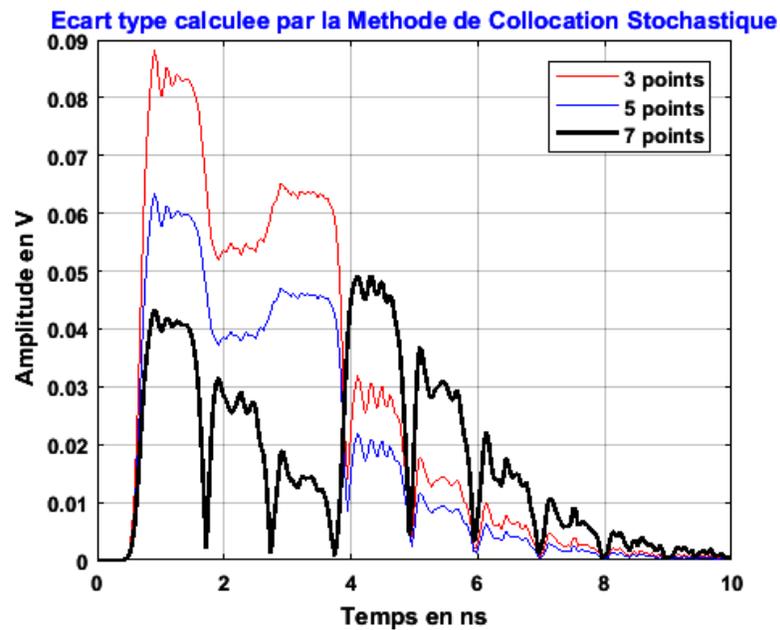


Figure 4.18 écart type du signal à la charge par la méthode de collocations stochastiques

4.3.5.4 Méthode Unscented Transform (UTM)

La méthode Unscented Transform (UTM) permet d'estimer les moments statistiques (moyenne, covariance ou variance) d'une sortie $Y=f(X)$, où X suit une distribution symétrique (souvent

gaussienne) d'Esperance μ_X et de covariance P_X , Elle remplace l'intégration traditionnelle par une évaluation sur un petit ensemble de points bien choisis appelés points sigma (Si).

Chaque point sigma est associé à deux poids ω_i^m pour l'estimation de la moyenne et ω_i^c pour l'estimation de la covariance (variance).

1- Définition des paramètres :

Pour déterminer les points sigma et leurs poids, les paramètres suivants doivent être spécifiés :

$\alpha \in (0,1]$: contrôle la dispersion des points autour de μ (valeur typique : 10^{-3}),

κ : paramètre secondaire (souvent $\kappa=0$ ou $\kappa=3-n$),

β : permet d'incorporer des connaissances sur la distribution (valeur optimale pour une gaussienne : $\beta=2$).

À partir de ces paramètres, on définit le coefficient d'étalement λ par (4.47):

$$\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n \quad (4.47)$$

2- Détermination des points sigma :

Soit P_X la matrice de covariance de X , dont la racine carrée est obtenue via la décomposition de Cholesky $\sqrt{P_X} = chol(P_X) = L$, où L est une matrice triangulaire inférieure (avec des zéros au-dessus de la diagonale).

Les points sigma sont calculés comme suit (Équations 4.48-4.50) :

$$S_0 = \mu_X \quad (4.48)$$

$$S_i = \mu_X + \sqrt{n + \lambda} L_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.49)$$

$$S_{i+n} = \mu_X - \sqrt{n + \lambda} L_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (4.50)$$

Où L_i est la i -ème colonne de L .

3- Poids des points sigma :

- **Poids pour la moyenne** (Équation 4.451-4.52) :

$$\omega_0^m = \frac{\lambda}{n + \lambda} \quad (4.51)$$

$$\omega_i^m = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \text{ pour } i = 1; 2; \dots; 2n \quad (4.52)$$

- **Poids pour la covariance** (Équation 4.53-4.54) :

$$\omega_0^c = \omega_0^m + (1 - \alpha^2 + \beta) \quad (4.53)$$

$$\omega_i^c = \omega_i^m, \text{ pour } i = 1; 2; \dots 2n \quad (4.54)$$

4- Estimation des moments de Y :

- **Espérance de YY** (Équation 4.55) :

$$\mathbb{E}(Y) \approx \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^m Y_i \quad (4.55)$$

- **Covariance de YY** (Équation 4.56) :

$$\text{Cov}(Y) \approx \sum_{i=0}^{2n} \omega_i^c (Y_i - \mathbb{E}(Y))(Y_i - \mathbb{E}(Y))^T \quad (4.55)$$

4.3.6 Comparaison des résultats

Pour la comparaison, nous avons choisi comme référence les résultats de la méthode de Monté Carlo avec N=10000, il est bien évident que celle-ci est plus gourmande en terme de temps mais elle est plus précise.

