

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

## École Nationale Polytechnique

Département De Génie Mécanique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

### Mémoire de Projet de Fin d'Étude

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie mécanique.

---

# Torsion axisymétrique d'une plaque élastique épaisse affaiblie par une fissure circulaire

---

Présenté par :

Dounia-Dalila BENBAREK

Dirigé par :

Pr. Belkacem KEBLI

Présenté et soutenu publiquement le (06/07/2019)

#### Composition du Jury :

<b>Président :</b>	Y. BELKACEMI	MC-A	ENP
<b>Promoteur :</b>	B. KEBLI	Professeur	ENP
<b>Examineur :</b>	A. AMMICHE	MA-A	ENP
<b>Invité :</b>	Z. BAKA	Doctorant	ENP



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

## École Nationale Polytechnique

Département De Génie Mécanique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

Mémoire de Projet de Fin d'Étude

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Génie mécanique.

---

# Torsion axisymétrique d'une plaque élastique épaisse affaiblie par une fissure circulaire

---

Présenté par :

Dounia-Dalila BENBAREK

Dirigé par :

Pr. Belkacem KEBLI

Présenté et soutenu publiquement le (06/07/2019)

### Composition du Jury :

<b>Président :</b>	Y. BELKACEMI	MC-A	ENP
<b>Promoteur :</b>	B. KEBLI	Professeur	ENP
<b>Examineur :</b>	A. AMMICHE	MA-A	ENP
<b>Invité :</b>	Z. BAKA	Doctorant	ENP

# Dédicaces

## A MA TRÈS CHÈRE MÈRE

Autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes soit-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Tu as su m'inculquer le sens de la responsabilité, de l'optimisme et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie. Tes conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite. Ta patience sans fin, ta compréhension et ton encouragement sont pour moi le soutien indispensable que tu as toujours su m'apporter. Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir Inchallah. Que Dieu le tout puissant te préserve, t'accorde santé, bonheur, quiétude de l'esprit et te protège de tout mal.

## A Tous Les membre de ma famille

Mon petit frère Haroune, ma sœur et mon père : je tiens à vous remercier du fond du cœur pour votre soutien et votre encouragements sans failles. Vous n'avez pas cessé de me soutenir.

## A tous Mes amis

Je vous remercie pour l'aide et les conseils que vous m'avez donnés pour accomplir ce travail.

# Remerciements

Premièrement je remercie DIEU, pour m'avoir aidé à réussir dans mes études, particulièrement à la réalisation de ce mémoire de fin d'étude.

Je veux tout particulièrement exprimer mes remerciements à M. Belkacem KEBLI, de m'avoir proposé ce sujet et dirigé pendant la réalisation de ce travail.

J'adresse aussi mes remerciements à M. Zakaria BAKA pour sa disponibilité et pour son aide précieuse qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier Mr Y. BELKACEMI pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de soutenance. J'exprime aussi mes sincères remerciements à Mr A. AMMICHE pour avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail en lui accordant de l'intérêt.

Je veux aussi exprimer ma vive reconnaissance envers tous les enseignants de l'E.N.P, particulièrement ceux du département de Génie Mécanique

## ملخص

من خلال هذه المذكرة نتعامل مع مشكلة التواء المحوري لطبقة سميكة تحتوي على شق دائري مركزي حر من أي حمولة. تشوه هذه الطبقة السميكة ناتج عن طريق تدوير قرص مطبق على سطحها الخارجي.

من خلال هذا العمل نهتم بدراسة توزيع حالات التشريد والإجهاد بعد تطبيق عزم الدوران الالتواء الذي يقوم بتدوير القرص الصلب بزواوية  $\omega$ . يتم حل معادلة التوازن التفاضلي الجزئي للنموذج المرن من خلال طريقة تحويل هانكل. تسمح شروط الحدود المختلطة بتقليص المشكلة إلى نظامين مترابطين من المعادلات التكاملية المزدوجة.

بمساعدة صيغة تطوير جينبور، هذه المعادلات الأخيرة تختصر إلى أنظمة المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية. باستخدام التحويل العكسي لهانكل، نستنتج التعبيرات التحليلية للإزاحة والإجهاد وعامل شدة الإجهاد المعبر عنهما باستخدام معاملات أنظمة الجبر. تناقش هذه التعبيرات وتمثل وتوضح بيانياً.

**الكلمات المفتاحية:** التشوه المرن، التواء المحوري، شق دائري مركزي، تحويل هانكل، المعادلات التكاملية المزدوجة، عامل شدة الإجهاد.

## Abstract

In this memory we deal the problem of axisymmetric torsion of an elastic layer weakened with a circular crack of radius  $a$ . The torsion is due to a moment applied on the rigid circular disk clumped on the surface layer.

The corresponding partial differential equilibrium equations are solved by the Hankel transforms method. The mixed boundary conditions reduce the study problem to the solution of dual integral equations.

Using Gegenbauer's formulas, the latter equations are also reduced to infinite system of simultaneous algebraic equations.

The displacement, the stress and the stress intensity factor are given analytical by the inverse integral transform. These physical quantities are discussed, represented and illustrated graphically .

**Key words :** Elastic deformation, Axisymmetric torsion, penny-shaped crack, Hankel integrals transforms, Duals integrals equations, stress intensity factor.

## Résumé

Nous traitons à travers ce mémoire le problème de torsion axisymétrique d'une plaque épaisse par un disque rigide de rayon  $b$  appliqué sur sa surface externe. Le milieu est affaibli par une fissure circulaire de rayon  $a$  supposée libre de charge. A travers ce travail nous nous intéressons à étudier la répartition des déplacements et les contraintes après avoir appliqué un moment de torsion qui fait tourner le disque rigide d'un angle  $\omega$ . L'équation d'équilibre en contraintes aux dérivées partielles du modèle élastique est résolue par la méthode de la

transformation intégrale de Hankel. Les conditions aux limites mixtes permettent de ramener le problème étudié à deux systèmes couplés d'équations intégrales duales. Moyennant la formule de développement de Gegenbauer, ces dernières équations se réduisent à des systèmes d'équations algébriques linéaires infinies.

A l'aide de la transformée inverse de Hankel, on déduit les expressions analytiques des déplacements, des contraintes et du facteur d'intensité de contraintes exprimées à l'aide des coefficients des systèmes algébriques sous forme de série de Bessel. Ces expressions sont analysées, représentées et illustrées graphiquement.

**Mot clés** : Déformation élastique, Torsion axisymétrique, fissure circulaire, transformation de Hankel, équations intégrales duales, facteur d'intensité de contraintes.

# Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Liste des symboles

<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
<b>1 Recherche bibliographique</b>	<b>15</b>
<b>2 Notions d'élasticité</b>	<b>24</b>
1 Définitions . . . . .	25
1.1 Élasticité linéaire . . . . .	25
1.2 Problème axisymétrique . . . . .	26
2 Quelques hypothèses fondamentales . . . . .	26
2.1 Hypothèse de continuité . . . . .	26
2.2 Hypothèse d'isotropie . . . . .	26
2.3 Hypothèse de proportionnalité . . . . .	26
2.4 Hypothèse des petites déformations . . . . .	27
3 Les constantes élastiques . . . . .	27
3.1 Module de Young . . . . .	27
3.2 Le coefficient de Poisson . . . . .	27
3.3 Le module de Coulomb . . . . .	27
4 Les équations de l'élasticité . . . . .	29
4.1 Loi de comportement : la loi de Hooke . . . . .	29
4.2 Équations supplémentaires en élasticité . . . . .	30
4.3 Élasticité tridimensionnelle en coordonnées cylindriques . . . . .	30
4.4 Équation d'équilibre en coordonnées cylindriques . . . . .	31
5 Notion de la mécanique de la rupture . . . . .	33
5.1 Modélisation de la fissure . . . . .	33
5.2 Modes élémentaires de fissuration . . . . .	34
5.3 Le facteur d'intensité de contrainte $K$ . . . . .	35



<b>3</b>	<b>Outils mathématiques</b>	<b>36</b>
1	Fonctions de Bessel . . . . .	37
1.1	Fonction de Bessel de première espèce . . . . .	37
1.2	Fonction de Bessel de seconde espèce . . . . .	38
1.3	Développement asymptotique des fonctions de Bessel . . . . .	39
2	Polynômes de Chebyshev . . . . .	40
2.1	Polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce . . . . .	40
2.2	Formules de récurrence des Polynômes de Chebyshev . . . . .	40
2.3	Valeurs particulières des Polynômes de Chebyshev . . . . .	40
3	Fonction de Heaviside . . . . .	41
4	Transformée intégrale de Hankel . . . . .	41
4.1	Propriétés de la transformée de Hankel . . . . .	42
5	Équations intégrales . . . . .	42
5.1	Équations de Volterra . . . . .	42
5.2	Équations de Fredholm . . . . .	43
6	Méthodes d'intégration numérique . . . . .	44
6.1	Méthode des trapèzes . . . . .	44
6.2	Méthode de Simpson . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Torsion axisymétrique d'une plaque fissurée</b>	<b>46</b>
1	Formulation du problème . . . . .	47
2	Équations intégrales duales . . . . .	49
3	Réduction a un système algébrique . . . . .	51
4	Résultats numériques . . . . .	55
5	Les grandeurs physiques . . . . .	58
5.1	Les expressions analytiques des déplacements et des contraintes . . . . .	58
5.2	Expression du facteur d'intensité de contraintes . . . . .	70
5.3	Expression du moment de torsion . . . . .	72
6	Validation des résultats . . . . .	76
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>80</b>
	<b>Annexe A</b>	<b>85</b>
	<b>Annexe B</b>	<b>88</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>91</b>

# Liste des tableaux

2.1	Les relations entre les modules d'élasticité. . . . .	28
2.2	Valeurs de quelques constantes élastiques. . . . .	28
3.1	Quelques cas spéciaux des Polynômes de Chebyshev . . . . .	41
4.1	Valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour $H_1 = 1$ et $H_2 = 1$ . . . . .	57
4.2	Valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour $a/b = 1$ . . . . .	58
4.3	Valeurs de facteur d'intensité de contrainte $K_{III}$ pour $H_1 = 0.5$ . . . . .	71
4.4	Valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour $c \rightarrow 0$ , $H_1 = 0$ et $H_2 = 2$ . . . . .	76
4.5	Valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour $c = 0.5$ , $H_1 \rightarrow 0$ et $H_2 = 2$ . . . . .	77
4.6	Valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour $c = 0.5$ , $H_1 \rightarrow \infty$ et $H_2 = 2$ . . . . .	78
4.7	Valeurs de $a_n$ et $b_n$ pour $c = 0$ , $H_1 = 1$ et $H_2 \rightarrow \infty$ . . . . .	80

# Table des figures

1.1	Problème de Florence 1961 . . . . .	16
1.2	variation du moment de torsion en fonction de $\beta = h/a$ . . . . .	17
1.3	Problème de R.D.Low 1972 . . . . .	17
1.4	variation du moment de torsion en fonction de $b/a$ pour différents valeur de $h/a$ . . . . .	18
1.5	variation facteur d'intensité de contrainte en fonction de $\beta = b/a$ . . . . .	18
1.6	Problème de Sih et Chen 1972 . . . . .	19
1.7	Problème de Dhawan 1974 . . . . .	20
1.8	Le facteur de singularité de contrainte pour le problème de Dhawan . . . . .	20
1.9	Toshiaki 1989 . . . . .	21
1.10	Variation de $T^*$ pour cas de Tamate . . . . .	21
1.11	Problème de Pak 1991 . . . . .	22
1.12	Problème d'Erguven 1991 . . . . .	22
1.13	Problème de Bacci 1996 . . . . .	23
2.1	Diagramme contrainte-déformation . . . . .	29
2.2	Coordonnées cylindriques . . . . .	32
2.3	Les différentes types de fissures . . . . .	33
2.4	Mode de fissuration . . . . .	34
3.1	Graphe de la fonction de Bessel de première espèce . . . . .	38
3.2	Graphe de la fonction de Bessel de deuxième espèce . . . . .	39
3.3	La fonction de Heaviside . . . . .	41
3.4	Méthode des trapèzes . . . . .	45
3.5	Méthode de Simpson . . . . .	45
4.1	La géométrie du problème . . . . .	47
4.2	Variation de $u_\theta^{*(1)}$ en fonction de $\rho$ pour une variation de $\zeta$ . . . . .	62
4.3	Variation de $u_\theta^{*(2)}$ en fonction de $\rho$ pour une variation de $\zeta$ . . . . .	62
4.4	La contrainte $\tau_{\theta z}^{*(1)}$ en fonction de $\rho$ pour une variation de $\zeta$ . . . . .	63
4.5	La contrainte $\tau_{\theta z}^{*(2)}$ en fonction de $\rho$ pour une variation de $\zeta$ . . . . .	63
4.6	Les déplacements $u_\theta^{*(1)}$ et $u_\theta^{*(2)}$ pour $H_1 = 1$ et $H_2 = 1$ . . . . .	64
4.7	Les déplacements $u_\theta^{*(1)}$ et $u_\theta^{*(2)}$ pour $H_1 = 0.8$ et $H_2 = 0.8$ . . . . .	64
4.8	Les contraintes $\tau_\theta^{*(1)}$ et $\tau_{\theta z}^{*(2)}$ pour $H_1 = 1$ et $H_2 = 1$ . . . . .	65

4.9	Les contraintes $\tau_{\theta z}^{*(1)}$ et $\tau_{\theta z}^{*(2)}$ pour $H_1 = 0.8$ et $H_2 = 0.8$ . . . . .	65
4.10	Variation de $u_{\theta}^{*(2)}(\rho, H_2)$ pour $c = 0.5$ , $H_1 = 1$ avec la variation de $H_2$ . . . . .	66
4.11	Variation de $u_{\theta}^{*(2)}(\rho, H_2)$ pour $H_2 = 1$ , $H_1 = 1$ avec la variation de $c$ . . . . .	66
4.12	Variation de $\tau_{\theta z}^{*(2)}(\rho, H_2)$ pour $c = 0.5$ , $H_1 = 2.5$ avec la variation de $H_2$ . . . . .	67
4.13	Variation de $\tau_{\theta z}^{*(2)}(\rho, H_2)$ pour $H_2 = 1$ , $H_1 = 1$ avec la variation de $c$ . . . . .	67
4.14	Variation de $u_{\theta}^{*(1)}(r, 0)$ et $u_{\theta}^{*(2)}(r, 0)$ pour $H_1 = 1$ et $H_2 = 1$ pour différentes valeurs de $c$ . . . . .	68
4.15	Variation de $u_{\theta}^{*(1)}(r, 0)$ et $u_{\theta}^{*(2)}(r, 0)$ pour $H_1 = 1$ et $c = 0.5$ pour différentes valeurs de $H_2$ . . . . .	68
4.16	Variation de $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, 0)$ pour $c = 0.5$ et $H_2 = 2$ avec la variation de $H_1$ . . . . .	69
4.17	Variation de $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, 0)$ pour $H_1 = 1$ et $H_2 = 2$ avec la variation de $c$ . . . . .	69
4.18	Variation de $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, h_1)$ en fonction de $\rho$ pour $H_2 = 1$ . . . . .	70
4.19	Variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de $c$ . . . . .	71
4.20	Variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de $H_2$ . . . . .	72
4.21	Variation de $T^*$ en fonction de $c$ pour une variation de $H_2$ . . . . .	73
4.22	Variation de $T^*$ en fonction de $H_2$ pour une variation de $c$ . . . . .	73
4.23	Contour pour la variable du déplacement $u_{\theta}^{(1)}$ . . . . .	74
4.24	Contour pour la variable du déplacement $u_{\theta}^{(2)}$ . . . . .	74
4.25	Contour pour la contrainte tangentielle dans la région (1) . . . . .	75
4.26	Contour pour la contrainte tangentielle dans la région (2) . . . . .	75
4.27	Variation de $T^*$ en fonction de $H_2$ pour $c \rightarrow 0$ et $H_1 \rightarrow 0$ . . . . .	76
4.28	Variation de $T^*$ pour le cas où la fissure est dans le plan de l'encastrement . . . . .	77
4.29	Le facteur d'intensité de contrainte pour $H_1$ très grand . . . . .	78
4.30	Le moment de torsion appliqué pour $H_1$ très grand . . . . .	79

# Liste des symboles

Symbole	Signification	Unité
$(r, \theta, z)$	coordonnées cylindriques	(mm, rad, mm)
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	Contraintes normales	Pa
$\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$	Contraintes tangentielles	Pa
$\epsilon_r, \gamma_{r\theta}$	Taux de déformations	-
$u_r, u_\theta, u_z$	Les déplacements	mm
$E$	Module de Young	Pa
$\nu$	Coefficient de Poisson	-
$G$	Module de cisaillement	Pa
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Facteurs d'intensités de contraintes	$MPa.m^{1/2}$
$J_\nu(x)$	Fonction de Bessel de 1 <sup>ère</sup> espèce	-
$Y_\nu(x)$	Fonction de Bessel de 2 <sup>ème</sup> espèce	-
$\delta_{nm}$	Symbole de Kronecker	-
$H(x)$	La fonction de Heviside	-
$H_\nu$	La transformée de Hankel	-

# Introduction générale

Durant ces dernières années, l'industrialisation a vu un développement rapide où la conception mécanique a pris sa part de ce développement. Des ruptures imprévues des armes, des bâtiments, des ponts, des navires, des trains, des avions et diverses machines ont eu lieu partout dans le monde industriel. Certaines de ces ruptures ont été dues à une mauvaise conception. Cependant, il a été découvert que de nombreuses ruptures ont été causées par des défauts préexistants dans les matériaux qui initient les fissures et qui se développent et conduisent à la rupture.

La mécanique linéaire de la rupture peut être utilisée pour résoudre de nombreux problèmes pratiques de construction mécanique, tels que la ruine (l'effondrement) de la structure, la sélection des matériaux, la prévision de la durée de vie des structures et la définition des critères d'acceptation de défauts. Elle est basée sur une procédure analytique qui relie le champ de contraintes au voisinage de la fissure à la contrainte nominale appliquée au loin, à la taille de la fissure et son orientation et, finalement aux caractéristiques mécaniques du matériau.

Les problèmes de torsion des milieux élastiques apparaissent dans différents domaines d'ingénierie. Et dans ce cas-la plusieurs travaux ont été fait. Généralement, les déformations de ces milieux sont dues a la torsion d'un disque rigide (Florence [1] et Erguven [6]) ou bien a des contraintes de torsion pour le cas de domaines élastiques fissurés (Sih et Chen [3]).

Sneddon [24] a été le premier a avoir discuté le problème de détermination du champ de contrainte autour d'une fissure dans un milieu élastique infini. Une grande partie des études postérieures des problèmes concernés par les fissures circulaires ont été basées sur son travail.

Une recherche sur l'état de contrainte dans une plaque épaisse contenant une fissure circulaire a été menée par Lowengrub [25] en se basant sur l'étude de Sneddon. La fissure a été prise au centre du plan de la plaque et dont ses surfaces sont parallèles à celles de la plaque.

Des descriptions détaillées sur l'analyse des contraintes de ce type de problème et des évaluations du facteur d'intensité de contrainte associé au chargement appliqué ont été donné par Sakamoto et Kobayashi [23], [26], [27].

Dans le présent travail, on expose un développement d'une solution analytique d'un problème axisymétrique d'une plaque élastique épaisse ayant une fissure interne supposé libre de charge, la plaque est encastrée sur une base rigide indéformable, elle subit une torsion a l'aide de la rotation d'un disque rigide appliqué sur sa surface supérieur.

La solution du problème élastique a été déterminé à l'aide de la méthode de transformation de Hankel. Les conditions aux limites mixtes du problème se réduisent a un système

d'équation intégrale dual, La procédure de la solution est analogue au cas élastostatique traité par Toshiaki [22] et Sakamoto [23]. La solution a été calculée à partir des coefficients obtenu dans un système d'équations algébriques infini au moyen de la formule de développement de Gegenbauer de la fonction de Bessel.

Des résultats numériques sont présentés sous formes des tableaux et des figures pour examiner les effets du disque, de la fissure et des épaisseurs de la plaque sur la distribution des déplacements, et des contraintes ainsi que le facteur d'intensité de contrainte.

Le plan de ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres suivis d'une conclusion sur les résultats obtenus et d'une référence bibliographique des travaux utilisés.

Dans le premier chapitre nous avons parlé sur quelques travaux déjà publiés et ces derniers ont une certaine similarité avec notre étude.

Le deuxième chapitre présente des éléments sur la théorie d'élasticité linéaire. Le système d'équilibre élastique a été établi dans le cas de la déformation axisymétrique. La loi de Hooke et les différents modules d'élasticité ont été aussi définis.

Dans le troisième chapitre nous avons exposé un ensemble de rappels mathématiques utilisés dans notre étude. Un aperçu concernant les équations intégrales a été donné, les fonctions de Bessel et les polynômes de chebyshev ainsi que leurs propriétés ont été présentées sous forme de paragraphes. Et ce ci nous permet d'introduire la notion de la transformation intégrale de Hankel.

Le dernier chapitre, représente le noyau de notre mémoire, dont la résolution du problème étudié a été présenté.

Finalement, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale qui illustre les principaux résultats obtenus à travers cette étude et une perspective sur les méthodes de résolution développées dans le sujet proposé.

Une annexe est jointe à ce mémoire pour décrire les calculs analytiques et les différents programmes numériques qu'on a appliqué pendant l'étude de ce problème.



# Chapitre 1

## Recherche bibliographique

Pour être plus explicite sur le problème étudié, nous préférons vous donner une petite description de quelques travaux déjà publiés et qui ont une certaine similarité avec notre étude :

## Florence 1961

Florence a traité le problème d'une couche élastique infinie d'épaisseur  $h$  ou un moment de torsion est appliqué sur le plan  $z = 0$  à l'aide d'un disque circulaire rigide de rayon  $a$ , la couche est encastrée sur une base rigide dans le plan  $z = h$ . [1]

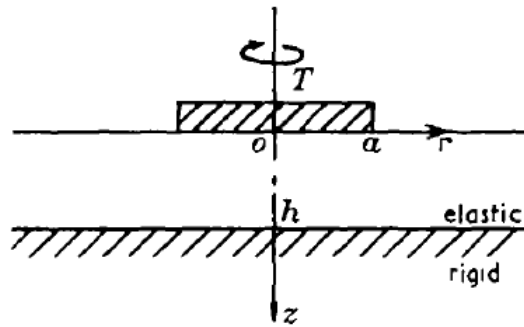


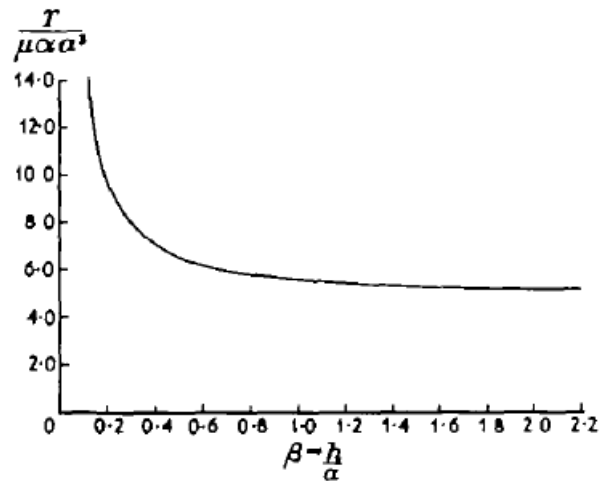
FIGURE 1.1 – Problème de Florence 1961

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\begin{cases} u_{\theta}(r, 0) = \alpha r & (0 \leq r \leq a) \\ \tau_{z\theta}(r, 0) = 0 & (a < r) \\ u_{\theta}(r, h) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

ou  $a$  est le rayon du disque,  $h$  l'épaisseur de la couche élastique, et  $\alpha$  est la petite rotation du disque.

Le moment de torsion nécessaire pour maintenir la rotation  $\alpha$  est représenté sur la figure suivante :


 FIGURE 1.2 – variation du moment de torsion en fonction de  $\beta = h/a$ 

## R.D.Low 1972

Low a travaillé sur deux problèmes où il a considéré un demi-espace élastique occupant la région  $z > -h$  dont la limite  $z = -h$  est libre sauf la partie circulaire  $0 < r < a$  à laquelle est collée un arbre circulaire rigide de rayon  $a$ , dans les deux problèmes il a considéré un moment  $M$  appliqué à l'arbre en le faisant tourner d'un angle  $\epsilon_0$ . Dans le premier problème il a supposé qu'une inclusion de disque circulaire rigide occupe le plan  $z = 0$  dans la portion  $0 < r < b$ , tandis que dans le deuxième problème il a supposé l'apparition d'une fissure circulaire de rayon  $b$  dans le plan  $z = 0$  dont ces lèvres sont supposées libres. [2]

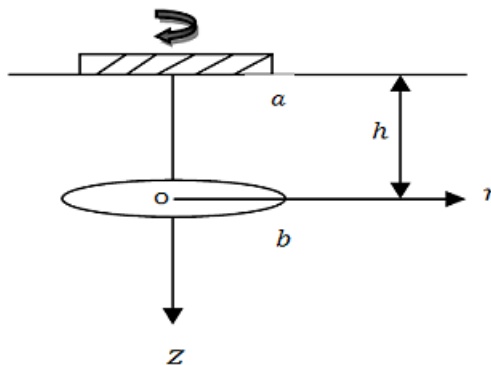


FIGURE 1.3 – Problème de R.D.Low 1972

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\begin{cases} u_{\theta}(r, -h) = \epsilon_0 r & (0 \leq r \leq a) \\ \sigma_{z\theta}(r, -h) = 0 & (a < r < \infty) \\ u, \nabla u \rightarrow 0 \text{ lorsque } (r, z) \rightarrow 0 \text{ si } z > -h. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pour la résolution LOW a réduit le problème à un système d'équations intégrales de Fredholm et ceci pour chaque cas.

