

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE



SCIENTIFIQUE

Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Doctorale Sciences de l'Eau et Développement Durable

Option Traitement des Effluents Industriels

Laboratoire de Recherche Sciences de l'Eau



Mémoire de Magister en Traitement des Effluents Industriels

Présenté par :

**M<sup>elle</sup> DJABELKHIR Karima**

Ingénieur d'Etat en Hydraulique (E.N.P Alger)

**THEME**

**Simulation numérique de la dispersion  
d'un polluant actif dans un canal  
via un schéma implicite**

**Soutenu publiquement le 8 Mars devant le jury :**

Présidente	Professeur A. HELLAL	ENP Alger
Rapporteur	Docteur S. BENMAMAR M.C(A)	ENP Alger
Examineurs	Professeur L. NOURI	UMB Boumerdès
	Docteur D. ARRAR M.C(A)	ENP Alger
	Docteur S. ZEBoudje M.C(A)	ENP Alger
	Docteur M. MIHOUBI M.C(A)	ENSH Blida

Année universitaire 2010-2011

## REMERCIEMENTS

*Que puissent trouver ici l'expression de ma reconnaissance et de ma gratitude mon professeur et ma promotrice S. BENMAMAR pour son aide et ses conseils.*

*Je remercie professeur A. Hellal qui m'a offert le plaisir de le voir présider le jury proposé pour ma soutenance.*

*Je tiens aussi à remercier Mm Zeboudje et Melle Arrar Maître de conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique, Alger, Pr Nouri Maître de conférences à l'université Mohamed Bougerra,, Boumerdes et Mr Mihoubi Maître de conférences à l'Ecole Supérieure d'Hydraulique, Blida d'avoir accepté d'examiner et de juger mon travail.*

*Une grande reconnaissance et un grand merci à ma frangine Dr A. DJABELKHIR (Docteur à l'Université de Pierre et Marie Curie<sup>9</sup>, Paris) pour son soutien morale et scientifique.*

*Mes vifs remerciements vont également à mes parents et toute ma famille ainsi que mes amies qui n'ont jamais hésité le moindre instant à se tenir à mes côté lors des moments relativement difficiles.*

*Je présente mes remerciements à l'ensemble des enseignants, la direction de l'Ecole Nationale Polytechnique et le ministère de tutelle pour avoir veillez à notre formation.*

*Enfin, un grand merci pour toutes les personnes qui ont contribuées de préee ou de loin pour la réalisation de ce modeste travail.*

## ملخص

إن المصادر المائية ذات أهمية بالغة سواء للإنسان, الحيات البحرية و الزراعة, غير أن تفاقم التلوث النقطي في الوديان يحث على تنمية وسائل التمثيل الرقمي التي تسمح بإيجاد و بدقة متناهية مجالات السرعة و التركيز بدلالة الفضاء و الزمن. إن الهدف من هذا البحث هو النمذجة الرقمية لتلوث السيلاينات ذات السطح الحر, و لدراسة هذه الظاهرة قمنا بانجاز نموذج رياضي يصف المراحل الهيدروديناميكية و مراحل تنقل الملوث و تمثيلها في قناة مستطيلة. تم حل النموذج الرياضي بالاستعانة بمخطط رقمي بنهايات مختلفة ل : Beam Warming. لقد قمنا بمقارنة النتائج الرقمية بالتجريبية المقامة بمخبر LRS-eau, ومن ذلك قمنا بقبول نموننا. **كلمات المفتاح** : انتشار التلوث - النمذجة الهيدروديناميكية - طريقة النهايات المختلفة- مخطط رقمي.

## Résumé

Les ressources hydriques sont d'une importance capitale pour l'homme, la vie aquatique et l'agriculture. Cependant, la présence de plus en plus fréquente de pollutions ponctuelles dans les rivières incite à développer des outils de simulation numérique permettant de déterminer très précisément les champs de vitesses et de concentrations en fonction de l'espace et du temps.

Ce travail de recherche a pour objectif, la simulation numérique de la pollution dans les écoulements à surface libre. Pour ce faire, un modèle mathématique décrivant les processus hydrodynamiques et le transport du polluant a été élaboré et présenté dans un canal rectangulaire. La résolution du système d'équation ainsi obtenu a été effectuée par l'utilisation du schéma implicite aux différences finies de Beam Warming.

Une confrontation des résultats numériques obtenus aux résultats expérimentaux issus des expériences effectuées aux LRS – Eau nous a permis de valider notre modèle.

**Mots clés** : Dispersion de la pollution - Modèle Hydrodynamique – Méthode des Différences Finies - Beam Warming.

## Abstract

Hydraulic resources have a great importance in domestic, agricultural and industrial applications. However, increasing of punctual pollution in the rivers push to develop tools for numerical simulation making it possible to determine very precisely the velocity and concentrations fields according to space and time.

The purpose of this work is the numerical modelling of water flow pollution on free surface.

A mathematical model describing the hydrodynamic process and the transport of the pollutant was elaborated and represented in a rectangular channel. The implicit scheme of Beam Warming for finites differences method was adopted to solve the equations that represent our scheme.

A comparison between numerical results and experimental data resulting from the experiments carried out at the LRS – Eau enabled us to validate our model.

**Key words** : Dispersion of pollution - Hydrodynamic model - finites differences method - Beam Warming.

**Liste des figures**

<b>N°</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>I-1</b>	Relation entre $\beta_{DL}$ et $u/u^*$ pour les 2 tronçons considérés	6
<b>I-2</b>	Comparaison des profils de vitesse entre la simulation et les résultats théoriques	13
<b>I-3</b>	Comparaison entre les résultats calculés et théoriques au sujet de la concentration en dépôt	14
<b>I-4</b>	Forme inférieure initiale avec la pente 1:10	16
<b>I-5</b>	Comparaison entre la simulation et la mesure avec une pente 1:10	17
<b>I-6</b>	Les effets du coefficient $\alpha$ pour le calcul de l'évolution du lit avec une pente 1:10	17
<b>I-7</b>	Grille dans le lac Xuanwu	20
<b>I-8</b>	Champ de la vitesse dans le lac Xuanwu à 48 h	21
<b>I-9</b>	Découpes de $COD_{Mn}$ calculé à 9d	21
<b>I-10</b>	Découpes de $COD_{Mn}$ calculé à 29 d	22
<b>I-11</b>	La diffusion latérale.	24
<b>I-12</b>	Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique à $x = 20$ et $100m$ .	26
<b>I-13</b>	Variation de la concentration en fonction du temps dans la section $U_1$ .	27
<b>I-14</b>	Découpe de concentration à $t=20s$ (a) Résultat expérimental ; (b) Simulation numérique.	28
<b>I-15</b>	Comparaison entre les résultats réels et ceux du modèle ANFIS dans l'étape d'apprentissage.	35
<b>I-16</b>	Performance des résultats du modèle ANFIS dans l'étape d'apprentissage.	36
<b>I-17</b>	Comparaison entre les résultats réels et ceux du modèle ANFIS dans l'étape d'essai.	36
<b>I-18</b>	Performance des résultats du modèle ANFIS dans l'étape d'essai.	36

---

---

*LISTE DES FIGURES*

---

---

<b>II-1</b>	Illustration schématique de la diffusion moléculaire superposée à la convection	54
<b>II-2</b>	(a) Mouvement tourbillonnaire de l'écoulement turbulent ; (b) Fluctuations turbulentes de la composante longitudinale de la vitesse autour d'une valeur moyenne, mesurée dans un point fixe d'un cours d'eau.	55
<b>II-3</b>	Mélange d'un colorant dans un bassin par	56
<b>II-4</b>	Représentation schématique de la dispersion	57
<b>II-5</b>	Le domaine matériel $\Omega$ soumis à un bilan pour une grandeur physique C	58
<b>III-1</b>	Les différents comportements des schémas	62
<b>III-2</b>	Schéma du maillage aux différences finies	66
<b>IV-1</b>	Déversoir à mince paroi	88
<b>IV-2</b>	Echancrure du déversoir	88
<b>IV-3</b>	Variation de la vitesse transversale suivant la largeur du canal.	91
<b>IV-4</b>	Variation de la vitesse longitudinale le long du canal.	92
<b>IV-5</b>	Variation de la concentration du phénol à la surface libre en fonction du temps à deux sections $x=2m$ et $x=3m$ de l'injection.	93
<b>IV-6</b>	Variation de la concentration en fonction du temps à 2m et 3m de distance de l'injection.	93
<b>IV-7</b>	Variation de la concentration en fonction du temps du phénol à 2 cm du fond.	94
<b>IV-8</b>	Variation de la concentration en fonction du temps au fond du canal pour une source discontinue.	95
<b>IV-9</b>	Variation de la concentration du phénol à 2 cm du fond en fonction du temps à 2m du lieu d'injection continue de pollution.	95
<b>IV-10</b>	Variation de la concentration en fonction du temps pour une source continue.	96
<b>IV-11</b>	Variation de la concentration du phénol à 2 cm du fond en fonction du temps à 2m du lieu d'injection continue de pollution	97
<b>IV-12</b>	Variation de la concentration en fonction du temps pour une source continue	97
<b>IV-13</b>	Variation de la concentration du phénol à la surface libre en fonction du temps à $x = 2m$ pour deux débits différents.	98
<b>IV-14</b>	Variation de la concentration en fonction du temps pour les deux débits $Q=0.54l/s$ et $Q=0.62l/s$ à $x=2m$ .	98

## *LISTE DES FIGURES*

---

---

<b>IV-15</b>	Variation de la concentration du phénol pour $Q = 0,42$ l/s et $C_0 = 600$ mg/l pour une injection discontinue de la pollution.	99
<b>IV-16</b>	Variation de la concentration du phénol pour $Q = 0,42$ l/s et $C_0 = 700$ mg/l avec une injection discontinue de la pollution.	99
<b>IV-17</b>	Variation de la concentration du phénol en fonction du temps pour une concentration initiale de $C_0=600$ mg/l et $C_0=700$ mg/l.	100
<b>IV-18</b>	Variation de la concentration du phénol pour $Q = 0,42$ l/s et $C_0 = 600$ mg/l - Cas d'injection continue de pollution.	101
<b>IV-19</b>	Variation de la concentration du phénol pour $Q = 0,42$ l/s et $C_0 = 700$ mg/l- Cas d'injection continue de pollution.	101
<b>IV-20</b>	Variation de la concentration du phénol en fonction du temps pour une concentration initiale $C_0=600$ mg/l.	102

### **Liste des photographies**

<b>N°</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>IV-1</b>	Installation expérimentale	86
<b>IV-2</b>	Dispositif de mesure de la hauteur d'eau (Papier millimétré)	90

**Liste des tableaux**

<b>N°</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>I-1</b>	Les coefficients de dispersion $\hat{D}_{Ts}$ et $\hat{D}_{Ts}^{\Gamma}$ pour une gamme de l'épaisseur de la couche d'absorption	11
<b>I-2</b>	Résultats calculés de $COD_{Mn}$ en cellules choisies	22
<b>I-3</b>	RMSE et bilans de matière des résultats de simulation pour la diffusion latérale problème	25
<b>I-4</b>	Équations empiriques pour l'évaluation du coefficient de dispersion longitudinale.	30
<b>I-5</b>	Description de la base de données collectée.	32
<b>I-6</b>	Résultats statistiques des équations empiriques dans la prévision des valeurs de $K_x$ .	33
<b>I-7</b>	Résultats statistiques du modèle ANFIS lors de l'apprentissage et des étapes d'essai.	35
<b>III-1</b>	Les différentes formulations du schéma de Beam Warming.	66

**Liste des symboles**

<b>Symbole</b>	<b>Unité</b>	<b>Signification</b>
A	m <sup>2</sup>	Section transversale du canal.
B	m	Largeur du canal.
C	mg/l	Concentration moyenne.
C	mg/l	Fluctuation de concentration.
C <sub>0</sub>	mg/l	Concentration initiale.
C <sub>f</sub>	-	Coefficient de frottement.
C <sub>h</sub>	m <sup>1/2</sup> /s	Coefficient de Chezy.
C <sub>n</sub>	-	Nombre de Courant.
C <sub>s</sub>	mg/l	Concentration dans la zone morte.
C <sub>μ</sub>	-	Constante numérique.
C <sub>ε1</sub>	-	Constante numérique.
C <sub>ε2</sub>	-	Constante numérique.
DaI	m <sup>2</sup> /s	Indice de Damköler.
D <sub>m</sub>	m <sup>2</sup> /s	Coefficient de diffusion moléculaire.
D <sub>t</sub>	m <sup>2</sup> /s	Diffusivité turbulente.
D <sub>tx</sub>	-	Diffusivité turbulente longitudinale.
D <sub>tz</sub>	-	Diffusivité turbulente transversale.
E		Paramètre de rugosité de parois.
Fr	N	Nombre de Froude.
F	N	Somme des forces des extérieures.
F <sub>x</sub>	N	Composante longitudinale de la force extérieure de volume.
F <sub>y</sub>	N	Composante transversale de la force extérieure de volume.
F <sub>z</sub>	m/s <sup>2</sup>	Composante verticale de la force extérieure de volume.
G	m	Accélération gravitationnelle.
H	m	Hauteur.
H <sub>0</sub>	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Hauteur initiale.
K	m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Energie cinétique turbulente.
k <sub>0</sub>	s <sup>-1</sup>	Energie cinétique turbulente initiale.
k <sub>r</sub>	m	Coefficient de réaction.
L	mg	Longueur du canal.
M <sub>0</sub>	s/m <sup>1/3</sup>	Masse initiale du polluant.
N	N/m <sup>2</sup>	Coefficient de Manning.
P	N/m <sup>2</sup>	Pression instantanée.
P	-	Fluctuation de pression.
Ppm	N/m <sup>2</sup>	Partie par million.
P <sub>0</sub>	(m <sup>3</sup> /s)	Pression initiale.
P <sub>r</sub>	(m <sup>3</sup> /s)	Production de l'énergie cinétique turbulente.
Q	-	Débit d'écoulement.
Q <sub>0</sub>	m	Débit d'entrée.
Re	-	Nombre de Reynolds.
R <sub>h</sub>	-	Rayon Hydraulique.
S <sub>fx</sub>	-	Pente de frottement eau- fond du canal dans les directions x.
S <sub>fz</sub>	-	Pente de frottement eau- fond du canal dans les directions z.
S <sub>ox</sub>	-	Pentes du canal dans la direction x.
S <sub>oz</sub>	-	Pentes du canal dans la direction z.

**LISTE DES SYMBOLES**

$u_*$	m/s	Vitesse de frottement à la paroi.
$U$	m/s	Composante longitudinale de la vitesse instantanée.
$\overline{U}$	m/s	Composante longitudinale de la vitesse de l'écoulement moyen.
$U'$	m/s	Fluctuation de la vitesse dans la direction longitudinale.
$U_0$	m/s	Vitesse longitudinale initiale.
$V$	m/s	Composante verticale de la vitesse instantanée.
$\overline{V}$	m/s	Composante verticale de la vitesse de l'écoulement moyen.
$V'$	m/s	Fluctuation de la vitesse dans la direction verticale.
$V_{ol}$	$m^3$	Volume.
$V_m$	m/s	Vitesse moyenne.
$W$	m/s	Composante transversale de la vitesse instantanée.
$\overline{W}$	m/s	Composante transversale de la vitesse de l'écoulement moyen.
$W'$	m/s	Fluctuation de la vitesse dans la direction transversale.
$W_0$	m/s	Vitesse transversale initiale.
$x, z$	-	Coordonnées cartésiennes.
$A$	-	Coefficient arbitraire.
$\varepsilon$	$m^2/s^3$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.
$\varepsilon_0$	$m^2/s^3$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente initiale.
$\rho$	$kg/m^3$	Masse volumique du fluide.
$\mu$	$N.s/m^2$	Viscosité dynamique du fluide.
$\nu_t$	$m^2/s$	Viscosité turbulente.
$\nu$	$m^2/s$	Viscosité cinématique du fluide.
$\delta_{ij}$	-	Indice Kronecker.
$\kappa$	-	Constante de Von Karman.
$\tau$	$N/m^2$	Contrainte de frottement à la paroi.
$\sigma_k$	-	Constante numérique.
$\sigma_e$	-	Constante numérique.
$\Delta t$	S	Pas de temps.
$\Delta x$	m	Pas d'espace suivant la direction x.
$\Delta z$	m	Pas d'espace suivant la direction z.

## Bibliographie

**Alavian, V. (1986).** «Dispersion tensor in rotating flows». J. Hydr. Eng., ASCE 112 (8), pages 771-777.

**Abdoulaye, E. I. (2007).** «Simulation numérique de la dispersion d'un polluant actif dans un canal». Projet de Fin d'Etude de l'Ecole Nationale Polytechnique Alger, pages 42-67.

**Baek, K. O. & Seo, I. W. & Jeong, S. J. (2006).** «Evaluation of dispersion coefficient in meandering channels from transient tracer tests». J. Hydr. Eng., ASCE 132 (10), 1021-1032.

**Benmamar, S. (2006).**

**Beam, R. M. & Warming, R. F. (1976).** «An Implicite Finite Difference Algorithm for Hyperbolique Systems in Conservation Law Form». Journal of Computational physics, Volume 22, pages 87-110.

**Ben Tahar, M. (2007).** Cour « méthode des différences finis ». Edition Université de Technologie Compiègne, pages 1-45.

**Blanckaert, K. (2006).** «Hydraulique fluviale et aménagement des cours d'eau», cour Transport de matière.

**Cadot, O. (2006).** «Introduction à la Turbulence». Polycopié de cours ENSTA, pages 45-126.

**Carlier, M. , (1986).** «Hydraulique général et appliquée». Edition Eyrolles.

**Caussade, B. & Chaussavoine, C. & Masbernat, L. (1982).** «Modelling of turbulent fluxes in water surface ecosystems studies». Mathematics and computers in simulation 24, pages 224-229.

**Cazelles, B. & Fontvieille, D. (1989).** «Modélisation d'un écosystème lotique pollué par une charge organique : prise en compte de l'hydrodynamique et des mécanismes de transport». Revue des Sciences de l'Eau, pages 183-209.

**Chassaing, P. (2000).** «Turbulence en mécanique des fluides». Edition CEPADUES, pages 30-155.

**Chiu-on, N. G. (2006).** «Dispersion in open-channel flow subject to the processes of sorptive exchange on the bottom and air-water exchange on the free surface». Conference of Global Chinese Scholars on Hydrodynamics, pages 57-64.

**Davies, A. G. & Van Rijn, L. C. (2002).** «Intercomparison of research and practical sand transport models». Coastal Engineering, 46 (1), pages 1-23.

**Deng, Z. Q. & Singh, V. P. & Bengtsson, L. (2001).** «Longitudinal dispersion coefficient in single channel streams». Journal of Hydraulic Engineering, 128(10), pages 901-916.

**Elder, J. W. (1959).** «The dispersion of a marked fluid in turbulent shear flow». Journal of Fluid Mechanics, 5(4), 544-560.

- Eun Lee, M. & Won Seo, I. (2007).** «Analysis of pollutant transport in the Han River with tidal current using a 2D finite element model». *Journal of Hydro-Environment Research*, pages 30-42.
- Euvrard, D. (1993).** «Résolution numérique des équations aux dérivées partielles». Edition Masson, pages 46-78.
- Fabre, J. & Ramany Bala, P.(1980).** «Equations générales de transfert de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, dans les eaux de surfaces». *Annls Univ. Abidjan, Série C, Tomes XVI*, pages 70-102.
- Favre, A. & Kovaznay, L. (1988).** «Turbulence en mécanique des fluides». Gautier-Villars, Paris.
- Favre, A. & Kovaszny, L. S. G. & Dumas, R. & Gaviglio, J. & Coantic, M. (1976).** «Turbulence en mécanique des fluides» Paris : Gauthier Villard, pages 222-411.
- Fisher, B. H. (1967).** «The mechanics of dispersion in natural streams». *Journal of Hydraulic Division, American Society of Civil Engineering*, 93(6), pages 187–216.
- Fisher, H. B. & List, E. J. & Koh, R. C. Y. Imberger, J. & Brooks, N. H. (1979).** «Mixing in inland and costal waters». San Diego: Academic Press Inc. pages 104–138.
- Fontvieille, D. & Renaud, M. (1982).** «A method of estimating the respiration of mud communities in shallow running water». *Water Res* 16-5, pages 593-599.
- Fontvieille, D. & Cazelles, B. (1985).** «Modification de l'importance relative des flux de carbone organique d'un ruisseau pollué après une période de crues». *Verh. Internat. Verein. Limol* 22, pages 2270-2276.
- Fontvieille, D. (1987).** «La circulation du carbone organique dans les écosystèmes lotiques : cas du phénomène d'auto-épuration». Thèse de doctorat d'état N°8747, Université Lyon1, page 189.
- Fontvieille, D. & Cazelles, B. (1988).** «Seasonal changes of some physiological and structural parameters in the sediments of an organically polluted stream». *Verh. Internat. Verein. Limol* 23, pages 1306-1312.
- Graba, M. (2002).** «Simulation de la dispersion de la pollution dans les écoulements à surface libre ». Mémoire de magister de l'Université Abderahmane Mira de Bejaia, pages 43-46.
- Graf, W. H. & Altinakar, M. S. (1996).** «Hydraulique Fluviale». Presses polytechniques et Universitaires Romande, Tome II, pages 345-389.
- Guo Qing-chao, 2000.** «Numerical modeling of suspended sediment transport». [D]. Ph. D. Thesis, Regina, Canada, University of Regina.
- Ikni, T. (2003).** «Simulation numérique des écoulements à surface libre dans des canaux à géométrie variable en utilisant le schéma de Beam et Warming». Mémoire de magister de l'Université Abderahmane Mira de Bejaia, pages 76-85.

- Iwasa, Y. & Aya, S. (1991).** «Predicting longitudinal dispersion coefficient in openchannel flows. In Proceedings of international symposium on environmental hydraulics, Hong Kong, pages 505–510.
- JAEGER, M. (1990).** "Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides newtoniens par éléments Finis Tridimensionnels". Thèse de Doctorat; Université de technologie de Compeigne.
- Jin-ren, N. & Lin, L. (2000).** «Particle suspension in sediment-laden flow». Journal of Sediment Research, pages 7-12.
- Jing-xin, Z. & Hua, L. (2006).** «A vertical 2-d numerical simulation of suspended sediment transport». Journal of Hydrodynamics, pages 217-224.
- Kashefipour, S. M. & Falconer, A. (2002).** «Longitudinal dispersion coefficients in natural channels». In Proceedings of the fifth international hydro informatics conference, 1–5 July, Cardiff University, pages 95–102.
- Kessili, (2006).** «Etude expérimentale de la dispersion d'un polluant actif dans un canal rectangulaire». Mémoire de magister de l'Université Abderahmane Mira de Bejaia, pages 58-94.
- Koobus, B. & Nicoud, F. (2008).** Calcul Scientifique pour les Sciences de l'Ingénieur, pages 11-34.
- Koussis, A. D. & Rodriguez-Mirasol, J. (1998).** «Hydraulic estimation of dispersion coefficient for streams». Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 124, pages 317–320.
- Lauder, B. E. & Reece, G. J. & Rodi, W. (1975).** «Progress in the development of the Reynolds stress turbulence closure». Journal of Fluid Mechanic, volume 68, part 3, pp. 537-566.
- Leopold, L. B. & Wolman, M. G. & Miller, J. P. (1964).** «Fluvial processes in geomorphology». Freeman, San Francisco, page 522.
- Lesieur, M. (1982).** «La turbulence développée». La Recherche, volume 139, pages 1412-1425.
- Li, Z. H. & Huang, J. & Li, J. (1998).** «Preliminary study on longitudinal dispersion coefficient for the gorges reservoir». In Proceedings of the seventh international symposium environmental hydraulics, 16–18 December, Hong Kong, China.
- Lin, P. N. & Shen, H. W. (1984).** «Two-dimensional flow with sediment by characteristics method». Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 110 (5) : 615-626.
- Liu H, 1977.** «Predicting dispersion coefficients of stream». J. environ. Eng. 103, pages 56-69.
- Louisnard, O. (1993).** «Initiation à MATLAB». Edition INRIA, pages 11-41.  
Maple 8. Waterloo Maple Software and the University of Waterloo, 1981-2002.
- Mc Quivey, R. S. & Keefer, T. N. (1974).** «Simple method for predicting dispersion in streams». Journal of Environmental Engineering Division, American Society of Civil Engineering, 100(4), pages 997–1011.

- Mohammadi, B. & Pironneau, O. (1994).** «Analysis of the  $k-\epsilon$  Turbulence Modèle». Edition Masson, pages 1-28.
- Nathalie, B. (1992).** «Modélisation tridimensionnelle du transport de polluants dans les écoulements à surface libre». Thèse de doctorat, Université Claude Bernard–Lyon1, pages 58-126.
- Ni Jin-ren & Liang Lin. (2000).** « Particle suspension in sediment-laden flow». Tome (I). Journal of Sediment Ressearch (Chinese), pages 7-12.
- Ni Jin-ren & Liang Lin. (2000).** « Particle suspension in sediment-laden flow». Tome (II). Journal of Sediment Ressearch (Chinese), pages 13-19.
- Ning, Q. & Zhao-hui, W. (1983).** «Sediment dynamics». Beijing : Science Press, pages 45-62.
- Quarteroni, A. & Sacco, R. & Saleri, F. (2000).** «Méthodes numériques : Algorithmes, analyse et application». Edition Springer, pages 471-489.
- Rastogi, A. K. & Rodi, W. (1978).** «Prediction of Heat and Mass Transfert in Open Channels». Journal of the Hydraulics Division, Volume 104, N°3, pages 397- 417.
- Riahi-Madvar, H. & Ayyoubzadeh, S. A. & Khadangi, E. & Ebadzadeh, M. M. (2008).** «An expert system for predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams by using ANFIS». An International Journal : Expert Systems with Applications, pages 1-8.
- Richtmyer, R. D. & Norton, K. W. (1967).** «Difference Methods for Initial Value Problem». John Wiley and Sons, New York, 2<sup>ème</sup> Edition, pages 211-237.
- Rodi, W. (1980).** «Turbulence models and their application in hydraulics». A State of the art review, University of Karlsruhe, pages 68-91.
- Schiestel, R. (1993).** «Modélisation et Simulation des Ecoulement Turbulents». Edition Hermes, Paris, pages 22-45.
- Seo, I. W. & Cheong, T. S. (1998).** «Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural Stream». Journal of Hydraulic Engineering, pages 25–32.
- Steger, J. L. & Warming, R. F. (1981).** «Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with applications to finite-difference methods». Journal of Computational Physics, Vol. 40, 1981, pages 132-146.
- Sweby, P. K. (1988).** «High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws». SIAM J. Numer. Anal, pages 995-1011.
- Tayfour, G. & Singh, V. P. (2005).** «Predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams by artificial neural network». Journal of Hydraulic Engineering, 131(11), pages 991–1000.
- Toro, E. F. (1999).** «Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics». 2ème Edition Springer, Berlin, pages 427-434.

**Van Rijn, L. C. (1986).** «Mathematical modeling of suspended sediment in nonuniform flows». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 112(6) : pages 433-455.

**Viollet, P. L. & Chabard, J. P. & Esposito, P. & Laurence, D. (1998).** «Mécanique des fluides appliquées». Edition Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, pages 38-136.

**Warming, R. F. & Beam, R. M. (1978).** «On the Construction and Application of Implicit Factored Schemes for Conservation Laws». *Proc, Symposium on Computational Fluid Dynamics, SIAM-AMS, Volume 11*, pages 85-129.

**Wertel, J. (2006).** «Modélisation 3D des écoulements turbulents à surface libre en canal rectangulaire». Mémoire de TFE de l'Université Louis Pasteur Strasbourg, pages 30-120.

**Yong, J. & Zhang, J. & Qi, Y. & Di-hua, Z. (2006).** «Analysis of water quality in shallow lakes with a Two-dimensional flow-sediment model». *Journal of Hydrodynamics*, pages 501-508.

**Yoo, M. K. & Cho, S. W. & Jun, K. S. (2000).** «Unsteady Dispersion of Nonconservative Pollutants in Natural Rivers». Université de Sungkyunkwan, Corée du Sud, pages 74-89.

## Sommaire

	Page
<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
 <b>CHAPITRE I : Présentation de quelques travaux sur la modélisation et la simulation de la dispersion de matière dissoute dans les cours d'eau</b>	
Introduction.....	3
1. Travaux de B. Cazelles et D. Fontvieille (1989).....	3
2. Travaux de NG Chiu-on.....	7
3. Travaux de Zhang Jing-xin, Liu Hua (2006).....	11
4. Travaux de JI Yong, ZhANG Jie, YAO Qi et ZHAO Di-hua (2006).....	18
5. Travaux de La Lie De Myung Eun, Il A gagné Seo (2007).....	23
6. Travaux de Hossien Riahi-Madvar et al. (2008).....	29
Conclusion.....	37
 <b>CHAPITRE II : Modélisation mathématique de la dispersion d'un polluant actif dans les écoulements à surface libre</b>	
Introduction.....	38
1. Equations de Navier-Stokes à surface libre.....	38
1.1. Equations de mouvement.....	38
1.1.1. L'équation de continuité.....	38
1.1.2. L'équation de la quantité de mouvement.....	39
2. La turbulence.....	41
2.1. Définition de la turbulence.....	42
2.3. Les différentes approches de la turbulence.....	42
2.4. Equation dynamique du mouvement en un point .....	44
3. Modélisation de la turbulence.....	45
3.1. Classification des modèles en un point.....	46
4. Modèle de transport.....	51
4.1. Les mécanismes de transport et de mélange.....	51
4.1.1. La convection.....	52
4.1.2. La diffusion moléculaire.....	52
4.1.3. La diffusion turbulente.....	52
4.1.4. La dispersion.....	54
5.2. Modélisation des mécanismes de transport et de mélange.....	55
5.2.1. Modélisation tridimensionnelle de l'équation de transport.....	56

IV.2.2. Détermination des coefficients de diffusivité turbulente longitudinale et transversale .....	58
IV.2. 3. Transport avec réaction.....	58
IV.2.4. Equation du bilan de matière dans un système de coordonnées cartésiennes.....	58
Conclusion.....	59

### **CHAPITRE III : Modélisation mathématique de la dispersion d'un polluant actif via le schéma implicite de Beam Warming**

Introduction.....	60
1. Calcul numérique par différences finies.....	60
1.1. Principe de la méthode.....	61
1.2. Analyse de l'approximation.....	61
2. Choix du schéma numérique.....	64
2.1. Description du schéma de Beam Warming .....	64
2.1.1. Formulation générale.....	65
2.1.2. Factorisation du schéma.....	68
2.1.3. Factorisation implicite du flux divisé.....	69
2.2. Transformation des équations sous la forme générale du schéma de Beam Warming.....	73
2.2.1. Transformation des équations de la quantité de mouvement.....	73
2.2.2. Transformation de l'équation de l'énergie cinétique turbulente.....	74
2.2.3. Transformation de l'équation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.....	74
2.2.4. Transformation de l'équation de transport du polluant.....	74
2.3. Application de la méthode de Beam Warming.....	75
2.3.1. Bilan des équations à discrétiser.....	75
2.3.2. Détermination du champ de pression.....	76
2.3.3. L'application de la méthode de Beam Warming.....	76
3. Conditions initiales aux limites.....	79
3.1. Les conditions initiales.....	79
3.2. Conditions aux limites.....	79
IV. Résolution numérique.....	81
Conclusion.....	84

**CHAPITRE IV : validation du modèle et interprétation des résultats**

Introduction.....	85
1. Résolution numérique.....	85
1.1. Aperçu sur Matlab.....	85
2. Expériences au Laboratoire de Recherche Sciences de l'Eau.....	86
2.1. Description des expériences effectuées.....	86
2.2. Polluant utilisé.....	87
2.3. Moyens de mesures.....	88
2.3.1. Mesure de débit.....	88
2.3.2. Détermination du coefficient de débit.....	89
2.3.3. Mesure de la hauteur d'eau.....	89
2.3.4. Mesure de la concentration du polluant.....	90
3. Validation des résultats.....	91
3.1. Description du champ de vitesse transversale.....	91
3.2. Description du champ de vitesse longitudinale.....	91
4. Résultats et interprétations.....	92
3.1. Injection discontinue de la pollution.....	92
3.1.1. Variation de la concentration à la surface libre.....	92
3.1.2. Variation de la concentration au fond du canal.....	94
3.2. Cas d'une injection continue de pollution.....	95
3.2.1. Variation de la concentration à la surface libre.....	95
3.2.2. Variation de la concentration au fond du canal.....	96
3.3. Détermination de l'influence du débit sur l'évolution de la concentration.....	98
3.4. Effet de la variation de la concentration initiale du polluant.....	99
Conclusion.....	102
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>103</b>

## **Introduction générale**

De nos jours, la pollution constitue l'une des préoccupations majeures des pays industrialisés. Néanmoins, l'inquiétude gagne peu à peu les autres pays, notamment ceux dits en voie de développement.

La qualité de l'eau des rivières est un thème qui suscite énormément d'intérêt chez les scientifiques. En particulier, les recherches menées sur l'évolution des pollutions ponctuelles dans les rivières sont de plus en plus nombreuses. Elles répondent à une demande exprimée par les spécialistes de la protection de l'environnement qui souhaitent préserver la faune et la flore aquatique, par les distributeurs d'eau potable qui doivent tenir compte des déversements effectués à proximité de leurs prises d'eau mais également par les industriels qui attendent une réponse opérationnelle à leur problème de rejets en rivières.

Ces contaminants de diverses origines ont des conséquences parfois très graves sur les écosystèmes, c'est pour laquelle aujourd'hui, de nombreux pays se sont dotés de normes plus au moins sévères qui fixe les seuils de rejet de pollution à ne pas dépasser. Pour fixer ces seuils de rejet, il apparaît nécessaire de concevoir des méthodes et des outils de prédiction des profils des concentrations de la pollution résultants de ces rejets. Les modèles physiques (modèles réduits et les modèles analogiques) étant très chers à concevoir, par contre, la modélisation mathématique reste l'instrument le plus efficace et le moins coûteux. Elle présente plusieurs avantages, en particulier l'absence des effets d'échelles et la possibilité de reproduire le phénomène naturel d'une manière précise connaissant la géométrie du prototype et les lois physiques.

La modélisation mathématique consiste en la résolution d'un ensemble d'équations décrivant le comportement dynamique du processus physique. Ces équations peuvent être résolues en utilisant des techniques analytiques ou numériques. En général, l'application des techniques analytiques est limitée aux cas ayant des géométries très simples, en revanche le nombre de problème résolu numériquement ne cesse d'augmenter avec le développement technologique accéléré.

Actuellement, nous disposons de deux niveaux de modélisations numériques dans la simulation de la dispersion d'un polluant dans les cours d'eau, les modèles unidimensionnels qui décrivent le champ lointain en supposant que les concentrations sont homogènes dans la section transversale et les modèles bidimensionnels qui se consacrent au champs moyen en considérant que les concentrations sont cette fois homogène sur une verticale.

La résolution de l'équation décrivant les mécanismes qui assurent la dispersion d'une substance dans un écoulement turbulent et qui sont : La diffusion moléculaire (généralement négligée), la convection et la diffusion turbulente.

Le principal objectif de ce mémoire est de réaliser un outil de simulation numérique de dispersion d'un polluant actif dans les écoulements à surface libre par la méthode des différences finies. Dans le premier chapitre, nous donnons une description de quelques travaux déjà réalisés en matière de simulation numérique du transport de matières dans les écoulements à surface libre afin de ressortir certaines lacunes qui existent encore dans le domaine. Nous sommes passé au deuxième chapitre à l'élaboration d'un modèle hydrodynamique 2 D permettant de décrire l'écoulement turbulent à surface libre ainsi que l'équation de transport. L'ensemble de ces équations nous a conduit à un système ouvert. La fermeture de ce dernier se fait par l'utilisation du modèle  $k - \epsilon$ .

Le troisième chapitre expose le développement du modèle numérique afin de résoudre le système d'équations ainsi obtenu. A ce niveau, le schéma implicite de Beam Warming est décrit et utilisé pour la discrétisation de l'ensemble de notre modèle. La méthode de la viscosité artificielle est aussi décrite dans ce chapitre afin de déterminer le champ de pression.

Les résultats ainsi obtenus à partir de notre modèle numérique sont présentés dans le dernier chapitre et comparés aux résultats issus des expériences effectuées au laboratoire LRS-Eau. Dans ce chapitre, nous mettons également en évidence l'influence de certains paramètres intervenant dans le modèle numérique sur nos résultats.

Et enfin, nous terminons ce mémoire par une conclusion.

## Chapitre I

# Présentation de quelques travaux sur la modélisation et la simulation de la dispersion de matière dissoute dans les cours d'eau

### Introduction

La problématique de la contamination des eaux superficielles par les rejets urbains et industriels constitue une préoccupation de plus en plus importante tant pour les pouvoirs publics que pour le grand public, à cause des conséquences dramatiques tant quant à la dégradation de la faune et la flore aquatique qu'aux incidences sur la santé humaine. La recherche sur les écoulements dans les lacs et les rivières a été conduite par plusieurs disciples, mais la simulation des lacs peu profonds n'a toujours pas évolué suffisamment. Actuellement, les modèles numériques d'analyse basés sur 1-D et 2-D sont de plus en plus considérées, car sont fondés sur la description mathématique précise de la dynamique de la dispersion et les techniques à haute efficacité de calcul.

