



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
قسم الآلية
Ecole Nationale Polytechnique
Département Automatique



Mémoire de projet de fin d'études
pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'État en Automatique

Commande Robuste d'un Pendule Inversé

Réalisé par :

M^r AZIEZ Mohamed Malik Sabri
M^r KELKOULI Mohamed Oussama Samy

*Présenté et soutenu publiquement le 21 / 06 / 2025, devant le jury composé
de :*

Président	Pr. STIHI Omar	ENP
Examineur	Pr. BOUDNA Djamel	ENP
Promoteurs	Pr. BOUDJEMAA Fares	ENP

ENP 2025



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
قسم الآلية
Ecole Nationale Polytechnique
Département Automatique



Mémoire de projet de fin d'études
pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'État en Automatique

Commande Robuste d'un Pendule Inversé

Réalisé par :

M^r AZIEZ Mohamed Malik Sabri
M^r KELKOULI Mohamed Oussama Samy

*Présenté et soutenu publiquement le 21 / 06 / 2025, devant le jury composé
de :*

Président	Pr. STIHI Omar	ENP
Examineur	Pr. BOUDNA Djamel	ENP
Promoteurs	Pr. BOUDJEMAA Fares	ENP

ENP 2025

يُعدُّ تحكُّم البندول المقلوب مشكلةً أثارت اهتمام الباحثين لسنوات، بهدف اختبار منهجيات تحكُّم جديدة بشكل مستمر. يهدف هذا العمل إلى تطبيق استراتيجيات تحكُّم متقدمة لتحقيق استقرار البندول المقلوب. سنبدأ بوضع نموذج رياضي للنظام باستخدام صياغة أويلر-لاغرانج، ثم سنصمم استراتيجيتين للتحكُّم الخطي، قبل الانتقال في الفصلين التاليين إلى تطبيق تقنيات غير خطية قوية، وهي: التحكُّم الهجين غير الخطي القائم على طاقة النظام، والتحكُّم بالانزلاق الوضعي.

الكلمات المفتاحية: البندول المقلوب - صياغة أويلر-لاغرانج - التحكُّم بالارتجاع الخطي للحالة - التحكُّم LQR - التحكُّم الهجين - التحكُّم بانزلاق الوضع - التحكُّم القوي.

Abstract

The control of the inverted pendulum is a problem that has interested researchers for years, with the aim of continually testing new control approaches. This work aims to implement advanced control strategies to stabilize the inverted pendulum. We will begin by developing a mathematical model of the system based on the Euler-Lagrange formalism. Then, we will design two linear control strategies (State feedback controller and linear quadratic regulator) before moving on, in the next two chapters, to implement robust nonlinear techniques : hybrid nonlinear control based on the system's energy and sliding mode control.

Keywords : Inverted Pendulum - Euler-Lagrange Formalism - State Feedback Control - LQ Controller - Hybrid Controller - Sliding Mode Control - Robust Control.

Résumé

La commande du pendule inversé est une problématique qui intéresse les chercheurs depuis des années dans le but de toujours tester de nouvelles approches pour la commande. Le présent travail vise à mettre en œuvre des stratégies de commande avancées pour commander le pendule inversé. Nous commencerons par la modélisation mathématique de notre système en se basant sur le formalisme d'Euler-Lagrange, nous élaborerons ensuite deux stratégies de commande linéaires (Retour d'état linéaire et commande linéaire quadratique) pour ensuite, dans les deux chapitres suivants, mettre en œuvre des techniques non-linéaires robustes qui sont la commande hybride non-linéaire basée sur l'énergie du système ainsi que la commande par mode glissant.

Mots clés : Pendule Inversé - Formalisme d'Euler-Lagrange - Commande par retour d'État Linéaire - Commande LQR - Commande Hybride - Commande par Mode Glissant - Commande Robuste.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience nécessaires à mener ce travail à son terme.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à notre encadrant **M.Fares Boudjema** pour son précieux encadrement et son soutien tout au long de notre parcours. son expertise et son dévouement ont été essentiels à notre réussite. Je lui suis profondément reconnaissant pour sa contribution.

Je tiens aussi à remercier les membres de ma famille, mon frère Hichem, mes chers parents pour leur soutien pendant tout mon parcours scolaire, pour leur éducation, tout leurs sacrifices, les moments passés auprès de moi et de mon frères, je ne vous remercierai jamais assez... Mes cousins et cousines. Je remercie aussi mes précieux amis, Nassim, Chawki, Raouf, Sidali, Chakib, Adel, chiw-chiw pour ces moments de plaisir et de partage, Afaf, Manel, Bousre et Benz merci pour ces moments de rire passés ensemble.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude aux membres de jury d'avoir accepté avec honneur d'examiner et de juger notre travail.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude envers tous les enseignants de notre cursus. Leur dévouement et leur expertise ont eu un impact vital dans notre formation.

Je souhaite aussi remercier l'équipe pédagogique et administrative de l'ENP pour leurs efforts dans le but de nous offrir une excellente formation.

Pour finir, et le plus important, je remercie mon ami avant tout, et binôme Samy pour ce travail mené ensemble, ainsi que pour tout les bons moments passés ensemble.

M.AZIEZ

Remerciements

Je tiens à travers ces mots exprimer ma gratitude et mes remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué à cet aboutissement.

Je veux dire merci à notre encadrant Monsieur Boudjemaa Fares qui en plus de nous avoir appris beaucoup de choses constitue et constituera une source d'inspiration pour moi dans le futur, et ceci de part ses nombreuses et importantes contributions scientifiques ainsi que la très sympathique et aimable personne qu'il est.

Je veux aussi dire mille merci à mes parents sans qui, je n'aurais probablement jamais atteint cette étape là de mon cursus. Merci à ma mère pour le soutien moral éternel qu'elle représente, même un roman ne pourrait pas contenir toutes les actions et sacrifices que tu as pu nous consacrer exclusivement à moi et à mes frères, en omettant dans la majorité des cas ta propre personne, je ne rentrerai pas dans les détails mais merci entre autres pour tes excellents plats que tu prenais à chaque fois le temps et l'amour de préparer et que l'on dégustait ensemble après de longues journées de labeur à l'école. Merci à mon père pour son soutien, sa présence et ses précieux conseils tout au long de ma formation et depuis ma plus tendre enfance, des conseils en or qui resteront gravés dans ma mémoire toute ma vie constituant ainsi une référence et un guide auquel je me tourne à chaque prise de décision importante. Merci enfin à vous deux pour avoir depuis toujours cru en moi et en ce que je pouvais faire.

Je tiens aussi à remercier mes amis qui m'ont soutenu et tous ceux qui ont su croire en moi dans les moments où d'apparence je reflétais plutôt l'indécision et le doute compte tenu des décisions si singulières que j'ai pu entreprendre. Merci donc à tous ceux qui ont pris le temps de me dire ou me signifier : courage on sait que tu y arriveras.

Enfin, je te remercie Malik mon très cher ami mon ce travail mené ensemble. J'ai pris énormément de plaisir durant toutes les discussions techniques qu'on a pu avoir, ce fut à chaque fois très enrichissant, j'espère que nous pourrons fêter cette victoire dans une partie de karting ...

S.KELKOULI.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Liste des acronymes

Introduction Générale	13
1 État de l’art des pendules inversés	15
1.1 Présentation du Système Étudié	16
1.2 Les Différents Types de Pendules Inversés	17
1.2.1 Le pendule inversé simple sur un chariot	17
1.2.2 Le pendule Inversé Rotation (Pendule de Furuta)	17
1.2.3 Le Pendule Inversé Simple avec Articulation Sphérique	18
1.2.4 Le Double pendule Inversé	20
1.2.5 Le Triple Pendule Inversé	22
1.3 Intérêt de l’Étude du Pendule Inversé et ses Application	22
1.3.1 Robotique Mobile et Humanoïde	23
1.3.2 Aéronautique et Aérospatial	24
1.3.3 Prothèses Intelligentes et Exosquelettes	24
1.4 Les Systèmes Sous-Actionnés	25
2 Élaboration du Modèle Mathématique	27
2.1 Application du Formalisme d’Euler-Lagrange	28
2.1.1 Énergie cinétique	29
2.1.2 Énergie Potentielle	30
2.1.3 Lagrangien	30

2.1.4	Fonction de Dissipation	30
2.1.5	Équations de Lagrange	31
2.2	Dynamique des moteurs	32
2.3	Représentation d'état	33
2.3.1	Linéarisation du modèle d'état	34
2.3.2	Paramètres du système	35
2.4	Simulations en Boucle Ouverte	35
2.4.1	Commentaires et Observations	36
2.5	Conclusion	37
3	Synthèse des Lois de Commande linéaires	38
3.1	Introduction	39
3.2	Commande par Retour d'État Linéaire	39
3.2.1	Commandabilité du système linéarisé	40
3.2.2	Observabilité du système linéarisé	40
3.2.3	Simulations et résultats	41
3.2.4	Tests de robustesse	42
3.2.5	Commentaires et Observations	43
3.3	Commande Linéaire Quadratique	44
3.3.1	Choix des Matrices de Pondération	45
3.3.2	Simulations et résultats	46
3.3.3	Tests de robustesse	48
3.3.4	Commentaires et observations	49
3.4	Conclusion	50
4	Synthèse de la Loi de Commande Non-linéaire Hybride pour le Balancement du Pendule	51
4.1	Introduction	52
4.2	Élaboration de la Loi de Commande Non-linéaire	52
4.3	Commande Hybride du pendule inversé	55
4.3.1	Simulations et résultats	56
4.3.2	Tests de robustesse	58

4.3.3	Commentaires et observations	62
4.4	Conclusion	63
5	Commande par Mode Glissant de l'Angle du Pendule	64
5.1	Théorie de la Commande par Mode Glissant	65
5.2	Élaboration de la Loi de Commande par MG	69
5.2.1	Simulations et résultats	70
5.2.2	Commentaires et observations	70
5.2.3	Simulations et résultats	72
5.2.4	Tests de robustesse	73
5.2.5	Commentaires et observations	77
5.3	Conclusion	77
	Conclusion Générale	79
	Business Model Canvas	81
	Bibliographie	82

Liste des tableaux

2.1 Paramètres du système 35

Table des figures

1.1	Pendule Inversé Simple sur un Chariot	17
1.2	Pendule Inversé Rotatif	18
1.3	Pendule Inversé avec Articulation Sphérique	19
1.4	Banc d'Essai du pendule	19
1.5	Pendule inversé double en cascade	20
1.6	Pendule inversé double couplé par un ressort	21
1.7	Le double pendule inversé parallèle	21
1.8	Triple pendule inversé	22
1.9	Segway	23
1.10	Robot ASIMO	23
1.11	Lancement d'une fusée	24
1.12	Prothèse médicale	25
2.1	Pendule inversé sur un chariot	28
2.2	Position du chariot et Angle pour le système libre	36
2.3	Position du chariot et Angle pour le système forcé	36
3.1	Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 160^\circ$	41
3.2	Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 150^\circ$	42
3.3	Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 140^\circ$	42
3.4	Signal de perturbation	43
3.5	Réponse de la position et de l'angle en présence de perturbation	43
3.6	Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 160^\circ$ pour k_1	46
3.7	Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 150^\circ$ pour k_1	47
3.8	Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 160^\circ$ et $\theta_0 = 150^\circ$ pour k_2	47

3.9	Réponse de la position et de l'angle en présence de perturbation pour k_1	48
3.10	Réponse de la position et de l'angle en présence de perturbation pour k_2	48
3.11	Tension des moteurs pour la commande LQR pour les gains k_1 et k_2	49
3.12	Tension des moteurs pour la commande par retour d'état linéaire	49
4.1	Condition de commutation	56
4.2	Stabilisation du pendule pour $\theta_0 = 0$	56
4.3	Stabilisation du pendule pour $\theta_0 = 100$	57
4.4	Trajectoire de référence carrée $\pm 30cm$	57
4.5	Stabilisation du pendule pour une référence carrée	57
4.6	Signal de perturbation impulsionnel	58
4.7	Réponse en présence d'une perturbation impulsionnelle	58
4.8	Signal bruité	59
4.9	Réponse pour une perturbation bruitée	59
4.10	Réponse pour une perturbation sinusoïdale	60
4.11	Réponses pour des variations paramétriques sur la longueur	60
4.12	Réponse pour des variations paramétriques sur la masse	61
4.13	Signal de commande pour la commande hybride	61
4.14	Réponses pour un bruit sur le retour d'état	62
5.1	Régiment de glissement	65
5.2	Phénomène du Chattering	67
5.3	Stabilisation de l'angle du pendule en utilisant la surface de glissement de Slotine	70
5.4	Stabilisation par MG pour $\theta_0 = 0$	72
5.5	Stabilisation par MG pour $\theta_0 = 100$	72
5.6	Poursuite d'une trajectoire carrée	73
5.7	réponse pour une perturbation impulsionnelle	73
5.8	réponse en présence d'un bruit	74
5.9	réponse en présence d'une perturbation sinusoïdale	74
5.10	Réponses pour des variations paramétriques sur la longueur	75
5.11	Réponse pour des variations paramétriques sur la masse	75
5.12	Signal de commande pour le MG avec la fonction <i>sign</i>	76

5.13 Signal de commande pour le MG avec la fonction *tanh* 76

5.14 Réponses pour un bruit sur le retour d'état 77

Liste des acronymes

- **LQR** : Linear Quadratic Regulation
- **PID** : Proportional Integral Derivative
- **SMC** : Sliding Mode Control
- **SUP** : Swing-Up Control

Introduction Générale

Depuis le XVIII^e siècle, à l'éveil de la révolution industrielle, les systèmes dynamiques occupent une place prépondérante dans le développement des technologies modernes, Que ce soit dans l'industrie, les transports, la robotique ou les télécommunications, le besoin de maîtriser le comportement de systèmes physiques complexes a conduit à l'émergence d'une discipline fondamentale : l'automatique.

Un système, dans sa définition la plus large, est un ensemble d'éléments interagissant entre eux pour accomplir une fonction spécifique. Ces systèmes peuvent être pluridisciplinaires : mécaniques, électriques, thermiques, biologiques ou mixtes. Leur modélisation, leur analyse et leur commande sont au cœur des préoccupations des ingénieurs et chercheurs dans de nombreux domaines. L'objectif de l'automatique et de la commande est de concevoir des lois capables de piloter ces systèmes pour qu'ils atteignent un comportement souhaité, même en présence de perturbations ou d'incertitudes [1].

Avec l'évolution rapide des technologies de l'information et de la communication, la commande des systèmes a connu des avancées majeures. Le développement des microcontrôleurs, de l'instrumentation, des logiciels de simulation, et plus récemment de l'intelligence artificielle, a permis de concevoir des commandes de plus en plus performantes et robustes. Ces progrès ont non seulement facilité l'implémentation des lois de commande classiques, mais ont également permis l'émergence de méthodes plus avancées.

Parmi les systèmes dynamiques les plus emblématiques utilisés dans l'étude des lois de commande, le pendule inversé occupe une place particulière. Il s'agit d'un système mécanique [2] non-linéaire [3], instable [4], sous-actionné [5], représentant un défi pour toute méthode de commande. Le pendule inversé est largement utilisé comme banc d'essai pour tester et comparer différentes stratégies de stabilisation, du fait de sa simplicité apparente mais de sa dynamique complexe. Il est également le modèle de base de nombreux systèmes réels, comme les robots mobiles (Segway, robots humanoïdes), les lanceurs spatiaux ou encore les systèmes de maintien d'équilibre.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la commande robuste du pendule inversé, dans un premier lieu, nous allons faire un état de l'art du système étudié, en présentant ce dernier et en explorant les différentes variantes du pendule inversé (double pendule inversé, pendule inversé rotatif ... etc), nous évoquerons l'intérêt d'étude d'un tel système ainsi que ses application physique. Et nous parlerons aussi des systèmes sous-actionnés.

Dans le second chapitre, nous nous baserons sur le formalisme d'Euler-Lagrange afin de pouvoir mettre en œuvre le modèle mathématique de notre système, nous verrons comment transformer

la tension des moteurs en une force F qui sera appliquée au chariot (Dynamique des moteurs). Nous donnerons la représentation d'état non-linéaire et nous linéariserons cette dernière autour du point d'équilibre $\theta = \pi$ afin d'obtenir le modèle d'état linéarisé. Nous conclurons ce chapitre par des simulations en boucle ouverte pour avoir un aperçu sur le comportement libre du système.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons la théorie de la commande linéaire, nous élaborerons deux lois de commande linéaire (Retour d'état, LQR) en se basant sur le modèle linéarisé du système, nous ferons des simulations pour voir le comportement du système en présence de commande puis nous discuterons des résultats obtenus.

Dans le chapitre qui suit, nous élaborerons une loi de commande hybride non-linéaire, celle-ci va permettre l'élévation du pendule au voisinage de son point d'équilibre instable, puis une condition de commutation va permettre de maintenir le pendule autour du point grâce à une commande stabilisante linéaire, en outre la commande LQR.

Nous finirons en dernier par la synthèse de la commande par mode glissant ou nous élaborerons des lois de commande à partir de surfaces stables qui permettront l'élévation et la stabilisation du pendule.

Chapitre 1

État de l'art des pendules inversés

Introduction

Le pendule inversé est un système non linéaire, instable et sous-actionné, souvent utilisé comme banc d'essai pour valider différentes stratégies de commande en automatique. Sa stabilisation représente un défi majeur, notamment en présence d'incertitudes et de perturbations.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le système ainsi que les différentes variantes existantes de ce dernier, nous allons aussi énumérer les différentes applications dans les quelles les pendules inversés sont utilisés ainsi que l'intérêt d'étude de ce système, nous verrons ensuite ce qu'est un système sous-actionné et nous finirons par la définition d'une commande hybride.

1.1 Présentation du Système Étudié

Le système du pendule inversé monté sur un chariot constitue un exemple classique et emblématique en automatique. Il se compose essentiellement d'un chariot mobile se déplaçant linéairement sur un rail horizontal, sur lequel est articulée une tige rigide (le pendule) pouvant osciller autour de son point de fixation.

Le système est caractérisé par deux degrés de liberté principaux [6] : la position horizontale du chariot x , et l'angle θ que fait le pendule avec la verticale. Dans sa configuration à l'équilibre, le pendule est maintenu à la verticale vers le haut, ce qui constitue une position instable, contrairement à la position vers le bas qui est naturellement stable mais moins intéressante du point de vue du contrôle.

En l'absence de commande active, toute petite perturbation suffit à faire basculer le pendule, rendant sa stabilisation un défi de contrôle. L'objectif fondamental est donc de maintenir le pendule en équilibre instable tout en assurant éventuellement le suivi ou le maintien de la position du chariot [7]. Ce système présente un intérêt pédagogique majeur car il permet d'aborder des problématiques fondamentales de l'automatique, telles que la non-linéarité, le couplage dynamique entre les variables d'état, l'instabilité naturelle et le caractère sous-actionné du système (un seul actionneur pour plusieurs variables à contrôler).

Sur le plan physique, l'action sur le système est généralement assurée par un moteur électrique commandant le déplacement du chariot. Les mesures nécessaires au retour d'information – notamment l'angle du pendule et la position du chariot – sont obtenues à l'aide de capteurs comme des codeurs incrémentaux ou des potentiomètres.

Ce système est largement utilisé dans les laboratoires de recherche et d'enseignement, non seulement pour valider des lois de commande classiques telles que les commandes PID et LQR, mais aussi pour évaluer des approches plus avancées comme la commande adaptative, la commande robuste, la commande floue ou encore les techniques d'intelligence artificielle. En ce sens, le pendule inversé sur chariot est considéré comme une référence incontournable dans le domaine du contrôle de systèmes dynamiques non linéaires.

1.2 Les Différents Types de Pendules Inversés

Le pendule inversé est un système qui connaît de nombreuses variantes, chacune représentant un niveau de complexité différent et permettant d'explorer diverses problématiques de commande. Bien que la version classique soit la plus couramment étudiée, d'autres configurations existent et sont également très utilisées dans les milieux académiques et industriels pour tester des lois de commande avancées.

Parmi ces nombreuses variantes, nous pouvons citer :

1.2.1 Le pendule inversé simple sur un chariot

La version la plus simple est celle du pendule inversé sur chariot, également appelée pendule inversé linéaire. Dans cette configuration, un pendule rigide est articulé sur un chariot qui peut se déplacer le long d'un axe horizontal. Le but du contrôle est de stabiliser le pendule en position verticale instable tout en maîtrisant, le cas échéant, la position du chariot. Ce système, bien qu'élémentaire, présente déjà plusieurs défis majeurs : il est non linéaire, naturellement instable, et sous-actionné, car une seule commande (la force appliquée au chariot) permet de contrôler deux variables (position du chariot et angle du pendule). Il constitue ainsi une excellente base pour valider des techniques de commande aussi bien linéaires que non linéaires.

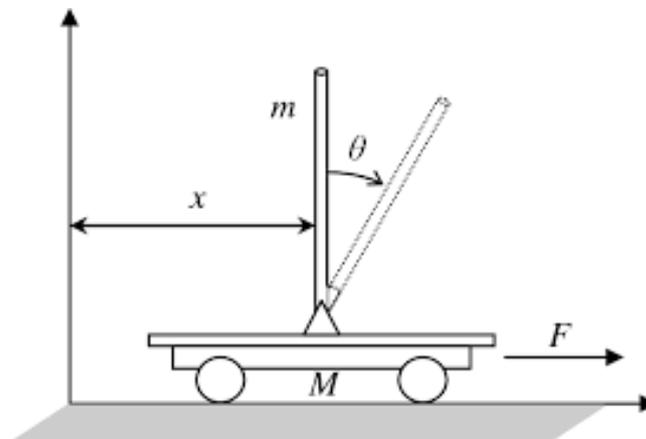


FIG. 1.1 – Pendule Inversé Simple sur un Chariot

C'est cette variante du pendule inversé qui fera l'objet de notre étude dans ce projet et ce, en testant plusieurs lois de commandes afin de stabiliser l'angle du pendule ainsi que la position du chariot.

1.2.2 Le pendule Inversé Rotation (Pendule de Furuta)

Le pendule inversé rotatif, également connu sous le nom de pendule de Furuta, est une variante particulièrement intéressante du pendule inversé. Contrairement au modèle classique monté sur un chariot linéaire, cette configuration se compose d'un bras rotatif horizontal, entraîné par un moteur en rotation, sur lequel est articulé un pendule libre de se balancer dans un plan vertical perpendiculaire au bras. Ce montage introduit deux angles : l'angle de rotation du bras autour de l'axe vertical (souvent noté ϕ) et l'angle du pendule par rapport à la verticale (noté θ). Le système présente ainsi deux degrés de liberté couplés, et une seule action disponible (le couple

moteur appliqué sur le bras), ce qui le rend également sous-actionné.