Il a représenté les calculs pour plusieurs valeurs de  $b/a$ ,  $h/a$ , et du rapport  $M/M_0$ , où  $M_0$  est le moment requis pour produire la rotation  $\epsilon_0$  lorsque le demi-espace ne contient aucun défaut. Les résultats obtenus sont affichés sur les Figures suivantes, qui montrent respectivement la variation du moment de torsion appliqué  $M/M_0$  et la variation du facteur d'intensité de contrainte.

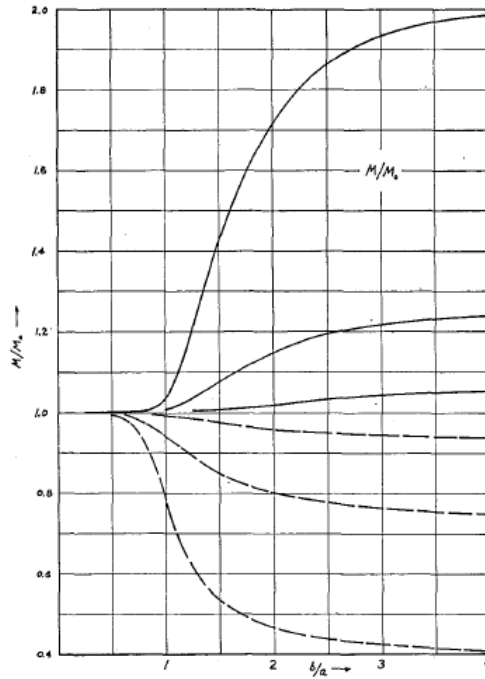


FIGURE 1.4 – variation du moment de torsion en fonction de  $b/a$  pour différents valeur de  $h/a$

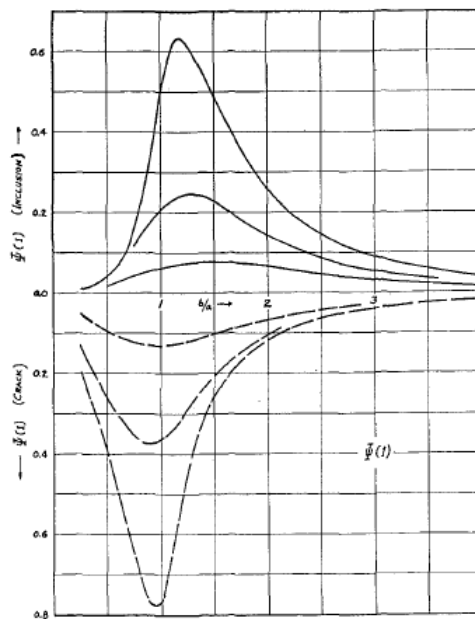


FIGURE 1.5 – variation facteur d'intensité de contrainte en fonction de  $\beta = b/a$

## Sih et Chen 1972

Sih et Chen ont étudié un milieu de quatre couches de différents matériaux ayant une fissure circulaire à l'interface des deux couches intérieures. La solution du problème est donnée telle que les surfaces supérieures et inférieures de la fissure soient soumises à des moments de torsion égaux et opposés. La géométrie du matériau composite considéré est indiquée dans la figure 1.1. Les deux couches internes de même hauteur  $h$  ont des modules de cisaillement  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , tandis que les modules de cisaillement des deux couches extérieures de hauteur infinie sont  $\mu_3$  et  $\mu_4$ , la fissure est de rayon  $a$  occupe le plan  $z = 0$  qui est l'interface la plus interne. [3]

Les résultats numériques ont été obtenus et discutés aussi pour les deux problèmes des géométries différentes. Quelques graphes de facteur d'intensité de contrainte en fonction du rapport d'épaisseur de la couche et du rayon de la fissure ont été exposés en fonction du rapport de rigidité entre différentes couches.

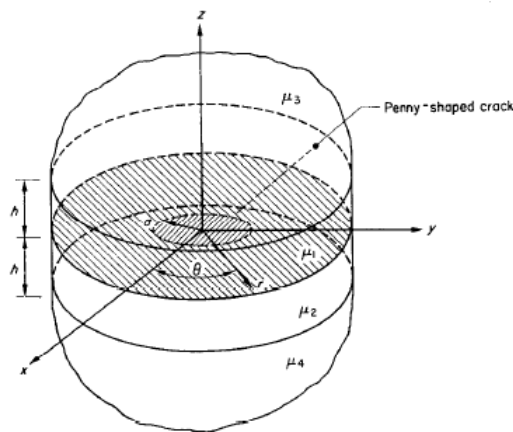


FIGURE 1.6 – Problème de Sih et Chen 1972

## Dhawan 1974

Il a considéré un demi-espace élastique occupant la région  $z \geq -h$ , dont la limite  $z = -h$  n'est pas chargée, à l'exception de la partie circulaire  $0 \leq r < b$  dans laquelle un arbre circulaire rigide de rayon  $b$  est fixé. En plus d'une fissure qui se présente dans la région  $0 \leq r \leq a$ ,  $z = 0$  dont les lèvres sont supposées non chargées. [4] Un moment de torsion de grandeur  $M$  est appliqué à l'arbre tournant d'un angle  $\alpha$ .

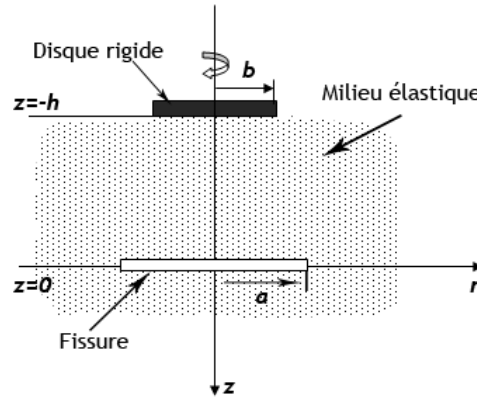


FIGURE 1.7 – Problème de Dhawan 1974

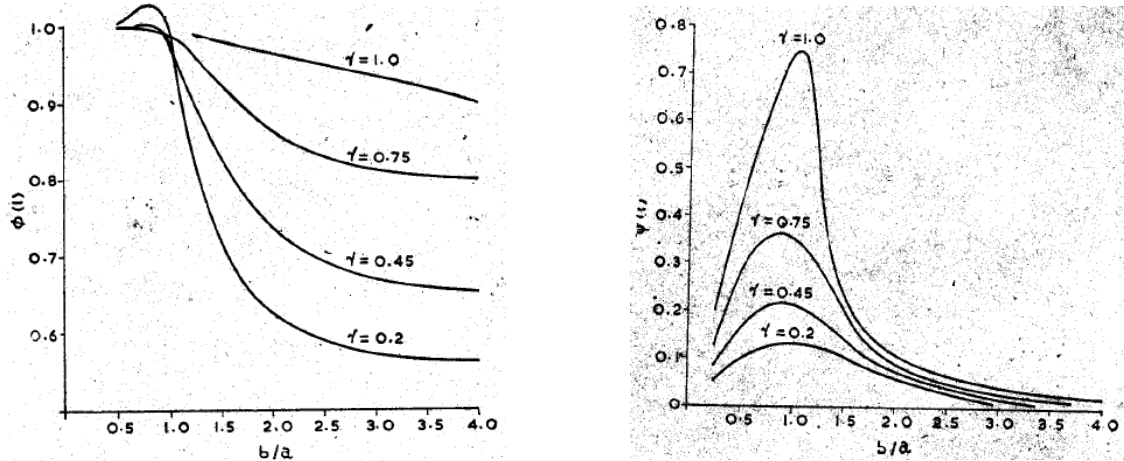
Les conditions limites du problème sont :

$$\begin{cases} u_{\theta}(r, -h) = \alpha r & (0 \leq r \leq b) \\ \gamma_{z\theta}(r, -h) = 0 & (b < r < \infty) \\ \gamma_{z\theta}(r, 0^-) = \gamma_{z\theta}(r, 0^+) = 0 & 0 \leq r < a \end{cases} \quad (1.3)$$

Les conditions de continuité au plan de la fissure :

$$\begin{cases} u_{\theta}(r, 0^-) = u_{\theta}(r, 0^+) & (a \leq r < \infty) \\ \gamma_{z\theta}(r, 0^-) = \gamma_{z\theta}(r, 0^+) & (a \leq r < \infty) \end{cases} \quad (1.4)$$

Les résultats obtenus pour le facteur de singularité de contrainte pour l'arbre et la fissure sont donnés respectivement par les figures suivantes :



(a) Le facteur de singularité de contrainte

(b) Le facteur de singularité de contrainte

FIGURE 1.8 – Le facteur de singularité de contrainte pour le problème de Dhawan

## Toshiaki H. 1989

A travers ce travail Toshiaki a présenté la solution d'un problème aux limites mixtes de [22]. La résolution du problème a été réduit à un systèmes d'équations infinies dans

lesquelles le déplacement sur la face inférieure de la couche et la contrainte de contact sous le poinçon sont exprimés en séries appropriées. Des résultats numériques ont été présentés montrant l'effet du trou et l'épaisseur de la couche élastique sur la déformation en torsion. Les perturbations dues à la présence du trou sont également présentées dans des courbes calculées numériquement et des comparaisons ont été faites avec des résultats en absence du trou [28].

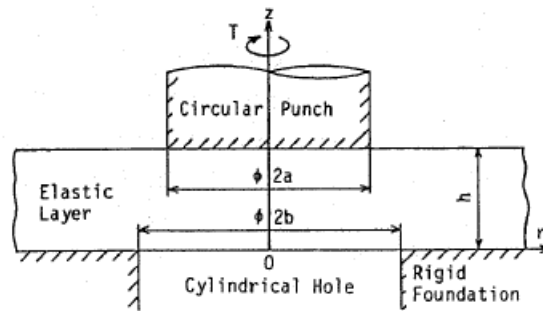
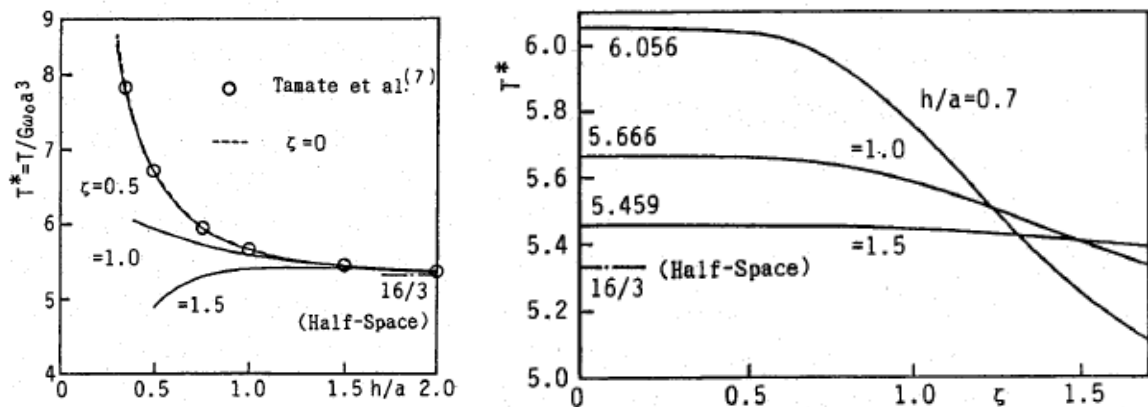


FIGURE 1.9 – Toshiaki 1989

Les deux figures données ci-dessous représentent la variation du moment de torsion nécessaire pour faire tourner le poinçon rigide en fonction d'épaisseur de la couche élastique et le rayon du trou respectivement.



(a) Variation de  $T^*$  en fonction de  $h/a$

(b) Variation de  $T^*$  en fonction de  $\xi$

FIGURE 1.10 – Variation de  $T^*$  pour cas de Tamate

## Pak 1991

Le travail de Pak consiste à étudier le problème de torsion axisymétrique d'un disque rigide de rayon  $a$  qui est noyé à une profondeur  $s > 0$  dans un demi-espace homogène, isotrope et linéairement élastique. Le disque est supposé être soumis à une rotation autour de l'axe  $z$  d'un angle  $\theta$ . L'approche consiste à transformer le problème aux conditions limites

mixtes en un système d'équations intégrales duales à l'aide de la transformation intégrale de Hankel. La solution correspondante est obtenue à partir de la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. [5]

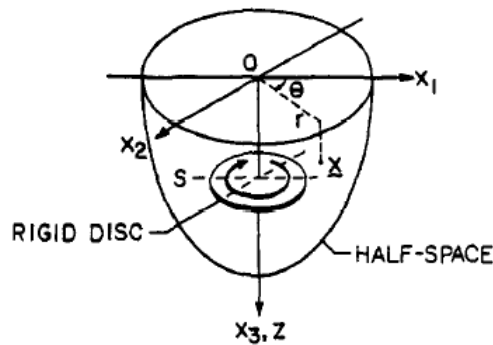


FIGURE 1.11 – Problème de Pak 1991

## Erguven 1991

Erguven a traité le problème de torsion axisymétrique d'une couche élastique isotrope d'épaisseur finie  $d_1$  d'un module de cisaillement  $\mu_1$  parfaitement liée à une autre couche élastique d'épaisseur  $d_2$  d'un module de cisaillement  $\mu_2$  à l'aide d'un disque rigide de rayon  $a$  qui tourne autour de l'axe  $z$  et qui est appliqué sur sa surface supérieure. [6]

Le problème est réduit à la solution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. L'équation intégrale a été remplacée par un système d'équations algébriques infini tronqué, et sa solution est obtenue par le calcul numérique en employant une méthode itérative. L'auteur donne les différentes approches du problème étudié dans lequel la solution est donnée approximativement par Reissner-Sagoci [8]. Ensuite, il expose plusieurs graphes du moment de torsion.

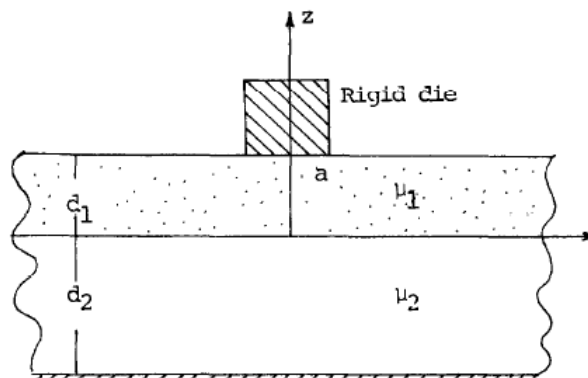


FIGURE 1.12 – Problème d'Erguven 1991



## Bacci 1996

Bacci s'est intéressé au phénomène de deux disques rigides coaxiaux de rayon  $a$  adhésifs dans une couche isotrope et linéairement élastique non bornée. La distance entre les deux disques est  $H_0$ . Une rotation  $T_0$  est appliquée sur les deux disques autour de leur axe. [7]

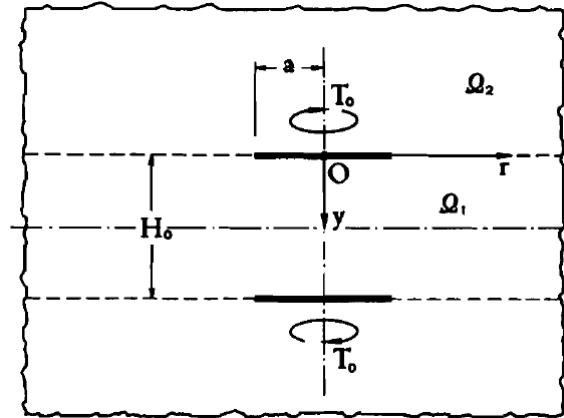


FIGURE 1.13 – Problème de Bacci 1996

# Chapitre 2

## Notions d'élasticité

## Introduction

Les physiciens ont depuis des siècles tenté de mettre en équation le comportement de la matière. Plus ou moins générales, précises ou robustes, ces modélisations s'appuient sur la représentation du phénomène de déformation à l'aide de champs vectoriels et de tenseurs. Ceux-ci décrivent en particulier la déformation de l'objet ainsi que les contraintes internes qu'il subit. Des lois de comportement viennent ensuite lier les contraintes et la déformation qui en résulte.

D'après toutes les caractéristiques que contiennent les matériaux, les plus grandes découvertes qui ont contribué beaucoup plus au développement de la théorie de l'élasticité sont :

- La redécouverte de la loi de Hooke en 1660.
- La formulation des équations générales supplémentaires en élasticité par Navier en 1821 qui permettaient de réduire tous les problèmes des petites déformations des corps élastiques en un calcul mathématique.
- En 1863, Airy a utilisé une autre méthode pour déterminer la distribution de contraintes dans un corps bidimensionnel. Il a constaté que les équations d'équilibres dans le cas de l'élasticité plane peuvent être combinées pour aboutir à une seule équation différentielle dont la variable est une fonction appelée fonction de contrainte ou fonction d'Airy. La détermination de cette fonction lui permet de déterminer les composantes de contraintes en tout point du corps.

Actuellement, les solutions de la majorité des problèmes rencontrés sont connus et les méthodes numériques découvertes récemment avec le développement de l'outil informatique viennent de confirmer ces solutions.

Ce chapitre présente succinctement cette modélisation physique et les équations principales que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

## 1 Définitions

### 1.1 Élasticité linéaire

L'élasticité linéaire est une discipline étudiant la déformation des solides élastiques par des méthodes analytiques (mathématiques). Les notions fondamentales de cette étude sont les contraintes et les déplacements. C'est l'étude du comportement des solides déformables, élastiques, isotropes, en petite déformations, avec une loi de comportement linéaire. On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le moment d'hypothèse de petit déplacements et petite déformations est appelé : Hypothèse de petites perturbations. Ces hypothèses ont pour conséquence de rendre linéaire les équations différentielles de l'élasticité.

## 1.2 Problème axisymétrique

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution de cet axe. Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphériques autour d'un axe d'asymétrie, les dérivées des composantes sur la base naturelle par rapport à  $\theta$  sont nulles. Nous sommes donc ramener à un problème à deux variables  $(\theta, z)$ . Il convient de bien noter que le problème à deux variables, n'est pas un problème d'élasticité plane, car ni le tenseur des contraintes ni le tenseur des déformations ne sont des plans en générale.

## 2 Quelques hypothèses fondamentales

La théorie de l'élasticité linéaire repose sur les hypothèses suivantes [12] :

### 2.1 Hypothèse de continuité

Les solides sont constitués d'atomes dans lesquels la masse est répartie de façon uniforme. En effet, elle est presque entièrement concentrée dans les noyaux qui ne représentent qu'une proportion infime du volume total. De plus, les noyaux eux mêmes sont de nature complexe. La théorie de l'élasticité et la mécanique des structures se basent et se baseront probablement toujours sur l'hypothèse d'un milieu continu, rempli uniformément de matière en tous ses points, et ceci pour tenir compte de la constitution réelle de la matière qui conduira a des lois totalement inutilisables a l'échelle macroscopique, a cette échelle, les résultats obtenus a partir de l'hypothèse de continuité sont plus précis que les plus fines mesures réalisables actuellement, sous réserve évidemment que la solution mathématique du problème soit possible.

### 2.2 Hypothèse d'isotropie

Nous admettrons d'autre part que la matière est isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions autour d'un point. Mis a part certains produits laminés, les métaux satisferaient assez cette condition. Par contre, pour les matériaux composites stratifiés, l'hypothèse d'isotropie s'écarte trop de la réalité.

### 2.3 Hypothèse de proportionnalité

La mécanique des structures est basée sur la loi énoncée par Hooke découverte en 1660 qui ne fut publiée qu'en 1978. Elle traduit la proportionnalité qui existe entre les contraintes et les déformations. C'est la base de toute la théorie de l'élasticité, et dont nous pouvons donner l'expression générale suivante : "Dans un solide continu, les déformations sont liées en tous points aux contraintes par des relations linéaires et homogènes".

## 2.4 Hypothèse des petites déformations

l'expérience montre que dans les limites normales d'utilisation, les matériaux subissent des déformations relativement faibles par rapport aux dimensions du solide. En conséquence, les conditions d'équilibre établies par la statique pour les corps parfaits indéformables sont applicables. Cela revient à dire que les déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures. Les matériaux isotropes sont caractérisés par deux modules élastiques indépendants.

## 3 Les constantes élastiques

### 3.1 Module de Young

Le physicien britannique Thomas Young (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant, tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte. La loi d'élasticité est la loi de Hooke qui est donnée par la relation suivante :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

En effet, ce coefficient caractérise la raideur de la matière. A contrainte égale, un matériau ayant un module d'élasticité élevé subira une déformation plus faible qu'un matériau ayant un module d'élasticité petit. Le module de Young  $E$  a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa [13].

### 3.2 Le coefficient de Poisson

Poisson complète l'analyse en constatant que l'allongement dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires. Il définit positif le coefficient de proportionnalité [14].

$$\nu = - \frac{\text{l'allongement relatif transversale}}{\text{l'allongement relatif longitudinal}} \quad (2.2)$$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est un nombre sans dimension compris dans l'intervalle  $[0; 0.5]$ . A l'exception des élastomères comme le caoutchouc dont le coefficient de Poisson  $\nu=0.5$  la plupart des matériaux isotropes continus ont un coefficient de Poisson compris dans l'intervalle  $[0.25; 0.35]$ .

### 3.3 Le module de Coulomb

Coulomb procède à des essais de torsion (cisaillement pur) et constate que le glissement est proportionnel au cisaillement appliqué, il définit le coefficient de proportionnalité  $G$

comme étant le rapport :

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (2.3)$$

Avec  $\gamma$  représente le glissement et  $\tau$  le cisaillement appliqué.

Le module de Coulomb  $G$  a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian. Pour un matériau isotrope on peut définir le module de cisaillement  $\mu$  en fonction de  $E$  et  $\nu$  par la relation suivante :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.4)$$

## Relations entre les modules

TABLE 2.1 – Les relations entre les modules d'élasticité.

Module	Symbole	Équivalence
Coefficient de Lamé ou module de Coulomb	$\mu, G$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$
Deuxième coefficient de Lamé	$\lambda$	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$
Coefficient de Poisson	$\nu$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$
Module de Young	$E$	$2G(1 + \nu)$

## Valeurs de quelques constantes élastiques

TABLE 2.2 – Valeurs de quelques constantes élastiques.

Matériau	$E(GPa)$	$G(GPa)$	$\nu$
Acier	207	80.2	0.30
Cuivre	89.6	33.4	0.34
Aluminium	68.9	25.7	0.34
Béton	27.6	11.5	0.20
Fer	211	82	0.24

## 4 Les équations de l'élasticité

Pour résoudre un problème d'élasticité, il faut trouver un champ de déplacement  $u_i$  et un champ de contrainte  $\sigma_i$  vérifiant les équations du mouvement ou d'équilibre.

### 4.1 Loi de comportement : la loi de Hooke

La relation entre les composantes du tenseur de déformations et les composantes du tenseur des contraintes a été établie expérimentalement et elle est connue par la loi de *Hooke*. Considérant l'exemple d'un élément de volume cubique soumis à l'action de contrainte normale uniformément répartie sur ses côtés. Les expériences ont montré que dans le cas d'un matériau isotrope ces contraintes normales ne produisent aucune distorsion d'angle de l'élément et elles sont données par l'équation [15] :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.5)$$

ou  $\sigma$  : est la contrainte ( $N/m^2$ )

$E$  : le module de Young ( $N/m^2$ )

$\varepsilon$  : est l'allongement relatif (adimensionnel).

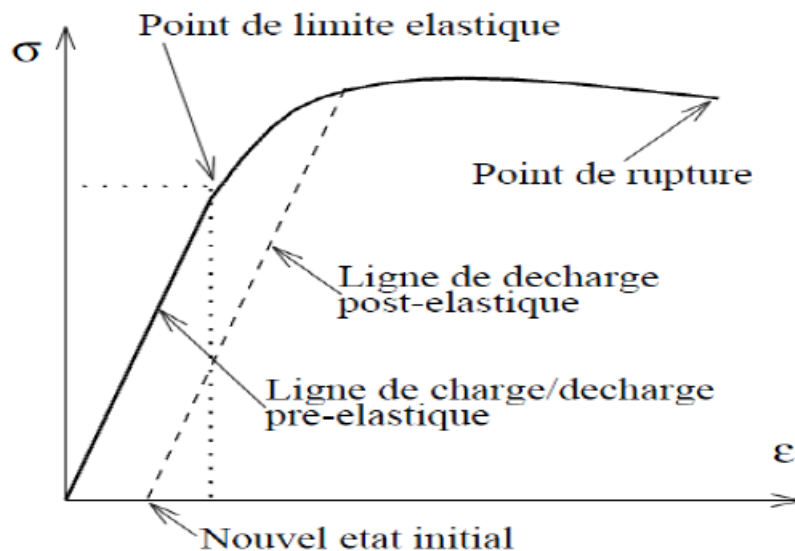


FIGURE 2.1 – Diagramme contrainte-déformation

La loi de comportement qui relie le tenseur de déformations et le tenseur des contraintes est donnée par les relations suivantes :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.7)$$

On peut facilement constater avec ces relations que les bases principales de l'état de déformation et de l'état de contrainte sont confondues.