Des recherches concernant l'étude des rejets continus d'effluents, ont montré que les gradients de vitesse exercent une influence significative sur les processus de transfert et de diffusion de masse. La comparaison des flux de masse à travers les différentes sections transversales successives en témoigne. D'autres études visaient à quantifier l'influence des différents paramètres sur les champs de concentrations. Ces phénomènes de transport ont été étudiés par Taylor (1954) pour décrire la dispersion longitudinale dans une conduite cylindrique, et par Patterson et col. (1956), Fischer (1967) et Thacson et col. (1967) dans le cas d'un écoulement à surface libre dans un canal.

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques travaux effectués sur terrain et au laboratoire ainsi que des études théoriques et numériques des mécanismes régissant les phénomènes de transport et de dispersion dans les cours d'eau.

### **1. Travaux de B. Cazelles & D. Fontvieille (1989)**

Cazelles et Fontvieille (1989), ont présenté la partie hydrophysique d'un modèle écologique de la simulation des transferts de carbone organique dans un cours d'eau pollué par le rejet d'une porcherie. Le mélange et le transport des substances solubles dans l'écoulement d'un cours d'eau sont deux phénomènes complexes qui résultent de l'interaction entre les mécanismes de la convection et de la turbulence.

L'Albenche est un petit cours d'eau à forte pente où s'alternent les zones lentes et les zones rapides. La modélisation du transport des substances solubles dans l'Albenche a été réalisée par deux modèles : un modèle hydrodynamique et un modèle de transport.

Le rôle prépondérant des crues dans le fonctionnement de l'écosystème a justifié l'introduction dans les modèles des termes permettant la description de périodes de régimes non-stationnaires.

### 1.1. Modèle hydrodynamique

Les auteurs ont utilisé le modèle classique de Saint-Venant en considérant que :

- Les calculs hydrodynamiques ne sont pas affectés par la composition de l'eau ;
- Le mélange est complet dans chaque section de l'écoulement ;
- La forme géométrique des sections est trapézoïdale.

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = q(t) \quad (\text{I-1})$$

$$\frac{\partial U(x, t)A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial U^2(x, t)A(x, t)}{\partial x} + gA(x, t) \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} = g(I(x) - J(x, t))A(x, t) - U(x, t)q(t) \quad (\text{I-2})$$

$$A(x, t) = H(x, t) \left( BF + \frac{2H(x, t)}{\text{tg}\alpha} \right) \quad (\text{I-3})$$

$$B(x, t) = BF + 2 \frac{H(x, t)}{\text{tg}\alpha} \quad (\text{I-4})$$

A partir des valeurs expérimentales de  $A(x, t)$ ,  $H(x, t)$ ,  $B(x, t)$  mesurées au niveau des stations amont et aval, un algorithme d'optimisation a permis aux auteurs d'obtenir les valeurs optimum de la largeur du radier ( $BF = 1.5\text{m}$ ) et du fruit des berges ( $\alpha = 17^\circ$ ).

Compte tenu des variations des caractéristiques de l'écoulement, les auteurs de ce travail ont opté pour une simplification du modèle : l'équation de continuité du modèle de Saint-Venant a été conservée et l'équation dynamique remplacée par une équation empirique (**Leopold et col, 1964**) utilisée par de nombreux hydrobiologistes :

$$A(x, t) = CaQ(x, t)^{ea} \quad (\text{I-5})$$

### 1.2. Modèle de transport

A partir des équations de bilan des eaux de surface, les auteurs ont pu écrire des modèles pratiques applicables à des données expérimentales de terrain, à l'aide des hypothèses supplémentaires (**Fabre & Ramany & Bala, 1980 et Caussade et col, 1982**) :

- Simplification à l'aide de l'approximation de Boussinesq, qui permet notamment de ne pas tenir compte des effets des variations de masse volumique ;
- Prise en compte des moments statistiques des variables locales instantanées pour un écoulement turbulent.

Cazelles et Fontvieille ont abouti à l'équation classique de convection-diffusion pour un écoulement tridimensionnel :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( K_{x_i} \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) \quad (I-6)$$

Où,  $i$  est la direction de l'écoulement.

Dans le cas du cours d'eau d'Albenche, l'écoulement se fait préférentiellement dans la direction longitudinale. L'intégration de l'équation (I-6) sur une section droite de l'écoulement, permet d'obtenir une équation unidimensionnelle (modèle unifilaire) exprimant la variation des variables uniquement dans le sens de l'écoulement.

$$\frac{\partial A(x,t)C(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x,t)C(x,t)}{\partial x} = + \frac{\partial}{\partial x} \left( A(x,t)D_L(x,t) \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \right) \quad (I-7)$$

Où,  $D_L$  est le coefficient de dispersion longitudinale qui exprime l'influence des profils de vitesse et de la répartition des concentrations dans les sections mouillées de l'écoulement.

De nombreuses formulations ont été proposées pour calculer le coefficient de dispersion longitudinale, soit à partir des caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement. Dans le cas étudié, la formulation adoptée est celle de Liu (1977) :

$$D_L(x,t) = \beta_{DL} \frac{U(x,t)^2 B(x,t)^3}{U_p^*(x,t)A(x,t)} \quad ; \quad \text{avec, } \beta_{DL} = \alpha_j \left( \frac{U(x,t)}{U_p^*(x,t)} \right) \beta_j \quad (I-8)$$

Où,  $j$  représente le tronçon étudié parmi plusieurs tronçons considérés.

### **1.3. Ajustement des paramètres des modèles**

Les deux équations du modèle (I-5) et (I-7) sont discrétisées par la méthode des différences finies en utilisant des schémas de discrétisation implicite.

Les paramètres sont ajustés à l'aide :

- De valeurs expérimentales de débits et de surfaces mouillées mesurées au niveau des stations amont et aval (figure I-1) ;
- D'expériences de traçage à l'aide d'un traceur fluorescent, la rhodamine B.

En ce qui concerne l'équation (I-8), dans un premier temps  $\beta_{DL}$  est considéré comme un paramètre à ajuster lors de chaque simulation.

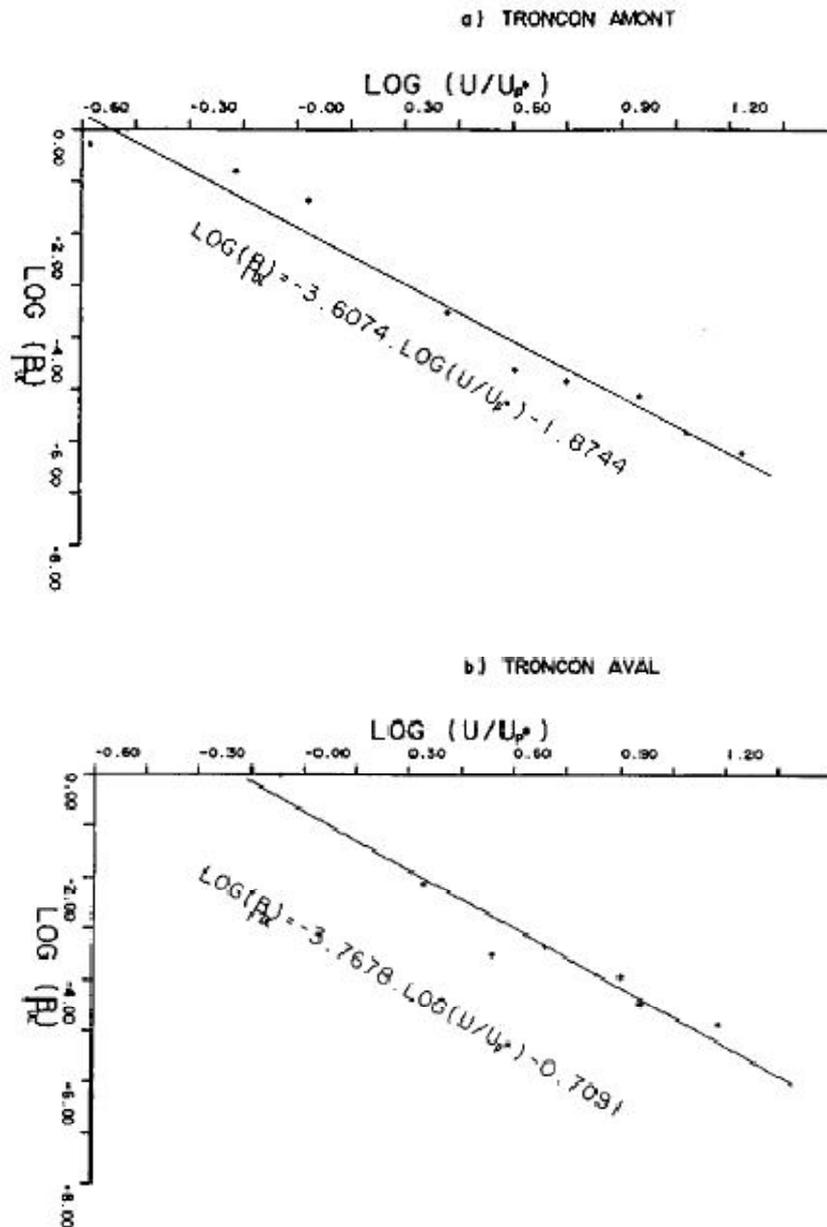


Figure I-1 : Relation entre  $\beta_{DL}$  et  $u/u^*$  pour les deux tronçons considérés.

#### 1.4. Application des modèles au transport du COD dans l'Albenche

La simulation de transport du carbone organique dissous (COD) dans l'Albenche, nécessite la connaissance des valeurs des concentrations à l'entrée du tronçon étudié. Ces valeurs peuvent être rattachées à 2 catégories : celles observées dans le milieu en l'absence de rejets et celles qui concernent le rejet de la porcherie.

Les modèles simulent le transport du COD sur une période de 48 heures, avec un pas de temps de 15 minutes et sous l'hypothèse que le cycle de 24 heures des flux, mesuré au niveau de la station amont, se reproduise de façon identique pendant toute la période simulée.

Ces campagnes correspondent à des périodes d'étiage de l'Albenche durant lesquelles les variations de débit sont faibles. Ces dernières ont, néanmoins, été prises en compte lors des simulations. Durant ces périodes d'étiage, l'apport du rejet de la porcherie est en moyenne de 150kg de carbone par jour. Il représente de 8% à 44% de la charge naturelle de l'eau en carbone organique total de l'eau. La valeur du rapport entre le carbone dissous et le carbone particulaire du rejet varie de 10% à 160% (**Fontvieille, 1987**).

Après avoir initialisé les concentrations tout le long du cours d'eau, les modèles simulent le régime transitoire. Pour ces calculs, le COD est considéré comme une substance conservative. Une valeur nulle est donc affectée au terme de disparition dans le modèle de transport ( $K_d = 0$ ). La valeur du « bruit de fond » du ruisseau en carbone organique dans la station amont est affectée à la concentration des apports ( $C_q$ ).

En visualisant les deux rejets quotidiens de la porcherie, les auteurs ont pu remarquer le fort étalement des rejets entre la station amont et la station aval, malgré leur faible dilution lorsque le débit est peu important. Ce fort étalement est dû essentiellement à l'importance de la dispersion longitudinale. Lors de ces simulations le coefficient varie de 2 à  $10\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ , ce qui est relativement important pour un petit cours d'eau.

Ces simulations ont montré que, même si la distribution du COD tout au long du cours d'eau, peut être expliquée partiellement par les phénomènes hydrophysiques, ils sont insuffisants pour expliquer totalement les valeurs expérimentales mesurées. La surestimation des valeurs prédites par rapport aux valeurs mesurées, au niveau de la station aval, peut provenir :

- Des phénomènes physiques ou chimiques non pris en compte dans le modèle sous sa forme actuelle de la dispersion du COD ;
- Et surtout, d'une consommation due à l'activité des biocénoses benthiques.

## **2. Travaux de NG Chiu-on (2006)**

NG Chiu-on présente l'application de la méthode d'homogénéisation multi-mesure, concernant le transport environnemental dans l'écoulement régulier et oscillant d'une espèce chimique non-réactive dans un canal ouvert sous les influences de l'échange d'un adsorbant réversible avec le lit et d'une réaction irréversible à la surface libre. Ces réactions de frontière sont les processus les plus importants pour contrôler la dispersion d'un polluant dans un environnement normal des eaux de surface.

### **2.1. Formulation de problème**

NG Chiu-on a étudié l'écoulement en pleine maturité sur la longueur et la hauteur du canal ouvert tels que l'écoulement soit essentiellement uniforme dans la direction  $x$  avec un tirant d'eau " $h$ " constant. L'écoulement peut se décomposer en deux parties : régulière et oscillante.

La vitesse est une fonction de la profondeur et d'une fonction périodique de temps, et est exprimée par :  $u(z, t) = U_s(z) + \text{Re}(U_w e^{i\omega t})$  (I-9)

Où,  $z$  est la distance normale ascendante du fond de canal,  $t$  est le temps,  $U_s$  : est la composante de la vitesse régulière,  $U_w$  : est l'amplitude complexe de la composante de la vitesse oscillante,  $\text{Re}$  : utilisé pour la partie régulière,  $i$  : est l'unité complexe et  $\omega$  est la fréquence angulaire de l'oscillation de l'écoulement.

L'écoulement est supposé être turbulent, et le mélange est donc commandé par la diffusion de remous. Pour la simplicité analytique, la diffusivité de remous,  $E = E(z)$ , est supposé variable avec la profondeur seulement mais pas avec du temps, en dépit de l'écoulement instable.

L'auteur a considéré le transport bidimensionnel d'un nuage d'une espèce chimique le long du canal. Si l'espèce est miscible avec le fluide, son transport de masse est régi par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( E_z \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (\text{I-10})$$

Où,  $C(x, z, t)$  est la concentration (la masse par volume du fluide) de l'espèce dissoute dans le fluide (ou phase liquide) et  $(E_x, E_z)$  sont les composantes horizontale et verticale de la diffusivité de remous.

Tandis que le produit chimique est non-réactif dans la colonne elle-même de fluide, il peut être sujet à des changements réactifs au dessus des frontières. Le processus de l'échange ou de la volatilisation liquide-air ayant lieu sur la surface libre enlèvera le produit chimique irréversiblement du fluide. En attendant, le fond du canal peut être couvrir avec une couche mince de matériel (par exemple, dépôt cohérent ou boue), avec laquelle le produit chimique peut subir un échange de l'adsorbant réversible. Pour simplifier, l'auteur a admis que les réactions chimiques de frontière sont décrites par la cinétique du premier ordre. En particulier, la cinétique de l'échange de l'adsorbant avec les matériaux du lit peut être exprimé par :

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = k(\alpha C - C_s) \quad (\text{I-11})$$

Où,  $C_s$  : est la concentration (la masse par la superficie du lit) du produit chimique absorbé sur le fond du canal,  $k$  est la constante du taux de réaction pour l'échange de l'adsorbant, c'est un paramètre de zone mémoire d'adsorption égal au rapport de distribution des deux phases où l'équilibre est atteint.

$$(C_s / C)_{\text{equilibre}} = k \quad (\text{I-12})$$

En supposant que la couche d'absorption est très mince comparée au tirant d'eau, les conditions de frontière pour (I-10) peuvent être formulées comme suit :

$$E_z \frac{\partial C}{\partial z} + \Gamma C = 0 \quad ; \quad z = h \quad (I-13)$$

$$E_z \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial C_s}{\partial t} = k(\alpha C - C_s) \quad ; \quad z = 0 \quad (I-14)$$

Où, le  $\alpha$  est le taux constant pour la perte chimique dans la surface libre.

L'auteur a posé d'autres suppositions concernant les échelles des différentes quantités physiques, afin de préparer une pose pour l'analyse de perturbation. D'abord, il a considéré qu'un temps suffisamment long est passé puisque le déversement du produit chimique dans l'écoulement ainsi que l'échelle de longueur pour la propagation longitudinale du nuage chimique est beaucoup plus grande que celle pour la propagation transversale.

Ceci signifie que :  $x = O(l)$  et  $z = O(h)$ , où  $l$  est la distance longitudinale caractéristique pour le transport chimique et  $\varepsilon = h / L \ll 1$  (I-15)

Où,  $\varepsilon$  est un petit rapport utilisé comme paramètre de commande.

En second lieu, il y a des échelles de temps distincts pour les processus clef impliqués dans le problème de transport. L'échelle de temps de base est la période d'oscillation de l'écoulement, ayant comme conséquence tous les effets appréciables de transport au fond du canal. Cependant, l'auteur a supposé que la profondeur de la diffusion à travers la section entière est petite et peut être accompli dans cette courte échelle de temps. En outre, l'échange de l'adsorbant réversible est assez rapide de sorte que l'équilibre local peut être en grande partie réalisé à partir d'un nombre fini d'oscillations. Par conséquent, il a exprimé :

$$T_0 = 2 \pi / \omega = O(h^2/\tilde{E}) = O(k^{-1}) \quad (I-16)$$

Où,  $\tilde{E}$  est une échelle pour la diffusivité de remous. Cependant, la réaction irréversible sur la surface libre a lieu à un taux beaucoup plus lent, ce qui est supposé être comparable à la vitesse d'advection au fond du canal.

## 2.2. Coefficient De Dispersion

L'auteur a présenté un cas d'écoulement simplifié : la viscosité de remous  $\nu$  et la diffusivité de remous  $E_z$  sont supposés constantes plus loin et l'écoulement est conduit par un gradient de pression horizontale avec des composantes régulières et oscillantes :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = K(1 + \text{Re}(e^{i\omega t})) \quad (I-17)$$

Où,  $K > 0$  est une constante. La vitesse résultante est donnée par :

$$U_z = 3 \langle U_z \rangle \left( \frac{z}{h} + \frac{z^2}{2h^2} \right) \quad \text{et} \quad U_w = -i \frac{K}{\omega} \left( 1 - \frac{\cosh \lambda(h-z)}{\cosh \lambda h} \right) \quad (\text{I-18})$$

Dans ces expressions, on a :

$$\langle U_z \rangle = \frac{Kh^2}{3\nu} ; \quad \lambda^2 = \frac{i\omega}{\nu} ; \quad \lambda = \frac{(1+i)}{\delta} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (\text{I-19})$$

Avec,  $\delta$  l'épaisseur de la couche de frontière de Stockes.

En fixant  $E_z$  et en utilisant les deux profils de vitesse donnés ci-dessus, l'auteur a résolu analytiquement les problèmes des fonctions de structure locales.

Les coefficients de dispersion sans dimensions sont donnés comme suit:

$$\left( \hat{D}_{Ts}, \hat{D}_{Tw}, \hat{D}_{Ts}^\Gamma, \hat{D}_{Tw}^\Gamma \right) = \left( D_{Ts}, D_{Tw}, D_{Ts}^\Gamma, D_{Tw}^\Gamma \right) / \left( \langle U_s \rangle^2 h^2 / E_z \right) \quad (\text{I-20})$$

Essentiellement, les coefficients de dispersion sans dimension sont des fonctions des paramètres de contrôle ci-dessous, qui sont respectivement le nombre de Schmidt, nombre de Damköhler (représentant la cinétique d'échange de phase avec le fond) et le paramètre sans dimension de taux de réaction :  $Sc = \frac{\nu}{E_z}$  ;  $Da = \frac{kh^2}{E_z}$  et  $\hat{\Gamma} = \Gamma \frac{h}{E_z}$  (I-21)

NG Chiu-on a illustré son travail avec un exemple physique de l'effet de l'échange cinétique de l'adsorbant sur le coefficient de dispersion. Il a considéré le transport le long d'un écoulement régulier dans un canal de hauteur  $h = 10\text{m}$ , où le lit est garni d'une mince couche de milieu d'absorption d'épaisseur  $d$ .

La diffusivité de remous  $E_z$  est fixée à  $1\text{cm}^2/\text{sec}$ , qui est une valeur typique pour un jet normal. Il a adapté également un produit chimique pour avoir un taux de réaction de la surface libre,  $\Gamma = 10^{-5}\text{cm}/\text{sec}$ , correspondant relativement à une basse vitesse de transfert eau-air. Le taux d'échange de l'adsorbant peut être estimé par  $k = D_w(\Pi/2d)^2$  où  $D_w$  est la diffusivité moléculaire ( $\sim 10^{-5}\text{cm}^2/\text{sec}$ ) dans la couche de lit. En outre, le paramètre de zone mémoire de la phase peut être déduit par la formule  $\alpha = K_d C_{BL} d$  où  $K_d$  est le coefficient de distribution de l'eau – solide et  $C_{BL}$  est la charge du lit ou la concentration du solide dans la couche du lit. Dans cet exemple, l'auteur a considéré  $K_d C_{BL} = 10$ , qui est une valeur observée généralement dans la nature.

Les résultats calculés pour  $\hat{D}_{Ts}$  et  $\hat{D}_{Ts}^\Gamma$  sont données dans le tableau (I-1), pour une gamme de  $\hat{d} = 0-0,05$ .

**Tableau I-1** : Les coefficients de dispersion  $\hat{D}_{Ts}$  et  $\hat{D}_{Ts}^{\Gamma}$  pour une gamme de l'épaisseur de la couche d'absorption

$\hat{d}$	$\hat{\alpha}$	$D_a$	$\hat{D}_{Ts}$	$\hat{D}_{Ts}^{\Gamma}$
0	0	N.A	0.019	$-0.121 \times 10^{-4}$
0.01	0.1	0.24674	0.335	0.028
0.02	0.2	0.06169	1.918	0.512
0.03	0.3	0.02742	5.032	2.265
0.04	0.4	0.01542	9.514	5.636
0.05	0.5	0.00987	15.078	10.132

NG Chiu-on a constaté que la cinétique de la phase d'échange peut avoir un effet significatif sur la combinaison du mécanisme de dispersion. La présence de la perte de la surface libre peut causer une diminution ou une augmentation de l'effet sur la dispersion, selon la fréquence d'oscillation et la cinétique de la phase d'échange et le rapport de cloison. Si l'échange de phase est suffisamment cinétique, le coefficient de dispersion en la présence de lit même très petit, la conservation peut être nettement différente, quantitativement ou qualitativement, du cas inerte.

### **3. Travaux de Zhang Jing-xin & Liu Hua (2006)**

Zhang Jing-xin et Liu Hua ont présenté la simulation numérique du transport de dépôt suspendu, qui est établi dans la coordonnée verticale de  $\sigma$  pour adapter la surface libre et le fond. Lors de la recherche du transport de dépôt, il s'est avéré que les facteurs prédominants sont la diffusion de remous, la vitesse d'arrangement, l'état de lit, etc.

Le mouvement du dépôt dépend de ses caractéristiques particulières, telles que la sédimentation cohérente et non cohérente. Par exemple, les caractéristiques de dépôt dans le fleuve de l'Yangtze varient du fond vers l'estuaire. Dans l'estuaire, le dépôt est très bon et le mouvement de suspension est dominant. Pour le dépôt particulier, certaines propriétés du mouvement sont très distinctes, incluant la re-suspension, le dépôt, la diffusion et la sédimentation.

### 3.1. Modèle numérique 2D de transport vertical de dépôt suspendu

Pour la caisse de dépôt fin avec une concentration inférieure, l'interaction parmi des particules peut être ignorée. En se basant sur la conservation de masse, la concentration variable en

$$\text{dépôt de temps satisfait l'équation suivante : } \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial u_{\text{sed}} c}{\partial x} + \frac{\partial w_{\text{sed}} c}{\partial z} = 0 \quad (\text{I-22})$$

Où,  $c$  est la concentration en dépôt,  $u_{\text{sed}}$ ,  $w_{\text{sed}}$  sont les composantes de vitesse dans les coordonnées cartésiennes. L'inertie du dépôt est ignorée et la vitesse d'écoulement horizontale est prise comme vitesse d'advection, c-à-d,  $u_{\text{sed}} = u$ , mais dans la direction verticale, la vitesse de dépôt des sédiments devrait être considérée, et donc :  $w_{\text{sed}} = w - \omega_s$ .

Ainsi l'équation régissant peut être donnée comme suit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial (w - \omega_s)c}{\partial z} = 0 \quad (\text{I-23})$$

Dans le but de décrire les divers effets des structures du remous sur le transport de dépôt, la technique temps-moyen est adoptée pour les équations de RANS.

Les variables sont décomposées en partie moyenne et partie fluctuante, c-à-d,  $u = \bar{u} + u'$ ,  $w = \bar{w} + w'$  et  $c = \bar{c} + c'$ . L'équation régissant l'écoulement turbulent dans le lit est la suivante :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}c}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{w} - \omega_s)c}{\partial z} = \frac{\partial \overline{u'c'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{w'c'}}{\partial z} \quad (\text{I-24})$$

Selon Boussinesq, les limites temps-moyen des fluctuantes du côté droit de l'équation précédente peuvent être modélées par le produit de la diffusivité  $\epsilon_t$  et la moyenne du gradient

$$\text{de la concentration comme suit : } -\overline{u'c'} = \epsilon_{\text{th}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad \text{et} \quad -\overline{w'c'} = \epsilon_{\text{tv}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (\text{I-25})$$

Où, l'indice inférieur "t" représente la turbulence. La substitution de l'équation (I-25) dans l'équation (I-24) donne l'équation finale de transport de dépôt dans des écoulements

$$\text{turbulents : } \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}c}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{w} - \omega_s)c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_{\text{th}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_{\text{tv}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \right) \quad (\text{I-26})$$

### 3.2. Simulation numérique et validation du modèle

La simulation numérique est basée sur la méthode de FDM. L'advection et les limites horizontales de diffusion sont discrétisées avec le schéma explicite aux différences finis Upwind de premier ordre. Par contre, les limites verticales de diffusion sont discrétisées par un schéma implicite qui est le schéma central aux différences finis du deuxième ordre.

En raison de la complexité de la dynamique de dépôt, les recherches expérimentales sont nécessaires. Mais avec progrès des techniques de calcul, la simulation numérique devient une technique très efficace et largement utilisée.

### 3.2.1. La vitesse de l'écoulement uniforme

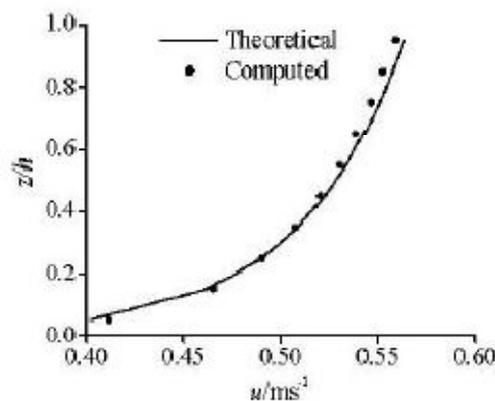
La distribution verticale de la vitesse horizontale suit la loi de logarithme près du lit. Pour l'écoulement dans un canal ouvert, les essais numériques montrent que la distribution de logarithme peut être approximativement utilisée à la profondeur entière de l'eau.

Dans l'estuaire, cette conclusion a été vérifiée. L'exactitude du calcul de l'écoulement est la base de la simulation du dépôt supplémentaire, ainsi le champ d'écoulement est validé. La canalisation de simulation avec un fond plat est de 30m de long, 0,50m de large et 0,39 m de profondeur. Le diamètre médian de dépôt est  $d_{50} = 0.16\text{mm}$ . L'apport des rejets est placé pour avoir un  $Q = 0.1\text{m}^3/\text{s}$ , et à la même frontière de section, la condition du flux de dépôt est  $c_s = 0.03\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Avec l'installation expérimentale référée, la re-suspension et le dépôt sont dans un état d'équilibre et la vitesse calculée est comparée à celle de la théorie (Guo, 2000).

La vitesse théorique calculée par la formule suivante :  $u = u_* k^{-1} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$

Avec,  $u_*$  est la vitesse de frottement,  $z_0 = \frac{k_s}{30}$  et  $k_N = 2,5d_{50}$  est la taille de rugosité de Nikuradsé.

La comparaison entre la simulation et la théorie (figure I-2), montre la bonne coïncidence des deux courbes. La divergence près de la surface libre peut être attribuée à l'exactitude de la loi logarithmique appliquée à la région loin du fond.



**Figure I-2** : Comparaison des profils de vitesse entre la simulation et les résultats théoriques.

### 3.2.2. Profil vertical du dépôt dans l'état d'équilibre

Dans l'état d'équilibre, le profil vertical de la concentration peut être écrit par la formule de Rouse. Le transport de dépôt dans la canalisation est calculé et la comparaison des profils de concentration entre la simulation et l'analyse théorique est effectuée (figure I-3), en se basant sur la simulation de l'écoulement (figure I-2). Dans les cas d'essai, différentes valeurs de la vitesse d'arrangement  $\omega_s = 0.026\text{m/s}$ ,  $0.013\text{m/s}$ ,  $0.01\text{m/s}$ ,  $0.008\text{m/s}$ ,  $0.005\text{m/s}$ ,  $0.001\text{m/s}$  ont été prises pour valider les effets des paramètres de Rouse. Pour la vitesse d'arrangement variable, le paramètre de Rouse est donné par (Ni & Liang, 2000) :  $R = 2, 8.1, 4.1, 1.0, 8.0, 5.0, 1$ .

Les validations de l'écoulement et de la distribution de la concentration dans la canalisation plate assurent l'exactitude du modèle numérique. Dans le cas suivant, le modèle est appliqué pour simuler l'évolution du fond sous le courant régulier. Toutes les validations sont nécessaires pour l'application supplémentaire du modèle dans la simulation de dépôt.

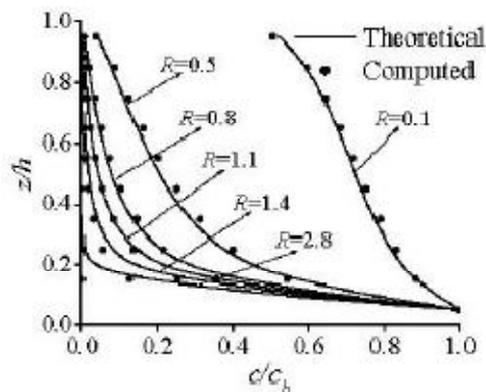


Figure I-3 : Comparaison entre les résultats calculés et théoriques au sujet de la concentration en dépôt.

### 3.2.3. Évolution du fond

Le modèle numérique simule l'évolution du fossé où les résultats se rapportent aux expériences effectuées dans le laboratoire hydraulique de Delft. La canalisation est présentée dans la figure (I-4), sachant que la plus grande profondeur de l'eau dans le fossé est d'environ  $0.54\text{m}$ , la pente est de  $1/10$  et les paramètres du dépôt et les états d'écoulement sont comme suit : la profondeur de l'eau à l'admission est de  $0.39\text{m}$ , vitesse ramenée à une moyenne par profondeur de l'eau  $\bar{U} = 0.51\text{ms}^{-1}$ , le paramètre médian  $d_{50} = 0.16\text{mm}$ , la vitesse d'arrangement  $\omega_s = 0.013\text{ms}^{-1}$ , la charge de dépôt suspendu à l'admission  $c_s = 0.03\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$  et la concentration de l'eau de la profondeur moyenne à l'admission  $c = 0.15\text{kgm}^{-3}$ .

Dans les conditions ci-dessus, l'équilibre est maintenu dans l'amont du fossé. A travers ce dernier, les augmentations de profondeur de l'eau et les diminutions de la vitesse provoquent le dépôt transporté du jet haut déposera sur la faible pente et le fond du fossé. Mais sur la pente haute du fossé, la vitesse augmente et les possibilités portantes de dépôt de l'écoulement augmentent, alors que beaucoup de dépôt transporté de l'amont a déjà déposé, ainsi que la re-suspension est beaucoup plus que le dépôt et la forte pente du fossé sera érodée.

Avant la simulation, la technique pour étudier les conditions de frontière du lit est traitée parce que l'état de frontière du lit est essentiel pour le calcul de l'évolution du fond. En basant sur la capacité de dépôt - transport, l'état de frontière est donné par :

$$-\varepsilon_{tv} \frac{\partial c}{H \partial \sigma} - \omega_s = \alpha_2 \omega_s c_* - \alpha_1 \omega_s \bar{c} \quad (I-27)$$

Où,  $c_*$  est la capacité de transport de dépôt,  $\bar{c}$  est la concentration de la profondeur moyenne en dépôt,  $\alpha_1$  est le rapport de la concentration près du lit à l'unité de la profondeur moyenne et  $\alpha_2$  est calculé dans la condition saturée. En pratique, on prend  $\alpha_1 \approx \alpha_2 = \alpha$ .

La formule déduite est : 
$$-\varepsilon_{tv} \frac{\partial c}{H \partial \sigma} - \omega_s = \alpha \omega_s (c_* - \bar{c}) \quad (I-28)$$

Dans le calcul de la capacité de transport de dépôt  $c_*$ , la formule présentée par Wuhan

Hydraulic Institut est adopté ici (**Qian & Wan, 1983**) : 
$$c_* = k_s \left( \frac{U^3}{H \omega_s} \right)^m \quad (I-29)$$

Où,  $U$  est la vitesse de la profondeur moyenne,  $H$  est la profondeur de l'eau, et  $k_s$  et  $m$  sont des coefficients. Pour l'exposant  $m$ , les mesures prises dans les fleuves suggèrent allant de 0,6 à 1,4. Bagnold suggère, d'après ses expériences, que  $m=1,0$ . En comparant les deux valeurs de  $m$ , il est constaté que la valeur indiquée par Bagnold n'est qu'une valeur ramenée à une moyenne de Wuhan. En résultat, la formule pour  $k_s$  est :

$$k_s = \frac{\gamma \gamma_s (1 - e_b) e_s}{\gamma_s - \gamma C^2} \quad (I-30)$$

Où,  $\gamma$  et  $\gamma_s$  sont les poids spécifiques de l'eau et le dépôt,  $C$  est le paramètre de Chezy qui représente le coefficient de rugosité inférieure. Les expériences de Bagnold ont suggéré que le coefficient  $(1 - e_b) e_s \approx 0,01$  tandis que Rubey a donné la valeur  $(1 - e_b) e_s \approx 0,025$ , en se basant sur ses travaux de recherche menés sur des fleuves normaux. Dans les travaux de Jing-xin et Hua, certaines valeurs appropriées sont adoptées, qui sont  $k_s = 0,0097$  et  $m = 0,85$ .

Le calcul du coefficient  $\alpha$  est basé sur le profil de concentration, c-à-d., la formule de Rouse :

$$c = c_a \left( \frac{h - z}{h} \frac{a}{h - a} \right)^R \quad (I-31)$$

Dans la coordonnée  $\sigma$ , avec la transformation  $\sigma = \frac{z}{H}$ , le rapport  $\alpha$  de la profondeur moyenne de concentration à celle de la profondeur de référence est calculé comme suit :

$$\frac{\bar{c}}{c_a} = \frac{\int_{\sigma_a}^1 \left( \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\sigma_a}{1-\sigma_a} \right)^R u d\sigma}{U} \quad (I-32)$$

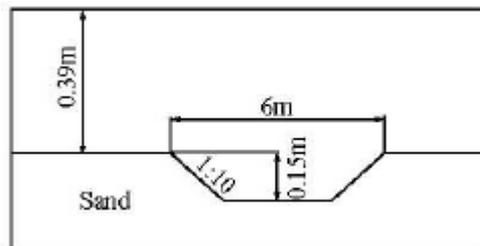
Où,  $u$  est la vitesse de l'eau,  $U$  est la vitesse moyenne de l'eau, et  $\sigma_a$  est la taille de référence près du lit, l'auteur suggère de prendre une valeur entre 0,005 et 0,05. Le coefficient  $\alpha$  peut

être calculé avec :

$$\alpha = \frac{c_a}{c} = \frac{U}{\left( \frac{\sigma_a}{1-\sigma_a} \right)^R \int_{\sigma_a}^1 \left( \frac{1-\sigma}{\sigma} \right)^R u d\sigma} \quad (I-33)$$

Dans la simulation numérique, la taille horizontale de la grille est d'environ 0,1m, et dans la direction verticale, elle est de 0,02m à 0,08m. Le temps total de simulation est 15h, et le profil de lit est mis à jour toutes les 15 minutes. La variation simulée de lit (en trait plein) est tracée avec les données mesurées dans la figure (I-5) pour le cas avec la pente 1/10. À 7,5 h et à 15,0 h, la variation numériquement calculée de lit est peu différente des résultats expérimentaux. Pour effectuer une meilleure simulation, les valeurs des coefficients  $\alpha$ ,  $k_s$  et  $m$  devraient être modifié. Comme mentionné ci-dessus, le coefficient  $\alpha$  est calculé sur la base de la prétention de saturation, mais ce n'est pas toujours valide dans la pratique. Dans la formule primaire, il y

a deux coefficients différents c.-à-d  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Les auteurs ont pris  $\alpha' = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left( \frac{c_*}{c} \right)^\beta$  où  $\beta$  varie entre 0 et 1, puis une nouvelle formule pour le flux net de dépôt à la frontière inférieure peut être appliquée. Avec  $\beta = 0,2$ , les résultats sont calculés en se basant sur  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Les mesures et calculs effectués pour  $\alpha_1 = \alpha_2$  sont tracés dans la figure (I-6).