Le pendule de Furuta est largement utilisé dans les recherches en commande non linéaire, en raison de la richesse de sa dynamique. En effet, les interactions entre les deux mouvements – rotation du bras et oscillation du pendule – rendent la modélisation et le contrôle particulièrement complexes. De plus, le fait que la base soit fixe et que seule la rotation soit autorisée permet de reproduire certaines contraintes mécaniques typiques des systèmes robotiques articulés, ce qui le rend pertinent dans des applications comme les bras manipulateurs, les gyrostabilisateurs ou les systèmes embarqués.

Du point de vue du contrôle, la stabilisation du pendule en position verticale instable requiert des approches robustes capables de gérer les non-linéarités et les incertitudes du modèle. Ce système est également couramment utilisé dans des bancs expérimentaux universitaires, car il offre un bon compromis entre complexité théorique et faisabilité pratique pour le test de lois de commande avancées.

Ce dispositif est montré dans la figure suivante [8] :

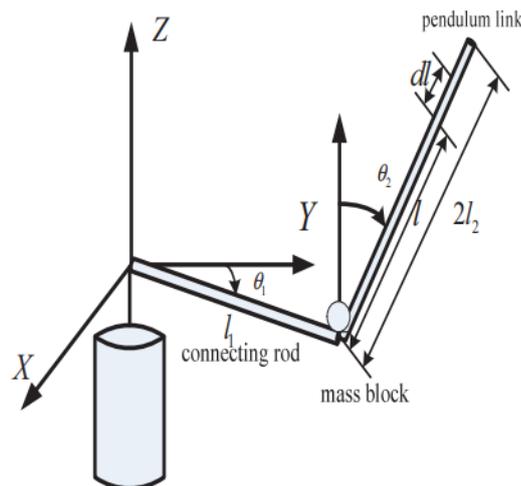


FIG. 1.2 – Pendule Inversé Rotatif

1.2.3 Le Pendule Inversé Simple avec Articulation Sphérique

Une autre forme plus générale du pendule inversé est le pendule inversé simple avec articulation sphérique, parfois appelé pendule inversé 3D. Contrairement au pendule classique qui ne peut osciller que dans un seul plan vertical (généralement dans le plan $x\theta$), ce type de pendule est libre de se balancer dans toutes les directions autour de son point d'attache. Il est donc monté sur une articulation sphérique, ce qui permet au pendule de décrire des mouvements sur une sphère virtuelle, dans un espace tridimensionnel. Ainsi, deux angles sont nécessaires pour décrire l'orientation du pendule : l'angle de tangage (pitch) et l'angle de lacet (yaw), ou, dans une autre formulation, l'angle d'inclinaison et l'angle d'azimut. Cette configuration introduit donc deux degrés de liberté angulaires, en plus de la commande qui peut être exercée sur la base.

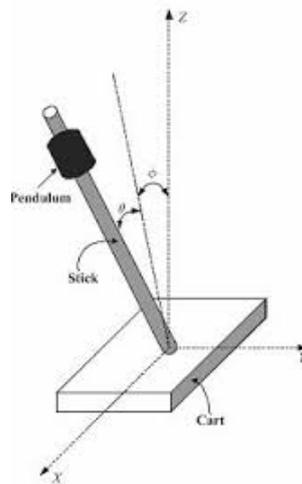


FIG. 1.3 – Pendule Inversé avec Articulation Sphérique

Ce système présente des défis de modélisation et de commande bien plus complexes que le pendule plan. En effet, la dynamique devient pleinement non linéaire et fortement couplée, et les équations du mouvement sont généralement formulées à l'aide des coordonnées sphériques ou du formalisme de Lagrange. De plus, la stabilisation du pendule en position verticale instable nécessite de gérer les instabilités dans toutes les directions, ce qui impose un contrôle multivariable avec retour d'état complet. L'action sur la base du système – souvent une plateforme mobile pouvant se déplacer en deux dimensions (comme une table motorisée ou un robot omnidirectionnel) – permet de stabiliser le pendule autour de la verticale, mais au prix d'un effort de commande important et d'une surveillance continue de l'état du système.

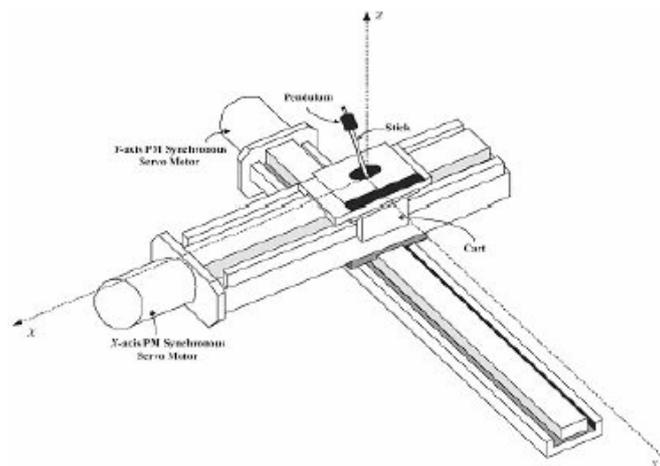


FIG. 1.4 – Banc d'Essai du pendule

1.2.4 Le Double pendule Inversé

Le pendule inversé double est une version avancée du pendule inversé simple, dans laquelle un second pendule est articulé à l'extrémité du premier. Chaque pendule est libre de se balancer dans son plan, ce qui donne au système une dynamique très riche, fortement non linéaire et hautement instable [9]. Cette configuration possède au moins trois degrés de liberté : la position du chariot (ou de la base), l'angle du premier pendule, et l'angle du second. Le système est également sous-actionné, car une seule force de commande (généralement appliquée au chariot ou à la base mobile) doit contrôler trois variables dynamiques couplées.

Ce système est bien plus difficile à stabiliser que le pendule simple. Il présente un comportement chaotique, surtout lorsque le second pendule commence à osciller librement. La non-linéarité devient plus prononcée, et les couplages entre les mouvements exigent des stratégies de commande avancées.

Il existe plusieurs variantes pour le pendule inversé double, nous pouvons citer :

Le double pendule inversé en cascade

C'est la version la plus courante. Le chariot se déplace sur un rail horizontal, et les deux pendules sont alignés verticalement. Le premier pendule est fixé au chariot, et le second est articulé à l'extrémité du premier. Le contrôle est exercé via la force appliquée au chariot. Ce système est souvent utilisé dans les laboratoires pour illustrer les limites de la commande linéaire et introduire des stratégies plus avancées.

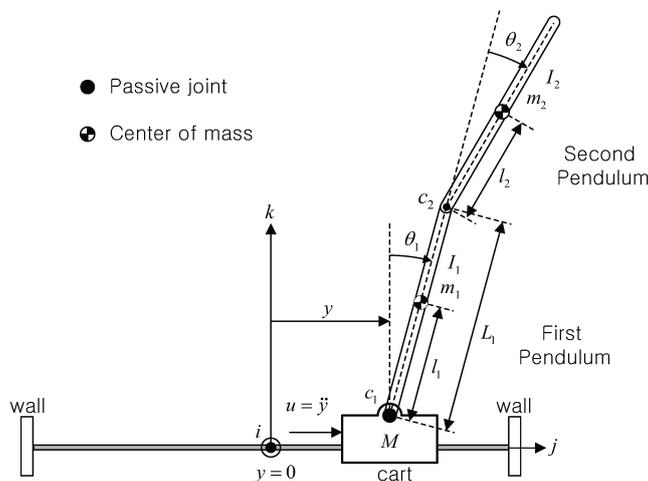


FIG. 1.5 – Pendule inversé double en cascade

Le double pendule inversé couplé par un ressort

Ce dispositif reprend le même principe que le schéma précédent, la différence réside dans le couplage entre les deux tiges, ces deux derniers sont liées par le biais de deux ressorts comme le montre la figure suivante :

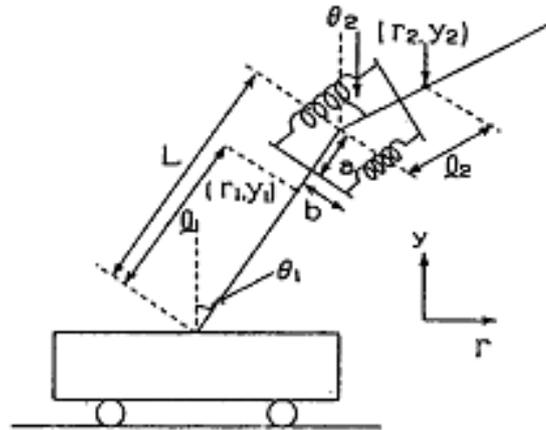


FIG. 1.6 – Pendule inversé double couplé par un ressort

Le double pendule inversé parallèle

Le pendule inversé double parallèle est une variante structurale du pendule double classique, dans laquelle deux pendules sont montés côte à côte sur la même base (souvent un chariot mobile), et non pas l'un à la suite de l'autre. Contrairement au pendule double en série, où le second pendule est suspendu au bout du premier, les deux pendules dans la version parallèle sont indépendants mécaniquement, mais interagissent dynamiquement car ils partagent la même base mobile. Cette configuration donne lieu à un système multi-corps avec plusieurs degrés de liberté, typiquement la position du chariot et les deux angles des pendules.

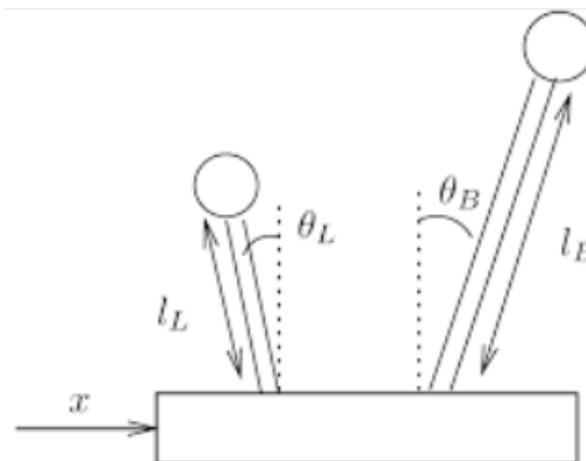


FIG. 1.7 – Le double pendule inversé parallèle

Le principal intérêt de cette architecture réside dans la symétrie du système et les possibilités de contrôle coopératif. Par exemple, en faisant osciller les deux pendules en opposition de phase ou de manière synchronisée, on peut rechercher des stratégies de stabilisation basées sur la compensation dynamique mutuelle.

1.2.5 Le Triple Pendule Inversé

Le pendule inversé triple est une extension du pendule double, dans laquelle trois segments articulés sont empilés les uns à la suite des autres, formant une chaîne de trois pendules connectés [10]. Il s'agit d'un système hautement instable, non linéaire et chaotique, dont la complexité dynamique est encore amplifiée par les interactions entre les trois segments. Typiquement, le premier segment est fixé à une base mobile (comme un chariot), et les deux suivants sont articulés successivement.

Ce système est rarement rencontré dans les applications pratiques directes, mais il est utilisé comme banc d'essai extrême pour les lois de commande avancées. Il permet d'explorer des problématiques proches de la stabilisation de chaînes robotiques articulées, de bras manipulateurs spatiaux, ou encore de la modélisation de structures biomécaniques complexes, comme la posture humaine ou les systèmes de locomotion multi-articulés.

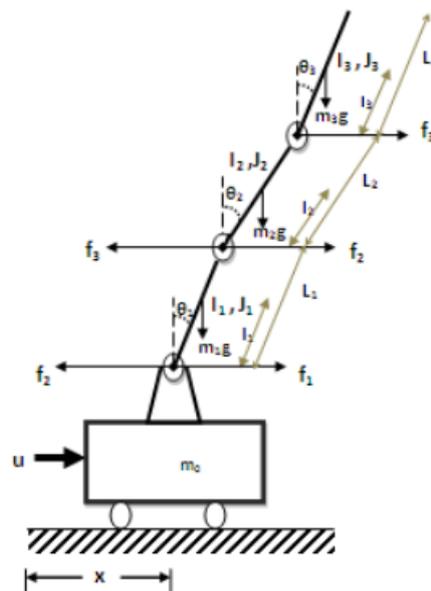


FIG. 1.8 – Triple pendule inversé

1.3 Intérêt de l'Étude du Pendule Inversé et ses Application

L'étude du pendule inversé occupe une place centrale en automatique en raison de sa richesse dynamique et de sa représentativité des systèmes réels instables. Bien que le système semble simple sur le plan mécanique, il concentre à lui seul la plupart des difficultés fondamentales rencontrées en commande des systèmes : instabilité naturelle, non-linéarité, sous-actionnement, couplage entre les variables, sensibilité aux perturbations et nécessité d'un retour d'état précis. C'est pourquoi il est considéré comme un système de référence pour tester, comparer et valider différentes lois de commande.

La commande de ce système est aussi au cœur de nombreux domaines de l'ingénierie, nous

pouvons le retrouver dans l'application de différents domaines, nous pouvons citer :

1.3.1 Robotique Mobile et Humanoïde

En robotique, la stabilisation du pendule inversé est lié à ce qu'on appelle la problématique de l'équilibre dynamique, comme exemples :

- **Le Segway** : Cet appareil reprend le principe du robot a balancement, c'est un pendule inversé posé sur deux roue et le principe et de maintenir l'équilibre du corps. Nous pouvons aussi donner l'exemple du overboard qui reprend le même principe.



FIG. 1.9 – Segway

- **Les robots humanoïdes** : Ces robots qui ont une apparence humaine -comme le robot Atlas ou ASIMO- maintiennent leur équilibre et leur posture en partant du principe de maintien du pendule inversé. Chaque jambe agit en effet comme un pendule inversé, leur locomotion est donc directement tiré des algorithmes de commande des pendules inversé.



FIG. 1.10 – Robot ASIMO

Le modèle mathématique du pendule inversé joue un rôle central dans la robotique humanoïde, notamment pour la génération de trajectoires de marche. Il sert de simplification

biomécanique du comportement dynamique d'un robot bipède, en s'inspirant des propriétés fondamentales de la marche humaine. La thèse de Sahab Omran (2013) approfondit cette approche en introduisant des variantes du modèle pour améliorer la consommation énergétique et la naturalité de la marche.

1.3.2 Aéronautique et Aérospatial

Lors des missions de lancement de fusées ou de missiles balistique, le comportement des systèmes peut être assimilé à un pendule inversé.

Lors du décollage, la fusée est soumise à des forces perturbatrices (vent, vibrations, couple moteur asymétrique) et doit rester droite malgré l'instabilité naturelle de sa structure.

La commande d'orientation (attitude control) dans les systèmes de type fusée ou satellite est souvent conçue à partir des principes du pendule inversé, en particulier pour la stabilisation en phase ascendante.



FIG. 1.11 – Lancement d'une fusée

1.3.3 Prothèses Intelligentes et Exosquelettes

Dans le domaine biomédical, le pendule inversé sert à modéliser l'équilibre du corps humain.

Lorsqu'une personne est debout, le centre de masse du corps agit comme un pendule inversé au-dessus des pieds. Les systèmes de contrôle des exosquelettes ou prothèses de jambe utilisent des modèles dérivés pour ajuster la posture et anticiper les pertes d'équilibre.

Certains robots de rééducation utilisent ces principes pour assister les patients dans la phase de station debout ou de marche.



FIG. 1.12 – Prothèse médicale

Il existe de nombreuses autres applications aux pendules inversés dans la vie de tous les jours, les exemples cités ci-dessus sont quelques cas tout ce que le génie humain est capable de concevoir. Nous trouvons d'autres applications dans la stabilisation des structures et des plateformes en travaux publics, dans l'automobile aussi avec des systèmes de contrôle de stabilité (ESP) etc...

1.4 Les Systèmes Sous-Actionnés

Les systèmes sous-actionnés occupent une place particulière en automatique moderne, notamment dans le contexte des systèmes mécaniques complexes, instables ou à contraintes physiques. Un système est dit sous-actionné lorsque le nombre d'actionneurs disponibles est inférieur au nombre de degrés de liberté qu'il faut contrôler. Cette configuration implique qu'il existe certaines variables d'état (positions, angles, vitesses, etc.) dont l'évolution ne peut pas être directement influencée par une commande, ce qui rend le problème de stabilisation et de régulation beaucoup plus difficile. Contrairement aux systèmes pleinement actionnés, où chaque degré de liberté peut être contrôlé de manière indépendante, les systèmes sous-actionnés nécessitent une commande indirecte, exploitant les couplages internes du système pour atteindre les objectifs souhaités.

Le pendule inversé, dans ses différentes variantes (simple, double, rotatif, mobile), est l'un des exemples les plus emblématiques de système sous-actionné. Dans le cas du pendule inversé simple sur chariot, on dispose d'une seule commande (la force appliquée au chariot) pour contrôler à la fois la position du chariot et l'angle du pendule, soit deux degrés de liberté. La difficulté est accentuée par l'instabilité naturelle du système : sans commande active, le pendule chute systématiquement vers sa position stable (vers le bas). Le contrôleur doit donc à la fois compenser cette instabilité, gérer les couplages dynamiques et atteindre les objectifs de position ou de suivi de trajectoire. Lorsqu'on passe à des configurations plus complexes comme le pendule inversé double ou triple, le nombre de degrés de liberté augmente, mais on conserve souvent un seul actionneur, ce qui accentue encore la sous-action.

Les systèmes sous-actionnés apparaissent dans de nombreuses applications réelles dans divers domaines de l'ingénierie. En robotique, les robots marcheurs ou humanoïdes ne contrôlent pas directement toutes les articulations à chaque instant : certaines sont passives, et l'équilibre est maintenu par redistribution dynamique. En aéronautique et spatial, les satellites doivent parfois contrôler leur orientation sans propulsion directe sur tous les axes, en utilisant des roues

de réaction ou des couples gyroscopiques. En robotique souple et en bio-ingénierie, certains dispositifs utilisent des structures flexibles non motorisées, dont les déformations doivent être gérées indirectement. Même dans des domaines comme l'automobile ou les véhicules autonomes, certaines manœuvres reposent sur des effets indirects de la commande (comme le transfert de masse).

Ainsi, les systèmes sous-actionnés constituent non seulement un défi théorique majeur en automatique, mais également un modèle réaliste pour de nombreuses applications modernes, où la réduction du coût, de la masse, ou de la consommation énergétique impose de faire plus avec moins d'actionneurs. Leur étude est donc essentielle pour répondre aux exigences croissantes en termes de performance, de robustesse et d'intelligence dans les systèmes embarqués et autonomes.

Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de définir le pendule inversé et ce en présentant tous aspects techniques importants de ce système qui nous permettront de mener à bien notre étude sur la commande robuste de celui-ci. On a donc fait un rappel sur les différents types de pendules ainsi que les variantes qui peuvent exister (comme le pendule inversé rotatif, le double pendule inversé ... etc) avec les différents domaines d'application associés, on a expliqué pourquoi ce système était utilisé comme banc d'essai pour de nouvelles commandes et enfin, on s'est penché sur un aspect d'architecture mécanique de ce système qui est son caractère sous-actionné, qui constitue une réelle contrainte physique et mathématique du point de vue de la commande comme on pourra le constater dans les chapitres sur les commandes élaborées.

Dans le chapitre suivant, nous élaborerons le modèle mathématique de notre système en appliquant le formalisme d'Euler-Lagrange, nous donnerons son modèle d'état et nous finirons par des simulations en boucle ouverte pour comprendre comment le système se comporte librement.

Chapitre 2

Élaboration du Modèle Mathématique

Introduction

La modélisation mathématique du pendule inversé est essentielle pour comprendre son comportement dynamique et concevoir une stratégie de commande efficace. En tant que système hautement non linéaire, le pendule inversé présente des défis majeurs en ingénierie du contrôle, ce qui en fait un problème largement étudié en théorie du contrôle.

Pour décrire avec précision le mouvement du système, nous dérivons ses équations de mouvement en utilisant les principes de la mécanique classique. Deux approches peuvent être utilisées pour élaborer le modèle mathématique :

- Soit nous étudions les forces agissant sur le système et appliquons la deuxième loi de Newton, qui stipule que la somme des forces appliquées est égale à la masse multipliée par l'accélération.
- Soit nous étudions les différentes énergies échangées par le système, puis nous exprimons le Lagrangien avant d'appliquer la formule d'Euler-Lagrange.

Dans ce chapitre, nous appliquerons le formalisme d'Euler-Lagrange pour construire notre modèle mathématique. Nous donnerons la dynamique des moteurs qui font coulisser notre chariot, nous introduirons ensuite la représentation d'état linéaire et non-linéaire de notre système. Nous finirons ensuite par des simulations en boucle-ouverte pour observer le comportement du système.

2.1 Application du Formalisme d'Euler-Lagrange

Le pendule inversé consiste en un chariot mobile qui supporte un pendule libre en rotation, attaché à une articulation pivot. Un actionneur, tel qu'un moteur, applique une force $\vec{F}(t)$ pour déplacer le chariot, ce qui est essentiel pour équilibrer le pendule dans sa position instable verticale, décrite par la variable θ . Les capteurs mesurent des variables clés telles que la position du chariot, l'angle du pendule et leurs vitesses, fournissant ainsi un retour d'information au contrôleur.

La figure suivante montre le système étudié :

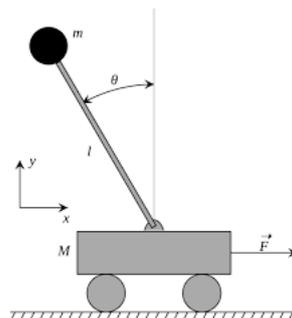


FIG. 2.1 – Pendule inversé sur un chariot

Comme dit précédemment, nous allons utiliser les équations d'Euler-Lagrange pour construire notre modèle. Nous utilisons pour se faire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_{q1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = F_{q2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Où :

- ▷ L est le Lagrangien du système tel que $L = T - U$.
- ▷ T est l'énergie cinétique du système.
- ▷ U est l'énergie potentielle du système.
- ▷ D est la fonction de dissipation.
- ▷ q_1 est la première coordonnée généralisée x (La position du chariot).
- ▷ q_2 est la seconde coordonnée généralisée θ (L'angle du pendule).
- ▷ F_{qi} sont les forces extérieures appliquées.