## 4.2 Équations supplémentaires en élasticité

Dans le cas général, nous aurons, grâce à la loi de comportement, suffisamment d'équation pour pouvoir traiter un problème d'élasticité. Toutefois, nous serons face à un système d'équations différentielles relativement délicat à résoudre. Il peut être utile d'employer des équations complémentaires qui traduisent, sous une autre forme, les lois de la physique : les équations de Navier et les équations de Beltrami [16].

### Équations de Navier

Ces dernières ne sont en fait que la traduction des équations d'équilibre en termes de déplacement. Pour cela on utilise à la fois la loi de comportement et les relations déformations – déplacements.

$$\mu\Delta(\vec{u}) + (\mu + \lambda)\overrightarrow{grad}(div(\vec{u})) + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.8)$$

$$(\lambda + 2\mu)\overrightarrow{grad}(div(\vec{u})) - \mu\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{u})) + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.9)$$

### Équations de Beltrami

Lorsque l'on désire résoudre le problème en contrainte, sans vouloir à priori définir les champs de déplacement et de déformation, on utilise une méthode dite « inverse ». Il convient alors, en plus de la vérification des équations d'équilibre, de s'assurer que l'état de contrainte conduit, par l'intermédiaire de la loi de comportement, à un état de déformation compatible avec un champ de déplacement.

$$\sigma_{ij} + \frac{1}{1 + \nu}\sigma_{kk} = 0 \quad (2.10)$$

Cette équation est appelée équation de Beltrami simplifiée, elle traduit les équations de compatibilité pour les contraintes dans le cas où les forces de volume sont nulles.

## 4.3 Élasticité tridimensionnelle en coordonnées cylindriques

Pour un corps défini dans un repère de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , Nous pouvons écrire les relations entre les composantes du tenseur déformation, déplacement et contrainte tel que :

$u_r, u_\theta, u_z$  sont les composantes du déplacement,

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}, \gamma_{r\theta}$  sont les composantes du tenseur déformation,

et  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}$  sont les composantes de contrainte



### Déformations-Déplacements

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} & 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & 2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} & \gamma_{zr} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{cases} \quad (2.11)$$

### Contrainte - déformation

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)] \\ \sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)] \end{cases} \quad (2.12)$$

### Contrainte tangentielle - déplacement

$$\begin{cases} \tau_{r\theta} = G\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) \\ \tau_{\theta z} = G\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \\ \tau_{rz} = G\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \end{cases} \quad (2.13)$$

## 4.4 Équation d'équilibre en coordonnées cylindriques

Soit  $dv$  un élément de volume représenté sur figure (2.2) soumis à une force volumique dont les composantes sont :  $F_r, F_\theta, F_z$ . Ces forces volumiques s'expriment en fonction des contraintes appliquées sur cet élément de volume, on utilisant la 2<sup>ième</sup> loi de Newton l'équation, d'équilibre peut être exprimée par [17] :

$$\nabla \sigma + F = 0 \quad (2.14)$$

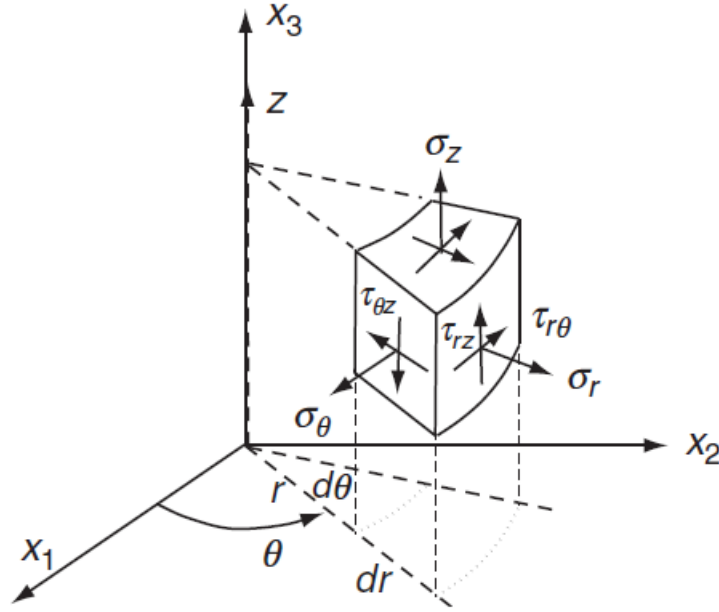


FIGURE 2.2 – Coordonnées cylindriques

ou  $\sigma = \sigma_{ij}e_i e_j$  est la matrice de contrainte,  $e_i$  est le vecteur unité dans le système des coordonnées cylindriques et  $F$  est la force de volume.

$$\begin{aligned} \nabla \sigma = & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} e_r + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} e_\theta + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} e_z + \frac{1}{r} (\sigma_r e_r + \tau_{r\theta} e_\theta + \tau_{rz} e_z) \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} e_r + \tau_{r\theta} e_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} e_\theta - \sigma_\theta e_r + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} e_z \right) \\ & + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} e_r + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} e_\theta + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} e_z \end{aligned} \quad (2.15)$$

La combinaison de ce résultat avec l'équation (2.14) donne l'équation d'équilibre dans les coordonnées cylindriques.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + F_\theta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + F_z = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

## Torsion Axysymétrique

Dans le problème de torsion axysymétrique et en absence des forces volumiques, l'unique composante non nulle du vecteur de déplacement est  $u_\theta(r, z)$  [6]. L'équation d'équilibre d'un problème de torsion axisymétrique peut être déduite comme suit :

En remplaçant les deux contraintes  $\tau_{r\theta}$  et  $\tau_{\theta z}$  donnés par l'équation (2.13) dans l'équation d'équilibre en contrainte

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + F_\theta = 0$$

on trouve

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2.17)$$

## 5 Notion de la mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a été introduite par Griffith vers 1920, son objectif est de caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide des paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment le champ de contraintes, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure ont été entrepris par Westergaard vers 1940. L'extension de la discipline a été amorcée par Irwin vers 1960. Depuis cette date, le développement de la mécanique de la rupture s'étend aux problèmes non linéaires matériellement et géométriquement, aux problèmes de bifurcation des fissures en modes mixtes et plus récemment aux composites, aux techniques numériques de résolution et à l'état de l'art relatif au dimensionnement de diverses structures complexes [9].

### 5.1 Modélisation de la fissure

Une fissure est une petite fente dans un solide. Cette fente peut apparaître à la surface de la pièce (fissure superficielle), se trouver complètement à l'intérieur et être donc invisible depuis l'extérieur (fissure interne), ou traverser complètement la pièce (fissure traversante) [10]. Ces trois cas de figure sont schématisés sur la figure ( 2.3) .

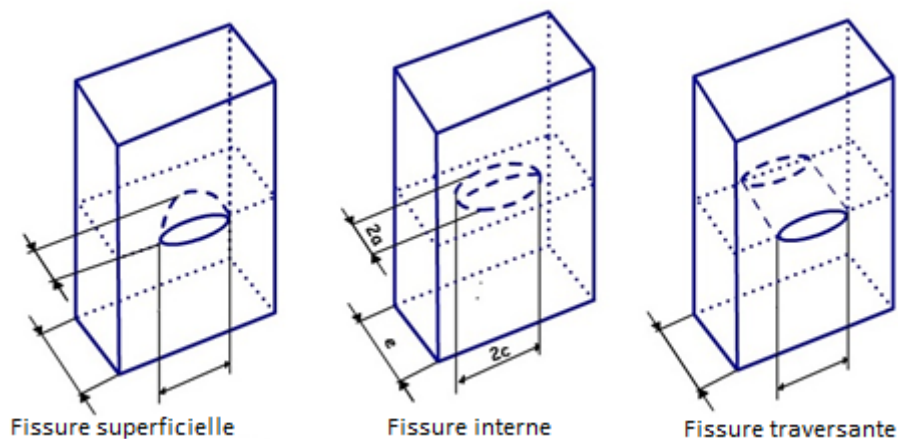


FIGURE 2.3 – Les différents types de fissures

Pour modéliser les fissures, on suppose souvent que leur géométrie est simple :

- Leur forme est elliptique, semi-elliptique ou en forme de coin ;

- Les deux faces de la fissure sont planes, parallèles et écartées d'une distance très petite devant les deux autres dimensions de la fissure. On assimile donc la fissure à son plan moyen ;
- Les deux faces se rejoignent selon un bord anguleux et, en conformité avec l'hypothèse précédente (faces parallèles), forment un angle quasiment nul.

La fissure est donc modélisée par une discontinuité de la matière, plane, « pointue » et d'épaisseur nulle. Lorsque les deux faces ne se touchent pas, on dit que la fissure est ouverte. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus (c'est-à-dire en termes de déplacements et de contraintes), la fissure est alors modélisée en écrivant les conditions aux limites suivantes sur le plan moyen :

- Le vecteur contrainte est nul (car chacune des deux faces est un bord libre), et
- Le déplacement peut être discontinu de part et d'autre du plan (et sa discontinuité correspond alors à l'ouverture de la fissure).

## 5.2 Modes élémentaires de fissuration

D'un point de vue macroscopique, on peut considérer deux modes principaux de rupture : la rupture plate et la rupture inclinée. La rupture plate correspond à une surface de rupture globalement perpendiculaire à la direction de la contrainte principale. La rupture inclinée dans le sens transversal par rapport à la direction de propagation s'accompagne souvent de grandes déformations. L'examen du faciès de rupture permet bien souvent de détecter, après rupture, le mécanisme de rupture et le type de fissuration produit [9]. On remarque généralement :

- Une zone lisse et soyeuse correspondant à la propagation en fatigue,
  - Une zone à grains cristallins ou moins apparents, correspondant à la fissuration brutale.
- On montre que toute fissuration peut être ramenée à l'un des trois modes simples ou à leur superposition. Il existe donc trois modes de fissuration élémentaires présentés figure( 2.4).

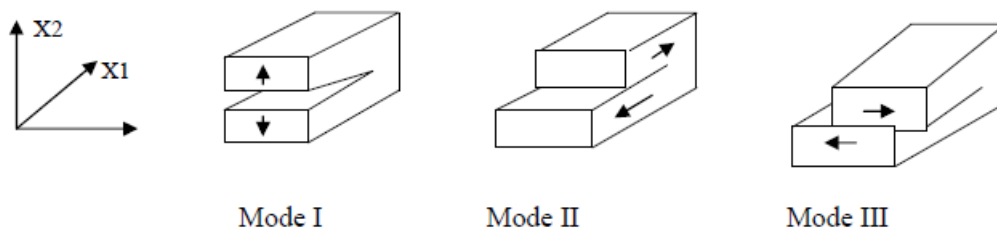


FIGURE 2.4 – Mode de fissuration

- *Mode I* mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation,
- *Mode II* mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation,

- *Mode III* mode de cisaillement hors du plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

### 5.3 Le facteur d'intensité de contrainte $K$

Dans la zone singulière, le champ de contraintes présente une singularité en  $\sqrt{1/r}$  à la pointe de fissure. L'intensité de la singularité est caractérisée par les paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes, notés  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  pour chacun des modes élémentaires. Les facteurs  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont indépendants de  $r$  et de  $\theta$ . Ils ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs d'un solide donné et de la géométrie de la fissure. Ils sont proportionnels à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure. On a les expressions suivantes qui constituent leurs définitions pour les milieux fissurés :

Mode *I*

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0, 0) \quad (2.18)$$

Mode *II*

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0, 0) \quad (2.19)$$

Mode *III*

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (2.20)$$

Dans Notre problème de déformation axisymétrique, on utilise le système de coordonnées cylindriques d'où l'expression du facteur d'intensité de contrainte en Mode *III* est donnée par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{\theta z}(r, 0, 0) \quad (2.21)$$

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons citer les différentes hypothèses et les notions élémentaires d'élasticité linéaire qui vont être utilisées dans les chapitres a suivre. Les relations entre les modules d'élasticité et l'utilisation des équations Navier-Lamé nous permettent d'obtenir l'équation d'équilibre des problèmes traités. A travers les lois du comportement de l'élasticité linéaire et la mécanique de la rupture, nous pouvons donner quelques relations entre les contraintes et les déplacements ainsi que les contraintes et les coefficients d'intensité de contrainte pour les différents modes de sollicitation.

# Chapitre 3

## Outils mathématiques

## Introduction

La solution mathématique exacte pour les problèmes liés à l'élasticité dont la géométrie est relativement régulière, s'obtient par l'application des méthodes analytiques, telle que les transformations intégrales, la séparation des variables, etc...

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différents outils mathématiques utilisées pour la résolution de notre problème.

## 1 Fonctions de Bessel

En analyse mathématiques, les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse *Daniel Bernoulli*, portent le nom du mathématicien allemand *Friedrich Bessel*.

*Bessel* a développé l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induites par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernoulli. Les fonctions de Bessel jouent un rôle important en physique mathématique. Elles possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques ; comme leur caractère oscillant.

Les fonctions de Bessel sont aussi connues sous le nom de fonctions cylindriques ou d'harmoniques cylindriques, parce qu'elles font partie des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques. Ces fonctions sont présentées dans toutes les bibliothèques mathématiques de programmation, dans les logiciels de calcul symbolique comme MAPEL et MATLAB.

Considérant l'équation différentiel du second ordre suivante [11] :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad (3.1)$$

La solution de cette équation différentiel est définie par :

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \quad (3.2)$$

Avec  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes arbitraires

La solution finie à l'origine notée  $J_\nu(x)$  est appelée fonction de Bessel de première espèce et la seconde solution notée  $Y_\nu(x)$  est appelé fonction de Bessel de deuxième espèce.

### 1.1 Fonction de Bessel de première espèce

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $\nu$  peut être déterminée en utilisant un développement en série de puissance de la façon suivante :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(1+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{(x/2)^2}{1(1+n)} \left(1 - \frac{(x/2)^2}{2(2+n)} \left(1 - \frac{(x/2)^2}{3(3+n)} \left(1 - \dots\right)\right)\right)\right) \quad (3.3)$$

Notons que  $\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$ , nous pouvons écrire :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \quad (3.4)$$

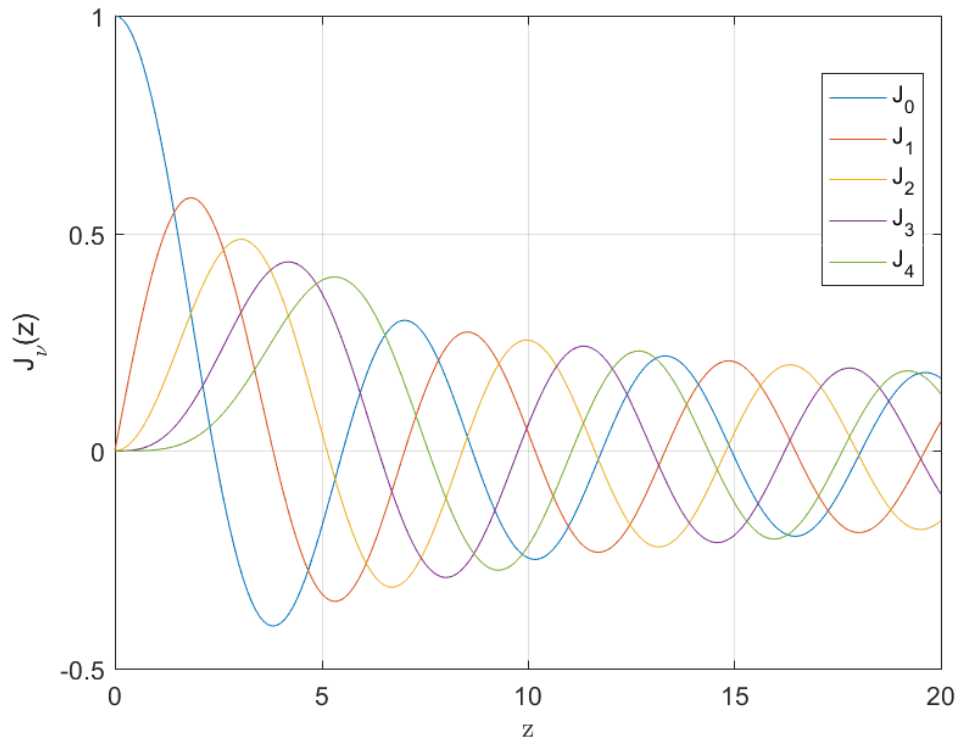


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction de Bessel de première espèce

### Propriétés de la fonction de Bessel de première espèce

- 1)  $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- 2)  $J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- 3)  $\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- 4)  $\frac{d}{dz} [z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

## 1.2 Fonction de Bessel de seconde espèce

La fonction de Bessel de seconde espèce  $Y_n(x)$  et parfois dite la fonction de Weber ou la fonction de Neumann (notée  $N_n(x)$ ) est liée à la fonction de Bessel de première espèce par la relation

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \quad (3.5)$$



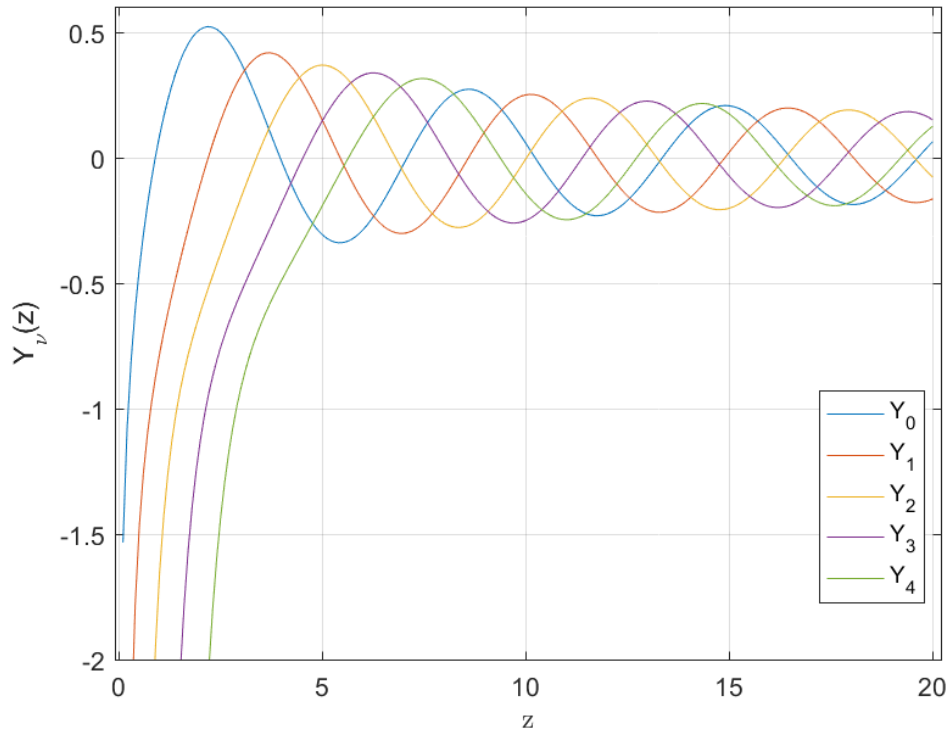


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction de Bessel de deuxième espèce

### Propriétés de la fonction de Bessel de seconde espèce

- 1)  $Y_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}Y_n(z) - Y_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- 2)  $Y'_{n+1}(z) = \frac{1}{2}[Y_{n-1}(z) - Y_{n+1}(z)], \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- 3)  $Y'_n(z) = Y_{n-1}(z) - \frac{n}{z}Y_n(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$
- 4)  $Y'_n(z) = \frac{n}{z}Y_n(z) - Y_{n+1}(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$

### 1.3 Développement asymptotique des fonctions de Bessel

Les développements en série qui ont été donnés pour représenter les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce  $J_\nu(x)$  et  $Y_\nu(x)$  respectivement, ne permettent pas de connaître facilement l'allure de ces fonctions pour des grandes valeurs de la variable. Et pour cela on donne les expressions asymptotiques suivantes de ces fonctions de Bessel pour des grandes valeurs de  $x$ .

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (3.6)$$

$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \sin\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (3.7)$$

## 2 Polynômes de Chebyshev

### 2.1 Polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce

Les polynômes de Chebyshev de première espèce  $T_n(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $n$  définis par [19] :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (3.8)$$

Les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce  $U_n(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $n$  définis par :

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.9)$$

### 2.2 Formules de récurrence des Polynômes de Chebyshev

1)  $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$

2)  $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$

3)  $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$

4)  $(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$

### 2.3 Valeurs particulières des Polynômes de Chebyshev

1)  $T_n(1) = 1$       2)  $T_n(-1) = (-1)^n$

3)  $T_{2n}(0) = (-1)^n$       4)  $T_{2n+1}(0) = 0$

5)  $U_{2n+1}(0) = 0$       6)  $U_{2n}(0) = (-1)^n$

TABLE 3.1 – Quelques cas spéciaux des Polynômes de Chebyshev

n	$T_n(x)$	$U_n(x)$
0	1	1
1	$x$	$2x$
2	$2x^2 - 1$	$4x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$	$8x^3 - 4x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$	$32x^5 - 32x^3 + 6x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$

### 3 Fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside  $H(x)$ , également appelée fonction unité est une fonction discontinue dont la valeur est zéro pour les arguments négatifs  $x < 0$  et un pour les arguments positifs  $x > 0$ , comme illustré

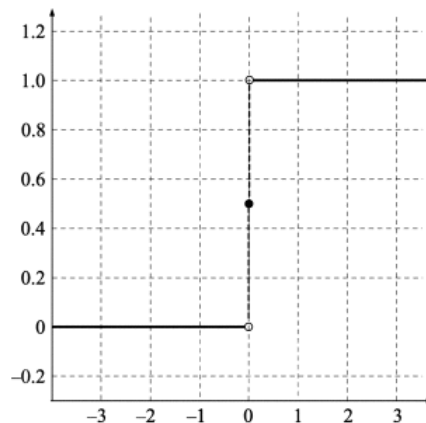


FIGURE 3.3 – La fonction de Heaviside

Cette fonction est couramment utilisée dans la théorie des mathématiques tel que le traitement de signal pour représenter un signal qui s'active à une heure précise et reste activé indéfiniment. Dans ce travail, la fonction de Heaviside est utilisée pour représenter le comportement oscillatoire des déplacements ainsi que les contraintes.

### 4 Transformée intégrale de Hankel

La transformée de Hankel est une transformation intégrale, qui a été développée par le mathématicien *Hermann Hankel*, elle est aussi connue par la transformée de *Fourier-Bessel* car cette transformation se base sur la transformation bidimensionnelle de Fourier.

La transformée de Hankel exprime une fonction donnée  $f(z)$  comme la somme pondérée d'un nombre infini de fonctions de Bessel  $J_\nu(\lambda z)$  de première espèce, elle est donnée par [20] :

$$F_\nu(\lambda) = H_\nu\{f(z)\} = \int_0^\infty f(z)J_\nu(\lambda z)zdz \quad (3.10)$$

où  $F_\nu$  est la fonction transformée et  $J_\nu(\lambda z)$  la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $\nu$  avec  $\nu \geq -1/2$ .

Ainsi, la transformée inverse de Hankel  $F_\nu(\lambda)$  est bien définie comme suite :

$$f(z) = \int_0^\infty F_\nu(\lambda)J_\nu(\lambda z)\lambda d\lambda \quad (3.11)$$

#### 4.1 Propriétés de la transformée de Hankel

- $H_\nu\{f'(z)\} = \frac{\lambda}{2\nu}[(\nu + 1)F_{\nu-1}(\lambda) - (\nu - 1)F_{\nu+1}(\lambda)]$
- $H_\nu\{\Delta_\nu f(az)\} = \frac{1}{a^2}F_\nu(\frac{\lambda}{a})$  ou  $\Delta_\nu$  est l'opérateur de Laplace dans les coordonnées cylindriques  $\Delta_\nu = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - (\frac{\nu}{r})^2$
- $H_\nu\{z^{-1}f(z)\} = \frac{\lambda}{2\nu}[F_{\nu-1}(\lambda) + F_{\nu+1}(\lambda)]$
- $H_\nu\{z^{\nu-1}\frac{d}{dz}[z^{1-\nu}f(z)]\} = -\lambda F_{\nu-1}(\lambda)$
- $H_\nu\{z^{-\nu-1}\frac{d}{dz}[z^{1+\nu}f(z)]\} = \lambda F_{\nu+1}(\lambda)$
- $H_\nu\{\Delta_\nu f(z)\} = -\lambda^2 H_\nu\{f(z)\}$

### 5 Équations intégrales

Une équation intégrale est une équation dont la fonction inconnue apparait dans l'intégrant. Les équations de Fredholm et les équations de Volterra sont leurs plus célèbres représentants. Elles apparaissent dans des problèmes de transfert d'énergie et des problèmes d'oscillations. Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles [18].