**Figure I-4** : Forme inférieure initiale avec la pente 1:10

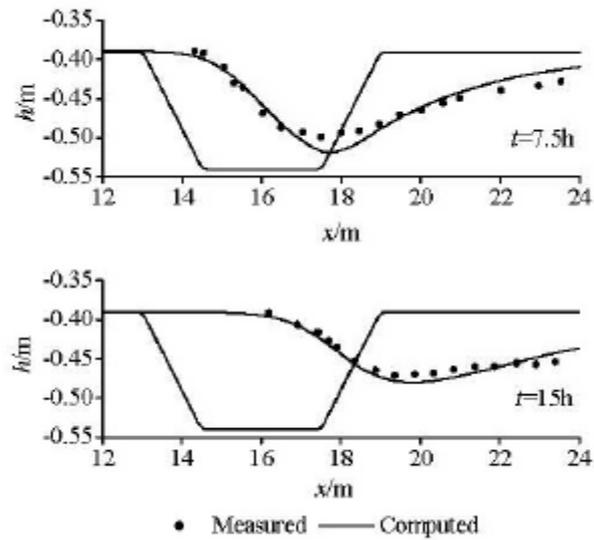


Figure I-5 : Comparaison entre la simulation et la mesure avec une pente 1:10

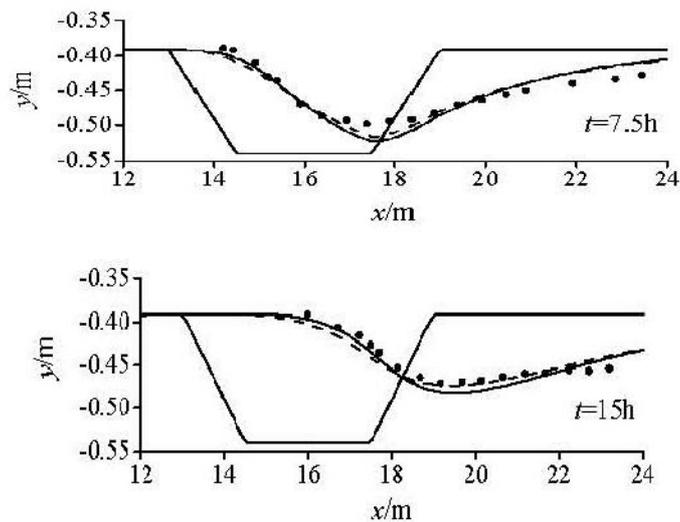


Figure I-6 : Les effets du coefficient  $\alpha$  pour le calcul de l'évolution du lit avec une pente 1:10

La comparaison avec les expériences effectuées par Van Rijn et son modèle mathématique du dépôt suspendu dans les écoulements non uniformes, a permis de conclure que le modèle numérique de dépôt suspendu présenté par Zhang Jing-xin et Liu Hua est un outil efficace pour la recherche de transport de dépôt. Les résultats numériques comparés aux expériences sont moins coûteuses, donne plus de détails sur la distribution de concentration et les possibilités d'une prévision à long terme.

#### **4. Travaux de JI Yong, Zhang Jie, Yao Qi et Di-hua De Zhao (2006)**

JI Yong et ces collaborateurs ont présenté les équations régissant le dépôt de la pollution. En se basant sur de la théorie de la diffusion turbulente des polluants dans les lacs peu profonds, une équation de la qualité de l'eau comprenant le dépôt des polluants a été développée et couplée à l'équation de l'écoulement de l'eau peu profonde et l'équation décrivant le dépôt de la pollution, ayant pour résultat un modèle complet de la qualité bidimensionnelle de l'écoulement de l'eau avec le dépôt de la pollution. Dans le cadre de la méthode des volumes finie, le solveur approximatif du problème de Riemann, proposé par Osher est employé pour résoudre le système des équations.

##### **4.1. Les équations de base**

Le dépôt de la pollution est lié au mouvement de contamination dans une direction verticale. C'est un problème tridimensionnel. Selon la théorie de diffusion turbulente, l'équation 3-D de convection-diffusion pour la qualité de l'eau y compris le dépôt de la pollution est exprimée par (Lin & Shen, 1984 & Sweby, 1988):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) + \frac{\partial}{\partial y}(Cv) + \frac{\partial}{\partial z}(Cw) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D_z \frac{\partial C}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}(C\omega_c) - K_c C \quad (I-34)$$

Où, u, v, w : sont les composants de vitesse d'écoulement dans les directions x, y et z respectivement, C : est la concentration de la contamination,  $\omega_c$  : est le taux de sédimentation de la contamination qui provient de l'effet intégré de son poids et de la diffusion de l'eau,  $D_x$ ,  $D_y$  et  $D_z$  sont les coefficients de diffusion de la contamination dans les directions de x, y et z respectivement et  $K_c$  est le coefficient intégré de sédimentation de la contamination.

##### **4.2. Le modèle 2D pour le courant, la qualité de l'eau et le dépôt de la pollution**

Après intégration de l'équation précédente suivant z et la détermination des paramètres du dépôt de la pollution tel que la vitesse de descente complète  $\omega_c$  et la concentration des polluants dans le dépôt  $C_b$ , les auteurs de ce travail ont développé la forme de l'équation de conservation des couples profondeur-eau et qualité-eau avec le dépôt de la pollution comme

$$\text{suit : } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (I-35a)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = gh(S_{0x} - S_{fx}) + \frac{1}{\rho} \tau_{wx} \quad (I-35b)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2 + gh^2/2)}{\partial y} = gh(S_{0y} - S_{fy}) + \frac{1}{\rho} \tau_{wy} \quad (I-35c)$$

$$\frac{\partial (hC_i)}{\partial t} + \frac{\partial (huC_i)}{\partial x} + \frac{\partial (hvC_i)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [D_{ix} \frac{\partial (hC_i)}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y} [D_{iy} \frac{\partial (hC_i)}{\partial y}] + [W_{ci}(C_{bi} - C_i) - \omega_{ci}C_i] - K_{ci}hC_i + S_i \quad (I-35d)$$

L'équation pour la variation des polluants en dépôt est :

$$\frac{dC_{bi}}{dt} = -k_{bi}C_{bi} - \frac{W_{ci}}{h}(C_{bi} - C_i) + \frac{W_{ci}}{h}C_i \quad (I-36)$$

Où,  $h$  : est la profondeur de l'eau,  $u$  et  $v$  sont les composants de la vitesse moyenne horizontale et verticale dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement,  $g$  est l'accélération de pesanteur,  $S_{of}$  et  $S_{fx}$  sont les pentes de la terre et du gradient de frottement, respectivement, dans la direction  $x$ ,  $S_{oy}$  et  $S_{fy}$  sont les pentes de la terre et du gradient de frottement dans la direction  $y$ , respectivement,  $\rho$  est la densité de l'eau,  $\tau_{wx}$  et  $\tau_{wy}$  sont les efforts de vent dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement,  $C$  est la concentration moyenne verticale des polluants,  $K_{ci}$  est le coefficient de dégradation complète de chaque polluant,  $S_i$  est l'ensemble de ressources de chaque polluant, et son contenu changera avec la composition,  $D_{ix}$  et  $D_{iy}$  sont les coefficients de diffusion de chaque polluant dans les directions  $x$  et  $y$ , respectivement,  $W_{ci}$  et  $\omega_{ci}$  sont les vitesses de diffusion du dépôt de six compositions de polluant et de la vitesse de descente complète et  $C_{bi}$  et  $K_{bi}$  sont les concentrations des six compositions de polluant dans le dépôt et le coefficient d'atténuation.

### 4.3. Exemple d'application

#### 4.3.1. Le calcul de COD dans le lac Xuanwu avec le dépôt de la pollution

##### 4.3.1.1. Paramètres de calcul

Le lac Xuanwu est situé dans le nord-est de la vieille zone de la ville de Nanjing, c'est un lac normal peu profond de petite taille, qui totalement couvre une aire de 472 ha. Dans le lac Xuanwu, il y a cinq oasis, qui sont reliées et unifiées par des ponts et des rives. Les principaux polluants du lac sont des TP, des TN,  $NH_3-N$ , et COD. Par conséquent, il est projeté d'utiliser l'eau du fleuve de l'Yangtze pour diluer la concentration des polluants et améliorer la qualité de l'eau du lac.

En considérant la forme de la terre, l'endroit de sortie de drain des eaux des égouts, la valeur de Peclét, la valeur de courant, le taux de grille, et ainsi de suite. Le domaine de calcul pour le lac Xuanwu se compose d'une grille non structurée avec 3032 d'unités et 3301 de points nodaux (figure I-7), et la longueur latérale est de 10 à 40m. Le coefficient de Manning  $n$  est fixé à 0,022. Les coefficients de diffusion de manganèse  $COD_{Mn}$  dans les deux directions longitudinales et horizontales sont de 1,0  $m^2/s$ .

Vu le danger de la pollution. Les pas de temps de 1s et de 2s sont choisis pour calculer le courant et la qualité de l'eau.

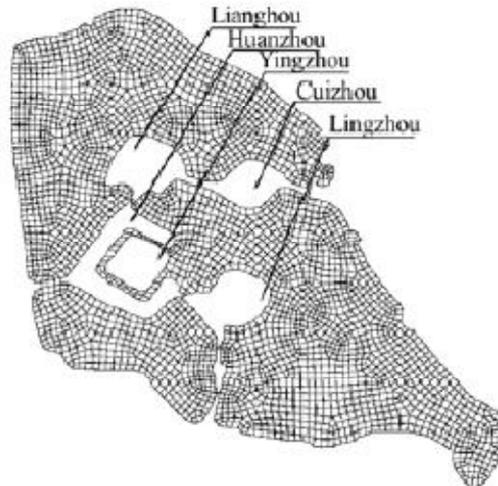


Figure I-7 : Grille dans le lac Xuanwu

#### 4.3.1.2. Paramètres du dépôt

Selon les données expérimentales, la  $COD$  libérant le coefficient du dépôt dans le lac de Xuanwu est  $0.032\text{mg/l.d}$ . Sur la base de ceci, le coefficient complet de  $COD_{Mn}$ ,  $K_b$ , est évalué à  $0,0075\text{d}$ , et le coefficient de suspension est  $0,10\text{d}$ . En se rapportant à la table de classification de boue et de sable, le diamètre des particules colloïdales des polluants est évalué à  $0,0022$  millimètres.

#### 4.3.1.3. Etats d'initiale et de frontière

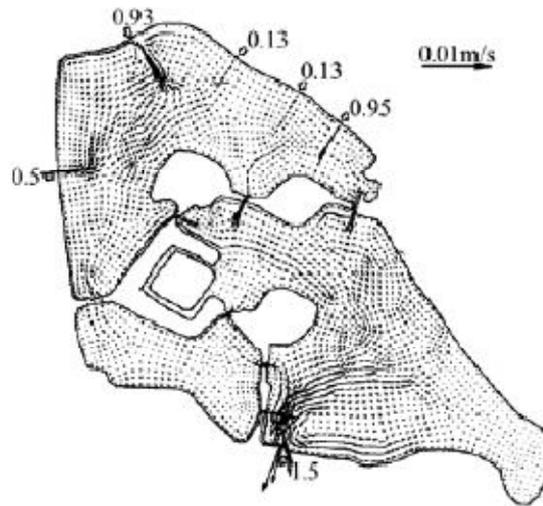
Les quatre frontières entrantes pour le flux courant dans le domaine de calcul alternativement, de la gauche vers la droite sont,  $0,9\text{m}^3/\text{s}$ ,  $0,1\text{m}^3/\text{s}$ ,  $0,1\text{m}^3/\text{s}$  et  $0,9\text{m}^3/\text{s}$ , et les deux flux de frontière de sortie sont :  $0,5\text{m}^3/\text{s}$  pour la porte de Dashugen et  $1,5\text{m}^3/\text{s}$  pour la porte de Wu Temple. Le niveau d'eau initial de chaque unité dans le domaine de calcul prend le niveau relatif de la frontière inférieure, la vitesse primaire du courant est  $0\text{ m/s}$ , et la qualité de l'eau présenté par  $COD_{Mn}$  prend le niveau du type-II de l'eau standard  $4\text{ mg/l}$ , et la concentration primaire de  $COD_{Mn}$  dans l'eau et dans le dépôt prend tous les deux la valeur de  $8\text{ mg/l}$ .

#### 4.3.1.4. Résultats de calcul et d'analyse

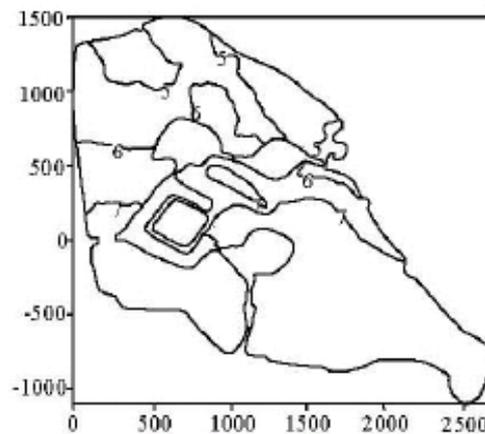
Le champ stable de la vitesse est montré dans la figure (I-8), et les découpes de  $COD_{Mn}$  à  $9\text{d}$  et à  $29\text{d}$  de la présentation de l'eau pour nettoyer la pollution dans les figures (I-9) et (I-10).

On peut voir des figures où le courant coule des frontières entrantes aux frontières supérieures et inférieures, respectivement. La distribution de la vitesse est raisonnable, et les valeurs relatives de  $COD_{Mn}$  augmentent graduellement à l'extérieur de  $4\text{mg/l}$  de la frontière supérieure. A l'entrer le courant d'eau n'est pas grand, la vitesse dans le secteur du lac est également basse (moins de  $0,03\text{m/s}$ ), la convection-diffusion des polluants est relativement lente.

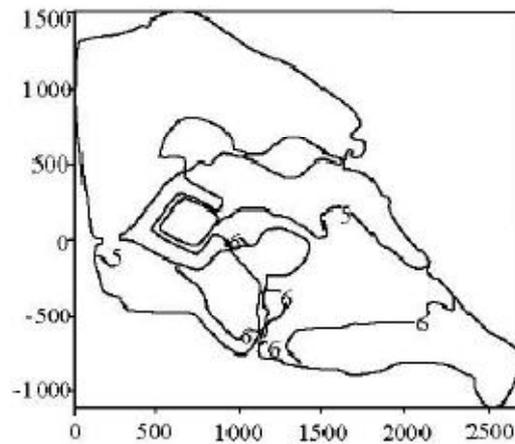
Dans la présentation du courant d'eau pour 9d, la concentration à la sortie de la porte de Dashugen atteint le niveau de l'eau standard de type-III (6mg/l), et après présentation de l'eau pour 29d, la concentration à la porte de sortie de Wu Temple atteint le niveau de l'eau standard du type-III (6mg/l). Sa distribution de découpe est raisonnable et conformé au champ d'écoulement et à la topographie sous-marine. Les résultats calculés de  $COD_{Mn}$  avec ou sans dépôt de la pollution sont présentés dans le tableau (I-2). L'exposition de données montre que le dépôt de la pollution augmente la concentration de l'eau en  $COD_{Mn}$ , la variation est liée à la vitesse de suspension et la concentration en  $COD_{Mn}$  du dépôt et de l'eau, et est raisonnable.



**Figure I-8** : Champ de la vitesse dans le lac Xuanwu à 48 h.



**Figure I-9** : Découpes de  $COD_{Mn}$  calculé à 9d.



**Figure I-10** : Découpes de COD<sub>Mn</sub> calculé à 29 d.

**Tableau I-2** : Résultats calculés de COD<sub>Mn</sub> en cellules choisies

Numéro d'unité	365	372	379	382	386	393	400	407
N° dépôt de la pollution	9,81	9,23	6,37	6,02	6,00	7,05	9,40	10,11
Méthode de coefficient de suspension du dépôt de la pollution	10,18	9,60	6,95	6,21	6,04	7,92	10,01	10,53
Méthode de calcul pour la vitesse du dépôt de la pollution	10,18	9,61	6,95	6,20	6,04	7,91	9,96	10,47

Ce modèle peut être employé pour simuler l'état de la qualité de l'eau des écoulements réguliers et instables et pour saisir cette variation rapide et lente, et peut bien faire un ajustement au courant d'eau avec des conditions ambiantes compliquées, mais le procédé est contraint par l'état du courant et la longueur de l'étape est relativement petite. Les ajustements de modèle bien avec les résultats calculés, et la solution exacte de la concentration avec la distribution gaussienne, et la simulation de la qualité aquatique de l'eau du lac Xuanwu avec la pollution des dépôts est raisonnable.

Les résultats présentés fournissent une simulation de la qualité aquatique du lac peu profond avec différentes approches et un modèle numérique pratique, bien que, pour les paramètres de dépôt de la pollution, plus d'expériences de recherches doivent être réalisées.

## **5. Travaux de Myung Eun Lee & Il Won Seo (2007)**

Myung Eun Lee et Il Won Seo ont présenté un modèle de transport de polluant dans le fleuve de Han, qui est un des fleuves les plus importants en Corée. Le modèle numérique a été développé à base du schéma aux éléments finis Upwind. La simulation a été obtenue en utilisant un modèle hydrodynamique 2D. La simulation de transport de polluant est effectuée dans un canal méandre avec les mêmes conditions d'apport du tributaire jet dans le fleuve de Han et comparée avec les travaux de Baek et ces collaborateurs.

### **5.1. Modèle numérique**

La forme de la profondeur moyenne pour l'équation 2D de l'advection-dispersion d'une substance non-conservatrice, avec la variable spatiale  $X=(x, y)$ , peut être décrite par la

$$\text{formule suivante : } \frac{\partial (hC)}{\partial t} + \nabla(hqC) - \nabla(hD.\nabla C) + khC = 0, x \in \Omega, t \in [0, T] \quad (\text{I-37})$$

Avec,  $C$  : la concentration de la profondeur moyenne;  $h$  : la profondeur locale de l'écoulement;  $t$  : la variable temporelle;  $q = (u, v)$  : le vecteur de vitesse de la profondeur moyenne du liquide dans les directions de  $x$  et de  $y$ , respectivement;  $k$  : le premier facteur d'affaiblissement d'ordre;  $D$  : le tenseur de dispersion;  $\Omega$  : un domaine lié au problème dans l'espace 2D et  $T$  : le temps objectif défini dans le problème.

Le tenseur de coefficient de dispersion,  $D$ , sont exprimés par les formules suivantes (**Alavian, 1986**) :

$$D_{xx} = D_L \frac{u^2}{U^2} + D_T \frac{v^2}{U^2} \quad (\text{I-38a})$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (D_L - D_T) \frac{uv}{U^2} \quad (\text{I-38b})$$

$$D_{yy} = D_T \frac{u^2}{U^2} + D_L \frac{v^2}{U^2} \quad (\text{I-38c})$$

Avec,  $D_{xx}$ ,  $D_{xy}$  et  $D_{yx}$  : les composants du tenseur de dispersion ;  $D$ ,  $D_L$  et  $D_T$  : sont les coefficients de dispersion longitudinale et transversale respectivement et  $U = \sqrt{u^2 + v^2}$  .

En utilisant cette expression, le mouvement lagrangien des nuages de traceur peut être considéré dans la coordonnée cartésienne fixe.

Trois types d'états de frontière peuvent être définis pour les domaines du problème. Le premier type peut être défini sur une frontière segment,  $\Gamma_1$ ,  $c = c_0(t)$ , ceci peut être utilisé quand la concentration de frontière est connue.

Le deuxième type peut être défini sur un segment  $\Gamma_2$ , de frontière :  $(-D.c).n_b = g_0(t)$ .

Il s'agit de la frontière où le flux diffusif est donné. Le troisième type peut être défini sur un segment  $\Gamma_3$  de frontière, si le flux total sur la frontière a été indiqué :  $(qc - D \cdot \nabla c).n_b = r_0(t)$ .

Où,  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$  constituent la frontière entière du domaine ;  $n_b$  : est l'unité extérieure du vecteur normal à la frontière, et  $g_0$  et  $r_0$  les composantes normales du flux total et du flux de dispersion, respectivement.

## 5.2. Validation de modèle mathématique

### 5.2.1. Modélisation numérique

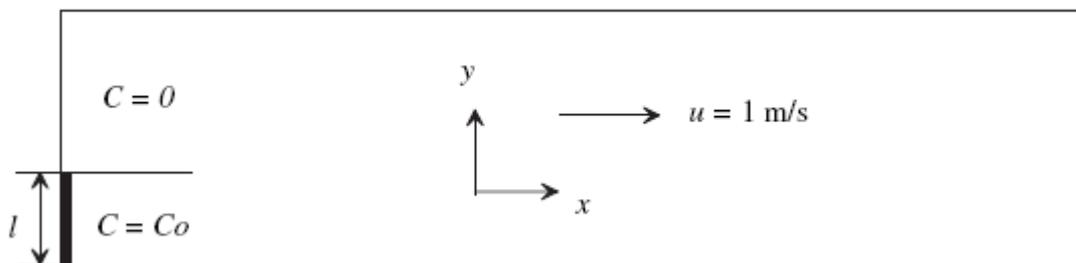
Un modèle 2D a été construit en utilisant l'équation (I-37) avec la formulation de SUPG (Streamline-Upwind Petrov-Galerkin) basé sur le schéma d'Upwind aux éléments finis.

Le système a été résolu en utilisant la méthode des éléments finis en appliquant le logiciel commercial SMS.

### 5.2.2. Etude de la diffusion latérale

La diffusion latérale simple dans un canal droit rectangulaire a été choisie pour la validation de la simulation s'est développée dans cette étude à travers la comparaison des résultats du modèle numérique avec la solution analytique. Le canal est de 100 m de longueur et de 20 m de largeur (figure I-11).

Dans cet essai, une source de pollution continue a été simulée afin de représenter la condition d'apport du tributaire jet dans le fleuve de Han.



**Figure I-11** : La diffusion latérale.

La solution analytique de la diffusion latérale avec la vitesse d'écoulement  $u$  est comme suit (Fischer et col, 1979) :

$$C = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y-1}{\sqrt{\frac{4DTx}{u}}} \right) \right] \quad (\text{I-39})$$

Dans cette simulation, la concentration continue d'injection a été définie comme  $C_0=100\text{kg/m}^3$  et l'injection à travers une largeur  $l = 10\text{m}$ , vitesse d'écoulement  $u = 1 \text{ m/s}$  et le tirant d'eau  $h=1\text{m}$ . Le coefficient longitudinal et transversal de dispersion ont été pris égal à  $1,0 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $0,1 \text{ m}^2/\text{s}$ .

Des simulations ont été effectuées en utilisant trois tailles différentes des éléments dans la direction latérale,  $\Delta y = 2,0 ; 1,0 ; 0,5\text{m}$  et des fonctions de base linéaires et quadratiques. Dans ces essais,  $\Delta x$  a été maintenu à  $2,0\text{m}$  et le RMSE est calculé à partir de l'équation suivante :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (C_i - C_i^a)^2}{m}} \quad (\text{I-40})$$

Où,  $C_i^a$  est la solution analytique dans le noeud  $i$ .

Le tableau (I-4) montre que RMSE a été réduit linéairement comme taille latérale de la grille. L'étude de la diffusion latérale montre que la solution numérique semble dépendre simplement de la taille latérale de la grille, et l'erreur de solution est proportionnelle à cette taille en raison de l'erreur d'approximation de l'état de frontière. La fonction de la partie latérale d'étape de la concentration de frontière ne peut pas être exactement interpolée par la fonction de base linéaire et quadratique. Ceci peut être montré avec l'estimation numérique du taux du flux massique.

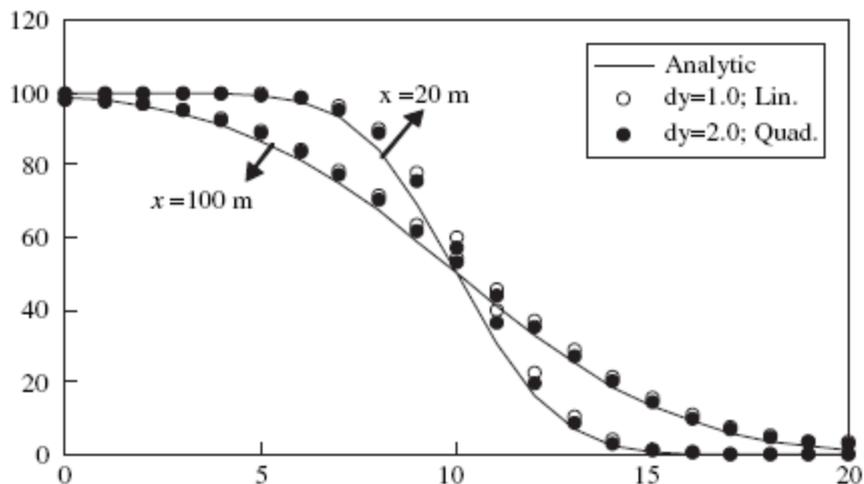
Dans la direction des  $x$ , le gradient de concentration est près de zéro après l'approche à l'état d'équilibre, le flux de dispersion longitudinal est négligeable.

**Tableau I-3 :** RMSE et bilans de matière des résultats de simulation pour la diffusion latérale problème

	$\Delta y$	RMSE ( $\text{kg/m}^3$ )	Taux massique entrant (kg/s)	Taux massique sortant (kg/s)	Erreur (%)	Bilan de matière (%)
Linéaire	2	7,051	1100,000	1100,002	10,0	100,0002
	1	3,672	1050,000	1049,999	5,0	99,9999
	0,5	1,883	1025,000	1024,995	2,5	99,9995
Quadratique	2	2,754	1033,333	1033,327	3,3	99,9994
	1	1,387	1016,667	1016,651	1,7	99,9984
	0,5	0,756	1008,333	1008,342	0,8	100,0009

- L'erreur du taux de masse était calculée par la division du taux de masse d'apport par le taux de masse exact, 1000 kg/s. Le tableau précédent montre que l'erreur du taux de masse diminue avec la taille de grille latérale, et pour la même taille d'élément, l'élément quadratique réduit cette erreur aux un troisièmement.
- L'erreur de masse de conservation a été calculée en divisant le taux de masse de sortie par le taux de masse d'apport, les résultats montrent le niveau satisfaisant de la conservation de masse pour une source d'injection de concentration continu.
- Le tableau précédent montre que les valeurs de RMSE sont plus petites pour le cas quadratiques par rapport au cas linéaire pendant le même temps d'exécution. Ceci signifie que l'élément quadratique fournit une solution plus précise pour le plus nombreux point nodaux dans le même temps d'exécution.

La figure (I-12) montre les résultats de la simulation comparés avec la solution analytique à  $x = 20$  et  $100\text{m}$  pour le cas des éléments linéaires et quadratiques avec une taille des parties latérales de la grille de  $1,0$  et  $2,0$ , respectivement. Cette figure montre également que l'élément quadratique produit des solutions plus précises que l'élément linéaire. Par conséquent, dans l'application du modèle numérique dans le fleuve de Han, l'élément quadratique a été employé pour obtenir des solutions plus précises.



**Figure I-12** : Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique  
à  $x = 20$  et  $100\text{m}$ .

### 5.2.3. Comparaison avec des données expérimentales

Le modèle s'est développé avec le respect à l'applicabilité dans le canal méandre de fleuve de Han, des résultats calculés ont été comparé avec ceux mesuré du traceur dans le canal méandre de laboratoire par Baek et col. (2006). Ce canal S-incurvé de laboratoire est de  $15\text{m}$  de longueur,  $1\text{m}$  de largeur et  $0,6\text{m}$  de profondeur. La profondeur de l'eau était de  $0,1\text{m}$  et un débit de  $0,03\text{m}^3/\text{s}$ .

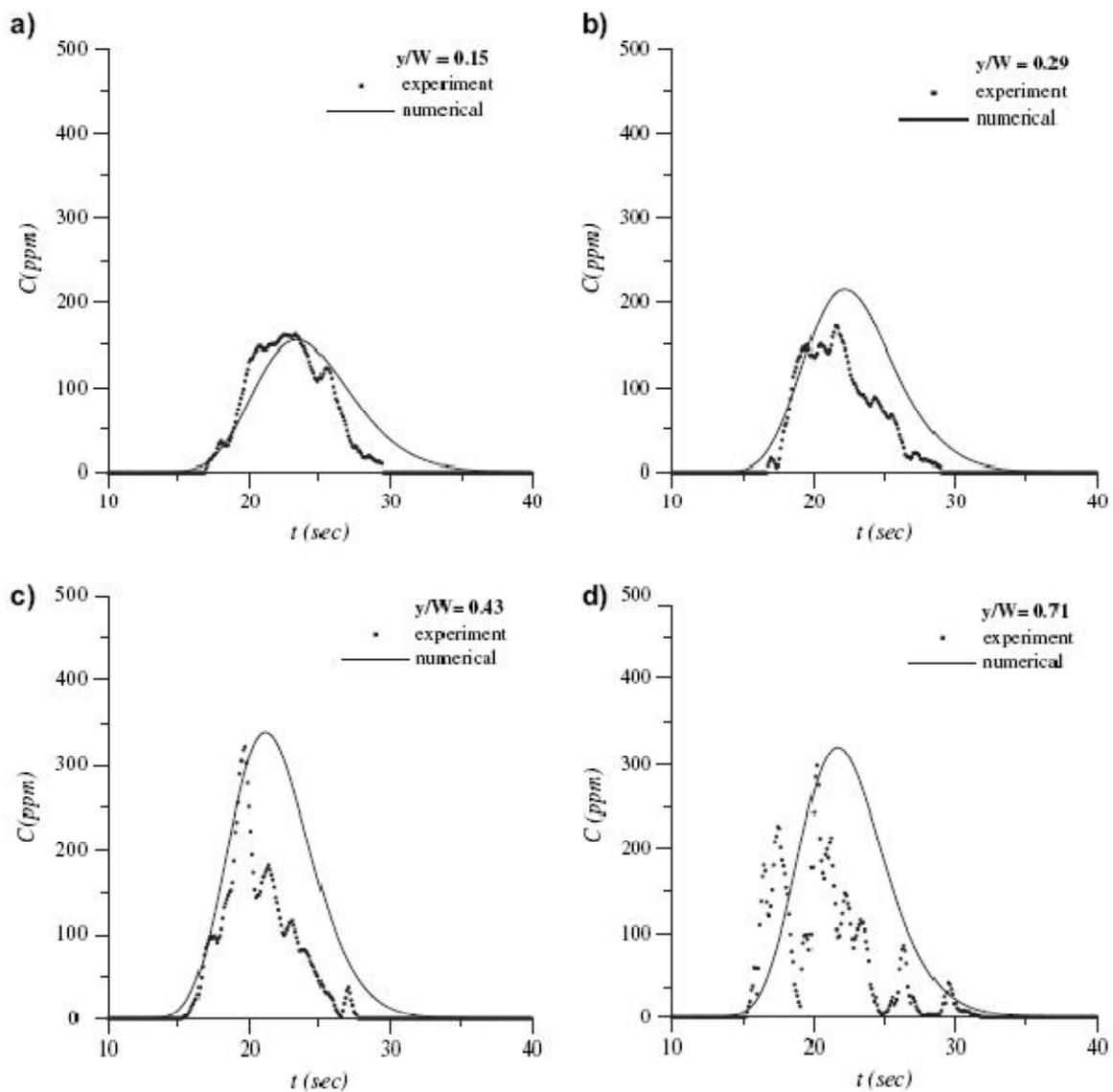
Le tenseur de coefficient de dispersion a été calculé par l'équation (I-38) et les valeurs initiales des coefficients de dispersion longitudinal et transversal,  $D_L$  et  $D_T$  ont été obtenus en utilisant les équations suivantes :  $D_x = 5.93 \text{ hu}^*$  (I-41a)

$$D_y = 0.15 - 0.6 \text{ hu}^* \quad (\text{I-41b})$$

Avec,  $u^* = \sqrt{gRS_f}$  est la vitesse de cisaillement.

Où,  $g$  l'accélération de la pesanteur ;  $R$  rayon hydraulique et  $S_f$  : pente de frottement.

Parmi toutes les courbes de concentration en fonction du temps, des résultats de simulation par le modèle numérique, obtenues dans différentes sections transversales du canal, celles de la section  $U_1$  ont été présentés dans figure (I-13).



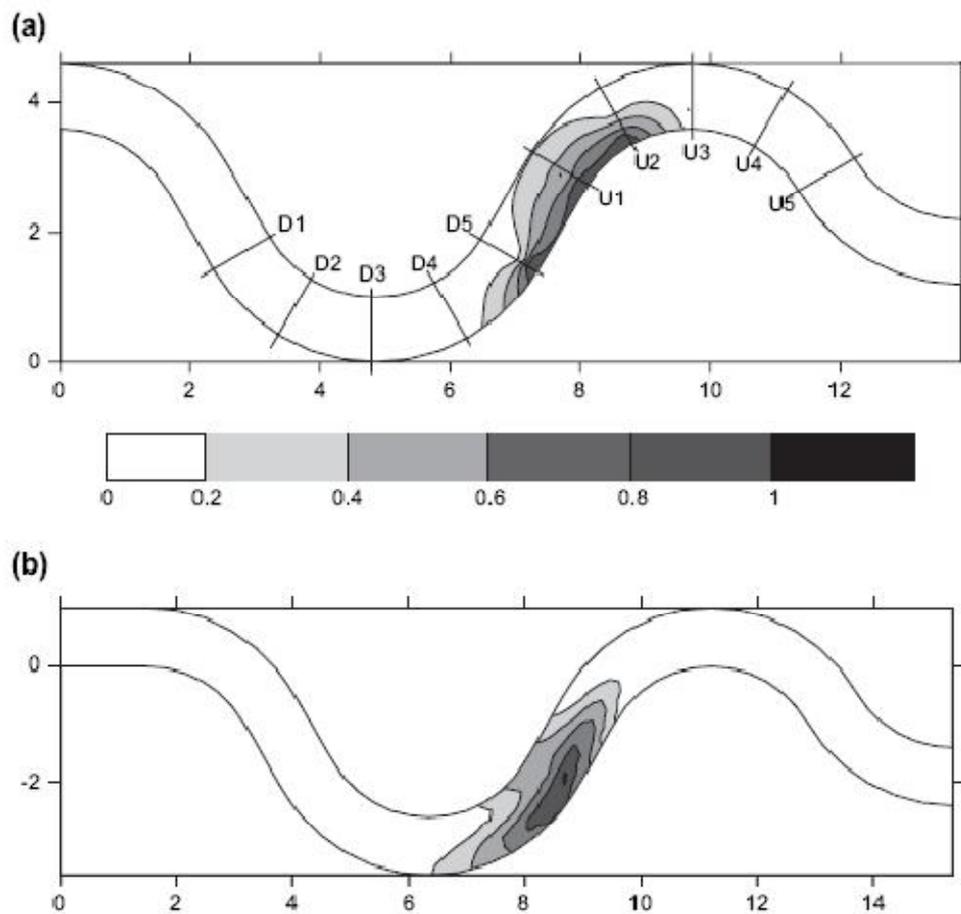
**Figure I-14** : Variation de la concentration en fonction du temps dans la section  $U_1$ .

Dans cette figure,  $W$  représente la largeur de canal et  $y/W$  la position latérale dans la section  $U_1$  de la rive gauche du canal. Les résultats numériques présentent la concentration maximale et précise la période de l'arrivée raisonnable du nuage de traceur.

Pour montrer la forme bidimensionnelle des résultats expérimentaux et numériques, la découpe de concentration  $C/C_p$  à  $t = 20s$  après l'injection est présentée dans figure (I-14).

Où,  $C_p$  est la valeur de la concentration maximale de chaque découpe.

Ces figures prouvent que le nuage calculé du traceur suit l'itinéraire du nuage mesuré qui se déplace le long du bon côté du canal où la vitesse maximale a été produit. En outre, la forme du nuage calculé du traceur est presque semblable au nuage mesuré en termes de longueurs longitudinales et transversales. Finalement, à travers ces comparaisons, le modèle numérique peut expliquer la proportion du mouvement du traceur dans le canal de méandre.



**Figure I-14** : Découpe de concentration à  $t=20s$

(a) Résultat expérimental ; (b) Simulation numérique.

## 6. Travaux de Riahi-Madvar, Ayyoubzadeh, Khadangi et Ebadzadeh (2008)

Riahi-Madvar et col. ont présenté un système neuro-flou d'inférence adaptatif (ANFIS), pour l'évaluation du coefficient de dispersion longitudinal dans les fleuves et les jets normaux, ayant la capacité de la perception et la réalisation du phénomène sans utiliser des équations mathématiques régissant.

Les contaminants et les effluents subissent des étapes du mélange lors de l'écoulement, et se propage dans les directions longitudinales, transversales et verticales par des procédés de transport d'advection et de dispersion. La capacité et la puissance de fleuve et tout autre canal ouvert coulent en dispersant les matériaux additifs dans les directions longitudinale, transversale et verticale caractérisées par des coefficients de dispersion. Loin du point d'injection des polluants dans le fleuve où le processus de mélange est accompli sur toute la coupe, seule la dispersion longitudinale est dominante et tous les phénomènes de dispersion sont caractérisés par le coefficient de  $K_x$ .