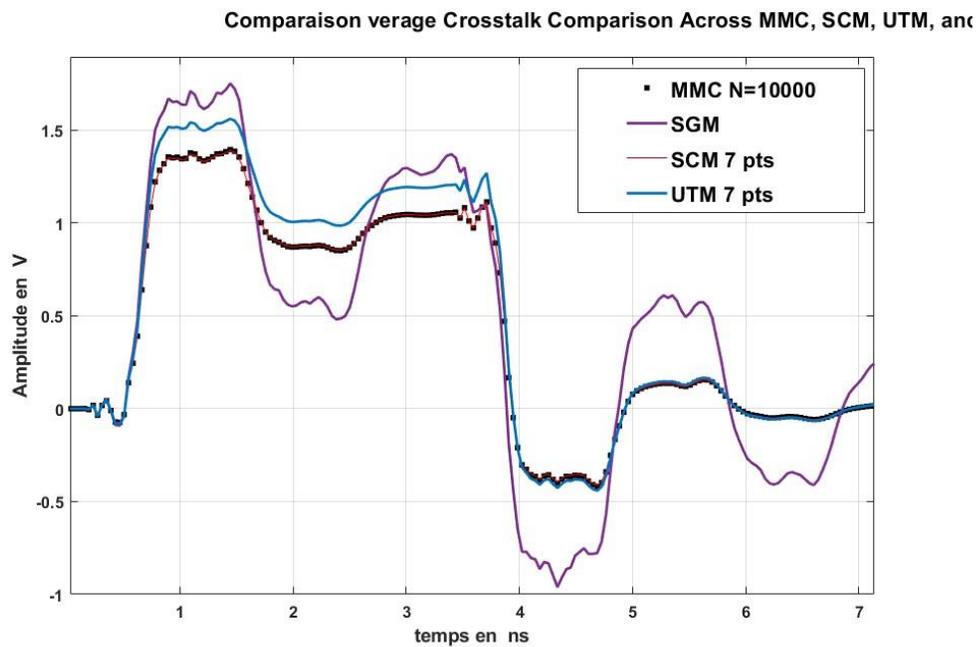


Figure 4.19 Comparaison entre résultats de la moyenne

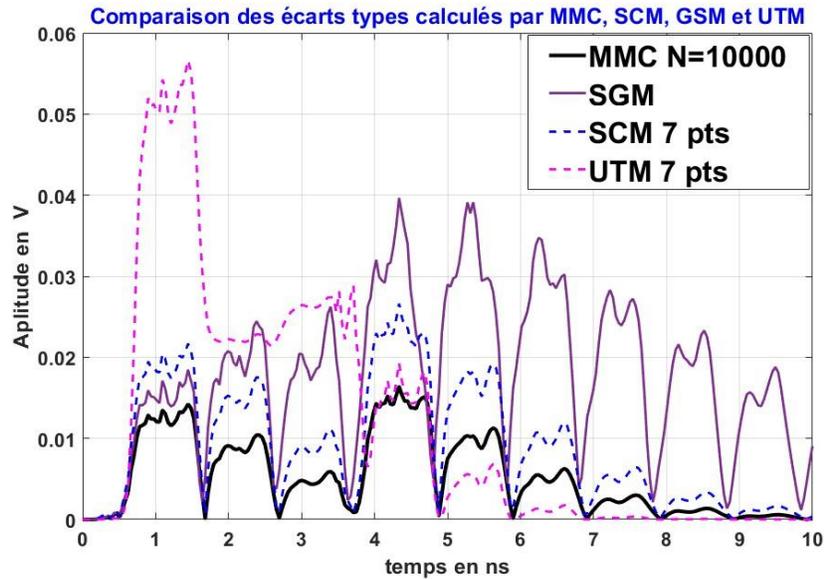


Figure 4.20 Comparaison entre résultats de l'écart type.

Pour la moyenne, la méthode de collocation stochastique coïncide avec celle de Monte Carlo tandis que la méthode de Galerkin est proche mais avec des oscillations. Pour l'écart type, la méthode de collocation stochastique se rapproche de la méthode de Monte Carlo jusqu'à 6 ns et au-delà de 6 ns la méthode de Galerkin donne des résultats plus proches de la référence que la méthode de collocation stochastique.

4.3.7 Résultats et discussion

L'analyse des moyennes et des écarts-type du signal (Figures 4.16 et 4.20) sur 10 ns compare les méthodes MCM, SGM, SCM et UTM. Les résultats montrent que UTM et SCM reproduisent bien la variabilité estimée par MCM, avec une meilleure précision pour SCM autour des pics (ex. $t = 3$ ns).

Cependant, SGM reste plus coûteuse en calcul, notamment pour des modèles complexes. Ainsi, pour les lignes de transmission, SCM ou UTM sont recommandées en pratique, à condition d'ajuster correctement leurs paramètres (nombre de points, ordre de projection) pour garantir une erreur acceptable ($< 5\%$).

En résumé, SGM offre la meilleure précision, mais SCM et UTM représentent de bons compromis entre coût et fiabilité après calibration.

4.4 La troisième Application : Étude de sensibilité d'une ligne de transmission soumise à des incertitudes géométriques

4.4.1 Énoncé du problème

L'étude se concentre sur un cas spécifique de ligne de transmission à deux conducteurs cylindriques parallèles, positionnée au-dessus d'un plan de masse parfaitement conducteur à une hauteur h . Les deux conducteurs, d'un rayon r_w identique, sont espacés d'une distance d sur une longueur l_{en} , sans aucune perte ni dispersion. Le premier conducteur est excité par un train d'impulsions de fréquence f , avec une impédance d'entrée R_1 et une charge R_3 , tandis que le second conducteur, non excité, présente une impédance à l'entrée R_2 . La ligne est soumise à une charge constituée d'une résistance R_4 , comme illustré dans le schéma de la figure 4.21. Trois paramètres clés, à savoir la hauteur h , la distance entre les conducteurs d , et le rayon du conducteur r_w , sont sujets à des variations aléatoires. Cette étude examine les implications de ces variations sur la transmission du signal, en mettant en évidence les défis potentiels posés par l'incertitude géométrique, notamment en ce qui concerne la diaphonie. Le tableau 4.6 répertorie la nomenclature associée à ces paramètres, offrant ainsi un aperçu détaillé des éléments étudiés

