

---

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Civil**



**Ecole Doctorale : Ingénierie et Environnement**

**Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des structures  
(LGSDS)**

## **Mémoire de Magister**

**Présenté par :**

**CHEMALI Badreddine**

**Ingénieur d'Etat en Génie Civil**

## **Thème**

**Simulation par la méthode de Monte Carlo de la réponse des  
structures à amortissement incertain sous excitations harmoniques**

devant le jury composé de :

Président	: <b>M . HAMMOUTENE</b>	Professeur, ENP.
Directeur de mémoire	: <b>B. TILIOUINE</b>	Professeur, ENP.
Examineurs	: <b>M . BOUABDALLAH</b>	Professeur, ENP.
	: <b>H .BEN CHERIF</b>	Maître de Conférences A, ENP.

## Remerciements

*La réalisation de ce Mémoire de Magister n'aurait pas été possible sans le soutien et la participation de plusieurs personnes avec lesquelles j'ai étroitement collaboré et qui m'ont fait part de leurs connaissances et de leur savoir-faire; je souhaite ici leur exprimer toute ma gratitude.*

*Je remercie mon directeur de Mémoire **Mr. B. TILIOUINE**, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP) et Directeur du Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique de Structures (LGSDS), pour l'attention qu'il a portée à ce travail. Ses précieuses orientations et conseils m'ont soutenu tout au long de mes recherches. Sa supervision et son expérience m'ont été essentielles dans la réalisation de ce travail.*

*Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à **Mr M. BOUABDELLAH** professeur à l'ENP pour l'honneur qu'il me fait en présider ce jury.*

*Mes remerciements s'adressant à Mr le professeur **M. HAMOUTENNE** pour l'honneur qu'il a bien voulu me faire en acceptant d'examiner ce travail, ainsi que pour les orientations et les conseils qu'il a su me prodiguer durant la période de recherche.*

*Mes remerciements aussi s'adressant à Madame **MC H.BEN CHERIF** pour l'honneur qu'elle a bien voulu me faire en acceptant d'examiner ce travail.*

*Mes remerciement vont également à tous ceux et celle qui de près ou de loin m'ont apporté de l'aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.*

*Merci aussi à tous les membres de l'équipe de laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique de Structures pour leurs soutiens et leurs aides.*

*Enfin, je remercie chaleureusement mes parents pour l'attention, le soutien et la confiance qu'ils m'ont donnés au cours de ces longues années. Je n'oublierai pas de remercier ma grande famille et tous mes amis.*

*Je voudrais ici exprimer ma reconnaissance envers les personnes qui m'ont aidés et soutenu durant la période de le mémoire. Je tiens à remercier pour ce la les collègues et amis croisé au cours de ces années ; je m'excuse de ne pouvoir citer tous ici.*

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة تأثير الارتياح في التخماد على استجابة النظام الديناميكي مع العديد من درجات الحرية . قمنا بعرض النموذج الإحصائي الخطي الذي يسمح التوصيف الاحتمالي للاستجابة . يتم التحقق من حدود صلاحية تقنية الخطية عن طريق محاكاة مونت كارلو . تم صياغة فرضية الترابط بين معاملات التخماد . النظرية تنطبق على مختلف اشكال التخماد ومعاملات الهياكل الأخرى . مثال عن هيكل متكون من خمس درجات من الحرية يوضح أهمية وجوب تقدير دقيق لمعاملات التخماد للهياكل ذات التخماد الطفيف في حدود التجاوب .

**الكلمات المفاتيح :** الارتياح ، التخماد ، استجابة ، النظام الديناميكي ، النموذج الإحصائي الخطي ، محاكاة مونت كارلو ، التجاوب

## Résumé

L'objet de ce travail est d'étudier l'influence de l'incertitude d'amortissement sur la réponse d'un système dynamique avec de nombreux degrés de liberté. On présente un modèle linéaire statistique qui permet une description probabiliste de la réponse en termes de statistiques de second ordre. Les limites de la validité de la technique de linéarisation sont étudiées au moyen d'une simulation de Monte Carlo. Une hypothèse initiale concernant la corrélation statistique des coefficients d'amortissement est formulée. La théorie développée est applicable aux différentes formes d'amortissement et pour d'autres paramètres du système. Un exemple numérique basé sur un système de cinq degrés de liberté montre quantitativement l'importance d'une estimation précise des coefficients d'amortissement pour les systèmes peu amorti dans le voisinage d'une fréquence propre.

**Mots clés :** incertitude, amortissement, réponse, système dynamique, modèle linéaire statistique, simulation de Monte Carlo, fréquence propre.

## Abstract

The object of the present study is to investigate the influence of damping uncertainty on the response of a dynamic system with many degrees of freedom. A statistical linear model is presented which allows a probabilistic description of the response in terms of second –order statistics. The limits of validity of the linearization technique are investigated by means of a Monte Carlo simulation. An original hypothesis regarding the statistical correlation of damping coefficients is formulated. The theory as developed is applicable to different forms of damping and to other system parameters. A numerical example based on a five –degree-of-freedom system shows quantitatively the importance of an accurate estimate of the damping coefficients for lightly damped systems in the neighborhood of a natural frequency

**Key Words:** uncertainty, damping, response, dynamic system, statistical linear model, Monte Carlo simulation, natural frequency.

<b>SOMMAIRE</b>	page
Résumé.....	i
Sommaire.....	ii
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>01</b>
<b>CHAPITRE I. CONCEPT PROBABILISTE .....</b>	<b>04</b>
I.1.Notion de hasard.....	04
I.2.Incertitude dans le processus de construction.....	05
I.3.Rappelle théorique .....	06
I.3.1.Loi d'une variable aléatoire.....	06
I.3.2. Variables aléatoires discrètes.....	07
I.3.3. Variables aléatoires continues.....	08
I.3.4. Espérance et Variance.....	11
I.3.5. Couples de variables aléatoires.....	12
I.4 .Principale distributions continues.....	14
I.4.1 Variable aléatoire uniforme.....	15
I.4.2 Variable aléatoire normale.....	16
I.4.3 Variable aléatoire log normale.....	17
I.5.Représentation graphique.....	19
I.5.1 Histogramme.....	19
I.5.2 Diagramme circulaire.....	20
<b>CHAPITRE II. FORMULATION DES EQUATIONS.....</b>	<b>22</b>
II.1.Système a un degré de liberté.....	22
II.1.1.Loi de comportement de l'oscillateur.....	22
II.1.2.Equation de l'équilibre dynamique.....	26
II.1.3. Formulation réduite de l'équation d'équilibre.....	28
II.1.4. Vibrations libres.....	30
II.1.5.Vibration forcée .....	34
II.2.Système a plusieurs degrés de liberté.....	38
II.2.1.Equation de l'équilibre dynamique.....	39
II.2.2. Coordonnées généralisées.....	41
II.2.3 Structures et propriétés de la matrice raideur et masse.....	42
II.2.3 Fréquence propre et mode propre.....	45
II.2.4 Vibrations forcées non amorties.....	47

II.2.5 Vibrations forcées non amorties.....	49
II.3. Fonction d'impédance .....	50
<b>CHAPITRE III. TECHNIQUE DE MESURE D'AMORTISSEMENT.....</b>	<b>52</b>
III.1. Mesures de l'amortissement des systèmes à un degré de liberté.....	52
III.1. 1. Décroissance des oscillations libres.....	52
III.1. 2. Amplification résonante .....	52
III.1. 3. Méthode de demi-puissance (largeur de bande).....	54
III.1. 4. Déperdition d'énergie par cycle (essai en résonance).....	56
III.1. 5. Amortissement hystérésique.....	59
III.2. Mesures de l'amortissement des systèmes à plusieurs degrés de liberté.....	60
III.2.1. Mesure de l'amortissement modale.....	60
III.2.2. Valeurs caractéristiques d'amortissement.....	63
III.2.3. Amortissement non classique.....	63
III.3. Construction de la matrice d'amortissement.....	65
III.3.1. Amortissement de Rayleigh.....	65
III.3.2. Amortissement de Caughy.....	66
<b>CHAPITRE IV. MODELE LINEAIRE STATISTIQUE.....</b>	<b>68</b>
IV.1 Introduction.....	68
IV.2. Notion du Jacobien.....	68
IV.2. 1. Approximations locales par des polynômes.....	68
IV.2.2. Dérivation d'une fonction de plusieurs variables.....	69
IV.3. Développement de la théorie.....	70
IV.4. Vérification du model linéaire statistique .....	75
<b>CHAPITRE V. Méthodes Monte Carlo.....</b>	<b>76</b>
V.1. Aperçu historique des méthodes Monte Carlo.....	76
V.2. Quelles difficultés rencontrerons-nous ?.....	77
V.2.1. Temps machine et mémoire limités.....	77
V.2.1. Erreurs statistiques et autres.....	77
V.3. Concept fondamental.....	78
V.4. Génération des nombres aléatoires uniformément distribués .....	80
V.4. Génération des nombres aléatoires normaux standards.....	82
V.5. Génération des nombres aléatoires normaux.....	82

V.5. Génération des nombres aléatoires log-normaux.....	83
V.6. Procédure générale pour produire des nombres aléatoires d'une distribution arbitraire.....	84
V.7. Nombre de simulations requises.....	84
V.8. Simulation des variables aléatoires normales corrélées.....	86
V.9. Conclusion.....	88
<b>CHAPITRE VI. RESULTAT NUMERIQUE ET DISCUSSION .....</b>	<b>89</b>
VI.1. Description du système.....	89
VI.2. Pulsations propres et vecteurs modaux du système .....	90
VI.3.1.Détermination du nombre de simulation par la méthode Monte Carlo.....	91
V.3.2 Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo pour un $\sigma$ constant.....	92
a) Loi normale.....	92
b) Loi log normale.....	97
VI.3.2 Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo pour un $\sigma/\bar{C} = 0,33$ .....	101
a) Loi log normale.....	101
b) Loi normale.....	105
<b>CONCLUSIONS GENERALES.....</b>	<b>110</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>112</b>

<b>Figure</b>	<b>page</b>
Figure I.1 Diagramme en bâtons et fonction de répartition.....	08
Figure I.2. Un exemple d'une fonction densité de probabilité.....	09
Figure I.3. Fonction densité de probabilité $f(x)$ et Fonction de répartition $F(X)$ .....	10
Figure I.4. PDF et CDF d'une variable aléatoire uniforme.....	16
Figure I.5. PDF et CDF d'une variable aléatoire normale.....	17
Figure I.6. PDF et CDF d'une variable aléatoire lognormale.....	18
Figure II.1 Oscillateur à 1 degré de liberté.....	22
Figure II.2 Relation force-déplacement.....	23
Figure II.3 Oscillation libre avec amortissement.....	24
Figure II.4 Amortissement équivalent.....	25
Figure II.5 Forces appliquées à l'oscillateur.....	27
Figure II.7 Système linéaire.....	29
Figure II.8:Vibration libre d'un système non amorti.....	31
Figure II.10 Influence de l'amortissement sur la vibration libre d'un système sous amorti.....	33
Figure II.11 : Vibration libre d'un système à amortissement critique.....	33
Figure II.12 : Réponse de l'oscillateur soumis à une sollicitation harmonique.....	35
Figure II.14 : Facteur d'amplification dynamique.....	36
Figure II.15 : Phase de la réponse stationnaire.....	37
Figure II.16 : Evolution de l'amplitude de la réponse d'un système en résonance.....	38
Figure II.18 : Modélisation en masses concentrées.....	40
Figure II.19 : Système masse-ressort à deux degrés de liberté.....	43
Figure III.1.Fréquence courbe de réponse du système modérément amorties.....	53
Figure III.2 Fréquence de réponse des essais pour déterminer taux d'amortissement.....	56
Figure III.3.Réels et une énergie équivalente d'amortissement par cycle.....	57
Figure III.4 : Vibrations harmoniques forcées de la bibliothèque Millikan.....	61
Figure III.5 : Réponse sismique de la bibliothèque Millikan.....	62
Figure III.6 : Systèmes à amortissement contrasté.....	64
Figure III.7 : Amortissement de Rayleigh.....	66
Figure III.8 : Amortissement de Caughey.....	67
Figure IV.1.Interprétation géométrique des approximations d'ordre 1 et 2.....	69
Figure IV.2 système à plusieurs degrés de liberté.....	71
Figure IV.3.Schéma fonctionnel pour le modèle linéaire statistique.....	75
Figure V.1. Schéma de la méthode de Monte Carlo.....	79
Figure V.2. Génération des variables aléatoires normaux standards.....	83
Figure .V.3. Convergence de l'estimateur de probabilité de succès de MMC en fonction de	

nombre d'échantillon N pour une loi log normale.....	86
Figure .V.4. Schéma fonctionnel pour la simulation sur ordinateur.....	88
Figure VI.1. Exemple d'un bâtiment a cinq étages.....	89
Figure .VI.2. Convergence de l'estimateur de probabilité de succès de MMC en fonction de nombre d'échantillon N par une loi log normale (pour le premier degré du bâtiment).....	91
Figure VI.3. Histogrammes des amortisseur générer et leurs réponses corespondante (loi normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,5$ .....	94
Figure VI.4. CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante (loi normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,5$ .....	96
Figure VI.5. Histogrammes des amortisseur générer et leurs réponses corespondante (loi log normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,5$ .....	99
Figure VI.4. CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante (loi log normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,5$ .....	101
Figure VI.4. CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante (loi normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,33$ .....	103
Figure VI.4. CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante Carlo (loi normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,33$ .....	105
Figure VI.4. CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante Carlo (loi log normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,33$ .....	107
Figure VI.4. CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante Carlo (loi log normale) pour un $\sigma/\bar{c}=0,33$ .....	109



Tableau	page
<b>Tableau III.1</b> Bibliothèque Millikan - Amortissements mesurés.....	63
<b>Tableau III.2</b> Valeurs caractéristiques d'amortissement (en pourcentages).....	63
<b>Tableau V.1.</b> Valeurs simulées de la variable aléatoire uniformément distribuée (valeurs entre 0 et 1).....	81
<b>Tableau VI. 1.</b> Pulsations propres et facteurs de participations correspondants pour le bâtiment à 5 étages.....	90
<b>Tableau VI.2.</b> Vecteur modaux du système à 5 degrés de libertés.....	90
<b>Tableau VI.3.</b> Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi normale) pour un $\sigma$ constant.....	92
<b>Tableau VI.4.</b> Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi log normale) pour un $\sigma$ constant.....	97
<b>Tableau VI.5.</b> Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi normale) pour $\sigma/\bar{C} = 0,33$ .....	101
<b>Tableau VI.6</b> Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi log normale) pour $\sigma/\bar{C} = 0,33$ .....	105

# **INTRODUCTION**

## I .Introduction

Lors de la conception des structures qui sont susceptibles à des forces ou des vibrations, le comportement dynamique est une question importante à étudier. L'ingénieur prend de nombreuses décisions lors de la conception. La plupart de ces décisions sont réalisées dans l'incertitude, bien que souvent nous ne pensions pas à l'incertitude parce que nous avons des techniques pour traiter avec eux. Nous utilisons les codes de conception qui incluent les techniques de manipulation de l'incertitude qui découle des propriétés du matériau variable (les capacités nominales et les facteurs de résistance) et l'incertitude qui découle des charges variables, par exemple, les charges de conception et les facteurs de charge. Mais certaines incertitudes ne peuvent pas être traitées à l'aide du code de conception. La possibilité de conception ou les erreurs de construction ne peuvent pas être intégrées dans un code de conception. Certains aspects du modèle sont basés sur les critères du code, mais d'autres sont basés sur le jugement professionnel de l'ingénieur en structure.

Ceci exige le développement d'outils mathématiques appropriés pour incorporer de telles incertitudes dans la modélisation des structures, de même que dans l'élaboration de méthodes pour analyser ces modèles mathématiques. Les processus aléatoires, par exemple, sont souvent utilisés en tant qu'outils mathématiques pour modéliser les variations temporelles des chargements incertains, tel que ceux dus aux tremblements de terre ou aux vents. La théorie de vibration aléatoire peut être utilisée pour obtenir une description probabiliste de la réponse, telle que la moyenne et la covariance pour des processus Gaussiens, de même que les statistiques d'ordre supérieurs dans le cas des processus non Gaussiens. Ces descriptions probabilistes peuvent être combinées avec les théories de réponses extrêmes approximatives pour obtenir diverses estimations de fiabilité pour la structure.

Le traitement des incertitudes contenues dans la modélisation des caractéristiques structurales, a suscité un intérêt croissant. Ces incertitudes, qui résultent des nombreuses hypothèses faites lors de modélisation de la géométrie, des conditions aux limites et du comportement des matériaux constitutifs peuvent avoir un effet significatif sur la fiabilité de nombreuses structures [H. Jensen et al 1992 ; T. Igusa et al 1988 ; C. G. Wall et al 1991 ; Jr. B. F. Spencer et al 1988]. Par conséquent, quand on considère un modèle structural, comme un modèle d'éléments finis, on doit prendre en considération les incertitudes contenues [L. S. Katafygiotis et al, H. Jensen et al 1999], dans la rigidité de chaque élément ou sous-structure, dans la masse, dans les coefficients d'amortissement modaux, dans les constantes de ressort

qui modélisent les conditions aux limites, ou dans la rigidité équivalente de sol lors de la prise en considération de l'interaction de sol-structure [Lambros 1996] .

Très souvent dans les systèmes à plusieurs degrés de liberté, l'amortissement est le moins connu des paramètres. Les équations du mouvement sont généralement formulées sur l'hypothèse d'amortissement visqueux, ce qui suppose des forces dissipatives d'être proportionnelles aux vitesses des différents points du système.

Mis à part la question pertinente de l'hypothèse d'amortissement visqueux, la difficulté d'une prévision précise des coefficients d'amortissement souligne l'incertitude représentée liée à la réponse du système. Pour les fréquences excitantes proches de la fréquence de résonance, la sensibilité de la réponse à l'amortissement devient critique. Les erreurs dans l'estimation de la matrice d'amortissement se traduisent généralement par une grosse erreur dans la réponse.

Lors de l'étude d'un système à plusieurs degrés de liberté, l'influence de l'amortissement devient plus compliquée. Les corrélations statistiques de mouvement sont souvent des complications inévitables.

L'objet de cette étude est de présenter une théorie et une technique simple de calcul pour la détermination de la distribution de probabilité de la réponse de la distribution de probabilité des coefficients d'amortissement supposée. La méthode consiste essentiellement à un modèle statistique linéaire vérifié par une simulation de Monte Carlo indépendante.

Le problème à l'étude appartient à la catégorie générale des systèmes dynamiques avec des propriétés statistiques. Des études antérieures ont été faites uniquement avec les statistiques de la masse et les paramètres de la raideur. Collins et Thomson ont abordé le problème du point de vue matrice équation différentielle qui a permis de différentes corrélations statistiques entre la masse et la rigidité des éléments. Soong et Bogdanoff ont abordé le problème avec la formulation de la matrice de transfert, l'amortissement a été inclus dans la matrice de transfert, mais elle a été maintenue constante, par contre les masses étaient supposées des variables aléatoires.

Parmi les paramètres d'un système dynamique, l'amortissement est le plus difficile à traiter statistiquement. Cela est dû au fait que dans un système amorti le vecteur déplacement est complexe et sa variation avec l'amortissement nécessite un traitement avec les statistiques des nombres complexes. Cette difficulté est surmontée dans cette étude par le biais de la matrice moyenne et l'utilisation des fonctions de sensibilité.

Ce travail est divisé en plusieurs chapitres qui forment l'ensemble de travail effectué. Le premier chapitre porte sur la description des incertitudes. Les notions d'erreurs et d'incertitudes sont discutées. Les divers types et source d'incertitudes sont généralement présentés. Le deuxième chapitre présente les diverses méthodes de formulation des équations de mouvements et leurs résolutions. Dans le troisième chapitre on va parler sur les techniques de mesures d'amortissement dans un système à un degré et plusieurs degrés de libertés. Le quatrième chapitre est consacré au développement du modèle linéaire statistique. Dans le cinquième chapitre on va exposer la méthode de simulation Monte Carlo, la génération des nombre aléatoire et la détermination de nombre de simulation requises sont présentées aussi dans ce chapitre. Le sixième chapitre est consacré à l'étude de l'influence des variations des caractéristiques statistiques de l'amortissement sur la réponse en traitant un exemple par le modèle linéaire statistique ,les résultats serons comparé à la méthode de simulation Monte Carlo. Des résultats et des conclusions importantes ont été déduits dans la conclusion générale.

# **CHAPITRE I**

## **CONCEPT PROBABILISTE**

### **I.1. Notion de hasard :**

Le hasard est pour nous une expérience, l'interprétation de ce qui nous est advenu à un moment donné: dans des conditions que nous aurions pu énumérer, tel événement aurait dû se produire et ne s'est pas produit. Quelque chose est intervenu, que par la suite nous avons pu identifier ou non, mais que nous n'avons pas pris en compte, et qui a modifié le cours que nous avons prévu. Le hasard, comme on l'entend aujourd'hui, a été pendant longtemps une idée abstraite et, pendant des siècles, dans le sens commun largement liée à une explication métaphysique, le destin, ou à volonté divine.

Historiquement, la première fois que l'humanité a eu à faire avec des nombres aléatoires fut probablement pour des activités divinatoires. Des dés rituels étaient en usage à l'âge du bronze. Le plus ancien dé de forme cubique avec des faces numérotées de 1 à 6 remonte à 2000 ans avant Jésus-Christ et a été trouvé en Egypte. Des dés du VII<sup>e</sup> et du VI<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ ont été trouvés en Italie centrale et en Chine.

C'est seulement au cours du XX<sup>e</sup> siècle, avec le développement parallèle des sciences statistiques et de technologie, que les nombres aléatoires ont trouvé une large application. La célèbre phrase d'Einstein « Dieu ne joue pas aux dés » est contemporaine à l'élaboration du principe d'incertitude de Heisenberg. Selon l'idée classique de causalité, pour prédire le futur avec un certain degré de précision, il suffisait de connaître le présent avec suffisamment de précision. Dans des instituts de prévision météorologique les quantités d'intérêt sont estimées à partir d'un grand nombre d'états initiaux, et l'évolution du phénomène est artificiellement simulée avec des modèles numériques utilisant des nombres aléatoires. Et bien que capacités de calcul des ordinateurs des centres de prévision météorologique soient très élevées, les prévisions ne vont, hélas, jamais au-delà de quelques jours.

De telles techniques constituent ce que l'on appelle généralement la méthode Monte Carlo, et aujourd'hui une vaste littérature sur les applications les plus variées est disponible.

A la base de toute simulation, il ya l'utilisation de nombres aléatoires en grande quantité. De plus, pour qu'une simulation soit fiable il faut que les nombres aléatoires utilisés aient toutes les propriétés que l'on attend. Ainsi, il ne suffit pas de disposer d'une liste finie de

100 ou même d'un million de nombre aléatoire et d'utiliser en boucle pour simulation. En bref, la production de nombres aléatoires en grandes quantités n'est pas une simple affaire.

L'histoire de la génération des nombre aléatoires commence avec des machines plus au moins complexes dont le but était de piocher des boucles numérotées d'une urne. Encore aujourd'hui, en dépit d'algorithmes performants et de qualité élevée pour la génération de nombres aléatoires en grandes quantités, de telles machines sont utilisées pour les loteries a numéros et les ordinateurs ne les remplaceront-ils probablement jamais. Il y a une raison philosophique à cela, celle qui est au fond soulevée par Neumann : un algorithme implémenté produira une suite de nombres dont la nature est déterministe, est donc d'une certaine manière prévisible, et la suite aura seulement l'apparence d'être aléatoire [Dodge, Y.2008].

## **I.2.Incertitude dans le processus de construction**

Le processus de construction inclus la planification, la conception, la construction, et la démolition. Tous les composants du processus impliquent de diverses incertitudes. Ces incertitudes peuvent être mise dans deux catégories principales en ce qui concerne des causes naturelles et humaines :

- ❖ Incertitude a cause naturelle : résultat d'incertitude de l'imprévisibilité des charges telles que le vent, le tremblement de terre, la neige, la glace, la pression d'eau. Une autre source d'incertitude attribuable aux causes naturelle est le comportement mécanique des matières employées pour construire le bâtiment. Par exemple, les propriétés matérielles du béton peuvent changer d'un échantillon à autre et également dans le même échantillon.
- ❖ Incertitude a cause humaines : incluent des exceptions prévus et imprévus à une conception optimale. Les exemples de ces incertitude pendant le phase de conception incluent des approximations, des erreurs de calcul, des problèmes de transmission, des omissions, le manque de la connaissance. De même, pendant la phase de construction, les incertitudes surgissent en raison de l'utilisation des matériaux insatisfaisants, des méthodes de construction, des connexions mauvaises, ou des changements sans analyse. Pendant leur utilisation, la structure peut être soumis à la surcharge, à l'entretien insatisfaisant, à l'abus, ou même à un acte de sabotage.



En raison de ces incertitudes, les charges et les résistances (c-à-d., portances des éléments structuraux) sont des variables aléatoires. Il est commode de considérer un paramètre aléatoire (charge ou résistance) en fonction de trois facteurs :

- Facteur de variation physique : ce facteur représente la variation de la charge et de la résistance qui est inhérente à la qualité étant considérée. Les exemples incluent une variation naturelle de pression de vent, de tremblement de terre, et de propriété de matérielles.
- Facteur de variation statistique : ce facteur représente l'incertitude résultant d'estimer des paramètres base sur un nombre d'échantillon limité. Dans la plupart des situations, la variation naturelle (facteur de variation physique) est inconnue et elle est quantifiée en examinant un nombre d'échantillon limité. Par conséquent, plus le nombre d'échantillon est grand plus l'incertitude d'écrite par le facteur de variation statistique est petite.
- Facteur de variation du modèle : ce facteur représente l'incertitude due aux hypothèses simplificatrices, des conditions aux limites inconnus, et des effets inconnus d'autres variables. Il peut considérer comme rapport de la force réelle (résultat d'essai) et la force prévue en utilisant le modèle. [Nowak. A. S 2000]

### I.3.Rappelle théorique :

#### I.3.1.Loi d'une variable aléatoire

Dans la plupart des **phénomènes aléatoires**, le résultat d'une **épreuve** peut se traduire par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de **variable aléatoire** (notée également v.a.).

Une variable aléatoire est un nombre dépendant du résultat d'une expérience aléatoire. L'enjeu est la *localisation* de ce nombre : déterminer quelles sont ses chances de tomber sur telle ou telle partie de  $\mathbb{R}$ . Cette localisation conduit à associer à toute variable aléatoire une loi de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

Etant donné un **espace probabilisé** d'espace fondamental  $\Omega$  et de mesure de probabilité  $P$ , on appelle **variable aléatoire** sur cet espace, toute **application**  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{aligned}\Omega &\xrightarrow{X} D \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \in D\end{aligned}$$

A chaque évènement élémentaire  $\omega$  de  $\Omega$  correspond un nombre réel  $x$  associé à la variable aléatoire  $X$ . Comme. Il n'y a pas obligatoirement autant de valeurs possibles prises par la variable aléatoire  $X$  que d'évènements élémentaires. La valeur  $x$  correspond à la **réalisation** de la variable  $X$  pour l'évènement élémentaire  $\omega$ .

-Si  $D \subseteq N$   $X$  est une variable statistique entière ou discrète.

-Si  $D \subseteq R$   $X$  est une variable statistique réelle ou continue.

### 1.3.2. Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle donné (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numération sont de types discrets.

#### *Loi de probabilité*

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de la variable aléatoire.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entièrement déterminée par les probabilités  $p_i$  des évènements  $\{X = x_i\}$ ,  $x_i$  parcourant l'univers image  $X(\Omega)$ . La loi de probabilité est donnée par les  $(x_i, p_i)_i$ .

#### *Fonction de répartition*

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$ , la fonction  $F_X$  telle que :

$$\begin{aligned}F_X &: R \rightarrow R \\ t &\rightarrow F_X(t) = P(X < t)\end{aligned}$$

Concrètement la fonction de répartition correspond à la distribution des probabilités cumulées. Le plateau atteint par la fonction de répartition correspond à la valeur de probabilité 1 car  $\sum_i P_i = 1$

L'importance pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans R.

Les propriétés associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Soit  $F_X$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète  $X$  alors :

(P1)  $\forall t \in \mathbb{R} \ 0 \leq F_X(t) \leq 1$

(P2)  $F_X$  est croissante sur R

(P3)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

(P4) si  $a \leq b \ P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise un diagramme en bâtons pour visualiser la distribution de probabilités et une fonction en escalier pour la fonction de répartition.

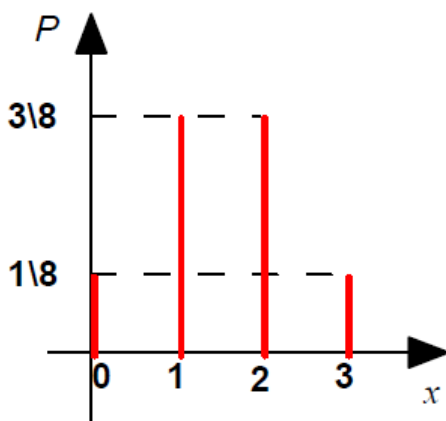
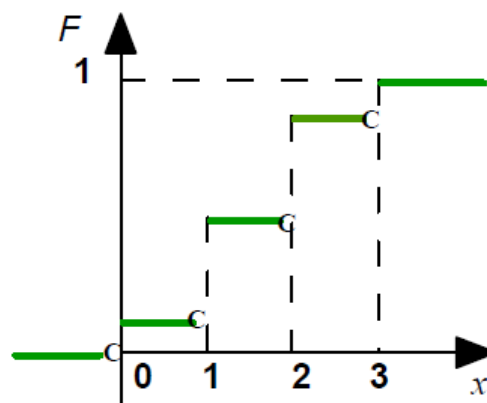


Diagramme en bâtons



Fonction de répartition

### 1.3.3. Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une mesure sont de type continu.

**Fonction densité de probabilité**

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies dans un intervalle donné. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement  $\{X = a\}$  est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

On considère alors la probabilité que la variable aléatoire  $X$  prenne des valeurs comprises dans un intervalle  $[a,b]$  tel que  $P(a \leq X \leq b)$ .

Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par  $X$  tend alors vers une fonction que l'on appelle fonction densité de probabilité ou densité de probabilité.

On appelle densité de probabilité toute application continue par morceaux :

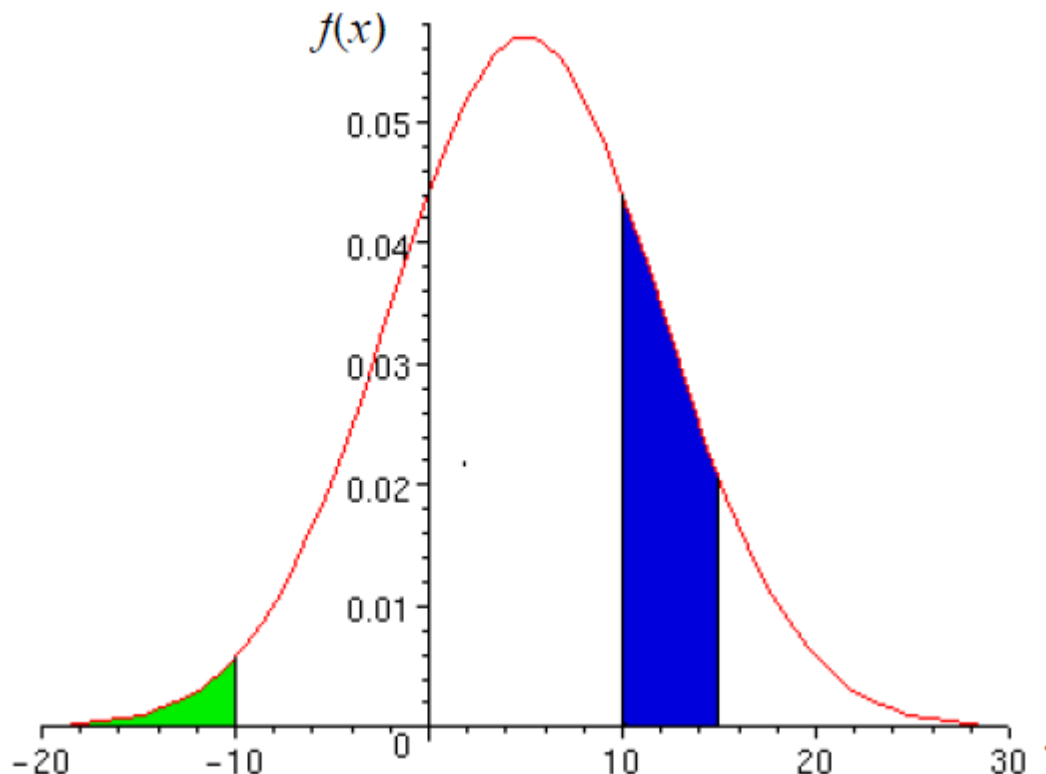
$$f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

telle que :

-  $\forall x \in \mathcal{R} \quad f(x) \geq 0$

-  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  (en supposant que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  existe)



Soit une fonction densité de probabilité  $f(x)$  :

(1) l'aire hachurée en vert correspond à la probabilité  $P(X < -10)$

(2) l'aire hachurée en bleu correspond à la probabilité  $P(+10 < X < +15)$

Remarque : Cette fonction densité de probabilité est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de  $x$  définies.

**Fonction de répartition**

Si comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit la fonction de répartition de  $X$  par :

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow F_X(t) = P(X < t)$$

Alors la relation entre la fonction de répartition  $F_X$  et la fonction densité de probabilité  $f(x)$  est la suivante :

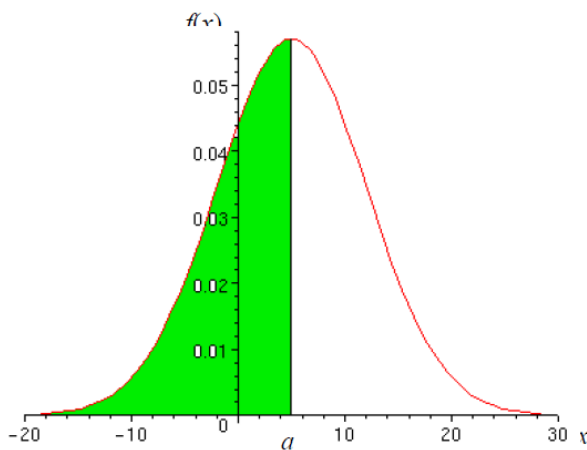
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

La fonction de répartition  $F_X(t)$  est la primitive (voir cours d'analyse) de la fonction densité de probabilité  $f(x)$ , et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire  $X$ , en effet :

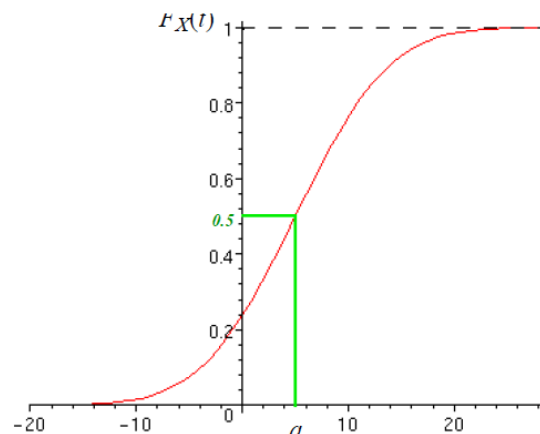
Soit  $X$  une variable aléatoire absolument continue de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F_X$ , alors :

(P1)  $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x) dx$  avec  $a < b$

(P2)  $\forall a \in \mathbb{R} \quad P(X = a) = 0$  si  $f$  est continue à droite du point  $a$ .



Fonction densité de probabilité  $f(x)$



Fonction de répartition  $F(x)$

L'aire hachurée en vert sous la courbe de la fonction densité de probabilité correspond à la probabilité  $P(X < a)$  et vaut 0,5 car ceci correspond exactement à la moitié de l'aire totale sous la courbe. Cette probabilité correspond à la valeur de la fonction de répartition au point d'inflexion de la courbe (voir cours analyse).

Les *propriétés* associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Soit  $F_X$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolument continue  $X$  alors :

- $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable en tout point où  $f$  est continue et alors  $F_X' = f$
- $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$
- $F_X$  est à valeurs dans  $[0,1]$
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

### 1.3.4. Espérance et Variance

Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de valeur centrale, de dispersion et de forme de distribution.

#### *Espérance mathématique*

L'espérance d'une variable aléatoire  $E(X)$  correspond à la moyenne des valeurs possibles de  $X$  pondérées par les probabilités associées à ces valeurs. C'est un paramètre de position qui correspond au moment d'ordre 1 de la variable aléatoire  $X$ . C'est l'équivalent de la moyenne arithmétique  $\bar{X}$ . En effet lorsque le nombre d'épreuves  $n$  est grand,  $\bar{X}$  tend vers  $E(X)$  (voir estimation).

Si  $X$  est une variable aléatoire absolument continue de densité  $f$ , on appelle espérance de

$X$ , le réel  $E(X)$ , défini par :  $E(X) = \int_{-\infty}^t xf(x)dx$

Les propriétés de l'espérance valent aussi bien pour une variable aléatoire discrète ou une variable aléatoire absolument continue.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un même univers  $\Omega$ , admettant une espérance, alors :

- (P<sub>1</sub>)  $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- (P<sub>2</sub>)  $E(aX)=aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- (P<sub>3</sub>) Si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$

- (P4) Si  $X$  est un caractère constant tel que :  $\forall \omega \in \Omega X(\omega) = k$  alors  $E(X) = k$

### Variance

- **Variables aléatoires discrètes**

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète de loi de probabilité  $(x_i, p_i)_i$  définie sur un nombre fini  $(n)$  d'évènements élémentaires alors la variance est égale à :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E(X)^2$$

- **Variables aléatoires continues**

Si  $X$  est une variable aléatoire continue donnée par sa densité de probabilité alors la variance de  $X$  est le nombre réel positif tel que :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - E(X))^2 f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2$$

- **Propriétés de la variance**

Si  $X$  est une variable aléatoire admettant une variance alors :

(P1)  $\forall a \in \mathbb{R}, V(aX) = a^2 V(X)$

(P2)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$

(P3)  $V(X) = 0 \Leftrightarrow X = E(X)$

### 1.3.5. Couples de variables aléatoires

- **Loi jointe**

Les définitions portant sur la loi jointe entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  impliquent que ces dernières soient définies sur le même espace fondamental  $\Omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont définis respectivement sur les espaces fondamentaux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , alors il faut envisager un espace qui englobe  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  appelé « espace-produit ».

Il suffit alors de connaître la loi jointe des deux variables aléatoires ou loi de probabilité du couple  $(X,Y)$ , la fonction définie par :

$$x,y \rightarrow p_{xy} = P((X = x) \text{ et } (Y = y)) \text{ dans le cas discret}$$

Dans le cas continu,  $p_{xy} = P((xa < X < xb) \text{ et } (yc < Y < yd))$  permet de définir la probabilité pour que  $(X,Y)$  soit dans un rectangle.

Remarque : Ceci peut être généralisé à un nombre quelconque de variables aléatoires.

- **Indépendance entre variables aléatoires**

Les propriétés concernant l'indépendance statistique entre deux variables aléatoires s'appliquent aussi bien aux variables aléatoires discrètes ou absolument continues.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même univers  $\Omega$  alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même univers  $\Omega$  alors

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

- **Covariance et Corrélation**

Lorsque l'on considère deux variables aléatoires simultanément, il faut définir un indicateur de leur « liaison » qui complète les paramètres qui les caractérisent chacune séparément (espérance mathématique et variance).