### 6.1. Modèle mathématique

L'équation de la dispersion en 1D est : 
$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (I-42)$$

Où, C est la moyenne de la concentration dans une section, u est la vitesse moyenne longitudinale, t est le temps, x est la direction longitudinale dans le jet d'écoulement et  $K_x$  est le coefficient longitudinal de dispersion, L'intégrale triple de Fisher et col. (1979) est utilisé

pour l'évaluation de ce dernier : 
$$K_x = -\frac{1}{A} \int_0^B hu' \int_0^y \frac{1}{\varepsilon_t h} \int_0^y hu' dy dy dy \quad (I-43)$$

Avec,  $K_x$  est le coefficient longitudinal de dispersion, A est la surface de la coupe de l'écoulement, B est la largeur supérieure de la surface de l'eau, h : la profondeur locale d'écoulement un point quelconque transversal, u' est la déviation de la vitesse d'écoulement de la profondeur moyenne à partir de la vitesse moyenne en coupe, y est la position transversale de la rive gauche et  $\varepsilon_t$  est le coefficient de mélange transversal.

Dans cette équation la limite inconnue de  $\varepsilon_t$  est décrite par plusieurs chercheurs comme un coefficient turbulent transversal. Il est à noter que l'équation (I-43) constitue une base pour plusieurs équations empiriques proposées de  $K_x$ .

Fisher et col. ont utilisé l'équation pour l'évaluation de  $\varepsilon_t = 0.15Hu$ , dans les fleuves larges et droits avec un écoulement uniforme et une profondeur constante suivant toute la transversale, sans aucune dispersion transversale.

La comparaison des mesures réelles avec les résultats de l'équation (I-43) montre que dans les écoulements uniformes, l'erreur moyenne de cette équation est de 30% et dans des écoulements non-uniformes cette erreur moyenne est de l'ordre de 4 fois les vraies données. Il est difficile d'utiliser l'équation (I-43) dans les cas réels et appliqués parce que la géométrie de la coupe  $h(y)$  et le profil transversal de vitesse  $v(h)$  ne sont pas disponibles et ne peuvent pas être déterminés facilement et parce qu'ils sont irréalisables. Fisher et col, en utilisant plusieurs paramètres non-dimensionnels simples, ont proposés une autre équation (**Tayfour & Singh, 2005**) :

$$K_x = \frac{\sqrt{u}^2 B_1^2}{\varepsilon_t} \quad (I-44)$$

Dans cette relation  $B_1$  est l'échelle longitudinale correspondant au cisaillement résultant de la distribution transversale de la vitesse,  $\varepsilon_t$  est la coupe moyenne du coefficient de mélange transversal et  $I$  est sans dimension et s'écrit comme suit :

$$I = -\int_0^1 h' u'' \int_0^{y'} \frac{1}{\varepsilon_t h'} \int_0^{y'} h' u'' dy' dy' dy' \quad (I-45)$$

Avec ses paramètres non-dimensionnels de  $I$  sont :  $u'' = \frac{u'}{\sqrt{u'^2}} h'' = \frac{h}{H} y' = \frac{y}{B} \varepsilon_t' = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t}$  (I-46)

Les recherches sur l'état de qualité des fleuves normaux par les modèles mathématiques 1D exigent les meilleures évaluations pour le coefficient longitudinal de dispersion. Lorsque les mesures et les vraies données des processus de mélange dans le fleuve sont disponibles, le coefficient de la dispersion longitudinale est déterminé facilement, mais dans les fleuves ou ces phénomènes ne sont pas connus, ce qui est le cas adressé par cette étude, les auteurs ont utilisé des méthodes alternatives pour l'évaluation des valeurs des coefficients de dispersion (**Kashefipour et Falconer, 2002**).

Il y a plusieurs équations empiriques pour l'évaluation du coefficient de la dispersion longitudinale dans les fleuves normaux, présenté dans le tableau (I-4) (**Seo & Cheong, 1998**). Ces équations sont validées seulement dans leurs gammes calibrées d'écoulement et les conditions de la géométrie et ne présentent pas de bons résultats pour des gammes plus étendues ou plus petites.

**Tableau I-4 :** Équations empiriques pour l'évaluation du coefficient de dispersion longitudinale.

N° Equation	Equation	Auteur (Année)
(I-47)	$K_x = 5.93Hu_*$	Eulder (1959)

(I-48)	$K_x = 0.58 \left( \frac{H}{u_*} \right)^2 UB$	McQuivey & keefer (1974)
(I-49)	$K_x = 0.011 \frac{U^2 B_l^2}{Hu_*}$	Fisher (1967)
(I-50)	$K_x = 0.55 \frac{Bu_*}{H^2}$	Li & al. (1998)
(I-51)	$K_x = 0.18 \left( \frac{U}{u_*} \right)^{0.5} \left( \frac{B}{H} \right)^2 Hu_*$	Liu (1977)
(I-52)	$K_x = 20 \left( \frac{B}{H} \right)^{1.5} Hu_*$	Iwasa & Aya (1991)
(I-53)	$K_x = 5.92 \left( \frac{U}{u_*} \right)^{1.43} \left( \frac{B}{H} \right)^{0.62} Hu_*$	Seo & Cheong (1998)
(I-54)	$K_x = 0.6 \left( \frac{B}{H} \right)^2 Hu_*$	Koussis & Rodinguez Mirasol (1988)
(I-55)	$K_x = 0.2 \left( \frac{U}{u_*} \right)^{1.2} \left( \frac{B}{H} \right)^{1.3} Hu_*$	Li & al. (1998)
(I-56)	$K_x = \frac{0.15}{8\varepsilon_t} \left( \frac{U}{u_*} \right)^2 \left( \frac{B}{H} \right)^{0.62} Hu_*$ $\varepsilon_t = 0.145 + \frac{1}{3520} \left( \frac{U}{u_*} \right) \left( \frac{B}{H} \right)^{1.36}$	Deng & al. (2001)
(I-57)	$K_x = 10.612 \left( \frac{U}{u_*} \right) HU$	Kashefipour & Fakoner (2002)
(I-58)	$K_x = 7.428 + 10775 \left( \frac{U}{u_*} \right)^{1.572} \left( \frac{B}{H} \right)^{0.62} HU$	Kashefipour & Fakoner (2002)

## **6.2. La base de données**

L'évaluation du coefficient de la dispersion longitudinale dans les fleuves en utilisant les équations du tableau (I-4) ou des modèles d'ANFIS exige des données hydrauliques et géométriques locales. Dans cette étude, un éventail de données publiées dans la littérature est passé en revue pour ensuite préparer une base de données. En utilisant ces données, les résultats des équations empiriques et d'ANFIS sont comparés et évalués. Les auteurs ont rassemblé ces données qui sont toutes des paramètres tirés des équations empiriques. Le tableau (I-5) montre la gamme de la variation des données rassemblées et de leurs paramètres.

La base de données rassemble 73 séries dont 70% sont utilisées pour la formation du modèle d'ANFIS et les 30% restantes sont utilisées pour l'essai du modèle d'ANFIS.

L'ensemble des méthodes et des essais sont choisis aléatoirement et la structure optimale du modèle d'ANFIS est déterminée par défaut dans MATLAB. Après avoir développé plusieurs modèles avec différentes structures, la structure optimale du modèle est déterminée. La structure finale du modèle d'ANFIS utilise la procédure de division de la grille pour produire des règles floues, la fonction gaussienne d'adhésion avec 4 paramètres d'entrée et 3 fonctions d'adhésion pour un paramètre quelconque d'entrée de 30 époques.

**Tableau I-5** : Description de la base de données collectée.

Paramètre	Intervalle	Moyenne
Vitesse d'écoulement (m/s)	0,034 – 2,23	0,7116
Tirant d'eau (m)	0,22 – 25,1	3,69
Largeur d'écoulement (m)	11,89 – 201	137,74
Vitesse de cisaillement (m/s)	0,0024 – 553	0.0956
$K_x$ (m <sup>2</sup> /s)	1,9 – 28883,5	223,1

## **6.3. Validation du modèle**

Le processus de formation et de d'essai de ce nouveau modèle est effectué en utilisant un ensemble de données disponibles. Plusieurs critères statistiques et graphiques sont utilisés pour vérifier l'exactitude du modèle.

6.3.1. Paramètres statistiques

Les résultats des relations empiriques et du modèle d'ANFIS sont évalué en utilisant des paramètres statistiques tels que : le coefficient de corrélation ( $R^2$ ), l'erreur absolue moyenne (MAE), la racine carrée de l'erreur moyenne (RMSE) et le carré de l'erreur moyenne (MSE). Ces paramètres montrent un comportement moyen de l'erreur dans l'exécution des modèles et sont des statistiques globales qui ne donnent aucune information sur les résultats finaux de la distribution des erreurs. Pour cette raison, les auteurs de ce travail ont utilisé deux autres paramètres statistiques qui peuvent évaluer précisément l'exécution des modèles, qui sont : la moyenne de l'erreur relative absolue (AARE, Average Absolute Relative Error) et l'indice des statistiques du seuil (TS, threshold statistics). Ces paramètres montrent non seulement la performance du modèle pour prédire mais montre également la distribution des erreurs sur l'ensemble des résultats. L'indice de  $TS_x$  pour x% de prédictions montre la distribution de l'erreur sur les valeurs prédites pour un modèle donné (ou quelconque). Ce paramètre est déterminé pour différentes valeurs de la moyenne de l'erreur relative absolue. La valeur de TS

pour x% de prédictions est déterminées par : 
$$TS_x = \frac{Y_x}{n} \cdot 100 \tag{I-59}$$

Avec,  $Y_x$  : est le nombre de valeurs prédites (d'un nombre total de n) pour chaque valeur d'AARE inférieure à x%.

6.3.2. Résultats des équations empiriques

En se basant sur les données rassemblées, les résultats des équations empiriques du tableau (I-4) sont évalués et comparés aux données mesurées (tableau I-6). Le tableau (I-6) montre qu'aucune de ces équations empiriques ne réalise un bon résultat et que le taux d'erreurs est considérable en comparaison avec les données mesurées. La meilleure équation empirique est (Li et col.) avec  $R^2 = 0,48$  ;  $RMSE = 295,7$  ( $m^2/s$ ) ;  $MAE = 87439,6$  ( $m^4/s^2$ ) ;  $MAE = 132,98$  ( $m^2/s$ ) et  $MAAE = 68,46\%$ .

**Tableau I-6** : Résultats statistiques des équations empiriques dans la prévision des valeurs de  $K_x$ .

Paramètres statistiques					Auteur (Année)
AARE (%)	MAE	MSE	RMSE	$R^2$	
97.18	217.7	204752.5	452.5	0.12	Elder (1959)
51798.3	118320.3	35870077	598974.19	0.01	McQuivey, Keefer (1974)
331.5	833.71	3578526.49	1891.7	0.44	Fisher (1967)

93.12	218.72	207419.03	455.43	0.10	Li et al. (1998)
179.3	238.39	223345.63	472.95	0.35	Liu (1977)
191.31	148.87	112535.11	335.46	0.30	Iwasa, Aya (1991)
637.2	433.50	1044996.01	1022.25	0.42	Seo, Cheong (1998)
259.87	262.61	23246.29	481.92	0.28	Koussis, Rodriguez (1998)
68.46	132.98	87439.6	295.7	0.48	Li et al. (1998)
169.2	352.86	708674.88	814.83	0.38	Deng et al. (2001)
496.83	330.39	826843.83	909.31	0.35	Kashefipour, Falconer (2002)
89.92	172.17	141874.83	376.66	0.44	Kashefipour, Falconer (2002)

Les valeurs de ces indices statistiques montrent une faible performance de l'équation (I-48) (Li et col, 1998) qui relie  $K_x$  directement au carré du tirant d'eau. Mais sur la base physique du phénomène  $K_x$  est une fonction du profil transversal de vitesse qui réduit ses effets avec l'augmentation de la profondeur de l'écoulement. Un autre résultat est que lorsque la profondeur de l'écoulement ou sa largeur sont éliminées des équations empiriques, cette élimination d'un des paramètres les plus importants donne des résultats considérablement réduits en comparaison aux équations similaires. Dans ce cas, les équations (I-47), (I-50), (I-52), et (I-54) peuvent être utilisées. En outre, il est clair que les effets de la vitesse moyenne de l'écoulement sur  $K_x$  soit plus importants que ceux de la largeur d'écoulement.

### 6.3.3. Résultats du modèle ANFIS

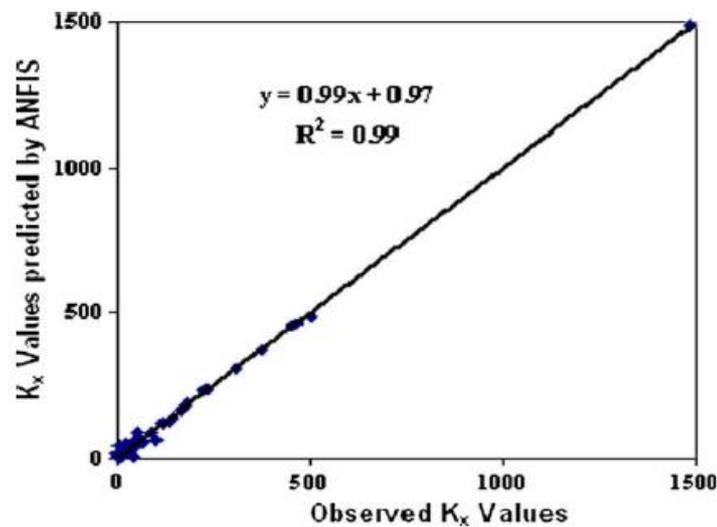
Un nouveau modèle de prédiction du coefficient de la dispersion longitudinale dans les fleuves normaux est développé en se basant sur le modèle ANFIS. Les résultats de ce nouveau modèle sont présentés dans les figures (I-15) – (I-18). Le calcul, les étapes d'essai et les résultats statistiques de ce modèle sont présentés dans le tableau (I-7). Les paramètres d'entrée de ce modèle sont : la largeur d'écoulement, la profondeur d'eau, la vitesse moyenne, et la vitesse de cisaillement. Le paramètre de sortie est le coefficient de la dispersion longitudinale.

Les figures (I-15) – (I-18) prouvent que le modèle d'ANFIS a exactement appris les procédés de dispersion dans les fleuves normaux et a prédit les valeurs exactes de  $K_x$ . Le modèle d'ANFIS a extrait les phénomènes dominants du transport de polluant dans les fleuves normaux et simulé ses dispersions longitudinales. La comparaison des résultats du modèle d'ANFIS (tableau I-7) avec les résultats des équations empiriques (tableau I-6) montre la supériorité du modèle d'ANFIS dans la prédiction des teneurs en  $K_x$  dans les fleuves.

Les résultats de cette étude prouvent que le modèle d'ANFIS peut être utilisé en tant qu'une méthode alternative précieuse pour la prédiction des coefficients de dispersion longitudinale.

**Tableau I-7 :** Résultats statistiques du modèle ANFIS lors de l'apprentissage et des étapes d'essai.

Paramètres statistiques					Étapes du modèle développé
AARE (%)	MAE	MSE	RMSE	R2	
63.48	8.66	230.43	15.18	0.9957	Étape de formation
127.68	104.77	35240.14	187.8	0.9084	Étape d'essai



**Figure I-15 :** Comparaison entre les résultats réels et ceux du modèle ANFIS dans l'étape d'apprentissage.

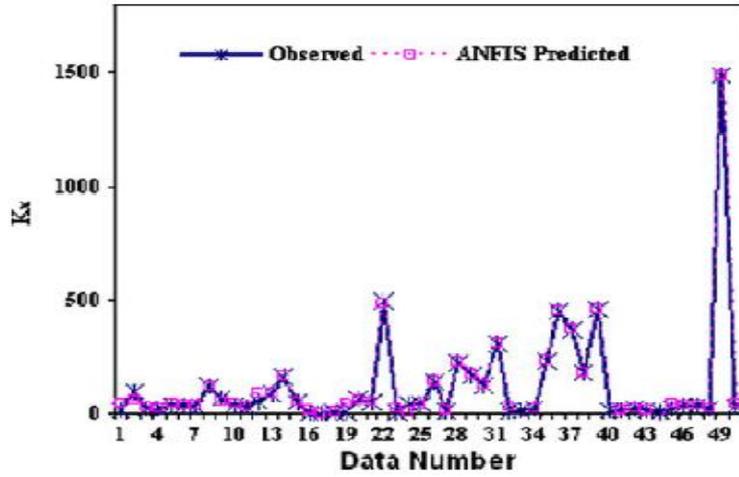


Figure I-16 : Performance des résultats du modèle ANFIS dans l'étape d'apprentissage.

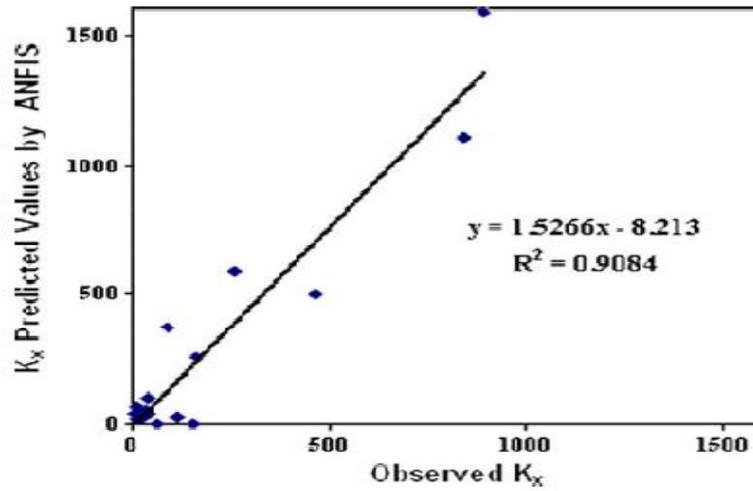


Figure I-17 : Comparaison entre les résultats réels et ceux du modèle ANFIS dans l'étape d'essai.

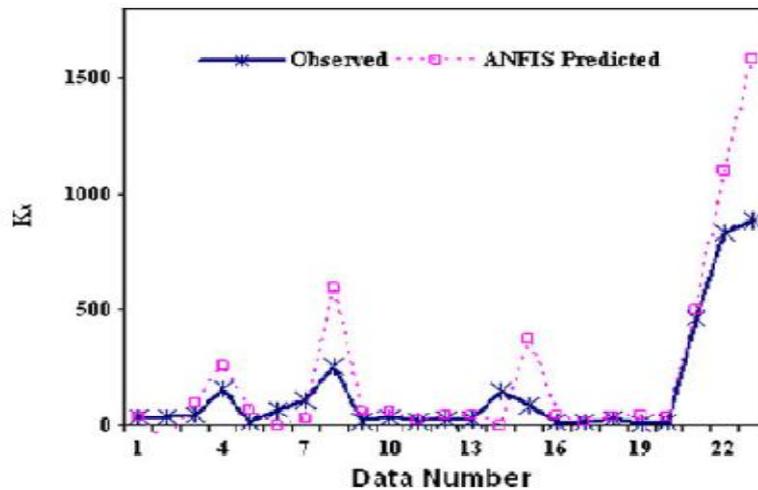


Figure I-18 : Performance des résultats du modèle ANFIS dans l'étape d'essai.

## **Conclusion**

A travers ce chapitre, nous avons présenté quelques travaux réalisés dans le domaine de la modélisation et la simulation de la dispersion de matière dissoute dans les cours d'eau. Certains auteurs ont mené des travaux expérimentaux en vue de valider leurs modèles numériques. La plus part des travaux ont réduit le problème en uni-dimensionnel afin de rendre la résolution plus souple. Cependant, la quasi-totalité des méthodes de résolution utilisées consiste à proposer des solutions analytiques.

Dans notre étude, nous ne pouvons accepter les hypothèses avancées dans l'ensemble de ces travaux. Il est indispensable que notre modèle prenne en compte les aspects non stationnaires de l'écoulement et l'éloignement de l'hypothèse de toit rigide employée dans la plus parts des modèles décrivant l'écoulement en rivière. De plus, les processus physico-chimiques peuvent contribuer à la modification de la concentration du polluant. Pour cette raison, l'équation de la concentration doit inclure un terme représentatif de la destruction de l'espèce polluante. C'est pourquoi notre modèle hydrodynamique ne comportera pas d'hypothèses simplificatrices majeures et donnera une description extrêmement précise du champ de vitesse pour l'étude de transport du polluant notamment au voisinage du point d'injection.

## Chapitre II

# Modélisation mathématique de la dispersion d'un polluant actif dans les écoulements à surface libre

### Introduction

Les problèmes de transport et de diffusion de polluants se posent souvent dans les rivières où existent des écoulements cisailés présentant des gradients horizontaux de vitesse ainsi que des coefficients de diffusion turbulente non constants. Ces gradients qui peuvent être définis dans toute section transversale résultent de l'influence de la forme du lit de la rivière sur l'écoulement.

Toutes les représentations mathématiques des phénomènes de transport et de mélange sont basées sur le principe de conservation d'une grandeur scalaire transportée par l'écoulement. Elles sont fondées sur les équations de bilan des eaux de surface qui expriment l'évolution des paramètres physiques représentatifs de l'évolution du milieu.

Dans ce chapitre, nous allons établir le modèle mathématique régissant les écoulements à surface libre.

### 1. Equations de Navier-Stokes

Les équations qui gouvernent les mouvements des fluides, qu'ils soient turbulents ou non, ont été écrites pour la première fois par Claude Navier en 1823. Elles sont souvent appelées équations de Navier-Stokes en raison des perfectionnements apportés ultérieurement par George Stokes. En fait, il s'agit essentiellement des équations de Newton, qui relie la force et l'accélération, équations qu'il faut appliquer à chaque parcelle du fluide ce qui fut fait pour la première fois par Leonhard Euler il y a trois siècles. L'apport crucial de Navier a été d'ajouter aux équations d'Euler un terme de friction entre les diverses couches de fluide proportionnel au coefficient de viscosité et aux variations de vitesse (Cadot, O., 2006).

#### 1.1. Equations de mouvement

Nous établissons l'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse de fluide, et l'équation abusivement appelée « de quantité de mouvement » qui est en fait issue de la relation fondamentale de la dynamique (Viollet & Chabard & Esposito & Laurence, 1998).

##### 1.1.1. L'équation de continuité

Soit  $\rho$  la masse volumique du fluide, et  $\vec{V}$  le vecteur vitesse, de composantes (U, V, W).

La conservation de la masse de fluide contenue dans un domaine  $\Omega$  s'exprime par :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho d\Omega \right) = 0$$

Le théorème de Leibnitz décompose ce terme en variations observées à l'intérieur du domaine et flux aux frontières :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \right) = \int_{\Omega} \frac{d\rho}{dt} + \int_{\Gamma} \rho \, \vec{U} \cdot \vec{n} \, d\Gamma$$

Le flux aux frontières  $\int_{\Gamma} \rho \, \vec{U} \cdot \vec{n} \, d\Gamma$  est alors ramené à une intégrale de volume

$\int_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{U}) \, d\Omega$  par la théorie de Gauss, et, en reconnaissant que la conservation de la masse

doit être assurée pour n'importe quel domaine  $\Omega$ , nous obtenons une expression locale de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

Cette équation peut être simplifiée en  $\text{div} \vec{U} = 0$  lorsque l'écoulement est permanent, la masse volumique du fluide est constante. D'où, l'équation de continuité basée sur le principe de conservation de la masse s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-1})$$

Avec, U, V et W : les composantes de la vitesse.

### 1.1.2. L'équation de la quantité de mouvement

Nous garderons pour l'instant la forme « compressible » de l'équation de continuité, il nous faut maintenant formuler pour un fluide ce qui s'écrit  $\vec{F} = m \frac{d\vec{U}}{dt}$  pour un solide. Cette forme, la plus connue de la deuxième loi de Newton, doit être en fait écrite plus rigoureusement

$\vec{F}t = \frac{d}{dt}(m\vec{U})$  car pour un fluide la masse volumique est a priori variable. L'équivalent de

$\frac{d}{dt}(m\vec{U})$  sera écrit  $\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho \vec{U} \, d\Omega \right)$ , dérivée en temps de la quantité de mouvement contenue dans

le domaine  $\Omega$  (**Guinot, 2006**). Comme pour la masse, cette quantité s'écrit aussi :

$$\int_{\Omega} \frac{d \rho \vec{U}}{dt} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \, \vec{U} \cdot \vec{n} \, d\Gamma$$

Où,

$$\int_{\Omega} \frac{d \rho \vec{U}}{dt} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) \, d\Omega$$

La force  $\vec{F}$  est une somme de forces extérieures, qui s'appliquent directement dans la masse du fluide, et de forces dites de contact, qui s'applique sur sa surface.

Les forces extérieures seront notées  $\vec{g} + \vec{f}$ , en distinguant l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  et les autres (accélération de Coriolis, etc., qui seront détaillées plus tard).

Si  $d\Gamma$  est un élément de surface du domaine  $\Omega$  dont la normale extérieure est  $\vec{n}$ , l'élément de force de contact appliqué à  $d\Gamma$  est  $d\vec{f} = \sigma \vec{n} d\Gamma$ , où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes.

Les forces appliquées à notre domaine  $\Omega$  sont par conséquent :

$$\int_{\Omega} \rho(\vec{g} + \vec{f})d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma \vec{n} d\Gamma$$

Soit : 
$$\int_{\Omega} \rho(\vec{g} + \vec{f})d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) d\Omega$$

Nous obtenons donc la forme dite « conservative » de l'équation de la quantité de mouvement qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) = \text{div}(\sigma) + \rho\vec{g} + \rho\vec{f}$$

L'utilisation de l'équation de continuité permet aussi d'écrire une forme dite « non conservative » de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\vec{U})}{\partial t} + \vec{U} \nabla \vec{U} = \frac{1}{\rho} \text{div}(\sigma) + \vec{g} + \vec{f}$$

Les deux formes ne sont pas rigoureusement équivalentes dans le cas des fluides compressibles. Il nous faut maintenant choisir de traiter uniquement les fluides Newtoniens, pour lesquels le tenseur des contraintes s'exprime, dans le cas incompressible, sous la forme :

$$\sigma = -p\delta + 2\mu D$$

Où,  $p$  est la pression exprimée en Pascal ;  $\delta$  est le tenseur identité et  $\mu$  le coefficient de viscosité dynamique et  $D$  le tenseur des taux de déformation :

$$D = \frac{1}{2}(\nabla\vec{U} + {}^t\nabla\vec{U})$$

Avec,  $\mu$  : constante qui dépend du fluide, que l'on peut aussi écrire sous la forme  $\rho\nu$ , où  $\nu$  est le coefficient de viscosité cinématique (en  $m^2/s$ ).

On aboutit à l'équation finale de la quantité de mouvement donnée par :

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad (\text{II-2})$$

Nous arrivons finalement à l'écriture suivante des équations en coordonnées cartésiennes :

➤ Suivant l'axe (ox) :

$$\rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \rho F_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II-3})$$

➤ Suivant l'axe (oy) :

$$\rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \rho F_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II-4})$$

➤ Suivant l'axe (oz) :

$$\rho \left( \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \rho F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II-5})$$

Où, P est la pression ; U, V et W sont les composantes de la vitesse et  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  sont les composantes de la force extérieure de volume dans les directions x, y, z.

La viscosité dynamique  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$  sont considérées constantes.

- ❖ Mathématiquement, le système d'équations (II-1), (II-3), (II-4) et (II-5) est bien posé, il y a quatre équations pour les quatre inconnus P et V(U,V,W). Ce système d'équations donne une description «microscopique» des phénomènes. Il décrit en détail le champ tridimensionnel des variables instantanées (donc incluant toutes les fluctuations temporelles).
- ❖ Ces équations peuvent être résolues pour le cas d'un écoulement laminaire. Cependant, des limitations de capacité de calcul nous empêchent de les résoudre pour des écoulements turbulents et nous obligent à faire une moyenne temporelle, afin d'éliminer les fluctuations turbulentes des variables et d'obtenir un système d'équations qui décrit l'état moyen des variables.

## **2. La turbulence**

La turbulence est un de très important domaine de la mécanique des fluides, rencontrée lorsque les dimensions spatiales et la vitesse du fluide est suffisamment importante, pour que les vitesses instantanées des éléments du fluide, ou de particules advectées pour les mouvements, apparaissent très désordonnées, erratiques, chaotiques.

La turbulence est devenue une science expérimentale vers la fin du XIX<sup>e</sup> siècle quand l'anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire au régime turbulent. Dans un tuyau, si l'eau passe lentement, on aura des filets bien réguliers, c'est-à-dire un écoulement laminaire. Si elle va trop vite, il apparaît un très grand nombre de tourbillons et les pertes de charges dans le tuyau vont être très différentes. Reynolds put mettre en évidence des lois assez simples relatives à n'importe quel tuyau pour cette transition vers la turbulence; par l'introduction d'un nombre, appelé depuis nombre de Reynolds.

Dans un écoulement turbulent, si la variation temporelle de la vitesse en un point est généralement bien donnée par la loi en racine cubique de Kolmogorov, on sait depuis longtemps que ce n'est pas toujours vrai. En 1843 Adhémar Barré de Saint Venant observe que " les écoulements dans les canaux de grande section, ceux dont nous dirions aujourd'hui qu'ils possèdent un grand nombre de Reynolds présentent des ruptures, des tourbillonnements et autres mouvements compliqués ". Le point intéressant ce sont les ruptures. C'est un fait expérimental que la vitesse de l'écoulement peut, à l'occasion, varier de façon considérable entre deux points voisins.

Si par hasard l'échelle de cette variation devenait comparable à la distance parcourue par les molécules du fluide entre deux collisions successives, alors il faudrait repenser les fondements mathématiques des équations de Navier-Stokes. La façon traditionnelle d'obtenir ces équations suppose en effet une forte séparation entre le monde microscopique des molécules et le monde, appelé " macroscopique " où le fluide est traité comme un milieu continu (Favre & Kovaznay, 1976).

### **2.1. Définition de la turbulence**

Vu la multitude de forme que peut prendre le phénomène, il est difficile de définir exactement ce que l'on entend par turbulence. Néanmoins, plusieurs définitions ont été proposées parmi lesquelles celle donnée par P. CHASSAING qui définit l'écoulement turbulent comme étant un mode naturel de mouvement de fluide visqueux où des mécanismes internes d'échanges énergétiques assurent, au sein même de l'écoulement, la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continûment sur une large gamme d'échelle macroscopique (Chassaing, 2000).

### **2.2. Différentes approches de la turbulence**

Il n'existe pas une théorie explicative du phénomène de turbulence, mais de nombreuses théories partielles et incomplètes, les approches sont donc nombreuses et diverses.

#### **2.2.1. L'approche directe**

La plupart des approches de la turbulence supposent que le mouvement instantané détaillé du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes, le fluide est alors considéré comme un continuum par rapport à l'échelle moléculaire.

Selon ce point de vue, on connaît les équations de la turbulence. Certaines recherches se sont orientées vers l'étude de « solution turbulente » des équations de Navier-Stokes, (Agostini & Bass, 1955 & Bass, 1961).

L'étude de tout écoulement turbulent pourrait se faire, du moins en principe, par résolution directe des équations de Navier-Stokes, ce qui consiste à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour une ou plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires et faire ensuite un traitement statistique sur les solutions obtenues. Toutefois le nombre de points de discrétisation nécessaire pour représenter les plus petites échelles de turbulence atteint des valeurs faramineuses.

La turbulence étant tridimensionnelle et instationnaire, le nombre  $N$  de point de maillage (qui conditionne l'espace mémoire nécessaire sur ordinateur) dans un domaine cubique sera proportionnel à  $(\delta x)^{-3}$ ,  $\delta x$  étant le pas d'espace et le pas de calcul sera proportionnel à  $N^3/\delta t$  où  $\delta t$  est le pas de temps.  $\delta x$  et  $\delta t$  doivent être de l'ordre des échelles de Kolmogoroff, de manière à présenter les plus petites échelles.

Cette approche nécessite, donc de puissants moyens informatique et elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés.

### 2.2.2. L'approche statistique en un point

Les équations du mouvement présentent des fluctuations irrégulières dans l'espace et dans le temps. Devant cet aspect désordonné des évaluations turbulentes et cette apparente complexité du phénomène, l'attitude naturelle et la plus utilisée a été d'introduire des méthodes statistiques.

La décomposition d'une grandeur caractéristique instantanée de l'écoulement turbulent en une partie macroscopique (moyenne) et une partie turbulente d'apparence aléatoire permet de développer un traitement statistique des équations du mouvement.

A la fin du dix-neuvième siècle (1894), Reynolds a introduit une décomposition entre champ moyen et fluctuant. Toute les variables (vitesse, pression) qui décrivent l'écoulement sont alors décomposées en une valeur moyenne et fluctuante, tel que :  $F = \bar{F} + f$  avec,  $\bar{f} = 0$

Où,  $F$  est la valeur instantanée ;  $\bar{F}$  est la valeur moyenne temporelle et  $f$  est la valeur fluctuante.

Le symbole  $(\bar{\quad})$  représente l'opérateur de moyenne statistique ou moyenne d'ensemble, qui est définie comme la limite statistique de la moyenne arithmétique prise à travers un certain nombre d'expériences réalisées dans les mêmes conditions générales d'écoulement. Cette moyenne vérifie les règles dites « règles de Reynolds » (**Graba, 2002**).

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \\ \bar{\bar{f}} = \bar{f} \\ \overline{\bar{f}g} = \bar{f} \bar{g} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (\text{II-6})$$

Avec,  $\alpha$  : constante ( $\bar{\alpha} = \alpha$ ) et  $t$  : désigne la variable de temps.

Un système d'équations qui décrit le champ moyen peut ainsi être établi.

Dans le cadre de notre étude, la décomposition des variables qui nous intéressent se fait comme suite :  $U = \bar{U} + u$  (II-7)

$$V = \bar{V} + v \quad (\text{II-8})$$

$$W = \bar{W} + w \quad (\text{II-9})$$

$$P = \bar{P} + p \quad (\text{II-10})$$

### 2.3. Equation dynamique du mouvement en un point

Dans notre étude, nous adopterons l'approche statistique de Reynolds qui compte tenue de la décomposition dites de Reynolds permet de distinguer l'écoulement moyen de l'écoulement fluctuant.

En portant la décomposition de Reynolds dans les équations de base (équation de Navier Stokes), on obtient :

$$\frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V} + v)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{W} + w)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-11})$$

$$\rho \left( \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial t} + (\bar{U} + u) \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial x} + (\bar{V} + v) \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial y} + (\bar{W} + w) \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial z} \right) = \rho F_x - \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2(\bar{U} + u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{U} + u)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{U} + u)}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II-12})$$

$$\rho \left( \frac{\partial(\bar{V} + v)}{\partial t} + (\bar{U} + u) \frac{\partial(\bar{V} + v)}{\partial x} + (\bar{V} + v) \frac{\partial(\bar{V} + v)}{\partial y} + (\bar{W} + w) \frac{\partial(\bar{V} + v)}{\partial z} \right) = \rho F_y - \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2(\bar{V} + v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{V} + v)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{V} + v)}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II-13})$$

$$\rho \left( \frac{\partial(\bar{W} + w)}{\partial t} + (\bar{U} + u) \frac{\partial(\bar{W} + w)}{\partial x} + (\bar{V} + v) \frac{\partial(\bar{W} + w)}{\partial y} + (\bar{W} + w) \frac{\partial(\bar{W} + w)}{\partial z} \right) = \rho F_z - \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2(\bar{W} + w)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{W} + w)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{W} + w)}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II-14})$$

En appliquant l'opérateur moyen d'ensemble (défini précédemment) à ces équations, nous avons :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-15})$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u} \bar{w}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-16})$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{v} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v} \bar{w}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-17})$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{w} \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w} \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w} \bar{w}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-18})$$

Avec,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  : viscosité cinématique du fluide.

En émettant l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel, nos équations deviennent :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-19})$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-20})$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{wu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-21})$$

Nous constatons qu'il y a apparition des nouveaux termes dans les équations de la quantité de mouvement de l'écoulement moyen; ainsi, les termes  $\overline{uu}$ ,  $\overline{uw}$ ,  $\overline{wu}$ ,  $\overline{ww}$  donnent naissance aux tensions de Reynolds; elles proviennent de la non linéarité des équations de Navier -Stokes et traduisent l'interaction entre mouvement moyen et mouvement fluctuant.

Le système ainsi obtenu admet plus d'inconnues que d'équations. La transformation qui lui sera appliquée afin de palier à cet obstacle est appelée fermeture du système. Elle consiste à exprimer certains termes à partir de variables résolues par le système ou par la résolution d'un système d'équations supplémentaires. La modélisation des corrélations de fluctuations de vitesse constitue un modèle de turbulence.