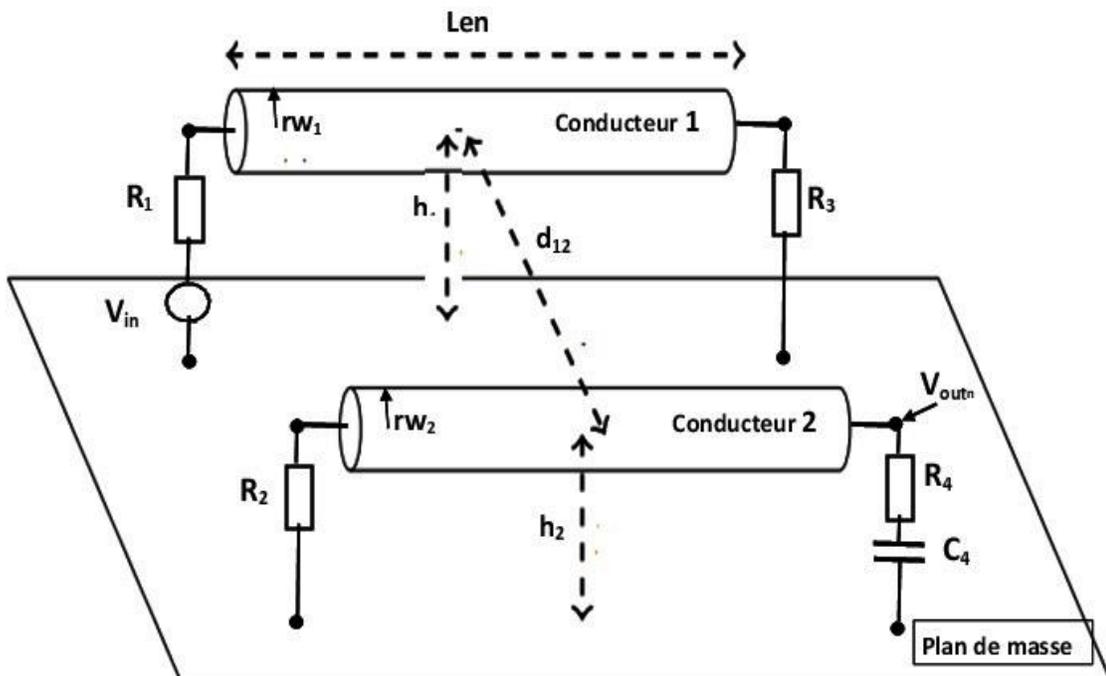


Figure 4.21 Schéma du circuit

Tableau 4.6 Nomenclature associée aux paramètres géométriques et composants de la ligne

paramètres	valeurs	paramètres	valeurs	paramètres	valeurs
R1	50 Ω	R2	50 Ω	d	1cm \pm 15%
R3	50 Ω	R4	50 Ω	len	10 cm
rw1=rw2=rw	5 mm	R2	50 Ω	h=h1=h2	2cm \pm 20%

4.4.2 Domaine temporel

Cette application vise à évaluer la sensibilité de la ligne aux incertitudes liées aux paramètres géométriques (h,d,rw) sur la diaphonie (NEXT et FEXT) qui peuvent apparaître aux deux bornes du deuxième conducteur, NEXT au début de la ligne et FEXT à l'extrémité de la ligne. Le calcul de la diaphonie est effectué par la méthode des différences finies en domaine temporel, et les paramètres statistiques sont calculés par la méthode Unscented Transform à sept points

Pour étudier la sensibilité des deux types de diaphonie (NEXT et FEXT), les écarts types des deux valeurs de diaphonie seront calculés en fixant deux paramètres géométriques et en faisant varier le troisième, puis en comparant les résultats. Les figures 4.22 et 4.23 illustrent les résultats :

**Comparaison de l'écart type de NEXT pour une variation de 20 %
des paramètres géométriques (h, d, rw)**

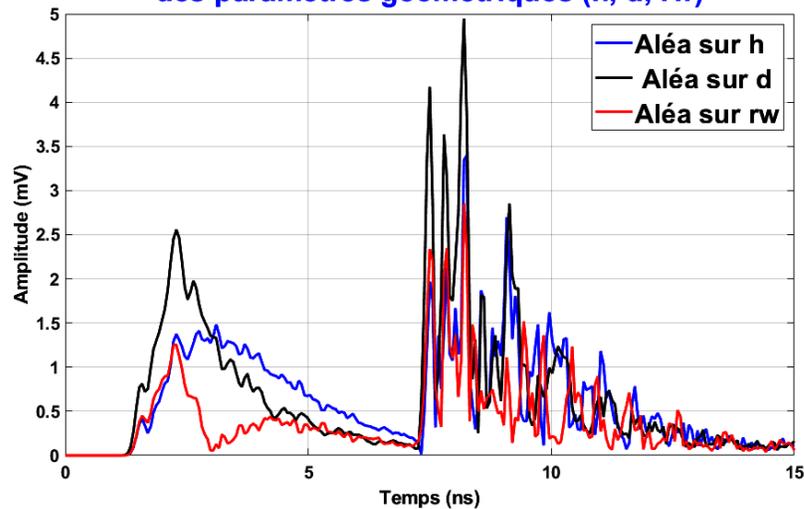


Figure 4.22 Comparaison de l'écart type de NEXT

Comparaison de l'écart type de FEXT pour une variation de 20 % des paramètres géométriques (h, d, rw)