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même univers  $\Omega$ , on appelle covariance de ces deux variables, le réel :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et coefficient de corrélation, le réel :

$$R(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Il résulte de cette définition :

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même univers  $\Omega$  et indépendantes, alors

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

Les propriétés de la covariance sont les suivantes :

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un même univers  $\Omega$ , alors :

$$(P1) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R} \quad V(aX + bY) = a^2V(X) + 2abcov(X, Y) + b^2V(Y)$$

$$(P2) \quad [\text{cov}(X, Y)]^2 \leq V(X) V(Y)$$

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) \sigma(Y)$$

$$(P3) \quad -1 \leq R(X, Y) \leq 1$$

- **Opérations sur les variables aléatoires**

Il arrive souvent que l'on effectue des transformations sur les variables aléatoires par commodité de calcul et il est important de savoir comment se comportent les paramètres associés à cette variable.



Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous quelques transformations possibles avec  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Translation de l'origine seule $X \rightarrow X + b$	Changement d'unités seul $X \rightarrow aX$	Cas général $X \rightarrow aX + b$
$E(X + b) = E(X) + b$ $V(X + b) = V(X)$	$E(aX) = aE(X)$ $V(aX) = a^2 V(X)$	$E(aX + b) = aE(X) + b$ $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Il existe d'autres transformations de variables aléatoires qui conduisent à des valeurs de paramètres particulières.

Une variable aléatoire  $X$  est dite centrée si  $E(X) = 0$ .

Une variable aléatoire admettant une variance est dite réduite si  $V(X) = 1$ .

- **Généralisation à  $n$  variables aléatoires**

Si l'on considère une épreuve à laquelle est associée un espace fondamental  $\Omega$  et une variable aléatoire  $X$  et si l'on répète  $n$  fois, de façon indépendante cette épreuve, on obtient une suite  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aléatoires qui sont :

- définies sur le même espace fondamental
- de même loi de probabilité
- indépendantes

alors :  $E(X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$  (Propriété P1 de l'espérance que les v.a. soient indépendantes ou non)

$V(X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$  (Propriété de la variance dans le cas d'indépendance des v.a.)

#### I.4. Principales distributions continues :

Toute variable aléatoire est définie par sa fonction de distribution cumulative (CDF),  $F_X(x)$

( $x$ ). La fonction de densité de probabilité,  $f_X(x)$ , d'une variable aléatoire continue est la

dérivée première de  $F_X(x)$ . Les variables les plus importants utilisés dans l'analyse de

fiabilité structurelle sont comme suit: uniforme, normale, lognormale, et Poisson.

**I.4.5. Variables aléatoires uniforme**

Pour une variable aléatoire uniforme, la fonction PDF est une valeur constante pour toutes

les valeurs possibles de la variable aléatoire dans une plage  $[a,b]$ . Cela signifie que tous les

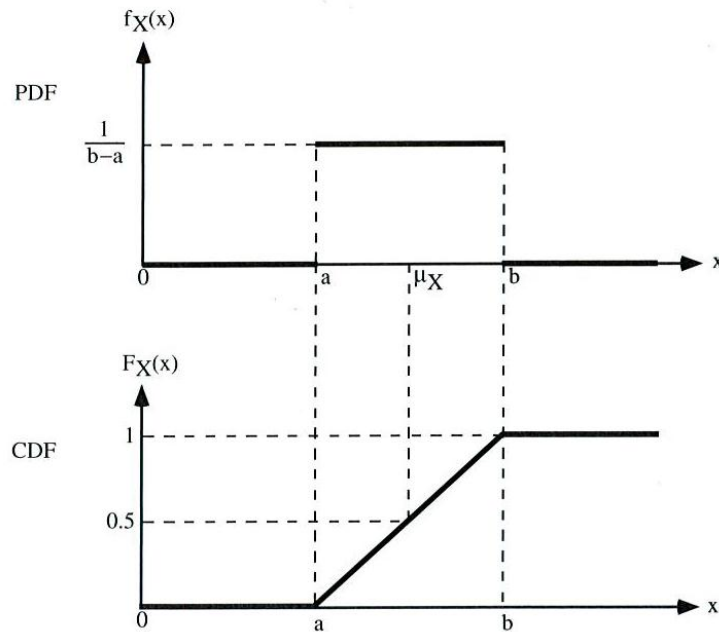
nombre sont également susceptibles d'apparaître. Mathématiquement, la fonction PDF est

définie comme suit:

$$PDF = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Où  $a$  et  $b$  définissent les limites inférieures et supérieures de la variable aléatoire. Le PDF

et CDF pour une variable aléatoire uniforme sont présentés dans la figure



**Figure 1.4. PDF et CDF d'une variable aléatoire uniforme**

La valeur moyenne et la variance sont définies suite :

$$u_x = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

#### I.4.5. Variables aléatoires normales

La variable aléatoire normale est probablement la distribution la plus importante dans la

théorie de la fiabilité structurelle. La fonction PDF pour une variable aléatoire normal X

est donnée par ;

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-u_x}{\sigma_x}\right)^2\right]$$

Où  $\mu_X$  et  $\sigma_X$  sont la moyenne et l'écart type, respectivement. Notez que le terme entre

parenthèses dans l'équation .2.34 est de forme classique tel que présenté dans l'équation

.2.27. La figure 1.5 montre à la fois la forme générale du PDF et CDF d'une variable

aléatoire normale.

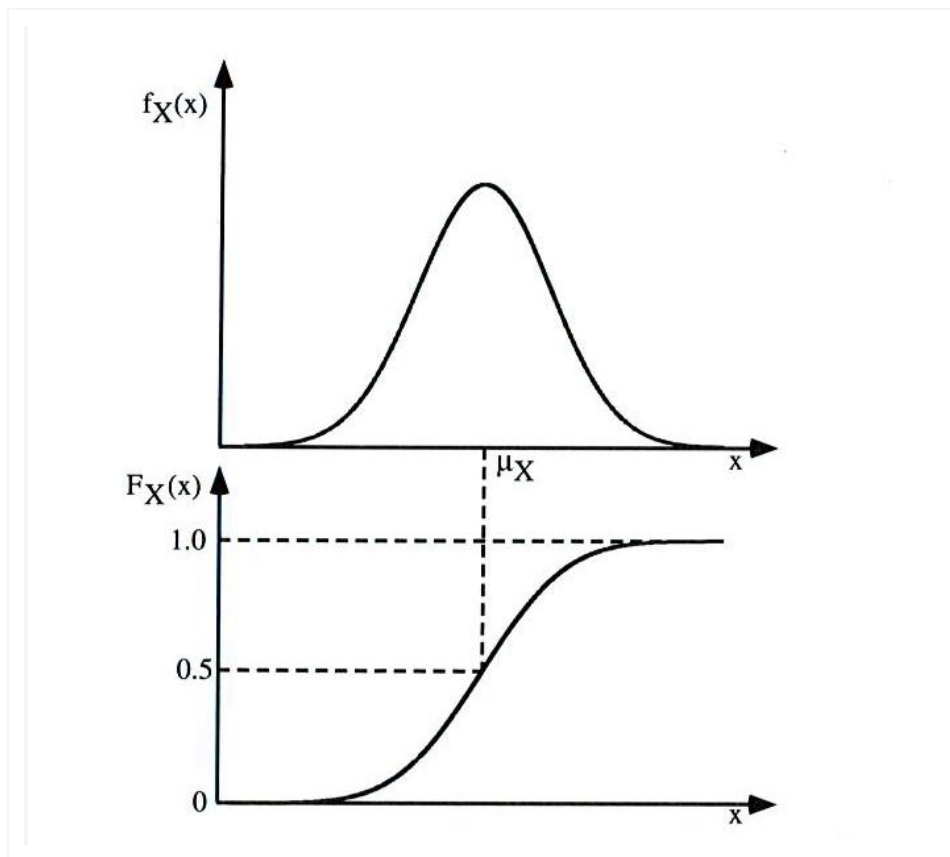


Figure 1.5. PDF et CDF d'une variable aléatoire normale

#### I.4.6. Variable aléatoire log-normale

La variable aléatoire  $X$  est une variable aléatoire lognormale si  $Y = \ln(x)$  est normalement distribué. Une variable aléatoire lognormale est défini pour une valeur positive seulement ( $x \geq 0$ ). Le PDF et le CDF peut être calculé en utilisant les distributions  $\phi(z)$  et  $\Phi(z)$  pour la norme de la variable aléatoire normale  $Z$  comme suit :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\ln X \leq \ln x) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$$

Puisque Y est normalement distribué, nous pouvons utiliser la fonction standard

$$F_X(x) = F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y - u_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Où  $y = \ln(x)$ ,  $u_Y = u_{\ln(X)}$  = valeur moyenne de  $\ln(X)$ , et  $\sigma_Y = \sigma_{\ln(X)}$  = écart-type de  $\ln(X)$ . Ces quantités peuvent être exprimées en fonction de  $u_x$ ,  $\sigma_x$ , et  $V_x$  selon les formules suivantes:

$$\sigma_{\ln(X)}^2 = \ln(V_x^2 + 1)$$

$$u_{\ln(X)}^2 = \ln(u_x) - \frac{1}{2} \sigma_{\ln(X)}^2$$

Si  $V_x$  est inférieur à 0,2, l'approximation suivante peut être utilisée pour trouver  $\sigma_{\ln(X)}^2$  et  $u_{\ln(X)}$  :

$$\sigma_{\ln(X)}^2 \approx V_x^2$$

$$u_{\ln(X)}^2 \approx \ln(u_x)$$

La forme générale de la fonction PDF pour une variable lognormale est indiquée dans Figure 1.6

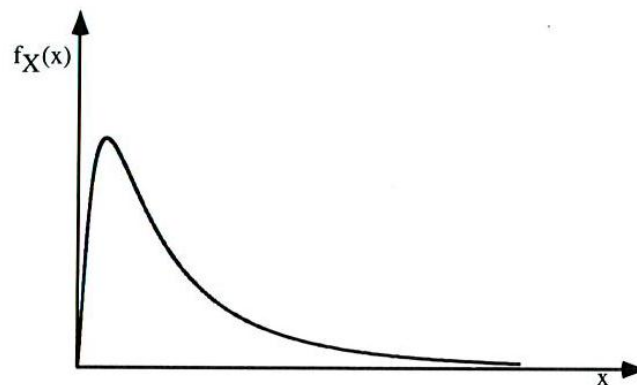


Figure 1.6. PDF et CDF d'une variable aléatoire uniforme

La distribution lognormale est largement utilisée dans l'analyse de fiabilité structurelle

### I.5.Représentation graphique

La représentation graphique naturelle de  $\Omega$  dans le cas où  $X$  est une variable continue, est l'axe des réels.  $\Omega$  l'ensemble de  $n$  points de  $\mathbb{R}$  affectés chacun de sa masse ou de son poids  $p_i$  mais cette représentation n'est plus lisible si ( $n \geq 20$ ) d'où la nécessité de trouver une autre façon de représenter la série sans perdre trop d'information. Les principales représentations graphiques :

**a) Histogramme :**

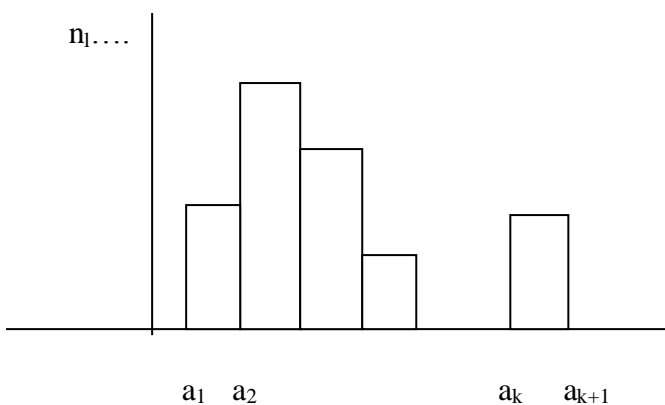
Ce type de diagramme s'adapte uniquement au cas où la série statistique regroupe les observations de la variable continue  $X$  sur les individus.

- Série statistique regroupée

Soit  $X$  une variable statistique mesurée sur une population de taille  $n$ . Les observations de cette variable peuvent être regroupées en classe. Ces classes sont des intervalles de  $\mathbb{R}$  pouvant être d'amplitude différente ou de même amplitude. L'amplitude de la classe est sa longueur. La série écrite sous cette forme  $[\{a_i; a_{i+1}\}; i = 1, n]$  où  $k$  est le nombre de classes est appelée série statistique regroupée.

- En pratique la série statistique groupée est donné sous forme d'un tableau de ce type :

Classes	$]a_1, a_2]$	$]a_2, a_3]$	$]a_l, a_{l+1}]$	..... $]a_k, a_{k+1}]$
Effectif	$n_1$	$n_2$	$\dots n_l$	$\dots n_k$



L'histogramme est obtenu dans un repère plan, en ayant porté sur chaque base d'extrémité les points de coordonnées  $(a_i, 0)$  et  $(a_{i+1}, 0)$  un rectangle dont l'aire est proportionnelle à l'effectif correspondant  $n_i$  ou à la fréquence  $f_i$ .

L'histogramme est constitué de rectangles dont chacune de ses bases est égale à l'amplitude de la classe et la hauteur est telle que la surface du rectangle soit proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence. Le choix de l'effectif (fréquence) dépend de l'unité de mesure.

*Procédure pour construire un histogramme à partir de données individuelles*

Soit  $\Omega = \{x_i; i = 1, n\}$  une série statistique, on note par :

$$m = \text{Min}\{x_i; i = 1, n\}, M = \text{Max}\{x_i; i = 1, n\}$$

Les différentes étapes nécessaires pour la construction de l'histogramme sont :

**Etape 1 :** Choix du nombre de classes

On utilise une règle empirique qui dépend de  $n$

$$K = E(\sqrt{n}) \text{ si } n > 30 \text{ ou } K = (5 \log(n)) \text{ E=partie entière}$$

**Etape 2 :** calcul de l'amplitude des classes  $a = \frac{M - m}{2}$

**Etape 3 :** Détermination des classes

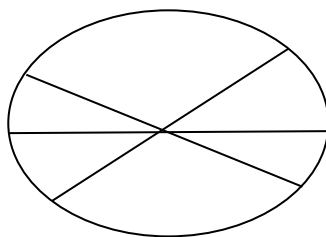
$$C_1, C_2, \dots, C_k \dots, C_k \text{ ou } C_l = [m + (l-1)a, m + la[$$

**Etape 4 :** Affectation des individus aux classes

L'individu  $i$  est affecté à la classe  $C_l \Leftrightarrow m + (l-1)a \leq x_i < m + la$

**b) Diagramme circulaire**

Est adapté au cas des variables quantitatives discrètes ou entières et aux variables qualitatives



Chaque portion du disque est proportionnelle à l'effectif  $n_i$  ou à la fréquence  $f_i$

**Principe :**

$$n \longrightarrow 2\Pi$$

$$n_i \longrightarrow \alpha_i \Rightarrow \alpha_i = \frac{2n_i\Pi}{n} \text{ avec } \sum_{i=1}^k n_i = n$$

$\alpha_i$  est la portion du disque qui correspond à l'effectif  $n_i$  ou à la fréquence  $f_i$



# **CHAPITRE II**

## **FORMULATION DES EQUATIONS**

## II.1. Système à un degré de liberté

L'oscillateur à 1 degré de liberté est constitué d'un bloc rigide, de masse  $M$  connecté à un support. La figure 2.1 présente un tel oscillateur, sollicité par une force  $p(t)$  variable dans le temps. Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal,  $u(t)$ , de la masse. L'oscillateur est connecté à son support par un élément qui développe une force  $F(u, \dot{u})$ , fonction du déplacement et de la vitesse de la masse  $M$ . La relation  $F(u, \dot{u})$  caractérise le comportement de l'oscillateur; la force  $p(t)$  caractérise la sollicitation.

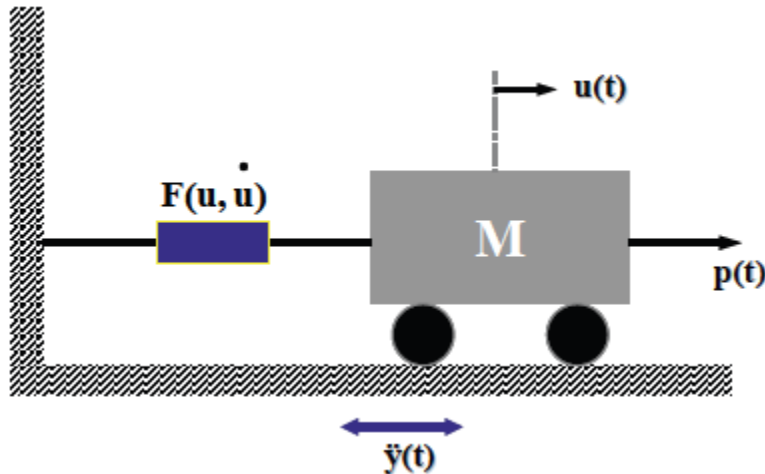


Figure II.1 : Oscillateur à 1 degré de liberté

### II.1.1. LOI DE COMPORTEMENT DE L'OSCILLATEUR

Cette loi de comportement dépend dans le cas le plus général du déplacement  $u(t)$  de la masse et de sa vitesse  $\dot{u}(t)$  par rapport au support.

La force de rappel  $F$  peut ne dépendre que du déplacement  $u(t)$  (figure 2.2). Si à tout instant il y a proportionnalité entre la force et le déplacement (figure 2.2a), l'oscillateur est élastique linéaire. Ce cas est typiquement celui d'un ressort.

La relation entre la force développée dans la liaison et le déplacement relatif  $u$  des deux extrémités de cette liaison s'écrit simplement :

$$F = k.u \quad (2.1)$$

La dépendance de la force sur le déplacement peut cependant être non linéaire (figure 2.2b); initialement il y a proportionnalité entre force et déplacement (oscillateur élastique linéaire) puis, au-delà d'un certain seuil de déplacement, la relation cesse d'être linéaire; par ailleurs la décharge peut s'effectuer suivant un trajet distinct de la charge. C'est le cas par exemple d'une liaison masse-support constituée d'un assemblage en série d'éléments de ressorts linéaires et

de frotteurs de Coulomb (éléments rigides en-deçà d'un certain seuil d'effort puis développant un effort constant au-delà du seuil).

Notons que pour certaines liaisons, il est possible que la décharge s'effectue le long de la même courbe que la charge; l'oscillateur est alors élastique non linéaire. Dans tous les cas, l'oscillateur est dit non linéaire et la relation force-déplacement s'écrit de façon symbolique :

$$F = f(U) \quad (2.2)$$

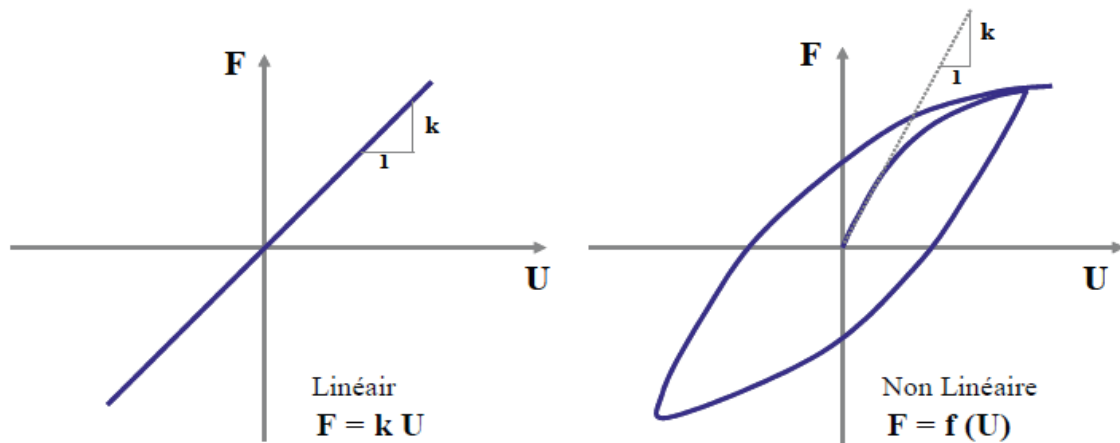


Figure II.2 : Relation force-déplacement

Dans le présent chapitre on se restreindra au cas de l'oscillateur linéaire caractérisé par une loi de comportement donnée par l'équation (2.1).

Dans les expressions  $F$  de la figure 2.2, le temps n'intervient pas. La relation est la même que le chargement de l'oscillateur soit effectué très lentement ou très rapidement. Si en particulier on considère une liaison constituée d'un seul ressort linéaire et que l'on impose à la masse  $M$  un déplacement initial  $u_0$  avant de la relâcher, celle-ci oscillera indéfiniment avec une amplitude maximale  $u_0$ .

Dans la pratique, on constate que l'amplitude décroît au cours du temps et que la masse retrouve au bout d'un certain temps une position d'équilibre (figure 2.3).

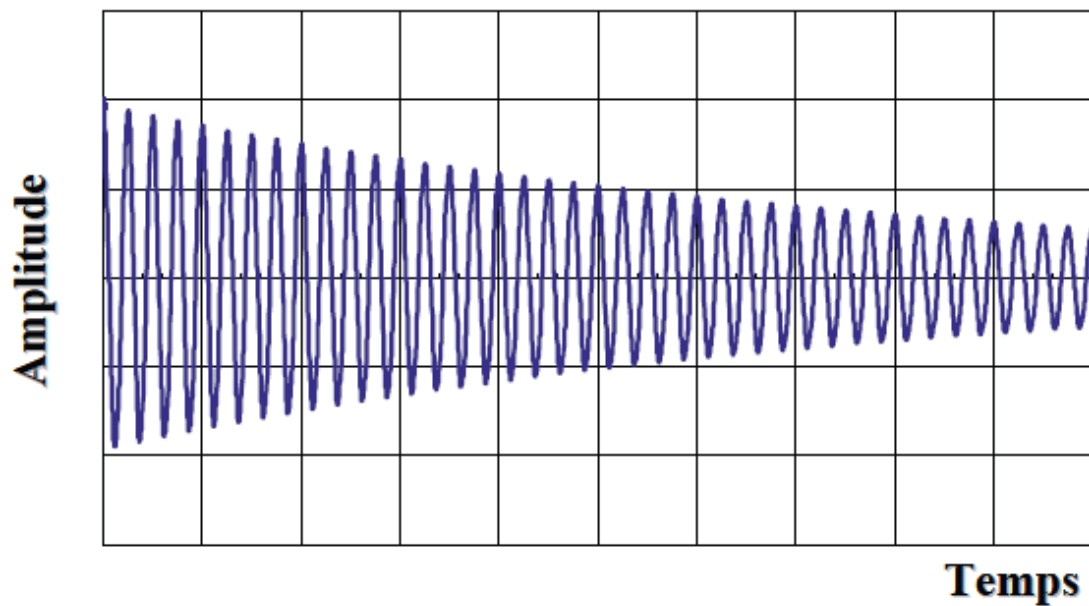


Figure II.3 : Oscillation libre avec amortissement

Une partie de l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort est dissipée au cours du temps; ce phénomène est dénommé de façon générique amortissement.

En fait, l'amortissement peut résulter de différents mécanismes. Il peut s'agir d'un amortisseur physique (par exemple un amortisseur hydraulique) auquel on peut avoir recours dans les problèmes d'isolation vibratoire. La dissipation d'énergie peut également provenir d'effets thermiques liés au chargement répété du matériau, de frottements internes dans le matériau (glissements entre grains dans un assemblage de particules par exemple), de déformations d'origine plastique....

En règle générale, et sauf cas exceptionnel, l'amortissement ne peut être calculé à partir des propriétés physiques du système. Par exemple dans le cas d'un bâtiment soumis à une sollicitation sismique significative, les sources de dissipation d'énergie sont multiples : fissuration du béton, plastification des aciers, glissements relatifs entre la structure porteuse et les éléments secondaires (cloisons, baies vitrées...). Dans la pratique, les phénomènes de dissipation d'énergie sont donc caractérisés de façon très simplifiée en considérant qu'ils proviennent d'un amortisseur visqueux linéaire.

Un amortisseur visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :

$$F = c\dot{u} \quad (2.3)$$

La constante de proportionnalité  $c$ , caractéristique de l'amortisseur, a pour unités une masse par unité de temps. La description des phénomènes de dissipation d'énergie à l'aide d'un

amortisseur équivalent est obtenue en écrivant que l'énergie dissipée dans un cycle de vibration du système est égale à l'énergie dissipée dans un amortisseur linéaire pour un cycle de même amplitude de déplacement.

En se référant à la figure 2.4, considérons un système soumis à un cycle caractérisé par une amplitude maximale du déplacement égale à  $u_{max}$ . Si au cours de ce cycle on mesure la force nécessaire pour déformer la structure, le diagramme force-déplacement peut être représenté par la courbe limitant l'aire hachurée de la figure 2.4.

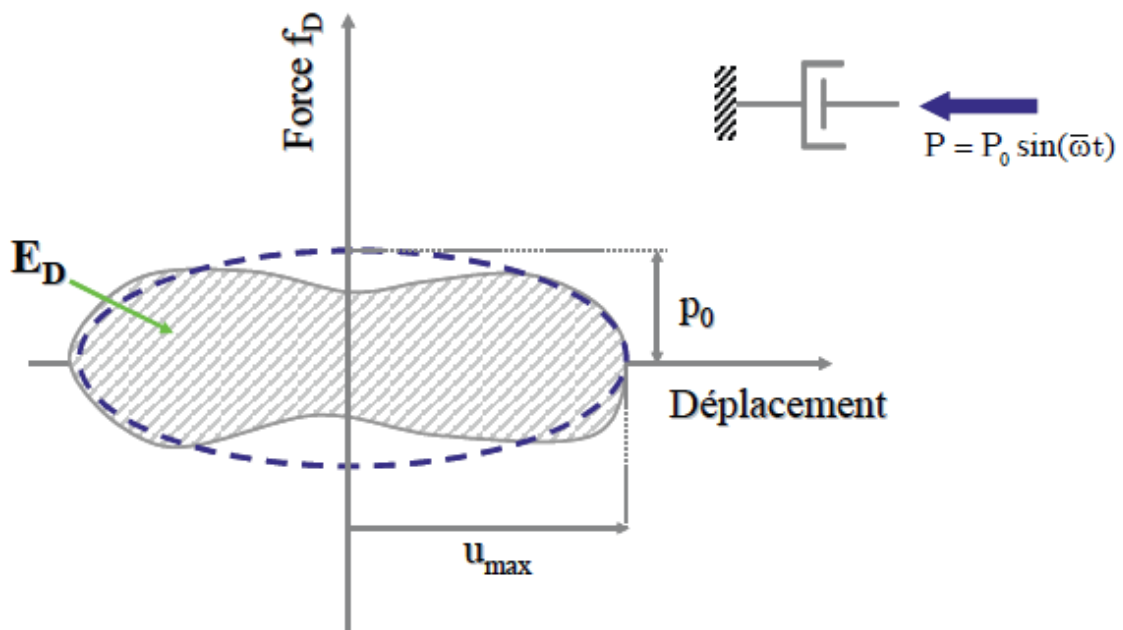


Figure II.4 : Amortissement équivalent

L'aire de la boucle représente l'énergie  $E_D$  dissipée par la structure au cours d'un cycle de sollicitation.

Considérons maintenant l'amortisseur linéaire de la figure 2.4 soumis à une force harmonique de pulsation  $\bar{\omega}$

$$P = P_0 \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.4)$$

Pour ce système, la constante de l'amortisseur  $c$  est donnée par :

$$c = \frac{f_{D \max}}{\dot{u}_{\max}} = \frac{P_0}{\bar{\omega} u_{\max}} \quad (2.5)$$

La courbe effort-déplacement décrite par ce système est représentée par une ellipse, figurée en trait pointillé sur la figure 2.4.

L'énergie dissipée au cours d'un cycle par l'amortisseur linéaire est donnée par :

$$(2.6) \quad E_C = \oint f_D \, du = \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}}} (c\dot{u}) \dot{u} \, dt = \pi c \bar{\omega} u_{\max}^2$$

Ecrivaint que cette énergie est égale à l'énergie ED dissipée par le système, la constante d'amortisseur est donnée par :

$$(2.7) \quad c_{eq} = \frac{E_D}{\pi \bar{\omega} u_{\max}^2}$$

On notera que l'amortisseur équivalent est inversement proportionnel à la pulsation de la sollicitation. On verra au paragraphe 3.5 une autre façon de caractériser l'équivalence de dissipation d'énergie entre le système et le modèle qui ne fait pas intervenir explicitement la pulsation  $\bar{\omega}$ . La modélisation de l'énergie dissipée dans un système par un amortisseur équivalent se révèle très utile dans la pratique. Tant que les cycles de sollicitations sont d'amplitudes faibles à modérées, l'approximation se révèle satisfaisante. Lorsque l'amplitude de la déformation croît, cette modélisation se révèle inappropriée car les mécanismes de dissipation mis en jeu ont pour origine les déformations plastiques du système et sont très éloignés d'une dissipation visqueuse. La seule représentation fiable de la dissipation d'énergie s'obtient alors à partir de la description de la courbe effort-déplacement décrite lors des cycles de chargement.

## II.1.2. EQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE DYNAMIQUE

Suivant les principes exposés au chapitre 1, l'équation d'équilibre dynamique peut être obtenue à partir de trois méthodes : méthode directe, méthode énergétique et principe des puissances virtuelles. Les deux premières méthodes sont illustrées ci-après :

- **METHODE DIRECTE**

Les forces s'exerçant sur l'oscillateur de la figure 2.5 sont :

- la force extérieure appliquée  $p(t)$ ,
- la force de liaison  $f_s$ , reliée au déplacement  $u$  de la masse; dans le cas d'un système linéaire, cette force est donnée par l'équation (2.1),
- la force de liaison  $f_D$  reliée à la vitesse  $\dot{u}$  de la masse; dans le cas d'un amortisseur visqueux linéaire, cette force est donnée par l'équation (2.3),
- les forces d'inertie  $f_i$  s'exerçant sur la masse  $M$  égales au produit de celle-ci par l'accélération  $\ddot{u}$  de la masse.

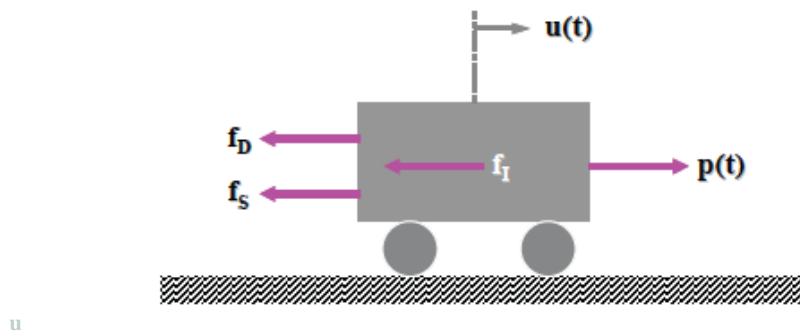


Figure II.5 : Forces appliquées à l'oscillateur

En écrivant que la résultante de toutes ces forces est nulle :

$$f_S + f_D = p(t) - f_I \quad (2.8)$$

Dans l'équation précédente, on reconnaît le principe d'Alembert; les forces extérieures sont égales aux forces directement appliquées à la masse,  $p(t)$ , diminuées des forces d'inertie  $f_I$ .

Ces forces extérieures sont égales aux forces "intérieures",  $f_S + f_D$ , se développant dans la liaison.

Pour un système visco-élastique linéaire, l'équation (2.8) devient en tenant compte de (2.1) et (2.3):

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.9)$$

- **METHODE ENERGETIQUE**

L'énergie cinétique du système de la figure 2.1 est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2.10)$$

Son énergie potentielle, dans le cas d'un système linéaire par :

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.11)$$

Le travail des forces non conservatives est égal au travail des forces appliquées et des forces dissipatives.

$$W_c = -c \dot{x} x \quad (2.12)$$

$$W_e = F_e x \quad (2.13)$$

Principe de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial W_c}{\partial x} = \frac{\partial W_e}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.15)$$

### II.1.3. FORMULATION REDUITE DE L'EQUATION D'EQUILIBRE

La mise en œuvre de l'une des trois méthodes exposées ci-dessus conduit à l'équation d'équilibre (2.9) pour l'oscillateur à 1 degré de liberté. Divisant les deux membres de cette équation par M, on obtient la formulation réduite de l'équation d'équilibre :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p(t)}{M} \quad (2.16)$$

L'écriture précédente montre que l'équation d'équilibre fait intervenir les deux grandeurs fondamentales suivantes caractérisant l'oscillateur :

• **Pulsation propre:**

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.17)$$

Où, de façon équivalente, la fréquence propre

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (2.18)$$

• **Pourcentage d'amortissement critique**

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{KM}} = \frac{c}{2M\omega} = \frac{c}{c_0} \quad (2.19)$$

Où  $c_0$  est par définition l'amortissement critique dont la signification physique sera explicitée au paragraphe 4.2.

L'amortissement critique donné par l'équation (2.19) peut également s'exprimer en fonction de la raideur  $k$  en tenant compte de l'équation (2.18).

$$c_0 = \frac{2K}{\omega} \quad (2.20)$$



Pour un système linéaire, dont la courbe effort-déplacement est représentée sur la figure 2.7, la raideur  $k$  peut être exprimée en fonction de l'énergie élastique emmagasinée  $E_S$ , égale à l'aire sous la courbe.

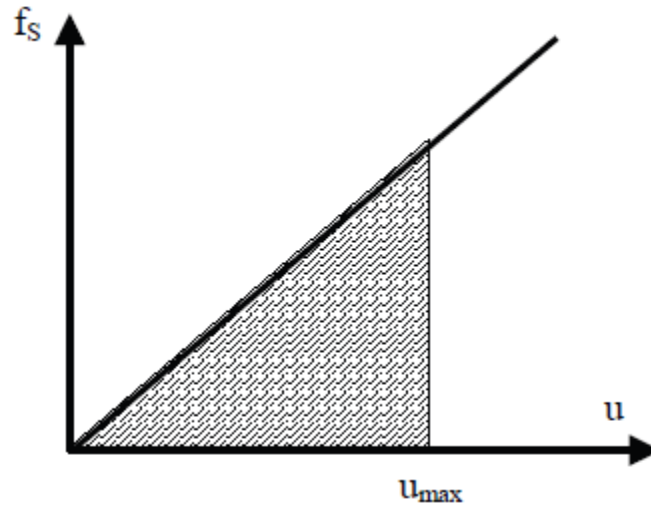


Figure II.7 : Système linéaire

$$K = \frac{2E_S}{u_{\max}^2} \quad (2.21)$$

Revenant à l'équation (2.7) qui définit l'amortisseur équivalent du système viscoélastique linéaire dont les propriétés dissipatives sont égales à celles d'une structure pour laquelle la nature exacte de l'amortissement est inconnue, il résulte du rapprochement des équations (2.7), (2.31), (2.32) et (2.33) que, en se plaçant à résonance, le pourcentage d'amortissement critique équivalent de la structure est donné par :

$$\xi = \frac{E_D}{4\pi E_S} \quad (2.22)$$

Le pourcentage d'amortissement critique défini par l'équation (2.34) est indépendant de la fréquence de sollicitation  $\bar{\omega}$  si  $E_D$  ne dépend pas de celle-ci (cas de la dissipation d'énergie dans un matériau élastoplastique par exemple). Il est donc plus commode de représenter les propriétés dissipatives de la structure par son pourcentage d'amortissement critique que par l'amortisseur équivalent de l'équation (2.7) qui dépend de  $\bar{\omega}$ . De plus le pourcentage d'amortissement critique est une grandeur accessible par l'expérience, comme on le verra au paragraphe 4.2.

La solution de l'équation (2.27) donnant la réponse de l'oscillateur simple est obtenue de façon classique en cherchant une solution de l'équation homogène, sans second membre ( $p(t) = 0$ ) et une solution particulière. La résolution de l'équation homogène conduit à l'étude des

vibrations libres du système; la recherche d'une solution particulière à celle des vibrations forcées.

#### II.1.4.VIBRATIONS LIBRES

Les vibrations libres sont solutions de l'équation :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = 0 \quad (2.23)$$

Sous certaines conditions initiales pour la vitesse et le déplacement. La solution générale de l'équation (2.23) est recherchée sous la forme 1 :

$$u(t) = \lambda e^{st} \quad (2.24)$$

Reportant (2.24) dans (2.23), l'inconnue s doit satisfaire l'équation :

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0 \quad (2.25)$$

dont la solution dépend du signe du déterminant :

$$\Delta = \omega^2(\xi^2 - 1) \quad (2.26)$$

qui lui-même dépend de la valeur de  $\xi$ .

On distinguera trois cas possibles :

- système non amorti  $\xi=0$  ou à amortissement sous-critique  $\xi<1$
- système à amortissement critique  $\xi=1$
- système à amortissement sur-critique  $\xi>1$

tout en notant que le cas de l'amortissement sous-critique est celui pertinent pour la majorité des systèmes physiques rencontrés dans la pratique.

- **SYSTEME NON AMORTI  $\xi = 0$**

L'équation (2.25) se réduit à :

$$\ddot{u} + \omega^2u = 0 \quad (2.27)$$

dont la solution s'écrit pour des conditions initiales du déplacement  $u(0)$  et de la vitesse  $\dot{u}(0)$  :

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + u(0)\cos(\omega t) \quad (2.28)$$

ou de façon équivalente

$$u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta) \quad (2.29)$$

$\rho$  désigne l'amplitude de la réponse et  $\theta$  la phase

$$\rho = \sqrt{u^2(0) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right)^2} \quad (2.30a)$$

$$\theta = \text{Arctg} \frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)} \quad (2.30b)$$

La figure 2.8 représente la vibration du système au cours du temps. Celle-ci se reproduit à l'identique au bout d'un intervalle de temps égal à la période propre  $T=2\pi/\omega$  de l'oscillateur et se prolonge indéfiniment avec une amplitude maximale égale à  $\rho$ .

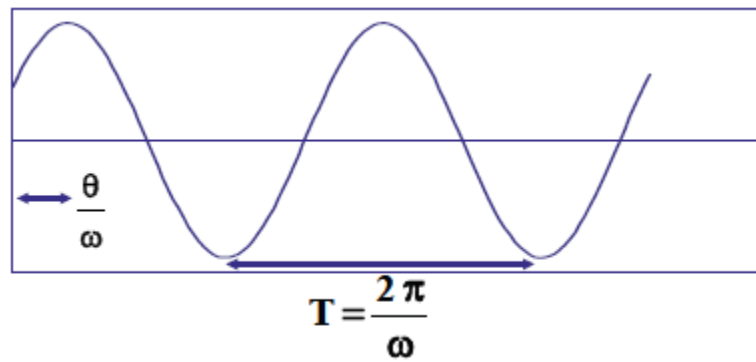


Figure II.8: Vibration libre d'un système non amorti

- **SYSTEME A AMORTISSEMENT SOUS-CRITIQUE**

Ce cas correspond à  $\xi < 1$  et  $C < 2M\omega$ . La solution de l'équation (2.37) conduit aux deux solutions :

$$s = -\xi\omega \mp i\omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.43)$$

Introduisant la quantité

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.31)$$

Appelée *pulsation propre amortie*, la réponse du système soumis aux mêmes conditions initiales s'écrit

$$u(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + u(0) \cos(\omega_D t) \right] e^{-\xi\omega t} \quad (2.32)$$

La solution (2.32) peut être écrite, de façon équivalente, en introduisant l'amplitude  $\rho$  et la phase  $\theta$  sous la forme :

$$u(t) = \rho e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad (2.33)$$

Elle est représentée sur la figure 2.9 en fonction du temps

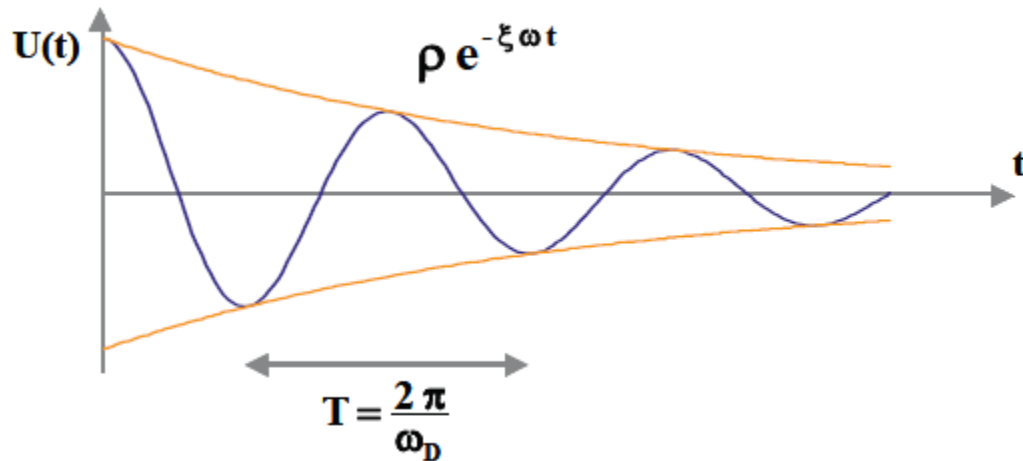


Figure II.9 : Vibration libre d'un système à amortissement sous-critique

L'examen de la figure 2.9 montre que la réponse passe par des extrema espacés d'un temps  $T=2\pi/\omega_D$ ; l'amplitude des extrema, égale à  $\rho e^{-\xi \omega t}$ , décroît en fonction du temps pour tendre vers 0 au bout d'un temps infini. Le système revient à l'équilibre en oscillant autour de la position neutre correspondant à un déplacement nul.