### **3. Modélisation de la turbulence**

La turbulence a un statut très particulier dans la physique contemporaine. Elle est souvent considérée comme un des grands problèmes ouverts de la physique, mais contrairement à d'autres problèmes frontières de la physique, les phénomènes auxquels on s'intéresse en turbulence ne se situent ni dans l'infiniment petit ni, en général, dans l'infiniment grand. Ces phénomènes sont parfaitement décrits par la mécanique de Newton, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir la mécanique quantique ou la mécanique relativiste, c'est-à-dire les idées modernes de la physique sur l'espace, le temps et la matière.

Les modèles de turbulence ne peuvent donner qu'une description approchée et ils ne sont applicables qu'à une certaine classe d'écoulements.

Les qualités que l'on pourra rechercher dans un modèle de turbulence pourront être : le domaine d'application, la précision des prévisions qu'il permet, la simplicité de mise en œuvre, l'économie en temps de calcul.

Il n'existe pas un modèle de turbulence universel, mais il y a plusieurs modèles et chacun répond à un domaine d'application. On dit qu'un tel ou tel modèle est bon, s'il vérifie les critères suivants (**Wertel, 2006**) :

- Fermeture du système d'équation ;
- Contenir un minimum de constantes ou fonction empiriques ;
- Présente un degré d'universalité maximum ;
- Etre simple et rapide dans la résolution numérique ;
- Donne des résultats précis.
-

### 3.1. Classification des modèles en un point

Le but des modèles statistiques en un point est la détermination des tensions de Reynolds, afin de rendre possible la résolution du système d'équation régissant l'écoulement moyen (JAEGER, 1990) :

#### 3.1.1. Concept de viscosité turbulente

Les modèles utilisant la notion de viscosité turbulente reposent sur l'existence, au sein couches cisillées à grand nombre de Reynolds, d'une région assez étendue d'équilibre approximatif entre la production d'énergie turbulente (extraite des grosses structures) et la dissipation turbulente (dissipée aux petites échelles), échanges entre l'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant.

Le concept de la viscosité turbulente, est apparu tout d'abord dans les travaux de Boussinesq (1877), qui a proposé en analogie de celle de Newton pour les contraintes de viscosité

$$\text{moléculaire : } \overline{-uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

Où, le coefficient de proportionnalité  $\nu_t$  représente la viscosité cinématique turbulente.

La généralisation du même concept au niveau tensoriel par Reynolds a conduit à :

$$\overline{-u_i u_j} = -R_{ij} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-22})$$

à laquelle Hinze a effectué une correction :

$$\overline{-u_i u_j} = -R_{ij} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{II-23})$$

Avec,  $\delta_{ij}$  : le symbole Kronecker, tel que  $\delta_{ij} = 1$  pour  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$  ;

$k$  : l'énergie cinétique turbulente et  $\nu_t$ , la viscosité turbulente.

Le terme  $\frac{2}{3} k \delta_{ij}$  est analogue à une pression dynamique par agitation turbulente.

La viscosité turbulente  $\nu_t$ , contrairement à la viscosité moléculaire  $\nu$  n'est pas une propriété du fluide mais de l'écoulement, variant d'un point à l'autre de celui-ci. Le problème de la détermination des tensions de Reynolds est donc transféré sur l'évolution de cette quantité.

Cette viscosité turbulente est évaluée, par analogie avec la viscosité moléculaire, comme le produit d'une échelle de vitesse  $u$  et d'une échelle de longueur  $l$ , caractéristiques de la turbulence. Elle peut s'obtenir à partir d'une relation algébrique, d'une ou plusieurs équations de transport.

#### 3.1.1.1. Modèle à viscosité turbulente algébrique

Les modèles à viscosité turbulente algébrique ne font appel à aucune équation de transport, puisque  $\nu_t$  est donnée par une expression algébrique. Ces modèles ont l'avantage d'une relation robuste et de l'économie en temps de calcul, leur valeur prédictive est limitée mais les modèles plus précis sont complexes et coûteux.

D'après la théorie cinétique des gaz, la viscosité moléculaire est égale au produit de la vitesse moyenne des molécules par leur libre parcours moyen. Par analogie, Prandtl suggéra que la viscosité turbulente  $\nu_t$  peut elle aussi être mise sous forme de produit d'une vitesse et d'une longueur caractéristique du mouvement turbulent, appelée longueur de mélange.

L'analyse du cas d'une particule fluide soumise à un seul gradient de vitesse conduit à exprimer la vitesse caractéristique en fonction de la longueur caractéristique  $l_m$  :

$$V = l_m \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{II-24})$$

Ce qui conduit à l'expression suivante de la viscosité turbulente :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (\text{II-25})$$

La généralisation aux écoulements quelconque est :

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{\left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad ; \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{II-26})$$

Pour un écoulement complexe quelconque, la formule de longueur de mélange appropriée ne peut généralement s'obtenir qu'à partir de résultats expérimentaux. L'intérêt d'une simulation numérique en est évidemment beaucoup diminué.

### **3.1.1.2. Modèle à une équation de transport**

Le plus grand reproche qui peut être formulé à propos des modèles à viscosité turbulente algébrique est qu'ils ignorent complètement le caractère non local de la turbulence qui ne peut être pris en compte qu'en introduisant dans la définition de  $\nu_t$ , au moins une grandeur turbulente décrite par une équation d'évolution.

Le modèle proposé indépendamment par Kolmogorov et Prandtl, exprime la viscosité turbulente ( $\nu_t$ ) en fonction de l'énergie cinétique moyenne turbulente ( $k$ ) et d'une longueur caractéristique ( $l$ ) tel que :  $\nu_t = C_\mu \sqrt{k} l$  (II-27)

Avec,

$C_\mu$  : constante numérique ;

$l$  : représente une échelle de longueur qui est donnée algébriquement ;

$k$  : l'énergie cinématique moyenne produit par le mouvement fluctuant donnée par :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_j u_j} = \frac{1}{2} R_{jj} \quad j = 1, 3$$

Le transport de la turbulence est cette fois pris en compte grâce à l'équation d'évolution de  $k$ , mais le problème de la détermination de la longueur caractéristique reste entier. On peut donc formuler les mêmes réserves pour ce modèle que le modèle de longueur de mélange, quant à l'application aux écoulements à géométrie complexe.

### **3.1.1.3. Modèle à deux équations de transport**

Dans ce modèle, le problème de la détermination de l'échelle de longueur caractéristiques  $l$  peut être résolu en notant que  $l$ , comme  $k$ , doit pouvoir être décrite par une équation de transport. En fait, choisir  $l$  comme variable associée à  $k$  n'est pas fondamental. Toute combinaison de la forme  $k^m l^n$  convient aussi bien. De nombreux modèles à deux équations de transport ne diffèrent que par le choix du couple d'exposant  $(m, n)$ .

Il existe plusieurs types de modèles : modèle  $k-k^{1/2}l^{-1}$ , modèle  $k-kl$ , modèle  $k-kl^2$ , modèle  $k-k^{3/2}l^{-1}$  (modèle  $k-\varepsilon$ ). L'équation de transport supplémentaire conserve la même forme générale quel que soit le choix du couple  $(m, n)$ , mais c'est pour la variable  $k^{3/2}l^{-1}$  que cette équation est plus simple. C'est en partie, pour cette raison, que ce modèle est devenu plus célèbre que les autres, et c'est actuellement le modèle à deux équations de transport, et même plus généralement le modèle statique en un point, le plus utilisé. En fait, ce modèle est plutôt connu sous la dénomination de modèle  $k-\varepsilon$ .

#### **Modèle $k-\varepsilon$**

Dans le cas où on prend  $m = 3/2$  et  $n = -1$ , on obtient le modèle  $k - k^{3/2}l^{-1}$ , appelé le modèle  $k-\varepsilon$ .

Il a été le plus largement testé et utilisé. La viscosité turbulente est définie par :  $\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  ;

avec,  $\varepsilon = k^{3/2}l^{-1}$ , le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ( $k$ ) (**Mohammadi & Pironneau, 1994**).

#### **❖ Formulation**

Les valeurs de  $k$  et  $\varepsilon$  sont données par la résolution de deux équations de transport obtenues en simplifiant les équations d'évolution exactes de  $k$  et  $\varepsilon$  et en modélisant parmi les termes restant ceux qui introduiraient de nouvelles inconnues dans le système.

L'équation d'évolution exacte de  $k$  s'écrit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = -R_{ij} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u_j \frac{u_i u_i}{2}} + \frac{\overline{p}}{\rho} u_j - \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} \right] - \nu \left[ \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \right] \quad i, j=1,3 \quad (\text{II-28})$$

Celle de  $\varepsilon$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left[ \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_j}}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_m} + \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_j}}{\partial x_m \partial x_m} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right] - 2\nu \left[ \overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_m} \right] \\ & - 2\nu \left[ \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_i} \partial \overline{u_j}}{\partial x_j \partial x_m \partial x_m} \right] - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u_j \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_m} \right)^2} \right] - 2 \frac{\nu}{\rho} \left[ \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial x_i \partial x_m} \right] + \nu \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} \right] - 2\nu^2 \left[ \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_m} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-29})$$

Avec,  $i, j, m = 1, 3$ .

En introduisant l'hypothèse des grands nombres de Reynolds dans l'équation (II-28), le terme de diffusion moléculaire  $\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2}$  peut être négligé, et les deux autres termes seront modélisés

$$\text{sous la forme suivante : } \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u_j \frac{u_i u_i}{2}} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] ; i, j = 1, 3 \quad (\text{II-30})$$

Avec,  $\sigma_k$  : constant numérique.

La même hypothèse permet aussi de négliger les : premier, second, troisième, sixième et septième termes du membre de droite de l'équation (II-29).

L'hypothèse de diffusion en gradient permet de modéliser le cinquième terme (terme de

$$\text{diffusion restant) par : } \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{\nu u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)^2} \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) ; i, j, m = 1, 3 \quad (\text{II-31})$$

Avec,  $\sigma_\varepsilon$  : constante numérique.

La modélisation utilisée pour le quatrième terme est celle proposée par Launder, Reece et Rodi (1975) qui donne :

$$-2\nu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right] - 2\nu^2 \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_m} \right]^2 = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_r - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} ; i, j, m = 1, 3 \quad (\text{II-32})$$

Avec,  $C_{\varepsilon 1}$  et  $C_{\varepsilon 2}$  se sont des constantes numériques.

Enfin en tenant compte de toutes les hypothèses posées et en négligeant la diffusion moléculaire (d'après l'hypothèse de grand nombre Reynolds posée dans l'équation de l'énergie cinétique turbulent) les équations du modèle  $k - \varepsilon$  sont données comme suite :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_r + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (\text{II-33})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{P_r \varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{II-34})$$

Avec,  $P_r$  : production d'énergie cinétique turbulente due à l'interaction contraintes turbulentes-gradients de vitesse moyenne donnée par :

$$P_r = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II-35})$$

$$\text{et } \nu_t = C_u \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Il intervient cinq constantes  $c_\mu, c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, \sigma_\varepsilon, \sigma_k$  dont les valeurs numériques recommandées par Launder (1975) sont :  $c_\mu = 0.09, c_{\varepsilon 1} = 1.44, c_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$

❖ La différence entre les modèles de turbulence réside dans leurs capacités à reproduire fidèlement le comportement des écoulements turbulents sur différentes configurations, dans les difficultés liées à leur implémentation et leur résolution dans des codes de calcul. Aucun modèle n'est satisfaisant pour tous les types de configurations. Le choix du modèle de turbulence est donc fonction des applications visées ainsi que de la capacité des méthodes numériques à le supporter.

En utilisant le modèle k-ε pour la fermeture des équations de notre modèle mathématique à deux dimensions qui s'écrit comme suit :

Equation de continuité

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-36})$$

Equation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{uu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-37})$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{wu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \quad (\text{II-38})$$

Dans ces équations, les tensions de Reynolds sont données en fonction de la viscosité turbulente comme suite :

$$\overline{uu} = -2\nu_t \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{3}{2}k \quad (\text{II-39})$$

$$\overline{uw} = \overline{wu} = -\nu_t \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right) \quad (\text{II-40})$$

$$\overline{ww} = -2\nu_t \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) + \frac{3}{2}k \quad (\text{II-41})$$

En remplaçant les tenseurs de Reynolds par leurs expressions, les formules deviennent :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + (\nu + 2\nu_t) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \nu_t \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z \partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (\text{II-42})$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + (\nu + 2\nu_t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu_t \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \quad (\text{II-43})$$

*L'équation de l'énergie cinétique turbulente*

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + v_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \epsilon \quad (\text{II-44})$$

*L'équation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente*

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = C_{\epsilon 1} v_t \frac{\epsilon}{k} \left[ 4 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (\text{II-45})$$

**4. Modèle de transport**

Un constituant, ou une grandeur physique, encore appelé variable d'état, est transporté à la vitesse de l'eau par convection. Il est de plus soumis à des processus de mélange par diffusion moléculaire, diffusion turbulente et convection différentielle. Ces processus sont regroupés sous la forme d'un terme de dispersion unique. Le modèle de transport se fonde sur la résolution d'une équation différentielle comprenant une partie convective et une partie dispersive (**Blanckaert, 2006**).

Le constituant transporté peut être dans les différents états suivants :

- La matière soluble (substance chimique, polluant, oxygène, etc...),
- La matière solide (sédiments en suspension, micro-organismes, produits biologiques, etc...),
- La chaleur,
- La quantité de mouvement.

Nous distinguons ici les grandeurs physiques passives (qui sont conservées pendant le transport) des grandeurs physiques actives (qui subissent des modifications dues aux réactions chimiques ou biologiques, aux changements de phase, aux transferts à travers le périmètre de l'écoulement, etc...).

La partie suivante porte sur l'étude des phénomènes de la dispersion d'un polluant actif dans les écoulements de fluide incompressible, et l'élaboration de l'équation de transport pour déterminer la concentration du polluant pour n'importe quelles conditions aux limites et initiales.

**4.1. Les mécanismes de transport et de mélange**

La théorie du transport et du mélange dans les cours d'eau est valable pour le transport d'une grandeur physique dans tout fluide en mouvement (substance chimique dans l'air, polluant dans l'océan, etc...).

Représentons la grandeur physique qui nous intéresse dans l'écoulement par sa concentration  $C(x,y,z,t)$ .

#### 4.1.1. La convection

La convection est le transport de la grandeur physique par la vitesse de l'écoulement. Le flux convectif est exprimé par :

$$\vec{q}_m = C\vec{V} \quad (\text{II-46})$$

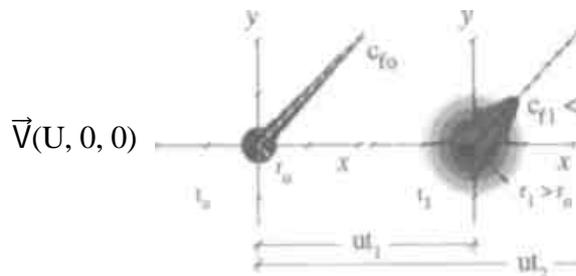
#### 4.1.2. La diffusion moléculaire

La diffusion moléculaire tend à uniformiser la répartition de la grandeur physique. Elle dépend uniquement de cette dernière et du fluide, mais non pas de l'écoulement du fluide. Le flux diffusif est exprimé par une loi phénoménologique :

$$\vec{q}_f = -D_m \overrightarrow{\text{grad}C} \quad (\text{II-47})$$

Le flux diffusif est proportionnel au gradient de C, qui quantifie la non-uniformité de la répartition de C. Le facteur de proportionnalité  $D_m$  est appelé la **diffusivité moléculaire**, c'est une grandeur intrinsèque du fluide dépendant de la température et de la pression. Le signe négatif signifie que le flux est dirigé des valeurs élevées vers des valeurs plus faibles.

La figure (II-1) illustre schématiquement l'effet de la diffusion moléculaire superposée à la convection:



**Figure II-1 :** Illustration schématique de la diffusion moléculaire superposée à la convection

Dans le cas de notre polluant actif étudié, la diffusion moléculaire est exprimée par la **loi de Fick** comme suit :

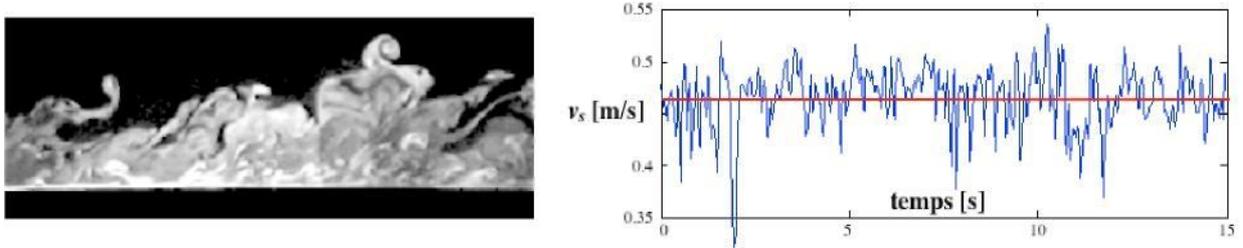
$$\vec{q}_m = -D_m \overrightarrow{\text{grad}C} \quad (\text{II-48})$$

Avec,  $D_m$  [m<sup>2</sup>/s] la diffusivité massique, son ordre de la grandeur typique est :  $D_m \sim 10^{-9}$  [m<sup>2</sup>/s]

La diffusion moléculaire est très faible et n'explique pas le transport ou le mélange observés dans les cours d'eau naturels. Dans le cas des écoulements turbulents, elle est négligeable par rapport à la diffusion turbulente et la dispersion.

#### 4.1.3. La diffusion turbulente

À partir d'un nombre de Reynolds critique, de l'ordre de  $Re = 2000$ , la turbulence se manifeste par un mouvement tourbillonnaire de l'écoulement (figure II-2a), accompagné de fluctuations aléatoires des variables autour de leur valeur moyenne (figure II-2b).



**Figure II-2 :** (a) Mouvement tourbillonnaire de l'écoulement turbulent ; (b) Fluctuations turbulentes de la composante longitudinale de la vitesse autour d'une valeur moyenne, mesurée dans un point fixe d'un cours d'eau.

Toutes les variables peuvent donc être décomposées en valeurs moyennes et fluctuantes :

$$\vec{V}(t) = \bar{\vec{V}} + \vec{v}(t) \text{ par définition } \overline{\vec{v}(t)} = 0 \text{ et } C = \bar{C} + c(t) \text{ par définition } \overline{c(t)} = 0$$

$$\rightarrow \text{Mais } \overline{c(t)v(t)} \neq 0$$

Le flux convectif de la grandeur physique s'écrit :

$$\vec{q}_{\text{conv}}(t) = C(t) \vec{V}(t) = \bar{C} \bar{\vec{V}} + c(t) \vec{v}(t) + C(t) \bar{\vec{V}} + \bar{C} \vec{v}(t)$$

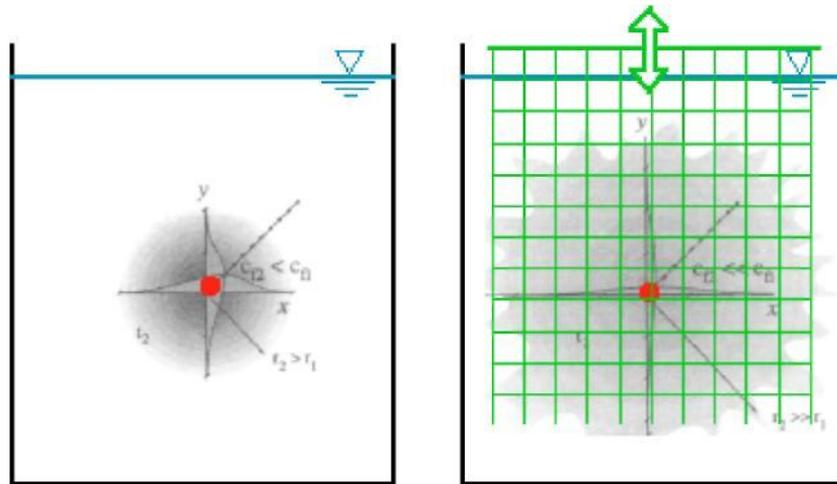
La moyennée temporelle du flux convectif est obtenue comme suit :

$$\bar{\vec{q}}_{\text{conv}} = \bar{C} \bar{\vec{V}} + \overline{c(t) \vec{v}(t)} + \overline{C(t) \bar{\vec{V}}} + \overline{\bar{C} \vec{v}(t)}$$

$$\bar{\vec{q}}_{\text{conv}} = \vec{q}_{\text{conv-moy}} + \vec{q}_{\text{f.turb}}$$

Les fluctuations turbulentes contribuent donc au flux convectif de la grandeur physique transportée. Cependant, le flux convectif turbulent ne se manifeste pas par une convection de la grandeur physique, mais par une diffusion importante. Ceci est illustré à l'aide du mélange d'un colorant, injecté ponctuellement au milieu d'un bassin (figure II-3).

- Si l'eau dans le bassin est stagnante (figure II-3a), la diffusion moléculaire engendrera un mélange très lent du colorant. Les iso-surfaces de concentration seront sphériques.
- En faisant osciller verticalement une grille dans le bassin, des fluctuations turbulentes de vitesse peuvent être générées, sans pour autant générer de vitesses moyennes. Intuitivement, il est clair que le mélange du colorant s'intensifiera. Ceci est l'effet de la diffusion turbulente. L'agent de transport,  $\vec{v}(t)$ , transporte la grandeur physique selon une trajectoire aléatoire autour de sa position moyenne. Les iso-surfaces de concentration sont en moyenne sphériques, mais prennent des formes très irrégulières instantanément, et donc une surface bien supérieure à celle de la sphère moyenne. De plus, leurs formes irrégulières engendrent des augmentations du gradient de  $C$ . L'augmentation des gradients et de la surface active augmentent énormément la diffusion moléculaire.



**Figure II-3** : Mélanges d'un colorant dans un bassin par  
(a) diffusion moléculaire (b) et diffusion turbulente

L'effet de la turbulence est donc d'engendrer des trajectoires aléatoires de la grandeur physique, ce qui augmente énormément la diffusion moléculaire. Comme ces phénomènes se produisent à l'échelle temporelle rapide de la turbulence, ils ne sont pas aperçus une fois que l'on a moyenné la vitesse en fonction du temps, mais se manifestent comme une augmentation apparente de la diffusion. Ceci se résume comme :

**Convection Turbulente**  $\rightleftharpoons$  **Diffusion Moléculaire Augmentée**  $\Rightarrow$  **Diffusion Turbulente.**

#### 4.1.4. La dispersion

La dispersion est l'équivalent spatial de la turbulence :

- La diffusion turbulente intervient car les fluctuations **temporelles** des variables ne peuvent pas être résolues.
- La dispersion intervient car les fluctuations **spatiales** des variables ne peuvent être résolues.

Le transport et le mélange des grandeurs physiques dans les cours d'eau concernent des problèmes à grande échelle spatiale, nécessitant souvent une description unidimensionnelle des variables. Le cours d'eau est modélisé comme un canal prismatique et la répartition des variables dans une section du cours d'eau est caractérisée par une seule valeur.

Cependant, comme démontré par l'exemple suivant, la répartition tridimensionnelle des variables contribue au transport et au mélange. Considérons une grandeur physique injectée instantanément sur toute la section d'un cours d'eau (figure II-4).

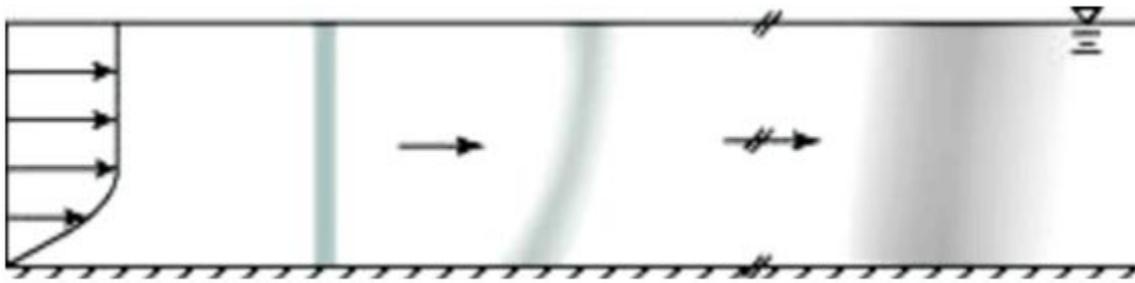


Figure II-4 : Représentation schématique de la dispersion

Si la vitesse était uniformément répartie dans la section, la grandeur physique resterait uniformément répartie dans la section pendant qu'elle est soumise à la convection. Simultanément, elle s'étalerait dans le sens longitudinal dû à la diffusion turbulente.

De par la répartition verticale de la vitesse, la grandeur physique ne reste pas uniformément répartie dans la section pendant qu'elle est soumise à la convection, ce qui peut être appelé une convection différentielle. Ceci engendre un étirement longitudinal du nuage et des gradients verticaux de concentration qui, à leur tour, créent des flux verticaux de diffusion turbulente qui tendent à uniformiser la concentration. Il en résulte un étalement plus rapide du nuage. La répartition de vitesse se manifeste donc par une augmentation apparente de la diffusion longitudinale, appelée dispersion.

La dispersion apparaît mathématiquement en décomposant toutes les variables en une valeur moyennée sur la profondeur de l'écoulement et des déviations spatiales de cette valeur :

$$U(z) = U + u(z) \text{ par définition } \overline{u(z)} = 0 \text{ et } C = C + c(z) \text{ par définition } \overline{c(z)} = 0$$

$$\rightarrow \text{Mais } \overline{c(z)u(z)} \neq 0$$

Le flux moyen convectif local se décompose donc comme :

$$\vec{q}_{\text{conv-moy}} = C(z) U(z) = CU + c(z) u(z) + c(z)U + Cu(z)$$

Sa valeur moyennée sur la profondeur de l'écoulement devient :

$$\overline{\vec{q}_{\text{conv-moy}}} = C U + \overline{c(z)u(z)} + \overline{c(z)U} + \overline{Cu(z)}$$

$$\overline{\vec{q}_{\text{conv-moy}}} = \overline{\vec{q}_{\text{conv}}} + \overline{\vec{q}_{\text{disp}}}$$

Ceci montre que la répartition spatiale des vitesses contribue au flux convectif de la grandeur physique transportée. Cependant, le flux convectif dû à la répartition des vitesses ne se manifeste pas par une convection de la grandeur physique, mais par une augmentation apparente de la diffusion. En résumé :

**Convection Différentielle Longitudinale par la Répartition de Vitesse**  $\Leftrightarrow$  **Diffusion Turbulente Verticale**  $\Rightarrow$  **Diffusion Longitudinale.**

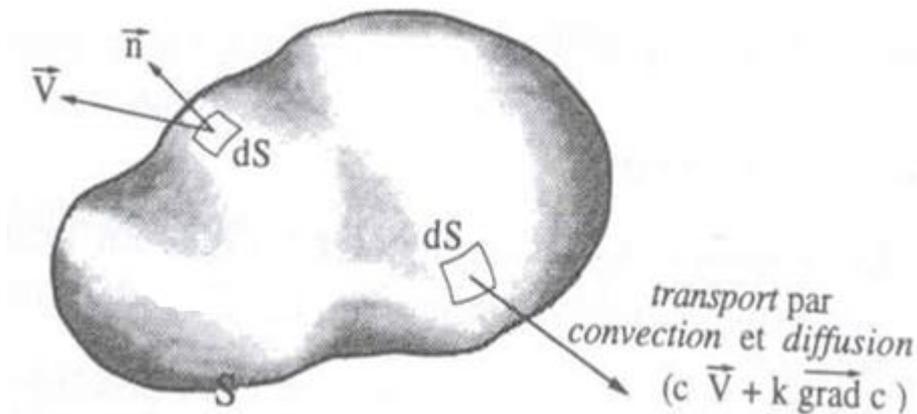
#### 4.2. Modélisation des mécanismes de transport et de mélange

Maintenant que les différents processus de transport et de mélange sont décrits, il faut les incorporer dans un modèle pour le transport et le mélange des grandeurs physiques. Ce modèle est basé sur le principe de conservation de la masse de la grandeur physique. Il s'élabore en plusieurs étapes :

1. Tout d'abord, un modèle mathématique est élaboré au niveau microscopique : il décrit en détail les répartitions tridimensionnelles des variables instantanées. Ce modèle inclut uniquement les deux vrais mécanismes de transport et de mélange : la convection et la diffusion moléculaire.
2. Comme ce modèle est impossible à résoudre à cause des limitations en capacité de calcul, il est moyenné dans le temps. Ainsi, un modèle est obtenu qui décrit les répartitions tridimensionnelles des variables moyennées temporellement. Moyenner la vitesse par rapport au temps fait apparaître la diffusion turbulente.
3. En traitant des longs tronçons de rivière, on est limité à une approche unidimensionnelle, c'est-à-dire que les variables sont moyennées dans la section. Ainsi un modèle est obtenu qui décrit les répartitions unidimensionnelles des variables moyennées temporellement. Ceci fait apparaître la dispersion.

#### 4.2.1. Modélisation tridimensionnelle de l'équation de transport

Le modèle pour la grandeur physique de la concentration est obtenu en exprimant sa conservation, au moyen d'une équation de bilan. Considérons un domaine matériel fluide,  $D$ , délimité par une surface fixe  $S$  (figure II-5). Exprimons que le changement de la densité volumique de la grandeur physique  $C$  transportée par le fluide en mouvement avec une vitesse  $\vec{V}(U,V,W)$  pendant un laps de temps  $\partial t$  est dû aux **flux convectif** et **diffusif** à travers la surface  $S$ , ainsi qu'aux éventuelles sources internes (**Graf & Altinakar, 1996**).



**Figure II-5 :** Le domaine matériel  $\Omega$  soumis à un bilan pour une grandeur physique  $C$

L'équation de bilan de matière sous forme intégrale est donnée par :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(C\vec{V}) d\Omega = - \int_{\Omega} \text{div} \vec{q}_n d\Omega + \int_{\Omega} q_e d\Omega \quad (\text{II-49})$$

Avec,  $q_m$  : correspond au vecteur de densité de flux ;

$q_e$  : est le terme source. Il correspond au taux de production locale de la substance.

Le bilan sous forme local s'exprime par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C\vec{V}) = -\text{div}\vec{q}_m + q_e \quad (\text{II-50})$$

En posant l'hypothèse suivante :

- Fluide incompressible, donc  $\rho = \text{cste}$  et  $\text{div}(\vec{V}) = 0$

La loi de Fick exprime qu'une substance a tendance à s'uniformiser dans un mélange, c.à.d. qu'il se forme un flux des zones de forte concentration vers les zones de faible concentration, la grandeur extensive est associée ici à la concentration de la substance, et le vecteur de densité du flux est donné par la loi de Fick :

$$\vec{q}_m = -D_m \text{grad} C \quad (\text{II-51})$$

Avec,

$C$  : est la concentration définie par la masse de la substance par le volume du fluide ( $\text{kg/m}^3$ ) ;

$D_m$  : est la diffusivité moléculaire (massique) de la substance dans le mélange exprimée en ( $\text{m}^2/\text{s}$ ). Elle dépend de la composition chimique et de la concentration moléculaire de la substance.

En physique comme dans bien d'autre discipline, lorsqu'on se trouve confronté à des phénomènes complexes, fluctuants, en apparence insaisissables, on a généralement recours à un traitement statistique. On postule donc que toute grandeur physique de l'écoulement peut être considérée comme une variable aléatoire, dont la valeur instantanée est la somme d'une valeur moyenne d'une valeur fluctuante.

L'équation du bilan devient :

$$\frac{\partial(\bar{C} + c)}{\partial t} + \text{div}[(\bar{C} + c)(\bar{V} + v)] = \text{div}[D_m \text{grad}(\bar{C} + c)] + q_e \quad (\text{II-52})$$

En appliquant l'opérateur moyen de l'ensemble, on obtient ainsi l'équation de bilan aux valeurs moyennes :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \text{div}(\bar{C}\bar{V} + \bar{c}v) = \text{div}(D_m \text{grad} \bar{C}) + q_e \quad (\text{II-53})$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \text{div}(\bar{C}\bar{V}) = \text{div}[(D_m \text{grad} \bar{C}) - \bar{c}v] + q_e \quad (\text{II-54})$$

On remarque l'apparition d'un nouveau terme exclusivement lié aux fluctuations, on parle de ( $\text{div} \bar{c}v$ ), qui est interprété comme étant une source de surface ; qui se superpose à la diffusion classique. Il manifeste donc l'existence d'un nouveau mécanisme de transport de la grandeur  $C$ , provoqué par les fluctuations de vitesse  $u$ .

Le terme ( $\bar{c}v$ ) est une covariance appelée flux turbulent de Reynolds ; il peut aussi être associé à une diffusion turbulente, par analogie avec le terme de la diffusion moléculaire.

On pose :  $-(\overline{cv}) = D_t \text{grad} \overline{C}$  (II-55)

$D_t$  : est la diffusivité turbulente, qui est fonction des propriétés locales de l'écoulement.

Cette diffusivité peut être un scalaire  $D_t$  ou un tenseur diagonal  $\vec{D}_t (D_{tx}, D_{ty}, D_{tz})$ .

En remplaçant l'égalité précédente dans l'équation du bilan, on obtient :

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \text{div}(\overline{C}\vec{V}) = \text{div}[(D_m + D_t) \text{grad} \overline{C}] + q_e \quad \text{(II-56)}$$

#### 4.2.2. Détermination des coefficients de diffusivité turbulente longitudinale et transversale

Il n'existe pas de relation théorique pour la détermination des coefficients de diffusivité longitudinale et transversale. Leur détermination se fait expérimentalement ou empiriquement.

Dans la suite de notre étude, nous retenons les formules suivantes pour le calcul de  $D_{tx}$  et  $D_{ty}$  :

$$D_{tx} = 0.23Hu_* \quad \text{(II-57)}$$

$$D_{tz} = 0.15Hu_* \quad \text{(II-58)}$$

Dans le cas général, nous supposons que :  $D_t \gg D_m$ .

#### 4.2.3. Transport avec réaction

Notre polluant actif ne se conserve pas ; dans ce cas, le mélange représente le siège de transformation dans sa composition.

D'où le terme de source  $q_e$  est modélisé comme suite :

$$q_e = k_r \overline{C} \quad \text{(II-59)}$$

Ce terme exprime le taux avec lequel une substance active augmente ou diminue par réaction.

$k_r$  : représente le coefficient de réaction de la substance dans le mélange.

#### 4.2.4. Equation du bilan de matière dans un système de coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = D_m \left( \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{tx} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{ty} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{tz} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} \right) + q_e \end{aligned} \quad \text{(II-60)}$$

Cette dernière est l'équation de convection – diffusion de matière en régime turbulent. Elle peut être utilisée comme une équation de base pour l'analyse de tous les problèmes de transport de matière soluble dans les cours d'eaux.

Dans cette équation, on admet que : 
$$-D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = (\overline{cu}) \quad (\text{II-61})$$

$$-D_{ty} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = (\overline{vc}) \quad (\text{II-62})$$

$$-D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = (\overline{wc}) \quad (\text{II-63})$$

Le phénomène de transport en écoulement turbulent est essentiellement suivant les deux directions x et z, donc notre équation de transport sera la suivante :

Equation de transport en dimension 2-D

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = D_m \left( \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - k_r \bar{C} \quad (\text{II-65})$$

**Conclusion**

Nous avons dressé un bilan de l'existence en termes d'équations gouvernantes l'écoulement afin d'établir la formulation mathématique du phénomène étudié. Nous avons donc opté pour un modèle issu du modèle de Navier Stocks avec toutes les simplifications essentielles pour notre modèle.

La modélisation de l'ensemble des processus physiques grâce aux équations de convection-diffusion de la concentration du polluant et aux deux équations du modèle de turbulence k-epsilon.

La résolution de ces équations se fait numériquement afin d'obtenir des solutions approchées. Pour ce faire, le développement d'un modèle numérique s'impose. Ceci fera l'objet du prochain chapitre, où une méthode numérique appropriée sera développée.

## Chapitre III

# Modélisation numérique de la dispersion d'un polluant Actif via le schéma implicite de Beam Warming

### Introduction

La modélisation mathématique et la simulation numérique ont pris une importance considérable ces dernières décennies dans tous les domaines de la science et des applications industrielles. On peut considérer que la modélisation mathématique est l'art ou la science de présenter une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul. La simulation numérique est le processus qui permet de calculer sur ordinateur les solutions de ces modèles, et donc de simuler la réalité physique.

Dans ce chapitre, nous allons établir une description générale de la méthode des différences finies utilisée pour résoudre numériquement notre système d'équation, ensuite, une présentation du schéma implicite de Beam Warming que nous avons retenu comme schéma aux différences finies pour la résolution des équations composant notre modèle mathématique. La dernière partie est consacrée à la discrétisation des équations à partir du schéma de Beam Warming.

### **1. Calcul numérique par différences finies**

Les équations aux dérivées partielles constituent aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique et leurs champs d'application augmentent d'importance et englobent le domaine de l'hydraulique.