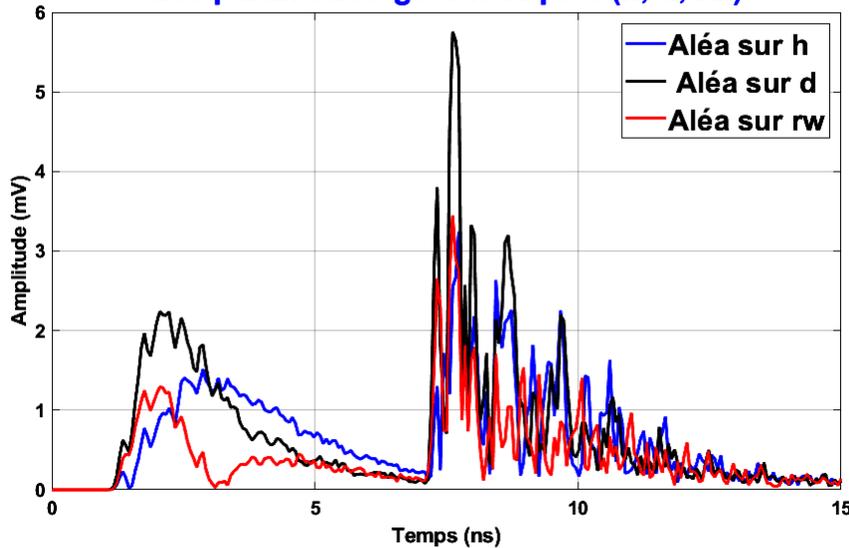


Figure 4.23 Comparaison de l'écart type de FEXT

Les graphiques des figures 4.22 et 4.23 montrent cinq phases sur l'ensemble des courbes. Dans un premier temps, lors de la première phase, caractérisée par des écarts types nuls, le signal source affiche également une valeur nulle. La deuxième phase débute à $t_1 \approx 1,5$ ns lorsque le signal V_s commence à monter jusqu'à $t_2 \approx 3,5$ ns. Pendant cette phase, toutes les courbes d'écart type présentent une forme de lobe large, avec le paramètre d étant le plus influent sur la diaphonie, suivi de h , puis de rw . La troisième phase, qui commence à t_2 et se termine à $t_3 \approx 7,2$ ns (au début de la descente du signal source), montre une diminution des écarts types, le paramètre d étant dominant, suivi de h , puis de rw . Cette dominance se poursuit dans la quatrième phase, de t_3 à $t_4 \approx 8,3$ ns, mais les diaphonies sont plus sensibles à l'incertitude des paramètres. Dans la dernière phase, à partir de t_4 , la dominance passe à h , suivi de d .

Pour confirmer les résultats des figures 4.22 et 4.23, un code a été mis en place pour calculer les indices de Sobol totaux à chaque instant de la simulation. Les figures 4.24 et 4.25 illustrent le calcul de ces indices pour NEXT et FEXT.

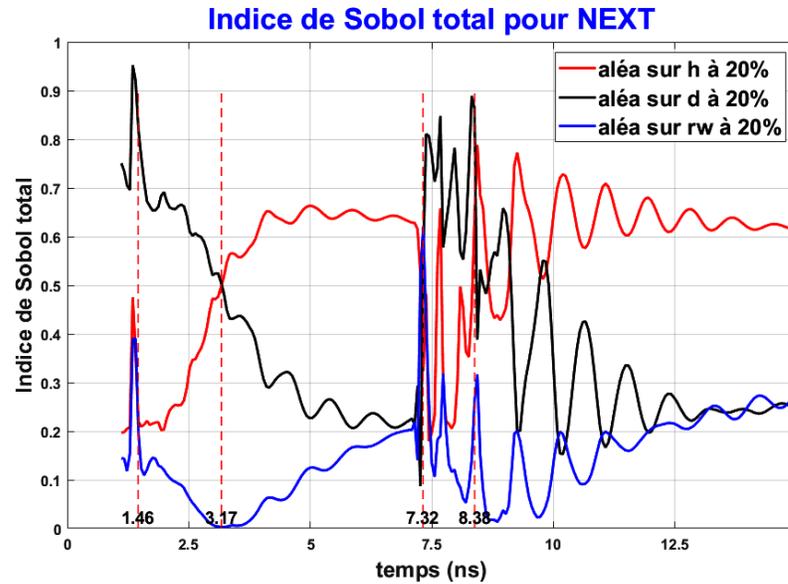


Figure 4.24 Indice de Sobol total pour NEXT

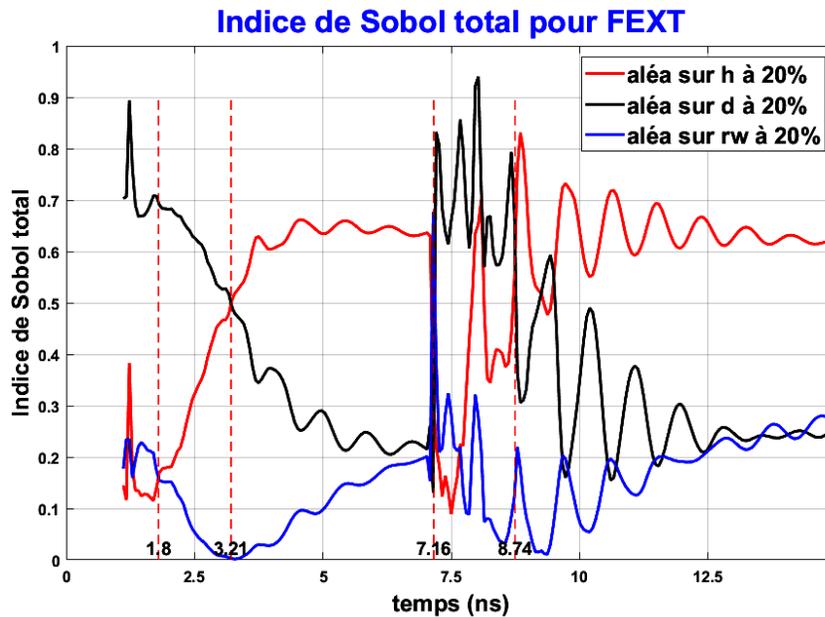


Figure 4.25 Indice de Sobol total pour FEXT

Les résultats observés dans les figures 4.24 et 4.25 confirment ceux des figures 4.22 et 4.23. Pour examiner la sensibilité globale, un autre code a été implémenté afin de calculer les indices de Sobol totaux pour la moyenne de NEXT et FEXT ainsi que leurs écarts types. Les résultats sont illustrés dans les figures 4.26 et 4.27.