Ce retour à l'équilibre s'effectue d'autant plus rapidement, et avec moins d'oscillations, que le pourcentage d'amortissement critique  $\xi$  est élevé (figure 2.10).

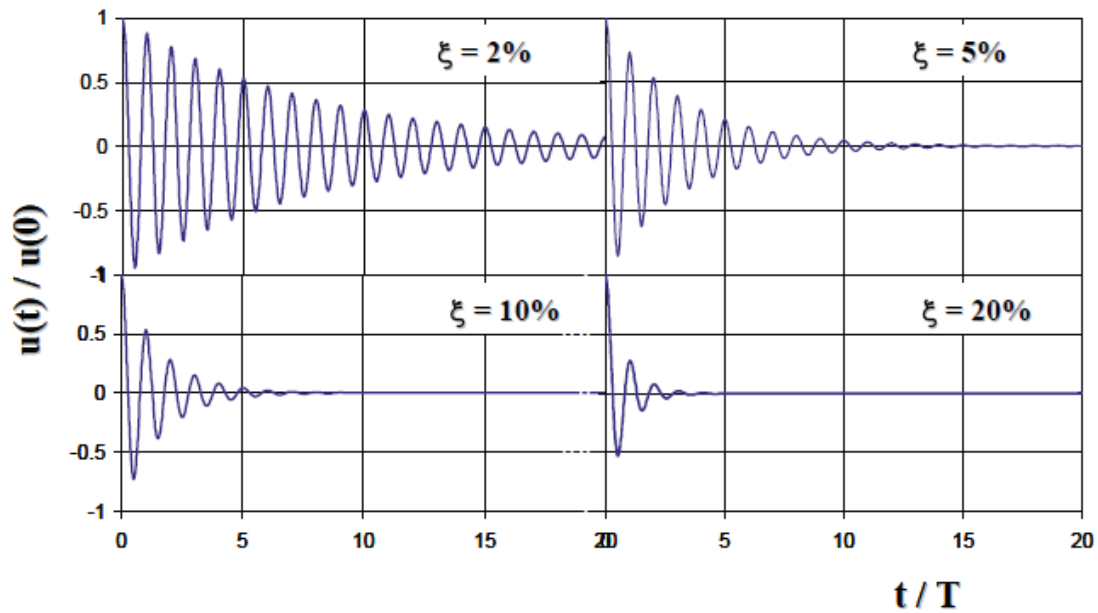


Figure II.10 : Influence de l'amortissement sur la vibration libre d'un système sous-amorti

- **SYSTEME A AMORTISSEMENT CRITIQUE**

Ce cas correspond à  $\xi=1$  et  $C=2M\omega$ .

Sous les mêmes conditions initiales  $u(0)$  et  $\dot{u}(0)$ , la réponse du système s'écrit :

$$u(t) = [(1 + \omega t)u(0) + t\dot{u}(0)] e^{-\omega t} \quad (2.34)$$

Elle est présentée sur la figure 2.12. La réponse ne présente aucune oscillation au cours du temps et le déplacement tend vers 0 au bout d'un temps infini. On peut en déduire que l'amortissement critique correspond à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en vibration libre ne comporte pas d'oscillations.

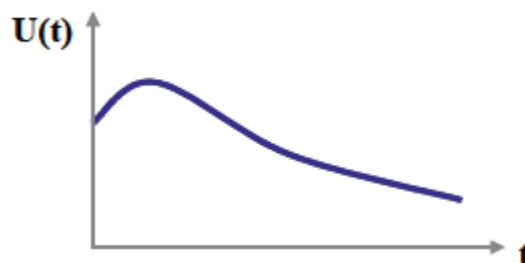


Figure II.11 : Vibration libre d'un système à amortissement critique

- **SYSTEME A AMORTISSEMENT SUR-CRITIQUE**

Ce cas correspond à  $\xi>1$  et  $C>2M\omega$ . La solution de l'équation (2.37) s'écrit :

$$u(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \xi\omega u(0)}{\hat{\omega}} Sh(\hat{\omega}t) + u(0)Ch(\hat{\omega}t) \right] e^{-\xi\omega t} \quad (2.35)$$

$$\hat{\omega} = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2.36)$$

On notera que la vibration libre d'un système sur-amorti ne comporte pas d'oscillations et que le système revient à l'équilibre au bout d'un temps infini. La réponse est analogue à celle du système à amortissement critique mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.

### II.1.5. Vibration forcée :

- **SOLLICITATION HARMONIQUE**

La sollicitation appliquée  $p(t)$  est décrite par une expression :

$$p(t) = p_o \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.37)$$

L'équation générale dont on recherche la solution s'écrit :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = \frac{p_o}{M} \sin(\bar{\omega}t) \quad (2.38)$$

La solution générale s'écrit sous la forme de la solution générale de l'équation homogène (éq. (2.45)), soit :

$$u(t) = A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t) \quad (2.39)$$

et d'une solution particulière que l'on recherchera sous la forme :

$$u_1(t) = \lambda \sin(\bar{\omega}t) + \mu \cos(\bar{\omega}t) \quad (2.40)$$

Reportant (2.55) dans (2.53) et identifiant les constants terme à terme, il vient en posant :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (2.41)$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] + \frac{p_o}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega}t)] \quad (2.41)$$

Le premier terme de l'équation (2.41) constitue la réponse transitoire de l'oscillateur qui a été étudiée au paragraphe 2.4.2 et le second la réponse forcée ou stationnaire de celui-ci (figure 2.12).

La réponse transitoire s'amortit au cours du temps, d'autant plus rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé et la réponse tend vers la solution stationnaire.

Cette réponse s'effectue alors avec une période  $T = 2\pi / \bar{\omega}$  égale à celle de la sollicitation.

Dans l'équation (2.41), les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales, vitesse et déplacement du système, à l'instant  $t = 0$ .

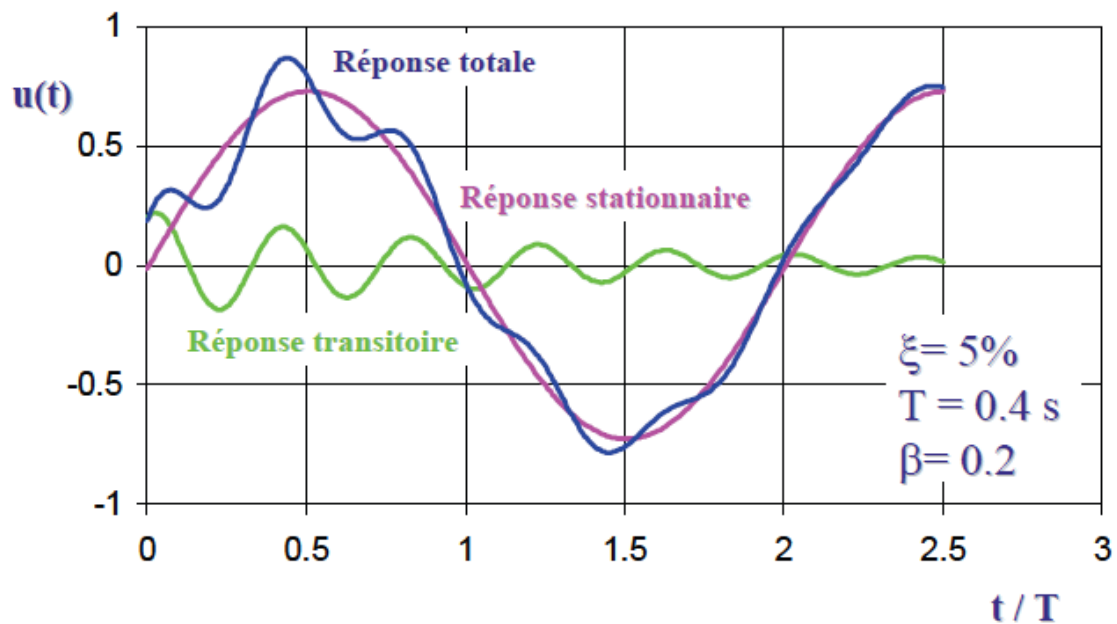


Figure II.12 : Réponse de l'oscillateur soumis à une sollicitation harmonique

Pour un système même faiblement amorti ( $\xi \approx 5\%$ ), dès que la durée devient supérieure à 2 fois la période de vibration propre  $T = 2\pi/\omega$  de l'oscillateur, la contribution de la réponse transitoire peut être négligée. La réponse stationnaire peut alors s'écrire, de façon similaire à l'équation (2.41) :

$$u(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta) \quad (2.42)$$

Où  $\rho$  représente l'amplitude de la réponse et  $\theta$  la phase qui caractérise le déphasage entre l'effort appliqué et le déplacement résultant.

L'amplitude de la réponse est égale à (éq. (2.42)) :

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{P_0}{k} D \quad (2.43)$$

$P_0/k$  représente le déplacement statique (à fréquence nulle) de la masse  $M$  lorsque la sollicitation vaut  $P_0$  et  $D$  le facteur d'amplification dynamique.

Ce facteur d'amplification dynamique est représenté sur la figure 2.1 3 en fonction du rapport  $\beta$ . Il vaut bien évidemment 1 pour un chargement statique. Lorsque  $\bar{\omega}$  tend vers l'infini, D tend vers 0 quelle que soit la valeur de  $\xi$ . A très haute fréquence, les forces d'inertie deviennent prépondérantes devant les forces élastique  $f_S$  et d'amortissement  $f_D$ ; elles tendent vers l'infini et s'opposent au mouvement : la masse reste "immobile".

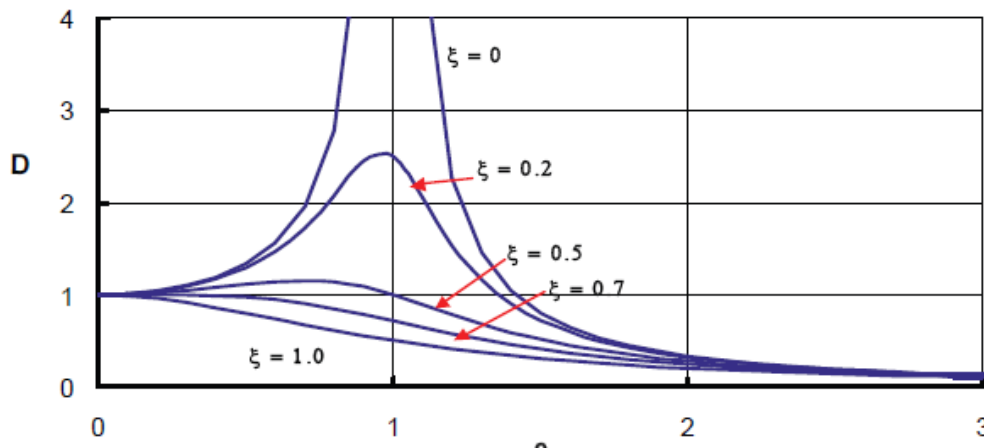


Figure II.14 : Facteur d'amplification dynamique

Lorsque la pulsation  $\bar{\omega}$  de la sollicitation coïncide avec la pulsation propre  $\omega$  de l'oscillateur, le facteur d'amplification D passe par un maximum égal à :

$$D_{\max} = \frac{1}{2\xi} \quad (2.44)$$

Ce phénomène est connu sous le nom de résonance. Lorsque l'amortissement est nul, Dmax devient infini.

Reprenant l'étude de l'équation (2.42), la phase  $\theta$  est donnée par :

$$\text{Arctg } \theta = \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)} \quad (2.45)$$

Elle est représentée sur la figure 2.14 en fonction de  $\beta$ .

A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation. Lorsque la résonance est atteinte ( $\beta=1$ ), il se produit un déphasage de  $90^\circ$  entre force appliquée et déplacement résultant : le déplacement est nul lorsque la force est maximale, et vice-versa. A haute fréquence, le déplacement est maximal, en valeur absolue,



au même instant que la force mais se produit dans la direction opposée à la force. Rappelons que corrélativement, comme on l'a vu précédemment, son amplitude tend vers 0.

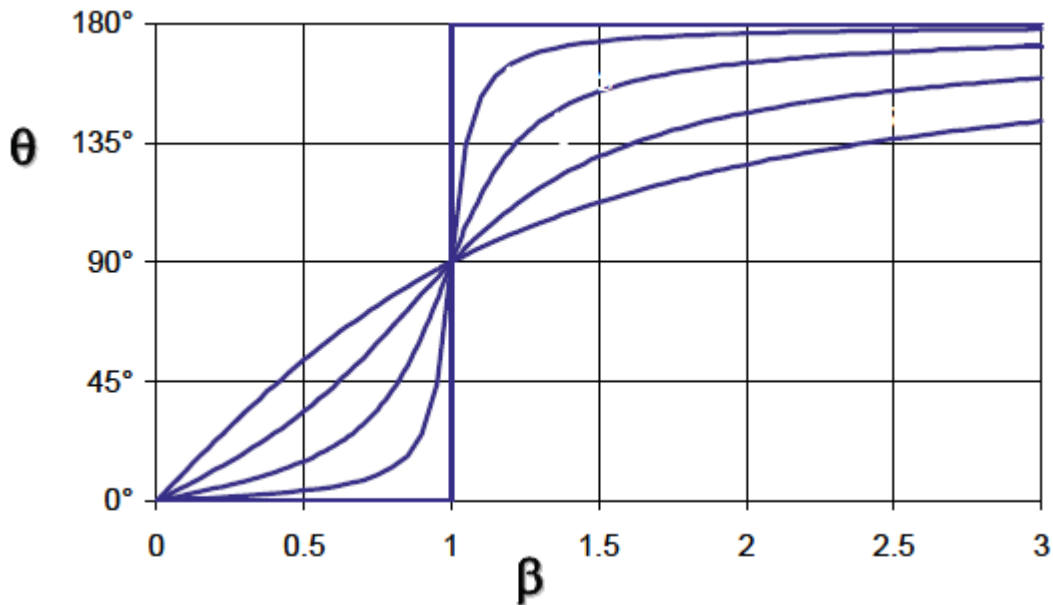


Figure II.15 : Phase de la réponse stationnaire

#### • ETUDE DE LA RESONANCE

On a vu que pour l'oscillateur simple, lorsque la pulsation de la sollicitation coïncidait avec la fréquence propre de l'oscillateur, la réponse, en termes de déplacement, passait par un maximum qui pouvait être infini si l'amortissement de l'oscillateur était nul.

Pour l'oscillateur soumis à des conditions initiales nulles en déplacement et vitesse,

$u(0) = \dot{u}(0) = 0$ , l'équation (2.41) indique que la réponse s'écrit :

$$A = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad B = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \quad (2.46a)$$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[ \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right) e^{-\xi\omega t} - \cos(\omega t) \right] \quad (2.46b)$$

qui se simplifie pour les faibles valeurs de  $\xi$  et un temps  $t$  suffisamment élevé en :

$$u(t) = \frac{P_0}{k} [\sin(\omega t) - \cos(\omega t)] \quad (2.47)$$

La figure 2.15 présente l'évolution dans le temps des réponses données par les équations (2.46) et (2.47). Pour le système non amorti, l'amplitude de la réponse croît d'une quantité  $\pi$  à chaque cycle et tend vers l'infini : le système devient instable.

Pour le système, même faiblement amorti, l'amplitude de la réponse croît dans le temps mais reste bornée par la valeur  $P_0/2k\xi$  qui est atteinte d'autant plus rapidement que l'amortissement est élevé. La borne obtenue pour l'amplitude du déplacement est égale à celle de la réponse stationnaire à la résonance de l'oscillateur (éq. (2.44)).

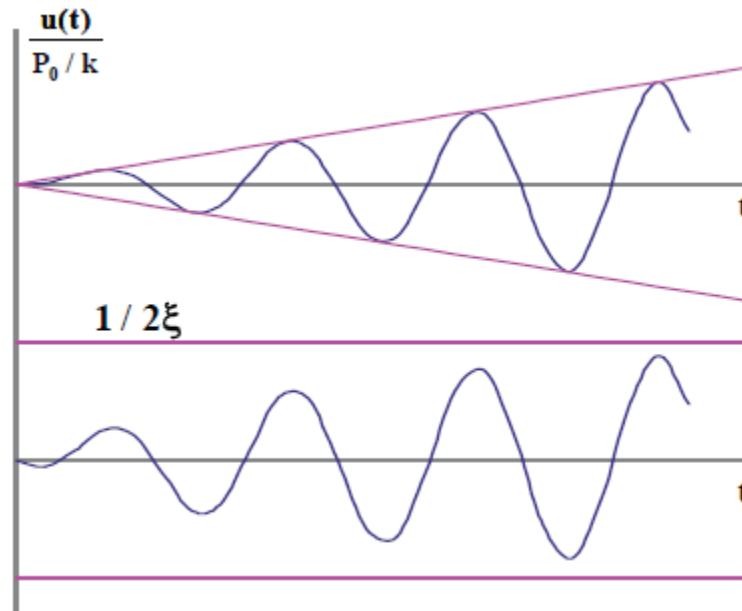


Figure II.16 : Evolution de l'amplitude de la réponse d'un système en résonance

## II.2. Système à plusieurs degrés de liberté

Dans la section précédente, on a vu qu'il était possible de réduire l'étude dynamique d'une structure à celle d'un système à 1 degré de liberté, dont l'équilibre dynamique est régi par une équation différentielle du second ordre. Cette configuration se rencontre lorsque le mouvement de la structure réelle est contraint par des conditions aux limites permettant de décrire sa cinématique par le mouvement d'un seul point.

Cependant, en règle générale, une structure possède plusieurs degrés de liberté et la réduction à un degré de liberté, obtenue en se donnant a priori la déformée  $\psi(x)$  de la structure, ne permet l'obtention que d'une solution approchée de la réponse. La difficulté réside alors dans l'évaluation de la qualité de l'approximation. Si les conditions aux limites et le chargement de la structure qui, rappelons-le, est induit par les forces d'inerties dépendant de la distribution des masses, sont tels que le mouvement de la structure s'effectue effectivement de façon préférentielle suivant cette déformée, alors l'approximation sera acceptable, et utile pour l'obtention d'une solution rapide.

Dans les autres cas, l'approximation est médiocre et il convient de décrire la réponse dynamique de la structure par les mouvements d'un nombre, fini ou infini, de points de celle-ci.

Les degrés de liberté d'une structure peuvent être représentés par le déplacement d'un nombre fini de points, ou par l'introduction de coordonnées généralisées représentant les amplitudes d'un nombre spécifié de déformées.

## II.2.1 EQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE DYNAMIQUE

Rappelons que le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de composantes du déplacement requises pour exprimer les forces d'inertie se développant dans celui-ci. Ces déplacements sont évalués en un nombre de points de la structure, appelés nœuds où sont concentrées les masses. Dans le cas le plus général, un nœud possède six mouvements possibles (3 translations et 3 rotations) et le nombre de degrés de liberté du système est égal à  $N=6p$  où  $p$  est le nombre de nœuds.

La figure II .15 présente deux exemples de modélisations de structures planes entrant dans ce cadre. Dans le cas du portique à deux travées, les degrés de liberté sont constitués par les déplacements des nœuds situés à l'intersection des poteaux et des poutres, les masses de la structure sont concentrées en ces nœuds. A chaque nœud est affectée la masse des éléments de poteaux et planchers localisés à son voisinage et symbolisés sur la figure II .15 par le rectangle pointillé pour le nœud central. Si la raideur axiale des poteaux est infinie, les seuls mouvements possibles des nœuds sont la translation horizontale et la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, soit un nombre de degrés de liberté égal à  $2p=18$ .

Si de plus les planchers sont considérés comme infiniment rigides, la cinématique d'un niveau de plancher est décrite par le mouvement d'un de ses points; on aboutit au modèle "brochette" de la figureII.15b, dans lequel la masse d'un niveau est concentrée en un point et la raideur en flexion-cisaillement des poutres verticales est égale à la somme des raideurs des poteaux d'un niveau. Le nombre de degrés de liberté a été réduit dans le cas présent à  $2p=6$ .

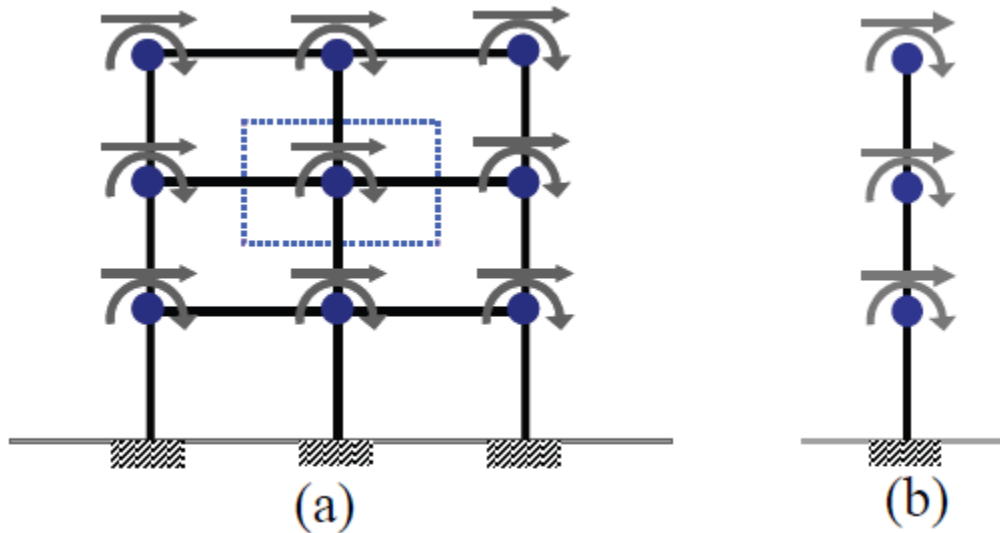


Figure II.18 : Modélisation en masses concentrées

L'équation d'équilibre dynamique d'un système du type de celui de la figure II.15 peut être obtenue par la méthode directe en écrivant en chaque nœud et pour *chaque degré de liberté* que la résultante des forces est nulle. Ces forces se composent de :

- forces élastiques  $\mathbf{f}_s$
- forces d'amortissement  $\mathbf{f}_D$
- forces d'inertie  $\mathbf{f}_I$
- forces appliquées extérieures  $\mathbf{p}$

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté  $i$  :

$$f_{si} + f_{Di} + f_{Ii} = p_i \quad (2.48)$$

Chacune des forces résistantes (élastiques, d'amortissement ou d'inertie) s'exprime, de façon plus générale, à l'aide de coefficients d'influence traduisant la dépendance de la force en un point sur la valeur du mouvement de tous les autres points.

Ainsi, en supposant que le principe de superposition est valide, et donc que le système est linéaire, la force élastique développée suivant le degré de liberté  $i$  s'exprime par :

$$f_{si} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \dots = \sum_{j=1}^N k_{ij}u_j \quad (2.49 \text{ a})$$

soit pour l'ensemble des degrés de liberté, sous la forme matricielle :

$$\underline{F}_s = \underline{K} \underline{U} \quad (2.49 \text{ b})$$

Le coefficient  $k_{ij}$  représente la force engendrée suivant le degré de liberté  $i$  par un déplacement unité imposé au degré de liberté  $j$ .

La matrice  $\underline{K}$  représentant l'ensemble des coefficients d'influence  $k_{ij}$  est la *matrice de raideur* du système.

En supposant que les forces d'amortissement sont d'origine visqueuse, et dépendent donc de la vitesse, on peut écrire de façon similaire :

$$f_{Di} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N c_{ij}\dot{u}_j \quad (2.50a)$$

soit sous forme matricielle :

$$\underline{F}_D = \underline{C} \underline{\dot{U}} \quad (2.50 b)$$

Les coefficients  $c_{ij}$  sont les coefficients de la *matrice d'amortissement* du système.

Le coefficient  $c_{ij}$  représente la force engendrée suivant le degré de liberté  $i$  par une vitesse unité imposée au degré de liberté  $j$ .

Finalement les forces d'inertie peuvent être exprimées de façon similaire :

$$f_{Ii} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N m_{ij}\ddot{u}_j \quad (2.51 a)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\underline{F}_I = \underline{M} \underline{\ddot{U}} \quad (2.51 b)$$

La matrice des coefficients  $m_{ij}$  est la matrice de masse du système.

Le coefficient  $m_{ij}$  représente la force engendrée suivant le degré de liberté  $i$  par une accélération unité imposée au degré de liberté  $j$ .

Regroupant les équations (2.49 b), (2.50 b) et (2.51b), l'équation d'équilibre dynamique du système s'écrit sous forme matricielle :

$$\underline{M} \underline{\ddot{U}} + \underline{C} \underline{\dot{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{P}(t) \quad (2.52)$$

Les matrices  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  et  $\underline{K}$  ont pour dimensions  $N \times N$ , et les matrices  $\underline{U}$  et  $\underline{P}$  pour dimensions  $N \times 1$  où  $N$  représente le nombre de degrés de liberté du système (égal au nombre de nœuds multiplié par le nombre de déplacements possibles du nœud).

## II.2.2 COORDONNEES GENERALISEES

Dénotons par  $\underline{q}$  le vecteur des  $N$  coordonnées généralisées du système,  $N$  étant le nombre de degrés de liberté. On postule que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'expriment par les formes quadratiques suivantes :

$$T = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \underline{M} \underline{\dot{q}} \quad (2.53)$$

$$V = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{M} \underline{q} \quad (2.54)$$

Les forces généralisées, qui incluent les forces extérieures et les forces non conservatives, sont représentées par le vecteur  $\underline{Q}$ , que par analogie avec l'oscillateur à un degré de liberté, on écrira :

$$\underline{Q} = \underline{P} - \underline{C}\dot{\underline{q}} \quad (2.55)$$

où  $\underline{P}$  représente les charges appliquées.

Les équations de Lagrange du système s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left( \underline{M} \dot{\underline{q}} \right) + \underline{K} \underline{q} = \underline{P} - \underline{C} \dot{\underline{q}} \quad (2.56)$$

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{C} \dot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{P}(t) \quad (2.57)$$

L'équation (2.57) a une structure identique à celle de l'équation (2.52), les inconnues n'étant plus les déplacements des nœuds où sont concentrées les masses, mais les coordonnées généralisées.

L'évaluation des matrices  $\underline{M}$ ,  $\underline{K}$  et  $\underline{C}$  est liée à la discrétisation spatiale du système.

### II.2.3 Structures et propriétés de la matrice raideur et masse

- **CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RAIDEUR**

La définition de la matrice de raideur (éq. 2.49 b) montre que le terme  $k_{ij}$  de la matrice est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour maintenir son déplacement nul sous l'effet d'un déplacement unitaire appliqué au seul degré de liberté  $j$ ; en particulier le terme  $k_{ii}$  est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour lui imposer un déplacement unitaire tout en maintenant nuls les autres degrés de liberté.

L'exemple de la figure II.16, constitué de deux masses reliées par des ressorts de raideur  $k_1$  et  $k_2$ , illustre cette définition.

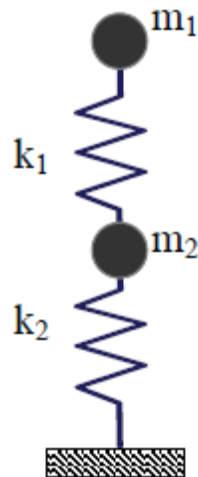


Figure II.19 : Système masse-ressort à deux degrés de liberté

Le système possède deux degrés de liberté, les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  des deux masses. Un déplacement unitaire ( $u_1=1$ ) appliqué à la masse  $m_1$ , en maintenant le déplacement  $u_2$  de la masse  $m_2$  nul, nécessite d'appliquer une force  $k_1$ , à la masse  $m_1$  et  $-k_1$  à la masse  $m_2$ . De même, un déplacement unitaire  $u_2$  appliqué à la masse  $m_2$ , tout en maintenant une valeur nulle pour  $u_1$ , nécessite l'application d'une force  $-k_1$  à la masse  $m_1$  et  $(k_1+k_2)$  à la masse  $m_2$ . Il en résulte la structure de la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$ .

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Dans le cadre d'une formulation à l'aide des coordonnées généralisées, la construction de la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  s'appuie sur le principe des puissances virtuelles.

- **PROPRIETES DE LA MATRICE  $\underline{\mathbf{K}}$**

L'énergie élastique emmagasinée dans la structure sous l'action d'un champ de forces  $\underline{\mathbf{P}}$  appliqué aux degrés de liberté du système est une quantité positive qui vaut :

$$V = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N p_i u_i \quad (2.59)$$

En tenant compte de la définition de la matrice de raideur (eq. 6.2b), l'énergie élastique s'exprime également par :

$$V = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{U}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{U}} \quad (2.60)$$

Cette quantité étant positive, il s'ensuit que la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  est *définie positive*. Elle possède donc une inverse, appelée *matrice de flexibilité* :

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{K}}^{-1} \quad (2.61)$$

Par ailleurs, la matrice  $\underline{K}$  est *symétrique*. Ce résultat, peut être obtenu de façon plus générale par application du théorème de Betti. Ce théorème exprime le résultat suivant : soit deux champs de forces

$\underline{P}_1$  et  $\underline{P}_2$  induisant des champs de déplacements  $\underline{U}_1$  et  $\underline{U}_2$ , alors le travail de  $\underline{P}_1$  dans le champ  $\underline{U}_2$  est égal au travail de  $\underline{P}_2$  dans le champ  $\underline{U}_1$ .

$$\underline{P}_1^T \underline{U}_2 = \underline{P}_2^T \underline{U}_1 \quad (2.62)$$

Tenant compte de  $\underline{P}_i = \underline{K} \underline{U}_i$

, il vient :

$$\underline{P}_2^T \underline{U}_1 = [\underline{K} \underline{U}_2]^T \underline{U}_1 = \underline{U}_2^T \underline{K}^T \underline{U}_1 \quad (2.63a)$$

et

$$\underline{P}_1^T \underline{U}_2 = [\underline{P}_1^T \underline{U}_2]^T = \underline{U}_2^T \underline{P}_1 = \underline{U}_2^T \underline{K}^T \underline{U}_1 \quad (2.64a)$$

soit d'après le théorème de Betti (eq. 2.62) :

$$\underline{K}^T = \underline{K} \quad (2.65)$$

- ***STRUCTURE DE LA MATRICE  $\underline{K}$***

La formulation de la matrice  $\underline{K}$  dans le cadre de la méthode des éléments finis ne conduit pas à une matrice pleine dans laquelle tous les coefficients sont non nuls. Au contraire le couplage entre nœuds n'existe que pour les nœuds adjacents. Il en résulte qu'un grand nombre de termes sont nuls et que la matrice  $\underline{K}$  à une structure bande. Par exemple dans le cas d'une poutre droite, la matrice  $\underline{K}$  sera tridiagonale.

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

- ***STRUCTURE ET PROPRIÉTÉS DE LA MATRICE DE MASSE***

La modélisation en masses concentrées n'introduit aucun couplage entre les degrés de liberté. Il en résulte pour la matrice de masse une structure diagonale qui présente beaucoup d'avantages pour le traitement numérique.



$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & m_i & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

Si par contre pour la modélisation on adopte une formulation en coordonnées généralisées, il en résulte un couplage entre degrés de liberté et une structure bande analogue à celle de la matrice de raideur.

Avec ce choix de modélisation, la construction de la matrice masse  $\underline{\underline{M}}$  procède comme celle de la matrice de raideur en appliquant le principe des puissances virtuelles aux forces d'inertie.

### II.2.3 Fréquence propre et mode propre

La vibration libre du système est solution de l'équation (2.52), ou (2.57), dans laquelle le terme d'amortissement est pris égal à 0 et les forces extérieures appliquées sont nulles :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{U} = 0 \quad (2.66)$$

Une solution particulière de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$\underline{U} = \underline{D} \sin(\omega t + \theta) \quad (2.67)$$

Reportant (2.67) dans (2.66), il vient :

$$[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] \underline{D} = \underline{0} \quad (2.68)$$

Le système matriciel (2.68) n'a de solution non triviale ( $\underline{D} \neq \mathbf{0}$ ) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$\det [\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] = 0 \quad (2.69)$$

Les matrices  $\underline{\underline{K}}$  et  $\underline{\underline{M}}$  étant définies positives, il en résulte que l'équation (2.69) possède N racines réelles  $\omega_i^2$  où N est la dimension des matrices  $\underline{\underline{K}}$  et  $\underline{\underline{M}}$ , c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont les valeurs propres du système (2.66).

On nomme *fréquence propre* du système les quantités :

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (2.67)$$

qui sont au nombre de N. La plus faible fréquence  $f_1$  est dénommée fréquence fondamentale,  $f_2$  fréquence d'ordre 2, etc.....

A chaque valeur propre  $\omega_i^2$  est associé un vecteur propre  $\underline{D}_i$ , solution de l'équation :

$$[\underline{K} - \omega^2 \underline{M}] \underline{D} = \underline{0} \quad (2.68)$$

qui du fait que  $\omega_i^2$  est valeur propre du système est non nul et défini à une constante multiplicative près :

$$\underline{D}_i^T = \{d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n\} \quad (2.69)$$

Le système possède N vecteurs propres associés aux valeurs propres. Ces vecteurs propres sont appelés *modes propres* du système.

La solution générale de l'équation (2.66) s'écrit alors :

$$\underline{U} = \sum_{i=1}^N \underline{D}_i \sin(\omega t + \theta_i) \quad (2.70)$$

où les constantes  $\theta_i$  sont déterminées par les conditions initiales et les  $\underline{D}_i$  sont définis à une constante multiplicative près.

#### • PROPRIETES DES MODES PROPRES

Les modes propres, solutions de l'équation (2.69), possèdent la propriété fondamentale d'être orthogonaux 2 par 2 par rapport aux matrices de masse et de raideur.

$$\underline{D}_m^T \underline{M} \underline{D}_n = c \delta_{mn} \quad (2.71a)$$

$$\underline{D}_m^T \underline{K} \underline{D}_n = c' \delta_{mn} \quad (2.71b)$$

où  $\delta_{mm}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{mm} = 1$  si  $m = n$ ,  $=0$  si  $m \neq n$ ),  $c$  et  $c'$  deux constantes.

La démonstration de la relation (6.71a) s'obtient par application du théorème de Betti aux forces d'inertie. Les forces d'inertie  $\underline{f}_{In}$  (respectivement  $\underline{f}_{Im}$ ) engendrent les déplacements  $\underline{D}_n$  (respectivement  $\underline{D}_m$ ), donc :

$$\underline{f}_{Im}^T \underline{D}_n = \underline{f}_{In}^T \underline{D}_m \quad (2.72)$$

Par définition des forces d'inertie

$$\underline{f}_{Im}^T \underline{D}_n = -\omega_m^2 [\underline{M} \underline{D}_m]^T \underline{D}_n = -\omega_m^2 \underline{D}_m^T \underline{M} \underline{D}_n \quad (2.73 a)$$

$$\underline{f}_{In}^T \underline{D}_m = -\omega_n^2 [\underline{M} \underline{D}_n]^T \underline{D}_m = -\omega_n^2 \underline{D}_n^T \underline{M} \underline{D}_m \quad (2.73 b)$$

Par soustraction des équations (2.73 a) et (2.73 b) et en transposant la deuxième équation, il vient :

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \underline{D}_m^T \underline{M} \underline{D}_n = 0 \quad (2.74)$$

Lorsque  $\omega_n$  est différent de  $\omega_m$ , la propriété (2.73 a) en découle. La propriété (2.73 b) s'obtient en notant que  $\underline{D}$  étant solution de (2.68) :

$$\omega_n^2 \underline{M} \underline{D}_n = \underline{K} \underline{D}_n \quad (2.77)$$

soit en prémultipliant par  $\underline{D}_m^T$

$$\omega_n^2 \underline{D}_m^T \underline{M} \underline{D}_n = \underline{D}_m^T \underline{K} \underline{D}_n \quad (2.78)$$

ce qui compte tenu de (6.42a) achève la démonstration.

La propriété d'orthogonalité des modes propres permet d'exprimer les pulsations propres  $\omega_i$  en fonction des modes propres : reprenant l'équation (2.68) et prémultipliant par  $\underline{D}_j^T$ , il vient du fait de (2.71) :

$$\omega_i^2 = \frac{\underline{D}_i^T \underline{K} \underline{D}_i}{\underline{D}_i^T \underline{M} \underline{D}_i} \quad (2.79)$$

## II.2.4 VIBRATIONS FORCÉES NON AMORTIES

### • DECOUPLAGE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

L'équation générale du mouvement (eq. 2.52) se réduit en l'absence de termes d'amortissement à :

$$\underline{M} \ddot{\underline{U}} + \underline{K} \underline{U} = \underline{P}(t) \quad (2.80)$$

Du fait de la structure non diagonale de la matrice  $\underline{K}$ , et bien que la matrice  $\underline{M}$  puisse souvent être considérée comme diagonale, il existe un couplage entre les degrés de liberté du système : l'équation de rang  $i$  du système (2.80) fait intervenir non seulement le degré de liberté  $u_i$  mais également des degrés de liberté  $u_k$  ( $k \neq i$ ).

Afin de découpler les équations (2.80), on utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres. La base des modes propres constitue une base orthogonale complète qui permet d'exprimer tout déplacement  $\underline{U}$  sur cette base :

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^N \underline{D}_i y_i(t) \quad (2.81)$$

où  $y_i(t)$  joue le rôle de coordonnée généralisée et  $\underline{D}_i$  le rôle de fonction de forme du déplacement,  $y_i(t)$  représente le déplacement du sommet puisque  $\underline{D}_i$  a été normé.

Reportant l'équation (6.52) dans (6.50), prémultipliant par  $\underline{D}_j^T$  les deux membres de l'équation, il vient

$$\underline{D}_j^T \underline{M} \sum_{i=1}^N \underline{D}_i \ddot{y}_i(t) + \underline{D}_j^T \underline{K} \sum_{i=1}^N \underline{D}_i y_i(t) = \underline{D}_j^T \underline{P} \quad (2.82)$$

Tenant alors compte de la propriété d'orthogonalité:

$$\underline{D}_j^T \underline{M} \underline{D}_j \ddot{y}_j(t) + \underline{D}_j^T \underline{K} \underline{D}_j y_j(t) = \underline{D}_j^T \underline{P} \quad (2.83)$$

Définissant les quantités suivantes :

• masse généralisée :  $m_j = \underline{D}_j^T \underline{M} \underline{D}_j$

• raideur généralisée :  $k_j = \underline{D}_j^T \underline{K} \underline{D}_j$

• chargement généralisé :  $p_j = \underline{D}_j^T \underline{P}$

l'équation (2.83) s'écrit :

$$\ddot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j}{m_j} \quad (2.84)$$

dans laquelle on a posé :

$$\omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j} \quad (2.85)$$

Sous la forme (2.84) on reconnaît l'équation d'équilibre dynamique de l'oscillateur simple à un degré de liberté.

