

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

M/88

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

# THESE

Presentée par

Mohamed LERARI, Ingénieur E.N.P.

Pour obtenir le diplôme de

Magister en Génie Civil

## Etude du Comportement des Voiles Minces en Béton Armé en Forme de Paraboloïdes Hyperboliques

Soutenue Publiquement le 26 Avril 1988

Devant le Jury

Président	<b>B. TILIOUINE</b>	Professeur
Rapporteur	<b>P. BONNEVILLE</b>	Professeur
Examineurs	<b>M.S. BARAKA</b>	Chargé de Cours
	<b>A. CHARIF</b>	Maître de Conférences
	<b>D. CUONG</b>	Professeur
Invité	<b>A. RAZKALLAH</b>	Directeur à la SAPTA

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

# THESE

Presentée par

Mohamed LERARI, Ingénieur E.N.P.

Pour obtenir le diplôme de

Magister en Génie Civil

Etude du Comportement des Voiles Minces  
en Béton Armé  
en Forme de Paraboloïdes Hyperboliques

Soutenue Publiquement le 26 Avril 1988

Devant le Jury

Président	<b>B. TILIOUINE</b>	Professeur
Rapporteur	<b>P. BONNEVILLE</b>	Professeur
Examineurs	{	<b>M.S. BARAKA</b> Chargé de Cours
		<b>A. CHARIF</b> Maître de Conférences
		<b>D. CUONG</b> Professeur
Invité	<b>A. RAZKALLAH</b>	Directeur à la SAPTA

## REMERCIEMENTS

---

A l'occasion de la présentation de cette thèse, il m'est particulièrement agréable de remercier tous ceux qui ont contribué de quelque manière que ce soit à la réalisation de ce travail.

Monsieur le Professeur P. Halleux, Directeur du Service Génie Civil de l' U.L.B, qui m'a accueilli dans son service et qui a dirigé la partie expérimentale de ce mémoire.

Les techniciens qui ont participé à la construction des modèles et aux essais.

Les personnes du service des Matériaux continus de l'U.L.B, notamment les Professeurs J. Kestens et G. Warzé, l'Assistant F. Espion ainsi que chercheur Ch. Wouters.

Monsieur V. Strakhov, Maître de conférence à l' E.N.P, qui a dirigé la seconde partie de ce travail jusqu'à son départ de l'E.N.P et qui n'a pas hésité à me traduire des paragraphes entiers d'ouvrages russes.

Monsieur le Professeur P. Bonneville de l'E.N.P. qui a accepté de reprendre la Direction de cette thèse.

Enfin, je tiens à dire merci à tous les membres de ma famille pour leur soutien et leur confiance ainsi qu'à mon ami Mahdjoub qui a mis son micro à ma disposition pour la rédaction du mémoire.

=====

# ETUDE COMPORTEMENT DES VOILES MINCES EN BETON ARMÉ EN FORME DE PARABOLOIDES HYPERBOLIQUES

ملخص :

هكذا العمل يعرض نتائج بحث تجريبي و نظري حول حالة الاستقر  
الروحية بالكورسلي المسلح على شكل شبه قطع مكافئ - قطع زائد و قطع  
القطع المستقيمة .  
البحث التجريبي حقق على نموذجين مستخدمين الكورسلي المسلح الروحية . بعد  
عدة تجارب حقق في الميخلى المرن الخطي ، اختبار الدماج حتى الدمار .  
في الدراسة النظرية ناقش نموذج عظم من نوع تفرد . مقارنة النتائج  
التجريبية و النظرية تبين تطابق مرضي إجمالاً .  
حقق تجربة عظمية على ثلاثة و ستين ( 63 ) نموذج لدراسة تأثير الطبقة و  
الزخلف على الحالة العامة لنوع الاستقر .

## Résumé :

Ce travail présente les résultats d'une recherche aussi bien expérimentale que théorique sur le comportement des voiles minces en forme de Paraboloïdes Hyperboliques à rives rectilignes ( PH ) .  
L'investigation expérimentale est menée sur deux modèles réduits en micro-béton armé . Après plusieurs campagnes d'essais réalisées dans le domaine élastique linéaire , les modèles sont testés jusqu'à la ruine .  
Dans l'étude théorique , on propose un modèle numérique de type variationnel . La comparaison des résultats expérimentaux et numériques montre une concordance globalement satisfaisante .  
Une expérimentation numérique sur soixante-trois ( 63 ) modèles est menée afin d'étudier l'influence de l'épaisseur et du surbaïssement sur le comportement général de ce type de voile .

## Summary :

This work presents the results on an experimental as well as theoretical research on the behaviour of the Hyperbolic Paraboloid shells having rectilinear sides .  
The experimental investigation involves the testing of two reinforced micro-concrete models . After many tests in elastic range , models are tested to failure .  
In the theoretical study , one propose a numerical model of variationnel type . The comparison of the experimental and numerical results shows a globally satisfactory agreement .  
For the study of the influence of the thickness and shalowness on the general behaviour of this shell type , a numerical experimentation of sixty-three ( 63 ) models is done .

# Table des matières

## **Chapitre 0 : Description générale**

## **Chapitre 1 : Introduction**

1.1 Historique . . . . .	I-1
1.2 Définitions . . . . .	I-2
1.3 Hypothèses de calcul . . . . .	I-3
1.4 Position du problème . . . . .	I-6
1.5 Objectifs et limitations de la recherche . . . . .	I-8
1.6 Intérêt du Paraboloïde Hyperbolique à rives rectilignes . . . . .	I-9
1.7 Géométrie du Paraboloïde Hyperbolique . . . . .	I-10
1.8 Etude bibliographique . . . . .	I-13

## **Chapitre 2 : Etude expérimentale**

2.1 Description générale des modèles . . . . .	II-1
2.1.1 Caractéristiques géométriques des modèles . . . . .	II-2
2.1.2 Caractéristiques des matériaux utilisés . . . . .	II-8
2.2 Support expérimental . . . . .	II-10
2.2.1 Dispositif de chargement . . . . .	II-10
2.2.2 Appareils de mesure . . . . .	II-10
2.2.3 Programme des essais . . . . .	II-13
2.3 Comportement du voile sous une charge concentrée . . . . .	II-15
2.3.1 Charge localisée au centre du voile . . . . .	II-15
2.3.1.1 Etude des déplacements . . . . .	II-15
2.3.1.2 Etude des contraintes . . . . .	II-23
2.3.2 Charge localisée en dehors du centre . . . . .	II-38

2.3.2.1	Etude des déplacements . . . . .	II-38
2.3.2.2	Etude des contraintes . . . . .	II-43
2.4	Comportement du voile sous une charge répartie . . . . .	II-50
2.4.1	Déplacements verticaux . . . . .	II-51
2.4.2	Contraintes principales . . . . .	II-53
2.5	Image des contraintes . . . . .	II-57
2.6	Comparaison des voiles à une plaque . . . . .	II-62
2.7	Essais à la rupture . . . . .	II-68
2.7.1	Autres essais effectués . . . . .	II-68
2.7.2	Essai à la ruine du modèle M30 . . . . .	II-70
2.7.2.1	Fissuration du voile . . . . .	II-70
2.7.2.2	Fissuration des poutres de rive . . . . .	II-74
2.7.2.3	Rupture du voile . . . . .	II-74
2.7.2.4	Analyse du diagramme charge-flèche . . . . .	II-75
2.7.3	Essai à la ruine du modèle M45 . . . . .	II-78
2.7.3.1	Description de l'essai . . . . .	II-78
2.7.3.2	Relevé des épaisseurs réelles . . . . .	II-80
2.8	Conclusions . . . . .	II-84

### Chapitre 3 : Etude théorique

3.1	Introduction . . . . .	III-1
3.2	Méthode adoptée . . . . .	III-2
3.2.1	Description de la méthode . . . . .	III-2
3.2.2	Conditions aux limites . . . . .	III-4
3.3	Mise en équation du problème . . . . .	III-6
3.3.1	Energie potentielle totale . . . . .	III-6
3.3.2	Equations de la méthode . . . . .	III-10
3.4	Calcul des contraintes . . . . .	III-11

3.4.1 Conventions des signes . . . . .	III-11
3.4.2 Relations efforts-déformations . . . . .	III-12
3.4.3 Relations contraintes-efforts . . . . .	III-13
3.5 Cas d'une charge répartie . . . . .	III-14
3.5.1 Première approche . . . . .	III-14
3.5.1.1 Description du champ de déplacement . . . . .	III-14
3.5.1.2 Equations canoniques de la méthode . . . . .	III-18
3.5.2 Analyse des résultats numériques . . . . .	III-23
3.5.2.1 Convergence . . . . .	III-23
3.5.2.2 Déplacements . . . . .	III-25
3.5.2.3 Contraintes . . . . .	III-33
3.5.2.4 Conclusions . . . . .	III-37
3.6 Influence des paramètres géométriques . . . . .	III-38
3.6.1 Etude des déplacements . . . . .	III-39
3.6.1.1 Influence du surbaissement . . . . .	III-40
3.6.1.2 Influence de l'épaisseur . . . . .	III-42
3.6.1.3 Conclusions . . . . .	III-45
3.6.2 Etude des contraintes . . . . .	III-46
3.6.2.1 influence du surbaissement . . . . .	III-50
3.6.2.2 Influence de l'épaisseur . . . . .	III-54
3.6.2.3 Conclusions . . . . .	III-54

## **Chapitre 4 : Conclusion**

4.1 Principaux résultats . . . . .	IV-1
4.2 Utilisation du modèle proposé et perspectives . . . . .	IV-3

**Annexe A** : Angle entre deux génératrices d'un PH rectangulaire

**Annexe B** : Description du programme

**Références**

## **Chapitre 0 : Description générale**

Ce travail présente les résultats obtenus par la recherche que nous avons effectuée dans le cadre d'un Magister en Génie Civil . La recherche est consacrée à l'étude du comportement des voiles minces en béton armé ayant la forme de Paraboloïdes Hyperboliques à rives rectilignes .

Les sollicitations considérées , toujours statiques , sont la charge concentrée et la charge répartie .

L'analyse est limitée au domaine élastique linéaire qui implique deux hypothèses essentielles , à savoir :

- l'hypothèse de petits déplacements , donc les déformations sont liées linéairement aux déplacements .
- l'hypothèse de linéarité physique du matériau , donc les contraintes sont liées linéairement aux déplacements .

L'originalité de ce travail provient de :

- la mise en évidence de contraintes de flexion , jusque là négligées , sous l'effet d'une charge répartie .
- l'étude du comportement de ce type de structure sous l'action des charges concentrées .
- l'étude de l'influence de certains paramètres géométriques sur le comportement général du paraboloïde hyperbolique .

Le mémoire comporte les chapitres suivants :

**Chapitre 1 :** Dans ce chapitre , qui constitue l'introduction de ce mémoire , il est donné une classification des voiles ainsi que le rappel des hypothèses de calcul de ces structures . Une fois la position du problème étudié bien située , les objectifs et les limitations de la recherche sont passés en revue . Enfin , le choix du Paraboloïde Hyperbolique à rives rectilignes est expliqué et les principales caractéristiques géométriques de cette surface sont rappalées .

**Chapitre 2 :** Ce deuxième chapitre est consacrée à la partie expérimentale de cette recherche . L'étude expérimentale repose sur les essais effectués sur deux modèles réduits en micro-béton armé . Les deux modèles diffèrent essentiellement par leur surbaissement , c'est-à-dire la dénivellation entre les sommets hauts et bas du voile . Le premier modèle présente un surbaissement de 30 cm et sera désigné dans la suite du texte par " **modèle M30** " . Quant au deuxième modèle , son surbaissement vaut 45 cm et sera tout naturellement appelé " **modèle M45** " .

On trouvera une description détaillée des modèles ( géométrie , appuis, matériaux , ... ) et du programme des essais ainsi que l'analyse des résultats obtenus .

**Chapitre 3 :** Le chapitre 3 décrit le modèle numérique proposé et présente les résultats qu'il donne .

La méthode est largement exposée , avec notamment : une description de la démarche , la mise en équation du problème et le mode de calcul des contraintes .

Les mesures d'une expérimentation numérique de soixante-trois ( 63 ) cas sont analysées afin d'étudier l'influence du surbaissment et de l'épaisseur sur le comportement général de ce type de voile .

Les principaux résultats sont résumés sous forme de tableaux et de courbes et accompagnés de commentaires .

**Chapitre 4 :** C'est la conclusion de ce mémoire ; elle comporte les enseignements essentiels de ce travail ainsi que des propositions pouvant servir à la poursuite de cette étude .

# Chapitre 1: Introduction

## 1.1 Historique

Depuis toujours le défi " grandes portées - petites épaisseurs " a retenu l'attention des constructeurs et les a amenés au cours du temps à concevoir un nouveau type de structures : les structures autoportantes .

Avant de définir ce qu'est une structure autoportante il faut d'abord rappeler les structures antérieures . Le moyen le plus ancien , pour couvrir une aire donnée , consiste à utiliser une couverture qui repose sur des poutres . Dans ce cas il y a deux types d'éléments bien distincts : les éléments couvrants ( couverture ) et les éléments portants ( poutres ) .

Si maintenant nous réalisons la fusion de ces deux types d'éléments , nous obtenons alors les structures autoportantes .

L'apparition du béton armé a engendré un développement et une amélioration remarquables de ces structures et a fait des voiles minces en béton armé un groupe très important des structures autoportantes [3] .

Pour illustrer l'importance de cette évolution nous pouvons citer à titre de comparaison la coupole de la basilique Saint-Pierre à Rome , construite aux environs de l'an 1450 , et la coupole d'un atelier à Iéna construite vers 1925 [1] , [2] . Les deux coupoles présentent un diamètre de 40 m environ ; la première coupole , réalisée en pierres , a une épaisseur moyenne de 300 cm alors que la deuxième , réalisée en béton armé, n'a que 6 cm d'épaisseur .

## 1.2 Définitions

Avant de parler du type particulier de voile qui nous intéresse, il est peut être nécessaire de rappeler les définitions exactes des voiles minces [3], [4].

On appelle "voile mince" toute structure spatiale dont l'épaisseur est faible par rapport aux deux autres dimensions et dans laquelle les contraintes agissant parallèlement à la surface moyenne sont prépondérantes.

Si on retient comme critère de classification la nature des efforts agissant sur les sections du voile, alors on peut distinguer deux types de voiles : les **membranes** (ou voiles minces sans flexion) et les **coques** (ou voiles minces fléchis).

Les **membranes** se caractérisent par le fait que les contraintes agissant sur une section quelconque normale à la surface moyenne sont constantes sur toute la hauteur (épaisseur) du voile.

Les **coques** par contre se caractérisent par le fait que les contraintes agissant sur une section quelconque normale à la surface moyenne varient sur la hauteur du voile d'où l'apparition de moments de flexion et de torsion.

Les coques sont elles mêmes divisées en : coques très minces, coques minces et coques épaisses mais cette classification est faite sur la base des hypothèses de calcul des voiles ; hypothèses que nous allons passer en revue.

### 1.3 Hypothèses de calcul

Dans les hypothèses de calcul il y a lieu de distinguer les hypothèses propres aux voiles et les hypothèses classiques de base valables pour tous les types de structures .

Pour les hypothèses classiques , il est notamment supposé que le matériau est : continu , homogène , isotrope et élastique [1] , [3] ...

Les hypothèses propres aux voiles sont aussi appelées hypothèses de LOWE . Elles sont équivalentes aux hypothèses de NAVIER-BERNOULLI pour les poutres et aux hypothèses de KIRCHHOFF relatives aux plaques [1] , [2] , [3] ...

Ces hypothèses sont :

1) Les contraintes normales agissant sur des surfaces parallèles à la surface moyenne sont négligeables et peuvent être considérées comme nulles ; donc :  $S_z = 0$  ( z axe porté par la normale ) .

Ceci n'est en fait qu'une extension aux voiles minces de ce qui est admis pour les poutres et les plaques . En effet , pour une poutre d'axe longitudinal x on suppose  $S_y = S_z = 0$  et pour les plaques on admet que  $S_z = 0$  .

Il faut souligner qu'en théorie de l'élasticité on montre que ces contraintes sont effectivement très faibles .

( S pour Sigma )

2)

a) Les points qui , avant déformation , se trouvaient sur une normale à la surface moyenne demeureront sur une droite normale à la surface moyenne déformée .

b) La longueur de la normale ne changera pas , c.-à-d. que la déformation linéaire suivant la normale est nulle ( $E_z = 0$ ) .

L'hypothèse (2a) est équivalente à l'hypothèse de BERNOULLI relative à la conservation des sections planes dans le cas des barres droites . Elle exprime dans le cas des voiles la conservation rectiligne des normales . De plus , la conservation des angles droits signifie que les contraintes tangentielles agissant sur les surfaces parallèles à la surface moyenne sont nulles :

$$T_{zx} = T_{zy} = 0$$

donc aussi :

$$G_{zx} = G_{zy} = 0 .$$

( T pour Tau , G pour Gamma et E pour Epsilon )

3) Les déformations sont supposées négligeables comparativement à l'épaisseur du voile .

En guise de commentaire à cette hypothèse disons simplement qu'elle conduit aux théories du premier ordre .

Lorsque les trois hypothèses sont faites , on parle de théorie des " voiles minces " , tandis que l'on parle de " voiles très minces " ( coques très minces ) lorsque la troisième hypothèse n'est plus admise . Dans ce dernier cas les déplacements peuvent devenir importants et le recours aux théories du second ordre devient nécessaire . La troisième hypothèse n'est en fait valable que si nous en arrivons aux " voiles épais " ( coques épaisses ) qui sont plutôt à considérer comme des solides à trois dimensions . Néanmoins , cette hypothèse est couramment admise pour les voiles minces en raison des simplifications de calcul qu'elle apporte .

Soulignons pour terminer que les hypothèses (1) et (2) conduisent à un " état plan mixte " de déformations et de contraintes qui ne satisfait plus totalement au principe de dualité des contraintes tangentielles .

En effet , on a :

$$T_{zx} = T_{zy} = 0$$

alors que :

$$T_{xz} , T_{yz} \neq 0$$

et seule l'égalité :

$$T_{xy} = T_{yx}$$

subsiste .

Néanmoins , compte tenu de la faiblesse des épaisseurs des voiles , ces approximations sont parfaitement justifiées .

## 1.4 Position du problème

Les voiles minces en béton armé sont généralement conçus pour supporter des charges réparties telles que le poids propre, la neige et le vent.

Parmi les voiles les plus utilisés, le Paraboloïde Hyperbolique (\*) occupe une place privilégiée grâce notamment à la facilité de sa mise en œuvre et à sa grande raideur. En outre, son calcul par la "théorie de la membrane" ne présente aucune difficulté [1], [2], [3] et [4].

Dans les points où on est sûr que l'état de contrainte membranaire ne peut pas exister et où des contraintes de flexion non négligeables apparaissent, au voisinage du contour principalement, on utilise des expressions approximatives voire même intuitives.

Partant de la théorie des membranes, quelques chercheurs se sont intéressés aux PH et ont proposé des formules pour le calcul des contraintes membranaires pour des configurations géométriques et des chargements spéciaux. Citons à titre d'exemple les travaux du trio NGO, RAMIREZ et SCORMELIS [5] et [6].

Cependant, l'expérimentation de ce type de structures a été presque totalement ignorée.

(\*) On utilise l'abréviation PH pour désigner "paraboloïde hyperbolique"

En 1974, un modèle réduit en micro-béton armé, dont la projection sur le plan horizontal constituait un carré de  $210 \times 210 \text{ cm}^2$ , a été testé sous des charges concentrées au Service de Génie Civil de l'Université Libre de Bruxelles [7], [8] et [9].

Lors de la simulation d'une charge répartie, il a été observé que le PH avait un comportement flexionnel en contradiction avec ce que suppose la théorie des membranes. Cependant, la défektivité des appuis de ce modèle [7] et l'importance du résultat exigeaient la réalisation et l'expérimentation d'autres modèles.

De plus, les problèmes qui sont apparus n'ont pas permis de faire une comparaison correcte entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques [30]. Dès lors, il a été décidé de mener d'autres expériences et les essais que nous avons effectués pour cette thèse rentrent dans ce cadre.

Un autre modèle réduit, dont la projection sur le plan horizontal représentait un carré de  $100 \times 100 \text{ cm}^2$  et qui avait ses bords encastres dans des poutres très massives, a été testé au Département de Génie Civil de l'Institut Indien de Technologie de Madras et mit également en évidence les contraintes de flexion [10].

Nos expériences ont été réalisées dans le laboratoire du Service de Génie Civil de l'Université Libre de Bruxelles où j'ai travaillé de Septembre 80 à Décembre 82 sous la direction du Professeur P. HALLEUX, Directeur du dit service. Notre passage dans cette Université rentrait dans le cadre d'une Post-Graduation que nous n'avons pu mener à terme en raison de problèmes d'ordre personnel. Notre premier travail a porté sur un modèle réduit de PH de  $2 \times 2 \text{ m}^2$  et de 30 cm de surbaissement (Modèle M30 § 2.1) que nous avons réalisé (avec la collaboration du personnel du laboratoire) et testé. Les détails et les résultats exhaustifs de cette étude expérimentale ont été consignés dans quatre rapports que nous avons rédigés [33]. Notre seconde étude expérimentale a porté sur un autre modèle réduit de PH qui présentait un surbaissement de 45 cm (cf § 2.1) et dont l'analyse des résultats a fait l'objet d'un T.F.E. que nous avons encodé [31].

## 1.5 Objectifs et limitations de la recherche

Les buts qu'on s'est assignés sont les suivants :

- Vérifier quel est le comportement réel du PH sous une charge répartie .  
Est-il membranaire comme le suppose la théorie de la membrane ou au contraire flexionnel comme le laissait entrevoir les essais réalisés ?

- Etudier le comportement du voile ( PH ) sous l'action des charges concentrées . On peut facilement imaginer qu'au voisinage d'une charge localisée des flexions importantes apparaîtront ; quelle est l'étendue de ces flexions ? quel régime de sollicitation retrouverons-nous au delà de cette zone ?

Ensuite , à partir des observations retirées des essais expérimentaux on se propose de mettre au point un modèle mathématique afin de pouvoir :

- Etudier l'influence de certains paramètres tels que l'épaisseur , le surbaissement et la rigidité des poutres de rives sur le comportement général du voile .

Dans cette étude on s'est limité à un type d'appui déterminé : l'encastrement élastique , qui correspond au système d'appuis des modèles expérimentés . De plus, dans l'écriture des équations nous avons utilisé pour l'énergie potentielle les expressions des coques surbaissées . Cette limitation se justifie par le fait que des expressions plus générales entraîneront de grandes complications dans les calculs pour une précision pas tellement évidente .

L'étude est limitée au domaine élastique , mais des observations qualitatives sont faites au delà de ce domaine ( mécanisme de fissuration , ruine , ... ) .

## 1.6 Intérêt du PH à rives rectilignes

Le PH à rives rectilignes est une surface de translation pouvant être engendrée par le mouvement d'une droite s'appuyant sur deux lignes droites inclinées et parallèles à un plan fixe .

Il découle de cette définition une conséquence très importante . En effet , ceci signifie tout simplement que le **coffrage** de cette surface peut être réalisé au moyen de voliges rectilignes , d'où une réduction considérable du coût de réalisation .

En outre , le PH est une surface à double courbure . En chaque point de la surface les centres de courbure principaux se situent de part et d'autre du plan tangent ; d'où aussi son appellation de surface à courbure Gaussienne négative ( c'est-à-dire dont le produit des courbures principales est négatif ) . Cette double courbure dote le PH d'une autre qualité : une **grande rigidité** qui provient du fait que c'est une surface non développable .

### 1.7 Géométrie du PH à rives rectilignes

Soient  $i, j, k, l$  les sommets d'un PH rectangulaire et  $xyz$  un trièdre trirectangle dont l'origine coïncide avec le sommet  $i$  du PH .

La forme générale de l'équation de la surface s'écrit :

$$z(x,y) = A + B.x + C.y + D.x.y$$

Dans le cas considéré on a :

$$A = 0$$

$$B = (z_k - z_i) / l_x = z_k / l_x$$

$$C = (z_j - z_i) / l_y = z_j / l_y$$

$$D = (z_l - z_j - z_k + z_i) / l_x \cdot l_y = (z_l - z_j - z_k) / l_x \cdot l_y$$

Dans notre étude , les PH considérés ont leurs sommets opposés au même niveau et les projections horizontales des génératrices sont égales et de longueur  $2l$  ;  $l_x = l_y = 2l$  .

L'équation du PH devient :

$$z(x,y) = - H.x/2l - H.y/2l + H.x.y/2l^2 \quad \dots \dots (1.1)$$

où  $H$  , qui est appelé " surbaissement " , représente la dénivellation entre les sommets hauts et bas du PH .

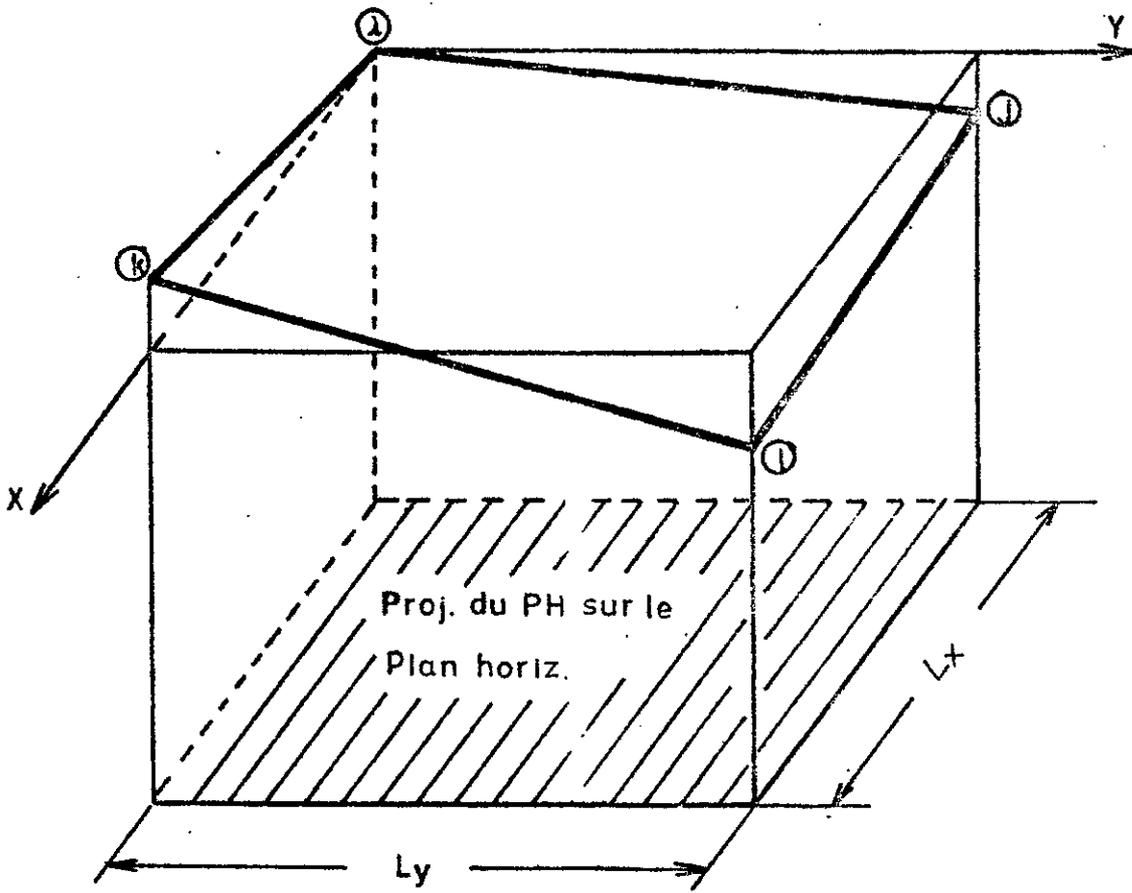
Notations de MONGE :

$$p = \partial z / \partial x \qquad q = \partial z / \partial y \qquad \dots \dots \dots (1.2a)$$

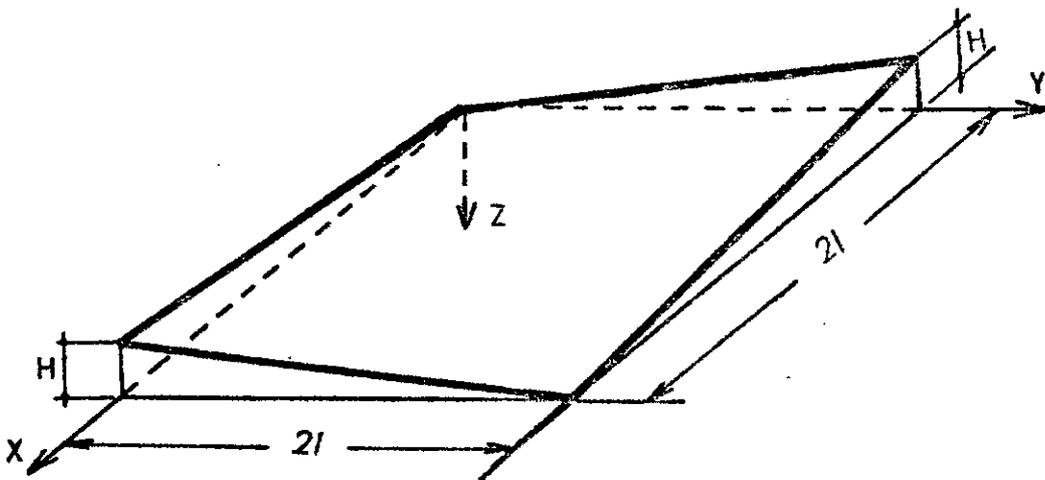
$$r = \partial^2 z / \partial x^2 \qquad t = \partial^2 z / \partial y^2 \qquad s = \partial^2 z / \partial x \partial y \dots \dots (1.2b)$$

La grandeur  $s$  est aussi appelée " **gauchissement de la surface** " .

Deux génératrices quelconques  $G_x$  et  $G_y$  déterminées par les intersections avec le PH de deux plans parallèles aux plans  $xz$  et  $yz$  font entre elles un angle  $\alpha$  . Cet angle est différent de  $\pi/2$  sauf lorsque les deux génératrices coïncident avec les deux médianes . L'annexe A explique une méthode de détermination de cet angle .



a-



b-

Fig. 1

## 1.8 Etude bibliographique

Ce paragraphe vient compléter ce qui a été précédemment dit sur cette question et notamment dans le paragraphe 1.4 .

S'il est vrai que la littérature consacrée aux Voiles Minces en général est étoffée , il n'en demeure pas moins que les études consacrées au Paraboloïde Hyperbolique sont très limitées . Ainsi , sur la masse de documents consultés , dont une partie est reprise dans les références citées , et provenant de revues , bulletins et autres journaux spécialisés tels que : Journal of the American Concrete Institute , Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Proceedings of the American Society of Civil Engineers , etc ... très peu de cette masse concerne le PH . Ce manque d'intérêt peut s'expliquer par la facilité supposée du calcul de ce type de voile par la théorie de la membrane .

D'ailleurs , les études concernant les PH ( [5] , [6] , ... ) étaient généralement consacrées à une généralisation de cette méthode aux cas des PH ayant des contours particuliers ou encore à des structures composées de plusieurs PH .

Plus rares encore sont les expériences menées sur des modèles de PH ; et là nous croyons que nos essais étoffent sensiblement ce qui existait déjà ( [8] , [10] , ... ) .

Enfin , il convient de souligner que le cas des charges concentrées n'a été abordé que très rarement .

En ce qui concerne les ouvrages traitant la question , de manière général ils exposent les équations d'équilibre des coques et des membranes et le PH est traité dans cette dernière catégorie . L'ouvrage le plus complet sur la question est assurément celui de Messieurs Beles et Soare [1] , auteurs roumains dont le livre constitue une sorte de bilan de ce qui avait été écrit sur le calcul des Paraboloïdes .

Nous pouvons également citer les ouvrages de Messieurs Pfluger [2], Paduart [3] et Courbon [4] ainsi que deux livres russes l'un de Messieurs Kourdunov et Lokschina [15] et l'autre de Monsieur Nozarov [16].

## **Chapitre 2 : Etude expérimentale**

Comme on l'a déjà souligné au début de ce texte , la partie expérimentale de ce travail est constituée par les tests effectués sur deux modèles réduits en micro-béton armé dont la différence essentielle réside au niveau du surbaissement . Le premier modèle , appelé **modèle M30** , a un surbaissement de 30 cm alors que le deuxième présente un surbaissement de 45 cm et sera désigné par **modèle M45** .

### **2.1 Description générale des modèles**

#### **2.1.1 Caractéristiques géométriques des modèles**

##### **Voile proprement dit .**

C'est un paraboloïde hyperbolique ( PH ) limité par quatre génératrices rectilignes et dont la projection sur un plan horizontal est un carré de  $200 \times 200 \text{ cm}^2$  . Les sommets diagonalement opposés sont situés à la même hauteur et la dénivellation entre la paire de sommets hauts et la paire de sommets bas , appelée surbaissement et représentée par H à la figure 2 , vaut 30 cm pour le premier modèle et 45 cm pour le deuxième modèle .

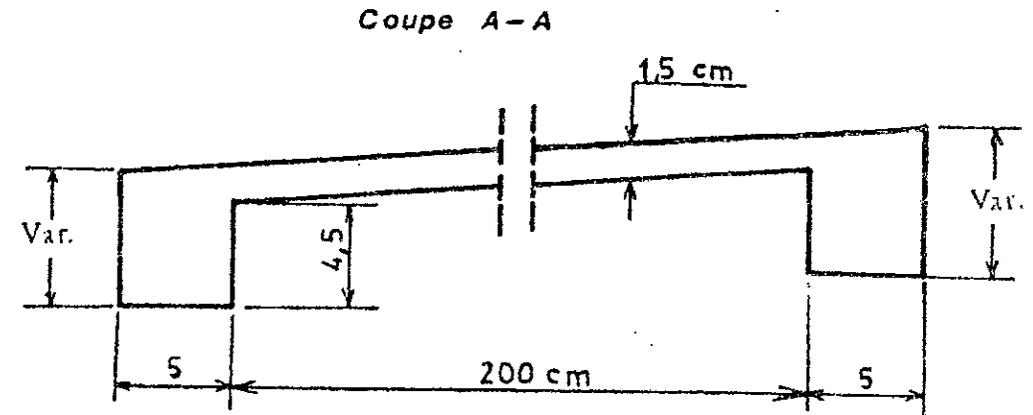
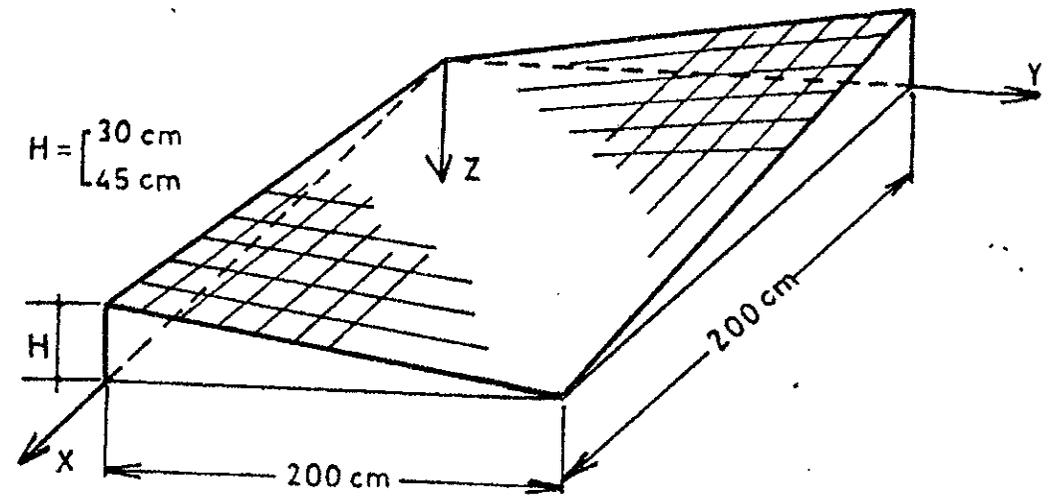
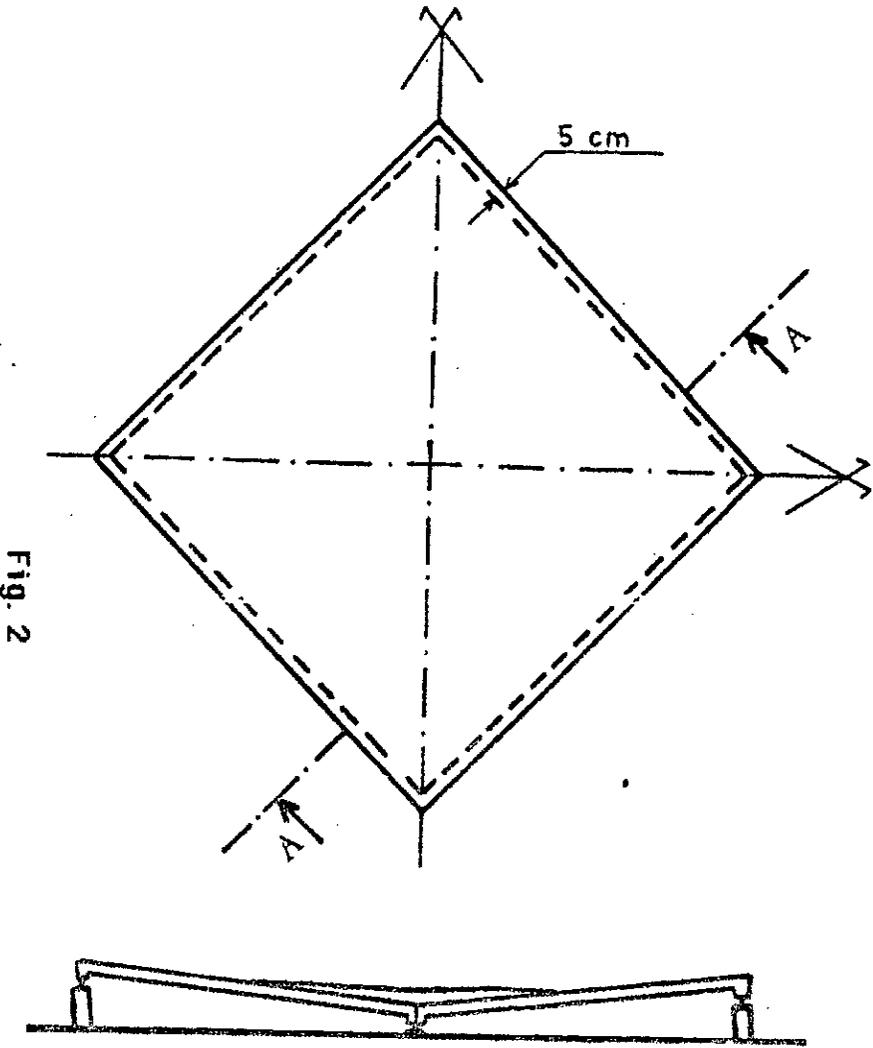
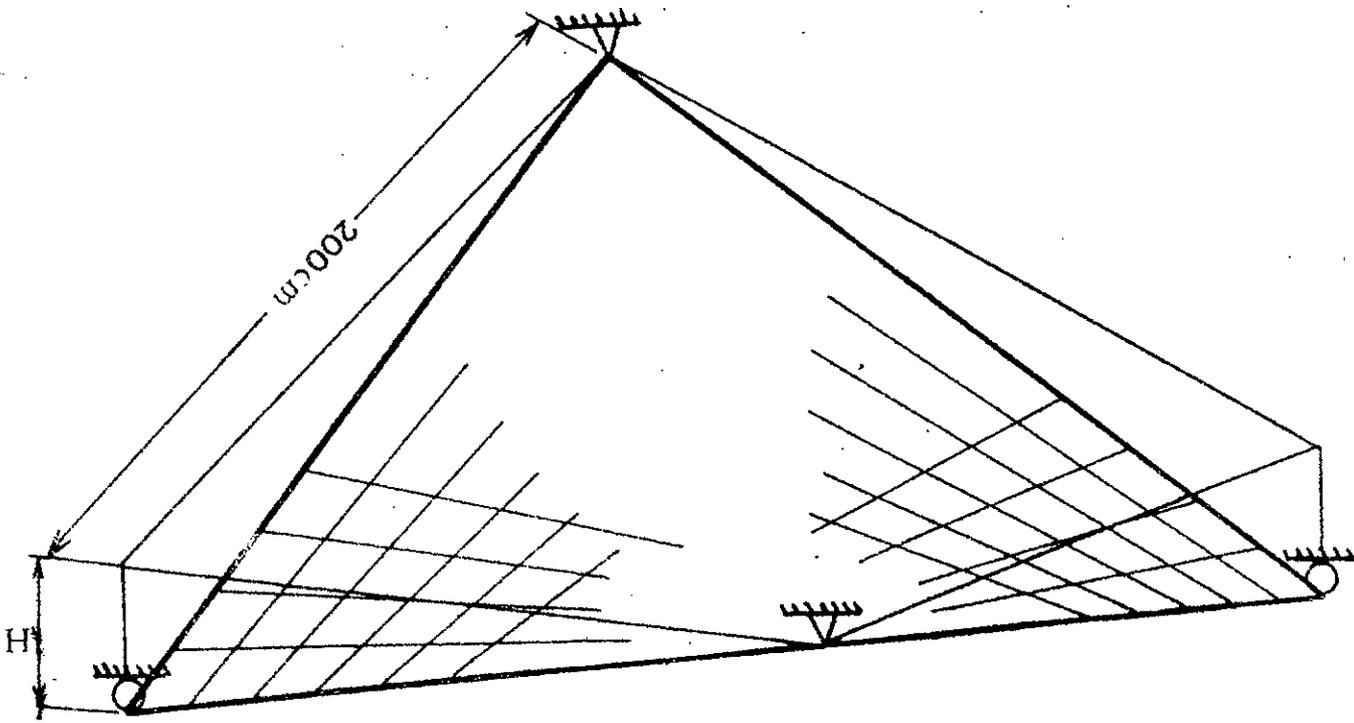
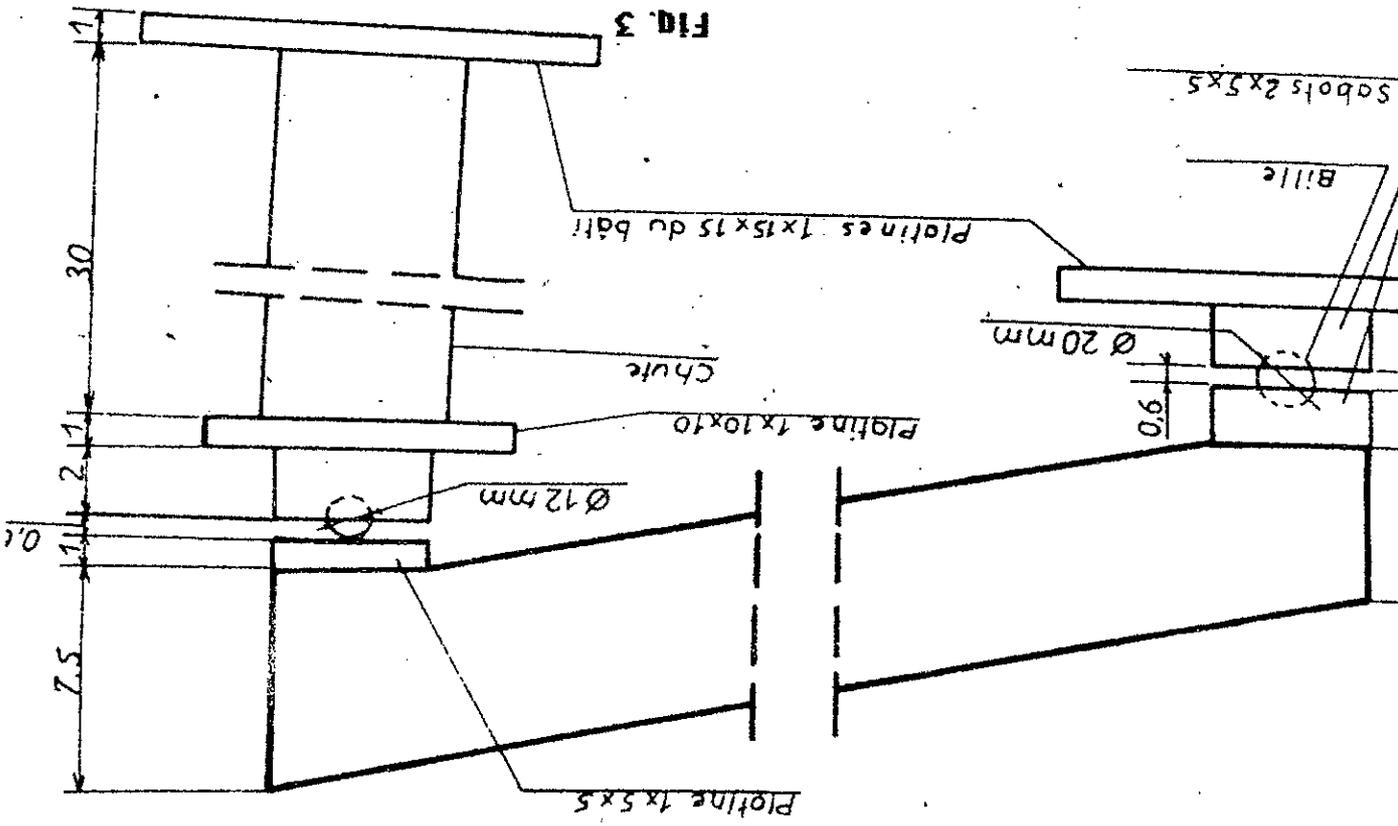


Fig. 2



b - Poutre et appuis



L'épaisseur est constante et vaut 1.5 cm pour les deux modèles quoique en pratique il est quasiment impossible d'obtenir une épaisseur constante et les mesures effectuées après destruction des modèles confirment cette remarque .

Nous donnons plus loin le relevé de ces mesures de l'épaisseur ( figure 36 ).

### Poutres de rive.

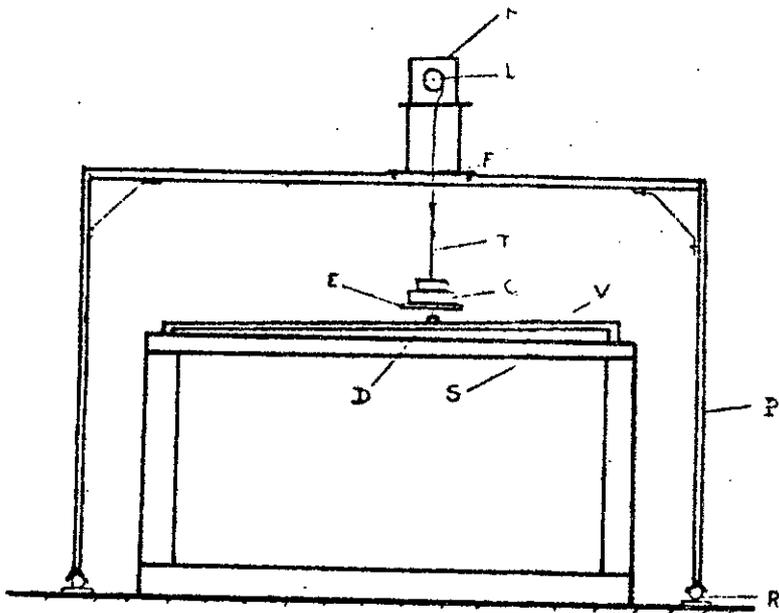
Les bords du voile sont **encastrés** dans des poutres armées dont les faces supérieures se trouvent dans le prolongement du voile proprement dit . La section courante d'une poutre de rive est donc variable comme on peut le voir à la figure 2 mais elle présente néanmoins deux dimensions constantes : la largeur ( 5 cm ) et la hauteur intérieure ( 4.5 cm ) . La dénomination " Var " signifie que la valeur de ce côté est variable suivant la section considérée .