A part dans quelques cas très particuliers, il est impossible de calculer explicitement des solutions des différents modèles. Il est nécessaire d'avoir recours au calcul numérique sur ordinateur pour estimer qualitativement et quantitativement ces solutions. Le principe de toutes les méthodes de résolution numériques discrètes est d'approcher la solution à la solution exacte. Dans ce procédé il faut bien être conscient de deux points fondamentaux : premièrement, on ne calcule pas des solutions exactes mais approchées ; deuxièmement, on discrétise le problème en représentant des fonctions par un nombre fini de valeurs, c'est-à-dire que l'on passe du continu au discret.

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numérique des solutions d'équations aux dérivées partielles. Nous présentons ci-dessus la méthode des différences finies.

### 1.1. Principe de la méthode

Objectif de la méthode des différences finies est de transformer une équation continue valable sur un domaine continu en un système à  $N$  équations pour  $N$  inconnues associées à un domaine discret appelé maillage.

$$L(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots) + f = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

+ conditions aux limites

Donc elle permet d'écrire sous forme discrète ( $i-1, i, i+1 \dots$ ) tous les termes de dérivées présents dans l'équation d'équilibre appliquée en  $i$  ainsi que dans les conditions limites.

La méthode consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou plusieurs fonctions à partir des conditions aux limites. Cette approximation représente une discrétisation du domaine et le remplacement de l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies. En d'autres termes, le domaine de variation continu est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, délimité par des frontières et formant ainsi un réseau appelé aussi maillage ou grille (**Bruno & Nicoud, 2004**).

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide d'un développement en série de Taylor de la fonction  $f$  :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \Big|_x + R_n \quad \text{(III-1)}$$

Où, le reste  $R_n$  est de l'ordre de  $\|\Delta x\|^n$ , ce que l'on note habituellement :  $R_n = O(\|\Delta x\|^n)$ .

### 1.2. Analyse de l'approximation

#### 1.2.1. Erreur de troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction  $f$ . L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

#### 1.2.2. Stabilité d'un schéma aux différences finies

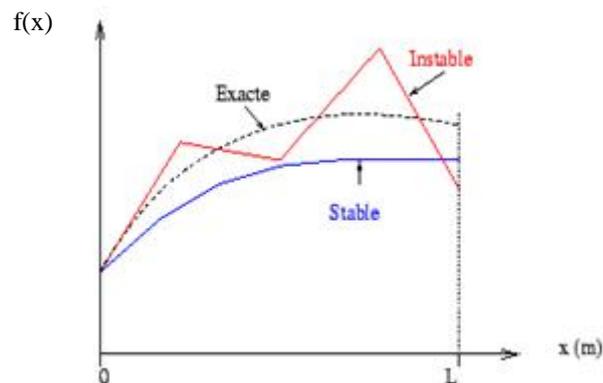
La stabilité est la propriété de contrôler toute perturbation (numérique dans notre cas) introduite de manière accidentelle.

Bien entendu, les opérations de l'algorithme ne sont jamais effectuées exactement. Lors de la résolution d'un algorithme, on n'attaque pas le pas  $t \rightarrow t + 1$  dans les mêmes conditions que le

pas  $0 \rightarrow 1$ , car on l'aborde avec un lourd handicap : la lourde charge est constituée par la somme des erreurs de discrétisation précédentes.

Les erreurs sont donc petites à chaque opérations, mais comme il y a beaucoup d'opérations, leur accumulation peut avoir un effet désastreux.

Par conséquent, on dira qu'un schéma numérique est stable s'il est peu sensible à l'accumulation des erreurs de discrétisation et d'arrondis. Concrètement, apparition d'oscillations parasites (changement du signe de la pente d'un nœud à l'autre, voir figure III.1) (Mabrouk, 2002).



**Figure III.1** : Les différents comportements des schémas

### 1.2.3. Consistance d'un schéma aux différences finies

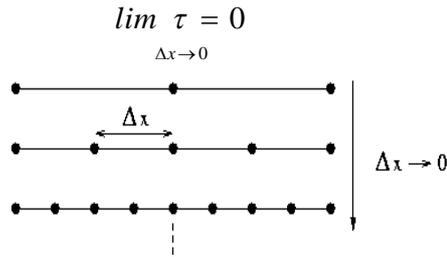
On dit qu'un schéma est consistant ou compatible, si les équations aux différences sont construites à partir d'une expression équivalente à l'équation de départ au second ordre près. En d'autres termes, ceci veut dire que les dérivées partielles sont remplacées par des différences finies effectivement voisines. La qualité de cette consistance s'appelle « la précision du schéma ». Cela signifie que l'erreur de troncature, tend vers zéro, lorsque les dimensions du maillage tendent vers zéro.

On appelle erreur de troncature  $\tau$ , l'ensemble des termes négligés dans les développements limités lors de l'obtention d'une équation (ou schéma) discrète.

Il est en effet possible d'écrire :

$$\text{Équation continue} = \text{Équation discrète} + \tau$$

Un schéma est dit consistant si son erreur de troncature tend vers 0 lorsque le pas  $\Delta x$  tend vers 0.

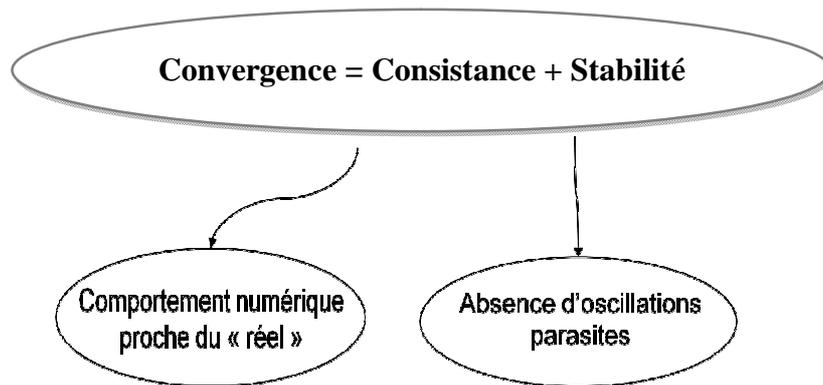


1.2.4. Convergence d'un schéma aux différences finies

Le schéma numérique est convergent si la solution du problème discrétisé tend, en un certain sens, vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque  $\Delta x$  et  $\Delta y$  tendent simultanément vers zéro.

Méthode : s'assurer de la propriété de convergence de l'équation discrète.

⇒ Théorème de LAX :



L'intérêt des notions de stabilité et de consistance est lié au théorème de Lax qui établit que pour une large classe d'équation, la consistance et la stabilité constituent une condition nécessaire et suffisante de convergence.

1.2.5. Schéma explicite-schéma implicite

Divers schémas aux différences finies sont utilisés dans l'étude des problèmes d'évolution, c'est-à-dire dépendant du temps. Il existe deux principaux types de schémas, en l'occurrence, les schémas implicites et explicites.

Un schéma est dit « explicite » si chaque valeur approchée de la solution au temps  $t+\Delta t$  et au point  $x$  est écrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps  $t$ . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour chaque  $x$ .

Par contre un schéma est dit “implicite”, si la valeur approchée, en un point au temps  $t+\Delta t$  est écrite en fonction de la solution précédente au temps  $t$ , et des valeurs voisines au temps  $t+\Delta t$ . Il s’agit donc d’une liaison implicite, entre toutes les valeurs au temps  $t+\Delta t$ , qui se résout globalement (**Euvrard, 1993**).

Mais le choix du type de schéma à employer dépend essentiellement de la nature du problème physique à traiter, et de l’aptitude du schéma à prendre en compte les caractéristiques du problème en question. Les principaux avantages et inconvénients des deux types de schémas aux différences sont :

- **Stabilité** : Dans la méthode explicite, une condition de stabilité sur le pas de temps devra être satisfaite, ce qui n’est pas le cas pour la méthode implicite.
- **Simplicité (souplesse) de programmation** : La méthode explicite est relativement plus facile à programmer que la méthode implicite. Par conséquent, quand le temps nécessaire pour le développement d’un programme est limité, la méthode explicite doit être utilisée.
- **Economie** : Puisque la valeur du pas de temps  $\Delta t$  pour un schéma implicite n’est pas restreinte par un critère de stabilité, une grande valeur de  $\Delta t$  est permise, ce qui donnera un temps de calcul relativement inférieur comparé au schéma explicite dans lequel  $\Delta t$  est limité par une condition de stabilité.
- **Simulation des sommets abruptes** : du moment que le pas de temps  $\Delta t$  est souvent très petit, les méthodes explicites sont plus appropriées pour l’analyse des phénomènes caractérisés par des sommets, ces derniers sont généralement lissés dans les méthodes implicites.

## **2. Choix du schéma numérique**

Plusieurs schémas aux différences finies implicites de second ordre ont été développés pour la résolution des systèmes d’équation de nature hyperbolique, qu’on rencontre toujours dans la dynamique des fluides. On distingue parmi les schémas le schéma de Beam Warming qui représente un des schémas les plus utilisés dans l’intégration des équations du mouvement du type hyperbolique non linéaire.

### **2.1. Description du schéma de Beam Warming**

Beam et Warming ont développé un schéma implicite pour la résolution de système d’équations hyperboliques sous la forme de loi de conservation qui a été employé pour la résolution numérique de la dynamique des fluides. Le schéma se caractérise par la une propriété très importante qui se réalise dans l’économie considérable dans le temps de calcul, particulièrement dans des problèmes multidimensionnels.

La plupart des formulations de ce schéma sont précises de second ordre dans le temps et peuvent être faites en second lieu ou quatrième-ordre précis dans l'espace.

La formulation générale du pas de temps est présentée d'abord, suivi d'un algorithme de la solution exacte en utilisant la méthode implicite de directions alternatives (ADI).

### 2.1.1. Formulation générale

Considérons les équations de base sous formes conservatives, régissant l'écoulement étudié, et données en coordonnées cartésiennes par le système :

$$V_t + E_x + F_z + S = 0 \tag{III-2}$$

Tel que :

$$E_x = \frac{\partial E}{\partial x}$$
$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

Le système d'équations peut être résolu en utilisant des approximations de la forme générale :

$$V^{k+1} = V^k + \Delta t \left[ \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^{k+1} + \frac{1-\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^k + \frac{\xi}{1+\xi} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^{k-1} \right] \tag{III-3}$$

Avec,  $\theta$  et  $\xi$  sont les paramètres menant à une variété du schéma ; k et k-1 sont deux niveaux de temps connus et k+1 est le niveau de temps inconnu (figure III-2).

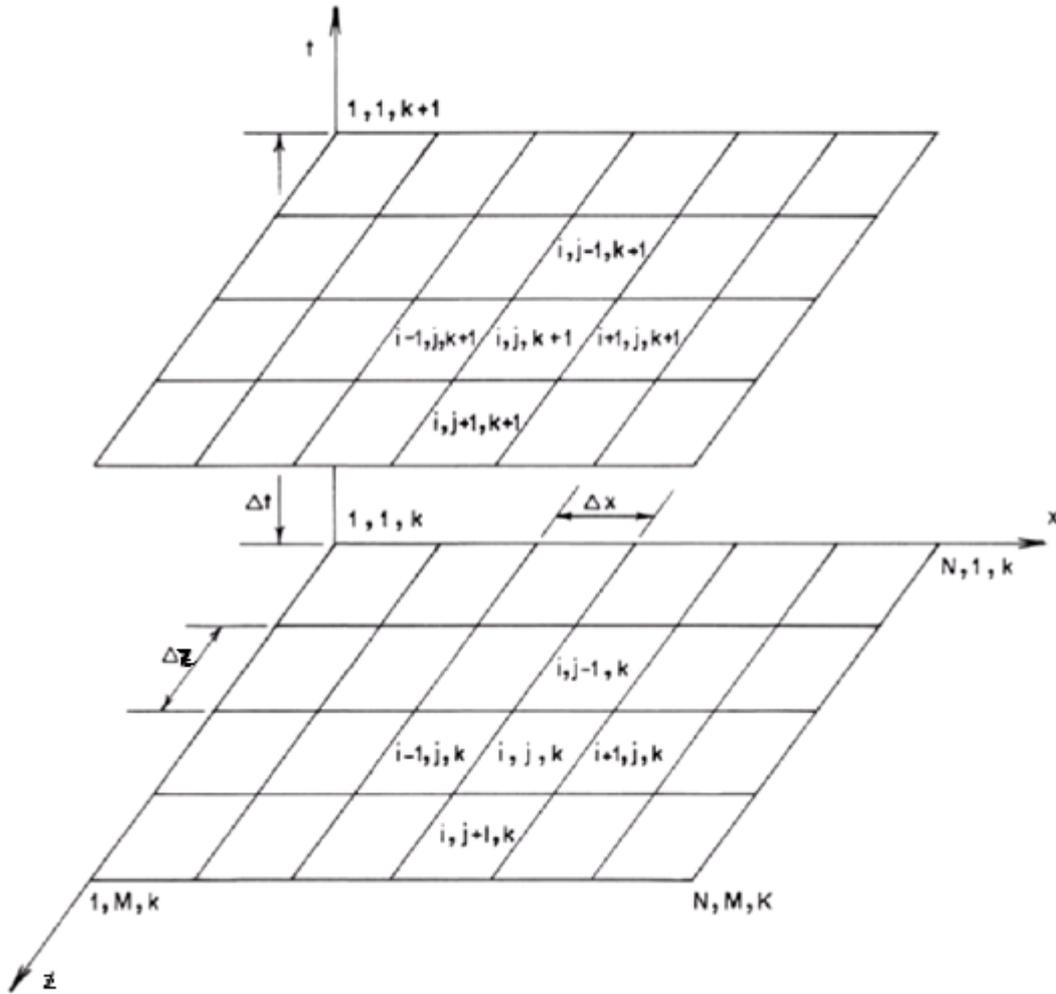


Figure III-2 : Schéma du maillage aux différences finies

Certaines des formulations communes (**Richtmyer & Norton, 1967**) sont énumérées dans le tableau suivant :

Tableau III-1 : Les différentes formulations du schéma de Beam Warming

Schémas	$\theta$	Z
Euler implicite (Backward Euler)	1	0
Trois Points Backward	1	1/2
Forme Trapézoïdale (Crank Nicolson)	1/2	0

On tire  $\frac{\partial V}{\partial t}$  de l'équation (III-2) qui sera écrit en fonction de E, F et S comme suit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} + S \right] \quad (III-4)$$

En remplaçant ce terme dans le système (III-3), on obtient :

$$V^{k+1} = V^k - \Delta t \left[ \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} + S \right)^{k+1} + \frac{1-\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} + S \right)^k + \frac{\xi \Delta t}{1+\xi} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)^{k-1} \right] \quad (III-5)$$

La non-linéarité des vecteurs de flux,  $E^{k+1}$ ,  $F^{k+1}$  et  $S^{k+1}$ , présente quelques difficultés, puisqu'ils existent au niveau de temps avancé. Cependant, ces vecteurs de flux sont tous des fonctions de la variable d'écoulement, V, pour lesquels des solutions doivent être obtenues. Ces vecteurs de flux peuvent être linéarisés en utilisant le développement de la série de Taylor.

Le développement de E est écrit comme suit :

$$E^{k+1} = E^k + \Delta t \frac{\partial E^k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 E^k}{\partial t^2} + \dots \quad (III-6)$$

On peut aussi écrire :  $\partial E^k / \partial t = (\partial E^k / \partial V^k)(\partial V^k / \partial t)$ .

D'où,  $\partial E^k / \partial V^k$  est simplement la matrice Jacobienne de E, notée  $A^k$ .

Nous pouvons écrire par la suite  $\partial E^k / \partial t = A^k (\partial V^k / \partial t)$ , l'exactitude du second ordre est obtenue si seulement les deux premières limites du côté droit de l'équation (III-6) sont maintenues.

En écrivant  $(\partial V^k / \partial t)$  sous la forme de différence, nous obtenons :

$$E^{k+1} = E^k + A^k (V^{k+1} - V^k) \quad (III-7)$$

De même, F et S peuvent être écrits comme suit :

$$F^{k+1} = F^k + B^k (V^{k+1} - V^k) \quad (III-8)$$

$$S^{k+1} = S^k + Q^k (V^{k+1} - V^k)$$

Avec, B et Q sont les matrices Jacobiennes de F et S, respectivement.

La substitution des équations (III-7) et (III-8) dans l'équation (III-5) et la combinaison des limites du même niveau de temps transforment le système en un ensemble d'équations qui contiennent des limites de V au temps de (k) et (k + 1) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}^{k+1} = & \mathbf{V}^k - \Delta t \left[ \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^k \mathbf{V}^{k+1} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}^k \mathbf{V}^{k+1} + \mathbf{Q}^k \mathbf{V}^{k+1} \right) \right. \\
 & - \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^k \mathbf{V}^k + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}^k \mathbf{V}^k + \mathbf{Q}^k \mathbf{V}^k \right) \\
 & \left. + \frac{1}{1+\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} + \mathbf{S} \right)^k \right] + \Delta t \frac{\xi}{1+\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)^{k-1}
 \end{aligned} \tag{III-9}$$

La transposition dans le même côté gauche de cette équation des variables dépendantes au pas de temps avancé donne un système linéaire pour  $\mathbf{V}^{k+1}$  comme suit :

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbf{I} + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^k + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}^k + \mathbf{Q}^k \right) \right] \mathbf{V}^{k+1} = & \left[ \mathbf{I} + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^k + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}^k + \mathbf{Q}^k \right) \right] \mathbf{V}^k \\
 - \Delta t \frac{1}{1+\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} + \mathbf{S} \right)^k + \Delta t \frac{\xi}{1+\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)^{k-1}
 \end{aligned} \tag{III-10}$$

Avec,  $\mathbf{I}$  la matrice d'identité et  $\left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^k + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}^k \right) \mathbf{V}^{k+1}$  peut être interprété comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}^k \mathbf{V}^{k+1}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{B}^k \mathbf{V}^{k+1}), \text{ c.-à-d., le vecteur } \mathbf{V} \text{ peut être évalué à l'intérieur des dérivés.}$$

En utilisant la différence avant  $\Delta_t \mathbf{V} = \mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k$  et en la remplaçant dans l'équation (III-10), cette dernière peut être écrite comme suit :

$$\left[ \mathbf{I} + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^k + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}^k + \mathbf{Q}^k \right) \right] \Delta_t \mathbf{V}^{k+1} = - \Delta t \frac{1}{1+\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} + \mathbf{S} \right)^k + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta t \mathbf{V}^k \tag{III-11}$$

L'avantage principal de cette formulation est l'efficacité du calcul dû à une réduction en nombre de limites. L'ordre de différences spatiales peut être différent entre le côté droit et le côté gauche des équations. La solution la plus efficace de l'équation est obtenue en factorisant le côté gauche de l'équation (III-11).

### 2.1.2. Factorisation du schéma

Par la méthode de factorisation approximative, le côté gauche du schéma implicite ( $\theta \neq 0$ ) décrit par l'équation (III-11) peut être donné comme produit de deux composants, chacun contient les limites d'une direction spécifique :

$$\left[ \mathbf{I} + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}^k \right] \left[ \mathbf{I} + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B} + \mathbf{Q} \right)^k \right] \Delta_t \mathbf{V}^{k+1} = - \Delta t \frac{1}{1+\xi} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} + \mathbf{S} \right)^k + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta t \mathbf{V}^k \tag{III-12}$$

Cette formulation contient deux limites additionnelles obtenues par la multiplication du côté gauche. Puisque l'ordre le plus petit de l'exactitude du schéma est  $O(\Delta t)^2$ , et les limites additionnelles sont du même ordre, l'exactitude formelle des schémas n'est pas affecté par les nouvelles limites. Ainsi, sans compromettre l'exactitude de la solution, les équations sont factorisées dans une série d'étapes qui sont directionnellement dépendantes. Ces étapes sont les suivantes :

$$\left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial x} A^k \right] \Delta_t \tilde{V} = -\Delta t \frac{1}{1+\xi} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} + S \right)^k + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta t V^k$$

$$\left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial z} B + Q \right)^k \right] \Delta_t V^{k+1} = \Delta_t \tilde{V}$$

(III-13)

$$V^{k+1} = V^k + \Delta_t V^{k+1}$$

Avec,  $\Delta_t \tilde{V}$  est une valeur intermédiaire obtenue par la résolution du système d'abord le long des lignes (direction des x). C'est un procédé implicite des directions alternées (ADI). Avec ces étapes séquentielles, l'inversion est réduite à résoudre une petite matrice de largeur de bande le long de chaque ligne et colonne, qui est efficace. Pour tenir compte de la présence des écoulements sous-critiques et supercritiques, une technique de commutation est employée pour obtenir les différences spatiales appropriées. Cette technique de commutation est incorporée au schéma en divisant les matrices de flux aux composants contenant les parties positives ou négatives.

### 2.1.3. Factorisation implicite du flux divisé

Le flux divisé peut être incorporé dans l'algorithme de factorisation approximatif, comme montrer dans l'équation (III-12). Les matrices supérieures sont utilisées pour opérer les variables de l'écoulement avec des différences appropriées de l'espace. La substitution des matrices diagonales dans l'algorithme donne un schéma implicite factorisé du flux divisé, qui peut être mis en application par l'ordre (**Beam & Warming, 1976**) :

$$\left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \frac{\partial}{\partial x} (A^+ + A^-)^k \right] \Delta_t \tilde{V} = -\Delta t \frac{1}{1+\xi} \left( \frac{\partial E^+}{\partial x} + \frac{\partial E^-}{\partial x} + \frac{\partial F^+}{\partial z} + \frac{\partial F^-}{\partial z} + S \right)^k + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta t V^k$$

$$\left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial}{\partial z} B^+ + \frac{\partial}{\partial z} B^- + Q \right)^k \right] \Delta_t V^{k+1} = \Delta_t \tilde{V}$$

(III-14)

Le côté droit de l'équation (III-14) est évalué en tant que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E^+}{\partial x} &= A^+ (V_{i,j}^k - V_{i-1,j}^k) = A^+ \nabla_x V_{i,j}^k \\ \frac{\partial E^-}{\partial x} &= A^- (V_{i+1,j}^k - V_{i,j}^k) = A^- \Delta_x V_{i,j}^k \\ \frac{\partial F^+}{\partial z} &= B^+ (V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k) = B^+ \nabla_z V_{i,j}^k \\ \frac{\partial F^-}{\partial z} &= B^- (V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^k) = B^- \Delta_z V_{i,j}^k\end{aligned}\tag{III-15}$$

En plus la factorisation de l'équation (III-14) est possible puisque le côté gauche de la première étape peut être divisé en limites contenant  $\partial A^+/\partial x$  et  $\partial A^-/\partial x$ . Ceci aboutit à une autre réduction de la largeur de bande de la matrice de coefficient. En utilisant en second lieu ou l'espace précis de troisième ordre de différence, un certain avantage peut être gagné par cette factorisation additionnelle. Cependant, quand on utilise des différences spatiales précises de premier ordre, la matrice de coefficient non factorisé est tridiagonale pour laquelle les algorithmes de solution exacte sont disponibles. Les équations complètes de différence finie avec de différence spatiale du premier ordre (figure III-1) deviennent (**Beam & Warming, 1978**) :

$$\begin{aligned}\left[ I + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\theta}{1+\xi} (\nabla_x A_{i,j}^+ + \Delta_x A_{i,j}^-)^k \right] \Delta_t \tilde{V}_{i,j} &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{1+\xi} (A_{i,j}^+ \nabla_x V_{i,j} + A_{i,j}^- \Delta_x V_{i,j})^k \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{1+\xi} (B_{i,j}^+ \nabla_z V_{i,j} + B_{i,j}^- \Delta_z V_{i,j})^k &- \Delta t \frac{1}{1+\xi} S_{i,j}^k + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta t V_{i,j}^k\end{aligned}\tag{III-16a}$$

$$\left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{1}{\Delta z} (\nabla_z B_{i,j}^+ + \Delta_z B_{i,j}^-) + Q_{i,j} \right)^k \right] \Delta_t V_{i,j}^{k+1} = \Delta_t \tilde{V}_{i,j}\tag{III-16b}$$

$$V_{i,j}^{k+1} = V_{i,j}^k + \Delta_t V_{i,j}^{k+1}\tag{III-16c}$$

Avec,  $\begin{cases} 2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases}$

Et,  $\Delta$  : différence avant et  $\nabla$  : différence arrière.

Le système (III-16a) précédent est implicite suivant l'axe des x et explicite suivant z qu'on peut écrire aussi sous la forme suivante (**Ikni, 2003**) :

$$a_{i,j}^k \Delta_t \tilde{V}_{i-1,j}^k + b_{i,j}^k \Delta_t \tilde{V}_{i,j}^k + c_{i,j}^k \Delta_t \tilde{V}_{i+1,j}^k = \text{RHS}_{i,j}^k \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

Ou bien sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} b_{1,j} & c_{1,j} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{2,j} & b_{2,j} & c_{2,j} & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_{3,j} & b_{3,j} & c_{3,j} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,j} & b_{n-1,j} & c_{n-1,j} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,j} & b_{n,j} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta_t \tilde{V}_{1,j} \\ \Delta_t \tilde{V}_{2,j} \\ \Delta_t \tilde{V}_{3,j} \\ \vdots \\ \Delta_t \tilde{V}_{n-1,j} \\ \Delta_t \tilde{V}_{n,j} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \text{RHS}_{1,j} \\ \text{RHS}_{2,j} \\ \text{RHS}_{3,j} \\ \vdots \\ \text{RHS}_{n-1,j} \\ \text{RHS}_{n,j} \end{bmatrix}^k \quad (\text{III-17a})$$

Avec, a, b et c : sont des matrices des coefficients ;

$\Delta_t \tilde{V}$  : sont les vecteurs d'éléments intermédiaires du système ;

RHS : sont les vecteurs d'élément contenant les limites du côté droit de l'équation (III-16).

$$\text{D'où : } \begin{cases} a_{i,j}^k = \frac{-\Delta t}{\Delta x} \frac{\theta}{1+\xi} A_{i-1,j}^{k+} \\ b_{i,j}^k = I + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\theta}{1+\xi} (A_{i,j}^{k+} - A_{i,j}^{k-}) \\ c_{i,j}^k = \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\theta}{1+\xi} A_{i+1,j}^{k-} \\ \text{RHS}_{i,j}^k = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{1+\xi} (A_{i,j}^+ \nabla_x V_{i,j} + A_{i,j}^- \Delta_x V_{i,j})^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{1+\xi} (B_{i,j}^+ \nabla_z V_{i,j} + B_{i,j}^- \Delta_z V_{i,j})^k \\ - \Delta t \frac{1}{1+\xi} S_{i,j}^k + \frac{\xi}{1+\xi} \Delta t V_{i,j}^k \end{cases}$$

Après la détermination des valeurs de  $\Delta_t \tilde{V}_{i,j}$ , on remplace ces résultats dans le système (III-16b) qui est implicite suivant la direction des z et explicite suivant la direction des x. Il peut être écrit sous la forme générale suivante (**Ikni, 2003**) :

$$p_{i,j}^k \Delta_t V_{i,j-1}^k + q_{i,j}^k \Delta_t V_{i,j}^k + r_{i,j}^k \Delta_t V_{i,j+1}^k = \Delta_t \tilde{V}_{i,j}^k \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (\text{III-18})$$

Ou bien sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i,1} & \mathbf{r}_{i,2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbf{p}_{i,1} & \mathbf{q}_{i,2} & \mathbf{r}_{i,3} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \mathbf{p}_{i,2} & \mathbf{q}_{i,3} & \mathbf{r}_{i,4} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{p}_{i,m-2} & \mathbf{q}_{i,m-1} & \mathbf{r}_{i,m} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{p}_{i,m-1} & \mathbf{q}_{i,m} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta_t \mathbf{V}_{i,1}^{k+1} \\ \Delta_t \mathbf{V}_{i,2}^{k+1} \\ \Delta_t \mathbf{V}_{i,3}^{k+1} \\ \vdots \\ \Delta_t \mathbf{V}_{i,m-1}^{k+1} \\ \Delta_t \mathbf{V}_{i,m}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_t \tilde{\mathbf{V}}_{i,1} \\ \Delta_t \tilde{\mathbf{V}}_{i,2} \\ \Delta_t \tilde{\mathbf{V}}_{i,3} \\ \vdots \\ \Delta_t \tilde{\mathbf{V}}_{i,m-1} \\ \Delta_t \tilde{\mathbf{V}}_{i,m} \end{bmatrix}^k \quad (\text{III-18a})$$

Avec, p, q et r sont des matrices de coefficients comptés à partir de j-1, j et j+1.

Le vecteur  $\Delta_t \mathbf{V}_{i,j}^k$  est un vecteur qui est composé de n éléments.

$$\text{D'où : } \begin{cases} \mathbf{r}_{i,j}^k = \frac{-\Delta t}{\Delta z} \frac{\theta}{1+\xi} \mathbf{B}_{i-1,j}^{k+} \\ \mathbf{q}_{i,j}^k = \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{\theta}{1+\xi} (\mathbf{B}_{i,j}^{k+} - \mathbf{B}_{i,j}^{k-}) + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \mathbf{Q}_{i,j}^k \\ \mathbf{p}_{i,j}^k = \frac{\Delta t}{\Delta z} \frac{\theta}{1+\xi} \mathbf{B}_{i+1,j}^{k-} \end{cases}$$

Les matrices des passages et la factorisation des matrices  $\mathbf{A}^+$ ,  $\mathbf{A}^-$ ,  $\mathbf{B}^+$  et  $\mathbf{B}^-$  sont déterminées par le logiciel à manipulation symbolique Maple (**Steger & Warming, 1981**).

Une fois qu'on détermine  $\Delta_t \mathbf{V}_{i,j}^k$  qui est composé dans le cas de notre étude des six éléments suivants :  $\Delta_t \mathbf{P}_{i,j}^k$ ,  $\Delta_t \mathbf{U}_{i,j}^k$ ,  $\Delta_t \mathbf{W}_{i,j}^k$ ,  $\Delta_t \mathbf{k}_{i,j}^k$ ,  $\Delta_t \boldsymbol{\varepsilon}_{i,j}^k$  et  $\Delta_t \mathbf{C}_{i,j}^k$ , on calcule : P, U, W, k,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et C de la manière suivante :

$$\mathbf{V}_{i,j}^{k+1} = \mathbf{V}_{i,j}^k + \Delta_t \mathbf{V}_{i,j}^k, \quad \text{avec } \begin{cases} 2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

D'où :

$$\mathbf{P}_{i,j}^{k+1} = \mathbf{P}_{i,j}^k + \Delta_t \mathbf{P}_{i,j}^k$$

$$\mathbf{U}_{i,j}^{k+1} = \mathbf{U}_{i,j}^k + \Delta_t \mathbf{U}_{i,j}^k$$

$$\mathbf{W}_{i,j}^{k+1} = \mathbf{W}_{i,j}^k + \Delta_t \mathbf{W}_{i,j}^k$$

(III-19)

$$\mathbf{k}_{i,j}^{k+1} = \mathbf{k}_{i,j}^k + \Delta_t \mathbf{k}_{i,j}^k$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i,j}^{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i,j}^k + \Delta_t \boldsymbol{\varepsilon}_{i,j}^k$$

$$\mathbf{C}_{i,j}^{k+1} = \mathbf{C}_{i,j}^k + \Delta_t \mathbf{C}_{i,j}^k$$

## 2.2. Transformation des équations sous la forme générale du schéma de Beam Warming

2.2.1. Transformation des équations de la quantité de mouvement (Abdoulaye, 2007)

○ *Suivant l'axe des x*

Nous avons :

$$\overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{U}\overline{U}}{\partial x} - \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \Rightarrow \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{U}\overline{U}}{\partial x} \quad (\text{III-20})$$

$$\text{Et } \overline{W} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{U}\overline{W}}{\partial z} - \overline{U} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \quad (\text{III-21})$$

En ajoutant à chaque membre de l'équation (III-20) le terme  $\overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x}$ , on obtient :

$$\overline{W} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{U}\overline{W}}{\partial z} + \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} - \overline{U} \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right) \quad (\text{III-22})$$

D'après l'équation de continuité du mouvement moyen,  $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0$  et en tenant compte

de l'équation (III-21), on obtient finalement :

$$\overline{W} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{U}\overline{W}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{U}\overline{U}}{\partial x} \quad (\text{III-23})$$

En posant l'hypothèse de grand nombre de Reynolds, nous pouvons négliger  $\nu$  devant  $\nu_t$  et en remplaçant la viscosité turbulente par son expression, l'équation de la quantité de mouvement suivant l'axe des x devient :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \overline{U}\overline{U}}{\partial x} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial \overline{W}\overline{U}}{\partial z} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2} \right] - \left[ f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{III-24})$$

○ *Suivant l'axe des z*

Par un raisonnement analogue développé précédemment, l'équation de la quantité de mouvement suivant l'axe des z peut être réduite sous la forme générale du schéma de Beam Warming de la manière suivante :

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \overline{W}\overline{U}}{\partial x} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial \overline{W}\overline{W}}{\partial z} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z^2} \right] - \left[ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \right] = 0 \quad (\text{III-25})$$

2.2.2. Transformation de l'équation de l'énergie cinétique turbulente

Nous avons :

$$\overline{U} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial k \overline{U}}{\partial x} - k \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \quad (\text{III-26})$$

$$\overline{W} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial k \overline{W}}{\partial z} - k \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \quad (\text{III-27})$$

En remplaçant les expressions précédentes dans l'équation de l'énergie cinétique turbulente, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial k \overline{W}}{\partial z} - k \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \\ &+ v_t \left[ 2 \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{III-28})$$

D'après l'équation de continuité,  $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0$  et en remplaçant la viscosité turbulente par

son expression l'équation (III-28) se réduit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial k \overline{W}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \\ &+ C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left[ 2 \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{III-29})$$

### 2.2.3. Transformation de l'équation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Par un raisonnement analogue, on transforme l'équation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon \overline{W}}{\partial z} &= C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left[ 4 \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{C_\mu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{C_\mu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned}$$

### (III-30) 2.2.4. Transformation de l'équation de transport du polluant

Notons que les termes  $\overline{U} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x}$  et  $\overline{W} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z}$  peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\overline{U} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{C} \overline{U}}{\partial x} - \overline{C} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \quad (\text{III-31})$$

$$\text{Et } \overline{W} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{C}\overline{W}}{\partial z} - \overline{C} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \quad (\text{III-32})$$

En remplaçant les deux expressions précédentes dans l'équation de transport du polluant, on obtient :

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{C}\overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{C}\overline{W}}{\partial z} + \overline{C} \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right) = D_m \left( \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{tx} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{tz} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} \right) - k_r \overline{C} \quad (\text{III-33})$$

D'après l'équation de continuité, on a :  $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0$ , l'équation (III-33) peut être réduite

sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{C}\overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{C}\overline{W}}{\partial z} = D_m \left( \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{tx} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{tz} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} \right) - k_r \overline{C} \quad (\text{III-34})$$

### 2.3. Application de la méthode de Beam Warming

#### 2.3.1. Bilan des équations à discrétiser

Nous écrivons les équations de notre modèle mathématique sous la forme générale du schéma de Beam Warming.

Pour ne pas alourdir la discrétisation, nous éliminons la barre comme suit :  $\overline{P} = P$  ;  $\overline{U} = U$  ;  $\overline{W} = W$  ;  $\overline{C} = C$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left[ \frac{\partial U^2}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial UW}{\partial z} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] - \left[ f_x + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right] = 0 \quad (\text{III-35})$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left[ \frac{\partial UW}{\partial x} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial W^2}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] - \left[ f_z + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \right] = 0 \quad (\text{III-36})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial k}{\partial t} + \left( \frac{\partial kU}{\partial x} - \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \right) \right) + \\ & \left( \frac{\partial kW}{\partial z} - \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial z} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \\ & - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-37})$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \varepsilon U}{\partial x} - C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \left( 4 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] \\
 & + \left[ \frac{\partial \varepsilon W}{\partial z} - C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \left( 4 \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k^2}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] \\
 & - \left[ 4 C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{III-38}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left[ \frac{\partial C U}{\partial x} - (D_m + D_{tx}) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial C W}{\partial z} - (D_m + D_{tz}) \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] + k_r C = 0 \tag{III-39}$$

### 2.3.2. Détermination du champ de pression

La principale difficulté dans la résolution des équations de Reynolds réside dans l'absence d'une équation de transport de la pression ; en effet la pression n'est présente que dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, et ceci sous forme de gradient.

Pour cette raison, nous appliquerons à nos équations de continuité et de quantité de mouvement une méthode qui nous permettra de déterminer le champ de pression en chaque point de calcul. Il s'agit de la méthode de la « viscosité artificielle ».

La méthode de la viscosité artificielle est basée sur une modification de l'équation de continuité en y ajoutant un terme fictif de dérivée temporelle de la pression.

Ainsi, l'équation de continuité devient comme suite :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \tag{III-40}$$

Le coefficient  $\alpha$  est choisi de façon arbitraire afin d'assurer la convergence du système. Il est à noter que cette équation n'aura de sens physique que quand le régime permanent est atteint.

Nous allons donc utiliser cette méthode afin de déterminer le champ de pression de l'écoulement et permettre la détermination des autres inconnus de notre problème.