#### 5.1 Équations de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm. Les équations de la forme

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.12)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.13)$$

sont appelées intégrales de Volterra de première et de deuxième espèce respectivement. Elles sont caractérisées par une borne d'intégrale variable.

### Équation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel a eu lieu comme l'une des premières équations intégrales de l'histoire des mathématiques, nous pouvons écrire sa forme générale d'après l'équation de Volterra suivante [8] :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[h(x) - h(t)]^\alpha} dt = g(x), 0 < x < b \quad (3.14)$$

Si nous posons  $h(\tau) = \tau^2$ , nous obtenons :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[x^2 - t^2]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b \quad (3.15)$$

Ce que l'on appelle l'équation intégrale d'Abel, dont la solution est de la forme :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right], \quad a < t < b \quad (3.16)$$

Les équations ensemble sont connues par la transformation d'Abel intérieure. Dans un autre cas, l'équation :

$$\int_x^b \frac{f(t)}{[t^2 - x^2]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b \quad (3.17)$$

et sa solution :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[ \int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right], \quad a < t < b \quad (3.18)$$

sont connus par la transformation d'Abel extérieure.

## 5.2 Équations de Fredholm

### Équations de Fredholm de première espèce

On appelle équations de Fredholm de première espèce toute équation donnée sous la forme suivante :

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.19)$$

ou  $\varphi$  est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer,  $f(x)$  est le terme de source, alors que  $K$  représente le noyau de l'équation. Les limites de l'intégration sont des constantes c'est la caractéristique principale de l'équation de Fredholm.

### Équations de Fredholm de deuxième espèce

Si la fonction inconnue apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale, l'équation intégral de Fredholm est de deuxième espèce, elle est donnée par :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.20)$$

## 6 Méthodes d'intégration numérique

L'intégration numérique a pour but d'aborder le calcul général de l'intégrale d'une fonction  $f(x)$  sur un domaine fini délimité par des bornes finies  $a$  et  $b$ .

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

En effet le nombre de fonctions dont on connaît leur primitive est en fait très faible. Par ailleurs la connaissance d'une primitive  $F$  ne suffit pas lorsque l'on ne sait pas calculer les valeurs de  $F$ . Par exemple, on sait que  $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ ; mais connaît-on explicitement  $\ln 2$ ? Il est donc intéressant concernant  $\int_a^b f(x)dx$

- sur le plan pratique, de pouvoir obtenir une approximation lorsque les primitives de  $f$  ne sont pas calculables.

- sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitudes aussi petits que souhaités.

### 6.1 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à diviser l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  parties égales et à approximer la surface de chaque "tranche" par un trapèze construit à partir des valeurs de la fonction aux bornes de chaque sous-intervalle. La fonction est donc remplacée par une droite sur chaque sous-intervalle.

$$I \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \quad (3.21)$$

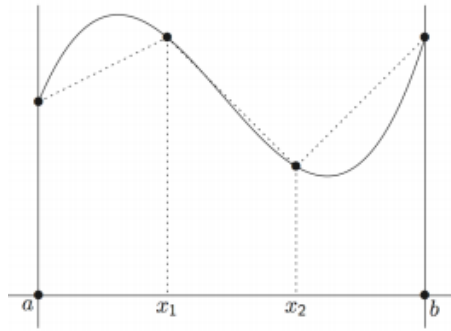


FIGURE 3.4 – Méthode des trapèzes

## 6.2 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à diviser l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  parties égales ( $n$  : entier naturel paire) et à approximer la fonction sur chaque "tranche" par une parabole construite à partir des points de la fonction aux bornes et au milieu de chaque sous intervalle.

$$I \simeq \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n \left[ f(x_{i-1}) + 4 \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{2} + f(x_i) \right] \quad (3.22)$$

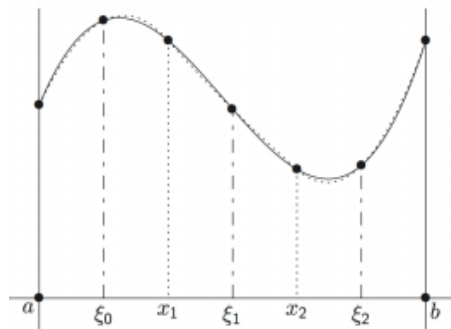


FIGURE 3.5 – Méthode de Simpson

## Conclusion

L'étude des problèmes d'élasticité nécessite la connaissance de l'outil mathématique comme les fonctions spéciales et les équations intégrales. Cette base mathématique permet de simplifier la solution et d'obtenir analytiquement des expressions des déplacements et des contraintes ainsi que le facteur d'intensité de contrainte dans les problèmes de fissuration.

# Chapitre 4

## Torsion axisymétrique d'une plaque fissurée



# 1 Formulation du problème

On considère le problème axisymétrique d'une plaque épaisse élastique, homogène et isotrope. La déformation est due a la rotation d'un angle  $\omega$  d'un disque rigide de rayon  $b$ . Le milieu est affaibli d'une fissure interne circulaire de rayon  $a$  dans le plan  $z = 0$ . La plaque est encastrée sur une base rigide indéformable le long de sa partie inférieure.

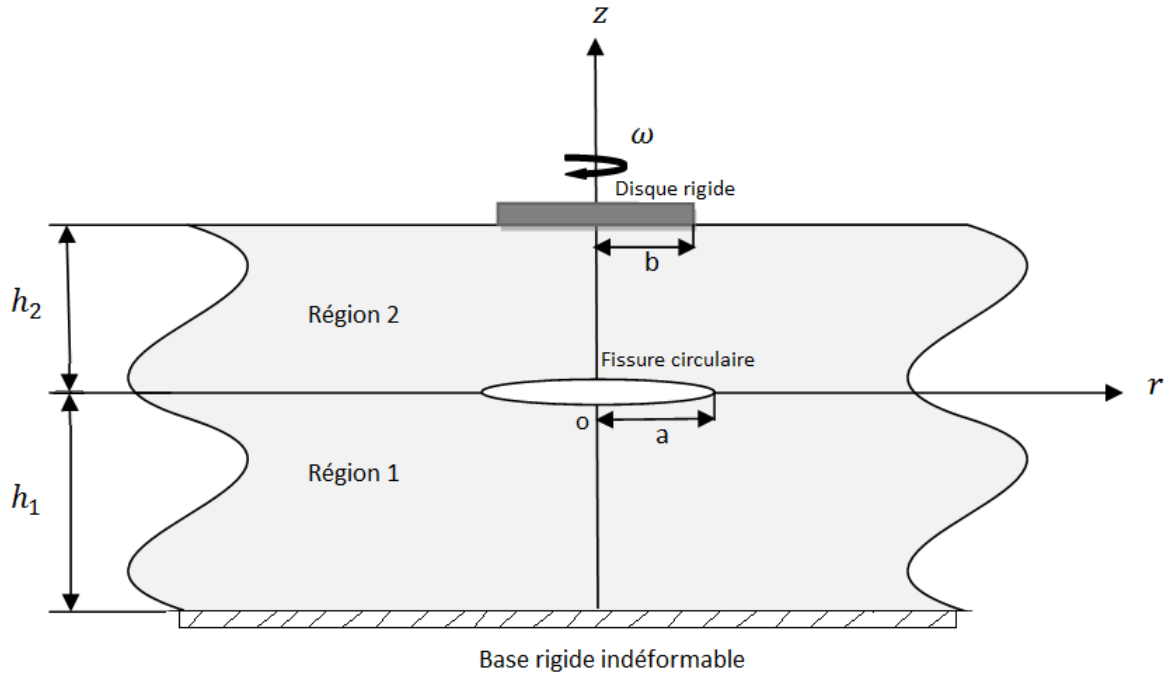


FIGURE 4.1 – La géométrie du problème

On choisi le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  comme un repère de référence. Pour le type de problème de torsion axisymétrique, la seule composante non nulle de vecteur déplacement est la composante angulaire  $u_\theta$  elle dépend seulement des variables axiales et radiales  $z$  et  $r$ . Le module de cisaillement du milieu élastique est notée  $G$ . En l'absence des forces volumétrique, l'équation d'équilibre en déplacement sera donnée par :

$$\frac{\partial^2 u_\theta(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta(r, z)}{r \partial r} - \frac{u_\theta(r, z)}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

et les seules composantes de contraintes non nulles s'expriment en fonction du déplacement angulaire :

$$\tau_{\theta z}(r, z) = G \frac{\partial u_\theta(r, z)}{\partial z} \quad (4.2)$$

$$\tau_{\theta r}(r, z) = G \left( \frac{\partial u_\theta(r, z)}{\partial r} - \frac{u_\theta(r, z)}{r} \right) \quad (4.3)$$

Distinguons deux régions différentes, la région (1) correspond à  $[-h_1, 0]$  alors que la seconde région  $[0, h_2]$ . Le déplacement dans la zone  $k = 1, 2$  est noté  $u_\theta^{(k)}$  ainsi que la contrainte tangentielle  $\tau_{\theta z}^{(k)}$ .

### Les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & u_{\theta}^{(1)}(r, -h_1) = 0 & r \geq a \\ (b) & \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) = 0 & r < a \\ (c) & u_{\theta}^{(2)}(r, h_2) = \omega r & r < b \\ (d) & \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h_2) = 0 & r > b \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où  $\omega$  est l'angle de rotation angulaire.

### Les conditions de continuités

Sur le plan de la fissure on remarque la continuité des déplacements et des contraintes.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (e) & \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = \tau_{\theta z}^{(2)}(r, 0) & r > a \\ (f) & u_{\theta}^{(1)}(r, 0) = u_{\theta}^{(2)}(r, 0) & r > a \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Pour obtenir la forme générale de la solution de l'équation (4.1) on applique la méthode basée sur la transformée intégrale de Hankel déjà définie dans le chapitre 3.

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_{\theta}(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial u_{\theta}(r, z)}{r \partial r} - \frac{u_{\theta}(r, z)}{r^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta}(r, z)}{\partial z^2} \right] r J_1(\lambda r) dr = 0 \quad (4.6)$$

Avec  $J_1(\lambda r)$  est la fonction de Bessel de première espèce.

En utilisant la propriété de linéarité de la transformation de Hankel, nous avons

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{\partial u_{\theta}}{r \partial r} - \frac{u_{\theta}}{r^2} \right] r J_1(\lambda r) dr + \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} \right] r J_1(\lambda r) dr = 0 \quad (4.7)$$

Commençons par la première intégrale de cette dernière équation et intégrons chaque partie de l'intégrale a part

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} \right] r J_1(\lambda r) dr = \int_0^{\infty} u_{\theta} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r J_1(\lambda r)) dr \\ \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} \right) J_1(\lambda r) dr = - \int_0^{\infty} u_{\theta} \frac{\partial}{\partial r} (J_1(\lambda r)) dr \\ \int_0^{\infty} \left( \frac{u_{\theta}}{r^2} \right) r J_1(\lambda r) dr = \int_0^{\infty} \left( \frac{u_{\theta}}{r} \right) J_1(\lambda r) dr \end{array} \right.$$

En remplaçant ces dernières équations dans la première intégrale on trouve

$$I_1 = \int_0^{\infty} r u_{\theta}(r, z) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} J_1(\lambda r) + \frac{\partial}{r \partial r} J_1(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda r)}{r^2} \right) dr$$

On pose  $\rho = \lambda r \Rightarrow d\rho = \lambda dr$

$$I_1 = \int_0^{\infty} r \lambda^2 u_{\theta}(r, z) \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} J_1(\rho) + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} J_1(\rho) - \frac{J_1(\rho)}{\rho^2} \right) dr$$

On a :

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} J_1(\rho) + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} J_1(\rho) - \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) J_1(\rho) = 0; \quad \text{avec } \nu = 1$$

Alors

$$I_1 = -\lambda^2 \int_0^\infty u_\theta(r, z) r J_1(\lambda r) dr$$

Intégrons la deuxième partie de l'intégrale donnée par (4.7) :

$$I_2 = \int_0^\infty r \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) J_1(\lambda r) dr = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty r u_\theta J_1(\lambda r) dr$$

Remplaçons  $I_1$  et  $I_2$  dans l'équation (4.6)

$$-\lambda^2 \int_0^\infty r u_\theta(r, z) J_1(\lambda r) dr + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty r u_\theta(r, z) J_1(\lambda r) dr = 0 \quad (4.8)$$

Or

$$U_\lambda(z) = \int_0^\infty r u_\theta(r, z) J_1(\lambda r) dr$$

l'équation (4.8) devient

$$\frac{d^2}{dz^2} U_\lambda(z) - \lambda^2 U_\lambda(z) = 0 \quad (4.9)$$

La solution générale de cette équation est donnée par

$$U_\lambda^{(i)}(z) = C_i(\lambda) e^{-\lambda z} + D_i(\lambda) e^{\lambda z} \quad (4.10)$$

La transformé inverse de Hankel nous permet de déduire le déplacement angulaire

$$u_\theta^{(i)}(r, z) = \int_0^\infty \lambda \left( C_i(\lambda) e^{-\lambda z} + D_i(\lambda) e^{\lambda z} \right) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4.11)$$

Ce qui nous permet de déduire la contrainte tangentielle sous la forme

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(r, z) = -G \int_0^\infty \lambda^2 \left( C_i(\lambda) e^{-\lambda z} - D_i(\lambda) e^{\lambda z} \right) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4.12)$$

ou  $C_i(\lambda)$  et  $D_i(\lambda)$  sont des fonctions de  $\lambda$

## 2 Équations intégrales duales

L'utilisation de la condition aux limites dans le plan de l'encastrement

$$u_\theta^{(1)}(-h_1) = 0$$

et les conditions aux limites (b) et (e) au plan de la fissure

$$\tau_{\theta z}(0) = 0 \quad r > 0$$

nous permet de déduire le système suivant :

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda \left( C_1(\lambda) e^{-\lambda z} + D_1(\lambda) e^{\lambda z} \right) J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \\ \int_0^{\infty} \lambda^2 \left( \{C_1(\lambda) - C_2(\lambda)\} e^{-\lambda z} - \{D_1(\lambda) - D_2(\lambda)\} e^{\lambda z} \right) J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

La résolution de ce système d'équations nous permet de réduire le nombre des constantes inconnues à 2 constantes de  $\lambda$

$$D_1(\lambda) = -C_1(\lambda) e^{2\lambda h_1} \quad (4.14)$$

$$D_2(\lambda) = C_2(\lambda) - C_1(\lambda) \{1 + e^{2\lambda h_1}\}$$

### Les déplacements et les contraintes pour les deux domaines

Les déplacements et les contraintes dans les deux régions  $[-h_1, 0]$  et  $[0, h_2]$  sont données respectivement sous les formes suivantes :

$$[-h_1, 0] : \begin{cases} u_{\theta}^{(1)}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda C_1(\lambda) [e^{-\lambda z} - e^{\lambda(2h_1+z)}] J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = -G \int_0^{\infty} \lambda^2 C_1(\lambda) [e^{-\lambda z} + e^{\lambda(2h_1+z)}] J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (4.15)$$

$$[0, h_2] : \begin{cases} u_{\theta}^{(2)}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda [-C_1(\lambda)(1 + e^{2\lambda h_1})e^{\lambda z} + C_2(\lambda)(e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})] J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^{(2)}(r, z) = -G \int_0^{\infty} \lambda^2 [C_1(\lambda)(1 + e^{2\lambda h_1})e^{\lambda z} + C_2(\lambda)(e^{-\lambda z} - e^{\lambda z})] J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (4.16)$$

ou  $J_1$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1 et  $G$  représente le module de cisaillement.

En utilisant les autres conditions aux limites (b), (c), (d) et (f) on déduit les 4 équations intégrales duales suivantes :

- a)  $\int_0^{\infty} \lambda [-C_1(\lambda)(1 + e^{2\lambda h_1})e^{\lambda h_2} + C_2(\lambda)(e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda h_2})] J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r \quad r < b$
- b)  $\int_0^{\infty} \lambda^2 C_1(\lambda) [1 + e^{2\lambda h_1}] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r < a$
- c)  $\int_0^{\infty} \lambda^2 [C_1(\lambda)(1 + e^{2\lambda h_1})e^{\lambda h_2} + C_2(\lambda)(e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2})] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r > b$
- d)  $\int_0^{\infty} \lambda [C_1(\lambda) - C_2(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r > a$

### 3 Réduction a un système algébrique

La réduction au système algébrique se fait à l'aide d'un développement de fonctions de Bessel

Tout d'abord déduisons quelques formules des intégrales en  $J_1$  et cela en utilisant les formules données par Gradshteyn et Ryzhik. [19], formule 6.522.11 voir A.5

$$\text{Sachant que : } \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} \frac{T_{2n+1}(r/x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} & r < x \\ 0 & r > x \end{cases}$$

ou  $T_{2n+1}$  est la fonction de chebyshev de première espèce déjà définie par la formule (3.8)

et a l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \lambda J_1(\lambda r) &\longrightarrow \lambda r J_0(\lambda r) \\ M_n(\lambda) &\longrightarrow J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

ou

$$M_n(\lambda x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) \right] \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.17)$$

on obtient :

$$\int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) M_n(\lambda x) d\lambda = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \frac{T_{2n+1}(r/x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} & r < x \\ 0 & r > x \end{cases} \quad (4.18)$$

et sachant que

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \left[ J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{3}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) \right] d\lambda = \begin{cases} \frac{4}{\pi x} \sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}} U_{2n+1}(r/x) & r < x \\ 0 & r > x \end{cases}$$

ou  $U_{2n+1}$  est la fonction de chebyshev de deuxième espèce définie par la formule (3.9)

et en raisonnant de la même manière précédente (a l'aide d'une intégration par partie)

$$\lambda J_1(\lambda r) \longrightarrow \lambda r J_0(\lambda r) N_n(\lambda) \longrightarrow J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{3}{2})}(\lambda \frac{x}{2})$$

ou

$$N_n(\lambda x) = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{3}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) \right] \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

On trouve

$$\int_0^\infty J_1(\lambda r) N_n(\lambda x) d\lambda = \begin{cases} -\frac{4}{\pi x} \sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}} U_{2n+1}(r/x) & r < x \\ 0 & r > x \end{cases} \quad (4.20)$$

En tenant compte des formules intégrales (4.18), (4.20) et pour satisfaire les deux équations homogènes c) et d) nous pouvons définir

$$\begin{cases} \lambda\omega^* \left[ C_1(\lambda)(1 + e^{2\lambda h_1})e^{\lambda h_2} + C_2(\lambda)(e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2}) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda b) \\ \lambda\omega^* \left[ C_1(\lambda) - C_2(\lambda) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n N_n(\lambda a) \end{cases} \quad (4.21)$$

avec

$$\omega^* = -\frac{2}{\omega b^2} \quad (4.22)$$

La résolution de ce système d'équations nous permet de déduire les deux fonctions de  $\lambda$   $C_1$  et  $C_2$

$$\begin{cases} \lambda\omega^* C_1(\lambda) = \frac{1}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda b) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2}) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n N_n(\lambda a) \right] \\ \lambda\omega^* C_2(\lambda) = \frac{1}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda b) - (1 + e^{2\lambda h_1})e^{\lambda h_2} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n N_n(\lambda a) \right] \end{cases} \quad (4.23)$$

Substituons ces deux fonctions dans les deux premières équations intégrales non homogènes

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda(2h_1+h_2)})\alpha_n M_n(\lambda b) - 2(1 + e^{2\lambda h_1})\beta_n N_n(\lambda a) \right] J_1(\lambda r) d\lambda = -\frac{2r}{b^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \frac{1 + e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ \alpha_n M_n(\lambda b) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2})\beta_n N_n(\lambda a) \right] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

En tenant compte de la formule de Gegenbauer

$$-r J_1(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda x) \cos(m\phi_x) \quad r < x; x = a, b \quad (4.25)$$

ou  $\delta_{0m}$  est le symbole de Kronecker :  $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$

$$X_m(\lambda x) = \frac{\partial J_m^2}{\partial \lambda} \left( \frac{\lambda x}{2} \right) \text{ et } \phi_x = \sin^{-1}(r/x)$$

et après avoir éliminer la variable radiale, les deux équations données par (4.24) peuvent être écrites sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda b) \cos(2m\phi_b) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda(2h_1+h_2)})\alpha_n M_n(\lambda b) \right. \\ \left. - 2(1 + e^{2\lambda h_1})\beta_n N_n(\lambda a) \right] d\lambda = 1 - \cos(2\phi_b) \quad r < b \quad (4.26) \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda a) \cos(2m\phi_a) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \frac{1 + e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} [\alpha_n M_n(\lambda b) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2}) \beta_n N_n(\lambda a)] d\lambda = 0 \quad r < a \quad (4.27)$$

Remarquons que le système  $\cos(m\phi)$  est linéairement indépendant, en égalant les coefficients de  $\cos(2m\phi_x)$  pour les deux cotés on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} [(e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda(2h_1+h_2)}) \alpha_n M_n(\lambda b) - 2(1 + e^{2\lambda h_1}) \beta_n N_n(\lambda a)] X_m(\lambda b) d\lambda \\ \qquad \qquad \qquad = \delta_{0m} - \frac{\delta_{1m}}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \frac{1 + e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} [\alpha_n M_n(\lambda b) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2}) \beta_n N_n(\lambda a)] X_m(\lambda a) d\lambda = 0 \end{array} \right. \quad (4.28)$$

Ce système infini peut être écrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n A_{mn} + \beta_n B_{mn}] = \delta_{0m} - \frac{\delta_{1m}}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n C_{mn} + \beta_n D_{mn}] = 0 \end{array} \right. \quad (4.29)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{mn} = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda \\ B_{mn} = \int_0^{\infty} f_2(\lambda) N_n(\lambda a) X_m(\lambda b) d\lambda \\ C_{mn} = \int_0^{\infty} \lambda f_3(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda \\ D_{mn} = \int_0^{\infty} \lambda f_4(\lambda) N_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \end{array} \right. \quad (4.30)$$

tels que les différentes fonctions  $f_k(\lambda)$  sont données par :

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda(2h_1+h_2)}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \\ f_2(\lambda) &= \frac{-2(1 + e^{2\lambda h_1})}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \\ f_3(\lambda) &= \frac{1 + e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$f_4(\lambda) = \frac{(e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2})(1 + e^{2\lambda h_1})}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}}$$

Pour la résolutions numérique du système (4.29) on remplace  $\int_0^\infty Y_{mn}(\lambda)d\lambda$  par  $\int_0^{\lambda_0} Y_{mn}(\lambda)d\lambda + \int_{\lambda_0}^\infty [\text{Expression asymptotique}]d\lambda$  ou  $\lambda_0$  est suffisamment grand et  $\int_0^\infty Y_{mn}(\lambda)d\lambda$  représente chacun des coefficients donnés par (4.30)

Déterminons les expressions des fonctions équivalentes à l'infini :

Les termes en  $O(\frac{1}{\lambda^3})$  sont à négliger

sachant que :

$$J_m^2(\lambda \frac{x}{2}) \simeq \frac{2}{\pi \lambda x} [1 + (-1)^m \sin(\lambda x)] \quad (4.32)$$

on déduit

$$X_m(\lambda x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} J_m^2(\lambda \frac{x}{2}) \simeq \frac{2}{\pi x} \left[ \frac{(-1)^m x \cos(\lambda x)}{\lambda} - \frac{1 + (-1)^m \sin(\lambda x)}{\lambda^2} \right] \quad (4.33)$$

et sachant que :

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) \simeq \frac{2}{\pi \lambda x} \sin(\lambda x) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{1}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) - J_{n+\frac{3}{2}}(\lambda \frac{x}{2}) J_{-(n+\frac{3}{2})}(\lambda \frac{x}{2}) \simeq -\frac{8}{\pi x^2 \lambda^2} (n+1) \cos(\lambda x) \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

on trouve les deux expressions données dans (4.17) et (4.19)

$$M_n(\lambda b) \simeq \frac{2}{\pi b} \left[ \frac{b \cos(\lambda b)}{\lambda} - \frac{\sin(\lambda b)}{\lambda^2} \right] \quad (4.34)$$

$$\lambda N_n(\lambda a) \simeq \frac{8}{\pi a^2} (n+1) \left[ a \sin(\lambda a) + \frac{2 \cos(\lambda a)}{\lambda} \right] \quad (4.35)$$

Ce qui donne ensuite

$$\begin{cases} M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) \simeq (-1)^m \frac{4 \cos^2(\lambda b)}{\pi^2 \lambda^2} \\ \lambda N_n(\lambda a) X_m(\lambda a) \simeq \frac{16}{\pi^2 a^2} (n+1) \left[ (-1)^m a \frac{\sin(2\lambda a)}{2\lambda} + \frac{(-1)^m (3\cos^2(\lambda a) - 1) - \sin(\lambda a)}{\lambda^2} \right] \end{cases} \quad (4.36)$$

Il est claire que pour des grandes valeurs de  $\lambda$  les fonctions équivalentes  $f_1(\lambda)$ ,  $f_2(\lambda)$ ,  $f_3(\lambda)$  et  $f_4(\lambda)$  tendent vers -1, 0, 0 et -1 respectivement



Alors les coefficients donnés par (4.30) deviennent

$$\begin{cases} A_{mn} = \int_0^{\lambda_0} f_1(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda \\ B_{mn} = \int_0^{\lambda_0} f_2(\lambda) N_n(\lambda a) X_m(\lambda b) d\lambda \\ C_{mn} = \int_0^{\lambda_0} \lambda f_3(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda \\ D_{mn} = \int_0^{\lambda_0} \lambda f_4(\lambda) N_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda N_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \end{cases} \quad (4.37)$$

Évaluons les termes asymptotiques des intégrales  $\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda$  et  $\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda N_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda$  pour des grandes valeurs de  $\lambda$

En intégrant les expressions données par (4.36) on trouve

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda \simeq (-1)^m \frac{4}{\pi^2} \left[ \frac{\cos^2(\lambda_0 b)}{\lambda_0} + b \operatorname{si}(2\lambda_0 b) \right] \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda N_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \simeq \frac{16}{\pi^2 a^2} (n+1) & \left[ a \left\{ \operatorname{ci}(\lambda_0 a) + \frac{5}{2} (-1)^m \operatorname{si}(2\lambda_0 a) \right\} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda_0} \left\{ \sin(\lambda_0 a) + (-1)^m (1 - 3\cos^2(\lambda_0 a)) \right\} \right] \quad (4.39) \end{aligned}$$

ou  $\operatorname{si}(x)$  est la fonction intégrale sinus

$$\operatorname{si}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi$$

et  $\operatorname{ci}(x)$  est la fonction intégrale cosinus

$$\operatorname{ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos(\xi)}{\xi} d\xi$$

## 4 Résultats numériques

Pour déterminer les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  nous devons évaluer les intégrales infinies du système (4.29), pour le faire les premiers membre des intégrales données par (4.37) sont évaluées numériquement à l'aide de la formule de Simpson en choisissant  $\lambda_0 = 7000$  tandis que le deuxième membre sera remplacé par l'intégrale des fonctions équivalentes.

