

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



Département d'Automatique

Laboratoire de Commande des Processus

Mémoire de projet de fin d'études

pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Automatique

Contribution à la Modélisation et à la Commande du Robot Delta ISIR88

Housseayne NADOUR
Nour Islam MOKHTARI

Sous la direction de
Mr. D. BOUKHETALA Professeur
Mr. H. ACHOUR Enseignant Chercheur

Présenté et soutenu publiquement le 19/06/2016

Composition du Jury :

Président	Mr. M. BERKOUK	Professeur	Ecole Nationale Polytechnique
Promoteurs	Mr. D. BOUKHETALA	Professeur	Ecole Nationale Polytechnique
	Mr. H. ACHOUR	Enseignant Chercheur	Ecole Nationale Polytechnique
Examineur	Mr. M. CHAKIR	Enseignant Chercheur	Ecole Nationale Polytechnique

ENP 2016

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



Département d'Automatique

Laboratoire de Commande des Processus

Mémoire de projet de fin d'études

pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Automatique

Contribution à la Modélisation et à la Commande du Robot Delta ISIR88

Housseayne NADOUR
Nour Islam MOKHTARI

Sous la direction de
Mr. D. BOUKHETALA Professeur
Mr. H. ACHOUR Enseignant Chercheur

Présenté et soutenu publiquement le 19/06/2016

Composition du Jury :

Président	Mr. M. BERKOUK	Professeur	Ecole Nationale Polytechnique
Promoteurs	Mr. D. BOUKHETALA	Professeur	Ecole Nationale Polytechnique
	Mr. H. ACHOUR	Enseignant Chercheur	Ecole Nationale Polytechnique
Examineur	Mr. M. CHAKIR	Enseignant Chercheur	Ecole Nationale Polytechnique

ENP 2016

ملخص:

هذه المذكرة التي بين يدي القارئ تمثل ثمرة مشروع التخرج للحصول على شهادة مهندس بالآليات، ركزنا فيها على دراسة آلة مهمه أصبحت مع مرور الوقت محل اهتمام الباحثين عرفت باسم الآلة دلتا (من نوع ازيير 88)، فهي تعد من صنف الآلات المتوازية المشهورة بنماذجها المعقدة، إلا انها أصبحت في الآونة الأخيرة تجتاح الساحة الصناعية نظرا لأدائها الفعال، إذ أن هذا النوع من الآلات اثبت كفاءته سرعة ودقة.

عالجت هذه المذكرة البسيطة عدة فصول، مبدئة ذلك بنبذة تصف فيها بشكل عام الآلات المتوازية والآلات من نوع دلتا بشكل مستفيض، ثم تطرقنا بعدها إلى النمذجة بأنواعها الثلاث (هندسية وحركية وديناميكية)، إذ سعينا إلى نمذجة مختلفة عن تلك المعروفة في أوساط البحث العلمي وبيئنا السبب في ذلك، ختمت هذه الفصول بفصلين آخر قمنا فيه بإنشاء عدة أنواع من قوانين التحكم في الآلة دلتا عن طريق النماذج المدروسة، مستخلصين في الأخير مزايا أفضل واحد منها.

كلمات مفتاحية: الآلة دلتا، صنف الآلات المتوازية، الأذرع الآلية، نمودجة الآلات، التحكم في الآلات.

Abstract

This engineering memory hinges on the study of a particular sort of industrial robot; in fact, this robot belongs to the family of parallel robots (ISIR88).

The study had begun by a general introduction on parallel robots, then, the delta robot was described with underlining his own characteristics. Next, we have pursued by modeling the Delta robot. The core of our work was the part devoted to the development of an appropriate control laws for the Delta robot (quickness and accuracy).

Keywords: Manipulator Robots, Parallel robots, Delta, Robot's Control

RÉSUMÉ

Ce projet de fin d'étude se focalise sur l'étude d'un robot industriel d'un genre particulier. Ce robot appartient à la classe des robots parallèles (ISIR88).

Notre étude a commencée par une introduction générale dont on a décrit les différents travaux qu'on a abordé. Ensuite, on a introduit un chapitre qui traite des généralités sur les robots parallèles, puis on a établi une modélisation (géométrique, cinématique et dynamique). Les deux chapitres suivants ont traité des techniques de commande appliquées sur le robot. On a finis cette mémoire par une conclusion générale dont on a cité les différents résultats établis tout au long du projet.

Mots-clés : Robots manipulateurs, Robots parallèles, Delta, Commande des robots.

Remerciements

En préambule à ce projet de fin d'études, nous souhaiterions adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Nous tenons à remercier spécialement nos promoteurs Mr Boukhetala et Mr Achour pour nous avoir encadré, pour les précieux conseils qu'ils nous ont donné, pour leur aide et pour leur présence tout au long de ce projet.

Nous remercions également tout nos enseignants de l'école nationale polytechnique qui nous ont tant donné tout au long de notre cursus.

Enfin, nous souhaiterions remercier nos familles, plus particulièrement nos parents qui nous ont apporté un soutien sans failles et sans lesquels nous ne serions jamais arrivés à ce stade.

Table des matières

Remerciements	i
Liste des tableaux	
Table des figures	
Abbréviations	
Introduction générale	15
I Généralités sur les robots parallèles	18
1 Introduction	19
1.1 Définition	19
1.2 Historique	19
2 Avantages des robots parallèles	20
3 Inconvénients des robots parallèles	21
4 Les générations des robots parallèles	21
5 Architecture	22
5.1 Introduction	22
5.2 La Plate-forme de Gough	23
5.3 Le robot Par4	24
5.4 Le robot Delta	24
5.4.1 Historique	24
5.4.2 Spécifications du Robot Delta	25
5.4.3 Applications du robot Delta	25
5.4.4 Les types de Robot Delta	26
5.4.4.1 Delta à actionnement linéaire	26
5.4.4.2 Delta à actionnement rotatif	26
6 Conclusion	26
II Construction d'une conception mécanique du robot delta ISIR88 par SolidWorks et SimMechanics	27
1 Introduction	28

2	Description du robot Delta ISIR88 disponible au laboratoire de commandes des processus (LCP)	28
3	SimMechanics	30
4	Relation Simmechanics-SolidWorks	31
5	Conclusion	35
III Modélisation du Robot Delta		36
1	Modèle Géométrique	37
1.1	Modèle Géométrique Directe	37
1.1.1	Comparaisant avec le MGD de Clavel	43
1.2	Modèle Géométrique Inverse	45
1.2.1	Comparaisant avec le modèle de Clavel	51
1.3	Validation du MGD et MGI en comparant avec SimMechanics	52
2	Modèle Cinématique	54
2.1	Modèle Cinématique Directe	54
2.2	Modèle Cinématique Inverse	58
2.3	Validation du Modèle cinématique en comparant avec SimMechanics	61
3	Les dérivées des modèles cinématiques	63
3.1	calcul de de la 2ème dérivée de la position P	63
3.2	calcul de la 2ème dérivé de α en fonction de la 2ème dérivée de P	65
3.2.1	calcul de $\ddot{\beta}_i$:	65
3.2.2	calcul de $\ddot{\delta}_i$:	66
3.3	Validation des modèles des accélérations (directe et inverse) en comparant avec SimMechanics	72
4	Modèle Dynamique	75
4.1	Modèle Dynamique Inverse	75
4.2	Modele Dynamique Directe	87
4.3	Validation du MDD et MDI en comparant avec SimMechanics	90
5	Modèle d'état	93
6	Génération des trajectoire pour le robot	95
6.1	Introduction	95
6.2	Lois du mouvement	95
6.2.1	Les trajectoires polynomiales	95
6.2.2	Les trajectoires trigonométriques	97

6.2.3	Trajectoires exponentielles	97
7	Conclusion	98
IV	La commande du robot delta	99
1	Les commandes non linéaires	100
1.1	Commande par le mode de glissement	100
1.1.1	Définition	100
1.1.2	Application de la commande	100
1.1.3	Validation	101
1.2	Commande par Back Stepping	104
1.2.1	Définition	104
1.2.2	Application de la commande	104
1.2.3	Validation	106
2	Commandes linéaires	109
2.1	La linearisation	109
2.1.1	Calcul des matrices de linéarisation A , B et C .	110
2.1.2	Validation de la linéarisation de A	110
2.2	Gain préprogrammé	111
2.2.1	Validation	114
2.3	Réglage en cascade	116
2.3.1	Réglage de la partie électrique (Réglage du couple par tension)	117
2.3.2	Réglage de la partie mécanique (Réglage de la position par le couple)	119
2.3.2.1	Découplage du système mécanique . . .	119
2.3.2.2	Imposition de la dynamique par un Re- tour d'état	121
2.3.2.2.1	Régulateur Retour d'état avec Ac- tion Intégrale	121
2.3.2.2.2	Retour d'état avec Loop-shaping	122
2.3.2.2.3	Validation	130
3	Etude comparative	131
4	Conclusion	138
V	Estimation et observation	140
1	Estimation de la masse porté par la nacelle	141
1.1	Validation	143
2	Estimateur de masse avec observateur du courant	147

2.1	Validation	149
3	Etude Comparative	152
	3.0.0.1 Pour La commande (RE avec LoopShaping) sans estimateur	153
	3.0.0.2 Pour La commande (RE avec LoopShaping) avec estimateur (commande adaptative)	153
4	Conclusion	154
VI	Conclusion générale	156
	Bibliographie	159
	Annexes	160

Liste des tableaux

Table III.1	Tableau des paramètres utilisés dans la modélisation	94
Table III.2	Tableau des paramètres des moteurs	94

Table des figures

Figure I.1	Premier robot parallèle spatial industriel, breveté en 1942 [1]	20
Figure I.2	Plateforme Stewart [1]	22
Figure I.3	Robot Delta de l'EPFL [1]	22
Figure I.4	Plateforme Stewart [1]	24
Figure II.1	Robot Delta construit sous Solidworks	28
Figure II.2	Schéma mécanique du robot Delta ISIR88 disponible au LCP	29
Figure II.3	Différentes pièces du robot delta	31
Figure II.4	Bloc simulink du robot	32
Figure II.5	Le bloc de la base	32
Figure II.6	Le bloc du bras	33
Figure II.7	Le bloc des barres parallèles	34
Figure III.1	Le repère R_0	37
Figure III.2	La longueur r	37
Figure III.3	Structure simplifiée du robot delta	38
Figure III.4	Modele Géométrique	39
Figure III.5	Les repères R_i	40
Figure III.6	Modele Géométrique	41
Figure III.7	Signe du vecteur ω	42
Figure III.8	Bloc Simulink	43
Figure III.9	Trajectoire en 3D	43
Figure III.10	Erreur sur la position	44
Figure III.11	Les intersections	45
Figure III.12	Les bras et le repère R_i correspondants à α_i	46
Figure III.13	Les intersections entre K_i et K'_i	47
Figure III.14	L'angle β_i	48
Figure III.15	La projection de P est A_i	49
Figure III.16	Points de Singularité	50
Figure III.17	Bloc Simulink	51
Figure III.18	Trajectoire en 3D	51

Figure III.19	Erreur sur la position	52
Figure III.20	Block Simulink	52
Figure III.21	Validation du MGD	53
Figure III.22	Validation du MGI	53
Figure III.23	Les longueurs a , b et c	56
Figure III.24	L'angle δ_i	59
Figure III.25	Block Simulink	61
Figure III.26	Validation du MCD	61
Figure III.27	Validation du MCI	62
Figure III.28	Block Simulink	72
Figure III.29	Validation du MAD	73
Figure III.30	Validation du MAI	73
Figure III.31	le segment A_iG forme un angle ($\Delta\alpha=3.73$ deg) avec le segment A_iC_i	76
Figure III.32	Avant-bras	76
Figure III.33	Gravité des avant bras rapportée aux points C_i	78
Figure III.34	Les bras parallèles	78
Figure III.35	La nacelle	78
Figure III.36	Le système complet	79
Figure III.37	La somme des forces	79
Figure III.38	les forces appliquées sur les avant-bras	80
Figure III.39	Composition de Z_i dans le repère R_i	81
Figure III.40	Les forces F_i et F'_i	82
Figure III.41	Les forces F_{ir} et F_{it}	83
Figure III.42	Les avant-bras	83
Figure III.43	Les forces F_{ir} et F_{it}	85
Figure III.44	Les forces F_{ir} et F_{it}	85
Figure III.45	Décomposition de L	86
Figure III.46	Les forces totales rapportées aux points C_i	86
Figure III.47	Block Simulink	90
Figure III.48	Trajectoire en 3D	90
Figure III.49	Erreur sur les couples	91
Figure III.50	Erreur entre notre modèle et le modèle de SimMechanics	91
Figure III.51	Erreur entre le modèle de Clavel et le modèle de SimMechanics	92
Figure III.52	Profile de position, vitesse et accélération d'une trajectoire polynomiale [2]	96

Figure III.53	Profil de position, vitesse et accélération d'une trajectoire linéaire [2]	96
Figure III.54	Trajectoire avec une accélération constante [2]	97
Figure III.55	Trajectoire harmonique [2]	97
Figure III.56	Trajectoire exponentielle [2]	98
Figure IV.1	Block Simulink de la commande par mode de glissement	101
Figure IV.2	Trajectoire en 3D	102
Figure IV.3	Position de la nacelle	102
Figure IV.4	Erreur sur la position de la nacelle	102
Figure IV.5	Les tensions des moteurs	103
Figure IV.6	Bloc Simulink de la commande par BackStepping	106
Figure IV.7	Trajectoire en 3D	106
Figure IV.8	Position de la nacelle	107
Figure IV.9	Erreur sur la position de la nacelle	107
Figure IV.10	Les tensions des moteurs	108
Figure IV.11	Bloc Simulink	110
Figure IV.12	\ddot{X}_1	111
Figure IV.13	\ddot{X}_2	111
Figure IV.14	\ddot{X}_3	111
Figure IV.15	Retour d'état et action intégrale	112
Figure IV.16	Gain préprogrammé	112
Figure IV.17	Bloc Simulink de la commande par gain préprogrammé	114
Figure IV.18	La position de la nacelle	114
Figure IV.19	Erreur sur la position de la nacelle	115
Figure IV.20	Les tensions des moteurs	115
Figure IV.21	Décomposition en sous-systèmes	116
Figure IV.22	Réglage en cascade	116
Figure IV.23	Découplage du système mécanique	119
Figure IV.24	Système mécanique découplé	120
Figure IV.25	Le sous-système élémentaire correspondant à chaque moteur i	120
Figure IV.26	Fixation de la dynamique avec le retour d'état	121
Figure IV.27	Retour d'état + Action intégrale sur le système découplé	122
Figure IV.28	Diagramme de bode de $G(s)$	123
Figure IV.29	Les perturbations de commande	124
Figure IV.30	L'effet de bruit de capteur	124
Figure IV.31	Diagramme de bode de $K(s).G(s)$	126

Figure IV.32	Représentation de $C(s)$ dans le plan de Nyquist	127
Figure IV.33	Les relations angulaires	127
Figure IV.34	Diagramme de bode de C	128
Figure IV.35	Diagramme de bode de $(K.C(s).G(s))$	129
Figure IV.36	Bloc Simulink de la commande RE avec Action integrale .	130
Figure IV.37	La position de la nacelle	130
Figure IV.38	Bloc Simulink de la commande RE avec AI après le dé- couplage	131
Figure IV.39	La position de la nacelle	131
Figure IV.40	Schéma de la commande avec les pertubations	132
Figure IV.41	Forme de la perturbation injectée	132
Figure IV.42	Bruit de capteur	132
Figure IV.43	Schéma de test de la robustesse pour la commande MG .	133
Figure IV.44	Test de la poursuite sous la présence des perturbations . .	133
Figure IV.45	Schéma de test de la robustesse pour la commande BS . .	134
Figure IV.46	Phénomène du broutement	135
Figure IV.47	Schéma de la commande sous la présence des perturbations	136
Figure IV.48	Poursuite de la trajectoire sous la présence des perturbations	136
Figure IV.49	Schéma de réglage sous la présence des perturbations . . .	137
Figure IV.50	Poursuite de la trajectoire sous la présence des perturbations	137
Figure IV.51	Poursuite de la trajectoire sous la présence des perturbations	138
Figure IV.52	Erreur sur la trajectoire	138
Figure V.1	L'estimateur de masse	141
Figure V.2	L'estimateur de la masse	143
Figure V.3	Bloc Simulink pour l'estimation de la masse	143
Figure V.4	La masse ajoutée	144
Figure V.5	Validation de la position	144
Figure V.6	Erreur sur l'estimateur de la masse	145
Figure V.7	Validation de la position	146
Figure V.8	Bloc Simulink pour l'estimation de la masse et du courant	149
Figure V.9	Validation de la position	150
Figure V.10	Observation du courant	150
Figure V.11	Estimation de la masse	151
Figure V.12	Estimation de la masse	151
Figure V.13	Schéma bloc sous SimMechanics	152
Figure V.14	Schéma bloc sous Simulink	153
Figure V.15	Schéma bloc de la commande avec l'estimateur	153

Figure V.16 Poursuite de la commande sans estimateur	154
Figure V.17 Poursuite de la commande avec estimateur	154
Figure VI.1 Le rayon R	176
Figure VI.2 La surface S_Δ	177

Abréviations

MG	:	Modèle géométrique
MGD	:	Modèle géométrique directe
MGI	:	Modèle géométrique inverse
MC	:	Modèle cinématique
MCD	:	Modèle cinématique directe
MCI	:	Modèle cinématique inverse
MD	:	Modèle dynamique
MDD	:	Modèle dynamique directe
MDI	:	Modèle dynamique inverse
MAD	:	Modèle des accélérations directe
MAI	:	Modèle des accélérations inverse
LCP	:	Laboratoire de commande des processus
FDN	:	Fonction définie négative
FDP	:	Fonction définie positive
MG	:	Mode de glissement
BS	:	Back-Stepping
RE	:	Retour d'état
AI	:	Action intégrale

Introduction générale

Durant les trois dernières décennies, le domaine de la robotique a connu un progrès considérable aussi bien en recherche scientifique que dans les applications industrielles. Selon leurs structures mécaniques, il existe, principalement, deux types de robots manipulateurs ; Les robots sériels et les robots parallèles. Les manipulateurs séries consistent en un certain nombre de chaînes cinématiques reliées en série les unes aux autres par des articulations. Chaque articulation de la chaîne cinématique est habituellement actionnée par un actionneur hydraulique, pneumatique ou électrique. Ce type de structure est connu en tant que mécanisme à chaîne ouverte. Les manipulateurs parallèles sont constitués d'un certain nombre de chaînes cinématiques connectées en parallèle les unes aux autres. Ces chaînes cinématiques travaillent ensemble pour déplacer l'organe terminal appelé effecteur. Ce type de robots est utilisé dans le milieu industriel depuis les années 1990, plus particulièrement dans l'industrie agro-alimentaire. Par rapport aux robots sériels classiques, les robots parallèles présentent un certain nombre d'avantages. A savoir ; leur grande rigidité, leur vitesse d'exécution élevée ainsi que leur grande précision. Le robot delta est considéré comme le premier robot parallèle léger développé dans les années 1980 par le professeur Raymond Clavel [1] à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). R. Clavel a conçu la structure mécanique du robot delta. Il a également élaboré son modèle géométrique (directe et inverse) ainsi que son modèle dynamique inverse. L'étude que nous avons menée dans ce travail concerne le robot parallèle Delta ISIR88 à 4 degrés de liberté. Ce robot, disponible au Laboratoire de Commande des Processus de l'ENP, a été conçu par l'équipe de Clavel de l'EPFL. A travers notre recherche, nous avons constaté que la quasi-totalité des travaux considèrent le modèle géométrique établi par Clavel. Il est à noter que la complexité de ce modèle le rend difficile à manipuler analytiquement. C'est le premier inconvénient que nous avons remarqué sur ce modèle. Le même problème se présente dans le modèle géométrique inverse établit soit par Clavel [1] ou par Codourey [2]. Notre recherche bibliographique nous a indiqué l'utilisation de la dérivation numérique afin d'éviter les calculs analytiques fastidieux

des deux modèles géométriques. La mise oeuvre d'une commande sur le robot exige au moins trois dérivées. Deux dérivées pour établir le modèle dynamique et une troisième dérivée pour la génération de la commande. En effet, la dérivation numérique peut engendrer des erreurs importantes sur le résultat final. Afin de remédier à cet inconvénient, nous avons développé un modèle géométrique (directe et inverse) dont les expressions algébriques sont simples et explicites afin d'éviter les dérivées numériques et par conséquent les erreurs de calcul. En effet, le modèle d'état et les commandes linéaires, particulièrement la linéarisation exigeant des dérivées partielles d'ordre 3, sont purement analytiques. Il est à noter que le modèle établi par Clavel décrit bien le comportement mécanique des robots à actionnement directe [3], ce qui n'est pas le cas pour le robot Delta ISIR 88, car ce robot possède un réducteur mécanique pour transmettre les couples entre les moteurs et le bras correspondant (robot à actionnement indirecte). Ce réducteur comporte une roue sous forme de demi-disque dont la masse est considérable. Donc une force de gravité que nous avons jugé non négligeable. Cette modélisation constitue l'une de nos contributions principales dans le présent travail. En plus de cette modélisation analytique, nous avons effectué une modélisation mécanique par construction du robot Delta ISIR88 sous le logiciel SolidWorks. Le modèle élaboré est ensuite transporté vers l'outil SimMechanics qui est un outil de modélisation mécanique très puissant sous Matlab.

Le mémoire est organisé en Cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons une revue sur les robots parallèles, en particulier le robot Delta. Leurs caractéristiques, leurs avantages par rapport aux robots sériels ainsi que leurs utilisations industrielles.

Le deuxième chapitre traite de la modélisation, où nous avons élaborés un nouveau modèle géométrique. En observant la structure géométrique du robot d'une manière différente, nous avons pu aboutir à un modèle géométrique (directe et inverse) plus simple que celui développé par Clavel. En exploitant ces modèles, nous avons développés un modèle cinématique analytique.

Ceci constitue une autre contribution dans notre travail. Nous avons ensuite élaborer un modèle dynamique en tenant compte de la roue du réducteur, qui a été négligé dans le modèle dynamique de Clavel, cette contribution nous a permis d'établir un modèle dynamique plus réaliste. Ce chapitre est terminé avec une modélisation dans l'espace d'état du robot sous une forme affine. Cette classe de systèmes présente plusieurs avantages en terme de synthèse de lois de commande, telles que les modes de glissements, le backstepping, les systèmes flous,' Le troisième chapitre concerne la construction d'un modèle mécanique du robot

en utilisant le logiciel SolidWorks qui sera ensuite connecté à l'outil SimMechanics. L'ensemble est utilisé pour créer des animations du robot Delta ISIR88 ainsi que pour la comparaison des différents modèles.

Le quatrième chapitre est consacré à la synthèse de la commande où plusieurs types de commandes linéaires et non linéaires sont proposées. Dans l'ensemble des méthodes proposées nous avons pris en considération les interactions mécaniques entre les chaînes cinématiques. Dans les travaux que nous avons rencontrés dans la littérature, ces interactions sont souvent soit négligées, soit considérées comme perturbations ou comme des erreurs de modélisation.

Dans le cinquième et dernier chapitre, nous avons conçu un estimateur de la masse manipulée en vue d'une commande adaptative. Cet estimateur augmente la robustesse des commandes d'une manière remarquable. Un observateur du courant des moteurs est également synthétisé.

Le travail est clôturé par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralités sur les robots parallèles

1 Introduction

1.1 Définition

Un robot parallèle est un manipulateur à mécanisme en chaîne cinématique fermée dont l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes cinématiques indépendantes. Les manipulateurs à cinématique parallèle sont aujourd'hui de plus en plus utilisés. Leur dynamique rapide (grande vitesse et grande accélération) et leurs capacités de charge importantes sont avantageusement mises à profit dans le monde industriel.

1.2 Historique

L'historique des robots parallèles est controversé. Cependant, grâce aux travaux de Merlet et de Bonev [3], il existe une chronologie assez précise de l'apparition des robots parallèles. Tout d'abord, Merlet indique que la théorie sur les mécanismes parallèles a été explorée bien avant l'apparition du terme robot. Certains problèmes théoriques concernant les robots parallèles ont donc été résolus bien avant leur apparition. Ensuite, Bonev rappelle que le premier brevet déposé pour un mécanisme parallèle porte sur un mécanisme sphérique destiné à être utilisé comme plate-forme de cinéma dynamique en 1928. Trop en avance sur son temps, cette machine n'a jamais été construite. Quelques dizaines d'années plus tard, Williard L.V. Pollard [4] conçoit ce qui est considéré comme le premier robot parallèle industriel. Son fils fait breveter cette invention qui n'a, elle non plus, jamais été produite.

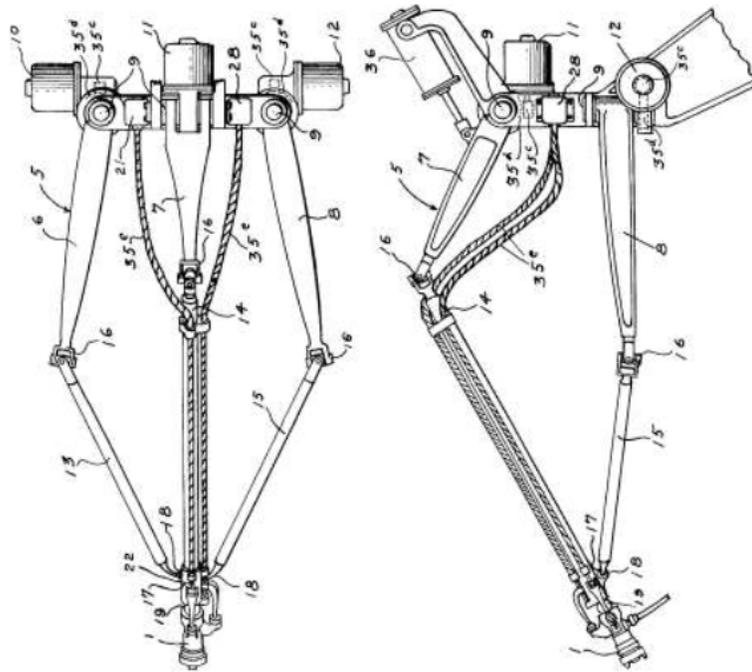


Figure I.1 – Premier robot parallèle spatial industriel, breveté en 1942 [1]

Finalement, le premier robot parallèle industriel ayant vu le jour est l'hexapode en forme d'octaèdre inventé par Eric Gough, également appelé plate-forme de Gough. Cet hexapode a été construit afin de tester des pneus pour la société Dunlop et le premier exemplaire a été produit en 1954. Pour beaucoup de chercheurs, l'invention de la plate-forme de Gough marque le début de l'ère des robots parallèles. L'autre événement majeur de la robotique parallèle est l'invention du premier robot parallèle léger, le robot Delta, par le professeur Clavel dans les années 80. Ce robot, qui est à ce jour le robot parallèle le plus vendu dans le monde, marque l'arrivée des robots parallèles rapides destinés, entre autres, à des tâches de conditionnement. Le robot Par4, est un parfait exemple de l'engouement de l'industrie pour les robots parallèles rapides. Il existe un grand nombre de cinématiques différentes de robots parallèles et leurs applications possibles sont nombreuses : simulateur de vol, machine-outil, robot de prise et dépose, positionneur de haute précision, robot médical, capteurs d'effort, etc. Aujourd'hui encore, de nouveaux domaines s'ouvrent pour ces robots notamment grâce à la recherche sur les robots redondants, les robots à câbles ou les robots ultra rapides.

2 Avantages des robots parallèles

- Capacité de charge élevée.
- Possibilité de mouvements à haute dynamique (accélérations élevées).

- Rigidité mécanique élevée.
- Faible masse mobile.
- Possibilité de positionner les actionneurs directement sur la base fixe ou très proche de celle-ci. Cette particularité a les conséquences positives suivantes :
 1. grand choix de moteurs et de réducteurs par le fait que leur masse joue peu de rôle dans l'inertie du manipulateur.
 2. simplification importante des problèmes de liaisons entre les moteurs, les capteurs et le contrôleur (câblage plus simple et plus fiable).
 3. facilité de refroidissement des actionneurs, donc diminution des problèmes de précision dûs aux dilatations et puissance potentielle élevée.
 4. facilité d'isoler les moteurs de l'espace de travail pour des activités en atmosphère propre ou avec risque de déflagration ou encore pour les applications nécessitant des lavages à grande eau.
 5. Facilité d'intégration de capteurs.

3 Inconvénients des robots parallèles

- Modèles géométriques directs (MGD) parfois difficiles à déterminer.
- Volume de travail limité en regard du volume total du mécanisme.
- Fort couplage entre le mouvement des différentes chaînes cinématiques.
- Présence de singularités qui conduisent à une perte de contrôle de la structure mobile.

4 Les générations des robots parallèles

Il existe deux générations de robots parallèles :

1. La première génération connue par les plates-formes de Gough et Stewart, ces manipulateurs ont 6 articulations prismatiques et ils ont 6 degrés de liberté.

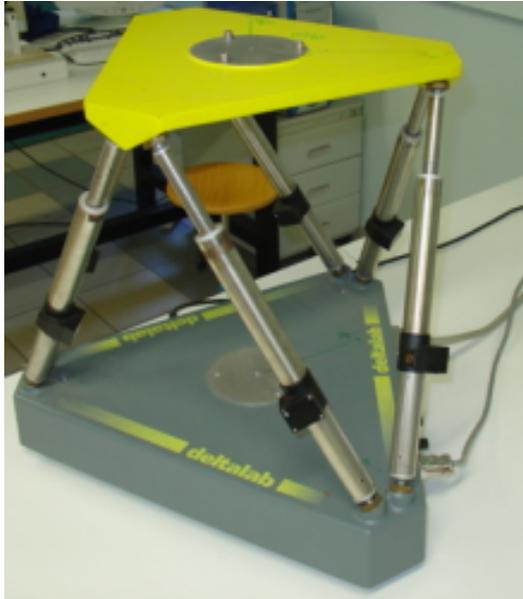


Figure I.2 – Plateforme Stewart [1]

2. La deuxième génération connue par la structure Delta de Clavel. Les robots de cette famille sont capables de performances exceptionnelles (vitesses jusqu'à 10 m/s et accélération jusqu'à 50 G). Ils ont comme principales caractéristiques :

- Des actionneurs fixes sur le bâti.
- Des composants mobiles légers.



Figure I.3 – Robot Delta de l'EPFL [1]

5 Architecture

5.1 Introduction

Il existe différentes façons de classer les robots parallèles. La plus répandue consiste à les regrouper en fonction de la spatialité de leur organe terminal. Il est difficile de faire une liste exhaustive de toutes les différentes architectures

de robots parallèles, néanmoins Merlet répertorie un grand nombre de ces différentes architectures dans son livre dédié aux robots parallèles [3]. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéressons essentiellement aux robots parallèles de type plate-forme de Gough, Delta et Par4. Nous allons donc présenter brièvement ces trois types de robots parallèles.

5.2 La Plate-forme de Gough

Comme nous l'avons souligné précédemment, les hexapodes ont été les premiers robots parallèles industrialisés. Un des représentant de cette famille, la plate-forme de Gough, est l'une des architectures parallèles la plus étudiée et la plus reproduite dans le monde universitaire ainsi que dans le monde industriel. La plate-forme de Gough fait partie de la famille des manipulateurs à six ddl. Les six chaînes reliant la base à la nacelle sont identiques comme le montre le graphe d'agencement. Cette architecture sera utilisée comme système de mesure pour l'étalonnage du robot Delta linéaire. Or, pour cette utilisation de la plate-forme de Gough, le calcul de son modèle géométrique directe (MGD) est nécessaire. Si, comme pour la plupart des robots parallèles, le Modèle Géométrique Inverse (MGI) de la plate-forme de Gough, reliant les variables articulaires \mathbf{q} aux variables opérationnelles \mathbf{x} , s'écrit facilement de manière analytique à partir des équations de fermeture de boucle, ce n'est pas le cas de son MGD. Il existe des méthodes permettant de trouver toutes les solutions de ce polynôme, les plus rapides étant la méthode utilisant les bases de Gröbner ou la méthode utilisant l'analyse par intervalles. Néanmoins, pour l'instant, aucune méthode ne permet de déterminer la solution qui correspond à la position et à l'orientation réelle de la nacelle. L'alternative pour calculer le MGD réside donc dans le calcul approché de ce modèle grâce à des algorithmes itératifs tels que celui utilisant la méthode de Newton-Raphson. Il s'agit de linéariser le problème, et de déterminer une solution numérique proche de la solution correspondant au mode d'assemblage courant du robot. Cependant, cette résolution n'est pas complètement satisfaisante car la solution obtenue n'est pas exacte et il existe un risque de divergence des algorithmes itératifs.

Parmi les domaines d'application de la plate-forme de Gough ou Stewart on trouve le simulateur de vol.



Figure I.4 – Plateforme Stewart [1]

5.3 Le robot Par4

le robot Par4 a été développé au Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microélectronique de Montpellier (LIRMM) par Nabat, à partir des travaux de Pierrot, Company et Krut sur les robots rapides à nacelle articulée, en collaboration avec le centre de recherche basque Fatronik. Le robot Par4 fait partie de la famille des manipulateurs à quatre ddl : trois translations et une rotation. Il est composé de quatre chaînes cinématiques identiques qui se rejoignent par paires sur deux demi-nacelles. Les deux demi-nacelles sont reliées entre elles par deux barres fixées par liaisons pivots formant ainsi une liaison Π . Un système d'amplification de la rotation permet d'obtenir une rotation de l'organe terminal comprise entre $-\pi$ et π , alors que la rotation intrinsèque fournie par le mouvement relatif des deux demi-nacelles est comprise entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Ce robot est actuellement commercialisé par la société Adept sous le nom de Quattro. Il est le robot le plus rapide du marché pour les tâches de prise et dépose et permet d'effectuer 240 cycles par minute.

5.4 Le robot Delta

5.4.1 Historique

Depuis le début des années 1980, des centaines de nouveaux modèles ont été proposés, et presque autant de demandes ont été déposées. Beaucoup de ces architectures parallèles sont véritablement novatrices, mais une seule a permis de développer le robot parallèle le plus réussi pour les applications industrielles : le robot Delta.

Au cours de l'été 1985, le professeur Reymond Clavel de l'EPFL en Suisse, a eu

l'idée géniale d'utiliser des parallélogrammes pour construire un robot parallèle à 4 ddl pour les opérations de transfert rapide. Il a demandé une série de brevets, sur la base desquels plusieurs compagnies, dont ABB, ont éventuellement obtenu des licences. Pendant la durée de vie de ses principaux brevets, plus de 10 000 unités ont été fabriquées. Aujourd'hui, le design du robot Delta n'est plus protégé et des dizaines de sociétés proposent leurs propres versions, y compris FANUC, Motoman, et Kawasaki.

5.4.2 Spécifications du Robot Delta

- Le robot Delta a été inventé afin de répondre à la problématique d'un robot manipulateur doté de trois degrés de liberté et une grande accélération. En l'occurrence la première implémentation fût un robot manipulateur de chocolats.
- Par rapport aux architectures classiques tel que le robot SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm), les robots delta peuvent atteindre de très grandes accélérations mais avec un volume de travail plus restreint et une cinématique bien plus complexe qu'un centre d'usinage 3 axes classique.
- L'architecture est particulièrement adaptée à des mouvements rapides dans l'espace et des efforts sur l'axe z du robot.

5.4.3 Applications du robot Delta

Le robot delta est utilisé pour la mise en boîte dans l'agro-alimentaire (ex : de chocolats) ou la pharmacie ; en médecine, pour la manoeuvre d'un microscope en salle d'opération ou comme dispositif à retour de force pour simulation d'opération ; dans l'usinage de haute précision, avec un système de mesure au nanomètre et dans l'industrie, pour la prise de pièces pour chargement d'automates.

Depuis peu, ce principe est aussi utilisé pour l'impression tridimensionnelle mais de conception artisanale.

Une autre application populaire pour les robots parallèles est l'opération de transfert rapide. C'est surtout les robots Delta qui sont utilisés à cette fin. Ceux-ci sont maintenant fabriqués par ABB, FANUC, Kawasaki, Motoman, Panasonic, et des dizaines de petits fabricants à travers le monde. Il y a cependant une nouvelle tendance, les robots à quatre bras identiques qui a commencé au moment où Adept Technology a introduit le Quattro. Le Veloce, de Penta

Robotics, est un autre robot de ce type. Finalement, Codian Robotics et VELTRU fabriquent des robots Delta à deux bras, alors que Electro ABI offre des robots Delta asymétriques.

5.4.4 Les types de Robot Delta

5.4.4.1 Delta à actionnement linéaire La nacelle a 3 degrés de liberté qui sont les trois translations dans l'espace. Elle reste toujours parallèle au plan horizontale, contrairement à une plateforme de Stewart (hexapod) qui peut faire varier la longueur de ses 6 bras et donc faire pivoter la nacelle. La position de la nacelle est entièrement déterminé par les positions verticales des trois coulisseaux.

5.4.4.2 Delta à actionnement rotatif Ce type de robot Delta utilise trois actionneurs rotoïdes, ces actionneurs ne peuvent pas être fixés directement aux barres parallèles comme c'est le cas dans le Delta linéaire, car ces actionneurs produisent un couple et donc pour transmettre une force de traction/poussée aux barres parallèles on doit prévoir un bras couplé à l'axe de l'actionneur. Cet avant bras est fixé à l'arbre du moteur d'un côté et à la barre de fixation des barres parallèles de l'autre. Cela permet d'avoir une configuration équivalente au cas du robot Delta linéaire.

6 Conclusion

Les robots parallèles présentent plusieurs avantages en terme de rigidité mécanique et dynamique rapide. Le robot delta représente la dernière génération des robots parallèles, il est caractérisé par sa légèreté et ses accélérations très élevées. Il y en a deux types des robots delta, ceux avec actionnement linéaire et ceux avec actionnement rotatif.

Chapitre II

Construction d'une conception mécanique du robot delta ISIR88 par SolidWorks et SimMechanics

1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons construire un modèle de simulations dynamique du robot Delta identique à celui du Laboratoire en passant par deux étapes essentielles :

- Faire une conception technique par SolidWorks, du robot delta disponible au niveau du laboratoire en se basant sur les dessins techniques associé au robot.
- Exporter les fichiers de la conception technique à partir de SolidWorks vers un environnement de simulation associé à Simulink.

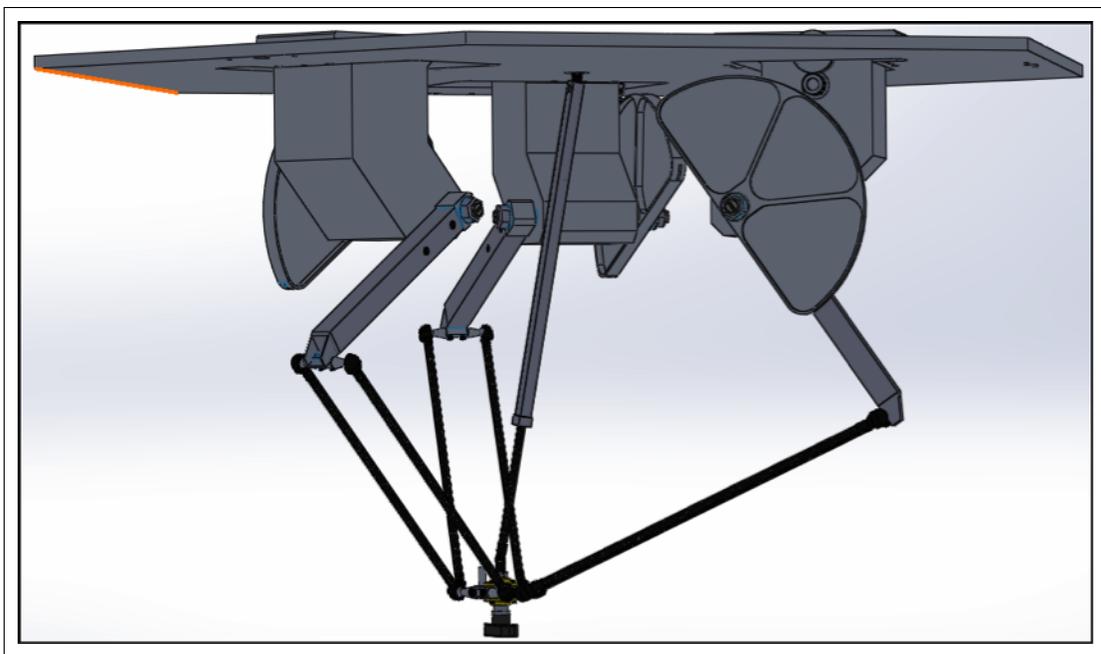


Figure II.1 – Robot Delta construit sous Solidworks

2 Description du robot Delta ISIR88 disponible au laboratoire de commandes des processus (LCP)

Ce robot parallèle à 4 degrés de liberté (x, y, z et σ), spécialement dédié à la manipulation de pièces légères (0 à 20 g), peut atteindre une cadence de travail deux à trois fois supérieur à celle des robots séries à titre d'exemple, il peut assurer le transfert de 3 pièces par seconde par 3 mouvements aller et retour complets [10].

Description du robot DELTA ISIR88 et définition de ses constituants :

La figure suivante nous servira pour la description du robot Delta ISIR88 et de son fonctionnement.

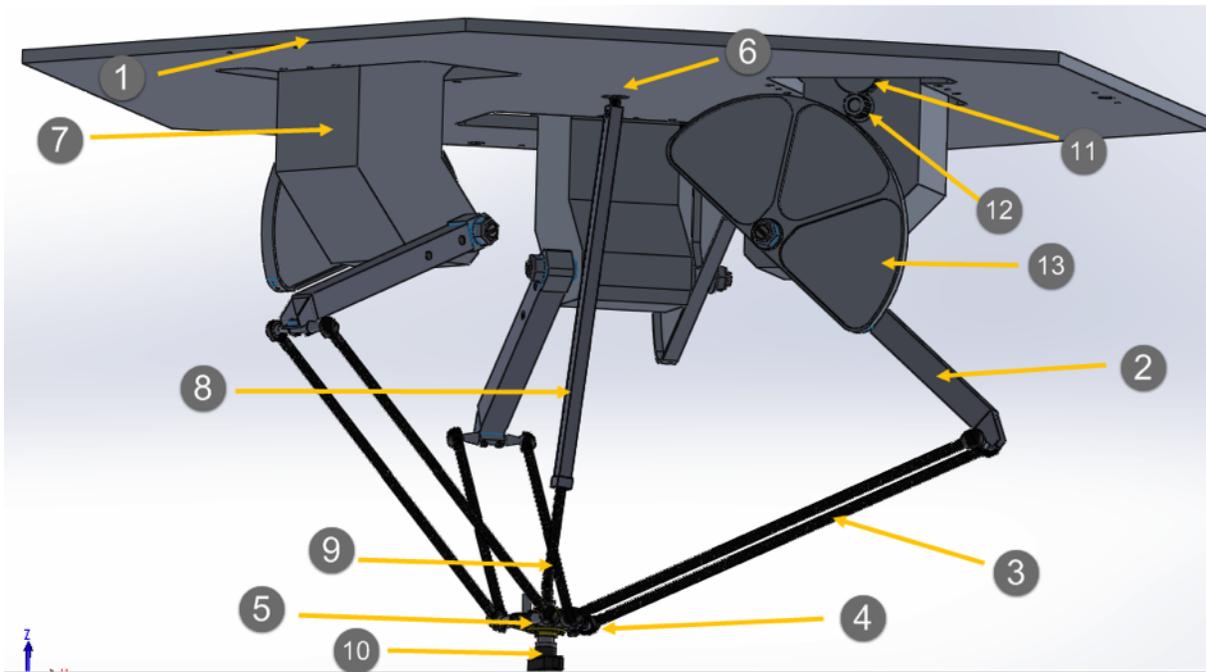


Figure II.2 – Schéma mécanique du robot Delta ISIR88 disponible au LCP

Ce robot à 4 degrés de liberté est essentiellement un parallélogramme de l'espace ; il est principalement constitué d'une "base fixe" (1) solidaire d'un bâti support de l'installation (non représenté) et d'une plaque mobile ; le nom donné à cette dernière pièce est "nacelle". La liaison entre la base fixe (1) et la nacelle (5) est assurée par 3 chaînes cinématiques ; chacune d'elles est formée d'un "bras" (2) monté en articulation pivot sur la base fixe et de 2 "barres parallèles" (3) munies chacune d'une articulation (4) à chaque extrémité ; l'ensemble formé de 2 barres parallèles et des 2 éléments de liaison au bras et à la nacelle sera nommé "parallélogramme". Chaque bras (2) est entraîné par un "moteur de bras" (7) qui aura le plus souvent la forme d'un ensemble moteur-réducteur-capteur ; de façon générale. Le "préhenseur" (10) sera monté en pivotement sur la nacelle et entraîné par le moteur (6) par l'intermédiaire de 1'"arbre télescopique" (8) muni d'une articulation de type cardan (9) à chacune de ses extrémités.

L'orientation de la nacelle est constamment assurée par les 3 parallélogrammes comportants chacun 2 petits cotés et 2 grands côtés formés par les barres parallèles ; chaque petit côté solidaire de l'extrémité d'un bras reste constamment parallèle à l'axe de rotation du bras considéré ; les 3 paires de barres parallèles garantissent que les 3 petits côtés solidaires de la nacelle restent parallèles à ceux solidaires de l'extrémité des bras et donc parallèles aux axes de rotation des bras qui, par construction, sont situés dans un même plan.

Les articulations aux extrémités des barres parallèles sont de type rotule, chaque barre peut donc tourner autour de son axe longitudinal ; cette rotation ne perturbe pas le comportement de cette structure articulée formant le parallélogramme de l'espace ; une liaison par des ressorts et des étriers entre les 2 barres parallèles permet de simplifier la construction des rotules et limite les ébats en

rotation des barres parallèles

La transmission entre l'un des moteurs et le bras correspondant d'après la figure n'est pas direct, en effet la transmission est assurée par un système de réduction constitué par une poulie (11), pignon (12) et une roue (13). afin d'obtenir un rapport de réduction égale à 12 :1.

3 SimMechanics

SimMechanics est une Toolbox de MATLAB, celui-ci offre la possibilité de créer le modèle physique d'une structure mécanique possédant plusieurs éléments assemblés par des liaisons connues (liaison pivot, rotule, encastrement . . .), ce modèle est ensuite totalement utilisable comme un bloc Simulink. SimMechanics fournit un ensemble complet de bibliothèques de blocs permettant la modélisation d'une structure mécanique. Les pièces figurant dans ces bibliothèques sont utilisées sous forme d'un bloc Simulink, on peut ainsi profiter de la puissance de Simulink afin de simuler le système seul, avec une commande ou encore en interaction avec d'autres types de systèmes (électriques, hydrauliques, . . .). SimMechanics est basé sur le logiciel Simscape, cette plateforme produite pour la modélisation de systèmes physiques sous Simulink permet une modélisation et une conception de systèmes en fonction de principes physiques de base. Contrairement à d'autres blocs Simulink, qui représentent des opérations mathématiques opérés sur des signaux, les blocs Simscape représentent directement des éléments ou des relations physiques. Le système de conception SimMechanics est ainsi très particulier, la construction d'un système mécanique se base sur la connaissance physique de sa structure et non sur la connaissance des équations analytiques qui le décrivent, ce qui facilite grandement la modélisation du système. Avec un tel outil on peut modéliser un système de façon très proche de la réalité car nous n'avons pas à faire d'hypothèses simplificatrices, hypothèses nécessaires dans le cas du développement du modèle analytique du système. Afin de construire le modèle sous SimMechanics, on doit spécifier les éléments de base constituant le système (corps solides ou liaisons mécaniques). Leurs propriétés (masse, inertie, géométrie), leurs mouvements possibles (types d'articulations, . . .), les contraintes cinématiques (actionneurs, . . .) et le système de coordonnées auquel est référencé le solide. On doit aussi spécifier la position initiale de la structure. SimMechanics intègre aussi des outils de visualisation qui permettent d'afficher et d'animer le comportement dynamique d'un modèle 3-D de la structure, avant et pendant la simulation.

4 Relation Simmechanics-SolidWorks

La modélisation du robot delta sous SolidWorks a été faite en passant par plusieurs étapes, on a commencé en dessinant chaque pièce selon son dessin technique, puis on les a rassemblé par les outils d'assemblages disponibles dans SolidWorks afin d'aboutir à l'apparence finale du robot :

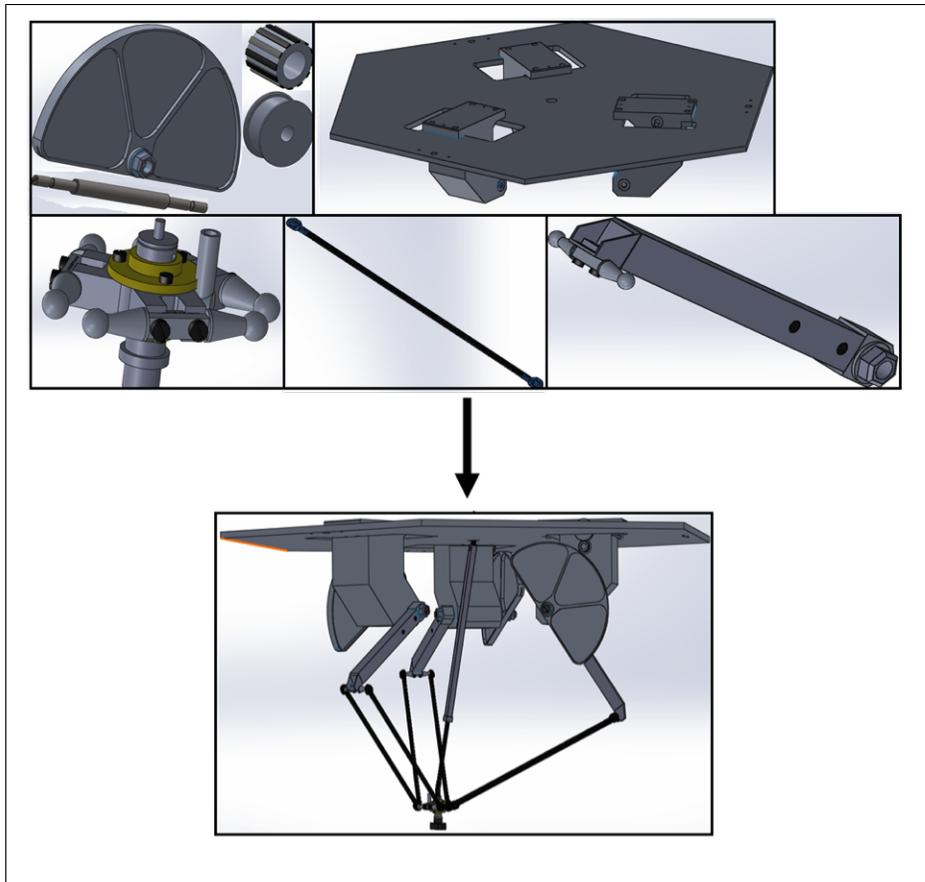


Figure II.3 – Différentes pièces du robot delta

Après avoir construit le robot delta sous SolidWorks selon les dessins techniques associées au robot du laboratoire, on a exporté le fichier à partir de SolidWorks vers SimMechanics (environnement de simulations mécaniques) associé au logiciel Simulink pour établir sa construction en blocs sous cet environnement. La construction d'un modèle mécanique sous SimMechanics est spécifiée par les éléments de base constituant le système (corps solides ou liaisons mécaniques), Leurs propriétés (masse, inertie, géométrie), leurs mouvements possibles (types d'articulations, . . .) , et le système de coordonnées auquel est référencé le solide, et par spécification de la position initiale de la structure.

Le simmechanics offre la possibilité d'utiliser le modèle exporté :

- Comme un modèle géométrique direct pour tester les modèles analytiques.
- comme un modèle dynamique direct, ou soit comme un modèle dynamique inverse, la première possibilité permet de faire des simulations pour vérifier le modèle dynamique analytique (les équations mécaniques), et l'utiliser pour tester les commandes.

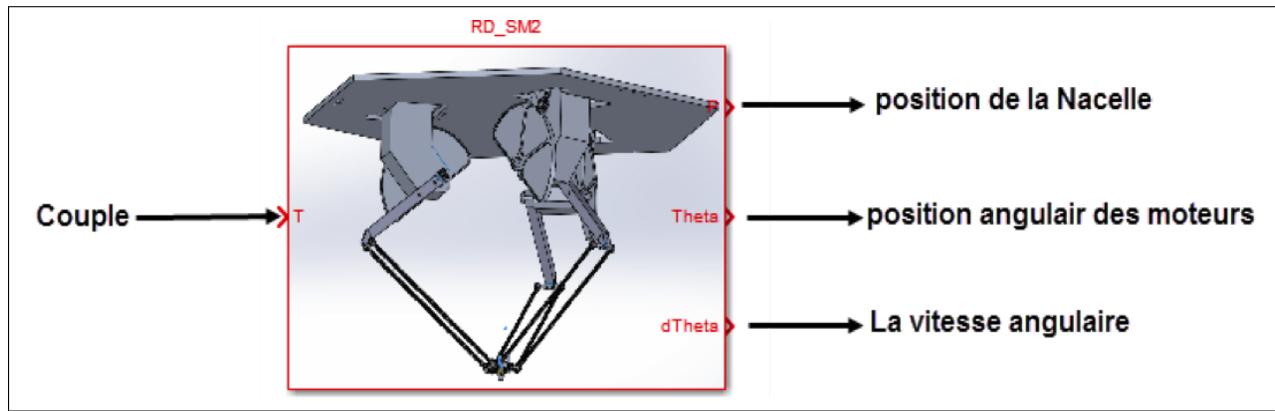


Figure II.4 – Bloc simulink du robot

La deuxième possibilité permet de tester le modèle dynamique inverse analytique.

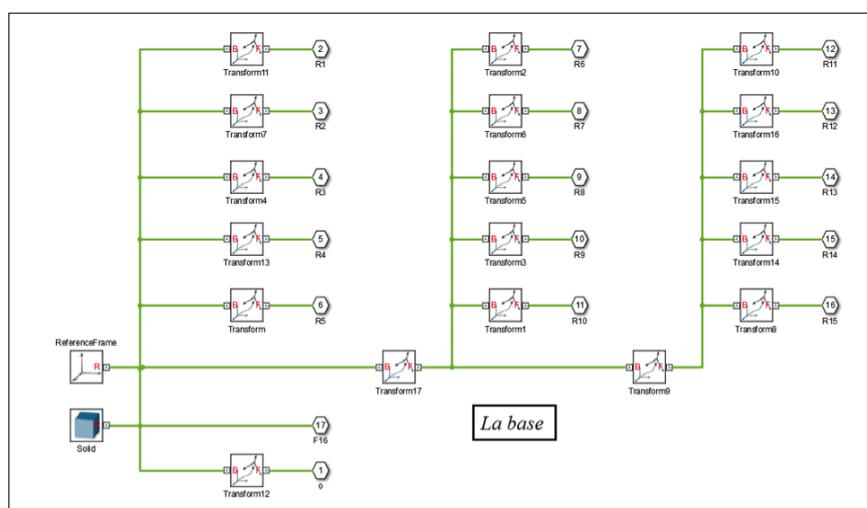
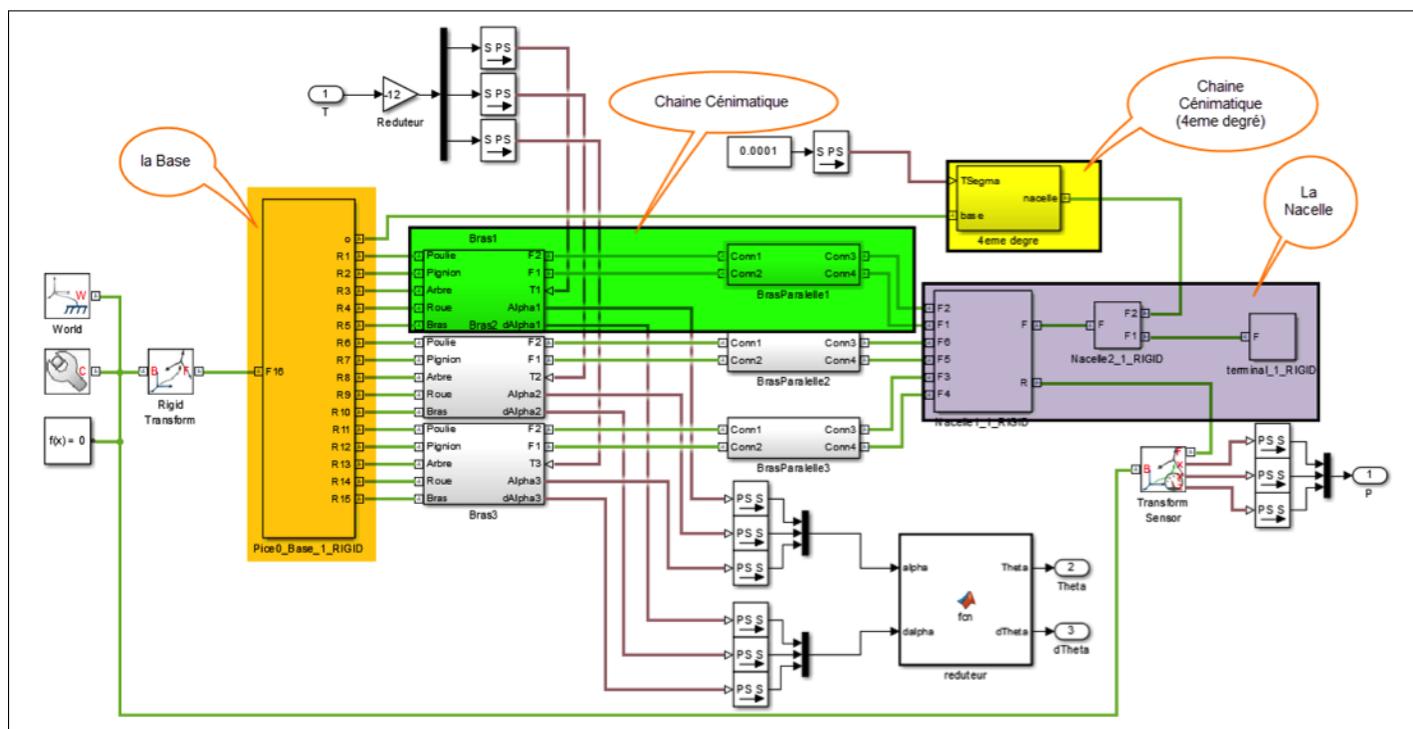
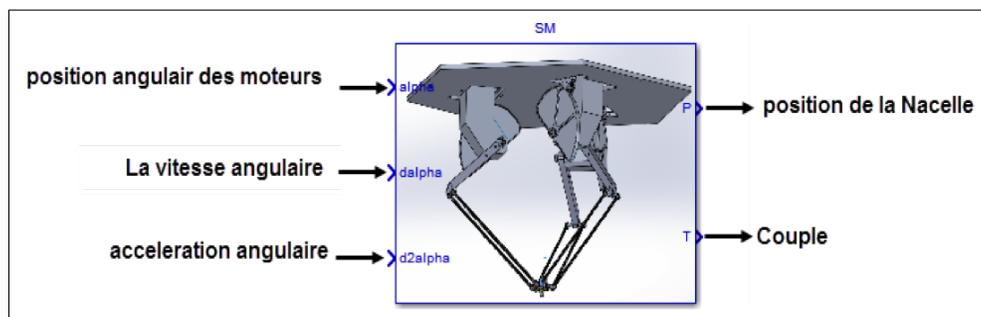


Figure II.5 – Le bloc de la base

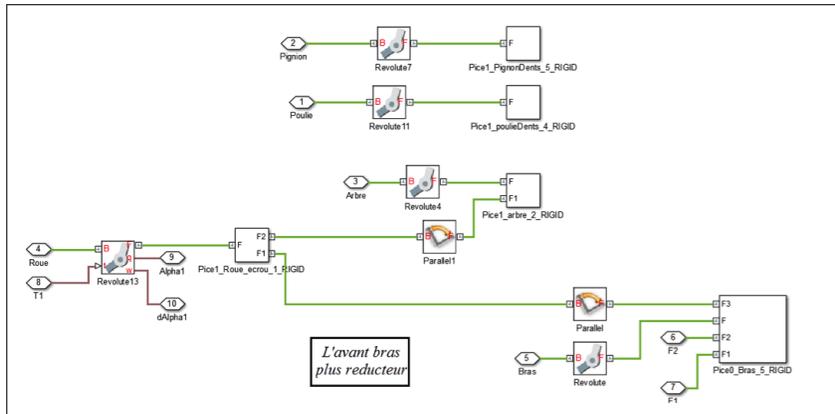


Figure II.6 – Le bloc du bras

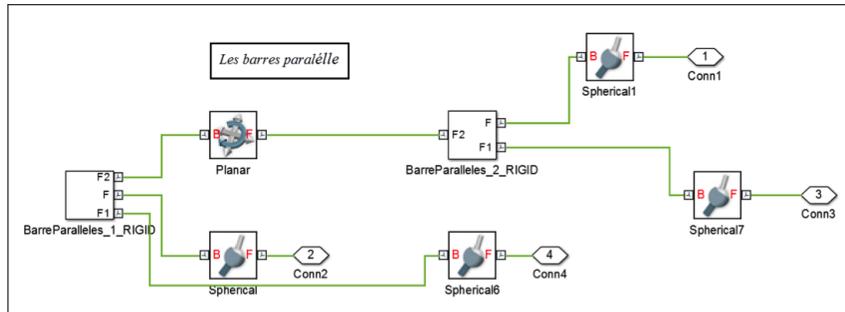
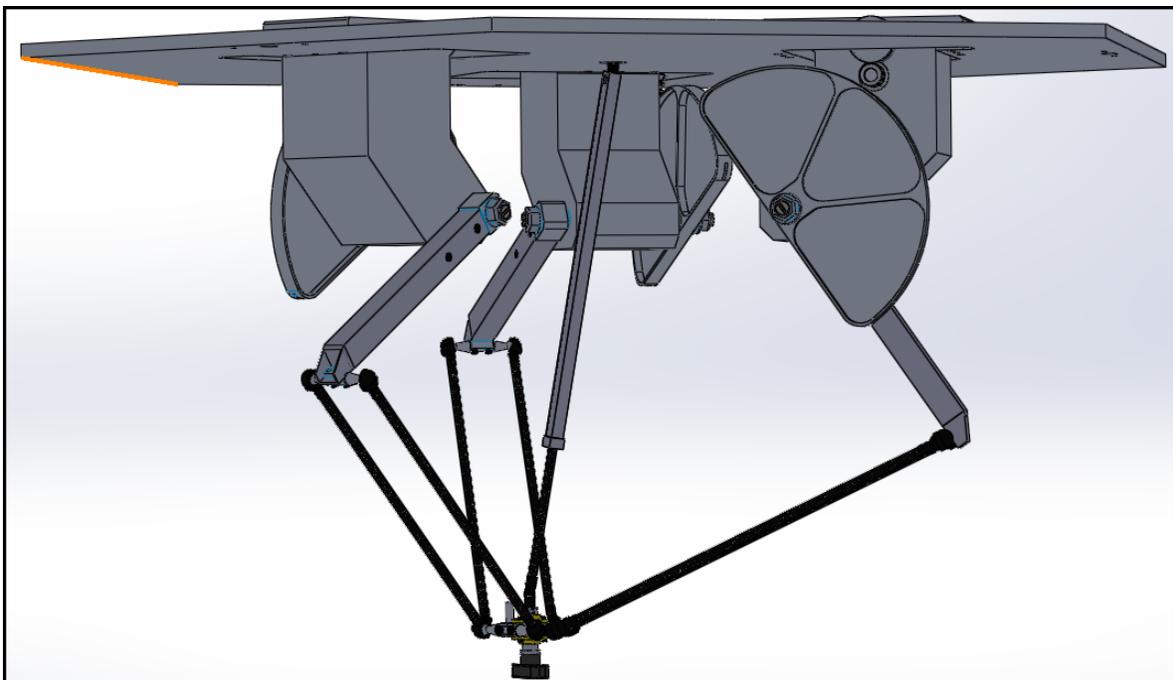


Figure II.7 – Le bloc des barres parallèles

Paramètres Géométriques et mécanique :

Après avoir dessiné le robot en solidWorks suivant les paramètres des dessins techniques du robot (longueurs et matériaux de la matière), on a utilisé les outils d'évaluations de solidWorks (Propriétés de masse, Mesurer) pour calculer les longueurs, les masses, et les moments d'inertie des différents organes.