2.1.1 Énergie cinétique

Nous allons dans un premier lieux calculer l'énergie cinétique du système, on peut écrire l'énergie cinétique totale du système comme suit :

$$T = T_p + T_c + T_r \quad (2.2)$$

T_c et T_p sont respectivement les énergies cinétique du chariot et du pendule et T_r est l'énergie cinétique due à la rotation.

$$T_c = \frac{1}{2} m_c \dot{x}^2$$

$$T_r = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

Où I est le moment d'inertie de la tige.

$$T_p = \frac{1}{2} m_p v_p^2$$

$$T_p = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta)$$

Preuve :

$$v_p = \dot{x} \vec{i} + l\dot{\theta} \vec{j}$$

$$v_p = (\dot{x} + l\dot{\theta})^2 = \dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \vec{i} \cdot \vec{j}$$

Et on sait que :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \cos \theta = \cos \theta$$

On obtient finalement :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_p l^2 \dot{\theta}^2 + m_p l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (2.3)$$

Avec $M = m_c + m_p$

2.1.2 Énergie Potentielle

L'énergie potentielle totale du système est donnée comme suit :

$$U = U_p + U_c \quad (2.4)$$

U_c et U_p sont respectivement les énergie potentielles du chariot et du pendule.

Le chariot se déplaçant uniquement suivant l'axe du rail, son énergie potentielle est donc nulle. L'énergie du pendule est donc donnée comme suit :

$$U_p = \int \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_0^\theta mgl \sin t dt$$

$$U_p = mgl(1 - \cos \theta)$$

Nous pouvons donc écrire l'énergie potentielle totale :

$$U = mgl(1 - \cos \theta) \quad (2.5)$$

2.1.3 Lagrangien

Ayant les énergies cinétiques et potentielles du systèmes, nous pouvons écrire l'équation du Lagrangien, elle est donnée par :

$$L = T - U \quad (2.6)$$

Ce qui donne :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_p l^2 \dot{\theta}^2 + m_p l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_p l^2 \dot{\theta}^2 + m_p l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + m_p l g \cos \theta + cst \quad (2.7)$$

2.1.4 Fonction de Dissipation

Nous considérons des frottements visqueux entre le chariot et le rail que nous pouvons exprimer par :

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2 \quad (2.8)$$

2.1.5 Équations de Lagrange

Nous avons un système à deux degrés de liberté, nous avons donc besoin de deux équations d'Euler-Lagrange pour pouvoir décrire le comportement du système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial x} = F \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M\dot{x} + m_p l \dot{\theta} \cos \theta) + \alpha \dot{x} = F \\ \frac{d}{dt}(m_p l^2 \dot{\theta} + m_p l \dot{x} \cos \theta) + I \ddot{\theta} - (-m_p l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - m_p l g \sin \theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} + m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta + \alpha \dot{x} = F \\ m_p l^2 \ddot{\theta} + m_p l \ddot{x} \cos \theta + I \ddot{\theta} - m_p l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - (-m_p l \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - m_p g l \sin \theta) = 0 \end{cases}$$

Qui nous donne :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + m_p l \ddot{\theta} \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta + \alpha \dot{x} = F \\ (I + m_p l^2) \ddot{\theta} + m_p l \ddot{x} \cos \theta + m_p g l \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

A partir de la deuxième 2.10, on peut écrire :

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I + m_p l^2} (-m_p l \ddot{x} \cos \theta - m_p g l \sin \theta) \quad (2.11)$$

En remplaçant l'expression précédente dans la première équation de 2.10, on trouve :

$$\ddot{x} = \frac{m_p^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta + (I + m_p l^2)(F - \alpha \dot{x} + m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta)}{M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 \theta} \quad (2.12)$$

Et à partir de la première équation de 2.10, on écrit :

$$\ddot{x} = \frac{1}{M} (m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta - \alpha \dot{x} - m_p l \ddot{\theta} \cos \theta + F) \quad (2.13)$$

Et on remplace dans la seconde équation de 2.10 pour trouver :

$$\ddot{\theta} = \frac{-(F - \alpha \dot{x} + m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta) m_p l \cos \theta - M m_p l g \sin \theta}{M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 \theta} \quad (2.14)$$

On peut donc exprimer notre système en utilisant les deux équations différentielles de l'accélération linéaire et angulaire suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{m_p^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta + (I + m_p l^2)(F - \alpha \dot{x} + m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta)}{M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 \theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{-(F - \alpha \dot{x} + m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta) m_p l \cos \theta - M m_p l g \sin \theta}{M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 \theta} \end{cases} \quad (2.15)$$

2.2 Dynamique des moteurs

La force F est générée par un moteur à courant continu. On donne l'expression du couple associé :

$$C = k_m i \quad (2.16)$$

Nous donnons aussi l'expression du courant i , on peut l'exprimer comme suit :

$$i = \frac{v}{R} - \frac{2\pi k_b}{Rr} \dot{x} \quad (2.17)$$

Avec :

- ▷ C est le couple appliqué.
- ▷ i est le courant du moteur.
- ▷ k_m est une constante mécanique.
- ▷ v est la tension d'entrée.
- ▷ k_b est une constante électrique.
- ▷ R est la résistance de l'armature.

L'expression de la force est donnée par :

$$F = \frac{2\pi}{r} C \quad (2.18)$$

Où r est le rayon du pignon de transfert.

En posant 2.16 et 2.17 dans 2.18, on peut écrire :

$$F = \frac{2\pi k_m}{Rr} \left(v - \frac{2\pi k_b}{r} \dot{x} \right)$$

Que l'on peut simplifier :

$$F = H_1 v - H_2 \dot{x} \quad (2.19)$$

Avec :

$$H_1 = \frac{2\pi k_m}{Rr}$$

$$H_2 = \left(\frac{2\pi}{r}\right)^2 \frac{k_m k_b}{R}$$

2.3 Représentation d'état

L'une des représentations qui nous permet de décrire complètement notre système et d'analyser sa stabilité, sa contrôlabilité et son observabilité est la représentation d'état, donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) + g(X)U \\ Y = h(X) \end{cases} \quad (2.20)$$

Que l'on peut aussi trouver sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ Y = h(X) \end{cases} \quad (2.21)$$

Nous devons pour cela définir un vecteur d'état \mathbf{X} , un vecteur d'entrée \mathbf{U} et un vecteur de sortie \mathbf{Y} , on prend donc :

▷ Vecteur d'entrée : $U = v$

▷ Vecteur d'état : $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$

▷ vecteur de sortie : $Y = [y_1 \ y_2]^T = [x \ \theta]^T$

A partir des expressions 2.15 découle le modèle d'état non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{m_p^2 l^2 g \sin x_2 \cos x_2 + (I + m_p l^2)(F - \alpha x_3 + m_p l x_4^2 \sin x_2)}{M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 x_2} \\ \dot{x}_4 = \frac{-(F - \alpha x_3 + m_p l x_4^2 \sin x_2) m_p l \cos x_2 - M m_p l g \sin x_2}{M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 x_2} \end{cases} \quad (2.22)$$

Pour des raisons de simplification, nous posons :

$$f_1 = \frac{m_p^2 l^2 g \sin x_2 \cos x_2 + (I + m_p l^2)(-\alpha x_3 + m_p l x_4^2 \sin x_2)}{\eta}, \quad g_1 = \frac{I + m_p l^2}{\eta}$$

$$f_2 = \frac{-m_p l \cos x_2 (-\alpha x_3 + m_p l x_4^2 \sin x_2) - M m_p l g \sin x_2}{\eta}, \quad g_2 = \frac{-m_p l \cos x_2}{\eta}$$

Avec :

$$\eta = M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 x_2$$

Nous pouvons donc écrire notre modèle d'état sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1 + g_1 u \\ \dot{x}_4 = f_2 + g_2 u \end{cases} \quad (2.23)$$

Avec $u = F$

2.3.1 Linéarisation du modèle d'état

Tout système non-linéaire peut être linéarisé autour d'un point d'équilibre. Comme mentionné précédemment, notre pendule inversé possède deux points d'équilibre : un point d'équilibre stable pour $\theta = 0$ et un point d'équilibre instable pour $\theta = \pi$.

En effet, le premier théorème de Lyapunov stipule qu'un système non-linéaire est équivalent à ce système linéarisé autour de son point d'équilibre.

Nous allons dans cette sous-section dériver le modèle linéarisé autour du point $\theta = \pi$. Notre point d'équilibre est donc $X(0) = [0, \pi, 0, 0]$

Un système linéaire peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta \dot{X} = A \Delta X + B \Delta u \\ \Delta Y = C \Delta X \end{cases} \quad (2.24)$$

Avec :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{p_0} ; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{p_0} ; \quad C = \frac{\partial h}{\partial X}$$

En linéarisant le modèle en 2.22, nous obtenons les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p l^2 g}{\gamma} & \frac{-\alpha(I + m_p l^2)}{\gamma} & 0 \\ 0 & \frac{M m_p g l}{\gamma} & \frac{-\alpha m_p l}{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I + m_p l^2}{\gamma} \\ \frac{m_p l}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Avec :

$$\gamma = M(I + m_p l^2) + m_p^2 l^2$$

Et :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

En remplaçant F avec son expression 2.19, nous pouvons écrire le modèle d'état avec tension suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m_p l^2 g}{\gamma} & \frac{-(I+m_p l^2)}{\gamma}(\alpha + H_2) & 0 \\ 0 & \frac{M m_p g l}{\gamma} & \frac{-m_p l}{\gamma}(\alpha + H_2) & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I+m_p l^2)k_m}{\gamma R r} \\ \frac{m_p l k_m}{\gamma R r} \end{bmatrix} v \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \end{cases} \quad (2.27)$$

2.3.2 Paramètres du système

Les paramètres du systèmes sont donnés dans la table suivante [11] :

Paramètre	Signification physique	valeur
m_c	Masse du chariot	1 kg
m_p	Masse du pendule	0.2 kg
M	Masse totale	1.2 kg
α	Coefficient visqueux	0.5 kg.s ⁻¹
R	Résistance de l'armature	0.3 Ω
g	Accélération de la gravité	9.81 m.s ⁻²
l	Logeur du pendule	0.4 m
r	Rayon du pignon de transfert	0.0127 m
k_m	Constante mécanique	0.049 Nm.A ⁻¹
k_b	Constante électrique	0.0507 V.rad ⁻¹ .s
I	Moment d'inertie	0.0007176 Kg.m ²

TAB. 2.1 – Paramètres du système

2.4 Simulations en Boucle Ouverte

Avant d'établir les lois de commande qui permettront de stabiliser notre pendule à sa position d'équilibre instable, nous allons voir son comportement en boucle ouverte.

Dans un premier lieux, nous fixons les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = [0, \frac{\pi}{6}, 0, 0]$$

Dans ce qui suit, et dans toutes les figures, l'unité de temps considérée est la seconde s

Les résultats de simulations sont montrés dans les figures suivantes :

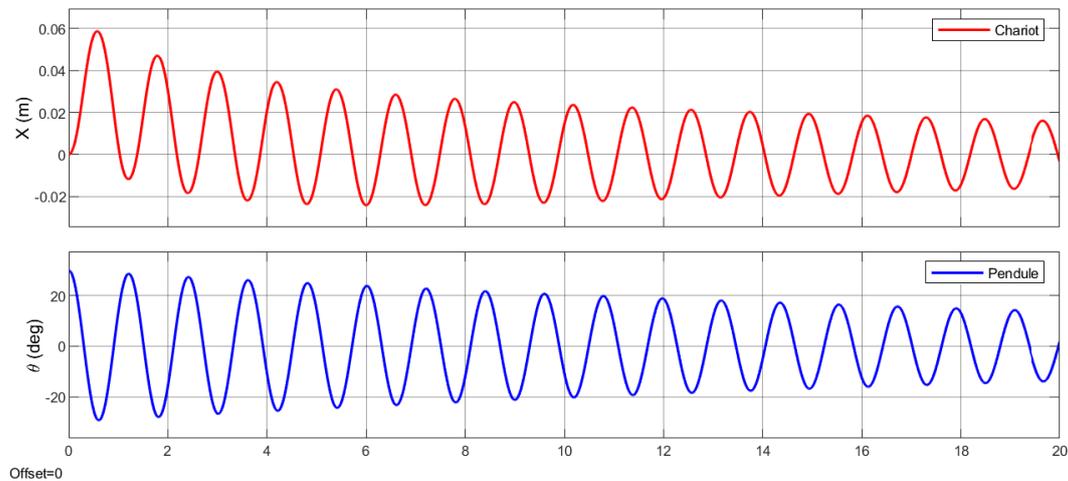


FIG. 2.2 – Position du chariot et Angle pour le système libre

Dans un second temps, nous allons soumettre notre système à une force $F = 0.2N$, en posant $X(0) = [0, 0, 0, 0]$, nous obtenons les figures suivantes :

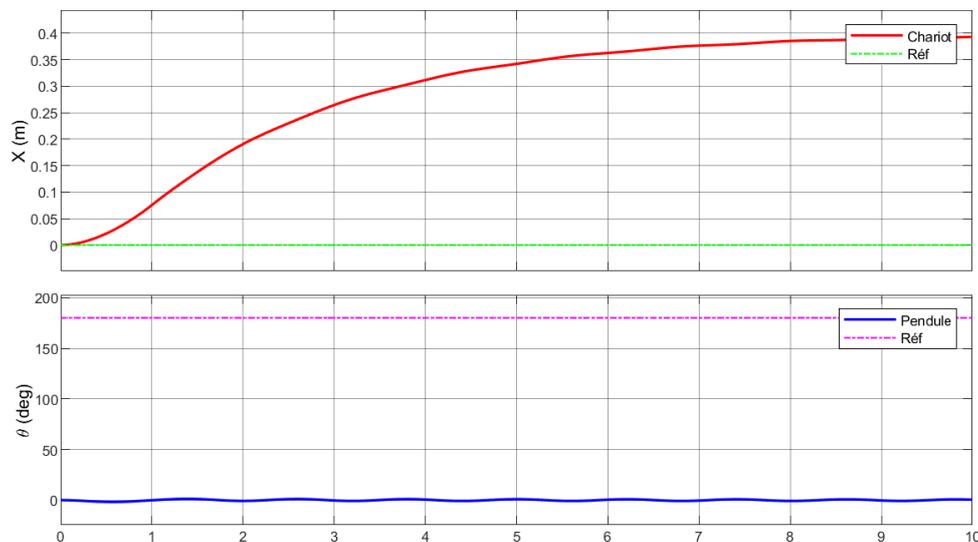


FIG. 2.3 – Position du chariot et Angle pour le système forcé

2.4.1 Commentaires et Observations

- Lorsque notre système n'est soumis à aucune force et lorsque les conditions initiales sont nulles, le système est immobile.
- Dans un premier lieu, lorsque nous donnons un angle de départ au pendule, ce dernier oscille jusqu'à atteindre sa position d'équilibre stable pour $\theta = 0$. L'oscillation du pendule affecte la position du chariot car ce dernier oscille aussi de gauche à droite.

- Dans un second lieu, nous appliquons une force au chariot, cette force aura pour effet de déplacer le chariot dans un sens ainsi que de faire osciller le pendule.
- Nous pouvons donc dire que notre système en boucle ouverte est stable, mais se stabilise à son point d'équilibre stable qui est $\theta = 0$. Dans ce qui suit, nous développerons différentes lois de commandes qui permettront d'élever le pendule ainsi que de le maintenir à sa position d'équilibre instable $\theta = \pi$.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait une analyse de notre système afin de comprendre ses aspects mathématiques. Nous avons utilisé le formalisme d'Euler-Lagrange pour élaborer le modèle mathématique du pendule inversé. Nous avons écrit le modèle d'état non-linéaire et fortement couplé et l'avons linéarisé et nous avons fini par des simulations en boucle ouverte, ces simulations ont montré que le système était instable à la position désirée. Nous développerons par la suite des algorithmes de commande robuste qui permettront d'élever notre pendule et le maintenir à sa position d'équilibre instable.

Chapitre 3

Synthèse des Lois de Commande linéaires

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons établir la synthèse des différentes lois de commande qui vont permettre de stabiliser notre pendule inversé à son point d'équilibre instable.

Nous allons donc extraire différentes lois de commande linéaires qui permettront de maintenir notre pendule autour du point $\theta = \pi$, nous verrons la commande par retour d'état linéaire, la commande linéaire quadratique ainsi que la commande H_∞

3.2 Commande par Retour d'État Linéaire

Une méthode commune de commande des systèmes non-linéaire implique la linéarisation autour d'un point d'équilibre ou un point de fonctionnement puis utiliser la méthode de retour d'état linéaire pour élaborer notre contrôleur. Cette approche est très efficace lorsque le travail du système est réduit à une petite région autour du point de linéarisation.[12]

La commande par retour d'état linéaire (State Feedback Control -SFC-), aussi connue sous le placement de pôles, est une technique de commande linéaire qui peut être utilisée dans l'espace d'état pour stabiliser un système linéaire ou un système non-linéaire autour de son point d'équilibre.

Cette méthode utilise une matrice de gains K obtenue à travers un placement de pôles -le choix des pôles se fait selon la dynamique souhaitée du système en boucle fermée-.

Cette méthode offre en effet une meilleure maîtrise de la dynamique du système en boucle fermée

Nous allons dans cette première section donner la loi de commande pour un retour d'état linéaire, la loi de commande est donnée par :

$$\Delta U = -k * X + U_0 \quad (3.1)$$

K étant la matrice des gains.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le modèle autour du point d'équilibre est donné sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta \dot{X} = A\Delta X + B\Delta u \\ \Delta Y = C\Delta X \end{cases}$$

Les matrices A , B et C sont données dans 2.25 et 2.26.

Cette commande reste néanmoins assez limitée en raison de sa localité. En effet, la commande permet de converger vers le point $\theta = \pi$ (ou 180°) pour des angles de départ relativement proches de ce point, l'erreur sur l'angle ne doit pas dépasser 30° à 35° .

3.2.1 Commandabilité du système linéarisé

Avant d'effectuer une commande sur un système linéaire -ou sur un système en général-, il convient de vérifier la commandabilité de ce dernier.

La matrice de commandabilité est donnée comme suit :

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (3.2)$$

Avec n étant le taille du vecteur d'état.

Dans le cas de notre système, $n = 4$, la matrice de commandabilité est donc donnée par :

$$M_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] \quad (3.3)$$

Un système est dit **complètement commandable** si et seulement si :

$$\text{rank}(M_c) = n$$

Pour notre système, nous calculons le rang de la matrice de commandabilité, nous trouvons que $\text{rank}(M_c) = 4$. Notre système est donc complètement commandable, nous pouvons donc utiliser la théorie de la commande linéaire sans problème.

3.2.2 Observabilité du système linéarisé

L'observabilité du système désigne la capacité à déterminer l'état interne complet d'un système à partir de ses mesures de sortie et de ses entrées connues.

La matrice d'observabilité d'un système linéaire est donnée comme suit :

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Avec n étant la taille du vecteur d'état.

Dans notre cas nous avons $n = 4$, nous donnons donc la matrice d'observabilité :

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Un système est dit **Complètement observable** si et seulement si :

$$\text{rank}(M_o) = n$$

Après calcul, nous trouvons $\text{rank}(M_o) = 4$. Notre système est donc complètement observable.

Nous optons donc pour le placement de pôles suivant :

$$p = [-2; -4; -6; -5]$$

Qui nous donne la matrice k suivante :

$$k = [-32.7946 ; 189.4696 ; -42.2326 ; 37.8744]$$

3.2.3 Simulations et résultats

Nous allons maintenant voir les résultats de simulation pour la commande par retour d'état linéaire.