### Appuis.

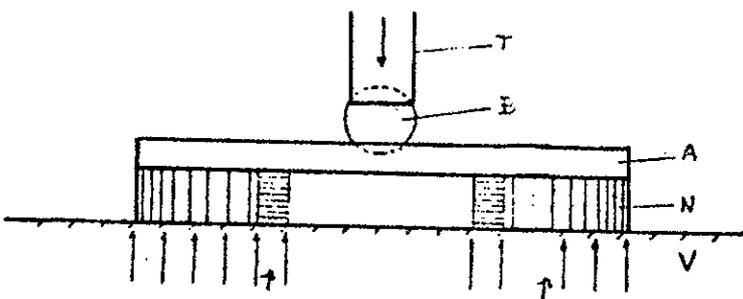
Les appuis du voile sont constitués par des **articulations sphériques** aux sommets bas et des **billes** aux sommets hauts . Il faut préciser qu'une des deux articulations du modèle M45 est constituée par une glissière ( photographie numéro 6 ) , désignée par G ( ou g ) sur les figures , qu'on peut bloquer ou libérer . Ici , nous ne parlerons que des essais avec la glissière bloquée afin d'avoir le surbaissement comme unique différence avec le modèle M30 sauf pour l'essai à la rupture qui a été réalisé avec la glissière libre .

L'expérience avec la glissière libre a fait l'objet d'une analyse détaillée [31] . La figure 3 représente le schéma de calcul et les détails des appuis .

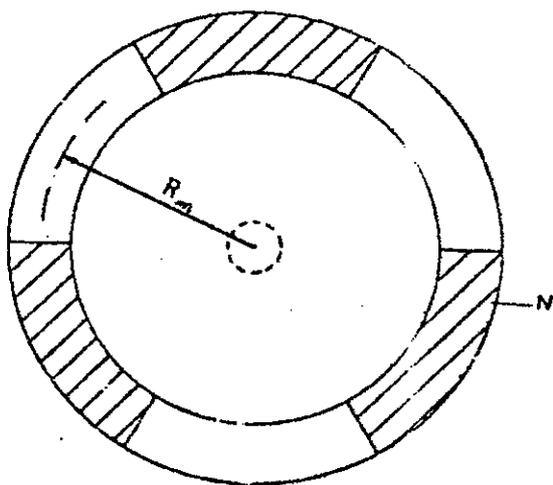
Il faut relever que , ainsi appuyé , le voile n'est pas librement dilatable et qu'il est par conséquent appuyé de manière hyperstatique .



DISPOSITIF DE CHARGEMENT DU MODELE



DETAIL DU TRIPODE D'APPLICATION DE LA CHARGE (Elevation)



VUE DU DESSOUS DU TRIPODE D

- A - platine
- B - bille
- D - tripode
- E - plateau
- F - câble
- L - poulie
- M - moteur
- N - néoprène
- P - portique
- Q - charge
- R - rail
- $R_m$  - rayon moyen (3,5 cm.)
- S - bâti métallique
- T - tube
- V - voile

Fig. 4

## 2.2 Support expérimental

### 2.2.1 Dispositif de chargement

Les charges sont appliquées par l'intermédiaire d'un tripode circulaire dont les pieds sont en néoprène et ont chacun une aire de  $3.5 \text{ cm}^2$  environ. Le tripode, qui est indépendant du reste du système de chargement, présente une cavité centrée sur sa face supérieure où vient se loger une bille assurant ainsi la verticalité de la sollicitation (figure 4).

Les poids qui servent à réaliser la charge désirée sont posés sur un plateau qu'un tube relie à un petit moteur par le biais d'un câble dont l'extrémité est fixée à une poulie solidaire du moteur.

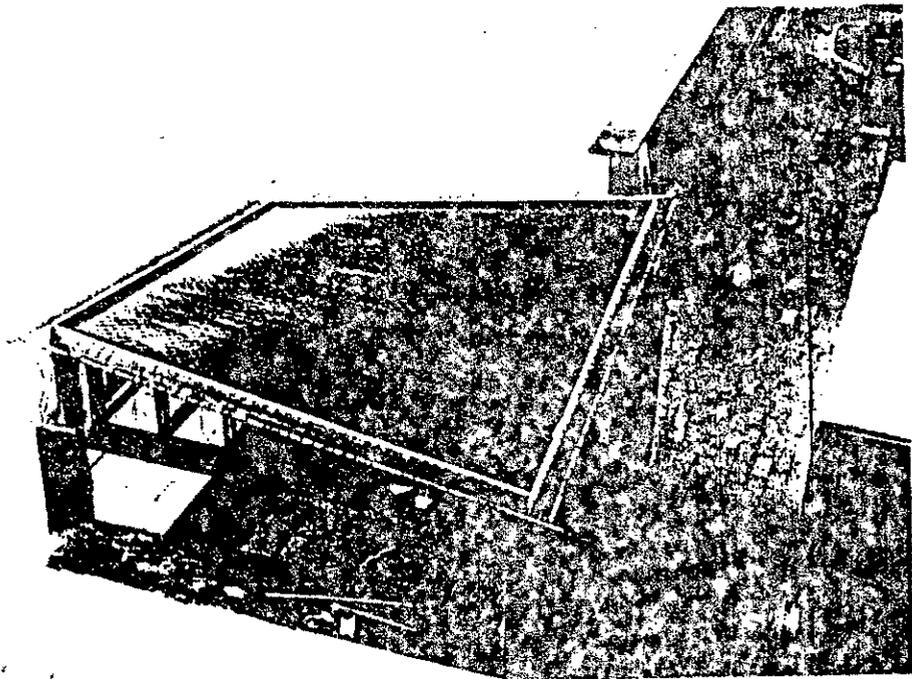
### 2.2.2 Appareils de mesure

Les déformations de la structure sont mesurées à l'aide de **jauges** électriques collées sur les deux faces (supérieure et inférieure); pour la pratique des jauges on pourra se référer aux références [17], [18] et [19].

Pour mesurer les déplacements verticaux (flèches) on a utilisé des **transducteurs** inductifs.

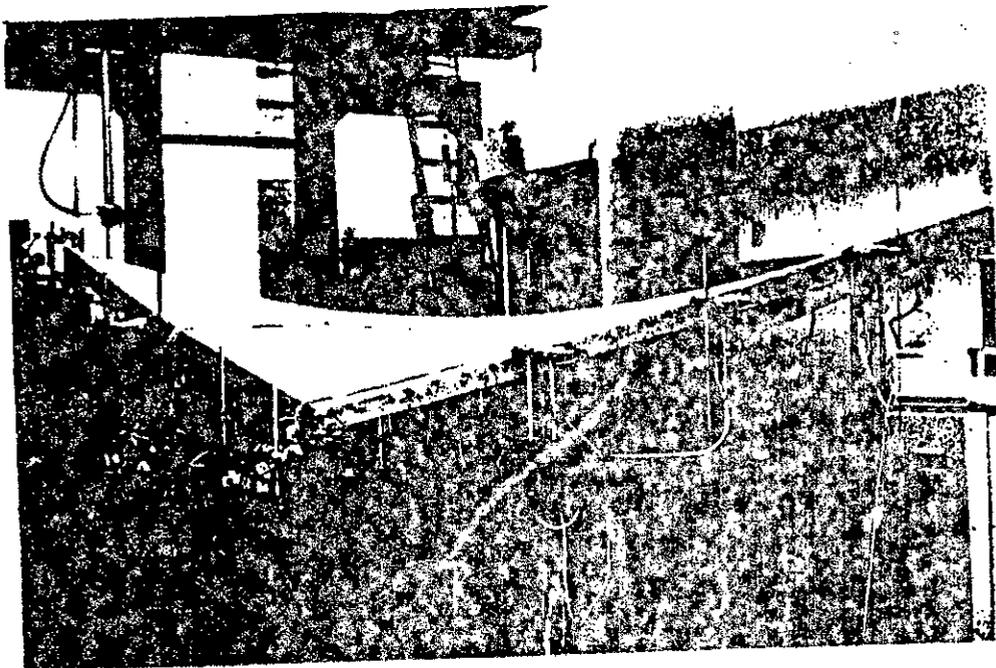
Tous les appareils de mesure sont reliés à une chaîne d'enregistrement automatique (Data Logger) elle-même reliée à une imprimante. La disposition des points de mesure est indiquée à la figure 5.

Notons aussi qu'une dizaine de transducteurs a été utilisée pour mesurer les déplacements horizontaux lors des essais effectués sur le modèle M45. La disposition de ces transducteurs sera précisée quand nous aborderons la question.

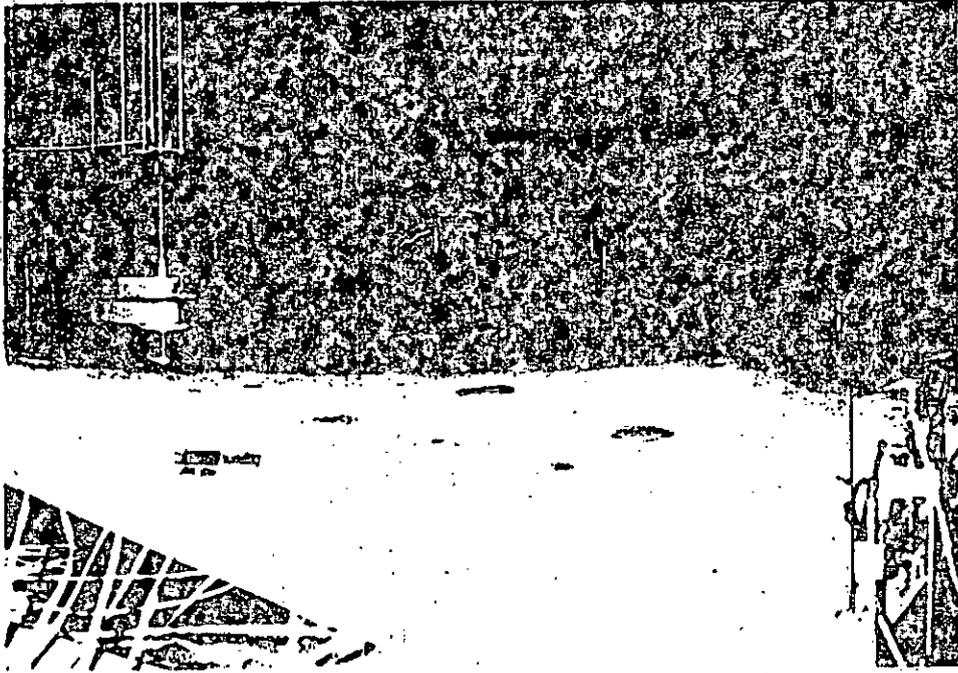


Cottage - terrassage. Vue générale. - M30

2

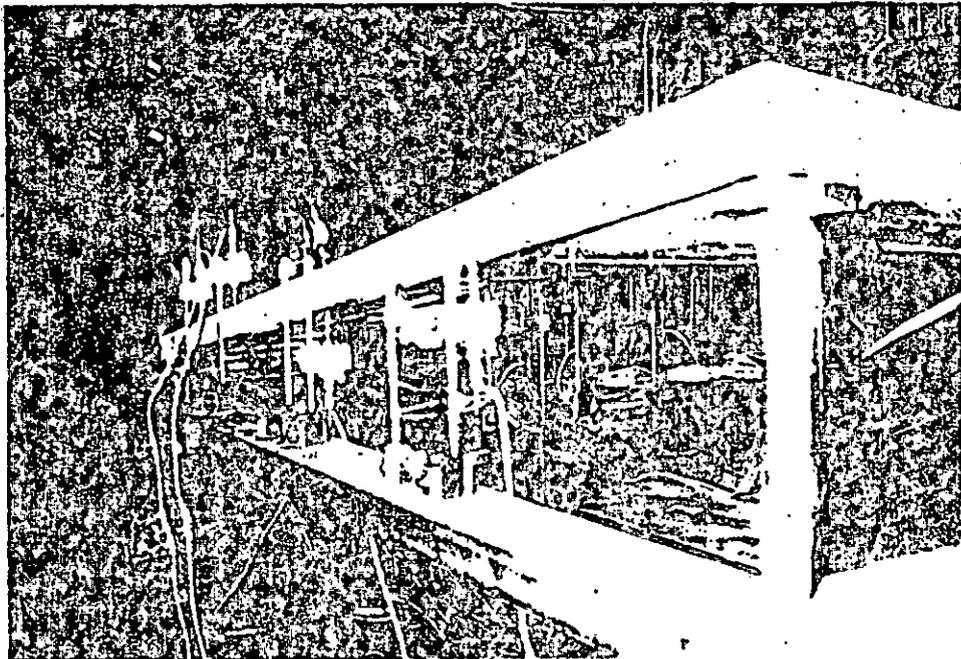


3



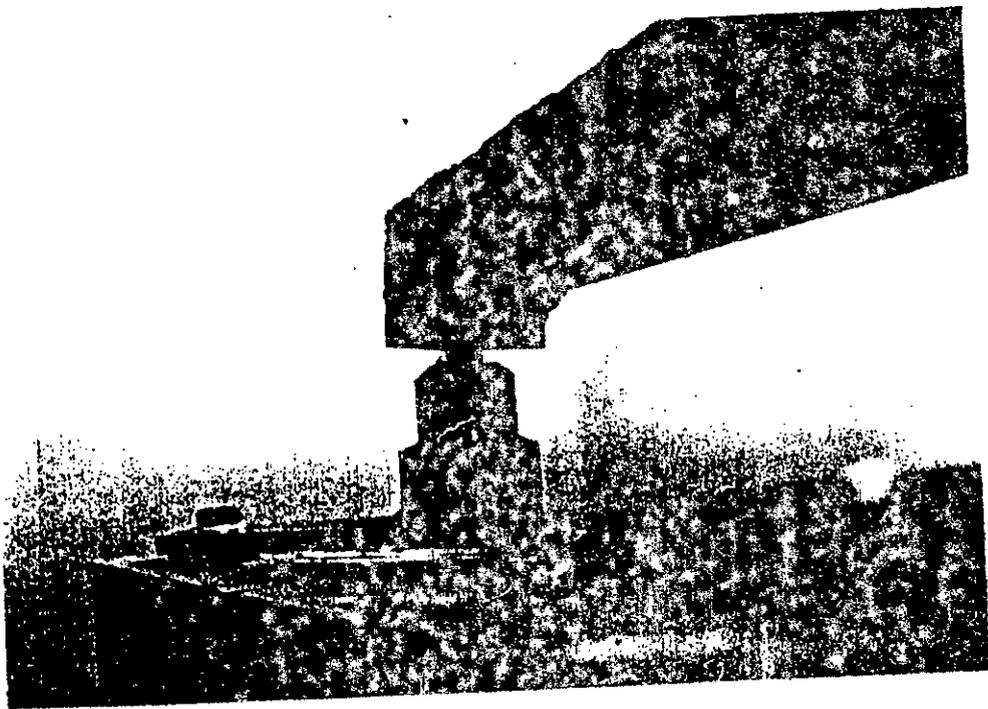
Face supérieure : appareils de mesures et dispositif de chargement.  
(M30)

4



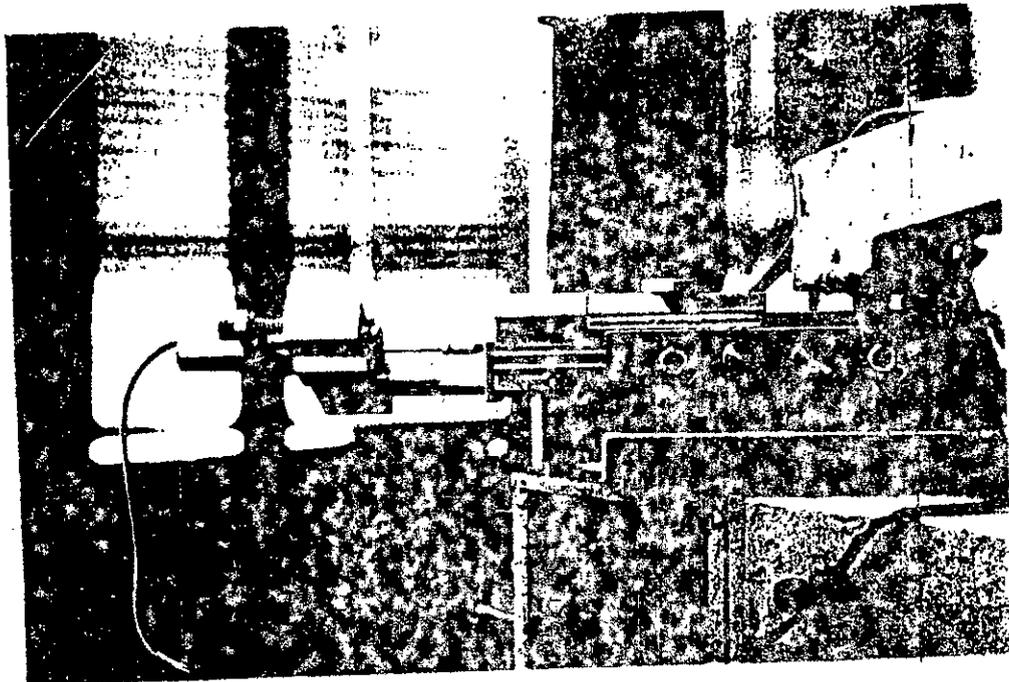
Face inférieure : appareils de mesures. - M30

5



Articulation - M45

6



Glissière - M45

### 2.1.2 Caractéristiques des matériaux utilisés

#### Le micro-béton.

La résistance à la compression du mortier utilisé est déterminée par des essais de rupture par écrasement sur des éprouvettes cubiques de 5 cm de côté. Les essais sont effectués à des âges différents.

Pour le modèle M30, les essais ont été menés à 14, 31 et 66 jours à raison de huit (8) cubes par campagne d'essais. Pour le modèle M45 les essais ont été réalisés à 14 jours (3 cubes), 30 jours (6 cubes) et 43 jours (9 cubes).

La dernière série des tests est toujours effectuée pendant les essais sur les modèles.

Pour la détermination du module d'élasticité et du coefficient de POISSON les essais de compression ont été effectués sur des prismes (5 par modèle) de  $5 \times 5 \times 38 \text{ cm}^3$  pour le premier modèle (micro-béton âgé de 70 jours) et de  $5 \times 5 \times 21 \text{ cm}^3$  pour le modèle M45 (micro-béton âgé de 44 jours).

Les valeurs obtenues sont :

<u>Caractéristique</u>	<u>Modèle M30</u>	<u>Modèle M45</u>
Module d'élasticité :	362000 kg/cm <sup>2</sup>	332000 kg/cm <sup>2</sup>
Coef. de Poisson :	0.153	0.146
Résist. à la compr. :	612 kg/cm <sup>2</sup>	582 kg/cm <sup>2</sup>

Les armatures.

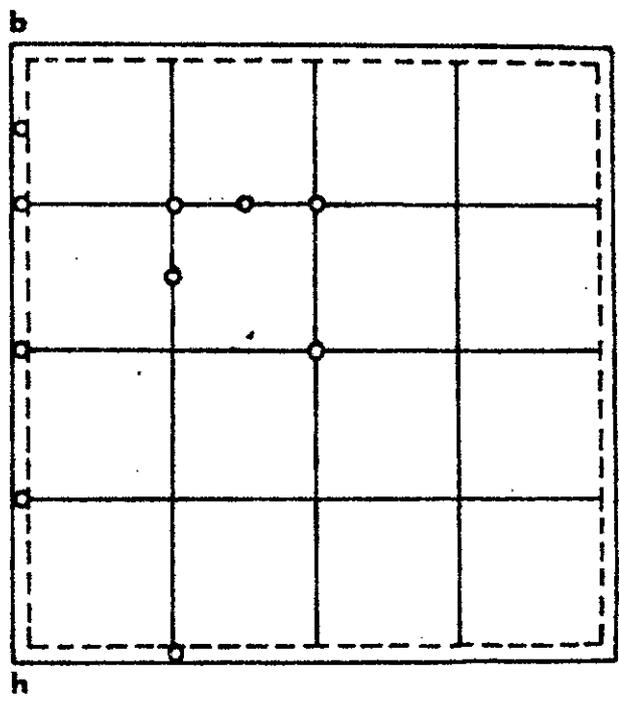
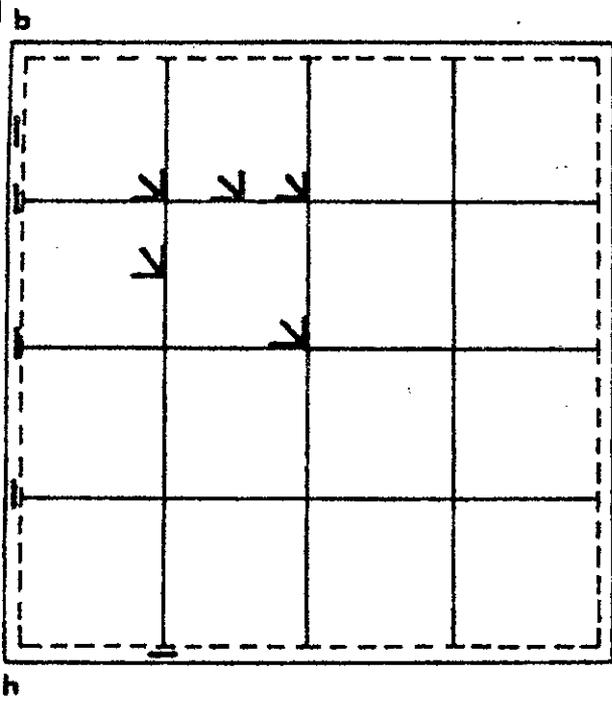
Le voile est armé par des fils de 2 mm de diamètre distants de 5 cm et placés suivant les diagonales de la surface (vôtes et chaînettes). Le treillis d'armature est situé approximativement dans le plan moyen du voile.

Les essais de traction effectués sur les fils ont donné une limite d'élasticité moyenne de  $1900 \text{ kg/cm}^2$  et une contrainte de rupture voisine de  $3400 \text{ kg/cm}^2$ .

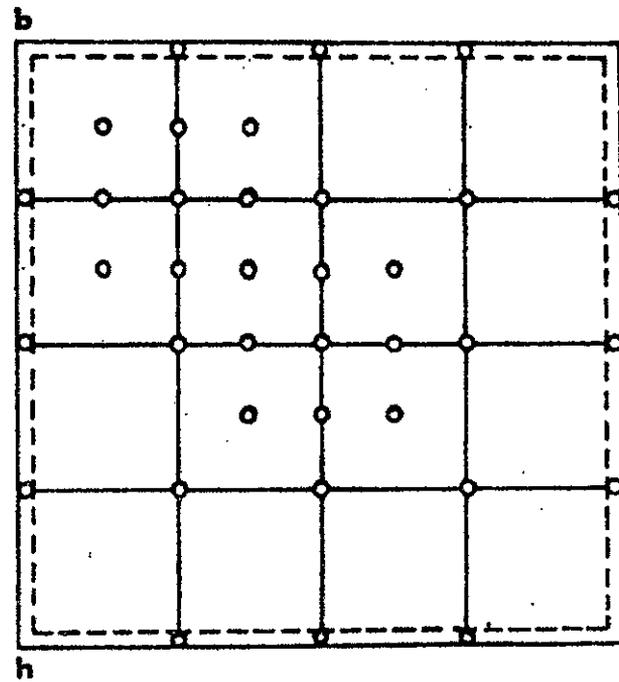
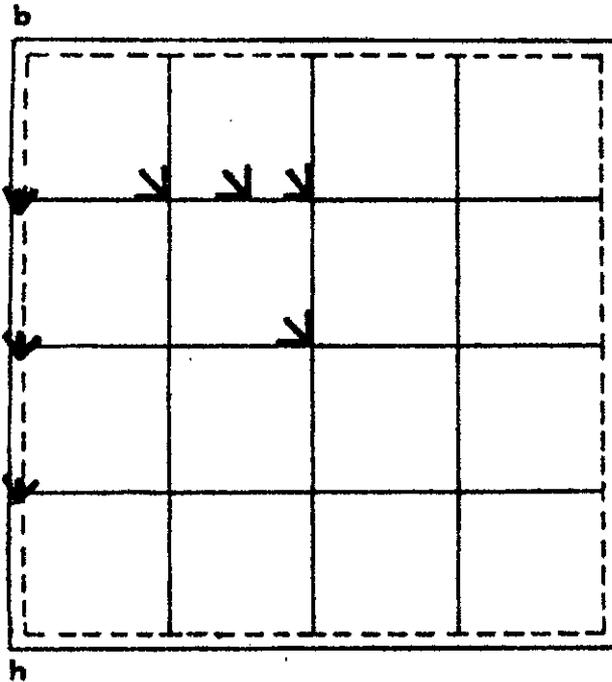
Les poutres de rive sont armées de quatre (4) barres (ronds lisses) de 6 mm de diamètre placées à 1 cm des bords.

Signalons enfin que le voile a été vérifié par la théorie de la membrane en considérant une charge répartie verticale constante de  $150 \text{ kg/m}^2$  par unité de surface projetée.

M30



M45



↙ Rosette à 45°

— Jauge simple

○ Transducteur

Fig. 5

### 2.2.3 Programme des essais

Avant d'effectuer les essais proprement dits, on a procédé à des essais préliminaires dans le but de choisir la charge concentrée maximale à appliquer. Ces tests ont montré que la structure présentait un comportement linéaire pour des forces concentrées allant jusqu'à 100 kg. Comme les déformations et les déplacements auxquels donnait lieu la charge de 100 kg étaient suffisamment grands pour être mesurés avec précision, on l'a adoptée comme valeur limite afin de ne pas détériorer le modèle.

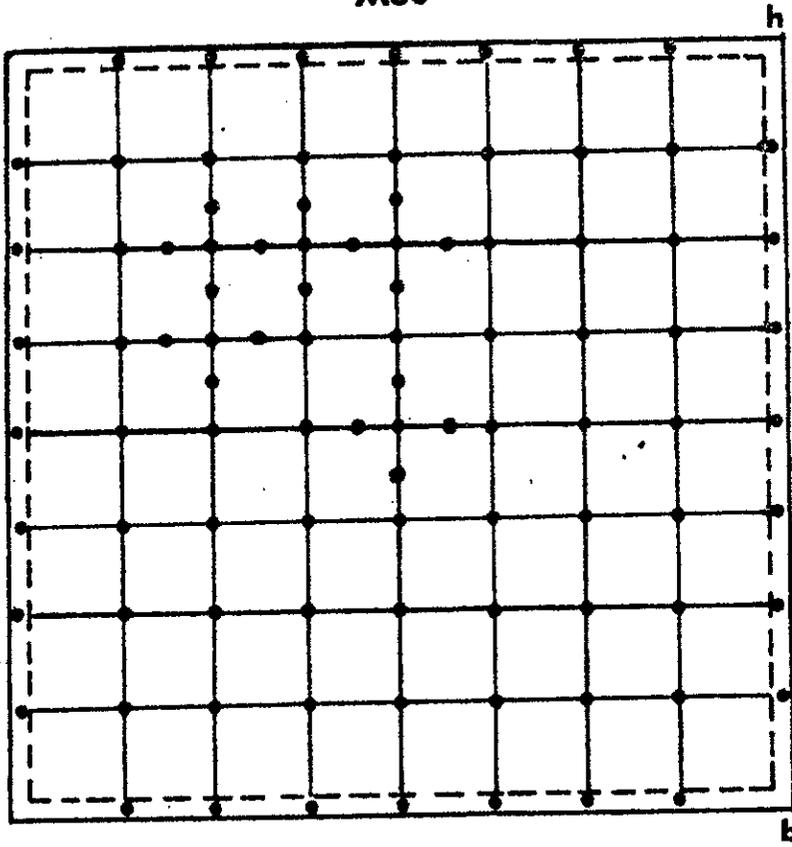
Les premiers chargements sont toujours appliqués au milieu du voile ensuite, après avoir sollicité le modèle en d'autres points, on charge de nouveau le voile en son milieu et on compare les résultats aux premières mesures afin de vérifier s'il y a eu détérioration ou non du modèle.

La figure 6 montre les différents points où la charge de 100 kg est appliquée successivement. Le modèle M30 a été sollicité en nonante quatre (94) points dont septante sept (77) sont des noeuds d'un maillage régulier ayant un pas de 25 cm en plan. Ce nombre important de points de chargement permettra de multiplier les informations sur les flèches du modèle par application du théorème de BETTI-MAXWELL.

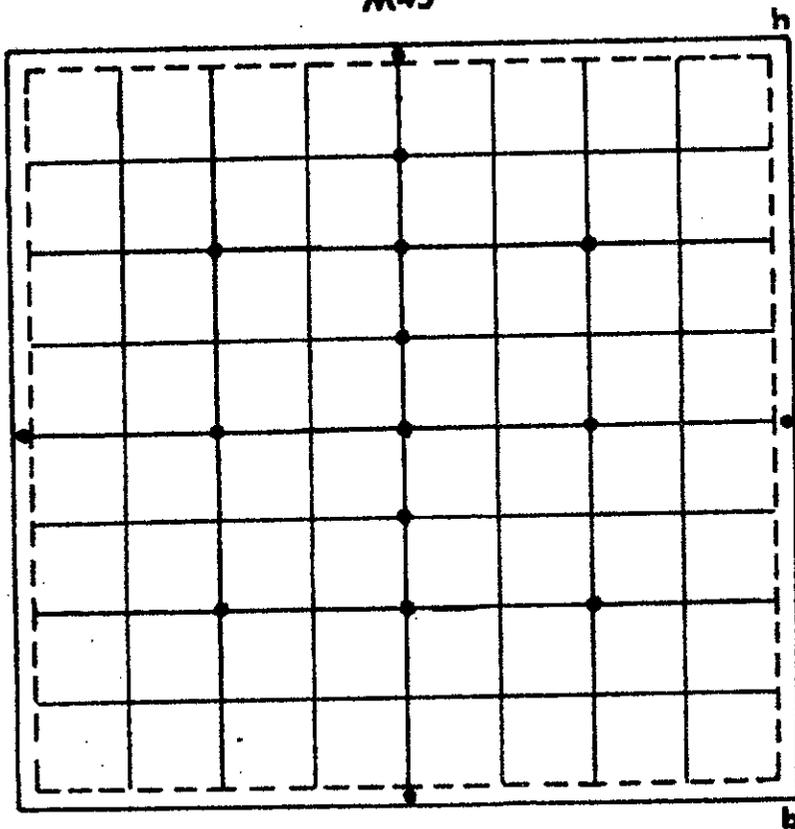
En ce qui concerne le modèle M45, le nombre de transducteurs utilisés (36) étant jugé suffisant, le nombre de points de chargement a été limité à dix-sept (17).

Pour ce qui est de l'ordre de chargement, on a commencé par solliciter le voile proprement dit en essayant d'avoir une symétrie dans le chargement.

M30



M45



● Point de chargement

Fig. 6

## 2.3 Comportement du voile sous une charge concentrée

### 2.3.1 Charge localisée au centre du voile

Le cas de la charge localisée au milieu du voile est particulièrement intéressant à cause de la symétrie totale qui le caractérise. Cette double symétrie, symétrie de la géométrie et de la sollicitation, doit permettre une vérification immédiate de la qualité du comportement de la structure et du bon fonctionnement des appareils utilisés. Dans la suite du texte, quand on parlera de charge concentrée sans autre précision, il s'agira toujours d'une charge de 100 kg.

#### 2.3.1.1 Etude des déplacements

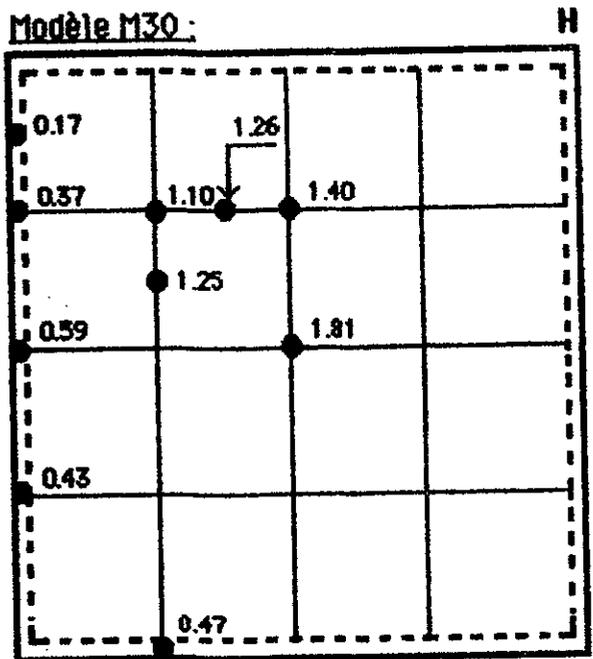
##### Déplacements verticaux.

A la figure 7 sont indiquées les flèches des deux modèles, relevées aux mêmes points de mesure.

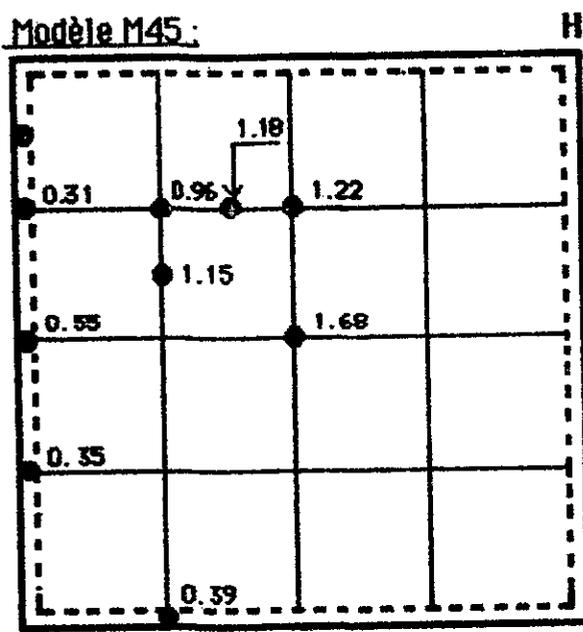
On peut constater que le fait de varier le surbaissement de 50 %, passage de  $H = 30$  cm à  $H = 45$  cm, entraîne une diminution des flèches mais dans une proportion beaucoup moindre. Avant d'aller plus loin dans la comparaison, notons que, pour que celle-ci soit parfaite, il faudrait que l'épaisseur soit réellement identique pour les deux modèles ce qui n'est pas tout à fait le cas en pratique (cf § 2.7.2.3 et § 2.7.3.2).

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

**- Déplacements verticaux en mm -**



H B



H B

Fig. 7

Sur les cinq points de mesure du voile proprement dit , on peut considérer que la plus faible réduction de flèche ( 7.2 % ) apparaît au milieu . Certes , au point v3 ( figure 8 ) on a calculé 6.4 % de réduction mais au point v5 qui lui est symétrique on trouve 8 % .

Les points v2 et v4 qui se trouvent sur des axes privilégiés ( médiane et diagonale ) présentent une réduction de flèche de l'ordre de 13 % .

Sur la poutre , la baisse minimale se manifeste à mi-portée et vaut 6.8 % ( figure 8 ) .

Enfin , la figure 9 montre la totalité des flèches mesurées du modèle M45 .

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**  
**- Réduction des flèches -**

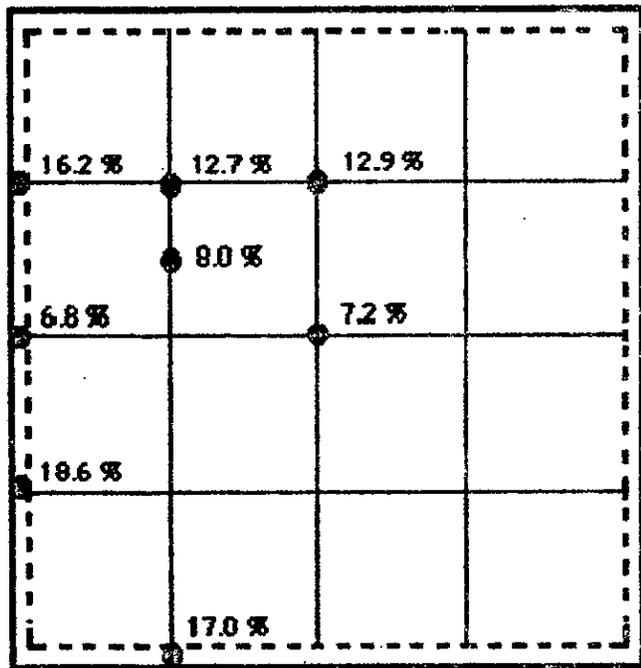
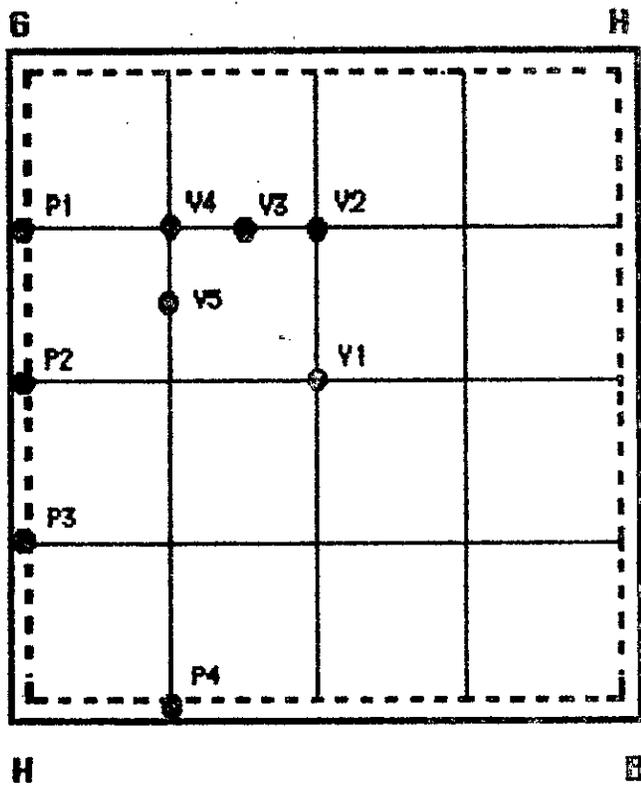


Fig. 8



### Déformabilité des poutres de rive .

A partir des figures 7 et 9 , on peut déduire que les poutres de rive sont loin de constituer un contour infiniment rigide pour le voile . Ainsi , la flèche au milieu d'une poutre est sensiblement égale au tiers de la flèche maximale mesurée au milieu du PH et ce pour les deux modèles .

### Déformée de la structure .

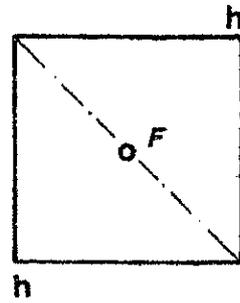
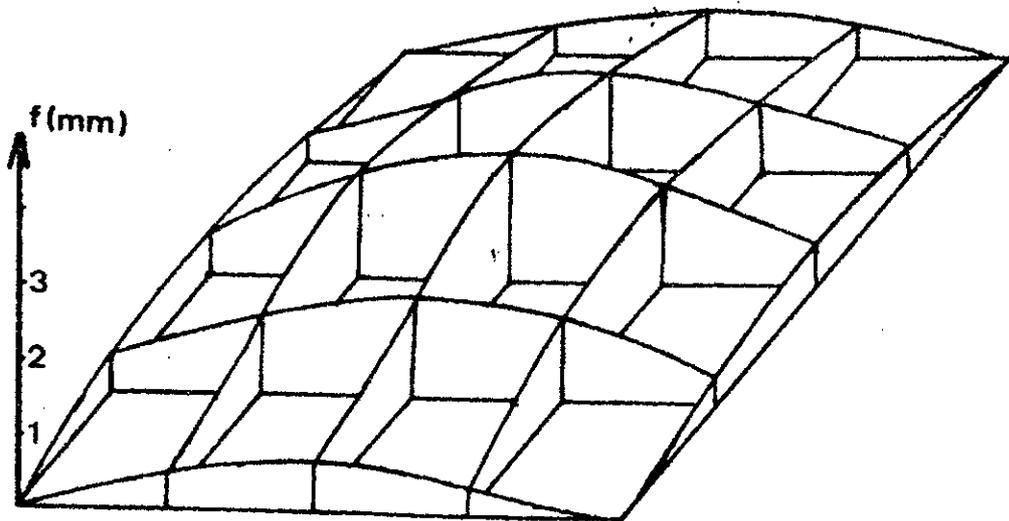
Pour tracer la déformée d'un modèle , nous disposons de mesures directes effectuées par les transducteurs inductifs et , lorsque le nombre de ces appareils est insuffisant comme dans le cas du modèle M30 , de mesures indirectes obtenues par application du théorème de BETTI-MAXWELL .

D'après ce théorème , le déplacement vertical du point  $i$  sous l'action d'une charge verticale appliquée en  $j$  est égal au déplacement vertical du point  $j$  lorsque la même charge est appliquée en  $i$  .

En vertu de ce théorème , la déformée de la structure sous l'effet d'une charge appliquée en un point  $k$  représente également la surface d'influence de la flèche de ce point (  $k$  ) pour la même charge mobile sur la structure .

En observant les déformées des deux modèles ( figure 10 ) , on peut constater que les propriétés de symétrie sont assez bien conservées et plus particulièrement sur le modèle M30 .

Modèle M30



Modèle M45

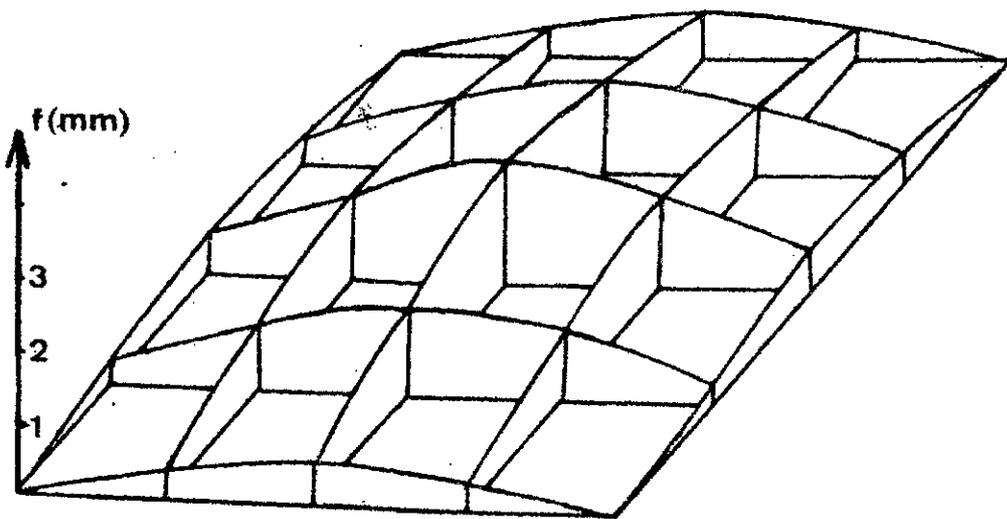


Fig. 10

Déplacements horizontaux.

Lors des essais sur le modèle M45, les déplacements horizontaux de certains points ( 11 ) de la structure ont été mesurés ( figure 11 ).

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**  
**- déplacements horizontaux en mm -**  
**( Modèle M45 )**

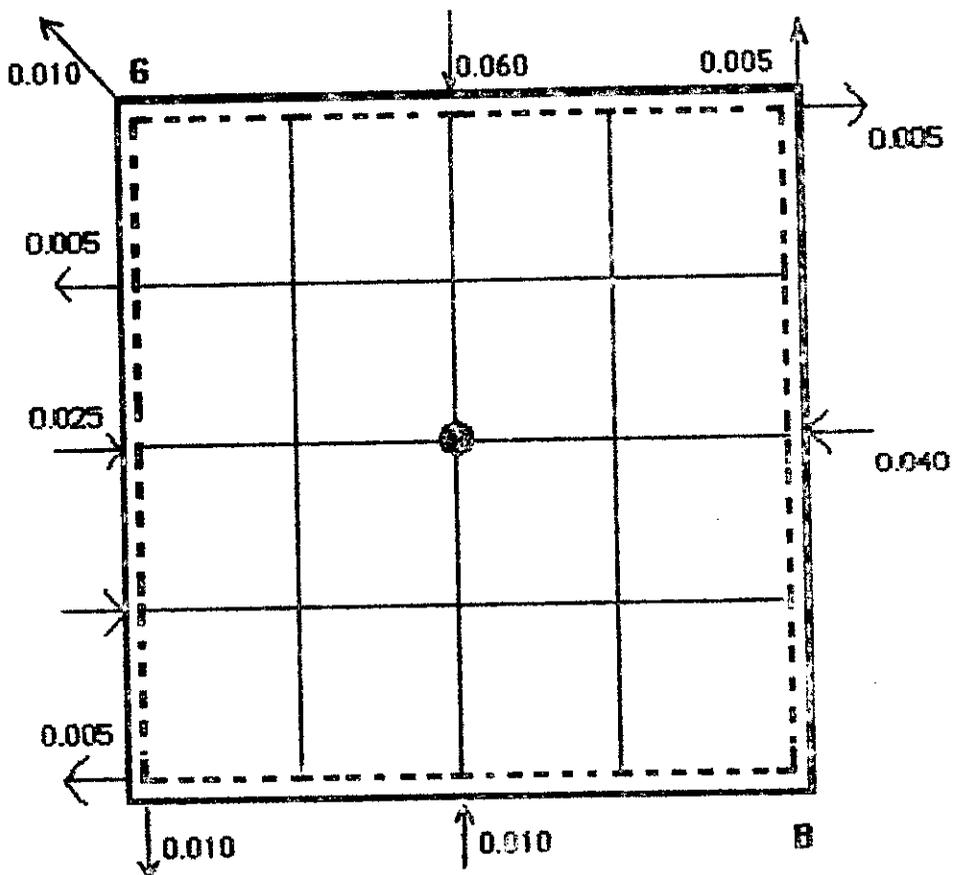


Fig. 11

Les flèches indiquent la direction et le sens des déplacements mesurés.

Ces déplacements sont très faibles, parfois plus petits que l'ordre de précision des appareils et nous les donnons à titre indicatif seulement.

## 2.3.1.2 Etude des contraintes

A partir des déformations mesurées à l'aide des jauges on peut , par application des relations d'élasticité ( domaine élastique linéaire ) , déterminer l'état de contraintes au point de la surface où les mesures sont effectuées . Nous allons d'abord rappeler les relations qui permettent de définir l'état de déformations , puis l'état de contraintes à partir des mesures de déformation [11] , [12] .

Procédure de dépouillement .

Une jauge orientée suivant la direction " t " faisant un angle "  $\alpha$  " ( alpha ) avec la direction principale " 1 " indique une déformation qui vaut :

$$E_{\alpha} = ( E_1 + E_2 ) / 2 + \text{COS}(2\alpha) \times ( E_1 - E_2 ) / 2 \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

où "  $E_1$  " et "  $E_2$  " ( E pour epsilon ) sont les déformations principales .

La relation (2.1) peut également s'écrire sous la forme :

$$E_{\alpha} = D + R \times \text{COS}(2\alpha) \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

avec :

$$D = ( E_1 + E_2 ) / 2 \quad \text{et} \quad R = ( E_1 - E_2 ) / 2 \quad \dots \dots \dots (2.3)$$

D et R étant les caractéristiques du cercle de MOHR des déformations .

A partir des relations (2.3) on peut tirer :

$$E_1 = D + R \quad \text{et} \quad E_2 = D - R \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

Lorsqu'on ignore tout de l'état de déformations (ou de l'état de contraintes) en un point de la surface , ce qui est notre cas , on doit effectuer 3 mesures de déformation suivant 3 directions distinctes pour définir complètement l'état de déformations en ce point .