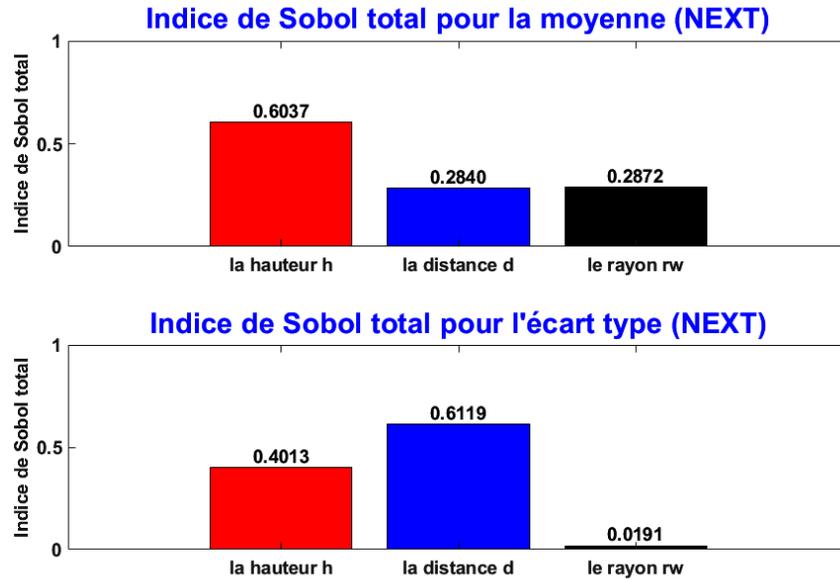


Figure 4.26 Indice de Sobol pour la moyenne et l'écart type de NEXT

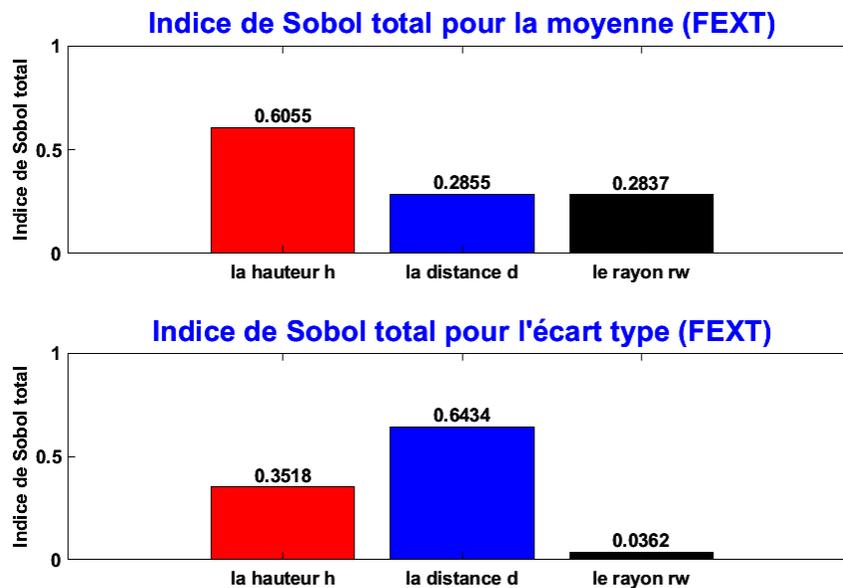


Figure 4.27 Indice de Sobol pour la moyenne et l'écart type de FEXT

4.4.3 Domaine fréquentiel

Après avoir examiné la sensibilité en domaine temporel de la ligne aux incertitudes liées aux paramètres géométriques, nous analysons maintenant la sensibilité en domaine fréquentiel afin de mieux comprendre l'impact des incertitudes sur ces paramètres.

La variabilité de la diaphonie a été calculée avec une marge de confiance de 99,7 %, en utilisant la formule de l'équation 4.56 :

$$La\ variabilite = [\mu_{diaphonie} - 3 \times \sigma_{diaphonie}; \mu_{diaphonie} + 3 \times \sigma_{diaphonie}] \quad (4.56)$$

Où $\mu_{diaphonie}$: est la moyenne et $\sigma_{diaphonie}$ est l'écarttype .

L'étude se limite à la valeur maximale, soit moyenne(diaphonie)+3×ecart-type(diaphonie), et se concentre sur les trois aléas hh , dd , et rw à 20 %. La Figure 4.28 illustre cette limite pour NEXT.

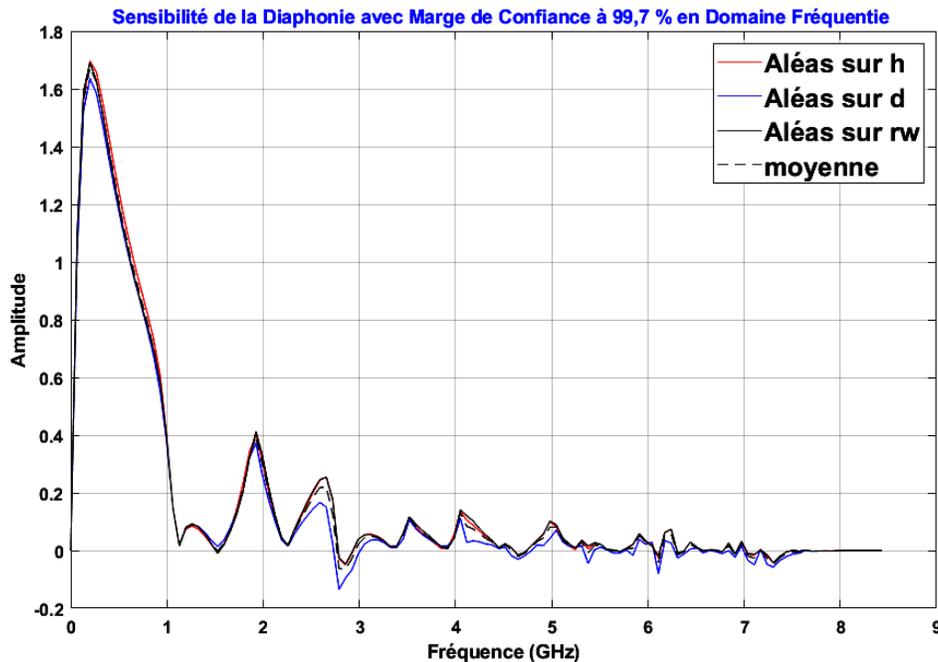


Figure 4.28 Sensibilité de NEXT avec marge de confiance 99.7%

Il est à noter que :

- Les trois courbes sont presque superposées, ce qui indique que la variabilité en fonction de la fréquence est similaire pour h , d et rw .
- La variabilité commence à zéro lorsque la fréquence est nulle, puis augmente pour atteindre un maximum de 1,6 V autour de 200 MHz, avant de décroître à 16 mV à $f=1,2$ GHz, puis oscille autour de zéro, avec une valeur maximale de 400 mV.