Constante 1	Désignation 2	Valeur 3
l_1	Longueur bras	200 mm
l_2	Longueur barres parallèles	300 mm
R_1	Rayon de la base	150 mm
R_2	Rayon de la nacelle	24 mm
$r = R_1 - R_2$	Différence de rayon base/nacelle	126 mm
M_{1bras}	Masse de l'avant bras	0.08366 Kg
M_{1roue}	Masse de la roue	0.18683
M_2	Masse de deux barres prallèles	2 x 0.01438 Kg
M_3	Masse de la nacelle	0.0416
J'_r	Moment d'inertie de la roue par rapport à son centre d'inertie	$691.620 \times 10^{-6} \text{ Kg/m}^2$
J_r	Moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe d'articulation au point A	$905.9125 \times 10^{-6} \text{ Kg/m}^2$
J'_b	Moment d'inertie de l'avant bras par rapport à son centre d'inertie	$403.409 \times 10^{-6} \text{ Kg/m}^2$
J_b	Moment d'inertie de l'avant bras par rapport à l'axe d'articulation au point A	$693.3452 \times 10^{-6} \text{ Kg/m}^2$
d_r	La distance entre l'axe d'articulation au point A et le centre d'inertie de la Roue	34.455 mm
d_b	La distance entre l'axe d'articulation au point A et le centre d'inertie de l'avant bras	58.86 mm
$J_{moteur-pignon}$	Moment d'inertie de l'arbre de moteur plus celle du pignon	$37.28 \times 10^{-6} \text{ Kg/m}^2$
J_{poulie}	Moment d'inertie de la poulie	$3.91 \times 10^{-6} \text{ Kg/m}^2$
J_1	Moment d'inertie du réducteur rapporté au bras (tel que les moments d'inertie de l'avant bras et celle de la roue sont rapportés au points A)	0.0071126 Kg/m^2

5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a pu construire un modèle de simulation complet identique à celui présenté dans le Laboratoire (LCP) grâce au logiciel Solidworks et les dessins techniques associés ce dernier, puis on a exporté le document vers le SimMechanics pour être présenté sous la forme de bloc Simulink pouvant être utilisé directement dans des schémas de simulation.

Le modèle qui a été réalisé sera dorénavant utilisé comme plateforme de test, sur laquelle seront appliquées les commandes et avec laquelle sera validée la modélisation analytique du robot (Modèle Géométrique, Modèle Cinématique et Modèle Dynamique) qui seront abordés dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Modélisation du Robot Delta

1 Modèle Géométrique

1.1 Modèle Géométrique Directe

Le modèle géométrique a pour objectif de calculer la position de l'organe terminale en fonction des angles articulaires ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$). le calcul du MGD d'une structure sériels est systématique (transformation homogène avec formulation de DH ou Dombre), ce type de calcul n'est pas valable dans le cas où on veut étudier les structures parallèles telles que les robots delta car l'étude des robots a chaîne fermée est particulière pour chaque structure, c'est là où on peut avoir plusieurs visions ou bien plusieurs solutions pour une même structure. Les parties intéressantes pour établir le modèle géométrique du robot delta sont celles indiquées dans la figure suivante :

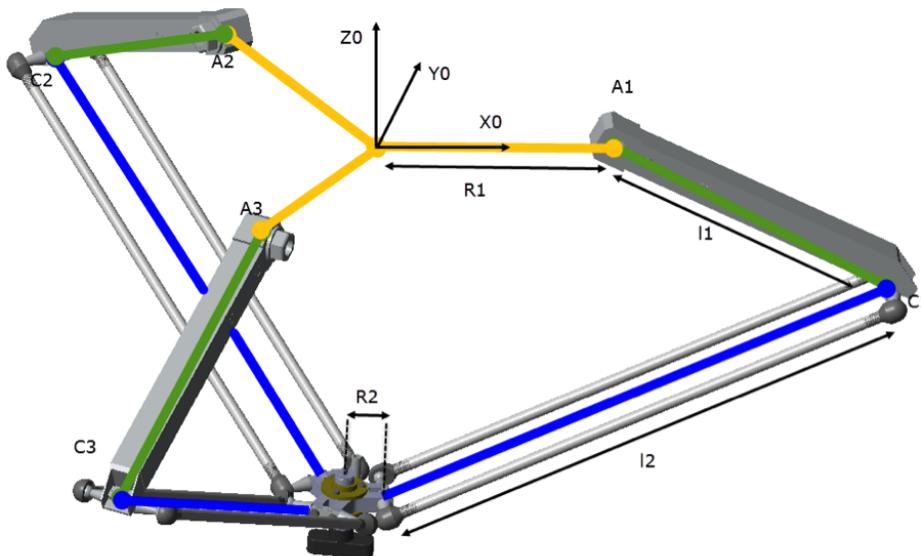


Figure III.1 – Le repère R_0

Cette structure peut être simplifiée si on fait une translation de R_1 des segments l_1 et l_2 vers l'axe Oz .

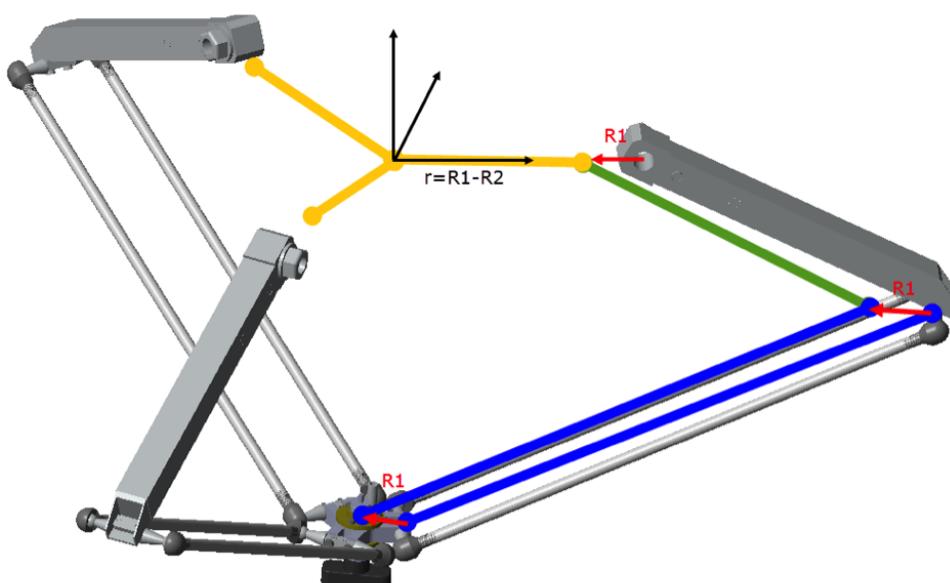


Figure III.2 – La longueur r

On obtient la structure géométrique simplifiée pour le robot delta :

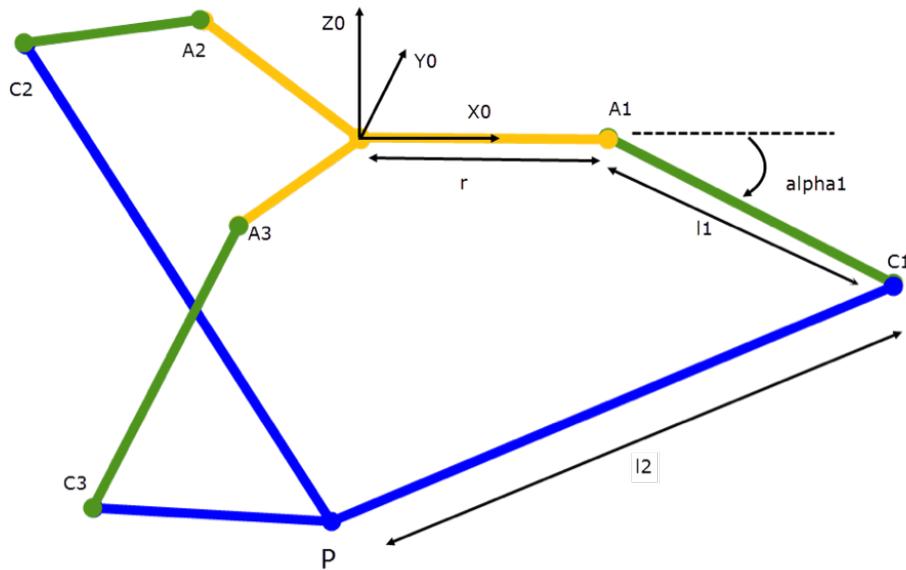


Figure III.3 – Structure simplifiée du robot delta

La description géométrique (MGD) du robot delta peut être établie si les trois points C_1 , C_2 et C_3 appartiennent à la même surface de la sphère ' S ' centrée en P , de rayon l_2 . Cette idée est celle développée par *Clavel* dans son ouvrage [5].

On peut voir aussi que le centre de l'effecteur P est l'intersection de trois sphères centrées en C_1 , C_2 et C_3 de rayon l_2 , cette vision nous ramène aux mêmes équations établis par Clavel. L'équation qui définit la sphère ' S ' est la suivante :

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = l_2^2 \quad (\text{III.1})$$

(X, Y, Z) : représentent les coordonnées de P .

(x, y, z) : représentent les coordonnées d'un point appartenant à la surface de ' S '.

Puisque on a trois points C_1 , C_2 et C_3 , alors on aura trois équations de trois inconnues, c'est un système d'équations non linéaires qu'on doit le résoudre pour trouver la position de la nacelle $P = (x, y, z)^T$ en fonction de α_1 , α_2 et α_3 .

Tout les ouvrages que nous avons consulté [5, 6, 7, 3, 2, 4, 8, 9, 1] qui traitent le sujet du robot delta utilisent le même modèle géométrique établi par *Clavel*, mais en voyant le résultat obtenu par la résolution d'un tel système d'équations on ne peut même pas penser à faire une étude analytique (les points de singularité, dérivation analytique...).

Le fait qu'on ne peut pas faire une étude analytique sur les résultats obtenus ne signifie pas qu'on ne peut pas commander le système. En effet on peut remédier à ce problème en utilisant la dérivation numérique. Cette solution est adopté par plusieurs chercheurs (dans les ouvrages cités précédemment). Les

dérivations numériques présentent plusieurs inconvénients, parmi eux on trouve :

- L'exigence d'un pas de dérivation très court pour se mieux rapprocher de la solution, mais quoique le pas de dérivation soit très court l'erreur de dérivation numérique se présente toujours. Ce type d'erreur peut être traité comme une erreur de modélisation.
- Il peut être un obstacle gênant dans la partie commande où il y a une possibilité d'être restreint ou être bloqué pour certains types de commande qui exigent une dérivation analytique (par exemple : la commande par changement de base et difféomorphisme).

Donc, le fait d'avoir des expressions simples, va nous permettre de discuter les singularités clairement et établir les fonctions dérivées.

En observant bien la structure du robot, on peut remarquer que sa partie inférieure (la pyramide définie par les points C_1 , C_2 et C_3 (figure ci-dessous), comporte une propriété qui peut nous aider de prendre un chemins raccourci vers la solution.

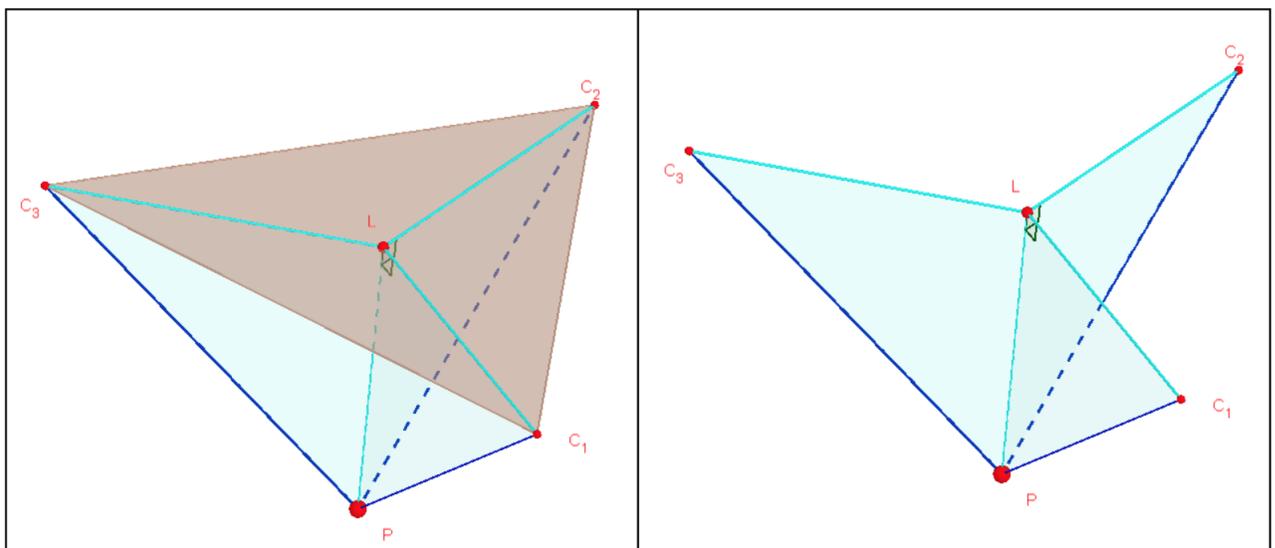


Figure III.4 – Modèle Géométrique

La projection L du point P sur le plan $(C_1C_2C_3)$ représente aussi le centre du cercle qui passe par les trois points C_1 , C_2 et C_3 . En effet, il suffit de prendre les trois triangles C_1LP , C_2LP et C_3LP , et montrer qu'ils sont isométriques pour démontrer la remarque (La projection L du point P est le centre du cercle comportant C_1 , C_2 et C_3).

En effet ces trois triangles comportent trois segments égaux $C_1P = C_2P = C_3P = l_2$, un segment commun LP , et trois angles droits situés autour du même point L (ils sont égaux parce que L représente la projection de P sur le plan $(C_1C_2C_3)$, donc le segment LP est perpendiculaire à chaque segment comporté par ce plan). On peut conclure maintenant que $C_1L = C_2L = C_3L$, donc L représente le centre du cercle contenant C_1 , C_2 et C_3 , de rayon $R = C_1L = C_2L = C_3L$.

Avant de passer au calcul de P on définit trois repères R_1 , R_2 et R_3 déphasé par rapport au repère d'origine R par des rotations $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \frac{2\pi}{3}$ et $\phi_3 = \frac{4\pi}{3}$ respectivement autour de l'axe (Oz) (dans notre cas $R = R_1$).

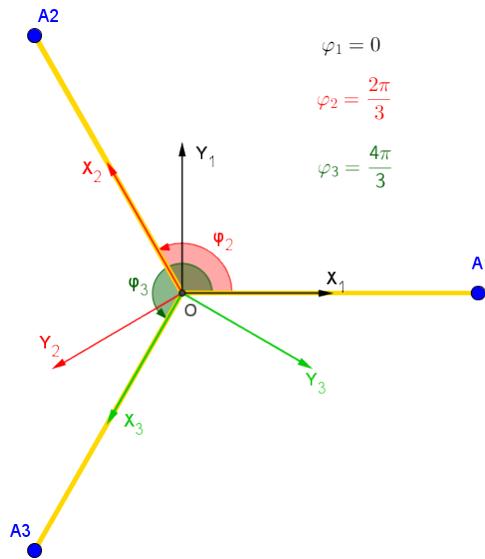


Figure III.5 – Les repères R_i

La matrice de passage du repère R au repère R_i est définis par :

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\phi_i) & -\sin(\phi_i) & 0 \\ \sin(\phi_i) & \cos(\phi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.2})$$

- calcul de la position du point C_i :

Il est claire que dans le repère R_i le point C_i est positionné par le vecteur :

$$\overrightarrow{OC_{i/R_i}} = \begin{pmatrix} r + l_1 \cdot \cos(\phi_i) \\ 0 \\ -l_1 \cdot \sin(\phi_i) \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

Pour trouver la position de C_i dans le repère d'origine R , il suffit de multiplier le vecteur $\overrightarrow{OC_{i/R_i}}$ par la matrice de passage A_i :

$$\overrightarrow{OC_i} = A_i \cdot \overrightarrow{OC_{i/R_i}} = \begin{pmatrix} (r + l_1 \cdot \cos(\phi_i)) \cos(\phi_i) \\ (r + l_1 \cdot \cos(\phi_i)) \sin(\phi_i) \\ -l_1 \cdot \sin(\phi_i) \end{pmatrix} \quad (\text{III.4})$$

- calcul de $P(x, y, z)$:

C'est claire que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{LP}$.

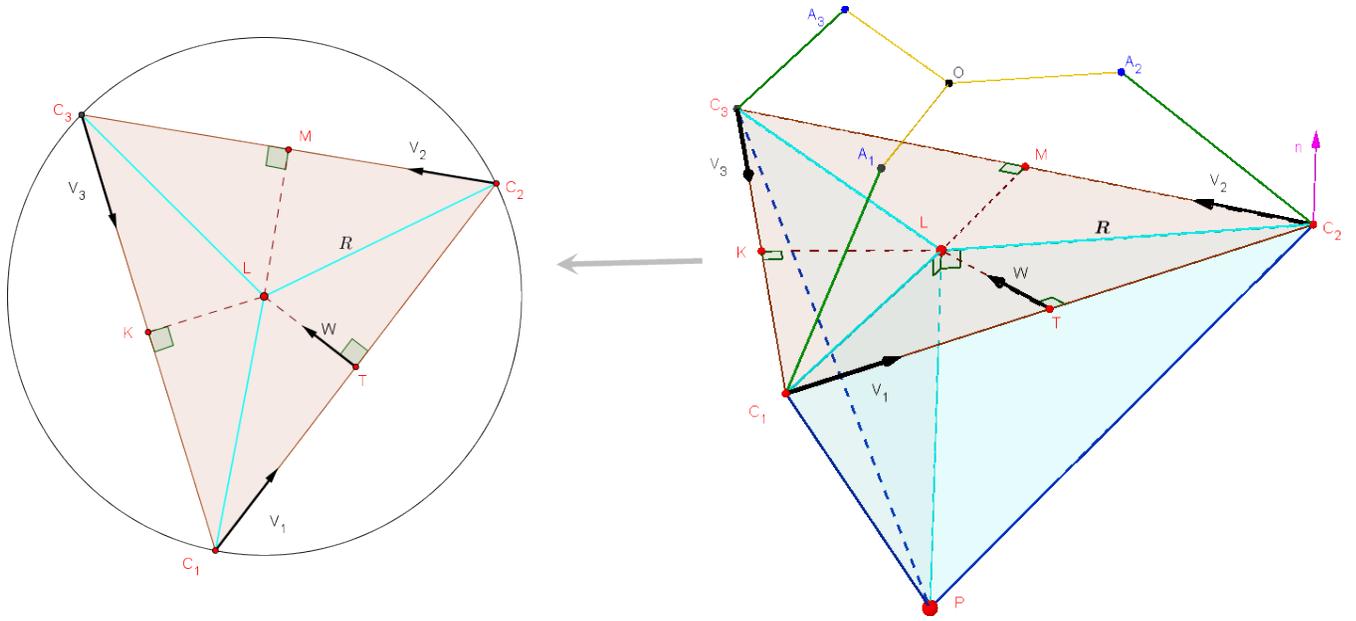


Figure III.6 – Modèle Géométrique

Avant de continuer, on définit les paramètres suivants :

$$a = |\overrightarrow{C_1C_2}| \quad b = |\overrightarrow{C_2C_3}| \quad c = |\overrightarrow{C_1C_3}| \quad (\text{III.5})$$

$$\vec{V}_1 = \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{a} \quad (\text{III.6})$$

Le vecteur \overrightarrow{OT} se calcul comme suit :

$$\overrightarrow{OT} = \frac{\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2}}{2} \quad (\text{III.7})$$

$$\overrightarrow{TL} = TL \cdot \vec{\omega} \quad (\text{III.8})$$

Soit le vecteur suivant : $\vec{S} = \overrightarrow{C_3C_1} \wedge \overrightarrow{C_1C_2}$. C'est un vecteur normale au plan $(C_1C_2C_3)$, d'autre côté $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ tel que : S représente deux fois la surface du triangle $C_1C_2C_3$ et \vec{n} son vecteur unitaire normale.

S se calcule par la formule suivante : $2 \cdot R \cdot S = a \cdot b \cdot c$.

R : c'est le rayon du cercle qui passe par les points du triangle $(C_1C_2C_3)$, alors il est calculé par :

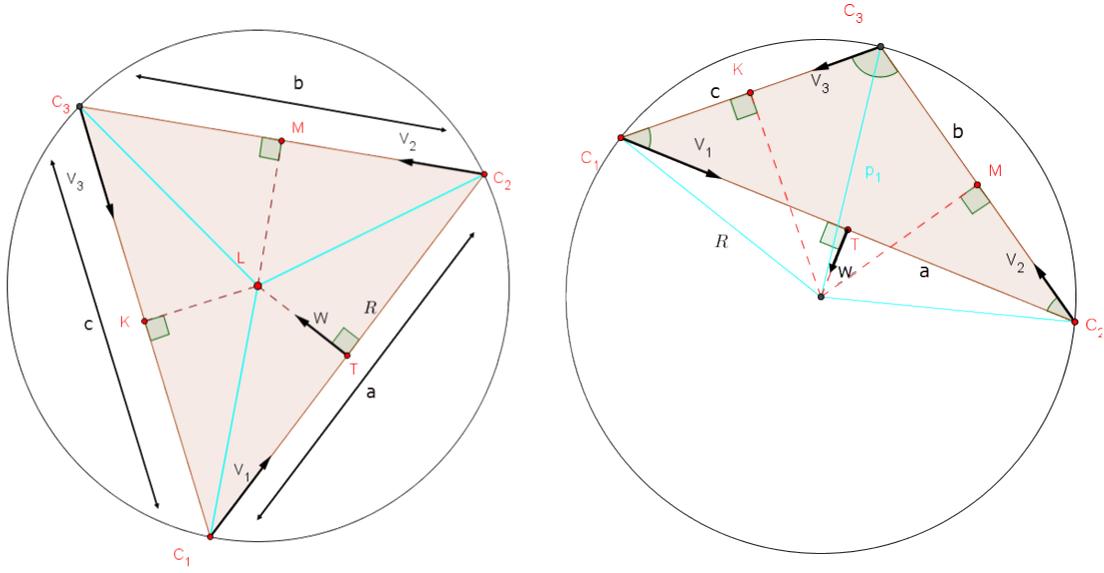
$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}} \quad (\text{III.9})$$

tel que $p = a + b + c$

Pour obtenir $\vec{\omega}$ on distingue deux cas comme montre la figure :

- Pour le premier cas : $\vec{\omega} = \vec{n} \wedge \vec{V}_1$.
- Pour le deuxième cas : $-\vec{\omega} = \vec{n} \wedge \vec{V}_1$.

En effet, dans le premier cas on trouve que


 Figure III.7 – Signe du vecteur ω

$\widehat{C_1C_2C_3} < \frac{\pi}{2}$ ce qui signifie d'après le théorème d'El Kashi dans le triangle $C_1C_2C_3$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c \cos(\widehat{C_1C_2C_3})$, que : $a^2 < b^2 + c^2$.

On trouve le contraire dans le deuxième cas ($a^2 > b^2 + c^2$).

On conclut que : $\vec{\omega} = \text{signe}(b^2 + c^2 - a^2) \vec{n} \wedge \vec{V}_1$. Il nous reste à calculer TL .

Dans le triangle droit C_2TL :

$$TL = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad (\text{III.10})$$

Dans le triangle droit C_1LP :

$$LP = \sqrt{l_2^2 - R^2} \quad (\text{III.11})$$

Finalement

$$\vec{LP} = -LP \cdot \vec{n} \quad (\text{III.12})$$

A ce point le calcul de $P = (x, y, z)$ est terminé, il ne reste qu'une petite tâche qu'on va ajouter. En revenant à la définition des paramètres on voit que V_1 (resp V_2, V_3) n'est plus défini si a est nul (resp b, c est nul) Il résulte qu'il y a trois cas de singularités : $C_1, C_2 \in (oz)$, $C_1, C_2 \in (oz)$ et $C_1, C_2 \in (oz)$ C.à.d. s'il y a deux points appartenants au même axe (oz) (par ex C_2 et C_3), alors même si le troisième point (C_1) est fixe, l'effecteur peut prendre la position de n'importe quel point porté sur un cercle centré au milieu du segment C_3C_1 ($C_2 = C_3$), voir qu'il peut se déplacer dans une sphère s'ils appartiennent tous au même axe (oz) . Le rayon de ce cercle égale a $r = \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{C_3C_1}{2}\right)^2}$ C'est la même expression que celle de TL

1.1.1 Comparaisant avec le MGD de Clavel

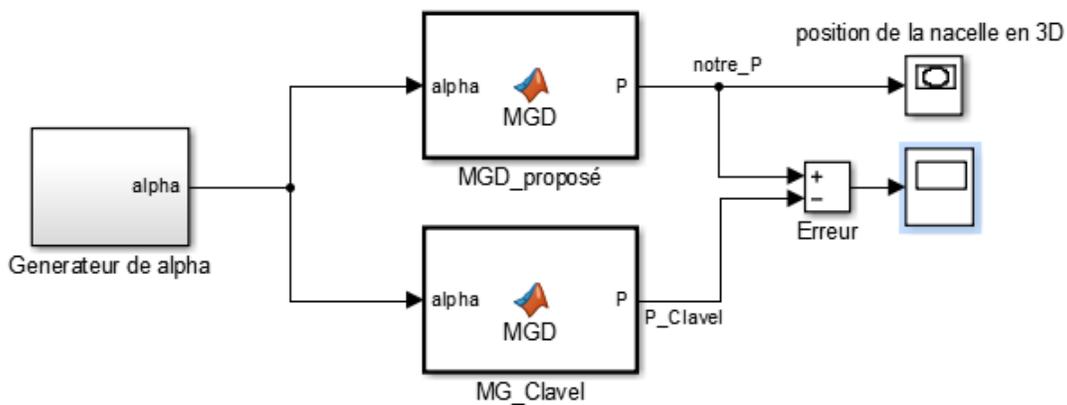


Figure III.8 – Bloc Simulink

Les deux blocs reçoivent les mêmes angles de rotation α correspondants à une trajectoire circulaire.

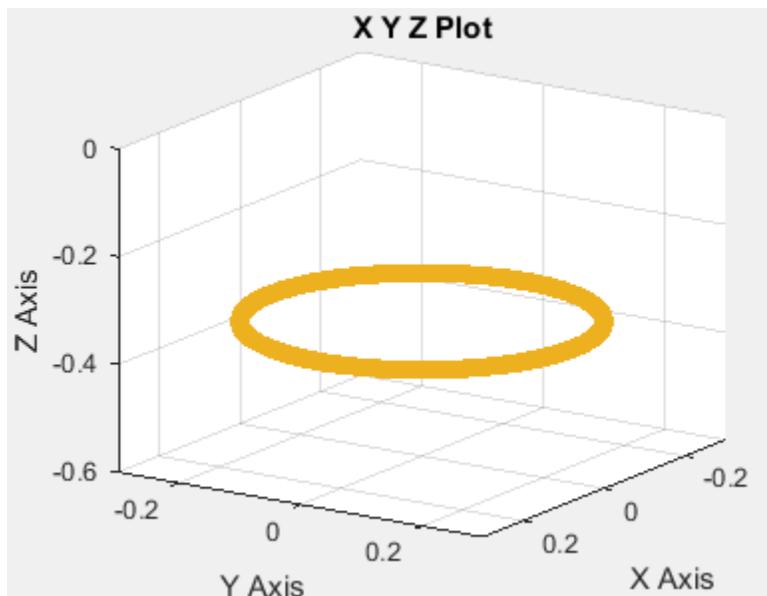


Figure III.9 – Trajectoire en 3D

Les résultats sur le scope nous ont donné des erreurs d'ordre de 10^{-14} d'où la validation du MGD.

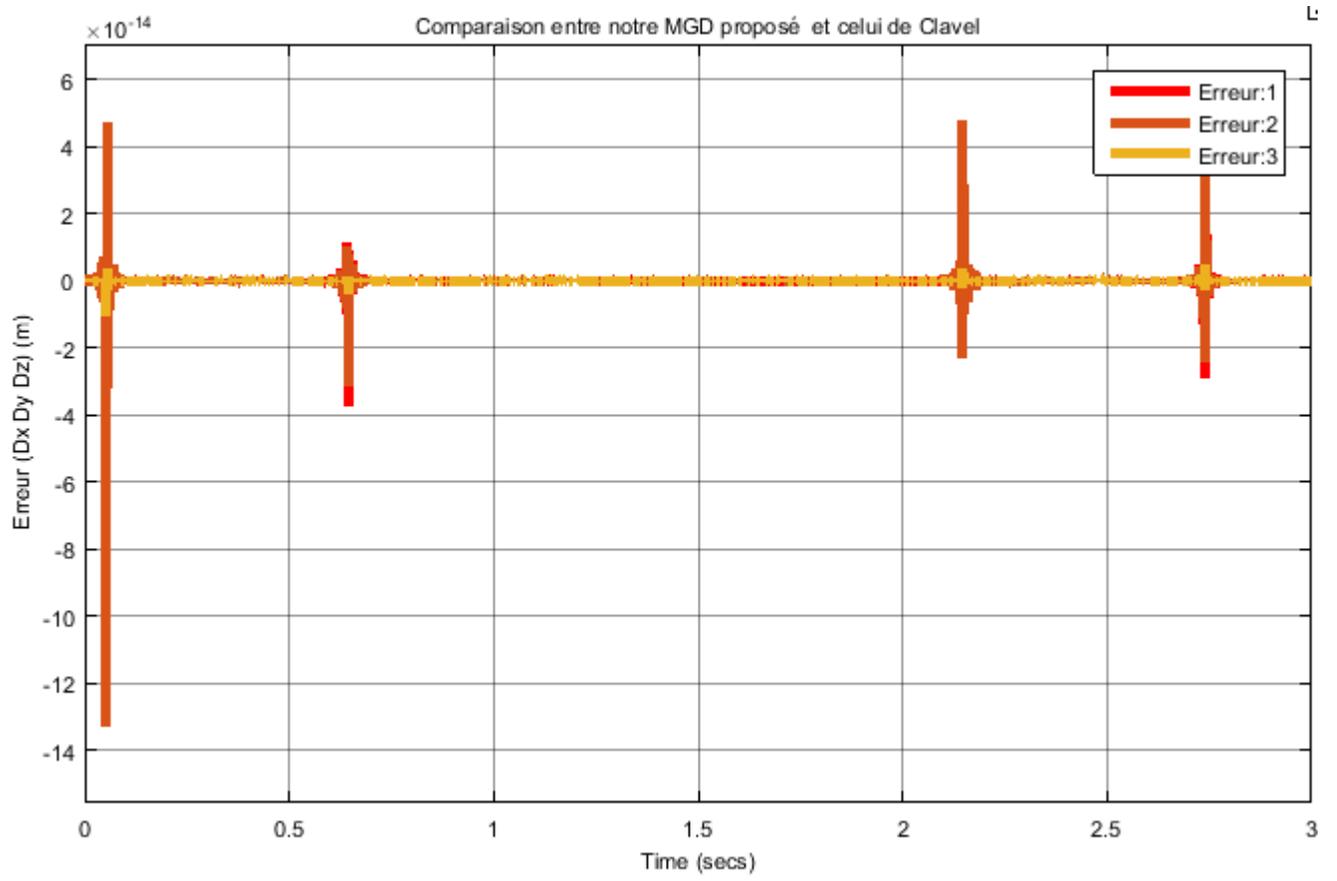


Figure III.10 – Erreur sur la position

1.2 Modèle Géométrique Inverse

A. Introduction :

Le problème cette fois-ci est de trouver les angles α_i en fonction de la position de l'effecteur. C'est une partie importante pour la commande parce qu'il est clair que pour déplacer l'effecteur d'une position à une autre il faut connaître les angles correspondantes à cette position.

D'après la figure ci-dessous, on remarque que C_i se trouve dans un cercle K_i de rayon l_1 et de centre $(r, 0, 0)_{R_i}$ dans le repère R_i , puisque la position de l'effecteur est donnée et on cherche à trouver les angles α_i qui nous donnent cette position, il suffit de déterminer l'intersection entre le cercle K_i et la sphère (S) centrée en P et de rayon l_2 , cette intersection donne deux points, l'un de ces deux point est le point C_i .

Pour simplifier le problème on ne va pas déterminer directement l'intersection entre (S) et K_i , mais on détermine l'intersection entre (S) et le plan $(ox_i z_i)$, ça nous donne un autre cercle qu'on appelle K'_i appartenant au même plan, puis C_i est déterminé par une intersection entre K_i et K'_i (voir figure).

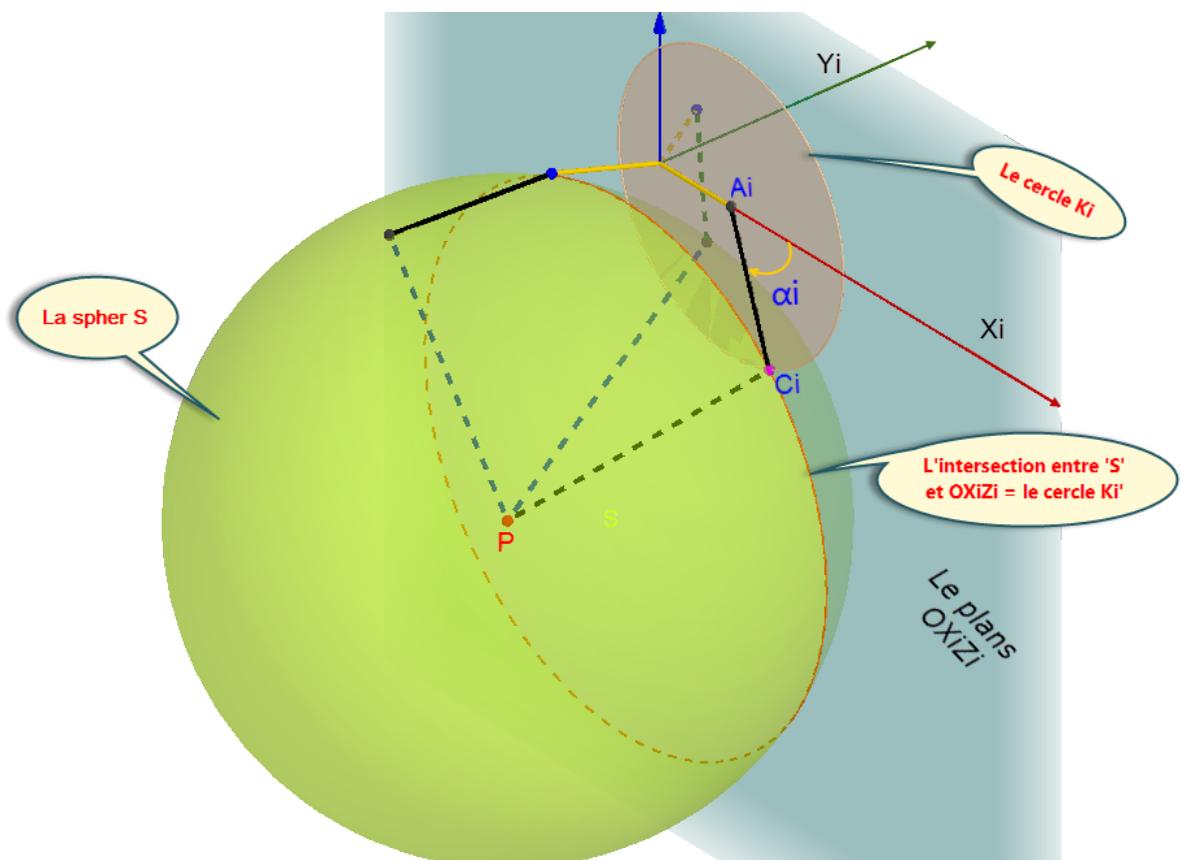


Figure III.11 – Les intersections

B. Détermination du cercle K'_i (centre et rayon) :

D'après la figure suivante on voit que pour déterminer le centre de K'_i il suffit de projeter P_i sur le plan $ox_i z_i$.

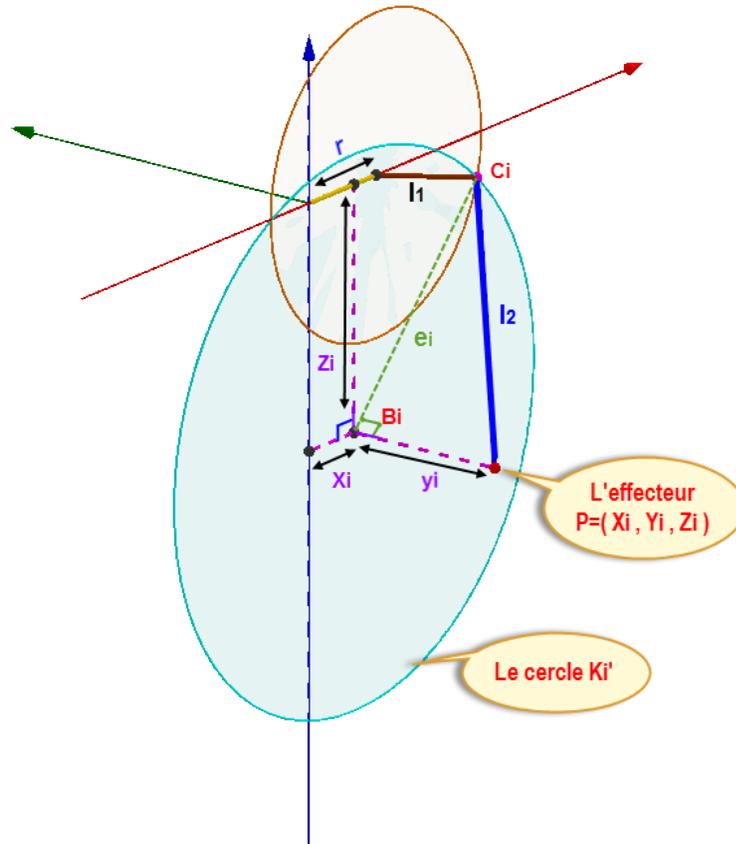


Figure III.12 – Les bras et le repère R_i correspondants à α_i

P_i représente les coordonnées du point P dans le repère R_i . Donc dans le plan $(\mathbf{o}x_i z_i)$ le point P_i a les coordonnées suivantes :

$$P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & \sin\phi_i & 0 \\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P \quad (\text{III.13})$$

Il nous reste à déterminer le rayon e_i de K'_i . Puisque la projection du point P est perpendiculaire sur le plan $(\mathbf{o}x_i z_i)$, alors le triangle $C_i P_i P$ est un triangle droit en P_i , il est déterminé par l_2 et $|y_i|$:

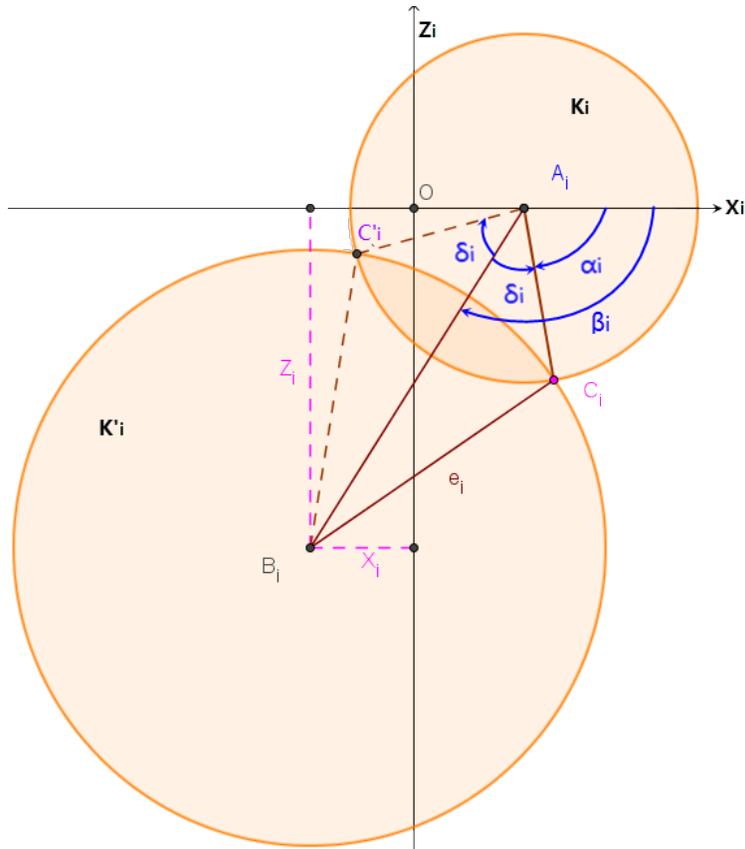
$$e_i = \sqrt{l_2^2 - y_i^2} \quad (\text{III.14})$$

C. Détermination de α_i :

Dans le plan $(\mathbf{o}x_i z_i)$, les deux cercles K_i et K'_i forment deux intersections (C_i et C'_i) correspondants à α_i et α'_i respectivement.

Les deux triangles $A_i C_i P_i$ et $A_i C'_i P_i$ sont symétriques par rapport au segment commun $A_i P_i$ qui fait un angle β_i par rapport à l'axe $(\mathbf{o}x_i)$, si on connaît β_i il suffit de connaître $P_i \hat{A}_i C_i = \delta_i$ pour déterminer α_i et α'_i :

$$\alpha_i = \beta_i - \delta_i \quad ; \quad \alpha'_i = \beta_i + \delta_i \quad (\text{III.15})$$


 Figure III.13 – Les intersections entre K_i et K'_i

(a) Calcul de β_i :

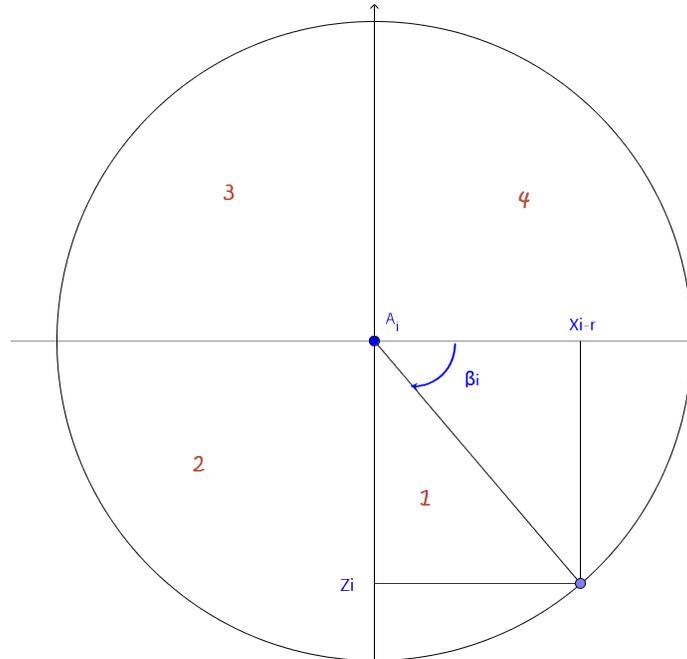
D'après la figure précédente, l'angle β_i est formé par l'intersection entre l'axe (ox_i) et le segment A_iB_i

$$\tan(\beta_i) = \frac{-z_i}{x_i - r} \quad (\text{III.16})$$

Le signe apparait du fait que $\tan(\beta_i)$ est positive dans le premier quadrant, alors que z est négatif dans ce quadrant, c'est le fait que β est dans le sens contraire du sens conventionnel.

Remarque : β_i n'est pas défini dans le cas où $z_i = (x_i - r) = 0$, ce probleme on va le traiter plus tard, donc β_i est défini d'après la figure III.14 comme le suivant :

$$\beta_i = \text{atan2}(z_i, x_i - r) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{-z_i}{x_i - r}\right) & \text{si } x_i - r > 0 \\ \text{atan}\left(\frac{-z_i}{x_i - r}\right) + \pi & \text{si } x_i - r < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x_i - r = 0 \text{ et } -z_i > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & x_i - r = 0 \text{ et } -z_i < 0 \\ \text{n'est pas définis} & \text{si } x_i - r = 0 \text{ et } z_i = 0 \end{cases}$$


 Figure III.14 – L'angle β_i

(b) Calcul de δ_i :

Dans le triangle $A_i B_i C_i$ qui est déterminé par les trois segments $A_i B_i$, e et l_2 , on applique le théorème de El Kashi comme ce qui suit :

$$e^2 = l_2^2 + A_i B_i^2 - 2l_2 A_i B_i \cos \delta_i \quad \Rightarrow \quad \cos \delta_i = \frac{l_2^2 + A_i B_i^2 - e^2}{2l_2 A_i B_i} \quad (\text{III.17})$$

Ça implique que :

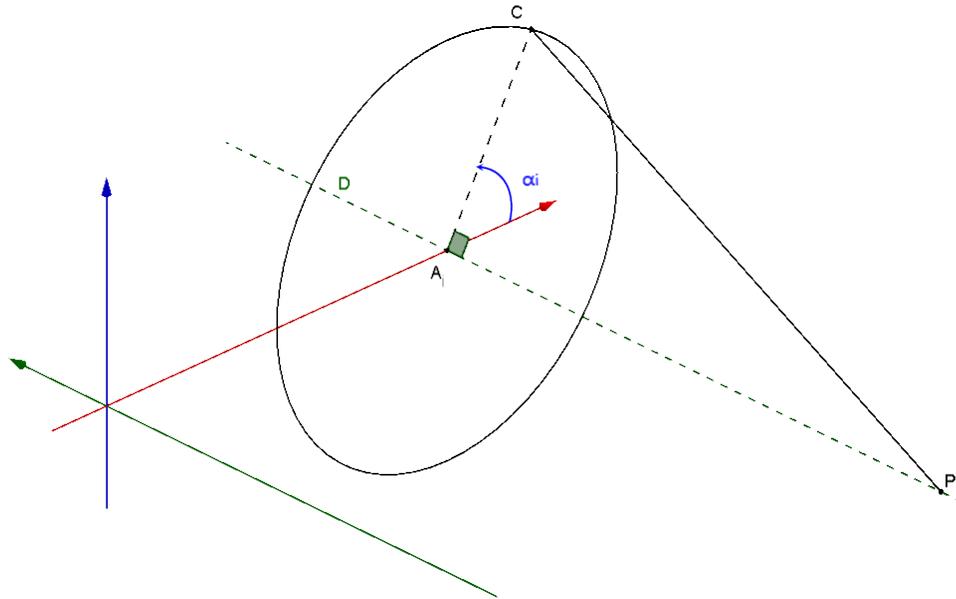
$$\delta_i = \arccos \left(\frac{l_2^2 + A_i B_i^2 - e^2}{2l_2 A_i B_i} \right) \quad (\text{III.18})$$

Tel que : $A_i B_i = \sqrt{z_i^2 + (x_i - r)^2}$

(c) Les points de singularité :

Maintenant on va discuter le cas où β_i n'est pas défini. β_i n'est plus défini si $x_i - r = 0$ et $z_i = 0$ en même temps, mais ça signifie quoi d'avoir ces deux équations vérifiées en même temps ?

Ça signifie que la projection du point P sur le plan $(ox_i z_i)$ représente aussi le centre de K_i (c.à.d : le point A_i), donc l'effecteur dans ce cas est porté sur la droite qui est parallèle à l'axe (oy_i) et passant par A_i .


 Figure III.15 – La projection de P est A_i

On remarque aussi que le triangle $A_i C_i P$ est droit au point A_i , ainsi on peut déterminer y_i :

$$|y_i| = \sqrt{l_2^2 - l_1^2} \quad \Rightarrow \quad y_i = \pm \sqrt{l_2^2 - l_1^2} \quad (\text{III.19})$$

Donc β_i n'est pas défini pour les points suivants :

$$P_{i1} = \begin{pmatrix} r \\ \sqrt{l_2^2 - l_1^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_{i2} = \begin{pmatrix} r \\ -\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.20})$$

Ces deux points sont exprimés dans le repère R_i , pour les trouver dans le repère R_0 il suffit de les multiplier par :

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i & 0 \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{i/R_0} = A_i \cdot P_{i/R_i}$$

Ainsi on obtient :

$$P_{i1/R_0} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\phi_i \\ \sqrt{l_2^2 - l_1^2} \sin\phi_i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_{i2/R_0} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\phi_i \\ -\sqrt{l_2^2 - l_1^2} \sin\phi_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Remarque :

Pour chaque angle α_i on trouve deux points de singularité P_{i1} et P_{i2} , un dans le sens positif de (oy) et l'autre dans le sens négatif. A la

fin on trouve 6 points de singularité qui sont tous situés dans le plan (oxy) comme le montre la figure :

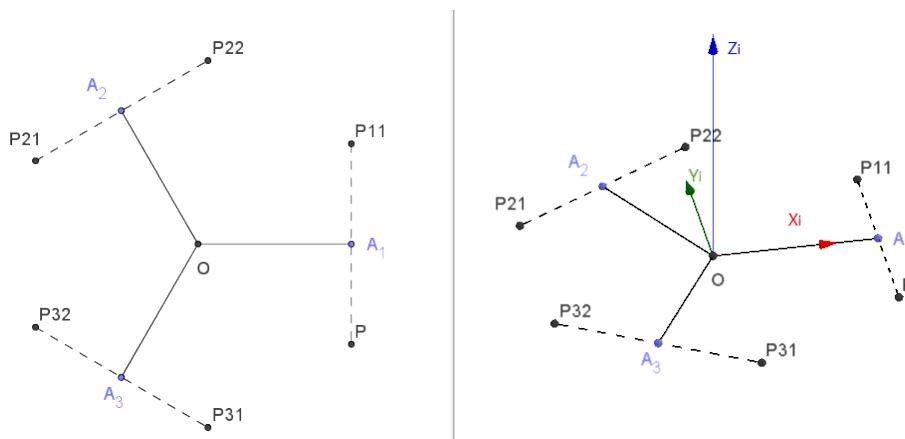


Figure III.16 – Points de Singularité

En réalité, ces points de singularité ne représentent aucun problème au niveau pratique, parce que pratiquement on ne peut pas atteindre ces 6 points (P_{ij}) à cause des limites mécaniques.

1.2.1 Comparaisant avec le modèle de Clavel

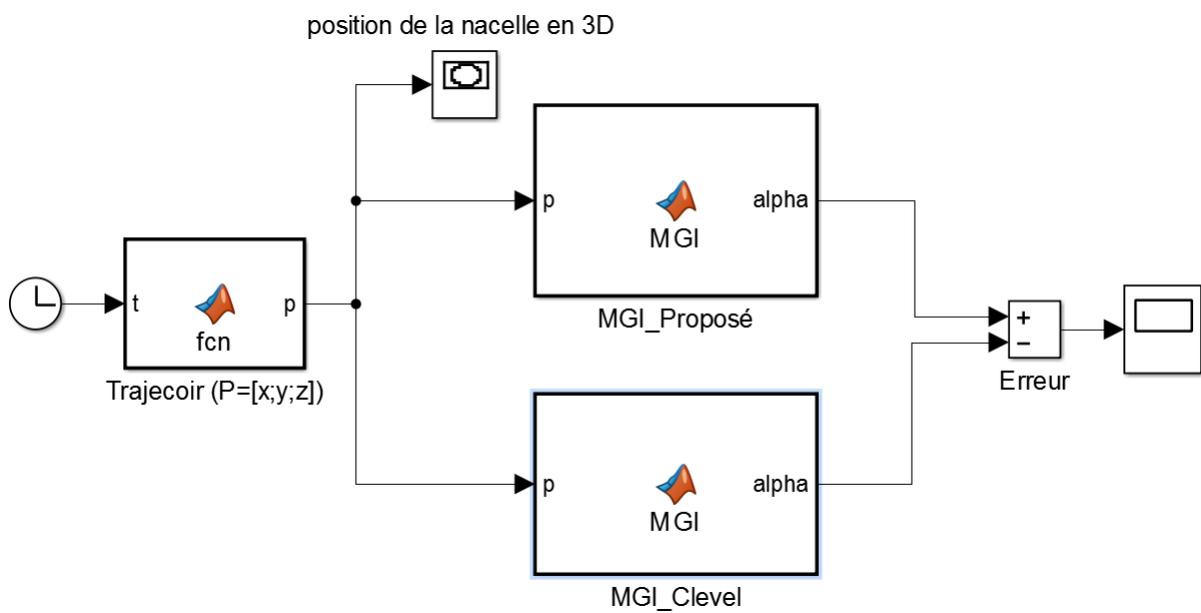


Figure III.17 – Bloc Simulink

Les deux blocs reçoivent les mêmes positions correspondantes à une trajectoire circulaire.

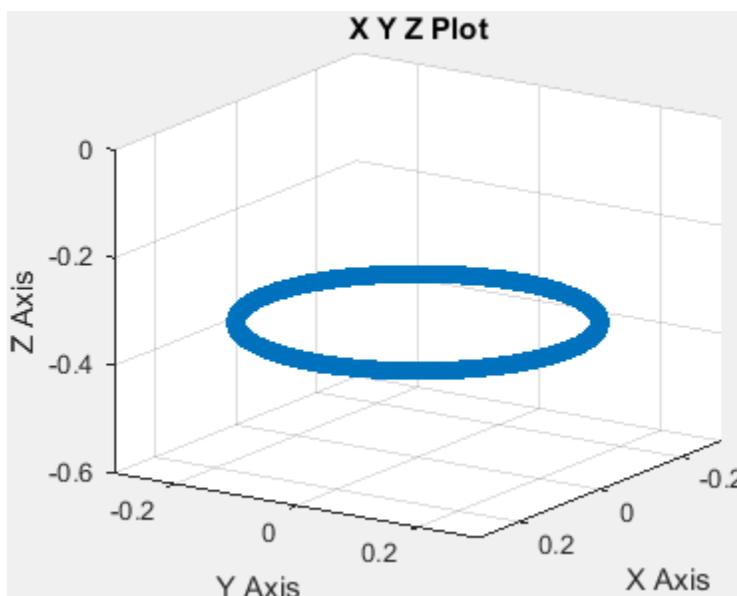


Figure III.18 – Trajectoire en 3D

Les résultats sur le scope nous ont donné des erreurs d'ordre de 10^{-15} d'où la validation du MGD.

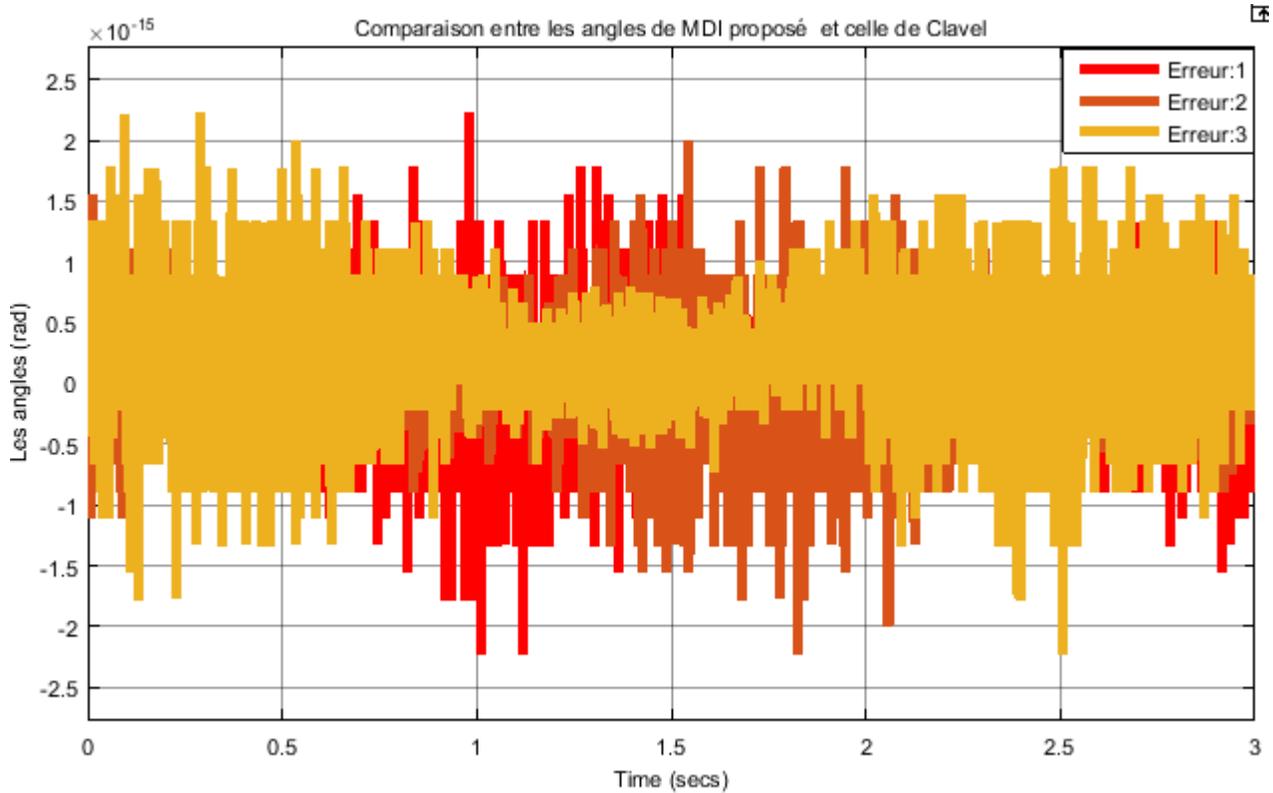


Figure III.19 – Erreur sur la position

1.3 Validation du MGD et MGI en comparant avec Sim-Mechanics

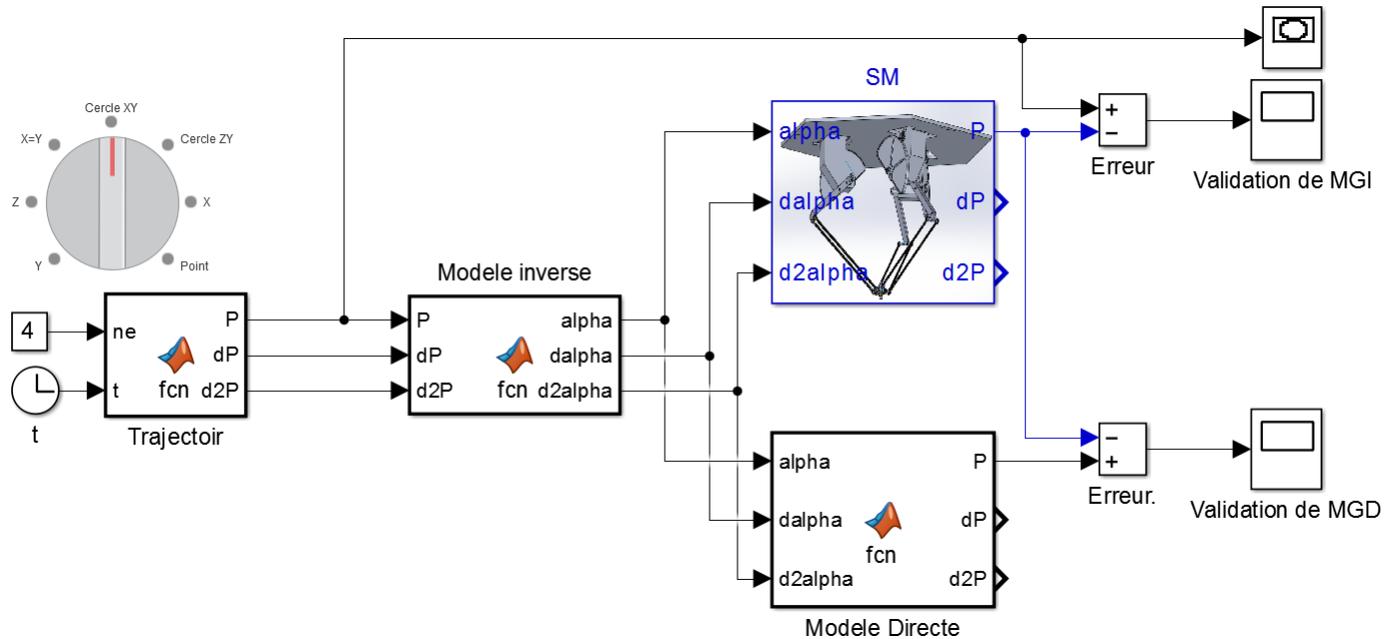
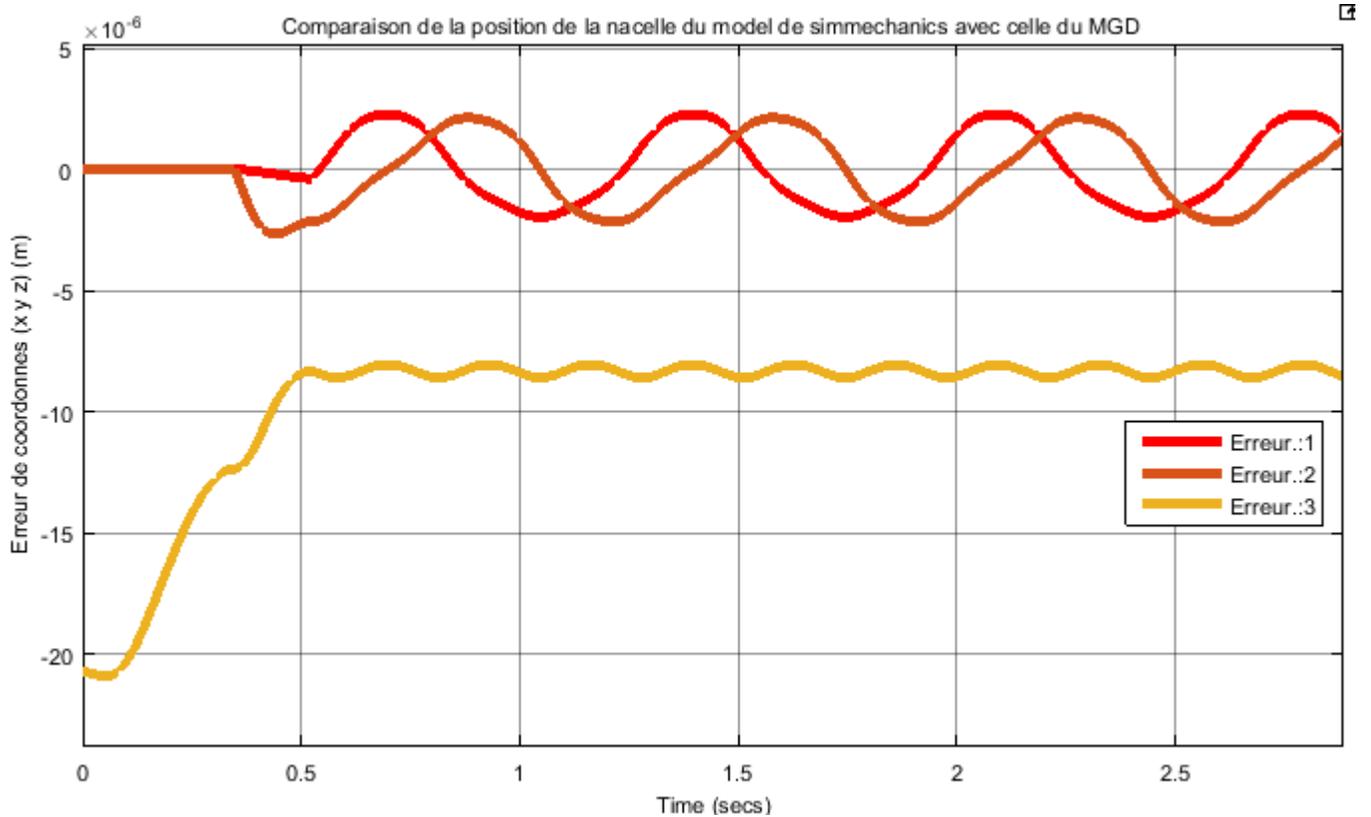


Figure III.20 – Block Simulink

Ce schéma bloc a pour but de valider notre modèle géométrique (directe et inverse).