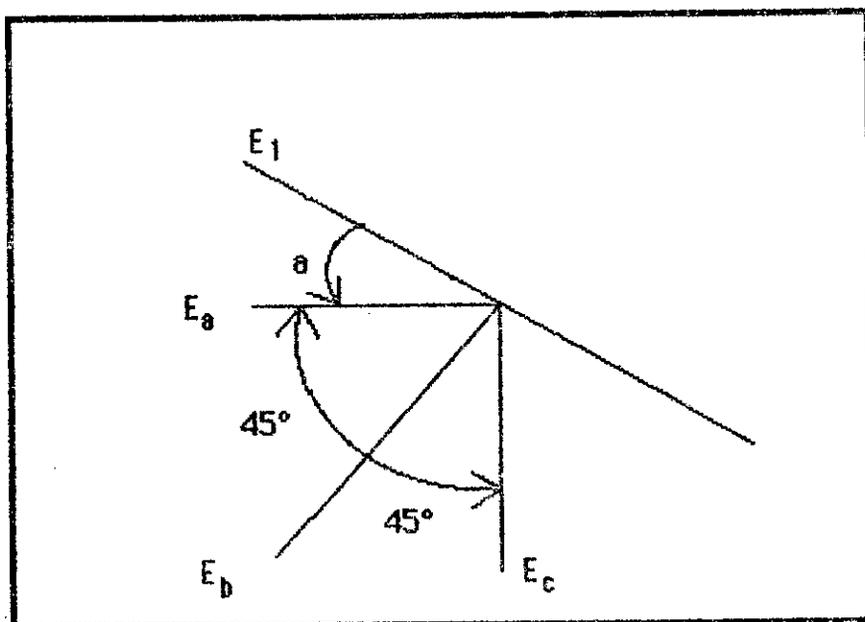


Fig. 12

Ainsi , les rosettes à  $45^\circ$  qu'on utilise donneront , en application de (2.1) :

$$E_a = (E_1 + E_2)/2 + \text{COS}(2\alpha) \times (E_1 - E_2)/2 \quad \dots \dots \dots (2.5a)$$

$$E_b = (E_1 + E_2)/2 - \text{SIN}(2\alpha) \times (E_1 - E_2)/2 \quad \dots \dots \dots (2.5b)$$

$$E_c = (E_1 + E_2)/2 - \text{COS}(2\alpha) \times (E_1 - E_2)/2 \quad \dots \dots \dots (2.5c)$$

Des équations (2.5) on déduit :

$$D = (E_b + E_c) / 2 \quad \dots \dots \dots (2.6a)$$

$$R = (E_b - E_c) / (2 \times \cos(2\alpha)) \quad \dots \dots \dots (2.6b)$$

$$\text{tg}(2\alpha) = (2E_b - E_b - E_c) / (E_c - E_b) \quad \dots \dots \dots (2.6c)$$

Ainsi , l'état de déformations au point où les mesures ont été effectuées se trouve totalement déterminé .

Le passage des déformations aux contraintes se fait à l'aide de la loi de HOOKE :

$$S_1 = E \times (E_1 + \mu E_2) / (1 - \mu^2) \quad \dots \dots \dots (2.7a)$$

$$S_2 = E \times (E_2 + \mu E_1) / (1 - \mu^2) \quad \dots \dots \dots (2.7b)$$

avec :

- E = Module de YOUNG
- $\mu$  = Coefficient de POISSON
- ( S pour sigma )

Ordre de grandeur des déformations mesurées.

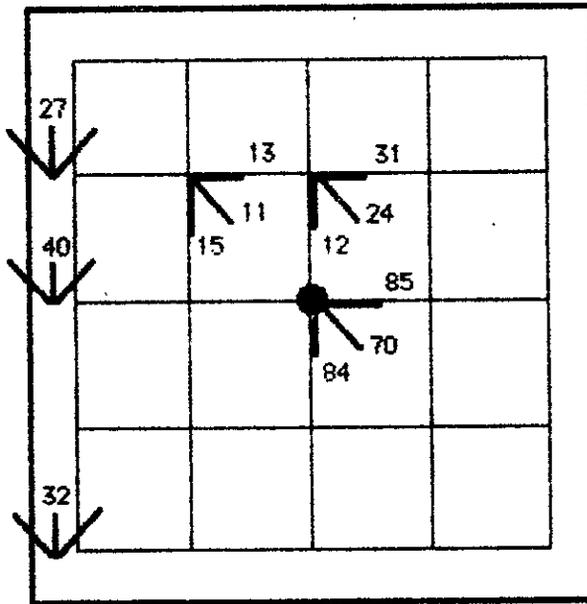
Pour donner une idée de l'ordre de grandeur des déformations qui se produisent , nous avons indiqué à la figure 13 les valeurs mesurées en quelques points de la structure . Les déformations indiquées sont celles mesurées à la face inférieure et elles sont données en micro-déformation ( ou micro-strain dont le symbole est  $\mu S$  ).

On peut tout de suite relever que la face inférieure du voile proprement dit est soumise uniquement à des extensions ( quel que soit le modèle ) . De plus, les déformations du modèle M45 sont nettement inférieures à celles du premier modèle mis à part le point central qui se trouve sous la charge et qui de ce fait ne devrait pas être retenu pour la comparaison .

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

- Déformations en  $\mu S$  -

Modèle M30



Modèle M45

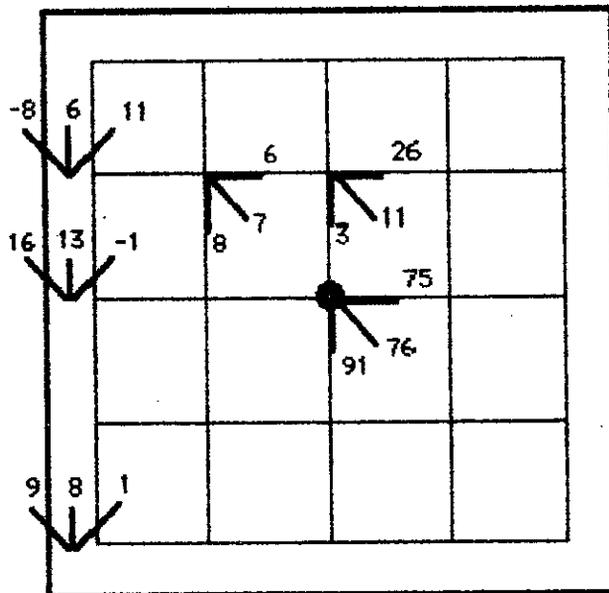


Fig. 13

### Contraintes et directions principales.

Les résultats obtenus par dépouillement des rosettes sont représentés aux figures 14 et 14 bis. Signalons que pour la poutre de rive du modèle M30, les contraintes indiquées sont celles qui agissent dans la direction longitudinale de la poutre.

On peut immédiatement noter que les deux modèles présentent, sur toute leur étendue, un comportement essentiellement **flexionnel** et non pas **membranaire**. Nous ferons plus loin la décomposition pour séparer les contraintes de flexion et les contraintes de l'effort normal pour mieux souligner ce résultat.

On peut aussi relever un résultat important concernant la nature des contraintes. Pour le voile proprement dit (points v1, v2, v3 et v4), quel que soit le modèle considéré, les contraintes sont de même nature sur chaque face. A la face supérieure il y a uniquement des compressions et à la face inférieure seulement des tractions.

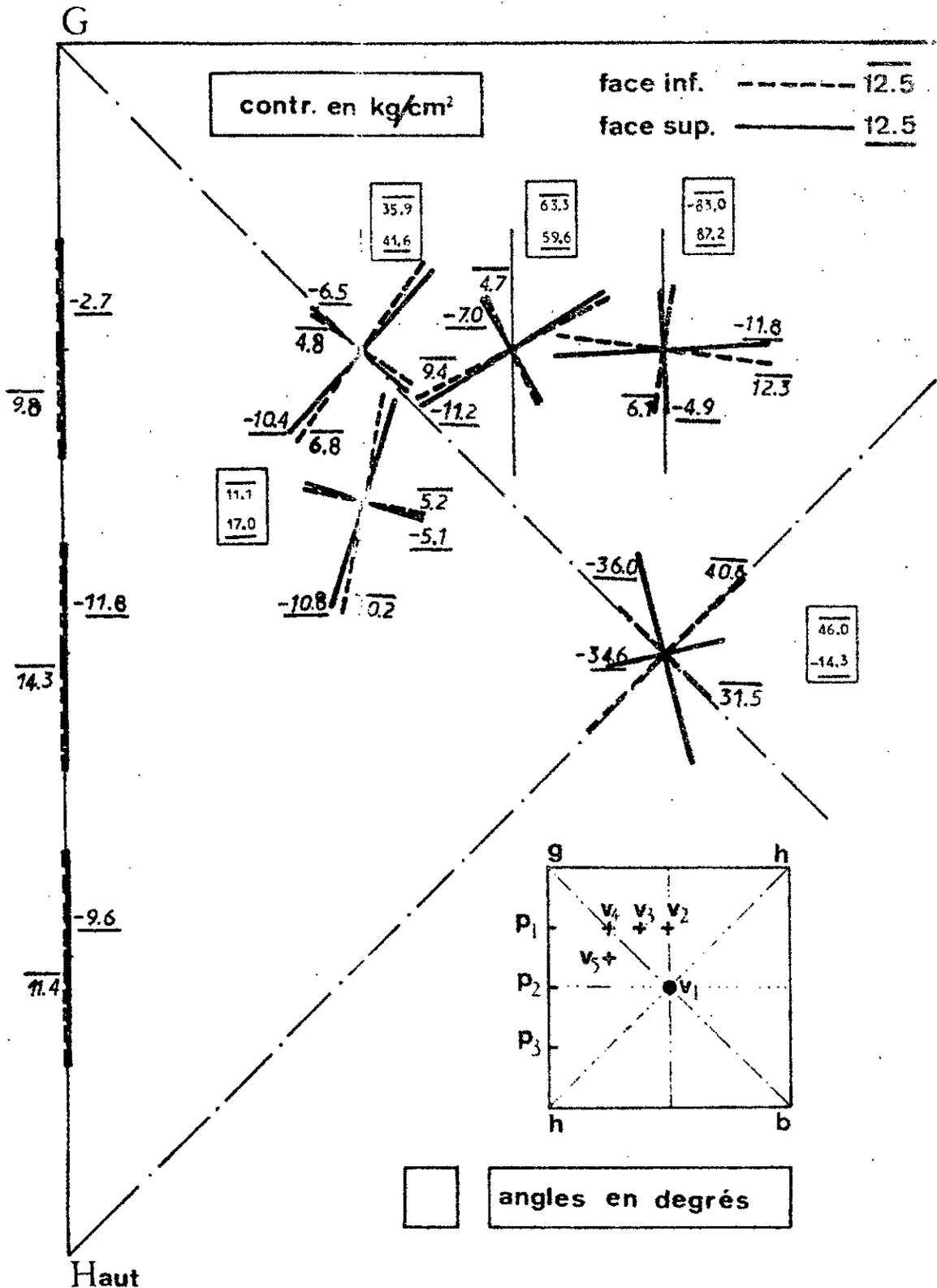
Par contre pour les poutres de rive, on voit sur la même face des contraintes de signes différents.

Un autre résultat remarquable qu'il convient de souligner est celui relatif aux directions principales. En effet, on remarque que les **directions principales minimales** sont, de manière générale, sensiblement proches des directions **radiales** (c'est à dire orientées vers la charge). D'autres essais qu'on a menés et dont on ne parle pas ici ([31], [33]) confirment cette tendance et il ne fait presque pas de doute que les directions minimales soient effectivement radiales.

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

- Contraintes principales -

( Modèle M30 )



**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

- Contraintes principales -

( Modèle M45 )

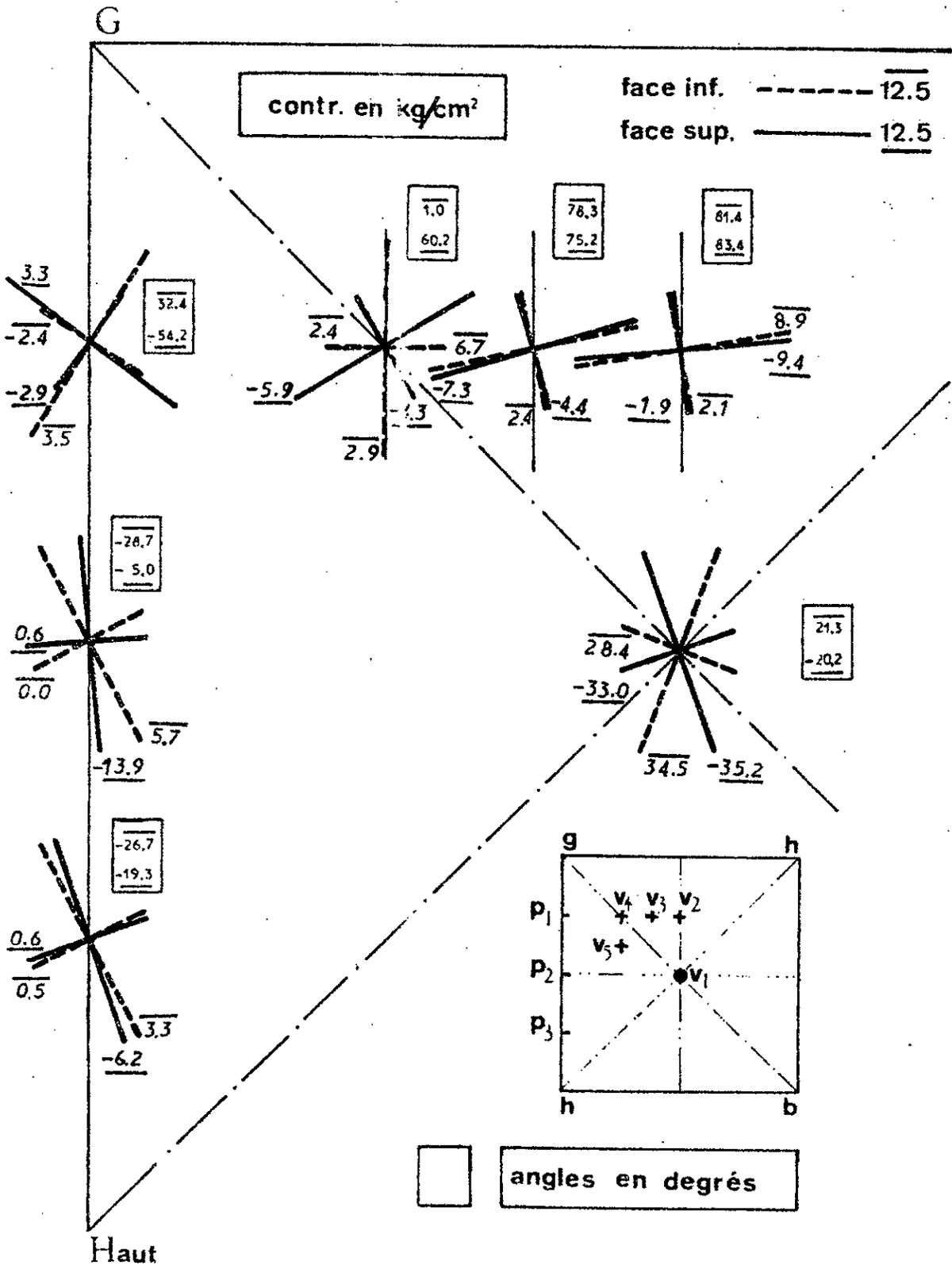


Fig. 14 bis

Par conséquent les moments de flexion les plus importants sont ceux qui agissent autour des directions radiales .

Si les contraintes sous la charge ne sont pas importantes comparativement à ce que suppose l'application d'une charge ponctuelle ( les moments y seraient théoriquement infinis ) , c'est dû au fait que la charge soit appliquée par l'intermédiaire d'un tripode comme il a été déjà précisé et , ne constitue pas donc une force tout à fait ponctuelle .

On peut aussi noter que les contraintes des poutres ne sont pas négligeables en comparaison à celles du voile . Mais de façon générale , on peut dire que les contraintes sont plutôt modérées .

Remarquons aussi que les contraintes du modèle M45 sont plus faibles que celles du modèle M30 comme il fallait s'y attendre . Les variations sont très disparates , de 2 à 60% , mais cela peut s'expliquer par la sensibilité des déformations mesurées à toute irrégularité du modèle et tout défaut local sous l'appareil de mesure ( jauge ) . Aussi , retenons surtout , de cette analyse des contraintes , les résultats généraux et l'ordre de grandeur des contraintes .

Nous allons maintenant procéder à la décomposition des contraintes pour séparer les contraintes de flexion et les contraintes de membrane afin de mieux juger de l'importance de chaque type de contrainte . Mais avant de passer aux résultats , donnons d'abord une description de la méthode de décomposition de l'état de contraintes .

Décomposition de l'état de contraintes.

On a déjà vu qu'on pouvait déterminer l'état de contraintes en un point de la surface à partir des déformations mesurées suivant trois directions distinctes en ce même point . Nous avons également rappelé l'expression donnant la déformation suivant une direction " t " faisant un angle " a " avec la direction principale " 1 " ( relation 2.1 ) ; il existe une expression similaire pour la contrainte :

$$S_a = ( S_1 + S_2 )/2 + \text{COS}(2a) \times ( S_1 - S_2 )/2 \dots \dots (2.8)$$

Par application de (2.8) , on détermine les contraintes agissant dans les directions a , b et c de la rosette aussi bien à la face supérieure qu'à la face inférieure . On effectue ensuite la décomposition des contraintes suivant chacune des trois directions ; par exemple pour la direction " a " :

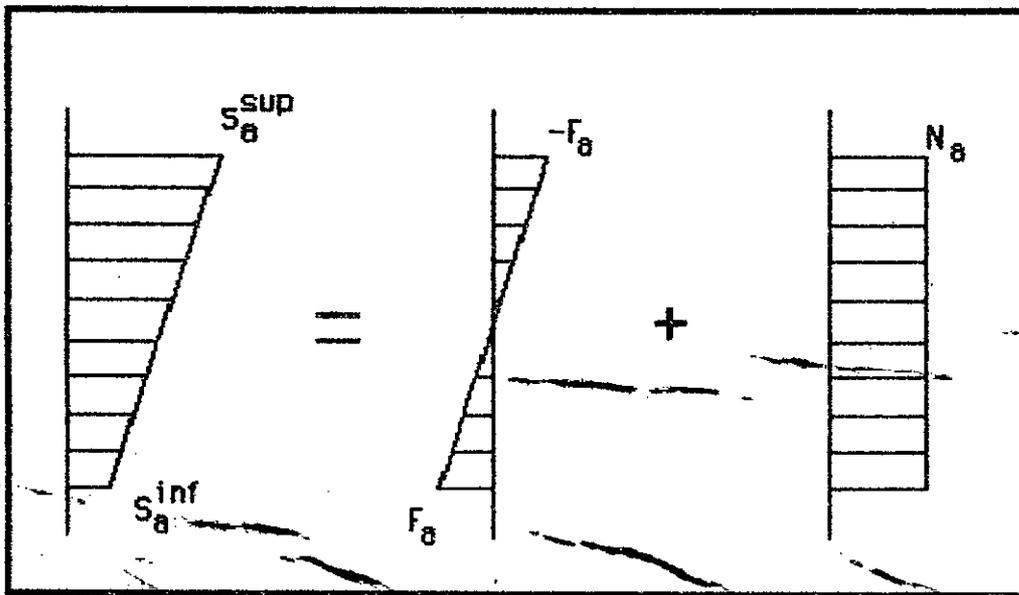


Fig. 15

On obtient ainsi trois contraintes de flexion ( $F_a$ ,  $F_b$  et  $F_c$ ) et trois contraintes de l'effort normal ( $N_a$ ,  $N_b$  et  $N_c$ ) à partir desquelles on détermine séparément les états de contraintes de flexion et d'effort normal.

Les contraintes et les directions principales de flexion des deux modèles sont représentées aux figures 16 et 16 bis. Les contraintes indiquées sont celles de la face inférieure. Les figures 17 et 17 bis montrent les contraintes et les directions principales de l'effort normal.

Cette décomposition montre de manière plus nette encore le caractère flexionnel du comportement des modèles sous une charge concentrée. Les contraintes de membrane sont tout à fait négligeables et peuvent tout aussi bien être dues aux erreurs de mesures (la précision des appareils est de l'ordre de  $2 \mu S$ ) sauf peut-être pour les poutres de rive. Pour ces dernières, l'axe longitudinal semble être la direction principale maximale pour les contraintes de l'effort normal. On peut aussi vérifier que les directions minimales de flexion sont approximativement radiales.

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

**- Contr. princ. de flexion -**  
(Modèle M30)

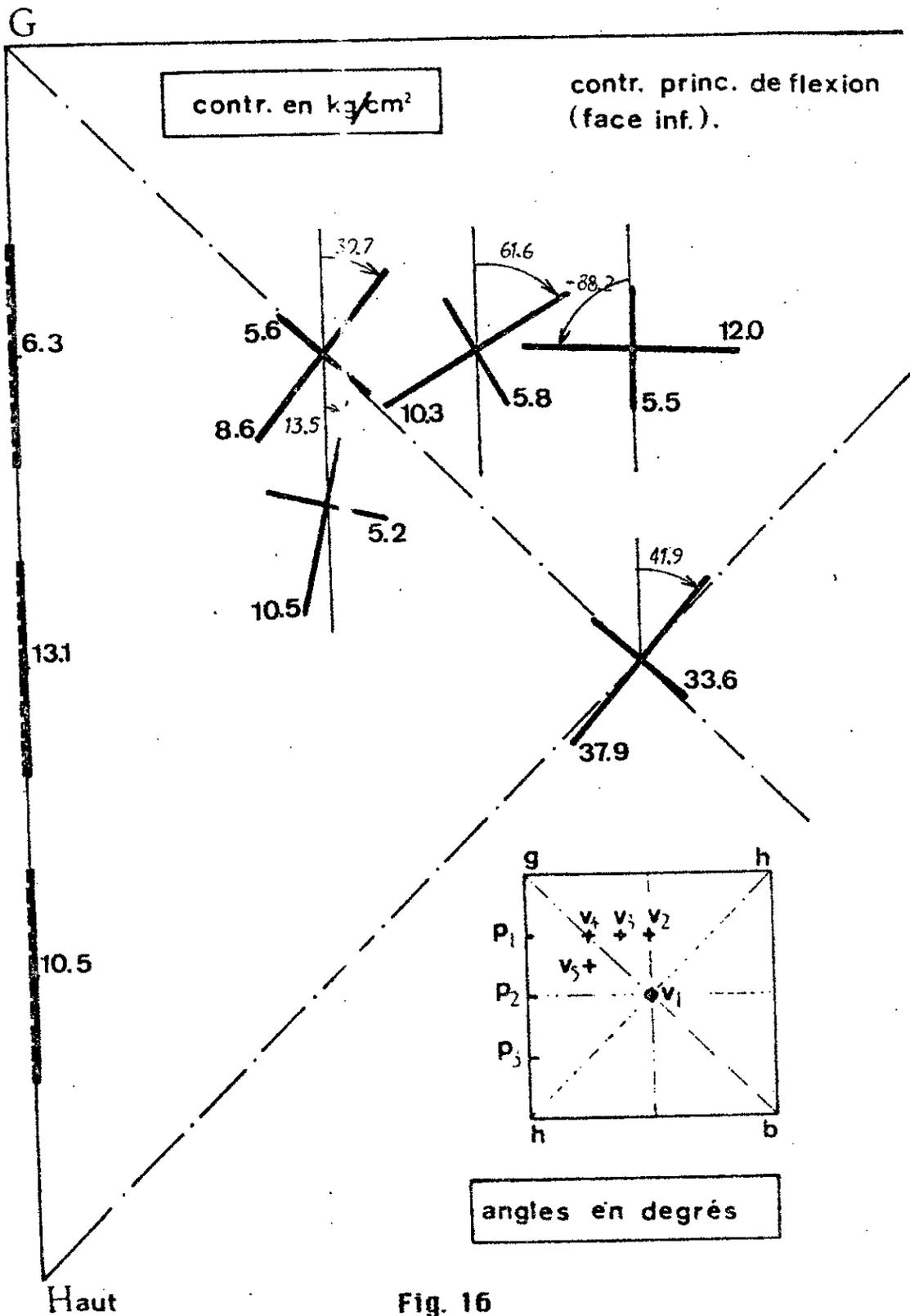


Fig. 16

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

**- Contr. princ. de flexion -**  
(Modèle M45)

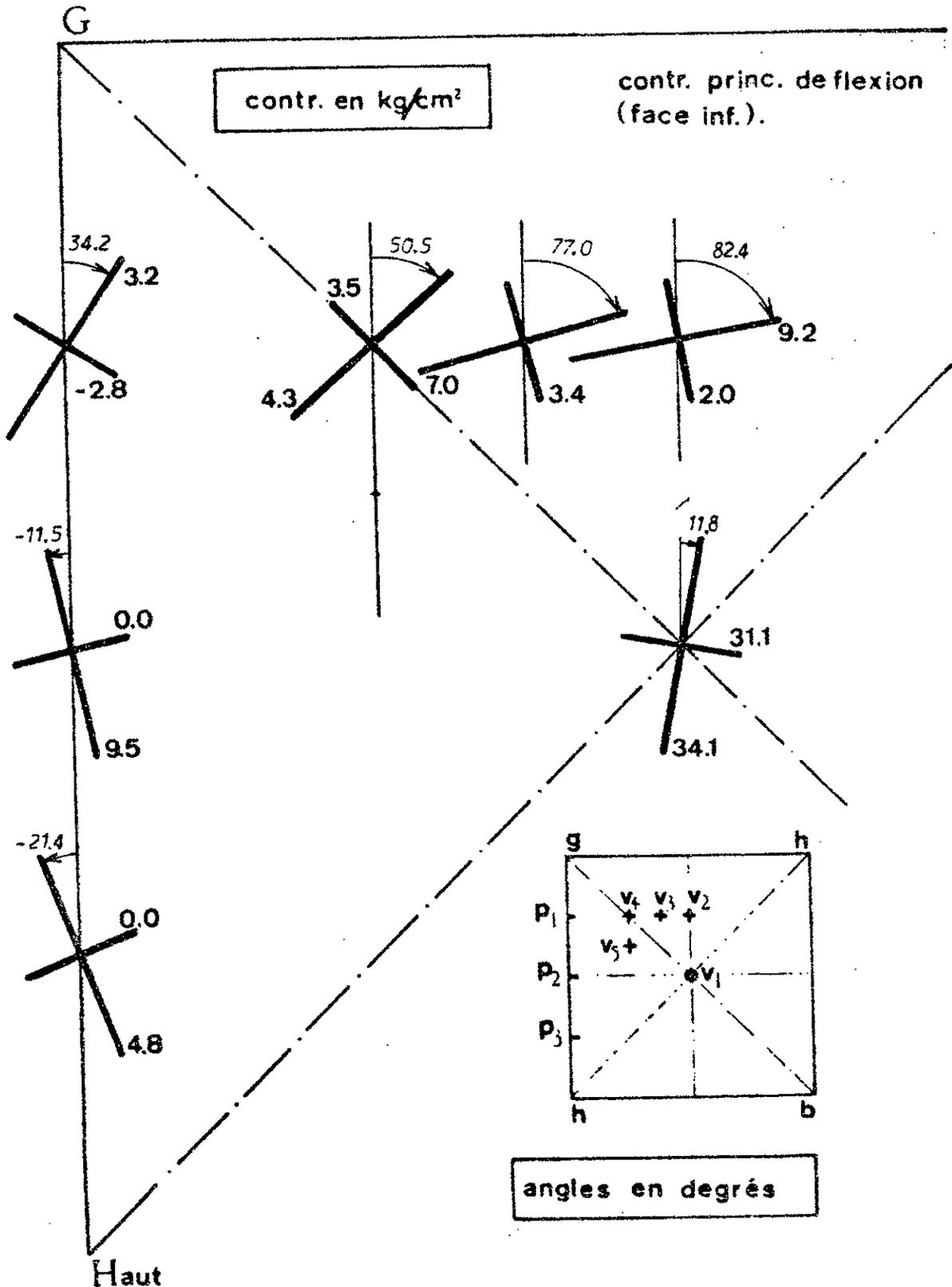


Fig. 16 bis

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

- Contr. princ. de l'effort normal -

( Modèle M30 )

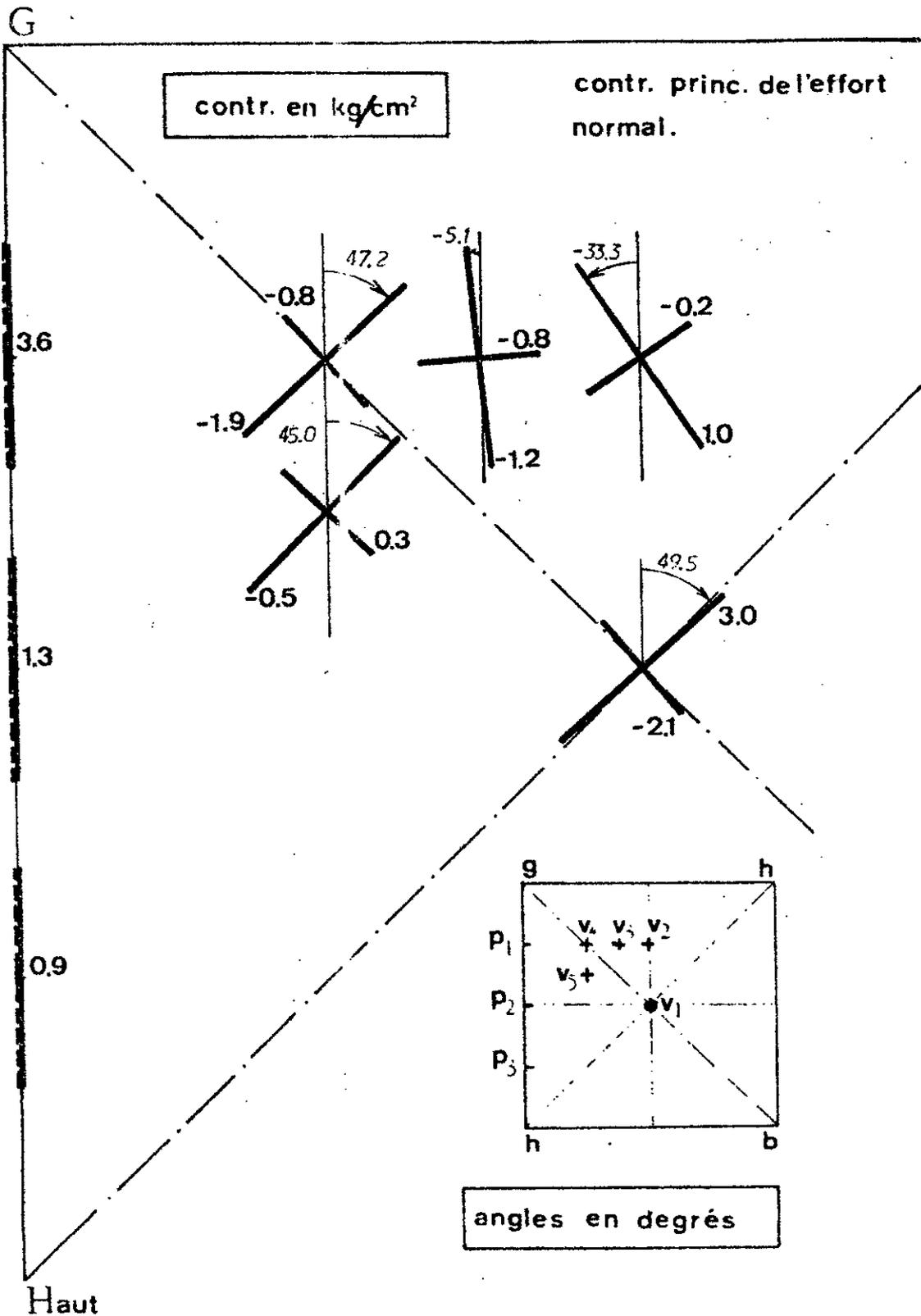


Fig. 17

**CHARGE DE 100 kg AU CENTRE DU PH**

- Contr. princ. de l'effort normal -

(Modèle M45)

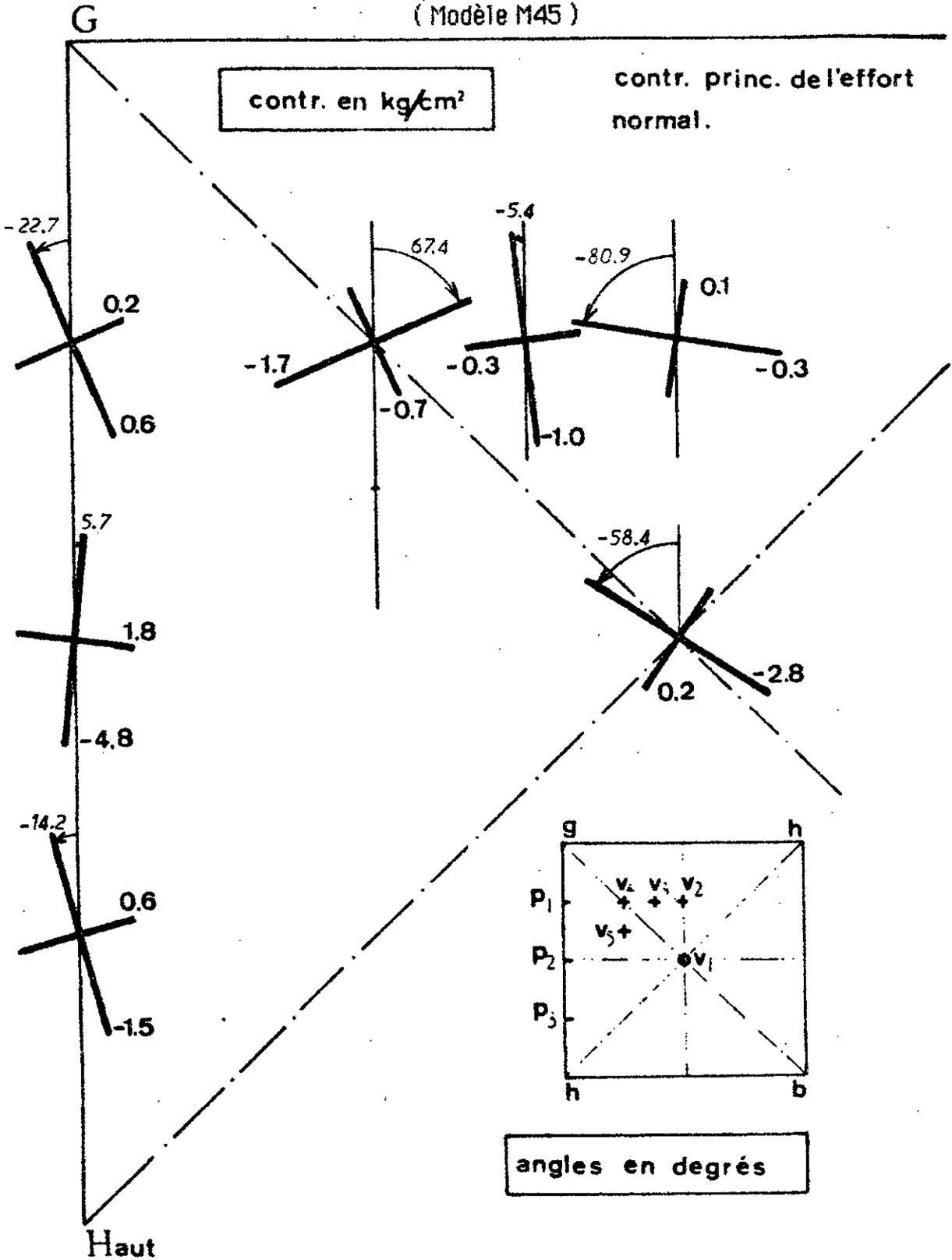


Fig. 17 bis

### 2.3.2 Charge localisée en dehors du centre

Nous allons maintenant voir comment se comporte le voile lorsque la charge concentrée est appliquée en dehors du centre . Comme il n'est pas possible d'étudier cas par cas tous les points où la charge a été appliquée , nous en avons sélectionné trois particulièrement caractéristiques : le milieu d'une moitié de médiane ( point v2 ) , le milieu d'une moitié de diagonale ( point v4 ) et le milieu d'une poutre de rive ( point P2 ) . On notera que ces points sont situés sur des axes privilégiés : une médiane , une diagonale et une rive .

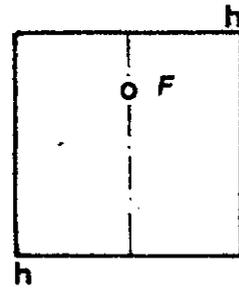
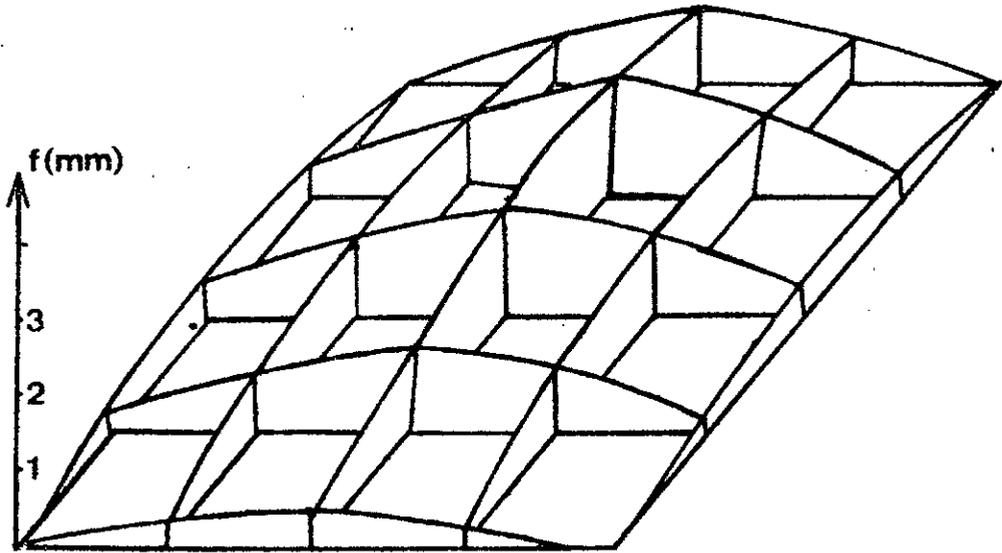
#### 2.3.2.1 Etude des déplacements

Nous avons représenté aux figures 18 , 19 et 20 les déformées ( ou surfaces d'influence ) des deux modèles pour les trois cas de charge retenus.

Afin de rendre les figures plus parlantes , nous avons représenté les flèches positives vers le haut , c'est-à-dire l'inverse de la réalité .

Pour le cas de la charge au point v2 ( figure 18 ) , on a mesuré sous la charge 1.58 mm et 1.51 mm pour les modèles M30 et M45 , respectivement . Mais la flèche maximale n'est pas celle mesurée sous la charge ; pour le modèle M30 par exemple , on observe une flèche de 1.60 mm à 12.5 cm de la charge sur la même médiane , vers le centre du voile . Il faut rappeler que pour le modèle M30 on dispose des mesures de la flèche ( par application du théorème de BETTI-MAXWELL ) de quatre points situés à 12.5 cm de chaque point de mesure et dans quatre directions orthogonales . On observe également l'apparition de flèches négatives sur une partie des poutres du modèle M45 .

Modèle M30



Modèle M45

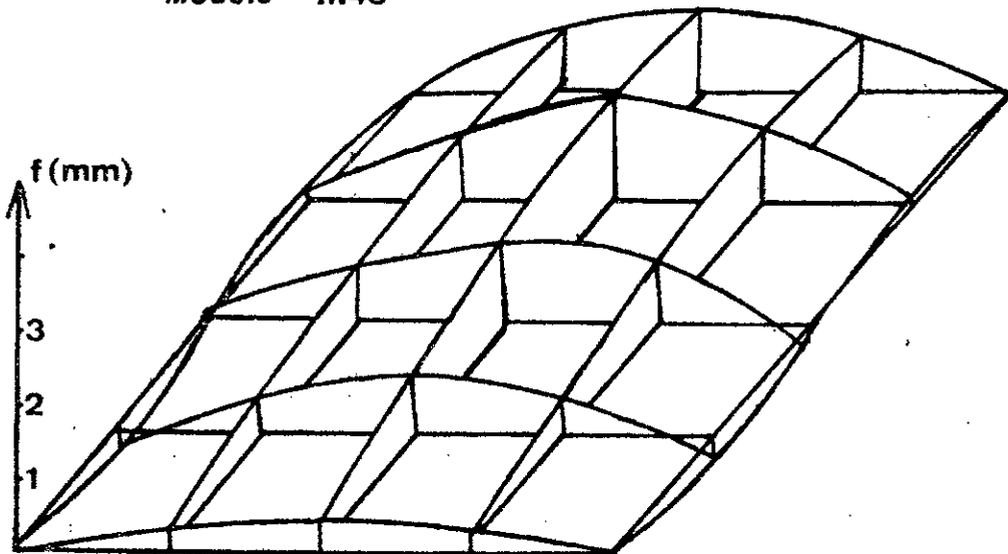


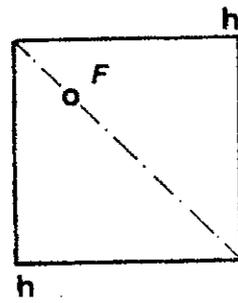
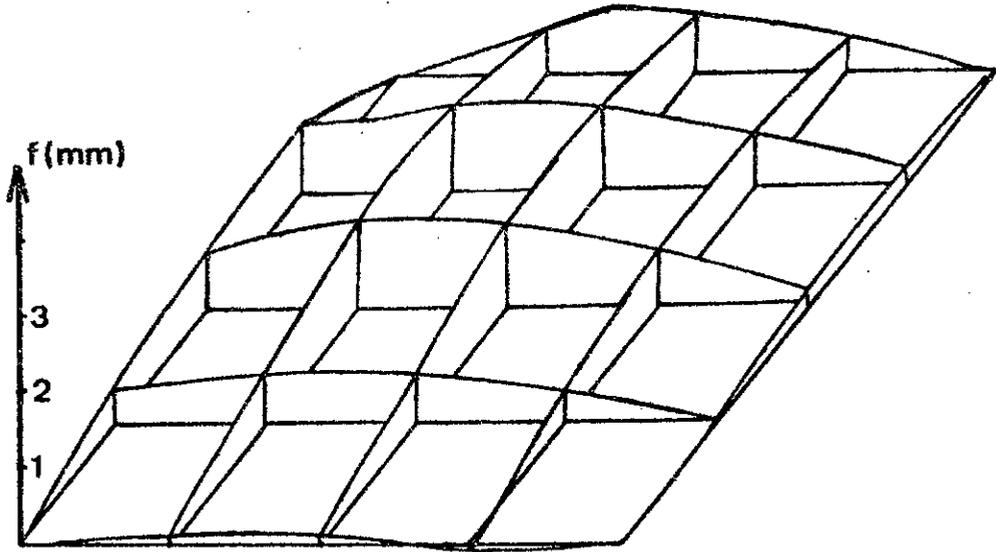
Fig. 18

Lorsque la charge se trouve au point v4 ( figure 19 ) , les flèches mesurées sous la charge sont : 1.19 mm pour le modèle M30 et 1.31 mm pour le modèle M45 . Là , la tendance s'inverse puisque le déplacement de M45 est supérieur à celui de M30 contrairement au cas précédent .

Dans ce cas aussi , pour le modèle M30 , on trouve à 12.5 cm vers le milieu du voile une flèche de 1.23 mm qui est supérieure à celle qu'on a mesurée sous la charge . Ce résultat ne doit pas cependant nous surprendre puisqu'on sait que pour une poutre bi-articulée la flèche maximale n'est atteinte sous la charge que lorsque celle-ci est appliquée à mi-portée .

Pour le troisième cas de charge enfin , c'est-à-dire une charge localisée au milieu d'une poutre de rive , la flèche maximale apparaît sous la charge . On a mesuré 1.73 mm pour le premier modèle et 2.51 mm pour le deuxième modèle . Remarquons que cette dernière valeur constitue la flèche maximale mesurée pour l'ensemble des essais . Pour le modèle M30 par contre , la flèche maximale enregistrée est celle du centre du voile lorsque la charge se trouve en ce point . Les flèches des poutres sont appréciables et nous incitent à souligner de nouveau la déformabilité de ces dernières .

Modèle M30



Modèle M45

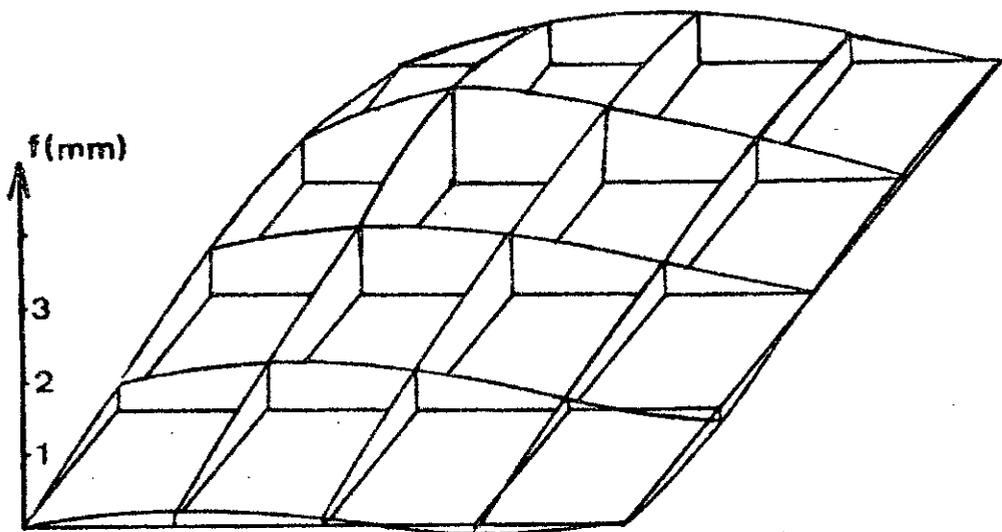
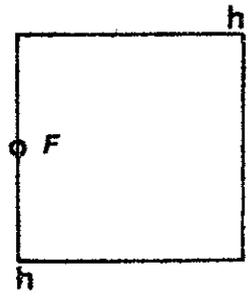
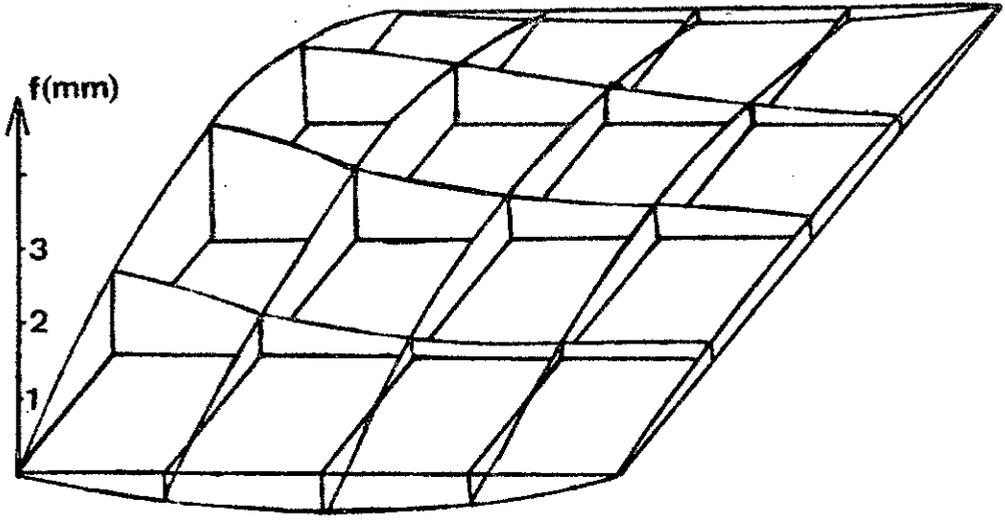


Fig. 19

Modèle M30



Modèle M45

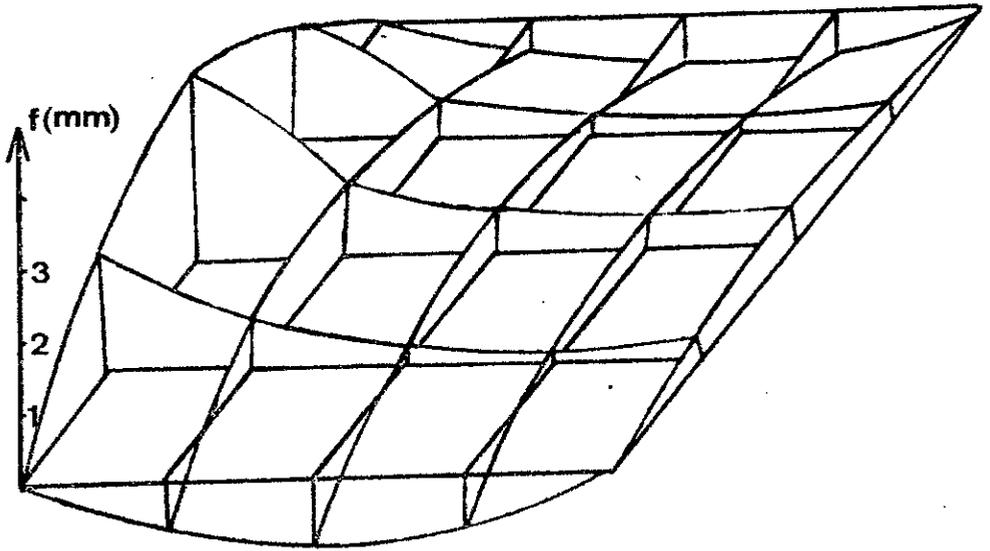


Fig. 20

### 2.3.2.2 Etudes des contraintes

Les contraintes et les directions principales obtenues sont montrées aux figures 21 à 23.