Il est donc évident qu'à certaines fréquences, la ligne est très sensible aux incertitudes des paramètres géométriques. L'impact des différents paramètres h , d et rw est presque identique en domaine fréquentiel.

Pour mieux comprendre le comportement de la variabilité de la diaphonie, la susceptibilité est calculée selon l'équation 4.57, illustrée à la Figure 4.29.

$$La\ susceptibilite = 20 \times Log_{10} \left(\frac{diaphonie}{V_s} \right) \quad (4.57)$$

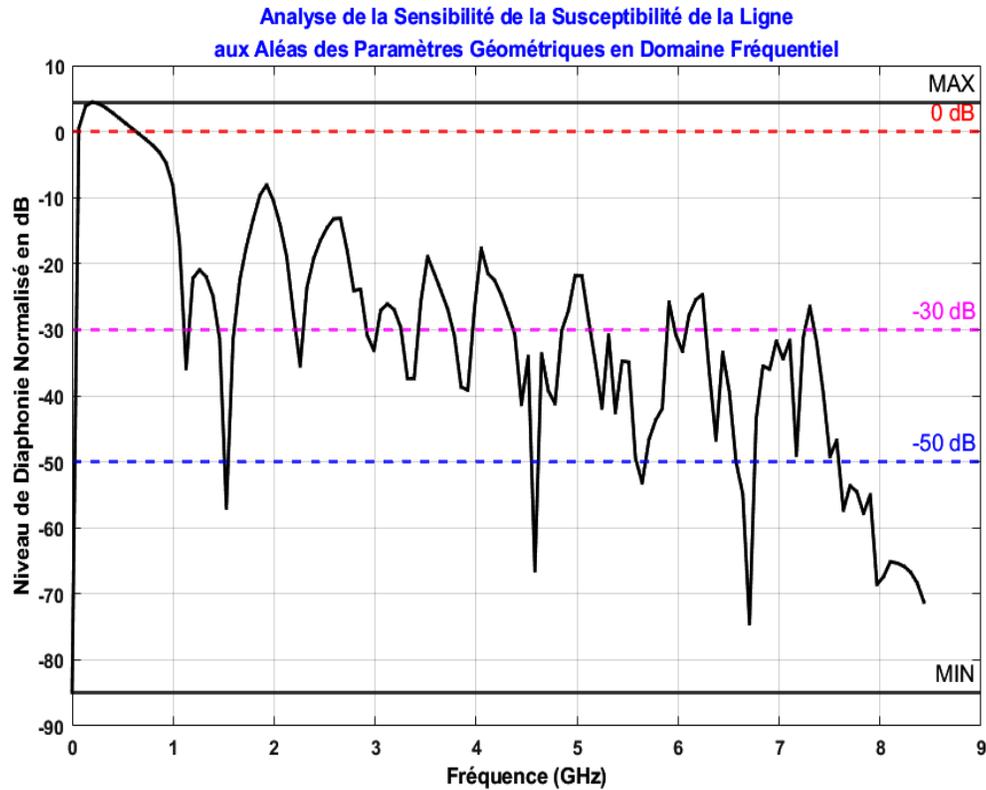


Figure 4.29 Analyse de la sensibilité de la ligne

La Figure 4.28 montre clairement les valeurs de fréquence où la susceptibilité est faible, moyenne ou forte, comme indiqué dans le Tableau 4.7.

Tableau 4.7 les niveaux de susceptibilité

$20 \cdot \log_{10}(\text{Diaphonie}/V_s)$	Susceptibilité
>0 dB	Très faible
Entre 0 et -30dB	Faible
De -30 db à -50 dB	Moyenne
>-50 dB	Forte

4.4.4 Résultats et discussion

Cette 3^e application porte sur l'impact des incertitudes géométriques (h , d , rw) sur la diaphonie (NEXT et FEXT) d'une ligne de transmission bifilaire, en combinant méthodes stochastiques et analyses de sensibilité.

Les résultats temporels montrent que la distance d domine l'influence sur la diaphonie, notamment lors des transitoires vers $t \approx 3,5$ ns, suivie par la hauteur h et le rayon rw . Les indices de Sobol confirment cette hiérarchie, avec un glissement vers h à la fin de la simulation. L'Unscented Transform (UTM) capture bien les écarts-types associés, offrant un compromis efficace entre précision et coût.

Dans le domaine fréquentiel, la variabilité maximale atteint 1,6 V autour de 200 MHz, avec une zone sensible entre 200 MHz et 1,2 GHz. Contrairement au domaine temporel, les trois paramètres présentent des impacts similaires en fréquence. La susceptibilité identifie une forte sensibilité autour de 200 MHz et une faible au-delà de 1,2 GHz.

Ces résultats suggèrent que la maîtrise précise de d et h est cruciale pour limiter la diaphonie, particulièrement sur les signaux rapides. Pour les hautes fréquences (> 200 MHz), la tolérance sur rw est moins critique. Méthodologiquement, l'UTM (7 points) s'avère suffisant pour une estimation rapide des écarts-types, tandis que les indices de Sobol permettent de hiérarchiser clairement les paramètres influents. Pour plus de finesse, l'utilisation de SCM peut être envisagée.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté trois applications illustrant l'analyse stochastique et la modélisation d'incertitudes dans le contexte des lignes de transmission aériennes et des champs électriques associés.