La résolution du système permet d'obtenir les valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  données dans les tables ci-dessous sous forme adimensionnelle pour différentes valeurs de  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{h_1}{b}$  et  $\frac{h_2}{b}$ .

Afin de transformer le système algébrique (4.29) adimensionnelle, nous utilisons les changements de variables suivantes :  $\frac{h_1}{b} = H_1$ ,  $\frac{h_2}{b} = H_2$ ,  $\frac{z}{b} = \zeta$ ,  $\frac{r}{b} = \rho$ ,  $\frac{a}{b} = c$  et  $\lambda b = \eta$ .

Par conséquent, les quatre intégrales infinies  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  et  $D_{mn}$  peuvent être exprimées par :

$$A_{mn} = \frac{1}{b} A'_{mn}, \quad B_{mn} = \frac{1}{b} B'_{mn}, \quad C_{mn} = \frac{1}{b^2} C'_{mn} \quad \text{et} \quad D_{mn} = \frac{1}{b^2} D'_{mn}$$

tel que :

$$\begin{cases} A'_{mn} = \int_0^{\infty} f_1(\eta) M_n(\eta) X_m(\eta) d\eta \\ B'_{mn} = \int_0^{\infty} f_2(\eta) N_n(\eta c) X_m(\eta) d\eta \\ C'_{mn} = \int_0^{\infty} \eta f_3(\eta) M_n(\eta) X_m(\eta c) d\eta \\ D'_{mn} = \int_0^{\infty} \eta f_4(\eta) N_n(\eta c) X_m(\eta c) d\eta \end{cases} \quad (4.40)$$

Les intégrales précédentes sont aussi a décomposer sous la forme

$$\begin{cases} A'_{mn} = \int_0^{100} f_1(\eta) M_n(\eta) X_m(\eta) d\eta - \int_{100}^{\lambda_0} M_n(\eta) X_m(\eta) d\eta - \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\eta) X_m(\eta) d\eta \\ B'_{mn} = \int_0^{100} f_2(\eta) N_n(\eta c) X_m(\eta) d\eta \\ C'_{mn} = \int_0^{100} \eta f_3(\eta) M_n(\eta) X_m(\eta c) d\eta \\ D'_{mn} = \int_0^{100} \eta f_4(\eta) N_n(\eta c) X_m(\eta c) d\eta - \int_{100}^{\lambda_0} \eta N_n(\eta c) X_m(\eta c) d\eta - \int_{\lambda_0}^{\infty} \eta N_n(\eta c) X_m(\eta c) d\eta \end{cases} \quad (4.41)$$

le tableau donné ci-dessous donne les différentes valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour une variation du rapport  $a/b$  et une fixation des épaisseurs  $H_1$  et  $H_2$  de la plaque.

on remarque à partir du tableau que nous avons une convergence rapide des coefficients dans le cas ou le rayon du disque est plus grand par rapport au rayon de la fissure.

TABLE 4.1 – Valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour  $H_1 = 1$  et  $H_2 = 1$ 

n	$a/b = 0.5$	$a/b = 1$	$a/b = 2$
$a_n$			
1	-8.043009122043451	-4.113954710830044	-2.189032313005265
2	-0.002220505162447	-0.008607320806489	0.031334499639273
3	0.000194856048836	0.004565768178776	0.009225284312665
4	-0.000005525494190	-0.000511978240113	-0.007846858311937
5	0.000001287213953	0.000007628550542	0.002921479295217
6	-0.000003934324276	0.000003620466152	-0.000568292904059
7	0.000006923218836	-0.000000151414425	-0.000038538225760
8	-0.000001951050255	0.000000175109650	0.000072191859446
9	0.000012858575986	0.000000314413956	-0.000025589242691
10	0.000005774939402	0.000000780721345	0.000002870982848
$b_n$			
1	-0.112995544405876	-0.125426700431168	-0.057418109324221
2	0.013663174759802	0.005194473707260	-0.001474751186725
3	-0.000376915798090	0.002010651781286	0.001171368377714
4	-0.001095989925221	-0.001711439800216	-0.000877161883406
5	0.000956557005438	0.001240416608345	0.000645136244727
6	-0.000849294195828	-0.001078570224399	-0.000562112735685
7	0.000649788166812	0.000824484823555	0.000429669605076
8	-0.000613745683377	-0.000778911111188	-0.000405906199637
9	0.000471017015406	0.000597807250895	0.000311530351886
10	-0.009078774007909	-0.011522747714312	-0.006004742270811

Inversement a ce qui a été fait dans le tableau précédant, le tableau donné par 4.2 représente les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  pour une variation des épaisseurs  $H_1$  et  $H_2$  et une valeur fixe du rapport  $a/b$ .

Les valeurs obtenus montrent que nous avons une convergence plus rapide lorsque l'épaisseur de la plaque augmente.

TABLE 4.2 – Valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour  $a/b = 1$ 

n	$H_1 = 0.5, H_2 = 0.5$	$H_1 = 2, H_2 = 2$	$H_1 = 2.5, H_2 = 2$
$a_n$			
1	-3.885254219546745	-4.011808254160004	-4.009905499269479
2	-0.284653904576540	0.000286604831899	0.000239620970527
3	0.062453694704587	0.000014251609952	0.000014564628124
4	0.001909708926385	-0.000002003261393	-0.000002012373445
5	-0.001235774939249	0.000000091740122	0.000000123064107
6	-0.000323855115098	0.000000005661733	-0.000000030817138
7	0.000146631694218	0.000000051518977	0.000000091622852
8	-0.000048031237887	0.000000165241531	0.000000121779434
9	0.000019602080698	0.000000364493986	0.000000410680392
10	0.000000419994576	0.000000687953696	0.000000638553037
$b_n$			
1	-0.243795090868290	-0.020853338408497	-0.020657220133468
2	0.016109253911678	0.000270181364369	0.000273899062006
3	0.001724712236627	0.000359178499270	0.000355324549783
4	0.000504309941512	-0.000296125731354	-0.000293162790506
5	-0.000970756432462	0.000218231780892	0.000216053154827
6	0.000811012694592	-0.000190151529624	-0.000188253281784
7	-0.001006470768310	0.000145348317312	0.000143897326039
8	0.000896313819838	-0.000137309851404	-0.000135939108747
9	-0.001079799401075	0.000105384190601	0.000104332154892
10	-0.020123536511224	-0.002031280838081	-0.002011002862378

## 5 Les grandeurs physiques

### 5.1 Les expressions analytiques des déplacements et des contraintes

Les déplacements et les contraintes peuvent être déterminés à l'aide de l'équation (4.15) pour la région (1) et l'équation (4.16) pour la région (2) et cela après avoir déterminé les constantes  $C_1(\lambda)$  et  $C_2(\lambda)$  donné par l'équation (4.23), ainsi on trouve :

**Déplacements et contraintes pour  $[-h_1, 0]$**

$$\frac{u_\theta^{(1)}(r, z)}{\omega b} = -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda z} - e^{\lambda(2h_1+z)}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} [Q_n(\lambda) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2})R_n(\lambda)] d\lambda \quad (4.42)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^{(1)}(r, z)}{G\omega} = \frac{b^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda z} + e^{\lambda(2h_1+z)}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} [Q_n(\lambda) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2})R_n(\lambda)] d\lambda \quad (4.43)$$

**Déplacements et contraintes pour  $[0, h_2]$**

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta^{(2)}(r, z)}{\omega b} = & -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} [(e^{-\lambda z} - e^{\lambda(2h_1+z)})Q_n(\lambda) \\ & - (1 + e^{2\lambda h_1})(e^{-\lambda(h_2-z)} + e^{\lambda(h_2-z)})R_n(\lambda)] d\lambda \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^{(2)}(r, z)}{G\omega} = \frac{b^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ (e^{-\lambda z} + e^{\lambda(2h_1+z)}) Q_n(\lambda) \right. \\ \left. + (1 + e^{2\lambda h_1})(e^{-\lambda(h_2-z)} - e^{\lambda(h_2-z)}) R_n(\lambda) \right] d\lambda \quad (4.45)$$

avec

$$\begin{cases} Q_n(\lambda) = \alpha_n M_n(\lambda b) J_1(\lambda r) \\ R_n(\lambda) = \beta_n N_n(\lambda a) J_1(\lambda r) \end{cases}$$

- Ainsi nous déduisons les déplacements et les contraintes pour les surfaces supérieure, inférieure et au plan de la fissure.

L'utilisation de l'équation (4.42) pour  $z = 0$  donne :

$$\frac{u_{\theta}^{(1)}(r, 0)}{\omega b} = -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ Q_n(\lambda) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2}) R_n(\lambda) \right] d\lambda \quad (4.46)$$

Pour évaluer numériquement cette intégrale nous devons la décomposer comme suit

$$\int_0^{\infty} I(\lambda, r) d\lambda = \int_0^{\infty} [I(\lambda, r) - H(\lambda, r)] d\lambda + \int_0^{\infty} H(\lambda, r) d\lambda$$

ou  $H(\lambda, r) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda, r)$

Sachant que :  $\frac{1 - e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}}$  et  $\frac{(1 - e^{2\lambda h_1})(e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2})}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}}$  tendent respectivement vers 0

et 1 lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$  et en tenant compte de la formule donnée par (4.20)

Nous déduisons :

$$\frac{u_{\theta}^{(1)}|_{z=0}}{b\omega} = -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1 - e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} Q_n(\lambda) - \frac{e^{\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1-h_2)}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} R_n(\lambda) \right] d\lambda \\ + \frac{2b}{\pi a^2} H(a - r) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sqrt{a^2 - r^2} U_{2n+1}(r/a) \quad (4.47)$$

En utilisant la même démarche précédente on déduit la contrainte au plan de l'encastrement :

$$\frac{\tau_{\theta z}^{(1)}|_{z=-h_1}}{G\omega} = \frac{b^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \frac{2e^{\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} \left[ Q_n(\lambda) + (e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda h_2}) R_n(\lambda) \right] d\lambda \quad (4.48)$$

La contrainte au plan de la fissure est donnée ci-dessous :

$$\frac{\tau_{\theta z}^{(1)}|_{z=0}}{G\omega} = \frac{b^2}{2} H(r - a) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \left[ f_3(\lambda) Q_n(\lambda) + f_4(\lambda) R_n(\lambda a) \right] d\lambda \quad (4.49)$$

ou  $f_3(\lambda)$  et  $f_4(\lambda)$  sont des fonction de  $\lambda$  déjà définie par (4.31) leurs fonctions équivalentes sont respectivement : 0 et -1

Après avoir décomposer cette l'intégrale on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}^{(1)}|_{z=0}}{G\omega} &= \frac{b^2}{2}H(r-a) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \left[ f_3(\lambda)Q_n(\lambda) + (f_4(\lambda) + 1)R_n(\lambda) \right] d\lambda \\ &\quad - \frac{b^2}{2}H(r-a) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int_0^{\infty} \lambda N_n(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (4.50)$$

Or l'équivalent de  $\lambda N_n(\lambda a)$  à l'infini est donnée par (4.35)

$$\begin{aligned} \text{Alors } \int_0^{\infty} \lambda N_n(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda &= \int_0^{\infty} \left\{ \lambda N_n(\lambda a) - \frac{8(n+1)}{\pi a^2} \left( a \sin(\lambda a) + \frac{2\cos(\lambda a)}{\lambda} \right) \right\} J_1(\lambda r) d\lambda \\ &+ \frac{8(n+1)}{\pi a^2} \int_0^{\infty} \left\{ a \sin(\lambda a) + \frac{2\cos(\lambda a)}{\lambda} \right\} J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned}$$

Ensuite nous utilisons les deux intégrales suivantes donnés par : Gradshteyn et Ryzhik. [19], formule 6.671.1 et formule 6.693.2 voir (A.1) et (A.2)

$$\int_0^{\infty} \sin(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{\sin(\arcsin(\frac{a}{r}))}{\sqrt{r^2 - a^2}} \quad a < r \quad (4.51)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda a)}{\lambda} J_1(\lambda r) d\lambda = \cos(\arcsin(\frac{a}{r})) \quad a < r$$

Nous déduisons enfin les deux contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}^{(1)}|_{z=0}}{G\omega} &= \frac{\tau_{\theta z}^{(2)}|_{z=0}}{G\omega} = \frac{b^2}{2}H(r-a) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \left[ f_3(\lambda)Q_n(\lambda) + (f_4(\lambda) + 1)R_n(\lambda) \right] d\lambda \\ &\quad - \frac{b^2}{2}H(r-a) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left[ \int_0^{\infty} \left\{ \lambda N_n(\lambda a) - \frac{8(n+1)}{\pi a^2} \left( a \sin(\lambda a) + \frac{2\cos(\lambda a)}{\lambda} \right) \right\} J_1(\lambda r) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{8(n+1)}{\pi a^2} \frac{2r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

Après avoir décomposer l'intégrale et remplacer son deuxième membre par (4.20) , la formule donnée par (4.44) pour  $z = 0$  nous permet de déduire le déplacement suivant

$$\begin{aligned} \frac{u_{\theta}^{(2)}|_{z=0}}{b\omega} &= -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1 - e^{2\lambda h_1}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} Q_n(\lambda) - \frac{e^{\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1-h_2)}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} R_n(\lambda a) \right] d\lambda \\ &\quad - \frac{2b}{\pi a^2} H(a-r) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sqrt{a^2 - r^2} U_{2n+1}(r/a) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le déplacement dans la deuxième région pour  $z = h_2$  est donnée par

$$\frac{u_{\theta}^{(2)}(r, h_2)}{\omega b} = -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda h_2} - e^{\lambda(2h_1+h_2)}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} Q_n(\lambda) - \frac{2(1 + e^{2\lambda h_1})}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} R_n(\lambda) \right] d\lambda \quad (4.54)$$

or les fonctions multipliés par  $Q_n(\lambda)$  et  $R_n(\lambda)$  tendent respectivement vers -1 et 0 , alors en utilisant la décomposition de l'intégrale et la fonction équivalente de  $M_n(\lambda b)$  donnée par (4.34) et sachant que (A.3) :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda b)}{\lambda^2} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{b}{2r} \sqrt{r^2 - b^2} + \frac{b}{r} \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) \quad r > b$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta^{(2)}|_{z=h_2}}{b\omega} &= \frac{r}{b} H(b-r) - \frac{b}{2} H(r-b) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \left[ \frac{2e^{-\lambda h_2}}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} Q_n(\lambda) - \frac{2(1 + e^{2\lambda h_2})}{e^{-\lambda h_2} + e^{\lambda(2h_1+h_2)}} R_n(\lambda) \right] d\lambda \\ &+ \frac{b}{2} H(r-b) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left[ \int_0^\infty \left\{ M_n(\lambda b) - \frac{2}{\pi b} \left( \frac{\cos(\lambda b)}{\lambda} - \frac{\sin(\lambda b)}{\lambda^2} \right) \right\} J_1(\lambda r) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi b r} \left( b\sqrt{r^2 - b^2} - r \arcsin\left(\frac{b}{r}\right) \right) \right] \quad (4.55) \end{aligned}$$

L'utilisation de l'équation (4.45) permet de déduire la contrainte dans la surface supérieure de la plaque sachant que  $\int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) M_n(\lambda x) d\lambda$  est donnée par (4.18)

$$\frac{\tau_{\theta z}^{(2)}|_{z=h_2}}{G\omega} = -\frac{b^2}{\pi} H(b-r) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(r/b)}{(b^2 - r^2)^{1/2}} \quad (4.56)$$

ou  $H(x-r)$  is the Heaviside step function :  $H(x-r) = \begin{cases} 1, & r < x \\ 0, & r > x \end{cases}$

- Pour tracer les courbes, il faut réécrire les formules des déplacements et de contraintes sous forme adimensionnelle. Pour cela nous effectuons les changements de variables suivants :  $\frac{h_1}{b} = H_1, \frac{h_2}{b} = H_2, \frac{z}{b} = \zeta, \frac{r}{b} = \rho, \frac{a}{b} = c$  et  $\lambda b = \eta$

**Déplacements et contraintes pour  $D_1 = [-h_1, 0]$**

$$\frac{u_\theta^{(1)}(\rho, \zeta)}{\omega b} = -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta \zeta} - e^{\eta(2H_1+\zeta)}}{e^{-\eta H_2} + e^{\eta(2H_1+H_2)}} \left[ Q_n(\eta) + (e^{-\rho H_2} - e^{\eta H_2}) R_n(\eta c) \right] d\eta \quad (4.57)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^{(1)}(\rho, \zeta)}{G\omega} = \frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \eta \frac{e^{-\eta \zeta} + e^{\eta(2H_1+\zeta)}}{e^{-\eta H_2} + e^{\eta(2H_1+H_2)}} \left[ Q_n(\eta) + (e^{-\eta H_2} - e^{\eta H_2}) R_n(\eta c) \right] d\eta \quad (4.58)$$

**Déplacements et contraintes pour  $D_2 = [0, h_2]$**

$$\begin{aligned} \frac{u_\theta^{(2)}(\rho, \zeta)}{\omega b} &= -\frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{1}{e^{-\eta H_2} + e^{\eta(2H_1+H_2)}} \left[ (e^{-\eta \zeta} - e^{\eta(2H_1+\zeta)}) Q_n(\eta) \right. \\ &\quad \left. - (1 + e^{2\eta H_1})(e^{-\eta(H_2-\zeta)} + e^{\eta(H_2-\zeta)}) R_n(\eta c) \right] d\eta \quad (4.59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}^{(2)}(\rho, \zeta)}{G\omega} &= \frac{b}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{\eta}{e^{-\eta H_2} + e^{\eta(2H_1+H_2)}} \left[ (e^{-\eta \zeta} + e^{\eta(2H_1+\zeta)}) Q_n(\eta) \right. \\ &\quad \left. + (1 + e^{2\eta H_1})(e^{-\eta(H_2-\zeta)} - e^{\eta(H_2-\zeta)}) R_n(\eta c) \right] d\eta \quad (4.60) \end{aligned}$$

### Présentation des résultats

Les principaux résultats de la simulation sont présentés par les figures ci dessous sous forme adimensionnel ou  $u_\theta^{*(i)} = \omega^* u_\theta^{(i)}$  et  $\tau_{\theta z}^{*(i)} = \omega^* \tau_{\theta z}^{(i)}$ . Ces dernières représentent le comportement des déplacements et la répartition des contraintes à travers le milieu élastique en fonction du rapport  $r/b$  pour différentes valeurs de  $\zeta$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  et de  $c$

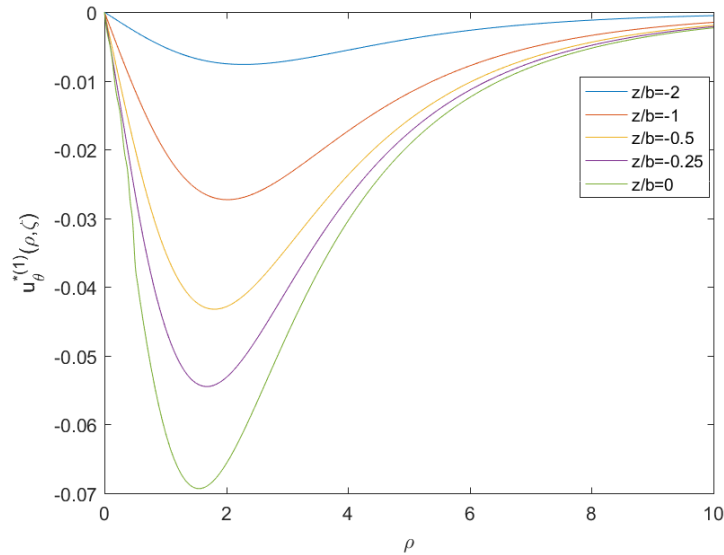


FIGURE 4.2 – Variation de  $u_\theta^{*(1)}$  en fonction de  $\rho$  pour une variation de  $\zeta$

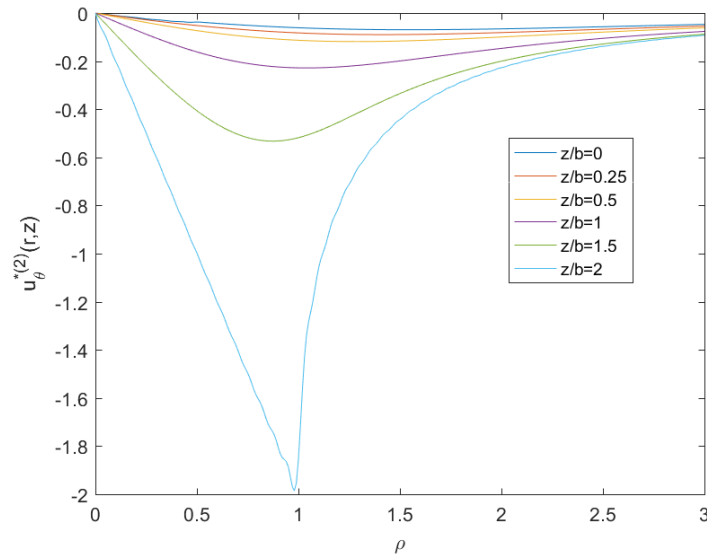


FIGURE 4.3 – Variation de  $u_\theta^{*(2)}$  en fonction de  $\rho$  pour une variation de  $\zeta$

Les résultats pour la variation de la composante du déplacement angulaire  $u_\theta^{(i)}$  en fonction de  $\rho = r/b$  sont représentés graphiquement par les figures (4.2) et (4.3) pour différentes valeurs des distances axiales  $z$ . Pour chaque domaine nous avons choisi différentes valeurs de  $\zeta$  avec les valeurs particulières des deux épaisseurs  $H_1 = 2$ ,  $H_2 = 2$  et la taille du disque  $c = 0.5$ .



Nous remarquons que les déplacements dans les deux régions augmentent en s'éloignant de l'axe verticale, puis diminuent en dehors de la bande du disque avec l'augmentation de  $\rho$ .