On peut constater que les contraintes demeurent très modérées et que ces cas de chargement sont moins défavorables que le cas de la charge au centre du voile.

Si on généralise la notion de direction radiale, c'est-à-dire si on appelle direction radiale d'un point  $M$  la direction  $PM$  joignant le point considéré au point d'application de la charge ( $P$ ), alors on peut généraliser la remarque faite précédemment. En effet, pour les cas de charge sur le voile proprement dit, on voit assez clairement que les moments fléchissants maximums apparaissent toujours autour des directions radiales (ou des directions qui leur sont très proches).

En d'autres termes, cela veut dire que les "isostatiques" des directions principales maximales sont des cercles ayant pour centre le point d'application de la charge. Rappelons qu'on appelle "isostatique" une courbe telle qu'en chacun de ses points elle est tangente à l'une des directions principales en ce point.

Concernant les rives, les contraintes principales d'une même face sont de signes contraires. Les contraintes de flexion sont comparables à celles du voile mais les contraintes de membrane sont supérieures à celles qu'on observe sur les faces du voile proprement dit.

Les plus grandes contraintes de membrane apparaissent aux faces de la poutre lorsque la charge se trouve sur celle-ci.

**CHARGE DE 100 kg AU POINT V2**

- Contraintes principales -

( Modèle M30 )

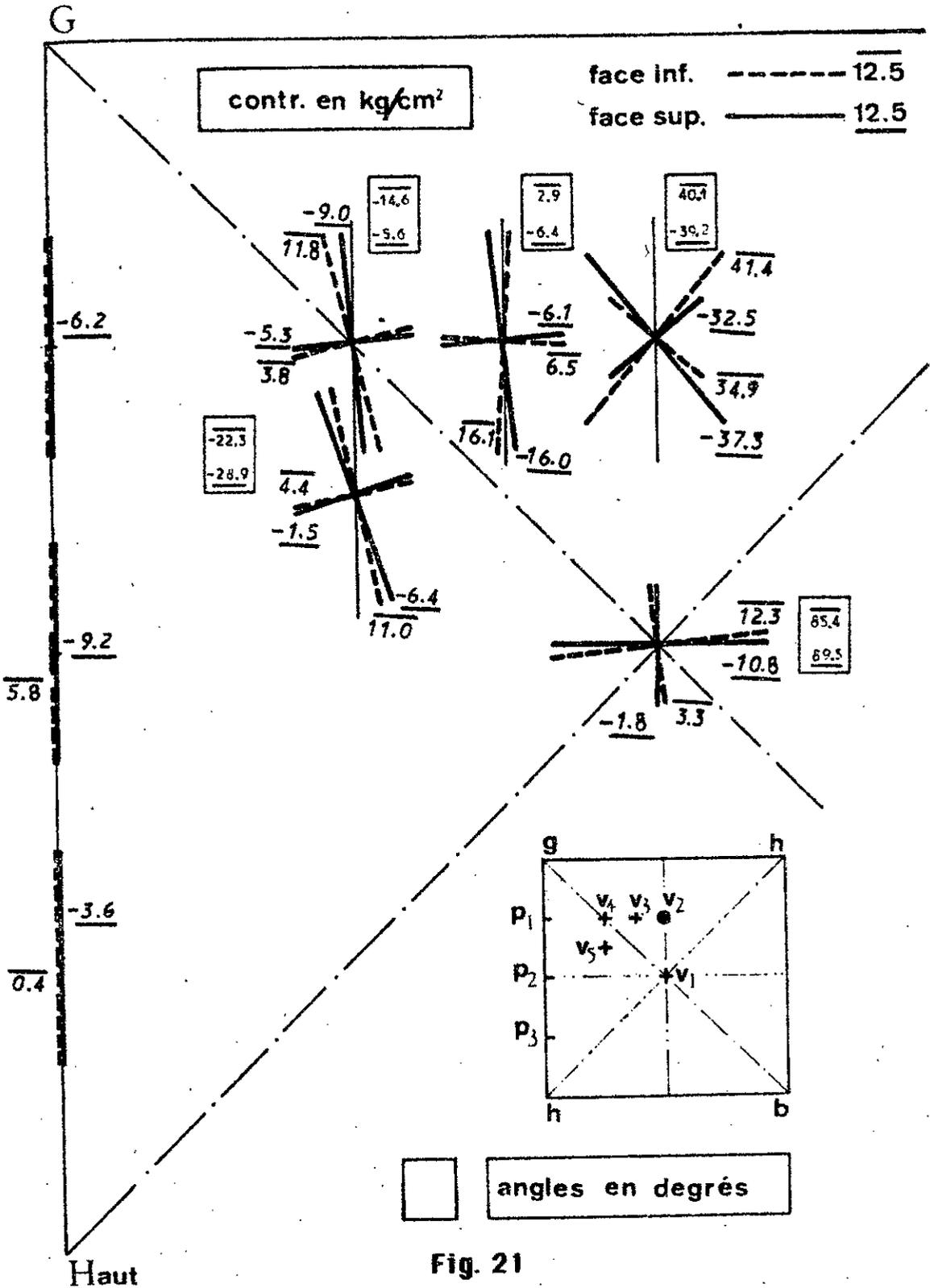
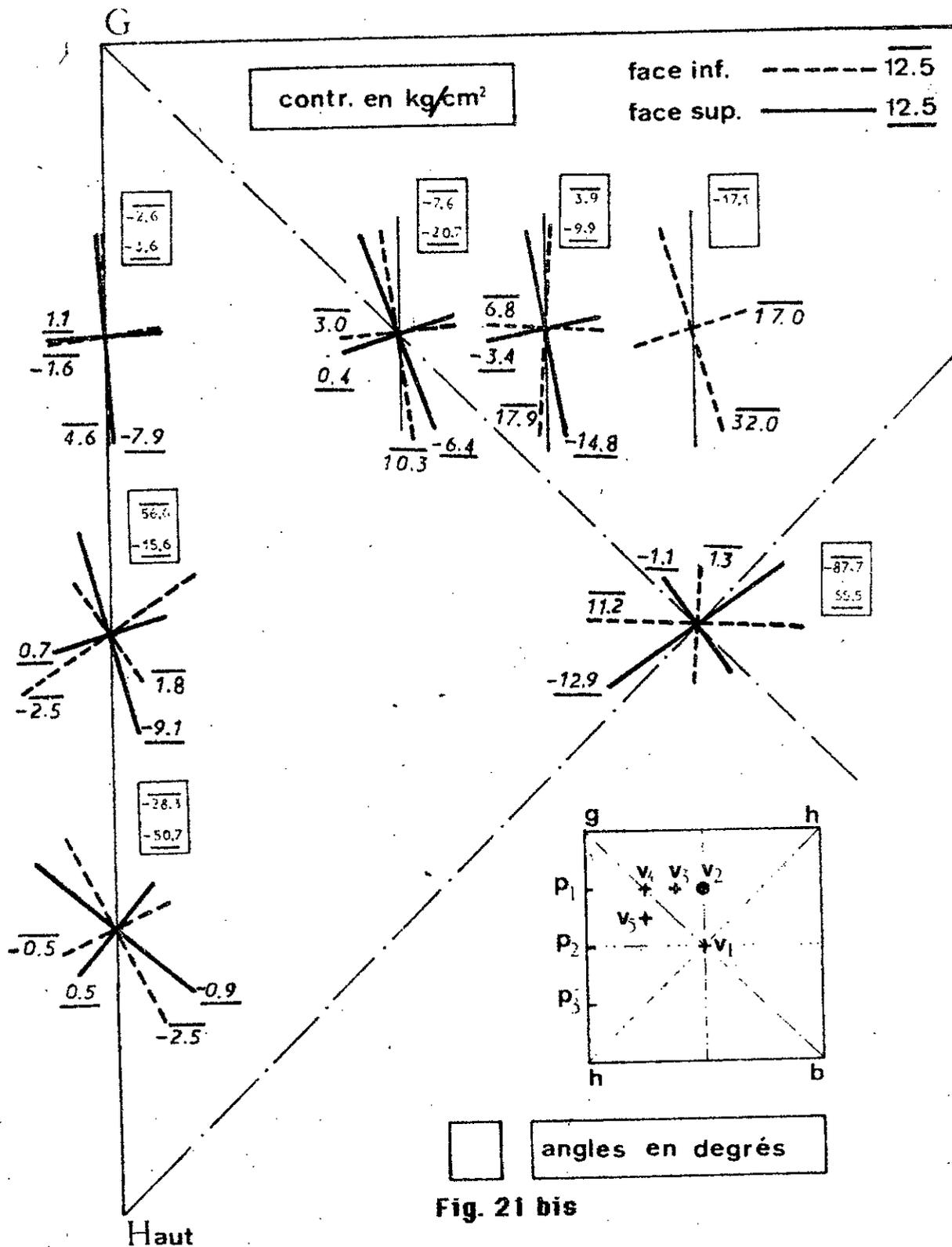


Fig. 21

**CHARGE DE 100 kg AU POINT V2**

- Contraintes principales -

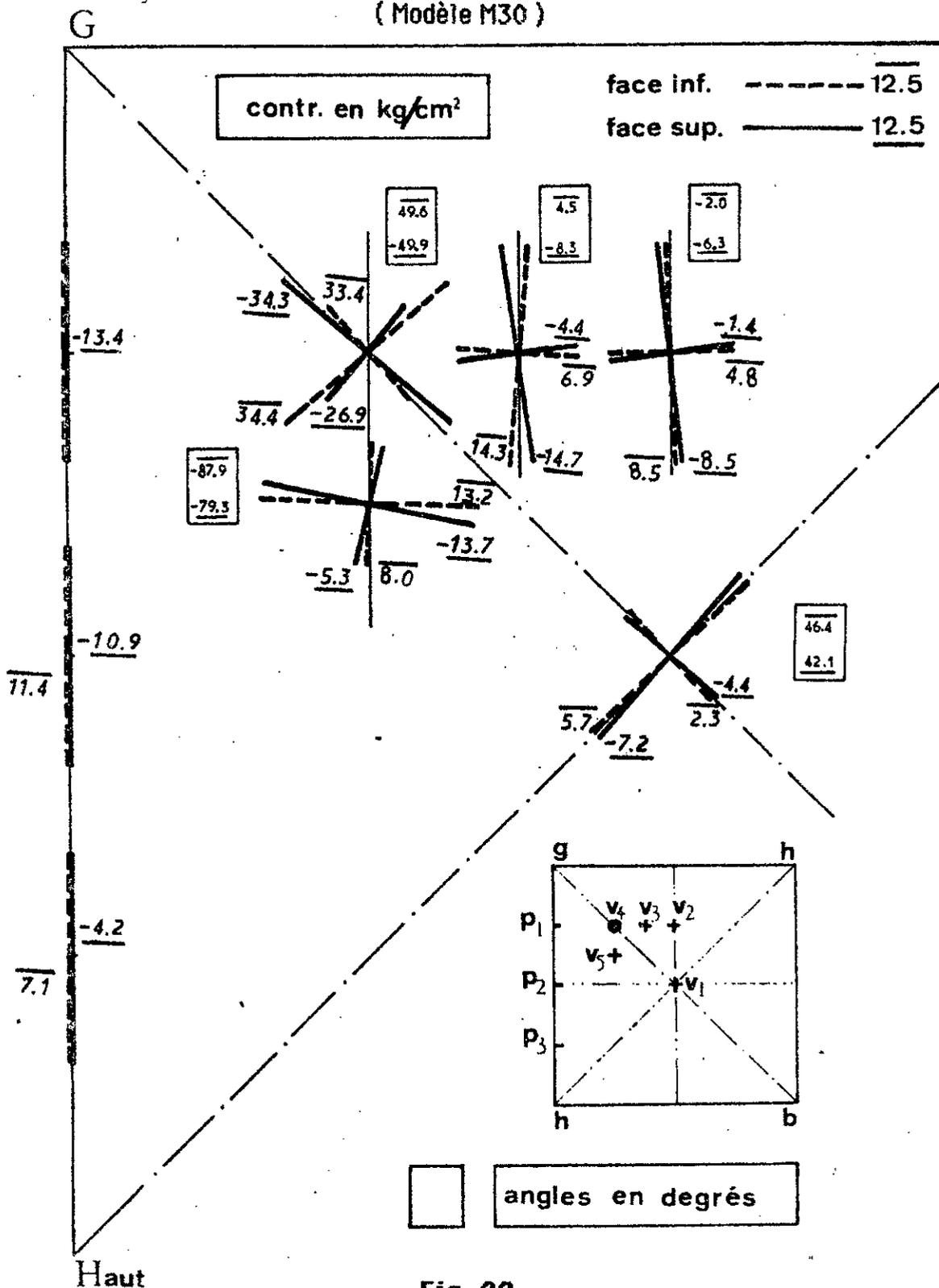
( Modèle M45 )



**CHARGE DE 100 kg AU POINT V4**

- Contraintes principales -

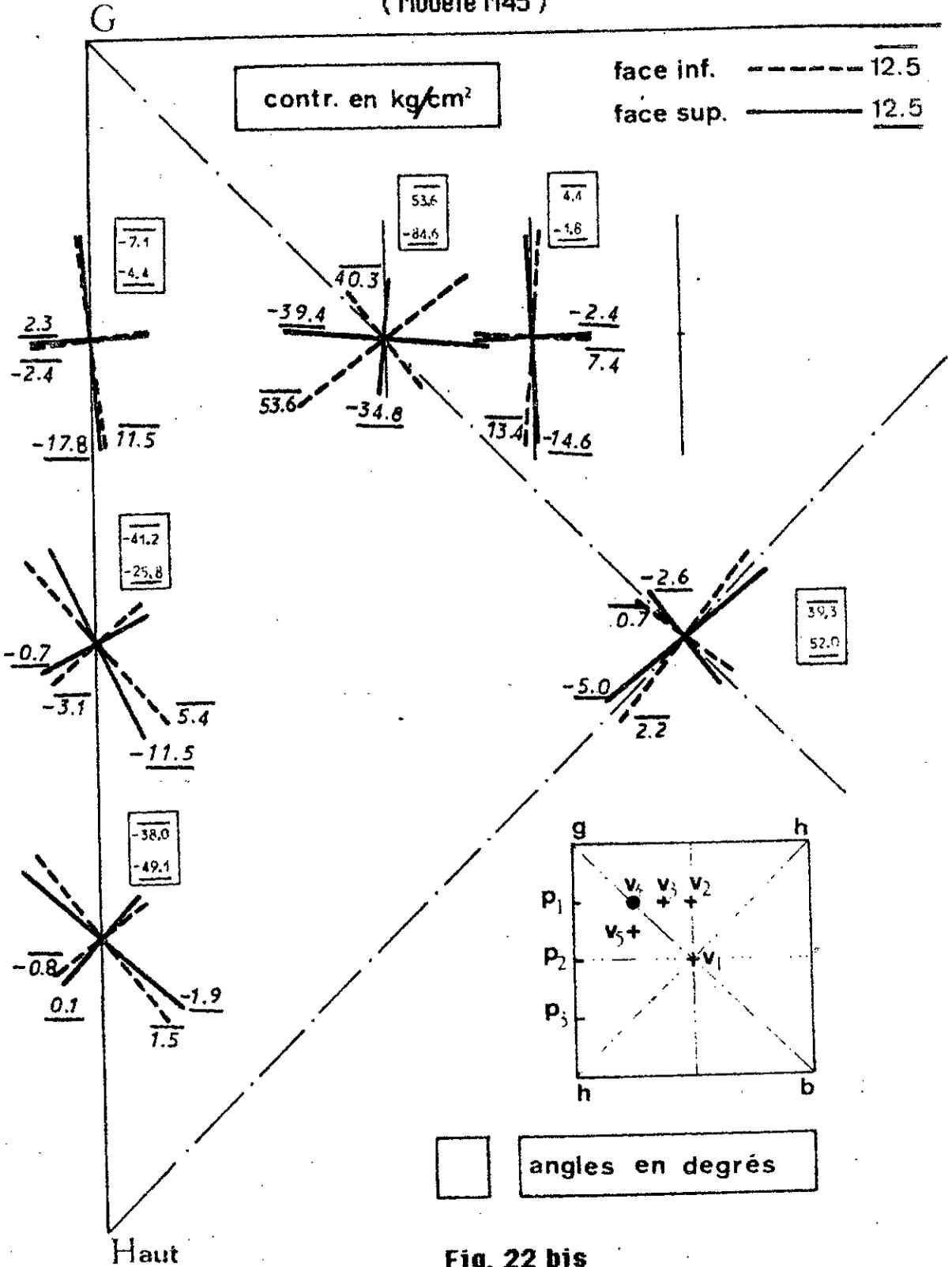
( Modèle M30 )



**CHARGE DE 100 kg AU POINT V4**

- Contraintes principales -

( Modèle M45 )



**CHARGE DE 100 kg AU POINT P2**

- Contraintes principales -

( Modèle M30 )

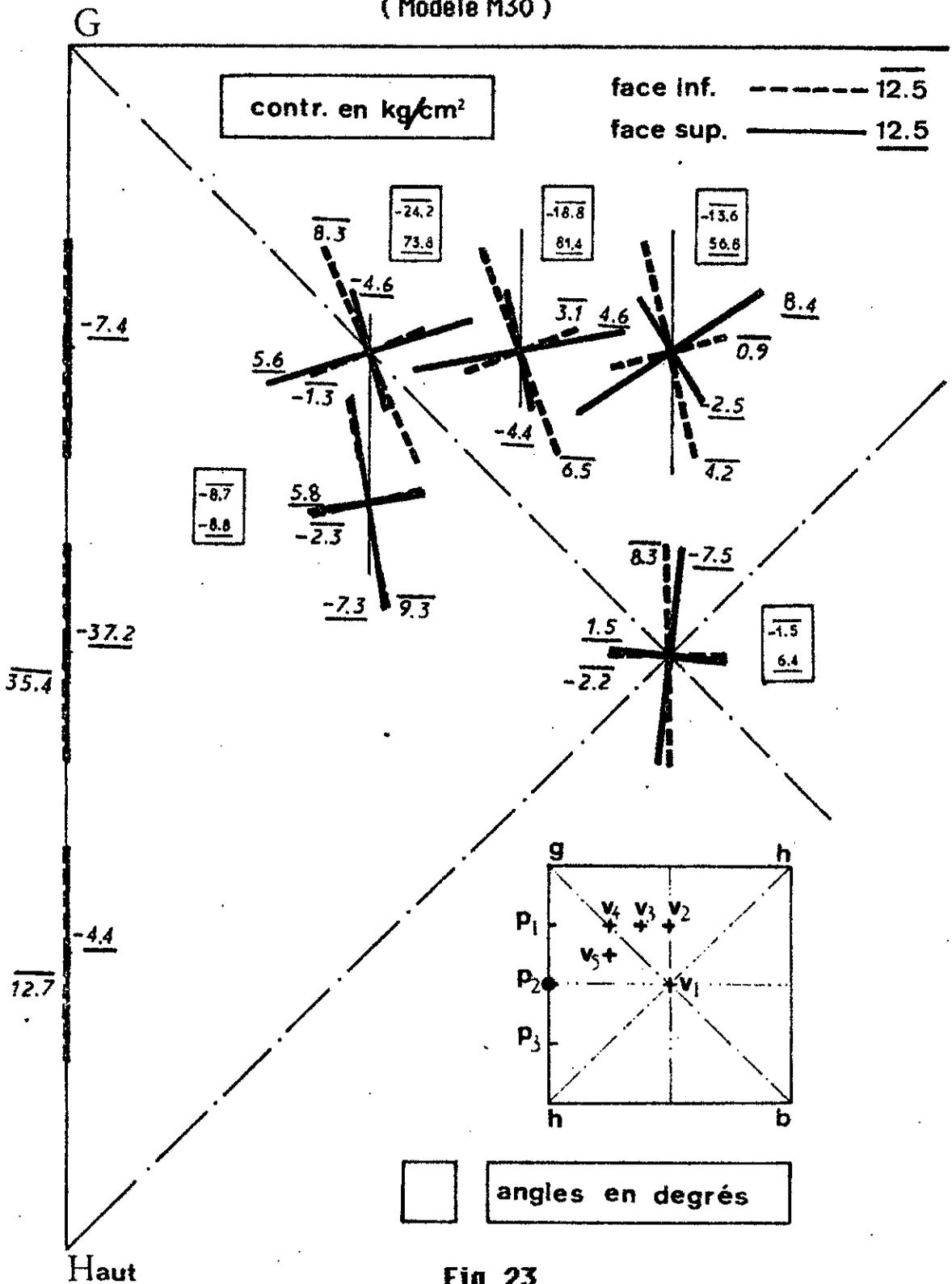
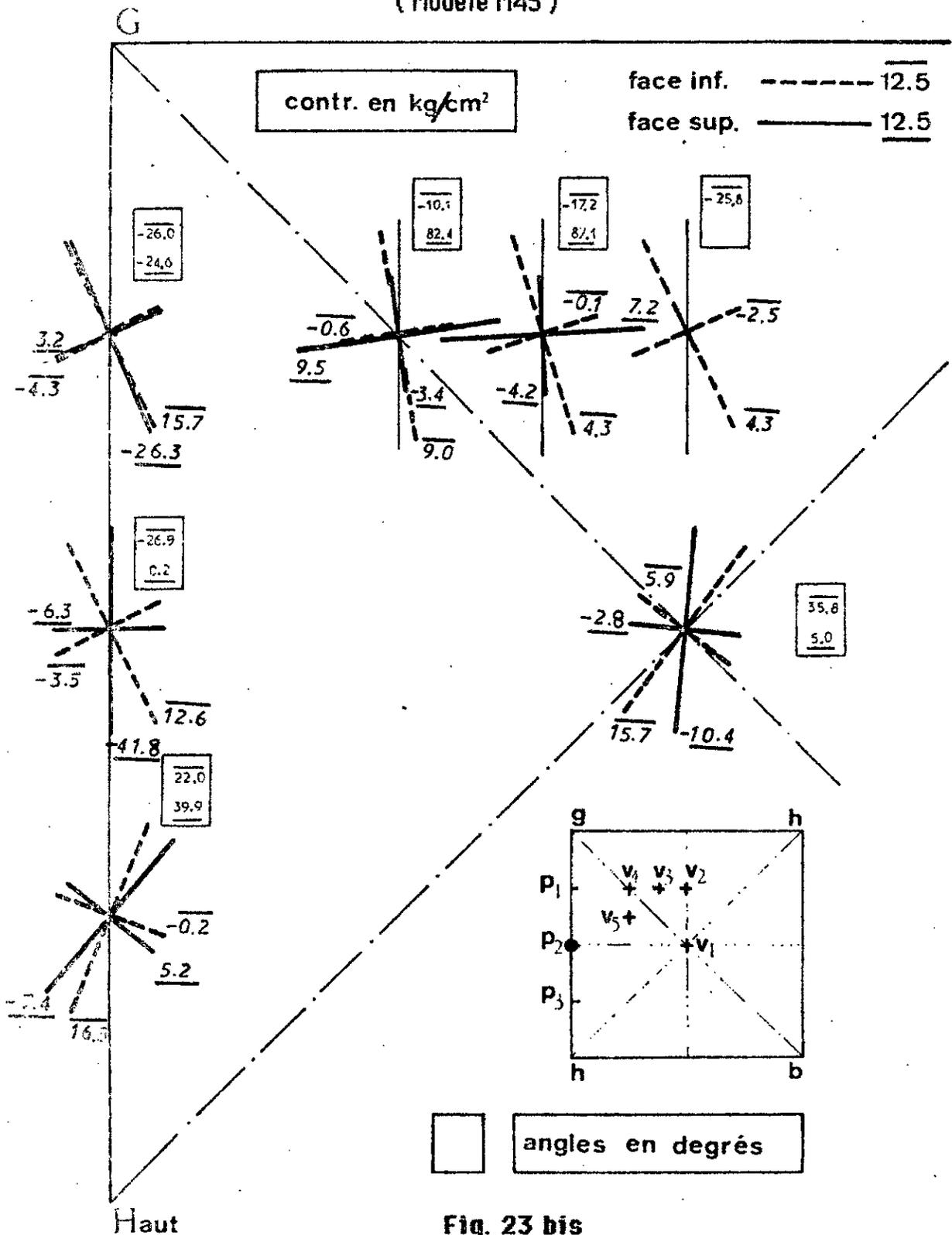


Fig. 23

**CHARGE DE 100 kg AU POINT P2**

**- Contraintes principales -**

( Modèle M45 )



## 2.4 Comportement du voile sous une charge répartie

Comme le but principal du travail était d'étudier le comportement du voile sous l'action des charges localisées, le dispositif expérimental n'a pas été conçu pour appliquer une charge répartie. Néanmoins, on peut se dispenser d'appliquer réellement une charge répartie comme on va le voir.

### Simulation d'une charge répartie.

On a vu que pour les charges concentrées utilisées, dont la plus élevée est de 100 kg, les modèles présentaient une réponse linéaire; par conséquent le principe de superposition peut être appliqué. Ainsi, l'effet de la charge répartie peut être simulé par superposition des effets mesurés lors des chargements ponctuels effectués aux nœuds d'un maillage régulier.

On a simulé la charge de 150 kg/m<sup>2</sup> pour laquelle le PH a été vérifié (par la théorie de la membrane) en considérant des charges de 24 kg chacune localisées aux nœuds du maillage principal dont le pas est de 50 cm en plan (figure 5). Les charges situées sur les quatre coins sont supposées reprises totalement par les appuis.

Les appareils de mesure qui se trouvent aux nœuds du maillage considéré, donc au droit d'une charge localisée, vont enregistrer des effets qui ne sont pas du tout ceux d'une charge répartie. Aussi, avons-nous décidé de remplacer la lecture de l'appareil qui se trouve sous la charge par la moyenne des lectures du même appareil pour quatre positions de la charge autour du point considéré. Les quatre positions retenues sont situées à 12.5 cm du nœud considéré et dans quatre directions orthogonales (figure 6).

Cette correction est assez importante puisque en procédant de la sorte , on réduit les déformations de 40 % en moyenne .

Avant de passer aux résultats obtenus , il faut observer que pour les besoins de cette simulation nous exploitons des déformations provoquées par des charges assez faibles qui ne fissurent pas le modèle ; par conséquent les résultats qu'on obtient s'appliquent à un modèle non fissuré .

#### 2.4.1 Déplacements verticaux

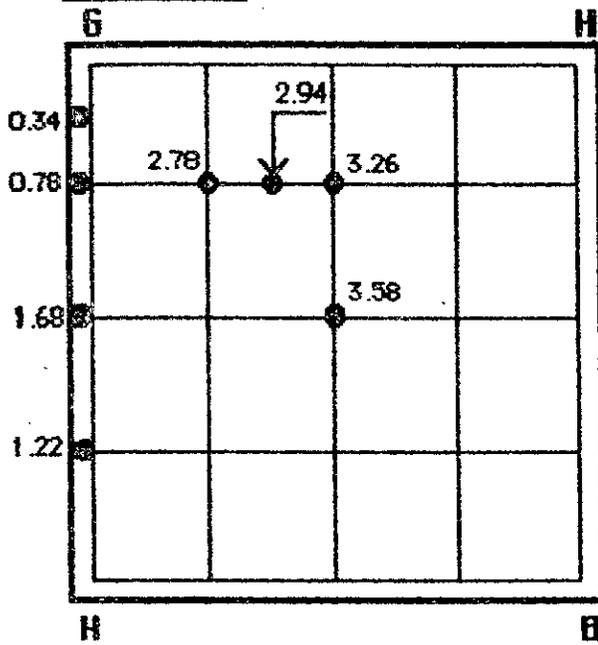
Les flèches obtenues sont indiquées à la figure 24 . On peut observer que l'augmentation du surbaissement de 50 % , passage de  $H=30$  cm à  $H=45$  cm , entraîne une diminution des flèches qui varie de 13 % au centre à 28 % au point v4 . La plus faible réduction est observée au niveau de la poutre ( 9 % ) .

On constate également que les variations relevées dans le cas de la charge répartie sont supérieures à celles trouvées dans le cas de la charge localisée au centre du PH .

**CHARGE REPARTIE DE 150 kg/m<sup>2</sup>**

- Déplacements verticaux en mm -

Modèle M30 :



Modèle M45 :

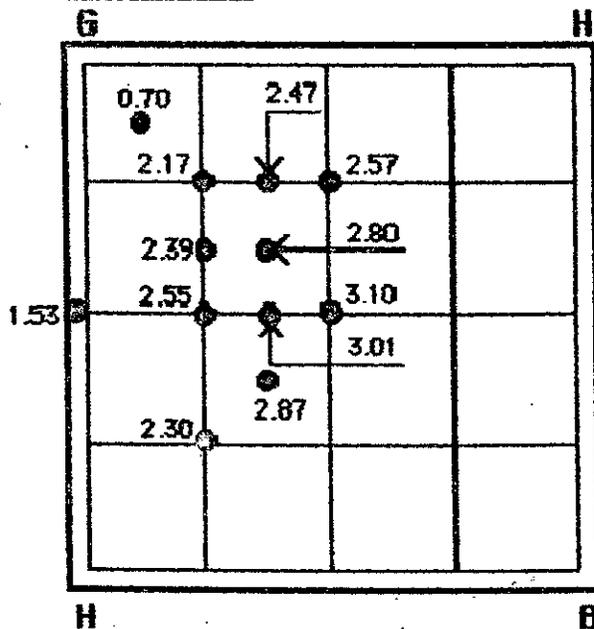


Fig. 24

### 2.4.2 Contraintes principales

Nous avons limité l'étude des contraintes au modèle M30 . La figure 25 montre les contraintes et les directions principales sous la charge répartie de  $150 \text{ kg/m}^2$  .

On relève immédiatement que le comportement du PH est dans ce cas aussi essentiellement " flexionnel " et on ne retrouve pas le comportement membranaire . Les contraintes sont de même nature sur chaque face , compression à la face supérieure et traction à la face inférieure .

Il y a certainement des réserves à faire quant à la géométrie exacte du modèle , le mode de simulation , les incertitudes de mesure , etc ... mais les imprécisions qui en découlent ne peuvent justifier à elles seules la prépondérance de la flexion et il est pratiquement certain que le comportement réel du modèle est principalement flexionnel .

La décomposition des contraintes , figures 26 et 27 , nous permet de vérifier la petitesse des contraintes de membrane . En effet , la contrainte maximale de membrane qui apparaît en vi n'est que de  $1.95 \text{ kg/cm}^2$  alors que la théorie de la membrane prévoit une contrainte de  $3.33 \text{ kg/cm}^2$  . Partout ailleurs les contraintes de l'effort normal sont négligeables .

Concernant les directions principales , les résultats expérimentaux ne permettent pas de tirer une conclusion sûre . Mais comme on l'a déjà signalé , les directions principales sont très sensibles , même à de très faibles imprécisions .



**CHARGE REPARTIE DE 150 kg/cm<sup>2</sup>**

- Contr. princ. de flexion -

(Modèle M30)

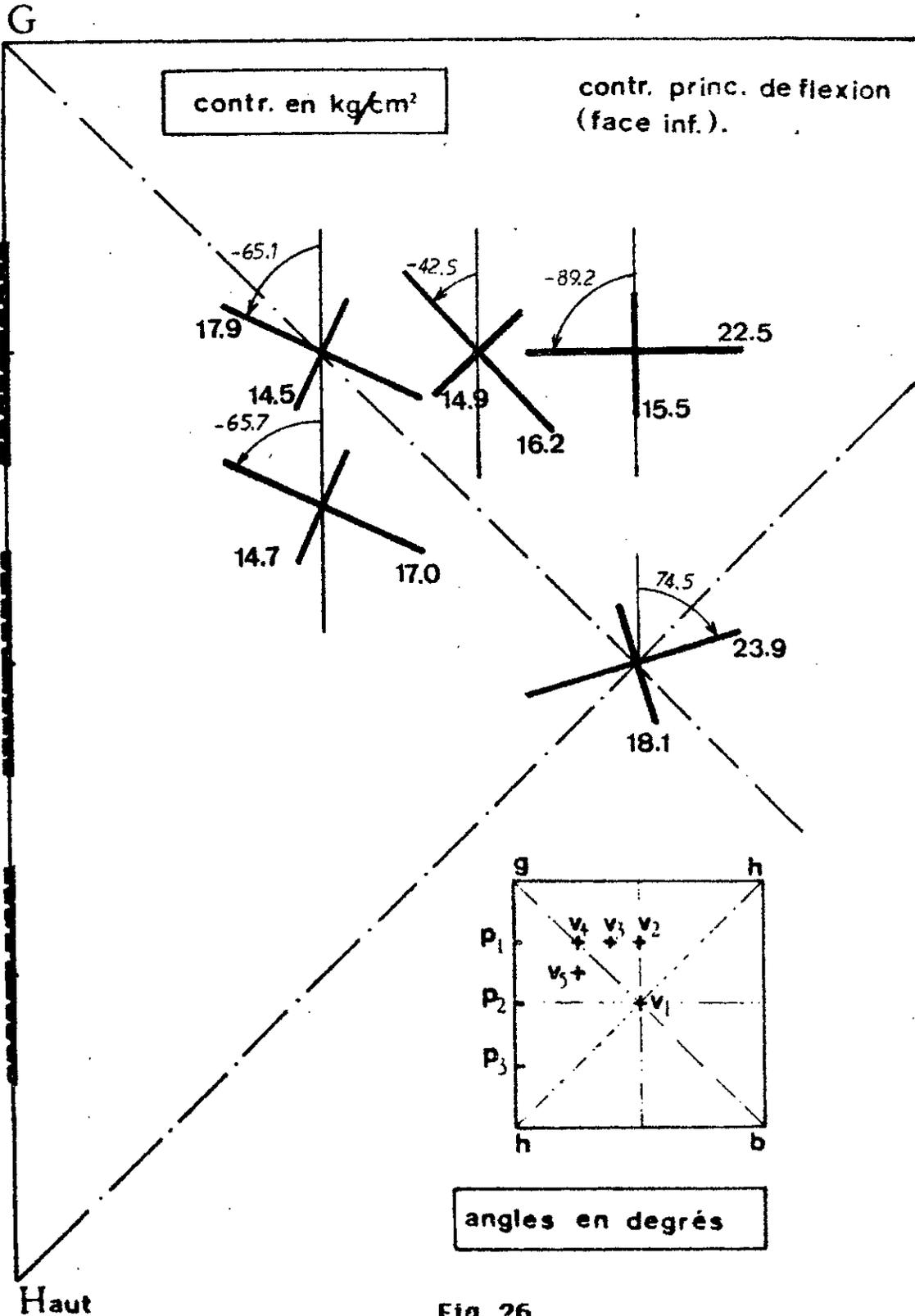


Fig. 26

**CHARGE REPARTIE DE 150 kg/cm<sup>2</sup>**  
**- Contr. princ. de l'effort normal -**

( Modèle M30 )

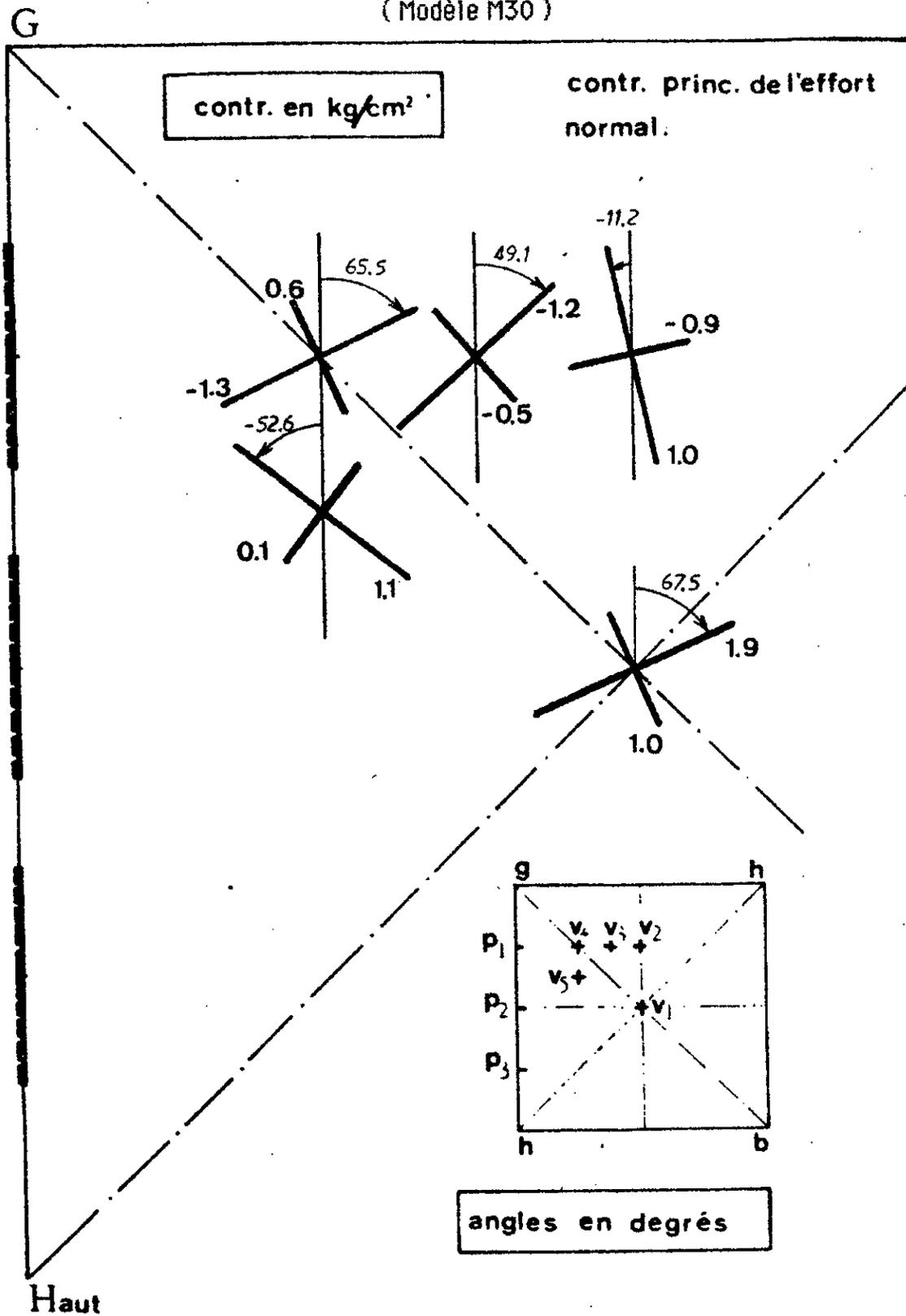


Fig. 27

## 2.5 Image des contraintes

Nous avons vu dans les paragraphes précédents les états de contraintes qui apparaissent aux surfaces du voile et des poutres, sous l'action de charges localisées et d'une charge répartie. Il serait intéressant de représenter, sur une même figure, l'ensemble des états de contraintes pour chaque cas considéré.

Chaque rosette correspond à un point de mesure où les contraintes principales ( $S_1$  et  $S_2$ ) sont déterminées et dont les caractéristiques du cercle de MOHR des contraintes " $d$ " et " $r$ " sont calculées par :

$$d = (S_1 + S_2)/2 \quad \text{et} \quad r = (S_1 - S_2)/2 \quad \dots \quad (2.8)$$

Nous pouvons donc représenter l'état de contraintes de chacun des points de mesure par un point de la moitié supérieure du plan rapporté aux axes orthogonaux " $d$ " et " $|r|$ " obtenant ainsi ce qu'on appelle une "**image des contraintes**" [17]. Cette image donne une idée très instructive sur le comportement général de la structure lorsqu'on représente sur la même figure des états de contraintes simples dont les images sont réduites à des droites issues de l'origine.

Avant de commenter les images obtenues, signalons qu'on peut très bien utiliser une représentation en fonction des caractéristiques " $D$ " et " $R$ " du cercle de MOHR des déformations qui sont reliées aux caractéristiques " $d$ " et " $r$ " par les relations suivantes :

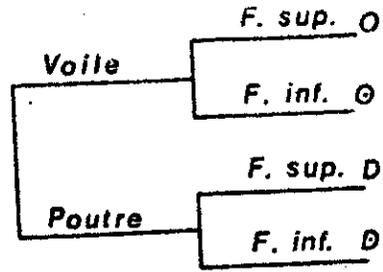
$$D = d(1-\mu)/E \quad \text{et} \quad R = r(1+\mu)/E \quad \dots \quad (2.9)$$

Les figures 28 et 29 montrent les images des contraintes du modèle M30 dans les cas d'une charge concentrée au milieu et d'une charge répartie. On voit que dans les deux cas de charge le voile travaille en traction biaxiale ( points expérimentaux situés dans le domaine des enceintes sous pression ) à la face inférieure et en compression biaxiale ( domaine des enceintes en dépression ) à la face supérieure

Sous la charge répartie, les points expérimentaux de l'image sont très proches de l'axe des abscisses qui représente l'image des contraintes d'une sphère sous pression ou en dépression.

Lors des autres essais effectués sur ce modèle après certaines transformations [33], des rosettes ont été ajoutées sur les poutres de rive afin de déterminer l'état de contraintes en certains de leurs points. Ceci a permis de construire une image des contraintes plus complète et nous a permis de faire une observation importante. En effet, tous les points expérimentaux des poutres se situent entre les droites de la traction et de la compression simple alors que les points expérimentaux du voile proprement dit se trouvent dans le domaine des enceintes sous pression ou en dépression.

L'image des contraintes du modèle M45 sous une charge concentrée en son centre est représentée à la figure 30. Ici, il n'y a pas une différence sensible entre les différents points expérimentaux qui sont globalement compris entre les droites représentant les images du cylindre sous pression et de la traction pour la face inférieure et les images du cylindre en dépression et de la compression pour la face supérieure.