Synthèse des résultats

1. Optimisation de la Méthode des Charges Fictives (Application 1)

Une approche stochastique a permis d'optimiser la méthode des charges fictives pour le calcul du champ électrique. L'algorithme proposé a montré une meilleure précision que les méthodes classiques, avec des erreurs réduites (1,11 % au point de crête) et une convergence rapide. La modélisation probabiliste des paramètres polaires (rayon relatif Cr et angle Ca) suit une distribution de Weibull, assurant une grande flexibilité dans la simulation.

2. Analyse comparative des méthodes stochastiques (Application 2)

L'étude de l'écart-type sur un signal temporel a mis en évidence la précision et le coût de différentes méthodes :

- La méthode intrusive de Galerkin stochastique (SGM) offre une bonne fidélité dans l'estimation de l'écart-type, en particulier autour des pics, mais présente une moins bonne

précision sur la moyenne. De plus, elle demeure coûteuse en calcul, notamment pour les modèles complexes.

- La méthode non intrusive de collocation stochastique (SCM) et l'Unscented Transform (UTM) présentent un bon compromis entre rapidité et précision, sous réserve d'un ajustement adéquat des paramètres (nombre de points, ordre polynomial).

Pour les applications pratiques sur lignes de transmission, SCM ou UTM sont recommandées, car elles réduisent significativement le temps de calcul tout en conservant une erreur inférieure à 5 % par rapport à la référence Monte Carlo.

3. Étude de sensibilité des paramètres géométriques sur la diaphonie (Application 3)

L'impact des incertitudes sur la hauteur (h), la distance (d) et le rayon (rw) des conducteurs a été évalué par des méthodes stochastiques combinées à l'analyse de sensibilité (indices de Sobol).

- Dans le domaine temporel, la distance d domine la variabilité de la diaphonie (NEXT/FEXT), particulièrement pendant les transitoires, suivie par h et rw .
- En domaine fréquentiel, les trois paramètres ont une influence comparable dans la bande 200 MHz – 1,2 GHz.
- L'Unscented Transform (UTM) s'est révélée efficace pour estimer rapidement les écarts-types, tandis que les indices de Sobol ont clarifié la hiérarchie des paramètres influents. Pour des analyses plus fines, SCM peut être envisagée.
- En pratique, il est crucial de contrôler avec précision d et h pour minimiser la diaphonie, surtout sur signaux rapides, tandis que la tolérance sur rw est moins critique à haute fréquence.

En conclusion, ce chapitre illustre comment combiner méthodes stochastiques et analyses de sensibilité pour mieux comprendre et réduire l'effet des incertitudes dans des systèmes complexes, avec des recommandations claires pour le choix et le paramétrage des méthodes selon les cas d'usage.

4.5 Références Bibliographiques

- [1] H. Singer, H. Steinbigler, P. Weiss, 'A charge simulation method for the calculation of high voltage fields', IEEE Trans. PAS, Vol. 93, pp. 1660-1668, 1974.
- [2] W. Chen ; H. Yang , H. Huang,' Optimal Design of Support Insulators Using Hashing Integrated Genetic Algorithm and Optimized Charge Simulation Method' , IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation , Volume: 15, Issue: 2, April 2008 . pp 426 – 433
- [3] J. C. Salari, A. Mpalantinos and J. I. Silva, “Comparative Analysis of 2-and 3-D Methods for Computing Electric and Magnetic Fields Generated by Overhead Transmission Lines”, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 24., No. 1., January 2009
- [4] S. Vujević, P. Sarajčev and A. Botić, “Computation of the Overhead Power Line Electromagnetic Field”, 16th International Conference on Software, Telecommunications and Computer Networks (SoftCOM 2008), pp. 27-31, Split, 2008.
- [5] Spall, J. C. 'Introduction to Stochastic Search and Optimization.' Wiley. ISBN 0-471-33052-3 , 2003, pp 172-180
- [6] T. Homem-de-Melloa, G. Bayraksanb, 'Monte Carlo sampling-based methods for stochastic optimization', Surveys in Operations Research and Management Science Volume 19, Issue 1, January 2014 volume 11, issue 1 pp 56-85.
- [7]] M. D. McKay et al., ' A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code', Technometrics, Vol. 21, No. 2 (May, 1979), pp. 239-245
- [8] H. Niederreiter. 'Quasi-Monte Carlo methods and pseudo - random numbers'. Bulletin of the American Mathematical Society Volume 84, Number 6 (1978), pp 957-1041.
- [9] , A. et al.' Electric Field Calculation around of Overhead Transmission Lines in Bosnia and Herzegovina', Gothenburg, Sweden, Proc. of the 2014 International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe 2014), September 1-4, 2014 pp 1001-1006.
- [10] Technical brochures, “Technical Guide for Measurement of Low Frequency Electric and Magnetic Fields near Overhead Power Lines”, Cigre reference 375 WG C4.203, April 2009.
- [11] Hameyer, K., Hanitsch, R. and Belmans, R.: “Optimisation of the electro static field below hightension lines”, Graz, Austria, Proc. 6th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, September 1994 ,pp. 264-269.
- [12] S. Golden and B. Friedlander, "Maximum likelihood estimation, analysis, and applications of exponential polynomial signals," in IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 6, pp. 1493-1501, June 1999, doi: 10.1109/78.765111.
- [13] C. R. Paul, Analysis of Multiconductor Transmission Lines. New York: Wiley, 1994.
- [14] C. R. Paul, “Introduction to Electromagnetic Compatibility”, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992
- [15] G. Capraro and C. R. Paul, “A probabilistic approach to wire coupling interference prediction,” in Proc. IEEE Int. Zurich Symp. Electromagn. Compat., Zurich, Switzerland, Mar. 1981, pp. 267-272
- [16] D. VandeGinste, D. De Zutter, D. Deschrijver, T. Dhaene, P. Manfredi, and F. Canavero, “Stochastic modeling-based variability analysis of on-chip inter-connects,” IEEE Trans. Compon. Packag. Manuf. Technol., vol. 2, no. 7, pp.1182-1192, Jul. 2012.
- [17] D. Xiu, “Fast numerical methods for stochastic computations: a review,” Commun. Computational Physics, vol. 5, no. 2-4, pp. 242-272, Feb. 2009.
- [18] S. Shiran, B. Reiser, and H. Cory, “A probabilistic model for the evaluation of coupling between transmission lines,” IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol. 35, no. 3, pp. 387-393, Aug. 1993.