Validation du MGD :

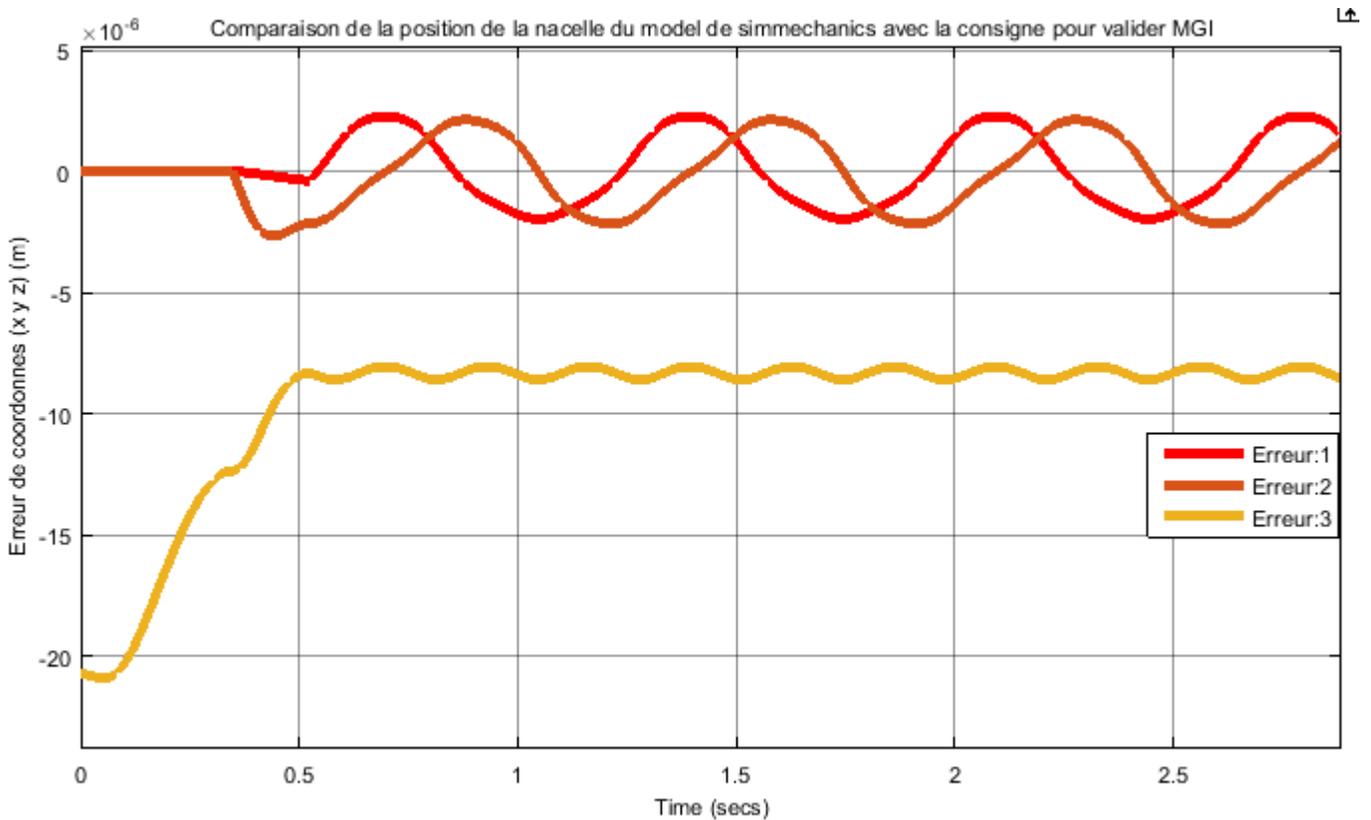
Le bloc du SimMechanics et celui du MGD reçoivent les mêmes angles de rotation α et nous donnent les résultats affichés sur le scope nommé validation du MGD.



On observe une erreur d'ordre de 10^{-6} d'où la validation du MGD.

Validation du MGI :

Le modèle construit sous SimMechanics reçoit des angles de rotation calculés par le bloc du MGI à partir de la consigne (trajectoire circulaire) puis nous avons comparé cette consigne avec la sortie du modèle construit. Les erreurs sont affichés sur le scope nommé validation du MGI.



On observe une erreur d'ordre de 10^{-6} d'où la validation du MGI.

2 Modèle Cinématique

2.1 Modèle Cinématique Directe

Après avoir obtenu le modèle géométrique directe nous l'avons utilisé pour déterminer le modèle cinématique directe (MCD), le MCD consiste à trouver les vitesses de variation des coordonnées de la nacelle en fonction des vitesses de variation des angles α_i , ce modèle est utile pour la simulation et éventuellement pour la commande.

On a trouvé que :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{LP} \implies \dot{\overrightarrow{OP}} = \dot{\overrightarrow{OT}} + \dot{\overrightarrow{TL}} + \dot{\overrightarrow{LP}} \quad (\text{III.22})$$

Avant de passer au calcul de $\dot{\overrightarrow{TL}}$ et $\dot{\overrightarrow{LP}}$ on va calculer la dérivée de quelques paramètres :

1. Calcul de $\dot{\overrightarrow{OC}_i}$:

$$\dot{\overrightarrow{OC}_i} = \begin{pmatrix} -l_1 \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \cos(\phi_i) \\ -l_1 \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\phi_i) \\ -l_1 \cdot \cos(\alpha_i) \end{pmatrix} \cdot \dot{\alpha}_i \quad (\text{III.23})$$

2. les longueurs a , b et c :

$$a^2 = \overrightarrow{C_1C_2} \cdot \overrightarrow{C_1C_2} \quad (\text{III.24})$$

Ça implique que :

$$2a\dot{a} = \overrightarrow{C_1C_2} \cdot \dot{\overrightarrow{C_1C_2}} + \dot{\overrightarrow{C_1C_2}} \cdot \overrightarrow{C_1C_2} = 2 \cdot \overrightarrow{C_1C_2} \cdot \dot{\overrightarrow{C_1C_2}} \implies \dot{a} = \frac{\overrightarrow{C_1C_2} \cdot \dot{\overrightarrow{C_1C_2}}}{a} \quad (\text{III.25})$$

$$\dot{a} = \overrightarrow{V_1} \cdot \overrightarrow{C_1C_2} \quad (\text{III.26})$$

De même on trouve :

$$\dot{b} = \frac{\overrightarrow{C_2C_3}}{b} \cdot \dot{\overrightarrow{C_2C_3}} \quad \text{et} \quad \dot{c} = \frac{\overrightarrow{V_3}}{c} \cdot \dot{\overrightarrow{C_1C_3}} \quad (\text{III.27})$$

Tel que : $\dot{\overrightarrow{C}_iC_j} = \dot{\overrightarrow{OC}_j} - \dot{\overrightarrow{OC}_i}$

3. La dérivée du vecteur unitaire V_1 :

$$\overrightarrow{C_1C_2} = a \cdot \overrightarrow{V_1} \implies \dot{\overrightarrow{C_1C_2}} = a \cdot \dot{\overrightarrow{V_1}} + \dot{a} \cdot \overrightarrow{V_1} \implies \dot{\overrightarrow{V_1}} = \frac{\dot{\overrightarrow{C_1C_2}} - \dot{a} \overrightarrow{V_1}}{a} \quad (\text{III.28})$$

4. Calcul de $\dot{\vec{n}}$ et $\dot{\vec{\omega}}$:

On a vu que $\vec{S} = \overrightarrow{C_3C_1} \wedge \overrightarrow{C_1C_2}$, ça implique que $\dot{\vec{S}} = \dot{\overrightarrow{C_3C_1}} \wedge \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_3C_1} \wedge \dot{\overrightarrow{C_1C_2}}$

$$\overrightarrow{C_1 C_2}$$

D'autre part $\overrightarrow{S} = S \cdot \vec{n}$, par dérivation on trouve

$$\dot{\overrightarrow{S}} = \dot{S} \cdot \vec{n} + S \cdot \dot{\vec{n}} \implies \dot{\vec{n}} = \frac{(\dot{\overrightarrow{S}} - \dot{S} \cdot \vec{n})}{S} \quad (\text{III.29})$$

Il apparait un terme \dot{S} qu'on va le calculer plus tard.

Et :

$$\vec{\omega} = \text{signe}(b^2 + c^2 - a^2) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{V}_1) \implies \dot{\vec{\omega}} = \text{signe}(b^2 + c^2 - a^2) (\dot{\vec{n}} \wedge \vec{V}_1 + \vec{n} \wedge \dot{\vec{V}}_1) \quad (\text{III.30})$$

5. calcul de \dot{R} :

On sait que :

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}} \quad , \quad p = a + b + c \quad (\text{III.31})$$

Pour calculer \dot{R} , on a deux chemins possibles, on commence par le plus facile :

(a) Par la fonction logarithmique : On linéarise l'équation précédente par la fonction logarithmique :

$$\ln(R) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c) - \frac{1}{2} (\ln(p) + \ln(p-2a) + \ln(p-2b) + \ln(p-2c)) \quad (\text{III.32})$$

Il est facile de dériver :

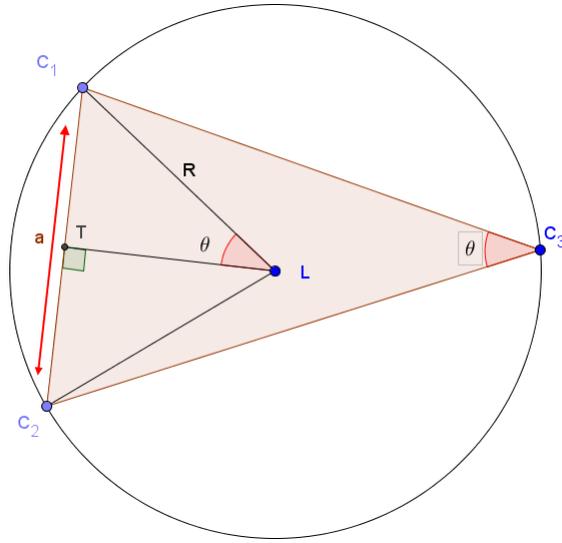
$$\dot{R} = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} - \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{p}-2\dot{a}}{p-2a} + \frac{\dot{p}-2\dot{b}}{p-2b} + \frac{\dot{p}-2\dot{c}}{p-2c} \right] \right) \cdot R \quad (\text{III.33})$$

(b) Par les dérivés partielles :

Pour calculer \dot{R} on va chercher les dérivés partielles de R par rapport à a , b et c , pour les trouver on va éviter d'utiliser la formule (III.31) :

$$\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial a} \cdot \dot{a} + \frac{\partial R}{\partial b} \cdot \dot{b} + \frac{\partial R}{\partial c} \cdot \dot{c} = \dot{R}_{/a} + \dot{R}_{/b} + \dot{R}_{/c} \quad (\text{III.34})$$

Dans le cercle qui entoure les points C_1 , C_2 et C_3 on remarque que l'angle inscrit $\widehat{C_2 C_1 C_3}$ et l'angle au centre $\widehat{C_2 L C_3}$ intercepte le même arc $\widehat{C_3 C_1}$ donc : $\widehat{C_2 L C_3} = 2\widehat{C_2 C_1 C_3} = 2\theta$ (propriété) et puisque le triangle $C_2 L C_3$ est isocèle alors $\widehat{C_2 L T} = \theta$


 Figure III.23 – Les longueurs a , b et c

calcul de $\dot{R}_{/a}$ (en supposant que b et c sont constantes) :

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} = R \sin(\theta) &\implies \frac{\dot{a}}{2} = \dot{R}_{/a} \cdot \sin(\theta) + R \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} \\ \implies \dot{R}_{/a} &= \frac{\dot{a}}{2 \sin(\theta)} - \dot{R} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \dot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Puisque :

$$\sin(\theta) = \frac{a}{2R} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \cotan(\theta) = \frac{TL}{a/2} = 2 \frac{TL}{a}$$

Alors :

$$\dot{R}_{/a} = \frac{\dot{a} \cdot R}{a} - \frac{2 \cdot R \cdot TL}{a} \cdot \dot{\theta} \quad (\text{III.36})$$

\dot{a} a été calculé, il nous reste à calculer $\dot{\theta}$ en fonction de \dot{a} sachant b et c sont constantes.

D'après le théorème d'El Kashi dans le triangle $C_1C_2C_3$ on trouve :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta \quad (\text{III.37})$$

On dérive l'équation avec b et c constantes.

$$2a\dot{a} = 2 \cdot b \cdot c \cdot \sin(\theta) \dot{\theta} \quad (\text{III.38})$$

$$\implies \dot{\theta} = \frac{a \cdot \dot{a}}{b \cdot c \cdot \sin(\theta)} = \frac{a \cdot \dot{a}}{b \cdot c \cdot \frac{a}{2R}} = \frac{2R}{b \cdot c} \cdot \dot{a} \quad (\text{III.39})$$

On trouve finalement que :

$$\dot{R}_{/a} = \frac{\dot{a}R}{a} - \frac{4 \cdot R^2 \cdot TL}{a \cdot b \cdot c} \cdot \dot{a} = \left(1 - \frac{4 \cdot R \cdot TL}{b \cdot c}\right) \frac{R}{a} \cdot \dot{a} \quad (\text{III.40})$$

On applique le résultat final pour trouver $\dot{R}_{/b}$ et $\dot{R}_{/c}$ directement, on

les remplace dans la formule de \dot{R} et on trouve :

$$\dot{R} = \left(1 - \frac{4.R.TL}{b.c}\right) \frac{R}{a} \cdot \dot{a} + \left(1 - \frac{4.R.ML}{a.c}\right) \frac{R}{b} \cdot \dot{b} + \left(1 - \frac{4.R.KL}{a.b}\right) \frac{R}{c} \cdot \dot{c} \quad (\text{III.41})$$

$$\text{tq : } ML = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} \quad \text{et} \quad KL = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

6. calcul de \dot{S} :

On a vu que $2.R.S = a.b.c$, en linearisant l'équation par la fonction logarithmique on trouve $\ln(2) + \ln(R) + \ln(S) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c)$, par dérivation on trouve

$$\dot{S} = \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{R}}{R}\right) \cdot S \quad (\text{III.42})$$

7. Calcul de $\vec{\dot{OT}}$:

$$\vec{\dot{OT}} = \frac{\vec{\dot{OC}_1} + \vec{\dot{OC}_2}}{2} \quad (\text{III.43})$$

8. Calcul de $\vec{\dot{TL}}$:

$$\text{Puisque } TL^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} \quad \text{alors} \quad TL \cdot \dot{TL} = R \cdot \dot{R} - \frac{a\dot{a}}{4}$$

Donc :

$$\dot{TL} = \left(R \cdot \dot{R} - \frac{a\dot{a}}{4}\right) \frac{1}{TL} \quad (\text{III.44})$$

$$\vec{\dot{TL}} = \dot{TL} \cdot \vec{\omega} + TL \cdot \dot{\vec{\omega}} \quad (\text{III.45})$$

9. calcul de $\vec{\dot{LP}}$:

$$\vec{\dot{LP}} = -\dot{LP} \cdot \vec{n} - LP \cdot \dot{\vec{n}} \quad (\text{III.46})$$

$\vec{\dot{n}}$ a été calculé, il reste \dot{LP}

$$LP^2 = l_2^2 - R^2 \quad \implies \quad \dot{LP} = \frac{-R \cdot \dot{R}}{LP} \quad (\text{III.47})$$

2.2 Modèle Cinématique Inverse

La modélisation cinématique inverse consiste à trouver les vitesses angulaires $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ et $\dot{\alpha}_3$ pour déplacer l'effecteur avec une vitesse désirée.

Pour trouver ce modèle on peut exploiter le résultat du MCD : $\dot{X} = J^{-1} \cdot \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = J \cdot \dot{X}$, mais on ne va pas utiliser cette méthode parce que les termes qu'on a trouvés dans J^{-1} ne sont pas simples, ils vont être compliqués à discuter et à analyser (étude des singularités, commande...).

Une deuxième solution est de dériver les résultats du modèle géométrique inverse :

$$\alpha = f(X) \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{df}{dX} \cdot \dot{X}$$

On a vu dans le modèle géométrique inverse que : $\alpha_i = \beta_i - \delta_i \Rightarrow \dot{\alpha} = \dot{\beta}_i - \dot{\delta}_i$, donc on doit calculer $\dot{\beta}_i$ et $\dot{\delta}_i$.

1. Calcul de $\dot{\beta}_i$:

Pour calculer $\dot{\beta}_i$ on peut dériver $\arctan\left(\frac{-z_i}{x_i - r}\right)$ puisque $\beta_i = \text{atan2}(-z_i, x_i - r)$, ou bien on dérive $\tan(\beta_i) = \frac{-z_i}{x_i - r}$, le résultat est le même, la seule différence est que $\tan(\beta_i)$ n'exige pas un calcul de limite contrairement à atan2 . On a :

$$\tan(\beta_i) = \frac{-z_i}{x_i - r} \quad (\text{III.48})$$

On dérive les deux termes :

$$(1 + \tan(\beta_i)^2) \dot{\beta}_i = \frac{-\dot{z}_i}{x_i - r} + \frac{z_i}{(x_i - r)^2} \cdot \dot{x}_i \quad (\text{III.49})$$

On remplace $\tan(\beta_i)$ par sa valeur dans (III.83), après on divise pour trouver $\dot{\beta}_i$:

$$\dot{\beta}_i = \frac{-\dot{z}_i}{\left(1 + \frac{z_i^2}{(x_i - r)^2}\right)(x_i - r)} + \frac{z_i \dot{x}_i}{\left(1 + \frac{z_i^2}{(x_i - r)^2}\right)(x_i - r)^2} \quad (\text{III.50})$$

Finalement on trouve :

$$\dot{\beta}_i = -\frac{x_i - r}{(x_i - r)^2 + z_i^2} \dot{z}_i + \frac{z_i}{(x_i - r)^2 + z_i^2} \dot{x}_i \quad (\text{III.51})$$

2. Calcul de $\dot{\delta}_i$:

D'après le théorème d'El Kashi :

$$e_i^2 = l_1^2 + A_i B_i^2 - 2l_1 \cdot A_i B_i \cdot \cos(\delta_i) \quad (\text{III.52})$$

On dérive les deux termes :

$$2e_i \dot{e}_i = 2.A_i B_i . A_i \dot{B}_i - 2l_1 A_i \dot{B}_i \cos(\delta_i) + 2l_1 A_i B_i . \sin(\delta_i) \dot{\delta}_i \quad (\text{III.53})$$

Ça implique que :

$$\dot{\delta}_i = \frac{e_i \dot{e}_i - (A_i B_i - l_1 \cos(\delta_i)) A_i \dot{B}_i}{l_1 A_i B_i \sin(\delta_i)} \quad (\text{III.54})$$

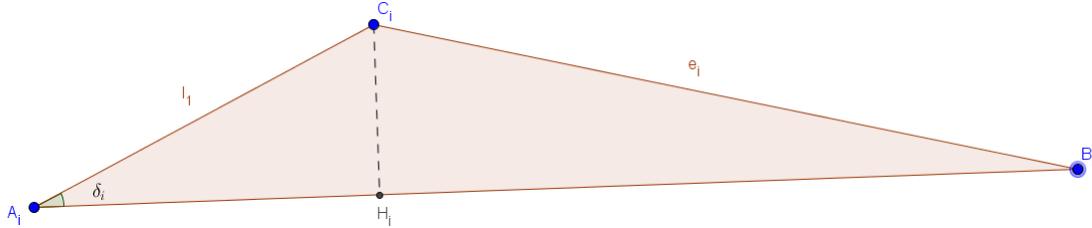


Figure III.24 – L'angle δ_i

D'après la figure $B_i H_i = A_i B_i - l_1 \cos(\delta_i)$. On note $l_1 A_i B_i \sin(\delta_i)$ par D_i

$$\dot{\delta}_i = \frac{e_i \dot{e}_i - B_i H_i . A_i \dot{B}_i}{D_i} \quad (\text{III.55})$$

Calcul de $e_i \dot{e}_i$:

$$e_i^2 = l_2^2 - y_i^2 \implies e_i \dot{e}_i = -y_i \dot{y}_i \quad (\text{III.56})$$

Pour $A_i B_i$:

$$A_i B_i^2 = z_i^2 + (x_i - r)^2 \implies A_i B_i . A_i \dot{B}_i = z_i \dot{z}_i + (x_i - r) \dot{x}_i \quad (\text{III.57})$$

$$A_i \dot{B}_i = \frac{z_i \dot{z}_i}{A_i B_i} + \frac{(x_i - r)}{A_i B_i} \dot{x}_i \quad (\text{III.58})$$

Donc :

$$\dot{\delta}_i = \frac{-y_i \dot{y}_i + \left(\frac{z_i \dot{z}_i}{A_i B_i} + \frac{(x_i - r)}{A_i B_i} \dot{x}_i \right) . A_i H_i}{D_i} \quad (\text{III.59})$$

Finalement :

$$\dot{\delta}_i = \frac{A_i H_i (x_i - r)}{D_i . A_i B_i} \dot{x}_i + \frac{-y_i}{D_i} \dot{y}_i + \frac{z_i . A_i H_i}{D_i} \dot{z}_i \quad (\text{III.60})$$

En faisant la soustraction $\dot{\beta}_i - \dot{\delta}_i$ on trouve $\dot{\alpha}_i$:

$$\dot{\alpha}_i = \left(\left(\frac{z_i}{(x_i - r)^2 + z_i^2} - \frac{A_i H_i . (x_i - r)}{D_i . A_i B_i} \right) - \frac{y_i}{D_i} \left(\frac{-x_i - r}{(x_i - r)^2 + z_i^2} + \frac{z_i . A_i H_i}{D_i} \dot{z}_i \right) \right) \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \end{pmatrix} \quad (\text{III.61})$$

Puisque $\dot{P}_i = A_i \cdot \dot{P}$ et en notant :

$$G_{\alpha_i} = \left(\left(\frac{z_i}{(x_i - r)^2 + z_i^2} - \frac{A_i H_i \cdot (x_i - r)}{D_i \cdot A_i B_i} \right) - \frac{y_i}{D_i} \left(\frac{-x_i - r}{(x_i - r)^2 + z_i^2} + \frac{z_i \cdot A_i H_i}{D_i} \cdot z_i \right) \right) \cdot A_i \quad (\text{III.62})$$

On trouve :

$$\dot{\alpha}_i = G_{\alpha_i} \cdot \dot{P} \quad (\text{III.63})$$

Finalement on trouve :

$$\dot{\alpha} = \begin{pmatrix} G_{\alpha_1} \\ G_{\alpha_2} \\ G_{\alpha_3} \end{pmatrix} \dot{P} = J \cdot \dot{P} \quad (\text{III.64})$$

2.3 Validation du Modèle cinématique en comparant avec SimMechanics

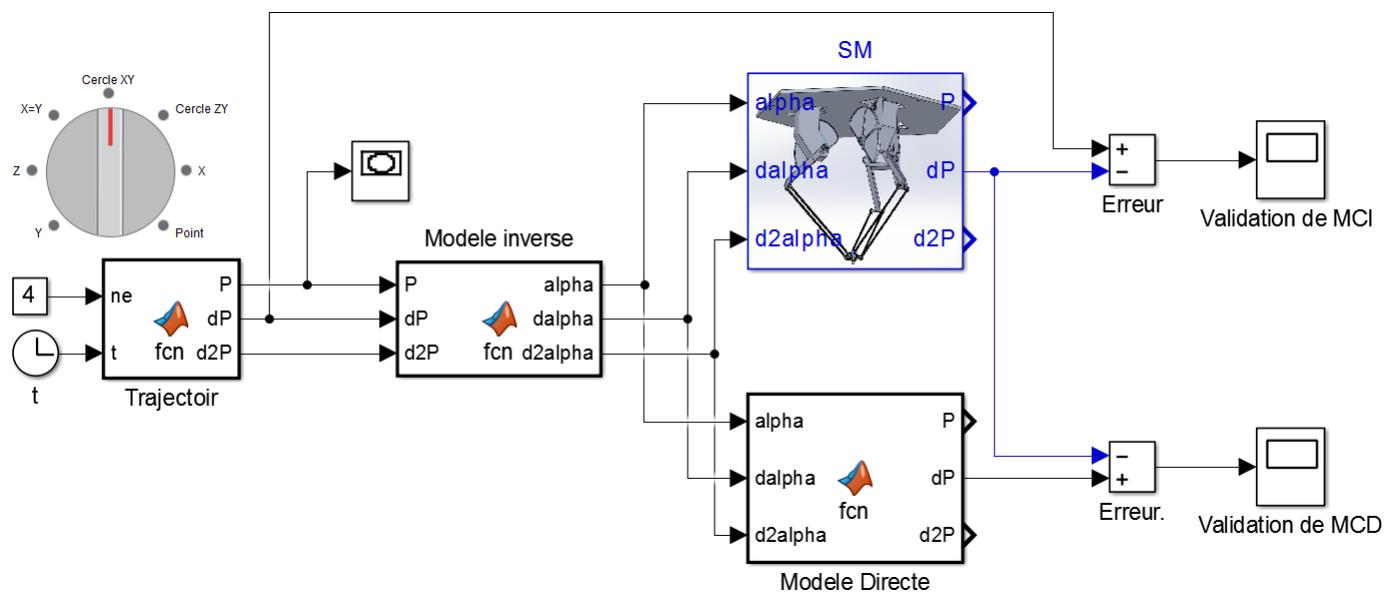


Figure III.25 – Block Simulink

Ce schéma bloc a pour but de valider notre modèle géométrique (directe et inverse).

Validation du MCD :

Le bloc du SimMechanics et celui du MCD reçoivent les mêmes angles de rotation α et les vitesses angulaires et nous donnent les résultats affichés sur le scope nommé validation du MCD.

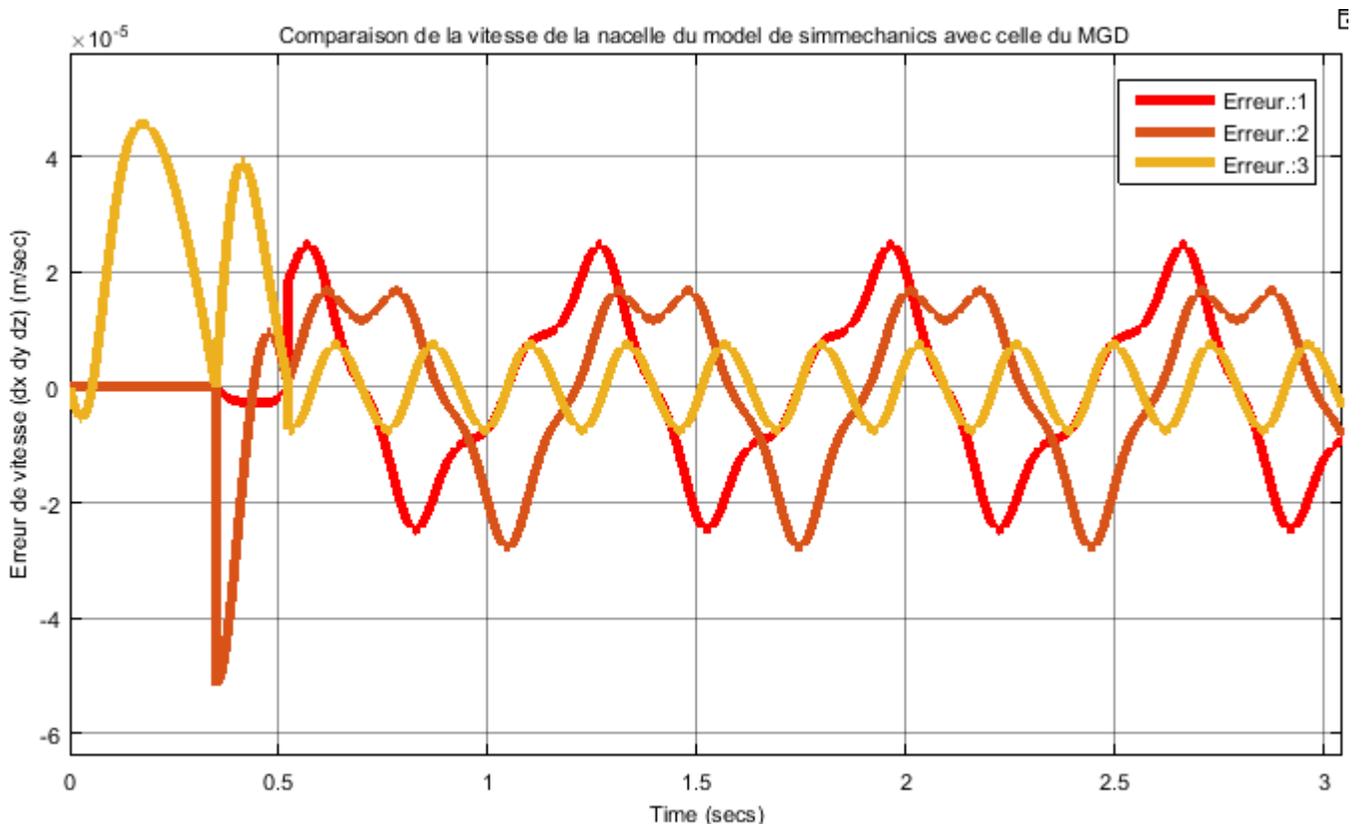


Figure III.26 – Validation du MCD

On observe une erreur d'ordre de 10^{-5} d'où la validation du MCD.

Validation du MCI :

Le modèle construit sous SimMechanics reçoit les angles et les vitesses angulaires de rotation calculés par le bloc du MCI à partir de la consigne (trajectoire circulaire) puis nous avons comparé cette consigne avec la sortie du modèle construit. Les erreurs sont affichés sur le scope nommé validation du MCI.

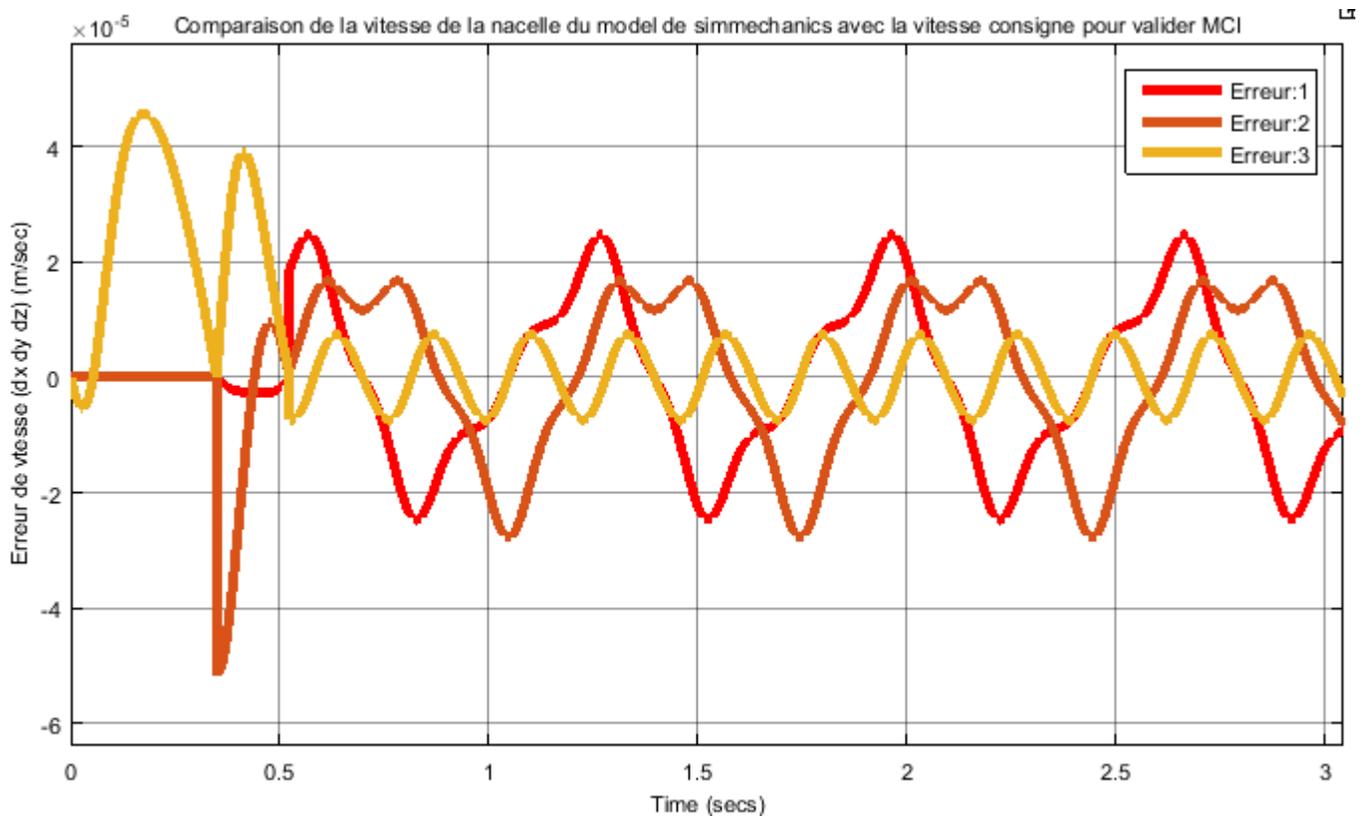


Figure III.27 – Validation du MCI

On observe une erreur d'ordre de 10^{-5} d'où la validation du MCI.

3 Les dérivées des modèles cinématiques

3.1 calcul de de la 2ème dérivée de la position P

calcul de quelque paramètres :

1. calcul de $\overrightarrow{OC_i}$: On a trouvé que $\overrightarrow{OC_i} = \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i$

Ça implique :

$$\overrightarrow{OC_i} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2} \dot{\alpha}_i^2 + \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \ddot{\alpha}_i \quad (\text{III.65})$$

Tel que :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2} = \begin{pmatrix} -l_1 \cos(\alpha_i) \cos(\phi_i) \\ -l_1 \cos(\alpha_i) \sin(\phi_i) \\ l_1 \sin(\alpha_i) \end{pmatrix} \quad (\text{III.66})$$

2. calcul de $\overrightarrow{C_i C_j}$:

$\overrightarrow{C_i C_j} = \overrightarrow{OC_j} - \overrightarrow{OC_i}$ ce qui implique :

$$\overrightarrow{C_i C_j} = \overrightarrow{OC_j} - \overrightarrow{OC_i} \quad (\text{III.67})$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{C_1 C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OC_1} \\ \overrightarrow{C_2 C_3} = \overrightarrow{OC_3} - \overrightarrow{OC_2} \\ \overrightarrow{C_3 C_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC_3} \end{cases} \quad (\text{III.68})$$

3. calcul de \ddot{a} , \ddot{b} et \ddot{c} :

$a^2 = \overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2}$, on dérive deux fois :

$$\dot{a}^2 + a \ddot{a} = \overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} + \overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} \quad (\text{III.69})$$

$$\ddot{a} = \left(\overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} + \overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} - \dot{a}^2 \right) \frac{1}{a} \quad (\text{III.70})$$

Par la meme méthode on trouve :

$$\ddot{b} = \left(\overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} + \overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} - \dot{b}^2 \right) \frac{1}{b} \quad (\text{III.71})$$

$$\ddot{c} = \left(\overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} + \overrightarrow{C_1 C_2} \cdot \overrightarrow{C_1 C_2} - \dot{c}^2 \right) \frac{1}{c} \quad (\text{III.72})$$

4. L'accélération de $\overrightarrow{V_1}$:

On sait que $\overrightarrow{C_1 C_2} = a \cdot \overrightarrow{V_1}$, par deux dérivés successives on trouve :

$$\overrightarrow{C_1 C_2} = \ddot{a} \overrightarrow{V_1} + 2 \dot{a} \dot{\overrightarrow{V_1}} + a \ddot{\overrightarrow{V_1}} \quad (\text{III.73})$$

$$\ddot{\vec{V}}_1 = \left(\overrightarrow{C_1 C_2} - \ddot{a}\vec{V}_1 - 2\dot{a}\dot{\vec{V}}_1 \right) \frac{1}{a} \quad (\text{III.74})$$

5. calcul de \ddot{R} :

Dans la partie de la modélisation cinématique directe on avait :

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{P}_1}{P_1} + \frac{\dot{P}_2}{P_2} + \frac{\dot{P}_3}{P_3} \right) \quad (\text{III.75})$$

Tel que : $P = a + b + c$; $P_1 = P - 2a$; $P_2 = P - 2b$ et $P_3 = P - 2c$.

Par une autre dérivation on trouve :

$$\ddot{R} = R.$$

$$\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{P}_1}{P_1} + \frac{\dot{P}_2}{P_2} + \frac{\dot{P}_3}{P_3} \right) - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 - \left(\frac{\dot{c}}{c} \right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\left(\frac{\dot{P}}{P} \right)^2 + \left(\frac{\dot{P}_1}{P_1} \right)^2 + \left(\frac{\dot{P}_2}{P_2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{P}_3}{P_3} \right)^2 \right) \right] R = \ddot{R}$$

6. calcul de \ddot{S} :

D'après la relation :

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{R}}{R} \quad (\text{III.76})$$

Par dérivation on trouve :

$$\ddot{S} = \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} - \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 - \left(\frac{\dot{c}}{c} \right)^2 + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \left(\frac{\dot{S}}{S} \right)^2 \right] S \quad (\text{III.77})$$

7. calcul de $\ddot{\vec{n}}$:

On sait que $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$, on dérive deux fois :

$$\ddot{\vec{S}} = \ddot{S} \cdot \vec{n} + 2\dot{S} \dot{\vec{n}} + S \cdot \ddot{\vec{n}} \text{ donc :}$$

$$\ddot{\vec{n}} = \left[\frac{\ddot{\vec{S}}}{S} - \frac{\ddot{S} \vec{n}}{S} - 2 \frac{\dot{S} \dot{\vec{n}}}{S} \right] \frac{1}{S} \quad (\text{III.78})$$

8. calcul de $\ddot{\vec{S}}$:

$\vec{S} = \overrightarrow{C_3 C_1} \wedge \overrightarrow{C_1 C_2}$ ce qui implique :

$$\ddot{\vec{S}} = \ddot{\overrightarrow{C_3 C_1}} \wedge \overrightarrow{C_1 C_2} + 2\dot{\overrightarrow{C_3 C_1}} \wedge \overrightarrow{C_1 C_2} + \overrightarrow{C_3 C_1} \wedge \ddot{\overrightarrow{C_1 C_2}} \quad (\text{III.79})$$

9. calcul de $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \text{signe}(b^2 + c^2 - a^2) \vec{n} \wedge \vec{V}_1 \implies \ddot{\vec{\omega}} = \text{signe}(b^2 + c^2 - a^2) (\ddot{\vec{n}} \wedge \vec{V}_1 + 2\dot{\vec{n}} \wedge \dot{\vec{V}}_1 + \vec{n} \wedge \ddot{\vec{V}}_1)$$

10. calcul de $\ddot{\overrightarrow{OP}}$:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{LP} \implies \ddot{\overrightarrow{OP}} = \ddot{\overrightarrow{OT}} + \ddot{\overrightarrow{TL}} + \ddot{\overrightarrow{LP}}$$

(a) calcul de $\vec{\ddot{OT}}$:

$$\vec{\ddot{OT}} = \frac{\vec{\ddot{OC}_1} + \vec{\ddot{OC}_2}}{2} \quad (\text{III.80})$$

(b) calcul de $\vec{\ddot{TL}}$:

$$\vec{TL} = TL \cdot \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{\ddot{TL}} = \ddot{TL} \vec{\omega} + 2\dot{TL} \dot{\vec{\omega}} + TL \ddot{\vec{\omega}} \quad \text{Tel que : } TL^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} \text{ et après deux dérivations, on trouve :}$$

$$\ddot{TL} = \left[\ddot{R}R + \dot{R}^2 - \frac{\ddot{a}a + \dot{a}^2}{4} - \dot{TL}^2 \right] \frac{1}{TL} \quad (\text{III.81})$$

(c) calcul de $\vec{\ddot{LP}}$:

$$\vec{LP} = -LP \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{\ddot{LP}} = -\ddot{LP} \vec{n} - 2\dot{LP} \dot{\vec{n}} - LP \ddot{\vec{n}} \quad \text{Tel que :}$$

$$LP^2 = l_2^2 - R^2 \quad \Rightarrow$$

$$\ddot{LP} = -\frac{\ddot{R}R + \dot{R}^2 + \dot{LP}^2}{LP} \quad (\text{III.82})$$

3.2 calcul de la 2ème dérivé de α en fonction de la 2ème dérivée de P

$$\alpha_i = \beta_i - \delta_i \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha}_i = \ddot{\beta}_i - \ddot{\delta}_i$$

3.2.1 calcul de $\ddot{\beta}_i$:

On a trouvé que :

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \dot{z}_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} \dot{x}_i$$

Tel que :

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} = -\frac{x_i - r}{(x_i - r)^2 + z_i^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} = \frac{-z_i}{(x_i - r)^2 + z_i^2}$$

Il résulte que :

$$\ddot{\beta}_i = \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i^2} \dot{z}_i^2 + \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_i^2} \dot{x}_i^2 + 2 \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i \partial z_i} \dot{x}_i \dot{z}_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \ddot{z}_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} \ddot{x}_i \quad (\text{III.83})$$

Il y a trois termes à calculer :

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i^2} = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \right) = \frac{2z_i(x_i - r)}{(x_i - r)^2 + z_i^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i^2} = \frac{2z_i(x_i - r)}{AB_i^2}$$

De la même manière on trouve :

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_i^2} = -\frac{2z_i(x_i - r)}{(x_i - r)^2 + z_i^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_i^2} = -\frac{2z_i(x_i - r)}{AB_i^2}$$

Le dernier terme :

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_i \partial z_i} = \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \right) = \frac{(x_i - r)^2 - z_i^2}{AB_i^2}$$

$$\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_i \partial z_i} = \frac{(x_i - r)^2 - z_i^2}{AB_i^2}$$

En substituant ces résultats dans l'équation (III.83), on trouve :

$$\ddot{\beta}_i = \frac{2[(x_i - r)z_i(\dot{z}_i^2 - \dot{x}_i^2)] + [(x_i - r)^2 - z_i^2] \dot{x}_i \dot{z}_i - (x_i - r)AB_i^2 \ddot{z}_i + z_i AB_i^2 \ddot{x}_i}{AB_i^4} \quad (\text{III.84})$$

3.2.2 calcul de $\ddot{\delta}_i$:

On a la relation suivante (trouvé dans le MCI) :

$$\dot{\delta}_i = \frac{\partial \delta_i}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \delta_i}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} \dot{z}_i$$

On en déduit que :

$$\ddot{\delta}_i = \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2} \dot{x}_i^2 + \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i^2} \dot{y}_i^2 + \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2} \dot{z}_i^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial y_i} + \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial z_i} + \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i} \right) \dot{x}_i \dot{y}_i + \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i} \ddot{z}_i \quad (\text{III.85})$$

On remarque qu'il y a six nouveaux termes qu'on doit calculer :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2}, \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i^2}, \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial y_i}, \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial z_i} \text{ et } \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i}$$

En réalité on doit calculer seulement quatre termes car si on sait l'expression de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2}$ ou celle de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2}$ alors on peut déduire facilement l'expression de l'autre

car les expressions de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2}$ et $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2}$ sont semblables de telle manière que si on

remplace dans $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2}$, $(x_i - r)$ par z_i et z_i par $(x_i - r)$ avec un changement de

signe on trouve $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2}$ et c'est la même chose pour $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial y_i}$ et $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i}$, mais avant

de passer au calcul de ces quatre termes on va calculer quelques paramètres et leurs dérivées.

Ces paramètres sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} AB_i = \sqrt{(x_i - r)^2 + z_i^2} \\ D_i = l_1 AB_i \sin(\delta_i) \\ AH_i = l_1 \cos(\delta_i) \\ BH_i = AB_i - AH_i \\ CH_i = l_1 \sin(\delta_i) \end{array} \right.$$

1. Les dérivés partielles de AB_i :

$$\frac{\partial AB_i}{\partial z_i} = \frac{z_i}{AB_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial AB_i}{\partial x_i} = \frac{x_i - r}{AB_i}$$

Les dérivés partielles de D_i par rapport à P :

$$D_i = l_1 AB_i \sin(\delta_i)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial D_i}{\partial z_i} = l_1 \left(\frac{\partial AB_i}{\partial z_i} \sin(\delta_i) + AB_i \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} \right)$$

On rappelle que :

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} = \frac{-BH_i z_i}{D_i AB_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial AB_i}{\partial z_i} = \frac{x_i - r}{AB_i}$$

Donc :

$$\frac{\partial D_i}{\partial z_i} = z_i \left(\frac{l_1 \sin(\delta_i)}{AB_i} - \frac{l_1 \cos(\delta_i) BH_i}{D_i} \right)$$

Sachant que :

$$AB_i = \frac{D_i}{l_1 \sin(\delta_i)} \quad \text{et} \quad l_1 \cos(\delta_i) = AH_i$$

Alors :

$$\frac{\partial D_i}{\partial z_i} = \frac{z_i}{D_i} \left((l_1 \sin(\delta_i))^2 - AH_i BH_i \right)$$

Et puisque $l_1 \sin(\delta_i) = CH_i$ alors :

$$\frac{\partial D_i}{\partial z_i} = \frac{z_i}{D_i} \left(CH_i^2 - AH_i BH_i \right) \quad (\text{III.86})$$

On a $AB_i^2 = z_i^2 + (x_i - r)^2$ alors la variation de D_i par rapport à la variation de z_i est similaire à la variation de D_i par rapport à $(x_i - r)$ c.à.d :

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \frac{x_i - r}{D_i} \left(CH_i^2 - AH_i BH_i \right) \quad (\text{III.87})$$

Il reste à calculer $\frac{\partial D_i}{\partial y_i}$. D'après l'expression de D_i , on déduit que :

$$\frac{\partial D_i}{\partial y_i} = l_1 AB_i \cos(\delta_i) \frac{\partial \delta_i}{\partial y_i} = l_1 \cos(\delta_i) AB_i \frac{-y_i}{D_i}$$

Puisque $l_1 \cos(\delta_i) = AH_i$ et $D_i = CH_i AB_i$ alors :

$$\frac{\partial D_i}{\partial y_i} = -\frac{y_i AH_i}{CH_i} \quad (\text{III.88})$$

Les dérivés partielles de BH_i par rapport à P :

D'après le théoreme d'El Kashi dans le triangle $A_iB_iC_i$: $l_1^2 = A_iB_i^2 + e_i^2 - 2A_iB_i e_i \cos(\epsilon_i)$.

D'autre coté : $\cos(\epsilon_i) = \frac{B_iH_i}{e_i}$, on déduit :

$$l_1^2 = A_iB_i^2 + e_i^2 - 2A_iB_i \cdot B_iH_i \quad (\text{III.89})$$

On dérive par rapport à z_i :

$$0 = 2 \frac{\partial A_iB_i}{\partial z_i} A_iB_i + 0 - 2 \frac{\partial A_iB_i}{\partial z_i} B_iH_i - 2A_iB_i \frac{\partial B_iH_i}{\partial z_i}$$

$$\frac{\partial B_iH_i}{\partial z_i} = \frac{1}{A_iB_i} (A_iB_i - B_iH_i) \frac{\partial A_iB_i}{\partial z_i}$$

Puisque $A_iB_i - B_iH_i = A_iH_i$ et $\frac{\partial A_iB_i}{\partial z_i} = \frac{z_i}{A_iB_i}$ alors :

$$\frac{\partial B_iH_i}{\partial z_i} = \frac{z_i A_iH_i}{A_iB_i^2} \quad (\text{III.90})$$

On en déduit :

$$\frac{\partial B_iH_i}{\partial x_i} = \frac{(x_i - r) A_iH_i}{A_iB_i^2} \quad (\text{III.91})$$

En revenant à l'équation (III.89) on dérive par rapport à y_i et on trouve :

$$0 = 0 + 2e_i \frac{\partial e_i}{\partial y_i} - 2A_iB_i \frac{\partial B_iH_i}{\partial y_i}$$

On rappelle que : $e_i^2 = l_2^2 - y_i^2$ donc :

$$\frac{\partial B_iH_i}{\partial y_i} = \frac{-y_i}{A_iB_i} \quad (\text{III.92})$$

On peut maintenant entamer le calcul des termes.

1. calcul de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2}$:

On a trouvé que : $\frac{\delta_i}{z_i} = -\frac{z_i \cdot B_iH_i}{D_i \cdot A_iB_i}$. On linéarise cette equation par la fonction logarithmique puis on dérive et on trouve :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2} = \frac{\delta_i}{\partial z_i} \left[\frac{\partial B_iH_i}{B_iH_i \partial z_i} + \frac{1}{z_i} - \frac{\partial A_iB_i}{A_iB_i \partial z_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial z_i} \right] \quad (\text{III.93})$$

Toutes les termes qui sont apparus dans cette equation on les a déjà calculé.

2. calcul de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2}$: On déduit du résultat précédant que :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \delta_i}{\partial x_i} \left[\frac{\partial B_i H_i}{B_i H_i \partial x_i} + \frac{1}{x_i - r} - \frac{\partial A_i B_i}{A_i B_i \partial x_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial x_i} \right]$$

3. calcul de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i \partial x_i}$:

On sait que $\frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} = \frac{-B_i H_i \cdot z_i}{A_i B_i \cdot D_i}$, il resulte que :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial z_i} = \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} \left(\frac{\partial B_i H_i}{B_i H_i \partial x_i} - \frac{\partial A_i B_i}{A_i B_i \partial x_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial x_i} \right) \quad (\text{III.94})$$

Ou bien si on développe cette equation on peut trouver que :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial z_i} = -\frac{B_i H_i (x_i - r) z_i}{A_i B_i^3 D_i} \left(\frac{A_i H_i \cdot e_i^2}{B_i H_i \cdot C_i H_i} - 2 \right) \quad (\text{III.95})$$

4. calcul de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i^2}$:

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial y_i} = \frac{-y_i}{D_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i^2} = \frac{-1}{D_i} + \frac{y_i}{D_i^2} \frac{\partial D_i}{\partial y_i}$$

Puisque : $\frac{\partial D_i}{\partial y_i} = \frac{-y_i \cdot A_i H_i}{C_i H_i}$ alors :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i^2} = \frac{-1}{D_i} \left(1 + \frac{y_i^2 \cdot A_i H_i}{D_i \cdot C_i H_i} \right) = \frac{-1}{D_i} \left(1 + \frac{y_i^2 \cdot A_i H_i \cdot A_i B_i}{D_i^2} \right) \quad (\text{III.96})$$

5. calcul de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i}$:

Puisque $\frac{\partial \delta_i}{\partial y_i} = \frac{-y_i}{D_i}$ alors :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i} = \frac{y_i \partial D_i}{D_i \partial z_i} = \frac{y_i}{D_i} \cdot \frac{z_i}{D_i} (C_i H_i^2 - A_i H_i \cdot B_i H_i)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i} = \frac{y_i z_i}{D_i^2} (C_i H_i^2 - A_i H_i \cdot B_i H_i) \quad (\text{III.97})$$

6. calcul de $\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial y_i}$:

On déduit d'après le dernier résultat que :

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{y_i (x_i - r)}{D_i^2} (C_i H_i^2 - A_i H_i \cdot B_i H_i) \quad (\text{III.98})$$

7. La formule matricielle de $\ddot{\delta}_i$, $\ddot{\beta}_i$ et α_i :

(a) Pour δ_i :

On peut écrire $\ddot{\delta}_i$ sous la forme matricielle suivante :

$$\ddot{\delta}_i = \dot{P}^T H_{\delta_i} \dot{P} + G_{\delta_i} \ddot{P}$$

Tel que :

$$G_{\delta_i} = \frac{\partial \delta_i}{\partial P_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta_i}{\partial x_i} & \frac{\partial \delta_i}{\partial y_i} & \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} \end{pmatrix}$$

$$H_{\delta_i} = \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial P_i^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial x_i \partial z_i} \\ \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i \partial x_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i^2} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i} \\ \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i \partial x_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.99})$$

(b) Pour β_i :

$$\ddot{\beta}_i = \dot{P}^T H_{\beta_i} \dot{P} + G_{\beta_i} \ddot{P}$$

Tel que :

$$G_{\beta_i} = \frac{\partial \beta_i}{\partial P_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} & 0 & \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_i^2} & 0 & \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i \partial x_i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial x_i \partial z_i} & 0 & \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i^2} \end{pmatrix}$$

(c) Pour α_i :

$$\ddot{\alpha}_i = \dot{P}^T H_{\alpha_i} \dot{P} + G_{\alpha_i} \ddot{P}$$

Tel que :

$$G_{\alpha_i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial P} = G_{\beta_i} - G_{\delta_i}$$

Et :

$$H_{\alpha_i} = \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial P^2} = H_{\beta_i} - H_{\delta_i}$$

(d) calcul de $\ddot{P}(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha)$:

On exploite le dernier résultat : $\ddot{\alpha}_i = \dot{P}_i^T \cdot H_{\alpha_i} \cdot \dot{P}_i + G_{\alpha_i} \ddot{P}_i$ tel que :

$$\dot{P}_i = A_i \dot{P} = A_i \cdot J^{-1} \dot{\alpha}_i.$$

On a déjà calculer J dans la partie MCI ($\dot{\alpha} = J.\dot{P}$) :

$$\ddot{\alpha}_i = \dot{\alpha}_i^T (J^{-T} \cdot A_i^T \cdot H_{\alpha_i} \cdot A_i \cdot J^{-1}) \dot{\alpha}_i + G_{\alpha_i} \cdot A_i \cdot \ddot{P}$$

Pour $i=1, 2, 3$ on obtient 3 equations :

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_1^T (J^{-T} \cdot A_1^T \cdot H_{\alpha_1} \cdot A_1 \cdot J^{-1}) \dot{\alpha}_1 + G_{\alpha_1} \cdot A_1 \cdot \ddot{P} \\ \ddot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_2^T (J^{-T} \cdot A_2^T \cdot H_{\alpha_2} \cdot A_2 \cdot J^{-1}) \dot{\alpha}_2 + G_{\alpha_2} \cdot A_2 \cdot \ddot{P} \\ \ddot{\alpha}_3 = \dot{\alpha}_3^T (J^{-T} \cdot A_3^T \cdot H_{\alpha_3} \cdot A_3 \cdot J^{-1}) \dot{\alpha}_3 + G_{\alpha_3} \cdot A_3 \cdot \ddot{P} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^T \cdot J^{-T} \cdot A_1^T \cdot H_{\alpha_1} \cdot A_1 \cdot J^{-1} \\ \dot{\alpha}_2^T \cdot J^{-T} \cdot A_2^T \cdot H_{\alpha_2} \cdot A_2 \cdot J^{-1} \\ \dot{\alpha}_3^T \cdot J^{-T} \cdot A_3^T \cdot H_{\alpha_3} \cdot A_3 \cdot J^{-1} \end{pmatrix} \dot{\alpha} + \begin{pmatrix} G_{\alpha_1} \cdot A_1 \\ G_{\alpha_2} \cdot A_2 \\ G_{\alpha_3} \cdot A_3 \end{pmatrix} \ddot{P} \quad (\text{III.100})$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} = H\dot{\alpha} + J\ddot{P} \quad (\text{III.101})$$

$$\Rightarrow \ddot{P} = J^{-1}(\ddot{\alpha} - H\dot{\alpha}) \quad (\text{III.102})$$

Remarque :

$$J = \begin{pmatrix} G_{\alpha_1} \cdot A_1 \\ G_{\alpha_2} \cdot A_2 \\ G_{\alpha_3} \cdot A_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \frac{\partial J}{\partial P}$$

Parce que : $\dot{\alpha} = J.\dot{P}$. Ça implique que :

$$\ddot{\alpha} = \frac{\partial J}{\partial P} \dot{P} + J.\ddot{P}$$

3.3 Validation des modèles des accélérations (directe et inverse) en comparant avec SimMechanics

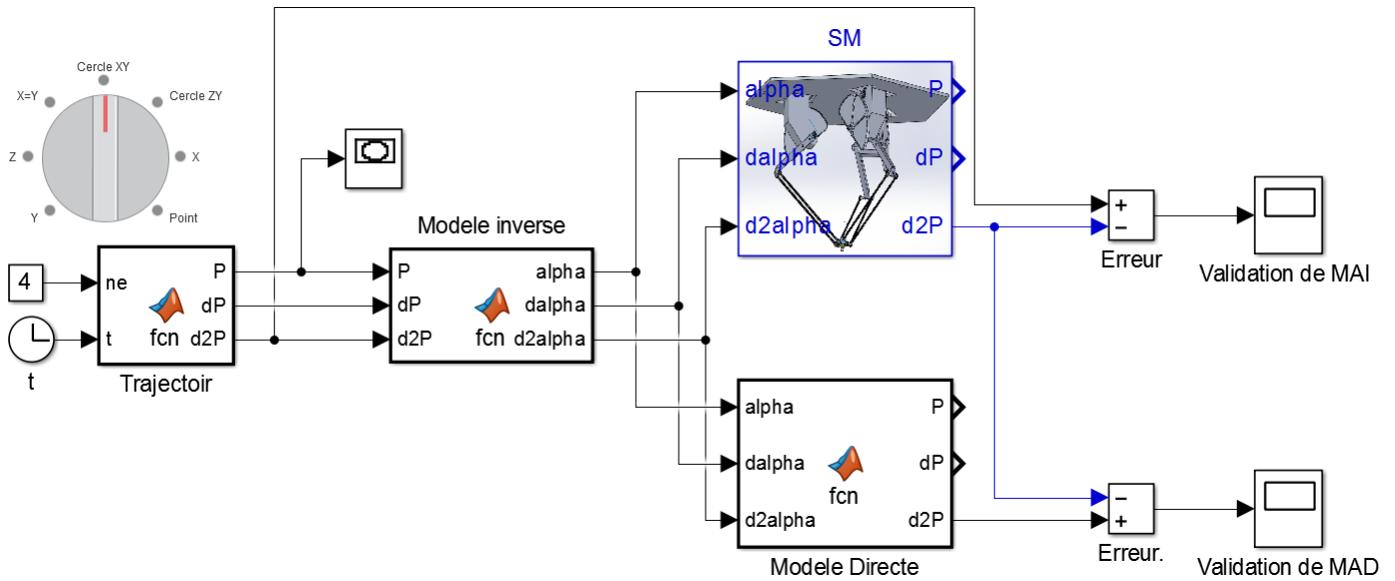


Figure III.28 – Block Simulink

Ce schéma bloc a pour but de valider notre modèle des accélérations (directe et inverse).

Validation du MAD :

Le bloc du SimMechanics et celui du MAD reçoivent les mêmes angles de rotation α , vitesses angulaires et les accélérations angulaires, ils nous donnent les résultats affichés sur le scope nommé validation du MAD.

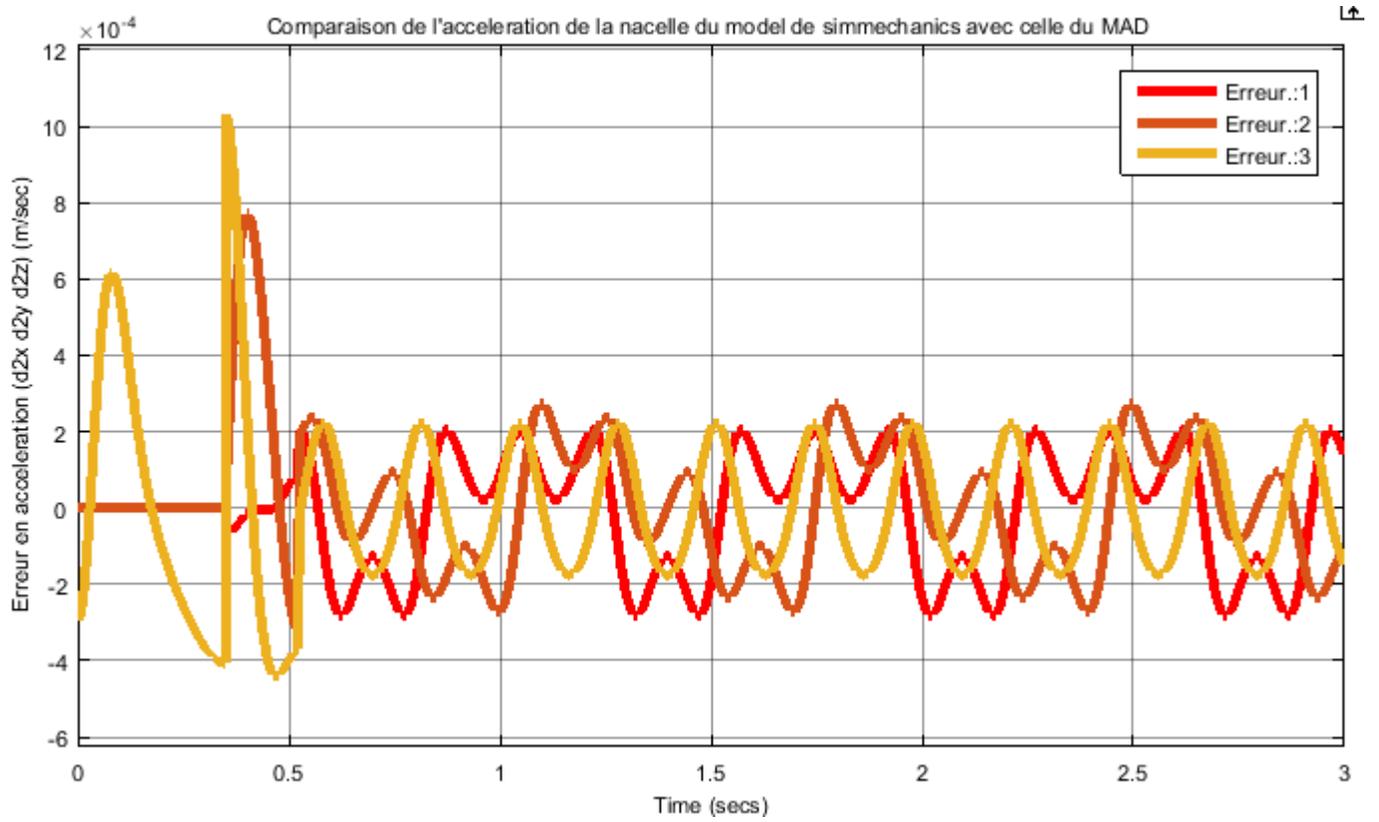


Figure III.29 – Validation du MAD

On observe une erreur d'ordre de 10^{-4} d'où la validation du MAD.