Pour des les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = [0 ; 160^\circ ; 0 ; 0]$$

Nous pouvons tracer les courbes suivantes :

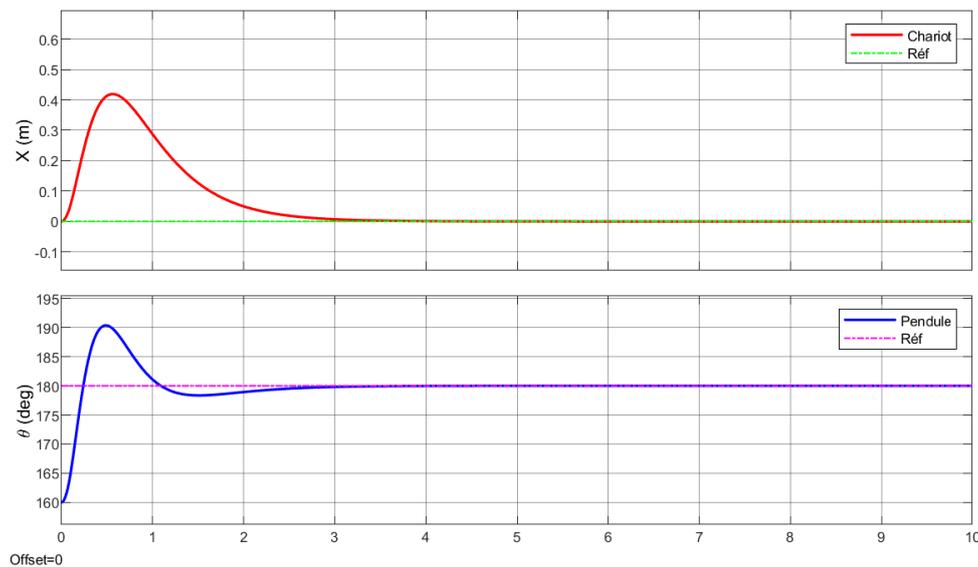


FIG. 3.1 – Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 160^\circ$

Nous pouvons aussi prendre les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = [0 ; 150^\circ ; 0 ; 0]$$

Nous obtenons par conséquent les courbes suivantes :

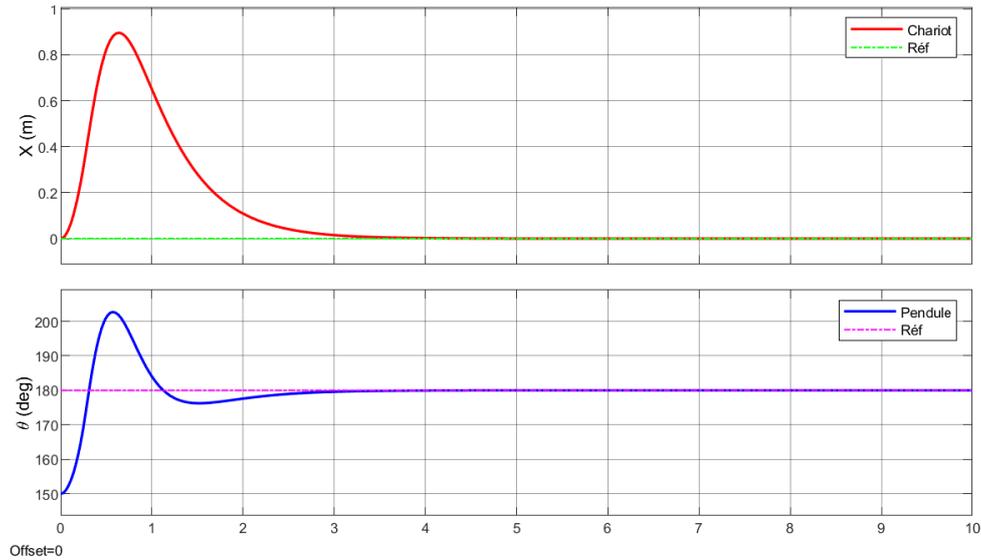


FIG. 3.2 – Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 150^\circ$

Il en va de même pour les conditions suivantes :

$$X(0) = [0 ; 140^\circ ; 0 ; 0]$$

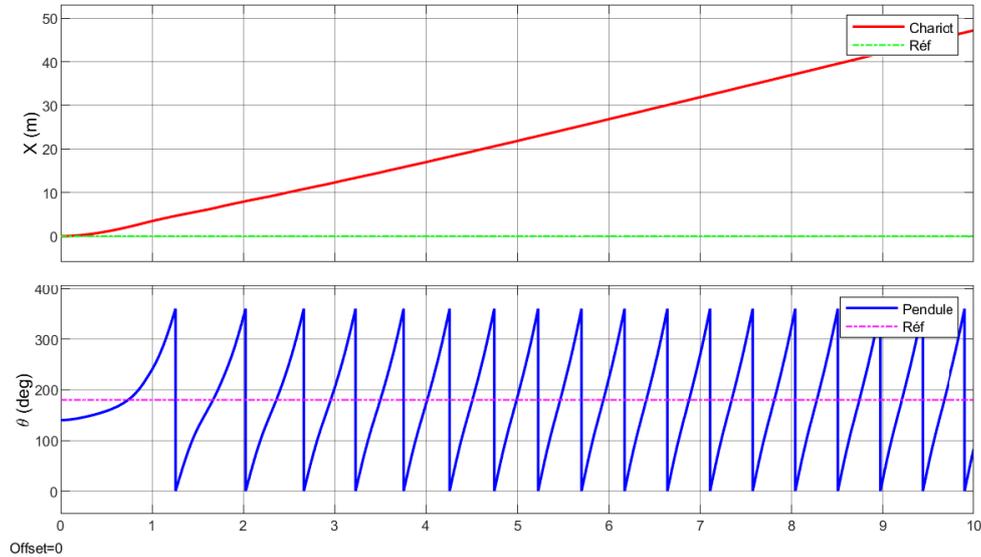


FIG. 3.3 – Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 140^\circ$

3.2.4 Tests de robustesse

Afin de voir le rejet de perturbations, nous allons introduire en entrée de notre système une perturbation sinusoïdale d'amplitude $A = 2N$ et de fréquence $f = 1Hz$, l'expression de cette perturbation est donnée par :

$$b(t) = A \sin(2\pi t)$$

La forme du signal est donnée dans la figure suivante :

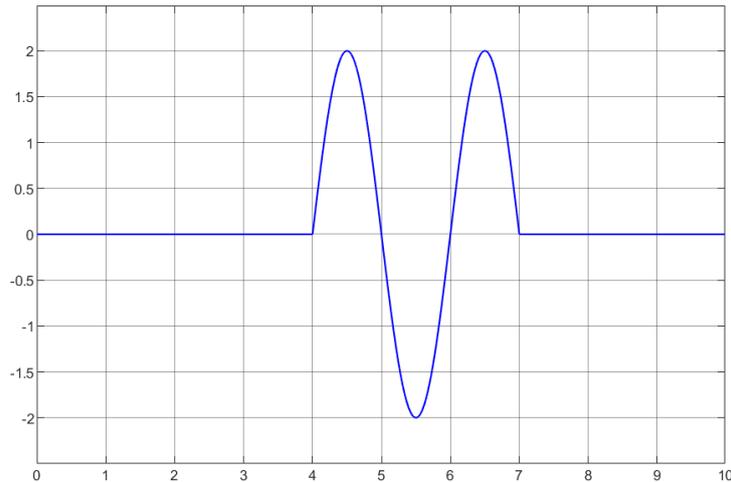


FIG. 3.4 – Signal de perturbation

En appliquant cette perturbation à notre système, nous obtenons les courbes suivantes :

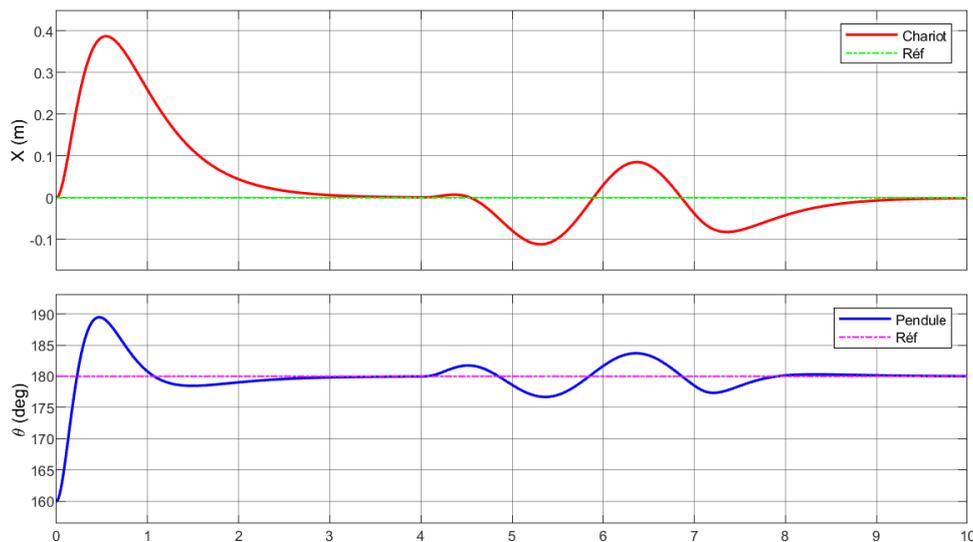


FIG. 3.5 – Réponse de la position et de l'angle en présence de perturbation

3.2.5 Commentaires et Observations

- Nous remarquons dans un premier lieu que les pôles choisis permettent d'avoir un bon temps de réponse ainsi que peu d'oscillations.
- Nous voyons aussi que plus l'angle de départ (condition initiale) est éloigné du point d'équilibre ($\theta = 180^\circ$), plus le système a du mal à converger vers ce même point. Chose que l'on peut constater dans la figure 3.3, l'angle de départ est de 140° et le système diverge.
- Comme nous l'avons mentionné plus haut, le 1er théorème de Lyapunov stipule qu'autour de son point d'équilibre, le système non-linéaire est équivalent au système linéarisé autour

de ce point.

- Nous pouvons aussi voir que lorsque nous appliquons la perturbation, cette dernière est rejetée sans trop de difficulté. Nous procéderons à d'autres tests de robustesse dans ce qui suit.

3.3 Commande Linéaire Quadratique

Le retour d'état linéaire donne des résultats concluants, même face à des perturbations. Néanmoins, l'énergie que demande les actionneurs n'est pas optimisée.

Nous allons donc voir une première commande optimale qui est la commande linéaire quadratique **LQR**, cette commande offre la meilleure performance possible par rapport à une mesure donnée.

LQR est une méthode moderne de la théorie du contrôle qui utilise l'approche par espace d'état du système et peut être utilisé dans les systèmes multivariables [13].

L'élaboration de la loi de commande quadratique repose sur l'optimisation du critère quadratique suivant :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u dt \quad (3.6)$$

Les matrices Q et R étant des matrices de pondérations. Ces matrices sont choisies en fonction de l'importance que l'on souhaite accorder à chaque état du système, le choix des pondérations doit aussi prendre en compte si l'on veut optimiser l'énergie dépensée pour arriver à notre point d'équilibre ou bien si l'on veut optimiser le temps de convergence.

En effet, augmenter les gains de la matrice Q revient à accélérer le système. En revanche, augmenter les gains de la matrice R reviendrait à freiner ce dernier.

Dans notre étude, nous trouverons un équilibre entre les deux, nous choisirons les matrices de façon à converger vers le point $\theta = \pi$ rapidement tout en consommant un minimum d'énergie, et ce tout en gardant une bonne robustesse face à des perturbations.

Nous pourrons aussi utiliser une saturation afin de limiter la commande.

La loi de commande linéaire pour le régulateur quadratique est donnée par :

$$U = -k^* * X \quad (3.7)$$

Avec :

$$k = R^{-1} * B^T * p \quad (3.8)$$

p étant une matrice carré solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (3.9)$$

Et il est à noter que $\forall Q > 0$, $R > 0$ l'équation algébrique de Riccati admet toujours une solution le système en boucle fermé est stable car :

$$\Re(\text{eig}(A - B * k^*)) < 0$$

A partir de 3.7 et 3.8, nous obtenons la loi de commande suivante :

$$U = -R^{-1} * B^T * p * X \quad (3.10)$$

Il convient aussi de noter que la commande LQR permet de garantir une marge de gain infinie ainsi qu'une marge de phase d'au moins 60° , ces marges de stabilité que nous garantie la commande va permettre au système de faire face au perturbations extérieures, nous développerons ce point plus tard lors des tests de robustesse sur le système.

3.3.1 Choix des Matrices de Pondération

Comme mentionné plus haut, les matrices de pondérations sont la pour optimiser soit la vitesse de convergence vers l'état voulu, ou bien optimiser l'effort des actionneurs, nous pouvons imaginer ce système comme un accélérateur dans une voiture, plus nous appuyons dessus, plus nous arrivons vite à destination, mais la consommation de carburant augmente. Au contraire, plus l'accélération est légère, moins la consommation sera importante.

Dans un premier lieu, les matrices Q et R choisies sont données comme suit :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 120000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1500000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} ; \quad R_1 = 50 \quad (3.11)$$

Dans notre cas, nous accordons une importance aux deux premiers états qui sont la position du chariot x ainsi que la position du pendule θ , les pondérations des vitesses linéaire et angulaire (3eme et 4eme états) sont négligeables.

La matrice des gains k_1 obtenue dans ce cas est donnée comme suit :

$$k_1 = [-48.9898 ; 298.3441 ; -57.0554 ; 48.6028]$$

Comme la commande par retour d'état linéaire, la commande LQR est linéaire est donc n'est que locale. Nous ne pouvons converger vers le point $\theta = \pi$ que pour des angles proches de ce point ($|\theta_e| \leq 35^\circ$) le système diverge donc à partir d'une erreur de 35° sur l'angle du pendule comme pour la commande par retour d'état linéaire.

Dans un second cas, nous allons choisir des matrices Q et R de sorte à optimiser l'énergie consommée par les actionneurs. Nous prenons donc :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 12000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} ; \quad R_2 = 5000 \quad (3.12)$$

nous obtenons la matrice de gain k_2 suivantes :

$$k_2 = [-4.8990 ; 111.0105 ; -15.9012 ; 21.4884]$$

3.3.2 Simulations et résultats

Nous allons voir les résultats de simulations pour la commande LQR avec les matrices de pondérations Q_1 et R_1 . En prenant les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = [0 ; 160^\circ ; 0 ; 0]$$

Nous traçons les courbes suivantes :

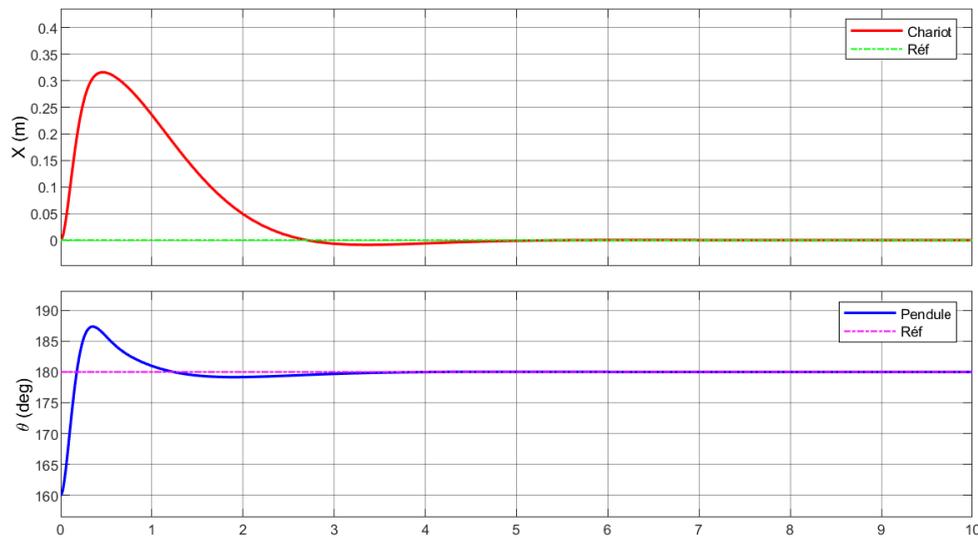


FIG. 3.6 – Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 160^\circ$ pour k_1

Et pour les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = [0 ; 150^\circ ; 0 ; 0]$$

Nous obtenons :

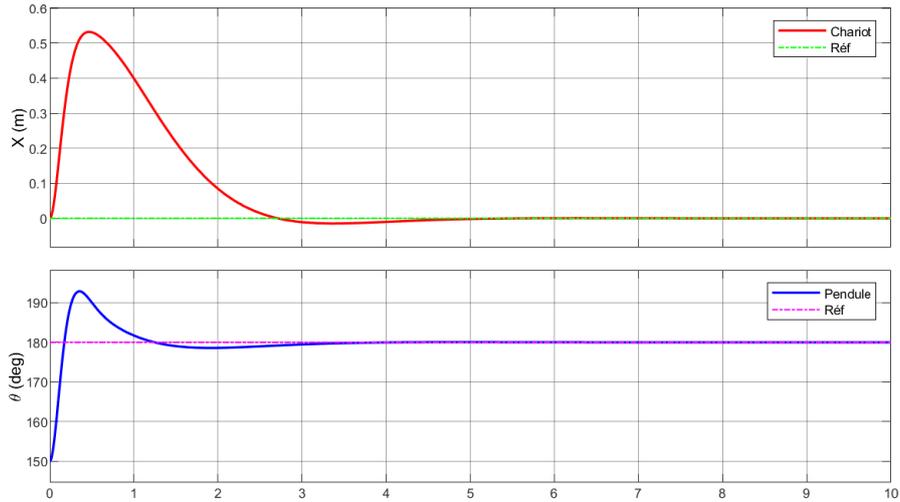


FIG. 3.7 – Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 150^\circ$ pour k_1

Et pour le second cas (k_2), nous pouvons tracer les courbes suivantes :

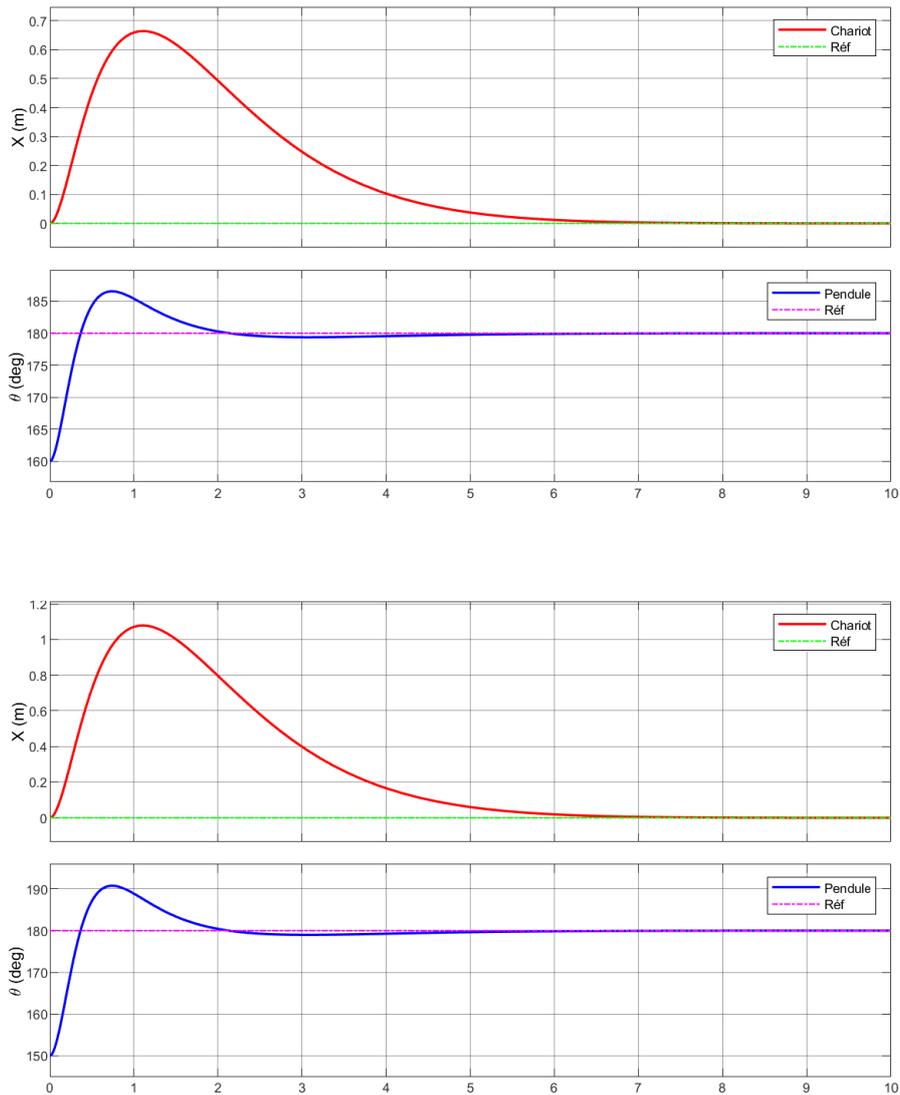


FIG. 3.8 – Réponse de la position et de l'angle pour $\theta_0 = 160^\circ$ et $\theta_0 = 150^\circ$ pour k_2

3.3.3 Tests de robustesse

Pour la commande LQR, nous allons appliquer le même signal de perturbation que pour la commande par retour d'état linéaire. Nous prenons :

$$b(t) = A \sin(2\pi t)$$

L'application de cette perturbation à notre système donne :

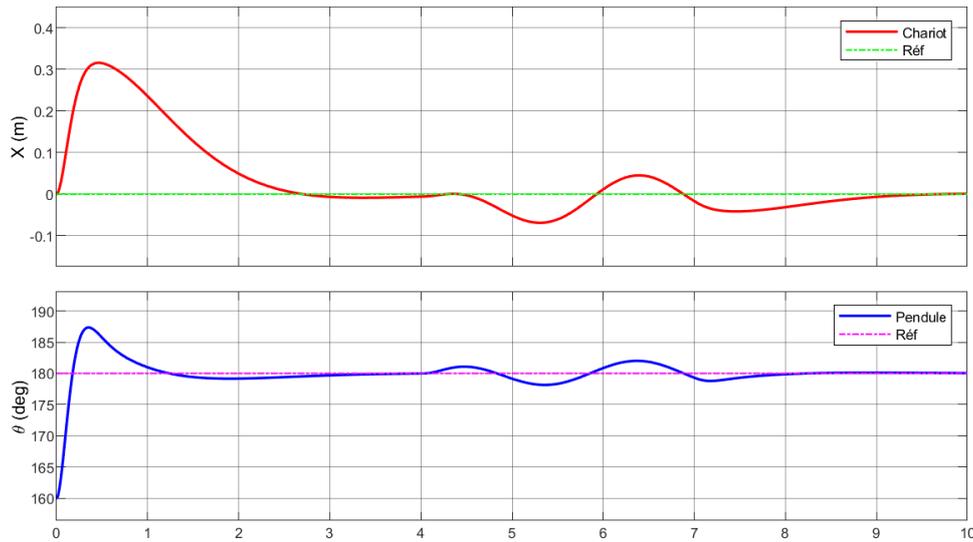


FIG. 3.9 – Réponse de la position et de l'angle en présence de perturbation pour k_1

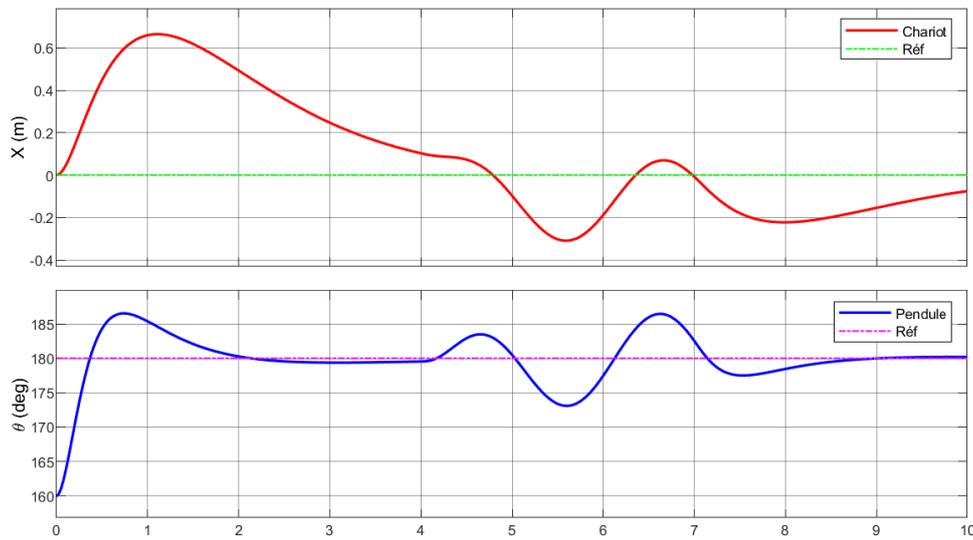


FIG. 3.10 – Réponse de la position et de l'angle en présence de perturbation pour k_2