Charge de 100 kg au centre

Modèle M30

Chap. 2 Etude expérimentale

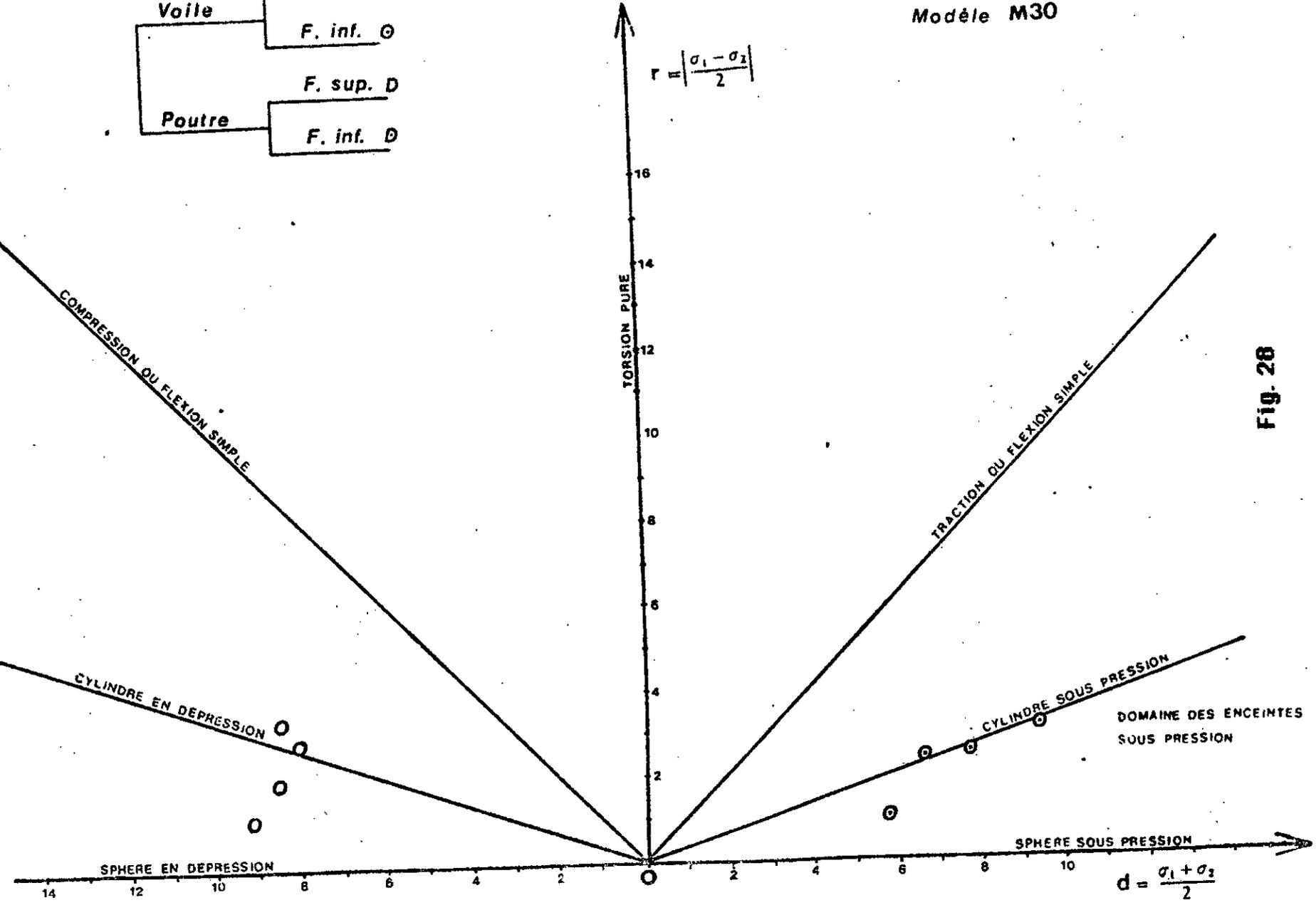
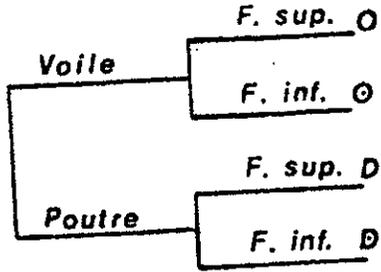


Fig. 28

Charge répartie 150 kg/m<sup>2</sup>

Modèle M30



$$r = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|$$

Chap. 2 Etude expérimentale

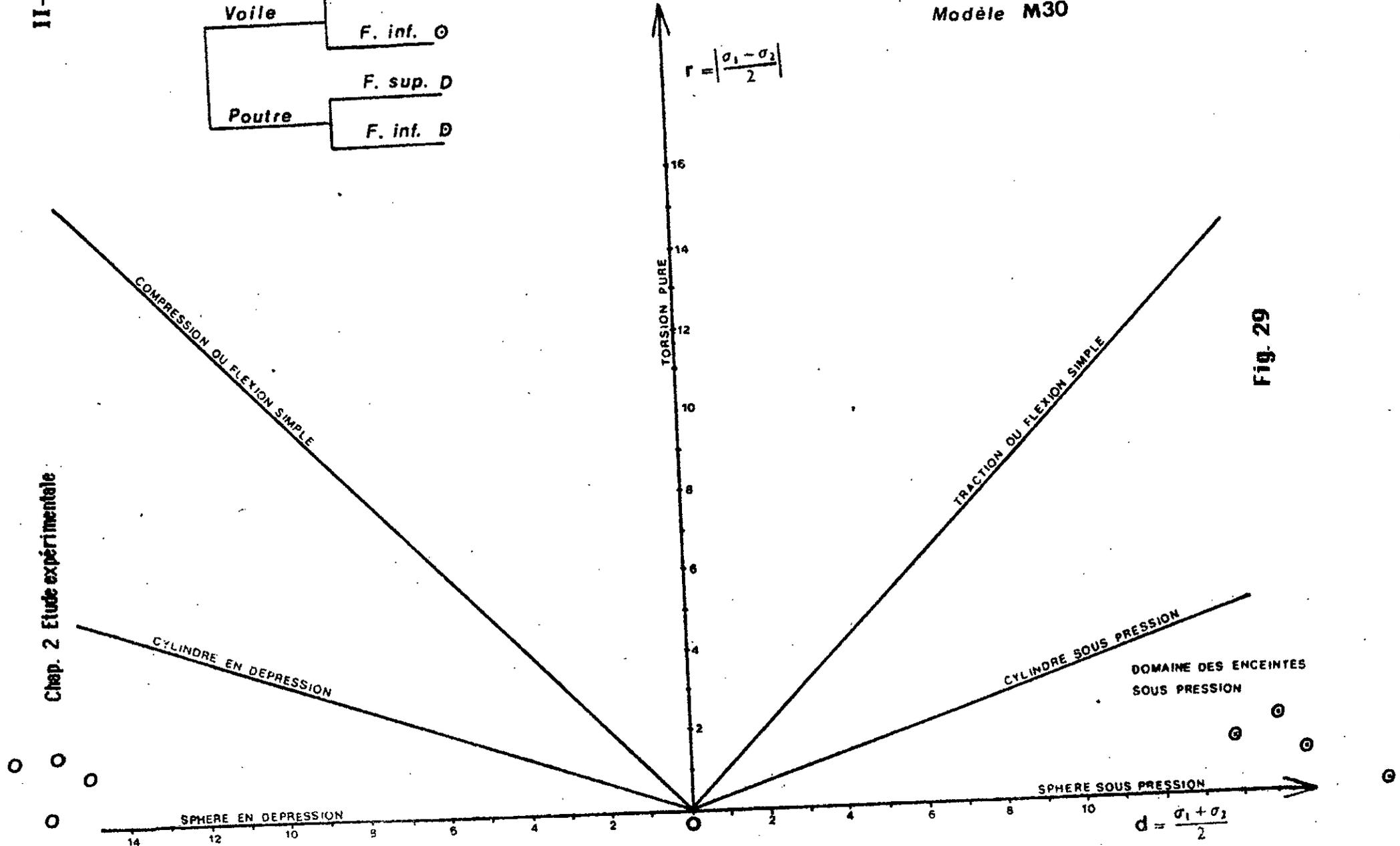


Fig. 29

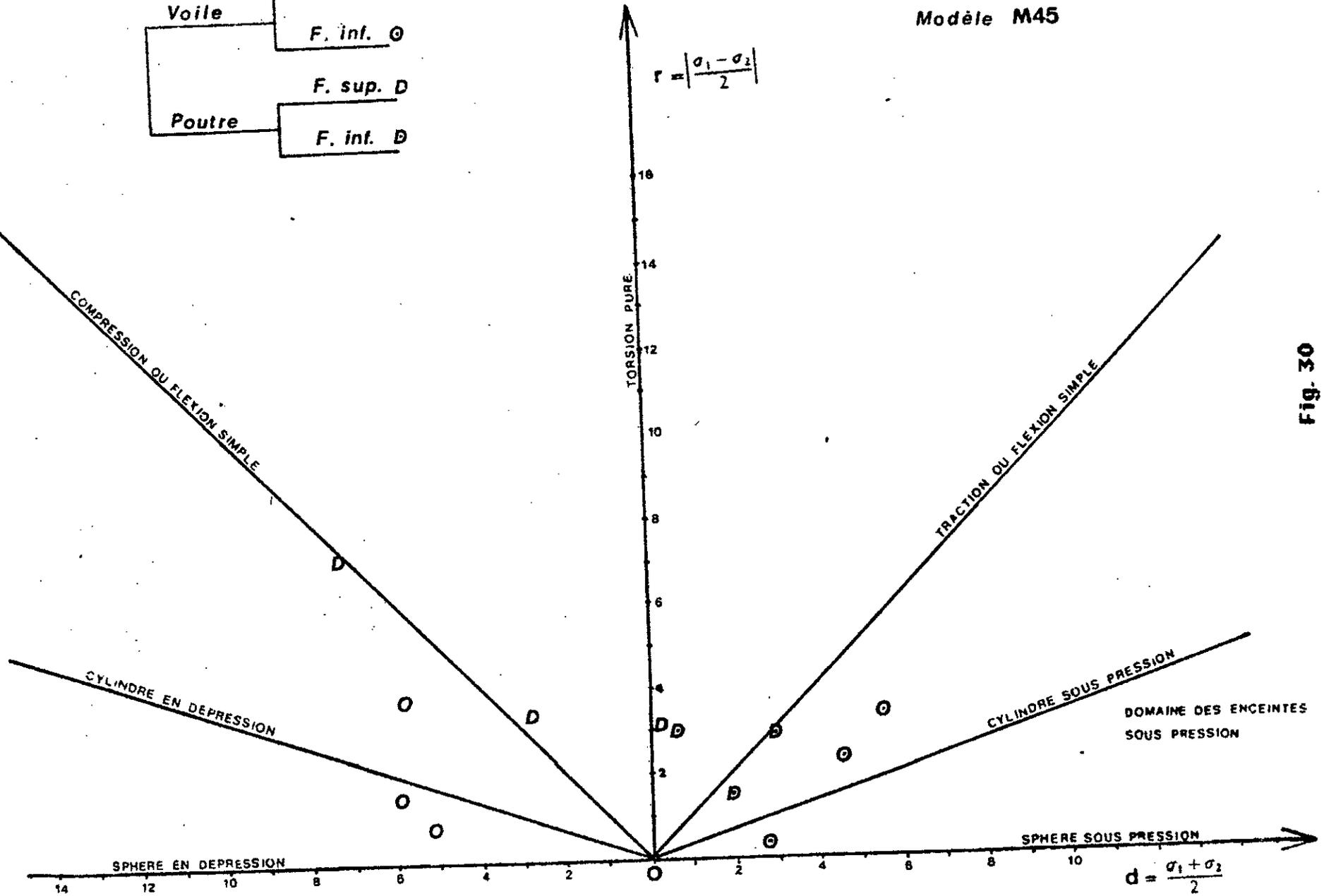
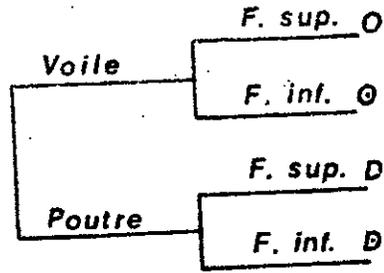


Fig. 30

## 2.6 Comparaison des voiles à une plaque

Il nous a paru intéressant de comparer le paraboloïde hyperbolique, à une plaque qui aurait les mêmes dimensions en plan que le voile proprement dit et la même épaisseur afin de voir si le PH constitue une structure plus avantageuse et tâcher d'estimer les éventuels avantages. Il faut dire aussi que le comportement flexionnel du PH, aussi bien sous des charges concentrées que sous une charge répartie, incite à cette comparaison.

On doit néanmoins reconnaître que la comparaison n'est pas facile pour diverses raisons. Si le modèle théorique répond de manière précise à la géométrie et aux conditions de contour imposées, le modèle expérimental par contre est loin d'être une pièce de haute précision; sans parler de l'influence des phénomènes tels que le fluage, le retrait, la fissuration, ... A cela, il faut encore ajouter le fait que, même pour les plaques, nous ne disposons pas de solutions théoriques pour tous les cas d'appuis.

Nous avons vu que les bords des voiles sont encastres dans des poutres élastiques; comme on ne dispose pas de solution de référence pour une plaque avec de telles conditions de contour, nous avons retenu deux cas: la plaque simplement appuyée et la plaque encastree.

Les calculs ont été effectués pour une plaque carrée de  $2m \times 2m$ , 1.5 cm d'épaisseur et, pour le module de YOUNG (E) et le coefficient de POISSON ( $\mu$ ) nous avons utilisé les valeurs du modèle M30.

Le choix d'une théorie pour le calcul d'une plaque est généralement déterminé en fonction de l'épaisseur et du rapport  $\frac{f}{e_p}$  de la flèche de la plaque à son épaisseur. Si on considère les flèches mesurées, on constate qu'elles sont faibles puisque la flèche maximale, observée au centre du modèle M30 sous l'effet de la charge répartie, vaut 3.58 mm et ne représente que 23.9 % de l'épaisseur. Vu que l'épaisseur est relativement faible par rapport à la portée de la structure, nous pouvons retenir la théorie de la flexion des plaques minces élastiques.

Les solutions de référence des plaques considérées, plaques simplement appuyées et encastées soumises à une charge concentrée au centre et à une charge répartie, nous sont fournies par TIMOSHENKO-WOINOWSKY-KRIEGER [13]

Les moments sous la charge concentrée ont été calculés en considérant les 100 kg répartis sur une section annulaire de 10 cm<sup>2</sup> de surface et de 3 cm de rayon intérieur, ce qui correspond approximativement aux conditions de l'expérience.

Les valeurs des contraintes et des flèches obtenues sont regroupées dans les tableaux I, II, III et IV avec les résultats expérimentaux.

Pour les plaques, les contraintes indiquées sont celles qui agissent à la face inférieure; de plus, pour les points v1 et v4 les contraintes ont été calculées suivant des directions parallèles aux médianes.

Pour le cas de la charge concentrée, tableaux I et II, la plaque appuyée est nettement plus défavorable, alors que la plaque encastée présente des résultats comparables à ceux des PH.

## CHARGE DE 100 kg AU CENTRE

**Tableau I : Contraintes principales en kg/cm<sup>2</sup>**

Point	Modèle M30		Modèle M45		Plaque	
	Face sup.	Face inf.	Face sup.	Face inf.	Appuyée	Encastrée
V1	-36.0	40.8	-35.2	34.5	84.8	72.0
	-34.6	31.5	-33.0	28.4	84.8	72.0
V2	-11.8	12.3	-9.4	8.9	25.3	13.6
	-4.9	6.1	-1.9	2.1	12.6	-2.0
V3	-11.2	9.4	-7.3	6.7	21.9	11.0
	-7.0	4.7	-4.4	2.4	10.7	-3.6
V4	-10.4	6.8	-5.9	2.9	10.8	-0.2
	-6.5	4.8	-4.3	2.4	10.8	-0.2

**Tableau II : Déplacements verticaux en mm**

Point	Paraboloïde Hyperbolique		Plaque	
	Modèle M30	Modèle M45	Appuyée	Encastrée
Y1	1.81	1.68	4.30	2.10
Y2	1.40	1.22	2.71	1.00
Y3	1.26	1.18	2.50	0.90
Y4	1.10	0.96	1.92	0.60

N.B. Le signe moins indique une compression

Sous une charge répartie , tableaux III et IV , on retrouve les mêmes tendances mais la plaque encadrée semble plus avantageuse . Il faut cependant remarquer qu'une plaque " encadrée élastiquement " présenterait des résultats plus proches de ceux de la plaque simplement appuyée que de la plaque parfaitement encadrée , et serait donc moins avantageuse qu'un PH .

Pour la charge répartie , on dispose également d'une solution de référence [13] pour une plaque " appuyée élastiquement " sur des poutres de section constante . En prenant comme section droite la section médiane des poutres de rive , on trouve au milieu de la plaque une flèche de 15.6 mm avec les caractéristiques élastiques (  $E$  et  $\mu$  ) de M30 et une flèche de 15.3 mm avec les caractéristiques de M45 .

Néanmoins , dans la référence citée seule la " rigidité flexionnelle " des poutres intervient , il n'est pas tenu compte de la " rigidité torsionnelle " qui intervient normalement dans le cas de l'encastrement . Or la rigidité torsionnelle peut influencer grandement la flèche .

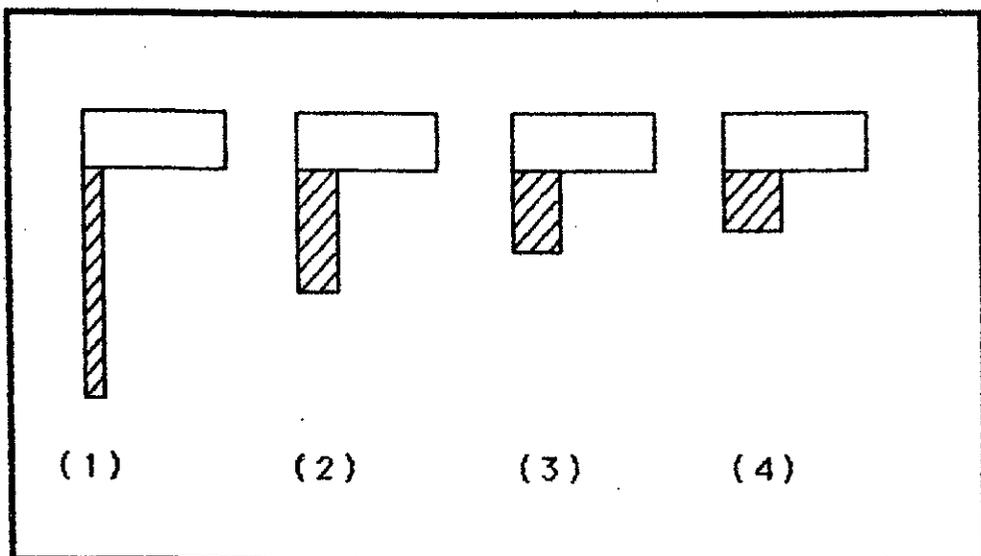


Fig. 31

A la figure 31 sont représentées quatre formes possibles de la section droite d'une poutre de rive. Dans le premier cas de figure, la section tend vers une " lame mince " et la rigidité torsionnelle est négligeable. Dans le cas numéro 4, la section est carrée et la rigidité torsionnelle est maximale. Les calculs de flèche effectués en tenant compte de la rigidité torsionnelle montrent que la flèche du cas n°1 peut être 2 à 4 fois supérieure à celle du cas n°4.

**CHARGE REPARTIE DE 150 kg/m<sup>2</sup>****Tableau III : Contraintes principales en kg/cm<sup>2</sup>**

Point	Modèle M30		Modèle M45		Plaque	
	Face sup.	Face inf.	Face sup.	Face inf.	Appuyée	Encastrée
V1	-19.3	23.0			68.2	32.6
	-16.9	18.6			68.2	32.6
V2	-18.5	17.9			56.0	19.5
	-15.2	17.7			49.7	15.1
V3	-17.4	16.1			54.0	17.5
	-13.9	11.3			46.6	12.9
V4	-16.1	16.8			41.9	11.6
	-15.8	13.0			41.9	11.6

**Tableau IV : Déplacements verticaux en mm**

Point	Paraboloïde Hyperbolique		Plaque	
	Modèle M30	Modèle M45	Appuyée	Encastrée
V1	3.58	3.10	9.10	2.70
V2	3.26	2.57	6.60	1.70
V3	2.94	2.47	6.10	1.50
V4	2.78	2.17	4.80	1.10

N.B. Le signe moins indique une compression

## 2.7 Essais à la rupture

Il faut tout d'abord préciser que les essais à la rupture ont été effectués sur des modèles ayant subi quelques transformations. Ces transformations, au niveau des appuis, ont été motivées par le désir d'étudier l'influence du mode d'appui sur le comportement général des modèles.

Après chaque transformation une campagne d'essais est menée et une analyse, semblable à celle qu'on vient de décrire dans les paragraphes précédents, est faite.

Nous allons passer en revue les différentes transformations apportées; cela va nous permettre de décrire en même temps les autres essais effectués et l'état des modèles lors des essais à la rupture.

### 2.7.1 Autres essais effectués

Pour le modèle M30 par exemple, une fois les essais décrits dans ce texte terminés et étant assuré de la non détérioration du modèle, nous avons transformé les articulations des sommets bas en encastres obtenant ainsi un modèle avec de nouvelles conditions d'appuis (modèle M30b).

Après les essais, on s'est assuré que le modèle n'a pas été détérioré avant de fixer les liaisons des sommets hauts pour obtenir un modèle dont les quatre sommets sont encastres (modèle M30c).

Après une nouvelle vérification de la non détérioration du voile, on a renforcé les poutres de rive avec des plats métalliques, augmentant ainsi leur rigidité flexionnelle de près de 50% (modèle M30c).

L'essai à la ruine a été réalisé sur ce dernier modèle, c'est-à-dire avec les quatre sommets encastres et les poutres de rive renforcées.

En ce qui concerne le modèle M45 , nous avons déjà signalé que l'articulation d'un des deux sommets bas était constituée par une glissière qu'on pouvait bloquer ou libérer .

Des essais ont été effectués dans les deux cas : avec la glissière bloquée ( expérience analysée dans ce texte ) et avec la glissière libre ( modèle M45b ).

L'essai à la ruine a été mené avec la glissière libre .

Les détails de ces autres essais et l'analyse des résultats obtenus sont consignés dans les références [31] et [33].

Nous pouvons passer maintenant à la description des essais à la ruine . Une étude détaillée sera consacrée au premier modèle car dans ce cas les flèches sont faibles et nous avons pu effectuer des mesures sous des charges proches de la charge de rupture , ce qui nous a permis de tracer un diagramme charge-flèche précis .

Par contre pour le deuxième modèle ( M45b. ) , qui était librement dilatable, les flèches mesurées deviennent très vite ( c-à-d pour des charges encore faibles ) importantes et dépassent la " course " maximale des transducteurs .

## 2.7.2 Essai à la ruine du modèle M30

La charge, croissant de 10 en 10 kg (vers la fin les incréments sont plus faibles : de 5 à 1 kg), est appliquée au centre du voile, dont le béton est alors âgé de 353 jours, jusqu'à la ruine.

### 2.7.2.1 Fissuration du voile

Les premières fissures (il s'agit de fissures bien nettes) apparaissent sous des charges relativement importantes. Sous une charge de 400 kg on voit trois fissures nettes à la face inférieure du voile qui partent du centre du PH, dans des directions voisines des médianes (figure 32a).

Sous des charges plus importantes, les premières fissures se développent encore pendant que de nouvelles fissures apparaissent, toujours à partir du centre (figure 32b).

À la face supérieure les fissures apparaissent beaucoup plus tardivement; en fait, on voit des fissures importantes seulement au voisinage de la charge de rupture (493 kg). Dès l'application de cette charge de 493 kg, le centre du voile commence à s'enfoncer, lentement d'abord puis plus rapidement.

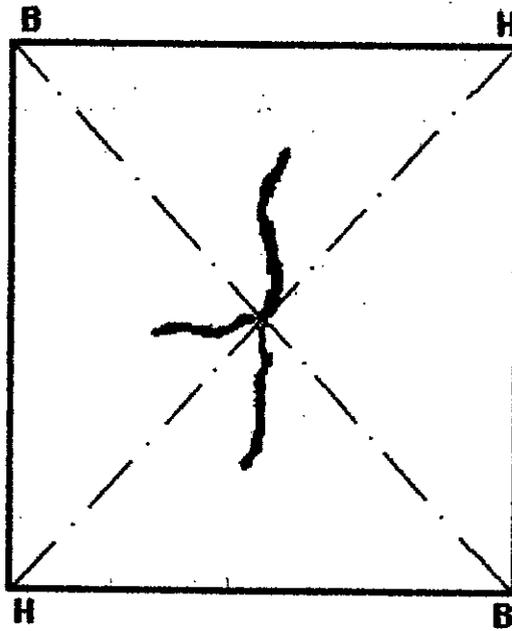
Toujours à la face supérieure, on remarque des fissures qui courent le long des rives dont elles ne s'écartent qu'à l'approche des appuis (photos 7 et 8).

À la face inférieure, sous la charge de rupture, une fissure proche de la diagonale reliant les sommets hauts traverse le voile de bout en bout. Suivant la diagonale reliant les sommets bas les fissures s'arrêtent à peu près à mi-distance du centre du PH et des appuis bas. Deux grandes fissures longent grossièrement les médianes (photos 9 et 10).

**Fissuration de la face inférieure**

(Modèle M30)

a)  $F = 403$  kg



b)  $F = 473$  kg

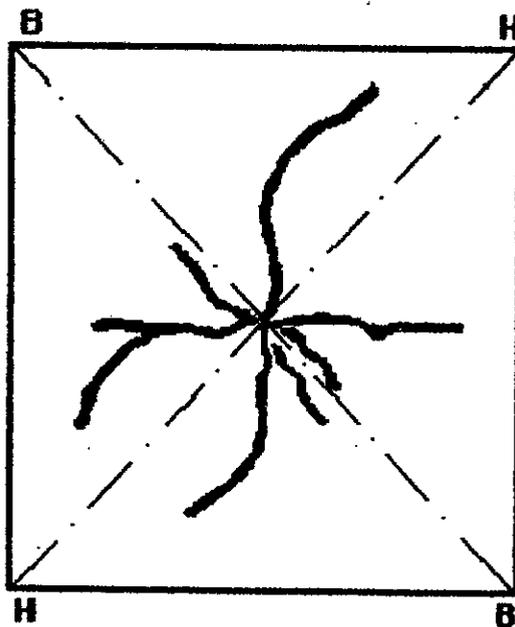


Fig. 32

### Mécanisme de fissuration.

Sur la face inférieure la fissuration se concentre autour des diagonales .

Les fissures autour de la diagonale reliant les appuis bas s'arrêtent approximativement à mi-distance entre le milieu du voile et les appuis .

De plus , il y a deux grandes fissures suivant les médianes . On a noté que la fissure suivant la diagonale reliant les sommets hauts s'est développée plus tôt que toutes les autres .

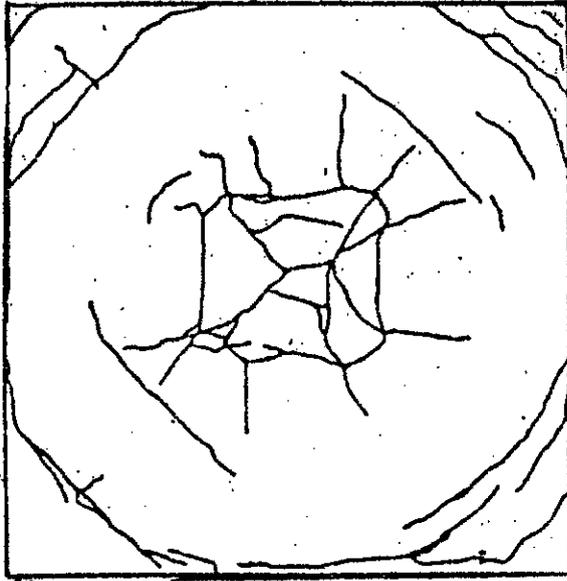
A la face supérieure , on remarque qu'il y a en trois coins des fissures quasi perpendiculaires aux diagonales qu'elles coupent . Les deux fissures proches des sommets hauts sont les plus importantes . Ces fissures sont probablement dues à la torsion qui serait donc plus importantes vers les appuis hauts ; n'oublions pas que les quatre sommets sont encastres .

Les fissures le long des rives sont dues à l'encastrement des bords dans les poutres .

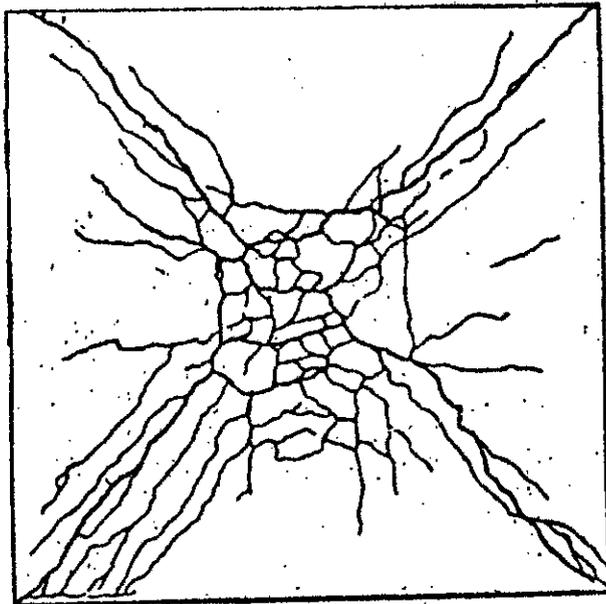
Au milieu , les fissures ont des formes circulaires .

La fissuration du PH présente en fin de compte beaucoup de similitudes avec celle d'une dalle carrée simplement appuyée sur quatre poutres de rive comme le montre la figure 33 que nous avons tirée de la référence [14] .

**Fissuration d'une dalle**



*Fissuration observée sur la face supérieure d'une dalle simplement supportée sur quatre poutres de rive.*



*Fissuration observée sur la face inférieure d'une dalle simplement supportée sur quatre poutres de rive.*

**Fig. 33**

### 2.7.2.2 Fissuration des poutres de rive

Les poutres ont été très faiblement fissurées ; les fissures importantes , très superficielles et de 3 à 5 cm de long , apparaissent au voisinage des sommets bas .

Sur les faces latérales ( verticales ) on a relevé la présence de fissures très fines quasiment verticales ; elles étaient plus abondantes vers les appuis bas . Ces fissures n'atteignent jamais la face supérieure sauf , encore une fois , au voisinage des appuis bas .

### 2.7.2.3 Rupture du voile

Sous la charge de 493 kg , le fluage devient visible et va en s'accroissant jusqu'à la rupture proprement dite qui se produit par poinçonnement .

Il convient de remarquer que la destruction du voile est très localisée ( centre ) .

#### Epaisseur réelle du voile .

Après destruction du voile nous avons effectué quelques mesures de l'épaisseur ; cette opération nous a permis de constater que l'épaisseur présentait une régularité assez satisfaisante sauf en quelques points , comme le centre par exemple où on a mesuré 2 mm d'épaisseur . Pour le modèle M45 qui présentait une irrégularité appréciable , un relevé systématique des épaisseurs a été réalisé .

#### 2.7.2.4 Analyse du diagramme charge-flèche

Nous avons pu mesurer les flèches au centre du voile jusqu'à la charge de 453 kg, ce qui nous a permis de recueillir un total de 40 points expérimentaux.

La dernière flèche mesurée, sous 453 kg, est de 16.1 mm c'est-à-dire un peu plus que l'épaisseur moyenne du voile.

Le diagramme expérimental donnant la flèche au milieu du voile en fonction de la charge appliquée est représenté à la figure 34. Les points expérimentaux sont visibles sur le schéma et permettent d'avoir une idée précise sur l'approximation donnée par la courbe en trait plein.

On peut distinguer sur le diagramme les parties suivantes :

1) Le premier segment représente le domaine élastique linéaire. La proportionnalité entre la charge et la flèche est bien vérifiée. L'extrémité de cette première partie correspond à la charge de 140 kg. Sous cette charge la flèche (au centre) vaut 2.2 mm c'est-à-dire 14.6% de l'épaisseur.

Les contraintes principales au milieu du PH (sous 140 kg) valent :

- 51.4 kg/cm<sup>2</sup> et - 42.7 kg/cm<sup>2</sup> à la face supérieure et 51.7 kg/cm<sup>2</sup> et 39.9 kg/cm<sup>2</sup> à la face inférieure.

2) A 140 kg on voit apparaître le premier coude du diagramme mais l'inclinaison de ce deuxième tronçon par rapport au premier est assez faible.

Cette partie marque vraisemblablement l'apparition des premières fissures. En effet, on vient de voir que sous 140 kg la traction maximale vaut 51.7 kg/cm<sup>2</sup> c'est-à-dire le douzième de la résistance à la compression à 66 j du micro-béton qui représente approximativement la résistance à la traction du mortier. Cette deuxième phase du diagramme est linéaire tout comme la première.

II-76

Chap. 2 Etude expérimentale

Diagramme charges-flèches  
au centre du voile

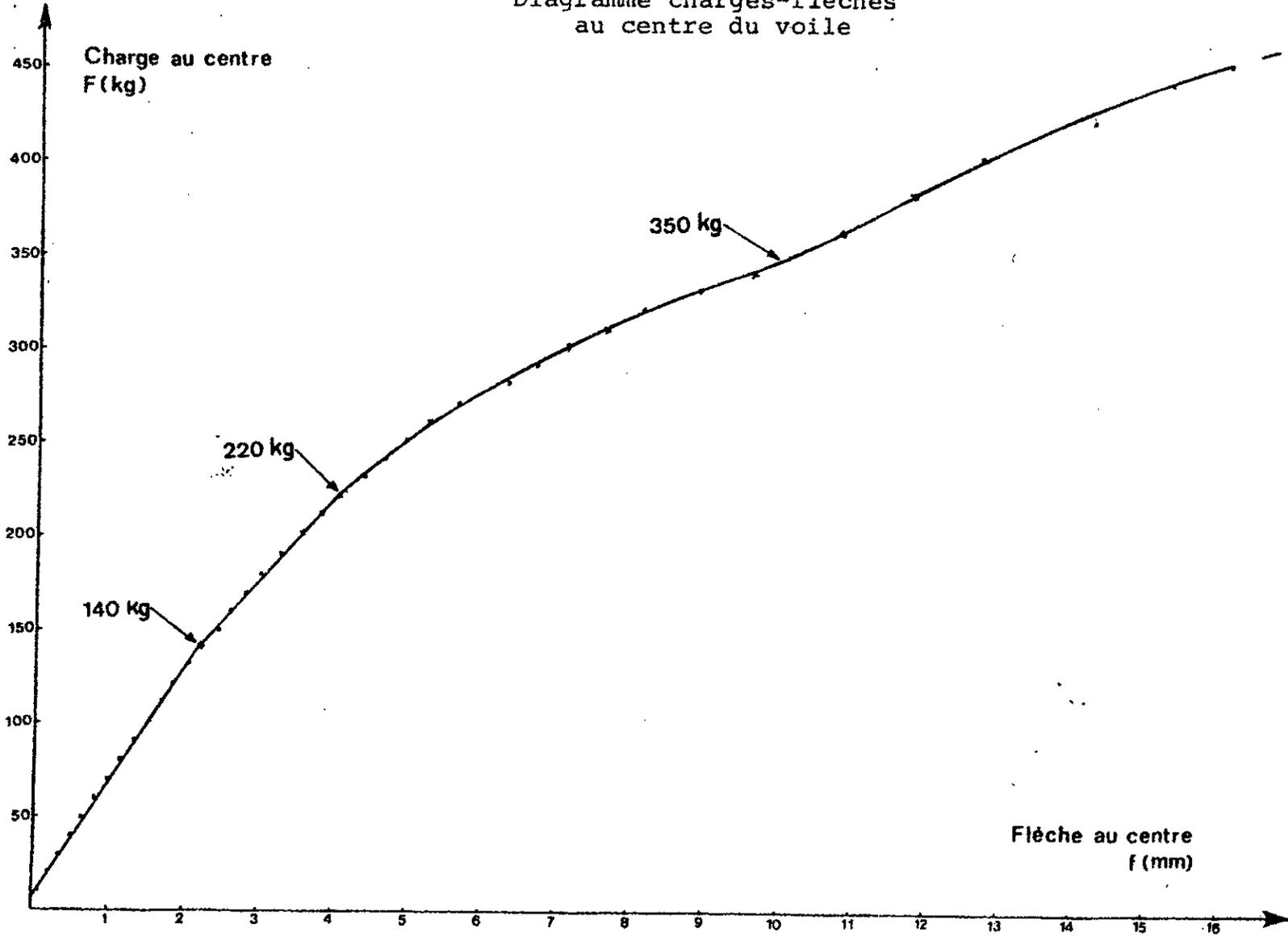


Fig. 34

3) A partir de 220 kg le diagramme devient courbe et l'accroissement de la flèche devient plus rapide . Pour la charge de 220 kg la flèche vaut environ 4 mm ce qui correspond à 26.7% de l'épaisseur .

La charge de 220 kg est probablement la " charge limite de flexion " de ce paraboloïde hyperbolique . S'il en est ainsi , cela signifierait que le troisième tronçon et tous les suivants représentent le " comportement post-critique " de la structure .

Ce comportement est dû au développement d'un " effet de membrane " qui se matérialise par l'apparition de contraintes de membrane ( tractions et compressions ) qui réagissent contre la charge appliquée .

4) Lorsque la charge atteint 350 kg le diagramme se redresse assez nettement et l'accroissement de la flèche est encore plus rapide .

Si on admet que la charge de 220 kg est la limite de flexion , on voit que l'effet de membrane a une importance considérable . En effet , il permet de porter la charge de rupture à 493 kg , ce qui veut dire qu'il a permis au voile de supporter une charge supplémentaire de l'ordre de 124% de sa limite de flexion .

### 2.7.3 Essai à la ruine du modèle M45

Les essais menés sur ce modèle étant moins nombreux, le jour du test à la rupture le béton n'était âgé que de 39 jours.

#### 2.7.3.1 Description de l'essai

Comme pour le cas précédent, la sollicitation est appliquée au centre du PH jusqu'à la ruine. Nous avons pu prendre des mesures jusqu'à la charge de 300 kg. Le tableau ci-après donne une idée (chiffrée) sur la variation de la flèche au milieu du voile en fonction de la charge appliquée.

**Tableau V**

Charge au centre ( kg )	50	75	100	150	200	250	300
Flèche au centre ( mm )	2.2	3.4	4.1	7.6	15.8	22.6	31.8
$\frac{\text{Flèche}}{\text{Épaisseur}} \times 100$	14.7%	22.7%	27.3%	50.7%	105.3%	150.7%	212.0%

On constate que jusqu'à 100 kg la réponse du voile est parfaitement linéaire et que sous 200 kg la flèche est égale à l'épaisseur présumée du PH.

Le diagramme expérimental charge-flèche est donné à la figure 35.

La rupture s'est produite par poinçonnement (comme dans le cas précédent) sous une charge de 460 kg.

La fissuration de ce modèle est pratiquement semblable à celle du premier modèle comme le prouvent les photos 11 et 12.

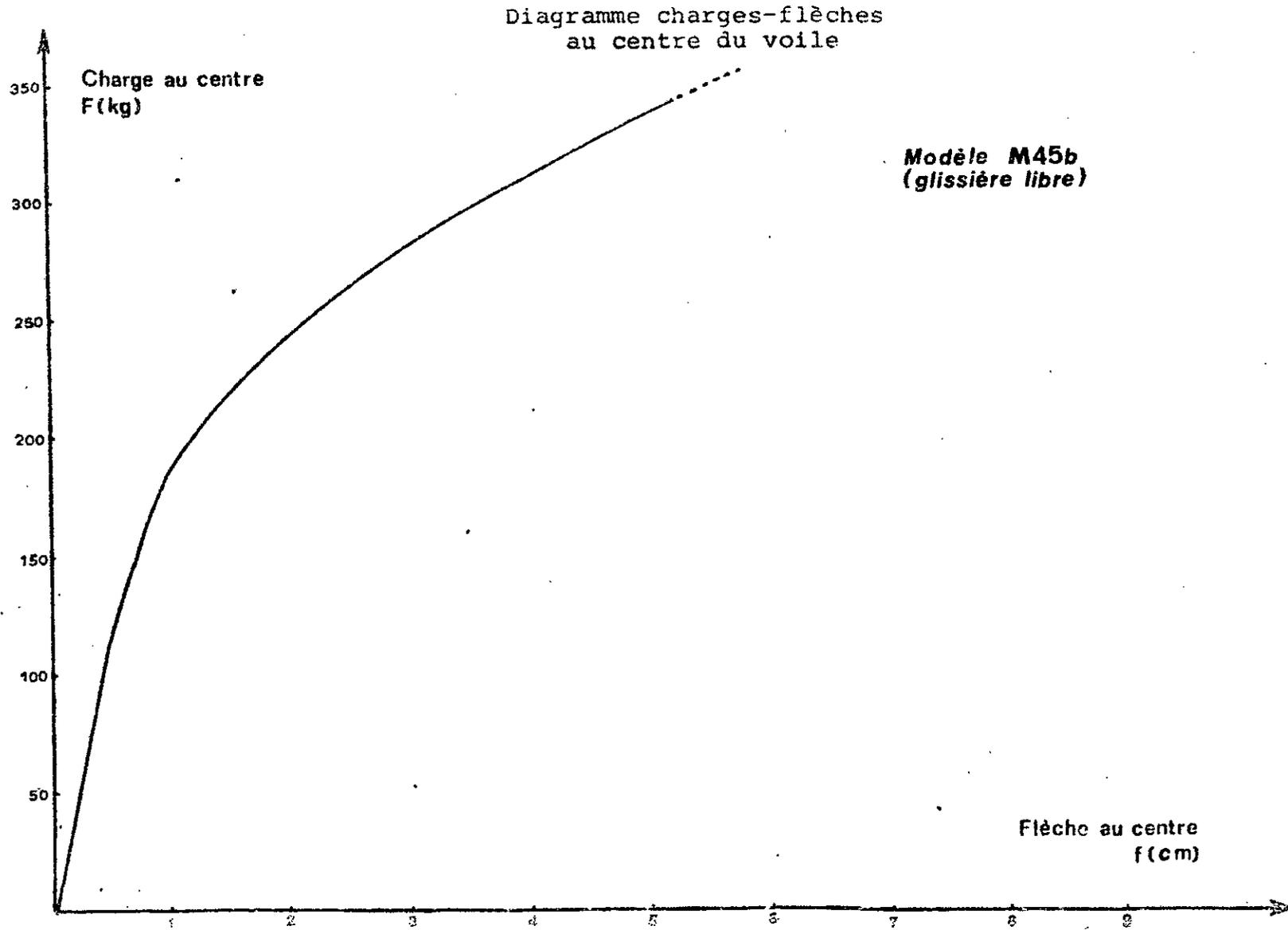
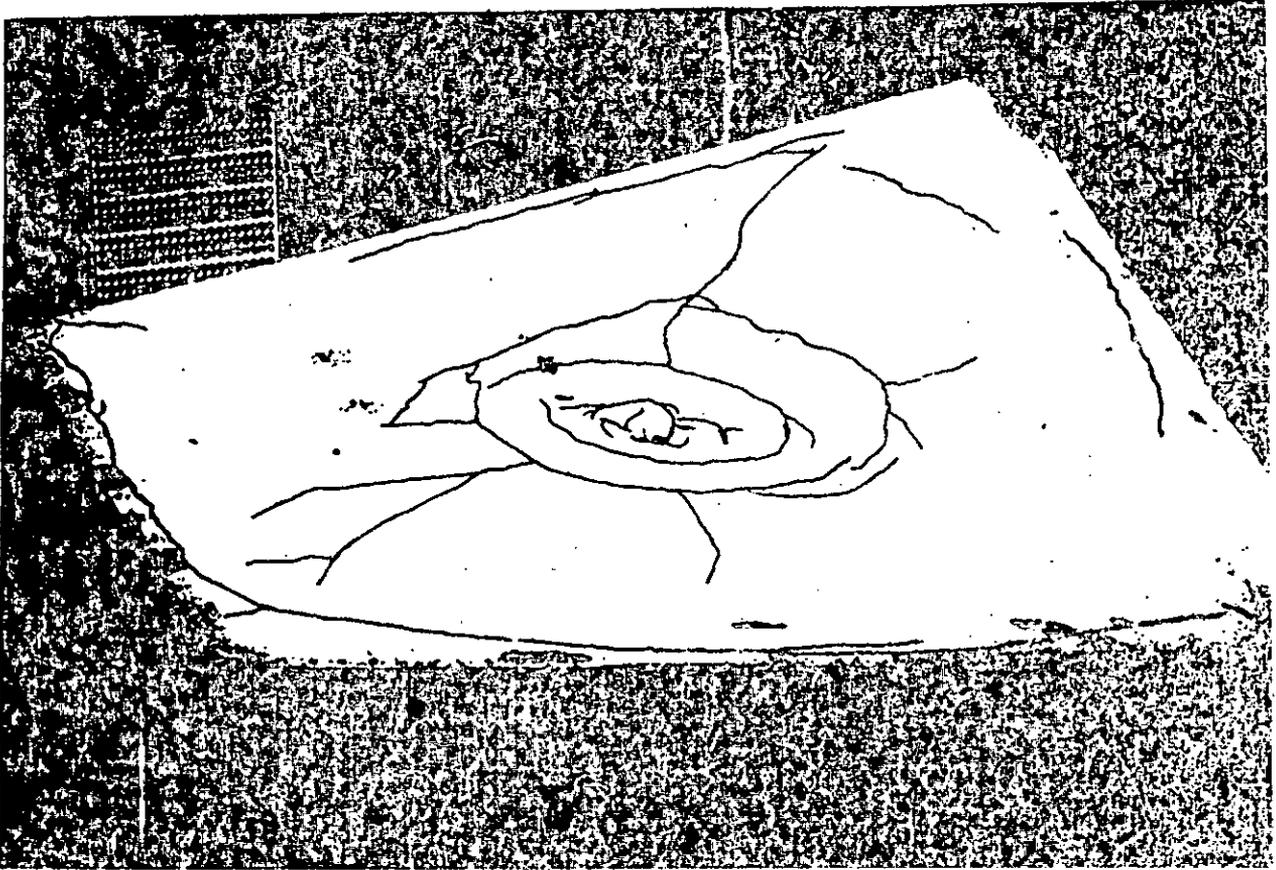


Fig. 35



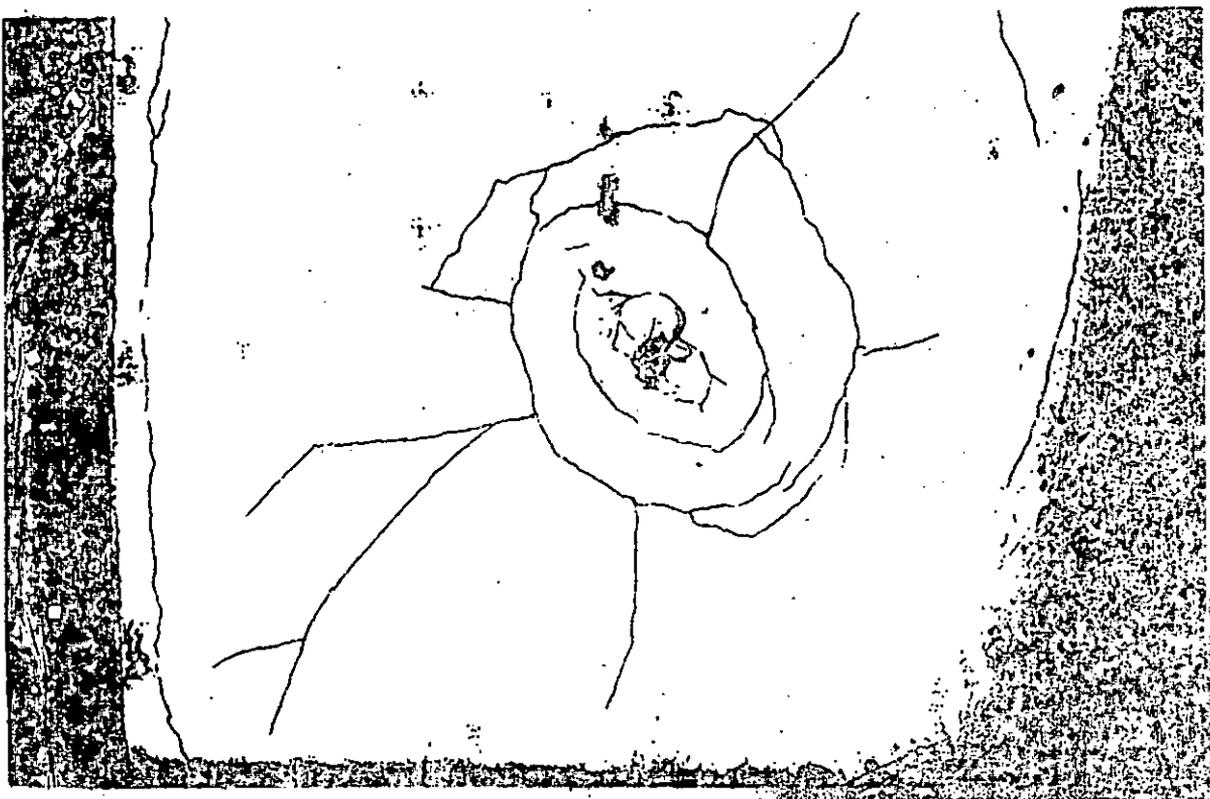
7

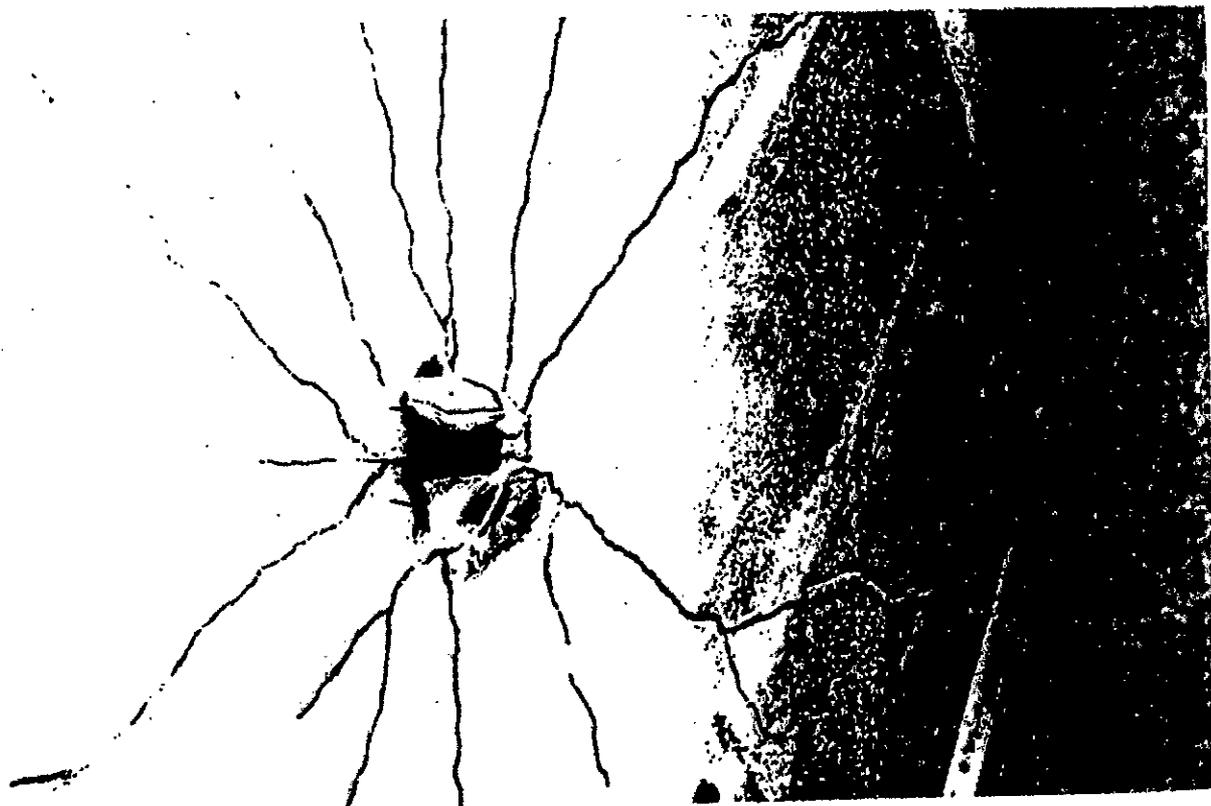
Face supérieure



8

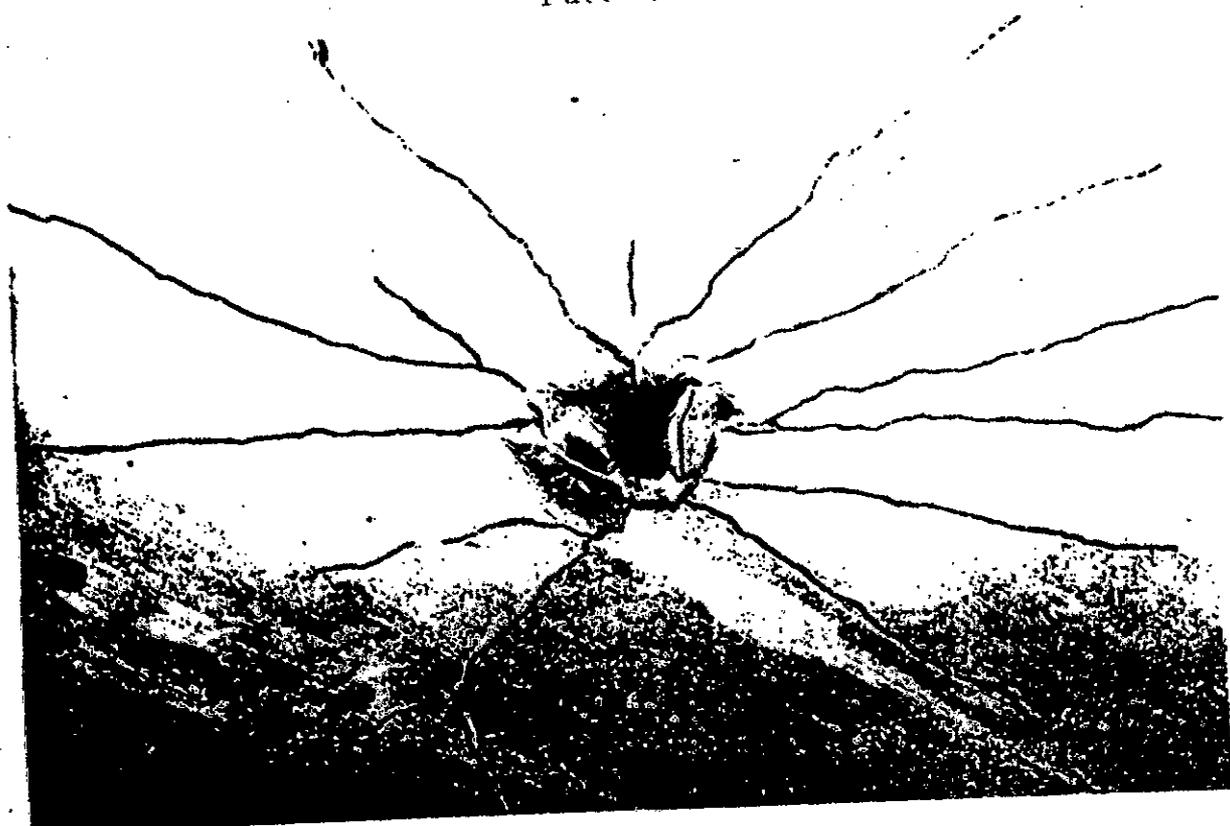
Face supérieure - partie centrale



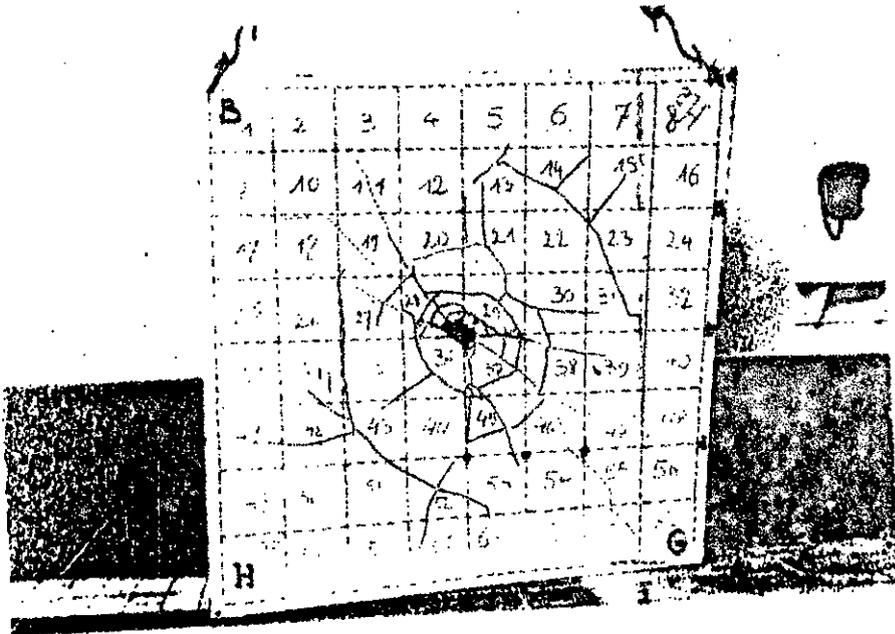


10

Face inférieure

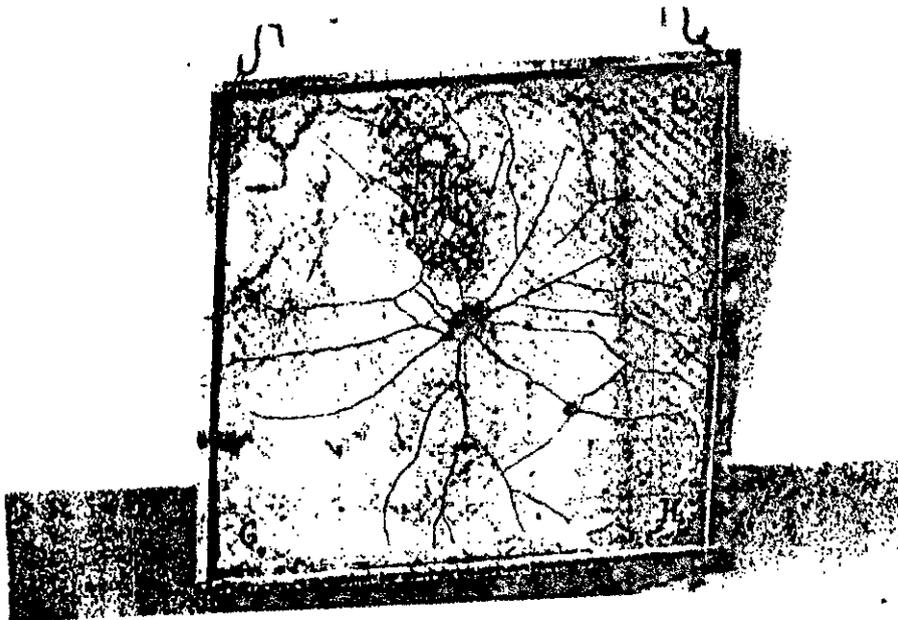


# 11



Face supérieure

# 12



Face inférieure

## 2.6 Conclusions

De l'étude expérimentale qu'on vient de décrire et en réponse aux questions qu'on s'est posées dans l'introduction, nous pouvons retenir les résultats essentiels suivants :

- que ce soit sous l'action d'une charge concentrée ou d'une charge répartie, le comportement du paraboloïde hyperbolique est essentiellement flexionnel et on ne retrouve nulle part un comportement membranaire.
- de manière générale les contraintes restent modérées.
- les contraintes de membrane aux surfaces du voile sont très faibles et, dans le cas de la charge répartie, elles sont nettement plus petites que celles prévues par la théorie de la membrane qui est la solution de référence habituellement admise pour ce type de chargement.
- le surbaissement n'influence pas le comportement général du paraboloïde hyperbolique.