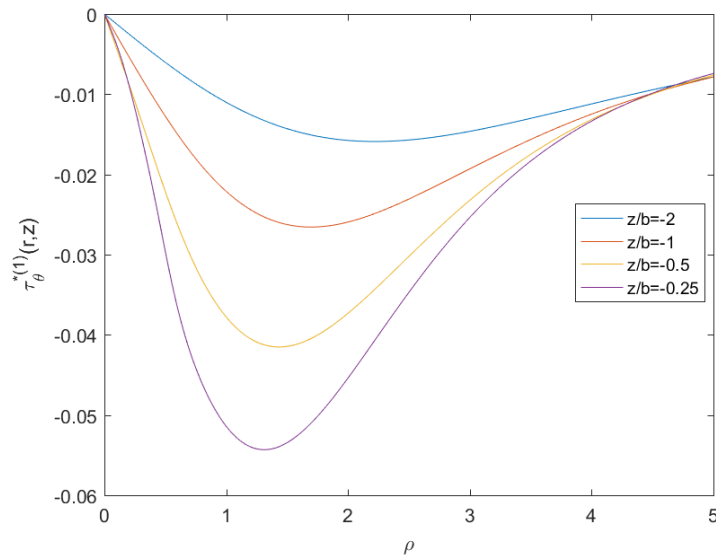


FIGURE 4.4 – La contrainte  $\tau_{\theta z}^{*(1)}$  en fonction de  $\rho$  pour une variation de  $\zeta$

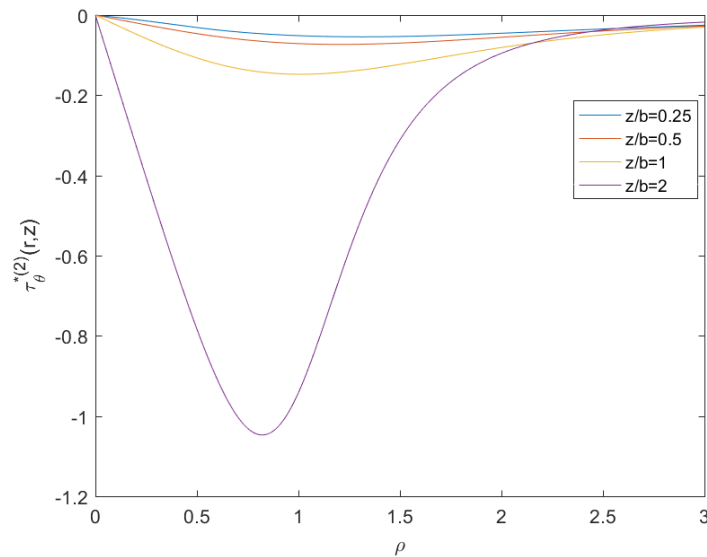


FIGURE 4.5 – La contrainte  $\tau_{\theta z}^{*(2)}$  en fonction de  $\rho$  pour une variation de  $\zeta$

La répartition des contraintes de cisaillement dans le milieu élastique est également illustrée par (4.4) et (4.5). Initialement il est clair que les contraintes commencent à augmenter, elles atteignent leur valeurs maximales, puis elles diminuent en s'approchant de l'axe verticale avec l'augmentation de la valeur de  $\rho$ .

- Résultats pour une diminution de l'épaisseur de la plaque :

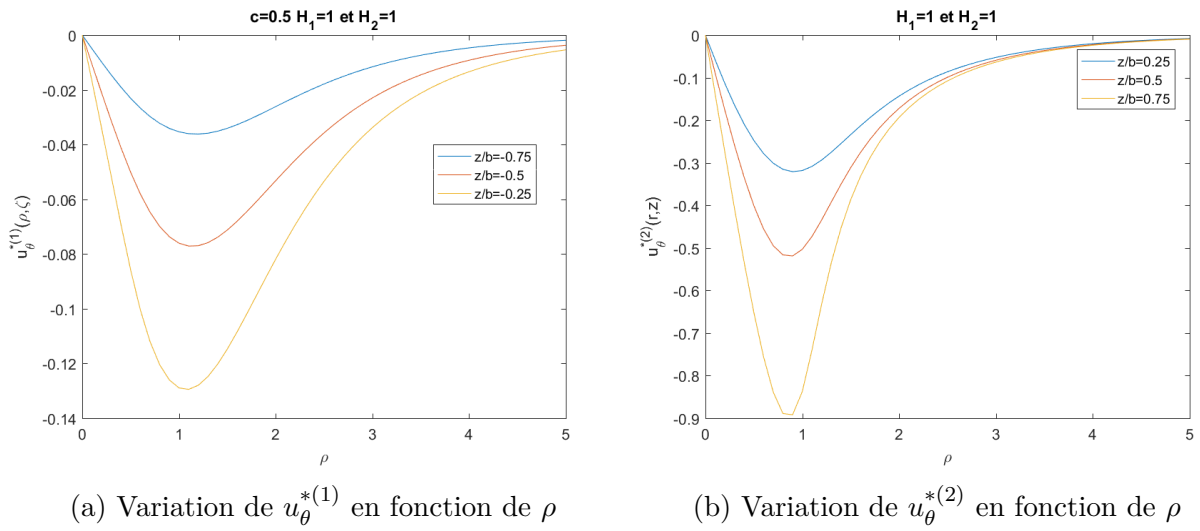


FIGURE 4.6 – Les déplacements  $u_{\theta}^{*(1)}$  et  $u_{\theta}^{*(2)}$  pour  $H_1 = 1$  et  $H_2 = 1$

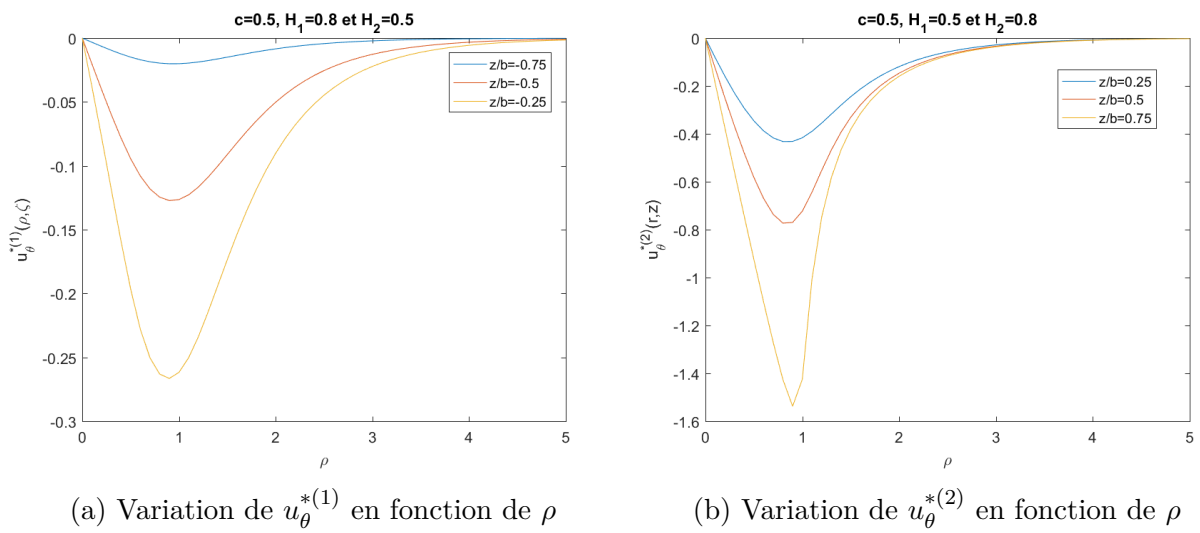


FIGURE 4.7 – Les déplacements  $u_{\theta}^{*(1)}$  et  $u_{\theta}^{*(2)}$  pour  $H_1 = 0.8$  et  $H_2 = 0.8$

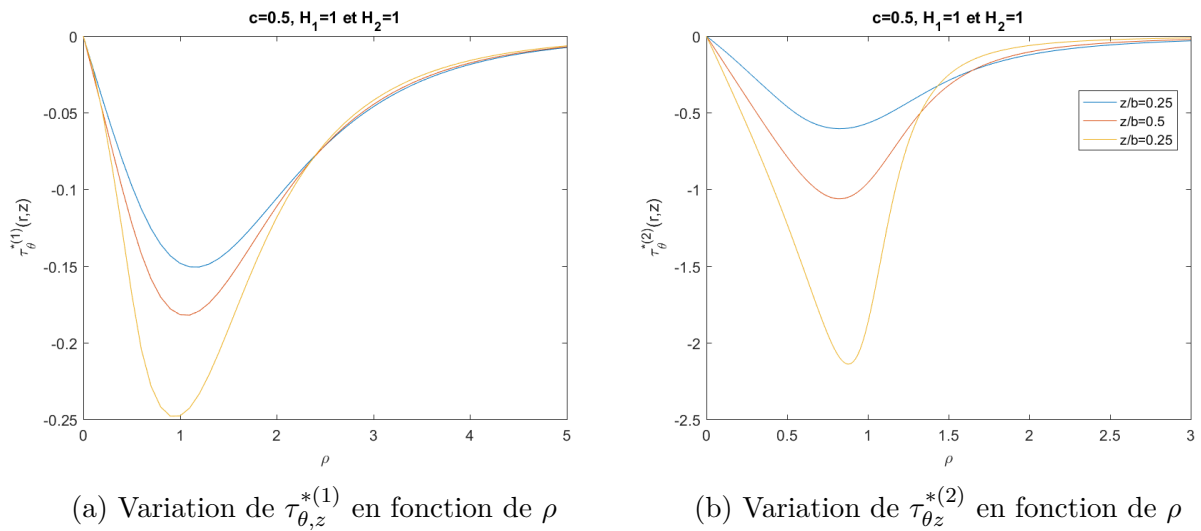


FIGURE 4.8 – Les contraintes  $\tau_{\theta z}^{*(1)}$  et  $\tau_{\theta z}^{*(2)}$  pour  $H_1 = 1$  et  $H_2 = 1$

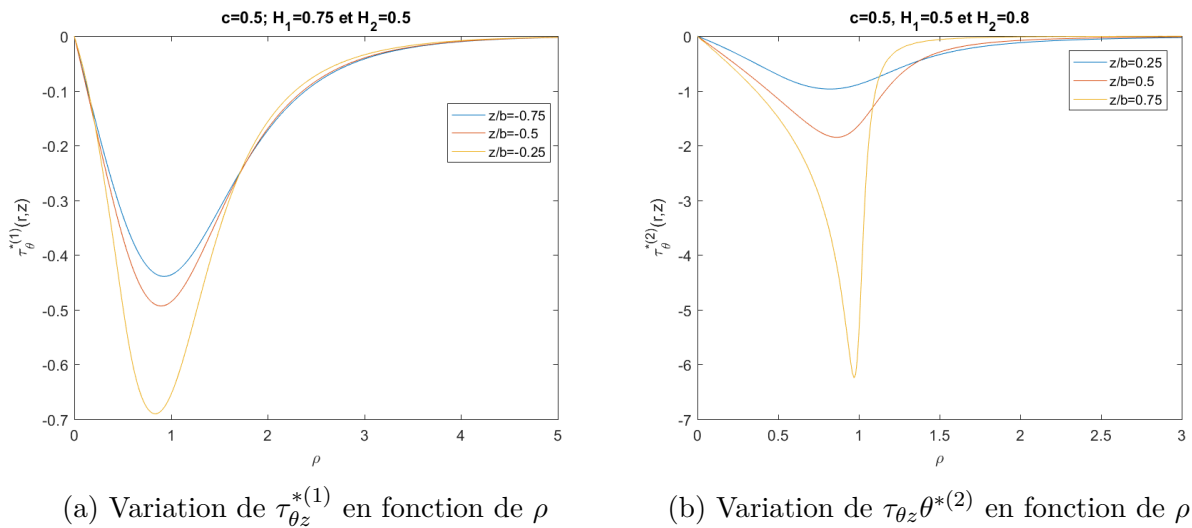


FIGURE 4.9 – Les contraintes  $\tau_{\theta z}^{*(1)}$  et  $\tau_{\theta z}^{*(2)}$  pour  $H_1 = 0.8$  et  $H_2 = 0.8$

On remarque a partir des figures 4.6 - 4.8 que les déplacements et les contraintes sont inversement proportionnelles au rapport d'épaisseur de la plaque.

- Les déplacements et les contraintes pour les différentes plans de la plaque :

- Le plan externe de la plaque  $z = h_2$  :

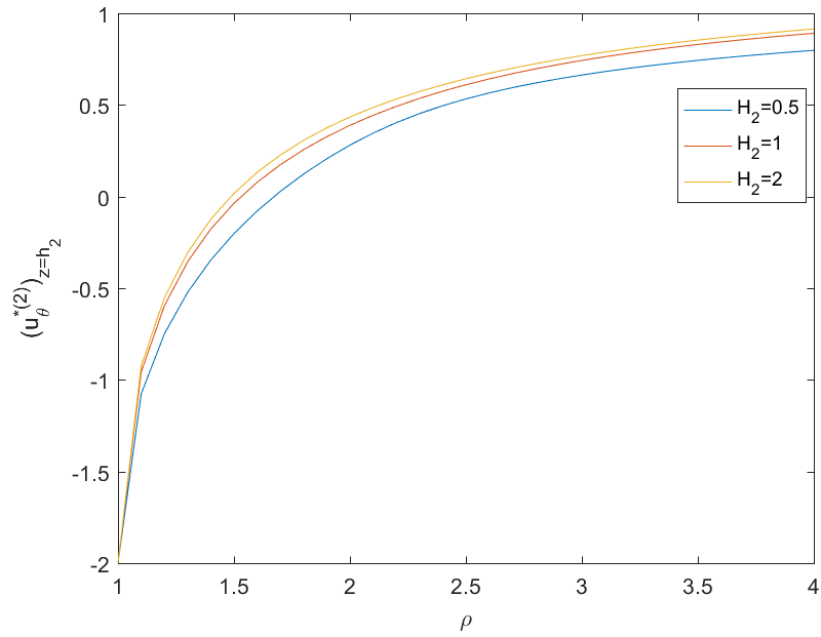


FIGURE 4.10 – Variation de  $u_{\theta}^{*(2)}(\rho, H_2)$  pour  $c = 0.5$ ,  $H_1 = 1$  avec la variation de  $H_2$

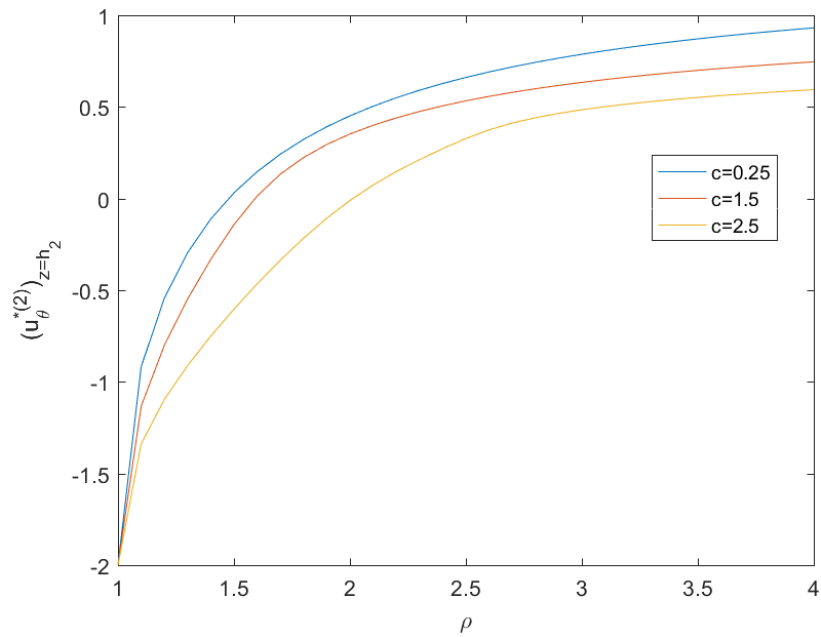
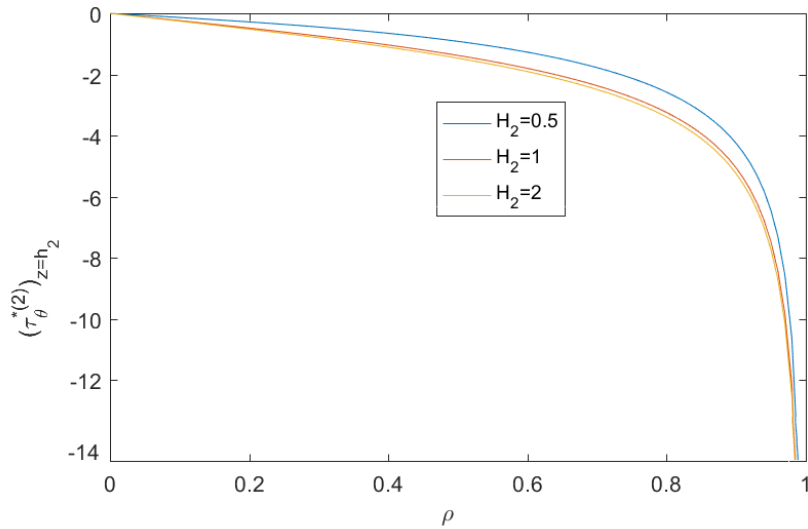
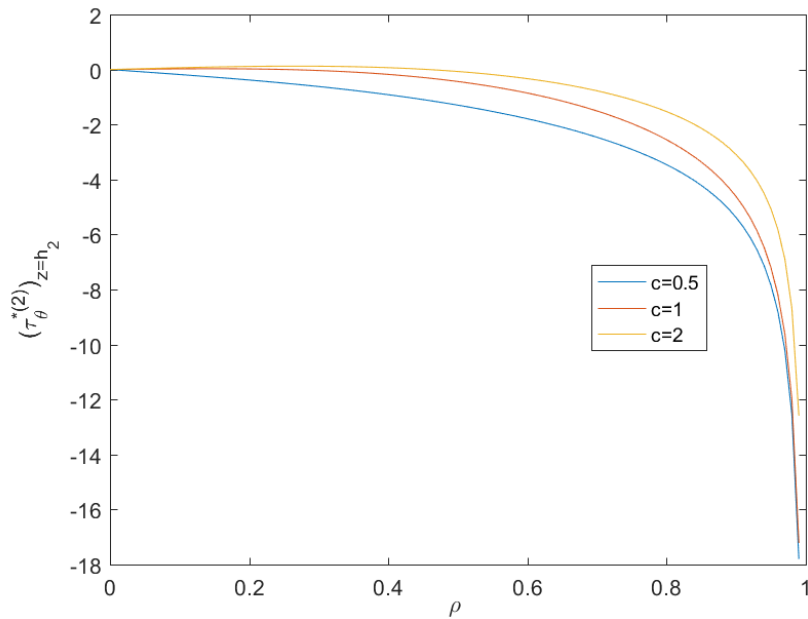


FIGURE 4.11 – Variation de  $u_{\theta}^{*(2)}(\rho, H_2)$  pour  $H_2 = 1$ ,  $H_1 = 1$  avec la variation de  $c$

La répartition du déplacement pour la surface supérieure est illustrée par les figures 4.10 et 4.11 avec la variation de  $h_2/b$ ,  $a/b$  respectivement. Elle augmente avec l'épaisseur de la couche et diminue avec le rayon de la fissure.


 FIGURE 4.12 – Variation de  $\tau_{\theta z}^{*(2)}(\rho, H_2)$  pour  $c = 0.5$ ,  $H_1 = 2.5$  avec la variation de  $H_2$ 

 FIGURE 4.13 – Variation de  $\tau_{\theta z}^{*(2)}(\rho, H_2)$  pour  $H_2 = 1$ ,  $H_1 = 1$  avec la variation de  $c$ 

La variation de la contrainte de cisaillement  $\tau_{\theta z}^{*(2)}$  sur la surface supérieure pour différentes valeurs de  $h_2/b$  et  $a/b$  respectivement est montrée par les figures 4.12 et 4.13.

La distribution obtient sa valeur maximale avec le centre du disque, elle diminue avec la diminution du rayon de la fissure, et en augmentant l'épaisseur de la plaque.

- Le plan de la fissure  $z = 0$

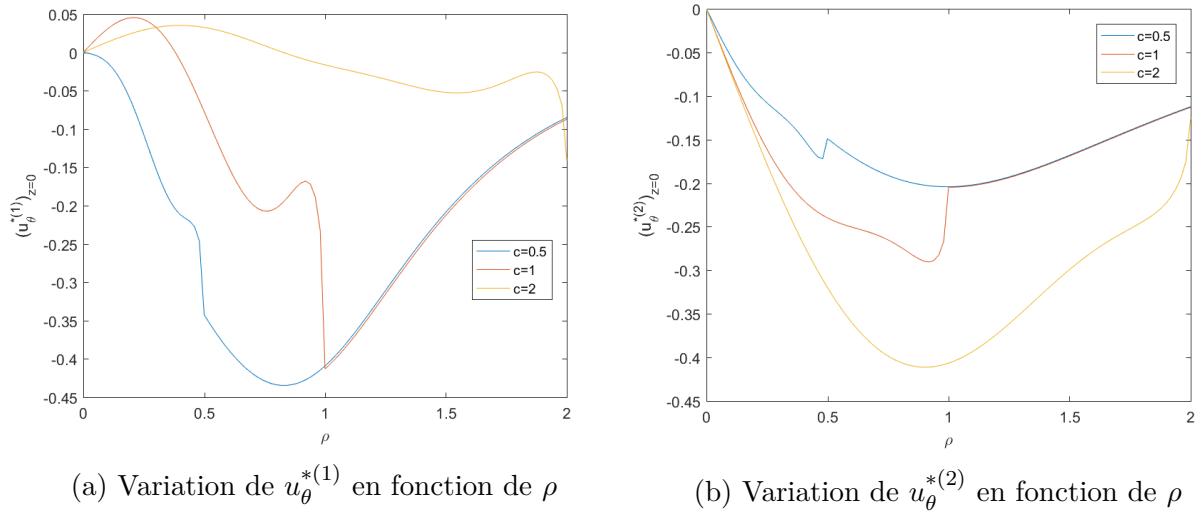


FIGURE 4.14 – Variation de  $u_\theta^{*(1)}(r, 0)$  et  $u_\theta^{*(2)}(r, 0)$  pour  $H_1 = 1$  et  $H_2 = 1$  pour différentes valeurs de  $c$

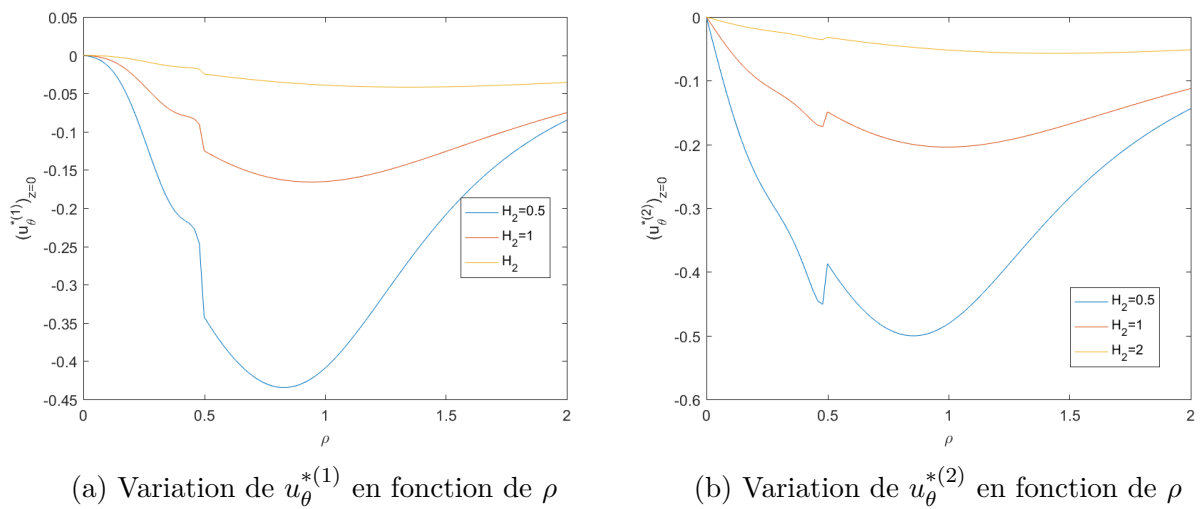


FIGURE 4.15 – Variation de  $u_\theta^{*(1)}(r, 0)$  et  $u_\theta^{*(2)}(r, 0)$  pour  $H_1 = 1$  et  $c = 0.5$  pour différentes valeurs de  $H_2$

Les figures 4.14 et 4.18 montrent la distribution angulaire du déplacement adimensionnel  $u_\theta^{(i)}$ ,  $i=1,2$  pour  $z = 0$  en fonction du rapport  $r/b$  pour les trois cas de variations du rapport d'épaisseur de la plaque  $h_2/b$  et le rayon de la fissure  $a/b$ .

Nous remarquons d'après les figures données par 4.14 que l'augmentation du rayon de la fissure entraîne une augmentation du déplacement adimensionnel dans la région(1) et une diminution du déplacement adimensionnel dans la région(2).

Les deux figures données par 4.18 nous permet de déduire que la décroissance du déplacement angulaire est inversement proportionnelle avec le rapport  $h_2/b$ , il est claire aussi d'après cette

figure que nous avons une continuité entre  $u_\theta^{(1)}$  et  $u_\theta^{(2)}$  et cela après avoir dépasser le rayon de la fissure.