Nous avons donc vu que selon les choix des matrices de pondération, nous pouvons soit accélérer ou freiner le système ou bien consommer plus ou moins d'énergie, nous allons tracer les signaux de commande pour les deux gains LQR ainsi que pour le retour d'état linéaire :

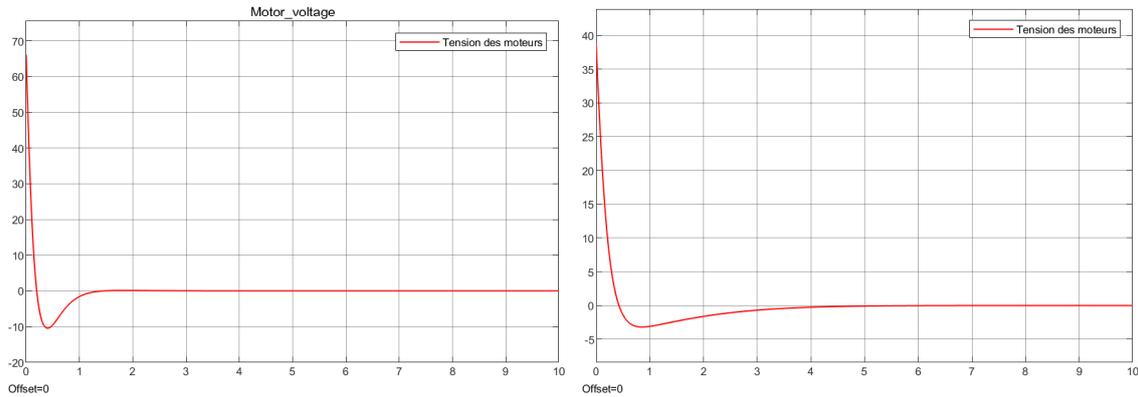


FIG. 3.11 – Tension des moteurs pour la commande LQR pour les gains k_1 et k_2

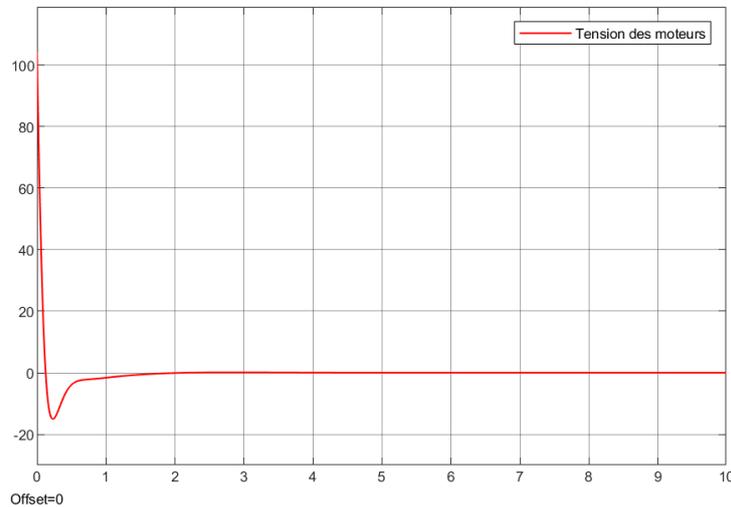


FIG. 3.12 – Tension des moteurs pour la commande par retour d'état linéaire

3.3.4 Commentaires et observations

- Pour la commande linéaire quadratique, la vitesse de convergence (temps de réponse) ainsi que l'énergie consommée par les actionneurs dépend des matrices de pondérations Q et R , un choix donc judicieux s'impose afin de trouver le bon équilibre entre rapidité et optimisation d'énergie.
- Nous avons donc opté pour deux choix différents, dans le premier cas de figure nous optons pour une convergence plus rapide de nos états, nous avantageons donc la matrice Q , dans le second cas, nous optimisons l'énergie consommée, nous prenons donc une matrice R plus grande.
- Nous remarquons que pour un gain k_1 , dans les figures 3.7 et 3.8 le temps de réponse est nettement plus rapide que dans la figure 3.9 pour un gain k_2 .

- néanmoins, dans la figure 3.11, nous pouvons voir que le pic de tension pour le gain k_1 est nettement supérieur à celui du gain k_2 ($65V$ pour le premier contre $35 V$ pour le second).
- Cela confirme donc bien ce que nous avons dit concernant le choix des matrices de pondérations.
- Nous avons appliqué une perturbation de type sinusoïdale à notre système, nous pouvons comparer entre les figures 3.9 et 3.10 et dire que la perturbation est rejetée dans les deux cas, cependant, son effet est moins important dans le cas nous avançons la rapidité du système. Comme les gains sont plus élevés, le rejet de la perturbation se fait plus rapidement.
- Enfin, nous pouvons dire que dans les deux cas, pour la commande LQR, nous obtenons de meilleurs résultats par rapport à une commande par retour d'état linéaire classique, l'énergie consommée est moins importante et offre de meilleurs résultats.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu mettre au point des stratégies de commande linéaires et les avons appliquées au système au voisinage du point d'équilibre $\theta = \pi$. Nous avons élaboré les commandes par retour d'état linéaire ainsi que la commande linéaire quadratique LQR, nous avons appliqué ces deux commande à notre système pour des angles proches du point d'équilibre et avons pu comparer entre les performances des deux méthodes, en terme d'optimisation d'énergie ainsi que de rapidité.

Chapitre 4

Synthèse de la Loi de Commande Non-linéaire Hybride pour le Balancement du Pendule

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons synthétiser la commande non-linéaire hybride pour le balancement du pendule. Nous allons élaborer une loi de commande basée sur l'énergie du pendule, la philosophie derrière cette commande est de pouvoir commander l'énergie du système pour l'amener à un état désiré (qui dans notre cas est le point $\theta = \pi$). Cette commande est très efficace dans le cas des systèmes sous-actionnés comme le notre.

Pour cette méthode basée donc sur l'énergie, nous allons définir une fonction que nous noterons E (qui est une fonction définie positive) et qui est la somme des énergies cinétique et potentielle du pendule, nous dériverons ensuite cette expression pour obtenir la commande à appliquer afin que cette dérivée soit une fonction définie négative.

Puis en posant une condition sur l'erreur de l'angle (second état de notre système) nous élaborerons la commande hybride qui va permettre le balancement de notre pendule ainsi que de le maintenir à sa position d'équilibre instable.

4.2 Élaboration de la Loi de Commande Non-linéaire

Le contrôleur utilisé est basé sur l'énergie. Un tel type de contrôleur régule la quantité totale d'énergie dans le système, par exemple en ajoutant suffisamment d'énergie pour faire passer le pendule de la position pendante à sa position d'équilibre instable. Divers algorithmes de commande peuvent être employés pour réaliser la manœuvre de redressement, tels que le suivi de trajectoire ou les commandes de redressement à entrée de référence rectangulaire. Parmi ces approches, la commande par modelage d'énergie (energy shaping) est souvent considérée comme la plus naturelle à formuler et probablement la plus connue.[14]

A partir de l'équation 2 de 2.10, nous pouvons écrire :

$$\ddot{\theta} = \frac{-m_p l \ddot{x}_d \cos \theta - m_p g l \sin \theta}{I + m_p l^2} \quad (4.1)$$

On remplace ensuite dans la première équation du même système 2.10 qui nous donne :

$$M \ddot{x}_d + m_p l \left(\frac{-m_p l \ddot{x}_d \cos \theta - m_p g l \sin \theta}{I + m_p l^2} \right) \cos \theta - m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta + \alpha \dot{x} = F \quad (4.2)$$

Nous pouvons poser le signal de commande :

$$u = \ddot{x}_d$$

Dans un second lieu, l'énergie totale (somme des énergies cinétique et potentielle) du pendule est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}(I + m_p l^2)\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (4.3)$$

Comme nous voulons stabiliser notre pendule au point $\theta = \pi$, l'énergie en ce point est donnée par la fonction définie positive suivante :

$$E_r = mgl(1 - \cos \pi) = 2mgl \quad (4.4)$$

Nous pouvons ainsi définir une dynamique de l'erreur entre l'énergie du pendule E et l'énergie de référence E_r :

$$\tilde{E} = E - E_r \quad (4.5)$$

Nous dérivons l'erreur pour obtenir :

$$\dot{\tilde{E}} = \dot{E} - \dot{E}_r \quad (4.6)$$

Comme E_r est constante, sa dérivée est nulle. Nous obtenons donc :

$$\dot{\tilde{E}} = (I + m_p l^2)\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta \quad (4.7)$$

Nous remplaçons $\ddot{\theta}$ par son expression dans 4.1 pour obtenir :

$$\dot{\tilde{E}} = (I + m_p l^2)\left(\frac{-m_p l \ddot{x}_d \cos \theta - m_p g l \sin \theta}{I + m_p l^2}\right)\dot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta \quad (4.8)$$

Et comme nous avons dit que $u = \ddot{x}_d$, nous remplaçons donc pour obtenir :

$$\dot{\tilde{E}} = (I + m_p l^2)\left(\frac{-m_p l u \cos \theta - m_p g l \sin \theta}{I + m_p l^2}\right)\dot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta \quad (4.9)$$

Qui donne après simplification :

$$\dot{\tilde{E}} = -m_p l u \dot{\theta} \cos \theta \quad (4.10)$$

Comme nous notre fonction E est définie positive, nous cherchons a ce que la dérivée soit définie négative. Pour se faire, nous choisissons l'expression suivante pour notre signal de commande :

$$u = k\dot{\theta} \cos \theta \tilde{E} \quad (4.11)$$

En remplaçant dans 4.10, nous obtenons la fonction définie négative suivante :

$$\dot{\tilde{E}} = -km_p l \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \tilde{E} \quad (4.12)$$

La propriété essentielle est que lorsque $E > E_r$, il convient de retirer de l'énergie du système (effet d'amortissement), et lorsque $E < E_r$, il faut au contraire en ajouter (amortissement

négatif). Même si les actions de commande sont bornées, la convergence est généralement bien préservée. Toutefois, pour que l'énergie évolue rapidement, l'amplitude du signal de commande doit être relativement élevée. Par conséquent, nous introduisons un gain k réglable en facteur de l'expression précédente, et le contrôleur est saturé à l'accélération maximale que le moteur peut fournir, notée u_{max} :

$$u_{max} = sat(k\tilde{E} sign(\dot{\theta} \cos \theta)) \quad (4.13)$$

4.3 Commande Hybride du pendule inversé

Le pendule inversé étant un système non linéaire, instable autour de la position verticale que l'on souhaite atteindre ($\theta = \pi$), et sensible aux perturbations à tous les niveaux. Une seule méthode de commande s'avère être insuffisante pour gérer toutes les phases de fonctionnement (Balancement et stabilisation) et atteindre les objectifs de robustesse et de stabilité en même temps : en effet, la commande linéaire quadratique développé plus haut ne fonctionne que lorsque la position angulaire du pendule est proche de l'angle désiré autour duquel nous avons linéarisé le modèle mathématique du pendule initialement non linéaire, l'objectif de stabilité est donc perdu quand l'angle du pendule est en dehors d'un certain intervalle de position angulaire à définir, cette commande peut être donc qualifiée de locale. En revanche, la commande non linéaire élaborée en 5.1 fonctionne quelque soient les positions angulaires initiales, elle peut donc être qualifiée de globale, le principal désavantage avec celle-ci c'est qu'elle possède de moins bonnes performances de robustesse que la commande LQR précédente.

La solution que nous proposons consiste à utiliser alternativement les deux commandes selon la valeur de position angulaire du pendule, si cette dernière est très loin du point d'équilibre instable à atteindre, on utilisera la commande non linéaire jusqu'à ce que la position atteigne une valeur assez proche de la position désirée pour pouvoir commuter vers la commande linéaire quadratique qui nous assurera donc la stabilisation ainsi que la robustesse. Cette méthode nous permet donc de bénéficier de la robustesse et de l'effet stabilisant de la commande LQR dans un certain intervalle (à définir) proche de la position désirée ainsi que l'effet stabilisant de la commande non linéaire pour des valeurs éloignées de la valeur désirée ce qui n'est pas possible avec la commande LQR.

La commande hybride d'un pendule inversé vise donc à combiner plusieurs stratégies de commande dans le but de tirer profit des avantages de chacune, afin d'assurer la stabilisation et le suivi de trajectoire du système tout en gérant sa nature non linéaire et instable.

Afin de stabiliser notre système et atteindre son point d'équilibre instable et y rester malgré la présence de perturbations, nous allons donc effectuer une commande hybride.

Notre commande sera comme son nom l'indique, composée de deux partie. La première sera la commande pour le balancement du pendule (dit aussi **Swing-up**) qui est la loi de commande non-linéaire élaborée dans la section précédente, la seconde sera la commande **LQR**. Nous userons des matrices de pondérations trouvées en 3.11.

Afin de mettre au point une telle chose, nous allons poser une condition de commutation entre les deux commandes. Pour des angles très éloignés de π (notre objectif), nous userons de la loi de commande globale (non-linéaire) qui va faire balancer notre pendule. Au voisinage du point d'équilibre ($\theta \leq 25^\circ$), le commutateur penchera du côté de la commande linéaire. Cette dernière, pour rappel, garantit une marge de phase d'au moins 60° et une marge de phase infinie, cette commande permettra de faire face aux différentes perturbations que nous appliquerons plus tard à notre système.

Nous pouvons représenter le schéma du commutation dans la figure suivante :

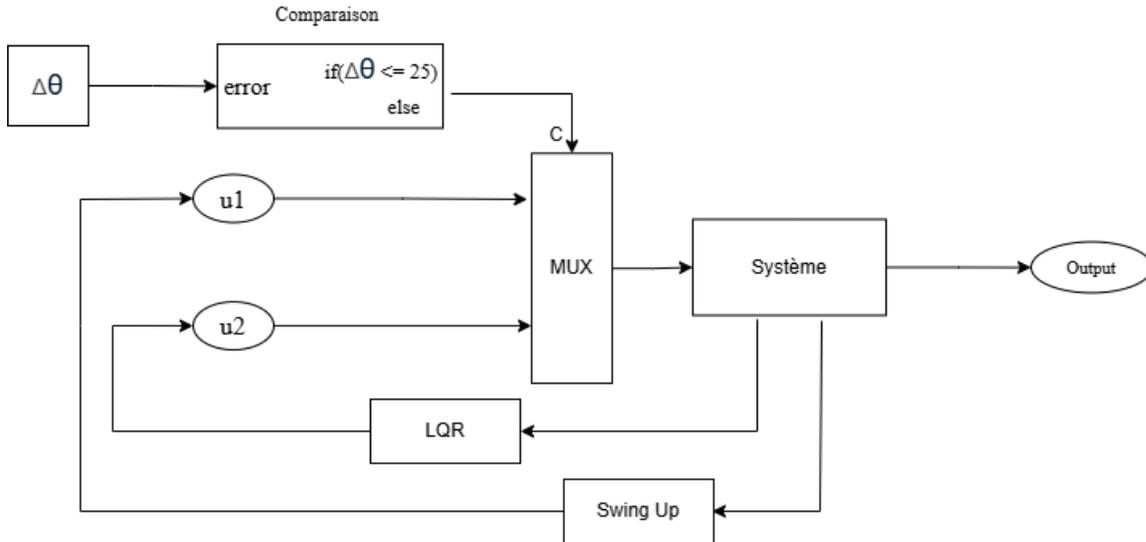
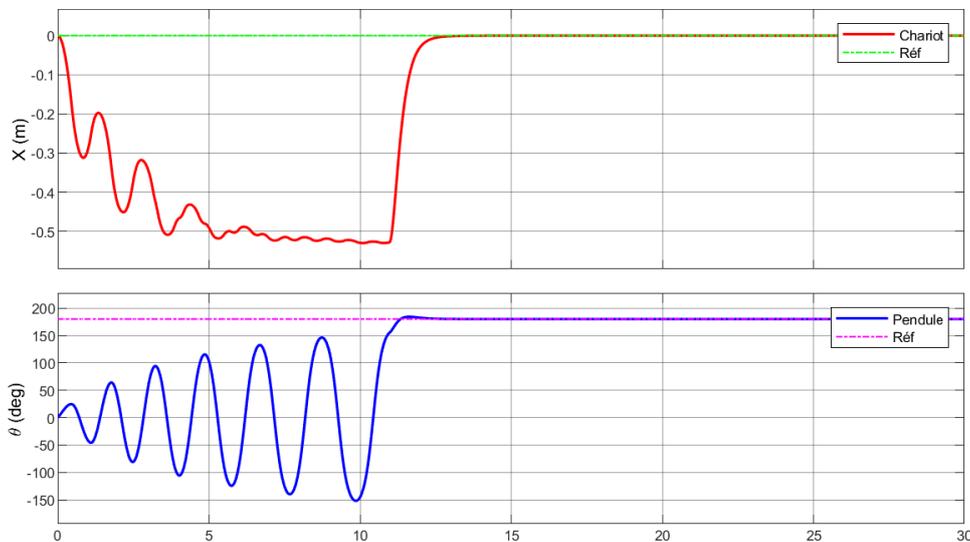


FIG. 4.1 – Condition de commutation

4.3.1 Simulations et résultats

Après l'élaboration de la loi de commande hybride, nous allons à présent voir les résultats des simulations.

Pour des conditions initiales nulles nous obtenons :

FIG. 4.2 – Stabilisation du pendule pour $\theta_0 = 0$

Nous pouvons aussi prendre des conditions initiales différentes, nous prenons par exemple :

$$X(0) = [0 ; 100^\circ ; 0 ; 0]$$

Nous obtenons le résultats suivant :

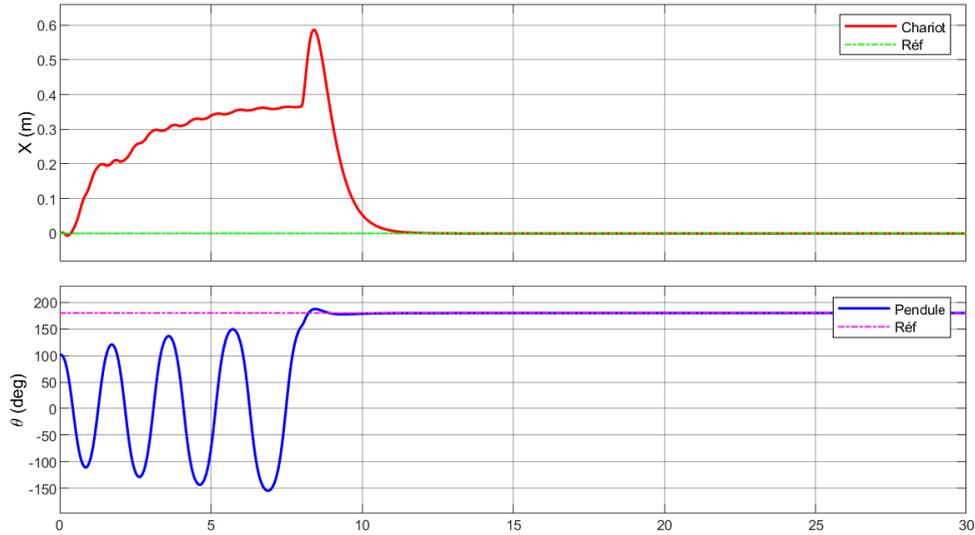


FIG. 4.3 – Stabilisation du pendule pour $\theta_0 = 100$

Un autre test consiste à ce que notre chariot puisse poursuivre une trajectoire, nous donc donc comme référence le signal suivant :

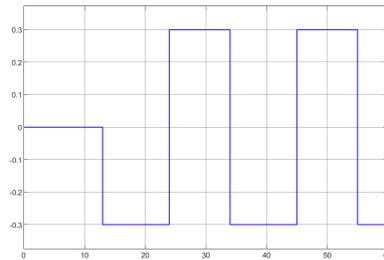


FIG. 4.4 – Trajectoire de référence carrée $\pm 30cm$

Et nous obtenons en conséquence, la réponse suivante :

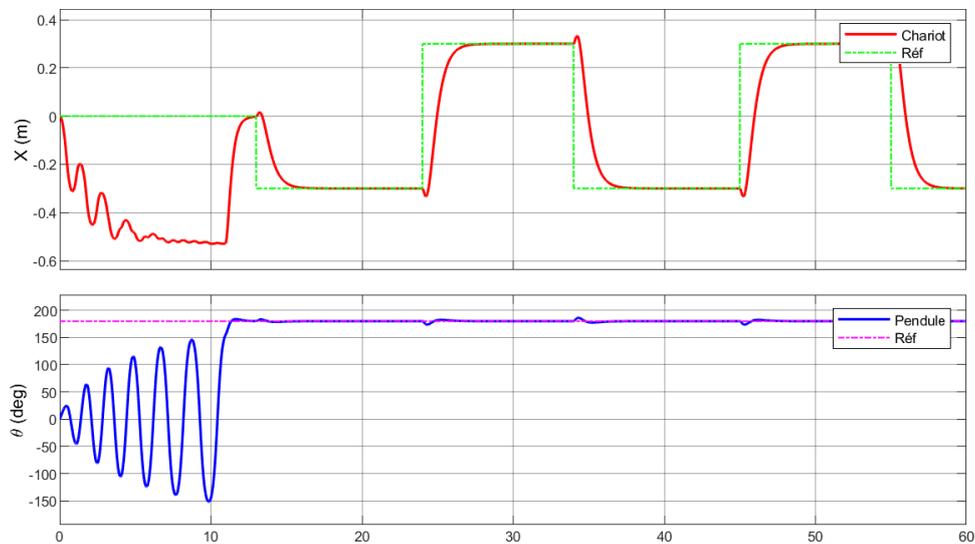


FIG. 4.5 – Stabilisation du pendule pour une référence carrée

4.3.2 Tests de robustesse

Comme dit précédemment, nous voulons que notre commande soit robuste face aux différentes perturbations. Nous allons donc soumettre le système à diverses perturbations (impulsions, bruit, sinusoïde) et voir si notre système permet un bon rejet de perturbations. Nous allons également voir si la convergence reste garantie face à des variations paramétriques sur la longueur du pendule ainsi que sa masse.