De plus, nos autres essais décrits dans les références [31] et [33] montrent parfaitement que :

- le mode d'appui et la rigidité flexionnelle des poutres de rive ne modifient pas le comportement global du voile qui demeure flexionnel.

Il est clair qu'un modèle ayant une épaisseur de 1.5 cm pour une portée de 2 m n'est pas tout à fait un "voile mince" (ce qui pourrait représenter une structure de 20 m de portée pour une épaisseur de 15 cm); et une épaisseur

beaucoup plus faible ( 0.5 à 0.8 cm ) serait plus conforme à la définition d'un voile mince . Il faut néanmoins reconnaître que les contraintes technologiques ne permettent pas de réaliser un modèle réduit en micro-béton de très faible épaisseur .

Comme il est hors du doute que l'épaisseur affecte de manière appréciable la réponse du voile , ceci peut expliquer ( ou moins en partie ) le comportement flexionnel observé .

Ainsi , il devient nécessaire d'étudier l'influence de l'épaisseur et , de manière plus générale , de chercher une éventuelle relation entre le surbaissement , l'épaisseur et la portée afin de pouvoir dire que tel PH peut être considéré comme une membrane et tel autre comme une coque fléchie .

## Chapitre 3 : Etude théorique

### 3.1 Introduction

Le chapitre précédent nous a donné une idée qualitative sur le comportement réel des voiles minces en forme de paraboloides hyperboliques pour le type d'appui considéré. Cependant, beaucoup d'interrogations subsistent encore, comme par exemple l'influence de certains paramètres géométriques tels que l'épaisseur, le surbaissement, la rigidité des rives... sur le comportement général du voile.

Il faut toutefois reconnaître qu'il serait fastidieux et très coûteux de mener " expérimentalement " toutes les investigations encore nécessaires à la compréhension du comportement des PH et au choix d'une méthode de calcul.

La nécessité de mettre au point un modèle théorique, ou plus exactement un modèle numérique, devient évidente en raison des contraintes pratiques citées plus haut et des énormes possibilités de calcul qu'offre un tel modèle.

Le modèle numérique sera bien entendu établi en tenant compte des observations retirées de l'analyse expérimentale. On se gardera néanmoins d'essayer de retrouver exactement et en tout point les résultats expérimentaux car, comme on l'a déjà souligné, dans l'étude expérimentale beaucoup de phénomènes secondaires interviennent. Le modèle numérique devra cependant satisfaire " globalement " et " qualitativement " aux observations expérimentales.

### 3.2 Méthode adoptée

Nous avons opté pour une méthode du type " variationnel " en raison du peu de contraintes qu'elle impose . Il s'agit plus précisément d'une application de la méthode de RITZ ( [1] et [12] ) au problème qui nous intéresse .

Soulignons que la méthode de RITZ n'est en fait qu'une particularisation d'une méthode plus générale basée sur le concept de l'énergie potentielle totale minimum et appelée méthode de l'énergie .

#### 3.2.1 Description de la méthode

L'objectif est de déterminer les déplacements de n'importe quel point de la structure . Une fois les déplacements connus , on peut alors calculer les déformations , les éléments de réduction et les contraintes au point désiré .

Appelons  $u$  ,  $v$  et  $w$  les fonctions de déplacement et exprimons-les sous forme de séries :

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x,y) \dots \dots \dots (3.1a)$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1}^n b_i v_i(x,y) \dots \dots \dots (3.1b)$$

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^n c_i w_i(x,y) \dots \dots \dots (3.1c)$$

où  $a_i$  ,  $b_i$  et  $c_i$  sont des constantes " inconnues " et  $u_i$  ,  $v_i$  et  $w_i$  des fonctions " connues " ( choisies ) de  $x$  et  $y$  . Les fonctions  $u_i$  ,  $v_i$  et  $w_i$  sont choisies de manière à représenter le mieux possible les déplacements observés expérimentalement ; de plus , chaque fonction vérifie les conditions de contour (\*).

(\* ) Il n'est pas obligatoire que les fonctions  $u_i$  ,  $v_i$  et  $w_i$  vérifient intégralement toutes les conditions de contour [ 1 ] .

Les paramètres  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  seront déterminés en appliquant le principe de l'énergie potentielle totale minimum. En effet, pour rendre minimum l'énergie potentielle totale, notée  $\Pi$ , il faut annuler ses dérivées par rapport à chacun des paramètres inconnus. Cette opération nous fournit un système de  $3n$  équations déterminant totalement les inconnues  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$ .

$$\partial \Pi / \partial a_i \dots \dots \dots (3.2a)$$

$$\partial \Pi / \partial b_i \dots \dots \dots (3.2b)$$

$$\partial \Pi / \partial c_i \dots \dots \dots (3.2c)$$

avec  $i=1, n$ .

Remarque : Dans des cas présentant une symétrie, comme par exemple les modèles que nous considérons, on prendra  $a_i = b_i$ .

## 3.2.2 Conditions aux limites

Les PH considérés dans cette étude ont leurs bords encastrés élastiquement dans des poutres de rive et leurs sommets articulés ou simplement appuyés.

On peut trouver sans beaucoup de peine des fonctions de déplacement ( $u$ ,  $v$  et  $w$ ) qui satisfont aux conditions cinématiques aux sommets ainsi qu'aux conditions de symétrie (par rapport aux diagonales) lorsque le chargement est symétrique. Par contre, il n'est pas du tout évident de pouvoir satisfaire aux conditions statiques de bords encastrés élastiquement. Mais cela ne doit pas nous arrêter car les fonctions de déplacement ne doivent pas satisfaire obligatoirement aux conditions statiques aux limites [15].

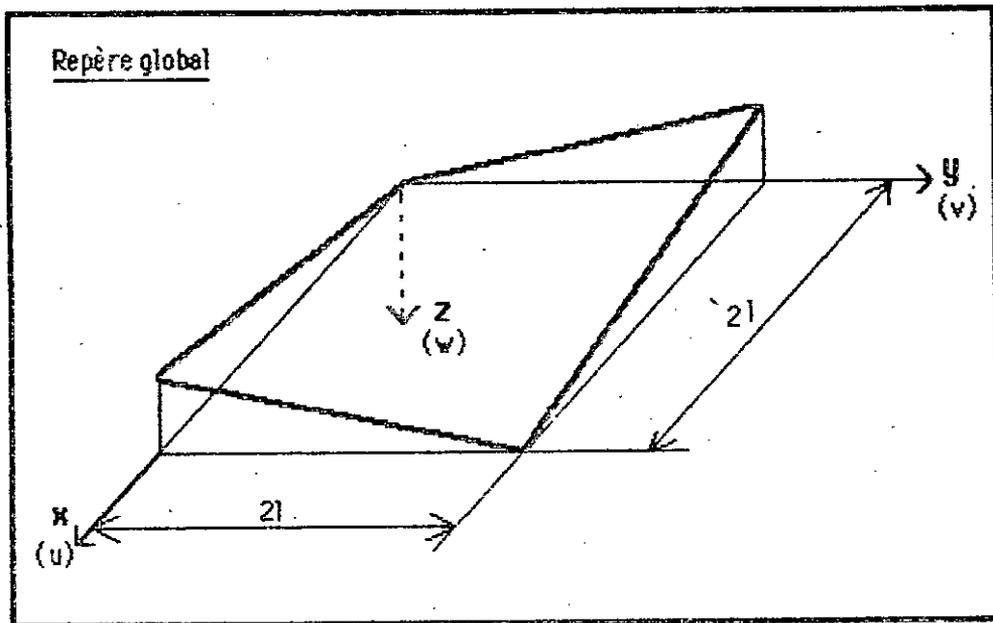


Fig. 37

Les conditions d'un bord encastré élastiquement sont au nombre de deux .

Considérons par exemple le côté  $x = 0$  ; les deux conditions s'expriment par les équations suivantes [13] :

$$K(\partial^3 w / \partial x^3 + (2-\mu)\partial^3 w / \partial x \partial y^2)_{x=0} = EI(\partial^4 w / \partial y^4)_{x=0} \dots (3.3a)$$

$$K(\partial^2 w / \partial x^2 + \mu\partial^2 w / \partial y^2)_{x=0} = -T(\partial^3 w / \partial x \partial y^2)_{x=0} \dots (3.3b)$$

avec :

$EI$  = rigidité flexionnelle de la poutre de rive

$T$  = rigidité torsionnelle de la poutre de rive

$K$  = rigidité flexionnelle du voile ( définie plus loin )

La première équation découle du fait que la flèche du bord du voile est aussi celle de la poutre de rive et exprime que la charge sur la rive est celle transmise par le voile . La deuxième équation exprime l'égalité entre le moment de flexion du bord du voile et le moment de torsion de la poutre de rive .

La difficulté de satisfaire à ces conditions provient de la présence , dans une même équation , de dérivées d'ordre pair et impair . Pour notre modèle numérique , nous n'avons pas satisfait aux conditions d'encastrement élastique des bords ; aussi , il faut s'attendre à ce que les résultats numériques s'écartent quelque peu de la réalité au voisinage des rives .

### 3.3 Mise en équation du problème

Reprenons les équations (3.2) et explicitons-les davantage. Pour cela, il nous faut d'abord rappeler l'expression de l'énergie potentielle totale d'une coque :

#### 3.3.1 Energie potentielle totale

L'énergie potentielle totale d'une coque peut être exprimée sous une forme générale comme suit :

$$\Pi = W_m + W_n + W_{nm} + W_p + W_e \dots \dots \dots (a)$$

c'est-à-dire une somme de cinq termes, dont la signification de chacun est précisée ci-après.

Les trois premiers termes,  $W_m$ ,  $W_n$  et  $W_{nm}$ , sont relatifs à la coque proprement dite alors que le quatrième terme concerne les poutres de rive.

$W_m$  est l'énergie potentielle de déformation due à l'effet de dalle.

$W_n$  est l'énergie potentielle de déformation due à l'effet de paroi.

$W_{nm}$  est l'énergie potentielle de déformation mixte.

$W_p$  est l'énergie potentielle de déformation des poutres de rive.

$W_e$  représente l'énergie potentielle des forces extérieures.

L'énergie potentielle de déformation mixte est constituée de termes secondaires et peut être négligée [1]. Aussi, nous retenons seulement :

$$\Pi = W_m + W_n + W_p + W_e \dots \dots \dots (3.4)$$

Il nous reste à rappeler maintenant les définitions des termes restants.

Pour simplifier quelque peu les expressions , nous utilisons celles relatives aux coques " surbaissées " [1] , [15] , [16] .

Energie  $W_m$

L'énergie potentielle de déformation due à l'effet de dalle est donnée par l'expression :

$$W_m = (K/2) \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ (\partial^2 w / \partial x^2)^2 + (\partial^2 w / \partial y^2)^2 + 2\mu (\partial^2 w / \partial x^2)(\partial^2 w / \partial y^2) + 2(1-\mu)(\partial^2 w / \partial x \partial y)^2 \} dx dy \dots \dots \dots (3.5)$$

C'est aussi l'énergie potentielle de déformation d'une plaque et est constituée de l'énergie de flexion ( les trois premiers termes ) et de l'énergie de torsion ( le dernier terme ) .

La constante K représente la rigidité flexionnelle de la coque et est donnée par :

$$K = E e_p^3 / ( 12(1-\mu^2) ) \dots \dots \dots (b)$$

où  $e_p$  représente l'épaisseur de la coque et , E et  $\mu$  ont les significations indiquées précédemment .

En raison de la symétrie , l'équation (3.5) devient :

$$W_m = K \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ (1+\mu)(\partial^2 w / \partial x^2)^2 + (1-\mu)(\partial^2 w / \partial x \partial y)^2 \} dx dy \dots (3.5)'$$

Energie  $W_n$

L'énergie  $W_n$ , exprimée en fonction des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$ , est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
 W_n = (D/2) \int_0^{2l} \int_0^{2l} & \{ (\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial y)^2 + 2\mu(\partial u / \partial x)(\partial v / \partial y) + \\
 & + (1-\mu)/2(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2 + w^2(r^2+t^2+\mu r t+2(1-\mu)s^2) + \\
 & - 2w[r(r+\mu t)\partial u / \partial x + (t+\mu r)\partial v / \partial y + \\
 & + (1-\mu)s(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)] \} dx dy \quad \dots \dots \dots (3.6)
 \end{aligned}$$

où  $r$ ,  $s$  et  $t$  sont les notations de MONGE définies au paragraphe (1.7) alors que  $D$  représente la rigidité extensionnelle de la coque et est définie par :

$$D = Ee_p / (1-\mu^2) \quad \dots \dots \dots (c)$$

Dans le cas des PH considérés, on a (voir § 1.7) :

$$r = t = 0 \quad \text{et} \quad s = -H/2l^2 \quad \dots \dots \dots (d)$$

Avec les simplifications ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned}
 W_n = (D/2) \int_0^{2l} \int_0^{2l} & \{ (\partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial y)^2 + 2\mu(\partial u / \partial x)(\partial v / \partial y) + \\
 & + (1-\mu)/2(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)^2 + 2(1-\mu)s^2 w^2 + \\
 & - 2(1-\mu)s(\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)w \} dx dy \quad \dots \dots \dots (e)
 \end{aligned}$$

Et en tenant compte de la symétrie :

$$W_n = D \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ (1+\mu)(\partial u/\partial x)^2 + (1-\mu)(\partial u/\partial y)^2 + (1-\mu)s^2 w^2 + \\ - 2(1-\mu)s(\partial u/\partial y)w \} dx dy \dots \dots \dots (3.6)'$$

Energie Wp.

Pour le calcul de l'énergie potentielle de déformation des poutres de rive , on ne tient compte que des sollicitations prépondérantes c'est-à-dire les moments de flexion et de torsion . L'énergie d'une poutre de rive , par exemple celle du côté x=0 , est donnée par :

$$W_p = (1/2) \int_0^{2l} EI (\partial^2 w/\partial y^2)_{x=0}^2 dy + (1/2) \int_0^{2l} T (\partial^2 w/\partial x \partial y)_{x=0}^2 dy \dots (3.7)$$

Prenons pour les rigidités flexionnelle ( EI ) et torsionnelle ( T ) des rives des valeurs moyennes constantes . Si de plus , on tient compte de la symétrie , il s'en suit :

$$W_p = 2EI \int_0^{2l} (\partial^2 w/\partial y^2)_{x=0}^2 dy + 2T \int_0^{2l} (\partial^2 w/\partial x \partial y)_{x=0}^2 dy \dots \dots \dots (3.7)'$$

Energie We.

Les charges envisagées sont : la charge répartie (  $q_z = q$  ) et la charge concentrée (  $P_z = P$  ) .

L'énergie potentielle des forces extérieures est donnée par :

$$W_e = - \int_0^{2l} \int_0^{2l} q w(x,y) dx dy = - q \int_0^{2l} \int_0^{2l} w(x,y) dx dy \dots \dots \dots (3.8)$$

dans le cas de la charge répartie , et par :

$$W_e = - P w(x_p, y_p) \dots \dots \dots (3.8)'$$

s'il s'agit d'une charge concentrée (  $x_p$  et  $y_p$  étant les coordonnées de la charge ).

En remplaçant chaque terme de l'équation (3.4) par son expression , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ K(1+\mu)(\partial^2 w / \partial x^2)^2 + K(1-\mu)(\partial^2 w / \partial x \partial y)^2 + \\ & + D(1+\mu)(\partial u / \partial x)^2 + D(1-\mu)(\partial u / \partial y)^2 + D(1-\mu)s^2 w^2 + \\ & - 2D(1-\mu)s(\partial u / \partial y)w \} dx dy + W_e + \\ & + \int_0^{2l} \{ 2EI(\partial^2 w / \partial y^2)_{x=0}^2 + 2T(\partial^2 w / \partial x \partial y)_{x=0}^2 \} dy \dots \dots \dots (3.9) \end{aligned}$$

### 3.3.2 Equations de la méthode

Les constantes définissant le champ de déplacement seront déterminées à partir des équations de la forme :

$$\partial \Pi / \partial a_i = 0 \dots \dots \dots (f)$$

Nous développerons plus loin la forme de ces équations , lorsqu'on aura précisé les fonctions de déplacement choisies .

Une fois les déplacements connus , nous pourrons calculer les éléments de réduction puis les contraintes , en tout point de la structure , à l'aide des relations générales de l'élasticité . Nous allons rappeler ces relations dans le paragraphe qui suit .

### 3.4 Calcul des contraintes

Il nous faut avant toute chose préciser les conventions des signes des efforts que nous avons adoptées.

#### 3.4.1 Conventions des signes

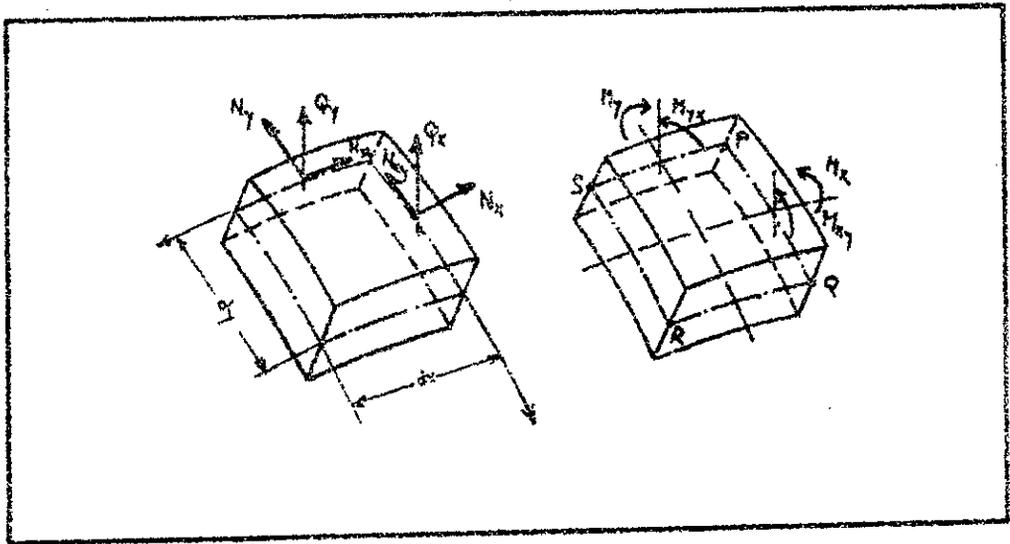


Fig. 38

La figure ci-dessus montre les sens positifs des éléments de réduction, ainsi :

- $N_x$  et  $N_y$  représentent des efforts de traction.
- $N_{xy}$  et  $N_{yx}$  tendent à diminuer l'angle formé par la section  $x=cte$  et  $y=cte$  (c.-à-d. l'angle SPQ).
- $M_x$  et  $M_y$  tendent à allonger les fibres inférieures (fibres de l'intrados) ( $z > 0$ ).

-  $M_{xy}$  et  $M_{yx}$  tendent à faire tourner les sections  $x=cte$  et  $y=cte$ , respectivement, dans le sens horlogique, lorsque l'observateur regarde vers les  $x$  et  $y$  positifs.

-  $Q_x$  et  $Q_y$  sont dirigés vers les  $z$  négatifs dans les sections  $x=cte$  et  $y=cte$ .

### 3.4.2 Relations efforts-déformations

Nous nous limitons à rappeler les relations d'élasticité pour le cas des coques surbaissées.

$$N_x = D(E_x + \mu E_y) \quad \dots \text{E pour Epsilon}$$

$$N_y = D(E_y + \mu E_x)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = DG_{xy} (1 - \mu)/2 \quad \dots \text{G pour Gamma}$$

$$M_x = -K(\partial^2 w / \partial x^2 + \mu \partial^2 w / \partial y^2)$$

$$M_y = -K(\partial^2 w / \partial y^2 + \mu \partial^2 w / \partial x^2)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -K(1 - \mu) \partial^2 w / \partial x \partial y$$

$$Q_x = -K\alpha (\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2) / \partial x$$

$$Q_y = -K\alpha (\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2) / \partial y$$

où  $E_x$ ,  $E_y$  et  $G_{xy}$  sont les déformations spécifiques de la surface moyenne qui s'expriment en fonction des déplacements par les relations suivantes :

$$E_x = \partial u / \partial x + p \partial w / \partial x$$

$$E_y = \partial v / \partial y + q \partial w / \partial y$$

$$G_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x + q \partial w / \partial x + p \partial w / \partial y$$

où  $p$  et  $q$  sont les notations de MONGE définies au chapitre 1 et les autres paramètres ont les significations précisées précédemment.

D'où :

$$N_x = D [ \partial u / \partial x + \rho \partial w / \partial x + \mu ( \partial v / \partial y + q \partial w / \partial y ) ]$$

$$N_y = D [ \partial v / \partial y + q \partial w / \partial y + \mu ( \partial u / \partial x + \rho \partial w / \partial x ) ]$$

$$N_{xy} = N_{yx} = D [ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x + q \partial w / \partial x + \rho \partial w / \partial y ] (1 - \mu) / 2$$

Il faut noter que les  $N$ ,  $Q$  et  $M$  sont des efforts par unité de longueur de section.

### 3.4.3 Relations contraintes-efforts

Parmi les hypothèses fondamentales de la théorie des coques, il en est une qui suppose que les points situés sur une normale à la surface moyenne restent sur une normale à la surface moyenne (déformée), après déformation.

Il s'ensuit, à cause de la loi de HOOKE, que la distribution des contraintes dans l'épaisseur de la coque est linéaire.

$$S_x = N_x / E_p + M_x z / (E_p^3 / 12)$$

$$S_y = N_y / E_p + M_y z / (E_p^3 / 12)$$

$$T_{xy} = N_{xy} / E_p - M_{xy} z / (E_p^3 / 12)$$

$$T_{yx} = N_{yx} / E_p + M_{yx} z / (E_p^3 / 12)$$

Nous calculerons également les contraintes de cisaillement  $T_{xz}$  et  $T_{yz}$  à l'aide de la théorie élémentaire des poutres fléchies.

$$T_{xz} = Q_x (h^2 / 8 - z^2 / 2) / (E_p^3 / 12)$$

$$T_{yz} = Q_y (h^2 / 8 - z^2 / 2) / (E_p^3 / 12)$$

### 3.5 Cas d'une charge répartie

Considérons le cas d'une charge répartie uniformément,  $q$ , par unité de surface projetée sur le plan horizontal.

#### 3.5.1 Première approche

##### 3.5.1.1 Description du champ de déplacement

Les fonctions  $u$ ,  $v$  et  $w$  qui déterminent le déplacement de n'importe quel point du voile, sont exprimées sous forme de séries comportent des coefficients inconnus qui seront déterminés comme il a été expliqué précédemment.

#### a) Déplacements verticaux

Les flèches sont exprimées sous la forme d'une somme de deux séries :

$$w(x,y) = w_1(x,y) + w_2(x,y) \dots \dots \dots (3.10a)$$

avec :

$$w_1(x,y) = \frac{32ql^4}{K \pi^5} \sum_m \frac{1}{m^5} \left( \sin \frac{m\pi}{2l} x + \sin \frac{m\pi}{2l} y \right) \dots \dots (3.10b)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

La flèche  $w_1(x,y)$  est en fait la moyenne de deux composantes  $w_{1x}(x)$  et  $w_{1y}(y)$ . Chacune de ces composantes représente la flèche d'une poutre bi-articulée de longueur  $L=2l$  et de largeur unité, dont la rigidité serait  $K$ , soumise à une charge répartie  $q$  exprimée en unité de force par unité de surface.

Par exemple :

$$w_{1x}(x) = \frac{q}{24K} (L^3x - 2Lx^2 + x^3) = \frac{4ql^4}{Kl^5} \sum_m \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi}{L} x$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

avec  $L=2l$ . Puis en prenant :

$$w_1(x,y) = (w_{1x}(x) + w_{1y}(y)) / 2$$

on retrouve l'expression (3.10b).

Le deuxième terme,  $w_2$ , qui corrige en quelque sorte la valeur donnée par  $w_1$ , est donné par :

$$w_2(x,y) = \frac{16ql^4}{K} \sum_m w_m \left( \sin \frac{m\pi}{2l} x + \sin \frac{m\pi}{2l} y \right) \left[ \cos \frac{m\pi}{2l} (x-1) + \cos \frac{m\pi}{2l} (y-1) + \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2l} (x-1) + \frac{x+y-2l}{2l} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2l} (x+y-2l) \right] \dots (3.10c)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

L'indice de sommation prend seulement les valeurs impaires afin d'avoir un extremum (maximum) de la fonction  $w_2(x,y)$  au milieu du voite comme l'exige la symétrie. Les coefficients  $w_m$  sont les constantes inconnues que nous devons déterminer.

Pour simplifier l'écriture nous posons :

$$B = m\pi/2l$$

$$T = x + y - 2l$$

..... (d)

$$\Delta = \frac{32ql^4}{Kl^5}$$

$$\tilde{q} = 16ql^4/K$$

Les flèches  $w_1$  et  $w_2$  s'écrivent alors :

$$w_1(x,y) = \Delta \sum_m \frac{1}{m^5} (\sin \beta x + \sin \beta y) \quad \dots \quad (3.10d)$$

$$w_2(x,y) = \delta \sum_m w_m (\sin \beta x + \sin \beta y) \left[ \cos \beta(x-1) + \cos \beta(y-1) + \operatorname{ch} \beta(x-1) + \frac{1}{2!} \operatorname{sh} \beta \right] \quad \dots \quad (3.10e)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

On peut vérifier que  $w$  satisfait aussi bien aux conditions de déplacement aux limites qu'aux conditions de symétrie.

#### Conditions aux limites.

Ces conditions expriment que la flèche est nulle aux quatre sommets du PH:

$$w(0,0) = w(0,2l) = w(2l,0) = w(2l,2l) = 0$$

et sont satisfaites.

#### Conditions de symétrie.

Dans le cas considéré il y a une symétrie totale, c'est-à-dire symétrie géométrique et symétrie de chargement, par rapport aux diagonales du voile.

Appelons H-H la diagonale reliant les sommets hauts et B-B la diagonale reliant les sommets bas. Les conditions de symétrie s'écrivent alors :

- symétrie / H-H :  $w(x,y) = w(2l-y, 2l-x)$

- symétrie / B-B :  $w(x,y) = w(y,x)$

Ces deux conditions sont vérifiées par l'expression donnée à  $w$ .

b) Déplacements horizontaux

Les expressions des déplacements horizontaux  $u$  et  $v$  ont été choisies comme suit :

$$u(x,y) = \frac{4ql^2}{D} \sum_m A_m \sin \frac{m\pi}{4l}(x+y) \left[ \frac{1-x}{1} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{1}(1-x) + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{1}(1-x) \right]$$

$$v(x,y) = \frac{4ql^2}{D} \sum_m A_m \sin \frac{m\pi}{4l}(x+y) \left[ \frac{1-y}{1} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{1}(1-y) + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{1}(1-y) \right]$$

$$m = 1,3,5, \dots$$

où les coefficients  $A_m$  sont des constantes à déterminer .

Posons :

$$\delta' = 4ql^2/D \dots \dots \dots (h)$$

Avec cette notation et celles définies par (g) il vient :

$$u(x,y) = \delta' \sum_m A_m \sin \frac{\beta}{2}(x+y) \left[ \frac{1-x}{1} \operatorname{ch} 2\beta(1-x) + \operatorname{sh} 2\beta(1-x) \right] \dots (3.11a)$$

$$v(x,y) = \delta' \sum_m A_m \sin \frac{\beta}{2}(x+y) \left[ \frac{1-y}{1} \operatorname{ch} 2\beta(1-y) + \operatorname{sh} 2\beta(1-y) \right] \dots (3.11b)$$

$$m = 1,3,5, \dots$$

Ces expressions vérifient les conditions de déplacement aux limites et les conditions de symétrie .

Conditions aux limites.

Nous avons vu que les conditions d'appui sont telles que les déplacements horizontaux soient permis aux sommets hauts et empêchés aux sommets bas .

Donc , les conditions de déplacement aux limites s'écrivent :

$$u(0,0) = v(0,0) = 0$$

$$u(2l,2l) = v(2l,2l) = 0$$

On peut constater que ces deux conditions sont satisfaites par les fonctions  $u$  et  $v$ .

Notons aussi qu'en raison de la symétrie, le centre du voile ne doit pas subir de déplacement horizontal, c'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$u(1,1) = v(1,1) = 0$$

Cette condition est également vérifiée par les expressions (3.11).

Conditions de symétrie.

Les conditions de symétrie s'écrivent :

- symétrie / H-H :  $u(x,y) = -v(2l-y, 2l-x)$
- symétrie / B-B :  $u(x,y) = v(y,x)$

Elles sont toutes les deux satisfaites.

3.5.1.2 Equations canoniques de la méthode

Pour déterminer les coefficients inconnus  $w_i$  et  $A_i$  des fonctions de déplacement, nous utilisons des équations semblables à l'équation (f) du paragraphe (3.3.2) :

$$\partial \Pi / \partial w_k = 0 \quad \dots \dots \dots (3.12a)$$

$$\partial \Pi / \partial A_k = 0 \quad \dots \dots \dots (3.12b)$$

$$k = 1, 3, 5, \dots$$

$\Pi$  étant l'énergie potentielle totale, définie par l'équation (3.9) :

L'expression de  $\Pi$  contient des dérivées partielles des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  que nous allons expliciter ci-après pour obtenir la forme générale des équations ci-dessus.

Posons :

$$w_1(x,y) = \sum_i \Omega_i(x,y)$$

$$w_2(x,y) = \sum_i w_i \theta_i(x,y)$$

$$u(x,y) = \sum_i A_i u_i(x,y)$$

$$v(x,y) = \sum_i A_i v_i(x,y)$$

(1)

$i = 1, 3, 5, \dots$

Avec les notations (1) on obtient :

$$w(x,y) = \sum_i \Omega_i(x,y) + \sum_i w_i \theta_i(x,y)$$

d'où :

$$\partial w / \partial w_k = \theta_k$$

Puis :

$$\partial^2 w / \partial x^2 = \sum_i \partial^2 \Omega_i / \partial x^2 + \sum_i w_i \partial^2 \theta_i / \partial x^2$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial w_k} (\partial^2 w / \partial x^2) = \partial^2 \theta_k / \partial x^2$$

de même :

$$\frac{\partial}{\partial w_k} (\partial^2 w / \partial y^2) = \partial^2 \theta_k / \partial y^2$$

Comme on a :

$$\partial^2 w / \partial x \partial y = \partial^2 w / \partial y \partial x = \sum_i w_i \partial^2 \theta_i / \partial x \partial y = \sum_i w_i \partial^2 \theta_i / \partial y \partial x$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial w_k} (\partial^2 w / \partial x \partial y) = \partial^2 \theta_k / \partial x \partial y$$

Pour la fonction u il vient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_i A_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \implies \frac{\partial}{\partial A_k} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_k}{\partial x}$$

ou encore :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_i A_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \implies \frac{\partial}{\partial A_k} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial u_k}{\partial y}$$

Et pour la fonction v on a des résultats similaires .

Notons enfin que la dérivée de la fonction w ou de l'une de ses dérivées par rapport à  $A_k$  est nulle . De même que la dérivée de u ou v ou de leurs dérivées par rapport à  $w_k$  est nulle .

En développant les calculs et en utilisant les résultats ci-dessus , on peut mettre les équations (3.12) sous les formes générales suivantes :

$$\sum_i \delta_{ki} w_i + \sum_i a_{ki} A_i + \Delta_{kf} = c_k \dots \dots \dots (3.13a)$$

$$\sum_i \delta'_{ki} w_i + \sum_i a'_{ki} A_i = c'_k \dots \dots \dots (3.13b)$$

$$i = 1,3,5 \dots$$

avec :

$$c_k = \sum_i c_{ki} \quad \text{et} \quad c'_k = \sum_i c'_{ki}$$

Pour chaque valeur de k ( k = 1,3,5, ... ) on a une paire d'équations semblables aux équations (3.12) .

Les coefficients utilisés ont les significations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_{ki} = & \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ 2K(\partial^2 \theta_k / \partial x^2 + \mu \partial^2 \theta_k / \partial y^2) \partial^2 \theta_i / \partial x^2 + \\ & + 2K(1-\mu) \partial^2 \theta_k / \partial x \partial y \partial^2 \theta_i / \partial x \partial y + 2D(1-\mu) s^2 \theta_k \theta_i \} dx dy + \\ & + \int_0^{2l} \{ 4EI(\partial^2 \theta_k / \partial y^2)_{x=0} (\partial^2 \theta_i / \partial y^2)_{x=0} + \\ & + 4T(\partial^2 \theta_k / \partial x \partial y)_{x=0} (\partial^2 \theta_i / \partial x \partial y)_{x=0} \} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{ki} = & \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ -2K(\partial^2 \theta_k / \partial x^2 + \mu \partial^2 \theta_k / \partial y^2) \partial^2 \Omega_i / \partial x^2 + \\ & - 2D(1-\mu) s^2 \theta_k \theta_i \} dx dy + \\ & + \int_0^{2l} \{ -4EI(\partial^2 \theta_k / \partial y^2)_{x=0} (\partial^2 \Omega_i / \partial y^2)_{x=0} \} dy \end{aligned}$$

$$a_{ki} = \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ -2D(1-\mu) s \theta_k \partial u_i / \partial y \} dx dy$$

$$\Delta_{kf} = \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ -q \theta_k \} dx dy$$

et

$$\begin{aligned} \delta'_{ki} = & \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ 2D(\partial u_k / \partial x + \mu \partial v_k / \partial y) \partial u_i / \partial x + \\ & + (1-\mu) D(\partial u_k / \partial y + \partial v_k / \partial x) \partial u_i / \partial y \} dx dy \end{aligned}$$

$$\delta'_{ki} = \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ -2D(1-\mu) s \partial u_k / \partial y \theta_i \} dx dy$$

$$c'_{ki} = \int_0^{2l} \int_0^{2l} \{ 2D(1-\mu) s \partial u_k / \partial y \Omega_i \} dx dy$$

Les paramètres qui apparaissent dans les équations ci-dessus ont tous été déjà définis , il faut seulement noter que T désigne ici la rigidité torsionnelle et non la variable "x+y-2t".

Les coefficients à deux indices ( k et i ) sont tous symétriques , c'est-à-dire qu'on a :

$$a_{ki} = a_{ik} , \text{ etc } \dots$$

Le système total obtenu à partir des équations (3.13) peut se mettre sous forme matricielle :

$$[A][X] = [B]$$

la matrice A étant symétrique en raison de la remarque précédente .

Enfin , il est intéressant de noter que les équations (3.13) ressemblent aux équations , dites de MULLER-BRESLAU [32] , intervenant dans le calcul des systèmes hyperstatiques .

### 3.5.2 Analyse des résultats numériques

Nous allons maintenant passer en revue les résultats obtenus et les commenter. Il faut souligner que tous les calculs ont été effectués automatiquement ( cf Annexe B ). La charge considérée vaut  $150 \text{ kg/m}^2$  c'est-à-dire égale à celle qu'on a simulée expérimentalement.

#### 3.5.2.1 Convergence

Les séries choisies pour représenter les déplacements du PH convergent très rapidement. Pour illustrer cette convergence, intéressons-nous à la fonction  $w$  qui calcule les déplacements verticaux.

Nous avons calculé la flèche au centre du voile ( avec les caractéristiques du modèle M30 ) pour trois valeurs de l'indice de sommation  $k$  ;  $k=3$ ,  $k=5$  et  $k=7$ . Comme l'indice de sommation ne prend que des valeurs impaires, cela signifie que pour  $k=3$  la série comporte deux (2) termes ; pour  $k=5$  elle comporte trois (3) termes et pour  $k=7$  elle comporte quatre (4) termes.

Nous reprenons ci-dessous les résultats obtenus.

	itération	flèche au centre (mm)
k=3	1 <sup>ère</sup>	8.308
	2 <sup>ème</sup>	8.178
k=5	1 <sup>ère</sup>	7.475
	2 <sup>ème</sup>	7.338
	3 <sup>ème</sup>	7.348
k=7	1 <sup>ère</sup>	7.121
	2 <sup>ème</sup>	6.979
	3 <sup>ème</sup>	6.989
	4 <sup>ème</sup>	6.987

Le numéro de l'itération indique le nombre de termes retenus. Ainsi, pour la première itération par exemple seul le premier terme est retenu. Pour la deuxième itération, la flèche est prise égale à la somme des deux premiers termes de la série, etc. . . .

On constate que pour un  $k$  fixé, la convergence est excellente et on peut à la limite se contenter du premier terme de la série.

Pour deux valeurs de  $k$  successives, la variation de la flèche reste faible et va en décroissant. Ainsi, pour  $k=3$  la flèche finale vaut 8.178 mm et pour  $k=5$  elle vaut 7.348 mm, donc la deuxième approximation est inférieure de 10% à la première valeur. De même, en comparant la flèche obtenue avec  $k=5$  et  $k=7$  on observe que la deuxième valeur ( 6.987 mm ) est inférieure de seulement 4.9% par rapport à la valeur calculée avec  $k=5$ .

Ainsi, on est pratiquement certain que pour  $k=9$  ou  $k=11$ , c'est-à-dire en prenant une série de 5 ou 6 termes, on atteindra l'approximation finale qui se situe, pour le cas du centre, au voisinage de 6.7 mm. Cela représente approximativement une diminution de l'ordre de 15 à 16% par rapport à la valeur obtenue avec  $k=3$ .

Les plus grands écarts, entre les valeurs avec  $k=3$  et  $k=7$ , ont été observés au niveau du contour et atteignent au maximum 30%. Au delà du contour on peut retenir un écart moyen de 20%.

Il est donc indéniable que la convergence est satisfaisante.

Pour les besoins de l'étude numérique, nous avons le plus souvent travaillé avec  $k=3$  car le temps de réponse de la machine sur laquelle le travail a été effectué, le VAX/VMS du centre de calcul de l'U.S.T.H.B., est très faible dans ce cas. Nous n'avons pas travaillé fréquemment avec des valeurs de  $k$  plus grandes, non pas parce que le temps machine que nécessite le programme

lui-même soit trop important , mais le temps de réponse devenait excessif à cause du grand nombre d'utilisateurs du centre .

Nous devons donc avoir à l'esprit que les approximations finales fournies par la méthode proposée sont inférieures de 15 à 20% environ aux résultats qui sont obtenus avec  $k=3$  .

Les résultats qui seront présentés dans les deux sous-paragraphes qui suivent , ont été obtenus en utilisant  $k=7$  .

### 3.5.2.2 Déplacements

#### a) Déplacements horizontaux

Les déplacements horizontaux calculés sont conformes à la réalité et ne présentent pas un intérêt particulier . Aussi , on se contentera de donner les résultats obtenus avec les caractéristiques des modèles testés ; on retiendra tout de même l'enseignement essentiel à savoir que ces déplacements sont parfaitement négligeables .

Les déplacements sont donnés suivant les trois directions caractéristiques qui sont : la direction voûte ( diagonale reliant les sommets hauts ) , la direction médiane ( ligne reliant les milieux des rives ) et la direction chaînette ( diagonale reliant les sommets bas ) .

En raison de la symétrie , il suffit de voir les déplacements sur une moitié de la direction considérée . Notons enfin que les déplacements horizontaux sont nuls au centre du voûte par raison de symétrie .

## MODELE M30 - DEPL. HORIZ. (CM)

( K = 7 )

Depl. horiz. dans la direction voute

Coordonnees	U(X,Y)	V(X,Y)
( 0.0, 0.0)	0.000000	0.000000
( 12.5, 12.5)	0.000847	0.000847
( 25.0, 25.0)	0.000048	0.000048
( 37.5, 37.5)	-0.000275	-0.000275
( 50.0, 50.0)	-0.000304	-0.000304
( 62.5, 62.5)	-0.000234	-0.000234
( 75.0, 75.0)	-0.000149	-0.000149
( 87.5, 87.5)	-0.000071	-0.000071

Depl. horiz. dans la direction mediane

Coordonnees	U(X,Y)	V(X,Y)
(100.0, 0.0)	0.000000	0.000916
(100.0, 12.5)	0.000000	-0.000790
(100.0, 25.0)	0.000000	-0.000936
(100.0, 37.5)	0.000000	-0.000694
(100.0, 50.0)	0.000000	-0.000454
(100.0, 62.5)	0.000000	-0.000280
(100.0, 75.0)	0.000000	-0.000160
(100.0, 87.5)	0.000000	-0.000072

Depl. horiz. dans la direction chainette

Coordonnees	U(X,Y)	V(X,Y)
(200.0, 0.0)	0.009133	-0.009133
(187.5, 12.5)	0.003705	-0.003705
(175.0, 25.0)	0.001747	-0.001747
(162.5, 37.5)	0.000919	-0.000919
(150.0, 50.0)	0.000517	-0.000517
(137.5, 62.5)	0.000297	-0.000297
(125.0, 75.0)	0.000163	-0.000163
(112.5, 87.5)	0.000073	-0.000073

## MODELE M45 - DEPL. HORIZ. (CM)

( K = 7 )

Depl. Horiz. dans la direction voute		
Coordonnees	U(X,Y)	V(X,Y)
( 0.0, 0.0)	0.000000	0.000000
( 12.5, 12.5)	0.001296	0.001296
( 25.0, 25.0)	-0.000093	-0.000093
( 37.5, 37.5)	-0.000626	-0.000626
( 50.0, 50.0)	-0.000642	-0.000642
( 62.5, 62.5)	-0.000486	-0.000486
( 75.0, 75.0)	-0.000308	-0.000308
( 87.5, 87.5)	-0.000147	-0.000147

Depl. Horiz. dans la direction mediane		
Coordonnees	U(X,Y)	V(X,Y)
(100.0, 0.0)	0.000000	0.000772
(100.0, 12.5)	0.000000	-0.001904
(100.0, 25.0)	0.000000	-0.001971
(100.0, 37.5)	0.000000	-0.001431
(100.0, 50.0)	0.000000	-0.000935
(100.0, 62.5)	0.000000	-0.000578
(100.0, 75.0)	0.000000	-0.000330
(100.0, 87.5)	0.000000	-0.000149

Depl. Horiz. dans la direction chainette		
Coordonnees	U(X,Y)	V(X,Y)
(200.0, 0.0)	0.016636	-0.016636
(187.5, 12.5)	0.007021	-0.007021
(175.0, 25.0)	0.003426	-0.003426
(162.5, 37.5)	0.001847	-0.001847
(150.0, 50.0)	0.001055	-0.001055
(137.5, 62.5)	0.000611	-0.000611
(125.0, 75.0)	0.000337	-0.000337
(112.5, 87.5)	0.000150	-0.000150

b) Déplacements verticaux.