### 2.3.3. L'application de la méthode de Beam Warming

Dans notre cas, les systèmes V, E, F et S sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} = \begin{bmatrix} P \\ U \\ W \\ k \\ \varepsilon \\ C \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \alpha^2 U \\ UU - \frac{1}{\rho} - \frac{2}{3}k - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial x} \\ UW - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial x} \\ kU - \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( W \frac{\partial W}{\partial x} + 2U \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ \varepsilon U - \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( 2W \frac{\partial W}{\partial x} + 4U \frac{\partial U}{\partial x} \right) \\ CU - (D_m + D_{tx}) \frac{\partial C}{\partial x} \end{bmatrix} ; \\
 \\
 \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \alpha^2 W \\ UW - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial z} \\ WW - \frac{1}{\rho} - \frac{2}{3}k - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial z} \\ kW - \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial z} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( 2W \frac{\partial W}{\partial z} + U \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \varepsilon W - \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( 4W \frac{\partial W}{\partial z} + 2U \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ CW - (D_m + D_{tz}) \frac{\partial C}{\partial z} \end{bmatrix} \\
 \\
 \text{Et } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_x - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ -f_z - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ -2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \varepsilon \\ -4C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ k_f C \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### **3. Conditions initiales aux limites**

Nous allons introduire un certain nombre de conditions supplémentaires, afin que la résolution numérique de nos équation soit effective : il s'agit des conditions initiales et les conditions aux limites.

Les conditions supplémentaires intervenant dans notre problème sont :

- Les conditions initiales ;
- Les conditions aux limites.

#### **3.1. Les conditions initiales**

Nous devons définir des conditions qui représentent l'état de base du modèle à l'instant où commence la simulation c'est-à-dire à  $t=0$ . Ainsi les valeurs de toutes les inconnues doivent être connues afin de pouvoir démarrer les calculs (**Nathalie, 1992**).

Le choix des valeurs des trois variables  $\overline{U}_0, \overline{W}_0$  et  $\overline{C}_0$ , sera fait à partir de la limite amont. Pour ce faire, nous définissons un débit initial  $Q_0$  ; à partir de ce débit, nous définissons la hauteur initiale  $H_0$  et par suite, nous calculons  $U_0$  comme suite :

$$U_0 = \frac{Q_0}{b * H_0} \quad \text{(III-41)}$$

Où,  $b$  est la largeur du canal.

$$\text{Nous admettons une vitesse transversale initiale nulle : } \overline{W}_0 = 0 \quad \text{(III-42)}$$

Pour l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation, nous utilisons les formules empiriques données comme suite :

$$k_0 = 0.002 * U_0^2 \quad \text{(III-43)}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{k_0^{3/2}}{0.3 * \frac{2Hb}{H+b}} \quad \text{(III-44)}$$

En ce qui concerne le phénomène de transport, nous considérons une concentration initiale nulle sur tout le domaine.

#### **3.2. Conditions aux limites**

##### **3.2.1. Conditions amont – aval**

La détermination des conditions aux limites constitue un problème très délicat et fondamental dans la résolution numérique des écoulements à surface libre.

Pour la résolution de notre problème, nous choisissons de fixer les valeurs de U, W et C à l'amont. Nous considérons que ces conditions ne changent pas durant le calcul.

### 3.2.2. Conditions aux parois

Dans un écoulement turbulent, on constate qu'à proximité des parois solides l'existence d'une zone dite sous couche visqueuse où les contraintes visqueuses sont plus importantes que les contraintes turbulentes provoquant une baisse sensible du nombre de Reynolds. Pour cette raison, on ne doit pas spécifier des conditions directement liées à la paroi dans la mesure où l'utilisation de ces conditions implique le maillage de la sous couche visqueuse. Or, le modèle de turbulence que nous avons utilisé pour la fermeture du problème était basé sur l'hypothèse de grand nombre de Reynolds, par conséquent n'est plus valable dans la sous – couche visqueuse caractérisée par de faible nombre de Reynolds (**Mohammadi & Pironneau, 1994**).

Pour pallier à ce problème, nous choisissons les premiers points de maillage en dehors de la sous couche visqueuse. Les lois de parois caractérisant cette région et donnant la vitesse U, l'énergie  $\bar{k}$  et la dissipation  $\bar{\varepsilon}$  pour un canal rugueux sont :

$$\frac{U_{\text{par}}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln (E y^+) \quad \text{(III-45)}$$

$$\bar{k} = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{(III-46)}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u_*^3}{\kappa y} \quad \text{(III-47)}$$

Avec,  $\kappa$  : Constante de Von Karman :  $\kappa = 0.419$  ;  $U_{\text{par}}$  est la vitesse parallèle aux parois. La vitesse perpendiculaire aux parois est considérée nulle.

$$y^+ = y \frac{u_*}{\nu} \quad \text{(III-48)}$$

$y^+$  : Distance adimensionnelle à la paroi ; y : distance à la paroi ; E : Paramètre de rugosité de parois (E= 9.793 pour des parois hydrauliquement lisses) ;

$\nu$  : viscosité cinématique du fluide ;  $u_*$  : la vitesse de frottement donnée par :  $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ ,

Où,  $\tau_0$  : contraintes de frottement à la paroi exprimée par :

$$\tau_0 = \rho u_*^2 = \rho C_f V_m^2 \quad \text{(III-49)}$$

Avec,

V : vitesse moyenne de l'écoulement donnée par :  $V_m = \sqrt{U^2 + W^2}$

$C_f$  : coefficient de frottement empirique dont l'intensité dépend de la rugosité du fond.

Pour des canaux rugueux la loi de Manning donne :

$$C_f = \frac{n^2 g}{H^{1/3}} \quad \text{(III-50)}$$

Avec, n : le coefficient de Manning, H la hauteur de l'écoulement et g l'accélération de la pesanteur

Notons que ces formules empiriques ne sont valables que dans la zone turbulente c'est-à-dire pour ( $30 < y^+ < 100$ ).

La vitesse normale et le flux de concentration sont nuls dans la zone des parois.

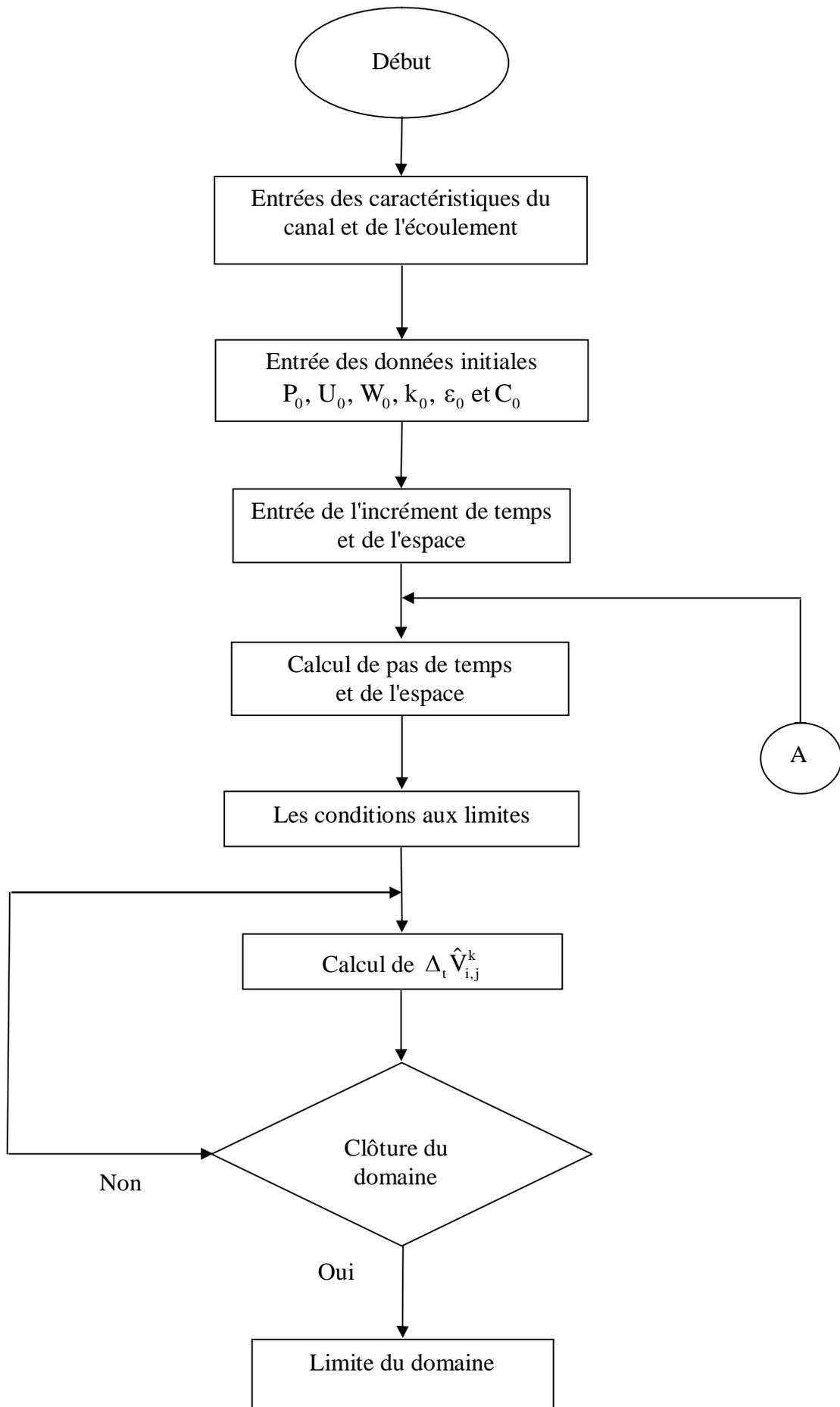
### 3.2.3. Conditions de symétrie au niveau du plan médian

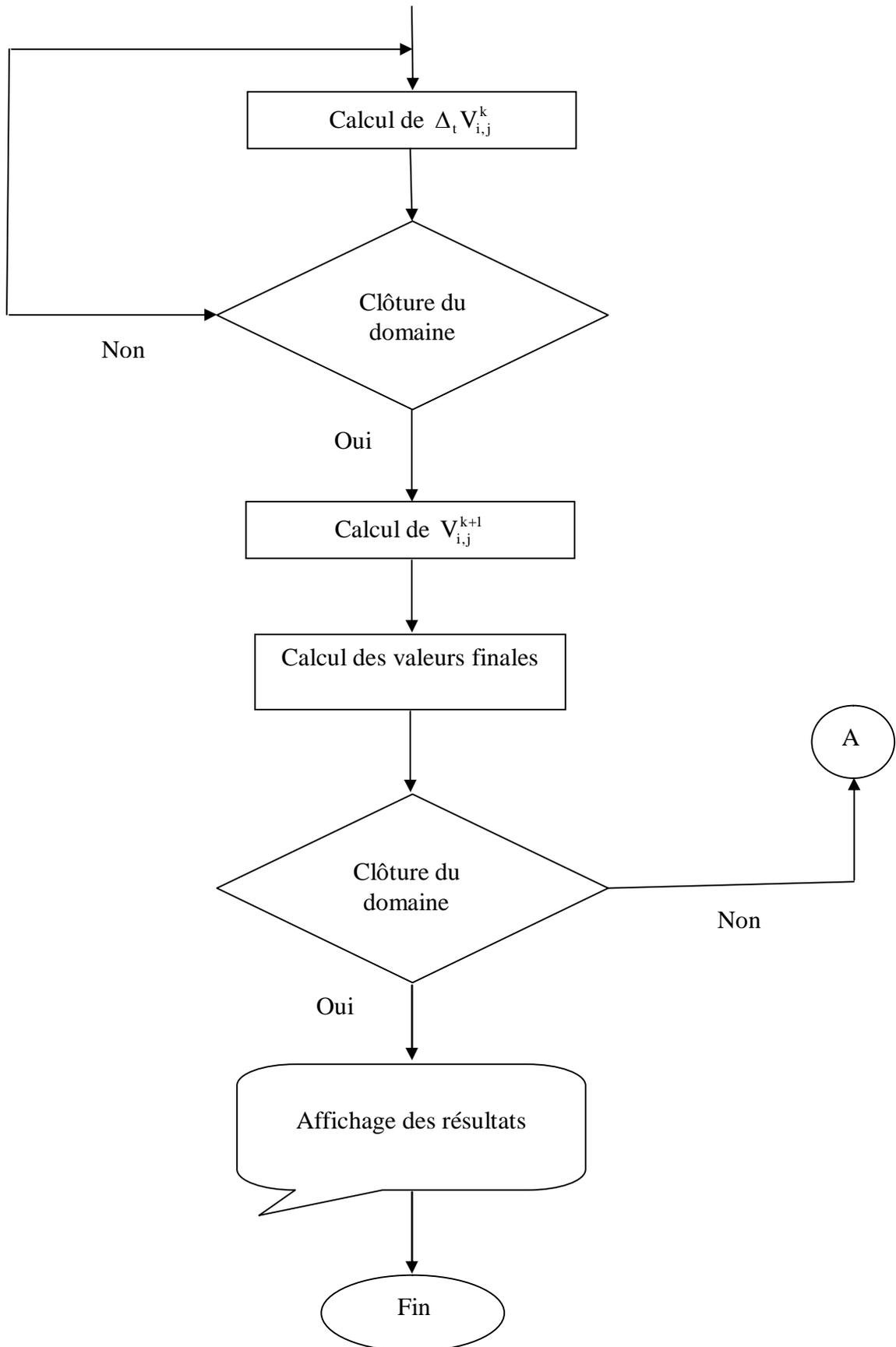
Notre canal étant symétrique par rapport à son plan médian, nous imposons alors des conditions de symétrie afin de réduire de moitié la taille du domaine de calculs.

## 4. L'organigramme de résolution

Le processus de calcul se déroule comme suit : nous commencerons d'abord par la lecture de toutes les variables constantes intervenant dans les équations. Nous définissons ensuite la zone d'injection du polluant après le calcul des conditions initiales et des conditions aux limites. Notre méthode numérique étant implicite, nous y introduisons une procédure calculant le pas de temps pour assurer la stabilité du schéma. Enfin, en utilisant les conditions de symétrie et de réflexions (au niveau des parois), nous calculons toutes les inconnues au pas de temps actuel à partir des valeurs du pas de temps précédent par la méthode de Beam Warming.

Les différentes étapes de calcul sont résumées dans l'organigramme ci-dessus :





### **Conclusion**

L'application de la méthode des différences finies pour la résolution de notre système mathématique en utilisant le schéma implicite de Beam Warming, nous a permis d'élaborer un programme dont les étapes prépondérantes sont résumées dans l'algorithme présenté ci-dessus. Enfin les résultats obtenus et leur interprétation feront l'objet de notre prochain chapitre.

## Chapitre IV

### Validation du modèle et interprétations des résultats

#### Introduction

Dans ce présent chapitre, nous y présenterons les résultats ainsi obtenu que nous analyserons et interpréterons. N'ayons pas des résultats expérimentaux dans la bibliographie, nous validerons nos résultats à partir des résultats expérimentaux obtenus sur un canal rectangulaire par les chercheurs du laboratoire LRS - Eau.

Une analyse paramétrique plus approfondie sera effectuée afin de mettre en exergue les différents paramètres qui jouent un rôle prépondérant dans les processus de transport d'un polluant actif. A ce niveau, plusieurs scénarios seront réalisés afin de vérifier la sensibilité de notre programme à la variation de la distance à partir du point d'injection et aux variations de débit et de la concentration initiale.

#### **1. Résolution numérique**

Les conditions initiales et les conditions aux limites étant définies, toutes les conditions sont alors réunies pour démarrer la résolution numérique du problème par différences finies. Le solveur utilisé dans notre application est développé en utilisant le logiciel de programmation Matlab (**Quarteroni & Sacco & Saleri, 2000**).

##### **1.1. Aperçu sur MATLAB**

Matlab signifie Matrix laboratory, c'est un logiciel de calcul numérique destiné à traiter des applications à partir des outils de l'analyse numérique matricielle. Il possède aussi tout un ensemble de fonctionnalités graphiques permettant de visualiser les résultats numériques.

Il possède des boîtes à outils, c'est à dire des fonctionnalités supplémentaires, dédiées à des domaines particuliers du calcul scientifique, comme la résolution d'équations aux dérivées partielles, l'optimisation, l'analyse de données, etc. Matlab est aussi un langage de programmation avec des possibilités d'interfaces vers des programmes écrits en C ou en Fortran.

En Matlab les calculs sont effectués avec une arithmétique à précision finie. Ceci le différencie des logiciels de calcul symbolique tel que Maple, mais la comparaison n'a pas lieu d'être. Le calcul numérique et calcul symbolique sont des outils complémentaires du calcul scientifique.

Matlab a initialement été développé en Fortran par Cleve Moler. Aujourd'hui Matlab est écrit en C et utilise les bibliothèques LINPACK et ARPACK (**Alfred, 2004**).

Plusieurs caractéristiques de MATLAB en font un outil simple et puissant. MATLAB est un langage *interactif*, c.-à-d. dès que vous entrez une commande, vous avez une réponse immédiate du logiciel. MATLAB s'occupe de déterminer le *type* et la *taille* des variables mises

en mémoire, ce qui facilite la tâche du programmeur en lui permettant d'expérimenter et de se concentrer sur les problèmes à résoudre. Tous les types de MATLAB sont basés autour de la notion de matrice. Un scalaire est une matrice de taille 1\_1, un vecteur est une matrice de taille  $n \_ 1$  ou  $1 \_ n$ , etc. Une autre idée de base de MATLAB est que si vous vous demandez quel est le calcul qu'une commande exécutera, en général il s'agit de l'opération la plus naturelle.

Finalement, l'apprentissage de l'approche *vectorielle* de MATLAB sera utile pour ceux qui auront à utiliser des ordinateurs à architecture vectorielle ou parallèle (Dufour, 2004).

## 2. Expériences au Laboratoire de Recherche Sciences de Eau

### 2.1. Description des expériences effectuées

Pour décrire le phénomène de la dispersion d'un polluant actif, une étude expérimentale comportant des essais au laboratoire est réalisée, dans le but de suivre l'évolution de la concentration de ce polluant en fonction du temps et de l'espace.

Kessili a mené des expériences sur la dispersion du phénol, il a travaillé sur un canal rectangulaire dont les différentes caractéristiques sont données comme suite :

- Longueur :  $L = 10\text{m}$ .
- Largeur :  $B = 0.39\text{m}$ .
- Hauteur :  $H = 0.39\text{m}$ .

Les parois du canal sont en plexiglass ; l'ensemble du canal est porté sur un support horizontal de 1.2m de hauteur. L'installation expérimentale complète comporte les éléments montrés sur la photographie IV-1.



**Photographie IV-1:** Installation expérimentale.

- (1) ———> Réservoir d'alimentation.
- (2) ———> Réservoir polluant.
- (3) ———> Canal.
- (5) ———> Déversoir.
- (4) ———> Support en bois.

## 2.2. Polluant utilisé

Le travail expérimental étudie la dispersion d'un polluant actif, qui a une propriété non conservative dans le milieu aquatique, contrairement au polluant passif, pour cela, le phénol a été choisi.

### a) Appellation

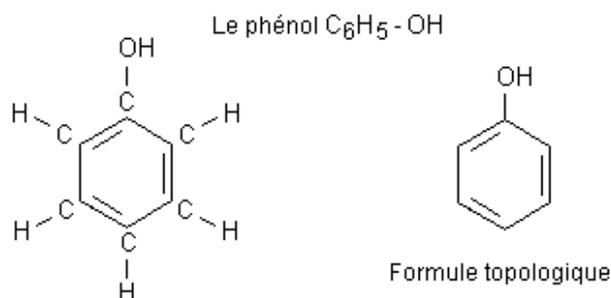
Nom de la substance : Phénol

Synonymes, noms commerciaux : Acide carbolique, benzophénol, acide phénique, benzénol, phénol ordinaire.

Description générale : Substance incolore/rosée ou fusion incolore; odeur douceâtre.

### b) Propriétés physico-chimiques

- Formule brute :  $C_6H_6O$  ;
- Masse atomique relative : 94,11 g ;
- Masse volumique :  $1,07 \text{ g/cm}^3$  à  $20^\circ\text{C}$  ;
- Densité de gaz : 3,24
- Point d'ébullition:  $181,75^\circ\text{C}$  ;
- Point de fusion :  $40,8^\circ\text{C}$  ;
- Tension de vapeur :  $0,2 \text{ hPa}$  à  $20^\circ\text{C}$ ;  $3,5 \text{ hPa}$  à  $50^\circ\text{C}$ ;  $54 \text{ hPa}$  à  $100^\circ\text{C}$  ;
- Point d'éclair :  $82^\circ\text{C}$  ;
- Température de combustion :  $595^\circ\text{C}$  ;
- Limite d'explosivité: 1,3 - 9,5 % Vol ;
- Seuil olfactif:  $0,18 \text{ mg/m}^3 = 0,046 \text{ ppm}$  ;
- Solubilité : Dans l'eau : 82 g/l; facilement soluble dans l'alcool, l'éther, le chloroforme, les graisses et les huiles essentielles ;
- Facteurs de conversion:  $1 \text{ ppm} = 3,91 \text{ mg/m}^3$ ,  $1 \text{ mg/m}^3 = 0,26 \text{ ppm}$ .



### 2.3. Moyens de mesures

#### 2.3.1. Mesure du débit

Le débit traversant le canal est mesuré au moyen d'un déversoir triangulaire à mince paroi se trouvant en aval du canal rectangulaire.

Un déversoir est un orifice ouvert à sa partie supérieure qui permet de contrôler le débit.

Déversoir à paroi mince est caractérisé par une hauteur  $P$  du fond du canal jusqu'à la crête, sa largeur  $b$  et la hauteur d'eau déversante  $h_d$  (figure IV.1).  $H$  est la charge amont sur le déversoir. (Carlier, 1986).

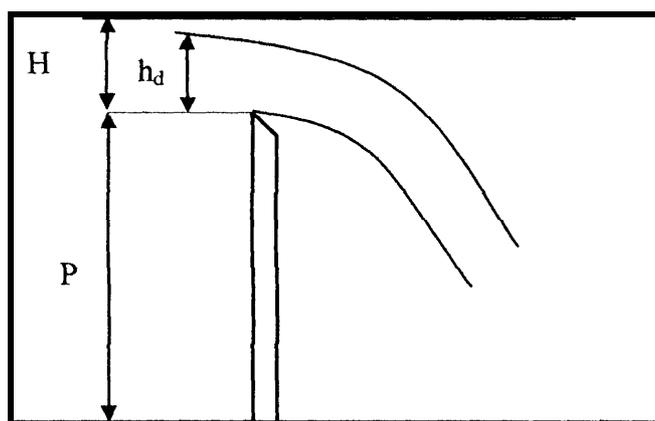


Figure IV.1 : Déversoir à mince paroi.

La vitesse moyenne dans la tranche d'eau de largeur  $x$  et de hauteur  $dz$  située à une profondeur  $z$  au dessous de la surface libre, est approximativement  $\sqrt{2 g h_d}$  (figure IV.2).

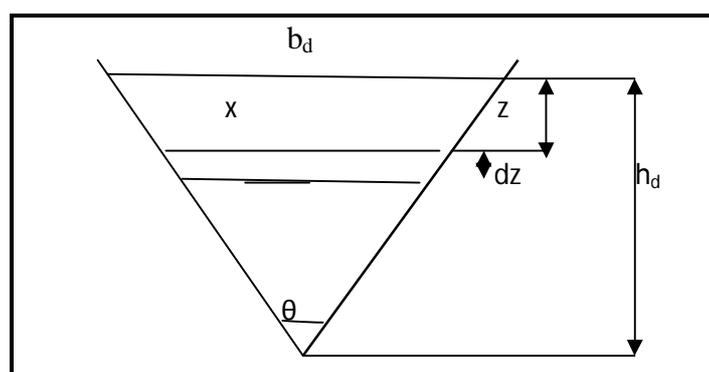


Figure IV.2 : Echancrure du déversoir

Le coefficient de débit approprié est désigné par  $\mu_d$ , le débit élémentaire de cette tranche sera :

$$dQ = \mu_d x dz \sqrt{2 g z}$$

On a :  $x = \frac{b_d}{h}(h - z)$

D'où :  $dQ = \mu_d \frac{b_d}{h}(h - z)\sqrt{2gz} dz$

$$Q = \int_0^h \mu_d \frac{b_d}{h}(h - z)\sqrt{2gz} dz$$

En supposant que  $\mu_d$  est une constante, l'intégration donne :  $Q = \frac{4}{15} \mu b h_d \sqrt{2g h_d}$

En introduisant l'angle  $\theta$  de l'échancrure du déversoir, le débit est donné par :

$$Q = \frac{8}{15} \mu_d h_d^{5/2} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) \sqrt{2g} \tag{IV-1}$$

Afin d'obtenir des mesures de débit assez précises, l'étalonnage du déversoir a été fait. Le canevas de mesure du débit est réalisé comme suit.

- L'alimentation du canal rectangulaire en eau à partir du réservoir d'eau, et remplissage du canal d'eau jusqu'à la hauteur de la crête du déversoir.
- L'alimentation est arrêtée pour déterminer la position de la crête du déversoir ( $H_p$ ) à l'aide d'un limnimètre.
- Ensuite, l'ouverture de la vanne d'alimentation d'eau ;
- Un débit donné est fixé (écoulement permanent).
- Après la stabilisation du niveau d'eau dans le canal, un prélèvement de la hauteur de la lame d'eau déversante ( $h_d$ ) est effectué.
- La mesure du débit correspondant à la lame d'eau déversante ( $h_d$ ) est réalisée en utilisant la méthode volumétrique.
- Donc le débit est donné par l'équation :  $Q = 0,519 \times h_d^{2,480}$

### 2.3.2. Détermination du coefficient de débit

En remplaçant l'équation d'étalonnage  $Q = 0,519 \times h_d^{2,480}$  dans l'équation (IV-1) donne :

$$\mu_d = \frac{0,519 \times 15}{8 \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) \sqrt{2g}} h_d^{0,019}$$

Pour  $\theta = 34^\circ$  et  $g = 9,81 \text{m/s}^2$ , la moyenne des coefficients de débits déterminés expérimentalement est  $\mu_d = 0,698$ .

### 2.3.3. Mesure de la hauteur d'eau

Un limnimètre a été utilisé pour la mesure de la hauteur d'eau, il a été fixé sur le canal à une distance L à l'amont du déversoir. Le traçage de la ligne d'eau et le repérage des différentes sections est réalisé à l'aide d'un papier millimétré transparent collé sur l'une des parois latérale du canal.



**Photographie IV.2** : Dispositif de mesure de la hauteur d'eau (Papier millimétré).

### 2.3.4. Mesure de la concentration du polluant

#### d1) Préparation des solutions étalons

La solution mère est de 500 mg/l (500 mg de phénol dans un litre d'eau).

Pour préparer les solutions étalons de 5mg/l jusqu'à 100mg/l: nous appliquons la formule suivante :  $N_1 \cdot V_1 = N_2 \cdot V_2$

Donc  $V_1 = N_2 \cdot V_2 / N_1$

$N_1$  : La concentration de la solution mère est égale à 500 mg/l ;

$V_1$  : Le volume de la solution mère pour avoir  $N_2$  ;

$N_2$  : La concentration de la solution étalon est égale à [5mg/l – 100 mg/l] ;

$V_2$  : Le volume de la solution étalon est égal à 100 ml.

Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau VI-1 ci-dessous :

**Tableau : IV-1** : le volume de la solution mère pour avoir les solutions étalons

$N_2$ (mg/l)	5	15	25	35	45	55	65	75
$V_1$ (ml)	1	3	5	7	9	11	13	15

Donc pour avoir une solution étalon de 5 mg/l, il faut prendre 1ml de la solution mère et ajouter l'eau distillée jusqu'à 100 ml.

### ***d2) Préparation des réactifs***

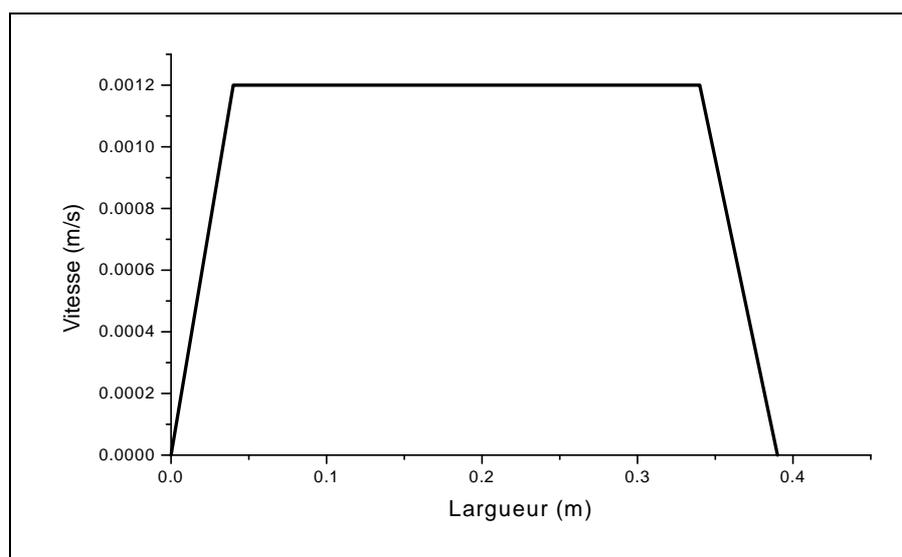
La préparation de 1l de la solution tampon suit les étapes suivantes :

- La dissolution, dans 700ml d'eau distillée, de 34g de  $\text{NH}_4\text{Cl}$ , 200g de tartrate double de potassium et sodium, et ajustement avec de l'ammoniaque jusqu'à avoir un  $\text{PH} = 9.5$ , enfin l'addition de l'eau distillée jusqu'à 1l.
- La préparation de 1 l de solution de ferricyanure de potassium à 20 g/l.
- La préparation de 1 l de solution de 4-amino antipyrine à 20 g/l (flacon en verre teinté, fermé par un bouchon rôdé).

## **3. Validation des résultats**

### **3.1. Description du champ de vitesse transversale**

La figure (IV-3) présente le profil de la vitesse transversale le long de la largeur du canal.



**Figure IV-3 :** Variation de la vitesse transversale le long de la largeur du canal.

Le débit d'entrée étant égal au débit de sortie, la hauteur d'écoulement étant constante le long du canal : l'écoulement est permanent.

### **3.2. Description du champ de vitesse longitudinale**

Dans les phénomènes de transport, le champ de vitesse joue un rôle clé car la vitesse intervient aussi dans le transport convectif que dans le transport par diffusion turbulente. Sur la figure (VI-4), nous avons présenté le profil de la vitesse longitudinale suivant la longueur du canal.

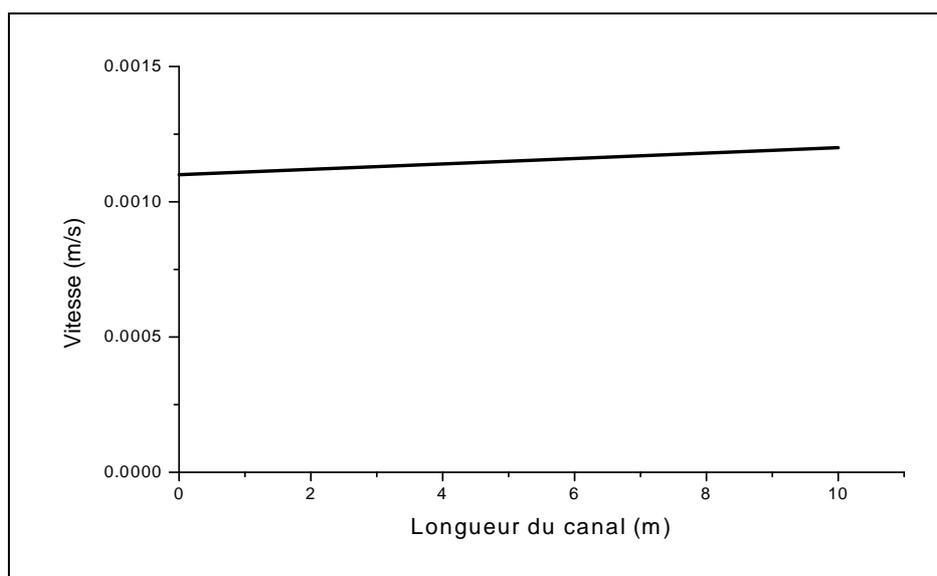


Figure IV-4 : Variation de la vitesse longitudinale le long du canal.

Dans cette figure, on remarque une faible variation de la vitesse longitudinale, ce qui est dû à la faible pente du canal.

#### 4. Résultats et interprétations

Dans son expérience, Kessili s'est donné comme objectif de mesurer la concentration du phénol au cours du temps et à des positions différentes à l'amont de la zone d'injection. Pour ce faire, il a injecté une concentration initiale de 500mg/l de phénol; lorsque l'écoulement dans le canal se stabilise, il a effectué plusieurs mesures pendant des intervalles de temps réguliers.

Dans ce qui suit, nous confronterons les données expérimentales aux données obtenues numériquement afin de déterminer comment notre modèle prédit le comportement du système réel qu'il représente.

##### 4.1. Injection discontinue de la pollution

Lors de ces essais, la période d'injection du phénol dans le canal est de 25s.

##### 4.1.1. Variation de la concentration à la surface libre

La figure (IV-5) présente les courbes de variation de la concentration en fonction du temps obtenue par voie expérimentale pour un débit de 0,42 l/s à des positions différentes et pour une source discontinue de  $C_0=500\text{mg/l}$ .

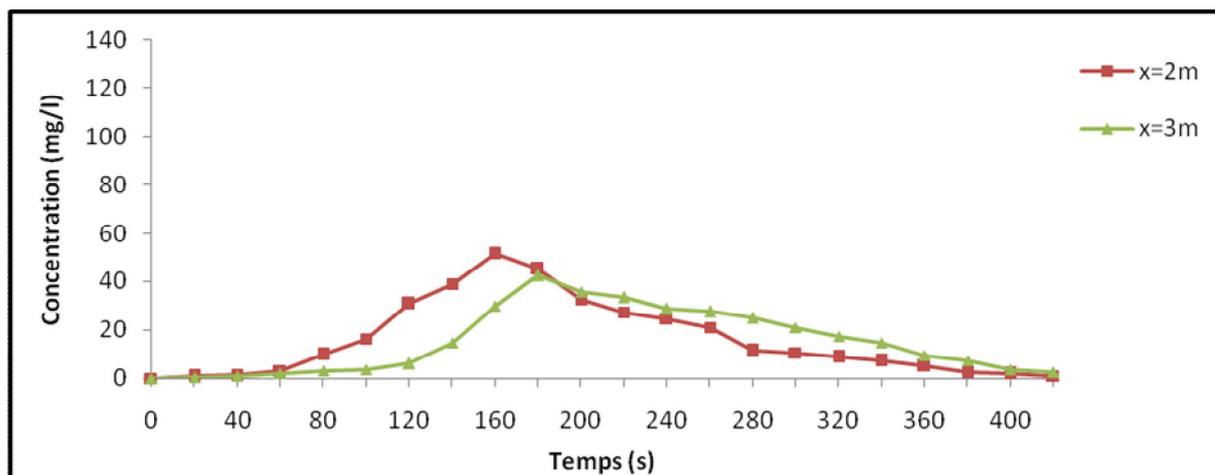


Figure IV-5 : Variation de la concentration du phénol à la surface libre en fonction du temps à deux sections  $x=2m$  et  $x=3m$  de l'injection.

Les résultats expérimentaux montrent que la concentration du polluant actif (phénol) augmente rapidement jusqu'à atteindre un pic, puis elle commence à diminuer lentement avec le temps. Nous observons un décalage temporel dans l'apparition du phénol. Les concentrations aux pics décroissent en s'éloignant du point de l'injection. Le temps de séjour du polluant augmente.

Les résultats observés sont expliqués par la domination du caractère convectif du transport du polluant au voisinage de l'injection. En s'éloignant du point d'injection du polluant, le transport devient de plus en plus diffusif.

Dans la figure (IV-6), nous avons présenté les profils de concentration en fonction du temps avec les données obtenues à partir de notre modèle numérique à deux positions différentes. La concentration initiale est aussi de 500mg/l ; nous avons admis un coefficient de réaction de 0.013.