Validation du MAI :

Le modèle construit sous SimMechanics reçoit des angles de rotation, les vitesses et les accélérations angulaires calculés par le bloc du MAI à partir de la consigne (trajectoire circulaire) puis nous avons comparé cette consigne avec la sortie du modèle construit. Les erreurs sont affichés sur le scope nommé validation du MAI.

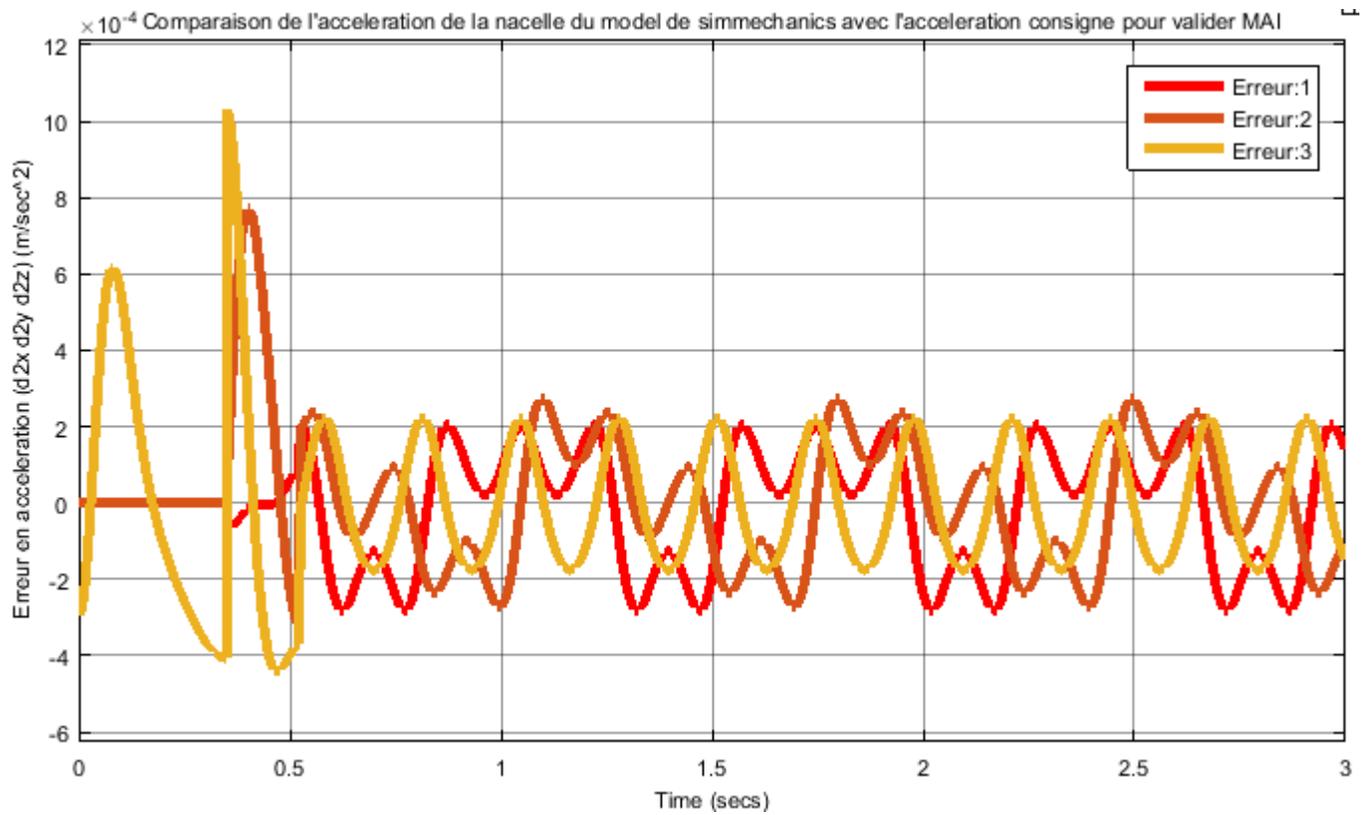


Figure III.30 – Validation du MAI

On observe une erreur d'ordre de 10^{-4} d'où la validation du MAI.

4 Modèle Dynamique

4.1 Modèle Dynamique Inverse

Cette partie de modélisation présente une grande importance pour la commande, car elle est destinée pour générer les couples nécessaires qu'on doit appliquer aux avant-bras afin d'exécuter une tâche bien déterminée.

D'abord, il est important de noter que les couples donnés par les moteurs aux avant-bras servent à la fois d'annuler l'effet de la gravité, et fournir des accélérations désirées aux différentes parties de la structure selon la tâche qu'on veut que la nacelle exécute (le mouvement suivant un trajectoire avec une vitesse bien déterminée). Donc on peut diviser le couple en deux, un pour annuler l'effet de la gravité, et l'autre pour l'accélération. Par la suite on calcule chaque couple séparément en se basant sur le formalisme de Newton, puis on les somme pour obtenir le couple nécessaire qu'on doit appliquer aux avant bras.

(a) Le couple annulant l'effet de la gravité :

Pour calculer ce couple on considère que le système ne bouge pas (sans accélération), donc l'effecteur est positionné dans un point P. Les parties de la structure subissent des forces de gravité qu'on va présenter ci-dessous. Par la suite on calcule ces forces puis on les rapporte au points C_i :

i. Avant-Bras :

Avant de passer au calcul de ces couples il est intéressant de remarquer que le Robot ISIR 88 présente une structure différente de celle de la figure qui suit, parce que l'articulation est placée sur la surface externe de l'avant-bras ce qui signifie que le centre de masse de ce dernier ne forme pas une droite avec le point A_i et le point C_i

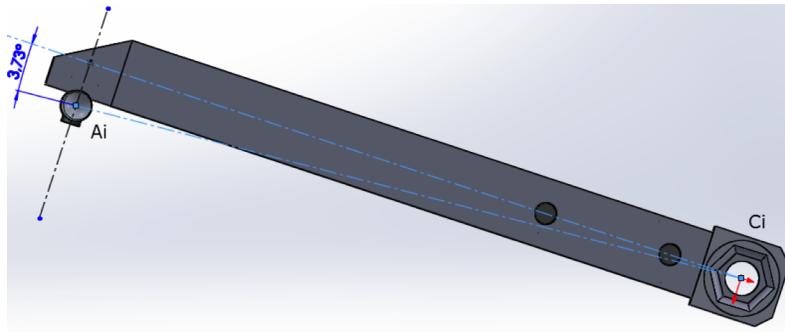


Figure III.31 – le segment A_iG forme un angle ($\Delta\alpha=3.73$ deg) avec le segment A_iC_i

Donc pour simplifier l'étude dynamique nous rapportons les deux forces de gravite de l'avant-bras et de la roue au point C_i .

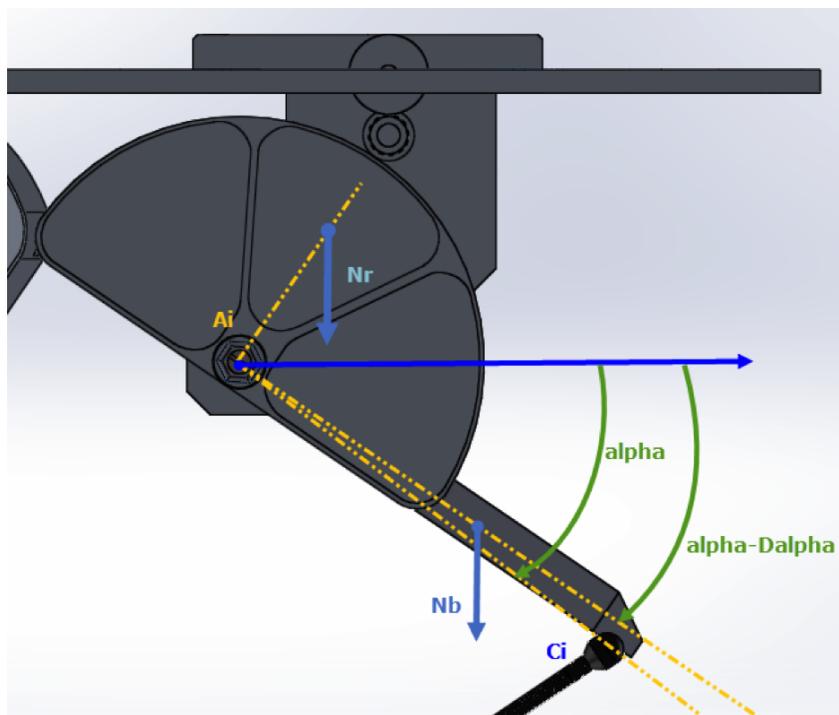


Figure III.32 – Avant-bras

$$\text{La force } \vec{N}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -N_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{1bras} \cdot \mathbf{g} \end{pmatrix} ; \quad \text{La force } \vec{N}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -N_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{1roue} \cdot \mathbf{g} \end{pmatrix} . \text{ On calcul le couple } \vec{N}_b :$$

$$\begin{aligned} \vec{AG}_b \wedge \vec{N}_b &= -AG_b \cdot N_b \cdot \cos(\alpha_i - \Delta\alpha) \vec{y}_i \\ &= -AG_b N_b (\cos(\alpha_i) \cos(\Delta\alpha) + \sin(\alpha_i) \sin(\Delta\alpha)) \vec{y}_i \\ &= - \left[\left(\frac{AG_b}{l_1} \cos(\Delta\alpha) N_b \right) l_1 \cos(\alpha_i) + \left(\frac{AG_b}{l_1} \sin(\Delta\alpha) N_b \right) l_1 \sin(\alpha_i) \right] \vec{y}_i \\ &= \begin{pmatrix} l_1 \cos(\alpha_i) \\ 0 \\ -l_1 \sin(\alpha_i) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{AG_b}{l_1} \sin(\Delta\alpha) N_b \\ 0 \\ -\frac{AG_b}{l_1} \cos(\Delta\alpha) N_b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour trouver le couple \vec{N}_r , il suffit de remplacer dans le dernier résultat $\Delta\alpha$ par $\Delta\alpha + \frac{\pi}{2}$ et AG_b par AG_r . On trouve :

$$\vec{AG}_r \wedge \vec{N}_r = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\alpha_i) \\ 0 \\ -l_1 \sin(\alpha_i) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{AG_r}{l_1} \cos(\Delta\alpha) N_r \\ 0 \\ \frac{AG_r}{l_1} \sin(\Delta\alpha) N_r \end{pmatrix} \quad (\text{III.103})$$

Donc le couple totale de ces deux composants est :

$$C_{bras} = \vec{AG}_b \wedge \vec{N}_b + \vec{AG}_r \wedge \vec{N}_r \quad (\text{III.104})$$

$$C_{bras} = \vec{AC}_i \wedge \begin{pmatrix} -AG_b \cdot m_b \cdot \sin(\Delta\alpha) - AG_r \cdot m_r \cdot \cos(\Delta\alpha) \\ 0 \\ -AG_b \cdot m_b \cdot \cos(\Delta\alpha) + AG_r \cdot m_r \cdot \sin(\Delta\alpha) \end{pmatrix} \frac{\mathbf{g}}{l_1} \quad (\text{III.105})$$

$$C_{bras} = \vec{AC}_i \wedge \vec{N}_1 \quad (\text{III.106})$$

\vec{N}_1 est la somme du poids de l'avant bras et celui de la roue, rapportés au point C_i .

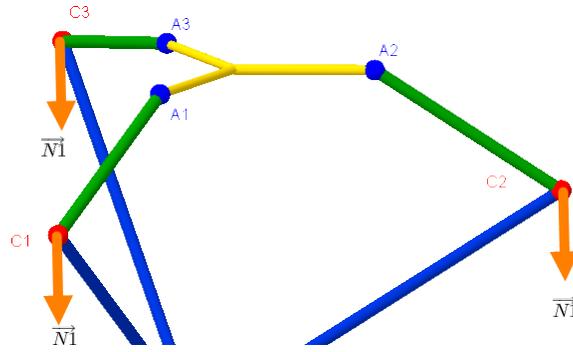


Figure III.33 – Gravité des avant bras rapportée aux points C_i

ii. Les bras parallèles :

Pour cette partie de la structure on peut voir que la force de gravité est appliquée aux extrémités comme il est indiqué dans la figure suivante :

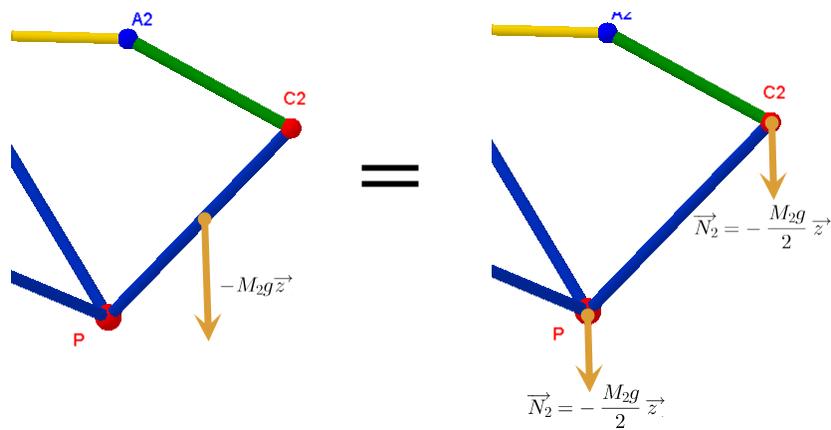


Figure III.34 – Les bras parallèles

iii. La nacelle :

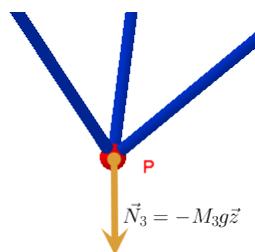


Figure III.35 – La nacelle

iv. Le système complet :

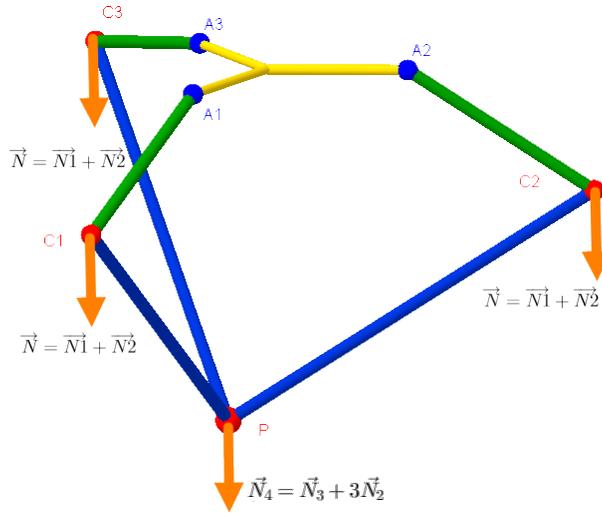


Figure III.36 – Le système complet

Suivant la figure III.36, la nacelle apparaît comme si elle a un poids égale à $M_3 + \frac{3}{2}M_2$, en plus la force \vec{N}_4 résulte de trois forces portées sur les bras parallèles, donc il est nécessaire de connaître la composition de cette force \vec{N}_4 suivant les directions portées sur les bras parallèles ou bien suivant la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

La force \vec{N}_4 peut être vue comme la somme de trois forces : $\vec{N}_4 = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3$. Tel que Z_i représente la force transmise au point P par l'avant bras ' i ' suivant le bras parallèle correspondant.

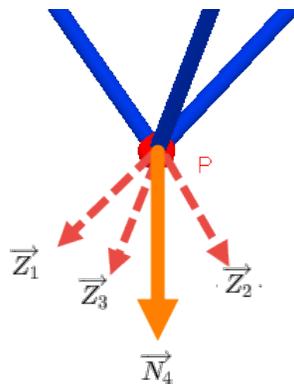


Figure III.37 – La somme des forces

$$\vec{Z}_1 = Z_1 \cdot \vec{u}_1 \quad \vec{Z}_2 = Z_2 \cdot \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{Z}_3 = Z_3 \cdot \vec{u}_3 \quad (\text{III.107})$$

Puisque :

$$\vec{N}_4 = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3 \quad (\text{III.108})$$

Alors :

$$\vec{N}_4 = \vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_3 = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.109})$$

En notant : $U = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix}$ Alors : $\vec{N}_4 = U \cdot \vec{Z} \implies \vec{Z} =$

$$U^{-1} \cdot \vec{N}_4$$

Z_i : représente l'expression de \vec{N}_4 dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$:

$$\vec{Z}_i = Z_i \cdot \vec{U}_i \quad (\text{III.110})$$

$$\vec{Z}_1 = (E_1 \vec{Z}) \vec{U}_1 \quad ; \quad \vec{Z}_2 = (E_2 \vec{Z}) \vec{U}_2 \quad ; \quad \vec{Z}_3 = (E_3 \vec{Z}) \vec{U}_3$$

Tel que :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement les forces rapportées aux points C_i sont :

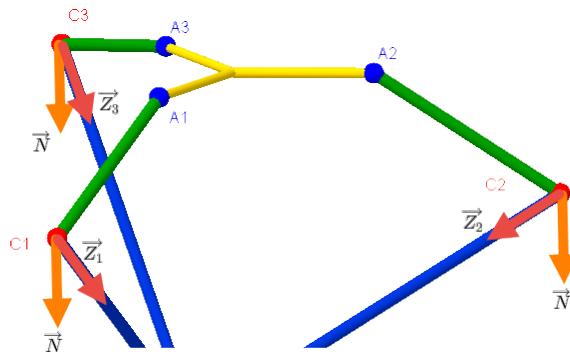
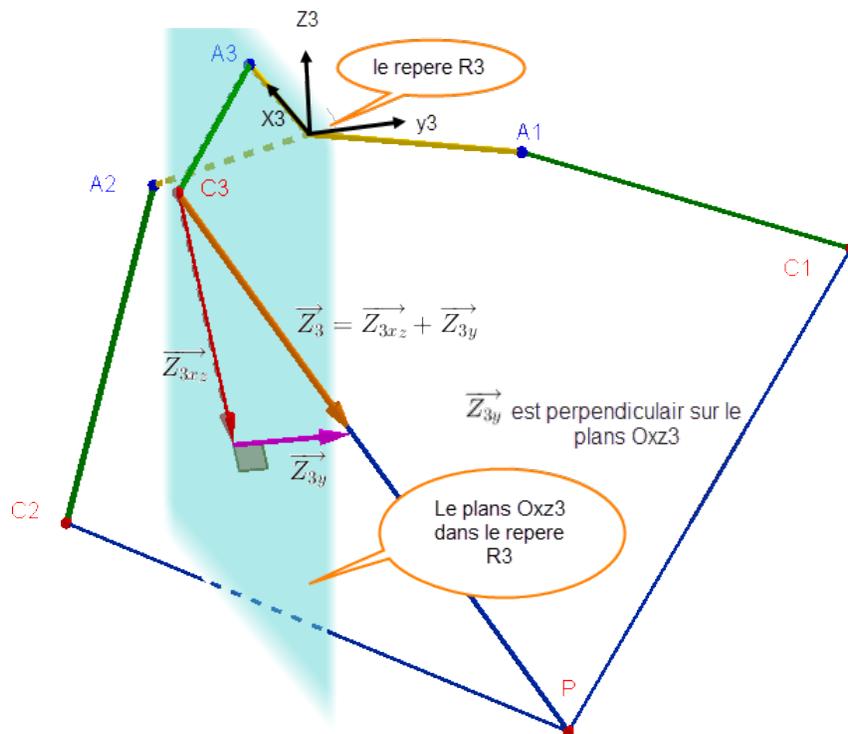


Figure III.38 – les forces appliquées sur les avant-bras

Il ne faut pas oublier que l'avant bras i a un seule degré de liberté, ce déplacement est portée sur le plans $ox_i z_i$ du repère R_i . Cela signifie que l'avant bras i ne peut fournir aux bras parallèle correspondant qu'une force portée sur le même plan $ox_i z_i$, donc cette force est elle-même la projection de la force \vec{Z}_i sur ce plan.

$$\vec{Z}i = \vec{Z}i_{xz} + \vec{Z}i_y \quad (\text{III.111})$$


 Figure III.39 – Composition de Z_i dans le repère R_i

Par conséquent, il vaut mieux exprimer le couple C_{g_i} fourni à l'avant bras i dans ce repère. En effet dans ce repère le couple C_{g_i} a la même portée que l'axe (oy_i) . Pour cette raison on exprime la force \vec{Z}_i dans le repère R_i en la multipliant par la matrice de transformation inverse A_i^{-1} , puis on la multiplie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour trouver \vec{Z}_{ixz} dans le repère R_i .

$$\vec{Z}_{ixz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_i^{-1} \cdot \vec{Z}_i$$

En posant :

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_i^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_i) & \sin(\phi_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$\vec{Z}_{ixz} = B_i \cdot \vec{Z}_i \quad (\text{III.112})$$

Le couple dû à la gravité se calcul par :

$$\overrightarrow{Cg}_i = \overrightarrow{AC}_i \wedge (\overrightarrow{N} + \overrightarrow{Z}_{ixz}) \quad (\text{III.113})$$

\overrightarrow{Cg}_i est porté sur l'axe \overrightarrow{oy}_i donc :

$$Cg_i = E_2 \overrightarrow{Cg}_i = E_2 \overrightarrow{AC}_i \wedge (\overrightarrow{Z}_{ixz} + \overrightarrow{N}) \quad (\text{III.114})$$

Le couple annulant la gravité qui doit être fourni au bras i est égale à $-Cg_i$.

(b) Les forces d'accélération :

Chaque partie de la structure (avant-bras, bras parallèle, nacelle) a une accélération, donc des forces pour l'assurer.

i. Pour la nacelle :

la force qui assure l'accélération :

$$\overrightarrow{F}_n = M_3 \cdot \ddot{\overrightarrow{OP}} \quad (\text{III.115})$$

$\ddot{\overrightarrow{OP}}$ en fonction de $\ddot{\alpha}$ se calcul plus tard.

ii. Pour les bras parallèles :

Cette partie est soumise a deux forces aux extrémités sur l'axe (PC_i) (voir la figure), ces bras ont des accélérations de translation et des accélérations rotationnelles autour du centre de gravité G_i (il est au milieu de PC_i dans notre cas), mais ils n'ont pas des rotations autour de l'axe (PC_i) .

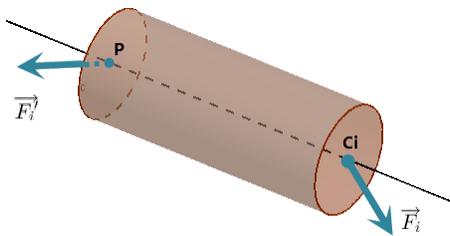
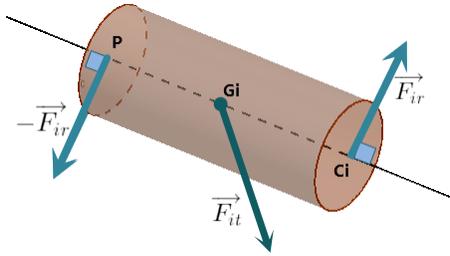


Figure III.40 – Les forces F_i et F'_i

Un solide ayant un tel mouvement on peut le représenter comme s'il est soumis à trois forces :

- Une force \overrightarrow{F}_{it} appliquée au centre du gravité G_i , elle sert a translater tout le corps.
- Et deux forces \overrightarrow{F}_{ir} et $-\overrightarrow{F}_{ir}$ appliquées aux extrémités du solide (P et C_i), Elles génèrent une accélération rotationnelle $\ddot{\theta}$ autour du centre de gravité G_i


 Figure III.41 – Les forces F_{ir} et F_{it}

$$\vec{F}_{ir} = m_2 \cdot \ddot{\vec{O}G_i} \quad (\text{III.116})$$

$$\text{tq : } \ddot{\vec{O}G_i} = \frac{\ddot{\vec{O}C_i} + \ddot{\vec{O}P}}{2}$$

L'accélération du point C_i se calcul par :

$$\ddot{\vec{O}C_i} = \begin{pmatrix} -l_1 \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \cos(\phi_i) \\ -l_1 \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \sin(\phi_i) \\ l_1 \cdot \sin(\alpha_i) \end{pmatrix} \ddot{\alpha}_i^2 - \begin{pmatrix} l_1 \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \cos(\phi_i) \\ l_1 \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \sin(\phi_i) \\ l_1 \cdot \cos(\alpha_i) \end{pmatrix} \ddot{\alpha}_i \quad (\text{III.117})$$

Il nous reste le calcul de \vec{F}_{ir} :

\vec{F}_{ir} et $-\vec{F}_{ir}$ génèrent une accélération $\ddot{\theta}$ autour de l'axe Δ passant par G_i et qui est perpendiculaire à ces deux forces. Il est important de remarquer que la direction du (Δ) est variable selon la variation de \vec{F}_{ir} en sa direction.

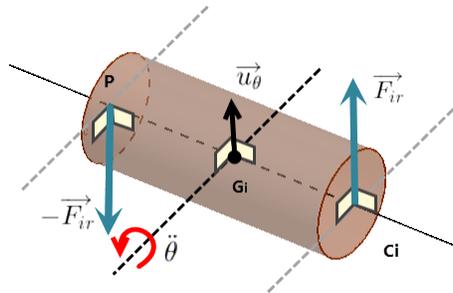


Figure III.42 – Les avant-bras

D'après la figure précédente on peut écrire la relation de couple-accélération par l'équation suivante :

$$F_{ir} \cdot \frac{l_2}{2} + F_{ir} \cdot \frac{l_2}{2} = J \cdot \ddot{\theta} \quad (\text{III.118})$$

Ou bien

$$F_{ir} \cdot l_2 = J_2 \cdot \ddot{\theta} \quad (\text{III.119})$$

Tel que : J représente le moment d'inertie du solide par rapport (Δ).

En multipliant les deux termes de l'équation par $\frac{l_2}{2} \cdot \vec{u}_\theta$ on trouve :

$$F_{ir} \cdot \frac{l_2^2}{2} \cdot \vec{u}_\theta = J_2 \cdot \frac{l_2 \ddot{\theta}}{2} \cdot \vec{u}_\theta \quad (\text{III.120})$$

tq :

\vec{u}_θ : Vecteur unitaire de même direction que \vec{F}_{ir} .

$$\vec{F}_{ir} = F_{ir} \cdot \vec{u}_\theta.$$

$$\vec{G}_i \vec{C}_i = \frac{l_2 \ddot{\theta}}{2} \cdot \vec{u}_\theta$$

On peut écrire donc :

$$\vec{F}_{ir} \cdot \frac{l_2^2}{2} = J_2 \cdot \vec{G}_i \vec{C}_i \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_{ir} = M_4 \cdot \vec{G}_i \vec{C}_i \quad (\text{III.121})$$

Tel que $M_4 = \frac{2J_2}{l_2^2}$, on trouve $\vec{G}_i \vec{C}_i$ par : $\vec{G}_i \vec{C}_i = \frac{\vec{OC}_i - \vec{OP}}{2}$

iii. Accélération des avant-bras :

Le couple générant cette accélération égale à $J_1 \cdot \ddot{\alpha}_1$. Tel que J_1 représente la somme des moments du bras, de la roue, du pignon, la poulie et le moteur, rapporté aux bras. D'après le théorème de Huigens on trouve les moments d'inertie par rapport qu points A_i .

$$J_b = J'_b + M_{1bras} \cdot (A_i G_{bi})^2$$

$$J_r = J'_r + M_{1roue} \cdot (A_i G_{ri})^2$$

Tel que : J'_b et J'_r représentent les moments d'inertie du bras et de la roue par rapport aux leurs centres d'inertie, G_{bi} et G_{ri} respectivement. Le rapport de réduction entre (moteur + pignon) et la roue est 12 :1 donc le moment d'inertie de (moteur + pignon) rapporté au bras égale à $12^2 \cdot J_{moteur-pignon}$. C'est la même chose pour la poulie avec un rapport de réduction 6 :1 on trouve le moment d'inertie rapporté $6^2 \cdot J_{poulie}$.

Donc :

$$J_1 = 6^2 \cdot J_{poulie} + 12^2 \cdot J_{moteur-pignon} + J_b + J_r \quad (\text{III.122})$$

Le couple qui assure l'accélération de l'avant bras i égale à $J_1 \ddot{\alpha}_i$.

iv. Le couple d'accélération :

A ce stade, on connaît les forces qui doivent être appliquées aux points C_i et P , donc le problème est similaire au précédent où on a calculé le couple annulant l'effet de gravité. Par la suite on va rapporter toutes les forces aux points C_i .

On trouve les forces équivalentes à \vec{F}_{ir} , $-\vec{F}_{ir}$, et \vec{F}_{it} comme il est indiqué sur la figure :

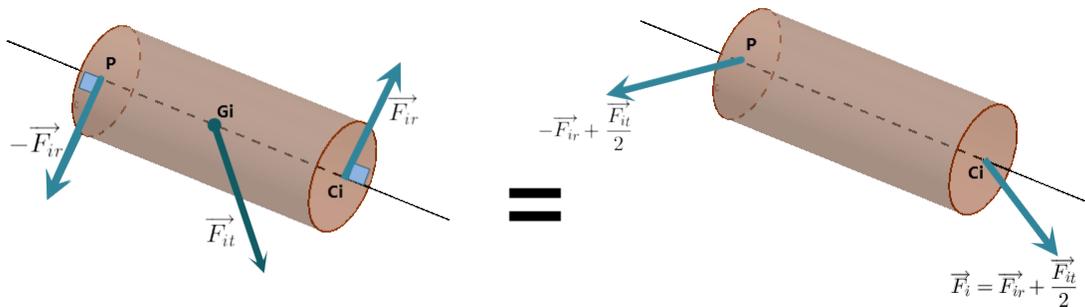


Figure III.43 – Les forces F_{ir} et F_{it}

Au points C_i la force appliquée est $\vec{F}_{ir} + \frac{\vec{F}_{it}}{2}$ qu'on l'appelle \vec{F}_i .

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= \vec{F}_{ir} + \frac{\vec{F}_{it}}{2} = \frac{M_4}{2}(\ddot{\vec{OC}}_i - \ddot{\vec{OP}}) + \frac{M_2}{4}(\ddot{\vec{OC}}_i - \ddot{\vec{OP}}) \\ \vec{F}_i &= \left(\frac{M_4}{2} + \frac{M_2}{4}\right)\ddot{\vec{OC}}_i + \left(\frac{M_2}{4} + \frac{M_4}{2}\right)\ddot{\vec{OP}} \\ \vec{F}_i &= a_2 \cdot \ddot{\vec{OC}}_i + a_1 \cdot \ddot{\vec{OP}}\end{aligned}\quad (\text{III.123})$$

Au niveau de la nacelle la force totale \vec{L} appliquée égale à :

$$\vec{L} = \vec{F}_n + \frac{\vec{F}_{1t} + \vec{F}_{2t} + \vec{F}_{3t}}{2} - (\vec{F}_{1r} + \vec{F}_{2r} + \vec{F}_{3r})$$

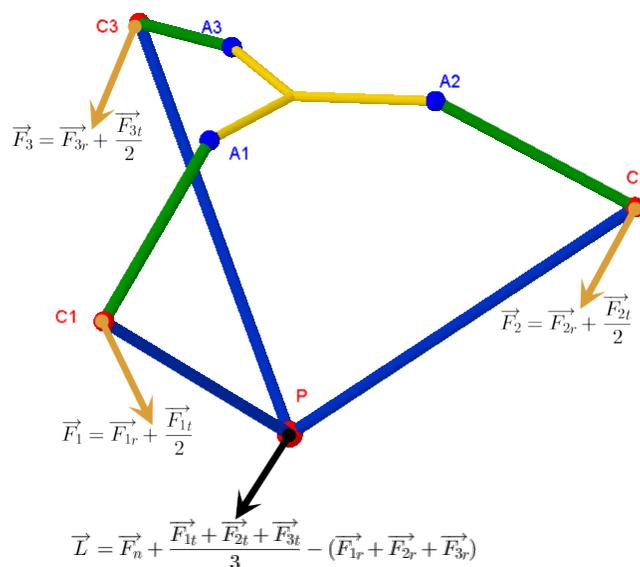


Figure III.44 – Les forces F_{ir} et F_{it}

Si on développe on trouve :

$$\vec{L} = a_3 \cdot \vec{\ddot{O}P} + a_1 (3\vec{\ddot{O}G}) \quad (\text{III.124})$$

Tel que :

$$a_3 = M_3 + 3 \left(\frac{M_2}{4} + \frac{M_4}{2} \right) \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{M_2}{4} - \frac{M_4}{2}$$

$$\vec{\ddot{O}G} = \frac{\vec{\ddot{O}C}_1 + \vec{\ddot{O}C}_2 + \vec{\ddot{O}C}_3}{3}$$

Maintenant on exprime la force \vec{L} dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ portée sur les bras parallèles :

$$\vec{L}u = U^{-1} \cdot \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3$$

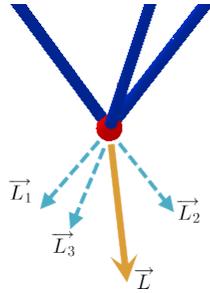


Figure III.45 – Décomposition de L

On trouve \vec{L}_i par :

$$\vec{L}_i = E_i \cdot \vec{L}u = E_i (U^{-1} L) = E_i \cdot U^{-1} (a_3 \cdot \vec{\ddot{O}P} + a_1 \cdot (3\vec{\ddot{O}G}))$$

On trouve finalement la force équivalente appliquée au niveau du coude C_i :

$$\vec{T}_i = \vec{L}_i + \vec{F}_i \quad (\text{III.125})$$

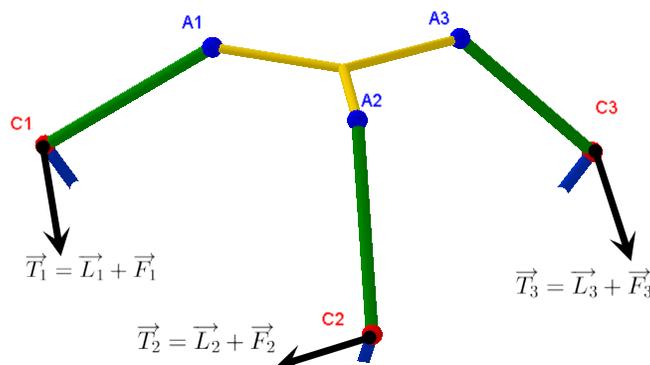


Figure III.46 – Les forces totales rapportées aux points C_i

Comme on a déjà vu, on s'intéresse à la composante de \vec{T}_i portée sur le plan $(\mathbf{o}x_i z_i)$ et on ignore celle portée sur $(\mathbf{o}y_i)$.

$$T_{ixz} = B_i \cdot \vec{T}_i = B_i(\vec{L}_i + \vec{F}_i) \quad (\text{III.126})$$

Le couple de cette force par rapport au point A_i :

$$E_2 \cdot \vec{AC}_i \wedge \vec{T}_{ixz} = E_2 \cdot AC_i \cdot T_{ixz}$$

Tel que :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AC_i = \begin{pmatrix} 0 & l_1 \sin(\alpha_i) & 0 \\ -l_1 \sin(\alpha_i) & 0 & -l_1 \cos(\alpha_i) \\ 0 & l_1 \cos(\alpha_i) & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le couple totale que doit être fourni à l'avant-bras i égale à :

$$Ca_i = J_1 \cdot \ddot{\alpha}_i + E_2 \cdot AC_i \cdot T_{ixz} \quad (\text{III.127})$$

(c) Le couple totale :

Le couple totale C_i appliqué au niveau de l'articulation ' i ' égale à :

$$C_i = Ca_i - Cg_i \quad (\text{III.128})$$

Le couple rapporté au moteur i est : $T_i = 12 \cdot C_i$.

On note aussi : $Ta_i = 12 \cdot Ca_i$ et $Tg_i = 12 \cdot Cg_i$ qu'on va les utiliser plus tard.

4.2 Modele Dynamique Directe

Si on développe l'équation III.127, on trouve :

$$Ca_i = J_1 \cdot \ddot{\alpha}_i + Gi_1 \vec{OP} + Gi_2 (\vec{OC}_j + \vec{OC}_k) + Gi_3 \vec{OC}_i$$

Tel que :

$$Gi_1 = a_3 (E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) (E_i \cdot U^{-1}) + a_1 \cdot E_2 \cdot AC_i \cdot B_i$$

$$Gi_2 = a_1 \cdot E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i (E_i \cdot U^{-1})$$

$$Gi_3 = a_1 \cdot E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i (E_i \cdot U^{-1}) + a_2 \cdot E_2 \cdot AC_i \cdot B_i$$

\vec{OC}_j et \vec{OC}_k sont les accélérations des deux points C_j et C_k .

Gi_1 , Gi_2 et Gi_3 sont des vecteurs lignes. On sait que :

$$\vec{OC}_i = \frac{\partial^2 \vec{OC}_i}{\partial \alpha_i^2} \dot{\alpha}_i^2 + \frac{\partial \vec{OC}_i}{\partial \alpha_i} \ddot{\alpha}_i$$

$$\begin{aligned}\ddot{\overrightarrow{OC_j}} &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_i^2} \dot{\alpha}_j^2 + \frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j} \ddot{\alpha}_j \\ \ddot{\overrightarrow{OC_k}} &= \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k^2} \dot{\alpha}_k^2 + \frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k} \ddot{\alpha}_k\end{aligned}$$

En notant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2} = I_1 \quad ; \quad \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} = I_2 \\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j^2} = J_1 \quad ; \quad \frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j} = J_2 \\ \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k^2} = K_1 \quad ; \quad \frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k} = K_2 \end{array} \right.$$

$$Ca_i = e_{ii} \ddot{\alpha}_i + e_{ij} \ddot{\alpha}_j + e_{ik} \ddot{\alpha}_k + b_{ij} \dot{\alpha}_j^2 + b_{ik} \dot{\alpha}_k^2 + b_{ii} \dot{\alpha}_i^2 + G_{i1} \ddot{\overrightarrow{OP}} \quad (\text{III.129})$$

Tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{ii} = J_1 + G_{i3} I_2 \\ e_{ij} = G_{i2} J_2 \\ e_{ik} = G_{i2} K_2 \\ b_{ij} = G_{i2} J_1 \\ b_{ik} = G_{i2} K_1 \\ b_{ii} = G_{i3} I_1 \end{array} \right.$$

Dans la partie du calcul de $\ddot{\mathbf{P}}(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha)$ on a trouvé que : $\ddot{\mathbf{P}} = J^{-1}(\ddot{\alpha} - H\dot{\alpha})$. En substituant ce résultat dans l'expression de Ca_i et en remplaçant l'indice i par ses valeurs 1, 2 et 3 on obtient 3 equations qu'on écrit sous la forme matricielle suivante :

$$Ca = \begin{pmatrix} Ca_1 \\ Ca_2 \\ Ca_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \ddot{\alpha} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{11} \\ G_{12} \\ G_{13} \end{pmatrix} \ddot{\overrightarrow{OP}} \quad (\text{III.130})$$

Ou bien :

$$Ca = e \cdot \ddot{\alpha} + b \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} + G \cdot \ddot{\overrightarrow{OP}} \quad (\text{III.131})$$

En substituant l'expression de $\ddot{\overrightarrow{OP}}$ on trouve :

$$Ca = e \cdot \ddot{\alpha} + b \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} + G \cdot J^{-1}(\alpha - \ddot{H} \cdot \dot{\alpha}) \quad (\text{III.132})$$

Tel que :

$$Ca = C + Cg = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Cg_1 \\ Cg_2 \\ Cg_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.133})$$

On trouve :

$$C + Cg = (e + G.J^{-1})\ddot{\alpha} + b \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} - G.J^{-1}.H.\dot{\alpha} \quad (\text{III.134})$$

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} = (e + G.J^{-1})^{-1} \left[C + Cg - b \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} + G.J^{-1}.H.\dot{\alpha} \right] \quad (\text{III.135})$$

Ainsi on obtient :

$$\ddot{\alpha} = (e + G.J^{-1}) \left[(T + Tg).12 - b \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} + G.J^{-1}.H.\dot{\alpha} \right] \quad (\text{III.136})$$

4.3 Validation du MDD et MDI en comparant avec SimMechanics

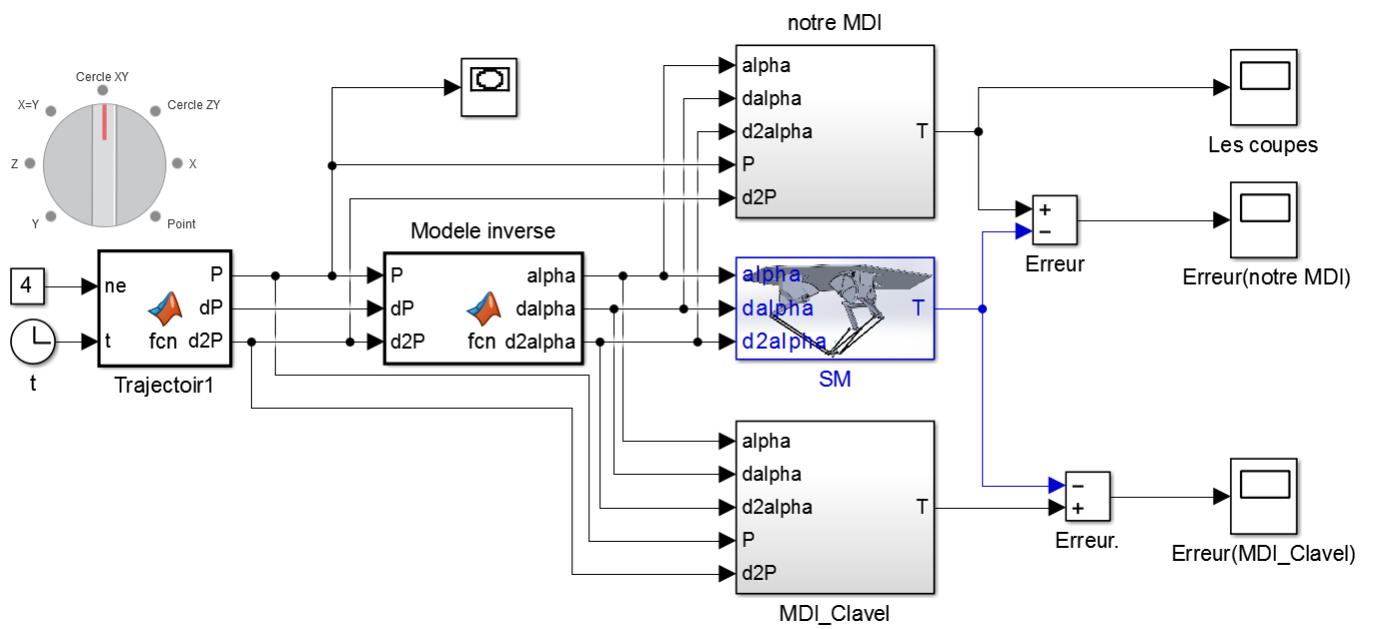


Figure III.47 – Block Simulink

Les trois blocs reçoivent les mêmes signaux correspondant à la trajectoire indiquée par la figure.

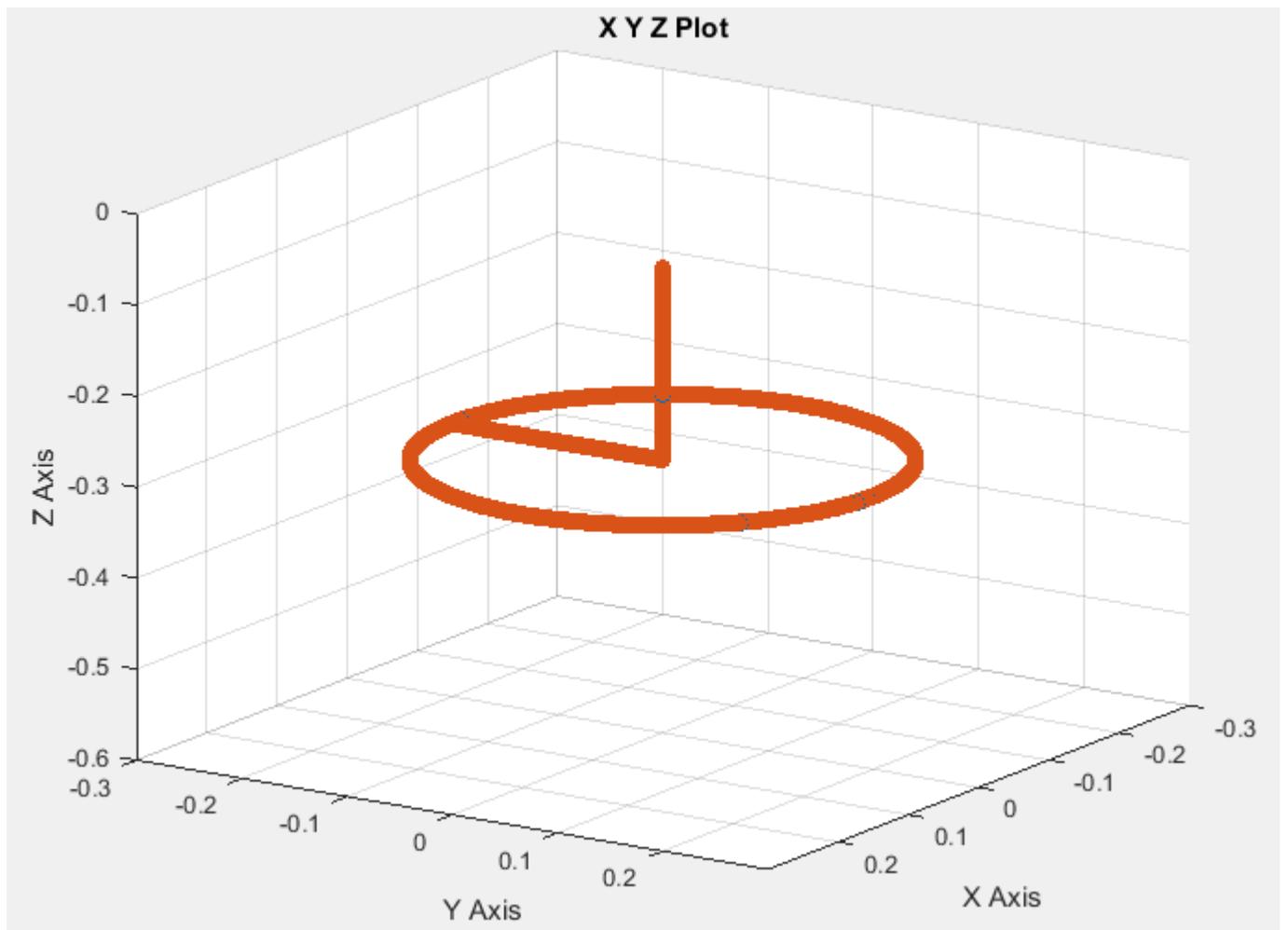


Figure III.48 – Trajectoire en 3D

Les couples générés pour cette trajectoire sont de l'ordre de **0.04**.

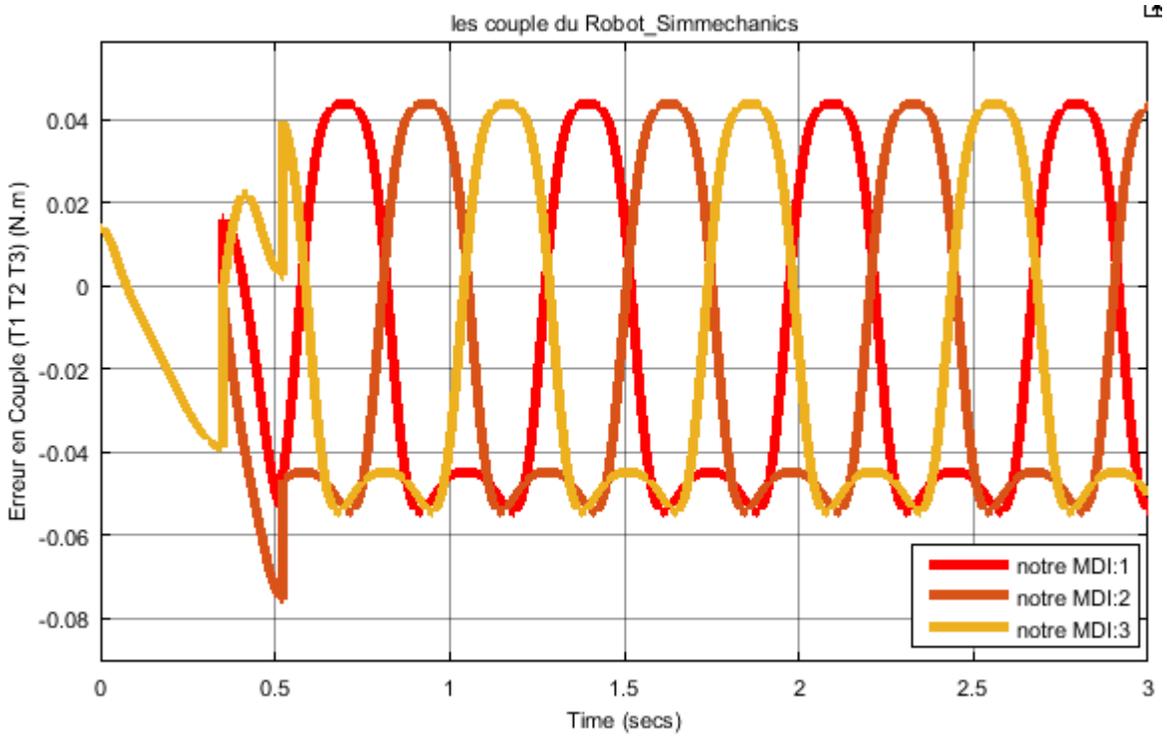


Figure III.49 – Erreur sur les couples

L'erreur entre notre modèle et le modèle construit est de l'ordre de 10^{-5} , donc l'erreur relative à l'amplitude des couples est de l'ordre de 10^{-3} .

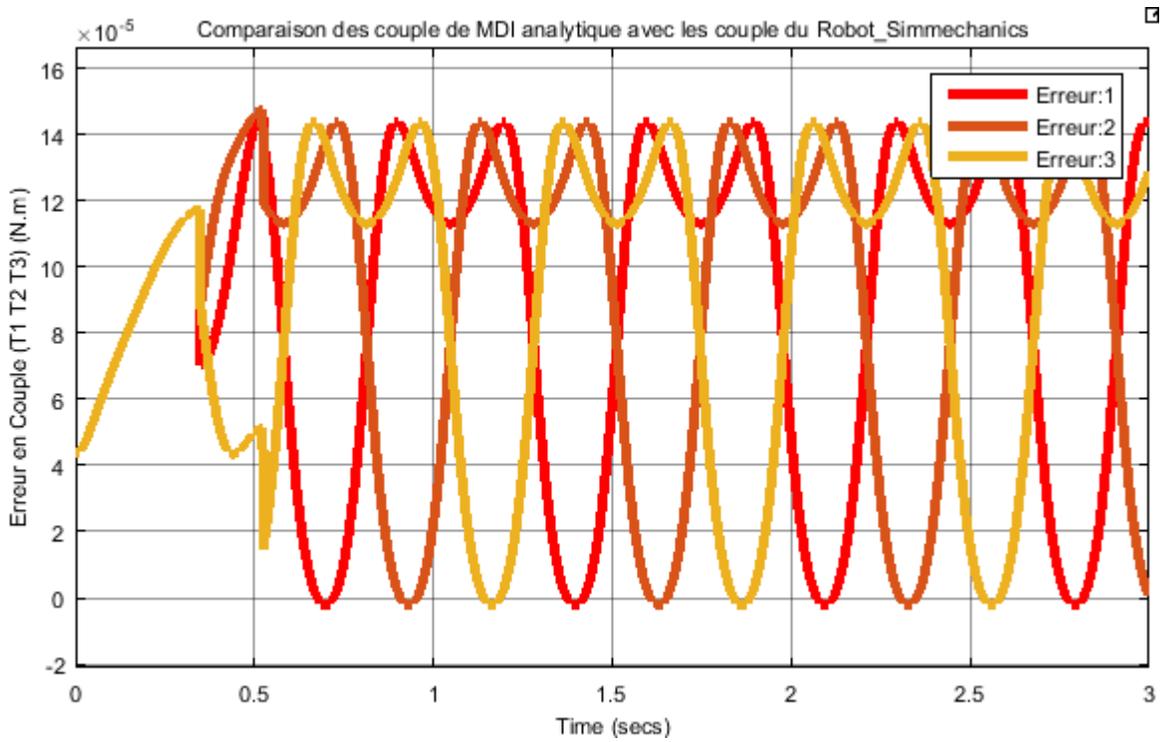


Figure III.50 – Erreur entre notre modèle et le modèle de SimMechanics

L'erreur entre le modèle de Clavel et le modèle construit est de l'ordre de 10^{-3} donc, une erreur relative de l'ordre de 0.1.

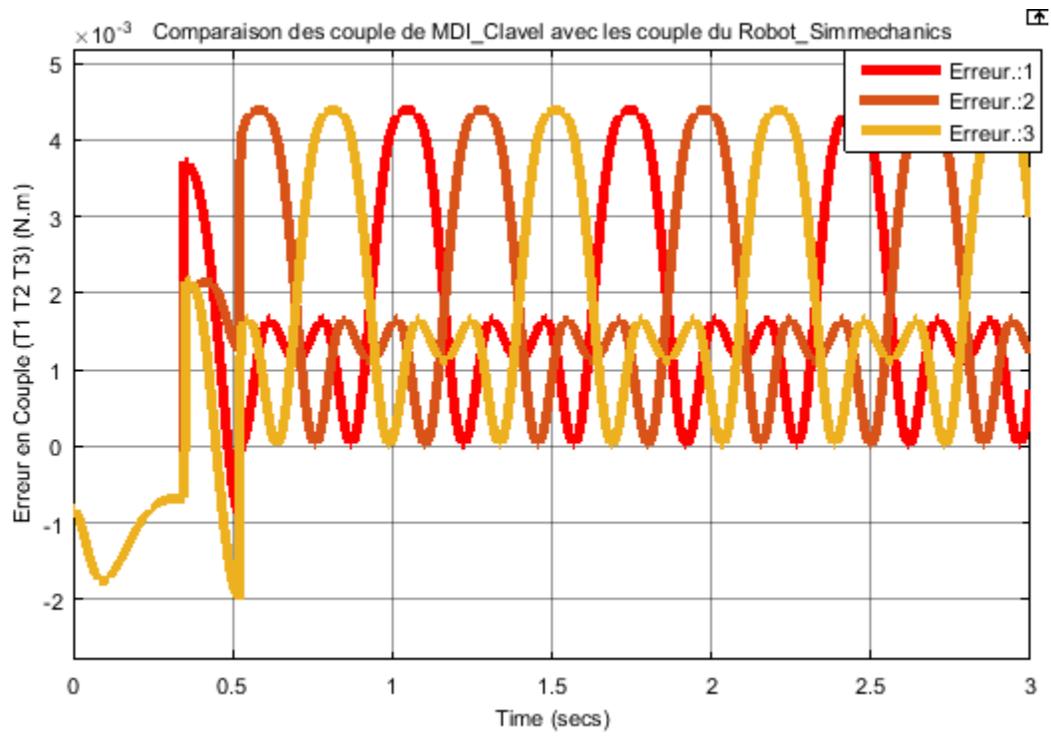


Figure III.51 – Erreur entre le modèle de Clavel et le modèle de SimMechanics

5 Modèle d'état

Dans notre cas, on a choisit les états du système : les angles de rotation des moteurs qu'on note $(\theta_1, \theta_2$ et $\theta_3)$, ces vitesses angulaires et les courants des moteurs.

$$\text{On note : } \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}; \dot{\theta} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

D'après les relations électriques des moteurs à courant continue on peut écrire :

$$u_i = R.I_i + L\dot{I}_i + K_e\dot{\theta}_i$$

ou bien

$$\dot{I}_i = b_2\dot{\theta}_i + b_1.I_i + b_3.u_i \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} b_2 = \frac{-K_e}{L} \\ b_3 = \frac{-R}{L} \\ b_3 = \frac{1}{L} \end{cases}$$

On écrit cette relation sous une forme vectorielle.

$$\dot{I} = b_2\dot{\theta} + b_1.I + b_3.U \quad \text{tel que : } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Il nous reste la partie mécanique. D'après la relation III.137 et en prenant en compte le réducteur : $C = 12T$ et $\theta = 12\alpha$ avec $\theta(0) = \alpha(0)$.

Alors :

$$\ddot{\theta} = 12(e + G.J^{-1})^{-1}(12.T_g - b \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} + G.J^{-1}H.\dot{\alpha}) + 12^2(e + G.J^{-1})^{-1}T \quad (\text{III.137})$$

Sachant que $T = K_i.I$ et notant

$$M = 12(e + G.J^{-1})^{-1}(12.T_g - b \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \\ \dot{\alpha}_3^2 \end{pmatrix} + G.J^{-1}H.\dot{\alpha})$$

$$N = 12^2(e + G.J^{-1})^{-1}T$$

On trouve :

$$\ddot{\theta} = M + N.I \quad (\text{III.138})$$

Paramètre	Définition
T	couple moteur $T = [T_1, T_2, T_3]$
T_g	couple moteur annulant l'effet de gravité : $T_g = [T_{g1}, T_{g2}, T_{g3}]$
T_a	couple moteur assurant l'accélération : $T_g = [T_{g1}, T_{g2}, T_{g3}]$
C	couple rapporté aux avant-bras ($C = 12.T$)
C_g	couple annulant l'effet de gravité rapporté aux avant-bras ($C_g = 12.T_g$)
C_a	couple assurant l'accélération rapporté aux avant-bras ($C_a = 12.T_g$)

Table III.1 – Tableau des paramètres utilisés dans la modélisation

Paramètre du moteur (datasheet)	Définition
R	résistance des moteurs (1.35Ω)
L	Inductance des moteurs ($1.2mH$)
K_e	constante de tension (FME) ($0.1194rad/sec$)
K_i	constante de couple ($0.119 N.m/A$)

Table III.2 – Tableau des paramètres des moteurs

$$X_1 = \theta; X_2 = \dot{\theta}; X_3 = I.$$

On considère pour le modèle d'état finale.

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = M + N.I \\ \dot{X}_3 = b_2.X_2 + b_1.X_3 + b_3.U \end{cases} \quad (\text{III.139})$$

Remarque :

C'est un modèle d'état non linéaire dont la non linéarité réside dans la deuxième équation (M et N), le reste est linéaire.

La forme de notre système est affine, c'est un avantage important pour pouvoir appliquer des commandes qui nécessitent une telle forme.

6 Génération des trajectoire pour le robot

6.1 Introduction

La génération des trajectoires d'un robot s'intéresse aux formes des trajectoires qui relient deux points de l'espace ainsi qu'à la manière dont évolue la vitesse durant le trajet de l'outil.

La génération trajectoire possède deux aspects : aspect géométrique et aspect temporel. L'aspect géométrique concerne les formes du trajet (géométrie de la trajectoire) et l'aspect temporel concerne l'évolution de l'accélération, de la vitesse et de la position dans le temps appelé aussi profils d'accélération, de vitesse et de position respectivement.

Les deux aspects géométriques et temporels, l'un dépend de l'autre car tout erreur spatiale (géométrique) induit une erreur temporelle et vice-versa. Les formes des trajets sont très importants et les profils temporels doivent ainsi être bien choisis de tel manière de ne pas accélérer ni décélérer à n'importe où sur ces trajets.

6.2 Lois du mouvement

Les trajectoire de base sont classifiés en 3 catégories : polynomiales, trigonométrique et exponentielles. On va illustrer ces types de trajectoires dans ce qui suit.[2]

6.2.1 Les trajectoires polynomiales

Dans le cas le plus simple, un mouvement est définis en posant deux instants t_0 et t_f , et des conditions sur la position, la vitesse et l'accélération en ces moments là. D'un point de vue mathématique, le problème est de trouver une fonction

$$q = q(t) \quad t_0 < t < t_f$$

De telle manière que les conditions prédéfinis soient satisfaites. Ce problème peut être résolu facilement en considérant une fonction polynomiale

$$q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

Avec les $n+1$ coefficients a_i qui sont déterminés de telle façon que les contraintes qu'on a déterminé sont satisfaites. Le degré n du polynome dépend du nombre des conditions prédéfinis.

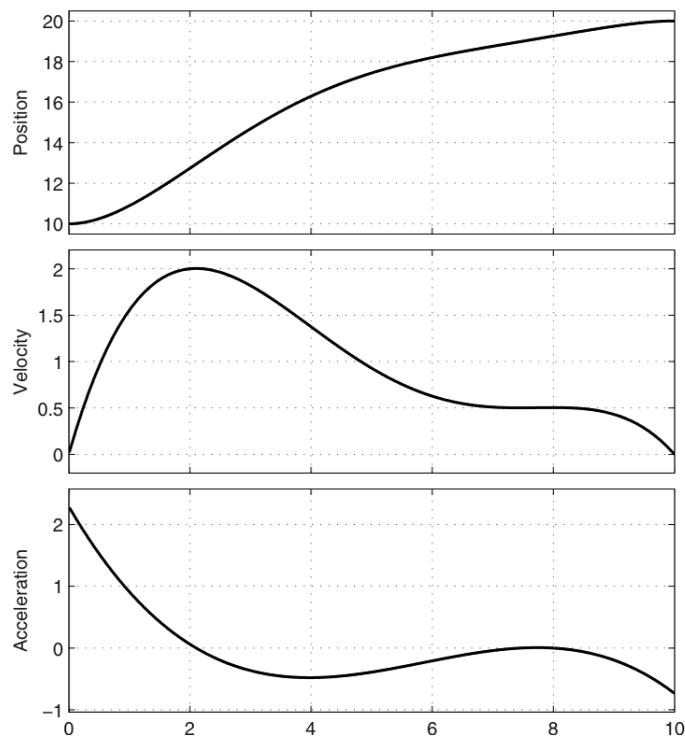


Figure III.52 – Profile de position, vitesse et accélération d’une trajectoire polynomiale [2]

Il existe plusieurs types de trajectoires polynomiales, parmi ces types on trouve :

Trajectoires linéaires :

C’est la trajectoire la plus simple des trajectoire polynomiales, elle est définis par

$$q(t) = a_0 + a_1(t - t_0)$$

Cette trajectoire est caractérisée par une vitesse constante.

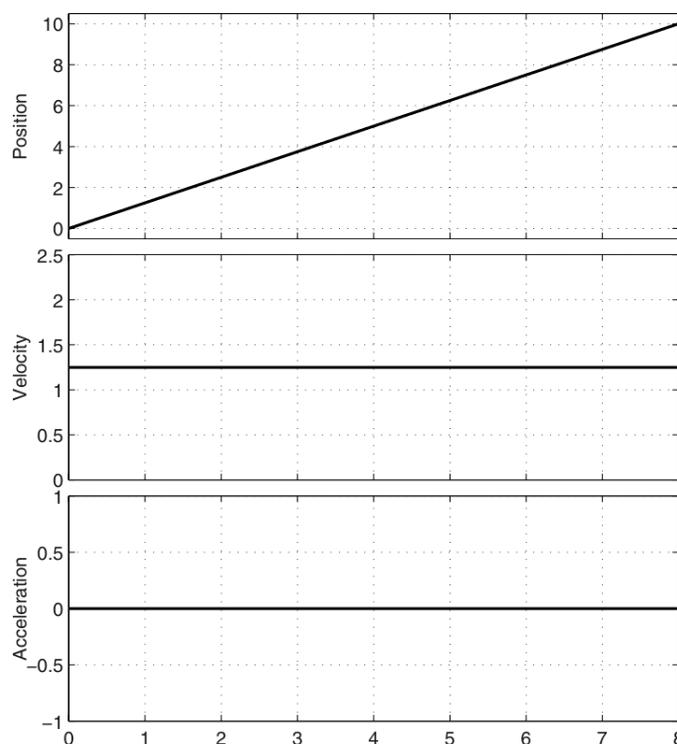


Figure III.53 – Profile de position, vitesse et accélération d’une trajectoire linéaire [2]

Trajectoire parabolique :

Cette trajectoire, aussi appelé trajectoire gravitationnelle est caractérisée par son accélération constante.