Ainsi, l'utilisation de la base modale a permis la transformation du système de N équations différentielles couplées en N équations différentielles découplées. La solution  $y_i$  de chacune de ces équations est obtenue par intégrale de Duhamel, transformation de Fourier.

#### • CALCUL DES EFFORTS

Une fois les déplacements  $\underline{U}$  déterminés, les efforts dans la structure s'obtiennent par :

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{U} \quad (2.86)$$

soit pour chaque mode propre :

$$\underline{F}_j = \underline{K} \underline{U}_j = \underline{K} \underline{D}_j y_j(t) \quad (2.87)$$

Tenant compte du fait que  $\underline{D}_j$  est un vecteur propre :

$$\underline{K} \underline{D}_j = \omega_j^2 \underline{M} \underline{D}_j \quad (2.88)$$

et (2.87) peut également s'écrire :

$$\underline{F}_j = \omega_j^2 \underline{M} \underline{D}_j y_j(t) \quad j=1, N \quad (2.88)$$

Sous cette forme on reconnaît que la force  $\underline{F}_j$  est le produit d'une masse par une quantité qui a la dimension d'une accélération.

Du fait de la structure (souvent) diagonale de la matrice  $\underline{M}$ , la formulation (2.88) est préférable à la formulation (2.86) car elle nécessite moins d'opérations : la force au degré de liberté  $i$  dans le mode  $j$  s'écrit simplement :

$$f_{ij} = \omega_j^2 \left( \sum_{k=1}^N m_{ik} d_{kj} \right) y_j(t) = \omega_j^2 m_{ii} d_{ij} y_j(t) \quad (2.89)$$

La résultante globale des efforts résulte de la superposition de tous les modes :

$$\underline{F} = \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \underline{M} \underline{D}_j y_j(t) \quad (2.90)$$

## II.2.5 VIBRATIONS FORCÉES AMORTIES

- **GENERALITES**

Le mouvement est régi par l'équation générale (2.52). Utilisant la décomposition sur la base modale définie par (2.81) et tenant compte des propriétés d'orthogonalité des modes, l'équation (2.52) se réduit au système de N équations différentielles :

$$m_j \ddot{y}_j(t) + \sum_{k=1}^N \underline{D}_j^T \underline{C} \underline{D}_j \dot{y}_j(t) + k_j y_j(t) = p_j(t) \quad , \quad j=1, N \quad (2.90)$$

A moins de faire une hypothèse sur la structure de la matrice d'amortissement  $\underline{C}$  , les équations (2.90) ne sont plus découplées et la décomposition sur la base modale perd de son intérêt. La résolution des équations (2.52), ou (2.90), nécessite une connaissance de cette matrice d'amortissement.

Sous le terme matrice d'amortissement, on a coutume de désigner tous les phénomènes de dissipation d'énergie que l'on représente dans l'analyse par un amortissement visqueux équivalent (chapitre 3). Dans une structure, cette dissipation d'énergie provient de l'ouverture/fermeture de microfissures, de frottements développés aux liaisons de différents éléments de la structure, de la déformation des éléments secondaires généralement non modélisés, du frottement aux interfaces structure principale - éléments secondaires, du comportement anélastique dans les matériaux lié à l'amplitude des déformations induites.

Cette simple énumération, non exhaustive, suffit à indiquer qu'il n'est pas envisageable de construire la matrice d'amortissement à partir des propriétés géométriques et mécaniques de la structure.

Deux alternatives s'offrent à l'analyste :

- mesurer la dissipation d'énergie dans la structure soumise à des chargements cycliques et la traduire en termes de matrice d'amortissement équivalent,
- estimer a priori "l'amortissement" de la structure.

Ces différentes alternatives et leurs conséquences sur le traitement des équations (6.5) sont examinées ci-après.

- **DECOUPLAGE DES EQUATIONS**

Si l'on fait l'hypothèse que les modes propres possèdent les mêmes propriétés d'orthogonalité par rapport à la matrice d'amortissement que par rapport aux matrices de masse et de raideur, alors l'équation (2.90) se simplifie en :

$$\ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j} \quad , \quad j=1, N \quad (2.91)$$

dans laquelle on a posé par analogie avec le cas de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté :

$$\xi_j = \frac{c_j}{2m_j\omega_j} \quad (2.92)$$

La solution des N équations différentielles (2.91) peut alors être obtenue par chapitre 3 pour intégrale de Duhamel, transformation de Fourier. Une fois les  $y_i$  déterminés, la réponse générale de la structure s'obtient par l'équation (2.81).

### II.3. Fonction d'impédance

Sachant exprimer un chargement périodique sous forme exponentielle, nous voulons également écrire les équations définissant la réponse à un chargement harmonique sous une forme exponentielle. Comme précédemment seule la réponse en régime permanent sera considérée : on suppose que le changement périodique a duré suffisamment longtemps pour que le transitoire soit amorti.

Introduire la fonction excitation complexe unité  $\exp(i\bar{\omega}t)$  dans l'équation du mouvement mène à

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = \exp(i\bar{\omega}t) \quad (2.93)$$

Dont la solution en régime permanent est de la forme

$$v(t) = H(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) \quad (2.94)$$

Fig.....Représentation vectorielle d'un chargement exponentiel.

Si on reporte l'Eq.( 2.94 ) dans l'Eq.(2.93 ). On trouve que la fonction  $H(\bar{\omega})$ , que l'on appellera dorénavant jonction de réponse en fréquence complexe, prend la forme

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + i\bar{\omega}c + k} \quad (2.95)$$

Après introduction des expressions du rapport de fréquences  $\beta$  et du facteur d'amortissement  $\zeta$  ceci devient

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)} \quad (2.96)$$

La réponse en fréquence complexe à une fréquence d'excitation  $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$  sera donc

$$H(n\omega_1) = \frac{1}{k(-n^2\beta_1^2 + 2in\beta_1\xi + 1)} \quad (2.97)$$

Où  $\beta_1 = \bar{\omega}_1/w$  Par la forme de l'Eq.( 2.95 ) on peut voir que  $H(n\bar{\omega}_1)$  est le conjugué complexe de  $H(-n\bar{\omega}_1)$ . Il est donc possible d'exprimer la réponse permanente d'un système à un seul degré de liberté à la fonction d'excitation que représente chaque terme de la série de Fourier. Par le principe de superposition, il s'ensuit que la réponse totale permanente du système à toute fonction d'excitation périodique peut s'écrire

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_1)c_n \exp(in\omega_1 t) \quad (2.98)$$

La simplicité de la forme exponentielle apparait clairement si on compare l'Eq.(2.94) à l'expression trigonométrique équivalente, Eq ( 2.41 )

# **CHAPITRE III**

## **TECHNIQUES DE MESURES D'AMORTISSEMENT**



Dans la plupart des cas, la masse et la rigidité de la structure peuvent être déterminées aisément, soit par des considérations physiques simples, soit au moyen d'expressions généralisées telles que celle des Eqs. En revanche, les mécanismes de déperdition d'énergie des structures rencontrées dans la pratique sont plus difficiles à comprendre : il en résulte qu'il n'est généralement pas possible de déterminer l'amortissement sous la forme généralisée au moyen d'expressions du même type que celle donnant la masse ou la rigidité. Pour cette raison, l'amortissement de la plupart des structures doit être mesuré directement au moyen des méthodes expérimentales.

### III.1. Mesures de l'amortissement des systèmes à un degré de liberté

#### III.1.1. *Décroissance des oscillations libres*

La méthode expérimentale la plus simple et la plus fréquemment utilisée est la mesure de la décroissance de l'amplitude des vibrations libres.

Les vibrations libres d'un système étant initiées par un moyen quelconque, le facteur d'amortissement peut être déterminé à partir du rapport des amplitudes de déplacements mesuré à  $m$  cycle d'intervalle. Si  $v_n$  est l'amplitude de déplacement de vibration en un instant quelconque et  $v_{n+m}$  son amplitude  $m$  cycles plus tard, le facteur d'amortissement est donné par

$$\xi = \frac{\delta_m}{2\pi(w/w_D)} = \frac{\delta_m}{2\pi m} \quad (3.1)$$

Où :  $\delta_m = \ln(v_n/v_{n+m})$  représente le décrément logarithmique ;

$w$  fréquence non amorti

$w_D$  fréquence amorti

En pratique, le facteur d'amortissement dans la plupart des structures étant inférieur à 0.2. Un des avantages de la méthode des vibrations libres est que l'appareillage nécessaire est réduit à un minimum. Les vibrations peuvent être initiées par un dispositif quelconque, et seules les amplitudes des déplacements relatifs sont à mesurer.

#### III.1.2. *Amplification résonante*

Les autres techniques de mesure de l'amortissement sont basées sur l'observation du comportement harmonique en régime permanent : elles demandent donc un appareillage permettant d'appliquer à la structure des oscillations d'amplitude et de fréquences prédéterminées. On peut avec un tel appareillage de construire la courbe de réponse en fréquence de la structure en appliquant des chargements harmoniques ( $p_0 \sin \omega t$ ) à des intervalles de fréquence de résonance, et en traçant la courbe représentant les variations des amplitudes des déplacements résultants en fréquences appliquées.

Une courbe type de réponse en fréquence pour une structure à amortissement modéré est présentée à la figure III.1

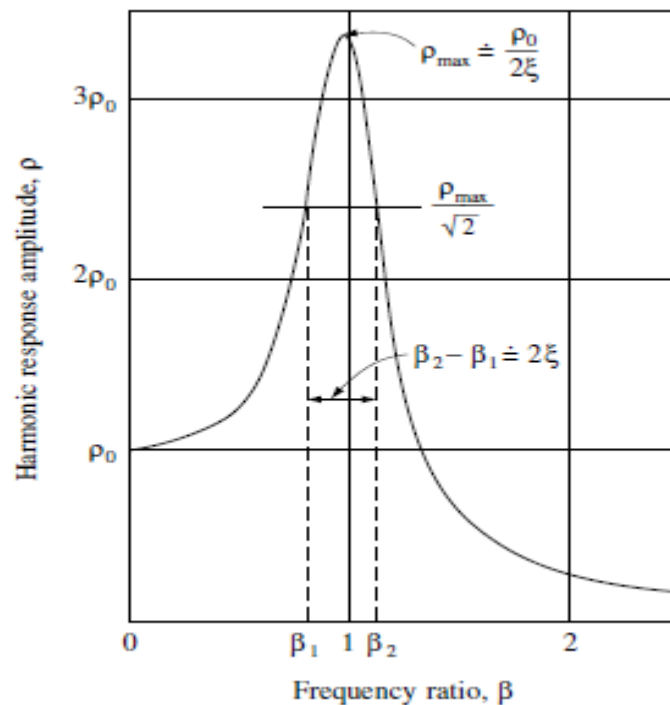


Figure III.1. Fréquence courbe de réponse du système modérément amorties

Pour une fréquence donnée, le facteur d'amplification dynamique est le rapport de la réponse en amplitude à cette fréquence et de la réponse à la fréquence zéro (statique). On montre que le facteur d'amortissement dépend du facteur d'amplification dynamique à la résonance. Si on

note par  $\rho_0$  l'amplitude de la réponse statique et par  $\rho_{\beta=1}$  l'amplitude à la résonance, le coefficient d'amortissement est donné par

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{\beta=1}} \quad (3.2)$$

Comme il est en pratique difficile d'appliquer la fréquence de résonance avec précision, il sera plus commode de déterminer l'amplitude de la réponse maximum  $\rho_{\max}$  qui se produit à une fréquence très légèrement inférieure. Dans ce cas (4-26) montre que le facteur d'amortissement peut être calculé par la formule

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{\beta=1}} \frac{w}{w_D} \quad (3.3)$$

L'erreur dans l'expression la plus simple résulte encore une fois de ce que l'on néglige la différence entre les fréquences amorties (pseudo-fréquence) et non amortie ; cette erreur est acceptable dans la plupart des cas.

Cette méthode de détermination de l'amortissement ne nécessite qu'un appareillage simple permettant de mesurer les amplitudes des déplacements relatifs ; la mesure des déplacements statiques peut néanmoins poser un problème, car la plupart des dispositifs capables de produire le chargement ne peuvent opérer à fréquence nulle.

### III.1.3. Méthode de demi-puissance (largeur de bande)

L'équation de la réponse harmonique (4.21) montre que toute la courbe de la réponse en fréquence dépend de la valeur de l'amortissement présent dans le système. Il est possible de déterminer le facteur d'amortissement à partir des caractéristiques de la courbe. L'une des méthodes les plus commodes est la méthode de la largeur de bande (ou de la demi-puissance)

Dans laquelle le facteur d'amortissements est déterminé sur la base de les fréquences pour lesquelles la réponse est réduite à  $(1/\sqrt{2}) \rho_{\beta=1}$ , c'est-à-dire des fréquences pour lesquelles la puissance d'entrée est la moitié de la puissance de sortie obtenue à la résonance.

Les valeurs des fréquences à demi-puissance peuvent s'obtenir en écrivant que l'amplitude de la réponse donné par l'équation (4.21) est égal à  $1/\sqrt{2}$  fois l'amplitude de la résonance donné par l'équation (4.42) c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_0}{2\xi} = \rho_0 \left[ \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

En élevant au carré on obtient

$$\frac{1}{8\xi^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (3.5)$$

.ce qui donne le rapport de fréquences

$$\beta^2 = 1 - 2\xi^2 \pm 2\xi\sqrt{1+\xi^2} \quad (3.6)$$

Si on néglige le terme  $\xi^2$  sous le radical, les deux fréquences en demi puissance sont

$$\beta_1^2 = 1 - 2\xi - 2\xi^2 \quad (3.7)$$

$$\beta_2^2 = 1 + 2\xi - 2\xi^2 \quad (3.8)$$

Le facteur d'amortissement est donné par la demi-différence entre ces fréquences :

$$\xi = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) \quad (3.9)$$

Cette méthode de mesure du facteur d'amortissement est illustrée sur la courbe de réponse de fréquence de la figure 4.2 on a tracé une droite horizontale d'ordre égale à  $1\sqrt{2}$  fois de la réponse en état de résonance : la différence des fréquences correspondant aux points d'intersection avec la courbe de réponse est égale a deux fois le facteur d'amortissement. On voit que cette méthode évite la mesure de la flèche statique : elle exige néanmoins un tracé précis de la courbe de réponse au voisinage de la demi-puissance et à la résonance.

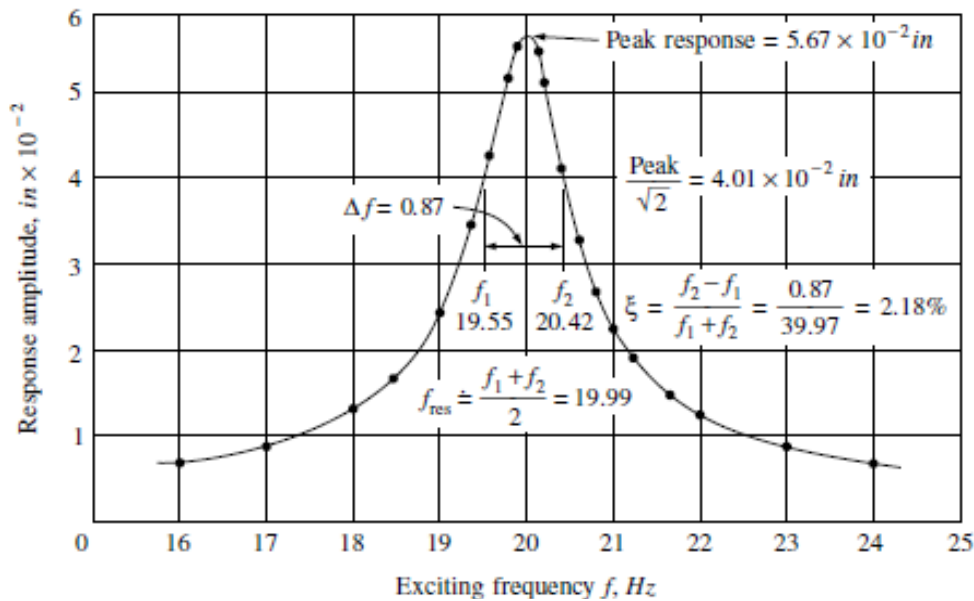


Figure III.2 Fréquence de réponse des essais pour déterminer taux d'amortissement

#### III.1. 4. Déperdition d'énergie par cycle (essai en résonance)

Supposons qu'un appareil quelconque permette la mesure du déphasage entre la force excitatrice et les déplacements résultants ; l'amortissement peut alors être mesuré par des essais effectués à la résonance seulement et il n'est pas nécessaire de tracer la courbe réponse complète. Le procédé consiste à obtenir la résonance en ajustant la fréquence d'entrée jusqu'à ce que le déphasage entre l'excitation et la réponse atteigne  $90^\circ$ . Le chargement appliqué est alors exactement équilibré par les forces d'amortissement, de sorte que si on trace la relation entre ce chargement et les déplacements qui en résultent pour un cycle entier du chargement (figure 4.15), le résultat peut s'interpréter comme le graphe de la relation entre l'amortissement et le déplacement.

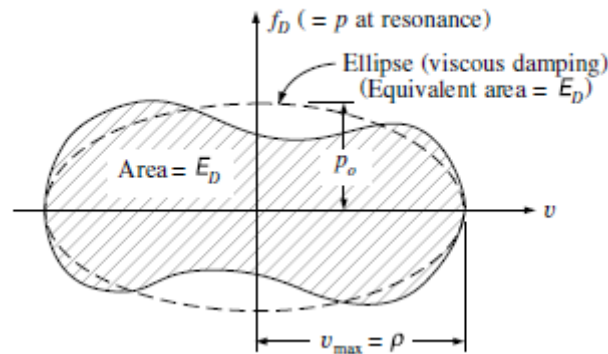


Figure III.3. Réels et une énergie équivalente d'amortissement par cycle

Si une structure possède un amortissement de type visqueux, la courbe sera une ellipse (en pointillé sur la figure III.3). Dans ce cas particulier le facteur d'amortissement peut être déterminé directement à partir du rapport entre la force d'amortissement maximum et la vitesse maximum :

$$c = \frac{f_{D,\max}}{v_{\max}} = \frac{P_0}{w\rho} \quad (3.10)$$

On remarquera que la vitesse maximum est donnée par le produit de la fréquence et l'amplitude du déplacement. Si l'amortissement n'est pas du type visqueux linéaire, la forme du graphe force-déplacement ne sera pas elliptique :

On obtiendra une courbe telle que celle tracée en traits pleins à la figure 4.15. On pourra dans ce cas définir un amortissement visqueux linéaire équivalent : provoquant la même déperdition d'énergie par cycle que celle observée graphiquement. Autrement dit, l'amortissement visqueux équivalent est celui qui correspond à un graphe force déplacements de même aire total et de forme elliptique, avec les mêmes déplacements maximum que le graphe réel. La courbe en trait pointillé de la figure 4.15 est donc en ce sens équivalente à la courbe en trait plein. L'amplitude de la force appliquée équivalente est donc

«Ou  $w_D$  représente l'aire délimitée par le graphe force-déplacement, c'est-à-dire la perte de l'énergie par cycle. La substitution de cette expression dans l'équation 4.45 conduit à une

expression de la constante d'amortissement équivalente en fonction de la perte de l'énergie par cycle :

$$c_{eq} = \frac{W_D}{\pi w \rho^2} \quad (3.11)$$

Dans la plupart des cas, la définition la plus commode de l'amortissement d'une structure s'obtiendra sur la base d'amortissement critique. Il est donc nécessaire de définir une mesure pour exprimer la constante d'amortissement critique. On peut l'exprimer en fonction de la masse et la fréquence, comme dans l'éq (3.18), ou sous une forme équivalente mettant en jeu la rigidité et la fréquence :

$$C_c = \frac{2\kappa}{\omega} \quad (3.12)$$

Cette dernière expression est plus commode car la rigidité de la structure peut être mesurée en utilisant essentiellement les mêmes dispositifs que ceux qui servent à mesurer la déperdition d'énergie par cycle : il suffit de s'approcher des conditions statiques en chargeant le système à vitesse très lente. Le diagramme force statique-déplacement obtenu de cette manière aura la forme représentée à la figure. 4.16 si la structure obéit aux lois de l'élasticité linéaire, et la rigidité sera représentée par la pente de la courbe. réciproquement, la rigidité peut s'exprimer au moyen de l'aire  $W_s$  comprise sous la courbe force-déplacement :

$$k = \frac{2W_s}{\rho^2} \quad (3.13)$$

Le facteur d'amortissement est alors obtenu en combinant les Eqs. (4.46) à (4.48) :

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{W_D}{4\pi W_s} \quad (3.14)$$

Ce facteur d'amortissement apparaît indépendant de la fréquence : il dépend directement du rapport entre la quantité d'énergie d'amortissement dissipée par cycle et l'énergie de déformation emmagasinée dans le cas du déplacement maximum. Dans le cas

d'amortissement visqueux, la perte d'énergie dans le système sera proportionnelle à la fréquence harmonique ; il en sera de même rapport d'amortissement. D'autre part, si le rapport d'amortissement a été obtenu à partir d'un essai de résonance, l'amortissement visqueux correspondant obtenu en reportant l'éq.(3.12) dans l'éq.(3.14) est inversement proportionnel à la fréquence :

$$c_{eq} = \xi \frac{W_s}{\omega \rho^2} \quad (3.15)$$

Ce qui montre une fois encore que l'amortissement visqueux est fonction de la fréquence.

### III.1. 5. Amortissement hystérésique

Bien que la représentation par amortissement visqueux conduise à une forme simple pour l'équation de mouvement des structures, les comportements réels correspondent rarement exactement à ce modèle. Dans de nombreux cas, le concept d'amortissement visqueux équivalent défini en fonction de la perte de l'énergie par cycle fournit une approximation raisonnable des résultats expérimentaux. Mais l'influence de la fréquence sur le mécanisme d'amortissement visqueux ne correspond pas aux résultats de certains essais réels, pour lesquels il semblerait que les forces d'amortissement soient complètement indépendantes de la fréquence à laquelle l'essai est effectué.

La notion de l'amortissement hystérésique fournit un modèle mathématique qui conduit à cette propriété d'indépendance par rapport à la fréquence ; la force d'amortissement qui le définit est en phase avec la vitesse, mais proportionnelle aux déplacements. Cette relation force- déplacement peut s'exprimer par :

$$f_D = \zeta k |v| \frac{\dot{v}}{v} \quad (3.16)$$

Où  $\zeta$  est le coefficient d'amortissement hystérésique qui définit les forces d'amortissement comme une fraction des forces élastiques de rigidité. Le diagramme force-déplacement dans le cas de l'amortissement hystérésique est représenté à la fig.III.4. On remarquera que la résistance due à l'amortissement a le signe des forces élastiques linéaire lorsque l'amplitude



des déplacements croit, mais qu'elle change de sens lorsque l'amplitude des déplacements décroît. La déperdition d'énergie hystérésique par cycle dans un tel mécanisme est

$$\omega_D = 2\zeta k \rho^2 \quad (3.17)$$

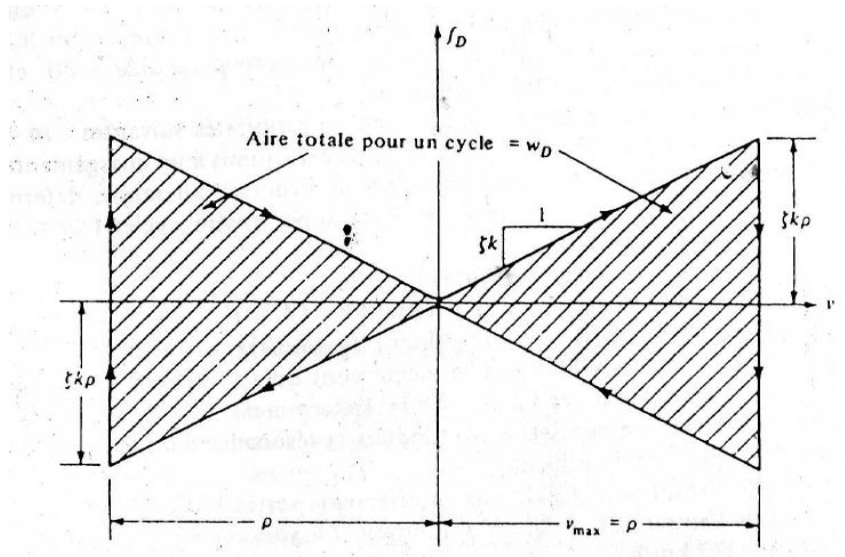


Figure III.4.

Si la perte d'énergie hystérésique est représentée par un amortisseur visqueux équivalent, le facteur d'amortissement visqueux équivalent sera donné par l'Eq.(3.17) peut être utilisée pour exprimer le facteur d'amortissement d'une structure quel que soit son mécanisme réel de déperdition d'énergie. Mais si l'on veut obtenir l'amortissement hystérésique spécifique correspondant à un essai donné, on peut toujours l'exprimer au moyen du facteur d'amortissement en reportant les Eqs.(3.17) et (3.13) dans l'Eq.(3.14) comme suit :

$$\zeta = \pi\xi \quad (3.18)$$

Il est donc clair que l'amortissement hystérésique est indépendant de la fréquence à laquelle l'essai est effectué. Ce que s'oppose à la dépendance entre fréquence et facteur d'amortissement visqueux .

### III.2. Mesures de l'amortissement des systèmes à plusieurs degrés de liberté

#### III.2.1. Mesure de l'amortissement modal

La bibliothèque Millikan, sur le campus de l'université de Caltech (Californie), fournit un exemple de mesures de l'amortissement sur une structure réelle.

Cet ouvrage a été sollicité à l'aide de vibreurs harmoniques convenablement disposés sur sa hauteur pour exciter son mode fondamental. Par ailleurs, on dispose sur le même ouvrage d'enregistrements accélérométriques recueillis lors de deux séismes l'ayant sollicité : séisme de Lytle Creek de magnitude 5.4 et d'accélération maximale au sol égale à 0.05g; séisme de San Fernando de magnitude 6.4 et d'accélération maximale au sol égale à 0.20g.

La figure III.5 présente, pour l'excitation par vibreur, la réponse en accélération au sommet de l'immeuble en fonction de la fréquence d'excitation des vibreurs. L'enregistrement fait clairement apparaître un pic marqué à la fréquence de 1.49 Hz correspondant à la fréquence du mode fondamental.

Pour le mode fondamental de vibration, la structure répond comme un oscillateur à un degré de liberté pour lequel les résultats du chapitre 3 sont applicables. Une méthode d'identification inverse permet alors de déterminer le pourcentage d'amortissement critique reproduisant au mieux la courbe de la figure III.4. La valeur obtenue est donnée dans le tableau III.1.

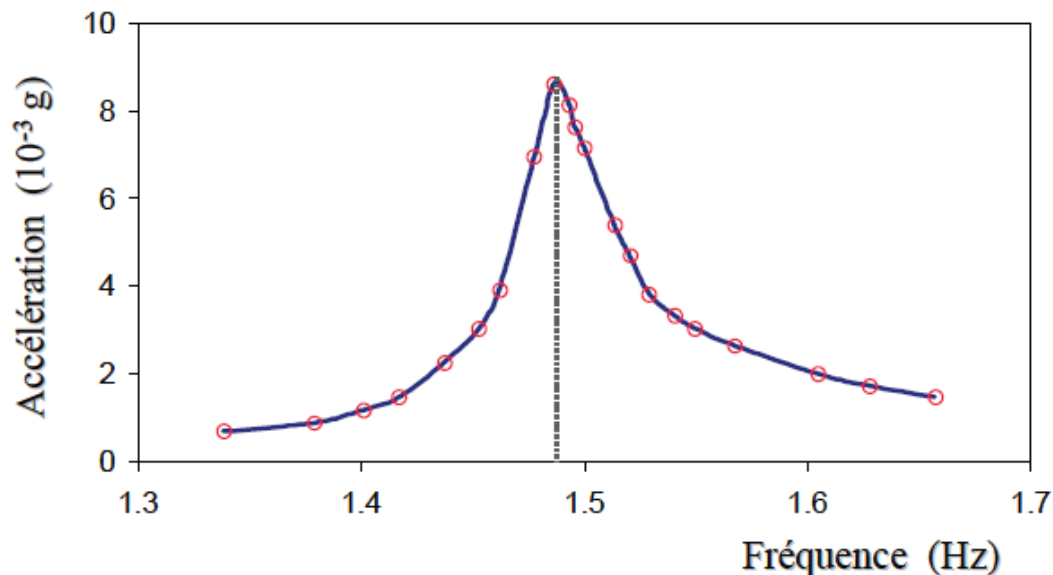


Figure III.5 : Vibrations harmoniques forcées de la bibliothèque Millikan

La figure III.6 présente pour le séisme de San Fernando les accélérations enregistrées à la base et au sommet de l'ouvrage, à partir desquelles le déplacement différentiel sur la hauteur peut être calculé (figure III.6, haut). En reproduisant des résultats analogues à

plusieurs niveaux, il est possible d'identifier les deux premiers modes de vibration de l'ouvrage et de calculer le pourcentage d'amortissement critique associé à chacun de ces modes. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau III.1.

Le tableau III.1 fait apparaître des résultats importants, qui ont une portée plus générale que ceux relatifs à cet ouvrage : la période du mode fondamental croît lorsque l'amplitude de la sollicitation augmente depuis l'excitation par vibreur jusqu'au séisme le plus fort.

Corrélativement l'amortissement du mode fondamental croît de 1% à 7%. On constate également que l'amortissement modal n'est pas constant et peut être plus élevé ou plus faible sur le deuxième mode que sur le premier.

Ces mesures confirment en particulier que l'amortissement dépend de l'amplitude de la déformation, par suite de non-linéarités plus prononcées se développant dans l'ouvrage.

### San Fernando - Composante EW

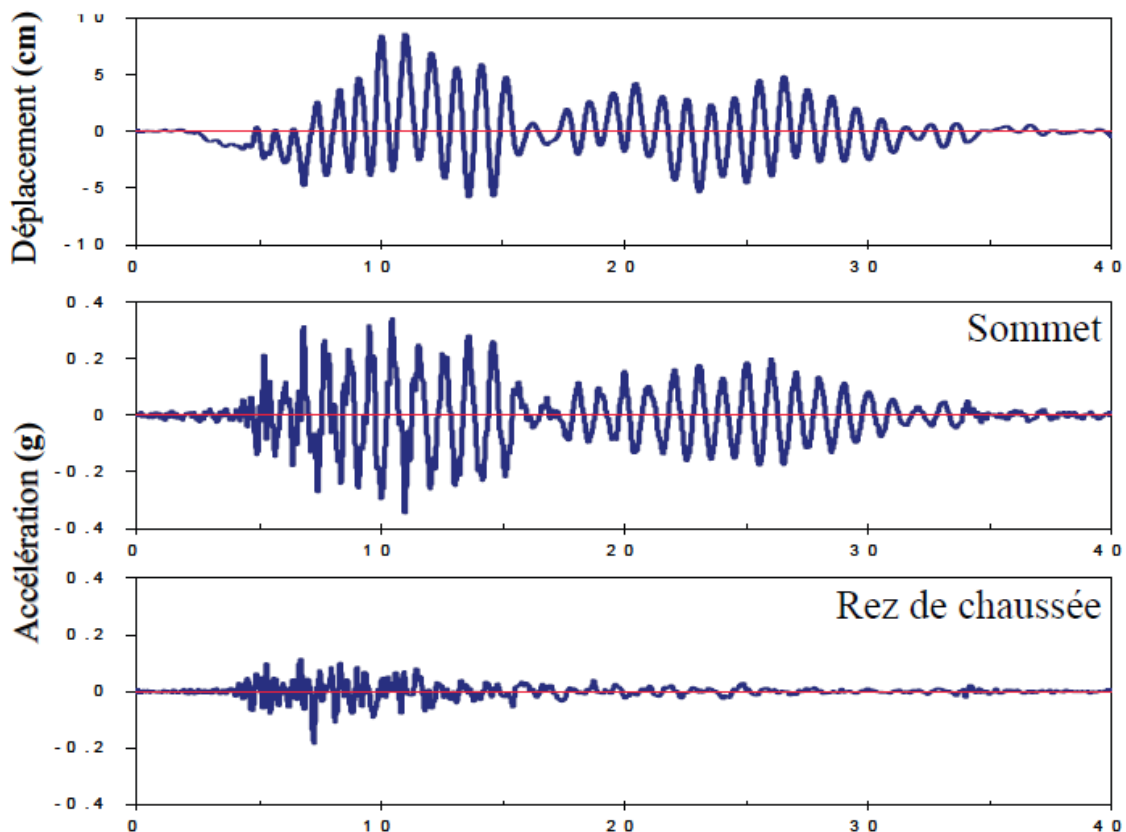


Figure III.6 : Réponse sismique de la bibliothèque Millikan

Tableau III.1 : Bibliothèque Millikan - Amortissements mesurés

Excitation	Accélération Toit (g)	Mode fondamental		Second mode	
		Période (s)	Amortissement (%)	Période (s)	Amortissement (%)
Générateur Vibrations	$3.10^{-3}$ à $17.10^{-3}$	0.66 - 0.68	0.7 - 1.5	-	-
Lytle Creek	0.035	0.71	2.2	0.18	3.6
San Fernando	0.348	0.98	7.0	0.20	5.9

### III.2. 2. VALEURS CARACTERISTIQUES D'AMORTISSEMENT

Hormis des cas exceptionnels comme celui de la bibliothèque Millikan, on ne dispose pas de mesures de l'amortissement sur l'ouvrage à l'étudier. L'analyste doit s'en remettre à son propre jugement ou à des valeurs conventionnelles publiées par voie réglementaire. Ces valeurs sont généralement rattachées à un type de matériau (béton, acier, bois...). Le tableau III.2 présente un tel ensemble de valeurs dans lequel une distinction a été introduite en fonction du niveau de sollicitation atteint dans l'ouvrage.

**Tableau III.2** Valeurs caractéristiques d'amortissement (en pourcentages)

Matériau	Déformation	< 0.5 limite élastique	Voisinage limite élastique
	Béton armé		3 - 5
Béton précontraint		2 - 3	7 - 10
Acier soudé		2 - 3	5 - 7
Acier boulonné		5 - 7	10 - 15
Bois cloué		5 - 7	15 - 20

### III.2.3. AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

Certains systèmes conduisent à des valeurs d'amortissement très contrastées entre les différentes parties de l'ouvrage. Cette situation se rencontre par exemple pour l'étude des phénomènes d'interaction sol-structure ou fluide-structure (figure 6.11). Généralement les structures présentent des pourcentages d'amortissement équivalents relativement faibles, de

l'ordre de quelques pourcents (tableau 6.2), alors que le milieu avec lequel elles interagissent peut présenter des amortissements élevés (cas du sol où la valeur peut atteindre plusieurs dizaines de pourcents) ou du fluide dans lequel il est au contraire très faible (inférieur à 1 %).

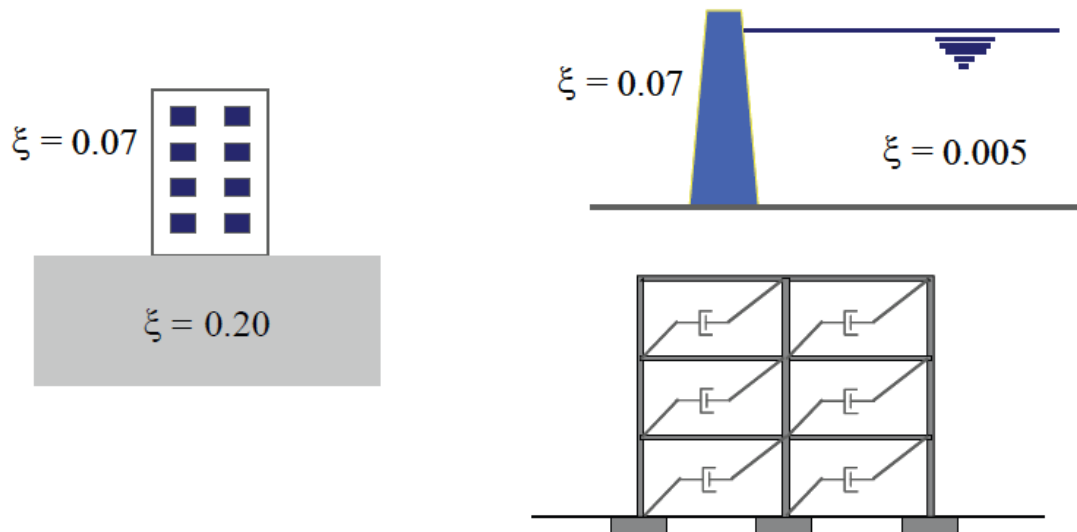


Figure III.7 : Systèmes à amortissement contrasté

Dans le même ordre d'idée, l'utilisation d'amortisseurs concentrés conduit également à des valeurs contrastées de l'amortissement entre les différentes parties du système. Cette technique est utilisée par exemple pour l'isolation vibratoire des machines vibrantes, la conception ou le renforcement de structures en zone sismique, l'idée étant d'accroître la dissipation d'énergie et donc de limiter la part de l'énergie communiquée à l'ouvrage.

Lorsqu'une structure est composée d'un assemblage de plusieurs matériaux, l'usage veut que l'amortissement modal équivalent soit calculé au prorata de l'énergie élastique de déformation emmagasinée dans chacun des matériaux. E i

$$\xi_{eq} = \frac{\sum \xi_i E_i}{\sum E_i} \quad (3.19)$$

Il peut cependant être nécessaire de construire une matrice d'amortissement lorsque le recours à des calculs par intégration temporelle s'avère indispensable pour la prise en compte de systèmes partiellement non linéaires.

Plusieurs techniques sont envisageables: définir a priori la forme de la matrice d'amortissement, construire cette matrice à partir de la donnée de l'amortissement modal ou, lorsque cela est possible, construire la matrice d'amortissement à partir des données géométriques et mécaniques du système (amortisseurs localisés). Les deux premières

approches conduisent à un amortissement qualifié d'orthogonal car la diagonalisation de la matrice d'amortissement sur la base des modes propres est préservée. La dernière approche conduit généralement à un amortissement non classique qui nécessite le recours à des techniques de résolution spécifiques pour la résolution sur la base des modes.

### III.3. Construction de la matrice d'amortissement

#### III.3.1. Amortissement de rayleigh

On se donne a priori la structure de la matrice d'amortissement sous la forme d'une combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de raideur.

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad (3.20)$$

Il est évident que dans ce cas la propriété d'orthogonalité de la matrice d'amortissement par rapport aux modes propres est préservée. En reportant l'équation (6.69) dans l'équation générale (6.5) et en faisant usage de cette propriété, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m_j \ddot{y}_j(t) + (\alpha m_j + \beta k_j) \dot{y}_j(t) + k_j y_j(t) = p_j(t) \quad (3.21)$$

D'où il ressort que le pourcentage d'amortissement critique équivalent s'exprime par :

$$\xi_j = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha}{\omega_j} + \beta \omega_j \right] \quad (3.22)$$

L'amortissement donné par l'équation (6.71) se compose de deux termes, l'un proportionnel à la pulsation et l'autre inversement proportionnel à celle-ci. Comme en général, ainsi qu'on l'a noté au chapitre 2, il est souhaitable de représenter la dissipation d'énergie dans le système par un amortissement indépendant de la fréquence, un choix approprié des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  permet de satisfaire, de façon approximative, cette condition. La détermination de  $\alpha$  et  $\beta$  est illustrée sur la figure 6.12 pour le portique de la figure 6.5 : en se fixant deux valeurs de pulsations,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , pour lesquelles l'amortissement donné par l'équation (6.71) prend la valeur recherchée, il s'ensuit qu'entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  l'amortissement est sensiblement égal, quoique légèrement inférieur, à la valeur cherchée. La première pulsation  $\omega_1$  est prise égale à celle du mode fondamental du système et la seconde  $\omega_2$  à la plus grande pulsation d'intérêt pour l'analyse (dans le cas d'application de la figure 6.12,  $\omega_2$  a été choisie égale à la deuxième pulsation propre du portique).