Perturbation impulsionnelle

Le premier signal de perturbation au quel est soumis notre système est une perturbation sous forme de plusieurs impulsions. En pratique, cela reviendrait à pousser le pendule pour essayer de le faire tomber. Nous prenons donc le signal qui a la forme suivante :

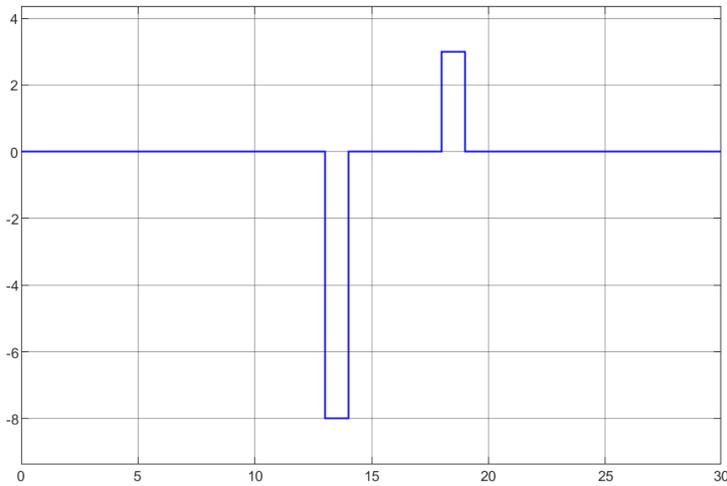


FIG. 4.6 – Signal de perturbation impulsionnel

Nous obtenons la réponse suivante :

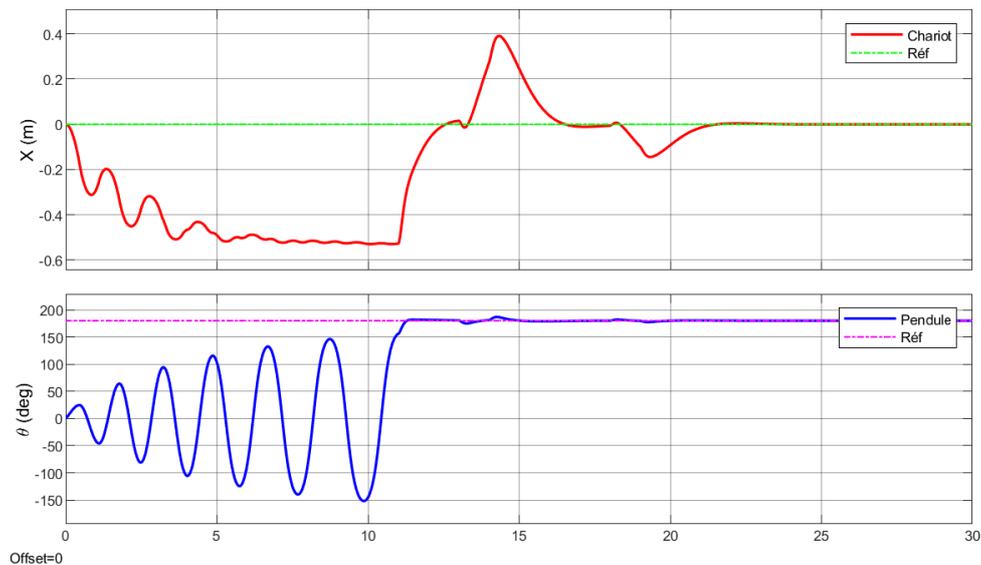


FIG. 4.7 – Réponse en présence d'une perturbation impulsionnelle

Perturbation bruitée

Dans un second lieu, nous exposons le système à un signal bruit, ce signal est montré dans la figure ci-dessous :

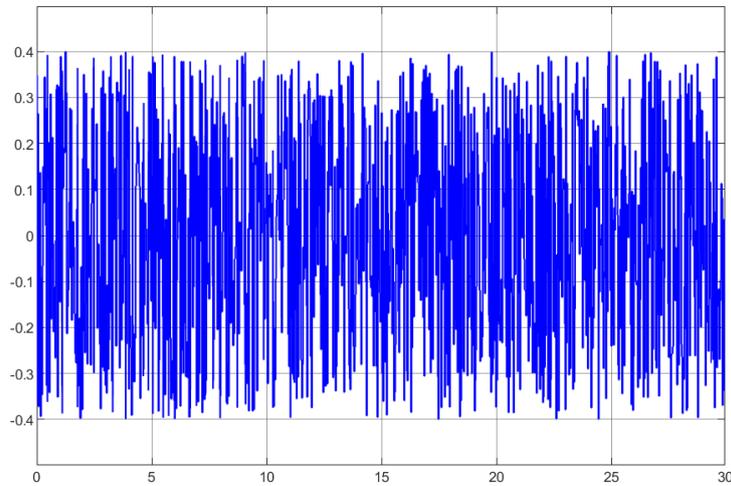


FIG. 4.8 – Signal bruité

Nous obtenons la réponse suivante pour notre système :

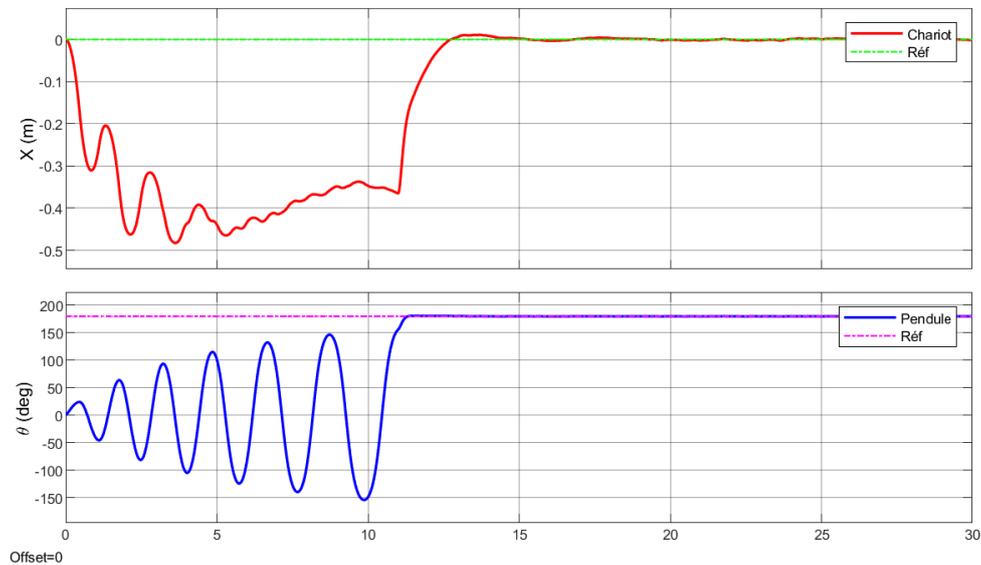


FIG. 4.9 – Réponse pour une perturbation bruitée

Perturbation Sinusoïdale

Enfin, nous exposons notre système à une perturbation sinusoïdale donc l'expression est donnée par ($A = 2$) :

$$b(t) = A \sin(2\pi t)$$

Nous obtenons la réponse suivante :

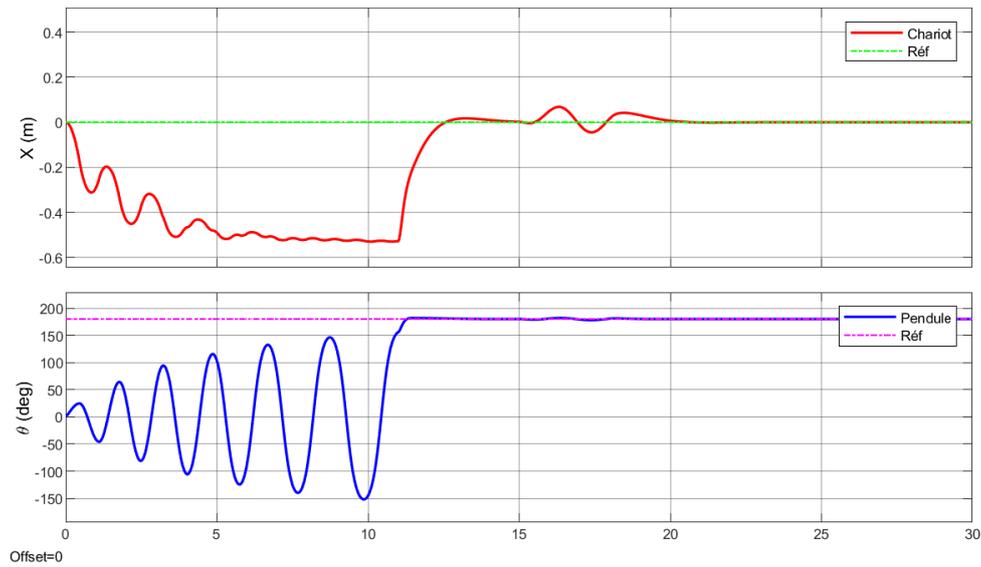


FIG. 4.10 – Réponse pour une perturbation sinusoïdale

Nous allons maintenant faire varier les différentes grandeurs du systèmes, nous allons faire varier la longueur l ainsi que la masse M .

Variation de la longueur

Nous allons faire varier la longueur du pendule, nous effectuons dans un premier lieu une variation de $+15\text{ cm}$ (courbes du haut) puis dans un second cas une variation de -20 cm (courbes du bas). Nous obtenons les courbes suivantes :

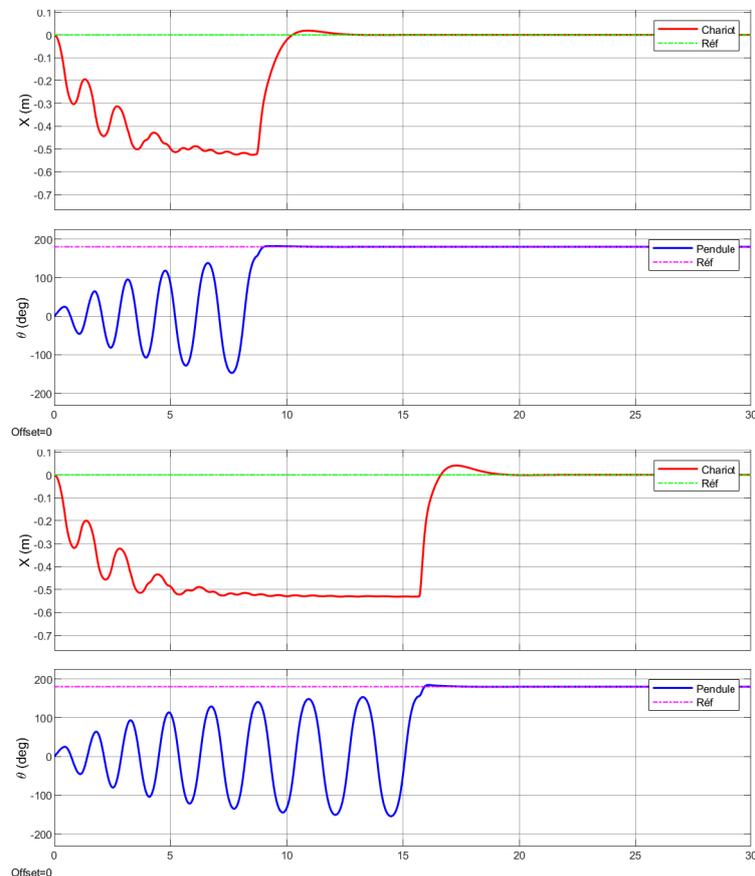


FIG. 4.11 – Réponses pour des variations paramétriques sur la longueur

Variation de la masse

Nous allons à présent varier la masse de notre système, cela revient à charger notre chariot ou à poser un objet d'une certaine masse sur notre pendule, nous faisons donc une variation paramétrique de $500g$, nous pouvons par conséquent tracer la courbe suivante :

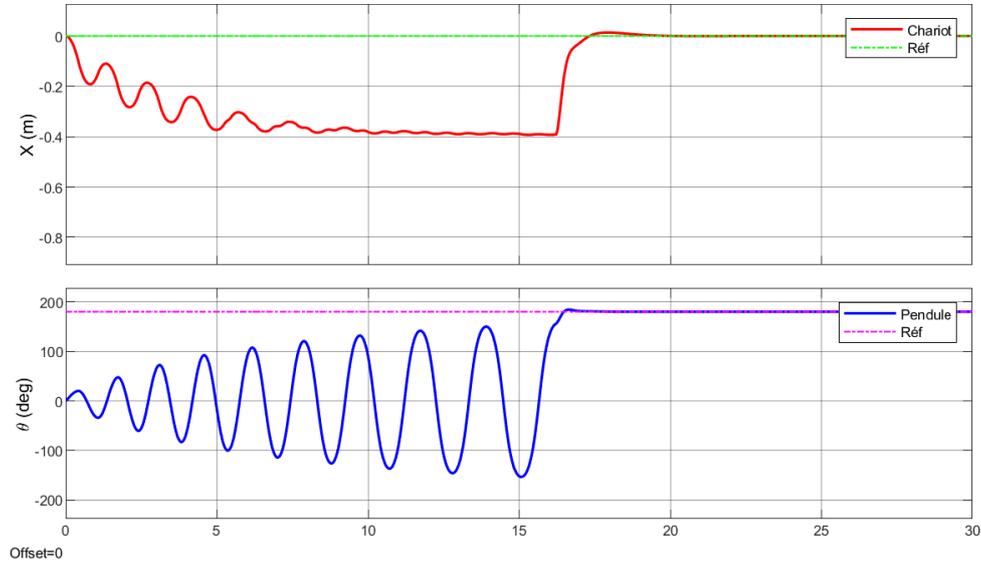


FIG. 4.12 – Réponse pour des variations paramétriques sur la masse

Pour le signal de commande, nous avons dit plus haut que ce dernier allait être borné, nous pouvons l'illustrer dans la figure suivante :

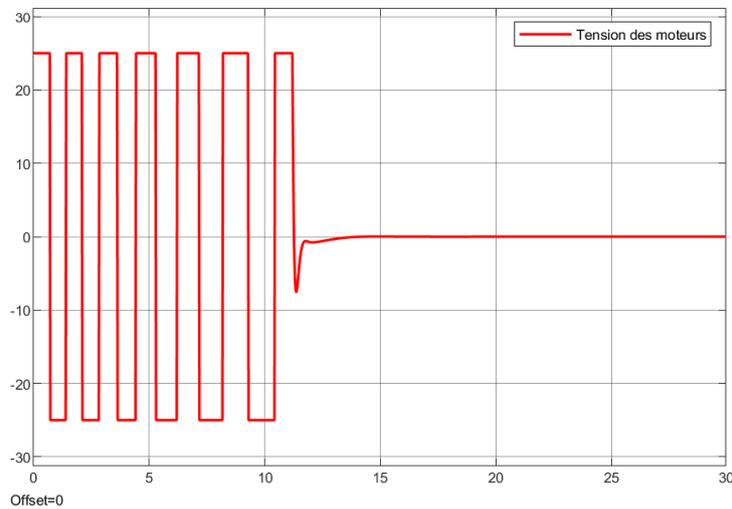


FIG. 4.13 – Signal de commande pour la commande hybride

Un autre test consiste à introduire un bruit dans le retour d'état du système, nous introduisons donc un bruit aléatoire de faible amplitude ($A = 0.01$) et de fréquence élevée ($f = 100Hz$), les résultats sont montrés dans la figure suivante :

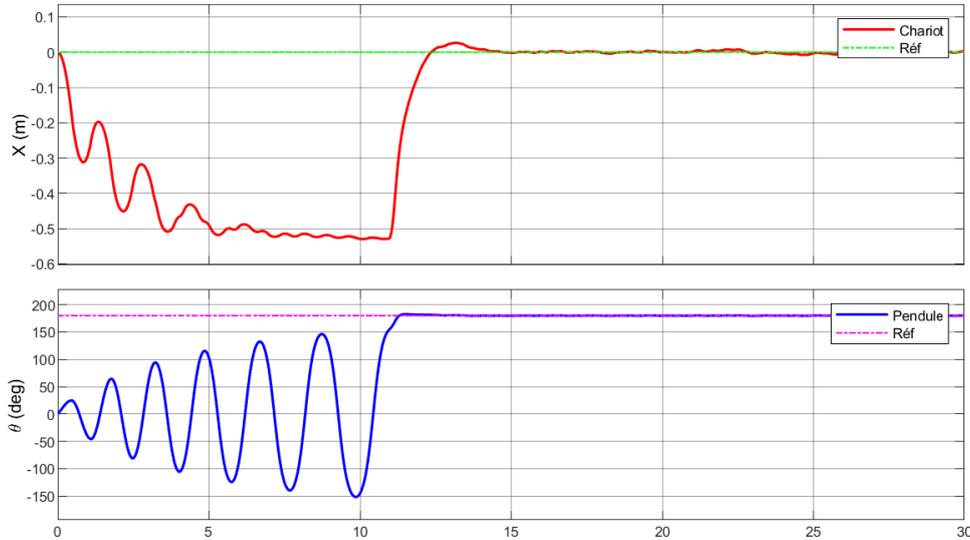


FIG. 4.14 – Réponses pour un bruit sur le retour d'état

4.3.3 Commentaires et observations

- Dans cette partie du rapport, nous avons mis au point une commande hybride non-linéaire, l'objectif de cette commande est de diviser les phases de commande du système, en faisant intervenir plusieurs stratégies de commande. La commande non-linéaire basée sur l'énergie va permettre le balancement du pendule, une fois ce dernier au voisinage de sa position désirée ($|\theta_e| \leq 25^\circ$) nous posons une condition de commutation afin d'alterner les commandes et passer à la commande LQR.
- Dans un premier lieu, nous posons des conditions initiales nulles pour les états de notre système, nous voyons dans la figure 4.2 que notre système atteint sa position désirée après 10 secondes. En prenant un angle de départ $\theta_0 = 100^\circ$, nous obtenons les résultats de la figure 4.3, nous pouvons donc voir que notre commande est globale et permet de stabiliser notre système pour n'importe quelle condition initiale.
- Dans la figure 4.5, nous donnons une trajectoire de référence que notre chariot doit suivre, cette trajectoire carrée est parfaitement suivie avec de bons temps de réponse.
- Quant aux tests de robustesse, nous avons soumis notre système à différentes perturbations, des impulsions dans la figure 4.7, un bruit dans la figure 4.9 et une perturbation sinusoïdale dans la figure 4.10, et dans les 3 cas, notre système parvient à maintenir son équilibre face à ces perturbations.
- Nous avons ensuite appliqué des variations paramétriques sur la longueur du pendule ainsi que la masse du chariot, notre système arrive à se stabiliser et ce même face à ces variations, comme l'illustrent les figures 4.11 et 4.12. La différence notable que l'on a est le temps de réponse qui est plus long dans le cas de la variation de masse ainsi que l'addition de la diminution de la longueur du pendule.

- Enfin nous avons introduit une perturbation sur le retour d'état du système comme le montre la figure 4.14, nous remarquons de légères oscillations lorsque le système se stabilise, dû aux imprécisions causées par le bruit introduit.
- La variation de la masse permet physiquement, de par exemple tester une même loi de commande sur deux systèmes avec des longueurs différentes.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis au point une stratégie de commande hybride non-linéaire basée sur l'énergie de notre système. l'intérêt premier de cette commande est d'amener le système à une position voulue en partant de son énergie en ce point, nous avons donc trouvé la commande u qui permet de balancer le pendule jusqu'à cette position, nous avons ensuite stabilisé ce dernier à cette position à l'aide de la commande LQR. Nous avons ensuite testé la robustesse du système en introduisant plusieurs perturbations qu'il a pu très bien repousser.

Chapitre 5

Commande par Mode Glissant de l'Angle du Pendule

Introduction

L'une des approches les plus simples pour l'élaboration d'une loi commande robuste est la commande par mode glissant [15]. Appelée aussi Sliding Mode Control -**SMC**- c'est une technique de commande robuste développée dans les années 1950-1960 par des chercheurs soviétiques en URSS, dont **Vladimir Utkin** ainsi que **Alekseï Fedorovich Filippov**.

À l'époque, les ingénieurs et chercheurs soviétiques travaillaient sur des systèmes robustes capables de fonctionner malgré des incertitudes [16], comme celles rencontrées dans les systèmes militaires et aéronautiques. Les méthodes classiques de contrôle (linéaires) étaient souvent inadéquates face à des non-linéarités et des perturbations fortes.

Pour la classe de systèmes à laquelle elle s'applique, l'élaboration d'une commande par mode glissant offre une approche systématique du problème de maintien de la stabilité et des performances en présence d'imprécisions et de variations paramétriques. [15]

Dans ce chapitre, nous allons voir la théorie de la commande par mode glissant, comment élaborer cette commande et l'appliquer à notre système.

5.1 Théorie de la Commande par Mode Glissant

La commande par modes glissants est une méthode de contrôle non linéaire reposant sur l'introduction d'une discontinuité dans la loi de commande au voisinage d'une surface particulière, dite surface de glissement. Le principe fondamental consiste à forcer la trajectoire des états du système à atteindre cette surface, puis à la maintenir dessus via une commutation adaptée, de manière à conduire le système vers son point d'équilibre. Ce comportement induit ce que l'on appelle le régime de glissement. Comme le montre la figure suivante [17] :

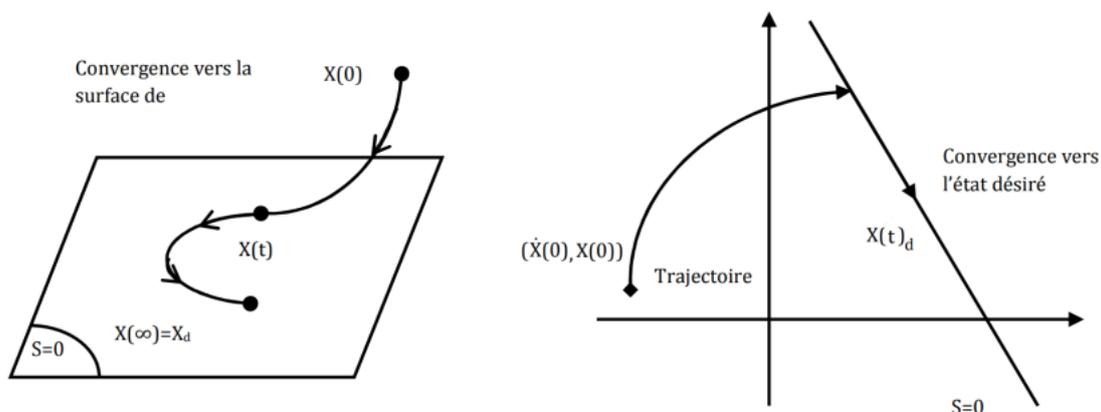


FIG. 5.1 – Régime de glissement

L'élaboration de la loi de commande par mode glissant se fait en deux étapes [18] :

1. La détermination d'une région dans l'espace d'état, telle que lorsque le système se trouve dans cette région, il adopte le comportement désiré.