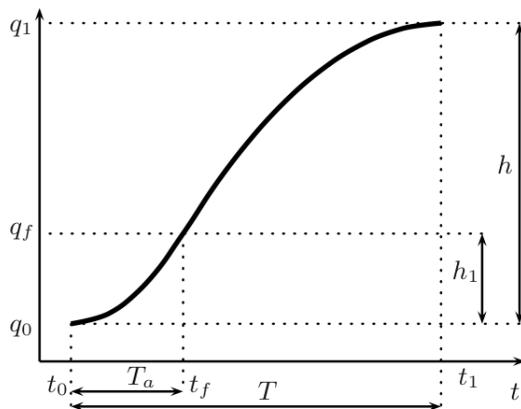


Figure III.54 – Trajectoire avec une accélération constante [2]

6.2.2 Les trajectoires trigonométriques

Il y en a plusieurs types de trajectoires trigonométriques, parmi ces types on trouve les trajectoires harmoniques.

Trajectoires Harmoniques

Une trajectoire harmonique est caractérisée avec un profil d'accélération proportionnel au profil de la position.

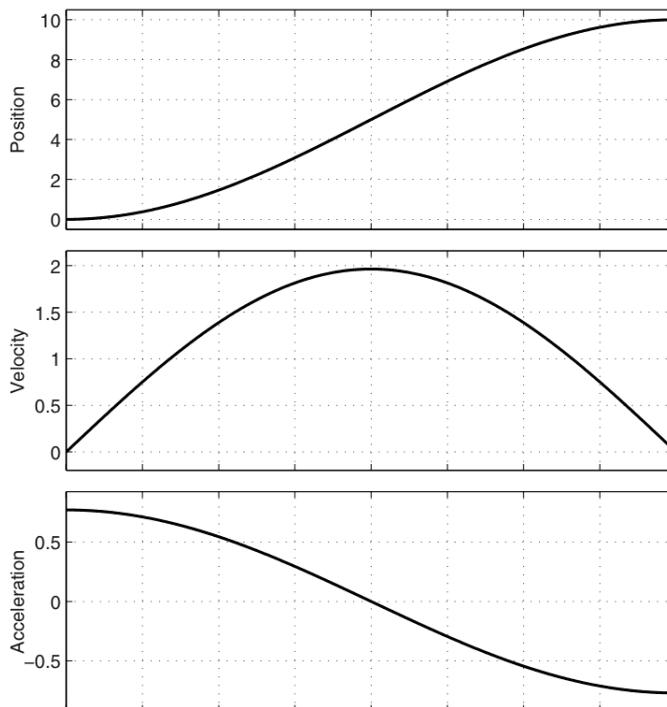


Figure III.55 – Trajectoire harmonique [2]

6.2.3 Trajectoires exponentielles

Cette trajectoire est caractérisé par un profil de vitesse de la forme

$$\dot{q}(\tau) = v_c e^{-\sigma f(\tau, \lambda)}$$

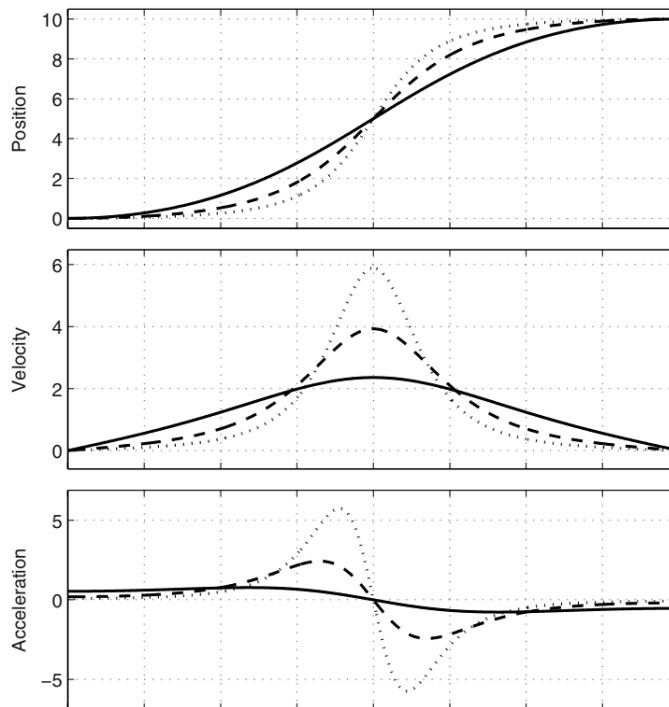


Figure III.56 – Trajectoire exponentielle [2]

σ et λ sont des paramètres choisis.

7 Conclusion

Le modèle géométrique du robot delta que nous avons établi nous permet de passer de l'espace articulaire vers l'espace opérationnel et vice versa, c'était un modèle plus simple que celle établi par Clavel. En exploitant ce modèle géométrique on a pu aboutir à un modèle cinématique purement analytique. En utilisant les deux modèles cinématique et géométrique et en faisant une étude dynamique du robot, on a abouti à un modèle dynamique plus exacte du robot et ça en prenant en compte une partie mécanique du robot qui a été négligé dans le modèle établi par Clavel. Avec tous ces modèles établis, on a pu construire un modèle d'état non linéaire. À la fin, on fait une petite étude sur la génération des trajectoires et les lois du mouvement. Tout au long du chapitre on a fait des validations des modèles établi, soit en comparant avec le modèle de Clavel, soit en comparant avec le modèle construit sous SimMechanics.

Chapitre IV

La commande du robot delta

1 Les commandes non linéaires

1.1 Commande par le mode de glissement

1.1.1 Définition

La technique des modes glissants consiste à amener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement (S) et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée autour de celle-ci jusqu' au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement. Pour que les objectifs de la commande soient atteints, il faut que :

$$\begin{cases} S.\dot{S} < 0 \\ \dot{S} = 0 \quad \text{pour} \quad S = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

1.1.2 Application de la commande

On cherche à faire tendre l'erreur $\Delta X_1 = X_1 - r$ vers zéro.

$\Delta \dot{X}_1 = X_2 - \dot{r}$, si $X_2 = \dot{r} - \lambda_1 \Delta X_1$ alors $\Delta \dot{X}_1 = -\lambda_1 \Delta X_1$ donc $\Delta X_1 \rightarrow 0$.

Alors soit $S_1 = X_2 - \dot{r} + \lambda_1 \Delta X_1$.

Si $S_1 \rightarrow 0$ alors l'objectif de commande est atteint.

Si $\dot{S}_1 = -\lambda S_1$ alors $S_1 \rightarrow 0$

C.à.d :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \dot{X}_2 - \ddot{r} + \lambda \Delta \dot{X}_1 = M + N.X_3 - \ddot{r} + \lambda_1 \Delta \dot{X}_1 = -\lambda_2 S_1 \\ \implies X_3 &= N^{-1}(-\lambda_2 S_1 - M + \ddot{r} - \lambda_1 \Delta \ddot{X}_1) \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Soit la surface $S_2 = X_3 + V$ tel que $V = -N^{-1}(-\lambda_2 S_1 - M + \ddot{r} - \lambda_1 \Delta \ddot{X}_1)$

L'objectif de la commande sera atteint si $S_2 = 0$ ou bien, si :

$$\dot{S}_2 = -K.\text{signe}(S_2) \implies \dot{X}_3 + \dot{V} = -K.\text{signe}(S_2) \quad (\text{IV.3})$$

D'après l'expression de \dot{X}_3 on conclut que si :

$$U = \frac{1}{b_3} (-K.\text{signe}(S_2) - b_2.X_2 - b_1.X_3 - \dot{V}) \quad (\text{IV.4})$$

Alors le système est stable.

1.1.3 Validation

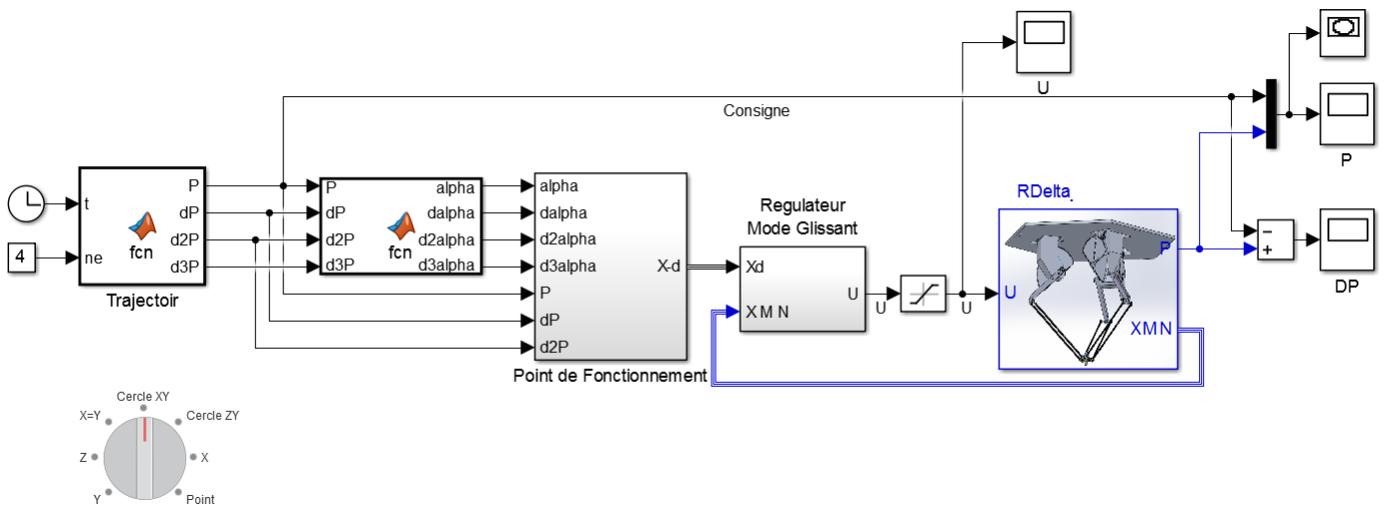


Figure IV.1 – Block Simulink de la commande par mode de glissement

Commentaires :

Ce schéma bloc représente l'implémentation de la commande par mode de glissement. De gauche à droite, on trouve : générateur de trajectoire, modèle inverse, un bloc pour générer l'état désiré, le régulateur par mode de glissement, la fonction saturation et le robot delta construit sous SimMechanics. La commande des moteurs se fait en fonction de l'erreur entre la position de la nacelle et la consigne P .

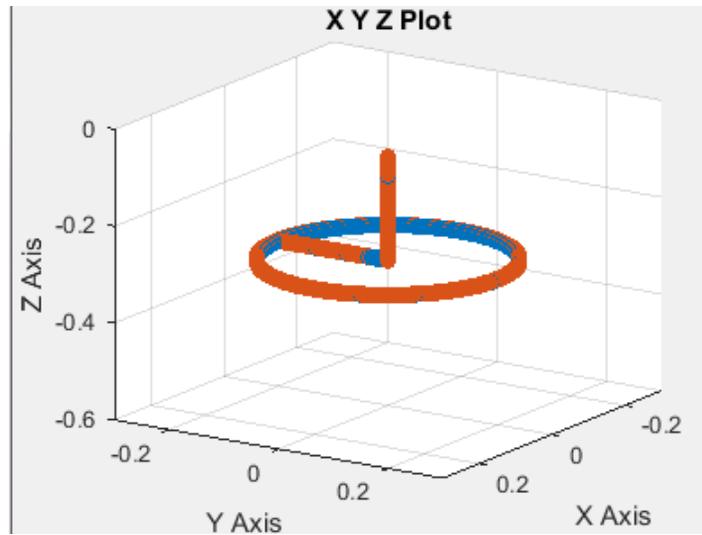


Figure IV.2 – Trajectoire en 3D

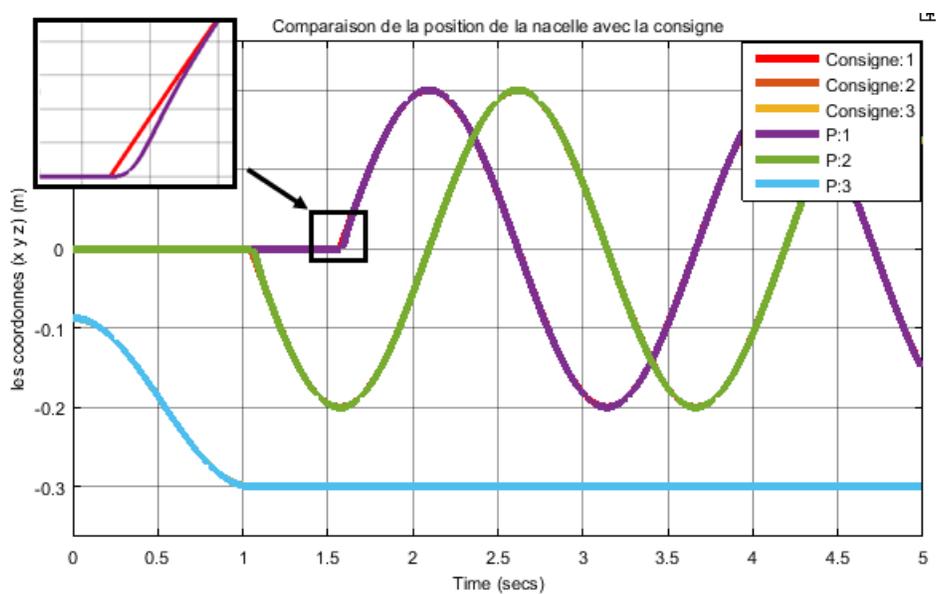


Figure IV.3 – Position de la nacelle

Commentaires :

Ces deux figures IV.2 et IV.3 représentent respectivement, la trajectoire spatiale et la trajectoire temporelle. On remarque qu'on a une bonne poursuite de la trajectoire sauf en quelques points, où la nacelle change brusquement la position.

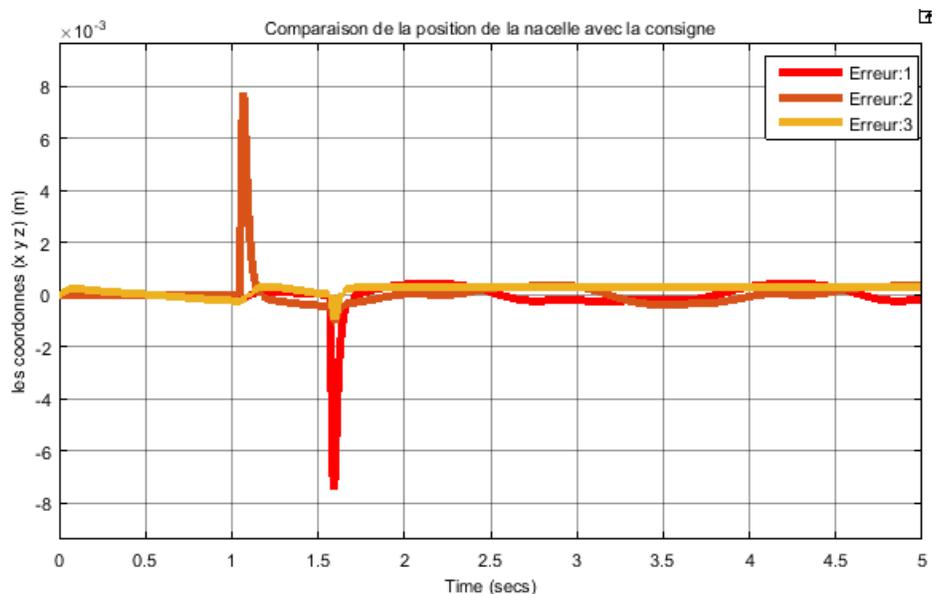


Figure IV.4 – Erreur sur la position de la nacelle

Commentaires :

En remarquant le graphe de l'erreur on constate que la poursuite est bonne sauf en deux points. Ces deux points dans la trajectoire sont des points où la nacelle a changer brusquement sa position.

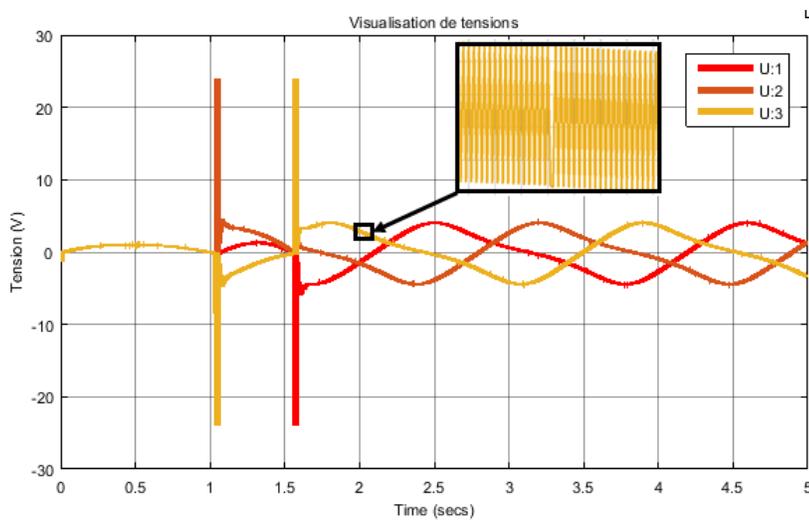


Figure IV.5 – Les tensions des moteurs

Commentaires :

Le graphe ci-dessus représente les tensions appliqués par chaque moteur. On remarque qu'il y a des pics lorsque la nacelle change de trajectoire d'une manière brusque car en ces moments là, le robot demande plus d'énergie pour ramener la nacelle à la position désirée. On remarque aussi la présence du phénomène du chattering à cause de la fonction *signe* propre à la commande par mode de glissement.

1.2 Commande par Back Stepping

1.2.1 Définition

Backstepping est une technique de commande récursive basé sur les fonctions de Lyapunov proposé au début de 1990 [8]. La technique a été complètement traitée par Krstic, Kanellakopoulos et Kokotovic dans [9]. L'idée du backstepping est de concevoir un contrôleur récursive en considérant à chaque étape l'un des état du système en tant que "commande virtuels". Le backstepping assure les objectifs de commande (stabilité et poursuite). La preuve de ces propriétés est une conséquence directe de la procédure récursive, car la fonction de Lyapunov est construite pour tout le système.

1.2.2 Application de la commande

La forme du modèle d'état est affine, donc on peut appliquer la méthode du Backsteeping. Etant donné 3 états (qui sont des vecteurs), on procède en 3 étapes :

Etape 1 :

On veut que $X_1 \rightarrow r$ c.à.d $\Delta X_1 = X_1 - r \rightarrow 0$.

Soit $V_1 = \frac{\Delta X_1^T \Delta X_1}{2}$ donc :

$$\dot{V}_1 = \Delta \dot{X}_1^T \Delta X_1 = (\dot{X}_1^T - \dot{r}^T) \Delta X_1 = (X_2^T - \dot{r}^T) \Delta X_1$$

Si $X_2 = \dot{r} - \lambda_1 \Delta X_1$ alors \dot{V}_1 est FDN, donc $\Delta X_1 \rightarrow 0$

Soit : $\Delta X_2 = X_2 - \phi_1$ tel que $\phi_1 = \dot{r} - \lambda_1 \Delta X_1$ qu'on veut qu'il tend vers 0.

Etape 2 :

$$V_2 = \frac{\Delta X_1^T \cdot \Delta X_1}{2} + \frac{\Delta X_2^T \cdot \Delta X_2}{2}.$$

$$\dot{V}_2 = \Delta X_1^T (X_2 - \dot{r}) + \Delta X_2^T \cdot \Delta \dot{X}_2 \tag{IV.5}$$

Etape 3 :

$$\text{Soit : } V_3 = \frac{\Delta X_1^T \Delta X_1}{2} + \frac{\Delta X_2^T \Delta X_2}{2} + \frac{\Delta X_3^T \Delta X_3}{2}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \Delta X_1^T (X_2 - \dot{r}) + \Delta X_2^T \Delta \dot{X}_2 + \Delta X_3^T \Delta \dot{X}_3 \\ &= \Delta X_1^T (\phi_2 - \dot{r} + \Delta X_2) + \Delta X_2^T \Delta \dot{X}_2 + \Delta X_3^T \Delta \dot{X}_3 \\ &= -\lambda_1 \Delta X_1^T \Delta X_1 + \Delta X_2^T (\Delta X_1 + \Delta \dot{X}_2) + \Delta X_3^T \Delta \dot{X}_3 \\ &= -\lambda_1 \Delta X_1^T \Delta X_1 + \Delta X_2^T (\Delta X_1 + M + N \cdot X_3 - \dot{\phi}_1) + \Delta X_3^T \Delta \dot{X}_3 \end{aligned}$$

$X_3 = \Delta X_3 + \phi_3$ donc :

$$\dot{V}_3 = -\lambda_1 \Delta X_1^T \Delta X_1 - \Delta X_2^T (\Delta X_1 + M + N\phi_2 - \dot{\phi}_1 + N.\Delta X_3) + \Delta X_3^T \Delta \dot{X}_3 \quad (\text{IV.6})$$

Puisque : $\Delta X_1 + M + N\phi_2 - \dot{\phi}_1 = -\lambda \Delta X_2$ alors :

$$\dot{V}_3 = -\lambda_1 \Delta X_1^T \Delta X_1 - \lambda_2 \Delta X_2^T \Delta X_2 + \Delta X_2^T N \Delta X_3 + \Delta X_3^T \Delta \dot{X}_3$$

$$\Delta X_2^T N \Delta X_3 = \Delta X_3^T N^T \Delta X_2$$

Donc :

$$\dot{V}_3 = -\lambda_1 \Delta X_1^T \Delta X_1 - \lambda_2 \Delta X_2^T \Delta X_2 + \Delta X_3^T (N^T \Delta X_2 + \Delta \dot{X}_3) \quad (\text{IV.7})$$

Finalement si $N^T \Delta X_2 + \Delta \dot{X}_3 = -\lambda_3 \Delta X_3$ alors l'objectif de commande est atteint.

La commande obtenue est donc :

$$U = \frac{1}{b_3} [-\lambda_3 \Delta X_3 - b_2 X_2 - b_1 X_3 - N^T \Delta X_2 + \dot{\phi}_2] \quad (\text{IV.8})$$

1.2.3 Validation

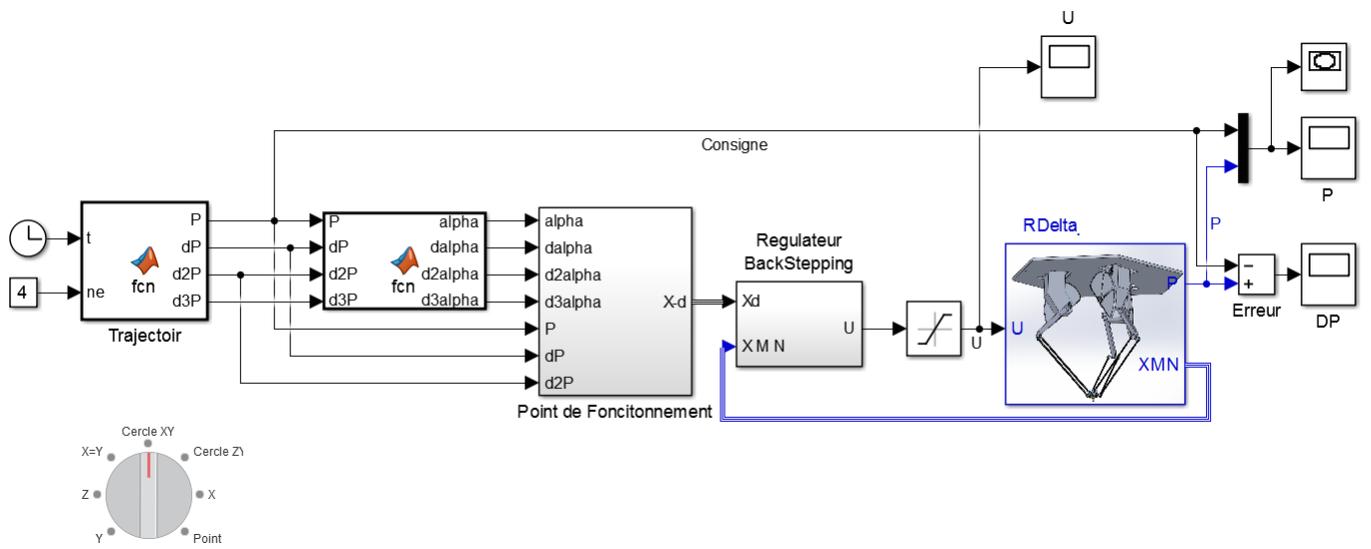


Figure IV.6 – Bloc Simulink de la commande par BackStepping

Commentaires :

Ce schéma bloc représente l'implémentation de la commande par backstepping. De gauche à droite, on trouve : le générateur de trajectoire, le modèle inverse, un bloc pour générer l'état désiré (X_d), le régulateur par backstepping, la fonction saturation et le robot delta construit sous SimMechanics. Les résultats de simulation pour une poursuite de trajectoire sont donné par les figures suivantes :

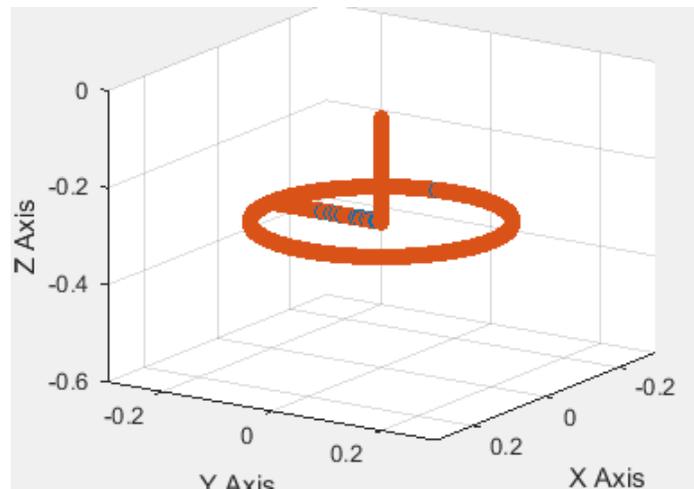


Figure IV.7 – Trajectoire en 3D

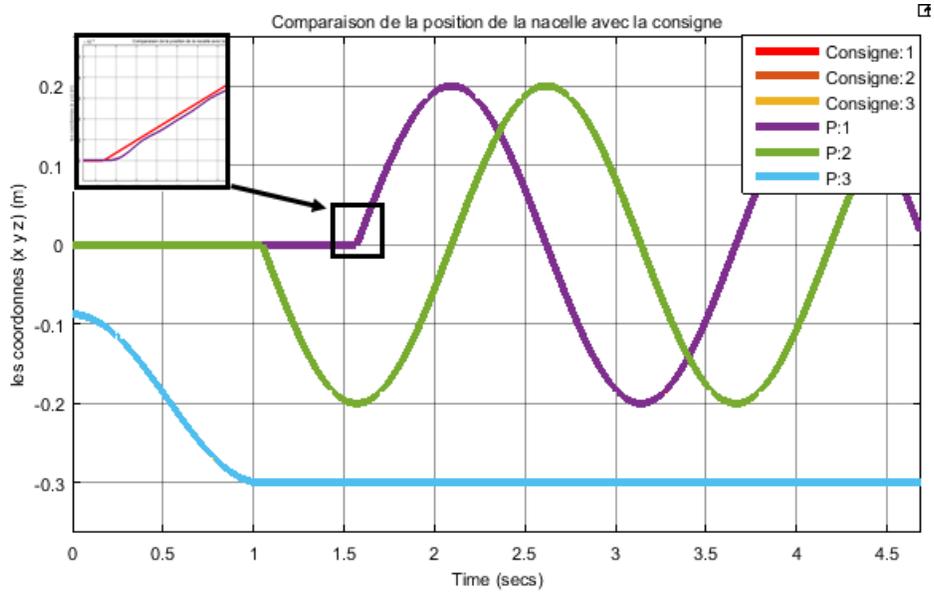


Figure IV.8 – Position de la nacelle

Commentaries :

La deuxième et la troisième figure représentent respectivement, la position spatiale et la position temporel. On remarque qu'il y a une bonne poursuite de la trajectoire.

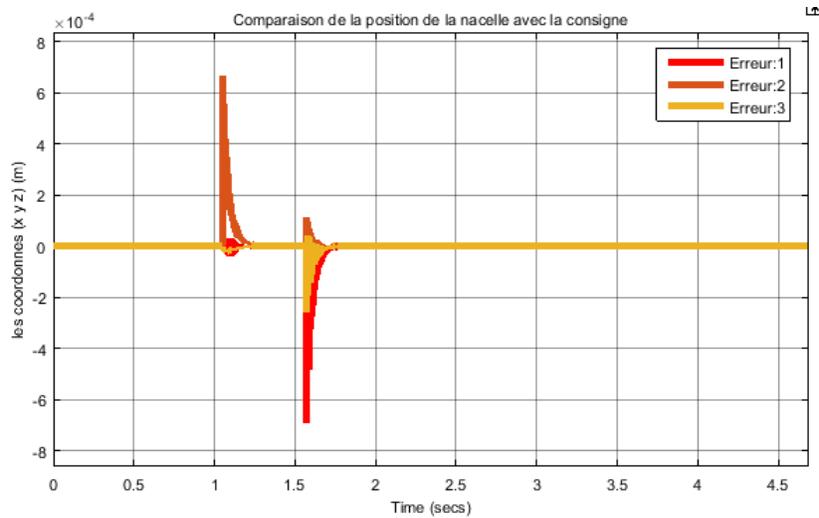


Figure IV.9 – Erreur sur la position de la nacelle

Commentaries :

On remarque que l'erreur de poursuite est presque nulle sauf en deux instants différents où la nacelle effectue un changement brusque dans sa trajectoire.

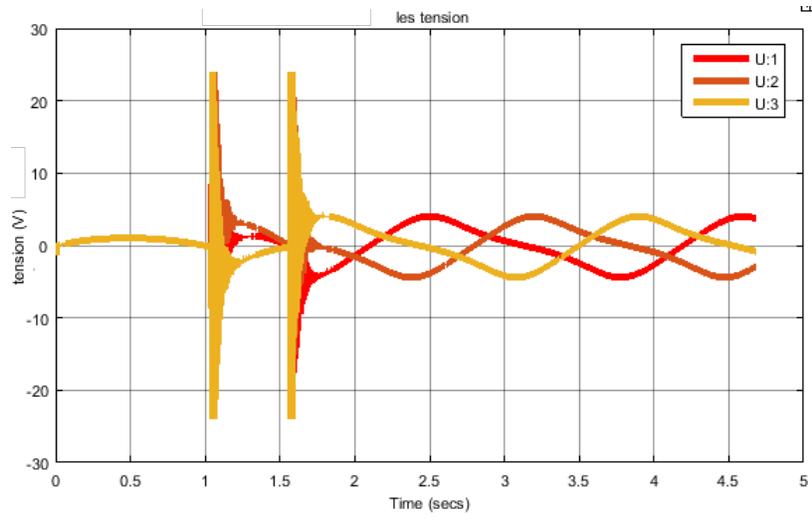


Figure IV.10 – Les tensions des moteurs

2 Commandes linéaires

2.1 La linearisation

Il est intéressant d'appliquer plusieurs commandes linéaires caractérisées par leurs performances et robustesse par rapport aux perturbations de commandes, de sortie, bruit de capteurs et les erreurs de modélisation. Parmi ces commandes on trouve le réglage PID, retour d'état à action intégrale et loop-shaping.

Notre système est non linéaire qu'est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 & (\textit{linéaire}) \\ \dot{X}_2 = M + N.X_3 = g(X) & (\textit{nonlinéaire}) \\ \dot{X}_3 = b_2.X_2 + b_1.X_3 + b_3.U & (\textit{linéaire}) \end{cases}$$

Ou bien

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, U) \\ y = C.X \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

Afin d'appliquer une commande linéaire, il faut que le système à commander soit linéaire autour d'un point de fonctionnement (X_1, X_2, X_3, U) qu'on appelle E_0 . Si le système est proche du point de fonctionnement E_0 alors le système non linéaire aura un comportement presque linéaire. En effet, par un développement de Taylor du premier ordre on représente le système non linéaire autour du point E_0 par :

$$\dot{X}(E_0 + \Delta E) = \dot{X}(E_0) + \left(\frac{\partial \dot{X}}{\partial E} \right)_{E_0} \Delta E$$

C.à.d :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X} &= \left(\frac{\partial f(X, U)}{\partial X} \right)_{E_0} \Delta X + \left(\frac{\partial f(X, U)}{\partial U} \right)_{E_0} \Delta U \\ \Delta \dot{X} &= A \Delta X + B \Delta U \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Ou bien :

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_1 = \Delta X_2 \\ \Delta \dot{X}_2 = \frac{\partial \dot{X}_2}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial \dot{X}_2}{\partial X_2} \Delta X_2 + \frac{\partial \dot{X}_2}{\partial X_3} \Delta X_3 \\ \Delta \dot{X}_3 = b_2 \Delta X_2 + b_1 \Delta X_3 + b_3 \Delta U \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

Les matrices d'état A et B se calculent au point de fonctionnement $E_0 = (X_0, U_0)$. L'objectif du robot est d'effectuer un déplacement suivant une trajectoire, d'où

la variation du point de fonctionnement à chaque instant. Donc, les régulateurs linéaires qu'on calcule en fonction de A et B vont être des régulateurs préprogrammés.

2.1.1 Calcul des matrices de linéarisation A , B et C

1. Calcul de B et C :

Les matrices B et C sont faciles à trouver, puisque $y = X_1$ alors $\Delta y = C\Delta X$

tel que : $C = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$.

$$B = \frac{\partial f(X, U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ b_3 \cdot I_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

2. Calcul de A :

$$A = \frac{\partial f(X, U)}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & \frac{\partial g}{\partial X_3} \\ 0_{3 \times 3} & b_2 \cdot I_{3 \times 3} & b_1 \cdot I_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & I & 0_{3 \times 3} \\ Q & R & L \\ 0_{3 \times 3} & b_2 \cdot I & b_1 \cdot I \end{pmatrix}$$

Avec : $Q = \frac{\partial g}{\partial X_1}$, $R = \frac{\partial g}{\partial X_2}$ et $L = \frac{\partial g}{\partial X_3}$ sont des matrices (3x3) qu'on va calculer. (voir VI).

2.1.2 Validation de la linéarisation de A

Pour valider la matrice A il suffit que la relation :

$$\ddot{X} = A \cdot \dot{X} + B \cdot \dot{U}$$

Soit vérifiée dans le schéma suivant :

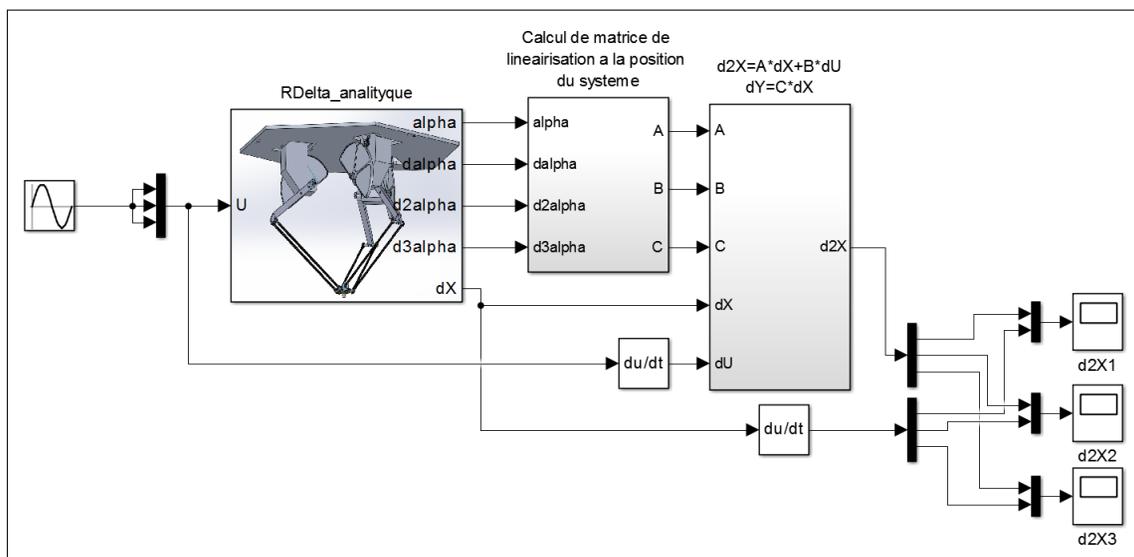


Figure IV.11 – Bloc Simulink

La simulation nous a donné les résultats suivants :

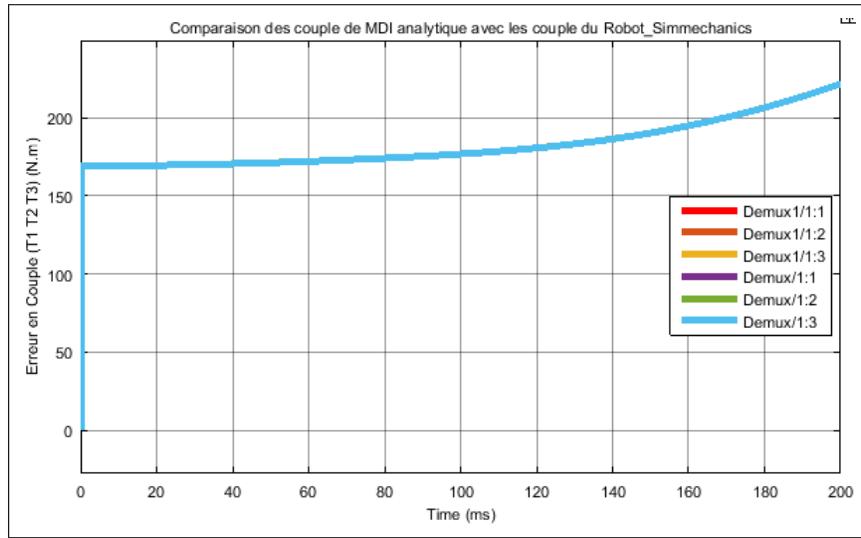


Figure IV.12 – \ddot{X}_1

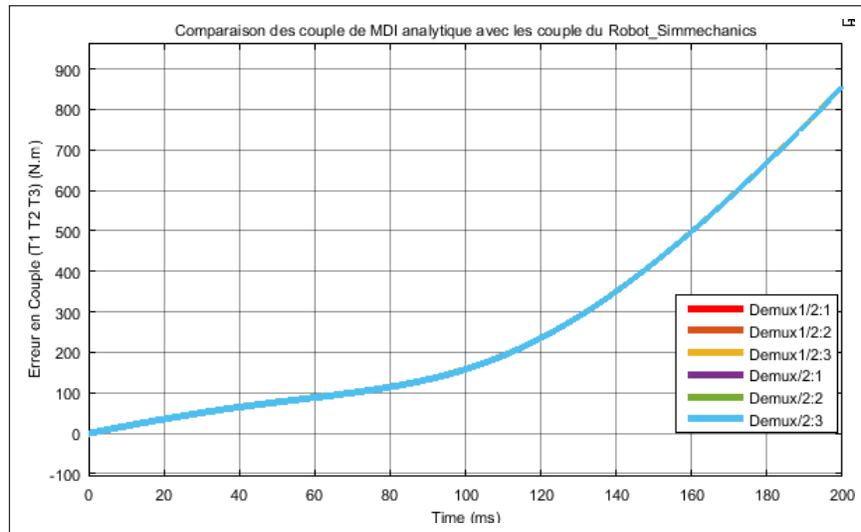


Figure IV.13 – \ddot{X}_2

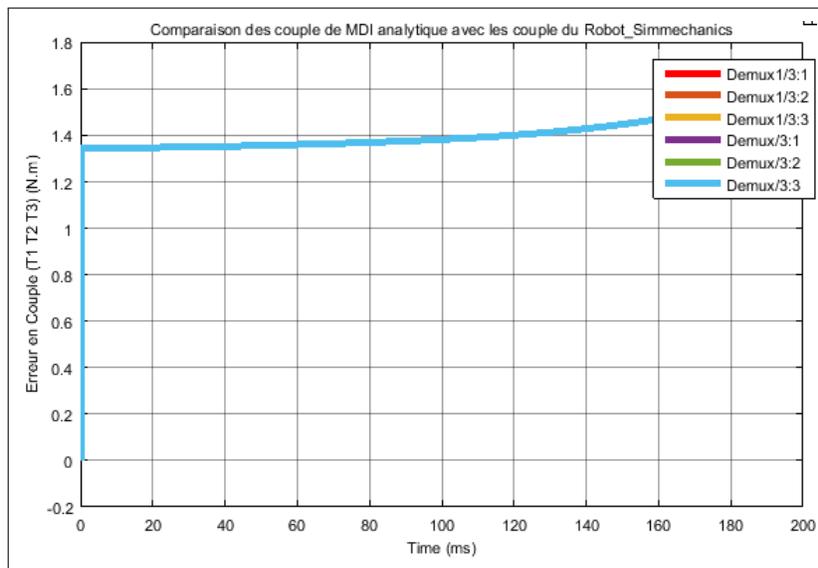


Figure IV.14 – \ddot{X}_3

Les graphes sont confondus d'où la validation.

2.2 Gain préprogrammé

1. Définition :

Après avoir calculer les matrices A et B on synthétise un retour d'état

avec action intégrale :

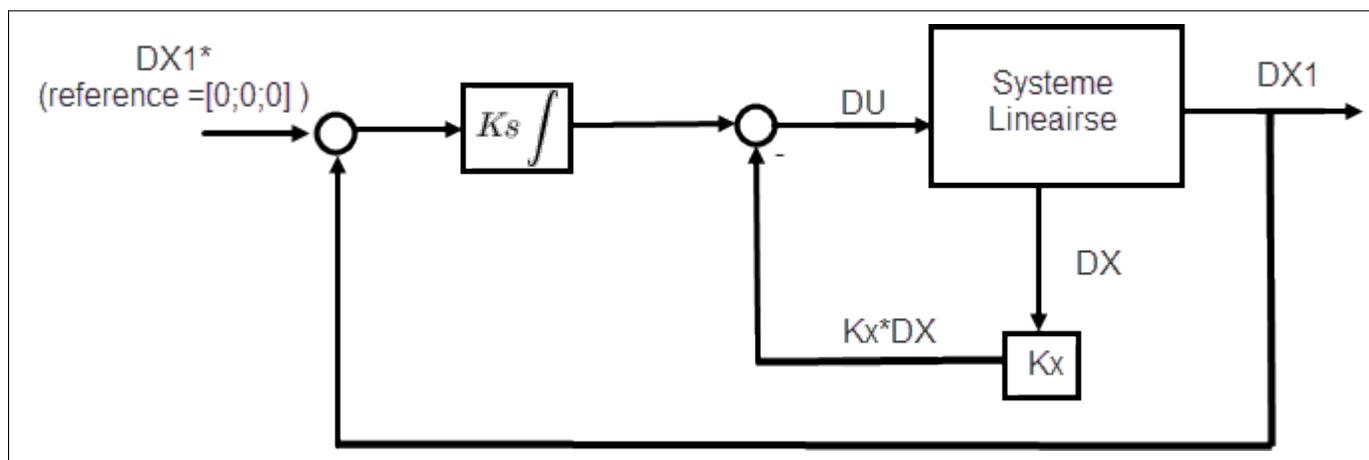


Figure IV.15 – Retour d'état et action intégrale

Les gains K_s et K_x sont fonctions de $E_0 = (X_0, U_0)$, E_0 est lui même fonction de la consigne r .

ΔU et ΔX se calcule par les relations :

$$\begin{cases} \Delta X = X - X^* \\ \Delta U = U - U^* \end{cases}$$

Le schéma de commande :

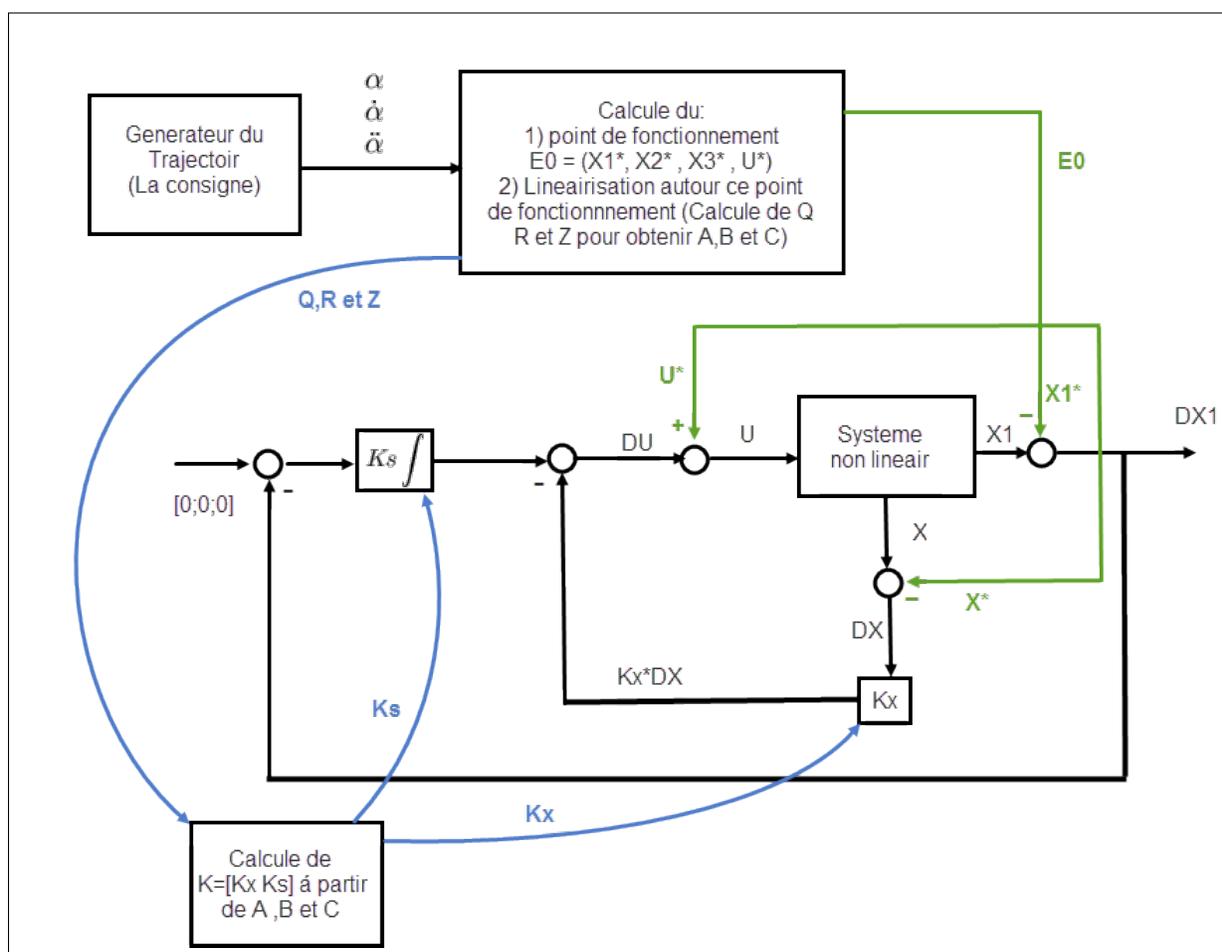


Figure IV.16 – Gain préprogrammé

2. Calcul des points de fonctionnement :

Le courant et la tension se calculent en fonction de la consigne $r =$

$(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha})^T$. La deuxième equation du système nous donne :

$$\dot{X}_2 = M + N.X_3 \quad \Rightarrow \quad X_3 = N^{-1}(\ddot{X}_2 - M) \quad \Rightarrow \quad X_3^* = N^{-1}(12\ddot{\alpha}^* - M)$$

La 3ème equation nous donne :

$$\dot{X}_3 = b_2 X_2 + b_1 X_3 + b_3 U \quad \Rightarrow \quad U^* = \frac{1}{b_3}(\dot{X}_3^* - 12b_2 \dot{\alpha}^* - b_1 X_3^*)$$

\dot{X}_3^* est calculé numériquement par :

$$\dot{X}_3^* = \frac{X_3^*(t + \Delta t) - X_3^*(t)}{\Delta t}$$

Ou analytiquement (ce qu'on a utilisé).

$$\Delta \ddot{\alpha} = R\Delta \alpha + Q\Delta \dot{\alpha} + L\Delta I$$

On conclut que :

$$\ddot{\alpha} = R.\dot{\alpha} + Q\ddot{\alpha} + Li \quad \Rightarrow \quad \dot{I}^* = L^{-1}(\ddot{\alpha}^* - R\dot{\alpha} - Q\ddot{\alpha}^*)$$

3. Calcul de K_x et K_s :

$$\begin{cases} \Delta \dot{X} = A\Delta X + B\Delta U \\ \Delta y = C\Delta X \end{cases}$$

$$\Delta U = -K_x \Delta X - K_s \int_0^t e.dZ = -K_x \Delta X - K_s Z$$

Tel que $\dot{Z} = C\Delta X - \Delta X_1^* = C\Delta X$, $\Delta X_1^* = 0$.

$\Delta U = -[K_x K_s] \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ Z \end{pmatrix}$ est un état augmenté. Le système augmenté :

$$\dot{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \Delta U \quad (\text{IV.12})$$

Ou bien :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}} = A_e \mathcal{E} + B_e \Delta U \\ \Delta u = C_e \mathcal{E} \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

A_e est de dimension 12×12 .

On impose la dynamique désiré (les pôles désirés) pour calculer K_x et K_s .

2.2.1 Validation

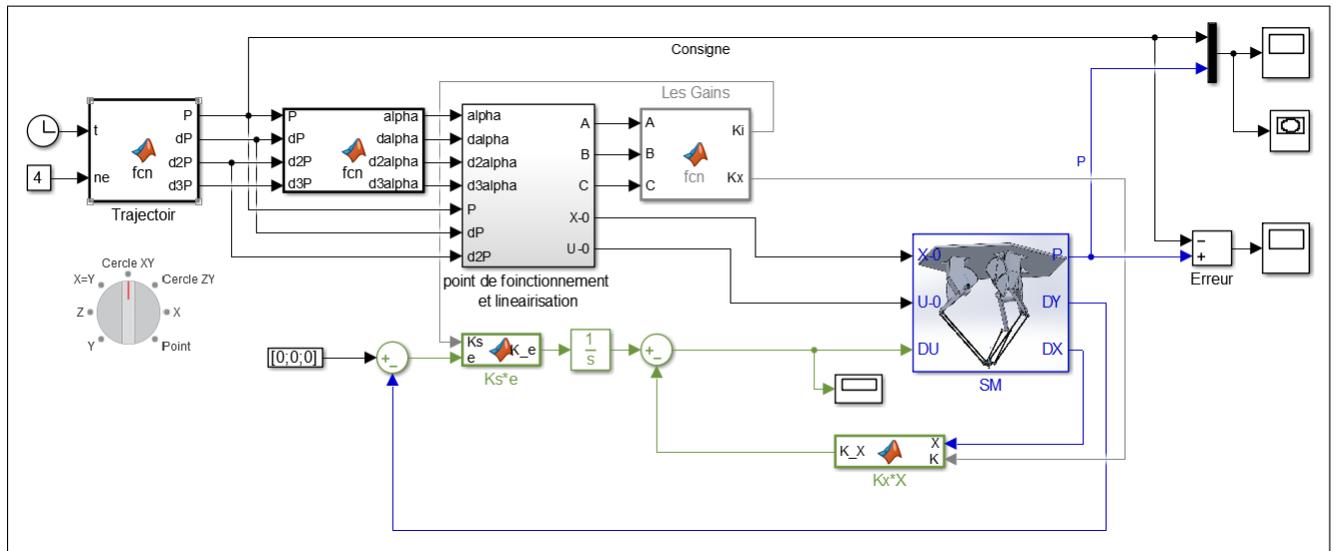


Figure IV.17 – Bloc Simulink de la commande par gain préprogrammé

Commentaires :

Ce schéma bloc représente la commande par gain préprogrammé. On a le générateur des trajectoires, le modèle inverse, le bloc qui calcule les points de fonctionnement, le bloc qui calcule les gains (entrées A , B et C et les sorties sont les gains K_i et K_x). Ensuite ces gains sont utilisés pour le retour d'état et pour l'action intégrale. Finalement la commande est appliquée au robot delta et les signaux de sortie et les erreurs sont visualisés.

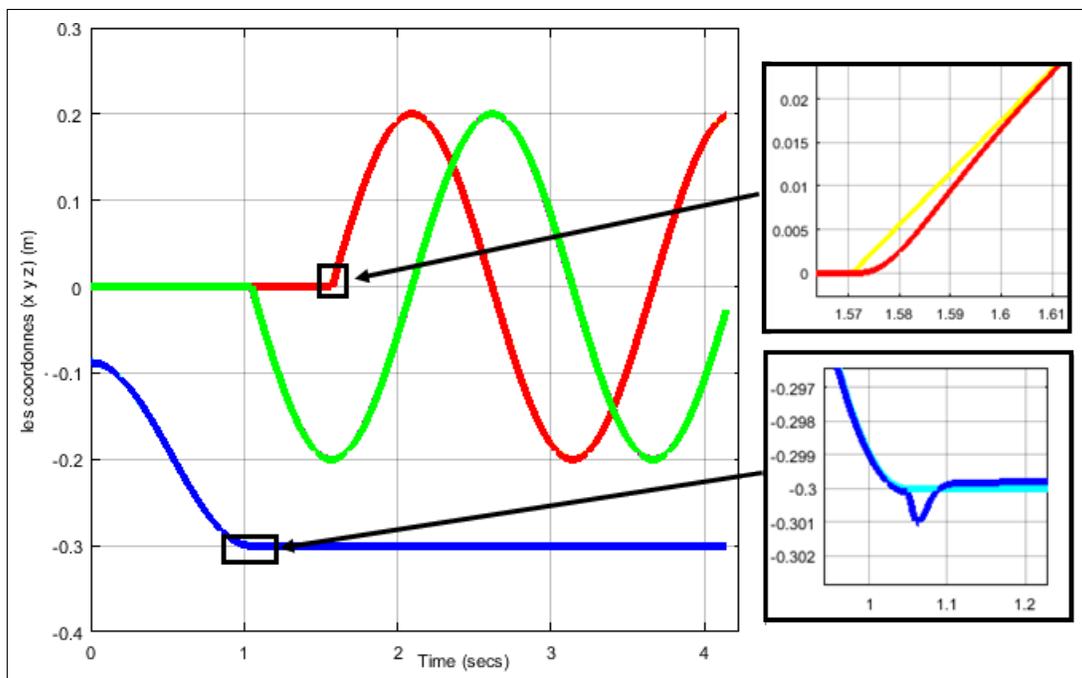


Figure IV.18 – La position de la nacelle

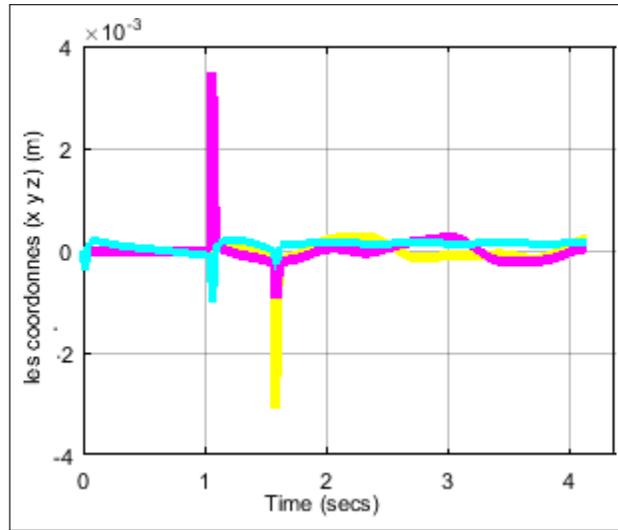


Figure IV.19 – Erreur sur la position de la nacelle

Commentaires :

Les deux figures IV.18 et IV.19 montrent la poursuite de la trajectoire en utilisant la commande par gain préprogrammé. Il est à noter que le système est bien évidemment rapide. Cette commande a donné de bons résultats avec une erreur de l'ordre de 10^{-3} .

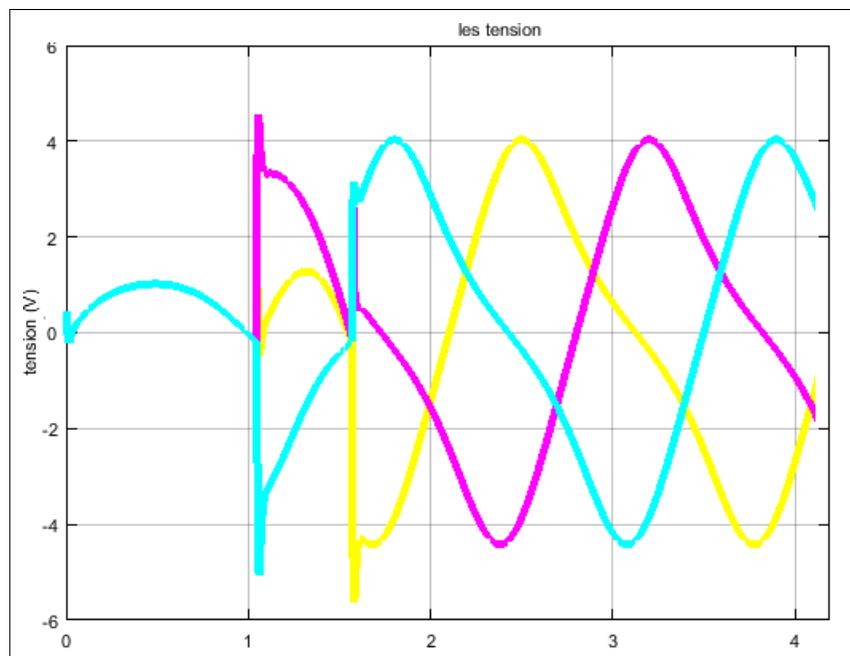


Figure IV.20 – Les tensions des moteurs

Commentaires :

On remarque que la forme des tensions est plus lisse par rapport aux commandes non linéaires, cela est dû à l'absence du phénomène de broutement (shattering).

2.3 Réglage en cascade

Notre système est divisé en deux parties, partie mécanique et partie électrique. Le sous système électrique est très rapide devant le sous système mécanique, c'est là où on peut régler la sortie Δy (position) par le couple, et on règle le couple calculé par le premier réglage en utilisant la tension ΔU .

Le système en boucle ouverte :

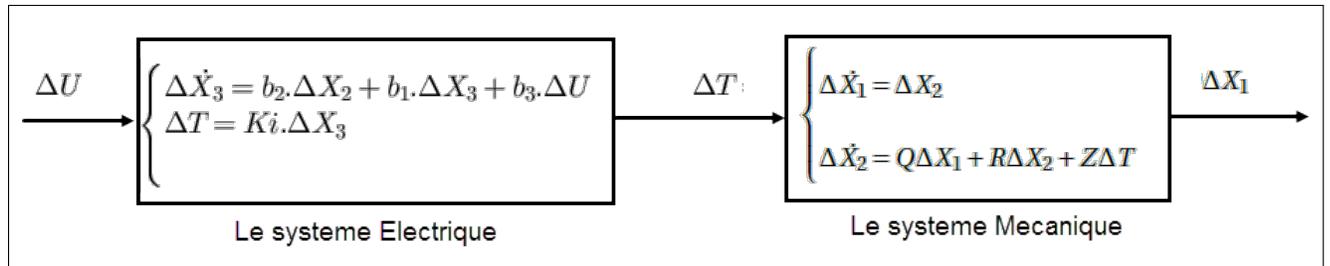


Figure IV.21 – Décomposition en sous-systèmes

Le système avec réglage :

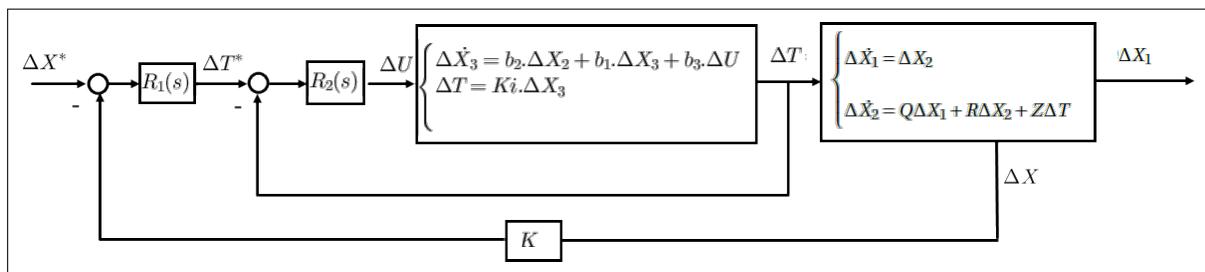
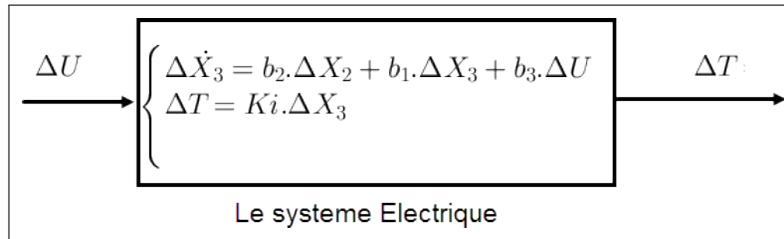


Figure IV.22 – Réglage en cascade

2.3.1 Réglage de la partie électrique (Réglage du couple par tension)

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_3 = b_2 \cdot \Delta X_2 + b_1 \cdot \Delta X_3 + b_3 \cdot \Delta U \\ \Delta T = K_i \cdot \Delta X_3 \end{cases} \implies \Delta X_3 = \frac{\Delta T}{K_i} \quad (\text{IV.14})$$



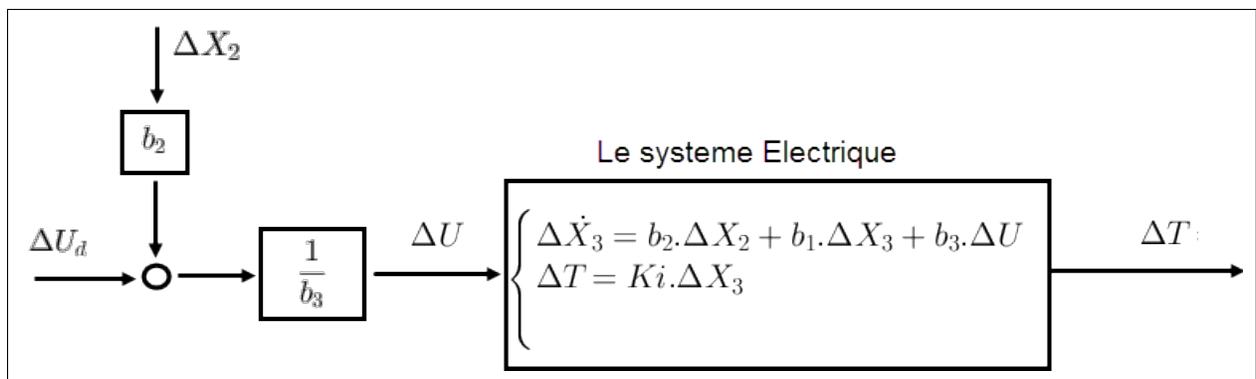
Dans ce système électrique, le terme ΔX_2 est apparus comme un signal externe qu'on veut éliminer pour que ce système soit simple.