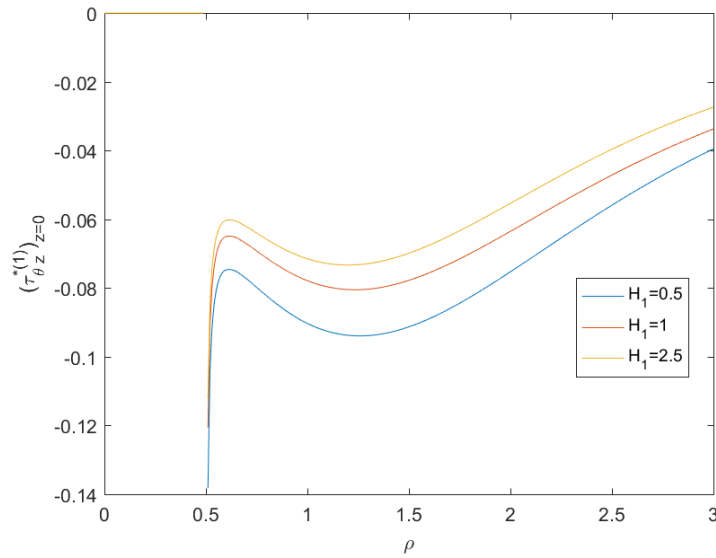


FIGURE 4.16 – Variation de  $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, 0)$  pour  $c = 0.5$  et  $H_2 = 2$  avec la variation de  $H_1$

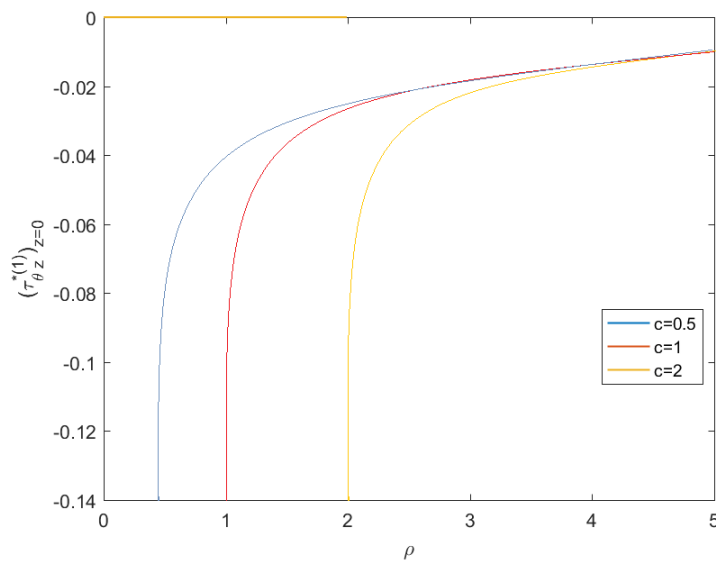
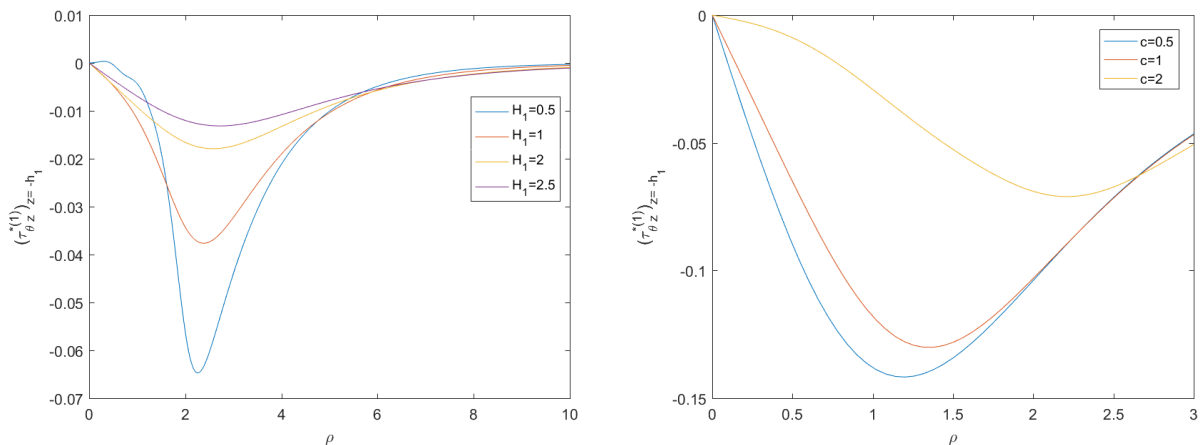


FIGURE 4.17 – Variation de  $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, 0)$  pour  $H_1 = 1$  et  $H_2 = 2$  avec la variation de  $c$

La distribution de la contrainte de cisaillement adimensionnelle  $\tau_{\theta z}^{*(1)}$  dans le plan de la fissure  $z = 0$  est donné par les figures ( 4.16) et ( 4.17). Il est à noter que les valeurs de la contrainte diminuent avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et du rayon de la fissure et cela après avoir dépasser ce dernier car il est claire que la contrainte est nulle au voisinage de la fissure.

- Le plan de l'encastrement  $z = h_1$  :


 (a)  $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, h_1)$  pour une Variation de  $H_1$ 

 (b)  $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, h_1)$  pour une variation de  $c$ 

 FIGURE 4.18 – Variation de  $\tau_{\theta z}^{*(1)}(r, h_1)$  en fonction de  $\rho$  pour  $H_2 = 1$ 

Les deux figurent données ci-dessus montrent la variation de la contrainte tangentielle adimensionnel  $\tau_{\theta z}^{*(1)}$  dans le plan de l'encastrement  $z = -h_1$  en fonction de rapport  $r/b$  et cela pour une variation des valeurs  $a/b$  et  $h_1/b$ , il est claire que la variation de la contrainte est inversement proportionnel a  $H_1$  et a  $c$ .

## 5.2 Expression du facteur d'intensité de contraintes

La plaque épaisse a une spécificité au bord de la fissure et pour l'évaluer nous introduisant le facteur d'intensité de contraintes qui est définie par la formule suivante [21] :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(r-a)/b} \frac{\tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0)}{G\omega} \quad (4.61)$$

où la contrainte tangentielle dans la région (1) au plan de la fissure  $z = 0$  est donné par l'équation (4.52). Comme les intégrales de cette dernière sont rapidement convergentes on déduit alors  $K_{III}$  à partir du dernier terme

$$\lim_{r \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(r-a)/b} \frac{8(n+1)}{\pi a^2} \frac{2r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 - a^2}} \quad (4.62)$$

Nous déduisons alors :

$$K_{III} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} (b/a)^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (n+1) \quad (4.63)$$

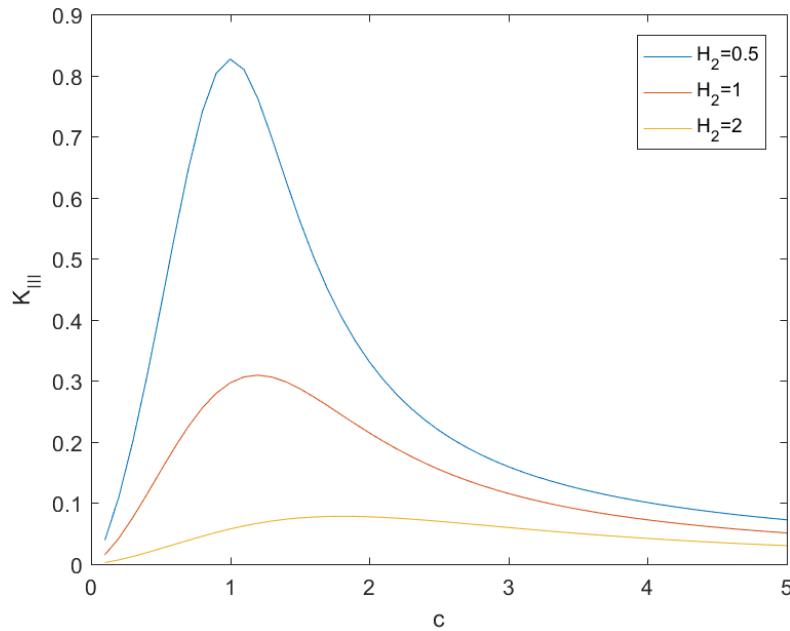


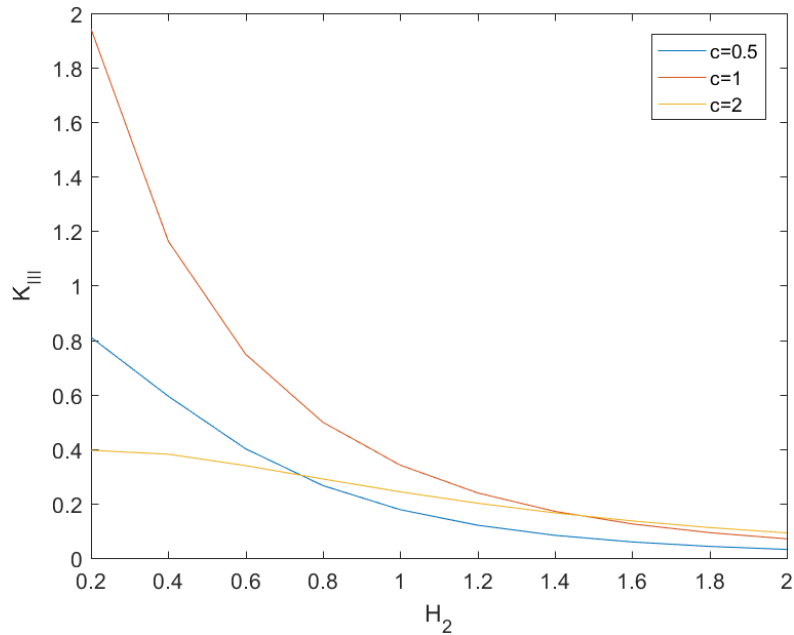
TABLE 4.3 – Valeurs de facteur d'intensité de contrainte  $K_{III}$  pour  $H_1 = 0.5$ 

$H_2$	$c = 0.5$	$c = 1$	$c=2$
0.5	0.490179963246626	0.928050202524864	0.361741818902873
1	0.177033380634139	0.340619782015500	0.242638935568575
1.5	0.069568309522459	0.145677078514785	0.149797872084104
2.5	0.015641267947173	0.037046967369041	0.057340992063945
5	0.001445023994323	0.003793746661950	0.008338814349338

Nous remarquons que la valeur du facteur d'intensité de contraintes augmente avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation du rayon de la fissure.

Les graphes de la variation du facteur d'intensité de contraintes  $K_{III}$  correspond au problème étudié sont présentés par les figures (4.19) et (4.20) suivantes

FIGURE 4.19 – Variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de  $c$


 FIGURE 4.20 – Variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de  $H_2$ 

On voit très bien que le facteur d'intensité de contraintes diminue avec l'augmentation de  $H_2$ , et converge vers zéro pour de très grandes valeurs de cette épaisseur. Pour les valeurs décroissantes de  $c$ , nous notons la fragilité progressive de la plaque. On remarque que l'intensité de  $K_{III}$  diminue avec l'augmentation du rayon de la fissure elle donne des valeurs maximales lorsque le rapport entre la fissure et le disque est  $a/b \leq 1$  et des valeurs minimales lorsque  $a/b \geq 1$ .

### 5.3 Expression du moment de torsion

Le moment de torsion requis pour faire tourner le disque appliqué sur la surface supérieur de la plaque peut être exprimé par l'équation suivante

$$T = 2\pi \int_0^b (\tau_{\theta z}^{(2)})_{z=h_2} r^2 dr \quad (4.64)$$

ou  $\tau_{\theta z}^{(2)}|_{z=h_2}$  est donnée par la formule (4.56) en utilisant cette dernière, l'expression de  $T$  devient

$$T = -2b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^b \frac{T_{2n+1}(r/b)}{(b^2 - r^2)^{1/2}} r^2 dr$$

en effectuant deux changement de variable  $x = r/b$  et  $t = \arccos(x)$  nous trouvons l'intégrale suivante :

$$\frac{T}{G\omega b^4} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\pi/2} \cos[(2n+1)t] \cos^2(t) dt \quad (4.65)$$

Pour résoudre cette intégrale nous utilisant la formule 2.538 donnée par : Gradshteyn et Ryzhik, op. cit [19] et cela pour  $p = 2$  et  $a = 2n + 1$  voir A4

$$\int \cos(ax)\cos^p(x)dx = \frac{1}{p+a} \left\{ \cos^p(x)\sin(ax) + p \int \cos^{p-1}(x)\cos((a-1)x)dx \right\}$$

Cette dernière formule nous permet de déduire le moment de torsion suivant :

$$T^* = \frac{T}{G\omega b^4} = -4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \alpha_n \quad (4.66)$$

Les figures ( 4.21) et ( 4.22) montrent la variation du moment de torsion appliqué sur le disque en fonction du rapport  $a/b$  et le rapport  $h_2/b$ .

Il est à noter que la valeur de  $T^*$  augmente avec la diminution de l'épaisseur  $h_2$  de la plaque dans le cas ou  $\frac{a}{b} \leq 0.8$ , un comportement opposé est remarqué lorsque  $\frac{a}{b} \geq 0.8$ . La valeur de  $T^*$  augmente aussi avec l'augmentation du rayon du disque  $b$  et l'effet de la fissure disparaît presque totalement sur la variation de  $T^*$  lorsque  $h_2/b \geq 1$ .

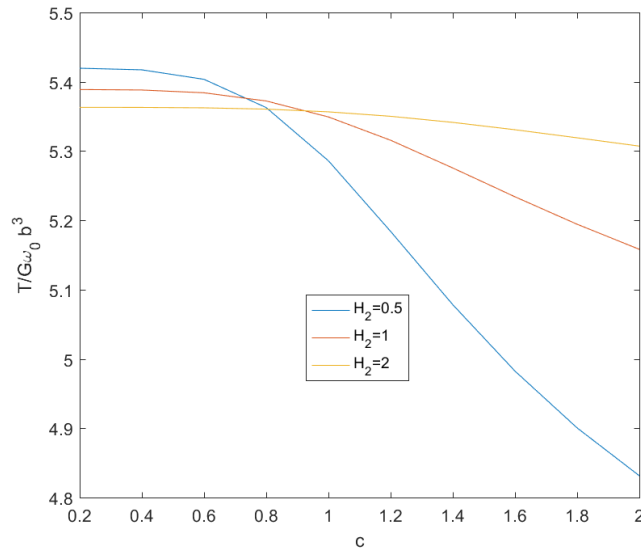


FIGURE 4.21 – Variation de  $T^*$  en fonction de  $c$  pour une variation de  $H_2$

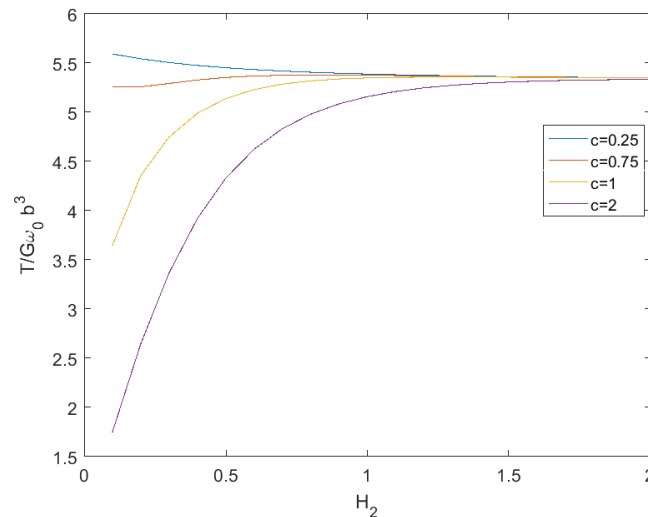


FIGURE 4.22 – Variation de  $T^*$  en fonction de  $H_2$  pour une variation de  $c$

Les figures 4.23- 4.26 présentent quelques contours que nous avons effectués afin de montrer la distribution des déplacements et des contraintes autour de la fissure et autour du disque et cela pour les deux régions (1) et (2).

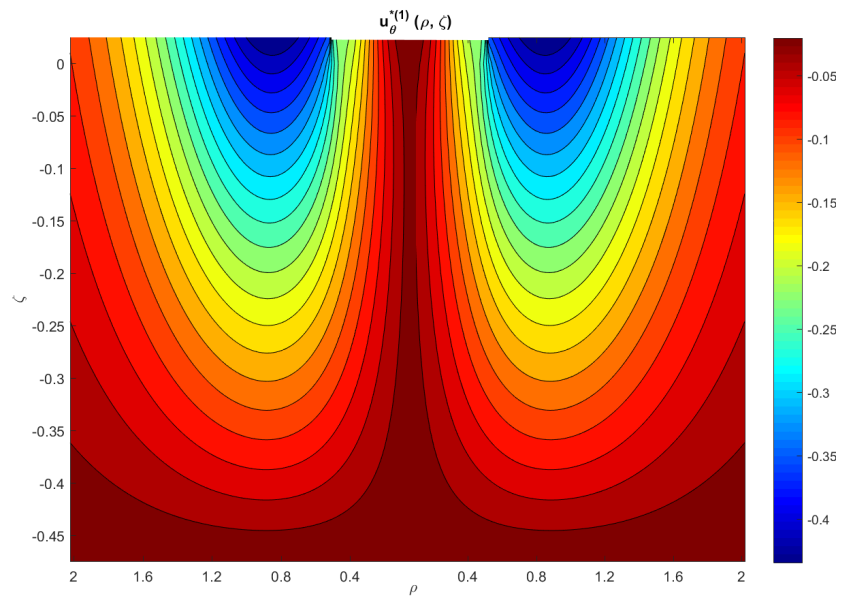


FIGURE 4.23 – Contour pour la variable du déplacement  $u_{\theta}^{(1)}$

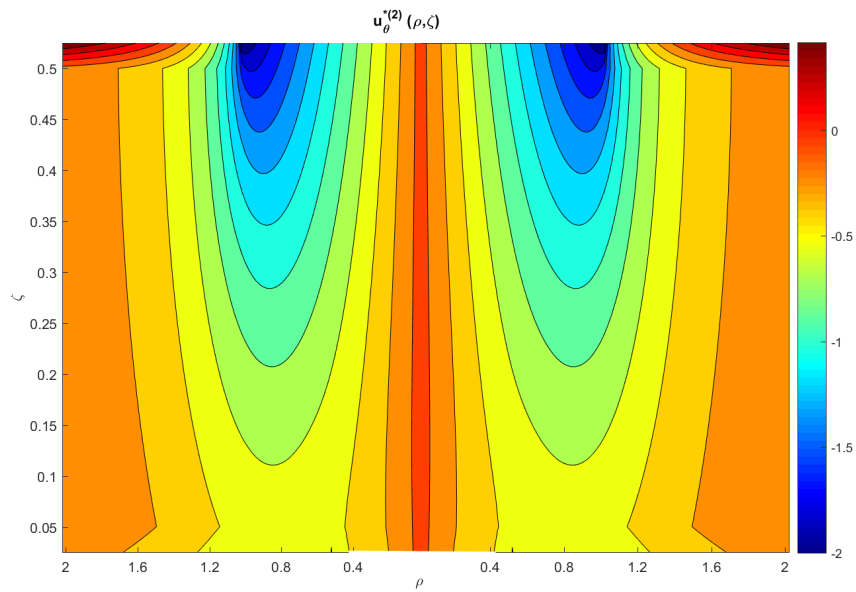


FIGURE 4.24 – Contour pour la variable du déplacement  $u_{\theta}^{(2)}$

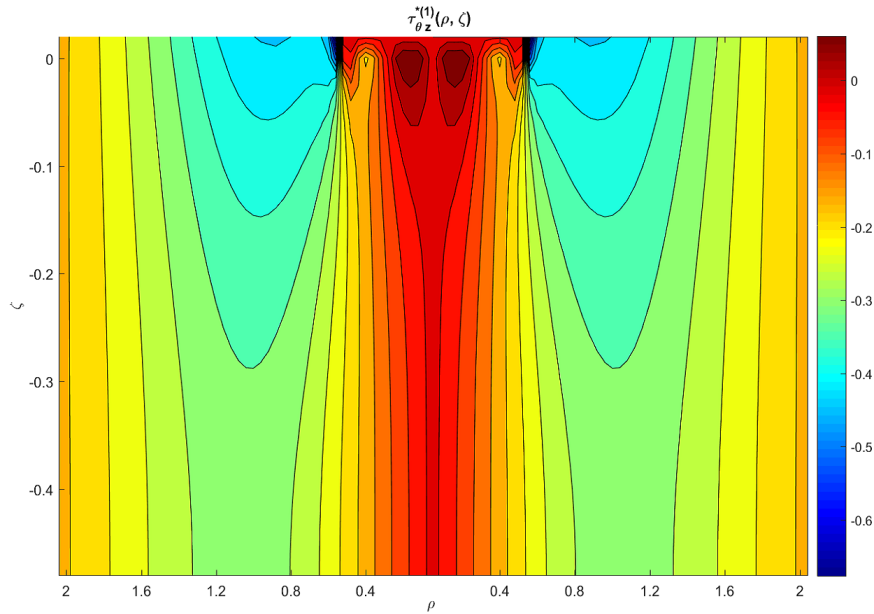


FIGURE 4.25 – Contour pour la contrainte tangentielle dans la région (1)

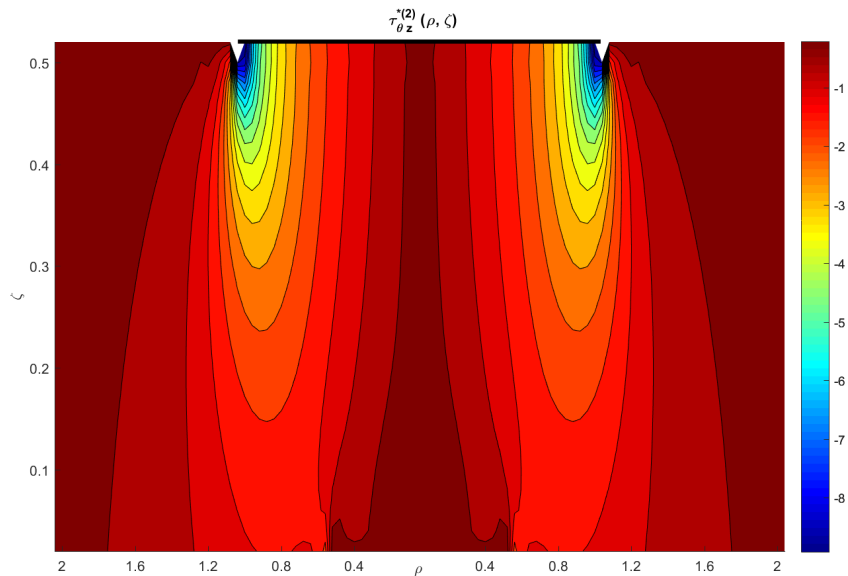


FIGURE 4.26 – Contour pour la contrainte tangentielle dans la région (2)

La figure 4.23 montre que, pour une valeur spécifique de  $r/b$ , le déplacement angulaire dans la région(1) atteint son maximum dans le plan  $z = 0$  et il s'annule en s'approchant de l'encastrement.

D'après les figures 4.25 et 4.26, nous observons une très forte concentration de contraintes autour de la fissure et autour du disque pour la contrainte adimensionnel  $\tau_{\theta z}^{(i)}(r/b, z/b)=(0.5,0)$ , ces contraintes varient considérablement au voisinage du fond de fissure et disparaître à l'infini ce qui est également indiqué sur les figures 4.16 et 4.17.

Pour le plan  $z = h_2$  les figures 4.24, 4.26 indiquent que le déplacement et la contrainte adimensionnels dans la région(2) sont maximales au voisinage du disque et cela est du au moment de torsion appliquée.

## 6 Validation des résultats

### Comparaison avec le problème de Florance

Afin de comparer le résultat avec celui de Florence déjà défini dans le chapitre 1 en néglige le rayon de la fissure  $a$  et l'épaisseur  $h_1$  de la plaque, les résultats obtenus sont indiqués par le tableau et la figure donnés ci dessous.

TABLE 4.4 – Valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour  $c \rightarrow 0$ ,  $H_1 = 0$  et  $H_2 = 2$ .

n	$a_n$	$b_n(10^{-7})$
1	-4.042104979319343	-0.360995595976803
2	0.002495928468401	-0.023358607516752
3	-0.000066753846674	-0.027411660911699
4	0.000001337865186	-0.025907412404934
5	-0.000000081457138	-0.031414421289322
6	0.000000065794009	-0.028932620823336
7	-0.000000008865190	-0.034039561735453
8	0.000000231972973	-0.028761171064056
9	0.000000297011119	-0.030966872565778
10	0.000000766968502	-0.041636325751806

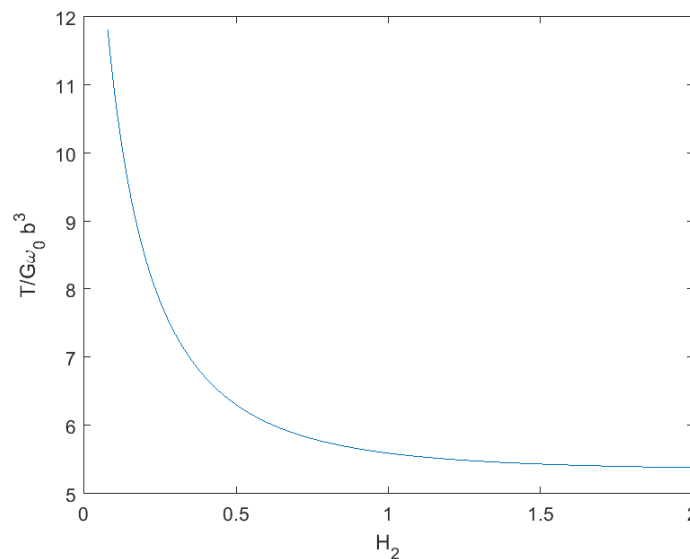


FIGURE 4.27 – Variation de  $T^*$  en fonction de  $H_2$  pour  $c \rightarrow 0$  et  $H_1 \rightarrow 0$

Cette figure montre une bonne compatibilité avec celle correspondant a Florance ou le moment de torsion diminue avec l'augmentation de l'épaisseur  $H_2$ .