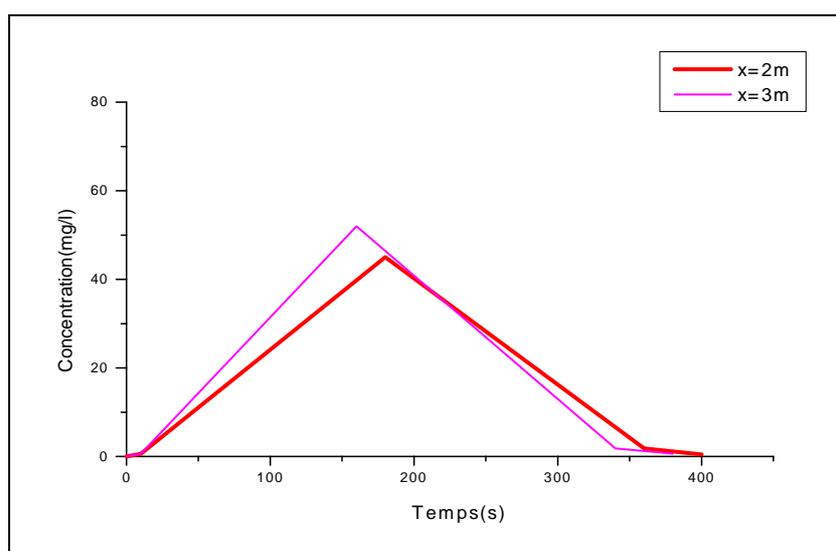
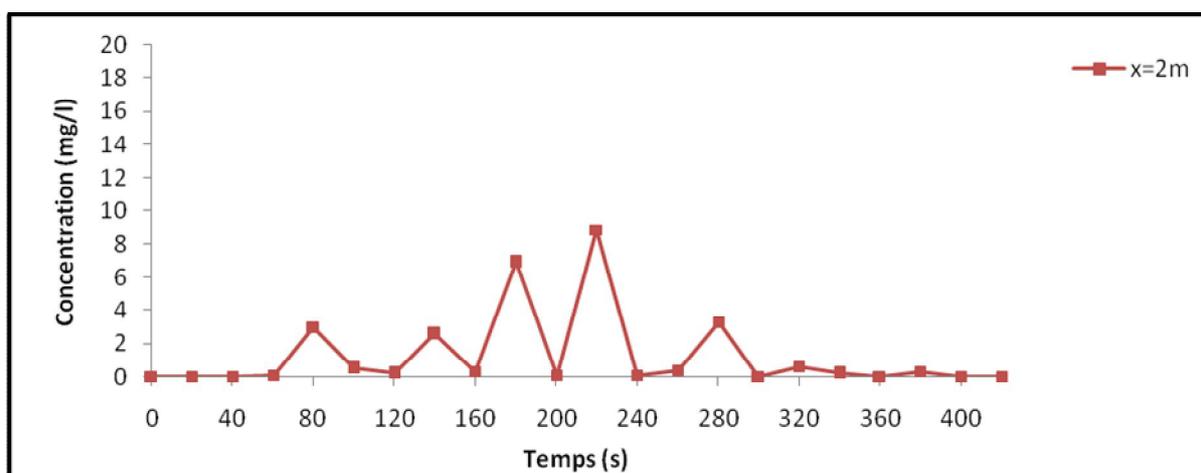


Figure IV-6 : Variation de la concentration à 2m et 3m de distance du point d'injection.

Dans les deux cas présentés du modèle numérique, la concentration augmente progressivement pour atteindre son pic. Par contre, la descente dans le cas des données expérimentales est plus lente que celle dans le cas des données obtenues numériquement. Ceci est probablement dû à un coefficient de réaction relativement élevé que nous avons adopté dans la résolution numérique du problème.

#### 4.1.2. Variation de la concentration au fond du canal

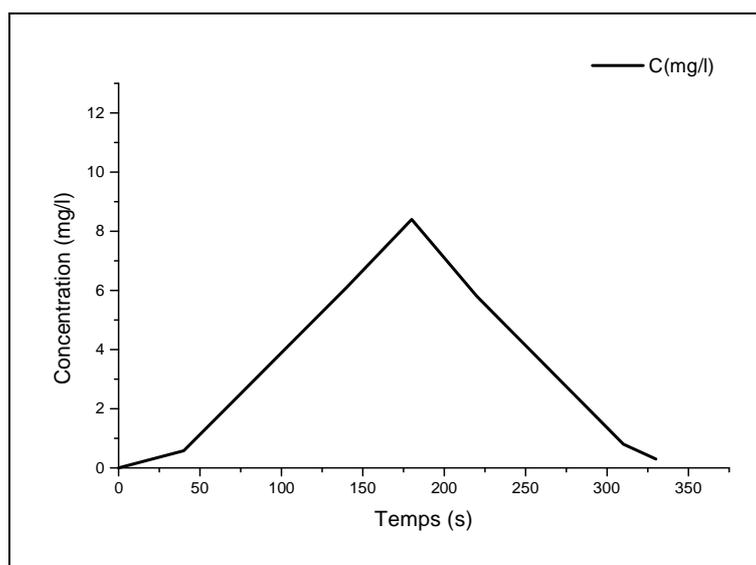
Le profil de la concentration obtenu expérimentalement à 2cm du fond du canal pour une section s'éloigne de 2m de distance du point d'injection pour une concentration du phénol injecté de 500 mg/l, pendant une période de 25s, sont présentés dans la figure (IV-7).



**Figure IV-7** : Variation de la concentration du phénol en fonction du temps du phénol à 2 cm du fond.

Les résultats expérimentaux de l'évolution de la concentration au fond du canal montrent la présence de plusieurs pics de concentration.

La figure suivante présente les résultats numériques de la variation de la concentration en fonction du temps au fond du canal avec une source discontinue.



**Figure IV-8** : Variation de la concentration en fonction du temps au fond du canal pour une source discontinue.

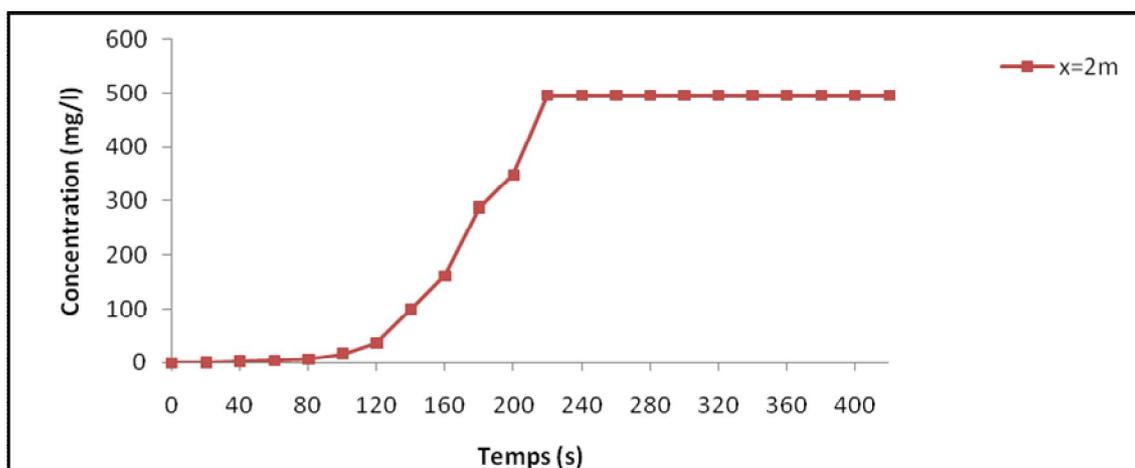
Les données numériques de la variation de la concentration du phénol, pour un débit d'écoulement de 0,42l/s et une concentration initiale  $C_0=500\text{mg/l}$ , présentent de faibles valeurs ce ci peut être expliqué par la présence de l'adsorption du polluant avec le lit.

#### 4.2. Cas d'une injection continue de pollution

Dans le cas de l'injection continue du polluant, le débit de la solution du phénol injectée est constant et dure jusqu'à la fin de tous les prélèvements.

##### 4.2.1. Variation de la concentration à la surface libre

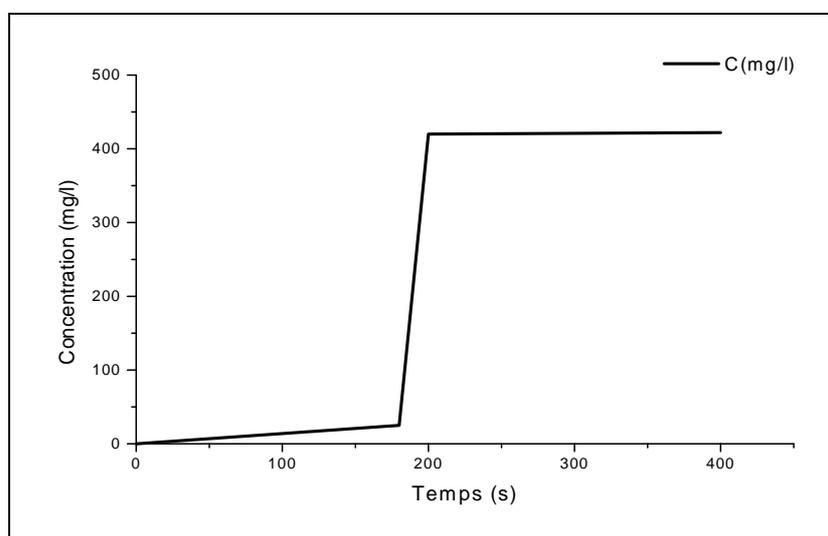
Le profil de la concentration obtenu expérimentalement à 2m de distances de l'origine (point d'injection du polluant) avec une concentration du phénol injecté de 500mg/l, est présenté dans la figure (IV-9).



**Figure IV-9** : Variation de la concentration du phénol à la surface libre en fonction du temps à 2m du lieu de l'injection.

Les données expérimentales montrent que la concentration du phénol augmente rapidement pendant un certain laps de temps, avant qu'elle devienne de plus en plus lente et tend à être constante.

Le profil de la concentration obtenu à la surface libre du canal est représenté dans la figure suivante :



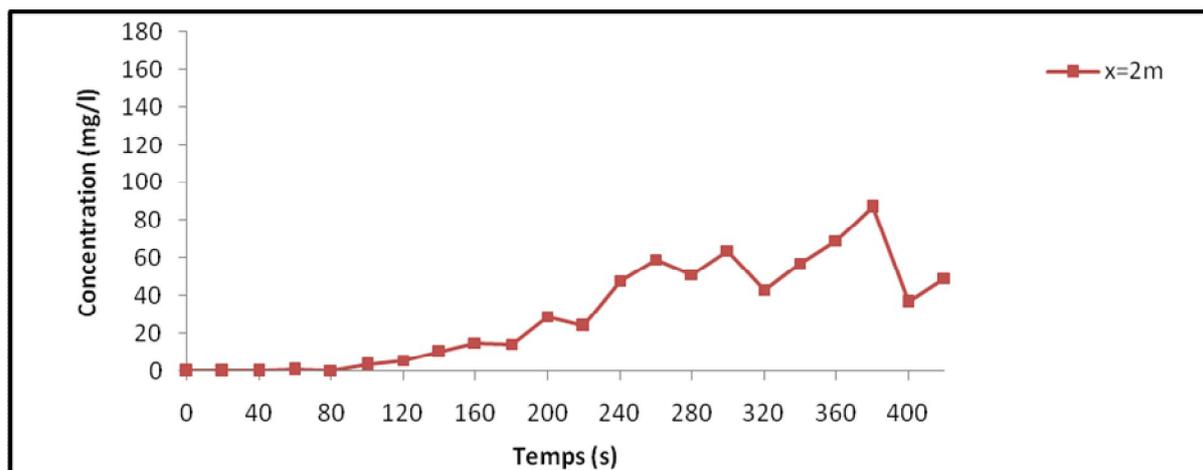
**Figure IV-10** : Variation de la concentration en fonction du temps pour une source continue à surface libre à 2m de distance.

Nous remarquons que le profil de concentration du phénol a la même allure que celui des données expérimentales avec une augmentation plus rapide de la concentration avant qu'elle devienne constante.

On remarque une faible diminution de la concentration à la sortie du canal, ce qui peut être expliqué par le faible coefficient de réaction utilisé.

#### 4.2.2. Variation de la concentration au fond du canal

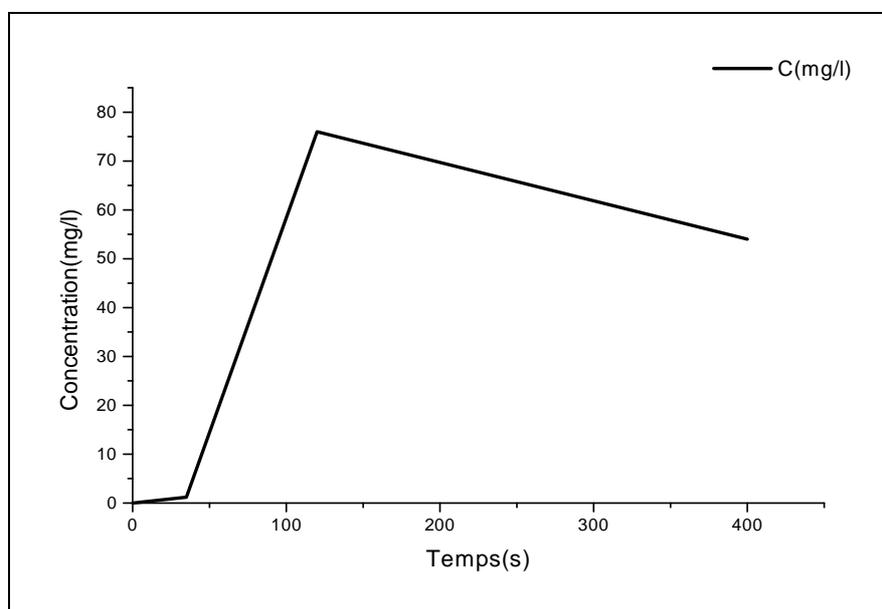
La figure (IV-11) donne le profil de la concentration du phénol obtenu expérimentalement à 2cm du fond du canal et à 2m de distance de l'origine (point d'injection du polluant) pour un débit d'écoulement de 0,42l/s et une concentration initiale  $C_0=500$ mg/l.



**Figure IV-11** : Variation de la concentration du phénol à 2 cm du fond en fonction du temps à 2m du lieu d'injection continue de pollution.

Nous remarquons que l'allure de la courbe de concentration des données expérimentales est aléatoire, de telle façon qu'il y a plusieurs pics de concentration. Nous observons aussi que la concentration au fond du canal augmente avec le temps de l'injection, ce ci peut être expliqué par les mécanismes de la convection et de la diffusion.

Dans la figure (IV-12), nous avons présenté les résultats numériques de la variation de la concentration en fonction du temps au fond du canal pour une source continue, un débit  $Q=42\text{l/s}$  et une concentration initiale  $C_0=500\text{mg/l}$ .



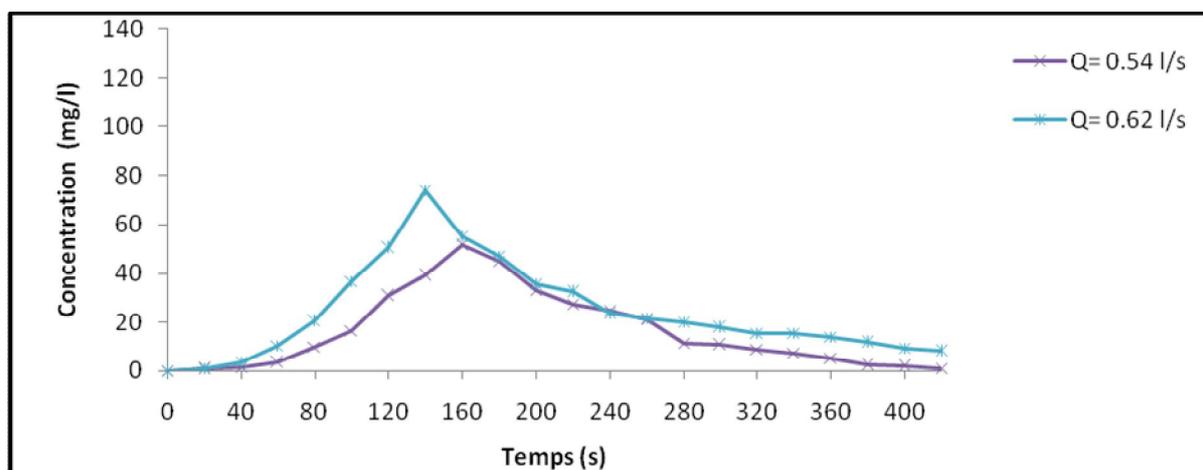
**Figure IV-12** : Variation de la concentration en fonction du temps pour une source continue.

Le profil de concentration obtenu suite à une injection continue du polluant a la même allure que celui de la surface libre qui est une augmentation rapide au début de l'apparition du phénol, puis une petite diminution après un certain laps de temps.

La valeur maximale atteinte par la concentration décroît en allant vers l'aval ce ci peut être expliqué par la dominance de l'effet moléculaire au fond du canal.

### 4.3. Détermination de l'influence du débit sur l'évolution de la concentration

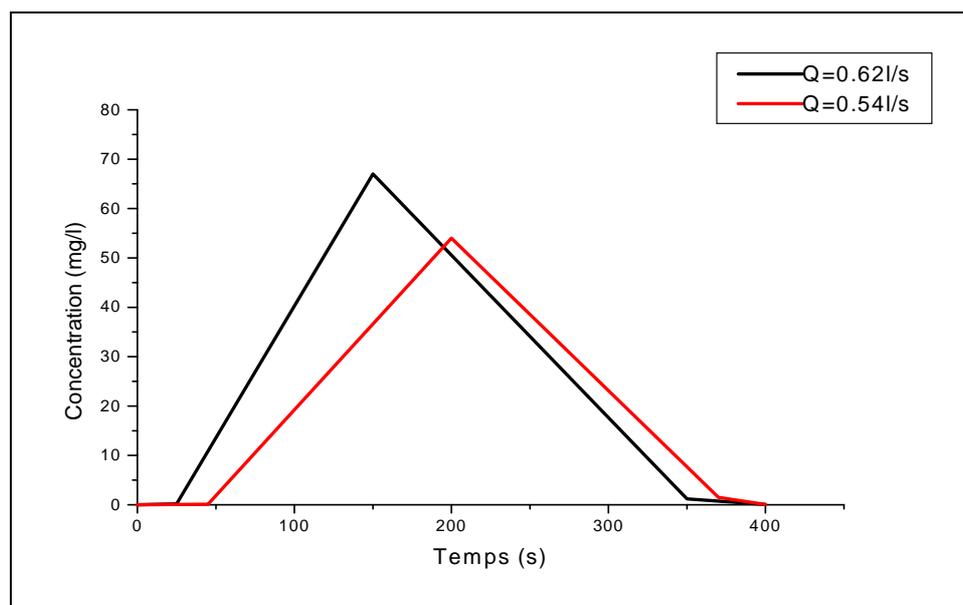
La figure (IV-3) représente les profils de la concentration obtenus pour des différents débits d'écoulement avec une concentration du phénol injecté de 500 mg/l. Nous avons admis un coefficient de réaction de 0.013.



**Figure IV-13** : Variation de la concentration du phénol à la surface libre en fonction du temps à  $x = 2m$  pour deux débits différents.

La valeur maximale de la concentration du phénol est atteinte plus rapidement lorsque le débit d'écoulement augmente.

La figure (IV-14) montre l'influence du débit d'écoulement sur l'évolution de la concentration du phénol pour deux débits différents  $Q = 0,54l/s$  et  $Q = 0,62l/s$ .



**Figure IV-14** : Variation de la concentration en fonction du temps pour les deux débits  $Q=0,54l/s$  et  $Q=0,62l/s$  à  $x=2m$ .

Nous remarquons que les pics de la concentration sont plus importants lorsque le débit augmente, Ces pics sont atteints plus rapidement pour les grands débits que pour les faibles débits, contrairement au temps de séjours qui augmente avec la diminution du débit. Du fait que la section du canal est constante, la croissance du débit implique la croissance de la vitesse, et par conséquent la dominance de la convection par rapport à la diffusion.

#### 4.4. Effet de la variation de la concentration initiale du polluant

##### 4.4.1. Cas d'une source discontinue

Pour mettre en évidence la réponse de notre modèle numérique à la variation de la concentration, nous avons considéré l'injection d'une source discontinue des concentrations initiales différentes dans les mêmes conditions d'écoulement ( $Q= 0,42\text{l/s}$ ,  $k_r=0.013$  et  $x= 2\text{m}$ ).

Le profil de la concentration obtenu expérimentalement, à une distance de 2m de l'origine (point d'injection du polluant) et un débit de  $0,42\text{l/s}$  pour deux concentrations différentes du phénol injecté ( $600\text{mg/l}$  et  $700\text{mg/l}$ ), sont présentés sur les figures (IV-15) et (IV-16).

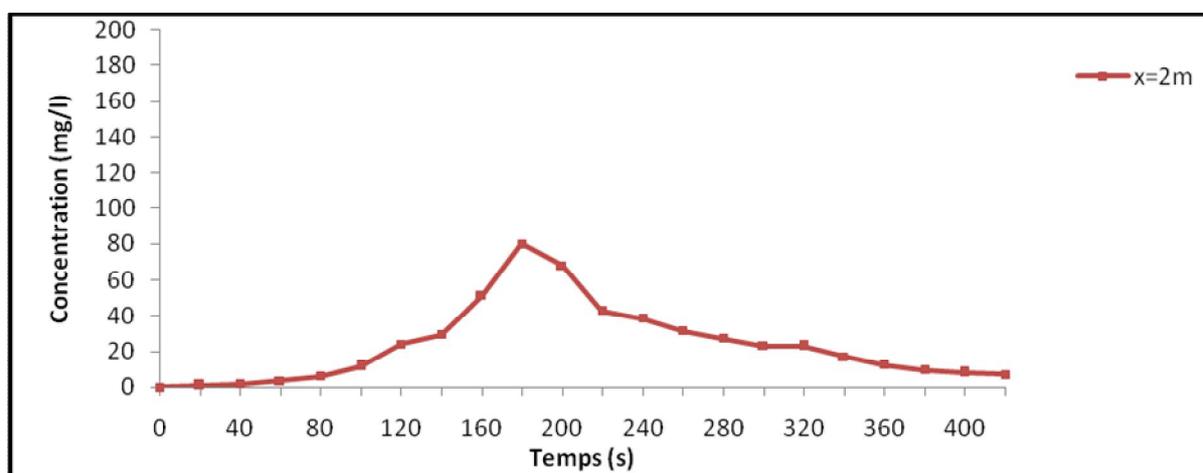


Figure IV-15 : Variation de la concentration du phénol pour  $Q = 0,42$  l/s et  $C_0 = 600\text{mg/l}$  pour une injection discontinue de la pollution.

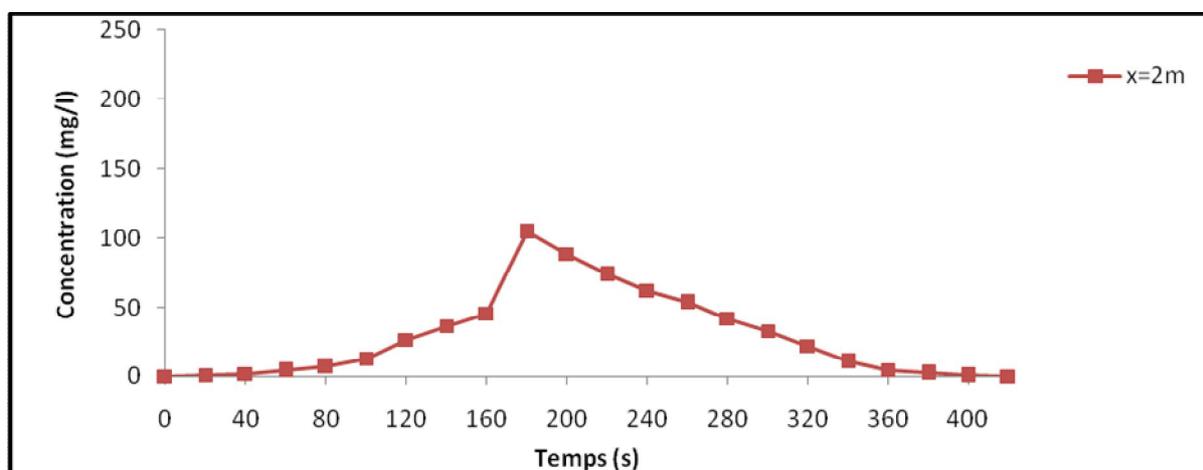
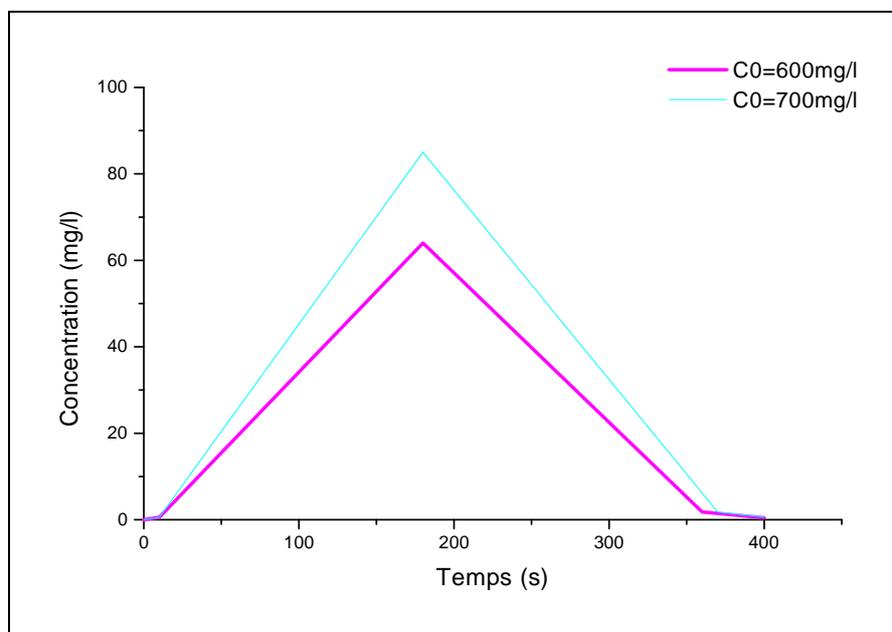


Figure IV-16 : Variation de la concentration du phénol pour  $Q = 0,42$  l/s et  $C_0 = 700\text{mg/l}$  avec une injection discontinue de la pollution.

Nous remarquons que les courbes ont la même allure quelques soient la concentration initiale injectée.

La figure (IV-17) montre la variation de la concentration en fonction du temps à une distance  $x = 2\text{m}$  de la zone d'injection pour deux concentration initiales différentes ( $C_0=600\text{mg/l}$  et  $C_0=700\text{mg/l}$ ).



**Figure IV-17** : Variation de la concentration du phénol en fonction du temps pour une concentration initiale  $C_0=600\text{mg/l}$  et  $C_0=700\text{mg/l}$ .

Les profils de la concentration obtenus à l'aide de notre modèle numérique, à une distance de 2m de l'origine, pour des concentrations du phénol injecté de 600mg/l et 700mg/l, ont la même allure que ceux obtenus expérimentalement. Les pics obtenus numériquement sont plus petits ce ci est dû à la perte d'information lors de la simulation.

#### 4.4.2. Cas d'une source continue

Les profils de la concentration obtenus expérimentalement à 2m de l'origine pour deux concentrations différentes du phénol injecté ( $C_0=600\text{mg/l}$  et  $C_0=700\text{mg/l}$ ) et un débit d'injection  $Q=0.42\text{l/s}$ , sont donnés sur les figures (IV-18) et (IV-19).

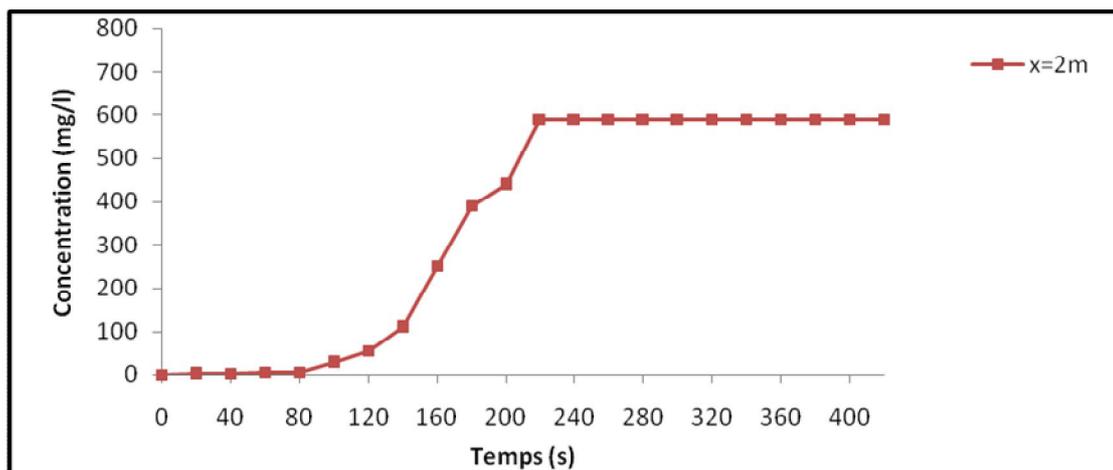


Figure IV-18 : Variation de la concentration du phénol pour  $Q = 0,42$  l/s et  $C_0 = 600$ mg/l - Cas d'injection continue de pollution.

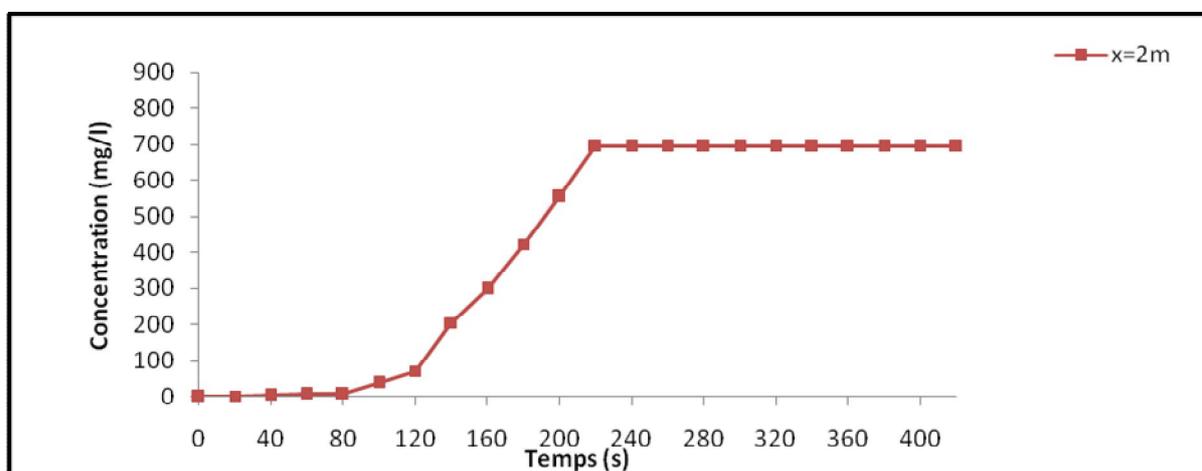
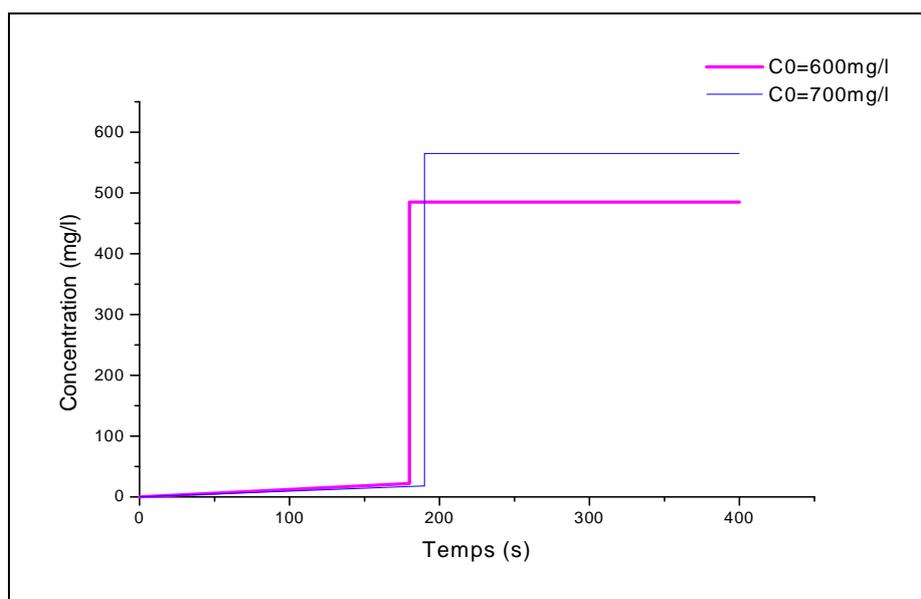


Figure IV-19 : Variation de la concentration du phénol pour  $Q = 0,42$  l/s et  $C_0 = 700$ mg/l- Cas d'injection continue de pollution.

L'expérience prouve que l'allure des profils de concentration obtenus est la même quelle que soit la concentration initiale injectée.

La figure (IV-20) présente la variation de la concentration à l'aide de notre modèle numérique pour deux concentrations initiales différentes ( $C_0=600$ mg/l et  $C_0=700$ mg/l) et une source continue dans les mêmes conditions d'écoulement ( $Q= 0,42$ l/s et  $x= 2$ m).



**Figure IV-20** : Variation de la concentration du phénol en fonction du temps pour une concentration initiale  $C_0=600\text{mg/l}$  et  $C_0=700\text{mg/l}$ .

Nous remarquons dans les deux cas que les profils ont rigoureusement les mêmes allures. Les pics obtenus numériquement sont plus petits ce qui peut être dû au coefficient de réaction choisi.

En définitive, notre modèle répond correctement aux variations de la concentration ; même à faible concentration initiale une courbe de variation de la concentration en fonction du temps en un point donné est obtenue.

### **Conclusion**

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont intéressants et confirment globalement le bon comportement du modèle numérique. La qualité des réponses du modèle hydrodynamique prouve que le modèle réagit de manière satisfaisante aux conditions imposées. Nous venons de valider notre modèle mathématique en confrontant les résultats expérimentaux aux résultats numériques. Les courbes de variation de la concentration en fonction du temps ont à peu près les mêmes allures. Les profils obtenus à partir des données expérimentales montent et descendent plus lentement. D'une manière générale, notre modèle répond correctement à l'augmentation de la distance et aux variations du débit et de la concentration initiale.

Une simulation numérique de la dispersion d'une substance ne donnera des résultats satisfaisants que lorsque le bon  $k_r$  est connu. En ce qui concerne le transport proprement dit, deux phénomènes prépondérants y interviennent : le phénomène de convection et de diffusion turbulente. Donc une modélisation rigoureuse des coefficients de diffusion longitudinale et transversale s'impose.

## **Conclusion générale**

Le présent travail, nous a permis de réaliser une étude sur la simulation numérique de la dispersion de la substance polluante non conservative dans un écoulement turbulent à surface libre à travers la résolution numérique d'un modèle mathématique bidimensionnel, permettant de donner une représentation précise des mécanismes responsables des phénomènes hydrodynamiques et de transport présents dans le milieu récepteur; en particulier la turbulence qui joue un rôle essentiel dans la dispersion.

Le modèle mathématique construit, modélise l'ensemble des processus physiques grâce aux équations de Reynolds ainsi que l'équation de convection-diffusion du polluant et les deux équations du modèle de turbulence k-epsilon. Quand à l'aspect physico-chimique, le polluant a été caractérisé par un terme de disparition dans l'équation de transport.

La résolution du système d'équation ainsi obtenu exige une approche numérique, d'où notre choix d'utiliser le schéma implicite aux différences finies de Beam Warming.

Après avoir défini les conditions initiales et les conditions aux limites, nous avons entamé la résolution numérique du problème à l'aide d'un solveur informatique que nous avons développé en utilisant le logiciel de programmation Matlab.

Les résultats obtenus concernant les concentrations apparaissent également satisfaisants dans le cas d'une source de pollution continue comme dans le cas d'une source instantanée. Nous avons constaté que pendant une première période qui correspond à la période convective, la concentration augmente rapidement jusqu'à atteindre des valeurs légèrement plus importantes que la valeur de la concentration à la source. Après cette période la croissance de la concentration est moins importante pour atteindre une valeur pour laquelle se stabilise en période diffusive.

La confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux a révélé des profils de concentrations identiques à quelques différences près. La sensibilité de notre modèle aux variations de la distance, de débits et de la concentration initiale a été mise en évidence.

D'une manière générale, les résultats obtenus sont intéressants. Cependant ces résultats doivent être améliorés en essayant de faire ressortir plus d'informations et de performance concernant notre schéma numérique.

Pour minimiser les dégâts en cas de pollution accidentelle dans une rivière, le coefficient de réaction de tous les produits pouvant être source de pollution doivent être rigoureusement déterminés d'avance. En effet quelque soit la performance des modèles utilisés, l'obtention des bons résultats est fortement conditionnée par ce coefficient.

Des études plus poussées doivent être effectuées sur le problème de la dispersion afin d'étendre notre modèle en dimension 3D en tenant compte d'autres paramètres comme la dispersion suivant la hauteur car en réalité, au voisinage de la zone d'injection, le mélange se réalise dans toutes les directions de l'espace.

A l'issue de ce travail, nous considérons que les résultats sont très encourageants et le modèle mérite d'être développé dans le futur par l'introduction d'une nouvelle équation de convection diffusion pour la température. Il faudra également que le modèle numérique puisse être utilisé dans tout type de géométrie, notamment la prise en compte de l'aspect tridimensionnel.