Si on pose $\Delta U_d = b_2 \cdot \Delta X_2 + b_3 \cdot \Delta U$ tel que $\Delta U_d = \begin{pmatrix} \Delta U_{d1} \\ \Delta U_{d2} \\ \Delta U_{d3} \end{pmatrix}$.

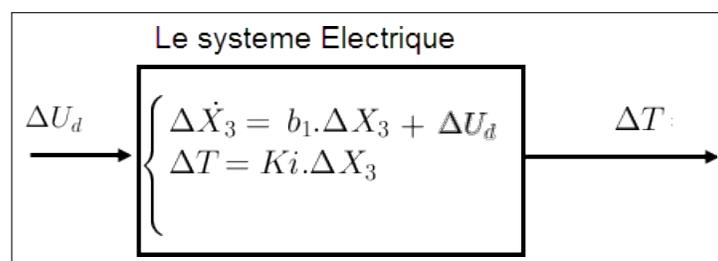
Alors le système électrique devient :

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_3 = b_1 \Delta X_3 + \Delta U_d \\ \Delta X_3 = \frac{\Delta T}{K_i} \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

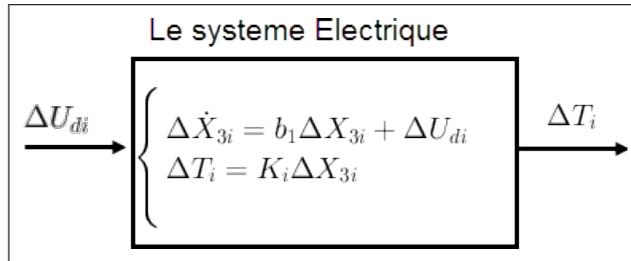
Le système devient en schéma block :



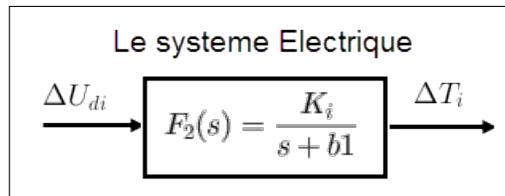
Equivalent à :



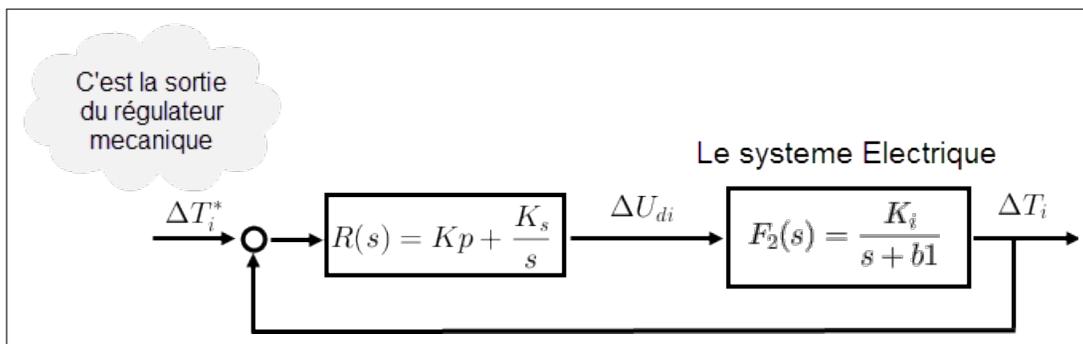
Le système est bien découplé, ce qui signifie que chaque sous système électrique (i) correspondant à chaque moteur i la même forme d'équation d'état précédentes :



La représentation par fonction de transfert est :



En insérant un régulateur PI nous aurons :



C'est la sortie du régulateur mécanique :

$$R(s) = K_p + \frac{K_s}{s} = K_p \frac{s + K_s/K_p}{s}$$

Le système en boucle ouverte :

$$G_{Bo} = R.F_1 = K_p \frac{s + K_s/K_p}{s} \frac{K_i}{s + b_1}$$

On compense le pôle b_1 en choisissant : $K_s = \frac{-b_1}{K_p}$, donc : $G_{Bo} = \frac{K_p.K_i}{s}$

En boucle fermée on trouve :

$$G_{BF} = \frac{K_p.K_i}{s + K_p.K_i} \tag{IV.16}$$

On veut accélérer la dynamique du système deux fois c.à.d on impose un pôle $P = -2.b_1$, pour cela il faut que : $K_p = \frac{-P}{K_i}$.

Le système devient : $G_{BF} = \frac{-P}{s - P}$

2.3.2 Réglage de la partie mécanique (Réglage de la position par le couple)

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_1 = \Delta X_2 \\ \Delta \dot{X}_2 = Q\Delta X_1 + R\Delta X_2 + Z\Delta T \quad (L = K_i \cdot Z) \end{cases}$$

Le système est fortement couplé. Pour simplifier le réglage nous annulons ce couplage par la méthode suivante.

2.3.2.1 Découplage du système mécanique

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_1 = \Delta X_2 \\ \Delta \dot{X}_2 = Q_d\Delta X_1 + R_d\Delta X_2 + Z_d\Delta T + \overline{Q}_d\Delta X_1 + \overline{R}_d\Delta X_2 + \overline{Z}_d\Delta T \end{cases}$$

Tel que :

- Q_d, R_d, Z_d : représentent les matrices diagonales de Q, R, Z respectivement.
- $\overline{Q}_d, \overline{R}_d, \overline{Z}_d$: représentent les matrices anti-diagonales de Q, R, Z respectivement.

Si on veut que le système soit découplé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_1 = \Delta X_2 \\ \Delta \dot{X}_2 = Q_d\Delta X_1 + R_d\Delta X_2 + V \quad V = (V_1, V_2, V_3)^T \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

Alors il suffit que :

$$\Delta T = Z^{-1}(V - \overline{Q}_d\Delta X_1 - \overline{R}_d\Delta X_2) \quad \text{C'est un découpleur.} \quad (\text{IV.18})$$

On fait la synthèse du découpleur :

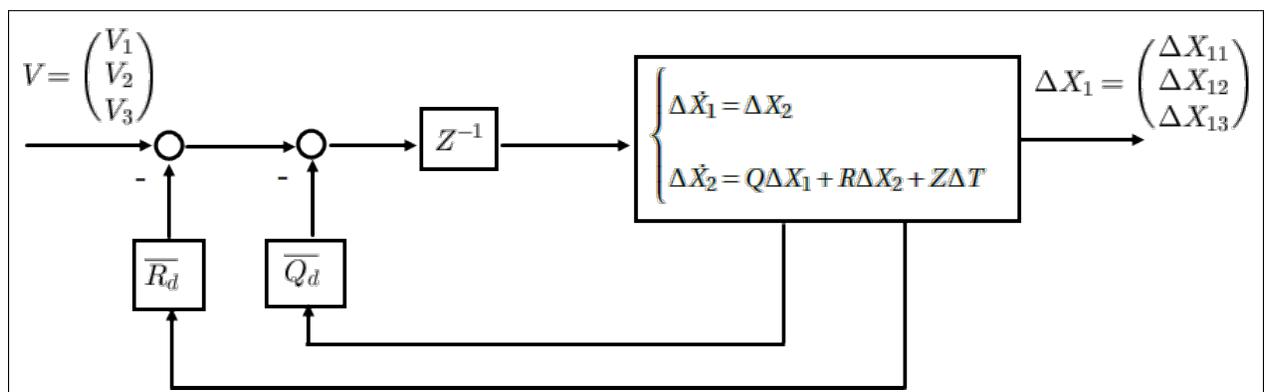


Figure IV.23 – Découplage du système mécanique

On obtient le système équivalent suivant :

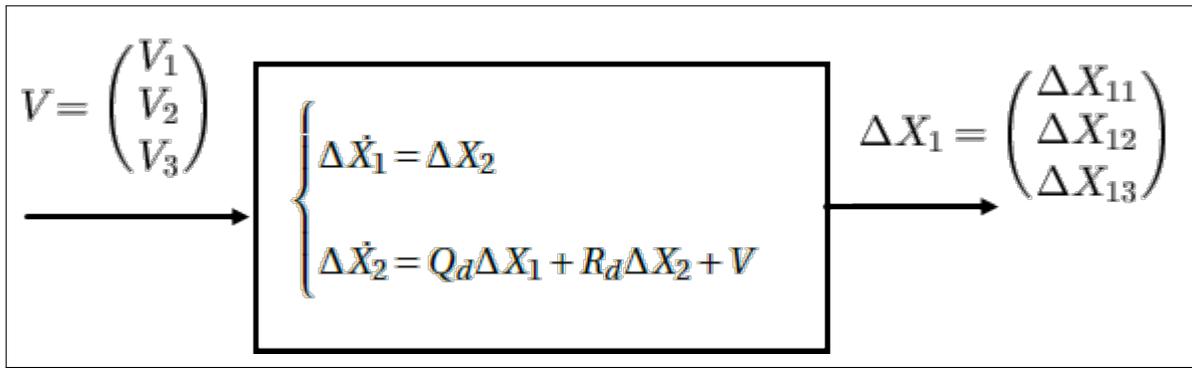


Figure IV.24 – Système mécanique découplé

C'est un système qui est bien découplé, c.à.d il est composé de 3 sous systèmes de la forme suivante :

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_{1i} = \Delta X_{2i} \\ \Delta \dot{X}_{2i} = Q_{di}\Delta X_{1i} + R_{di}\Delta X_{2i} + V_i \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

$i = 1, 2, 3.$

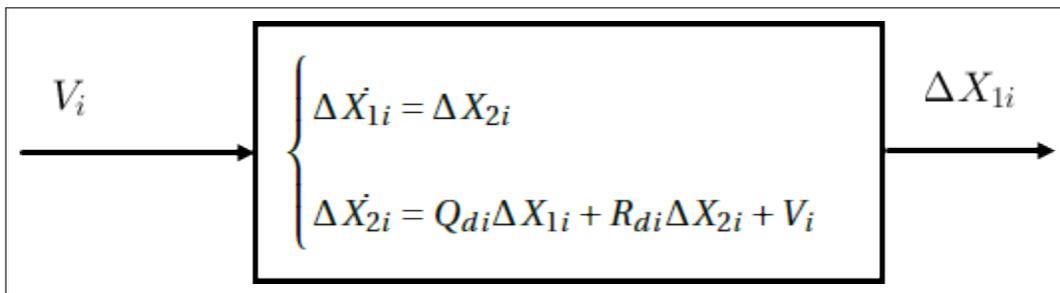


Figure IV.25 – Le sous-système élémentaire correspondant à chaque moteur i

La fonction de transfert de ce système :

$$\begin{cases} s.\Delta \dot{X}_{1i} = \Delta X_{2i} \\ s^2.\Delta \dot{X}_{2i} = Q_{di}\Delta X_{1i} + s.R_{di}\Delta X_{2i} + V_i \end{cases}$$

D'où on trouve :

$$F_1(s) = \frac{\Delta X_{1i}(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 - R_{di}s - Q_{di}} \quad (\text{IV.20})$$

Les paramètres R_{di} et Q_{di} sont en fonction des points de fonctionnement (ou bien la consigne), donc fonction du temps.

Pour remédier au problème d'une manière plus facile on fixe la dynamique du système par un retour d'état puis on applique des différents réglages associé au RE.

2.3.2.2 Imposition de la dynamique par un Retour d'état On écrit le système de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{X}_{1i} \\ \Delta \dot{X}_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q_{di} & R_{di} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{1i} \\ \Delta X_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} V_i \quad (\text{IV.21})$$

Ou bien sous forme plus simple :

$$\dot{Z} = A_i \cdot Z_i + B_i \cdot V_i \quad (\text{IV.22})$$

On impose deux pôles désirés P_1 et P_2 en prenant $V_i = -K_{1i}\Delta X_{1i} - K_{2i}\Delta X_{2i} + \text{référence}$ ou bien $V_i = -K_i \cdot Z_i$.

$$\dot{Z}_i = (A_i - B_i \cdot K_i) Z_i + B_i \cdot r \quad (\text{IV.23})$$

Le polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (K_2 - R_{d1})\lambda + K - Q_d$$

En comparant avec le polynôme : $\lambda^2 - (P_1 + P_2)\lambda + P_1 P_2$ on trouve :

$$K_1 = P_1 P_2 + Q_{d1}$$

$$K_2 = R_{d1} - (P_1 + P_2)$$

On a maintenant l'équivalence :

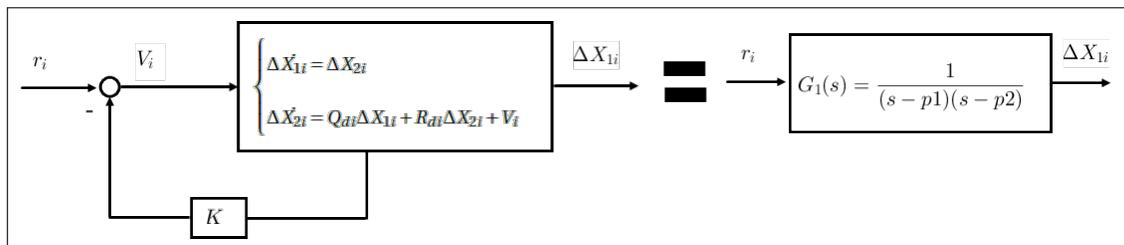


Figure IV.26 – Fixation de la dynamique avec le retour d'état

Il nous reste à synthétiser un régulateur pour assurer la robustesse en performance et en stabilité vis à vis les perturbations et les erreurs de modélisation. Pour cela on fait 3 différents réglages.

2.3.2.2.1 Régulateur Retour d'état avec Action Intégrale

$$G_1(s) = \frac{1}{(s - P_1)(s - P_2)}$$

Dans cette on calcule P_1 et P_2 et K_I (gain de l'action intégrale).

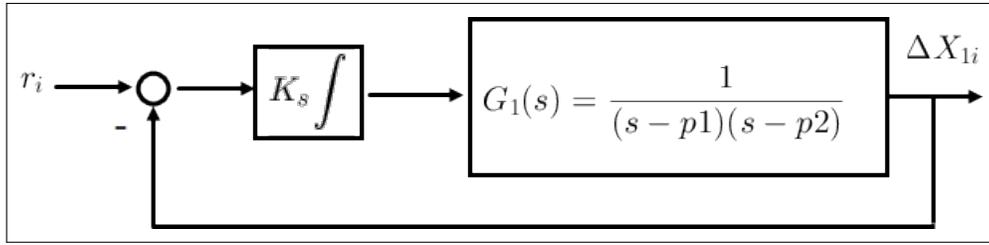


Figure IV.27 – Retour d'état + Action intégrale sur le système découplé

$$G_{Bo} = G_1 \cdot R = \frac{K_I}{s(s - P_1)(s - P_2)} = \frac{K_I}{s^3 - (P_1 + P_2)s^2 + P_1P_2 \cdot s}$$

$$G_{BF} = \frac{K_I}{s^3 - (P_1 + P_2)s^2 + P_1P_2 \cdot s + K_I}$$

On insère les pôles s_1 , s_2 et s_3 :

$$\begin{aligned} (\lambda - s_1)(\lambda - s_2)(\lambda - s_3) &= \lambda^3 - (s_1 + s_2 + s_3)\lambda^2 + (s_1s_2 + s_2s_3 + s_1s_3)\lambda - s_1s_2s_3 \\ &= \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda - s_1s_2s_3 \end{aligned}$$

Par comparaison :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = -b \\ P_1P_2 = c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P_1^2 + bP_1 + c = 0$$

On trouve finalement :

$$\begin{cases} P_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ P_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ K_I = -s_1s_2s_3 \end{cases} \quad \text{avec :} \begin{cases} b = -(s_1 + s_2 + s_3) \\ c = s_1s_2 + s_2s_3 + s_1s_3 \end{cases}$$

2.3.2.2.2 Retour d'état avec Loop-shaping

(a) Définition :

La technique du loop shaping est une technique de commande qui se fait en deux étapes. La première étape est de reformer la fonction de transfert (ou matrice de transfert) en boucle ouverte de telle façon que le système atteigne les objectifs de commande en terme de robustesse et de poursuite. La deuxième étape consiste de réaliser un

correcteur de phase pour corriger la phase du système en connaissant les valeurs nominales de la fonction de transfert en boucle ouverte et la valeur nominale du système.

(b) Synthèse de la commande :

La poursuite : On considère que la sortie suit la consigne si l'erreur statique est inférieur à 0.001 (1mm) ou bien :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{R(s).G(s)}{1 + R(s).G(s)} \right| < 0.001 \implies |R(0).G(0)| > 1000 \implies |R(0)| > \frac{10}{|G(0)|}$$

- Si on choisit les pôles du retour d'état $P_1 = P_2 = -1$ alors $|G(0)| = 1$.
- Si on choisit un pôle double comme (choix simple) et on choisit la valeur -1 parce que si P_1 et P_2 sont très inférieurs à 1 alors $|R(0)|$ va être très grande mais s'ils sont très grands par rapport à -1 ($P_1 = -0.05$ par exemple) alors le gain va prendre des bonnes valeurs mais le système devient très lent. Pour cela on choisit $P_1 = P_2 = -1$, mais même avec cette valeur le système reste lent, donc on augmente le gain de $R(s)$ de tel sorte que $\omega_c \geq 70$ (fréquence de coupure du système). Le système $G(s)$ est représenté dans le domaine fréquentielle avec un pôle double dans la figure suivante :

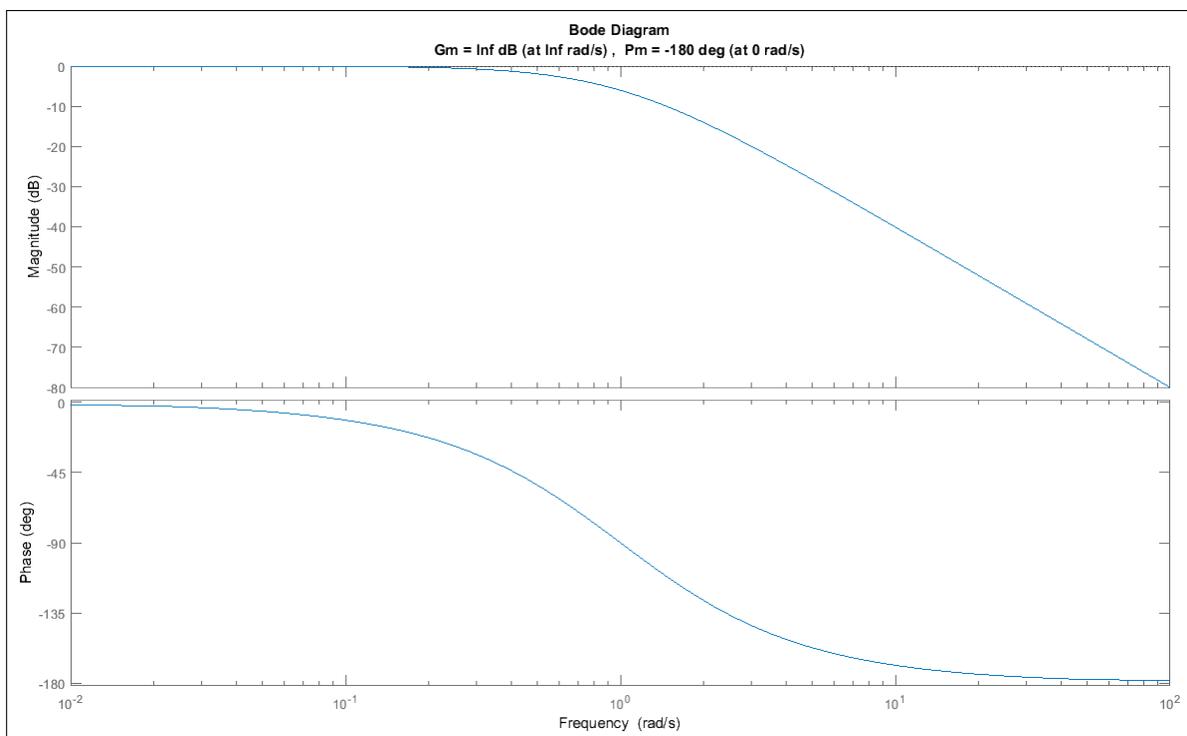


Figure IV.28 – Diagramme de bode de $G(s)$

Si on multiplie le système par $K = 5000$ alors on résout deux problèmes :

- Le problème de la poursuite ($K \gg 100$).
- La rapidité du système tel que la nouvelle fréquence de coupure égale : $\omega_c = 70.7$ rad/s.

Rejet de perturbation sur la commande (ou sur la sortie) :

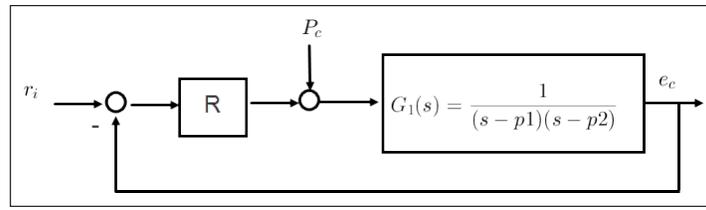


Figure IV.29 – Les perturbations de commande

On considère que $P_c(t)$ est une perturbation sinusoïdale : $P_c(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t)$. On suppose que $A \leq 0.1$ et $\omega_1 < \frac{\omega_c}{10}$ (basses fréquences). P_c fournit en sortie une réponse forcée sinusoïdale de même pulsation ω_1 , amplifiée et déphasé par rapport à elle-même. Ainsi, l'entrée $P_c(t)$ donne en sortie $e_c(t) = e_0 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \phi_1)$ où $\frac{e_0}{A}$ et ϕ_1 sont respectivement, rapport d'amplitude et de phase.

Ces deux derniers se représentent par le diagramme de bode ou bien par la fonction de transfert $y_s(s) = \frac{1}{1 + G(j\omega_1)R(j\omega_1)}$, avec, $\frac{e_0}{A} = |y_s(j\omega_1)|$ et $\phi = \angle y(j\omega_1)$.

D'où :

$$e_0 = \frac{A}{|1 + G(j\omega) \cdot R(j\omega)|} < 0.001$$

$|G(j\omega)R(j\omega)| \gg 1$ pour des basses fréquences. On trouve :

$$e_0 \approx \frac{A}{|G(j\omega_1)R(j\omega)|} < 0.001 \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega_1)R(j\omega)| > \frac{A}{0.01} = 10 = 20db$$

Avec le régulateur précédent $R = K = 5000$, cette condition est bien vérifiée.

Remarque : Les fréquences ω_1 et ω_2 ont été choisis de telle manière que la bande passante fait trois décades entre les deux gabarits, centrée en ω_c .

Rejet de bruit de capteur et les erreurs de modélisation :

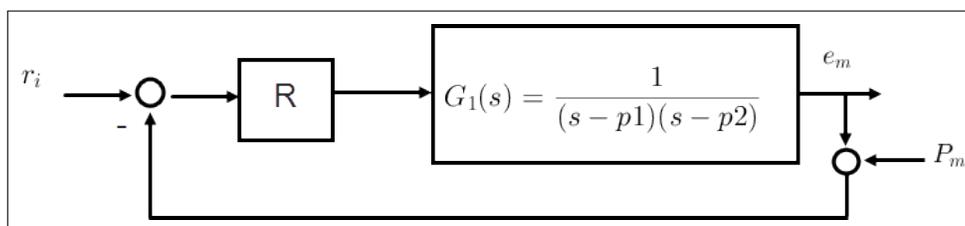


Figure IV.30 – L'effet de bruit de capteur

De la même manière et avec un bruit de $P_m = A_2 \cdot \sin(\omega_2 t)$ tel que

$A_2 \leq 0.1$, on veut que $|e_m(t)| < 0.001$ où $e_m = A_2 \cdot |T_y(j\omega_2)|$. On trouve $|G(j\omega_2)R(j\omega_2)| < -40dB$ tel que : $\omega_2 \approx 15 \cdot \omega_c$.

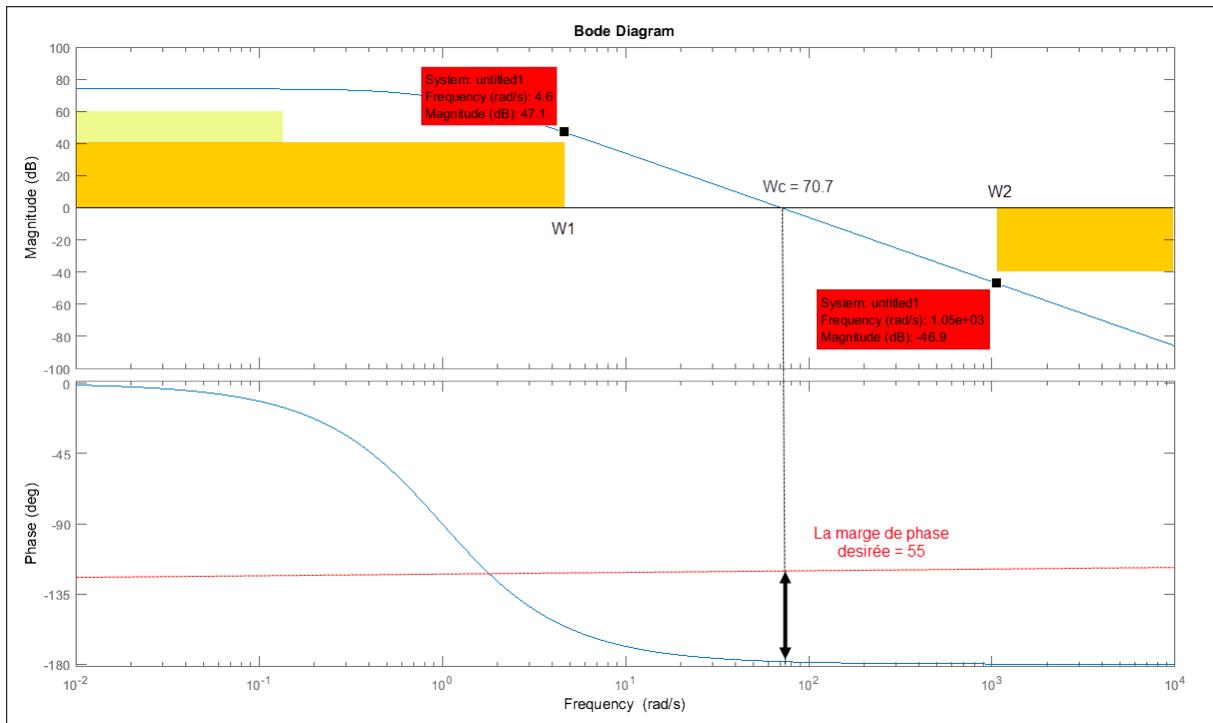


Figure IV.31 – Diagramme de bode de $K(s).G(s)$

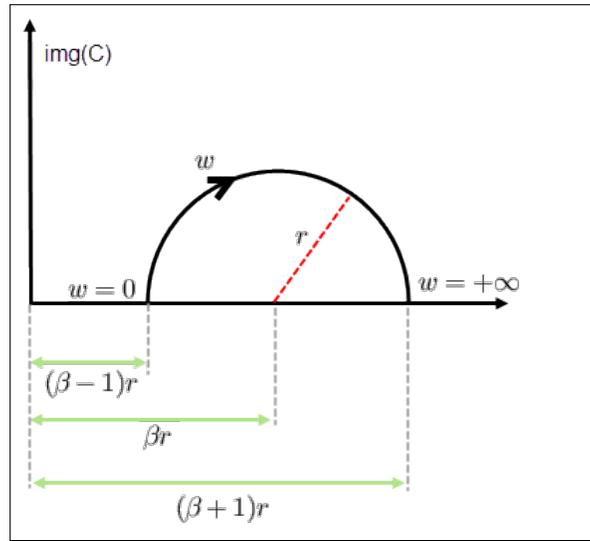
Le système $G.R$ a une mauvaise marge de phase. Le système risque d’être instable à cause des erreurs de modélisation, on remédie au problème en insérant un correcteur à avance de phase, mais d’une manière différente.

Correcteur à avance de phase :

Le correcteur à avance de phase habituel présente une petite difficulté dans sa synthèse parce que le gain de ce correcteur à la fréquence de coupure de système n’est pas nul. Ce dernier cause une chute dans la marge de phase, pour cette raison on change la méthode de synthèse de ce régulateur. Soit le correcteur :

$$C(s) = \beta.r - r \frac{1 - \alpha s}{1 + \alpha s} \quad \text{telque } \beta > 1, r > 0, \alpha > 0$$

C’est claire que $C(j\omega)$ fait un cercle de rayon r et de centre $(\beta.r, 0)$ dans le plan de nyquist comme montre la figure :


 Figure IV.32 – Représentation de $C(s)$ dans le plan de Nyquist

La phase maximale de ce régulateur correspond à la fréquence ω_c de tel sorte que le rayon $|C(j\omega)|$ soit tangent sur le cercle. Alors on exploite cette propriété pour synthétiser un régulateur $C(s)$, autrement dit, on va calculer (α, β, r) qui satisfaire les conditions suivantes :

- Le régulateur doit compenser la différence entre la marge de phase désirée et celle du système ($\Delta\phi = \phi_{systeme} - \phi_{désiré}$).
- $\omega_c = \omega_0$ parce que $\angle C(j\omega_0) = \phi_{max}$
- $\angle C(j\omega_c) = 1 = 0dB$

On choisit donc $\phi_{max} = \Delta\phi$.

D'après les relations angulaires dans le triangle droit :

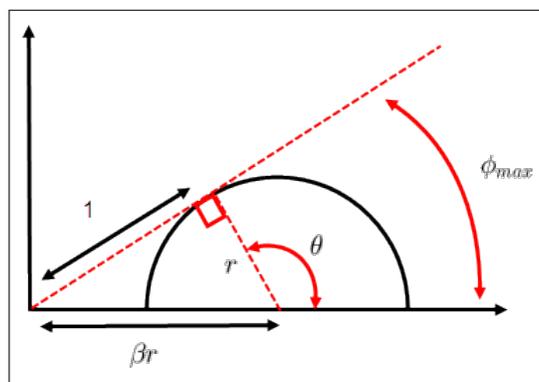


Figure IV.33 – Les relations angulaires

On a :

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \phi_{max} \quad (\text{IV.24})$$

D'autre coté, θ représente l'argument de $\left(-r \cdot \frac{1 - \alpha \cdot j\omega_c}{1 + \alpha \cdot j\omega_c}\right)$

$$\theta = \pi - 2 \cdot \text{atang}(\alpha \cdot \omega_c) \quad (\text{IV.25})$$

D'après (IV.24) et (IV.25) on trouve :

$$\alpha = \frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_{max}}{2}\right)}{\omega_c} \quad (\text{IV.26})$$

D'après les relations trigonométriques dans le triangle droit :

$$\sin(\phi_{max}) = \frac{r}{r.\beta} = \frac{1}{\beta} \implies \beta = \frac{1}{\sin(\phi_{max})} \quad (\text{IV.27})$$

$$\text{Ansi : } (\beta.r)^2 = 1 + r^2 \implies r = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$$

Notre système présente une fréquence de coupure $\omega_c = 70.7 \text{ rad/s}$ et marge de phase égale à 1.62° . On veut que cette dernière soit égale à 55° donc $\phi_{max} = \Delta\phi = 55 - 1.62 = 53.38^\circ$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\text{tang}\left(45 - \frac{53.38}{2}\right)}{70.7} = 0.0047 > 0 \\ \beta = \frac{1}{\sin(53.38)} = 1.245 > 1 \\ r = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}} = 1.8455 > 0 \\ \text{Donc } C(s) = \frac{0.01414.s + 0.3309}{0.004681.s + 1} \end{array} \right.$$

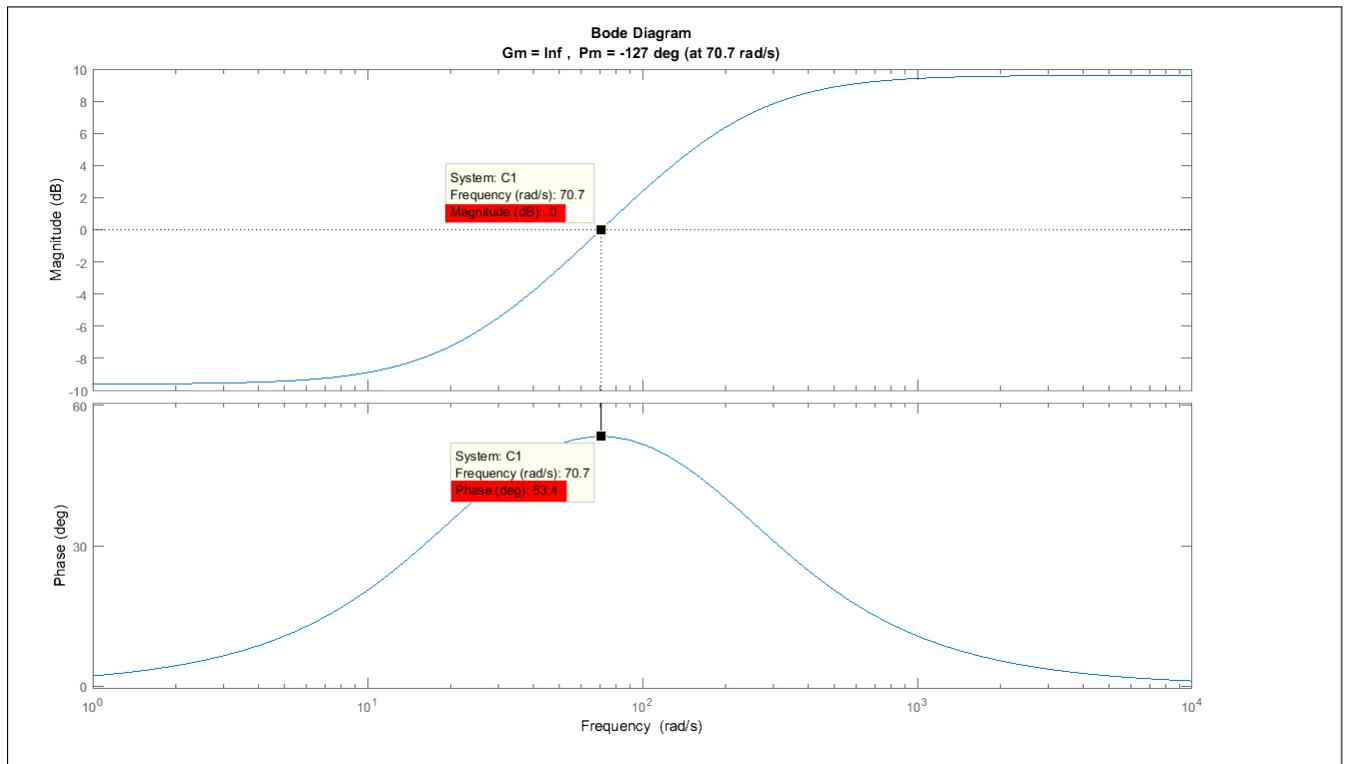


Figure IV.34 – Diagramme de bode de C

Notons que C_1 comporte le déphase désiré $\phi_{max} = \Delta\phi$ avec un gain nul (en dB) pour $\omega = \omega_c$.

Finalement le diagramme de bode du système complet $(K.C(s).G(s))$:

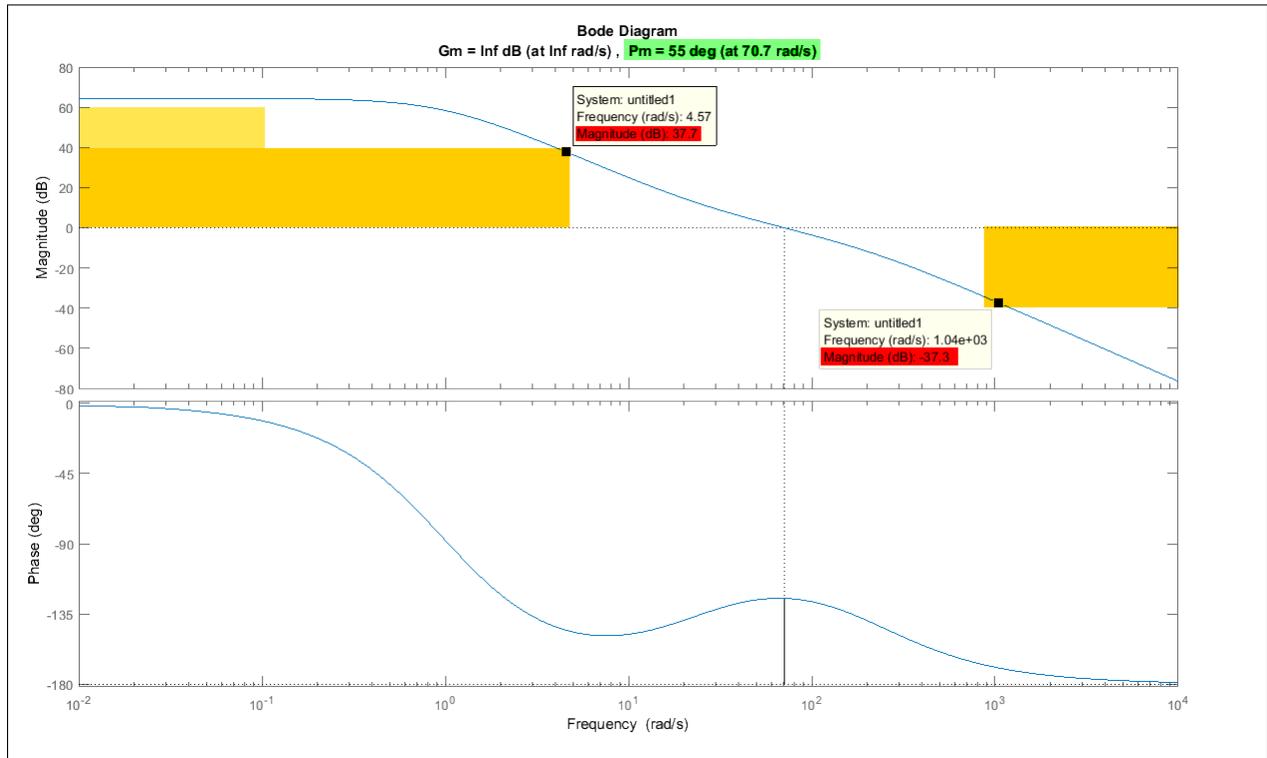


Figure IV.35 – Diagramme de bode de $(K.C(s).G(s))$

On remarque que le système réglé satisfait bien le cahier de charge.

$$R(s) = K.C(s)$$

2.3.2.2.3 Validation Validation de la commande Retour d'état avec Action intégrale

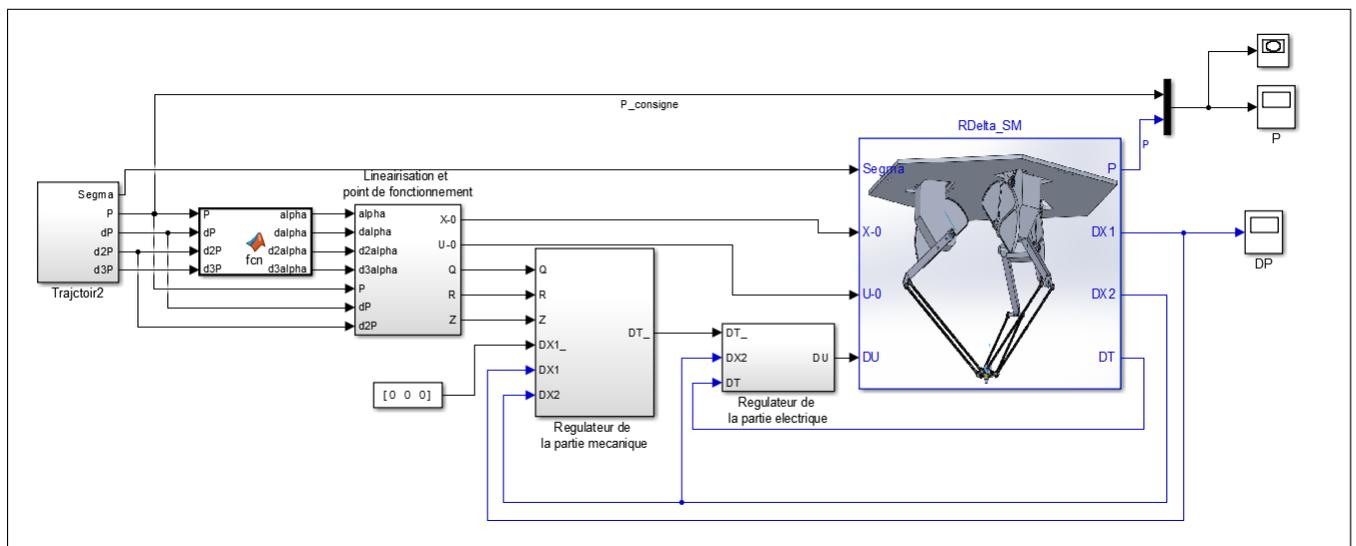


Figure IV.36 – Bloc Simulink de la commande RE avec Action integrale

Commentaires :

La figure IV.36 montre le schéma bloc de la régulation par retour d'état mais après le découplage. La régulation se fait en cascade. On commence par le réglage de la partie mécanique en utilisant un retour d'état, après on règle la partie électrique en imposant une dynamique rapide. L'entrée de la commande est injectée dans le robot delta et les signaux de sortie sont visualisés comme suit :

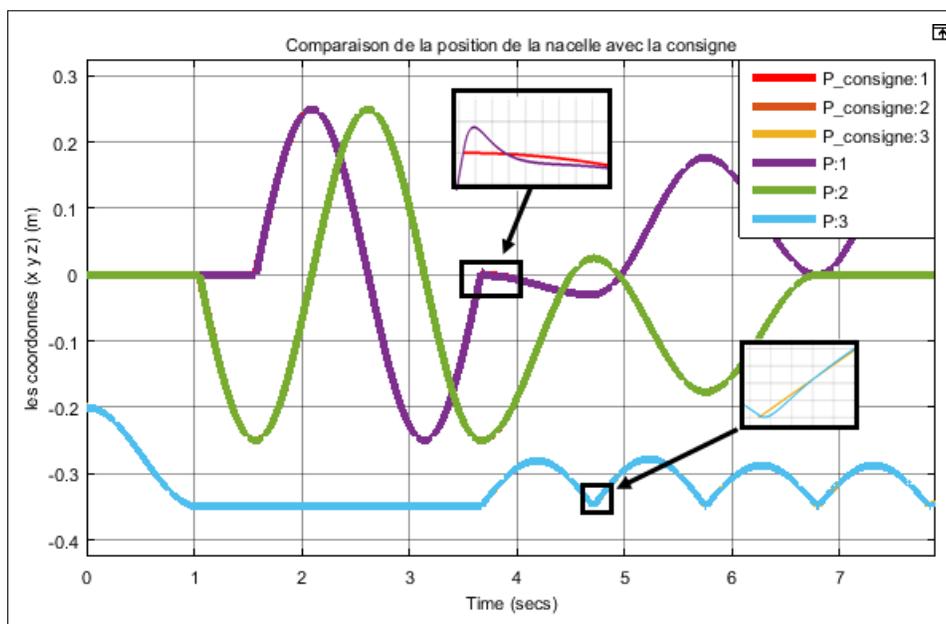


Figure IV.37 – La position de la nacelle

Commentaires :

La figure IV.37 montre la poursuite de la trajectoire, on voit bien que la nacelle suit la trajectoire avec des petites déviations au moments où la nacelle fait un changement brusque dans sa trajectoire.

Validation de la commande Retour d'état avec Loop shaping

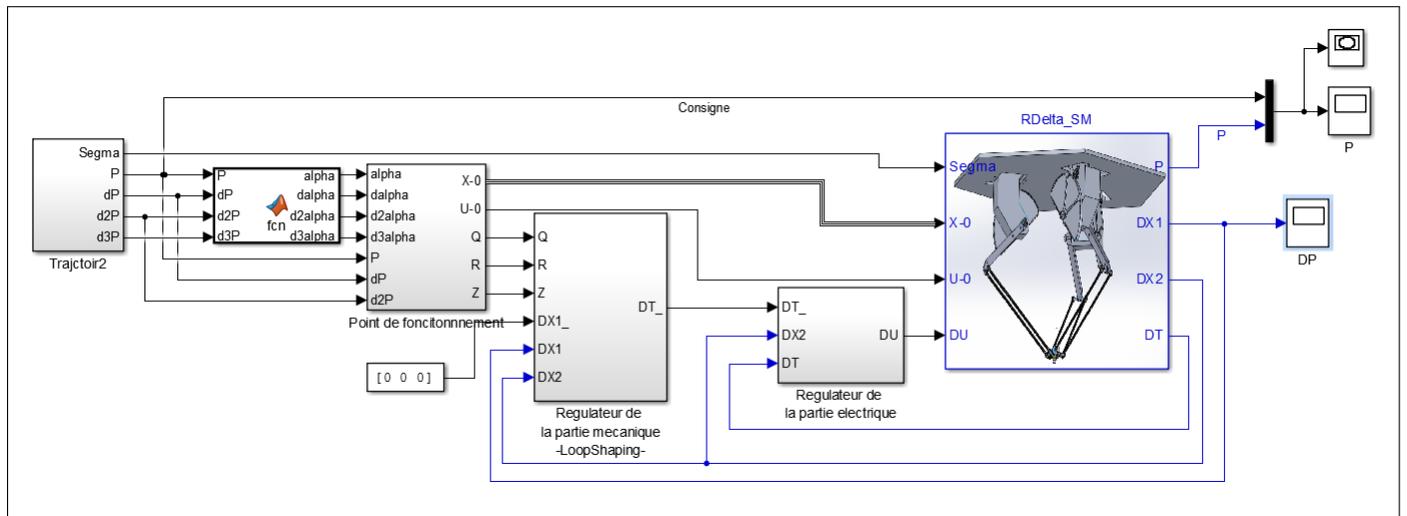


Figure IV.38 – Bloc Simulink de la commande RE avec AI après le découplage

Commentaires :

La figure IV.38 montre le schéma bloc de la régulation par retour d'état mais après le découplage. La régulation se fait en cascade. On commence par le réglage de la partie mécanique en utilisant la technique du loop-shaping, après on règle la partie électrique en imposant une dynamique rapide. L'entrée de la commande est injecté dans le robot delta et les signaux de sortie sont donnés par la figure suivante :

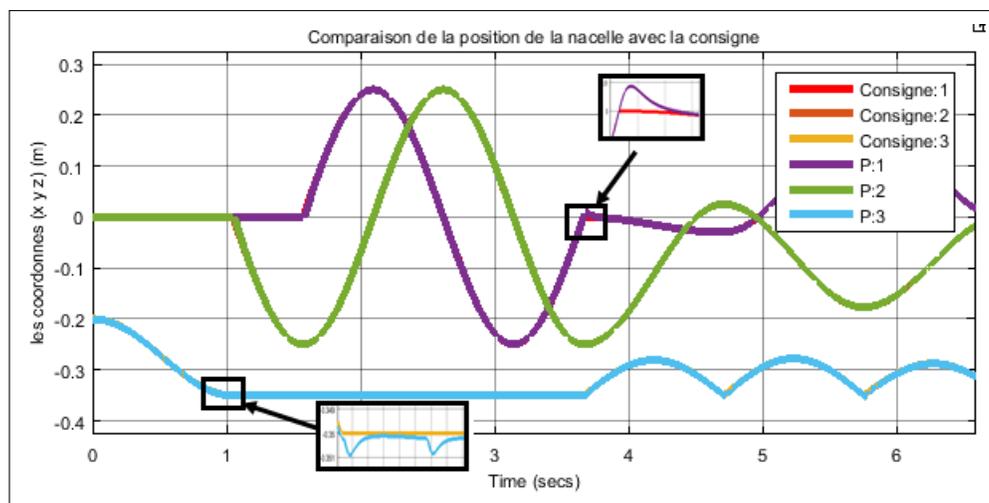


Figure IV.39 – La position de la nacelle

3 Etude comparative

Dans cette partie de notre travail nous comparons entre les différents commandes par rapport à :

- La poursuite
- La rapidité
- Rejet de perturbation de commande
- Rejet de bruits de capteurs
- Les erreurs de modélisation (la masse attachée)

On injecte des perturbations sur la commande et de bruits sur les variables mesurées :

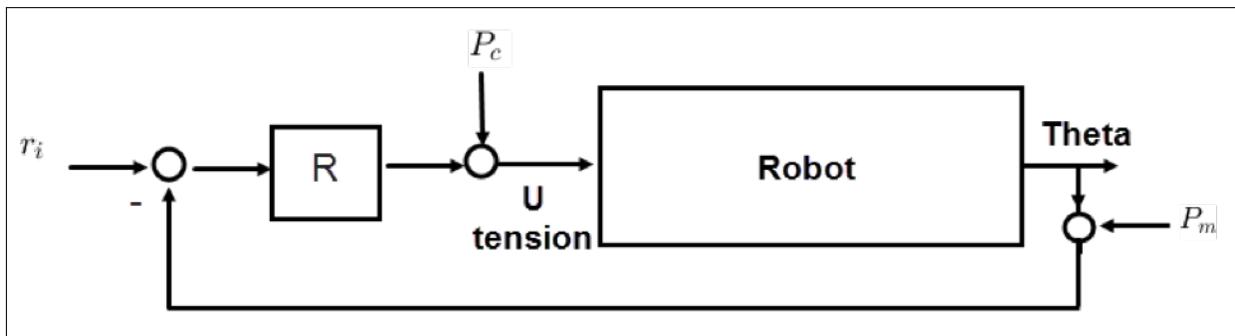


Figure IV.40 – Schéma de la commande avec les perturbations

Tel que :

P_c : perturbation sur la tension, cette dernière subit une perturbation composée de deux signaux, le premier signal est un échelon d'amplitude A qu'on l'injecte à l'instant $t=0.1$ sec, et le deuxième est un signal sinusoïdale à base fréquence ($f_1=10$) et d'amplitude A , injecté à l'instant $t=0.5$, cette perturbation a la forme suivante en prenant $A = 5$.

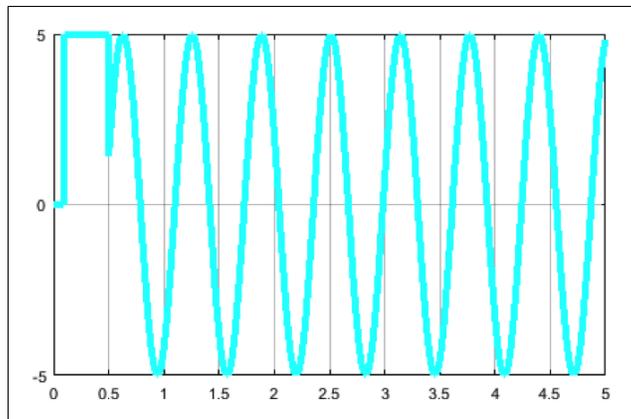


Figure IV.41 – Forme de la perturbation injectée

P_m : est un bruit de capteur, qui est de la forme $P_e=B*\sin (f_2*t)$ tel que $f_2 = 500$. Injecté à l'instant $t=1.2$ seconde.

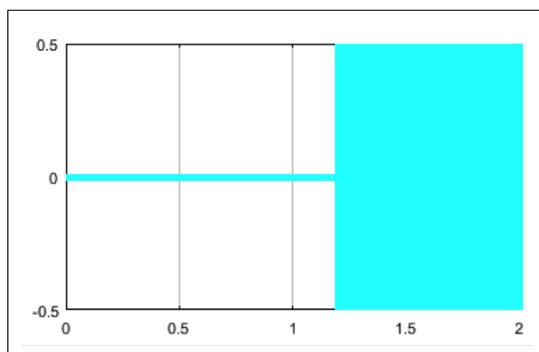


Figure IV.42 – Bruit de capteur

Mode de glissement Les perturbations P_c et P_m sont injectées comme indiquée dans la figure suivante :

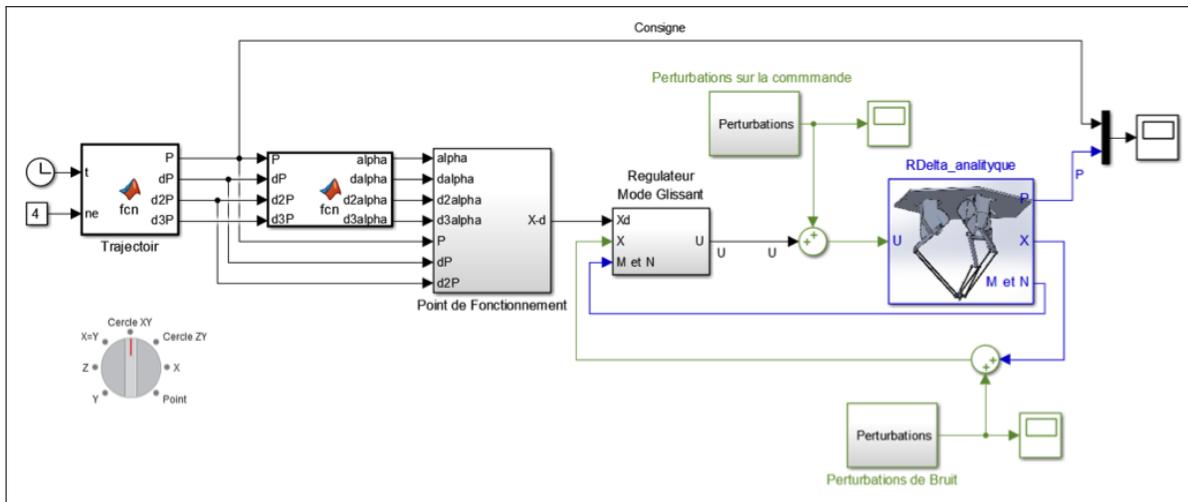


Figure IV.43 – Schéma de test de la robustesse pour la commande MG

P_m et P_c sont dans ce cas des vecteurs.

Simulation :

Nous avons testé la commande (mode glissant) pour plusieurs valeurs de A et B et pour plusieurs fréquences par exemple pour $A=B=0.1$ et $f_1=10$ et $f_2=500$ nous avons obtenu les graphes suivants de la position.

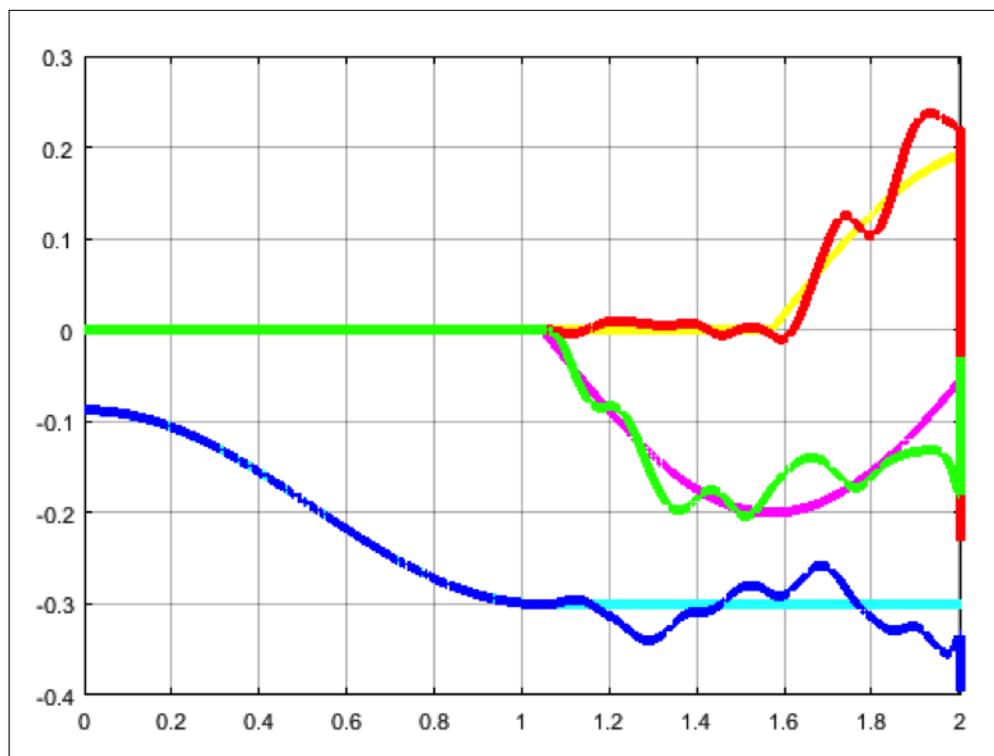


Figure IV.44 – Test de la poursuite sous la présence des perturbations

On remarque un bon rejet de perturbation de commande, mais on a une mauvaise poursuite quand le système est soumis à des bruits de capteur. On constate donc que cette commande n'est pas robuste.

Conclusion :

Le problème revient au choix de la surface de glissement, les résultats confirment qu'on a choisi une mauvaise surface de glissement.

Back-Stepping Les perturbations P_c et P_m sont injectées comme indiquée dans la figure suivante :

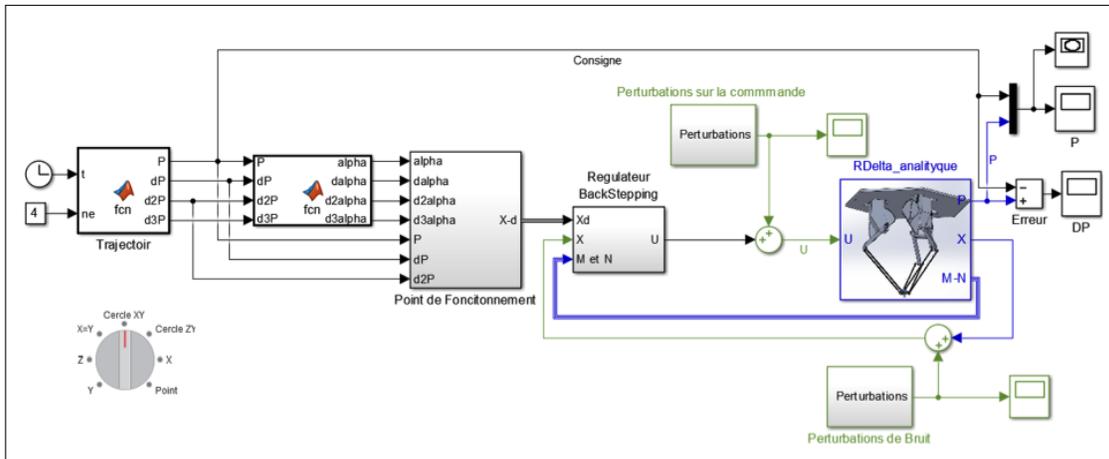
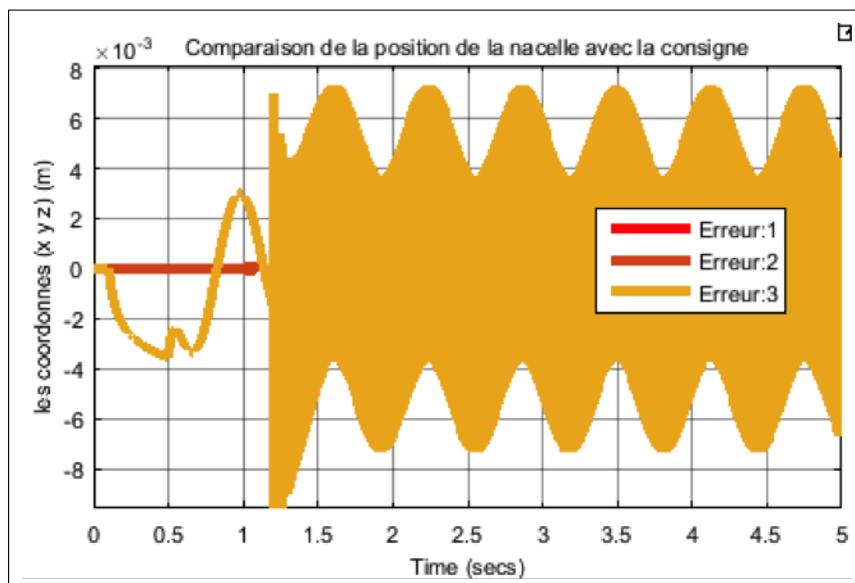
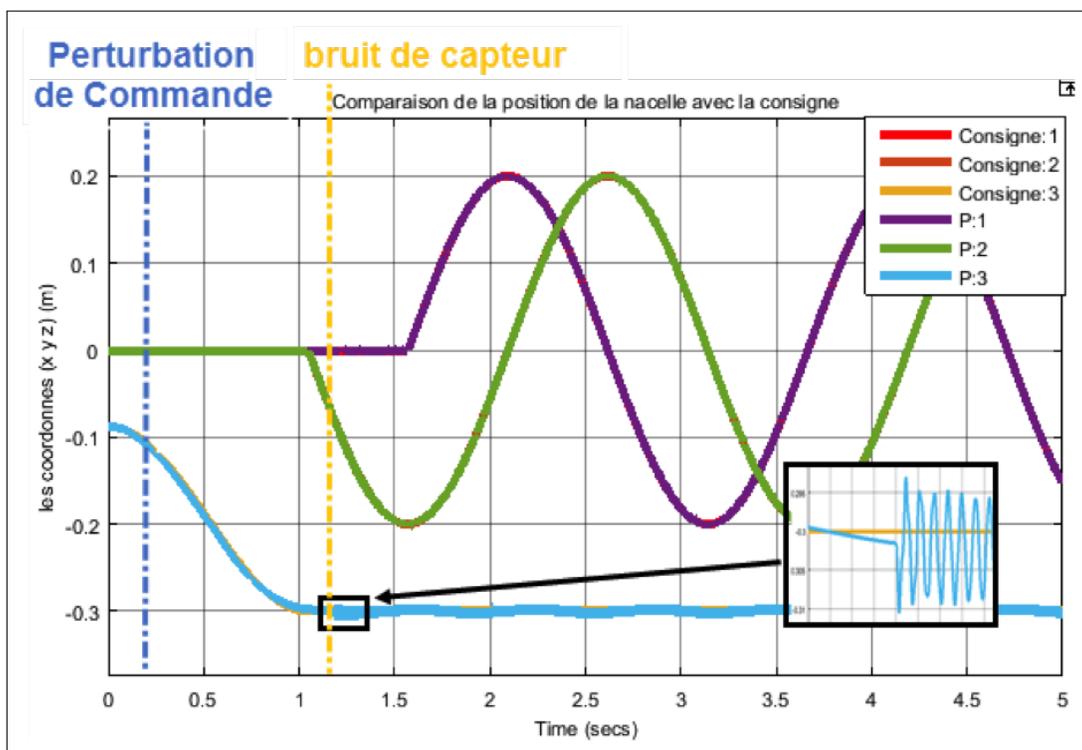


Figure IV.45 – Schéma de test de la robustesse pour la commande BS

Simulation :

Nous avons testé la commande (BackStepping) pour plusieurs valeurs de A et B et pour plusieurs fréquences, mais nous avons trouvé cette fois ci des bons résultats meme si $A=B=5$ et $f_1=10$ et $f_2=500$.



Les erreurs sont d'ordre 3. On remarque que les perturbations sur la commande et celle des capteurs ont été rejetés d'une manière parfaite, parce que le choix de $A=B=5$, signifie que le système subit du biais sur :

- Les tensions par une valeur de 5 v .
- Les positions angulaires sont perturbées par une valeur de 5 rad.
- Les vitesses angulaires sont perturbées par une valeur de 5 rad/sec.
- Les courants sont décalées par une valeur de 5A.