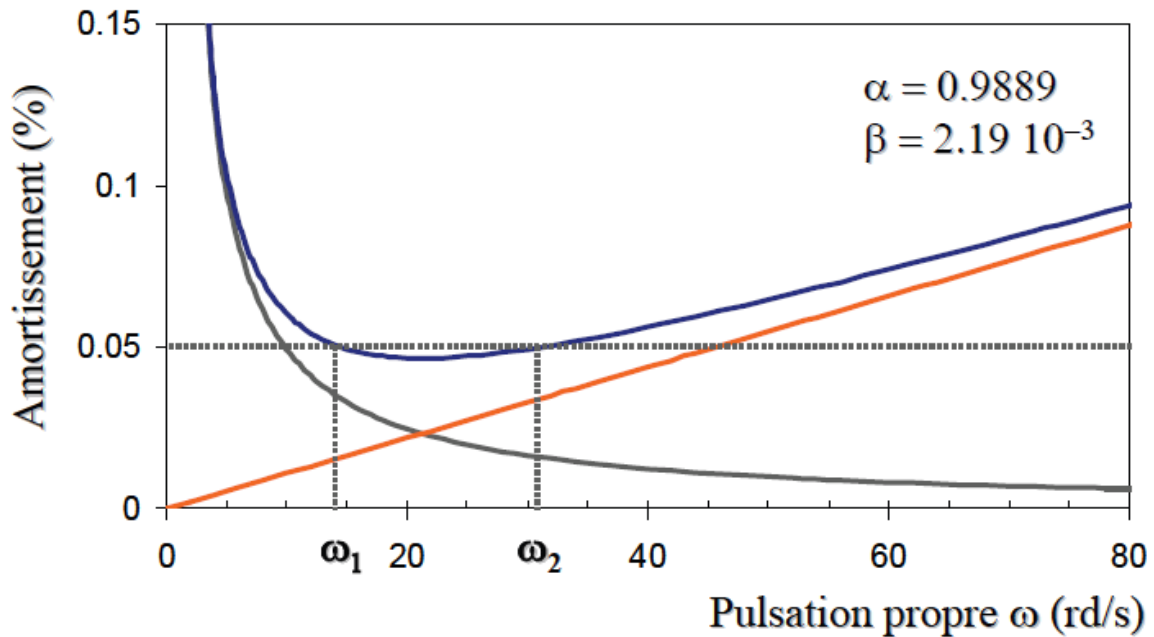


Figure III.8 : Amortissement de Rayleigh

Cette modélisation de l'amortissement est classiquement utilisée pour la réalisation de calculs temporels sur des systèmes comportant une partie pseudo-élastique, pour laquelle il est nécessaire de spécifier un amortissement équivalent, et une partie non linéaire dans laquelle la dissipation d'énergie est directement prise en compte par la loi de comportement du matériau. On notera que seule la combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de raideur permet de donner naissance à un amortissement sensiblement indépendant de la fréquence. L'utilisation d'un seul de ces termes donnerait naissance à un amortissement dépendant de la fréquence dont la réalité physique est généralement prise en défaut.

### III.3.2 amortissement de caughey

Il s'agit d'une généralisation de l'amortissement de Rayleigh dans laquelle la matrice d'amortissement s'exprime comme une combinaison linéaire de  $p$  termes constitués du produit de la matrice de masse et de la matrice de raideur.

$$\underline{C} = \underline{M} \sum_{b=0}^p \alpha_b [\underline{M}^{-1} \underline{K}]^b \quad (3.23)$$

En procédant comme pour l'amortissement de Rayleigh, on montre que le pourcentage d'amortissement critique du mode  $j$  s'exprime par :

$$\xi_j = \frac{1}{2} \sum_{b=0}^p a_b \omega_j^{2b-1} \quad (3.24)$$

Ainsi en choisissant  $p=N-1$ , où  $N$  est le nombre de modes, il est théoriquement possible de respecter la valeur de l'amortissement modal pour chacun des modes du système. Dans la pratique en retenant un nombre de termes nettement inférieur,  $p \leq N-1$ , on obtient une approximation suffisante. La figure III.8 illustre l'application de la formulation (3.23) au cas du portique de la figure II.18, avec dans ce cas  $p=N-1$ .

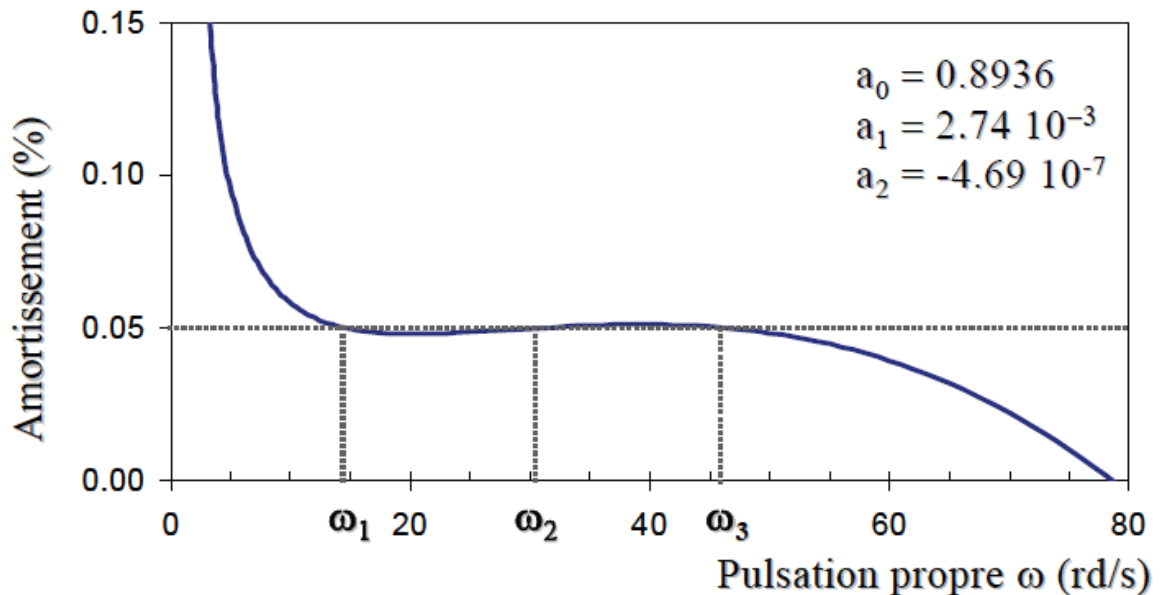


Figure III.9 : Amortissement de Caughey



# **CHAPITRE IV**

## **MODELE LINEAIRE STATISTIQUE**

## IV.1 Introduction

Très souvent dans un système à plusieurs degrés de liberté, l'amortissement est le moins connue des paramètres. Les équations du mouvement sont généralement formulées sur l'hypothèse d'amortissement visqueux, ce qui suppose des forces dissipatives d'être proportionnelles aux vitesses des différents points du système.

La difficulté d'une prévision précise de l'amortissement des coefficients souligne l'incertitude liée à représenter la réponse du système. Pour les fréquences excitantes proches de la fréquence de résonance, la sensibilité de la réponse à l'amortissement devient critique. Les erreurs dans l'estimation de la matrice d'amortissement se traduisent généralement par une grosse erreur dans la réponse.

Lorsque le système à l'étude a de nombreux degrés de liberté, l'influence de l'amortissement devient plus compliquée. Les corrélations statistiques de mouvement sont souvent des complications inévitables.

## IV.2. Notion du Jacobien

### IV.2. 1. Approximations locales par des polynômes

#### *Approximation linéaire*

$$f_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (4.1)$$

Est appelée approximation linéaire ou approximation d'ordre 1 de  $f$  dans un voisinage du point  $a$ .

$f_1$  est le (seul) polynôme de degré 1 ayant en  $a$  :

- la même valeur que  $f$ ,
- la même dérivée que  $f$ .

$y = f_1(x)$  est la tangente à la courbe  $y = f(x)$  en  $a$ , plus précisément au coordonnées  $(a, f(a))$

#### *Approximation d'ordre 2*

$$f_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \quad (4.2)$$

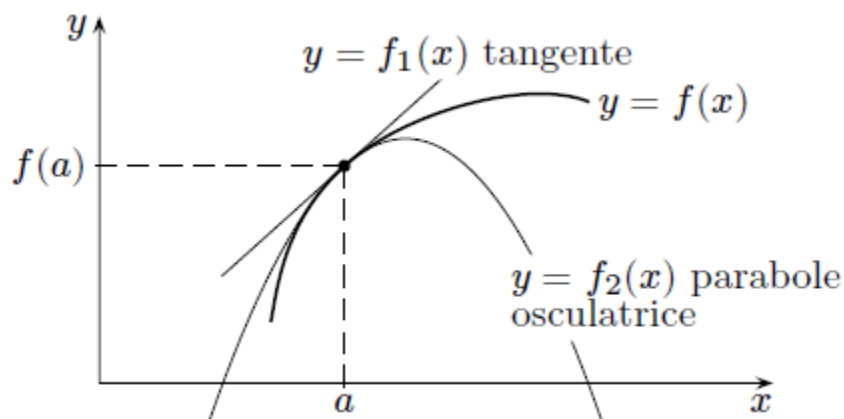
Est appelée approximation d'ordre 2 de la fonction  $f$ .

$f_2$  est le (seul) polynôme de degré 2 ayant en  $a$  :

- La même valeur que  $f$ ,
- La même dérivée que  $f$ ,
- La même dérivée seconde que  $f$ .

$y = f_2(x)$  est la parabole osculatrice de  $y = f(x)$  au point de coordonnées  $(a, f(a))$  :

- elle passe par le point  $(a, f(a))$  du graphe de  $y = f(x)$ ,
- elle a la même tangente que  $y = f(x)$  en ce point de contact,
- elle a la même courbure que  $y = f(x)$  en ce point.



**Figure IV.1. Interprétation géométrique des approximations d'ordre 1 et 2**

#### *Approximation d'ordre n*

$$f_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (4.3)$$

Est appelée approximation (locale) d'ordre  $n$  de la fonction  $f$  (dans un voisinage du point  $a$ ).

$f_n(x)$  est le polynôme de degré  $n$  ayant en  $a$  :

- La même valeur que  $f$ ,
- La même dérivée que  $f$ ,
- 
- 
- La même dérivée  $n^{\text{ième}}$  que  $f$ .

#### **IV.2.2. Dérivation d'une fonction de plusieurs variables**

Soit  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et  $a \in \mathbb{R}^n$ .

Définition Soit  $d$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle dérivée directionnelle de  $f$  au point  $a$  dans la direction  $d$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial d}(a)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial d}(a) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(a + \alpha d) - f(a)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + \alpha d_1, \dots, a_n + \alpha d_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{\alpha}$$

si elle existe La dérivée directionnelle  $\frac{\partial f}{\partial d}$  est donc une fonction de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$ .

On appelle dérivée partielle de  $f$  par rapport à la  $i$ -ème variable  $x_i$  la dérivée directionnelle de  $f$  dans la direction  $e_i$ . Elle est notée  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

En pratique on calcule  $\partial f / \partial x_i$  comme une dérivée classique, en supposant  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  constants et en dérivant par rapport à  $x_i$ .

Définition : Soit  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^p$ :  $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ .

$f$  est différentiable en  $a \in \mathbb{R}^n$  si et seulement si  $f_i$  est différentiable en  $a \forall i = 1, \dots, p$ .

De plus :  $Df[a](h) = (Df_1[a](h), \dots, Df_p[a](h))$ , soit en abrégé  $Df[a] = (Df_1[a], \dots, Df_p[a])$ .

Puisque  $Df_i[a](h) = \nabla f_i \cdot h$ , on a, avec des notations en vecteurs colonnes :

$$\begin{pmatrix} Df_1[a](h) \\ \vdots \\ Df_p[a](h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}[a] & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}[a] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}[a] & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}[a] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

soit  $Df[a](h) = J_f(a) \cdot h$  ou  $J_f(a)$  est appelée matrice jacobéenne de  $f$  au point  $a$ .

### IV.3. Développement de la théorie

Pour un système à plusieurs degrés de libertés avec un amortissement visqueux les équations de mouvement s'écrivent sous forme matricielle comme suite :

$$[M] \left\{ \ddot{x} \right\} + [C] \left\{ \dot{x} \right\} + [K] \left\{ x \right\} = \left\{ f \right\} \quad (4.6)$$

Où  $\left\{ f \right\}$  est une fonction harmonique de temps, avec une fréquence  $\Omega$

Un système physique décrit par l'Eq.(4.6) est représenté sur la figure.

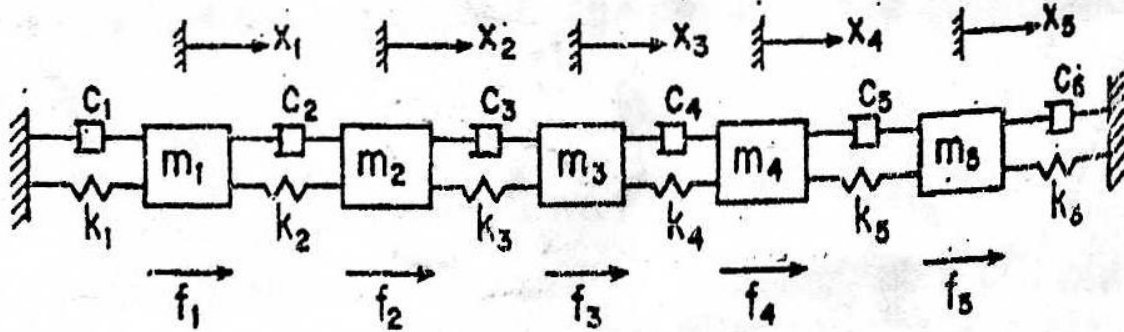


Figure .IV .2 système à plusieurs degrés de liberté

Dans ce système, [M] et [K] sont des constantes: la matrice d'amortissement [C] dépend linéairement de l'un des coefficients d'amortissement  $c_i$  selon la définition de son élément

$$C_{ij} = \begin{cases} c_i + c_{i+1} & \text{si } i-j=0 \\ -c_i & \text{si } i-j=1 \\ -c_j & \text{si } j-i=1 \\ 0 & \text{si } |i-j|>1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Les coefficients d'amortissement  $c_i$  sont assurés d'être normalement distribués avec une valeur moyenne  $\bar{c}_i$  et un écart type  $\sigma_{c_i}$ . Le nombre total d'amortisseurs, dans le cas général, est  $p \leq n+1$  pour la suite des discussions,

Pour un système amorti, les composantes du vecteur de réponse  $x$  est en général une quantité complexe, dont les parties réelle et imaginaire définissent un angle de phase entre l'excitation et la réponse. A une fréquence fixe, la réponse  $x$  peut être considérée comme une fonction de  $C$  seulement. Notons par  $x^0$  la valeur de  $x$  lorsque  $c$  prend sa valeur moyenne  $\bar{c}$ . Puis le vecteur  $x$  peut être développé en une série de Taylor au tour de  $c = \bar{c}$  comme suit:

$$\{\Delta x\} = \partial\{x\}/\partial c_1 \Delta c_1 + \partial\{x\}/\partial c_2 \Delta c_2 + \dots + \partial\{x\}/\partial c_p \Delta c_p \quad (4.8)$$

Lorsque les termes d'ordre supérieur ont été négligés

Présentation des fonctions de sensibilité

$$\xi_{ij} = (\partial x_i / \partial c_j)_{c_k = \bar{c}_k} \quad (k=1, \dots, p) \quad (4.9)$$

L'écriture matricielle de l'équation (2) est :

$$\{\Delta x\} = [\xi_{ij}] \{\Delta c\} \quad (i=1, \dots, n ; j=1, \dots, p) \quad (4.10)$$

En notant  $\{\xi\}_i^T$  la i éme ligne et  $\{\xi\}_j$  la j éme colonne de la matrice Jacobien  $[\xi_{ij}]$ , nous pouvons écrire la i éme composante de EQ4 comme suit:

$$(x_i - x_i^0) = \{\xi\}_i^T \{c_j - \bar{c}_j\} \quad (4.11)$$

Où  $\{c_j - \bar{c}_j\}$  est un vecteur de variable réelle,  $(x_i - x_i^0)$  est une variable scalaire complexe et  $\{\xi\}_i^T$  un vecteur ligne de composante complexes.

En notant d'un astérisque leurs complexes conjugués, nous avons

$$(x_i - x_i^0)^* = \{\xi^*\}_i^T \{c_j - \bar{c}_j\} = \{c_j - \bar{c}_j\}^T \{\xi^*\}_i \quad (4.12)$$

Ensuite, nous formons le produit

$$(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)^* = |x_i - x_i^0|^2 \{\xi^*\}_i^T \quad (4.13)$$

Où le symbole  $||$  désigne la valeur absolue du nombre complexe. De l'équation (5-7) nous obtenons

$$|x_i - x_i^0|^2 = \{\xi\}_i^T \{c_j - \bar{c}_j\} \{c_j - \bar{c}_j\}^T \{\xi^*\}_i \quad (4.14)$$

Le produit  $\{c_j - \bar{c}_j\}\{c_j - \bar{c}_j\}^T$  générera p par p matrice symétrique qui est statistiquement constante puisque, selon l'équation 3, ils sont évalués à  $\{c\} = \{\bar{c}\}$ . Si nous prenons la valeur attendue de  $E(c) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i$  de l'équation 8, nous obtenons

$$\sigma_{|x_i|}^2 = \{\xi\}_i^T [COV] \{\xi^*\}_i \quad (4.15)$$

Où  $\sigma_{|x_i|}^2$  désigne la variance de la valeur absolue du nombre complexe  $x_i$ , et [Cov] est la matrice de covariance des coefficients d'amortissement  $c_i$ . Ses éléments sont définis par

$$cov_{ij} = \rho_{ij} \sigma_{c_i} \sigma_{c_j} \quad (4.16)$$

$$\text{Ou } \rho_{ij} = 1 \text{ si } i=j$$

Les éléments de la diagonale principale sont les variances et sont connus de la loi de distribution assumée. Les éléments hors diagonale contiennent la corrélation  $\rho_{ij}$  entre les divers coefficients d'amortissement.

Diverses hypothèses peuvent être faites concernant la corrélation entre les coefficients d'amortissement. La plus simple est de traiter les coefficients d'amortissement comme variables aléatoires non corrélées en définissant les éléments de la diagonale de la matrice de covariance égale à zéro.

D'autres auteurs ont supposé que les coefficients de corrélation  $\rho_{ij}$  obéissent à une loi en décomposition qui est fonction de la différence absolue  $i-j$ . En d'autres termes, cela revient à supposer que dans une chaîne des oscillateurs harmoniques amortis, la corrélation entre toute paire d'amortisseurs est une fonction décroissante par rapport à leur distance.

La première hypothèse trouve sa limite dans sa simplicité même. L'incertitude physique des coefficients d'amortissement ne semble pas justifier l'hypothèse mathématique rigide que la corrélation est zéro.

Ce dernier, d'autres part, même si qualitativement probable, devient tout à fait arbitraire d'un point de vue quantitatif.

Nous avons préféré donner à ce problème qui est de nature aléatoire, une solution aléatoire. Une fois les variances des coefficients d'amortissement sont prescrits, une simulation Monti Carlo de l'amortissement des coefficients génère une distribution gaussienne et d'une matrice de covariance dont les éléments diagonaux converge vers les valeurs prescrites. Les termes hors diagonale de la matrice ainsi générées sont censés présenter la corrélation dans le système. Il faut remarquer que cette façon de procéder n'impose aucune contrainte a priori sur hors éléments diagonaux de la matrice de covariance, leur valeur se révéler être une caractéristique du processus aléatoire utilisé pour simuler les coefficients d'amortissement.

Les fonctions de sensibilité  $\xi_{ij}$  sont disponibles en différenciant l'équation 1 par rapport à  $c_j$  comme suit:

$$[M]\left\{\partial \ddot{x} / \partial c_j\right\} + [C]\left\{\partial \dot{x} / \partial c_j\right\} + [K]\left\{\partial x / \partial c_j\right\} = -(\partial [C] / \partial c_j)\left\{\dot{x}\right\} \quad (4.17)$$

Le côté gauche de cette équation est identique à celle de l'équation 1, et le côté droit peut s'interpréter comme un vecteur fictif de force. Nous avons supposé que le mouvement est harmonique, le côté droit peut être remplacé par

$$-i\Omega(\partial [C] / \partial c_j)\left\{x^0\right\} \quad (4.18)$$

Lorsque le vecteur  $\left\{x^0\right\}$  a été calculé en résolvant l'équation 1 avec amortissement nominale  $c_j = \bar{c}_j$ . Ainsi pour obtenir les vecteurs  $\left\{\xi_j\right\}$  ( $j=1, \dots, P$ ) l'équation doivent être résolus d'abord avec le vecteur force  $\left\{f\right\}$  après l'équation 1 est résolu p fois. Dans le domaine fréquentiel, la solution à l'équation 1 ou 11 se réduit essentiellement à inverser la matrice complexe d'impédance

$$Z = [K] - [M]\Omega^2 + i\Omega[C] \quad (4.19)$$

Ainsi, les calculs en globale consiste essentiellement, une simulation par ordinateur pour l'évaluation de [Cov] et une inversion de (1+P) fois la matrice Z

La sortie d'un générateur de nombres aléatoires est alimentée à former le filtre.

Le résultat est un ordre des nombres normalement distribués avec la moyenne et la variance connus. Un ensemble de n tels nombres est au commencement produit et assigné à n coefficients d'atténuation.



On assume que tous les coefficients de atténuation ont la même moyenne et la même variance. Ce procédé est répété un certain nombre de fois. À chaque itération les appels de programme une sousroutines qui calcule la matrice de covariance. Le traitement itératif est continué jusqu'à ce que les éléments de la diagonale principale de la matrice de covariance convergent aux variances comme prescrites en formant le filtre. Ensuite le système dynamique est résolu pour les fonctions de sensibilité et les variances sont évaluées avec l'équation 9

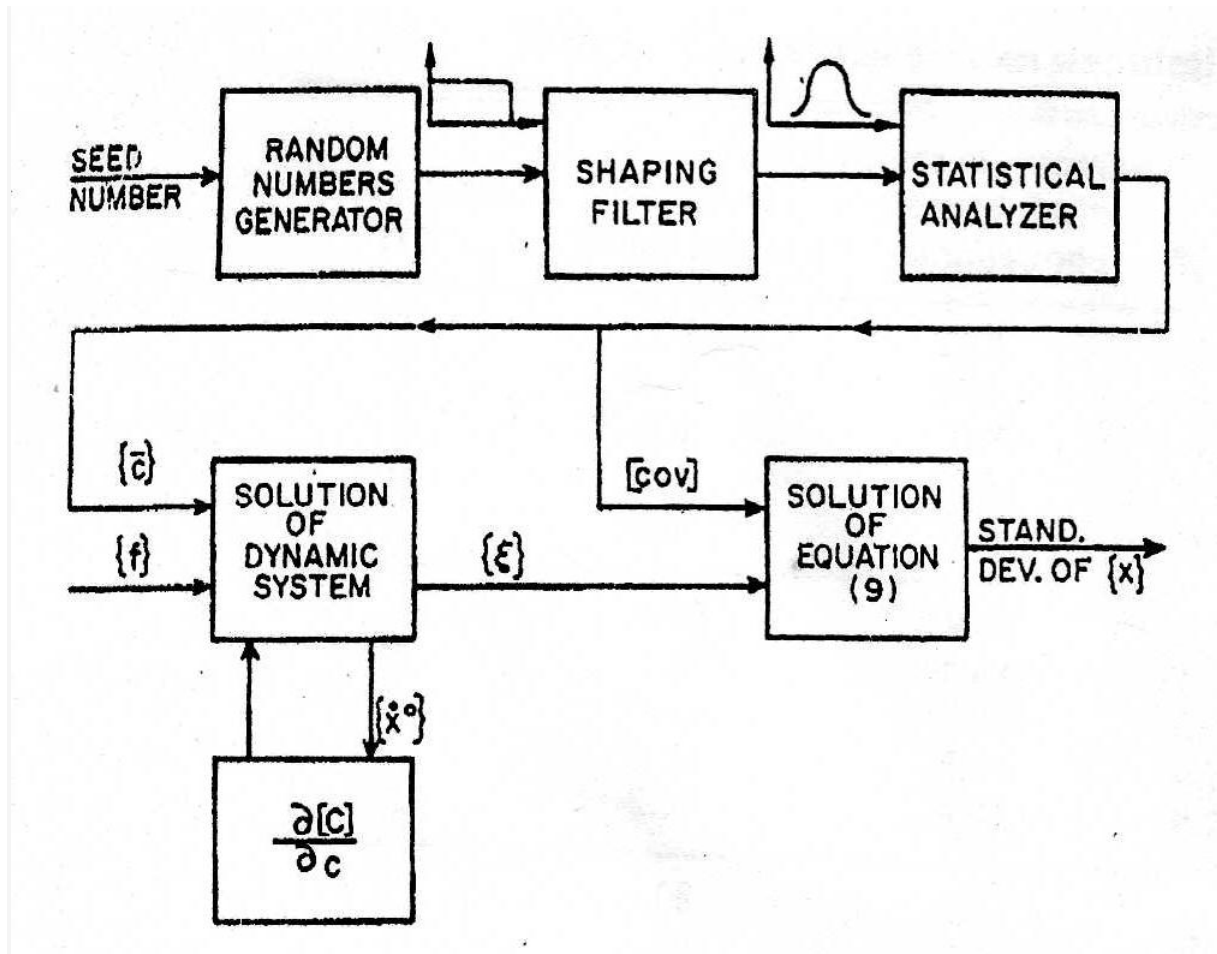


Figure.IV.3.Schéma fonctionnel pour le modèle linéaire statistique.

### IV.4. Vérification du model linéaire statistique

Une vérification indépendante de la méthode a été jugé utile de l'ordre d'évaluer les limites de l'approximation de la procédure de linéarisation. Dans un premier temps le modèle linéaire est utilisé pour déterminer des moyennes et les variances de la réponse. Les résultats sont ensuite vérifiés par une simulation Monte-Carlo.

# **CHAPITRE V**

## **METHODES MONTE CARLO**

## V.1. Aperçu historique des méthodes Monte Carlo :

Les techniques de Monte Carlo ont été utilisées depuis plusieurs siècles, même si ce n'est qu'après la seconde guerre mondiale qu'elles ont acquis un véritable statut de méthode. Ainsi on en retrouve des traces aussi lointaines qu'à l'époque de Babylone et de l'Ancien Testament.

Plus récemment, en 1777, on les retrouve dans l'une des premières applications célèbres, celles du problème de l'aiguille de Buffon, pour donner une valeur approchée de  $\pi$  : on jette plusieurs fois une aiguille de longueur  $l$  sur un sol formé de lattes parallèles qui créent des bandes de largeur  $d$  avec  $l \leq d$ . Si  $p$  désigne la proportion d'essais ayant touché l'une des droites formant les séparations entre les lattes, alors le nombre  $\pi$  peut être estimé par  $2lp/d$ . Cet algorithme convergeait nettement plus lentement que d'autres existants à l'époque.

Au début du vingtième siècle, les méthodes de Monte Carlo furent utilisées pour étudier l'équation de Boltzmann. On en retrouve également des traces dans les cours de l'école anglaise de statistiques, bien que leur utilisation dans ce cadre était uniquement didactique. En 1908, Student (W.S. Gosset) utilise un échantillonnage expérimental pour estimer un coefficient de corrélation. Dès lors, la fréquence d'utilisation de ces méthodes s'est amplifiée (Courant, Friedrichs et Lewy en 1928, Kolmogorov en 1931 et Polya en 1938). L'utilisation systématique, Ulam, Metropolis et Neumann notamment, est intervenue à Los Alamos, pendant la préparation de la première bombe atomique, ou ont collaboré de nombreux mathématiciens et physiciens de renom.

L'appellation « Monte Carlo » est due à Metropolis, inspiré de l'itérateur de Ulam pour le poker, car Monte Carlo est un grand centre de casinos, et pour origine les liens avec les jeux de hasard.

Le travail à Los Alamos consistait à simuler directement les problèmes de dispersion et d'absorption de neutrons pour les matériaux fissibles. Dès les premières applications, des méthodes de réduction de la variance ont été utilisées.

Les recherches étant bien évidemment secrètes à Los Alamos, les premières publications sur le domaine ne sont intervenues qu'à partir de 1949. Ensuite, le développement de ces méthodes a accompagné les développements de l'informatique. En 1945 déjà, J. Von Neumann conjecturait le grand potentiel des ordinateurs pour la simulation stochastique : « L'ordinateur offrira certainement une nouvelle approche à la statistique mathématique : l'approche par expérience »

S'est alors aussi posé le problème de génération de nombres aléatoires sur ordinateur. A partir des années 1950, les techniques de Monte Carlo ont été utilisées fréquemment et dans de nombreux domaines, et cette évolutions a continué depuis. Aujourd'hui, elle occupent une place majeure dans la panoplie des outils disponibles pour calculer.[RUBINO et AL 2007]

## **V.2. Quelles difficultés rencontrerons-nous ?**

### **V.2.1. Temps machine et mémoire limités :**

En raison des limites sur la vitesse d'ordinateur il y a quelques problèmes qui sont en soi non adapté à la simulation sur ordinateur. Une simulation a besoin de temps processeur de quelque machine soit disponible est simplement impraticable. De même un calcul qui exige la mémoire qui dépasse de loin ce qui est disponible peut être effectué seulement en utilisant les techniques de programmation très sophistiquées qui ralentissent des vitesses courantes et considérablement augmenter la probabilité des erreurs. Il est donc important que l'utilisateur considèrent d'abord les conditions de la mémoire et du temps processeur avant l'embarquement sur un projet pour s'assurer s'il y a une possibilité réaliste d'obtenir les ressources pour simuler un problème correctement. Naturellement, avec les avances rapides fait par l'industrie d'ordinateurs, il peut être nécessaire d'attendre seulement quelques années des installations informatiques pour rattraper aux besoins.

Parfois la traçabilité d'un problème peut exiger l'invention d'un nouveau algorithme de simulation, plus efficace. Naturellement, développer des nouvelles stratégies pour surmonter de telles difficultés constitue une zone passionnante de recherche par lui-même.

### **V.2.1. Erreurs statistiques et autres :**

Supposant que le projet peut être fait, ils restent des sources possibles d'erreur qui doivent être considérées. Ces difficultés surgiront dans beaucoup de différentes situations avec différents algorithmes ainsi nous souhaitons les mentionner brièvement à ce moment sans référence à n'importe quel élan particulier de simulation. Tous les ordinateurs fonctionnent avec la longueur de mot limitée et par conséquent la précision limitée pour des valeurs numériques de variable. La troncation et les erreurs approximatives peuvent dans certains cas mener aux problèmes graves. En outre il y a des erreurs statistiques qui surgissent comme dispositif inhérent de l'algorithme de simulation dû au nombre fini de membres dans

l'échantillon statistique produit. Ces erreurs doivent être estimées et est-ce qu'alors décision d'une politique doit être prise, c.-à-d. plus de temps processeur est employé pour réduire les erreurs statistiques ou devrait le temps processeur disponible être utilisée pour étudier les propriétés du système dans d'autres conditions. Pour finir il peut y avoir des erreurs systématiques. En ce texte nous ne nous concernerons pas par dépister des erreurs dans la programmation par ordinateur - bien que le praticien doit faire un effort spécial d'éliminer des telles erreurs ! - mais avec des problèmes plus fondamentaux. Un algorithme peut pour traiter un détail correctement, par exemple en raison du nombre fini de particules qui sont simulées, etc.

### **V.3. Concept fondamental**

Supposer que nous avons l'information de l'essai  $N$ , et supposer que nous mettons tous les résultats de test de  $N$  dans un sac suivant les indications de la figure V.1. Supposer maintenant que nous avons besoin d'un échantillon de résultats de test  $n$ . Au lieu de faire les essais supplémentaires de  $n$ , nous pourrions aléatoirement choisir  $n$  des résultats de test de  $N$  à partir du sac. Sur le figure 5.1, cette technique d'échantillonnage désigné sous le nom de la technique spéciale.

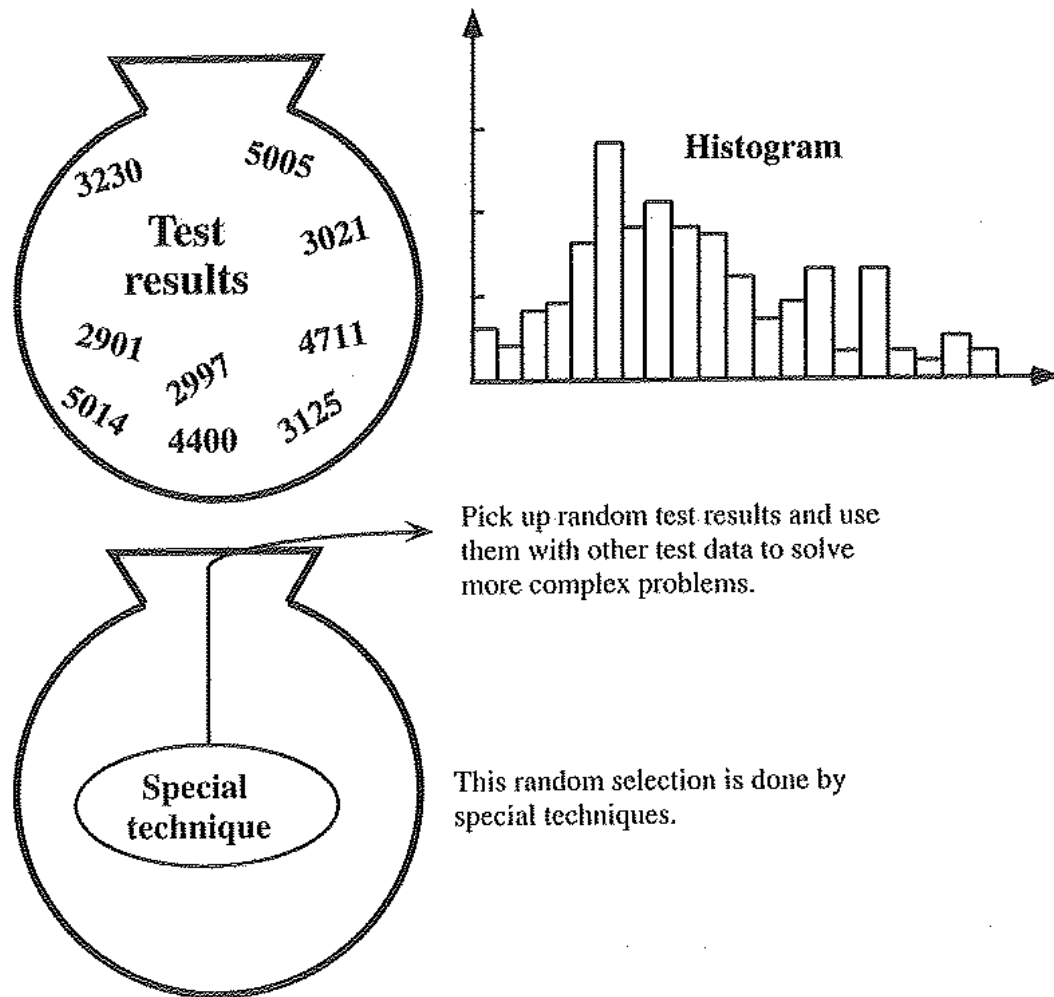


Figure V.1. Schéma de la méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est une technique spéciale que nous pouvons employer pour produire des résultats numériquement sans faire réellement aucun test physique. Nous pouvons employer des résultats d'essai précédent (ou de toute autre information) pour établir l'information de distribution de probabilité pour produire des échantillons de données numériques.

La méthode de Monte Carlo est souvent appliquée dans trois situations :

1. elle est employée pour résoudre les problèmes complexes. Par exemple, des problèmes probabilistes concernant les modèles d'élément fini non linéaires compliqués peuvent être résolus par la simulation de Monte Carlo à condition que la

puissance de calcul nécessaire soit disponible et l'information requière d'entrée est savent.

2. qu'elle résolvait les problèmes complexes dont peut être résolu (au moins approximativement) si beaucoup de suppositions de simplification sont faites. En utilisant la simulation de Monte Carlo, le problème initial peut être étudié sans ces suppositions, et des résultats plus réalistes peuvent être obtenus
3. il est employé pour contrôler les résultats d'autres techniques de solution

#### **V.4. Génération des nombres aléatoires uniformément distribués :**

La base de toutes les procédures de simulation de Monte Carlo est la génération des nombres aléatoires qui sont uniformément distribution entre 0 et 1.

Les Tableaux des nombres aléatoirement produits sont variables de même que les sous-broutines d'ordinateur, et beaucoup de programmes mathématiques populaires ont de telles sous-broutines établies dans le tableau 5.1 est un exemple d'une table des variables aléatoires uniformes qui a été produite par un tableau électronique standard.

Une fois que nous avons une certaine réalisation  $u$  d' $U$  à nombre aléatoire uniformément distribué entre 0 et 1, nous pouvons produire des réalisations  $x$  de  $X$  à nombre aléatoire uniformément distribué entre deux valeurs quelconques  $a$  et  $b$  ( $a < x < b$ ) donné par la formule suivante :

$$x = a + (b-a)u \quad (5.1)$$

Nous pouvons également produire des valeurs simples  $i$  pour un nombre entier aléatoire uniformément distribué  $I$  entre deux valeurs entières  $a$  et  $b$  (valeurs  $y$  compris  $a$  et  $b$ ) en utilisant la formule suivante :

$$i = a + \text{TRUNC} [(b-a+1)u] \quad (5.2)$$

TRUNC est une fonction qui tronque son argument (enlève les retours fractionnaires de partie la pièce de nombre entier du vrai nombre)

**Tableau V.1.** Valeurs simulées de la variable aléatoire uniformément distribuée (valeurs entre 0 et 1)

0.050203	0.269082	0.442000	0.390912	0.084078	0.597430	0.249519	0.892361
0.619129	0.472640	0.833705	0.876064	0.821741	0.149907	0.653035	0.908841
0.872402	0.422864	0.412275	0.462844	0.444990	0.774895	0.345225	0.834681
0.376568	0.467299	0.145451	0.926969	0.337626	0.648000	0.323649	0.656117
0.139927	0.415784	0.849178	0.307840	0.059633	0.498886	0.433912	0.320231
0.318491	0.523667	0.598193	0.005036	0.132786	0.892575	0.835353	0.666829
0.987671	0.243629	0.561388	0.414869	0.378796	0.301706	0.328349	0.937925
0.033265	0.741569	0.169408	0.118229	0.195227	0.515915	0.575213	0.709037
0.234626	0.408673	0.967040	0.398450	0.730552	0.411115	0.703421	0.591021
0.623157	0.021790	0.864834	0.319895	0.726890	0.023835	0.073214	0.012818
0.957884	0.547472	0.332286	0.970153	0.762535	0.055788	0.118198	0.082675
0.518906	0.749779	0.849239	0.173711	0.586932	0.554094	0.767510	0.751549
0.442305	0.681600	0.834803	0.406201	0.803613	0.162908	0.224067	0.956908
0.445845	0.140538	0.885769	0.760491	0.132450	0.866573	0.869015	0.663656
0.834284	0.888607	0.359783	0.297708	0.564196	0.141392	0.706259	0.199316
0.811213	0.105136	0.607227	0.119755	0.449202	0.731407	0.930631	0.250893
0.935728	0.067202	0.705435	0.150792	0.448347	0.502579	0.392346	0.740989
0.450423	0.864772	0.841975	0.671010	0.403912	0.711509	0.072970	0.974548
0.579058	0.363628	0.781091	0.455458	0.431471	0.579272	0.923032	0.748009
0.662648	0.863948	0.491226	0.011902	0.905759	0.806421	0.929014	0.749077
0.039918	0.858242	0.557054	0.278726	0.593005	0.191778	0.047029	0.050478
0.414075	0.432234	0.934263	0.173040	0.358684	0.660817	0.372265	0.925138
0.103214	0.412091	0.087985	0.395398	0.606067	0.401349	0.596393	0.385754
0.112308	0.749199	0.242988	0.543260	0.649922	0.168065	0.111393	0.986175
0.821833	0.260933	0.012574	0.562700	0.402142	0.109256	0.144383	0.030641

Avant de laisser le sujet de produire des variables aléatoires uniformes, deux commentaires sont en règle. D'abord, plus (sinon tous) à nombre aléatoire les générateurs exigent de l'utilisateur d'entrer une valeur de graine. Ce nombre est un nombre entier qui est employé par le sous-programme pour commencer la simulation algorithm.by choisir une graine différente, vous peut produire d'un ensemble différent de nombres uniformément distribués. Généralement si vous utilisez la même graine maintes et maintes fois, vous produirez du même ensemble de nombres aléatoires maintes et maintes fois uniformément distribués. En second lieu, les générateurs intégrés trouvés dans beaucoup de progiciels devraient être utilisés avec prudence. Quelques algorithmes de génération à nombre aléatoire fonctionnent mieux que d'autres.