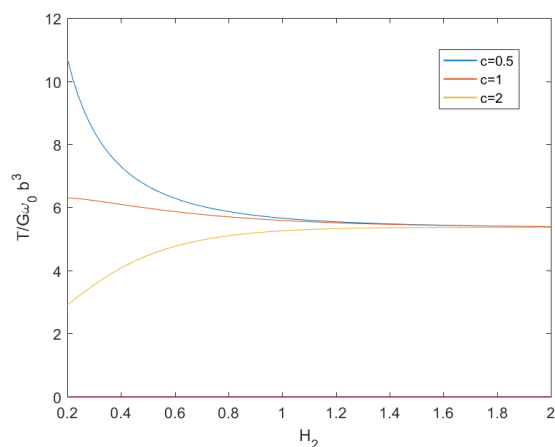
## Comparaison avec le problème de Toshiaki

Pour comparer notre problème avec le problème traité par le japonais Toshiaki déjà défini dans le chapitre 1 nous superposons le plan de l'encastrement avec le plan de la fissure en annulant l'épaisseur  $h_1$ . Les coefficients obtenus sont donnés ci-dessous :

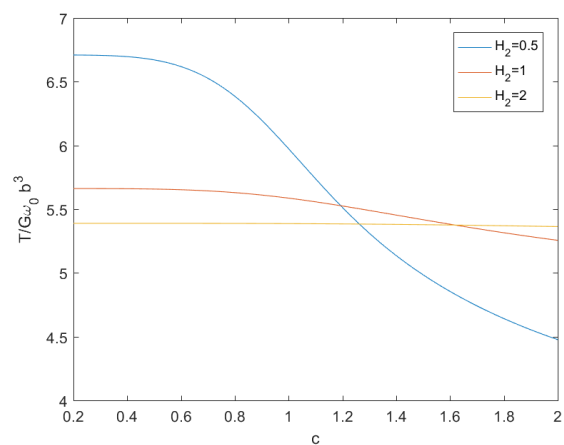
TABLE 4.5 – Valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour  $c = 0.5$ ,  $H_1 \rightarrow 0$  et  $H_2 = 2$ .

n	$a_n$	$b_n$
1	-4.042020726176149	-0.000204073530305
2	0.002466348070711	-0.000000320516389
3	-0.000062563881157	-0.000000425936397
4	0.000000915783791	-0.000000315191187
5	-0.000000046527232	-0.000000493926736
6	0.000000063274000	-0.000000356574847
7	-0.000000008702130	-0.000054247744294
8	0.000000231960014	-0.000000354587222
9	0.000000297007191	-0.000000503986171
10	0.000000766957344	-0.000002993305618

Les figures obtenues sont représentées ci-dessous, ces dernières ont la même allure que les figures qui ont été présentées par le problème du japonais TOSHIAKI.



(a) Variation de  $T^*$  en fonction de  $H_2$



(b) Variation de  $T^*$  en fonction de  $c$

FIGURE 4.28 – Variation de  $T^*$  pour le cas ou la fissure est dans le plan de l'encastrement

## Comparaison avec le problème de Low

Le problème traité par Low apparaît dans notre étude dans le cas où on fait tendre  $h_1$  vers l'infini cela nous permet d'obtenir le tableau des coefficients donné par :

TABLE 4.6 – Valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour  $c = 0.5$ ,  $H_1 \rightarrow \infty$  et  $H_2 = 2$ .

n	$a_n$	$b_n$
1	-4.000178751943372	-0.002023239466109
2	-0.000013927168275	0.000029214796393
3	0.000001568287014	-0.000008061042030
4	0.000000111794216	0.000005795830912
5	-0.000002496992381	-0.000009393997695
6	0.000002801459873	0.000007022647942
7	-0.000003016921158	-0.000010384812582
8	0.000003482080608	0.000007837708759
9	-0.000003180797878	-0.000011065916938
10	0.000004438749410	-0.000192908087648

Les figures obtenues pour le facteur d'intensité de contrainte et pour le moment de torsion appliqué sont données ci dessous :

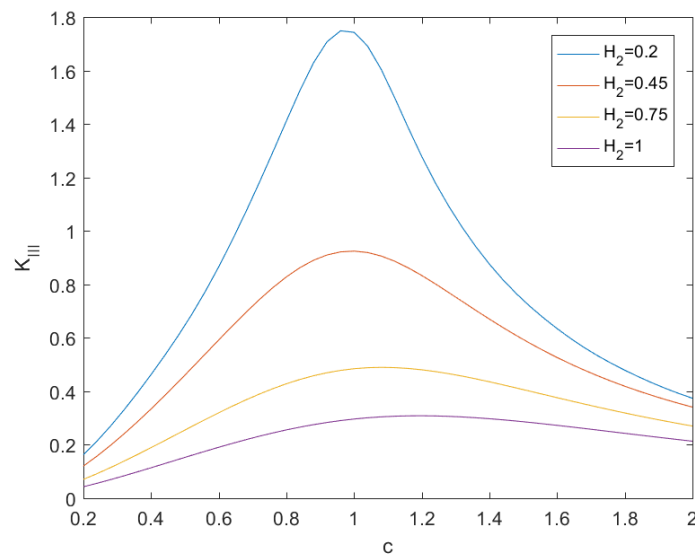
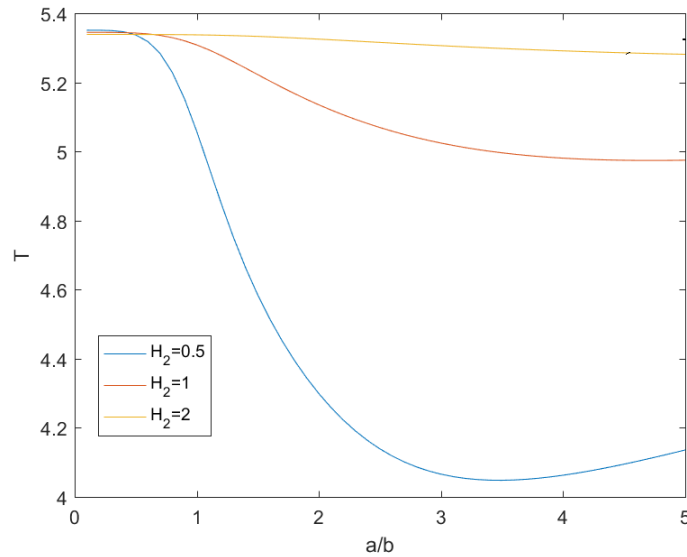


FIGURE 4.29 – Le facteur d'intensité de contrainte pour  $H_1$  très grand




 FIGURE 4.30 – Le moment de torsion appliqué pour  $H_1$  très grand

### Le cas d'un demi espace

Pour un cas de particularité du problème ou  $a = 0$  et  $h_2 \rightarrow \infty$ , l'équation donnée par (4.28) devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda = \delta_{0m} - \delta_{1m}/2, \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (4.67)$$

De cette dernière équation (4.67) on trouve  $\alpha_0 = -4/b$ ,  $\alpha_n = 0, (n \geq 1)$ . En outre, les expressions analytique des contraintes des déplacement et du moment de torsion  $T^*$  pour la surface  $z = h_2$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{u_{\theta}^{(2)}|_{z=h_2}}{b\omega} &= \frac{r}{b} - \frac{2}{\pi} H(r-b) \left\{ \frac{r}{b} \cos^{-1} \frac{r}{b} + \frac{(r^2 - b^2)^{1/2}}{r} \right\}, \\ \frac{\tau_{\theta z}^{(2)}|_{z=h_2}}{G\omega} &= \frac{4rH(b-r)}{\pi(b^2 - r^2)^{1/2}}, \\ \frac{T}{G\omega b^3} &= 16/3. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Les équations données par (4.68) sont celles données par le problème d'un demi-espace élastique par un poinçon rigide circulaire.

TABLE 4.7 – Valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour  $c = 0$ ,  $H_1 = 1$  et  $H_2 \rightarrow \infty$ .

n	$a_n$	$b_n(10^{-6})$
1	-4.000220638577100	0.007263782229941
2	0.000000700811302	-0.016087759322772
3	-0.000000503004444	0.019346656998431
4	0.000000316568376	-0.058877637075437
5	-0.000002509389402	-0.054164774878744
6	0.000002797173442	-0.259153690047928
7	-0.000003010916692	0.116324940309982
8	0.000003475507532	-0.087944169858103
9	-0.000003173766256	-0.009150680366467
10	0.000004431311810	0.199976325698666

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode analytique qui nous a permis de résoudre les équations intégrales duales de notre problème. La solution du problème a été basée sur l'utilisation de la méthode de la transformation intégrale de Hankel.

Les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont donnés sous forme de tableau pour différentes valeurs du rapport  $a/b$  et de la hauteur de la plaque. On peut remarquer qu'ils convergent plus rapidement si  $H_1$  et  $H_2$  sont croissantes. La convergence du système infini est réalisée à partir des 10 premiers termes de la série, il a été examiné que cette itération des coefficients est suffisante pour le calcul des champs de contraintes du problème proposé.

Des grandeurs physiques ont été calculées numériquement et représentées graphiquement pour différentes valeurs de  $H_1$ ,  $H_2$  et  $c$  à savoir les déplacements, les contraintes et le facteur d'intensité de contraintes.

Un ensemble de conclusions sur l'effet de l'épaisseur de la plaque élastique sur les différentes grandeurs a été donnée.

# Conclusion Générale

A travers ce mémoire nous avons étudié le problème de déformation élastique d'une plaque épaisse reposant sur un appui rigide indéformable et ayant une fissure circulaire, la déformation de la plaque est due à une torsion d'un disque rigide appliqué sur sa surface externe.

L'évolution élastique de la plaque a été décrite par des équations mécaniques (équilibre, lois de comportement) en vérifiant les conditions aux limites du problème.

La résolution du problème est basée sur une procédure analytique en utilisant la méthode de la transformée de Hankel qui nous a permis de ramener l'équation d'équilibre (EDP) en une équation différentielle ordinaire (EDO) simple dont sa solution est transformée à une solution globale du problème à l'aide de la transformée inverse de Hankel.

La solution analytique a été obtenue à l'aide des coefficients d'un système algébrique infini. La convergence du système infini est réalisée à partir des 10 premiers termes de la série.

Les résultats du mémoire se résument comme suit :

- Plus les rapports d'épaisseurs ( $h_2/b$ ) et ( $h_1/b$ ) sont grands plus la convergence des coefficients adimensionnels  $a_n$  et  $b_n$  est rapide. Les déplacements et les contraintes sont inversement proportionnel avec ces rapports ;
- La répartition du déplacement angulaire adimensionnel  $u_\theta^{(i)}$  dans le plan de la fissure  $z = 0$  est inversement proportionnel avec le rapport  $h_2/b$ . La pente du déplacement approche de zéro lorsque nous dépassons le rayon de la fissure ;
- La contrainte tangentielle dans le plan  $z = 0$  a une valeur infinie sur la frontière de la fissure. Elle décroît lorsque l'épaisseur de la plaque augmente ;
- Le facteur d'intensité de contrainte adimensionnel  $K_{III}$  diminue avec l'augmentation du rapport  $h_2/b$ , un comportement opposé est obtenu avec le rayon de la fissure : lorsque ce dernier augmente la valeur de  $K_{III}$  augmente aussi, cela fait accroître la possibilité de la rupture de la plaque ;
- Le moment de torsion appliqué sur le disque rigide présente une variation remarquable, il donne des petites valeurs pour une plaque mince avec un rayon de fissure grand, et il se rapproche du cas d'un demi-espace 16/3 lorsque la plaque devient plus épaisse.

Alors les cas qui fragilise la solidité du milieu élastique (rupture de la plaque) sont :  
la diminution de la hauteur entre le plan de la fissure et le plan ou on applique le disque ;  
L'augmentation du rayon de la fissure et le rayon du disque.

La comparaison que nous avons effectuée avec les travaux déjà publiés nous a permis de confirmer l'exactitude de la résolution du problème.

## Perspectives

La méthode de résolution analytique développée dans ce mémoire peut être appliquée pour la résolution d'une classe intéressante des problèmes de recherche.

Nous envisageons développer cette méthode pour la résolution des problèmes multicouches ayant des fissures annulaires ainsi que des torsions moyennant des disques rigides. Il serait aussi intéressant de généraliser le résultat au cas de torsion dynamique.

# Annexe A

## Les formules intégrales

### A.1 Combinaisons entre la fonction de Bessel et les fonctions trigonométriques

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \sin(\beta x) dx = \begin{cases} \frac{\sin\left(\arcsin\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} & \beta < \alpha \\ \infty \text{ or } 0 & \beta = \alpha \\ \frac{\alpha^\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{2}\right)}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2})^\nu} & \beta > \alpha \end{cases}$$

### A.2 Combinaisons entre la fonction de Bessel, les fonctions trigonométriques et les fonctions de puissances

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \cos(\beta x) \frac{dx}{x} = \begin{cases} \frac{1}{\nu} \cos\left(\nu \arcsin\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) & \beta \leq \alpha \\ \frac{\alpha^\nu \cos(\nu\pi/2)}{\nu(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2})} & \beta \geq \alpha \end{cases}$$

### A.3 Combinaisons entre la fonction de Bessel, les fonctions trigonométriques et les fonctions de puissances

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha x) \sin(\beta x) \frac{dx}{x^2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sin(\nu \arcsin(\beta/\alpha))}{\nu^2 - 1} - \frac{\beta \cos(\nu \arcsin(\beta/\alpha))}{\nu(\nu^2 - 1)} & 0 < \beta < \alpha \\ \frac{-\alpha^\nu \cos(\nu\pi/2) [\beta + \nu\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}]}{\nu(\nu^2 - 1) [\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}]^\nu} & 0 < \alpha < \beta \end{cases}$$

### A.4 Sinus et cosinus d'angles multiples

La formule 2.538 donnée par : Gradshteyn et Ryzhik, op. cit

$$\int \cos(ax) \cos^p(x) dx = \frac{1}{p+a} \left\{ \cos^p(x) \sin(ax) + p \int \cos^{p-1}(x) \cos((a-1)x) dx \right\}$$

Pour  $p = 2$  et  $a = 2n + 1$  le terme  $\cos^p(x) \sin(ax)$  s'annule lorsque  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

tandis que le deuxième coté sera calculé après avoir utiliser la formule trigonométrique

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} \left( \cos(a-b) + \cos(a+b) \right)$$

Alors la solution de cette intégrale sera :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)x) \cos^2(x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$

## A.5 La combinaison de la fonction de Bessel avec $x$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x J_{\frac{1}{2}(\nu+n)}(ax) J_{\frac{1}{2}(\nu-n)}(ax) J_\nu(bx) dx \\
 &= 2\pi^{-1} b^{-1} (4a^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}} T_n \left( \frac{b}{2a} \right) \quad [a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \quad 0 < b < 2a] \\
 &= 0 \quad [a > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \quad 2a < b]
 \end{aligned}$$



# Annexe B

# Le code Matlab

## B.1 Programme MATLAB pour le calculs des coefficients $a_n$ et $b_n$

```
function [ X ] =Xm(m,x,lb )
X=(-2).*besselj(m,(x.*lb)./2).*((x.*besselj(m + 1,(x.*lb)./2))
./2 ...
- (m.*besselj(m,(x.*lb)./2))./lb);
end
%
=====

function [M]=Mn(n,x,lb)
M=((x.*besselj(n-0.5,(x.*lb)./2))./2-((n+0.5).*besselj(n+0.5,(x
.*lb)./2))./lb).*...
besselj(-n-0.5,(x.*lb)./2)-besselj(n+0.5,(x.*lb)./2).*...
((x.*besselj(0.5- n,(x.*lb)./2))./2+((n+0.5).*besselj(-n
-0.5,(x.*lb)./2))./lb);
end
%
=====

function Nn=Nn(n,x,lb)
Nn=lb.*(Mn(n,x,lb)-Mn(n+1,x,lb));
end
%
=====

function [A_mn]=A(m,n,eta0,b,H1,H2)
f1=@(eta)((exp(-eta.*H2)-exp(eta.*(2*H1+H2)))./(exp(-eta.*H2)+
exp(eta.*(2*H1+H2))));
g1=@(eta)(f1(eta).*Mn(n,1,eta).*Xm(m,1,eta));
A1=quadgk(g1,0,100,'MaxIntervalCount',10000);
K1=@(eta)(Mn(n,1,eta).*Xm(m,1,eta));
A2=quadgk(K1,100,eta0,'MaxIntervalCount',10000);
A3=(4.*((-1).^m)./(b.*pi.^2))*((cos(eta0).^2)./eta0 +(sinint
(2.*eta0)-pi/2));
A_mn=A1-A2-A3;
end
%
=====
```

```

function [B_mn]=B(m,n,H1,H2,c)f2=@(eta)(-2*(1+exp(2.*eta.*H1))
    ./((exp(-eta.*H2)+exp(eta.*(2*H1+H2)))));
g2=@(eta)(f2(eta).*Nn(n,c,eta).*Xm(m,1,eta));
B1=quadgk(g2,0,100,'MaxIntervalCount',10000);
B_mn=B1;
end
%
=====

```

```

function [C_mn]=C(m,n,H1,H2,c)
f3=@(eta)((1+exp(2.*eta.*H1))./(exp(-eta.*H2)+exp(eta.*(2.*H1+
    H2)))));
g3=@(eta)(eta.*f3(eta).*Mn(n,1,eta).*Xm(m,c,eta));
C1=quadgk(g3,0,100,'MaxIntervalCount',10000);
C_mn=C1;
end
%
=====

```

```

function [D_mn]=D(m,n,eta0,b,c,H1,H2)
f4=@(eta)((exp(-eta.*H2)-exp(eta.*H2)).*...
    (1+exp(2*eta.*H1))./(exp(-eta.*H2)+exp(eta.*(2*H1+H2)))));
g4=@(eta)(eta.*f4(eta).*Nn(n,c,eta).*Xm(m,c,eta));
D1=quadgk(g4,0,100,'MaxIntervalCount',10000);
K4=@(eta)(eta.*Nn(n,c,eta).*Xm(m,c,eta));
D2=quadgk(K4,100,eta0,'MaxIntervalCount',100000);
D3=16/(b.*(pi.*c).^2).*(n+1).*(c.*(cosint(eta0.*c)+(5/2).*...
((-1).^m).*(sinint(2*eta0.*c)-pi/2))-sin(eta0.*c)+((-1).^m)
.*(1-3*cos(eta0.*c).^2))./eta0);
D_mn=D1-D2-D3;
end
%
=====

```

```

function [an,bn]=an_bn(n,eta0,H1,H2,c)
b=1;
%remplissage de la matrice Y

Y1=zeros(n);

```

```

Y2=zeros(n);
Y3=zeros(n);Y4=zeros(n);
for j=1:n
    for i=1:n
        Y1(j,i)=A(j-1,i-1,eta0,b,H1,H2);
        Y2(j,i)=B(j-1,i-1,H1,H2,c);
        Y3(j,i)=C(j-1,i-1,H1,H2,c);
        Y4(j,i)=D(j-1,i-1,eta0,b,c,H1,H2);
    end
end
Y=[Y1 Y2 ;Y3 Y4];
Z=zeros(2*n,1);
Z(1)=1;
Z(2)=-1/2;
x=Y\Z;%resolution du system Y.x=Z
an=x(1:n);
bn=x((n+1):2*n);
end

```

# Bibliographie

- [1] FLORENCE, A. L. Two contact problems for an elastic layer. THE QUARTERLY JOURNAL OF MECHANICS AND APPLIED MATHEMATICS.1961. Vol 14, pp. 453-459.
- [2] LOW, R. D. On the torsion of elastic half spaces with embedded penny shaped flaws. JOURNAL OF APPLIED MECHANICS. 1972. Vol 72, pp. 786-790.
- [3] SIH, G. C.CHEN, E. P.. Torsion of a laminar composite debonded over a penny-shaped area. textsc J. Franklin Institute. 1971. Vol 293, pp 251-261.
- [4] DHAWAN. G.K. The torsion of elastic half-space with penny-shaped crack. INDIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS. 1974.Vol.24, pp 15-22.
- [5] PAK. R et SAPHORES. J. Torsion of a rigid disc in a half-space. textsc International journal of Engineering Science .1991. Vol 29, pp 1-12.
- [6] ERGUVEN.M. E. Torsion of two bonded layers by a rigid disk. textsc Meccanica. 1991.Vol 26, pp 117-123.
- [7] BACCI. A et BENNATI. S. An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic layer. textscMechanics of Structures and Machines. 1996. Vol 24, pp 21-38.
- [8] REISSNER. E ET SAGOCI. H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. International journal of Applied physics. 1944. Vol 15, pp 652-654.
- [9] SHIXIANG. MA. Propagation de fissure en mode mixte dans un milieu élastique.317p. Thèse de doctorat : Génie mécanique.Université BLAISE PASCAL – Clermont II.2005.
- [10] GRANGE. S ET PRENSIER J –L . La mécanique de la rupture et la mesure de la ténacité. textscEcole normal supérieur de Paris-saclay. 2007
- [11] BOWMAN. F . Introduction to Bessel function. Dover publication : New York. 1985.160 p.ISBN 10 : 0486604624.
- [12] FOREST. S, AMESTOY. M, CANTOURNET. S. DAMAMME. G. KRUCH. S. Mécanique des milieux continus. textscÉcole des mines de Paris, 2006.

- [13] B. BARTHELEMY. Notions pratique de mécanique de la rupture. Édition Eyrolles.1980. 304 p. ISBN 10 : 221205520X.
- [14] CHARMET. J –C. Mécanique de solide et des matériaux. Dunod, 2004.
- [15] TIMOSHENKO. S, GOODIER J-N . Theory of elasticity. McGraw -Hill Book Company. New york, 1951.506p.
- [16] AMESTOY. M ET FOREST. S. Mécanique des milieux continus. Cours de l'école des mines de Paris, 2005.
- [17] SADD. M. Elasticity : Theory, Applications, and Numerics. third edition. oxford. Academic Press. 2014. 600 p. ISBN : 978-0-12-408136-9.
- [18] DUFFY.D. G. MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS. Chapman and Hall/CRC. 2008.pp 457. ISBN-10 : 1584885793.
- [19] GRADSHTEYN. I-S. ET RYZHIK. I-M. Table of integrals, series, and products. Academic press .2007.1221 p. ISBN 10 : 0-12-373637-4.
- [20] RACHDI. L.T ET ROUZ. A. Fourier Hankel Transform and the Riemannian Spaces in the Half Space. textscInternational journal of mathematic Analysis Science. 2008. Vol.22.
- [21] TOSHIAKI. H, AKIYAMA. T, SHIBUYA. T ET KOIZUMI.T. An Axisymmetric Torsion problem of an elastic layer on a rigid foundation with a cylindrical hole. textscTranslations of the Japan Society of Mechanical Engineers.1989. Vol 55, pp 1339-1346.
- [22] TOSHIAKI. H, TAKAO. A, TOSHIAKARU. S, TAKASHI. K. An axisymmetric contact problem of an elastic layer on a rigid base with a cylindrical hole. textscJSME International Journal. 1990. Vol 33, pp 461-467.
- [23] SAKAMOTO. M. An elastic layer with a penny-shaped crack subjected to internal pressure, textscJSME International journal series A. 2003. Vol 46, pp 27-36, 2003.
- [24] SNEDDON. I. N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. textscProceedings of The Royal Society A . 1946.Vol 187, pp

229-260.

- [25] LOWENGRUB. M. Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate. *Quarterly of Applied Mathematics*. Vol. 19, pp. 119-126, 1961.
  
- [26] SAKAMOTO.M. KOBAYASHI.K. The axisymmetric contact of an elastic layer subjected to a tensile stress applied over a circular region. *Theoretical and Applied Mechanics*. 2004.Vol 53, pp 27-36.
  
- [27] SAKAMOTO.M. KOBAYASHI.K. The axisymmetric contact problem of an elastic layer indented by infinite rigid punch with a circular hole. *Theoretical and Applied Mechanics*. 2006. Vol. 55, pp 61-77.
  
- [28] TAMATE.O ET SAITO. T. On the twisting of two elastic layers bonded to a rigid foundation. *Translations of the Japan Society of Mechanical Engineers*.1975. Vol 341, pp 33-40.