Les perturbations en réalité sont négligeables par rapport à ces valeurs choisies en simulation. On constate donc que la commande BackStepping a été très performante et robuste.

Inconvénients Les tension présentent le phénomène de broutement (Chattering) :

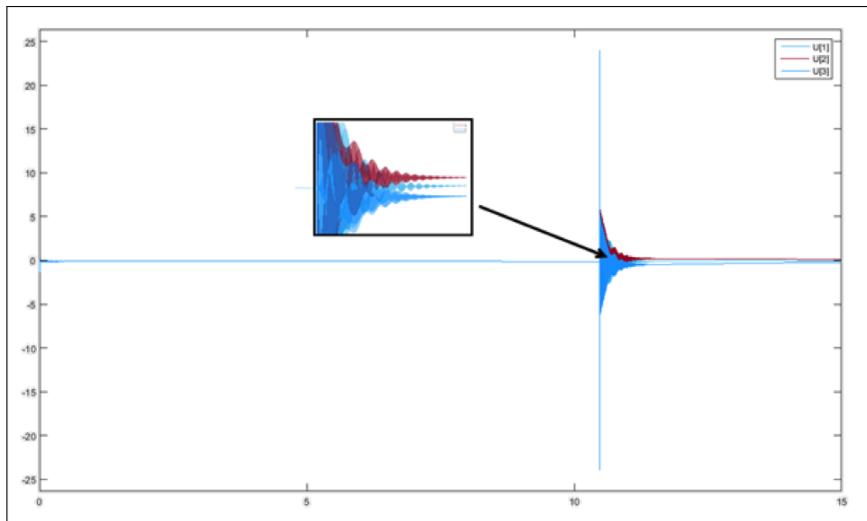


Figure IV.46 – Phénomène du broutement

C'est un phénomène qui peut endommager les moteurs.

Gain préprogrammé Les perturbations P_c et P_m sont injectées comme indiquée dans la figure suivante :

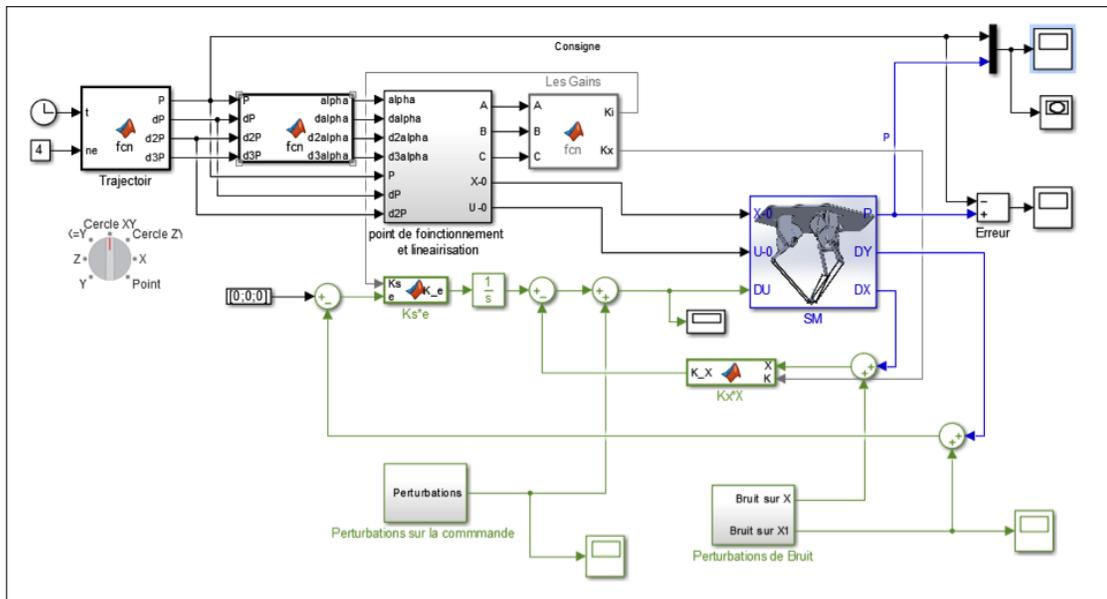


Figure IV.47 – Schéma de la commande sous la présence des perturbations

Simulation :

La comparaison des coordonnées (x y z) de la nacelle avec la consigne nous a donnée les résultats suivants pour $A=B=5$ et $f1=10$ et $f2=500$:

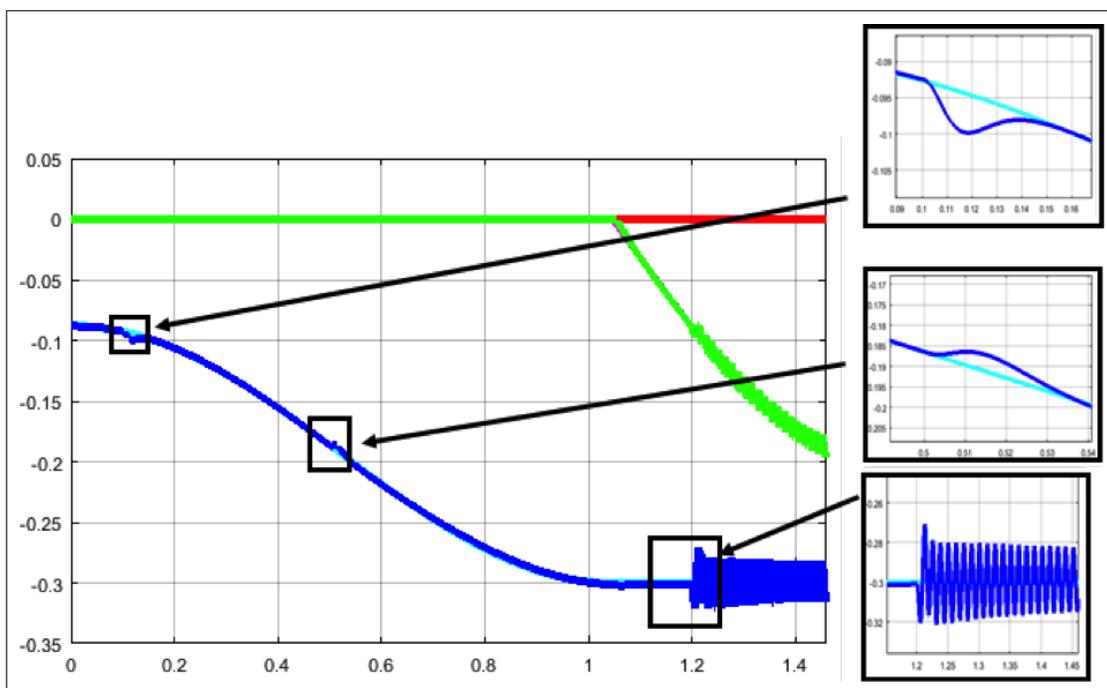


Figure IV.48 – Poursuite de la trajectoire sous la présence des perturbations

C'est la remarque que nous avons citée pour les résultats de la commande par BackStepping. On constate donc que la commande par Gain Préprogrammé a été très performante et robuste. Mais à un degré moindre par rapport à la commande par BackStepping.

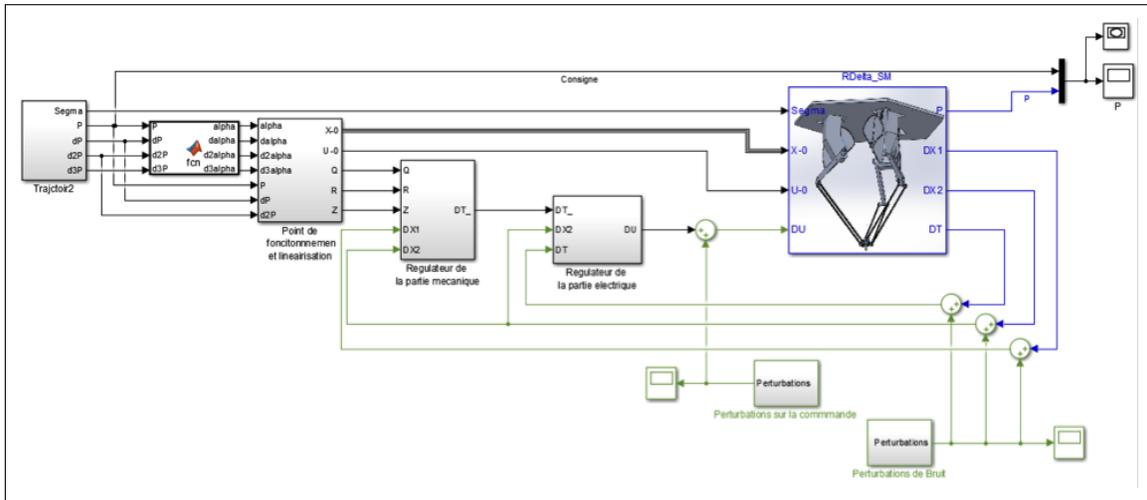


Figure IV.49 – Schéma de réglage sous la présence des perturbations

Reglage en cascade (Retour d'état avec action intégrale) Simulation :

La comparaison des coordonnées (x y z) de la nacelle avec la consigne nous a donnée les résultats suivants pour $A=B=5$ et $f_1=10$ et $f_2=500$:

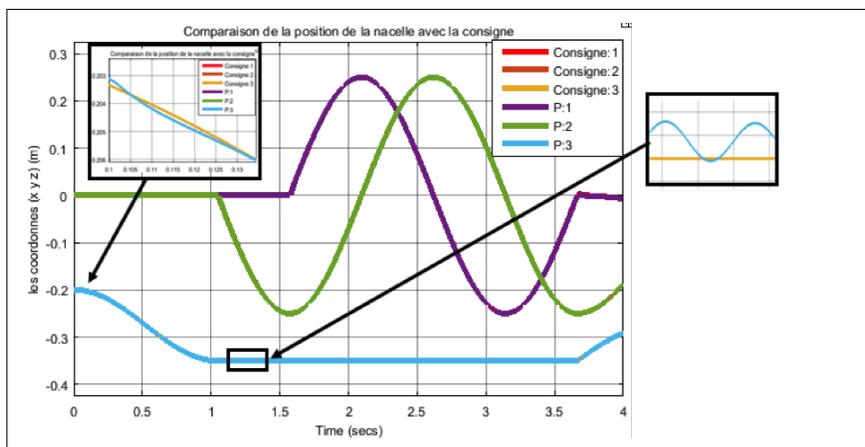
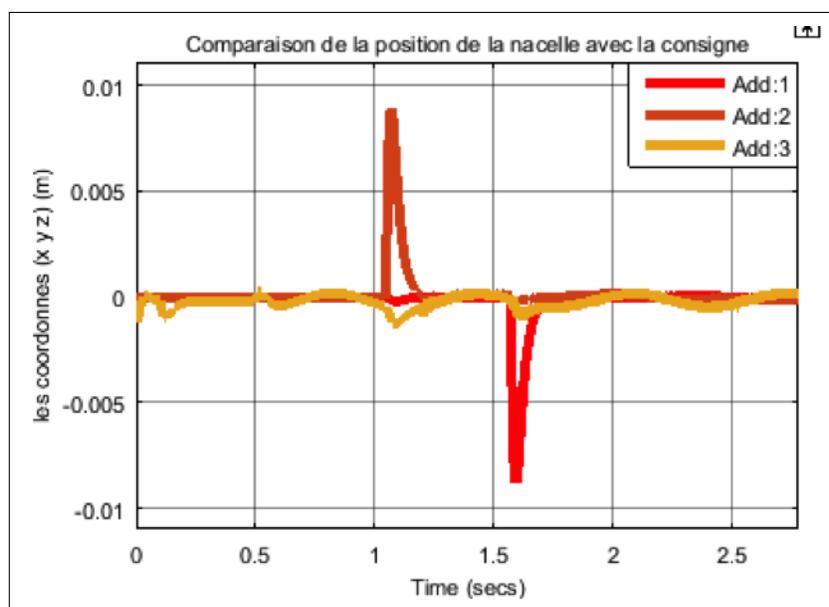
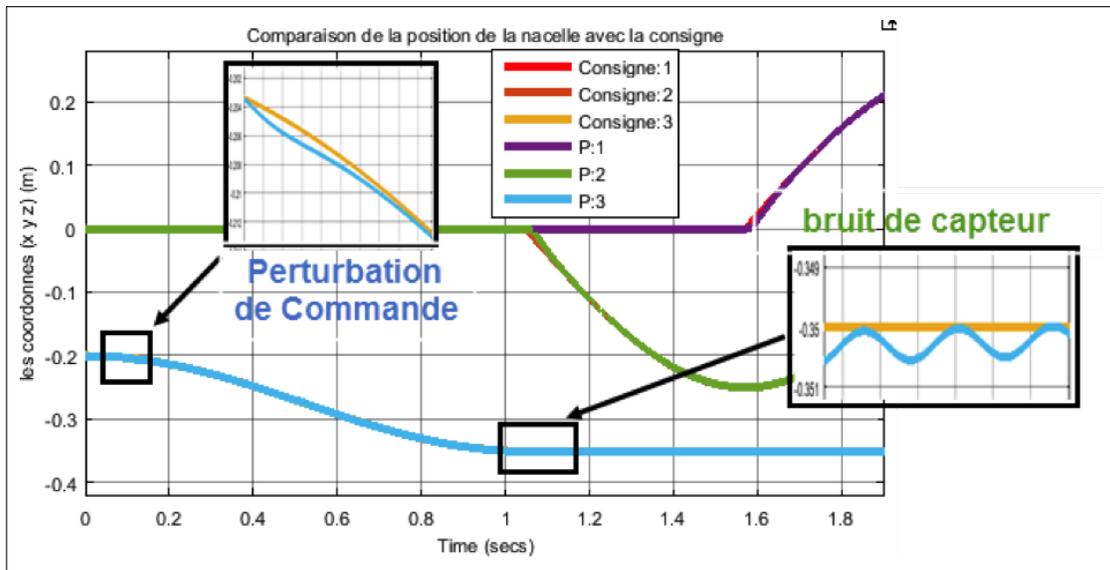


Figure IV.50 – Poursuite de la trajectoire sous la présence des perturbations

Cette fois ci les résultats confirment que la commande RE avec action intégrale est la meilleure jusqu'à maintenant. En effet on remarque une bonne poursuite, et que les perturbations presque n'ont aucune influence sur le réglage de la position. On constate donc que le réglage en cascade (RE avec Action intégrale) a satisfait les performances désirées en rejet de perturbation sur la commande et celle des capteurs d'une manière beaucoup mieux que les commandes précédentes.

Réglage en cascade (Retour d'état avec LoopShaping) La simulation nous a donnée les résultats suivants pour les mêmes paramètres $A=B=5$ et $f_1=10$ et $f_2=500$:



C'est la même remarque et la même constatation que celles citées pour la commande du Retour d'état avec action intégrale.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons synthétisé plusieurs types de de commande pour le robot delta. Nous avons commencé par appliquer des commandes non linéaires, notamment la commande par mode de glissement et la commande par back stepping. Les résultats obtenus sont très satisfaisantes en terme de stabilité et poursuite. Ensuite, nous avons fait une linéarisation du modèle d'état, ce qui nous a permis d'appliquer des commandes linéaires telles que : le retour d'état avec action intégrale. Après la linéarisation, nous avons synthétisé un réglage en cascade en séparant les deux parties électrique et mécanique. Pour la partie mécanique, nous avons pu faire un découplage, ce qui nous a permis d'imposer une dynamique désirée et puis appliquer des commandes linéaires

comme le retour d'état avec action intégrale et le retour d'état avec loop shaping. D'après les résultats obtenus, on constate que les commandes linéaires sont plus performantes et adaptées au robot delta que celles non linéaires. En effet la commande par mode glissant est apparue la moins performante à cause du mauvais choix de la surface de glissement. Le BackStepping a été performante en rapidité et en poursuite et robuste vis à vis les perturbations, mais présente le problème de broutement au niveau des tensions. Donc c'est une commande qui n'est pas adaptée au robot. D'un autre côté, les commandes linéaires donnent des performances élevées en rapidité et poursuite. Elles présentent également une robustesse par rapport aux erreurs de modélisation, de perturbations sur la commande et de bruits de capteurs.

Chapitre V

Estimation et observation

1 Estimation de la masse porté par la nacelle

Le but de réaliser un tel estimateur est d'augmenter la robustesse de la commande dans le cas où nous avons des grandes variations de la masse sur la nacelle. L'objectif est de réaliser un estimateur qui peut estimer la masse portée par la nacelle à partir des variables mesurées X_1 , X_2 et X_3 et la tension. Pour

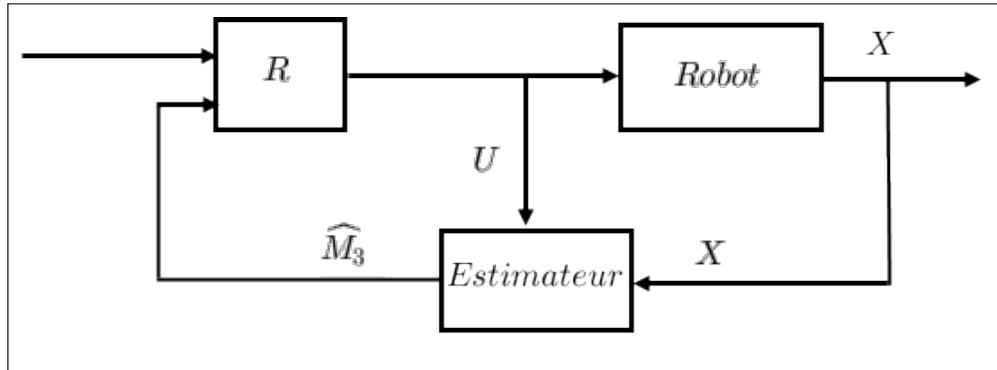


Figure V.1 – L'estimateur de masse

satisfaire cet objectif, on cherche un paramètre mesuré (ou bien estimé à partir des grandeurs mesurées, X_1 , X_2 , X_3) dont la forme est : $y = M_3 \cdot Z$ tel que Z est un paramètre bien connu et ne dépend pas de M_3 .

On peut trouver une telle relation dans les expressions des couples C_i . Le couple C_i peut être écrit de la manière suivante :

$$C_i = M_3 \cdot C_{i1} + C_{i2} \quad (V.1)$$

Tel que C_{i1} et C_{i2} sont connus et ne dépendent pas de M_3 . Si on pose $y_i = C_i - C_{i2}$ alors $Z_i = C_{i1}$ d'où $y_i = M_3 Z_i$.

C_i est connu ($C_i = 12T_i = 12K_i X_3(i)$). Il reste à calculer C_{i1} et C_{i2} .

Rappelons que $C_i = Ca_i - Cg_i$, donc on doit écrire Ca_i et Cg_i de la même forme que C_i .

$$Ca_i = M_3 Ca_{i1} + Ca_{i2}$$

$$Cg_i = M_3 Cg_{i1} + Cg_{i2}$$

$$C_{i1} = Ca_{i1} - Cg_{i1} \quad C_{i2} = Ca_{i2} - Cg_{i2}$$

1. La mise en forme de Cg_i :

Rappelons que : $Cg_i = E_2 \cdot AC_i(\vec{N} + \vec{Z}_{ixz})$ (modèle dynamique).

\vec{N} ne dépend pas de M_3 au contraire avec \vec{Z}_{ixz} donc on développe \vec{Z}_{ixz} .

$$\vec{Z}_{ixz} = B_i \vec{Z}_i = B_i(E_i \vec{Z}) \vec{u}_i = B_i(E_i \cdot U^{-1} \vec{N}_4) \vec{u}_i.$$

On connaît déjà que : $\vec{N}_4 = 3\vec{N}_2 + \vec{N}_3$ tel que N_2 ne dépend pas de M_3 , au contraire avec \vec{N}_3 qui est égale à $-M_3 \cdot \mathbf{g} \cdot E_3^T$ ($E_3 = [0, 0, 1]^T$).

Donc on peut écrire :

$$Cg_i = E_2 \cdot AC_i \cdot \vec{N} + E_2 \cdot AC_i \cdot B_i (E_i \cdot U^{-1} \cdot 3\vec{N}_2) \vec{u}_i - E_2 \cdot AC_i \cdot B_i (E_i \cdot U^{-1} \cdot E_3^T) \vec{u}_i \cdot \mathbf{g} \cdot M_3$$

$$Cg_i = Cg_{i2} + Cg_{i1} M_3$$

2. La mise en forme de Ca_i :

On a trouvé que :

$$Ca_i = J_1 \ddot{\alpha}_i + G_{i1} \ddot{OP} + G_{i2} (\ddot{OC}_j + \ddot{OC}_k) + G_{i3} \ddot{OC}_i$$

Le seul terme qui dépend de M_3 est G_{i1} :

$$G_{i1} = a_3 (E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) (E_i \cdot U^{-1}) + a_1 \cdot E_2 \cdot AC_i \cdot B_i$$

$$\text{Tel que : } a_3 = M_3 + 3 \left(\frac{M_2}{4} + \frac{M_4}{2} \right) = M_3 + 3a_2$$

Donc en posant :

$$G_{i1}^* = 3a_2 (E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) (E_i \cdot U^{-1}) + a_1 E_2 \cdot AC_i \cdot B_i$$

$$\text{Et } G_{i1}^{**} = (E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) (E_i \cdot U^{-1})$$

$$\text{Alors } G_{i1} = G_{i1}^* + G_{i1}^{**} \cdot M_3$$

Finalement on trouve :

$$Ca_i = J_1 \ddot{\alpha}_i + G_{i1}^* \ddot{OP} + G_{i2} (\ddot{OC}_j + \ddot{OC}_k) + G_{i3} \ddot{OC}_i + G_{i1}^{**} \ddot{OP} \cdot M_3 \quad (\text{V.2})$$

Les termes Ca_{i1} , Ca_{i2} , Cg_{i1} , Cg_{i2} sont calculés à partir du vecteur d'état mesuré (X_1, X_2, X_3) .

Ainsi $y_i = M_3 \cdot Z_i$ a été calculé. y_i et Z_i sont calculés à partir du vecteur d'état (X_1, X_2, X_3) .

- Z_i peut être nul pour certains instants. Donc M_3 n'est plus défini à cet instant, c.à.d on ne peut pas connaître sa valeur.

- Solution : la grandeur y_i représente en réalité le couple que doit fournir chaque avant-bras pour que la masse bouge avec une accélération désirée. C'est évident que les couples y_1 , y_2 et y_3 ne peuvent pas être nuls en même temps, sauf si on veut que la nacelle soit libre (il n'y a pas de forces appliquées) ce qui n'est pas un cas intéressant.

Donc si on prend la variable mesurée suivante : $y = y_1 + y_2 + y_3$ alors :

$y = Z.M_3$ tel que $Z = Z_1 + Z_2 + Z_3$. Le couple y (ou bien Z) ne peut pas être nul.

- Algorithme d'estimation :

$$y = Z.M_3$$

Soit l'estimateur suivant : $\hat{y} = Z.\hat{M}_3$ et l'erreur $e = y - \hat{y}$; $\Delta M = M_3 - \hat{M}_3$.

On veut que $\Delta \dot{M} = -l.\Delta M$ alors $\hat{M}_3 \rightarrow M_3$. D'autre coté on a :

$$\begin{cases} \Delta \dot{M} = \frac{d}{dt}(M_3 - \hat{M}_3) = -\dot{\hat{M}}_3 \\ e = y - \hat{y} = Z(M_3 - \hat{M}_3) \implies \Delta M_3 = \frac{e}{Z} \end{cases}$$

On conclut donc que si $\dot{\hat{M}}_3 = l \frac{e}{Z}$ alors $\hat{M}_3 \rightarrow M_3$

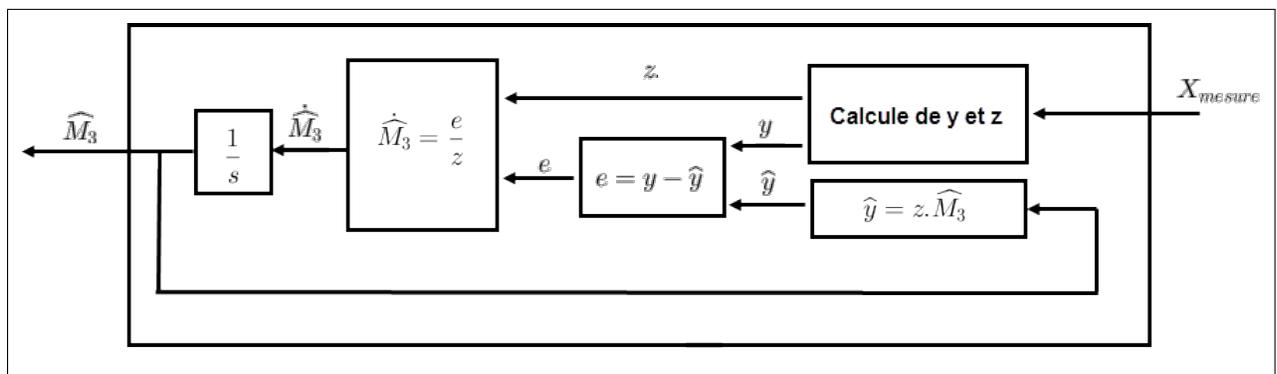


Figure V.2 – L'estimateur de la masse

1.1 Validation

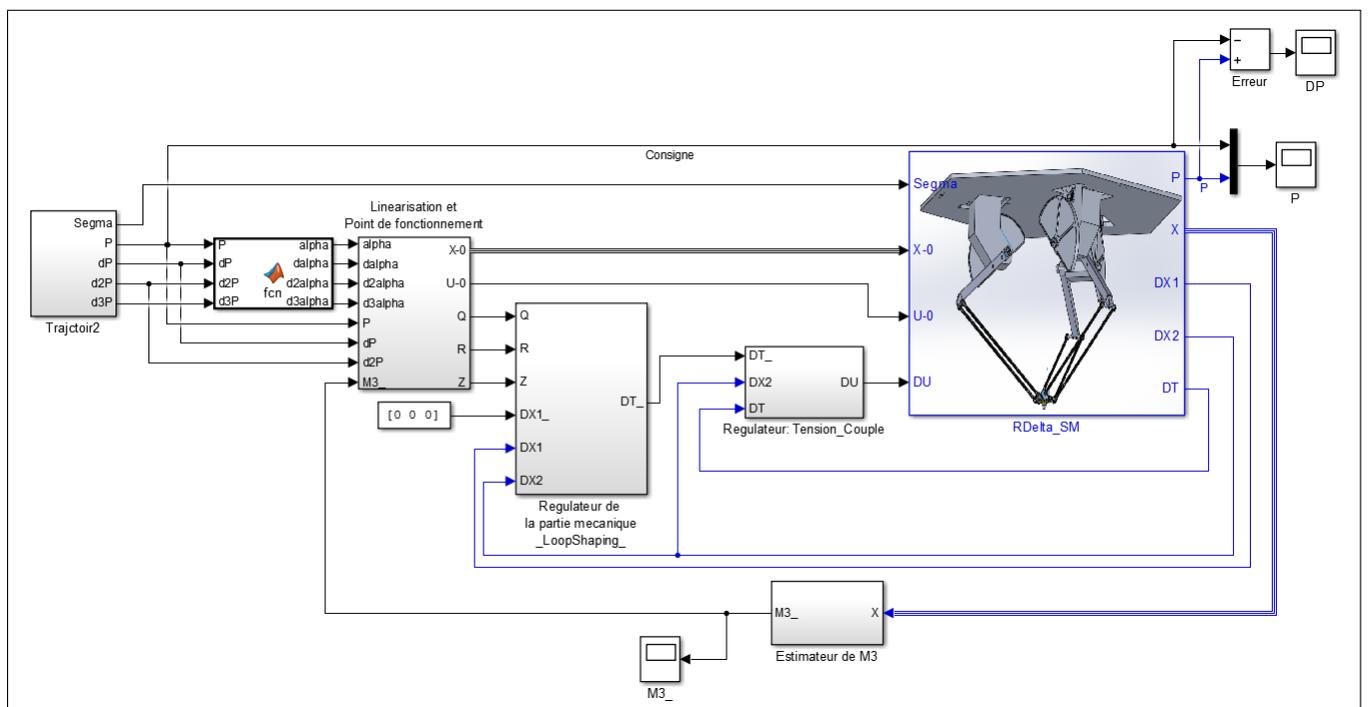


Figure V.3 – Bloc Simulink pour l'estimation de la masse

Commentaires :

Dans ce schéma on montre l'estimateur de la masse que nous avons construit.

Comme montre la figure, l'estimateur de masse (le bloc en bas), prend comme entrée le vecteur d'état X , sa sortie nous fournit la masse estimée. Il est à noter que la masse a été attachée à la nacelle en utilisant un bloc de masse sous SimMechanics comme montre la figure suivante :

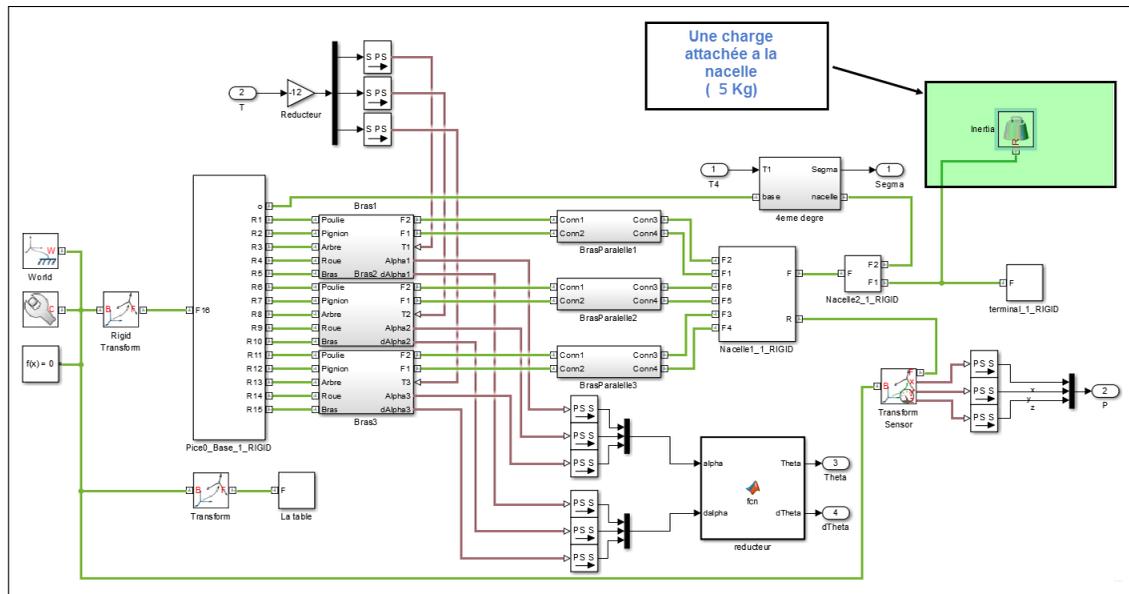


Figure V.4 – La masse ajoutée

Simulation :

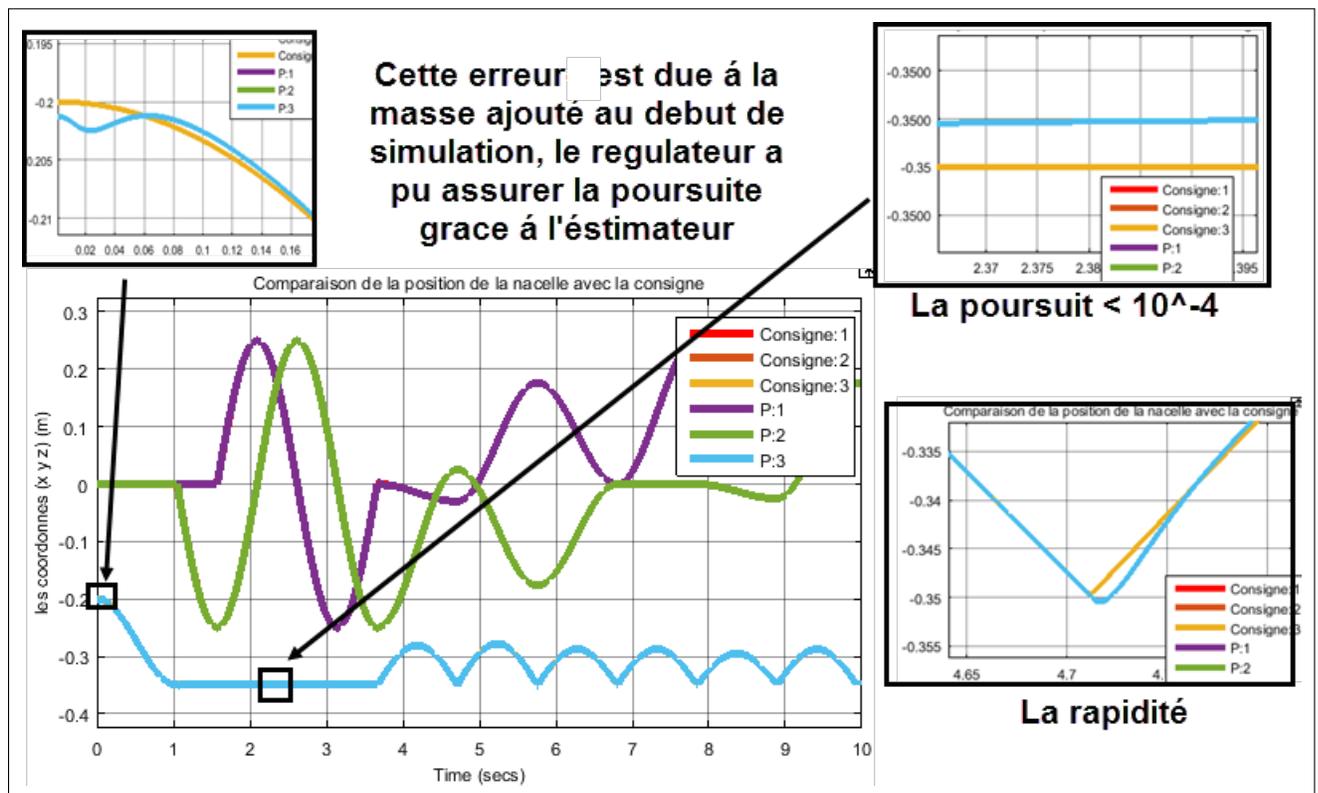


Figure V.5 – Validation de la position

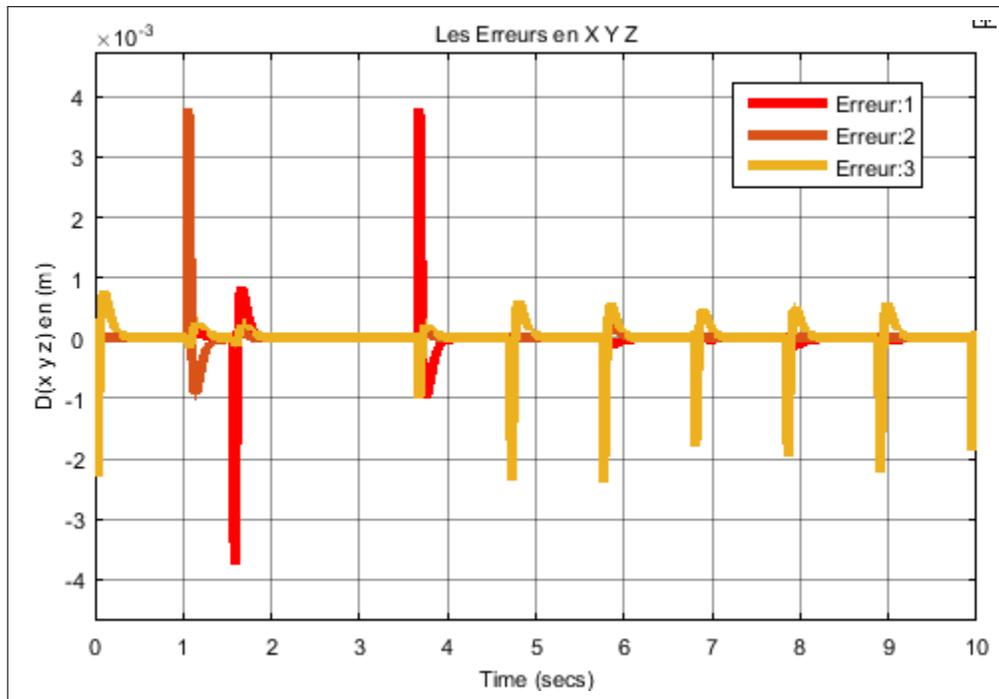


Figure V.6 – Erreur sur l'estimateur de la masse

Commentaires :

Les deux figures V.5 et V.6 reflètent les performances de l'estimateur de masse. Il est à noter qu'on a utilisé une masse supplémentaire de **5Kg** (la nacelle pèse **34g**), cette valeur est exagérée, mais on a comme même utilisé une valeur assez grande pour monter les performances de l'estimateur. Comme montre la 1ère figure, la nacelle suit bien la trajectoire de prise/dépose. Les pics dans la figure des erreurs correspondent aux changements brusques dans la trajectoire de la nacelle. Il faut aussi remarquer qu'au début de la trajectoire il y avait une erreur de position, cette erreur est due à la masse qui a été mise au début de la simulation.

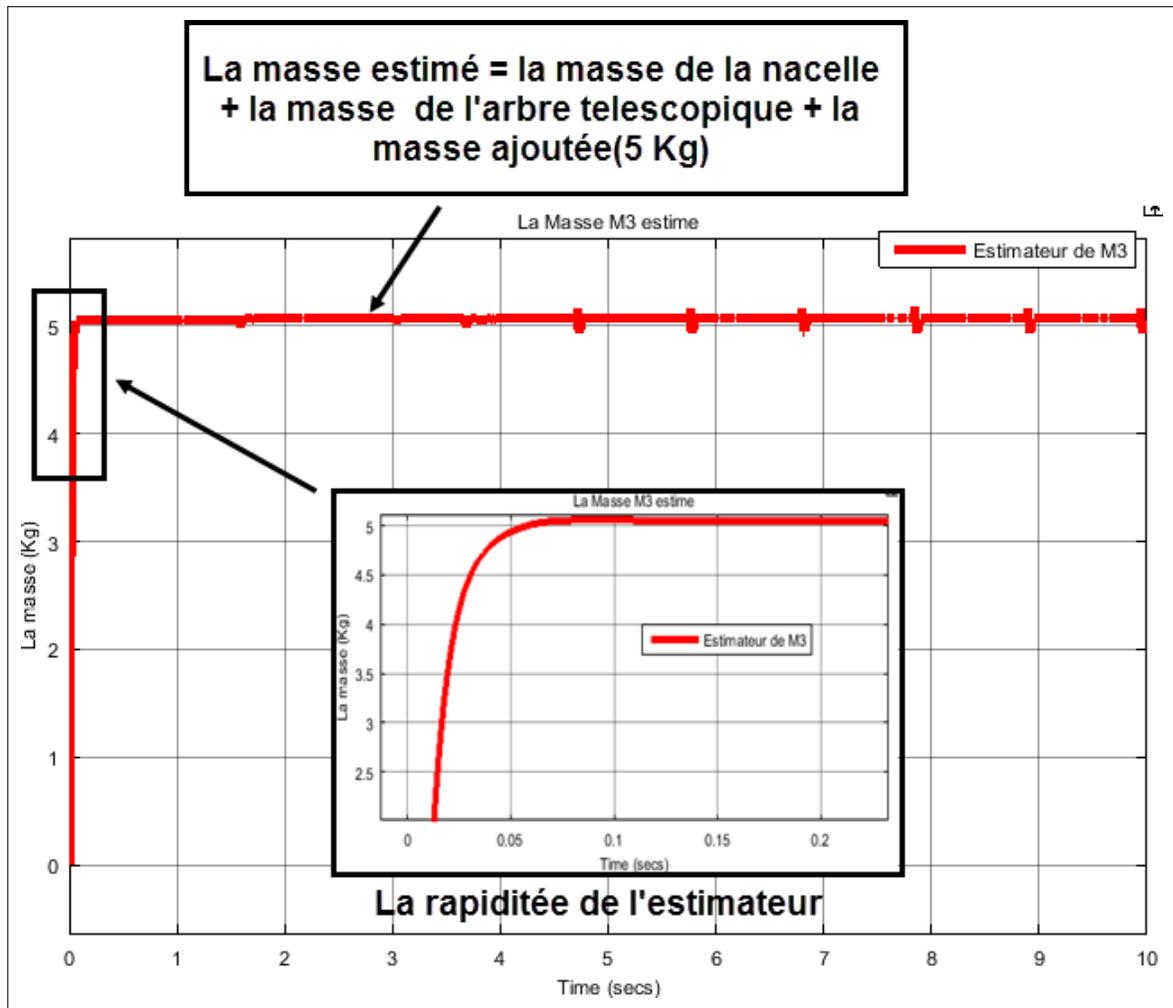


Figure V.7 – Validation de la position

Commentaires :

Cette figure (V.7) montre la convergence vers la masse. On remarque que l'estimateur est rapide dans son estimation de la masse ajoutée. Il est aussi important de noter que la masse estimée comporte la masse de la nacelle, la masse de l'arbre télescopique et la masse ajoutée (5Kg). Cette figure montre que notre estimateur a des bonnes performances en terme de convergence et de rapidité.

2 Estimateur de masse avec observateur du courant

L'estimateur précédent est basé sur le retour d'état dont le courant a été considéré mesurable, ce qui n'est pas vrai pour notre cas. Alors dans cette partie nous allons estimer la masse de la nacelle et observer le courant X_3 .

Dans la partie précédente on a trouvé que :

$$C_i = C_{i1}M_3 + C_{i2}$$

On sait que $C_i = 12T_i = 12K_i.I_i = a.I_i$.

$$C_{i2} = aI_i - C_{i1}M_3.$$

On remarque que :

- a : constante connue.
- C_{i1}, C_{i2} : variables connues.
- I_i : variable inconnue
- M_3 : constante inconnue

Soit $y_{i1} = C_{i2}$ alors :

$$y_{i1} = a.I_i - C_{i1}M_3$$

On a besoin d'un autre paramètre mesuré y_{i2} de la même forme.

En dérivant y_{i1} : $\dot{y}_{i1} = a.\dot{I}_i - \dot{C}_{i1}M_3$.

Rappelons que l'équation électrique du moteur est donné par :

$$\dot{I}_i = b_2\dot{\theta}_i + b_1.I_i + b_3.u_i$$

En la substituant on trouve :

$$\dot{y}_{i1} = a.b_2.\dot{\theta}_i + a.b_1.I_i + a.b_3.u_i - \dot{C}_{i1}M_3$$

En posant $y_{i2} = \dot{y}_{i1} - a.b_2.\dot{\theta}_i - a.b_3.u_i$ on obtient :

$$y_{i2} = a.b_1.I_i - \dot{C}_{i1}M_3$$

y_{i2} est un paramètre qu'on peut le calculer à partir du retour d'état X_1, X_2 et \dot{X}_2 (on obtient \dot{X}_2 en dérivant X_2 numériquement).

Pour augmenter la précision de calcul, on prend les deux paramètres y_1 et y_2

suivants :

$$y_1 = y_{11} + y_{21} + y_{31} = a(I_1 + I_2 + I_3) - (C_{11} + C_{21} + C_{31})M_3$$

$$\text{et } y_2 = y_{12} + y_{22} + y_{32}$$

Si on pose $SI = I_1 + I_2 + I_3$ et $SC = C_{11} + C_{21} + C_{31}$ alors on trouve :

$$\begin{aligned} y_1 &= a.SI - SC.M_3 \\ \text{et } y_2 &= a.b_1.SI - \dot{S}C.M_3 \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Les estimateurs :

$$\begin{cases} y_1 = a.SI - SC.M_3 \\ y_2 = a.b_1.SI - \dot{S}C.M_3 \end{cases}$$

Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $y = \phi.P$.

$$\phi = \begin{pmatrix} a & -SC \\ a.b_1 & -\dot{S}C \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} SI \\ M_3 \end{pmatrix}$$

ϕ : matrice des mesures.

Soit l'estimateur : $\hat{y} = \hat{\phi}.P$ et soit l'erreur $\begin{cases} e = y - \hat{y} \\ \Delta P = P - \hat{P} \end{cases}$.

On veut que $\dot{\Delta P} = -l.\Delta P$.

$$e = y - \hat{y} = \phi.\Delta P \quad \implies \quad \Delta P = \phi^{-1}.e$$

Ans : $\dot{\Delta P} = -l.\phi^{-1}.e$ ($l > 0$), d'autre coté $\dot{\Delta P} = \dot{P} - \dot{\hat{P}}$.

Il résulte que si : $\dot{\hat{P}} = \dot{P} + l.\phi^{-1}.e$ alors : $\hat{P} \longrightarrow P$.

$\dot{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{i} \end{pmatrix}$: on la considère comme erreur de modélisation d'observateur et on la rejète en augmentant l ($l \gg 0$).

Finalement, si $\dot{\hat{P}} = l.\phi^{-1}.e$ alors $\hat{P} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} SI \\ M_3 \end{pmatrix}$. Après avoir obtenu \hat{M}_3 (bien estimé), on retrouve les courants :

$$\begin{cases} \hat{I}_1 = (y_{11} + C_{11}\hat{M}_3)\frac{1}{a} \\ \hat{I}_2 = (y_{21} + C_{21}\hat{M}_3)\frac{1}{a} \\ \hat{I}_3 = (y_{31} + C_{31}\hat{M}_3)\frac{1}{a} \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

2.1 Validation

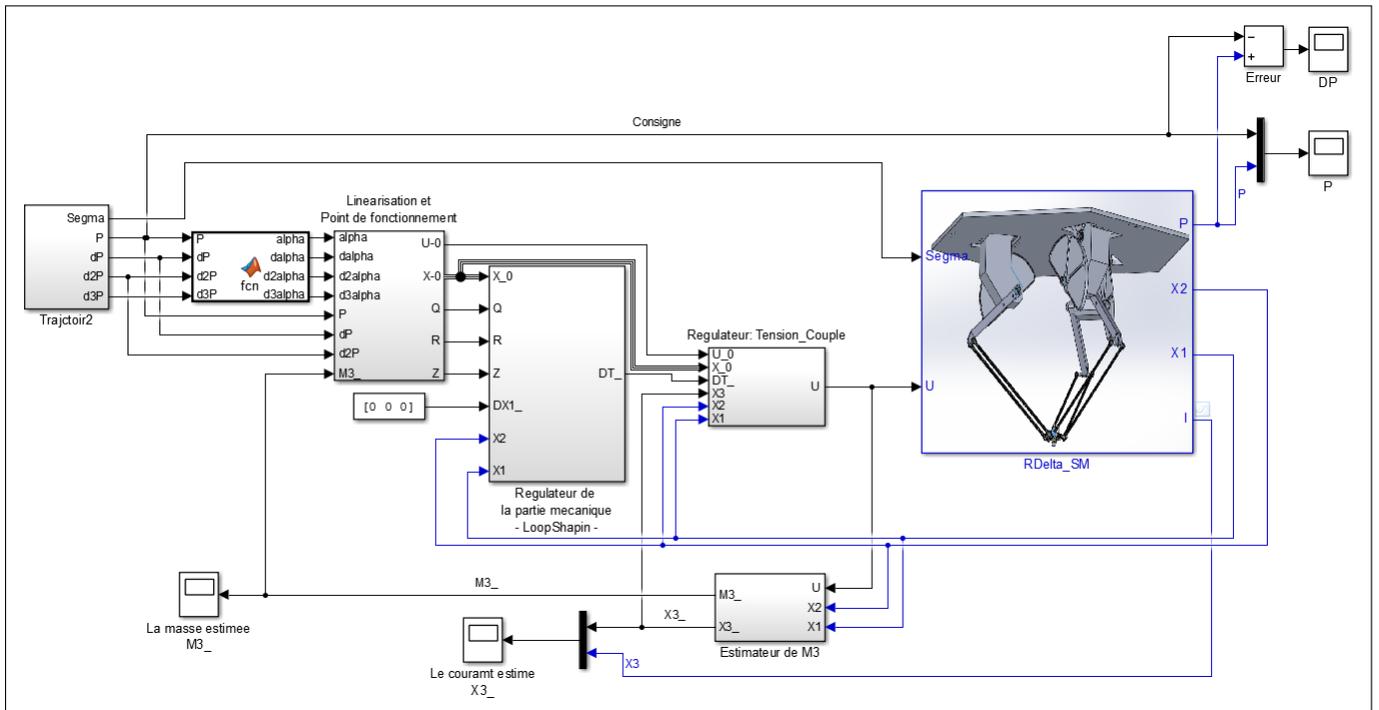


Figure V.8 – Bloc Simulink pour l’estimation de la masse et du courant

Commentaires :

Pour estimer la masse on doit avoir accès à toutes les variables d’état, y compris le courant. Dans le schéma bloc ci-dessus, on a réalisé un observateur de courant pour qu’on puisse l’utiliser afin d’estimer la masse. Le schéma est presque identique avec celui de l’estimateur de masse. La seule différence est la présence d’un observateur de courant en plus de l’estimateur de masse. La position et l’erreur sont donnés par les figures suivantes :

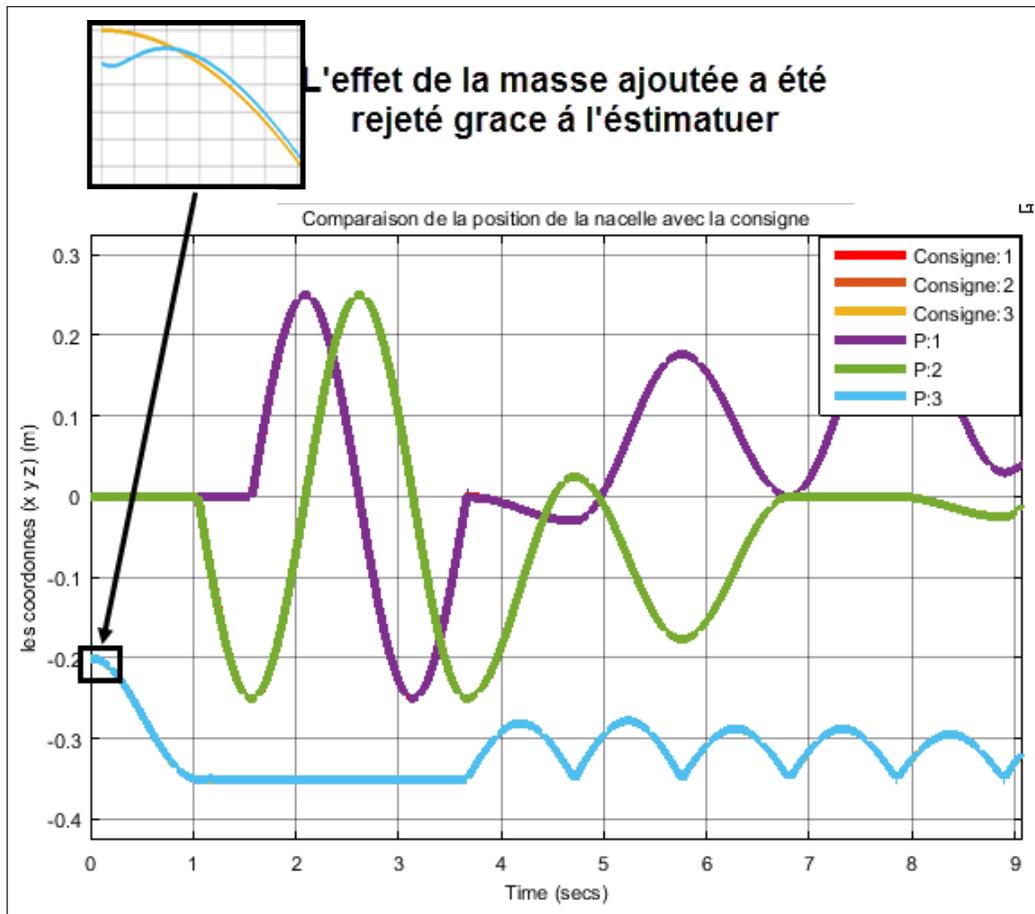


Figure V.9 – Validation de la position

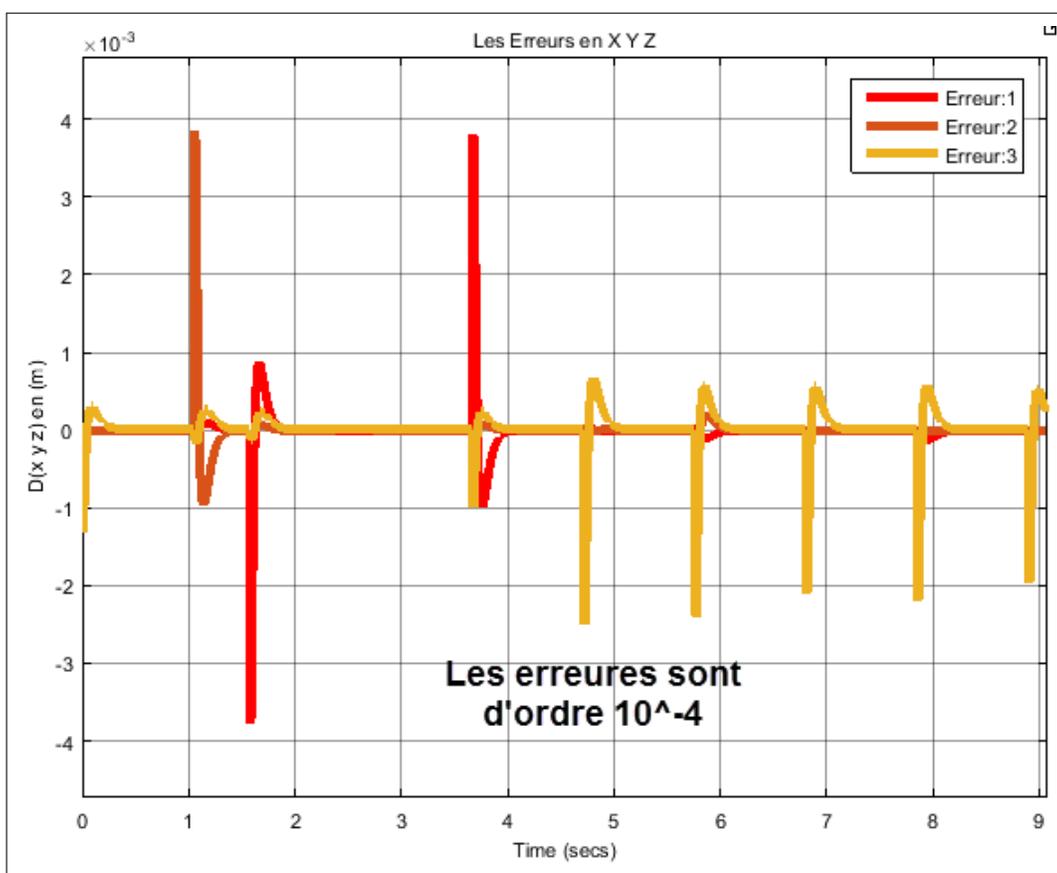


Figure V.10 – Observation du courant

Commentaires :

Les deux figures V.9 et V.10 illustrent la position de la nacelle et l'erreur sur la position. On remarque que les graphes de la position sont quasi identiques avec les consignes. Grace à l'estimateur qu'on a conçu, l'effet de la masse ajoutée a été rejeté. On remarque aussi que l'erreur est de l'ordre de 10^{-3} ce qui confirme les bons résultats donnés par notre estimateur.

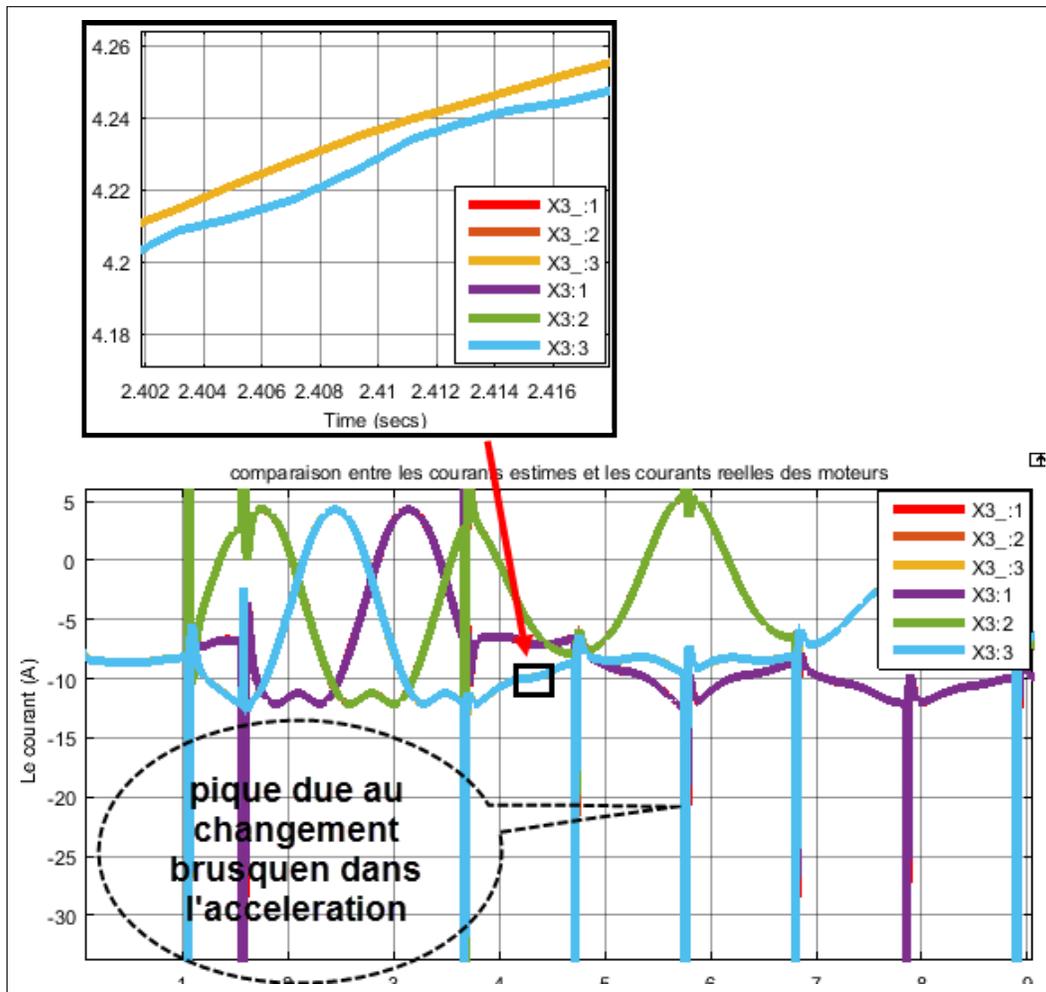


Figure V.11 – Estimation de la masse

Commentaires :

La figure V.11 nous montre les graphes des courants mesurés (en simulation, on a accès au courant) et les courants observés, on remarque que les graphes sont presque identiques avec une erreur de l'ordre du milliampère. On remarque aussi qu'il y a des pics en quelques instants, ces pics sont dus aux changements brusques dans la trajectoire de la nacelle. Ils peuvent prendre des valeurs très élevées mais il faut noter que la masse avec laquelle nous avons fait des tests est de **10Kg**, considérée grande mais cela est fait pour tester la robustesse de l'observateur et l'estimateur.

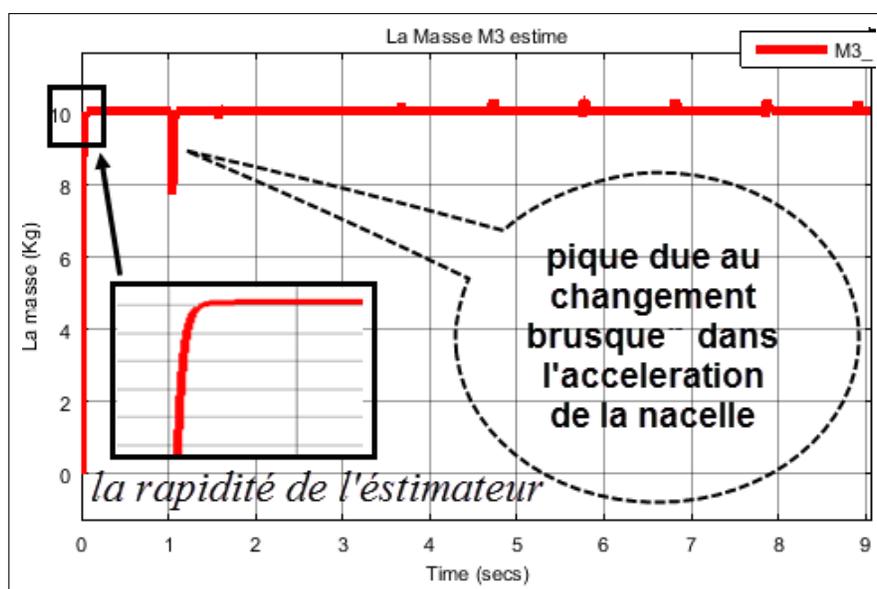


Figure V.12 – Estimation de la masse

Commentaires :

La figure V.12 montre que l'estimateur de masse converge rapidement vers la masse estimée. Dans cette figure, il existe des pics dus aux changements brusques dans l'accélération de la nacelle.

3 Etude Comparative

Dans cette partie on veut evaluer les performances de la commande adaptative basée sur l'estimateur de la masse attachée à la nacelle. Pour cela on teste la commande la plus robuste et la plus performante parmi les commandes synthétisées dans ce travail (qui est la commande par loopShaping). Tout en injectant les memes perturbations de cammandes et de capteurs de test précédent. En plus on attache une masse de 10 kg sur la nacelle. Pour tester sa robustesse contre ce genre d'erreur.(En réalité Le robot ne peut pas déplacer une masse de 10 kg. En effet il destiné pour déplacer des masse de 20 g [Voir la description de Robot Deltla]). Puis on refait les mêmes tests sur la même commande en ajoutant un estimateur de masse (Commande adaptative).

Sous simulink la masse de 20 Kg est attachée dans le bloc de robot delta comme la montre figure :

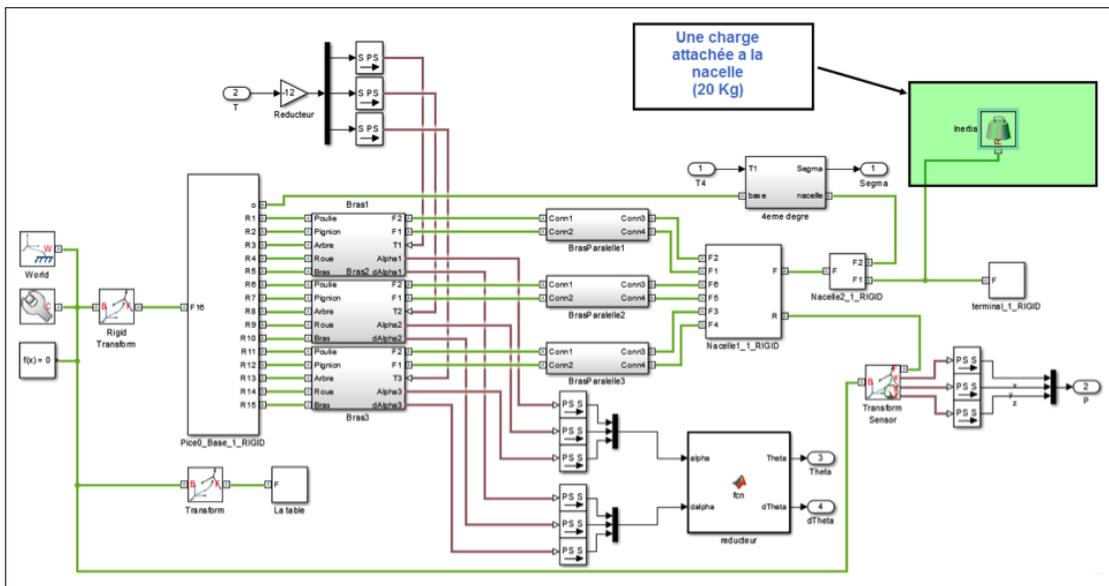


Figure V.13 – Schéma bloc sous SimMechanics

Les perturbations de commande et de capteurs sont ajoutées comme montrent les figures.