Les flèches des deux modèles , calculées en considérant des séries de quatre (4) termes , sont indiquées aux deux pages suivantes .

Le premier résultat qui attire l'attention est la présence de flèches négatives , c'est-à-dire des soulèvements , au voisinage du contour . Ce résultat ne doit pas toutefois nous surprendre étant donné que nous n'avons pas satisfait totalement aux conditions " d'encastrement élastique " des bords du voile . Ailleurs , les résultats obtenus semblent satisfaisants .

Nous avons déjà signalé que l'épaisseur réelle des modèles était en fait variable et en moyenne supérieure à l'épaisseur théorique de 1.5 cm ( § 2.7.2.3 et § 2.7.3.2 ) ; de ce fait déjà , la comparaison entre résultats expérimentaux et résultats numériques n'est plus du tout aisée . Néanmoins , nous ne pouvons pas échapper à la tentation de faire cette comparaison . Aussi , avons-nous effectué un calcul en considérant une épaisseur moyenne de 2 cm qui représente une valeur plus proche de la réalité que la valeur de 1.5 cm .

Les flèches calculées avec une épaisseur de 2 cm ( pages III-31 et III-32 ) montrent une assez bonne concordance avec les flèches mesurées . Ainsi , au centre du PH par exemple , on a calculé 2.87 mm et 2.84 mm alors que les flèches mesurées étaient de 3.58 mm et 3.01 mm pour les modèles M30 et M45 respectivement .

De plus , l'étendue des flèches négatives se trouve réduite .

## MODELE M30 - FLECHES (CM)

( K = 7 )

## Coefficients trouvés

W1=	-0.16620E-02	A1=	-0.12609E+00
W3=	0.12914E-05	A3=	0.49525E-03
W5=	-0.13191E-08	A5=	0.18106E-06
W7=	0.67890E-12	A7=	0.22294E-09

## Fleche au centre du voile

Iter.	Fleche
1	0.71207213402
3	0.69793272018
5	0.69889187813
7	0.69871330261

## Flechtes dans la direction route

Coordonnees	Flechtes
( 0.0, 0.0)	0.000000
( 12.5, 12.5)	-0.252455
( 25.0, 25.0)	-0.286052
( 37.5, 37.5)	-0.076655
( 50.0, 50.0)	0.218173
( 62.5, 62.5)	0.458436
( 75.0, 75.0)	0.606428
( 87.5, 87.5)	0.678272

## Flechtes dans la direction mediane

Coordonnees	Flechtes
(100.0, 0.0)	-0.309244
(100.0, 12.5)	-0.088039
(100.0, 25.0)	0.116059
(100.0, 37.5)	0.295056
(100.0, 50.0)	0.443122
(100.0, 62.5)	0.557220
(100.0, 75.0)	0.636890
(100.0, 87.5)	0.683460

## Flechtes dans la direction chainette

Coordonnees	Flechtes
(200.0, 0.0)	0.000001
(187.5, 12.5)	-0.204613
(175.0, 25.0)	-0.332468
(162.5, 37.5)	-0.229094
(150.0, 50.0)	0.036087
(137.5, 62.5)	0.315661
(125.0, 75.0)	0.529938
(112.5, 87.5)	0.657196

## MODELE M45 - FLECHES (CM)

( K = 7 )

## Coefficients trouvés

W1=	-0.17129E-02	A1=	-0.23401E+00
W3=	0.13970E-05	A3=	0.75401E-03
W5=	-0.14695E-08	A5=	0.27528E-06
W7=	0.76489E-12	A7=	0.33121E-09

## Fleche au centre du voile en cm

Iter.	Fleche
1	0.70279383659
3	0.68715453148
5	0.68820452690
7	0.68800878525

## Flechtes dans la direction voute

Coordonnees	Flechtes
( 0.0, 0.0)	0.000000
( 12.5, 12.5)	-0.289511
( 25.0, 25.0)	-0.350649
( 37.5, 37.5)	-0.139244
( 50.0, 50.0)	0.175396
( 62.5, 62.5)	0.433568
( 75.0, 75.0)	0.591381
( 87.5, 87.5)	0.666839

## Flechtes dans la direction mediane

Coordonnees	Flechtes
(100.0, 0.0)	-0.400524
(100.0, 12.5)	-0.159790
(100.0, 25.0)	0.061306
(100.0, 37.5)	0.254612
(100.0, 50.0)	0.414098
(100.0, 62.5)	0.536661
(100.0, 75.0)	0.621994
(100.0, 87.5)	0.671742

## Flechtes dans la direction chainette

Coordonnees	Flechtes
(200.0, 0.0)	0.000001
(187.5, 12.5)	-0.233371
(175.0, 25.0)	-0.399359
(162.5, 37.5)	-0.309112
(150.0, 50.0)	-0.029402
(137.5, 62.5)	0.272540
(125.0, 75.0)	0.505037
(112.5, 87.5)	0.643042

## MODELE M30\* - FLECHES (CM)

( K = 7 )

## Coefficients trouves

W1=	-0.16751E-02	A1=	-0.73721E-01
W3=	0.13264E-05	A3=	0.27502E-03
W5=	-0.13735E-08	A5=	0.10078E-06
W7=	0.71173E-12	A7=	0.12280E-09

## Fleche au centre du voile en cm

Iter.	Fleche
1	0.29279750586
3	0.28681212664
5	0.28721678257
7	0.28714144230

## Flechtes dans la direction voute

Coordonnees	Flechtes
( 0.0, 0.0)	0.000000
( 12.5, 12.5)	-0.107224
( 25.0, 25.0)	-0.123907
( 37.5, 37.5)	-0.037657
( 50.0, 50.0)	0.085785
( 62.5, 62.5)	0.186635
( 75.0, 75.0)	0.248648
( 87.5, 87.5)	0.278638

## Flechtes dans la direction mediane

Coordonnees	Flechtes
(100.0, 0.0)	-0.136669
(100.0, 12.5)	-0.043441
(100.0, 25.0)	0.042445
(100.0, 37.5)	0.117697
(100.0, 50.0)	0.179902
(100.0, 62.5)	0.227803
(100.0, 75.0)	0.261226
(100.0, 87.5)	0.280750

## Flechtes dans la direction chainette

Coordonnees	Flechtes
(200.0, 0.0)	0.000000
(187.5, 12.5)	-0.086586
(175.0, 25.0)	-0.143120
(162.5, 37.5)	-0.102165
(150.0, 50.0)	0.008457
(137.5, 62.5)	0.125937
(125.0, 75.0)	0.216119
(112.5, 87.5)	0.269675

(\*) Calcul effectué avec une épaisseur égale à 2 cm.

## MODELE M45\* - FLECHES (CM)

( K = 7 )

## Coefficients trouvés

W1=	-0.17218E-02	A1=	-0.13484E+00
W3=	0.14482E-05	A3=	0.42613E-03
W5=	-0.15533E-08	A5=	0.15657E-06
W7=	0.81555E-12	A7=	0.18528E-09

## Fleche au centre du voile en cm

Iter.	Fleche
1	0.29080748558
3	0.28417706490
5	0.28462004662
7	0.28453755379

## Flechtes dans la direction voute

Coordonnees	Flechtes
( 0.0, 0.0)	0.000000
( 12.5, 12.5)	-0.120061
( 25.0, 25.0)	-0.148419
( 37.5, 37.5)	-0.062090
( 50.0, 50.0)	0.069439
( 62.5, 62.5)	0.177865
( 75.0, 75.0)	0.244112
( 87.5, 87.5)	0.275700

## Flechtes dans la direction mediane

Coordonnees	Flechtes
(100.0, 0.0)	-0.173862
(100.0, 12.5)	-0.072181
(100.0, 25.0)	0.020987
(100.0, 37.5)	0.102349
(100.0, 50.0)	0.169433
(100.0, 62.5)	0.220960
(100.0, 75.0)	0.256816
(100.0, 87.5)	0.277708

## Flechtes dans la direction chainette

Coordonnees	Flechtes
(200.0, 0.0)	0.000000
(187.5, 12.5)	-0.095667
(175.0, 25.0)	-0.168055
(162.5, 37.5)	-0.133528
(150.0, 50.0)	-0.017227
(137.5, 62.5)	0.109596
(125.0, 75.0)	0.207484
(112.5, 87.5)	0.265604

(\*) Calcul effectué avec une épaisseur égale à 2 cm.

## 3.5.2.3 Contraintes

Les contraintes obtenues par le calcul , avec les caractéristiques des modèles M30 et M45 mais en utilisant une épaisseur plus réaliste de 2 cm , sont données aux deux pages qui suivent .

Les sens positifs des contraintes normales et tangentielles sont indiqués à la figure 39 ci-après .

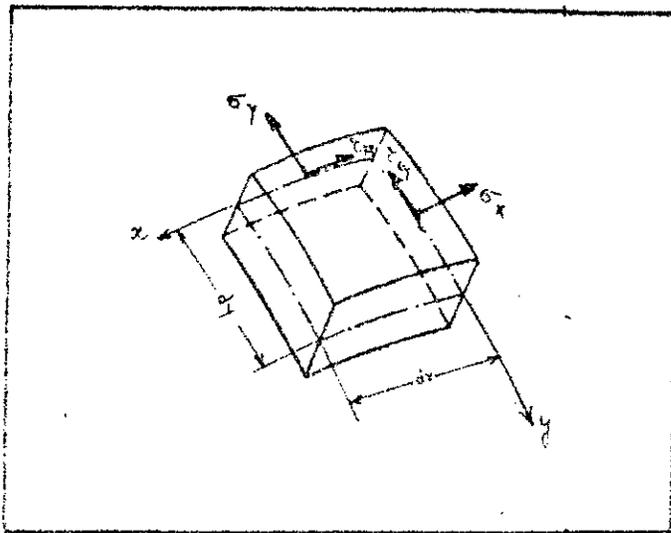


Fig. 39

De l'analyse de ces contraintes , nous pouvons relever les remarques suivantes :

- 1) De manière générale , les contraintes calculées sont plus importantes que les contraintes mesurées .
- 2) Les contraintes de membrane du modèle numérique sont plus importantes ( non négligeables ) que celles des modèles expérimentaux .
- 3) Les diagonales constituent des directions principales .
- 4) Au voisinage du centre , la face supérieure du voile est comprimée et la face inférieure tendue .

MODELE M30\* - CONTRAINTES (KG/CM2)  
( K = 7 )

	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
FACE INF.	0.35923E+02	0.35923E+02	0.93010E+01
FACE SUP.	-0.33791E+02	-0.33791E+02	-0.93010E+01

## CONTRAINTES DANS LA DIRECTION VOUTE

COORDONNEES	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
INF( 0.0, 0.0)	0.43024E+03	0.43024E+03	0.27013E+03
SUP( 0.0, 0.0)	0.36772E+03	0.36772E+03	0.31606E+03
INF( 12.5, 12.5)	0.91741E+02	0.91741E+02	0.16593E+03
SUP( 12.5, 12.5)	0.17519E+03	0.17519E+03	0.62856E+02
INF( 25.0, 25.0)	-0.13993E+03	-0.13993E+03	0.16924E+02
SUP( 25.0, 25.0)	-0.29471E+02	-0.29471E+02	-0.13208E+03
INF( 37.5, 37.5)	-0.19577E+03	-0.19577E+03	-0.10895E+03
SUP( 37.5, 37.5)	-0.18638E+03	-0.18638E+03	-0.17228E+03
INF( 50.0, 50.0)	-0.11266E+03	-0.11266E+03	-0.11112E+03
SUP( 50.0, 50.0)	-0.18804E+03	-0.18804E+03	-0.11267E+03
INF( 62.5, 62.5)	-0.27328E+02	-0.27328E+02	-0.62379E+02
SUP( 62.5, 62.5)	-0.12632E+03	-0.12632E+03	-0.53264E+02
INF( 75.0, 75.0)	0.18332E+02	0.18332E+02	-0.20054E+02
SUP( 75.0, 75.0)	-0.72229E+02	-0.72229E+02	-0.21711E+02
INF( 87.5, 87.5)	0.33468E+02	0.33468E+02	0.26744E+01
SUP( 87.5, 87.5)	-0.42602E+02	-0.42602E+02	-0.11107E+02

## CONTRAINTES DANS LA DIRECTION MEDIANE

COORDONNEES	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
INF(100.0, 0.0)	0.10033E+03	-0.10060E+02	-0.19286E+03
SUP(100.0, 0.0)	-0.50493E+01	-0.43949E+02	-0.18570E+03
INF(100.0, 12.5)	0.10561E+03	0.25444E+02	-0.15545E+03
SUP(100.0, 12.5)	-0.11439E+01	-0.25050E+02	-0.14876E+03
INF(100.0, 25.0)	0.10409E+03	0.43093E+02	-0.11778E+03
SUP(100.0, 25.0)	-0.24828E+01	-0.22943E+02	-0.11409E+03
INF(100.0, 37.5)	0.95090E+02	0.48518E+02	-0.81338E+02
SUP(100.0, 37.5)	-0.76406E+01	-0.28239E+02	-0.82410E+02
INF(100.0, 50.0)	0.80834E+02	0.48469E+02	-0.48997E+02
SUP(100.0, 50.0)	-0.14652E+02	-0.32978E+02	-0.55448E+02
INF(100.0, 62.5)	0.64568E+02	0.45502E+02	-0.23091E+02
SUP(100.0, 62.5)	-0.21965E+02	-0.35258E+02	-0.34520E+02
INF(100.0, 75.0)	0.49804E+02	0.41230E+02	-0.47851E+01
SUP(100.0, 75.0)	-0.28212E+02	-0.35315E+02	-0.20112E+02
INF(100.0, 87.5)	0.39574E+02	0.37445E+02	0.58508E+01
SUP(100.0, 87.5)	-0.32351E+02	-0.34341E+02	-0.11921E+02

## CONTRAINTES DANS LA DIRECTION CHAINETTE

COORDONNEES	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
INF(200.0, 0.0)	0.21808E+02	0.21808E+02	0.21382E+03
SUP(200.0, 0.0)	-0.15613E+03	-0.15613E+03	0.83109E+02
INF(187.5, 12.5)	-0.14014E+03	-0.14014E+03	0.11923E+03
SUP(187.5, 12.5)	-0.14533E+03	-0.14533E+03	0.15617E+03
INF(175.0, 25.0)	-0.59711E+02	-0.59711E+02	-0.55110E+02
SUP(175.0, 25.0)	0.47255E+02	0.47255E+02	0.90717E+02
INF(162.5, 37.5)	0.11377E+03	0.11377E+03	-0.14924E+03
SUP(162.5, 37.5)	0.18310E+03	0.18310E+03	-0.56625E+02
INF(150.0, 50.0)	0.16905E+03	0.16905E+03	-0.12472E+03
SUP(150.0, 50.0)	0.15463E+03	0.15463E+03	-0.10665E+03
INF(137.5, 62.5)	0.13552E+03	0.13552E+03	-0.68096E+02
SUP(137.5, 62.5)	0.75570E+02	0.75570E+02	-0.83230E+02
INF(125.0, 75.0)	0.84292E+02	0.84292E+02	-0.23105E+02
SUP(125.0, 75.0)	0.11707E+02	0.11707E+02	-0.45011E+02
INF(112.5, 87.5)	0.48264E+02	0.48264E+02	0.17361E+01
SUP(112.5, 87.5)	-0.23275E+02	-0.23275E+02	-0.18333E+02

(\*) Calcul effectué avec une épaisseur égale à 2 cm.

MODELE M45\* - CONTRAINTES (KG/CM2)  
( K = 7 )

CONTRAINTES AU CENTRE DU VOILE			
	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
FACE INF.	0.35730E+02	0.35730E+02	0.96486E+01
FACE SUP.	-0.31860E+02	-0.31860E+02	-0.96486E+01

CONTRAINTES DANS LA DIRECTION VOUTE			
COORDONNEES	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
INF( 0.0, 0.0)	0.63710E+03	0.63710E+03	0.41534E+03
SUP( 0.0, 0.0)	0.55735E+03	0.55735E+03	0.47477E+03
INF( 12.5, 12.5)	0.18419E+03	0.18419E+03	0.23431E+03
SUP( 12.5, 12.5)	0.25326E+03	0.25326E+03	0.14156E+03
INF( 25.0, 25.0)	-0.15429E+03	-0.15429E+03	0.10968E+02
SUP( 25.0, 25.0)	-0.42056E+02	-0.42056E+02	-0.14416E+03
INF( 37.5, 37.5)	-0.27980E+03	-0.27980E+03	-0.16970E+03
SUP( 37.5, 37.5)	-0.26524E+03	-0.26524E+03	-0.23853E+03
INF( 50.0, 50.0)	-0.18281E+03	-0.18281E+03	-0.16482E+03
SUP( 50.0, 50.0)	-0.25582E+03	-0.25582E+03	-0.16761E+02
INF( 62.5, 62.5)	-0.62801E+02	-0.62801E+02	-0.90406E+02
SUP( 62.5, 62.5)	-0.16057E+03	-0.16057E+03	-0.81177E+02
INF( 75.0, 75.0)	0.61547E+01	0.61547E+01	-0.29760E+02
SUP( 75.0, 75.0)	-0.82982E+02	-0.82982E+02	-0.31486E+02
INF( 87.5, 87.5)	0.31043E+02	0.31043E+02	0.10603E+01
SUP( 87.5, 87.5)	-0.43119E+02	-0.43119E+02	-0.13229E+02

CONTRAINTES DANS LA DIRECTION MEDIANE			
COORDONNEES	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
INF(100.0, 0.0)	0.12788E+03	-0.21780E+02	-0.29062E+03
SUP(100.0, 0.0)	0.22157E+02	-0.59071E+02	-0.28364E+03
INF(100.0, 12.5)	0.13444E+03	0.27688E+02	-0.23220E+03
SUP(100.0, 12.5)	0.28221E+02	-0.24003E+02	-0.22547E+03
INF(100.0, 25.0)	0.13160E+03	0.49523E+02	-0.17547E+03
SUP(100.0, 25.0)	0.25949E+02	-0.16391E+02	-0.17170E+03
INF(100.0, 37.5)	0.11857E+03	0.54267E+02	-0.12165E+03
SUP(100.0, 37.5)	0.16982E+02	-0.21683E+02	-0.12276E+03
INF(100.0, 50.0)	0.98415E+02	0.52519E+02	-0.74405E+02
SUP(100.0, 50.0)	0.43075E+01	-0.27753E+02	-0.81074E+02
INF(100.0, 62.5)	0.75617E+02	0.47881E+02	-0.36843E+02
SUP(100.0, 62.5)	-0.92768E+01	-0.31416E+02	-0.48683E+02
INF(100.0, 75.0)	0.55021E+02	0.42249E+02	-0.10482E+02
SUP(100.0, 75.0)	-0.21109E+02	-0.32533E+02	-0.26374E+02
INF(100.0, 87.5)	0.40798E+02	0.37567E+02	0.47341E+01
SUP(100.0, 87.5)	-0.29067E+02	-0.32199E+02	-0.13700E+02

CONTRAINTES DANS LA DIRECTION CHAINETTE			
COORDONNEES	SIGMA(X)	SIGMA(Y)	TAU(XY)
INF(200.0, 0.0)	0.12499E+02	0.12499E+02	0.29353E+03
SUP(200.0, 0.0)	-0.18162E+03	-0.18162E+03	0.14887E+03
INF(187.5, 12.5)	-0.21250E+03	-0.21250E+03	0.20903E+03
SUP(187.5, 12.5)	-0.23479E+03	-0.23479E+03	0.23247E+03
INF(175.0, 25.0)	-0.91843E+02	-0.91843E+02	-0.23745E+02
SUP(175.0, 25.0)	0.13927E+02	0.13927E+02	0.12676E+03
INF(162.5, 37.5)	0.16939E+03	0.16939E+03	-0.19354E+03
SUP(162.5, 37.5)	0.24492E+03	0.24492E+03	-0.93813E+02
INF(150.0, 50.0)	0.24270E+03	0.24270E+03	-0.18156E+03
SUP(150.0, 50.0)	0.23245E+03	0.23245E+03	-0.16103E+03
INF(137.5, 62.5)	0.18545E+03	0.18545E+03	-0.10573E+03
SUP(137.5, 62.5)	0.12786E+03	0.12786E+03	-0.12094E+03
INF(125.0, 75.0)	0.10685E+03	0.10685E+03	-0.39757E+02
SUP(125.0, 75.0)	0.36169E+02	0.36169E+02	-0.62411E+02
INF(112.5, 87.5)	0.53613E+02	0.53613E+02	-0.20221E+01
SUP(112.5, 87.5)	-0.15904E+02	-0.15904E+02	-0.22840E+02

(\* ) Calcul effectué avec une épaisseur égale à 2 cm .

- 5) Les contraintes qui apparaissent au centre du voile ne sont pas les plus élevées .
- 6) Les contraintes les plus élevées apparaissent au niveau de l'articulation ( sommet bas ) .
- 7) Dans la direction voûte , la contrainte de l'effort normal est d'abord une traction au voisinage de l'articulation puis devient une compression vers le milieu du PH .
- 8) Dans la direction médiane , la contrainte de l'effort normal est une traction .
- 9) Dans la direction chaînette , la contrainte de l'effort normal est une compression au voisinage de l'appui et une traction vers le centre du voile .

#### 3.5.2.4 Conclusions

En dépit des difficultés que nous rencontrons pour établir une comparaison parfaite entre modèle expérimental et modèle numérique , on vient de constater que le modèle " variationnel " proposé donne des résultats satisfaisants .

En dehors du contour et sur une grande partie du voile , les résultats obtenus par le calcul semblent tout à fait fiables et peuvent être exploités .

Nous allons maintenant utiliser ce modèle pour étudier l'influence de l'épaisseur et du surbaissement sur le comportement général de ce type de voile .

### 3.6 Influence des paramètres géométriques

Les paramètres géométriques auxquels on s'intéresse et qui seront considérés comme des variables, sont : l'épaisseur ( $e_p$ ) et le surbaissement ( $H$ ) du voile.

Les autres caractéristiques géométriques telles que la portée, la section des poutres de rive, etc... ainsi que les caractéristiques élastiques des matériaux ( $E, \mu, \dots$ ) sont supposées constantes et les valeurs utilisées dans les applications numériques de ce paragraphe sont celles du modèle expérimental M30 (cf chapitre 2).

Il faut aussi préciser que les calculs ont été effectués avec  $k=3$  étant donné que la précision des calculs n'a pas d'influence sur l'aspect qualitatif des résultats.

Pour les besoins de cette étude, nous avons retenu sept (7) valeurs pour l'épaisseur et neuf (9) valeurs pour le surbaissement. Ceci nous donne un total de 63 cas (63 modèles) correspondant chacun à un couple de valeurs  $e_p-H$ . La désignation de ces modèles est indiquée dans le tableau ci-dessous.

**Tableau VI : Désignation des modèles**

$H(\text{cm})$ $e_p(\text{cm})$	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0.50	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
0.75	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$
1.00	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$
1.25	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$
1.50	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$
1.75	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$
2.00	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$

## 3.6.1 Etude des déplacements

Pour l'étude de l'évolution des déplacements en fonction de l'épaisseur et du surbaissement du voile, nous avons retenu le déplacement vertical du point le plus caractéristique du PH, c'est-à-dire son centre.

Les flèches calculées, des 63 cas décrits plus haut (tableau VI), sont regroupées dans le tableau ci-après.

**Tableau VII : Flèche (cm) au centre du PH**

sous une charge répartie  $q=150 \text{ kg/m}^2$

$e_p$ (cm) \ H (cm)	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0.50	55.99	46.96	39.55	34.04	30.04	27.17	25.02	23.42	22.21
0.75	15.40	12.41	10.26	8.80	7.82	7.14	6.66	6.31	6.04
1.00	6.11	4.80	3.94	3.39	3.04	2.80	2.64	2.52	2.43
1.25	2.97	2.30	1.88	1.63	1.47	1.37	1.30	1.25	1.21
1.50	1.65	1.26	1.03	0.90	0.82	0.76	0.73	0.70	0.69
1.75	1.01	0.77	0.63	0.55	0.50	0.47	0.45	0.44	0.43
2.00	0.66	0.50	0.41	0.36	0.33	0.31	0.30	0.29	0.29

Il faut rappeler que les calculs ont été effectués avec  $K=3$ , c'est-à-dire en considérant des séries de 2 termes seulement ; et, en vertu des remarques précédentes, on peut dire que les valeurs données sont supérieures de 15 à 20% en moyenne aux approximations finales fournies par la méthode.

### 3.6.1.1 Influence du surbaissement

A partir du tableau VII, nous avons tracé des diagrammes de la flèche au centre du voile ( notée  $f$  ) en fonction du surbaissement ( noté  $H$  ).

Les figures 40a et 40b montrent clairement que pour chaque épaisseur il y a une courbe bien distincte. De plus, l'épaisseur de 0.5 cm sort nettement du lot et semble de toute évidence trop faible pour la charge considérée.

De manière générale, on peut retenir que :

- le surbaissement n'a de l'influence que sur les petites épaisseurs
- pour les épaisseurs de 2 cm et plus l'influence du surbaissement est très faible

- la variation de la flèche devient très faible au delà d'une certaine valeur du surbaissement (  $H \approx 30$  cm )

- la variation est linéaire sur une grande partie des diagrammes

Diagrammes Flèche au centre - Surboisement

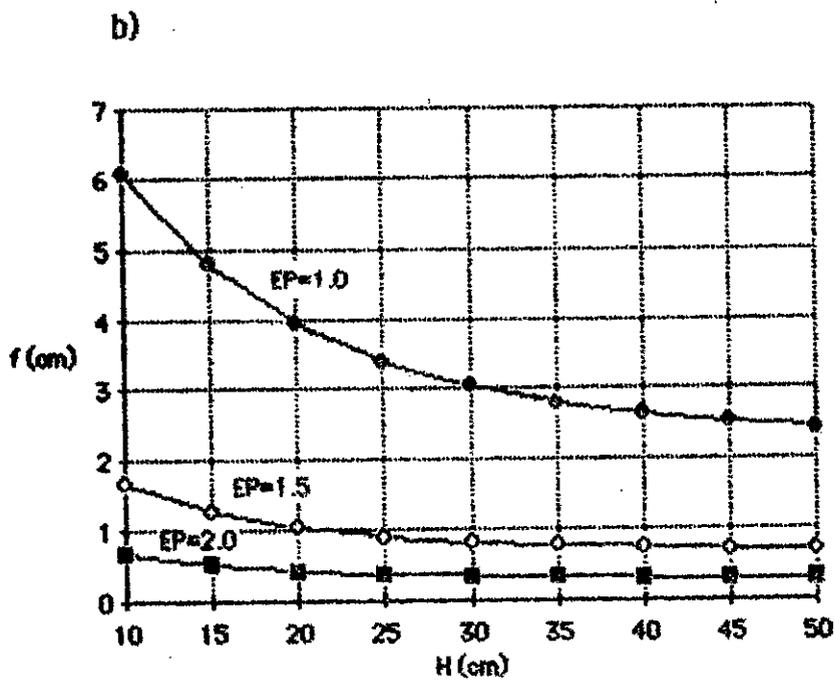
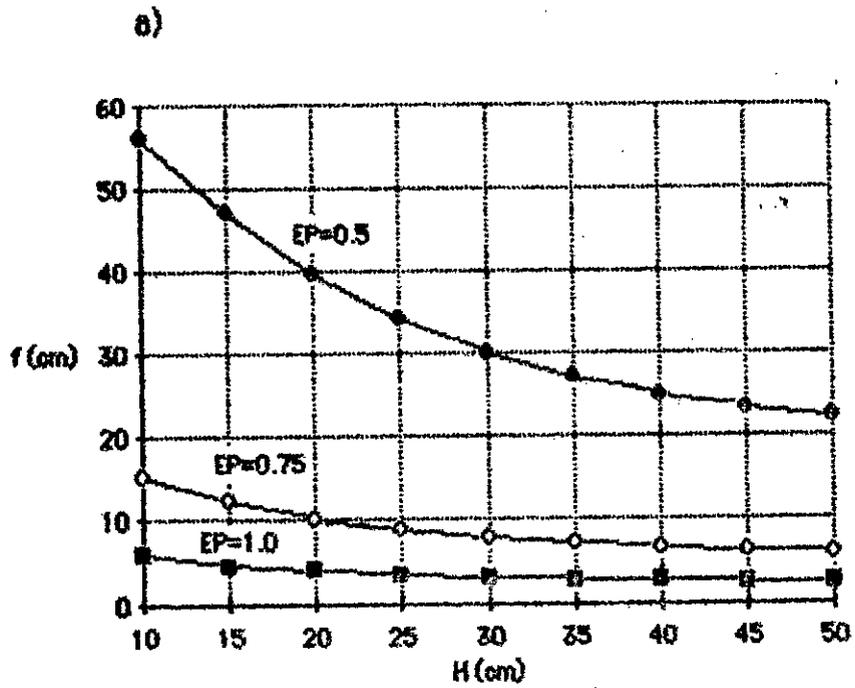


Fig. 40

### 3.6.1.2 Influence de l'épaisseur

On a vu dans le paragraphe précédent que les flèches restaient groupées par "épaisseur" ce qui dénotait déjà une influence prépondérante de ce paramètre. Cette prépondérance est nettement mise en évidence par les figures 41a et 41b qui donnent la flèche du milieu du voile en fonction de l'épaisseur. Les figures ont été tracées pour trois (3) valeurs caractéristiques du surbaissement.

La figure 41b a été tracée pour des épaisseurs supérieures ou égales à 0.75 cm afin de voir plus clairement l'évolution de la courbe vers les grandes épaisseurs.

On remarque que les diagrammes tracés peuvent être remplacés par une courbe moyenne ayant l'allure d'une parabole cubique. Ceci signifie que l'épaisseur intervient avec une puissance voisine de trois. Il est intéressant de noter que l'épaisseur intervient à la puissance trois dans la définition de la rigidité flexionnelle ( cf formule b page III-7 ).

Il nous a paru intéressant de tracer les diagrammes de la flèche en fonction du rapport  $H/e_p$ . Les graphes obtenus, figures 42a et 42b, présentent beaucoup de similitudes avec les diagrammes représentant la flèche en fonction du surbaissement. La variation de la flèche est importante uniquement pour les petites épaisseurs et devient très faible pour des épaisseurs supérieures ou mêmes égales à 2 cm.

Diagrammes Flèche au centre - Epaisseur

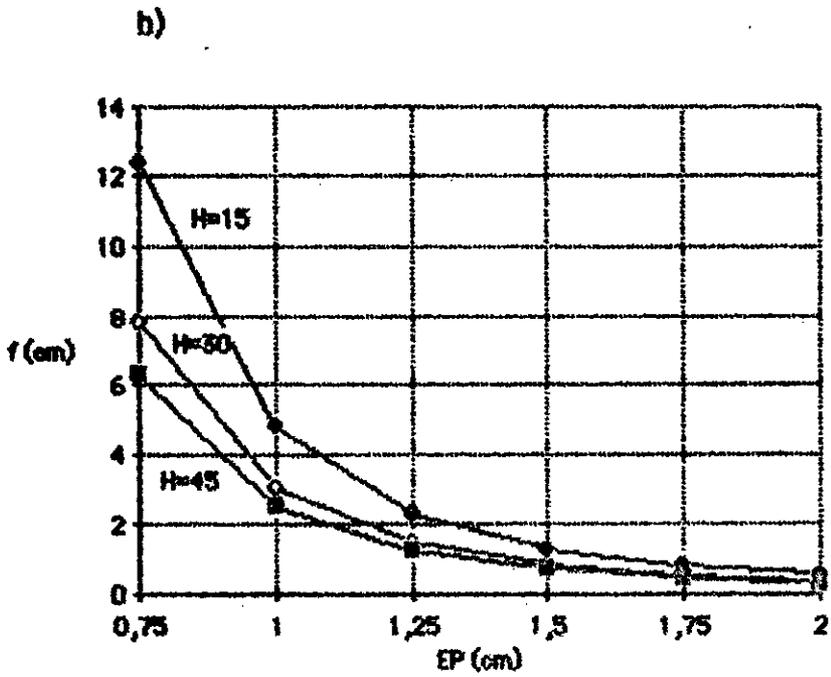
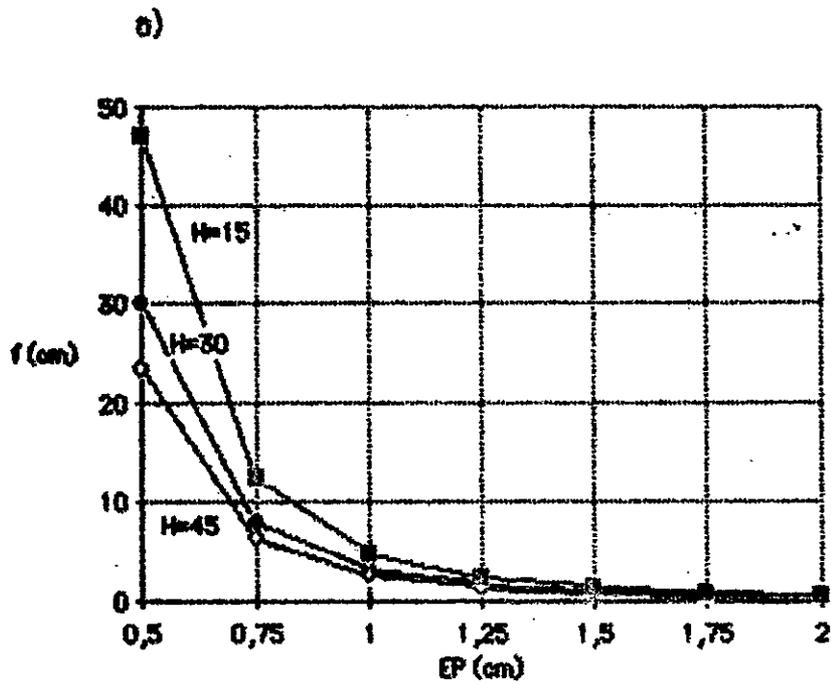


Fig. 41

Diagrammes Flèche au centre - Rapport H/e<sub>p</sub>

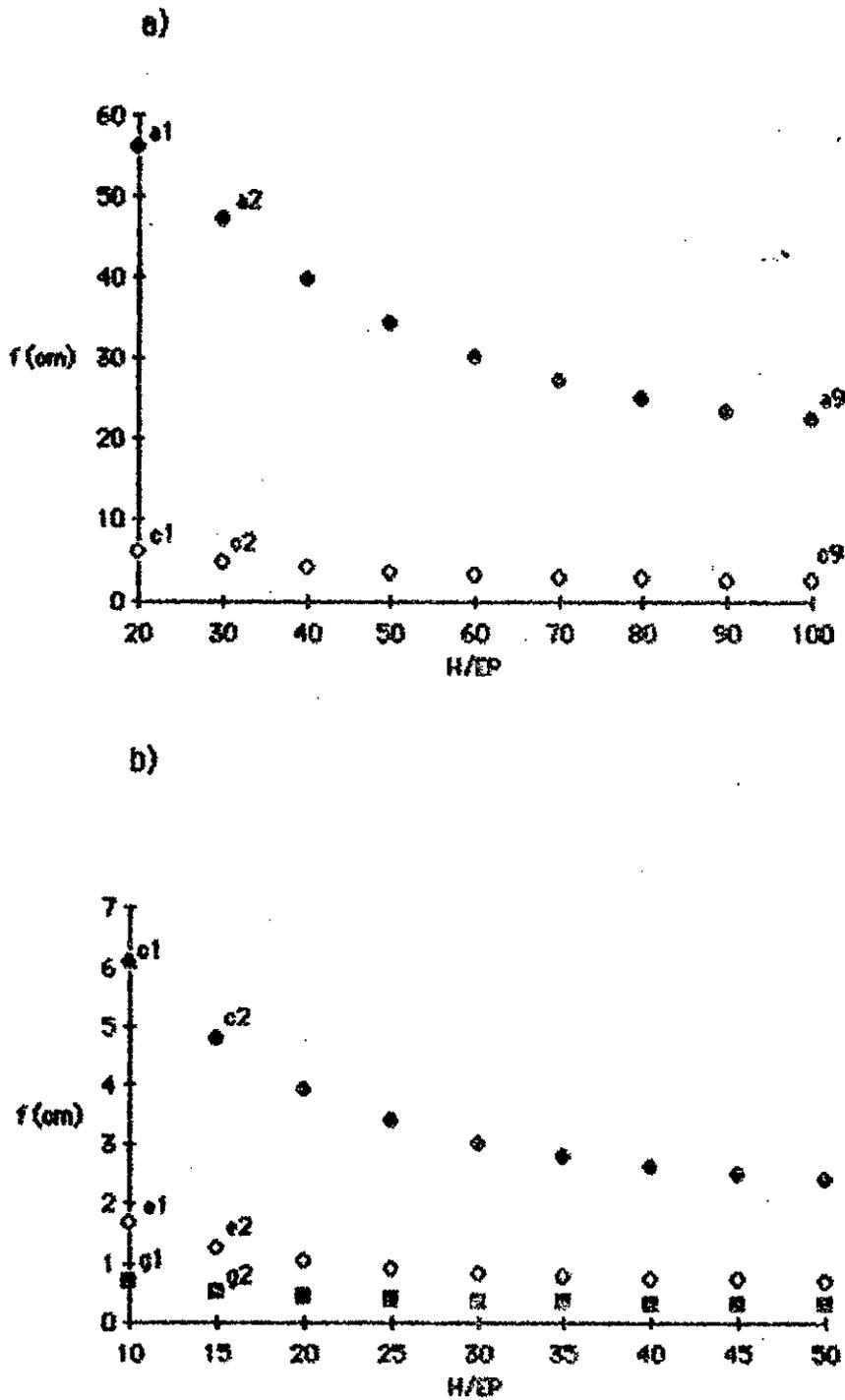


Fig. 42

### 3.6.1.3 Conclusions

En conclusion , on peut retenir les résultats essentiels suivants :

- 1- L'épaisseur a une influence prépondérante sur les déplacements et intervient à une puissance proche de trois .
- 2- Le surbaisssement n'a d'influence notable que pour des épaisseurs relativement faibles .
- 3- Pour une épaisseur donnée , l'influence du surbaisssement est plus importante vers les petites valeurs de celui-ci .
- 4- A partir d'une certaine épaisseur , le surbaisssement n'a pour ainsi dire pas d'influence .

### 3.6.2 Etude des contraintes

Nous considérons uniquement les contraintes normales et tangentielles, provoquées par les moments, les efforts normaux et les efforts tangentiels (Fig. 39), car elles sont prépondérantes et plus indicatives comparativement aux contraintes de cisaillement, engendrées par les efforts tranchants.

Considérons le centre du voile, comme nous l'avons fait pour l'étude des déplacements, et intéressons-nous cette fois aux contraintes qui y règnent.

En ce point, le calcul des contraintes montre que les directions principales sont confondues avec les diagonales du voile. Pour distinguer les deux directions, nous appellerons "direction voile" la diagonale reliant les sommets bas du PH et "direction chaisette" la diagonale joignant les sommets hauts.

A partir des contraintes  $S_x$ ,  $S_y$  et  $T_{xy}$  calculées conformément au paragraphe 3.4.3, on détermine les contraintes principales agissant aux faces supérieure et inférieure qu'on décompose ensuite en contraintes de flexion et de l'effort normal comme l'illustre l'exemple de la figure 43.

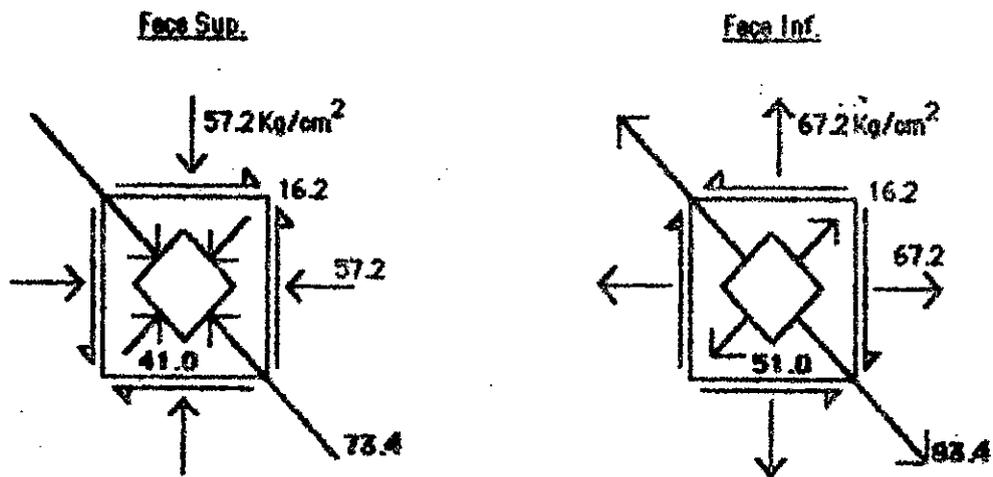
Les contraintes ainsi obtenues, pour les 63 modèles considérés, sont rassemblées dans les tableaux VIII et IX. Les valeurs supérieures correspondent aux contraintes de flexion et les valeurs inférieures indiquent les contraintes de l'effort normal.

Il faut aussi préciser que les contraintes de flexion sont toujours des compressions à la face supérieure et des tractions à la face inférieure. Le signe moins qui précède la valeur d'une contrainte de l'effort normal indique qu'il s'agit d'une compression.

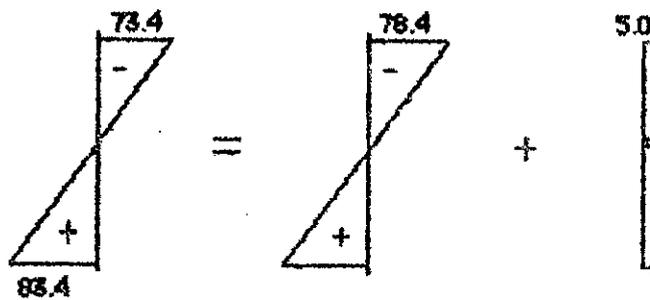
Avant de nous pencher sur l'influence de l'épaisseur et du surbaïssement sur les contraintes, on peut déjà relever quelques résultats généraux.

**Contraintes au centre du voile**

( cas :  $e_p = 1.5 \text{ cm}$   $H = 45 \text{ cm}$  )



Décomposition : direction voûte



**Fig. 43**

En effet , on peut observer que les plus grandes contraintes de flexion agissent dans la direction voûte ; de plus , les contraintes de flexion sont toujours supérieures aux contraintes de l'effort normal .

Les contraintes de l'effort normal sont identiques ( nature et grandeur ) dans les deux directions principales pour chaque cas ; mais la nature de la contrainte peut varier d'un cas à un autre .

Enfin , on relève que les contraintes du modèle ayant 0.5 cm d'épaisseur sont nettement plus élevées que toutes les autres .

**Contraintes au centre du voile**  
(Kg/cm<sup>2</sup>)

**Tableau VIII : Direction voûte**

$\frac{H(\text{cm})}{e_p(\text{cm})}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0.50	900.9 -86.1	853.4 -86.9	814.4 -69.5	785.3 -43.7	764.3 -15.0	749.0 14.2	737.9 42.8	729.4 70.4	723.0 97.2
0.75	391.0 -21.8	367.4 -18.7	350.4 -11.4	339.0 -2.9	331.1 5.7	325.8 14.1	322.0 22.1	319.2 29.8	317.1 37.2
1.00	215.8 -8.0	202.0 -5.8	193.0 -2.4	187.3 1.3	183.6 4.8	181.1 8.2	179.3 11.4	178.1 14.5	177.1 17.5
1.25	136.1 -3.6	127.2 -2.2	121.8 -0.4	118.5 1.5	116.6 3.0	115.0 4.9	114.1 6.5	113.4 8.0	112.9 9.5
1.50	93.5 -1.9	87.2 -1.0	83.6 0.2	81.6 1.2	80.3 2.3	79.4 3.2	78.9 4.1	78.5 5.0	78.2 5.7
1.75	68.1 -1.1	63.6 -0.5	61.1 0.2	59.7 0.9	58.8 1.5	58.2 2.1	57.8 2.6	57.5 3.2	57.3 3.7
2.00	51.9 -0.7	48.4 -0.3	46.6 0.2	45.5 0.7	44.9 1.1	44.6 1.4	44.2 1.8	44.0 2.2	43.8 2.5

**Tableau IX : Direction chaînette**

$\frac{H(\text{cm})}{e_p(\text{cm})}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0.50	783.9 -86.1	693.8 -86.9	619.7 -69.5	564.6 -43.7	524.7 -15.0	495.7 14.2	474.4 42.8	459.5 70.4	446.3 97.2
0.75	330.5 -21.8	285.7 -18.7	253.5 -11.4	231.6 -2.9	217.0 5.7	206.8 14.1	199.6 22.1	194.3 29.8	190.3 37.2
1.00	178.1 -8.0	152.0 -5.8	134.8 -2.4	123.9 1.3	116.9 4.8	112.2 8.2	108.8 11.4	106.5 14.5	104.7 17.5
1.25	110.2 -3.6	93.3 -2.2	83.0 -0.4	76.7 1.5	73.0 3.0	70.1 4.9	68.3 6.5	67.0 8.0	66.1 9.5
1.50	74.5 -1.9	62.6 -1.0	55.9 0.2	51.9 1.2	49.5 2.3	47.9 3.2	46.8 4.1	46.0 5.0	45.5 5.7
1.75	53.7 -1.1	45.1 -0.5	40.4 0.2	37.6 0.9	36.0 1.5	34.9 2.1	34.1 2.6	33.6 3.2	33.2 3.7
2.00	40.6 -0.7	34.0 -0.3	30.5 0.2	28.5 0.7	27.3 1.1	26.5 1.4	26.0 1.8	25.6 2.2	25.3 2.5

### 3.6.2.1 Influence du surbaissement

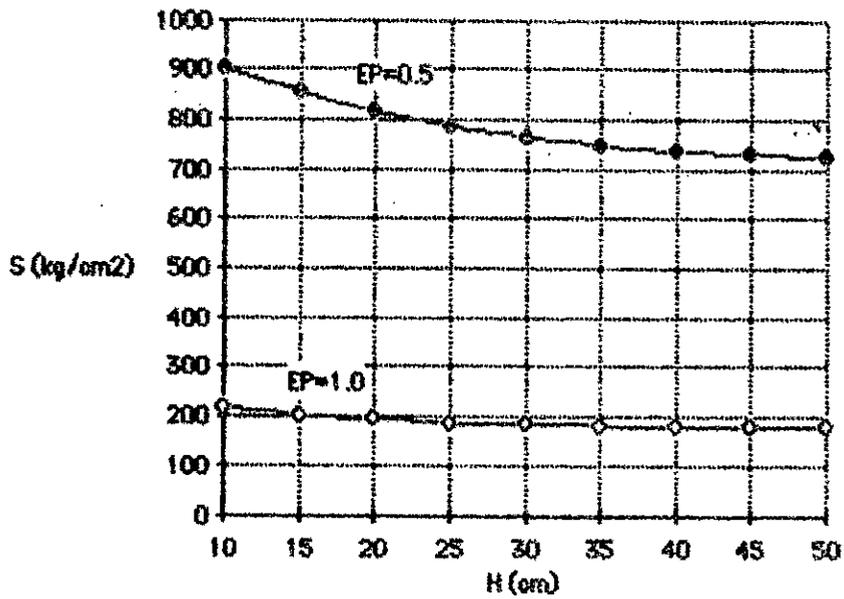
Les contraintes de flexion diminuent lorsque le surbaissement augmente mais assez faiblement. Ainsi, pour une épaisseur de 0.5 cm, le rapport des contraintes de flexion correspondant aux surbaissements extrêmes (10 et 50 cm) vaut 1.246 dans la direction voûte et 1.757 dans la direction chaînette et les mêmes rapports valent 1.183 et 1.601 pour une épaisseur de 2 cm. Pour les autres épaisseurs on trouve des rapports intermédiaires. Ceci veut dire que le fait de multiplier le surbaissement par 5, provoque une réduction des contraintes de flexion de l'ordre de 20% uniquement dans la direction voûte et de l'ordre de 40% dans la direction chaînette.

Les figures 44 et 45 montrent la variation de la contrainte considérée en fonction du surbaissement.