#### V.4. Génération des nombres aléatoires normaux standards :

Les distributions de probabilité normale jouent un rôle si important dans l'analyse de fiabilité structurale, la capacité pour simuler des variables aléatoires normalement distribuées est importante. Pour commencer, considérons une distribution normale standard. Pour produire un ensemble de nombres aléatoires normaux standard  $z_1, z_2, \dots, z_n$  les premiers besoins de produire un ensemble correspondant de variables aléatoires uniformément distribuées  $u_1, u_2, \dots, u_n$  entre 0 et 1. Alors pour chaque  $u$ , nous pouvons produire une valeur  $z$  par :

$$z_i = \Phi^{-1}(u_i) \quad (5.3)$$

Où  $\Phi^{-1}$  est l'inverse de la fonction de répartition cumulative

#### V.5. Génération des nombres aléatoires normaux

Dans la section précédente, nous avons discuté comment produire des valeurs d'échantillon d'une variable aléatoire normalement distribuée suivant une norme de distribution normale. Supposer que nous avons une variable aléatoire normalement distribuée  $X$  avec une moyenne  $\mu_x$  et l'écart type  $\sigma_x$ . La principale relation entre  $X$  et la variable aléatoire normale standard  $Z$  est

$$X = \mu_x + Z\sigma_x \quad (5.4)$$

Ainsi donné une valeur  $z_i$  d'échantillon produite par l'élan discuté dans la section V.4 la valeur correspondante de  $x_i$  peut être calculé par

$$x_i = \mu_x + z_i \sigma_x \quad (5.5)$$

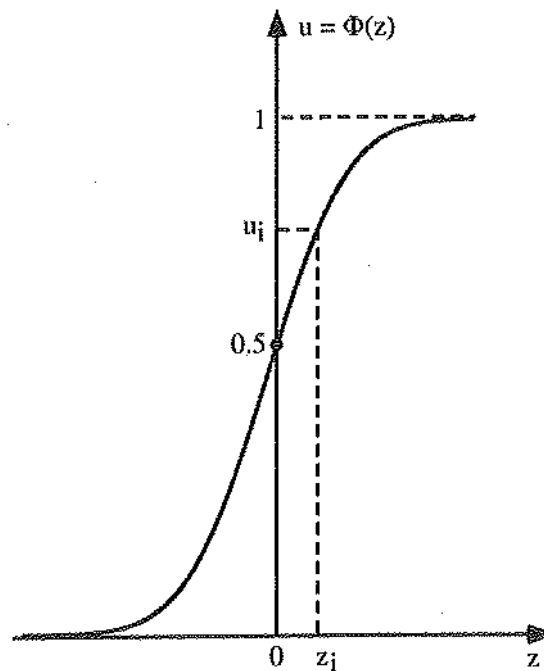


Figure V.2. Génération des variables aléatoires normales standards

### V.5. Génération des nombres aléatoires log-normaux

Soit  $X$  une variable aléatoire log-normale avec moyen  $u_x$  et l'écart type  $\sigma_x$ . Pour produire une valeur  $u_i$  d'échantillon d'un à nombre aléatoire uniformément distribué tels que  $0 < u_i < 1$ . Alors, une valeur  $z$  d'échantillon d'une distribution normale standard est calculée par l'Eq.5.3. En conclusion, en utilisant le rapport entre la variable normale et log-normale, nous obtenons  $x$  par :

$$x_i = \exp[u_{\ln X} + z_i \sigma_{\ln X}] \quad (5.6)$$

Ou

$$\begin{aligned} \sigma_{\ln X}^2 &= \ln(V_x^2 + 1) \quad (5.7) \\ &\approx V_x^2 \quad (\text{pour } V_x < 0.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\ln X} &= \ln(u_x) - \frac{1}{2} \sigma_{\ln X}^2 \quad (5.8) \\ &\approx \ln(u_x) \quad (\text{pour } V_x < 0.2) \end{aligned}$$

Si les rapports approximatifs dans les Eqs.4.7 et 4.8 sont utilisés ,l' Eq.4.6 peut être réécrit comme suite

$$x_i = u_x \exp[z_i V_x] \quad (5.9)$$

## V.6. Procédure générale pour produire des nombres aléatoires d'une distribution arbitraire

Dans la section précédente, nous avons considéré la génération des valeurs d'échantillon des variables aléatoires pour une partie de la distribution la plus commune utilisée dans l'analyse de fiabilité structurale. On peut formuler un procédé général qui, s'applique théoriquement à n'importe quel type de fonction de répartition

Considérant une variable aléatoire  $X$  avec une distribution cumulative  $F_X(x)$ . Pour produire des valeurs d'échantillon  $X$  pour la variable aléatoire, les étapes suivantes peuvent être prises :

1. produire une valeur  $u_i$  d'échantillon pour la variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 et 1
2. calculer une valeur  $x_i$  d'échantillon de la formule suivante :
- 3.

$$x_i = F_X^{-1}(u_i) \quad (5.10)$$

Où  $F_X^{-1}$  est l'inverse de  $F_X$

ce procédé est complètement général. Cependant, dans un certain cas il est difficile de déterminer la solution CDF inverse.

## V.7. Nombre de simulations requises

La simulation de Monte Carlo implique l'échantillonnage aléatoire pour simuler artificiellement un grand nombre d'expériences et d'observer les résultats, par exemple le cas d'analyse de fiabilité des structures, chaque valeur simulée aléatoirement  $X$  donne une valeur d'expérience  $x$ , si la fonction limite  $G(x) \leq 0$ , « qu'on peut l'utiliser pour définir l'état de la fiabilité pour la variable aléatoire  $x$  », on est dans l'état de succès, par contre, si  $G(x) \geq 0$ , on est dans l'état d'échec. [Robert 1999].

$$\bar{P} = \frac{n}{N} \quad (5.11)$$

Où  $N$  est le nombre de simulations et  $n$  est le nombre de fois (hors des simulations de  $N$ ) qu'un critère particulier a été réalisées. Par exemple, des simulations du suppose 100 sont conduites pour voir combien de fois  $Y < 0$ . Ainsi  $n=5$  et  $N=100$ , ainsi notre évaluation de la probabilité  $P(Y < 0)$  sont  $5/100=0.05$ . Supposer maintenant que des simulations complètement nouvelles sont faites avec  $N=100$ . Cette fois nous obtenons  $n=7$  et le notre prévu de  $P(Y < 0)$  est  $7/100=0.07$  que le point est que la probabilité prévue  $\bar{P}$  est une « évaluation d'échantillon ». Donc, la probabilité prévue elle-même peut être traitée en tant qu'une variable aléatoire avec son propre écart type et moyen, et coefficient de variation.

Soit  $P_{true}$  être la probabilité théoriquement correcte que nous essayons d'estimer en calculant le  $\bar{P}$ . Il peut afficher (par exemple, Soong et Grigoriu, 1993) la valeur prévue, la variance, et coefficient de la variation de la probabilité prévue  $\bar{P}$  sont comme suit :

$$E[\bar{P}] = P_{true}; \quad \sigma_{\bar{P}}^2 = \frac{1}{N} [P_{true}(1 - P_{true})]; \quad V_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{(1-P_{true})}{N(P_{true})}} \quad (5.12) ;,$$

En se basant sur le théorème de central limite est appliqué l'intervalle de confiance peut être donné par :

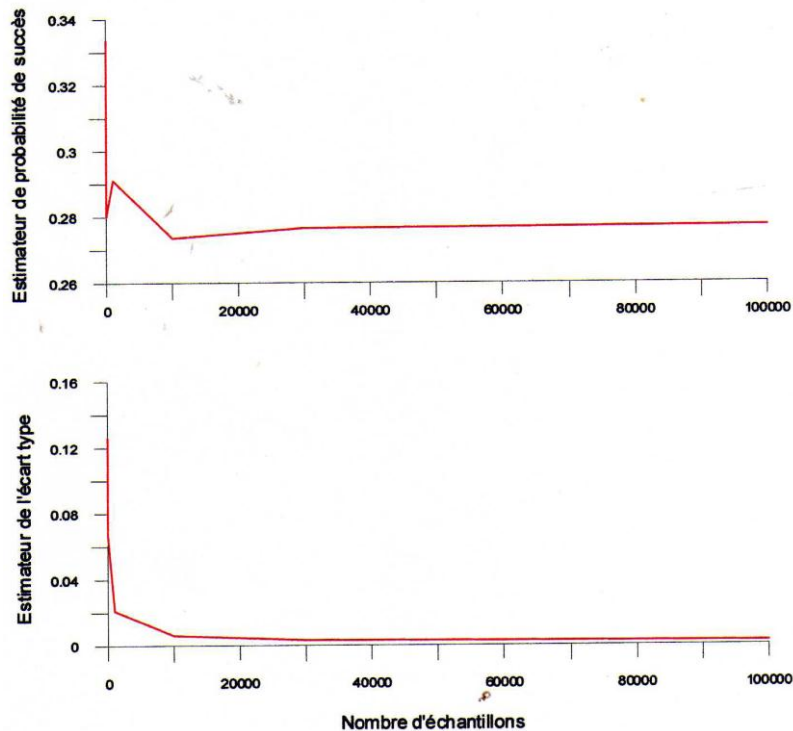
$$P(-k\sigma < \bar{P} - P_{true} < + k\sigma) = c \quad (5.13)$$

Donc pour l'intervalle de confiance  $C=95\%$ ,  $k=1.96$ :

$$P_{true} - k\sigma < \bar{P} < P_{true} + k\sigma = c \quad (5.14)$$

Broding et al (1946), suggère que le nombre de simulation nécessaire est plus de 3000 simulations, d'autre suggère que le nombre de simulation est de l'ordre de 10000 -20000 pour approximativement un intervalle de confiance de 95%. Les règles ci-dessus souvent utiliser, n'indiquent pas l'analyse beaucoup au sujet de l'exactitude dans n'importe quelle analyse particulière de Monte Carlo, un outil utile a cette fin est tracer les valeurs de l'estimateur de  $P_{true}$  et de l'estimateur sur leur écart type (figure,)

La fonction limite  $G(x)$  est choisie de telle façon, que les valeurs des réponses sont dans l'intervalle  $u_x \pm \sigma_x$



**Figure .V.3.** Convergence de l'estimateur de probabilité de succès de MMC en fonction de nombre d'échantillon N pour une loi log normale

Typiquement de telles graphes, montrent que ces mesures sont réduits à mesure que le nombre d'échantillons est augmenté et qu'un degré de stabilité est atteint à un nombre suffisamment élevé d'échantillons. Le taux de convergence et leur stabilité dépendent de la qualité du générateur de nombre aléatoire étant employé. [E. Melchers 1999]

### V.8. Simulation des variables aléatoires normales corrélées

Dans la section de précédant, nous avons découvert la simulation des variables aléatoires, et on l'a implicitement supposé que les variables étaient non-corrélatives. Dans la pratique, les variables peuvent être corrélées, ainsi notre procédé de simulation doit pouvoir simuler la corrélation. Une technique de transformation pour simuler des variables aléatoires normales corrélées est couverte dans cette section. Bien qu'elle soit strictement valide pour des variables aléatoires normales seulement, elle peut être utilisée pour d'autres types de variables aléatoires comme approximation.

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires normales corrélées. Les valeurs moyennes et la matrice de covariance sont indiquées par

$$\{u_x\} = \{u_{x_1}, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}\} \quad (5.13)$$

$$[C_X] = \begin{bmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_1) & \dots & \dots & Cov(X_1, X_1) \\ Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_1) & & & Cov(X_1, X_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_1) & \dots & \dots & Cov(X_1, X_1) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

La génération des nombres aléatoires corrélés pour  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , il est nécessaire tout d'abord la génération d'un ensemble de nombres aléatoires non-corrélés  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  donné par les techniques discuté plus tôt. Puis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont calculés par la transformation variable

$$\{X\} = [T]\{Y\} \quad (5.15)$$

Où  $[T]$  est la matrice de transformation. Pour appliquer cet élan, nous devons déterminer la matrice  $[T]$  aussi bien que les valeurs de moyen et de variance pour la variable non-corrélative de  $Y_i$ . Pour faire ceci, nous devons employer quelques concepts d'algèbre linéaire. Soit  $[A]$  une matrice  $n \times n$  qui est symétrique. Une matrice diagonale  $[D]$  et une matrice carrée  $[T]$  peuvent être trouvées telles que les rapports suivants se tiennent :

$$[D] = [T]^T [A] [T] \quad (5.16)$$

$$[A] = [T] [D] [T]^T \quad (5.17)$$

L'exposant  $T$  dénote transposé. La matrice  $[T]$  contient les vecteurs propres orthogonaux correspondant aux valeurs propres de la matrice  $[A]$ . La matrice diagonale  $[D]$  contient les valeurs propres de  $[A]$ .

Dans le contexte actuel de simulation des variables aléatoires, la matrice  $[A]$  est la matrice de covariance  $[C_X]$  de l'original, les variables corrélées  $\{X\}$ . La matrice  $[T]$  se compose des vecteurs propres orthonormaux correspondant aux valeurs propres de la matrice  $[C_X]$ . Ainsi  $[T]$  contient le vecteur propre orthonormal correspondant à la première valeur propre, la deuxième contient le vecteur propre correspondant à la deuxième valeur propre, et ainsi de suite. La matrice  $[T]$  est une matrice orthogonale, signifiant qui est inverse est égale au son transposé. La matrice diagonale  $[D]$  correspond à la matrice de covariance  $[C_Y]$  des variables incorréllés  $\{Y\}$ . Avec ces changements de notion, d'Eq 5.16 et de 5.17 devient

$$[C_Y] = [T]^T [C_X] [T] = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{Y_2}^2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sigma_{Y_n}^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$[C_X] = [T] [C_Y] [T]^T \quad (5.19)$$

Les éléments diagonaux de la  $[C_Y]$  contiennent les variances des variables non-corrélatives requises pour faire la simulation. Les valeurs moyennes des variables de  $Y$  peuvent être obtenues par :

$$\{u_Y\} = [T]^T \{u_X\} \quad (5.20)$$

Une fois que des valeurs simulées de  $\{Y\}$  sont obtenues, Eq. 5.15 peuvent être employés pour obtenir des valeurs simulées de  $\{X\}$

## V.9. Conclusion

La méthode de Monte Carlo est simple à mettre en œuvre à l'aide des nombreux logiciels qui possèdent des fonctions de génération de nombre aléatoires de lois quelconques.

Si le calcul des tendances centrales d'une distribution par analyse de sensibilité ne nécessite qu'un petit nombre de réalisations, en revanche la recherche de valeurs fiables de probabilité est extrêmement coûteuse.

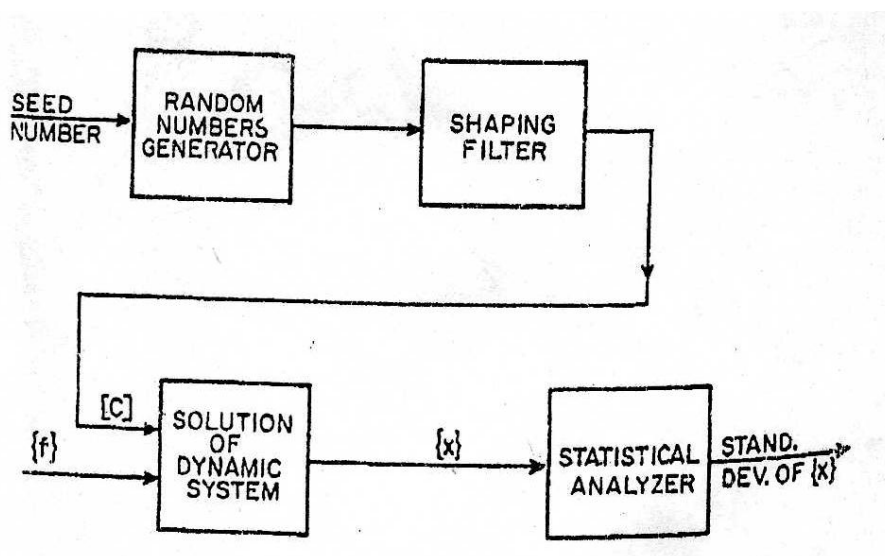


Figure .V.4. Schéma fonctionnel pour la simulation sur ordinateur

# **CHAPITRE V**

## **RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS**



VI.1. Description du système :

Pour illustrer les méthodes de solution développées précédemment, considérant l'exemple d'un bâtiment à cinq étages avec les caractéristiques géométriques affichées dans la figure 1 qui est soumise à une excitation au niveau du premier étage

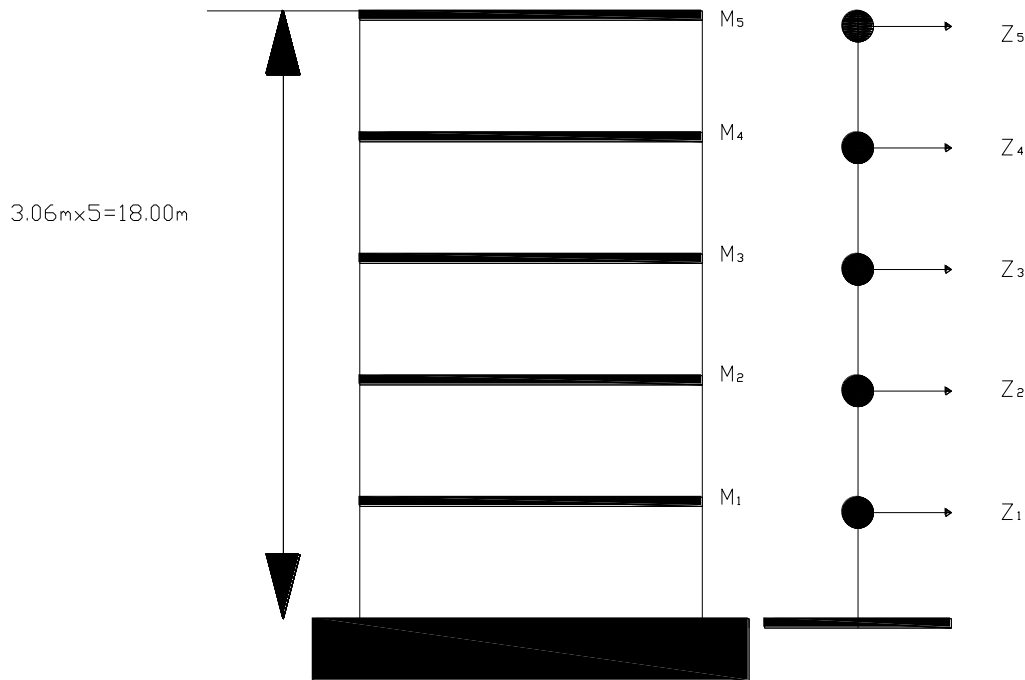


Figure VI.1. Exemple d'un bâtiment a cinq étages

$$M_1=150 \text{ t} \quad K_1=215 \cdot 10^3 \text{ KN/m}$$

$$M_2=135 \text{ t} \quad K_2=210 \cdot 10^3 \text{ KN/m}$$

$$M_3=120 \text{ t} \quad K_3=170 \cdot 10^3 \text{ KN/m}$$

$$M_4=115 \text{ t} \quad K_4=165 \cdot 10^3 \text{ KN/m}$$

$$M_5=90 \text{ t} \quad K_5=170 \cdot 10^3 \text{ KN/m}$$

Les matrices de masse et de rigidité pour le système présenté dans la figure VI.1 sont données par :

$$M = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 135 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 90 \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} 230 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k = 10^3 \begin{bmatrix} 425 & -210 & 0 & 0 & 0 \\ -210 & 380 & -170 & 0 & 0 \\ 0 & -170 & 335 & -165 & 0 \\ 0 & 0 & 165 & 300 & -135 \\ 0 & 0 & 0 & -135 & 135 \end{bmatrix}$$

**VI.2. Pulsations propres et vecteurs modaux du système :**

Par la méthode modale, nous obtenons les pulsations propres, les vecteurs modaux normaux de masse correspondants et les facteurs de participation modaux comme suite :

**Tableau 1.** Pulsations propres et facteurs de participations correspondants pour le bâtiment à 5 étages

Mode k	Pulsation $w_k$ (rad/sec.)	Facteur de participation modal
1	12.1	22.50
2	31.7	8.31
3	48.8	4.13
4	63.8	2.41
5	72.1	1.13

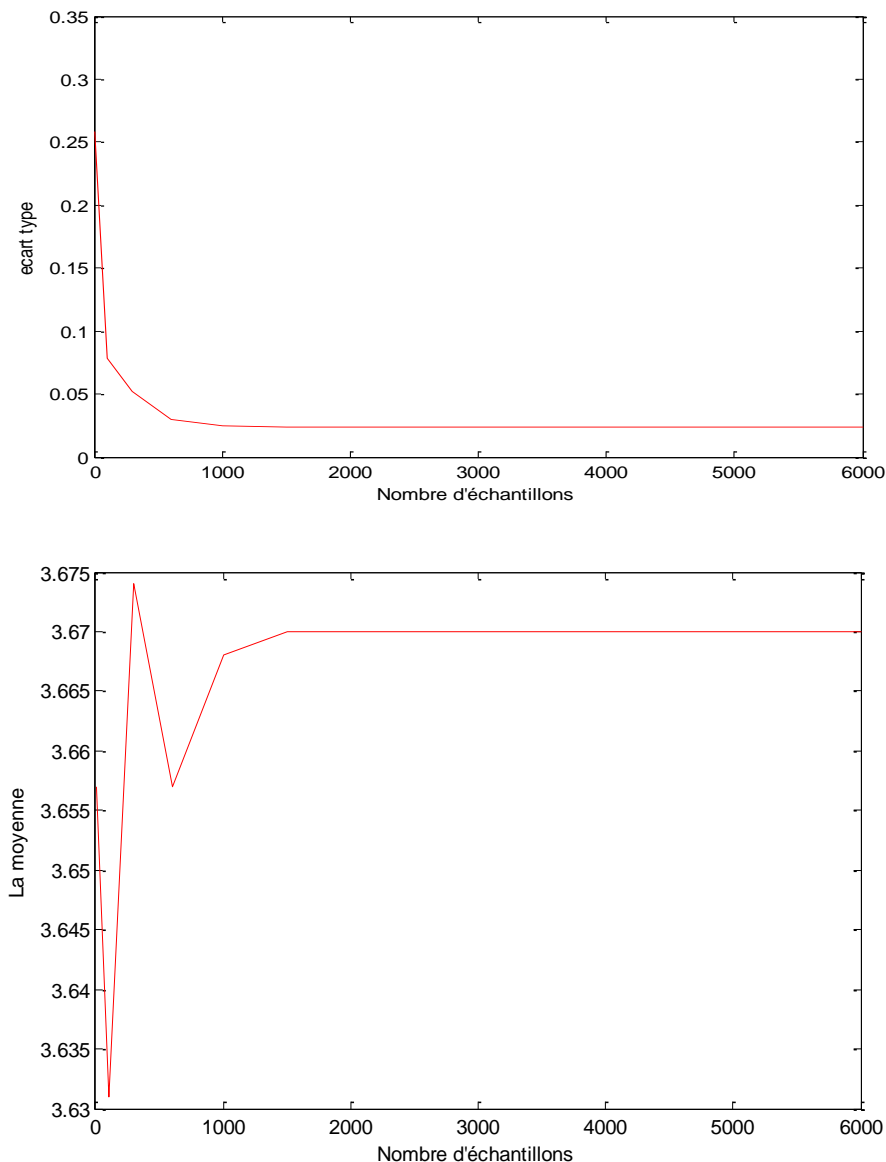
**Tableau 2.** Vecteur modaux du système à 5 degrés de libertés

	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5
1	0,01544	-0,03875	0,04577	0,04567	-0,02730
2	0,02962	-0,05068	0,01471	-0,04020	0,04612
3	0,04368	-0,02510	-0,05150	-0,01648	-0,05358
4	0,05347	0,01955	-0,03045	0,05669	0,04626
5	0,05930	0,05889	0,05172	-0,03314	-0,01876

**VI.3. Applications numériques :**

La fréquence d'excitation  $\Omega$  est fixe à la deuxième fréquence de résonance du système. On va faire plusieurs passages pour divers  $\bar{c}$  et  $\sigma$ . Choisissons une distribution normale et lognormale pour cette application. Cependant si nous choisissons les écarts types moins qu'une tiers de la moyenne, la probabilité de choisir un  $c$  négatif est inférieure à 0,0027 pour une loi normale. Les résultats des calculs sont donnés sous forme de tableaux (3,4, 5 et 6)

**VI.3.1. Détermination du nombre de simulation par la méthode Monte Carlo**



**Figure .VI.2.** Convergence de l'estimateur de probabilité de succès de MMC en fonction de nombre d'échantillon N par une loi log normale (pour le premier degré du bâtiment)

D'après la figure VI.2 on constate que la méthode Monte Carlo converge a partir d'un nombre d'échantillon  $N=1500$ , donc on va pondre cette valeur pour toute l'application.

**VI.3.2 Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo pour un  $\sigma$  constant**

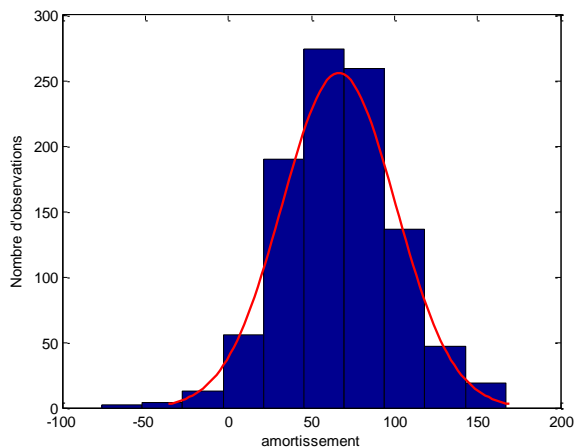
**a) Loi normale**

Tableau VI.4. Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi normale) pour un  $\sigma/\bar{C}$  variable

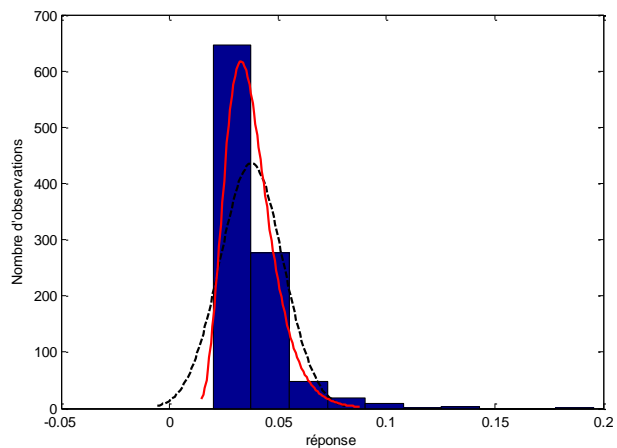
N	valeur moyenne de la réponse		Erreur %	écart type de la réponse		Erreur %	amortissement		$\sigma/\bar{C}$
	model linéaire statistique	simulation Monte Carlo		model linéaire statistique	simulation Monte Carlo		$\bar{C}$	$\sigma$	
1	3,46	3,73	7,24	0,89	1,5	40,67	67.7250	33.8625	0,5
2	4,52	4,88	7,38	1,17	1,97	40,61	66.1500	33.0750	0,5
3	2,24	2,42	7,44	0,58	0,97	40,21	53.5500	26.7750	0,5
4	1,74	1,88	7,45	0,45	0,76	40,79	51.9750	25.9875	0,5
5	5,25	5,67	7,41	1,36	2,28	40,35	42.5250	21.2625	0,5
1	1,16	1,16	0,00	0,099	0,11	10,00	203,175	33,8625	0,166
2	1,51	1,51	0,00	0,13	0,14	7,14	198,4500	33,0750	0,166
3	0,75	0,75	0,00	0,06	0,07	14,29	160,6500	26,7750	0,166
4	0,58	0,59	1,69	0,049	0,05	2,00	155,9250	25,9875	0,166
5	1,75	1,76	0,57	0,15	0,16	6,25	127,5750	21,2625	0,166
1	0,7	0,7	0,00	0,035	0,036	2,78	338,6250	33,8625	0,1
2	0,9	0,9	0,00	0,047	0,048	2,08	330,7500	33,0750	0,1
3	0,45	0,45	0,00	0,0233	0,0238	2,10	267,7500	26,7750	0,1
4	0,35	0,35	0,00	0,0178	0,0184	3,26	259,8750	25,9875	0,1
5	1,05	1,04	-0,96	0,0545	0,0559	2,50	212,6250	21,2625	0,1
1	0,36	0,36	0,00	0,0087	0,0084	-3,57	677,2500	33,8625	0,05
2	0,45	0,45	0,00	0,0116	0,011	-5,45	661,5000	33,0750	0,05
3	0,22	0,22	0,00	0,0059	0,0055	-7,27	535,5000	26,7750	0,05
4	0,18	0,18	0,00	0,0043	0,00426	-0,94	519,7500	25,9875	0,05
5	0,52	0,52	0,00	0,0136	0,0129	-5,43	425,2500	21,2625	0,05

Pour des coefficients de variation d'amortissement qui égale à 0.5 l'erreur sur la réponse est plus élevée par rapport au autre cas. Pour cela si l'incertitude de l'amortissement est grande, l'hypothèse d'une distribution normale doit être abandonnée afin d'éviter une valeur négative de c. Le modèle linéaire est dans le bon intervalle avec la simulation de Monte Carlo même pour des écarts considérables de c par rapport à  $\bar{c}$  pour des  $\sigma/\bar{C} \leq 0.166$ .

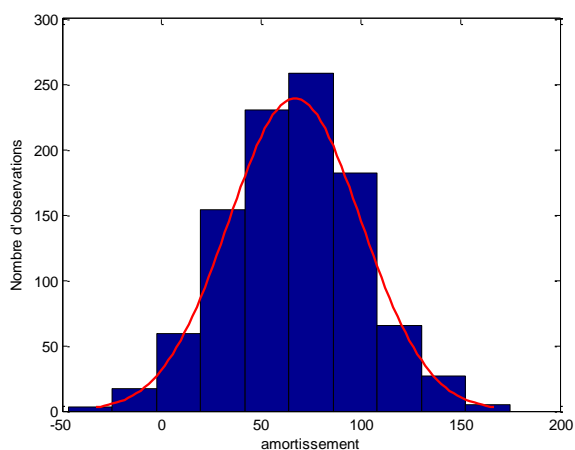
Si l'incertitude de l'amortissement est grande, le modèle linéaire devient insuffisant, et les statistiques d'ordre supérieur doivent être considérées.



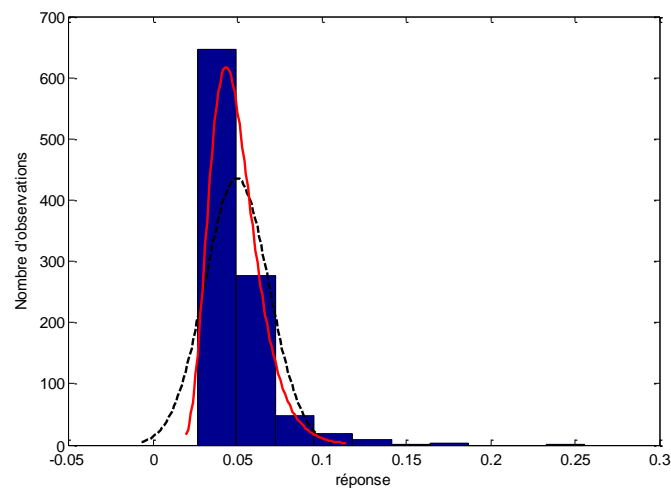
Histogramme des amortisseur générer pour  $(\bar{c}= 67.7250 \sigma = 33.8625$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



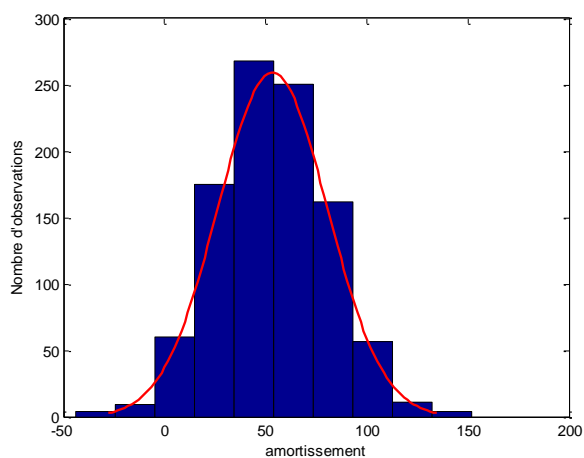
Réponse de la structure au niveau du 1<sup>er</sup> degré



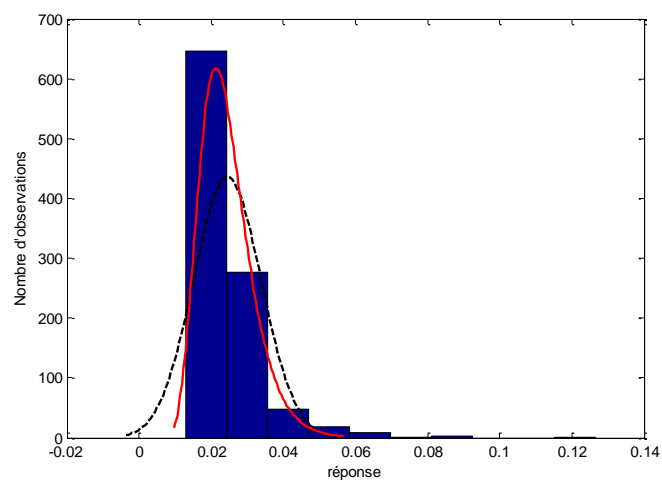
Histogramme des amortisseur générer pour  $(\bar{c}= 66.1500 \sigma = 33.0750$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



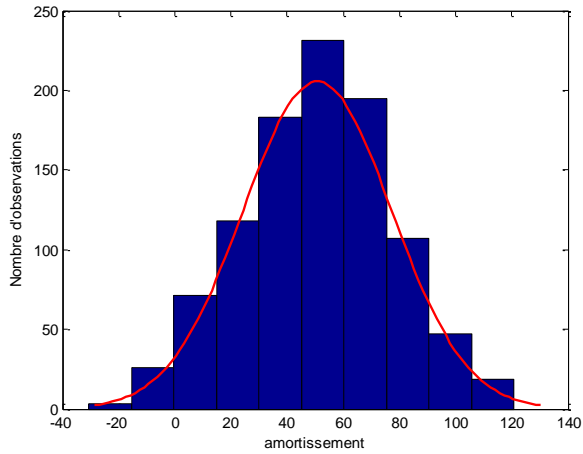
Réponse de la structure au niveau du 2<sup>eme</sup> degré



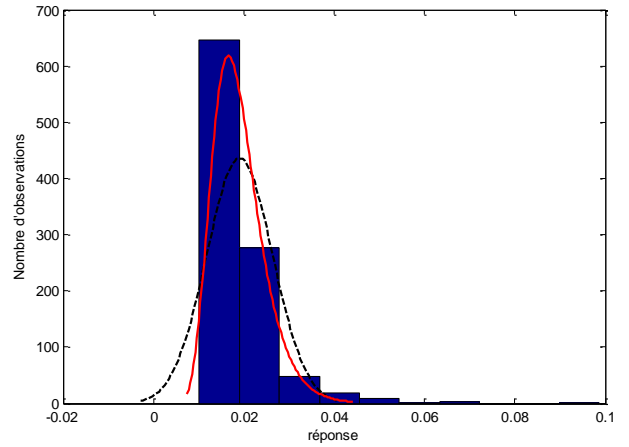
Histogramme des amortisseur générer pour  $(\bar{c}= 53.5500 \sigma = 26.7750$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



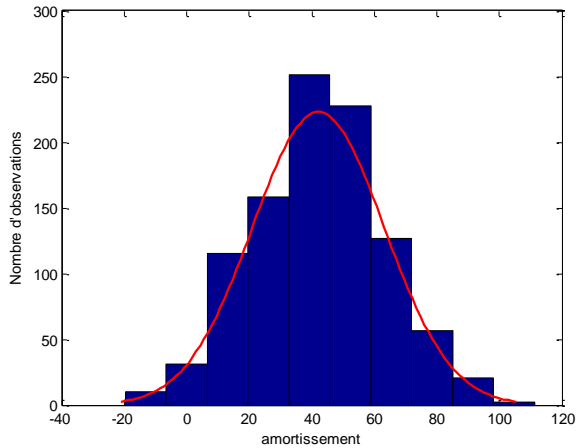
Réponse de la structure au niveau du 3<sup>eme</sup> degré



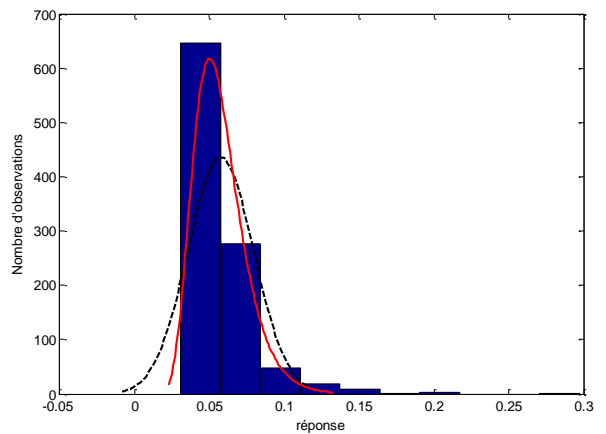
Histogramme des amortisseur générés pour  $(\bar{c}= 53.5500\sigma =25.9875$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



Réponse de la structure au niveau du 4<sup>ème</sup> degré



Histogramme des amortisseur générés pour  $(\bar{c}= 42.5250\sigma =21.2625$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo

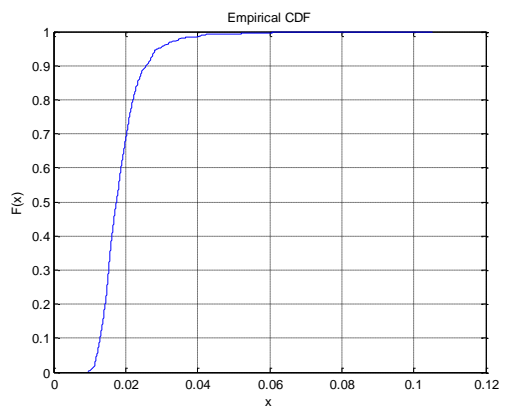
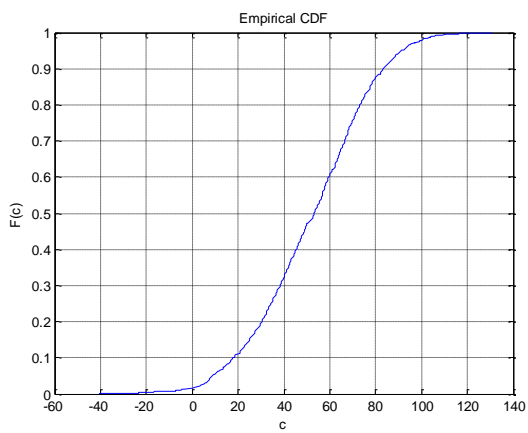
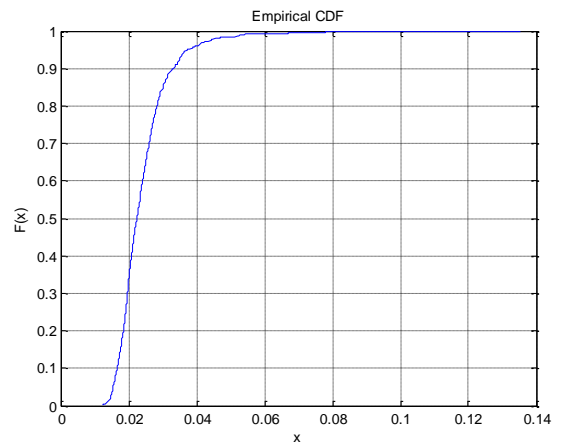
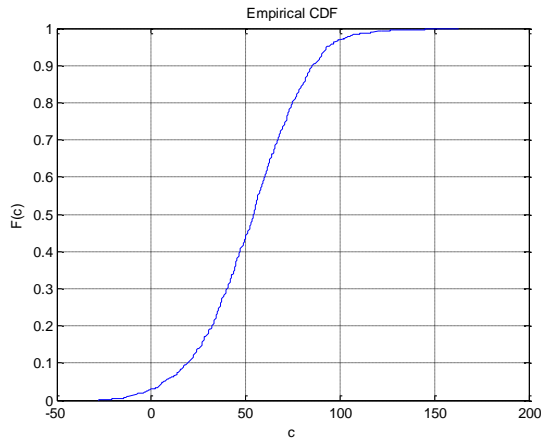
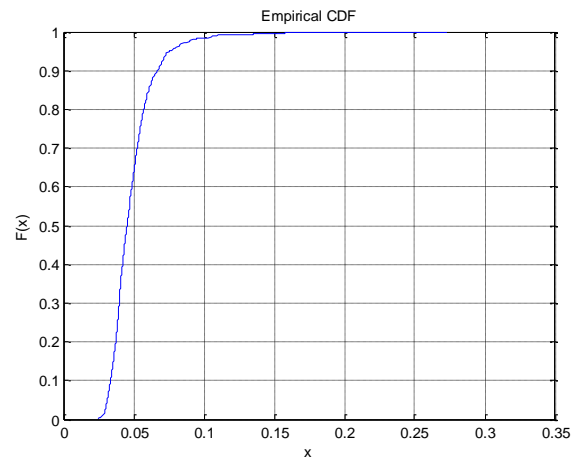
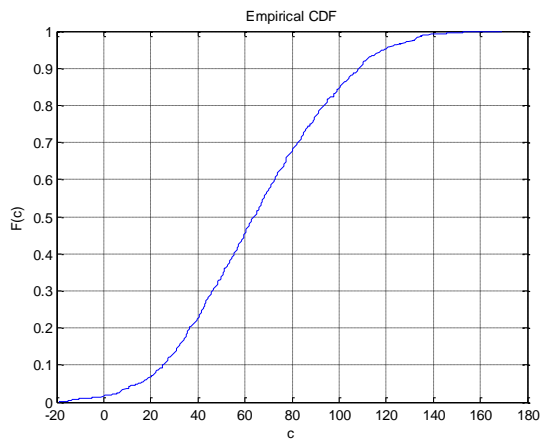
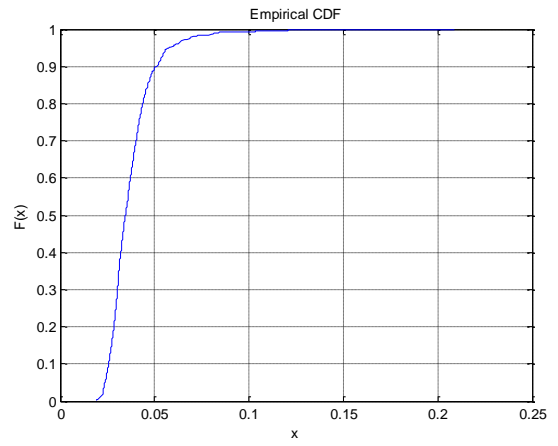
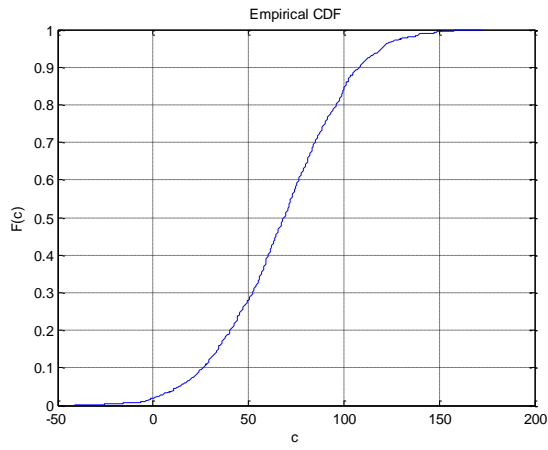


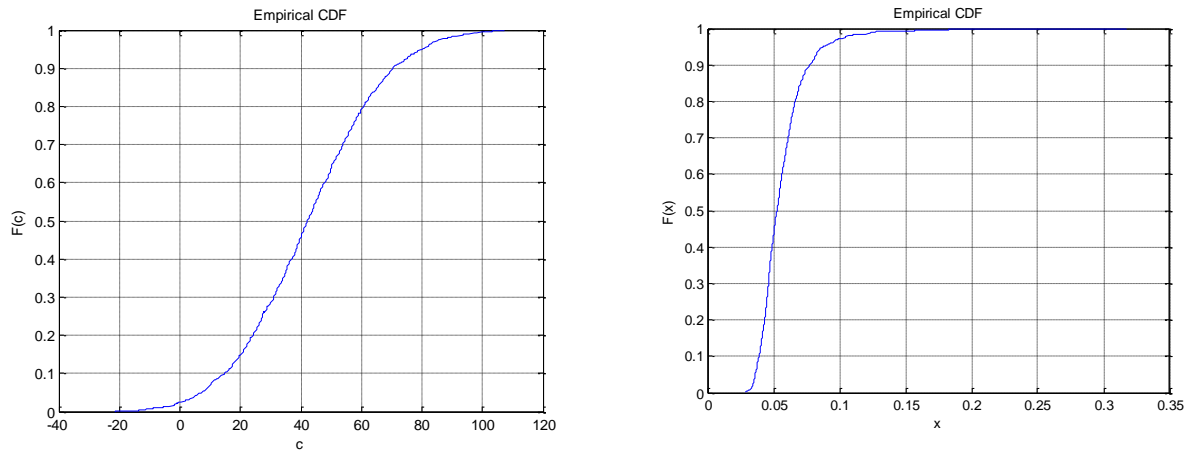
Réponse de la structure au niveau du 5<sup>ème</sup> degré

**Figure VI.5.** Histogrammes des amortisseur générés et leurs réponses correspondantes (loi normale) pour un  $\sigma/\bar{c}=0,5$

**NB :** Il est indiqué que l'ajustement en pointée des histogrammes de réponse est fait par une loi normale par contre l'ajustement en ligne rouge est fait par une loi log normale.

Lorsque le  $\sigma/\bar{c}=0,5$  on constate une grande dispersion sur la réponse, cette dispersion est due aux valeurs négatives. Après ajustement des Histogrammes des réponses et amortissements on constate que la réponse suit la même loi de probabilité pour des  $\sigma/\bar{c} \geq 0,166$  par contre la réponse suit une loi log normale pour des  $\sigma/\bar{c} \geq 0,5$ .





**Figure VI.4.**CDF des amortisseur générés et leurs réponses correspondantes Carlo (loi log normale) pour un  $\sigma/\bar{c}=0,5$



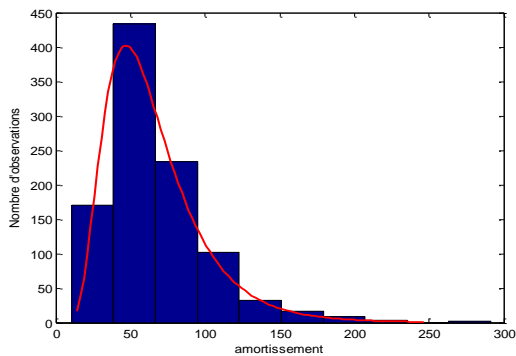
**b) Loi lognormale**

Pour éviter le problème des valeurs négatives on propose la loi log normale

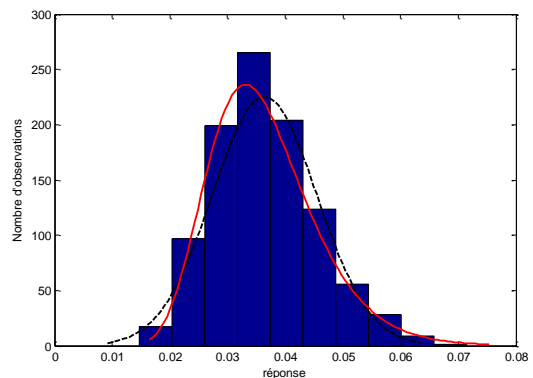
Tableau VI.3. Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi lognormale) pour un  $\sigma$  constant

N	valeur moyenne de la réponse		Erreur %	écart type de la réponse		Erreur %	amortissement		
	model linéaire statistique	simulation Monte Carlo		model linéaire statistique	simulation Monte Carlo		$\bar{c}$	$\sigma$	$\sigma/\bar{c}$
1	3,46	3,61	4,16	0,89	0,91	2,20	67.7250	33.8625	0,5
2	4,52	4,72	4,24	1,17	1,19	1,68	66.1500	33.0750	0,5
3	2,24	2,34	4,27	0,58	0,59	1,69	53.5500	26.7750	0,5
4	1,74	1,82	4,40	0,45	0,46	2,17	51.9750	25.9875	0,5
5	5,25	5,49	4,37	1,36	1,38	1,45	42.5250	21.2625	0,5
1	1,16	1,16	0,00	0,099	0,1	1,00	203,175	33,8625	0,166
2	1,51	1,52	0,66	0,13	0,13	0,00	198.4500	33.0750	0,166
3	0,75	0,75	0,00	0,06	0,06	0,00	160.6500	26.7750	0,166
4	0,58	0,59	1,69	0,049	0,05	2,00	155.9250	25.9875	0,166
5	1,75	1,76	0,57	0,15	0,15	0,00	127.5750	21.2625	0,166
1	0,7	0,7	0	0,0355	0,0353	-0,57	338.6250	33.8625	0,1
2	0,9	0,9	0	0,0467	0,04634	-0,78	330.7500	33.0750	0,1
3	0,45	0,45	0	0,0233	0,02299	-1,35	267.7500	26.7750	0,1
4	0,35	0,35	0	0,01776	0,01777	0,06	259.8750	25.9875	0,1
5	1,05	1,05	0	0,054436	0,05396	-0,88	212.6250	21.2625	0,1
1	0,36	0,36	0	0,00869	0,00887	2,03	677.2500	33.8625	0,05
2	0,45	0,45	0	0,01164	0,01165	0,09	661.5000	33.0750	0,05
3	0,22	0,22	0	0,00589	0,00579	-1,73	535.5000	26.7750	0,05
4	0,18	0,18	0	0,0043	0,0044	2,27	519.7500	25.9875	0,05
5	0,52	0,52	0	0,01361	0,01361	0	425.2500	21.2625	0,05

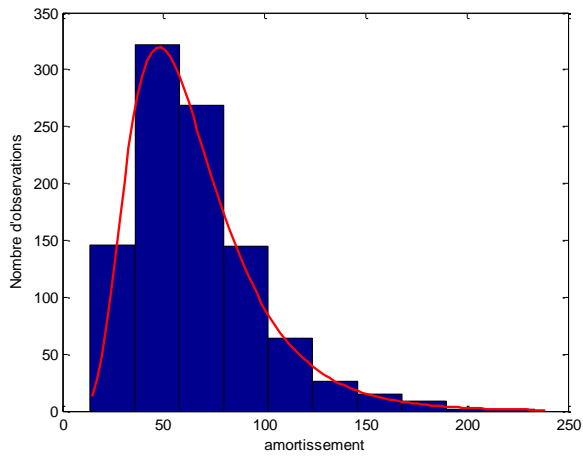
Contrairement à la loi normale et même pour  $\sigma/\bar{c} = 0.5$  l'erreur sur la réponse est considérablement diminué en utilisant la méthode de Monte Carlo .Le modèle linéaire est dans le bon intervalle avec la simulation de Monte Carlo même pour des écarts considérables de  $c$  par rapport à  $\bar{c}$ .



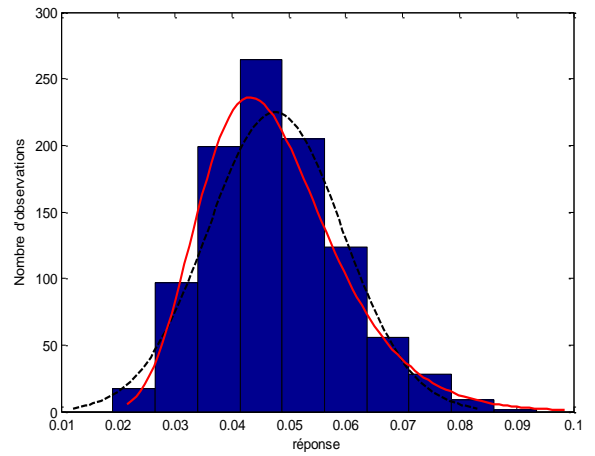
Histogramme des amortisseurs générés pour ( $\bar{c}= 67.7250 \sigma =33.8625$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



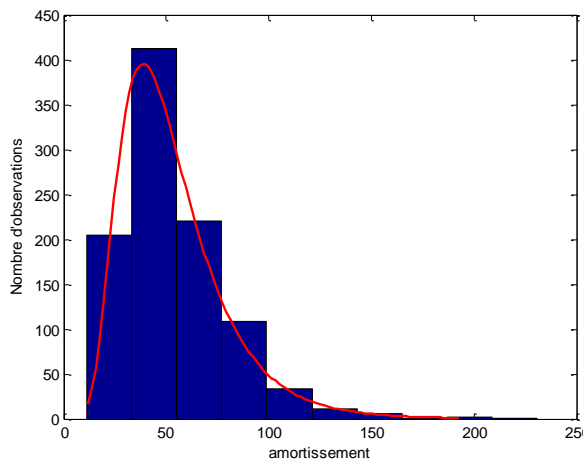
Réponse de la structure au niveau du 1<sup>er</sup> degré



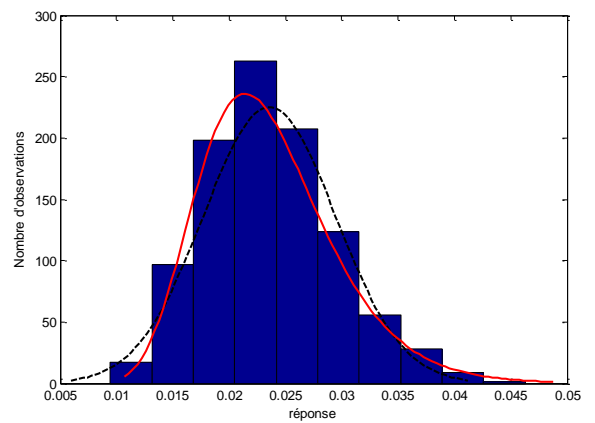
Histogramme des amortisseur générer pour  $(\bar{c}= 66.1500 \sigma = 33.0750$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



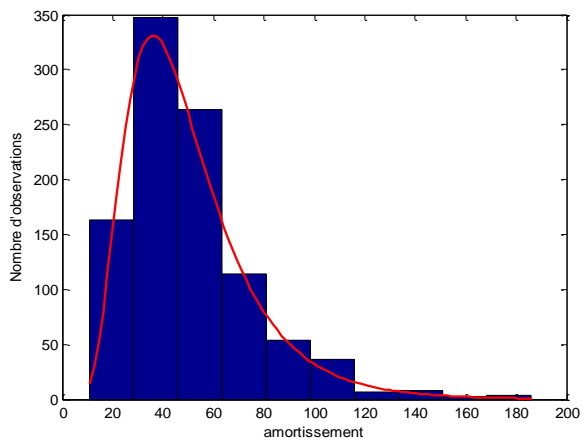
Réponse de la structure au niveau du 2<sup>ème</sup> degré



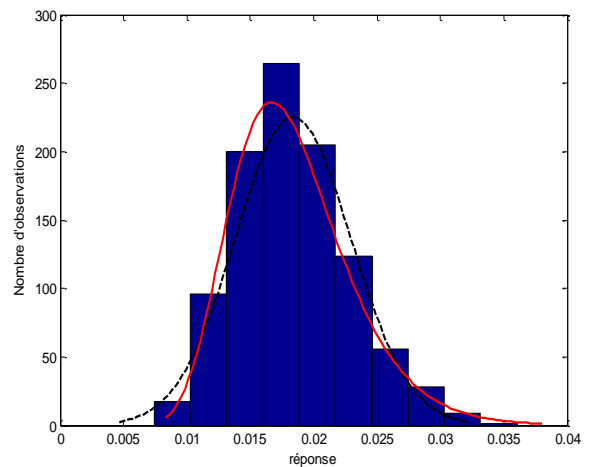
Histogramme des amortisseur générer pour  $(\bar{c}= 53.5500 \sigma = 26.7750$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



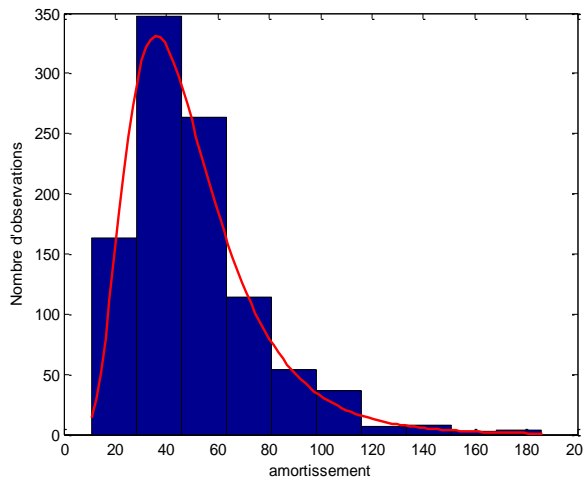
Réponse de la structure au niveau du 3<sup>ème</sup> degré



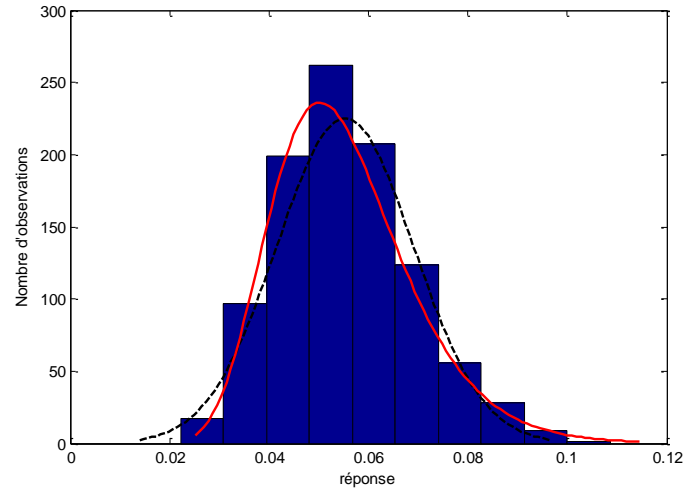
Histogramme des amortisseur générer pour  $(\bar{c}= 51.9750 \sigma = 25.9875$  et  $\sigma/\bar{c}=0,5$ ) par la méthode Monte Carlo



Réponse de la structure au niveau du 4<sup>ème</sup> degré



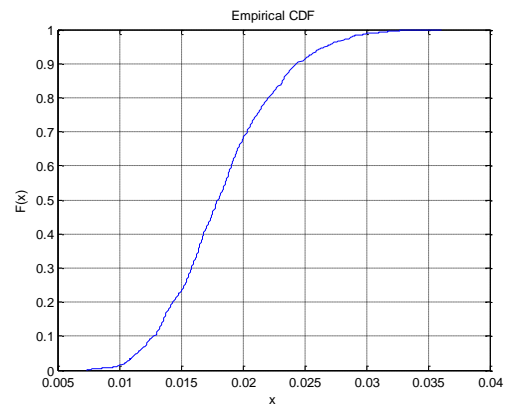
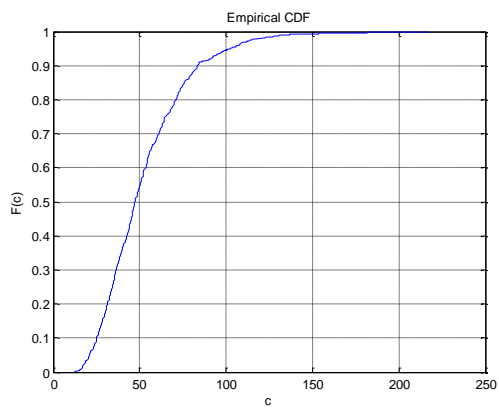
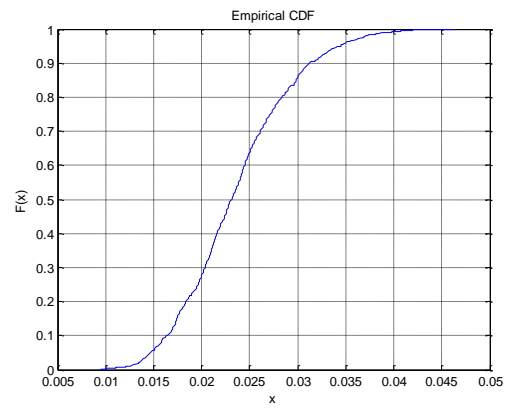
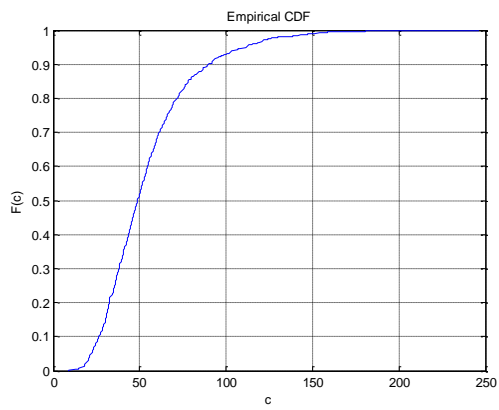
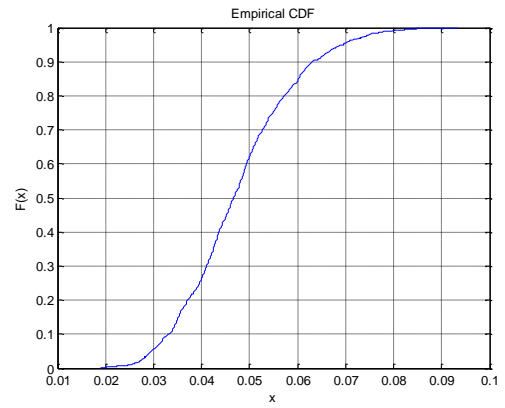
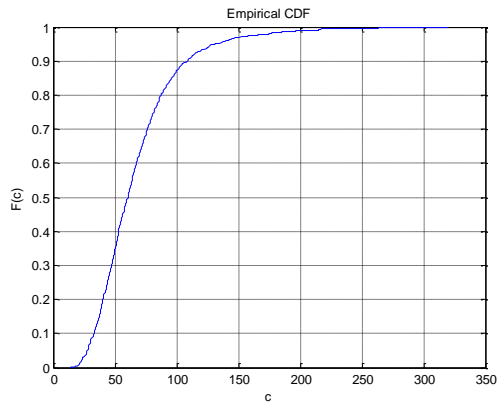
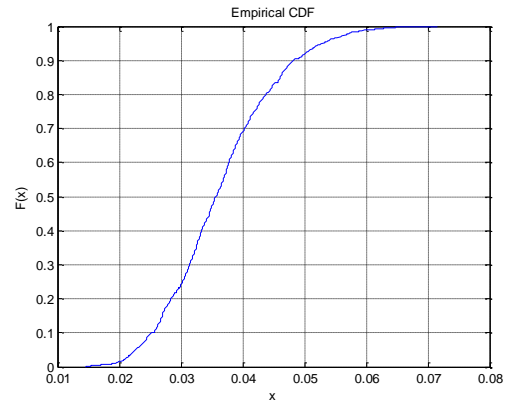
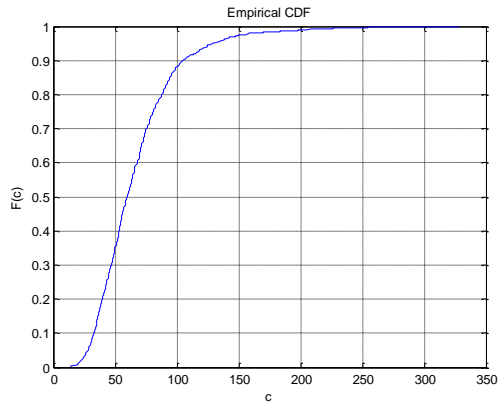
Histogramme des amortisseur générés pour ( $\bar{c} = 42.5250\sigma = 21.2625$  et  $\sigma/\bar{c} = 0,5$ )



Réponse de la structure au niveau du 5<sup>ème</sup> degré

**Figure VI.3.** Histogrammes des amortisseurs générés et leurs réponses correspondantes (loi lognormale) pour un  $\sigma/\bar{c} = 0,5$

Après ajustement des histogrammes des réponses et amortissements on constate que la réponse suit la même loi de probabilité quel que soit le  $\sigma/\bar{c}$ .



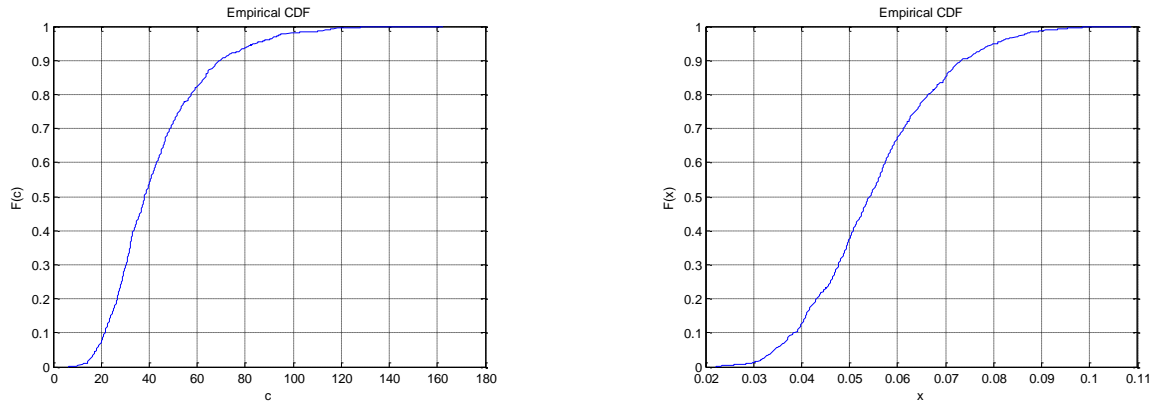


Figure VI.4.CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante (loi log normale) pour un  $\sigma/\bar{c}=0,5$

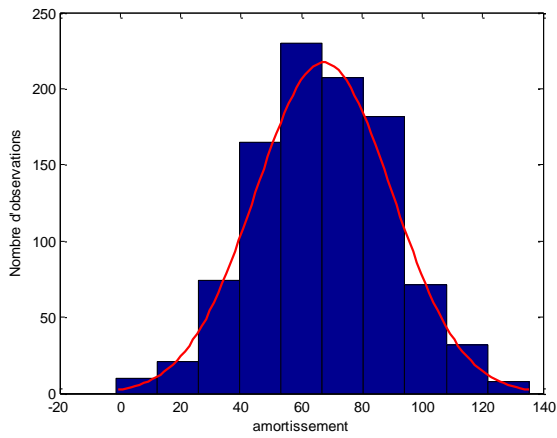
VI.3.2 Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo pour un  $\sigma/\bar{C} =0, 33$

a) Loi normale

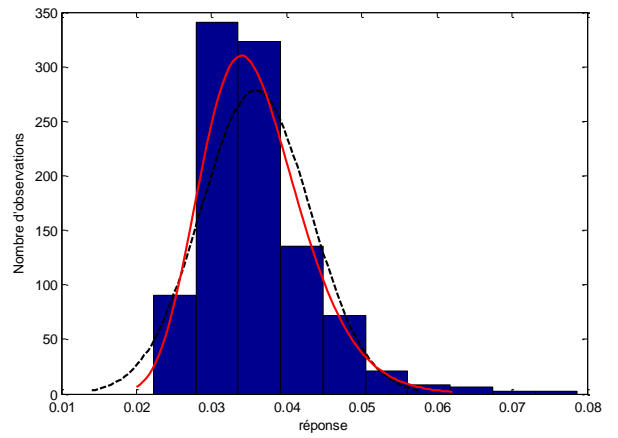
Tableau VI.6 Comparaison entre le model linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi normale) pour  $\sigma/\bar{C} =0, 33$

N	valeur moyenne de la réponse		Erreur %	écart type de la réponse		Erreur %	amortissement		$\sigma/\bar{C}$
	model linéaire statistique	simulation Monte Carlo		model linéaire statistique	simulation Monte Carlo		$\bar{C}$	$\sigma$	
1	3,46	3,57	3,08	0,6	0,7	14,29	67.7250	33.8625	0, 33
2	4,52	4,66	3,00	0,78	0,92	15,22	66.1500	33.0750	0, 33
3	2,24	2,31	3,03	0,39	0,46	15,22	53.5500	26.7750	0, 33
4	1,74	1,8	3,33	0,3	0,35	14,29	51.9750	25.9875	0, 33
5	5,25	5,42	3,14	0,91	1,07	14,95	42.5250	21.2625	0, 33
1	1,16	1,2	3,33	0,2	0,23	13,04	203,175	33,8625	0, 33
2	1,51	1,56	3,21	0,26	0,3	13,33	198.4500	33.0750	0, 33
3	0,75	0,77	2,60	0,13	0,15	13,33	160.6500	26.7750	0, 33
4	0,58	0,6	3,33	0,099	0,12	17,50	155.9250	25.9875	0, 33
5	1,75	1,81	3,31	0,3	0,35	14,29	127.5750	21.2625	0, 33
1	0,7	0,71	1,41	0,12	0,13	7,69	338.6250	33.8625	0, 33
2	0,9	0,92	2,17	0,16	0,17	5,88	330.7500	33.0750	0, 33
3	0,45	0,46	2,17	0,078	0,09	13,33	267.7500	26.7750	0, 33
4	0,35	0,36	2,78	0,059	0,07	15,71	259.8750	25.9875	0, 33
5	1,05	1,07	1,87	0,18	0,2	10,00	212.6250	21.2625	0, 33
1	0,36	0,37	2,70	0,066	0,07	5,71	677.2500	33.8625	0, 33
2	0,45	0,46	2,17	0,084	0,09	6,67	661.5000	33.0750	0, 33
3	0,22	0,23	4,35	0,042	0,05	16,00	535.5000	26.7750	0, 33
4	0,18	0,18	0,00	0,036	0,04	10,00	519.7500	25.9875	0, 33
5	0,52	0,53	1,89	0,091	0,11	17,27	425.2500	21.2625	0, 33

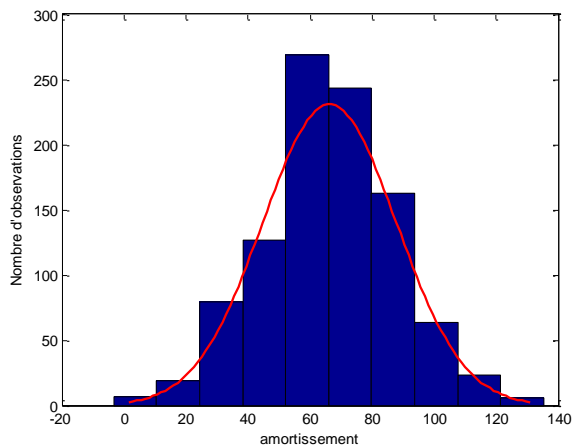
L'erreur sur la réponse est considérablement diminuée lorsque  $\sigma/\bar{C}=0,33$  par rapport au cas  $\sigma/\bar{C}=0,33$  pour la même valeur de  $\bar{C}$ . Le modèle linéaire est dans le bon intervalle avec la simulation de Monte Carlo.



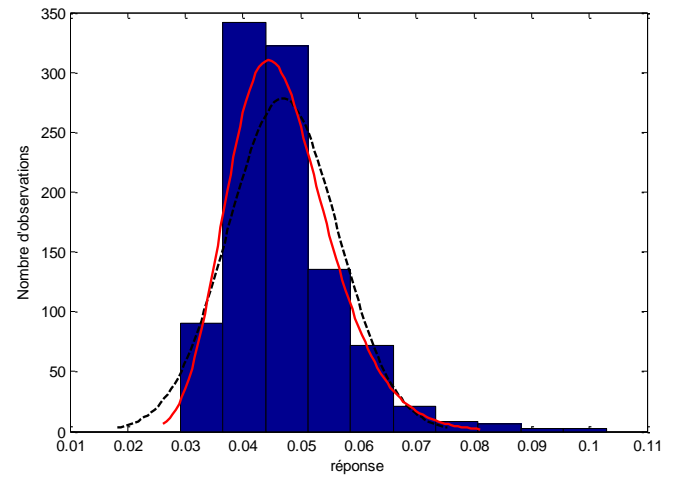
Histogramme des amortisseur générés pour ( $\bar{C}= 67.7250 \sigma = 22.5750\epsilon$  et  $\sigma/\bar{C}=0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



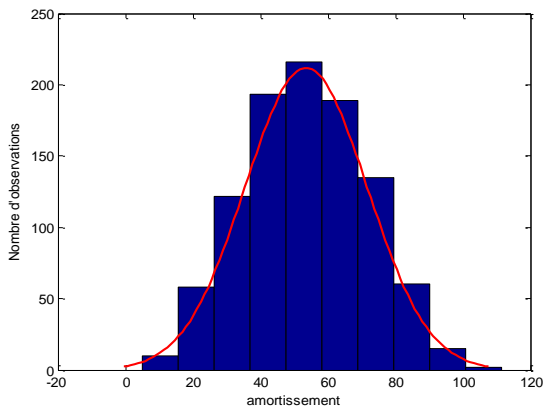
Réponse de la structure au niveau du 1<sup>er</sup> degré



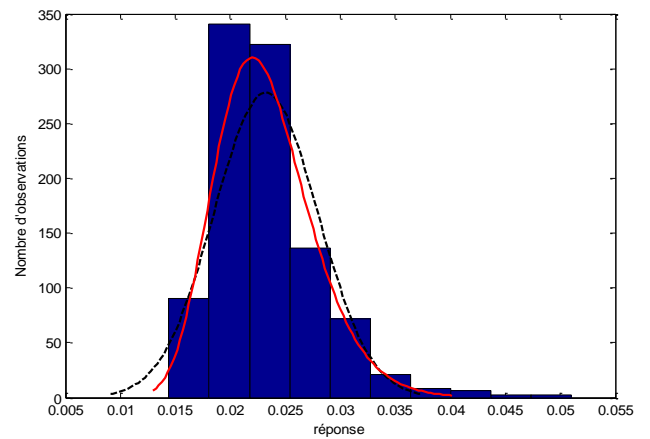
Histogramme des amortisseur générés pour ( $\bar{C}= 66.1500 \sigma = 22.0500\epsilon$  et  $\sigma/\bar{C}=0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



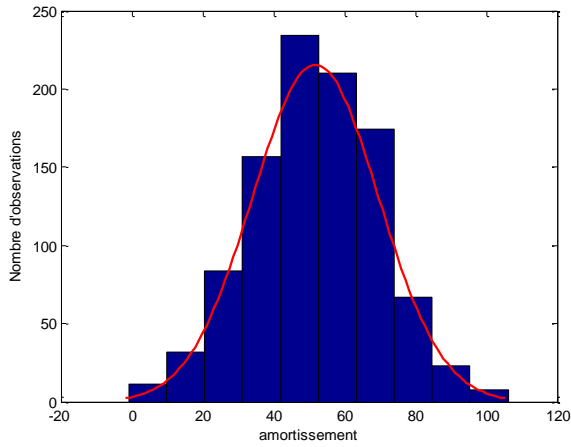
Réponse de la structure au niveau du 2<sup>ème</sup> degré



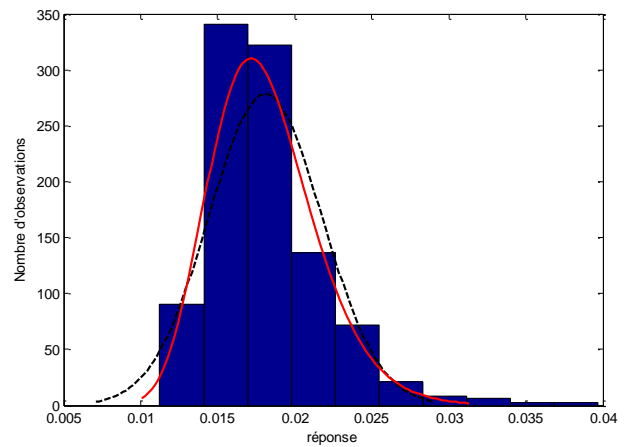
Histogramme des amortisseur générés pour ( $\bar{C}= 53.5500 \sigma = 17.8500\epsilon$  et  $\sigma/\bar{C}=0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



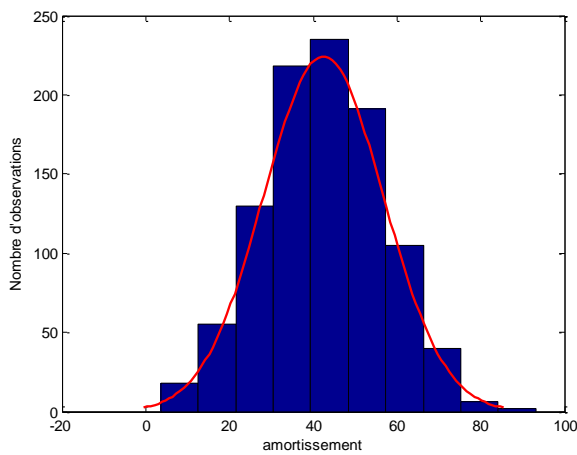
Réponse de la structure au niveau du 3<sup>ème</sup> degré



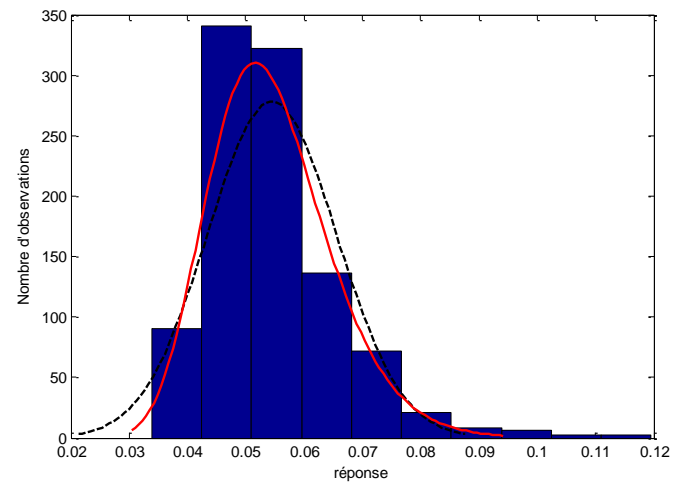
Histogramme des amortisseur générer pour ( $\bar{c}= 51.9750\sigma$   
 $=17.3250\sigma$  et  $\sigma/\bar{c}=0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