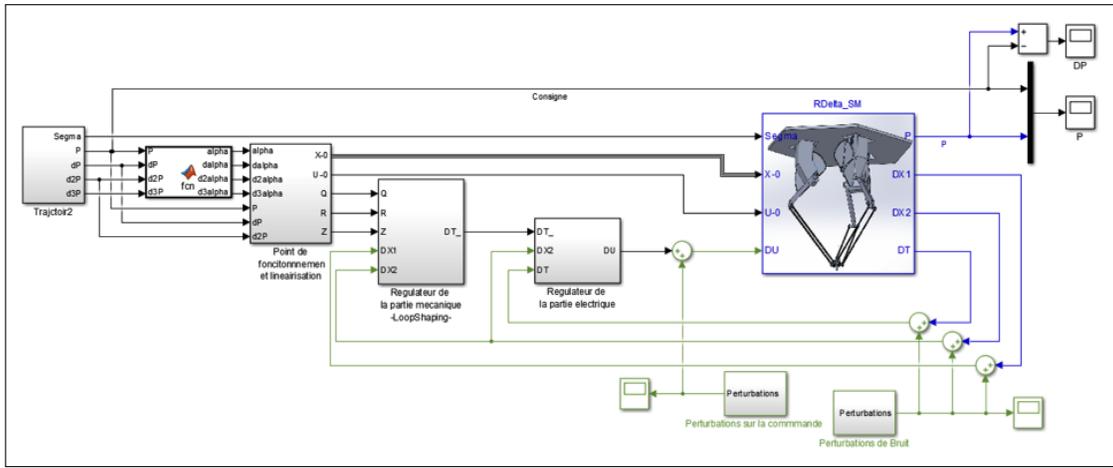


Figure V.14 – Schéma bloc sous Simulink

3.0.0.1 Pour La commande (RE avec LoopShaping) sans estimateur

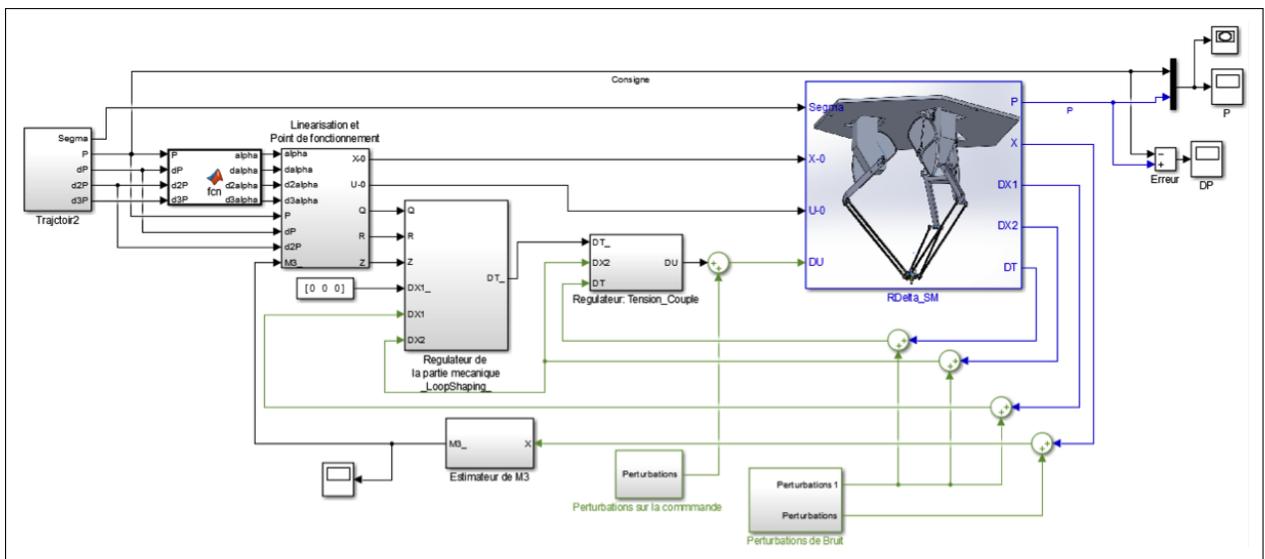


Figure V.15 – Schéma bloc de la commande avec l'estimateur

3.0.0.2 Pour La commande (RE avec LoopShaping) avec estimateur (commande adaptative) Simulation :

1. Résultat de La commande (Retour d'état avec LoopShaping) :

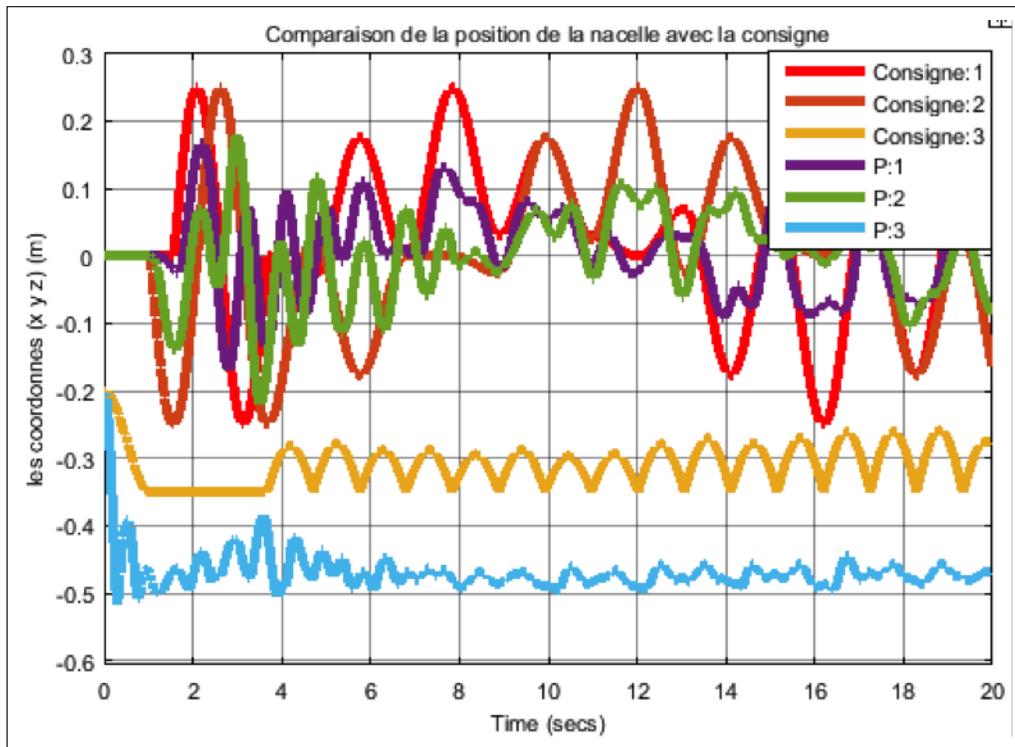


Figure V.16 – Poursuite de la commande sans estimateur

2. Résultat de La commande adaptative :

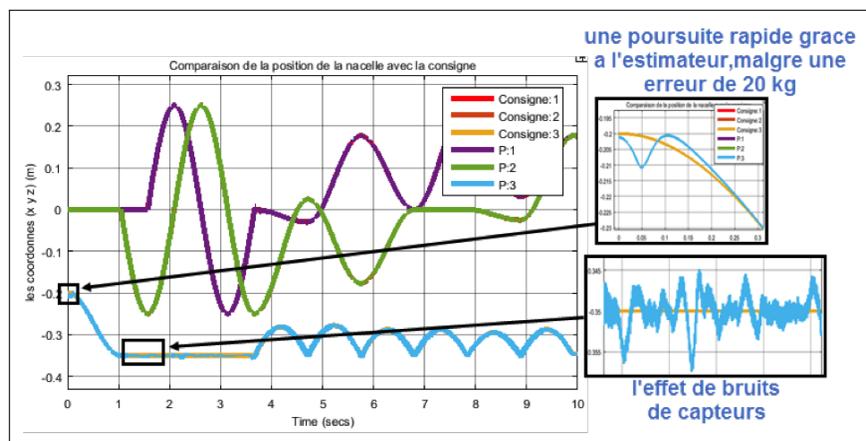


Figure V.17 – Poursuite de la commande avec estimateur

On remarque clairement que la premières repenses sont complètement altérées, il n'y avait aucune poursuite. Tant qu'on regarde que les repenses de la commande adaptative suivent bien les consigne malgré que la masse ajoutée et Les perturbations injectées sont exagérée d'une manière très loin de la réalité.

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé un estimateur de masse, qui a pour but d'estimer la valeur de la masse au moment où le robot faire une prise d'un objet. Des tests ont été faites et l'estimateur a donné des résultats satisfaisantes. Ensuite, nous avons réalisé un observateur de courant puisque ce dernier n'est pas mesurable.

En ajoutant un estimateur de masse à la commande RE avec LoopShaping, la robustesse vis à vis aux erreurs de modélisation (les masses manipulées spécifiquement) a été augmentée d'une manière remarquable. Les résultats de test nous ont permis de choisir la commande adaptative comme la meilleur commande adaptée au robot.

VI

Conclusion générale

Notre travail s'est focalisé sur deux aspects du robot manipulateur parallèle Delta : la modélisation et la synthèse des commandes. Pour ce qui est de la modélisation, la caractérisation du robot a englobée plusieurs niveaux de modélisation, nous nous sommes principalement intéressés pour notre part au modèle géométrique, cinématique et dynamique de la structure. Cette modélisation nous a permis de mettre en évidence les particularités d'un robot parallèle comme le Delta et ceci sur plusieurs points :

La modélisation géométrique ne fait pas appel à des méthodes systématiques comme c'est le cas pour les robots séries mais à l'utilisation des formes géométriques caractérisant les liaisons passives et actionnées du robot (cercle pour un pivot et sphère pour une rotule). L'analyse des contraintes de la boucle du robot parallèle amène à lier ces équations pour en tirer le modèle géométrique. Le développement de ces méthodes sera donc particulier à chaque robot parallèle. Vu la complexité du modèle géométrique, la mise en évidence du modèle cinématique n'est pas aisée pour le cas du robot Delta, l'approximation numérique de celui-ci a donné cependant les résultats escomptés. A travers notre recherche, nous avons constaté que la quasi-totalité des travaux considèrent le modèle géométrique établi par Clavel. Il est à noter que la complexité de ce modèle le rend difficile à manipuler analytiquement. C'est le premier inconvénient remarqué sur ce modèle. Le même problème se présente dans le modèle géométrique inverse établi soit par Clavel ou par Codourey. Notre recherche bibliographique nous a indiqué l'utilisation de la dérivation numérique afin d'éviter les calculs analytiques fastidieux des deux modèles géométriques. Afin de remédier à cet inconvénient, et vu l'importance des modèles géométriques nous avons développé un modèle géométrique (directe et inverse) dont les expressions algébriques sont simples et explicites afin d'éviter les dérivées numériques et par conséquent les erreurs de calcul. En établissant les modèles cinématiques analytiques. Et ses

dérivées partielles analytiques.

Pour ce qui est du modèle dynamique, le modèle établi par Clavel ne décrit pas d'une façon complète le comportement mécanique de robot Delta ISIR 88 disponible dans le laboratoire, à cause de la négligence de la gravité de la roue du réducteur dont la masse est relativement considérable. Cette modélisation constituait l'une de nos contributions principales dans le présent travail. Afin de compléter ce travail, on se devait d'avoir un autre modèle du robot que celui découlant des équations analytique. Notre choix s'est alors porté sur l'utilisation du logiciels SolidWorks pour construire mécaniquement un robot delta identique à celle disponible au laboratoire. Le modèle élaboré est ensuite transporté vers l'outil SimMechanics qui nous a permis de construire de façon indépendante des équations dynamiques, un modèle de simulation et de visualisation 3D du robot identique à celle de laboratoire. Avec cette double modélisation (mécanique ou structurelle sous SimMechanics et analytique) nous avons pu valider la totalité des équations géométriques et dynamiques du robot et avoir ainsi une base solide en vue du développement des lois commande. Une partie importante de notre travail a été ensuite consacrée à la commande, c'est là où nous avons appliqués plusieurs types de commandes, commandes linéaires et commandes non linéaires. Dans les deux types de commandes nous avons bien pris en considération les interactions mécaniques entre les chaînes cinématiques. C'est un avantage par rapport à plusieurs commandes qu'on a rencontré dans plusieurs ouvrages car dans ces références, ils ont considéré les interactions entre les chaînes cinématiques comme des perturbations ou comme des erreurs de modélisation (c'est un découplage décentralisé). Il est évident que si on néglige les interactions (ou bien la présence des erreurs de modélisation sur le système à commander) peut diminuer les performances du robot en terme de rapidité et poursuite. En effet nous avons essayé d'annuler les interactions entre les trois moteurs par bouclage pour avoir des performances et robustesse élevées. La dernière étude faite sur ce sujet est la quantification des commandes. Il a été constaté que les commandes linéaires sont plus performantes et adaptées au robot delta que celles non linéaires en terme de nature des signaux de commande qui restent les plus acceptées par le système. En effet la commande par mode glissant apparait la moins performante à cause du mauvais choix de la surface de glissement. Le BackStepping a été performant en rapidité et en poursuite et robuste vis à vis les perturbations, mais présente le problème de broutement au niveau des tensions. C'est une commande inappropriée au robot. D'autre côté, les commandes linéaires présentent une performance élevée en rapidité et poursuite et robustesse vis à vis les erreurs de modélisation, per-

turbations de commandes, et bruits de capteurs. En ajoutant un estimateur de masse, la robustesse par rapport aux erreurs de modélisation (les masses attachées spécifiquement) a été augmentée d'une manière remarquable. Les résultats de test nous ont amené à choisir la commande adaptative comme la meilleure commande adaptée au robot.

Bibliographie

- [1] Khelifi Oualid and Azzoug Larbi. Modélisation et commande d'un robot parallèle de type delta. Delta Robot, 2010.
- [2] Claudio Melchiorri Luigi Biagiotti. Trajectory planning for automatic machines and Robots. Springer, 2008.
- [3] D. Daney J-P. Merlet. Dimensional synthesis of parallel robots with a guaranteed given accuracy over a specific workspace. IEEE, 2005.
- [4] Dan Zhang. Parallel Robotic Machine Tools. Springer, 2010.
- [5] Nour Islam MOKHTARI Housseine NADOUR. Contribution à la modélisation et à la commande du robot delta isir88 [pfe]. Juin 2016.
- [6] Raymond CLAVEL Alain CODOUREY. Contribution à la commande des robots rapides et précis : application au robot delta à entraînement direct. IEEE, 1991.
- [7] R. Clavel. Device for the movement and positioning of an element in space, December 11 1990. US Patent 4,976,582.
- [8] Changyun Wen Jing Zhou. Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems. Springer, 2008.
- [9] Krstic M. Kanellakopoulos I. Kokotovic P.V. Nonlinear and Adaptive Control Design. Wiley, New York, 1995.
- [10] Reymond CLAVEL. Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne - EPFL, 1991.

Annexes

Calcul de Q , R et L

Q , R et L représentent les dérivées partielles du vecteur $\ddot{X}_2 = \mathbf{g}(X)$ par rapport aux vecteurs X_1 , X_2 et X_3 (c.à.d $\Delta\dot{X}_2 = Q\Delta X_1 + R\Delta X_2 + Z\Delta X_3$). Pour trouver ces dérivées on peut dériver directement $\mathbf{g}(X)$ (qui est égale à $M+N, X_3$). Mais avant de dériver $\mathbf{g}(X)$ il est important de se rappeler que $\dot{X}_2 = \mathbf{g}(X)$ représente le modèle dynamique direct qu'on a trouvé à partir du MDI, c.à.d si on cherche à trouver Q , R , et L à partir du modèle dynamique inverse, alors ça sera plus facile que les trouver à partir du modèle dynamique directe.

Calcul de Q , R et L à partir du MDI

Rappelons qu'on a trouvé dans le MDI les couples T_1 , T_2 et T_3 en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

$$T = \begin{pmatrix} T_1(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \\ T_2(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \\ T_3(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) \end{pmatrix}$$

On linéarise T par rapport à θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \Delta \dot{\theta} + \frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} \Delta \ddot{\theta}$$

On en déduit :

$$\Delta \ddot{\theta} = - \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \Delta \theta - \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \Delta \dot{\theta} + \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} \right)^{-1} \Delta T$$

En utilisant la représentation en X_1 , X_2 et X_3 on obtient :

$$\Delta \ddot{X} = - \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \Delta X_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \Delta X_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} \right)^{-1} K_i \Delta X_3 \quad (\Delta T = K_i \Delta X_3)$$

Par comparaisant et en notant $\left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}}\right)^{-1}$ par Z on trouve :

$$Q = -Z \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad ; \quad R = -Z \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \quad ; \quad L = K_i \cdot Z \quad (\text{VI.1})$$

Le couple T représente la réduction C , tandis que θ représente l'amplification de α :

$$T = \frac{C}{12} \text{ tel que } C = \begin{pmatrix} C_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \\ C_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \\ C_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \end{pmatrix} ; \theta = 12\alpha$$

donc :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial(C/12)}{\partial(12\alpha)} = \frac{\partial C}{\partial \alpha} \frac{1}{12^2} \quad (\text{VI.2})$$

De la même manière on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial C}{\partial \dot{\alpha}} \frac{1}{12^2} \\ \frac{\partial T}{\partial \ddot{\theta}} &= \frac{\partial C}{\partial \ddot{\alpha}} \frac{1}{12^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

Finalement on remarque que le calcul de Q , R et L se base sur le calcul des dérivées partielles de $C = Ca - Cg$ tel que :

$$Ca = \begin{pmatrix} Ca_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \\ Ca_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \\ Ca_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \end{pmatrix} \quad ; \quad Cg = \begin{pmatrix} Cg_1(\alpha) \\ Cg_2(\alpha) \\ Cg_3(\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{VI.4})$$

Les dérivées partielles de C :

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial \alpha} = \frac{\partial Ca}{\partial \alpha} - \frac{\partial Cg}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial C}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial Ca}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial Cg}{\partial \dot{\alpha}} \\ \frac{\partial C}{\partial \ddot{\alpha}} = \frac{\partial Ca}{\partial \ddot{\alpha}} - \frac{\partial Cg}{\partial \ddot{\alpha}} \end{cases} \quad (\text{VI.5})$$

On remarque que le problème de linéarisation du modèle d'état $\dot{X} = f(X, U)$ revient à la linéarisation des deux couples Ca et Cg .

Par la suite on va linéariser les deux couples Ca_i et Cg_i pour trouver la linéarisation de Ca et Cg .

1. Linearisation de Ca_i :

$$Ca_i = (J_1 + G_{i3}I_2) \cdot \ddot{\alpha}_i + (G_{i2}J_2) \cdot \ddot{\alpha}_j + (G_{i2}K_2) \cdot \ddot{\alpha}_k + (G_{i2}J_1) \cdot \dot{\alpha}_j^2 + (G_{i2}K_1) \cdot \dot{\alpha}_k^2 + (G_{i3}I_1) \cdot \dot{\alpha}_i^2 + G_{i1} \bar{\alpha}_i \quad (\text{VI.6})$$

Une petite variation de $\mathbf{C}a_i$ s'exprime par :

$$\Delta \mathbf{C}a_i = \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \ddot{\alpha}} \Delta \ddot{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \alpha} \Delta \alpha$$

(a) Calcule de $\frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \ddot{\alpha}}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \ddot{\alpha}_i} = (J_1 + G_{i3} \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i}) + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \ddot{\alpha}_i} \\ \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \ddot{\alpha}_j} = G_{i2} \frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j} + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \ddot{\alpha}_j} \\ \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \ddot{\alpha}_k} = G_{i2} \frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k} + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \ddot{\alpha}_k} \end{cases}$$

Les nouveaux termes qu'on doit calculer sont : $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_1}$, $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_2}$ et $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_3}$.

Calcule de $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_i}$:

D'après le résultat :

$$\ddot{\alpha} = H\dot{\alpha} + J.\ddot{P}$$

En dérivant par rapport à $\ddot{\alpha}$ on trouve :

$$\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}} = J^{-1} \quad (\text{VI.7})$$

Donc pour trouver $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_i}$ il suffit de prendre la ligne i de la matrice J^{-1} . On peut écrire :

$$\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_1} = J^{-1} E_1^T \quad ; \quad \frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_2} = J^{-1} E_2^T \quad ; \quad \frac{\partial \ddot{P}}{\partial \ddot{\alpha}_3} = J^{-1} E_3^T$$

(b) Calcule de $\frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}_i}$, $\frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}_j}$ et $\frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}_k}$:

D'après l'équation VI.6 :

$$\frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}_i} = 2.G_{i3} I_1 \dot{\alpha}_i + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (\text{VI.8})$$

C.à.d :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}_i} = 2G_{i3} \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2} \dot{\alpha}_i + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \dot{\alpha}_i} \\ \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}_j} = 2G_{i3} \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j^2} \dot{\alpha}_j + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \dot{\alpha}_j} \\ \frac{\partial \mathbf{C}a_i}{\partial \dot{\alpha}_k} = 2G_{i3} \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k^2} \dot{\alpha}_k + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \dot{\alpha}_k} \end{cases}$$

Les termes $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2}$, $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j^2}$ et $\frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k^2}$ ont été déjà calculés.

Les nouveaux termes sont $\frac{\partial \ddot{OP}}{\partial \dot{\alpha}_i}$, $\frac{\partial \ddot{OP}}{\partial \dot{\alpha}_j}$ et $\frac{\partial \ddot{OP}}{\partial \dot{\alpha}_k}$.

Calcul de $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \dot{\alpha}_i}$:

D'après les relations citées dans le paragraphe concerné par le calcul de $\ddot{P}(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha)$ on peut écrire :

$$\ddot{\alpha} = \begin{pmatrix} \dot{P}_1^T \cdot H_{\alpha_1} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2^T \cdot H_{\alpha_2} \dot{P}_2 \\ \dot{P}_3^T \cdot H_{\alpha_3} \dot{P}_3 \end{pmatrix} + J \ddot{P} \quad (\text{VI.9})$$

En dérivant par rapport à $\dot{\alpha}_i$ on trouve :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{P}_1^T}{\partial \dot{\alpha}_i} H_{\alpha_1} \dot{P}_1 \\ \frac{\partial \dot{P}_2^T}{\partial \dot{\alpha}_i} H_{\alpha_2} \dot{P}_2 \\ \frac{\partial \dot{P}_3^T}{\partial \dot{\alpha}_i} H_{\alpha_3} \dot{P}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{P}_1^T H_{\alpha_1} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \dot{\alpha}_i} \\ \dot{P}_2^T H_{\alpha_2} \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \dot{\alpha}_i} \\ \dot{P}_3^T H_{\alpha_3} \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \dot{\alpha}_i} \end{pmatrix} + J \frac{\partial \ddot{P}}{\partial \dot{\alpha}_i}$$

Ou bien :

$$\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \dot{\alpha}_i} = -J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{P}_1^T}{\partial \dot{\alpha}_i} H_{\alpha_1} \dot{P}_1 \\ \frac{\partial \dot{P}_2^T}{\partial \dot{\alpha}_i} H_{\alpha_2} \dot{P}_2 \\ \frac{\partial \dot{P}_3^T}{\partial \dot{\alpha}_i} H_{\alpha_3} \dot{P}_3 \end{pmatrix} - J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{P}_1^T H_{\alpha_1} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \dot{\alpha}_i} \\ \dot{P}_2^T H_{\alpha_2} \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \dot{\alpha}_i} \\ \dot{P}_3^T H_{\alpha_3} \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \dot{\alpha}_i} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.10})$$

Tel que :

$$\frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \dot{\alpha}_i} = \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial (A_1 \cdot P)}{\partial \alpha_i} = A_1 \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} = A_1 \cdot J^{-1} \cdot E_i^T \quad (\text{VI.11})$$

Tel que :

$$E_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & si \quad i = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & si \quad i = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & si \quad i = 3 \end{cases}$$

On trouve les résultats suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \dot{\alpha}_1} = A_1 J^{-1} E_1^T \\ \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \dot{\alpha}_2} = A_1 J^{-1} E_2^T \\ \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \dot{\alpha}_3} = A_1 J^{-1} E_3^T \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \dot{\alpha}_1} = A_2 J^{-1} E_1^T \\ \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \dot{\alpha}_2} = A_2 J^{-1} E_2^T \\ \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \dot{\alpha}_3} = A_2 J^{-1} E_3^T \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \dot{\alpha}_1} = A_3 J^{-1} E_1^T \\ \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \dot{\alpha}_2} = A_3 J^{-1} E_2^T \\ \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \dot{\alpha}_3} = A_3 J^{-1} E_3^T \end{cases}$$

(c) Calcule de $\frac{\partial C a_i}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial C a_i}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial C a_i}{\partial \alpha_k}$:

On sait que :

$$C a_i = G_{i3} \overrightarrow{OC_i} + G_{i2} (\overrightarrow{OC_j} + \overrightarrow{OC_k}) + G_{i1} \overrightarrow{OP} + J \cdot \ddot{\alpha}_i$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C a_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha_i} \overrightarrow{OC_i} + G_{i3} \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha_i} (\overrightarrow{OC_j} + \overrightarrow{OC_k}) + \frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_i} \overrightarrow{OP} + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial C a_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha_j} \overrightarrow{OC_i} + \frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha_j} (\overrightarrow{OC_j} + \overrightarrow{OC_k}) + G_{i2} \frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_j} \overrightarrow{OP} + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial C a_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha_k} \overrightarrow{OC_i} + \frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha_k} (\overrightarrow{OC_j} + \overrightarrow{OC_k}) + G_{i2} \frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_k} \overrightarrow{OP} + G_{i1} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_k} \end{cases}$$

Donc les paramètres à calculer sont : $\frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k}$.

i. Calcule de $\frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k}$: On rappelle que :

$$\overrightarrow{OC_i} = \begin{pmatrix} l_1 \cos(\alpha_i) \\ 0 \\ -l_1 \sin(\alpha_i) \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\dot{\overrightarrow{OC_i}} = \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \quad \text{tel que :} \quad \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\alpha_i) \\ 0 \\ -l_1 \cos(\alpha_i) \end{pmatrix} \dot{\alpha}_i$$

$$\ddot{\overrightarrow{OC_i}} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2} \dot{\alpha}_i^2 + \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \ddot{\alpha}_i \quad \text{tel que :} \quad \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2} = -\overrightarrow{OC_i}$$

$$\ddot{\overrightarrow{OC_i}} = -\overrightarrow{OC_i} \dot{\alpha}_i^2 + \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \ddot{\alpha}_i$$

De la même manière :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i^2 + \frac{\partial^2 \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i^2} \ddot{\alpha}_i$$

Ou bien :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i^2 - \overrightarrow{OC_i} \ddot{\alpha}_i \quad (\text{VI.12})$$

On déduit aussi :

$$\frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial \overrightarrow{OC_j}}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j^2 - \overrightarrow{OC_j} \ddot{\alpha}_j \quad (\text{VI.13})$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \overrightarrow{OC_k}}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k^2 - \overrightarrow{OC_k} \ddot{\alpha}_k \quad (\text{VI.14})$$

ii. Calcul de $\frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_k}$:

On rappelle que :

$$G_{i1} = a_3(E_2.AC_i.B_i.\overrightarrow{u_i})(E_i.U^{-1}) + a_1.AC_i.B_i$$

$$\frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_i} = a_3 E_2 \left[\frac{\partial AC_i}{\partial \alpha_i} B_i \overrightarrow{u_i} + AC_i.B_i \cdot \frac{\partial \overrightarrow{u_i}}{\partial \alpha_i} \right] (E_i.U^{-1}) + a_3(E_2.AC_i.B_i.\overrightarrow{u_i}) \left(E_i \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_i} \right) + \quad (\text{VI.15})$$

$$\frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_j} = a_3 \left(E_2.AC_i.B_i \frac{\partial \overrightarrow{u_i}}{\partial \alpha_j} \right) (E_i.U^{-1}) + a_3 (E_2.AC_i.B_i.\overrightarrow{u_i}) \left(E_i \cdot \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_j} \right) \quad (\text{VI.16})$$

$$\frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha_k} = a_3 \left(E_2.AC_i.B_i \frac{\partial \overrightarrow{u_i}}{\partial \alpha_k} \right) (E_i.U^{-1}) + a_3 (E_2.AC_i.B_i.\overrightarrow{u_i}) \left(E_i \cdot \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_k} \right) \quad (\text{VI.17})$$

On calcule par la suite les nouveaux termes :

$$\frac{\partial AC_i}{\partial \alpha_i} = \begin{pmatrix} 0 & l_1 \cos(\alpha_i) & 0 \\ -l_1 \cos(\alpha_i) & 0 & l_1 \sin(\alpha_i) \\ 0 & -l_1 \sin(\alpha_i) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.18})$$

iii. Calcul de $\frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_2}$ et $\frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_3}$:

U^{-1} est défini par la relation suivante :

$$U.U^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} U^{-1} + U \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{VI.19})$$

$$\frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_1} = -U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} U^{-1} \quad ; \quad \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_2} = -U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} U^{-1} \quad ; \quad \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_3} = -U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_3} U^{-1} \quad (\text{VI.20})$$

U c'est une matrice définie par : $U = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ c.à.d :

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_i} \right) \quad (\text{VI.21})$$

Sachant que \vec{u}_1 est défini par la relation $\overrightarrow{C_i P} = l_2 \vec{u}_1$

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \overrightarrow{C_i P}}{l_2 \partial \alpha_i} = \frac{1}{l_2} \left[\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \overrightarrow{OC_i}}{\partial \alpha_i} \right] = \frac{1}{l_2} \left[\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \overrightarrow{AC_i}}{\partial \alpha_i} \right] \quad (\text{VI.22})$$

$\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \alpha_i} = J^{-1} E_i^T$, donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{l_2} \left[J^{-1} E_1^T - \frac{\partial \overrightarrow{AC_1}}{\partial \alpha_1} \right] \\ \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{l_2} [J^{-1} E_2^T] \\ \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{l_2} [J^{-1} E_3^T] \end{cases} \quad (\text{VI.23})$$

De la même manière on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{l_2} [J^{-1} E_1^T] \\ \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{l_2} \left[J^{-1} E_2^T - \frac{\partial \overrightarrow{AC_2}}{\partial \alpha_2} \right] \\ \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{l_2} [J^{-1} E_3^T] = \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (\text{VI.24})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \alpha_3} = \frac{1}{l_2} \left[J^{-1} E_3^T - \frac{\partial \overrightarrow{AC_3}}{\partial \alpha_3} \right] \end{cases} \quad (\text{VI.25})$$

iv. Calcul de $\frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha_k}$:

$$G_{i2} = a_1 (E_2 AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) (E_i U^{-1}) \quad (\text{VI.26})$$

Par dérivation on trouve :

$$\begin{cases} \frac{G_{i2}}{\partial \alpha_i} = a_1 E_2 \left(\frac{\partial AC_i}{\partial \alpha_i} B_i \cdot \vec{u}_i + AC_i \cdot B_i \cdot \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \alpha_i} \right) (E_i \cdot U^{-1}) + a_1 (E_2 AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) \left(E_i \cdot \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_i} \right) \\ \frac{G_{i2}}{\partial \alpha_j} = a_1 \left(E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \alpha_j} \right) (E_i \cdot U^{-1}) + a_1 (E_2 AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) \left(E_i \cdot \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_j} \right) \\ \frac{G_{i2}}{\partial \alpha_k} = a_1 \left(E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \alpha_k} \right) (E_i \cdot U^{-1}) + a_1 (E_2 AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i) \left(E_i \cdot \frac{\partial U^{-1}}{\partial \alpha_k} \right) \end{cases} \quad (\text{VI.27})$$

v. Calcule de $\frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha_k}$:

$$G_{i3} = a_1(E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \cdot \vec{u}_i)(E_i \cdot U^{-1}) + a_2 \cdot E_2 \cdot AC_i \cdot B_i \quad (\text{VI.28})$$

On remarque que la formule de G_{i3} ressemble à celle de G_{i1} , donc si on remplace a_3 par a_1 et a_1 par a_2 dans l'expression de G_{i3} on obtient G_{i3} . Alors pour obtenir les dérivées partielles de G_{i3} il suffit de faire le même remplacement dans les dérivées de G_{i1} .

(d) Calcule de $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha}$:

On sait que $\ddot{\alpha}_i = \dot{P}_i^T \cdot H_{\alpha_i} \cdot \dot{P}_i + G_{\alpha_i} \ddot{P}_i$ donc on obtient trois equations :

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 = \dot{P}_1^T \cdot H_{\alpha_1} \cdot \dot{P}_1 + G_{\alpha_1} \ddot{P}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 = \dot{P}_2^T \cdot H_{\alpha_2} \cdot \dot{P}_2 + G_{\alpha_2} \ddot{P}_2 \\ \ddot{\alpha}_3 = \dot{P}_3^T \cdot H_{\alpha_3} \cdot \dot{P}_3 + G_{\alpha_3} \ddot{P}_3 \end{cases} \quad (\text{VI.29})$$

Par la suite on dérive chaque equation par rapport à α_1 , α_2 et α_3 , on obtient 9 equations avec 9 inconnus qui sont les éléments de $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha}$.

En dérivant la première equation par rapport à α_1 :

$$\frac{\partial \ddot{\alpha}_1}{\partial \alpha_1} = 2\dot{P}_1^T H_{\alpha_1} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \alpha_1} + \dot{P}_1^T \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial G_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1} \ddot{P}_1 + G_{\alpha_1} \frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial \alpha_1} \quad (\text{VI.30})$$

C'est à dire :

$$0 = 2\dot{P}_1^T H_{\alpha_1} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \alpha_1} + \dot{P}_1^T \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial G_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1} \ddot{P}_1 + G_{\alpha_1} \frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial \alpha_1} \quad (\text{VI.31})$$

De la même manière on trouve ces 9 equations :

$$\begin{cases} G_{\alpha_1} \frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial \alpha_1} = 2\dot{P}_1^T H_{\alpha_1} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \alpha_1} + \dot{P}_1^T \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1} \dot{P}_1 + \frac{\partial G_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1} \ddot{P}_1 = a_{11} \\ G_{\alpha_1} \frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial \alpha_2} = 2\dot{P}_1^T H_{\alpha_1} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \alpha_2} + \dot{P}_1^T \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_2} \dot{P}_1 + \frac{\partial G_{\alpha_1}}{\partial \alpha_2} \ddot{P}_1 = a_{21} \\ G_{\alpha_1} \frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial \alpha_3} = 2\dot{P}_1^T H_{\alpha_1} \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \alpha_3} + \dot{P}_1^T \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_3} \dot{P}_1 + \frac{\partial G_{\alpha_1}}{\partial \alpha_3} \ddot{P}_1 = a_{31} \end{cases} \quad (\text{VI.32})$$

$$\begin{cases} G_{\alpha_2} \frac{\partial \ddot{P}_2}{\partial \alpha_1} = 2\dot{P}_2^T H_{\alpha_2} \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \alpha_1} + \dot{P}_2^T \frac{\partial H_{\alpha_2}}{\partial \alpha_1} \dot{P}_2 + \frac{\partial G_{\alpha_2}}{\partial \alpha_1} \ddot{P}_2 = a_{12} \\ G_{\alpha_2} \frac{\partial \ddot{P}_2}{\partial \alpha_2} = 2\dot{P}_2^T H_{\alpha_2} \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \alpha_2} + \dot{P}_2^T \frac{\partial H_{\alpha_2}}{\partial \alpha_2} \dot{P}_2 + \frac{\partial G_{\alpha_2}}{\partial \alpha_2} \ddot{P}_2 = a_{22} \\ G_{\alpha_2} \frac{\partial \ddot{P}_2}{\partial \alpha_3} = 2\dot{P}_2^T H_{\alpha_2} \frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \alpha_3} + \dot{P}_2^T \frac{\partial H_{\alpha_2}}{\partial \alpha_3} \dot{P}_2 + \frac{\partial G_{\alpha_2}}{\partial \alpha_3} \ddot{P}_2 = a_{32} \end{cases} \quad (\text{VI.33})$$

$$\begin{cases} G_{\alpha_3} \frac{\partial \ddot{P}_3}{\partial \alpha_1} = 2\dot{P}_3^T H_{\alpha_3} \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \alpha_1} + \dot{P}_3^T \frac{\partial H_{\alpha_3}}{\partial \alpha_1} \dot{P}_3 + \frac{\partial G_{\alpha_3}}{\partial \alpha_1} \ddot{P}_3 = a_{13} \\ G_{\alpha_3} \frac{\partial \ddot{P}_3}{\partial \alpha_2} = 2\dot{P}_3^T H_{\alpha_3} \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \alpha_2} + \dot{P}_3^T \frac{\partial H_{\alpha_3}}{\partial \alpha_2} \dot{P}_3 + \frac{\partial G_{\alpha_3}}{\partial \alpha_2} \ddot{P}_3 = a_{23} \\ G_{\alpha_3} \frac{\partial \ddot{P}_3}{\partial \alpha_3} = 2\dot{P}_3^T H_{\alpha_3} \frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \alpha_3} + \dot{P}_3^T \frac{\partial H_{\alpha_3}}{\partial \alpha_3} \dot{P}_3 + \frac{\partial G_{\alpha_3}}{\partial \alpha_3} \ddot{P}_3 = a_{33} \end{cases} \quad (\text{VI.34})$$

Pour trouver $\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha_1}$ on prend les 3 premiers equations de chaque sous système :

$$\begin{cases} -G_{\alpha_1} \frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial \alpha_1} = a_{11} \\ -G_{\alpha_2} \frac{\partial \ddot{P}_2}{\partial \alpha_2} = a_{12} \\ -G_{\alpha_3} \frac{\partial \ddot{P}_3}{\partial \alpha_3} = a_{13} \end{cases} \quad (\text{VI.35})$$

On rappelle que :

$$\ddot{P}_i = A_i \ddot{P} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} G_{\alpha_1 A_1} \\ G_{\alpha_2 A_2} \\ G_{\alpha_3 A_3} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$-\begin{pmatrix} G_{\alpha_1 A_1} \\ G_{\alpha_2 A_2} \\ G_{\alpha_3 A_3} \end{pmatrix} \frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha_1} = -J^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha_2} = -J^{-1} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha_3} = -J^{-1} \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.36})$$

On peut conclure la relation suivante :

$$\frac{\partial \ddot{P}}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.37})$$

Les nouveaux termes apparus sont :

- $\frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial H_{\alpha_2}}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial H_{\alpha_3}}{\partial \alpha}$.
- $\frac{\partial \dot{P}_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \dot{P}_2}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial \dot{P}_3}{\partial \alpha}$.
- $\frac{\partial G_{\alpha_1}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial G_{\alpha_2}}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial G_{\alpha_3}}{\partial \alpha}$.

On commence par le plus facile.

i. Calcule de $\frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha}$:

\ddot{P} peut être obtenu par la manière suivante : $\ddot{P} = \frac{d}{dt}(\dot{P})$. Puisque \dot{P} est une fonction de α et $\dot{\alpha}$ alors : $\ddot{P} = \frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial \dot{P}}{\partial \dot{\alpha}} \ddot{\alpha}$.

D'autre côté on a trouvé que dans la partie de calcule de $\ddot{P}(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha)$ on a :

$$\ddot{P} = J^{-1} \ddot{\alpha} - J^{-1} H \dot{\alpha}$$

Par comparaison on conclut que :

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial \alpha} = -J^{-1} \cdot H = -J^{-1} \begin{pmatrix} \dot{P}_1^T H_{\alpha_1} A_1 \\ \dot{P}_2^T H_{\alpha_2} A_2 \\ \dot{P}_3^T H_{\alpha_3} A_3 \end{pmatrix} J^{-1} \quad (\text{VI.38})$$

ii. Calcule de $\frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial \alpha}$:

Dans le chapitre de MCI on a trouvé le résultat suivant : $\dot{\alpha}_i = G_{\alpha_i} \dot{P}_i$ et par dérivation on trouve :

$$\ddot{\alpha}_i = \dot{P}_i^T \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial P_i} \dot{P}_i + G_{\alpha_i} \ddot{P}_i \quad (\text{VI.39})$$

D'autre coté on a :

$$\ddot{\alpha}_i = \dot{P}_i^T H_{\alpha_i} \dot{P}_i + G_{\alpha_i} \ddot{P}_i$$

C'est claire donc que : $\frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial P_i} = H_{\alpha_i}$.

Pour trouver $\frac{\partial G_{\alpha_1}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial G_{\alpha_2}}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial G_{\alpha_3}}{\partial \alpha}$ il faut passer par $\frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial P}$ parce que G_{α_i} est une fonction de P et non pas de α . Si on prend par exemple $\frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial \alpha_1}$, alors le calcule va être comme le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial X_i} \\ \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial P_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \partial G_{\alpha_i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial P_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \partial \alpha_1 \end{pmatrix} H_{\alpha_i} \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

Tel que :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial P_i / \partial t}{\partial \alpha_1 / \partial t} = \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial \dot{\alpha}} \quad (\text{VI.41})$$

H_{α_i} est connue et $\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_1}$ ont été déjà calculés. Donc on peut revenir au résultat de VI.11. De la même manière on trouve :

$$\frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial \alpha_2} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_2} \right)^T H_{\alpha_i} \quad (\text{VI.42})$$

$$\frac{\partial G_{\alpha_i}}{\partial \alpha_3} = \left(\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_3} \right)^T H_{\alpha_i} \quad (\text{VI.43})$$

iii. Calcule de $\frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial \alpha}$:

Rappelons que H_{α_i} est une fonction de P_i et non pas de α donc :

$$\frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha_1} \quad (\text{VI.44})$$

Les termes apparus n'ont pas été calculés auparavant :

$\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_1} = E_1 \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1} = E_2 \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_1}$ et $\frac{\partial z_i}{\partial \alpha_1} = E_3 \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_1}$. On va laisser le

calcul de $\frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial P}$ au dernier paragraphe. Les 9 equations suivante

sont trouvés en substituant les expressions de $\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_i}$ et $\frac{\partial z_i}{\partial \alpha_i}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_1} = \frac{H_{\alpha_1}}{\partial X_1} E_1 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} + \frac{H_{\alpha_1}}{\partial y_1} E_2 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} + \frac{H_{\alpha_1}}{\partial z_1} E_3 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_2} = \frac{H_{\alpha_1}}{\partial X_1} E_1 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} + \frac{H_{\alpha_1}}{\partial y_1} E_2 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} + \frac{H_{\alpha_1}}{\partial z_1} E_3 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial H_{\alpha_1}}{\partial \alpha_3} = \frac{H_{\alpha_1}}{\partial X_1} E_1 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_3} + \frac{H_{\alpha_1}}{\partial y_1} E_2 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_3} + \frac{H_{\alpha_1}}{\partial z_1} E_3 \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (\text{VI.45})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{\alpha_2}}{\partial \alpha_1} = \frac{H_{\alpha_2}}{\partial X_2} E_1 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} + \frac{H_{\alpha_2}}{\partial y_2} E_2 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} + \frac{H_{\alpha_2}}{\partial z_2} E_3 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial H_{\alpha_2}}{\partial \alpha_2} = \frac{H_{\alpha_2}}{\partial X_2} E_1 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} + \frac{H_{\alpha_2}}{\partial y_2} E_2 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} + \frac{H_{\alpha_2}}{\partial z_2} E_3 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial H_{\alpha_2}}{\partial \alpha_3} = \frac{H_{\alpha_2}}{\partial X_2} E_1 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_3} + \frac{H_{\alpha_2}}{\partial y_2} E_2 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_3} + \frac{H_{\alpha_2}}{\partial z_2} E_3 \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (\text{VI.46})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{\alpha_3}}{\partial \alpha_1} = \frac{H_{\alpha_3}}{\partial X_3} E_1 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_1} + \frac{H_{\alpha_3}}{\partial y_3} E_2 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_1} + \frac{H_{\alpha_3}}{\partial z_3} E_3 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial H_{\alpha_3}}{\partial \alpha_2} = \frac{H_{\alpha_3}}{\partial X_3} E_1 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_2} + \frac{H_{\alpha_3}}{\partial y_3} E_2 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_2} + \frac{H_{\alpha_3}}{\partial z_3} E_3 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial H_{\alpha_3}}{\partial \alpha_3} = \frac{H_{\alpha_3}}{\partial X_3} E_1 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_3} + \frac{H_{\alpha_3}}{\partial y_3} E_2 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_3} + \frac{H_{\alpha_3}}{\partial z_3} E_3 \frac{\partial P_3}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (\text{VI.47})$$

iv. Calcule de $\frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial P}$:

Rappelons que : $H_{\alpha_i} = H_{\beta_i} - H_{\delta_i}$ tel que :

$$H_{\beta_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial X_i^2} & 0 & \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i \partial X_i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i \partial X_i} & 0 & \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i^2} \end{pmatrix}$$

$$H_{\delta_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i^2} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i} \\ \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i^2} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i} \\ \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i} & \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial z_i^2} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial X_i} = \frac{\partial H_{\beta_i}}{\partial X_i} - \frac{\partial H_{\delta_i}}{\partial X_i} \\ \frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial y_i} = \frac{\partial H_{\beta_i}}{\partial y_i} - \frac{\partial H_{\delta_i}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial H_{\alpha_i}}{\partial z_i} = \frac{\partial H_{\beta_i}}{\partial z_i} - \frac{\partial H_{\delta_i}}{\partial z_i} \end{cases}$$

Tel que :

$$\frac{\partial H_{\beta_i}}{\partial X_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i^3} & 0 & \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} & 0 & \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i \partial z_i^2} \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial H_{\beta_i}}{\partial y_i} = 0 ; \quad \frac{\partial H_{\beta_i}}{\partial y_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} & 0 & \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i \partial z_i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i \partial z_i} & 0 & \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i^2} \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\frac{\partial H_{\delta_i}}{\partial X_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i^3} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial X_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} \\ \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial X_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i \partial z_i} \\ \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i \partial z_i} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial H_{\delta_i}}{\partial y_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial X_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i \partial z_i} \\ \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i^3} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i^2} \\ \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i \partial z_i} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i^2} \end{pmatrix}$$

Et :

$$\frac{\partial H_{\delta_i}}{\partial z_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i \partial z_i} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i^2} \\ \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i \partial z_i} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i^2} \\ \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i^2} & \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i^3} \end{pmatrix}$$

On remarque qu'il y a 4 nouveaux termes qui sont apparus dans le calcul des dérivés partielles de H_{β_i} et 10 autres termes dans les dérivés partielles de H_{δ_i} .

Par la suite on va citer directement les résultats de calcul sans passer par les étapes de calcul.

A. Les dérivés partielles de β_i :

$$\frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i^3} = 2 \frac{X_i - r}{AB_i^4} \left(1 - 4 \left(\frac{z_i}{AB_i} \right)^2 \right) \quad (\text{VI.48})$$

$$\frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i^3} = -2 \frac{z_i}{AB_i^4} \left(1 - 4 \left(\frac{z_i}{AB_i} \right)^2 \right) \quad (\text{VI.49})$$

$$\frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} = - \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i^3} \quad (\text{VI.50})$$

$$\frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i \partial z_i^2} = - \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i^3} \quad (\text{VI.51})$$

On peut remarquer que : $\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial X_i^2} = - \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i^2}$, il résulte de cela que :

$$\frac{\partial^3 \beta_i}{\partial X_i^2 \partial z_i} = \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \left(\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial X_i^2} \right) = - \frac{\partial \beta_i}{\partial z_i} \left(\frac{\partial^2 \beta_i}{\partial z_i^2} \right) = - \frac{\partial^3 \beta_i}{\partial z_i^2}$$

C'est ça ce qui explique le dernier résultat (VI.51). On peut évidemment faire la même chose pour obtenir le résultat avant le dernier (VI.50).

Les dérivées partielles de δ_i :

Avant d'entamer le calcul des dérivées partielles de δ_i on va définir les paramètres suivants (on considère aussi les paramètres définis dans le calcul de δ_i et $\dot{\delta}_i$) :

$$\begin{cases} \frac{\partial AH_i}{\partial X_i} = \frac{BH_i(X_i - r)}{AB_i^2} & ; & \frac{\partial AH_i}{\partial y_i} = \frac{y_i}{AB_i} \\ \frac{\partial AH_i}{\partial z_i} = \frac{BH_i \cdot z_i}{AB_i^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial CH_i}{\partial X_i} = -\frac{AH_i BH_i}{CH_i AB_i^2} (X_i - r) & ; \quad \frac{\partial CH_i}{\partial y_i} = \frac{-AH_i \cdot y_i}{D_i} \\ \frac{\partial CH_i}{\partial z_i} = -\frac{AH_i \cdot BH_i}{CH_i \cdot AB_i^2} z_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 D_i}{\partial z_i^2} = \frac{\partial D_i}{\partial z_i} \left[\frac{1}{z_i} + 4 \frac{CH_i \frac{\partial CH_i}{\partial z_i}}{CH_i^2 - AH_i BH_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial z_i} \right] \\ \frac{\partial^2 D_i}{\partial X_i^2} = \frac{\partial D_i}{\partial X_i} \left[\frac{1}{X_i - r} + 4 \frac{CH_i \frac{\partial CH_i}{\partial X_i}}{CH_i^2 - AH_i BH_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial X_i} \right] \\ \frac{\partial^2 D_i}{\partial y_i^2} = \frac{\partial D_i}{\partial y_i} \left[\frac{1}{y_i} + \frac{\frac{\partial AH_i}{\partial y_i}}{AH_i} - \frac{\frac{\partial CH_i}{\partial y_i}}{CH_i} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 D_i}{\partial X_i \partial z_i} = \frac{-z_i (X_i - r)}{D_i^3} (CH_i^2 - AH_i \cdot BH_i)^2 \\ \frac{\partial^2 D_i}{\partial y_i \partial z_i} = \frac{-y_i \cdot z_i \cdot BH_i^3}{CH_i D_i^2} \\ \frac{\partial^2 D_i}{\partial X_i \partial y_i} = \frac{-y_i (X_i - r) BH_i^3}{CH_i D_i^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 AB_i}{\partial X_i^2} = \frac{1}{AB_i} - \frac{(X_i - r) \frac{\partial AB_i}{\partial X_i}}{AB_i^2} \frac{\partial^2 AB_i}{\partial z_i^2} = \frac{1}{AB_i} - \frac{z_i}{AB_i^2} \frac{\partial AB_i}{\partial z_i} \frac{\partial^2 AB_i}{\partial X_i \partial z_i} = -\frac{z_i (X_i - r)}{AB_i^3}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 BH_i}{\partial z_i^2} = \frac{\partial BH_i}{\partial z_i} \left(\frac{\partial AH_i}{AH_i \partial z_i} + \frac{1}{z_i} - \frac{2 \partial AB_i}{AB_i \partial z_i} \right) \\ \frac{\partial^2 BH_i}{\partial X_i^2} = \frac{\partial BH_i}{\partial X_i} \left(\frac{\partial AH_i}{AH_i \partial X_i} + \frac{1}{X_i - r} - \frac{2 \partial AB_i}{AB_i \partial X_i} \right) \\ \frac{\partial^2 BH_i}{\partial X_i \partial z_i} = \frac{z_i (X_i - r)}{AB_i^4} (BH_i - 2 AH_i) \end{cases}$$

Avec $DH_i = CH_i^2 - AH_i \cdot BH_i$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i^3} &= \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i^2} \left[\frac{\partial BH_i}{BH_i \partial z_i} + \frac{1}{z_i} - \frac{\partial AB_i}{AB_i \partial z_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial z_i} \right] \\ + \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} &\left[-\left(\frac{\partial BH_i / \partial z_i}{BH_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{z_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial AB_i}{AB_i \partial z_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial D_i}{D_i \partial z_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 BH_i}{BH_i \partial z_i^2} - \frac{\partial^2 AB_i}{AB_i \partial z_i^2} - \frac{\partial^2 D_i}{D_i \partial z_i^2} \right] \end{aligned} \quad (VI.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i^3} &= \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i^2} \left[\frac{\partial BH_i}{BH_i \partial X_i} + \frac{1}{X_i - r} - \frac{\partial AB_i}{AB_i \partial X_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial X_i} \right] \\ + \frac{\partial \delta_i}{\partial X_i} &\left[- \left(\frac{\partial BH_i}{BH_i \partial X_i} \right)^2 - \left(\frac{1}{X_i - r} \right)^2 + \left(\frac{\partial AB_i}{AB_i \partial X_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial D_i}{D_i \partial X_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 BH_i}{BH_i \partial X_i^2} - \frac{\partial^2 AB_i}{AB_i \partial X_i^2} - \frac{\partial^2 D_i}{D_i \partial X_i^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.53})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i^2} &= \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i} \left[\frac{\partial BH_i}{BH_i \partial z_i} + \frac{1}{z_i} - \frac{\partial AB_i}{AB_i \partial z_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial z_i} \right] + \\ \frac{\partial \delta_i}{\partial z_i} &\left[- \frac{\frac{\partial BH_i}{\partial X_i} \frac{\partial BH_i}{\partial z_i}}{BH_i^2} + \frac{\frac{\partial AB_i}{\partial X_i} \frac{\partial AB_i}{\partial z_i}}{AB_i^2} + \frac{\frac{\partial D_i}{\partial X_i} \frac{\partial D_i}{\partial z_i}}{D_i^2} + \frac{\partial^2 BH_i}{BH_i \partial X_i \partial z_i} - \frac{\partial^2 AB_i}{AB_i \partial X_i \partial z_i} - \frac{\partial^2 D_i}{D_i \partial X_i \partial z_i} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial X_i^2} &= \frac{\partial^2 \delta_i}{\partial X_i \partial z_i} \left[\frac{\partial BH_i}{BH_i \partial X_i} + \frac{1}{X_i - r} - \frac{\partial AB_i}{AB_i \partial X_i} - \frac{\partial D_i}{D_i \partial X_i} \right] \\ + \frac{\partial \delta_i}{\partial X_i} &\left[- \frac{\frac{\partial BH_i}{\partial z_i} \frac{\partial BH_i}{\partial X_i}}{BH_i^2} + \frac{\frac{\partial AB_i}{\partial z_i} \frac{\partial AB_i}{\partial X_i}}{AB_i^2} + \frac{\frac{\partial D_i}{\partial z_i} \frac{\partial D_i}{\partial X_i}}{D_i^2} + \frac{\partial^2 BH_i}{BH_i \partial X_i \partial z_i} - \frac{\partial^2 AB_i}{AB_i \partial X_i \partial z_i} - \frac{\partial^2 D_i}{D_i \partial X_i \partial z_i} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.55})$$

$$\frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i^3} = \frac{\partial D_i}{D_i^2 \partial y_i} + \frac{1}{D_i^2} \left[\frac{\partial D_i}{\partial y_i} + y_i \frac{\partial^2 D_i}{\partial y_i^2} - \frac{2}{D_i} \left(\frac{\partial D_i}{\partial y_i} \right)^2 y_i \right] \quad (\text{VI.56})$$

$$\frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial z_i^2} = \left[DH_i - z_i^3 \left(1 + 3 \left(\frac{DH_i}{D_i} \right)^2 \right) \right] \frac{y_i}{D_i^3} \quad (\text{VI.57})$$

$$\frac{\partial^3 \delta_i}{\partial y_i \partial X_i^2} = \frac{y_i}{D_i^3} \left[DH_i - y_i^2 - 3 \frac{y_i DH_i}{D_i} \frac{\partial D_i}{\partial y_i} \right] \quad (\text{VI.58})$$

$$\frac{\partial^3 \delta_i}{\partial z_i \partial y_i^2} = \frac{z_i}{D_i^3} \left[DH_i - y_i^2 - 3 \frac{y_i DH_i}{D_i} \frac{\partial D_i}{\partial y_i} \right] \quad (\text{VI.59})$$

$$\frac{\partial^3 \delta_i}{\partial X_i \partial y_i^2} = \frac{X_i - r}{D_i^3} \left[DH_i - y_i^2 - 3 \frac{y_i DH_i}{D_i} \frac{\partial D_i}{\partial y_i} \right] \quad (\text{VI.60})$$

2. Linéarisation de Cg_i :

On a trouvé que :

$$Cg_i = E_2 \overrightarrow{AC_i} \wedge (\overrightarrow{N} + B_i \overrightarrow{Z_i})$$

Cg_i ne dépend ni de $\dot{\alpha}$ ni de $\ddot{\alpha}$, il ne faut que trouver $\frac{\partial Cg_i}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial Cg_i}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial Cg_i}{\partial \alpha_k}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial Cg_i}{\partial \alpha_i} = E_2 \frac{\partial AC_i}{\partial \alpha_i} \wedge (\vec{N} + B_i \vec{Z}) + E_2 \vec{AC}_i \wedge \left(B_i \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_i} \right) \\ \frac{\partial Cg_i}{\partial \alpha_j} = E_2 \vec{AC}_i \wedge \left(B_i \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_j} \right) \\ \frac{\partial Cg_i}{\partial \alpha_k} = E_2 \vec{AC}_i \wedge \left(B_i \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_k} \right) \end{cases}$$

Les nouveaux termes sont : $\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_j}$ et $\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_k}$. // On sait que $\vec{Z}_i = (E_1 \vec{Z}) \vec{u}_i$, donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial \alpha_i} = \left(E_i \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_i} \right) \vec{u}_i + (E_i \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial \alpha_j} = \left(E_i \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_j} \right) \vec{u}_i + (E_i \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial \alpha_k} = \left(E_i \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_k} \right) \vec{u}_i + (E_i \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \alpha_k} \end{cases}$$

On a déjà calculé $\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \alpha}$ dans cette partie (), il reste $\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha}$:

$$\vec{N}_u = U \cdot \vec{Z} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \vec{Z} + U \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_i} \quad (\text{VI.61})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_i} = -U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \vec{Z}$$

Et c'est la même chose avec j et k .

Finalement pour tout les valeurs de i , j et k on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{Z}_1}{\partial \alpha_1} = \left(E_1 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_1} \right) \vec{u}_1 + (E_1 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \vec{Z}_1}{\partial \alpha_2} = \left(E_1 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_2} \right) \vec{u}_1 + (E_1 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \vec{Z}_1}{\partial \alpha_3} = \left(E_1 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_3} \right) \vec{u}_1 + (E_1 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (\text{VI.62})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{Z}_2}{\partial \alpha_1} = \left(E_2 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_1} \right) \vec{u}_2 + (E_2 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \vec{Z}_2}{\partial \alpha_2} = \left(E_2 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_2} \right) \vec{u}_2 + (E_2 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \vec{Z}_2}{\partial \alpha_3} = \left(E_2 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_3} \right) \vec{u}_2 + (E_2 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (\text{VI.63})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{Z}_3}{\partial \alpha_1} = \left(E_3 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_1} \right) \vec{u}_3 + (E_3 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \vec{Z}_3}{\partial \alpha_2} = \left(E_3 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_2} \right) \vec{u}_3 + (E_3 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \vec{Z}_3}{\partial \alpha_3} = \left(E_3 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_3} \right) \vec{u}_3 + (E_3 \vec{Z}) \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \alpha_3} \end{cases} \quad (\text{VI.64})$$

Démonstration

Dans le triangle C_1TL on trouve :

$$\sin(\theta) = \frac{a}{2R} \implies R = \frac{a}{2 \sin(\theta)} \quad (\text{VI.65})$$

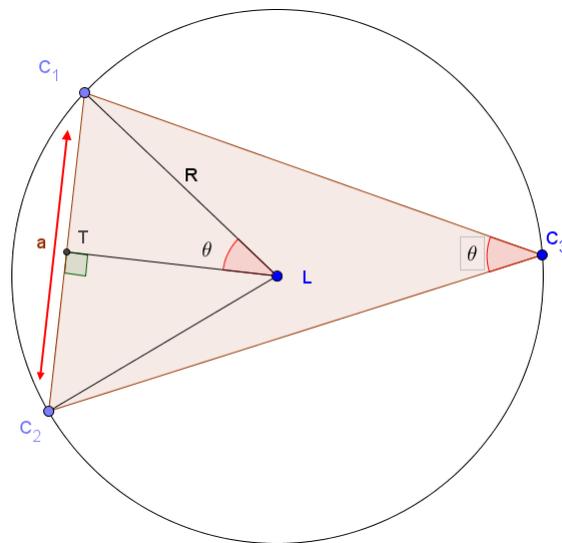


Figure VI.1 – Le rayon R

Dans le triangle abc et d'après le théoreme d'El Kashi :

$$\cos(\theta) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \implies \sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4 \cdot b^2 \cdot c^2} \quad (\text{VI.66})$$

$$\sin(\theta)^2 = \frac{4 \cdot b^2 \cdot c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4 \cdot b^2 \cdot c^2} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2 + 2 \cdot b \cdot c)(-b^2 - c^2 + a^2 + 2 \cdot b \cdot c)}{4 \cdot b^2 \cdot c^2} \quad (\text{VI.67})$$

$$\sin(\theta)^2 = \frac{[(b+c)^2 - a^2][-(b-c)^2 + a^2]}{4 \cdot b^2 \cdot c^2} = \frac{1}{4b^2 \cdot c^2} [(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)] \quad (\text{VI.68})$$

$$\sin(\theta)^2 = \frac{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{4 \cdot b^2 \cdot c^2} \quad (\text{VI.69})$$

Finalement on trouve :

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}} \quad (\text{VI.70})$$

Avec $p = a + b + c$

La surface S_{Δ} du triangle :

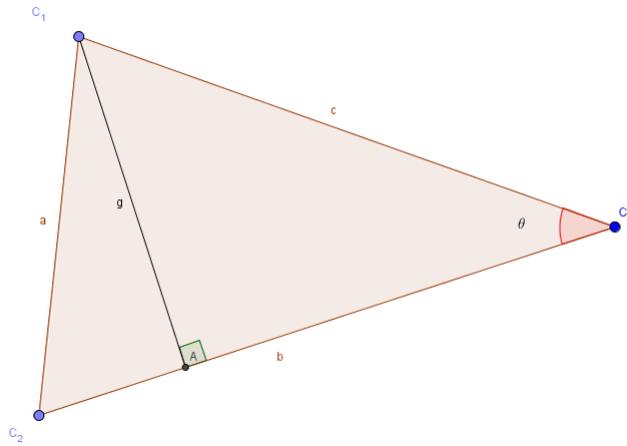


Figure VI.2 – La surface S_{Δ}

$$S_{\Delta} = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} \quad (\text{VI.71})$$

On a trouvé :

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}}{2 \cdot b \cdot c} \quad (\text{VI.72})$$

Donc :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4} \sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)} \quad (\text{VI.73})$$

Alors :

$$4 \cdot R \cdot S_{\Delta} = a \cdot b \cdot c \quad (\text{VI.74})$$

Finalement on trouve, pour $S = 2 \cdot S_{\Delta}$ alors :

$$2 \cdot R \cdot S = a \cdot b \cdot c \quad (\text{VI.75})$$