2. La définition d'une loi de commande qui conduit le système jusqu'à cette surface.

Pour un système non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

La surface de glissement est introduite par Slotine, elle est donnée par [15] :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{r-1} e(x) \quad (5.2)$$

Avec :

- ▷ S est la surface de glissement.
- ▷ $e = x - x_d$ qui est l'erreur.
- ▷ λ est un gain qui permet de varier la dynamique de la surface.
- ▷ r est le degré relatif du système.

Cependant, le choix de la surface de glissement doit satisfaire certaines conditions, c'est ce qu'on appelle **la condition d'attractivité**, l'objectif est d'amener le système sur la surface de glissement puis l'y faire rester, cette seconde condition est dite **condition d'invariance**.

Cette approche est donnée par **Emilyanov** et **Utkin** comme suit [19] :

$$\begin{aligned} \dot{S} > 0 & \text{ Lorsque } S < 0 \\ \dot{S} < 0 & \text{ Lorsque } S > 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ou, plus simplement :

$$S \cdot \dot{S} < 0 \quad (5.4)$$

Pour satisfaire la condition d'invariance, nous avons :

$$S(x) = \dot{S}(x) = 0 \quad (5.5)$$

Pour la synthèse de la loi de commande, cette dernière doit contenir deux parties [17] :

$$u = u_{eq} + u_{att} \quad (5.6)$$

1. La première partie u_{eq} permet de définir le comportement voulu pour le système, elle est calculée à partir de la condition d'invariance en 5.5.
2. La seconde partie u_{att} est une commande qui permet de satisfaire la condition d'attractivité en 5.4, cette fonction est en général une fonction discontinue, la fonction *sign*.

Nous pouvons écrire :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} \quad (5.7)$$

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \quad (5.8)$$

$$\dot{S}(x) = L_f S(x) + L_g S(x)u \quad (5.9)$$

En posant :

$$\dot{S} = -k \operatorname{sign}(S) \quad (5.10)$$

Nous pouvons obtenir la loi de commande suivante :

$$u = [L_g S]^{-1} \cdot [-L_f S - k \operatorname{sign}(S)] \quad (5.11)$$

Nous retrouvons donc bien les deux parties de la commande u_{eq} et u_{att} .

Il est à noter qu'en présence d'erreurs de modélisation, d'imprécisions ou de perturbations, la commande u_{att} est discontinue, nous utilisons comme dit plus haut la fonction sign [15], elle est donnée comme suit :

$$-k \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -k & \text{Si } x > 0 \\ k & \text{Si } x < 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Puisque la mise en œuvre des commutations de commande associées est nécessairement imparfaite (par exemple, en pratique, la commutation n'est pas instantanée et la valeur de S n'est pas connue avec une précision infinie), cela conduit au phénomène de chattering (figure 5.2). Or, le chattering est indésirable en pratique, car il implique une activité de commande élevée et peut en outre exciter des dynamiques haute fréquence négligées lors de la modélisation (telles que des modes structurels non modélisés, des délais négligés, etc.) [15] ainsi qu'une usure prématurée des actionneurs.

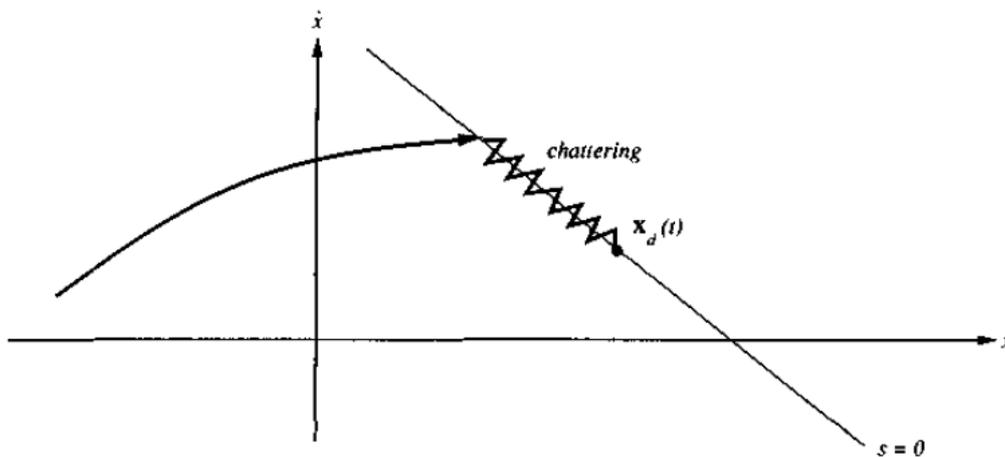


FIG. 5.2 – Phénomène du Chattering

Plusieurs approches ont été mises en œuvre pour réduire le phénomène de chattering. La méthode de la couche limite, très souvent utilisée, revient à remplacer la fonction *sign* par une approximation continue à gain élevé dans une zone proche de la surface de glissement. Cela permet d'obtenir un régime dit **pseudo-glissant** où le système reste au voisinage de la surface de glissement.

Cependant, ces méthodes affectent la robustesse du système. Les fonctions que l'on peut utiliser sont les suivantes :

- Fonction Saturation [16] :

$$sat(x, \delta) = \begin{cases} sign(x) & \text{Si } |x| \geq \delta \\ \frac{x}{\delta} & \text{Si } |x| \leq \delta \end{cases} \quad (5.13)$$

- Fonction tangente hyperbolique :

$$f(x, \delta) = tanh(x, \delta) \quad (5.14)$$

- Fonction pseudo-signe [20] :

$$f(x, \delta) = \frac{x}{|\epsilon| + \delta} \quad (5.15)$$

Avec δ qui est un paramètre constant positif, plus la valeur de ce paramètre diminue, plus l'on se rapproche de la fonction *sign*.

Il existe une autre méthode qui permet d'annuler le phénomène du chattering, cette technique est dite mode glissant d'ordre supérieur (High Order Sliding Mode -HOSMC-). Cela consiste à pousser le broitement aux dérivées d'ordre supérieur en ajoutant un intégrateur à l'entrée de commande, par exemple, pour un mode glissant d'ordre deux nous avons :

$$\dot{u} = v \quad \text{Qui est le nouveau signal de commande} \quad (5.16)$$

$$\ddot{S} = a(x) + b(x) v \quad (5.17)$$

On pose $z_1 = S$ et $z_2 = \dot{S}$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = a + b v \end{cases} \quad (5.18)$$

Qui nous donne :

$$v = b^{-1}[-a - k sign(z)] \quad (5.19)$$

Avec :

$$k = [k_1 ; k_2] \quad \text{et} \quad sign(z) = [sign(z_1) ; sign(z_2)]^T$$

Qui donne ce qu'on appelle le **twisting algorithm** :

$$v = b^{-1}[-a - k_1 sign(z_1) - k_2 sign(z_2)] = b^{-1}[-a - k_1 sign(S) - k_2 sign(\dot{S})] \quad (5.20)$$

5.2 Élaboration de la Loi de Commande par MG

Nous allons maintenant calculer la loi de commande qui permet de stabiliser notre pendule. Le fait que le système soit sous-actionné pose un problème, nous avons une seule entrée (qui est la force appliquée F sur notre chariot) et nous voulons stabiliser deux états. Utiliser donc la surface de glissement de Slotine ne permet de stabiliser qu'un seul des deux états.

Nous allons donc dans un premier lieu calculer la loi de commande qui permet de stabiliser l'angle du pendule, nous considérerons dans un second lieu deux surfaces de glissement qui permettront de stabiliser les deux états désirés.

Comme dit en 5.2, la surface de glissement de Slotine est donnée par :

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{r-1} e(x)$$

Nous devons donc calculer le degré relatif pour le système. Le degré relatif est le nombre de dérivées de la sortie qu'il faut effectuer avant que l'entrée apparaisse explicitement. dans ce cas, nous voulons stabiliser l'angle du pendule, nous avons donc $y = x_2$, nous calculons donc :

$$\begin{cases} y = x_2 \\ \dot{y} = \dot{x}_2 = x_4 \\ \ddot{y} = \ddot{x}_2 = \frac{-(F - \alpha x_3 + m_p l x_4^2 \sin x_2) m_p l \cos x_2 - M m_p l g \sin x_2}{M(I + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos^2 x_2} \end{cases} \quad (5.21)$$

La commande F apparaît au bout de la deuxième dérivée, nous avons donc $r = 2$. La surface de glissement est donc donnée comme suit :

$$S(x) = \dot{e} + \lambda e \quad (5.22)$$

Avec $e = x_2 - x_{2d}$ qui est l'erreur que l'on souhaite annuler.

$$\begin{aligned} S(x) &= x_4 - \dot{x}_{2d} + \lambda(x_2 - x_{2d}) \\ \dot{S} &= \dot{x}_4 - \ddot{x}_{2d} + \lambda(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) \\ \dot{S} &= C + DF - \ddot{x}_{2d} + \lambda(x_4 - \dot{x}_{2d}) \end{aligned}$$

En posant

$$\dot{S} = -k \operatorname{sign}(S)$$

On obtient :

$$F = \frac{1}{D} [-k \operatorname{sign}(S) - C + \ddot{x}_{2d} - \lambda(x_4 - \dot{x}_{2d})] \quad (5.23)$$

Avec k et λ qui sont des constantes positives. Et à partir de l'équation 2.19, nous pouvons trouver la tension à appliquer aux moteurs.

5.2.1 Simulations et résultats

Nous allons maintenant simuler les résultats, nous prenons $k = 1$ et $\lambda = 1$. Et pour les conditions initiales suivantes :

$$X(0) = [0 ; 0 ; 0 ; 0]$$

Nous obtenons la courbe suivante :

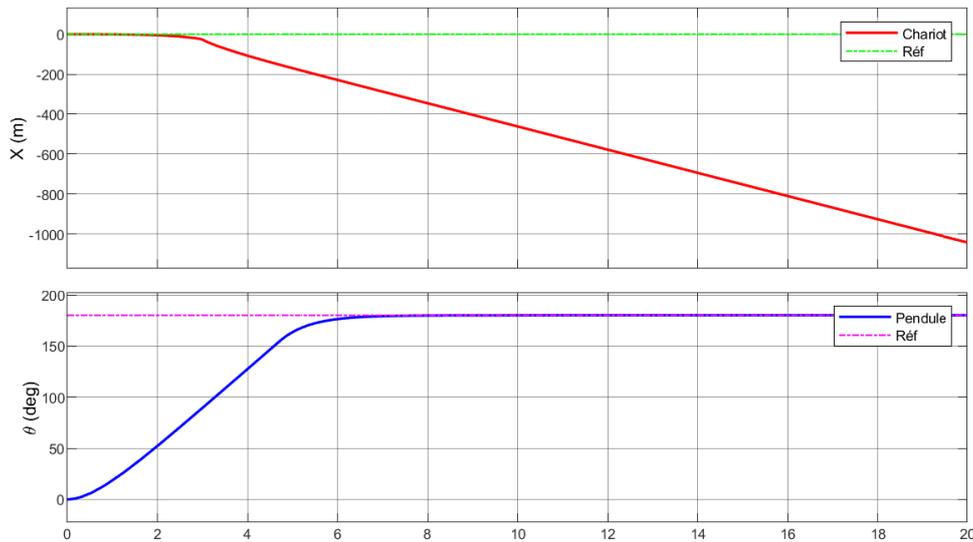


FIG. 5.3 – Stabilisation de l'angle du pendule en utilisant la surface de glissement de Slotine

5.2.2 Commentaires et observations

- Nous pouvons remarquer dans un premier lieu que la stabilisation de l'angle est bien achevée, grâce a la surface de glissement de Slotine.
- Mais, comme dit précédemment, le sous-actionnement du système pose un problème quant à l'utilisation de cette technique, cela ne permet pas de stabiliser la position du chariot.
- Nous allons voir dans ce qui suit comment faire pour stabiliser les deux états de notre système.

Commande par mode glissant des deux états

Nous avons donc vu que cette première approche ne permettait la stabilisation que d'un seul état, en outre, l'angle du pendule. Nous allons maintenant voir une seconde approche pour résoudre ce problème, nous allons diviser notre problème en deux, nous aurons donc deux phases à compléter :

1. La première phase consiste au balancement du pendule. Nous allons faire suivre une trajectoire sinusoïdale à notre chariot, ce qui va permettre d'élever le pendule.
2. La seconde phase consiste à stabiliser le pendule à son point d'équilibre instable ainsi que de stabiliser la position du chariot.

Nous considérerons donc deux surfaces de glissement, une pour le balancement et une seconde pour la stabilisation.

Étape 1 : Le balancement du pendule

Considérons la surface de glissement suivante :

$$S_1 = \lambda(x_1 - x_{1d}) + x_3 \quad (5.24)$$

En dérivant nous aurons :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}) + \dot{x}_3 \\ \dot{S}_1 &= \lambda(x_3 - \dot{x}_{1d}) + A + Bu \\ \lambda(x_3 - \dot{x}_{1d}) + A + Bu &= -k \operatorname{sign}(S_1) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la commande u à appliquer pour le balancement du pendule :

$$u = \frac{1}{B}[-k \operatorname{sign}(S_1) - \lambda(x_3 - \dot{x}_{1d}) - A] \quad (5.25)$$

Avec : $k = 40$; $\lambda = 30$

La référence que doit suivre le chariot est donnée par l'équation :

$$x_{1d} = 0.15 \sin(8\pi t)$$

Étape 2 : La stabilisation

Considérons cette fois la surface de glissement suivante :

$$S_2 = k_1(x_1 - x_{1d}) + k_2(x_2 - x_{2d}) + k_3x_3 + k_4x_4 \quad (5.26)$$

Avec k_i $i = 1...4$ est une matrice de gain pour le retour d'état linéaire (gain LQR ou SFC).

$$\dot{S}_2 = k_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1d}) + k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_{2d}) + k_3\dot{x}_3 + k_4\dot{x}_4$$

$$\begin{aligned}\dot{S}_2 &= k_1(x_3 - \dot{x}_{1d}) + k_2(x_4 - \dot{x}_{2d}) + k_3(A + Bu) + k_4(C + Du) \\ k_1x_3 + k_2x_4 + k_3(A + Bu) + k_4(C + Du) &= -k \operatorname{sign}(S_2)\end{aligned}$$

Nous obtenons donc la loi de commande suivante :

$$u = \frac{1}{k_3B + k_4D}(-k \operatorname{sign}(S_2) - k_1(x_3 - \dot{x}_{1d}) - k_2(x_4 - \dot{x}_{2d}) - k_3A - k_4C) \quad (5.27)$$

Les gains k_i , $i = 1..4$ sont les paramètres de la matrices de gains LQR qui découlent des matrices données en 3.11. Et nous posons $k = 100$

5.2.3 Simulations et résultats

Pour les lois de commande élaborées en 5.25 et 5.27, et pour des conditions initiales nulles, nous obtenons les résultats de simulations suivantes :

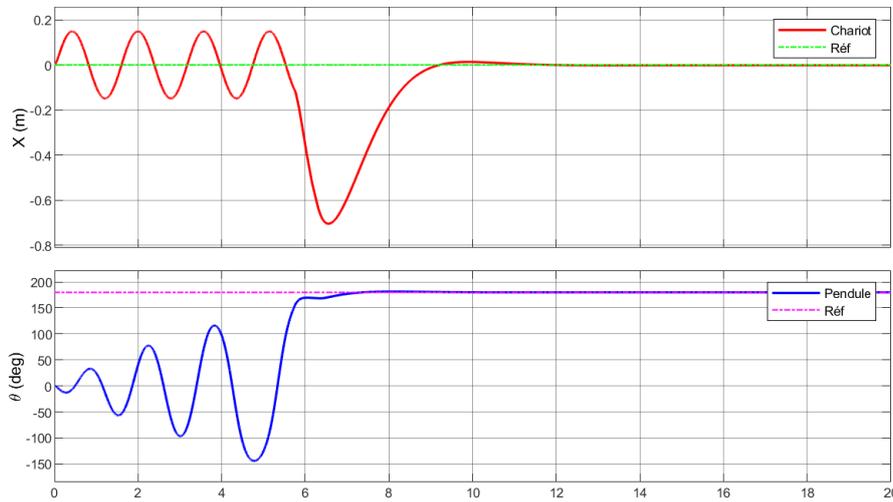


FIG. 5.4 – Stabilisation par MG pour $\theta_0 = 0$

Et pour un angle de départ de 100° , nous obtenons :

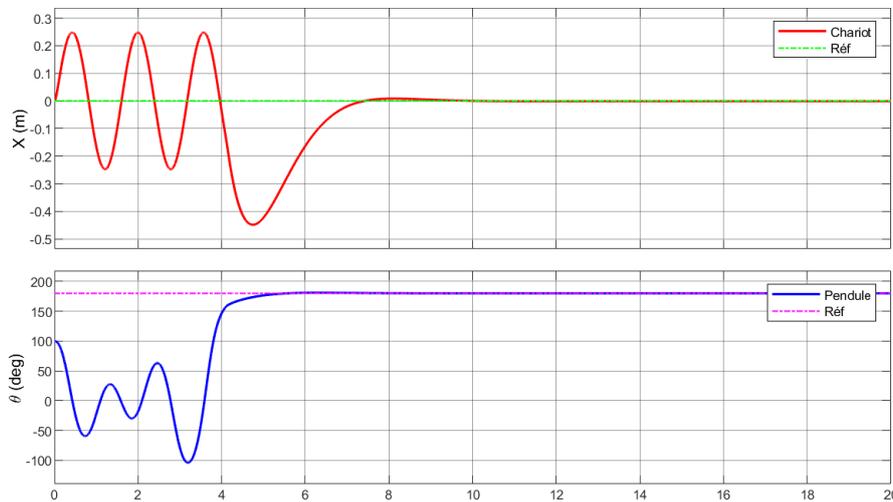


FIG. 5.5 – Stabilisation par MG pour $\theta_0 = 100$

Afin de pouvoir comparer entre la commande élaboré dans ce chapitre et celle du chapitre précédent, nous allons dans un premier lieu faire suivre une trajectoire carrée à notre chariot, le trajectoire à suivre est donnée en 4.4, nous obtenons en conséquence le résultat suivant :

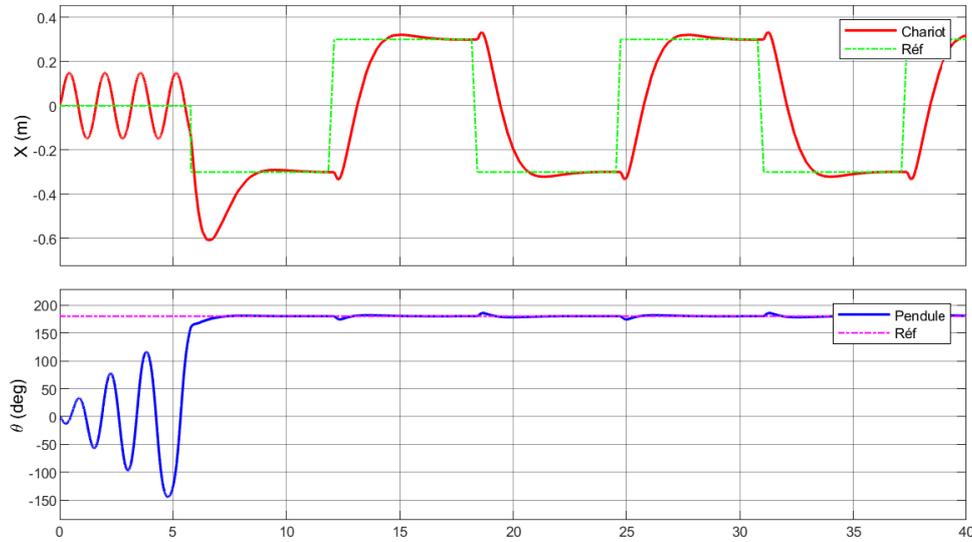


FIG. 5.6 – Poursuite d'une trajectoire carrée

5.2.4 Tests de robustesse

La commande par mode glissant est connue pour être une commande robuste face aux perturbations, grâce à la discontinuité de la fonction *sign*, nous allons donc soumettre notre système à différentes perturbations comme pour la commande du chapitre précédent.