Les contraintes de l'effort normal semblent plus sensibles à la variation du surbaissement, d'autant plus qu'elles changent de signe (figure 46). Pour des surbaissements faibles, on observe une compression qui diminue (en valeur absolue) lorsque le surbaissement augmente puis se transforme en traction.

**Diagrammes Contr. de Flex. ( au centre ) - Surbaissement**  
**- Direction voûte -**

a)



b)

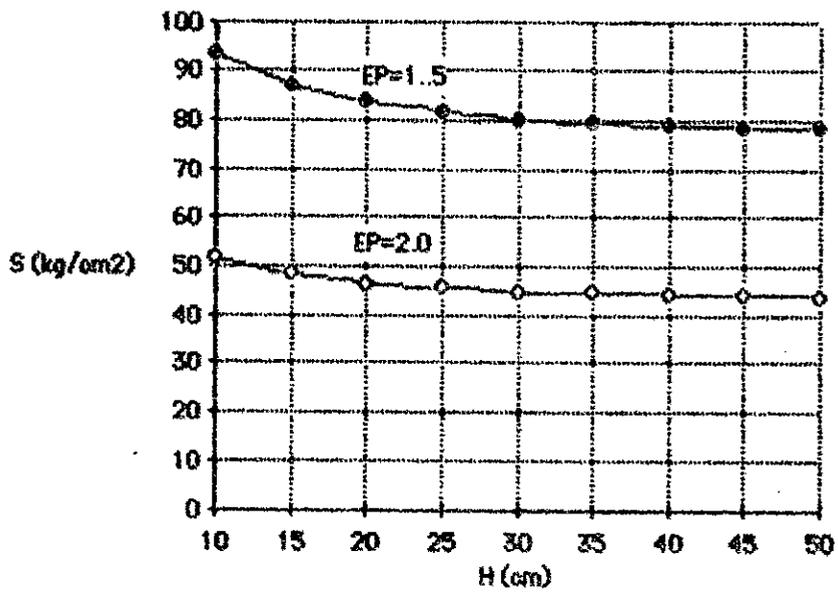
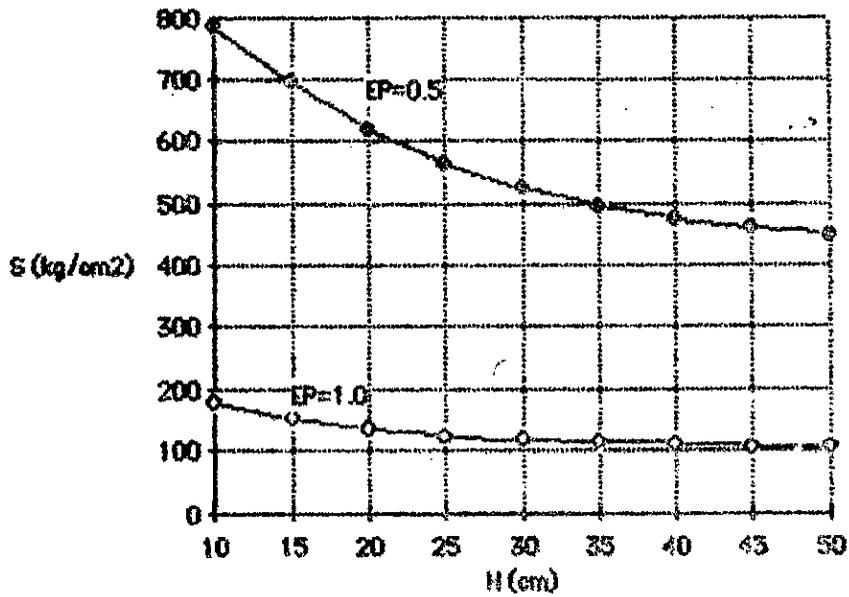


Fig. 44

**Diagrammes Contr. de Flex. ( au centre ) - Surbaissement**  
**- Direction chaînette -**

a)



b)

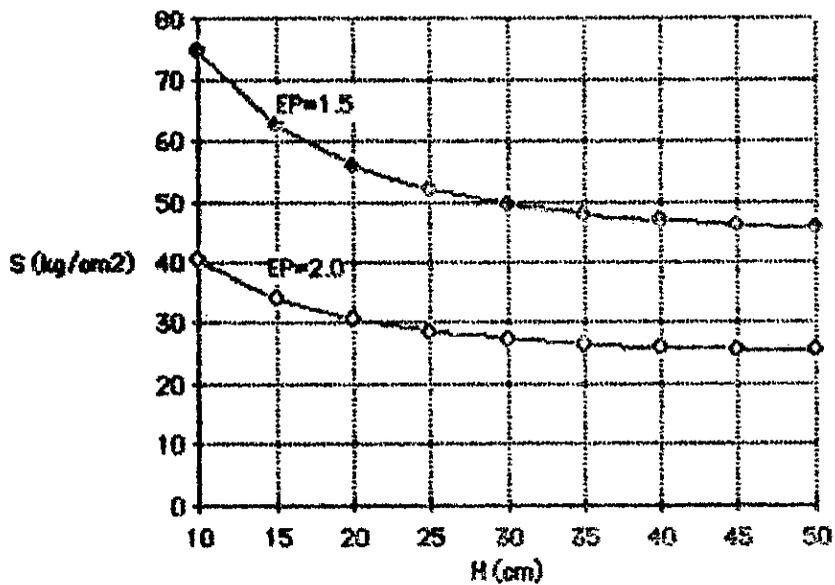


Fig. 45

Diagrammes Contr. de l'eff. Norm. ( ou centre ) - Surboissement

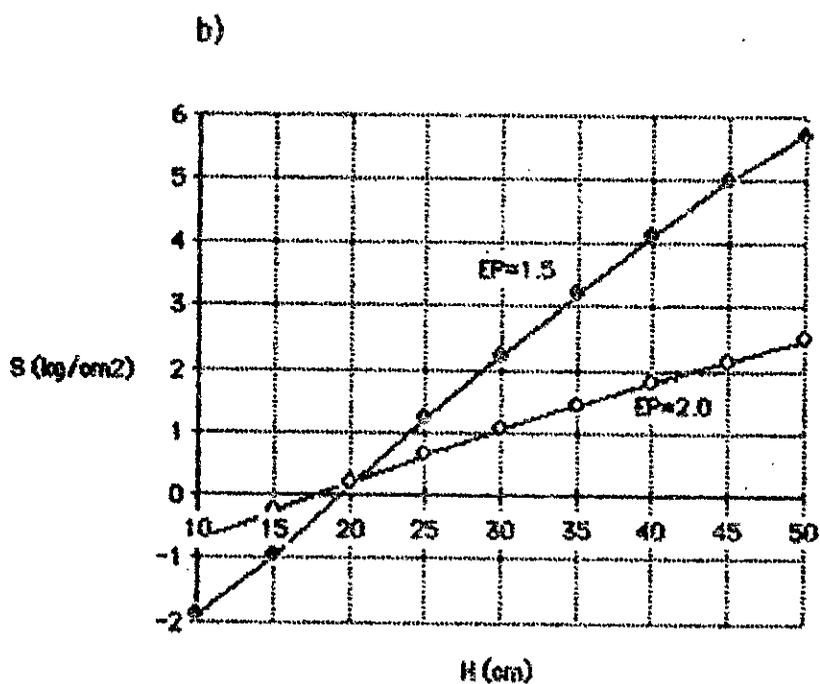
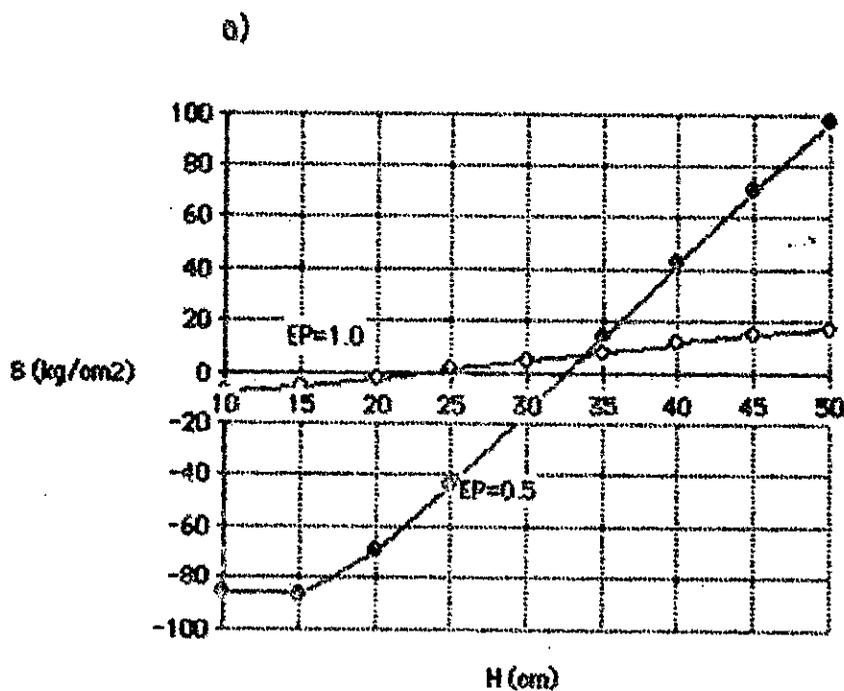


Fig. 46

### 3.6.2.2 Influence de l'épaisseur

L'influence de l'épaisseur semble une nouvelle fois déterminante . En effet , on peut constater qu'elle intervient à une puissance supérieure à deux (2) sur les contraintes de flexion qui sont prépondérantes . En outre , les contraintes varient un peu plus fortement dans la direction chaînette ( Figures 47 et 48 ) . Les courbes des figures 47b et 48b sont pratiquement confondues .

En ce qui concerne les contraintes de l'effort normal , et si on ne tient pas compte du cas correspondant à une épaisseur de 0.5 cm , on peut voir que la variation est plus faible .

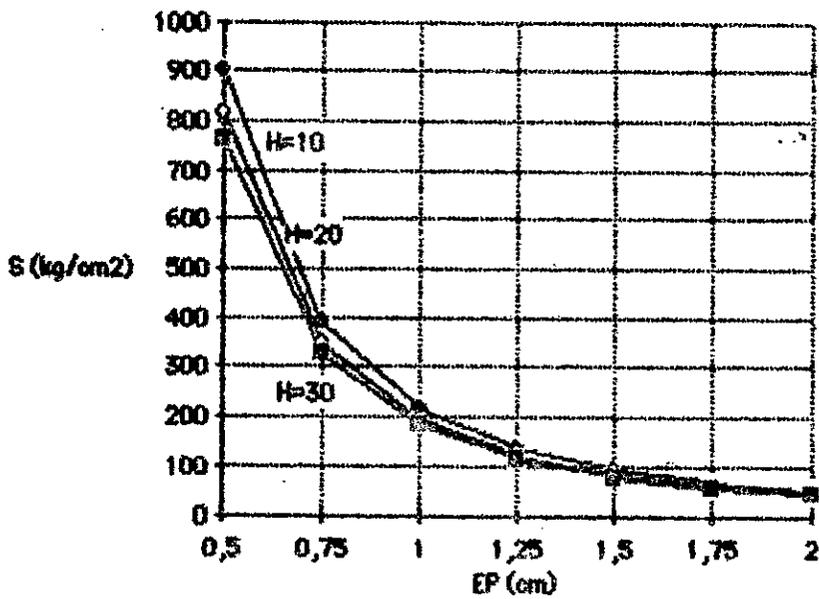
Nous avons également effectué une analyse des contraintes en quatre (4) autres points situés sur les deux diagonales ; il s'agit des points de coordonnées : (  $x=50$  cm ,  $y=50$  cm ) , (  $x=150$  cm ,  $y=50$  cm ) , (  $x=75$  cm ,  $y=75$  cm ) et (  $x=125$  cm ,  $y=75$  cm ) . Ceci nous a permis de constater principalement que la contrainte de l'effort normal est toujours une compression dans la direction voûte et une traction dans la direction chaînette , ces contraintes sont plus importantes qu'au centre du PH .

### 3.6.2.3 Conclusions

Les conclusions de cette analyse des contraintes présentent une grande similitude avec celles tirées de l'étude des déplacements . On retiendra principalement que la variation des contraintes est quasi linéaire en fonction du surbaïssement et parabolique en fonction de l'épaisseur .

**Diagrammes Contr. de Flex. ( au centre ) - Epaisseur  
- Direction voûte -**

a)



b)

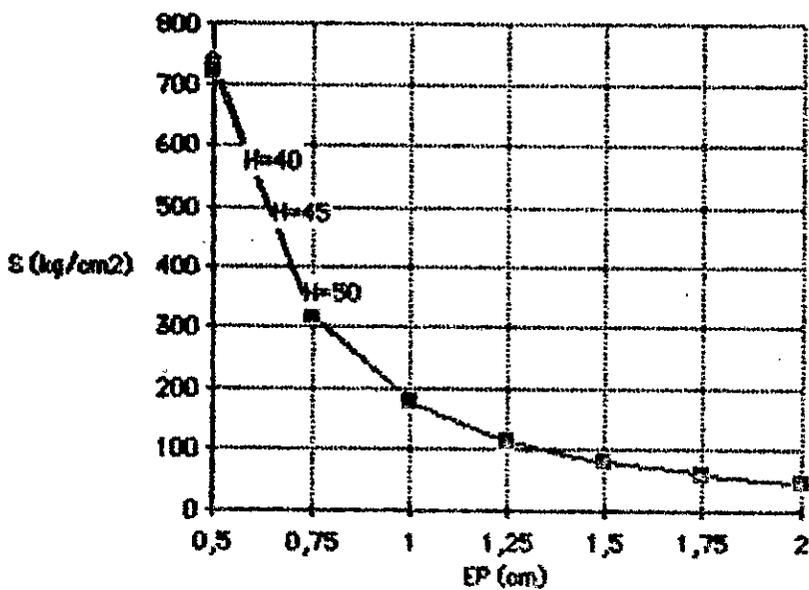
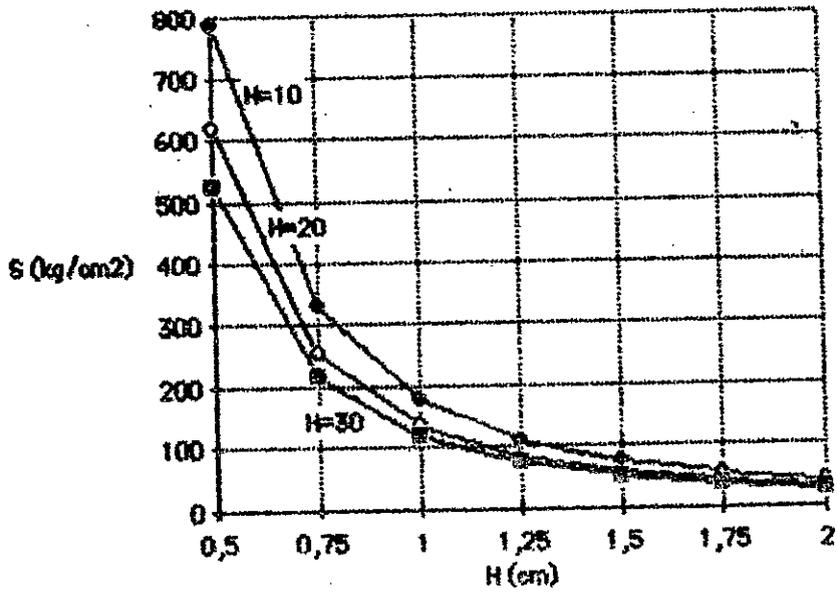


Fig. 47

**Diagrammes Contr. de Flex. ( au centre ) - Epaisseur  
- Direction chaînette -**

a)



b)

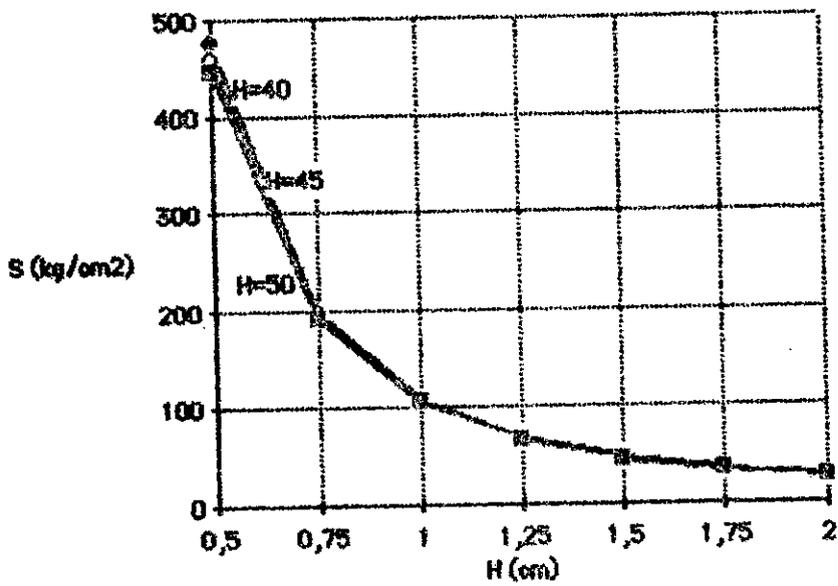


Fig. 48

Diagrammes Contr. de l'eff. Norm. ( au centre ) - Epaisseur

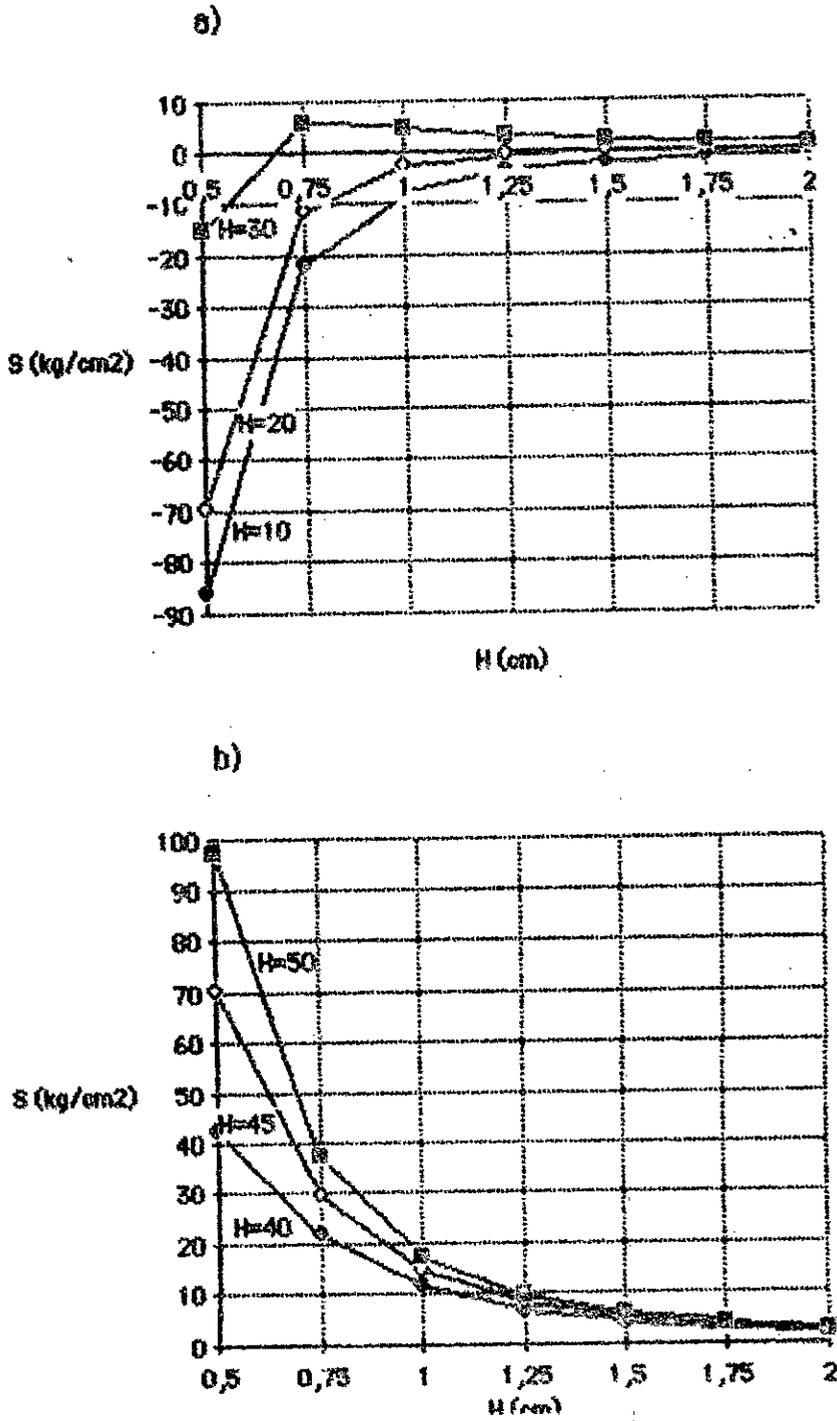


Fig. 49

## Chapitre 4 : Conclusion

### 4.1 Principaux résultats

Dans ce paragraphe , nous donnons les résultats essentiels , expérimentaux et théoriques ( numériques plus exactement ) , obtenus au terme de ce travail

L'étude expérimentale a montré que les deux modèles réduits de paraboloïde hyperbolique testés présentaient un comportement essentiellement " flexionnel " et ce indépendamment du type de chargement considéré .

Les contraintes enregistrées restent , de manière générale , assez " modérées " .

Dans le cas de la charge répartie les contraintes de membrane sont beaucoup plus faibles que celles prévues par la théorie de la membrane qui est la solution de référence généralement admise pour ce type de chargement

Sous une charge concentrée , les directions principales minimales sont approximativement " radiales " ce qui signifie que les moments de flexion les plus importants agissent autour des directions radiales

Par ailleurs , la comparaison des deux modèles a montré que le surbaississement n'affectait pas le comportement général du PH

Enfin , les essais jusqu'à la ruine ont montré que le mécanisme de fissuration présentait beaucoup de similitudes avec celui des dalles .

Le modèle numérique de calcul proposé dans ce mémoire , basé sur le " principe de l'énergie potentielle totale minimum " , fournit une approche globalement satisfaisante pour le calcul de ce type de PH sous une charge répartie uniforme .

L'étude numérique réalisée à l'aide de ce modèle a permis de mettre en relief l'influence prépondérante de l'épaisseur . Par contre , l'influence du surbaissement est elle même influencée par l'épaisseur . Ainsi , on a vu que le surbaissement intervenait surtout dans le cas des faibles épaisseurs et n'avait qu'une influence minimale lorsqu'il s'agissait des cas où l'épaisseur était importante .

Les contraintes de membrane sont plus importantes lorsque l'épaisseur est faible .

On a également relevé que le rapport " surbaissement/épaisseur " n'apportait pas d'indications nouvelles par rapport à ce qu'on a observé séparément pour chacun de ces deux paramètres . Il semble par contre que le rapport " portée/épaisseur " serait déterminant dans le comportement des voiles étudiés .

C'est très probablement ce rapport qui déterminera que tel PH peut être considéré comme une membrane et tel autre comme une coque .

En outre , nous avons relevé que le cas correspondant à une épaisseur de 0.5 cm présentait des valeurs , déplacements et contraintes , beaucoup plus importantes que celles des autres cas . Cela veut vraisemblablement dire que nous sommes au voisinage d'une épaisseur " critique " ou plutôt d'un rapport portée/épaisseur critique .

#### 4.2 Utilisation du modèle proposé et perspectives

Le modèle de calcul développé dans ce mémoire peut être utilisé tel quel pour l'étude du comportement ( calcul des déplacements , éléments de réduction et contraintes ) des PH à rives rectilignes soumis à des charges uniformément réparties .

Il peut également servir à la détermination de la " **capacité portante** " des voies . Signalons que la charge admissible peut être atteinte soit par dépassement du déplacement limite toléré soit par dépassement de la contrainte ( ou déformation ) limite admise

Nous avons étudié , dans le cadre de ce Magister , l'influence de l'épaisseur et du surbaissément sur le comportement général des PH , mais le modèle peut être utilisé directement pour étudier l'influence de tout autre paramètre comme par exemple la rigidité des poutres de rive

Le modèle proposé est encore perfectible . Pour l'améliorer , nous pensons que plutôt que de chercher un champ de déplacement pouvant satisfaire à toutes les conditions , ce qui est très difficile ( cf § 3.2.2 ) , on pourrait songer à proposer une expression de l'énergie potentielle totale ( relation 3.4 ) avec des termes corrigés . En effet , le calcul des différentes énergies a montré que certaines prenaient une importance élevée comparativement aux phénomènes qu'elles représentent , c'est notamment le cas de l'énergie potentielle de déformation des poutres de rive  $W_p$  ( § 3.3.1 ) . Par contre , d'autres restaient insuffisamment élevées et principalement l'énergie potentielle de déformation due à l'effet de dalle  $W_m$  ( § 3.3.1 )

On peut aussi chercher un modèle combiné qui serait une combinaison du modèle décrit et d'un modèle plus rigide au contour. Ce dernier modèle pouvant être obtenu en ne retenant par exemple dans l'énergie totale que le terme  $W_m$  (§ 3.3.1).

Notre modèle de calcul a été établi et testé pour une charge répartie uniforme, il reste à étudier les cas de la charge non uniforme et de la charge concentrée. Ces deux cas peuvent être étudiés avec le même modèle en apportant seulement quelques transformations à l'expression de la charge.

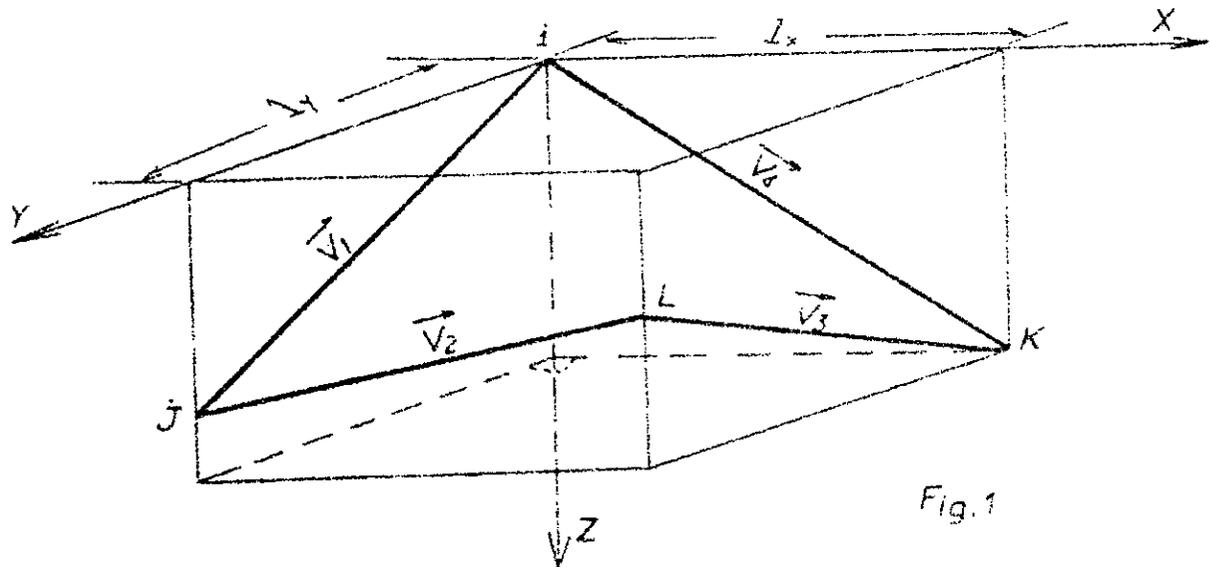
De même, dans ce travail on a considéré un type d'appui déterminé mais on peut envisager d'autres modes d'appui.

Un autre problème qui mériterait d'être traité est le comportement de ce type de VM au delà du domaine élastique.

Enfin, il serait fort intéressant d'utiliser une autre méthode de calcul et notamment un calcul par la méthode des éléments finis en vue d'une comparaison avec le modèle variationnel utilisé.

ANNEXE - ANGLE ENTRE DEUX GENERATRICES D'UN PH RECTANGULAIRE  
 =====

Soient  $i, j, k, l$  les sommets d'un parabolïde hyperbolique rectangulaire et  $X Y Z$  un trièdre trirectangle direct dont l'origine coïncide avec le sommet  $i$  du PH.



L'équation du PH est :

$$Z = A + B \cdot x + C \cdot y + k \cdot x \cdot y \tag{1}$$

avec :

$$A = z_i = 0 \qquad B = \frac{z_k - z_i}{l_x} = \frac{z_k}{l_x} \tag{2}$$

$$C = \frac{z_j - z_i}{l_y} = \frac{z_j}{l_y} \qquad K = \frac{z_l - z_j - z_k + z_i}{l_x \cdot l_y} = \frac{z_l - z_j - z_k}{l_x \cdot l_y}$$

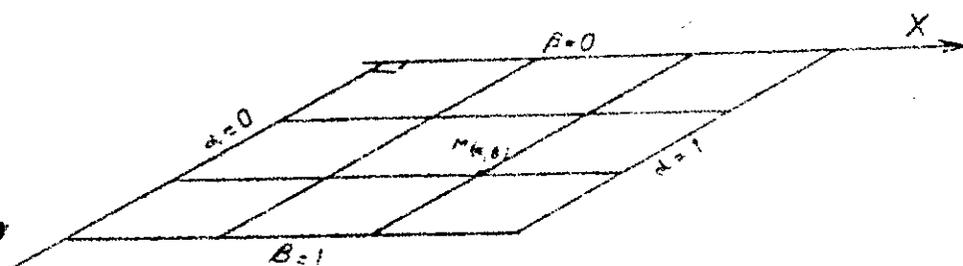


Fig.1 bis

d'où :

$$z = z_k \frac{x}{l_x} + z_j \frac{y}{l_y} + (z_1 - z_j - z_k) \frac{x y}{l_x l_y} \quad (3)$$

et si on pose :

$$\alpha = \frac{x}{l_x} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y}{l_y}$$

on obtient :

$$z = z_k \alpha + z_j \beta + (z_1 - z_j - z_k) \alpha \beta \quad (4)$$

Les vecteurs positions des 4 sommets du PH sont :

$$\vec{V}_i = o\vec{x} + o\vec{y} + o\vec{z}$$

$$\vec{V}_j = x_j \vec{x} + y_j \vec{y} + z_j \vec{z} = l_y \vec{y} + z_j \vec{z} \quad (5)$$

$$\vec{V}_k = x_k \vec{x} + y_k \vec{y} + z_k \vec{z} = l_x \vec{x} + z_k \vec{z}$$

$$\vec{V}_l = l_x \vec{x} + l_y \vec{y} + z_1 \vec{z}$$

$x$ ,  $y$  et  $z$  étaient les vecteurs unitaires définissant les directions des axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ .

Vecteurs le long des génératrices

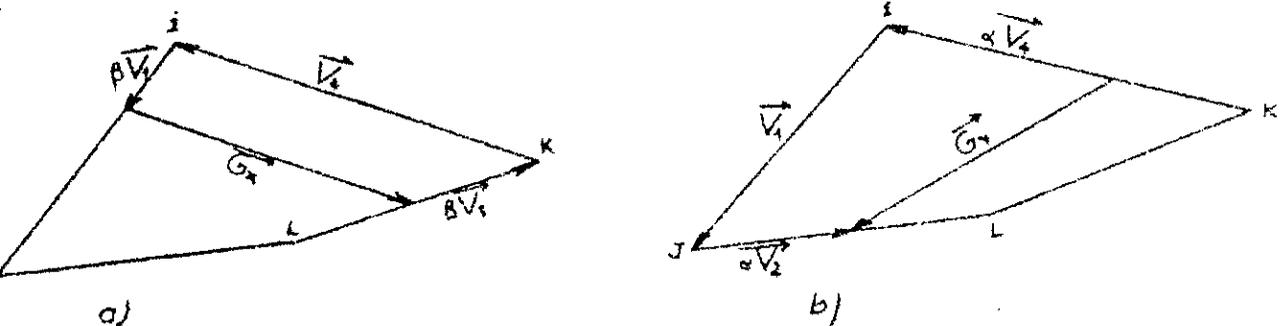


Fig 2

Les vecteurs le long des génératrices de rive sont :

$$\begin{aligned}\overline{V}_1 &= \overline{V}_j & \overline{V}_2 &= \overline{V}_1 - \overline{V}_j \\ \overline{V}_3 &= \overline{V}_k - \overline{V}_1 & \overline{V}_4 &= -\overline{V}_k\end{aligned}\quad (6)$$

Comme le montre les figures 2a et 2b, les vecteurs  $\overrightarrow{G}_x$  et  $\overrightarrow{G}_y$  dans les directions des génératrices  $\beta = \text{cste}$  et  $\alpha = \text{cste}$ , respectivement, sont :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}_x &= -(\beta\overline{V}_1 + \overline{V}_4 + \beta\overline{V}_3) = -\overline{V}_4 - \beta(\overline{V}_1 + \overline{V}_3) \\ \overrightarrow{G}_y &= \alpha\overline{V}_4 + \overline{V}_1 + \alpha\overline{V}_2 = \overline{V}_1 + \alpha(\overline{V}_2 + \overline{V}_4)\end{aligned}\quad (7)$$

A l'aide des relations 5 et 6, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}_x &= l_x \overline{x} + (z_k + \beta(z_1 - z_k - z_j)) \overline{z} = \\ &= a_x \overline{x} + a_y \overline{y} + a_z \overline{z} \\ \overrightarrow{G}_y &= l_y \overline{y} + (z_j + \alpha(z_1 - z_k - z_j)) \overline{z} = \\ &= b_x \overline{x} + b_y \overline{y} + b_z \overline{z}\end{aligned}\quad (8)$$

Posons :

$$z_1 - z_k - z_j = Z \quad \text{et} \quad \overline{\zeta} = (G_x, G_y)$$

$$\begin{aligned} \vec{G}_x \vec{G}_y &= |G_x| |G_y| \cos \delta = \\ &= \sqrt{l_x^2 + (z_k + \beta z)^2} \sqrt{l_y^2 + (z_j + \alpha z)^2} \cos \delta \end{aligned} \quad (9)$$

mais on a également :

$$\begin{aligned} \vec{G}_x \vec{G}_y &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \\ &= (z_k + \beta z) (z_j + \alpha z) \end{aligned} \quad (10)$$

d'où :

$$\cos \delta = \frac{(z_k + \beta z) (z_j + \alpha z)}{\sqrt{l_x^2 + (z_k + \beta z)^2} \sqrt{l_y^2 + (z_j + \alpha z)^2}}$$

où :

$$\alpha = \frac{x}{l_x}, \quad \beta = \frac{y}{l_y} \quad \text{et} \quad z = z_1 - z_k - z_j$$

ou encore :

$$\cos \delta = \frac{\frac{z_k + \beta z}{l_x} x + \frac{z_j + \alpha z}{l_y} y}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_k + \beta z}{l_x}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{z_j + \alpha z}{l_y}\right)^2}} \quad (12)$$

La pente du voile (équation 3) dans une direction 'n' est donnée par l'expression :

$$i_n = \frac{\partial Z(x,y)}{\partial n}$$

Ainsi les pentes dans les directions x et y sont respectivement :

$$\begin{aligned} i_x = \text{tg} \alpha' &= \frac{\partial Z(x,y)}{\partial x} = \frac{z_k}{l_x} + \frac{(z_1 - z_j - z_k)}{l_x l_y} y = \frac{z_k}{l_x} + \frac{z_1 - z_j}{l_x l_y} = \frac{z_k + \alpha' z}{l_x} \\ i_y = \text{tg} \beta' &= \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{z_j}{l_y} + \frac{(z_1 - z_k - z_j)}{l_x l_y} x = \frac{z_j}{l_y} + \frac{z_1 - z_k}{l_x l_y} = \frac{z_j + \beta' z}{l_y} \end{aligned} \quad (13)$$

Notons que les pentes  $i_x$  et  $i_y$  sont celles des génératrices parallèles aux plans XZ et YZ, respectivement, puisque le voile est engendré par des génératrices rectilignes.

L'expression (12) devient alors :

$$\cos \gamma = \frac{t_g \alpha'}{\sqrt{1+t_g^2 \alpha'^2}} \cdot \frac{t_g \beta'}{\sqrt{1+t_g^2 \beta'^2}} = \sin \alpha \sin \beta \quad (14)$$

N.B. L'angle  $\gamma$  est formé par les génératrices  $\overline{G_x}$  et  $\overline{G_y}$  qui sont orientées. Ainsi au point j, par exemple, l'angle  $\gamma$  est l'angle extérieur.

Pour le cas particulier d'un PH dont la projection sur un plan horizontal est un carré ( $i_x = i_y = 1$ ), il est plus commode de considérer l'origine du système XYZ au centre du PH.

Ainsi en effectuant les changements de variables :

$$\begin{aligned} x' &= x + l_x/2 \\ y' &= y + l_y/2 \\ z' &= z + H/2 \end{aligned} \quad (15)$$

et sachant que dans le repère XYZ ainsi défini, l'équation du PH devient :

$$z = h \times y$$

avec :

$$h = \frac{z_i + z_1 - z_k - z_j}{l_x l_y} = \frac{z_i + z_1 - z_k - z_j}{l^2} \quad (16)$$

Si les sommets i et j sont dans un même plan horizontal et k et j dans un autre plan parallèle distant de H, alors :

$$h = \frac{-2H}{j^2} \quad H \text{ est le surbaissement}$$

l'équation (11) devient :

$$\cos Y = \frac{h^2 x y}{\sqrt{1+h^2 y^2} \sqrt{1+h^2 x^2}} \quad (17)$$

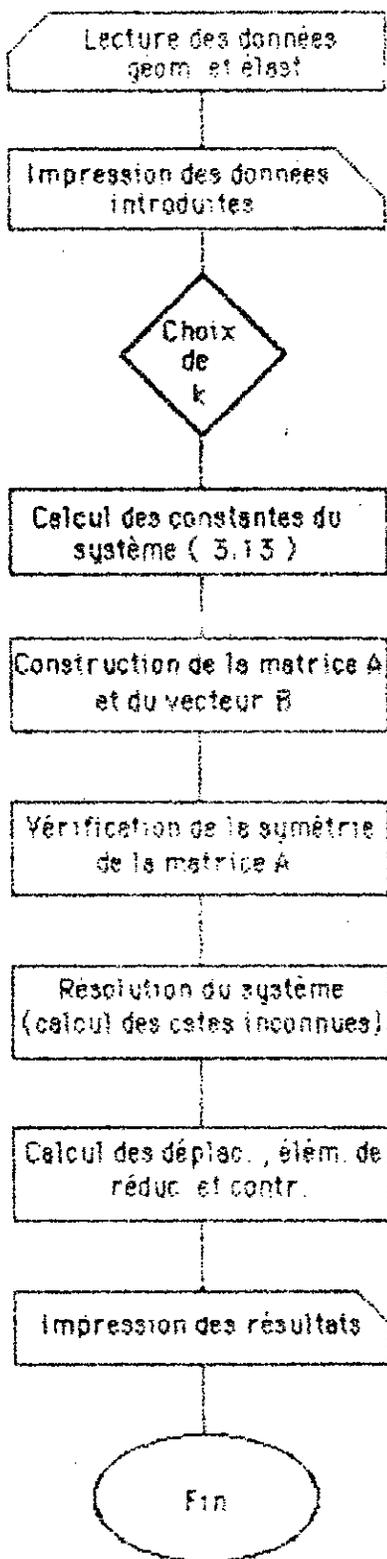
Remarque : On pouvait aboutir plus rapidement en partant de l'équation (14) et en utilisant les relations (13)

**ANNEXE B : DESCRIPTION DU PROGRAMME**

Le programme ne présente pas de difficultés particulières puisqu'il s'agit de constituer un système d'équations et de le résoudre ensuite afin de déterminer les constantes des fonctions de déplacement

Il comporte les étapes suivantes :

- 1- On introduit les caractéristiques géométriques ( portée , épaisseur , surbaissement ) et élastiques ( coef. de Poisson , module de Young ) du modèle . Les rigidités du voile (  $K$  et  $D$  ) et des poutres du contour (  $EI$  et  $T$  ) peuvent être calculées et introduites avec les données
- 2- Les données sont imprimées dans le but de s'assurer qu'il n'y a pas eu d'erreurs lors de leur introduction . On peut éventuellement introduire des tests qui consisteraient à vérifier qu'une caractéristique donnée est comprise entre des bornes fixées ( charges ) .
- 3- On fixe ensuite le nombre de termes (  $k$  ) que comporteront les fonctions de déplacement ( qui sont des séries )
- 4- On calcule alors les constantes du système ( 3.13 ) conformément aux définitions de la page III-21  
Ce calcul comporte deux étapes : des dérivations puis des intégrations . Pour notre part , nous avons effectuée analytiquement les dérivations et numériquement le calcul des intégrales . Pour l'intégration numérique nous avons utilisé la méthode de Simpson en prenant 64 points d'intégration dans chaque direction



Organigramme du programme

- 5- On procède ensuite à la construction de la matrice A et du vecteur B définis à la page III-22 .
- 6- La vérification de la symétrie de la matrice A constitue un excellent moyen de contrôle des erreurs .
- 7- On résoud le système pour déterminer les constantes inconnues des fonctions de déplacement . Dans notre programme on a utilisé la méthode du pivot .
- 8- On calcule alors , aux points désirés , les déplacements avec les formules ( 3.10 ) et ( 3.11 ) puis les éléments de réduction et les contraintes conformément aux relations des paragraphes 3.4.2 et 3.4.3 .

## Références

- [1] A.A. BELES et M. SOARE  
"Les Paraboloïdes Elliptiques et Hyperboliques dans les constructions"  
Ed. Dunod - Paris (1967)
  
- [2] A. PFLUGER  
"Eléments de Statique des Coques"  
Ed. Dunod - Paris (1966)
  
- [3] A. PADUART  
"Les Voiles Minces en béton armé"  
Ed. Eyrolles - Paris et Presses Universitaires de Bruxelles - Bruxelles  
( 1969 )
  
- [4] J. COURBON  
"Voiles Minces"  
Ed. Eyrolles - Paris (1979 )
  
- [5] D. NGO , H.D. RAMIREZ and A.C. SCORDELIS  
"Membrane Stresses in Hyperbolic Paraboloid Shells Having a  
Parallelogram Shape in Plan"  
Journal of The American Concrete Institute ( ACI ) - Title n°66-67  
( Dec. 1969 )

## Références

---

- [6] D. NGO , H.D. RAMIREZ and A.C. SCORDELIS  
"Membrane Stresses in Hyperbolic Paraboloid Shells Having an  
Arbitrary Quadrilateral Shape in Plan"  
Journal of the American Concrete Institute ( ACI ) - Title n°67-4  
( Jan. 1970 )
- [7] P. HALLEUX  
"Comportement Flexionnel d'un Paraboloïde Hyperbolique en  
micro-béton"  
Université Libre de Bruxelles - Service Analyse des Contraintes  
Séminaire d'Analyse des Contraintes n°17 ( 1976 )
- [8] A. PADUART and P. HALLEUX  
"Flexural Behaviour of a Micro-concrete Hypar Shell"  
Bulletin of the International Association for Shell and Spatial  
Structures ( IASS ) n°61
- [9] A. PADUART and P. HALLEUX  
"Test to Failure of a Micro-concrete Hypar Shell under Concentrated  
Load"  
IASS Conf. on Lightweight Shell & Space Struct. for Normal and  
Seismic Zones , Aino-Alta , Section 1 ( Sep. 1977 )
- [10] T.G. SAMBANTHAN , P.K. ARAVINDAN and P.S. RAO  
"Behaviour of a Micro-concrete Hyperbolic paraboloid Shell"  
Inter. Jour. for Numerical Methods in Engrg. - Experimental  
Mechanics ( Jun. 1981 )

- [11] C. MASSONNET  
"Résistance des Matériaux" - Tome II  
Ed. Dunod - Paris
- [12] R.G. BUDYNAS  
"Advanced Strength and Applied Stress Analysis"  
Ed. McGraw-Hill Kogakusha, LTD. Inter. Student Edition (Tokyo)
- [13] S.P. TIMOSHENKO and S. WOINOWSKY-KRIEGER  
"Theory of Plates and Shells"  
Ed. McGraw-Hill Kogakusha, LTD. Inter. Student Edition (Tokyo)
- [14] J.C. DOTREPPE  
"Etude par Eléments Finis des Dalles en béton armé jusqu'à la ruine"  
Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées  
Collection des Publications n°42 (1973)
- [15] A. KOURDUMOV et A. LOKSCHINA  
"Mécanique des Constructions des Navires et Théorie de l'Elasticité"  
(Volume 2)  
Leningrad (1966)
- [16] A.A. NAZAROV  
"Théorie et Méthodes de Calcul des Coques Surbaissées"  
Moscou (1966)
- [17] J. AVRIL  
"Manuel d'analyse expérimentale des contraintes"  
Ed. Budd S.A. - France (1970)

## Références

---

[18] P. HALLEUX

"Extensométrie sur béton : que peut-on mesurer ?"

Université Libre de Bruxelles - Service Analyse des Contraintes

Séminaire d'Analyse des Contraintes n°16 ( 1975 )

[19] P. HALLEUX

"Précision de l'extensométrie Génie Civil"

Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des

Travaux Publics

Série : Essais et Mesures n°152 ( 1976 )

[20] N.M. DEHOUSSE et R. ARNOULD

"Les modèles réduits de structures en Génie Civil"

Ed. Dunod - Paris (1971)

[21] D. BUSHNELL

"Nonlinear Axisymmetric Behavior of Shells of Revolution"

AIAA Journal Vol. 5, n°3 (Mar. 1967)

[22] J. ARBOCZ and C.D. BABCOCK, JR.

"The Effect of General Imperfections on the Buckling of  
Cylindrical Shells"

Journal of Applied Mechanics (Mar. 1969)

[23] C. KUANG-HAN and J. MARVIN

"Analysis of Hyperbolic Cooling Towers"

Journal of the American Concrete Institute ( ACI ) - Title n°66-31

( May 1969 )

## Références

---

[24] P. HARVEY GRIGGS

"Buckling of Reinforced Concrete Shells"

Journal of the Engineering Mechanics Division

Proceedings of the American Society of Civil Engineers

( Jun. 1971 )

[25] P.LEP. DARVALL , D.P. BILLINGTON and R. MARK

"Model Analysis of a Continuous Microconcrete Cylindrical Shell"

Journal of the American Concrete Institute ( ACI ) - Title n°68-72

( Nov. 1971 )

[26] J.W. LEONARD and CHIN-TSANG LI

"Strongly Curved Finite Element for Shell Analysis"

Journal of the Engineering Mechanics Division

Proceedings of the American Society of Civil Engineers

( Jun. 1973 )

[27] F.R. HAND , D.A. PECKNOLD and W.C. SCHNOBRICH

"Nonlinear Layered Analysis of RC Plates and Shells"

Journal of the Structural Division

Proceedings of the American Society of Civil Engineers

( Jul. 1973 )

[28] F.G. BERCHA and P.G. GLOCKNER

"Numerical Analysis of Thick Shells of Revolution"

Journal of the Engineering Mechanics Division

Proceedings of the American Society of Civil Engineers

( Oct. 1973 )

## Références

---

- [29] CHENG-SHUNG LIN and A.C. SCORDELIS  
"Finite Element Study of a RC Cylindrical Shell through  
Elastic , Cracking and Ultimate Ranges"  
Journal of the American Concrete Institute ( ACI ) - Title n°72-43  
( Nov. 1975 )
- [30] F. DAL et C. WOUTERS  
"Etude du comportement linéaire et non linéaire de structures  
spatiales composites par la méthode des éléments finis"  
Faculté des Sciences Appliquées de l'Université Libre de  
Bruxelles ( 1979 )
- [31] Z. BENAZOUZ et S. BRAHMI  
"Etude du comportement des voiles minces en b. a. en forme de PH"  
T. F. E.  
Département de Génie Civil de l'Ecole Nationale Polytechnique  
Alger ( 1983 )
- [32] A. PADJART  
"Sollicitations et déformations des constructions"  
Tome I : Méthodes générales  
Presses Universitaires de Bruxelles ( 1977 )
- [33] M. LERARI  
"Rapports ( 4 ) des expériences sur un modèle réduit de PH"  
( Avril 81 - Juin 81 - Août 81 - Janvier 82 )  
Université Libre de Bruxelles - Service Analyse des Contraintes