- [19] S. Stievano, P. Manfredi, and F. G. Canavero, "Stochastic analysis of multi-conductor cables and interconnects," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 53, no. 2, pp. 501-507, May 2011.
- [20] P. Manfredi and F. G. Canavero, "Efficient statistical extraction of the per-unit-length capacitance and inductance matrices of cables with random parameters," *Advanced Electromagnetics*, vol. 4, no. 1, pp. 22--30, 2015.
- [21] Babuska, I., Nobile, F., Tempone, R.: A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM J. Numer. Anal.* 45(3), 1005–1034 (2007)
- [22] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery ; "Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing" , Cambridge University Press ; 1986

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

La présente thèse met en lumière l'importance cruciale de l'application des méthodes statistiques et stochastiques dans le domaine de la compatibilité électromagnétique (CEM). Après une analyse approfondie de l'état de l'art, notre travail a innové en intégrant ces méthodes dans l'étude des incertitudes associées aux paramètres variables des modèles CEM. Cette approche permet une meilleure quantification et compréhension des effets des incertitudes sur le comportement des systèmes électromagnétiques, en particulier dans le cadre des lignes de transmission.

L'étude a porté un intérêt particulier à l'évaluation des niveaux d'interférences, notamment à travers l'analyse des réponses aléatoires d'une ligne de transmission soumise à des incertitudes géométriques. Par ailleurs, nous avons développé et optimisé des algorithmes basés sur la méthode de Monte Carlo pour le calcul précis du champ électrique à proximité de lignes à haute tension.

Les résultats détaillés dans le quatrième chapitre, qui illustre trois applications majeures, conduisent à plusieurs conclusions significatives :

1. Optimisation de la méthode des charges fictives

Une nouvelle approche stochastique a permis d'optimiser la méthode des charges fictives pour le calcul du champ électrique. L'algorithme développé a démontré une meilleure précision que les méthodes classiques, avec une erreur réduite à 1,11 % au point de crête, ainsi qu'une convergence rapide. La modélisation probabiliste des paramètres polaires (rayon relatif Cr et angle relatif Ca) selon une loi de Weibull confère une grande flexibilité et adaptabilité dans la simulation.

2. Comparaison des méthodes stochastiques pour la modélisation des incertitudes

L'étude comparative des méthodes de Galerkin stochastique (SGM), de collocation stochastique (SCM) et de l'Unscented Transform (UTM) a montré que :

- SGM offre la meilleure précision, notamment sur les pics temporels, mais avec un coût computationnel élevé.
- SCM et UTM représentent des compromis efficaces entre rapidité et précision, à condition d'un réglage adéquat des paramètres (nombre de points, ordre polynômial).
- Ces méthodes non intrusives sont recommandées en pratique pour l'analyse des lignes de transmission, avec des erreurs inférieures à 5 % par rapport à la méthode de Monte Carlo.

3. Analyse de sensibilité des paramètres géométriques sur la diaphonie

L'impact des incertitudes géométriques sur la diaphonie (NEXT et FEXT) a été quantifié à l'aide d'analyses stochastiques combinées à des indices de sensibilité de Sobol :

- Dans le domaine temporel, la distance entre conducteurs (d) est le paramètre dominant, particulièrement lors des transitoires, suivie de la hauteur (h) et du rayon (rw).
- En domaine fréquentiel, les trois paramètres ont une influence comparable dans la bande 200 MHz à 1,2 GHz.
- L'Unscented Transform s'est révélée efficace pour estimer rapidement les écarts-types, tandis que les indices de Sobol ont permis de hiérarchiser précisément l'importance des paramètres. Ces résultats soulignent l'importance pratique d'un contrôle précis de d et h pour limiter la diaphonie, surtout sur signaux rapides, tandis que la tolérance sur rw est moins critique aux hautes fréquences.

En somme, cette thèse illustre comment la combinaison judicieuse de méthodes stochastiques et d'analyses de sensibilité permet d'approfondir la compréhension et la maîtrise des phénomènes électromagnétiques complexes affectés par des incertitudes. Ces avancées ouvrent des perspectives prometteuses pour le développement de méthodes robustes, adaptables et précises dans le domaine de la compatibilité électromagnétique.

Perspectives de Travail

Notre travail a posé les bases pour une approche avancée dans l'évaluation de la compatibilité électromagnétique en tenant compte des incertitudes. À l'avenir, il serait judicieux d'explorer deux axes de développement primordiaux.

- ✓ **Premièrement**, il est essentiel de considérer l'augmentation potentielle de la dimension du problème. Cela signifie intégrer un nombre plus important de paramètres affectés par l'incertitude, ce qui représente un défi stimulant pour les méthodes stochastiques.

- ✓ **Deuxièmement**, une extension naturelle de notre travail serait d'incorporer des notions de fiabilité avancées, telles que l'estimation de la valeur extrême et la probabilité de défaillance. Ces outils permettront d'aller au-delà de la simple caractérisation des incertitudes pour prendre des décisions éclairées dans un contexte de conception et d'ingénierie.