Perturbation impulsionnelle

Nous allons soumettre notre système à la perturbation sinusoïdale montrée en 4.6, nous obtenons la courbe suivante :

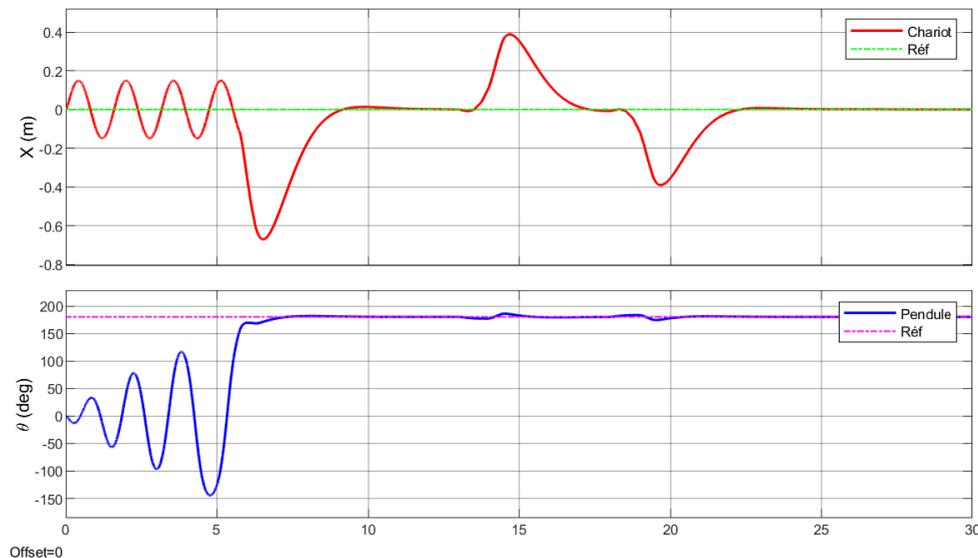


FIG. 5.7 – réponse pour une perturbation impulsionnelle

Perturbation bruitée

Nous prenons cette fois le signal de perturbations en 4.8. Nous obtenons en conséquence la réponse suivante :

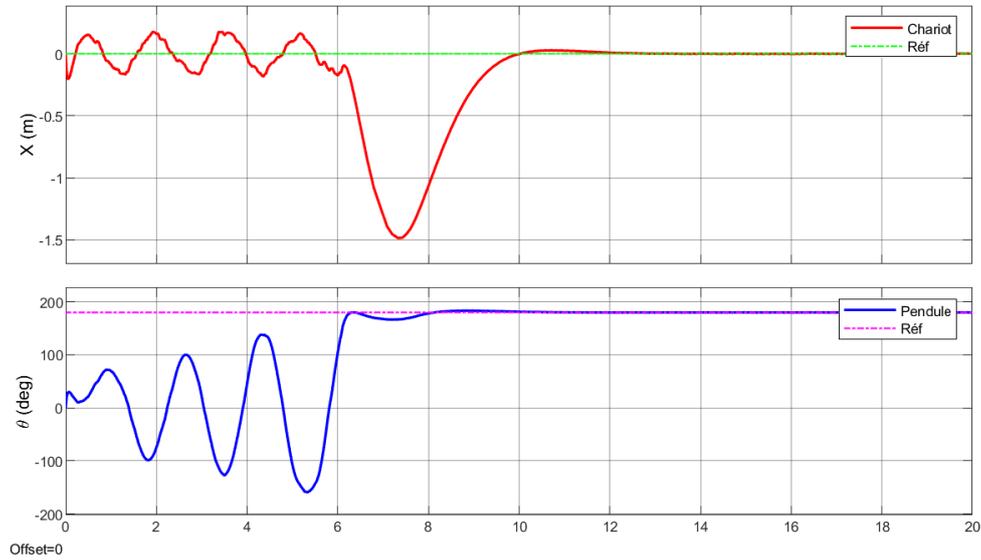


FIG. 5.8 – réponse en présence d'un bruit

Perturbation sinusoïdale

Enfin, nous posons comme perturbation un signal carrée dont l'expression est :

$$b(t) = A \sin(2\pi t)$$

Nous obtenons donc :

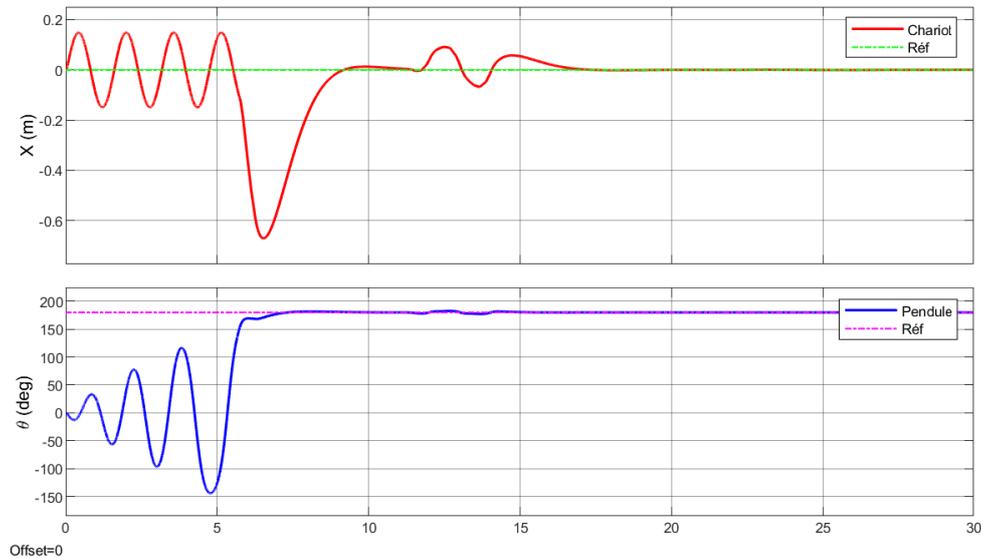


FIG. 5.9 – réponse en présence d'une perturbation sinusoïdale

Variation de la longueur

Nous allons maintenant faire des variations sur la longueur du pendule, nous allons rallonger dans un premier lieu la tige de 15cm (courbes du haut) puis la raccourcir de 20cm . Nous traçons donc les courbes suivantes :

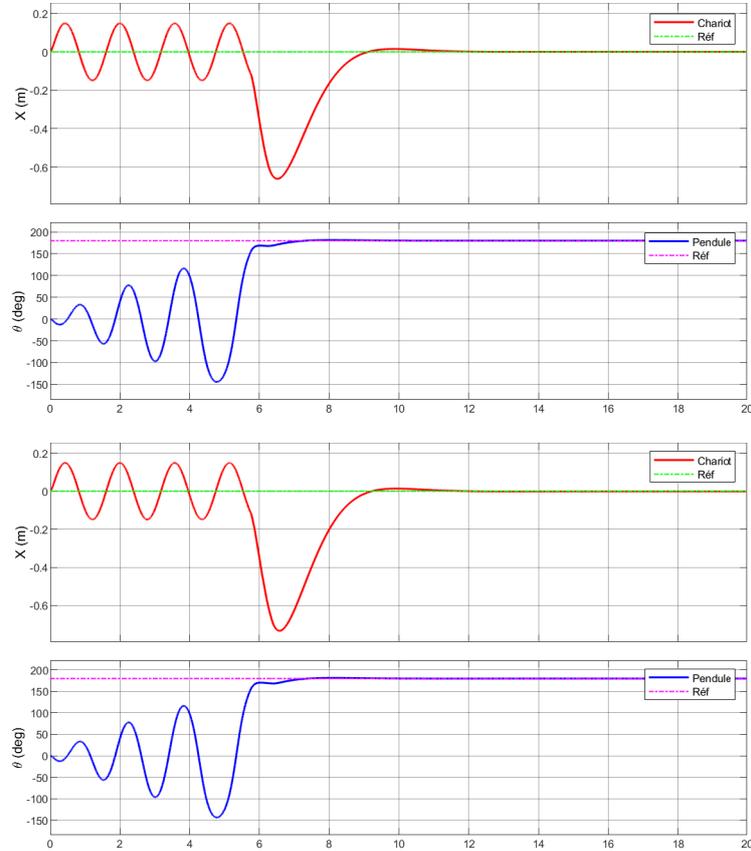


FIG. 5.10 – Réponses pour des variations paramétriques sur la longueur

Variation de la masse

Pour un second test de variations paramétrique, nous allons ajouter une masse à notre système, nous rajoutons une masse de 500g , nous obtenons les résultats suivants :

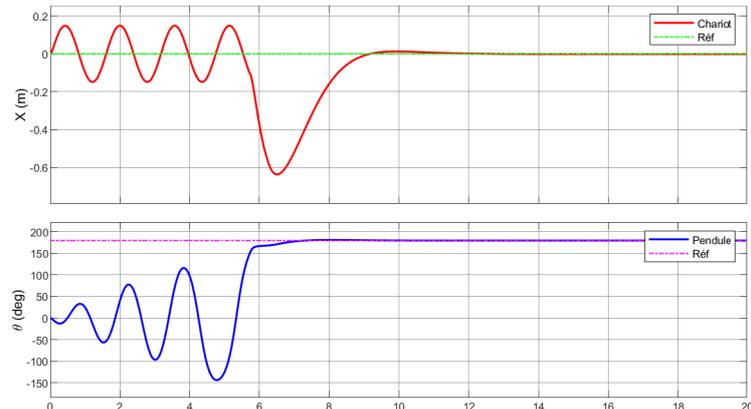


FIG. 5.11 – Réponse pour des variations paramétriques sur la masse

Nous pouvons aussi montrer dans la figure suivante le signal de commande de notre système, nous saturons la sortie entre $-10V$ et $10V$, nous obtenons donc :

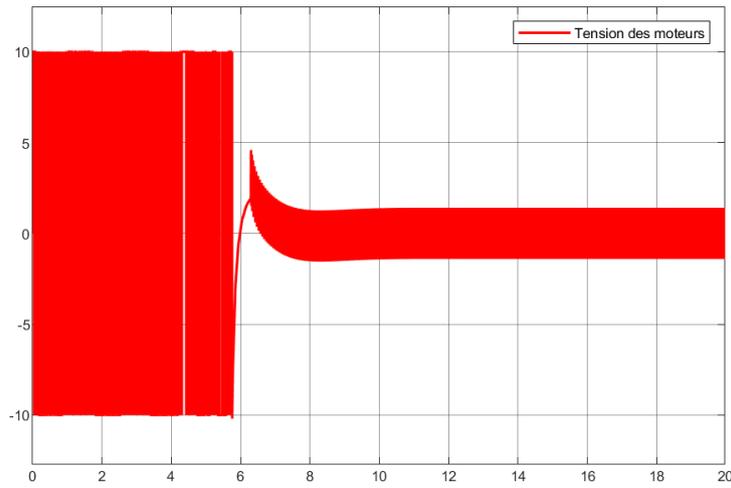


FIG. 5.12 – Signal de commande pour le MG avec la fonction *sign*

En remplaçant la fonction *sign* par la fonction *tanh* en 5.14, nous obtenons le signal de commande suivant :

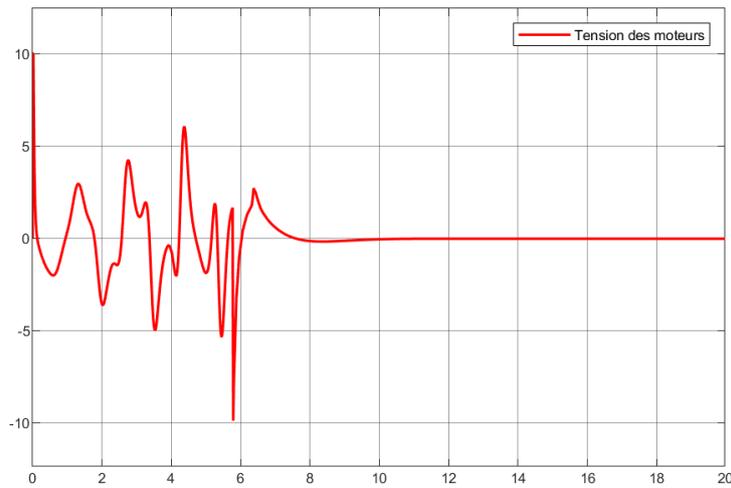


FIG. 5.13 – Signal de commande pour le MG avec la fonction *tanh*

Nous allons maintenant introduire la même perturbation sur le retour d'état qu'au chapitre précédent, nous obtenons en conséquence, la figures suivantes :

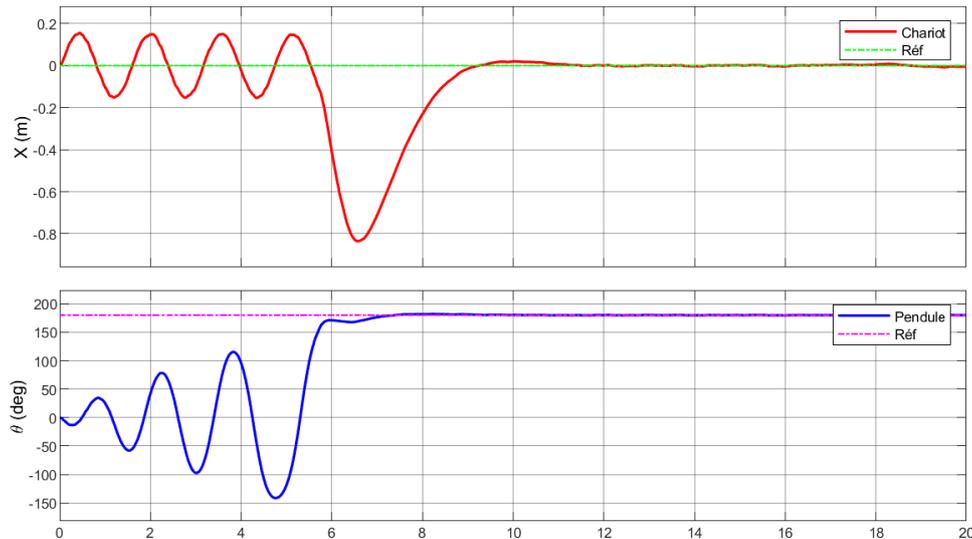


FIG. 5.14 – Réponses pour un bruit sur le retour d'état

5.2.5 Commentaires et observations

- A partir des figures 5.4 et 5.5, nous pouvons voir que la convergence est achevée pour les deux états et ce à partir de n'importe quelle condition initiale sur l'angle du pendule, nous avons donc une commande globale. Nous pouvons aussi faire suivre une trajectoire à notre chariot, cette tâche est achevée dans la figure 5.6.
- Pour ce qui est du rejet de perturbations, nous avons soumis notre système à des impulsions en 5.7, à un bruit en 5.8 et à une perturbation sinusoïdale en 5.9. Pour la première et la troisième perturbation, le rejet est aisé. Mais en présence du bruit, le chariot a un peu plus de mal mais atteint quand même sa position désirée. Notre commande est donc robuste.
- Pour les variations sur la longueur et la masse du chariot en 5.10 et 5.11, nous pouvons voir que les variations paramétriques n'influent nullement sur le comportement du système et que ce dernier arrive à se stabiliser et ce même en présence de ces variations.
- Dans la figure 5.12, nous pouvons voir un phénomène de chattering assez important, ce dernier peut causer des problèmes d'usure prématurée des actionneurs, nous pouvons considérablement réduire ce problème en remplaçant la fonction *sign* la fonction *tanh*, nous obtenons donc la figure en 5.13.

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis au point une seconde commande non-linéaire, la commande par mode glissant, nous avons d'abord abordé l'aspect et les fondements théoriques de cette commande, nous avons ensuite posé des surfaces de glissement qui nous ont permis d'atteindre

notre objectif de commande, en outre, stabiliser la position du chariot ainsi que l'angle du pendule et ce, malgré le sous-actionnement du système.

Conclusion Générale

Le présent mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude, de la modélisation et de la commande d'un système dynamique emblématique : le pendule inversé. Représentatif des systèmes non linéaires, instables, fortement couplés et sous-actionnés, le pendule inversé constitue depuis des décennies un banc d'essai privilégié pour tester et valider des lois de commande avancées. L'objectif principal de ce travail était de développer et d'évaluer différentes stratégies de commande robustes capables de maintenir le pendule à sa position d'équilibre instable, tout en assurant de bonnes performances face aux perturbations et incertitudes.

Dans un premier temps, nous avons consacré le 1er chapitre à un état de l'art approfondi sur les différentes configurations de pendules inversés (simple, rotatif, double, triple, etc.) ainsi que sur leurs applications concrètes dans des domaines variés tels que la robotique humanoïde, l'aéronautique ou encore les prothèses intelligentes. Nous avons également souligné l'intérêt pédagogique et scientifique de ce système, notamment en raison de son caractère sous-actionné, qui en fait un véritable défi pour les ingénieurs automaticiens.

Nous avons ensuite entrepris l'élaboration du modèle mathématique du système à partir du formalisme d'Euler-Lagrange. Cette modélisation nous a permis d'obtenir les équations différentielles gouvernant la dynamique du pendule et du chariot. Nous avons ensuite introduit la dynamique du moteur, linéarisé le modèle autour du point d'équilibre instable, puis formulé une représentation d'état permettant l'analyse et la synthèse des lois de commande. Des simulations en boucle ouverte ont été réalisées afin de mettre en évidence le comportement naturel du système, confirmant son instabilité sans action de contrôle.

Dans le chapitre suivant, nous avons synthétisé les lois de commande linéaires. Deux méthodes principales ont été abordées : la commande par retour d'état linéaire et la commande linéaire quadratique (LQR). Ces approches, bien qu'efficaces dans un voisinage restreint du point d'équilibre, présentent certaines limites face à des perturbations importantes ou à des variations paramétriques. Des simulations ont permis de valider leur fonctionnement et de comparer leurs performances respectives.

Dans le chapitre 4, nous avons mis en œuvre une commande hybride non linéaire, combinant une phase d'élévation du pendule à l'aide de l'énergie du système, suivie d'une commutation vers une commande linéaire stabilisante (LQR). Cette approche a montré une amélioration significative en termes de robustesse et de capacité à basculer rapidement le pendule vers sa position instable.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons développé une commande par mode glissant, connue pour sa robustesse face aux perturbations et incertitudes. Grâce à l'introduction de surfaces

de glissement adaptées, nous avons pu assurer une stabilisation efficace de l'angle du pendule, même en présence de bruits, de perturbations impulsionnelles ou sinusoidales, et de variations paramétriques.

Ce travail nous a permis de mobiliser l'ensemble des compétences acquises durant notre formation d'ingénieur en automatique, notamment en modélisation, analyse de systèmes dynamiques, synthèse de lois de commande, et simulation numérique. Les résultats obtenus ont confirmé la pertinence des approches étudiées, en particulier celles non linéaires, pour le contrôle de systèmes complexes, incertains et fortement couplés.

En perspective, ce projet pourrait être étendu par une implémentation réelle sur une plateforme expérimentale, une optimisation des gains en utilisant des algorithmes d'optimisation comme l'algorithme PSO. D'autres techniques de commande peuvent être explorées comme les techniques de commande d'apprentissage par renforcement, une commande adaptative peut aussi être envisagée dans le cas où les paramètres du système seraient inconnus.

Business Model Canvas

Partenaires Clés	Activités Clés	Proposition de Valeur
<ul style="list-style-type: none"> - ENP, universités techniques - Fournisseurs de composants (moteurs, capteurs) - Plateformes de distribution éducatives 	<ul style="list-style-type: none"> - Modélisation et simulation du système - Développement de lois de commande (LQR, SMC) - Fabrication du banc d'essai - Rédaction de documentation pédagogique 	<ul style="list-style-type: none"> - Kit pédagogique pour apprendre la commande robuste - Support aux TP et projets étudiants - Banc d'essai compatible MATLAB/-Simulink
Relations Clients	Canaux	Segments de Clientèle
<ul style="list-style-type: none"> - Support technique - FAQ et documentation - Formation des enseignants 	<ul style="list-style-type: none"> - Réseaux universitaires - Foires éducatives - Plateformes web institutionnelles 	<ul style="list-style-type: none"> - Étudiants en ingénierie - Écoles d'ingénieurs, ENP, départements d'automatique - Formateurs techniques
Ressources Clés	Structure de Coûts	Sources de Revenus
<ul style="list-style-type: none"> - Logiciels : MATLAB/-Simulink - Connaissances en automatique - Banc de test, composants physiques 	<ul style="list-style-type: none"> - Achat des composants - Développement du banc et des logiciels - Fabrication et documentation 	<ul style="list-style-type: none"> - Vente de kits pédagogiques - Formations et ateliers - Licence d'utilisation des simulateurs

Bibliographie

- [1] R. Ngadengon, Y. M. Sam, J. H. S. Osman, and R. Ghazali. Controller design for inverted pendulum system using discrete sliding mode control. In *2nd International Conference on Instrumentation, Control and Automation*, Bandung, Indonesia, November 2011. IEEE.
- [2] Marvin Bugeja. Non-linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system. In *EUROCON 2003 - The IEEE Region 8 Conference on Computer as a Tool*, Ljubljana, Slovenia, 2003. IEEE.
- [3] Alfian Ma'arif, Marco Antonio Márquez Vera, Magdi Sadek Mahmoud, Samir Ladaci, Abdullah Çakan, and Jonattan Niño Parada. Backstepping sliding mode control for inverted pendulum system with disturbance and parameter uncertainty. *Journal of Robotics and Control (JRC)*, 3(1) :86–97, January 2022.
- [4] Alan Bradshaw and Jindi Shao. Swing-up control of inverted pendulum systems. *Robotica*, 14 :397–405, 1996.
- [5] Yanmei Liu, Zhen Chen, Dingyu Xue, and Xinhe Xu. Real-time controlling of inverted pendulum by fuzzy logic. In *IEEE International Conference on Automation and Logistics*, Shenyang, China, 2009. IEEE.
- [6] Ahmad Ilyas Roose, Samer Yahya, and Hussain Al-Rizzo. Fuzzy-logic control of an inverted pendulum on a cart. *Computers and Electrical Engineering*, 61 :31–47, 2017.
- [7] M. I. H. Nour, J. Ooi, and K. Y. Chan. Fuzzy logic control vs. conventional pid control of an inverted pendulum robot. In *International Conference on Intelligent and Advanced Systems*. IEEE, 2007.
- [8] Haohua Qin, Wei Shao, and Lantian Guo. Research and verification on swing-up control algorithm of rotary inverted pendulum. In *Proceedings of the 2014 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 4941–4945. IEEE, 2014.
- [9] Haibin Shi, Tao Sun, Zhi Xu, and Chuanping Wu. Double inverted pendulum system control based on internal model principle. In *2019 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, pages 666–670, Nanchang, China, 2019. IEEE.
- [10] Sucheta Sehgal and Sheela Tiwari. Lqr control for stabilizing triple link inverted pendulum system. In *2012 2nd International Conference on Power, Control and Embedded Systems (ICPCES)*, pages 1–6, Allahabad, India, 2012. IEEE.
- [11] Dahmane Menad and Louhaidia Oussama. Commandes non linéaires hybrides d'un pendule inversé doté d'une carte dspace. Master's thesis, Ecole Nationale Polytechnique, Département d'Automatique, El Harrach, Algérie, Juin 2010.
- [12] STANISLAW H. ŻAKJ and CARL A. MACCARLEY and. State-feedback control of non-linear systems†. *International Journal of Control*, 43(5) :1497–1514, 1986.
- [13] Khushboo Barya, Sheela Tiwari, and R. Jha. Comparison of lqr and robust controllers for stabilizing inverted pendulum system. In *ICCCCT-10*. IEEE, 2010.
- [14] Jitendra Singh. Model based control design for swing-up & balance the inverted pendulum. Technical report, Sardar Vallabhbhai National Institute of Technology (SVNIT), Surat, 2017.
- [15] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.

- [16] Olfa Jedda, Jalel Ghabi, and Ali Douik. Sliding mode control of an inverted pendulum. In *Applications of Sliding Mode Control*, volume 79 of *Studies in Systems, Decision and Control*. Springer, 2017.
- [17] Abdel-Hakim Arab and Mohammed Habib Errahmane Hafdi. Commandes d'ordre fractionnaire par pid et mode de glissement appliquées au twin rotor mimo system (trms). Projet de fin d'études (ingénieur d'État), École Nationale Polytechnique, Département d'Automatique, Alger, Algérie, 2023. Soutenu publiquement le 4 juillet 2023.
- [18] Vincent Bregeault. *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes (ECN), 2010.
- [19] Vadim I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Communication and Control Engineering. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [20] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Control*. Pearson Education, 1st edition, 2015.