Réponse de la structure au niveau du 4<sup>ème</sup> degré



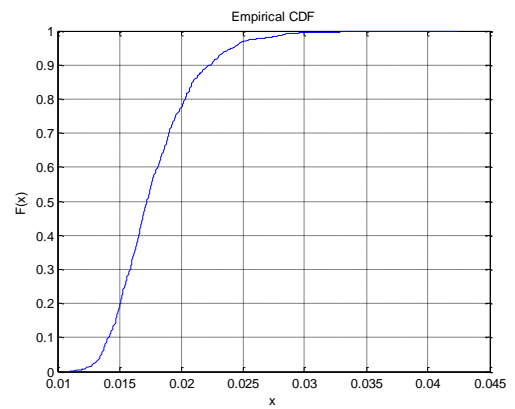
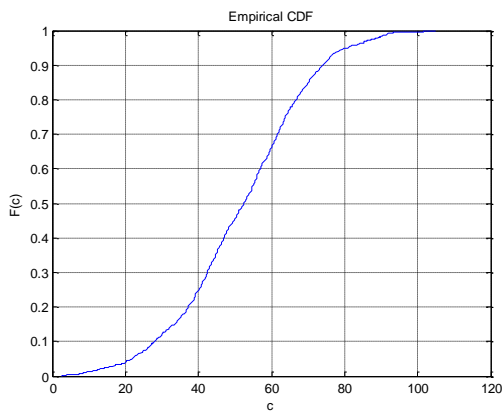
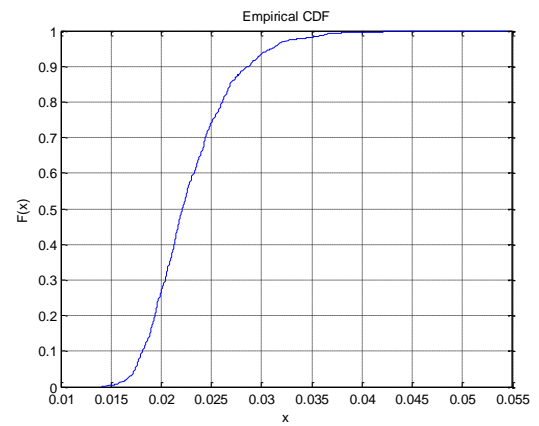
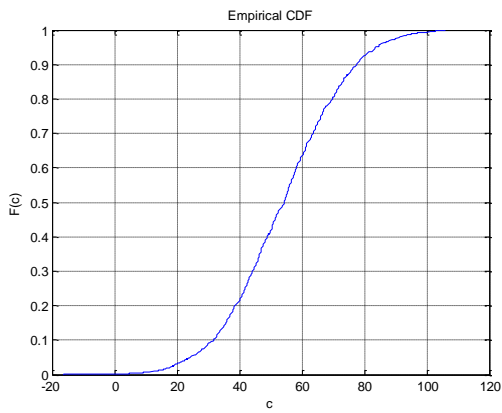
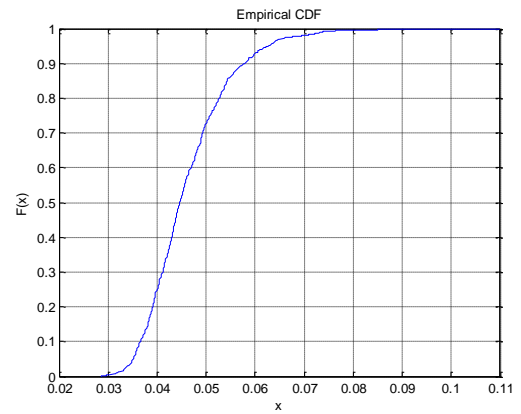
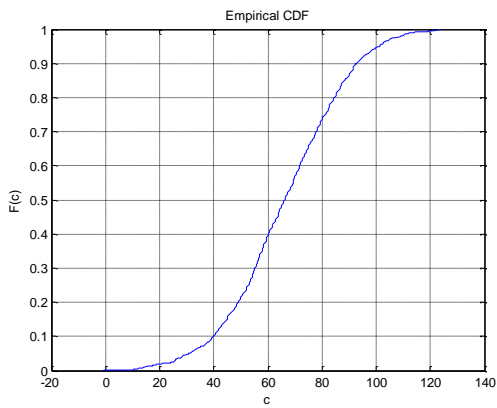
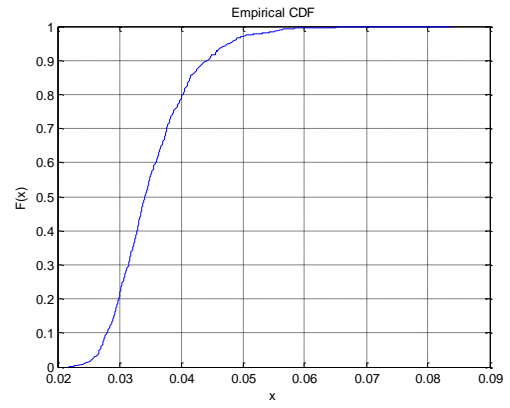
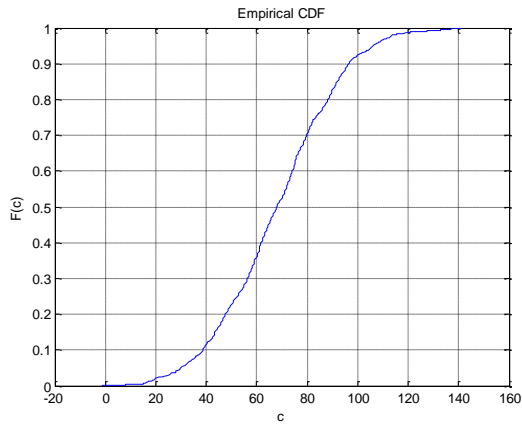
Histogramme des amortisseur générer pour ( $\bar{c}= 42.5250\sigma$   
 $=14.1750\sigma$  et  $\sigma/\bar{c}=0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



Réponse de la structure au niveau du 5<sup>ème</sup> degré

**Figure VI.4.** CDF des amortisseur générer et leurs réponses correspondante Carlo (loi normale) pour un  $\sigma/\bar{c}=0,33$

Contrairement au cas  $\sigma/\bar{c}=0,5$ . Lorsque le  $\sigma/\bar{c}=0,33$  le problème de dispersion sur la réponse ne se pose pas. Après ajustement des Histogrammes des réponses et amortissements on constate que la réponse suit une loi log normale.





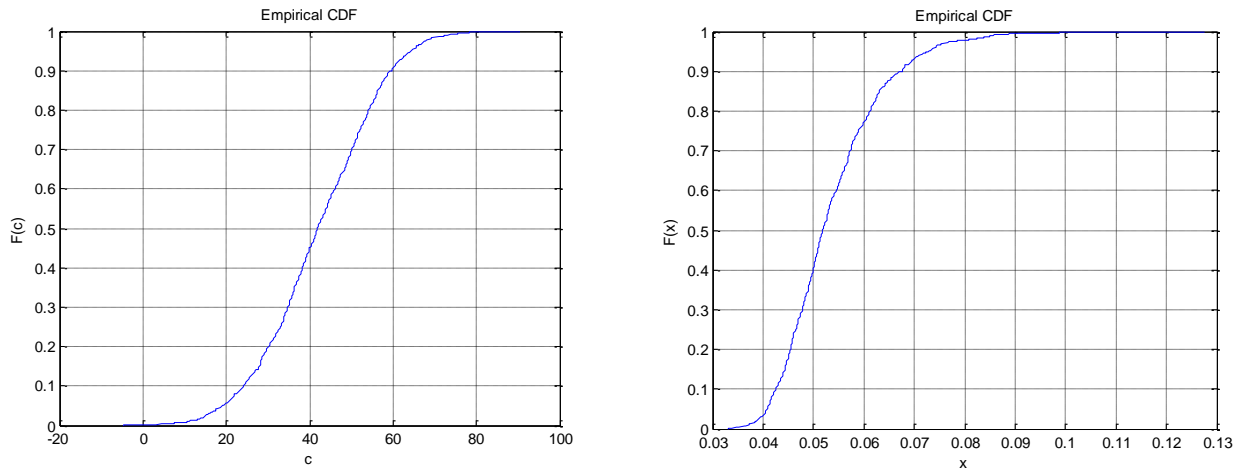


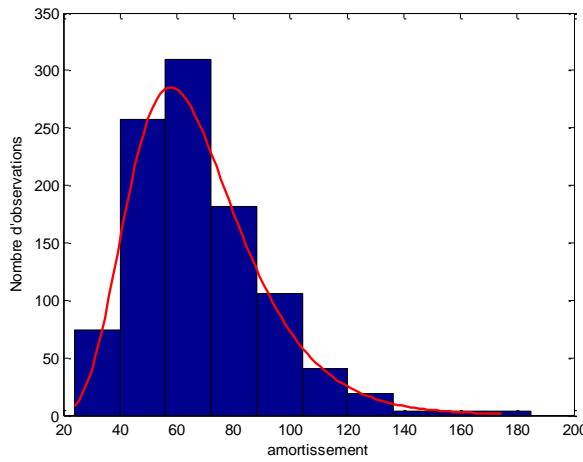
Figure VI.4. CDF des amortisseurs générés et leurs réponses correspondantes Carlo (loi normale) pour un  $\sigma/\bar{c}=0,33$

**b) Loi lognormale**

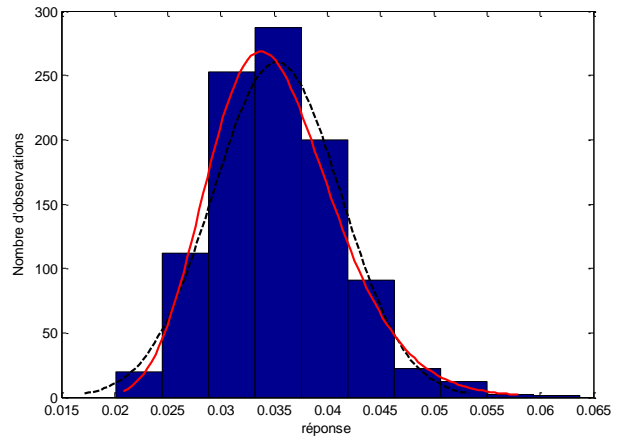
Tableau VI.5. Comparaison entre le modèle linéaire statistique et la simulation Monte Carlo (loi lognormale) pour  $\sigma/\bar{C} = 0,33$

N	valeur moyenne de la réponse		Erreur %	écart type de la réponse		Erreur %	amortissement		
	modèle linéaire statistique	simulation Monte Carlo		modèle linéaire statistique	simulation Monte Carlo		$\bar{c}$	$\sigma$	$\sigma/\bar{c}$
1	3,46	3,52	1,73	0,6	0,6	0,00	67.7250	22.5750	0,33
2	4,52	4,61	1,99	0,78	0,78	0,00	66.1500	22.0500	0,33
3	2,24	2,28	1,79	0,39	0,39	0,00	53.5500	17.8500	0,33
4	1,74	1,78	2,30	0,3	0,3	0,00	51.9750	17.3250	0,33
5	5,25	5,35	1,90	0,91	0,91	0,00	42.5250	14.1750	0,33
1	1,16	1,18	1,72	0,2	0,2	0,00	203.175	67.7250	0,33
2	1,51	1,54	1,99	0,26	0,26	0,00	198.4500	66.1500	0,33
3	0,75	0,76	1,33	0,13	0,13	0,00	160.6500	53.5500	0,33
4	0,58	0,59	1,72	0,099	0,1	1,01	155.9250	51.9750	0,33
5	1,75	1,78	1,71	0,3	0,3	0,00	127.5750	42.5250	0,33
1	0,7	0,72	2,86	0,12	0,12	0,00	338.6250	112.8750	0,33
2	0,9	0,93	3,33	0,16	0,16	0,00	330.7500	110.2500	0,33
3	0,45	0,46	2,22	0,078	0,08	2,56	267.7500	89.2500	0,33
4	0,35	0,36	2,86	0,059	0,06	1,69	259.8750	86.6250	0,33
5	1,05	1,08	2,86	0,18	0,18	0,00	212.6250	70.8750	0,33
1	0,36	0,37	2,78	0,058	0,059	1,72	677.2500	225.7500	0,33
2	0,45	0,46	2,22	0,078	0,078	0,00	661.5000	220.5000	0,33
3	0,22	0,23	4,55	0,039	0,03887	-0,33	535.5000	178.5000	0,33
4	0,18	0,18	0,00	0,028	0,029	3,57	519.7500	173.2500	0,33
5	0,52	0,53	1,92	0,091	0,0913	0,33	425.2500	141.7500	0,33

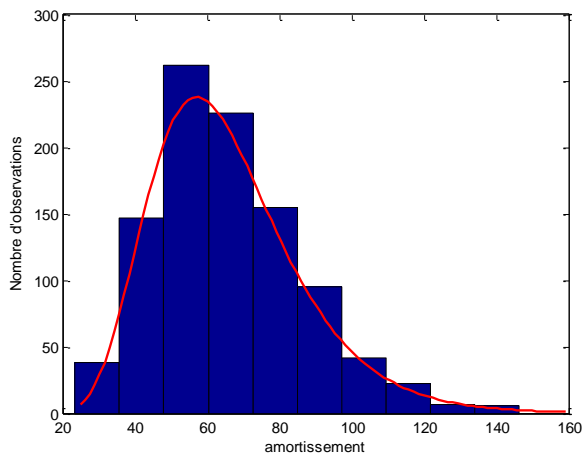
Le modèle linéaire est dans le bon intervalle avec la simulation de Monte Carlo même pour  $\sigma/\bar{c} = 0,33$  quel que soit la valeur de  $\bar{c}$ .



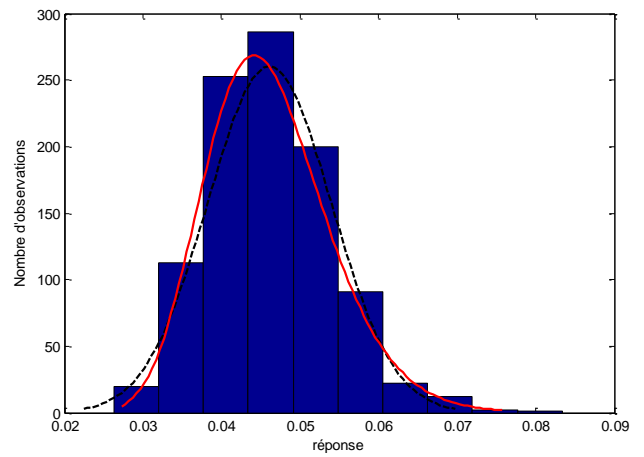
Histogramme des amortisseur générés pour ( $\bar{c} = 67.7250 \sigma = 22.5750$  et  $\sigma/\bar{c} = 0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



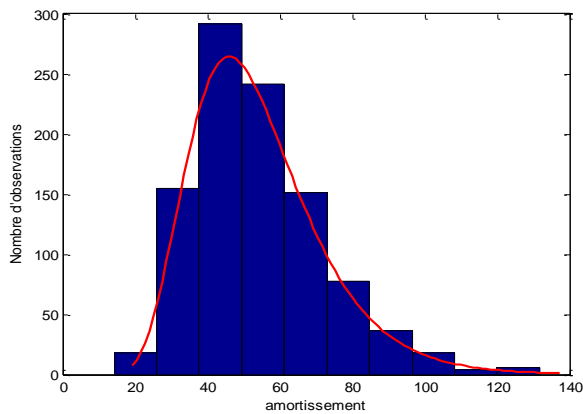
Réponse de la structure au niveau du 1<sup>er</sup> degré



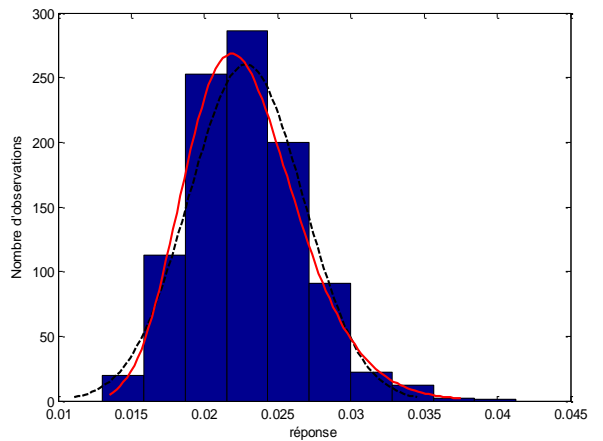
Histogramme des amortisseur générés pour ( $\bar{c} = 66.1500 \sigma = 22.0500$  et  $\sigma/\bar{c} = 0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



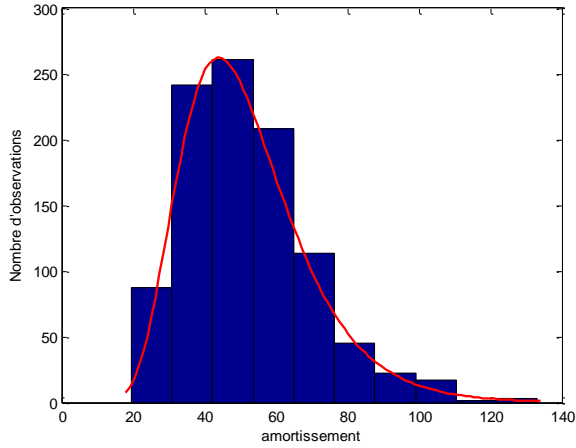
Réponse de la structure au niveau du 2<sup>ème</sup> degré



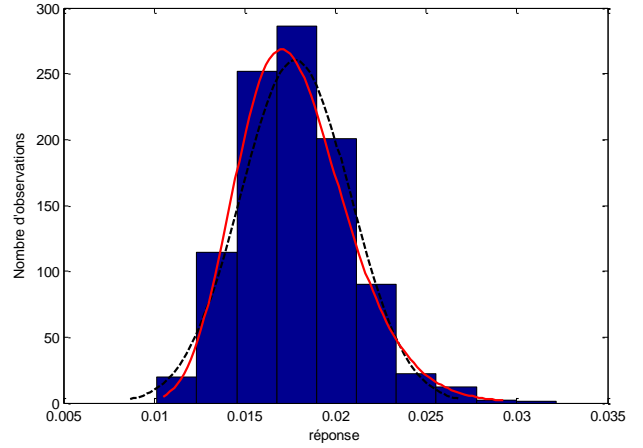
Histogramme des amortisseur générés pour ( $\bar{c} = 53.5500 \sigma = 17.8500$  et  $\sigma/\bar{c} = 0,33$ ) par la méthode Monte Carlo



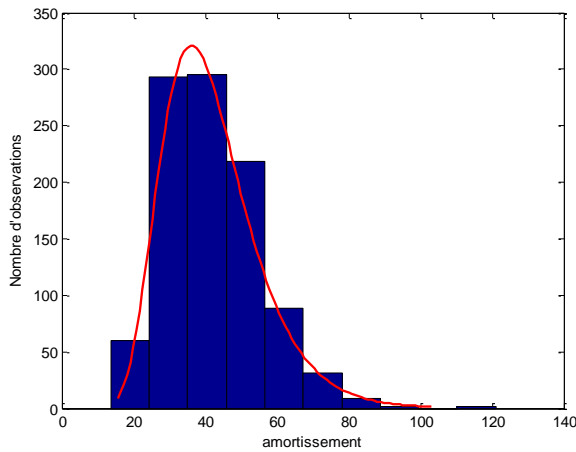
Réponse de la structure au niveau du 3<sup>ème</sup> degré



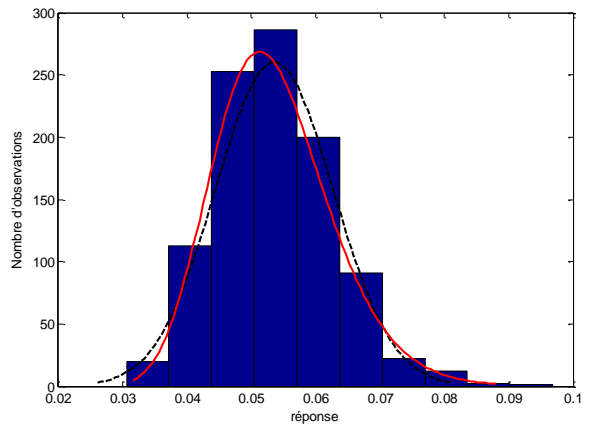
Histogramme des amortisseur générés pour  $(\bar{c}= 51.9750\sigma =17.3250\text{et } \sigma/\bar{c}=0,33)$  par la méthode Monte Carlo



Réponse de la structure au niveau du 4<sup>ème</sup> degré



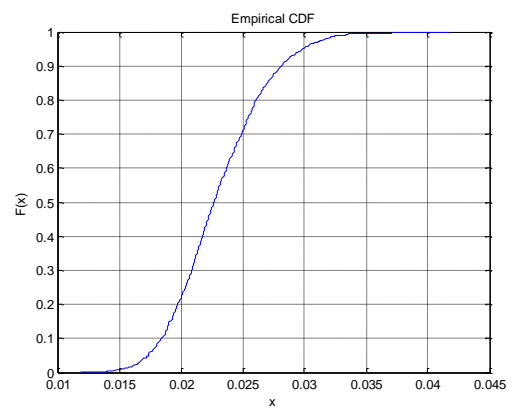
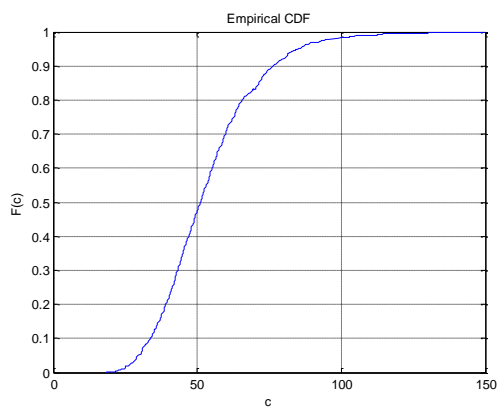
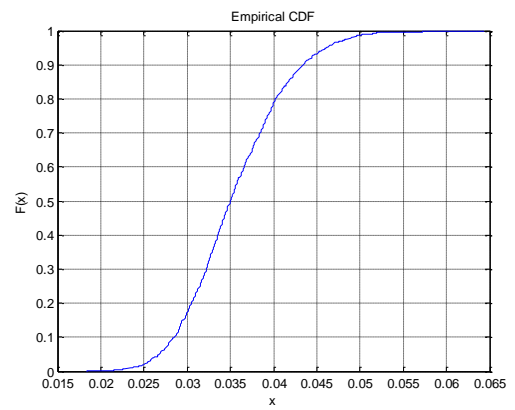
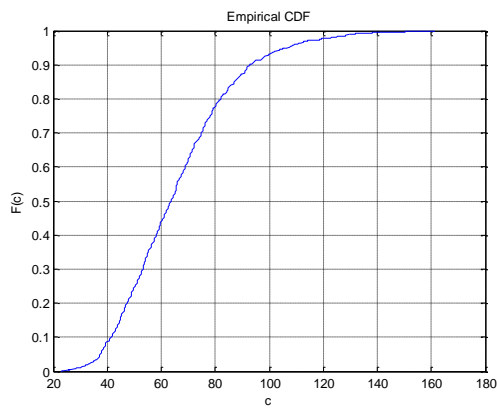
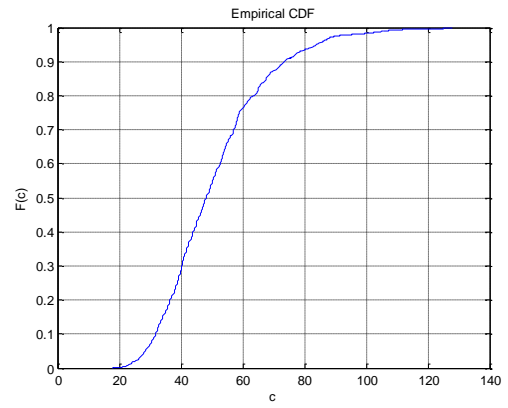
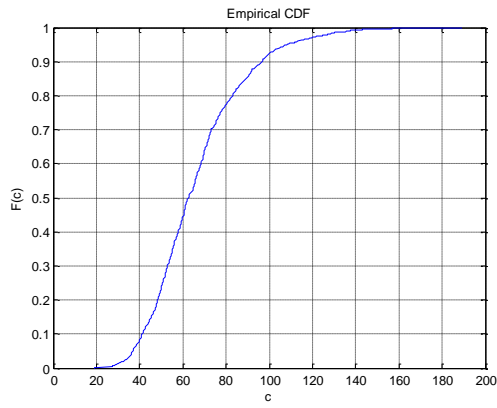
Histogramme des amortisseur générés pour  $(\bar{c}= 42.5250\sigma =14.1750\text{et } \sigma/\bar{c}=0,33)$  par la méthode Monte Carlo

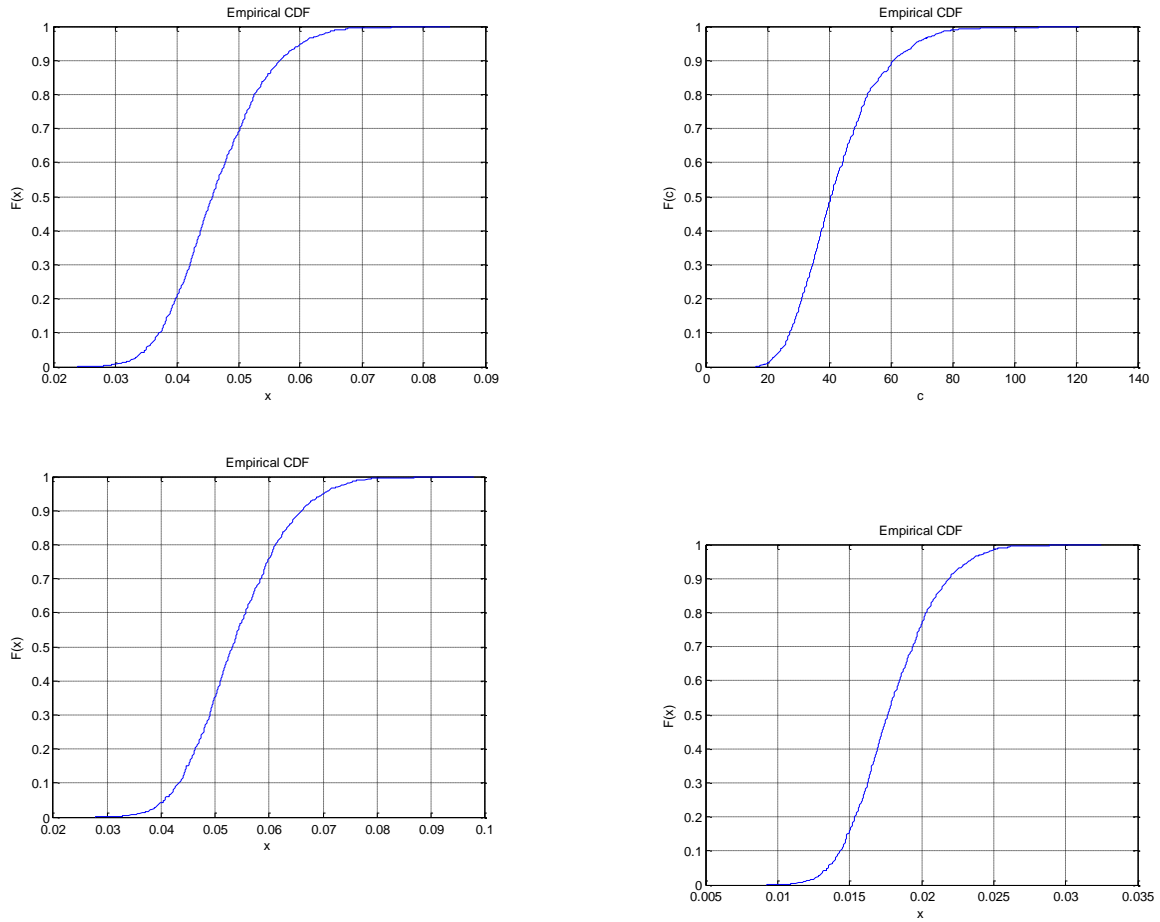


Réponse de la structure au niveau du 5<sup>ème</sup> degré

**Figure VI.4.** CDF des amortisseurs générés et leurs réponses correspondantes (loi lognormale) pour un  $\sigma/\bar{c}=0,33$

Après ajustement des Histogrammes des réponses et amortissements on constate que la réponse suit la même loi de probabilité quel que soit la valeur de  $\bar{c}$ .





**Figure VI.4.** CDF des amortisseur générer et leurs réponses corespondante Carlo (loi lognormale) pour un  $\sigma/\bar{c}=0,33$

# **CONCLUSIONS GENERALES**

## Conclusions générales

Dans le cadre de ce mémoire de magister, nous avons été amenés à étudier l'influence de l'amortissement incertain sur la réponse dynamique des structures.

Le modèle linéaire statistique exposé permet une bonne prédiction de la réponse pour connaître les propriétés statistiques de l'amortissement. Les erreurs introduites par la technique de linéarisation sont généralement de petite taille. Une autre source d'erreurs peut être représentée par les valeurs relatives de  $\bar{c}$  et  $\sigma$ .

Pour vérifier le modèle linéaire statistique, la technique de simulation de Monte Carlo a été utilisée. Pour les générations des valeurs de l'amortissement, il a été nécessaire de déterminer le nombre optimal d'échantillons sur la base d'une procédure de calcul basée sur la stabilité des fluctuations des paramètres statistiques de l'estimateur de la probabilité de défaillance retenue et ceci pour chacune des deux lois de probabilité (loi normale et log normale). Pour les deux lois de probabilités sélectionnées, la convergence de la méthode de Monte Carlo a été obtenue pour un nombre minimum  $N$  d'échantillon égal à 1500.

Dans le tableau VI.4, lorsque  $\sigma/\bar{c} = 0.5$  l'erreur est considérablement plus élevée que dans les autres cas, la taille de l'écart-type par rapport à la moyenne, donne une probabilité de choisir des valeurs négatives que nous ne pouvons pas négliger. Si cela arrive, une grande dispersion dans la réponse calculée par une simulation Monte Carlo est très probable. Cette situation est typique lorsque l'écart type est important et la valeur moyenne de l'amortissement est très petite (Dans l'exemple considéré l'amortissement de cinq millièmes de l'amortissement critique), par contre la distribution log normale est susceptible de donner des résultats plus réalistes (Tableau VI.3). Dans le tableau VI.6, pour la même valeur de la moyenne et l'écart-type qui a été réduite à un tiers de la moyenne les erreurs sont remarquablement petites.

Si l'incertitude de l'amortissement est grande, l'hypothèse d'une distribution normale doit être abandonnée afin de prévenir une valeur négative de  $c$ .

Le modèle linéaire est dans le bon intervalle avec la simulation de Monte Carlo en utilisant une loi log normale même pour des écarts considérables de  $c$  par rapport à  $\bar{c}$ .

Très souvent dans les cas pratiques les valeurs extrêmement faibles de l'amortissement, ne se produisent pas. Dans de nombreux ouvrages de génie civil, l'amortissement est généralement estimé entre cinq et onze pour cent de l'amortissement critiques. Pour ces valeurs l'écart type de la réponse peut varier de un à vingt fois l'écart type de l'amortissement, ce qui rend la tâche d'estimer l'amortissement est assez critique.

Cette étude a montré l'importance de la prise en considération des incertitudes sur les caractéristiques structurales dans la conception et le design des structures. Il a été montré que les valeurs de coefficient de variation de fluctuations de la réponse sont de l'ordre de 2.61% à 25.72% pour le modèle linéaire, de 2.46% à 25.21% pour une simulation Monte Carlo en utilisant la loi log normale et de 2.44% à 40.21% pour une simulation Monte Carlo en utilisant la loi normale. Cette variabilité très importante de la réponse structurale n'exclue pas l'occurrence de niveaux de sollicitation très importants rendant la structure très vulnérable si celle-ci a été dimensionnée pour des seuils moyens de réponse.

Cette étude peut être étendue en vue de prendre en considération les effets des incertitudes systématiques induites en général par l'ingénieur dans les valeurs adoptées pour les paramètres dynamiques (masse, rigidité, fréquence propre de vibration), et à l'intégration des aspects fiabilistes dans la conception des structures vis-à-vis des séismes.



**References bibliographiques**

- **A. KAREEM AND W.-J .SUN.** Dynamic response of structures with uncertain damping, Eng. Struct. 1990, vol. 12, January.
- **ALAIN BATAILLY.** Exporting Ansys FEM models into Matlab mass and stiffness matrices.
- **ALAIN CAPRA. VICTOR DAVIDOVICI,** calcule dynamique des structures en zone sismique.
- **ALEXANDER D. POULARIKAS ZAYED M. RAMADAN.** Adaptive Filtering Primer With Matlab.
- **AMAR REBBOUH.** Statistique Descriptive Calcul de Probabilités et variables aléatoires avec rappels de cours et problèmes corrigés, Edition 2006.
- **ANDY H. REGISTER.** A guide to Matlab object-oriented programming.
- **ANDREJ S. NOWAK, KEVIN R. COLLINS.** Reliability of structures.
- **ANIL K. CHOPRA.** Dynamics of structures, Theory and Application to Earthquake Engineering.
- **B. DEMIDOVITCH.** Recueil D'exercices et de Problèmes d'Analyse Mathématique.
- **BEER, M.; MÖLLER, B.; LIEBSCHER, M.** Processing uncertainty in structural analysis, design and safety assessment, Institute of Structural Analysis, Dresden University of Technology.
- **BEN AHMED BAIZID.** Effet de l'incertitude inhérente à l'amortissement sur la réponse des structures sous excitations sismiques.
- **C. PROPPE, H.J. PRADLWARTER, G.I. SCHUELLER,** Equivalent linearization and Monte Carlo simulation in stochastic dynamics, Probabilistic Engineering Mechanics 18 (2003) 1–15.
- **C. SOIZE.** Modélisation probabiliste, identification et propagation des incertitudes dans les modèles numériques des systèmes mécaniques complexes.
- **DAVID P. LANDAU, KURT BINDER.** A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics.
- **D. MOENS, D. VANDEPITTE.** Envelope frequency response function calculation of uncertain structures.

- **DIMITRIS PITILAKIS.** Soil-Structure Interaction Modeling Using Equivalent Linear Soil Behavior In The Substructure Method.
- **HAO ZHANG , ROBERT L. MULLEN , RAFI L. MUHANNA .** Interval Monte Carlo methods for structural reliability, *Structural Safety* 32 (2010) 183–190.
- **H. JENSEN AND W. D. IWAN.** Response variability in structural dynamics, *Earthquake eng. struct. dyn.* 20, 949-959 (1991)
- **H.K. JEONG, R.A. SHENOI.** Probabilistic strength analysis of rectangular FRP plates using Monte Carlo simulation, *Computers and Structures* 76 (2000) 219-235.
- **H.W.J.VAN DEN BERG.** Robust design of structures using uncertainty methods combined with Component Mode Synthesis, *DCT* 2005.122.
- **HINRICH MATZINGER.** Aide mémoire d'analyse.
- **HONGZHOU WANG and HOANG PHAM,** survey of reliability and availability evaluation of complex networks using Monte Carlo techniques p 187-204.
- **HOWARD B. WILSON, LOUIS H. TURCOTTE, DAVID HALPERN.** *Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using MATLAB.*
- **IVAN T DIMOV.** Monte Carlo methods for applied scientists.
- **J.T. LAPRESTE, F. JURIE , M. DHOME, F. Chaumette,** Nouvelle approche pour le calcul du jacobien inverse en asservissement visuel 2D.
- **JEAN-PIERRE PROVOST, GERARD VALLEE.** La physique à travers le filtre des mathématiques avec éléments d'analyse numérique *Cours et applications.*
- **JOHN G. PROAKIS, MASOUD SALHI.** *Contemporary Communication Systems Using Matlab.*
- **K.-H. NG, C.A. FAIRFIELD.** Monte Carlo simulation for arch bridge assessment, *Construction and Building Materials* 16 (2002) 271–280.
- **LOUIS LAURENCELLE.** Hasard nombre aléatoires et méthode Monte Carlo.
- **LUIGI CARASSALE, GIOVANNI SOLARI.** Monte Carlo simulation of wind velocity fields on complex structures , *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 94 (2006) 323–339.
- **MAURICE PENDOLA, ALAA MOHAMED, PATRICK HORNET, MAURICE LEMAIRE.** fiabilité des structures en contexte d'incertitudes statistiques, *xvème congrès français de mécanique (Nancy, 3 – 7 septembre 2001).*
- **N. PISCUNOV.** calcul différentiel et intégrale.

- **NILANJAN SAHA, D. ROY.** Variance-reduced weak Monte Carlo simulations of stochastically driven oscillators of engineering interest, *Journal of Sound and Vibration* 305 (2007) 50–84.
- **PAOLO CARAVANI and WILLIAM T. THOMSON.** Frequency Response of a Dynamic System with Statistical Damping, *AIAA JOURNAL* VOL 11, N°.2; p 170-171-172-173, (1973).
- **PECKER ALAIN.** *Dynamique des structures et des ouvrages*, Edition 2006.
- **RAYW. CLOUGH, JOSEPH PENZIEN.** *Dynamics of structures*.
- **REGLES PARASISMIQUES ALGERIENNES RPA99**, (1999). Centre Nationale de Recherches Appliquées en Génie parasismique, D.T.R.-B.2.48, Alger.
- **REUVEN Y. RUBINSTEIN, DIRK P. KROESE.** *Simulation And The Monte Carlo Method*.
- **RUBINO GERARDO et TUFFIN BRUNO** 2007. *Simulations et méthodes de Monte Carlo*, technique de l'ingénieur, AF600.
- **S.R. OTTO and J.P. DENIER**, *An Introduction to Programming and Numerical Methods in MATLAB*.
- **SIU KUI AU, ZHI-HUA WANG, SIU-MING LO**, Compartment fire risk analysis by advanced Monte Carlo simulation, *Engineering Structures* 29 (2007) 2381–2390.
- **SONDIPON ADHIKARI.** *Damping Models for Structural Vibration*.
- **STEVEN T. KARRIS.** *Numerical Analysis Using MATLAB and Excel*.
- **SYLVIE MELEARD.** *Probabilités*, technique de l'ingénieur, AF165.
- **TILIOUINE, B.** *Dynamiques des structures, Tome 1 : Aspects Vibratoires*.
- **TILIOUINE, B ET ZERMOUT (2003).** Sur les spectres de réponse des systèmes a paramètres incertains. Proc. Colloque international, Risque vulnérabilité et fiabilité dans les structures.
- **WENDY L. MARTINEZ, ANGEL R. MARTINEZ.** *Computational Statistics Handbook with MATLAB*.
- **WILLIAM M. BULLEIT, M.ASCE**, Uncertainty in Structural Engineering, Practice Periodical On Structural Design And Construction , Asce / February 2008.

- **WON YOUNG YANG , WENWU CAO , TAE-SANG CHUNG , JOHN MORRIS.** Applied Numerical Methods Using Matlab.
- **Y. G. ZHAO, T. ONO and H. IDOTA,** response uncertainty and time variant reliability analysis for hysteretic MDF structures, Earthquake Engng. Struct. Dyn. 28, 1187-1213 (1999).
- **YOUNG W. KWON ,HYOCHOONG BANG.** The Finite Element Method using MATLAB.
- **ZERMOUT SID AHMED.** investigation de la réponse stochastique des structures sous excitations sismiques, thèse de magister ENP.