

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURS ET DE LA**  
**RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
Ecole Nationale Polytechnique

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

***Projet de fin d'études***

***En vue de l'obtention du diplôme d'Ingénieur d'Etat en Génie  
Mécanique***

***THEME***

**Etude et simulation des robots à câbles**

Proposé et dirigé par :

**Pr M. BOUAZIZ**

Etudié par :

**KHEDIM Nouredine**

**Promotion : 2012**

*Ecole Nationale Polytechnique 10, Avenue Hassen Badi BP182, 16200 El-Harrach, Alger, Algérie*

## ملخص :

الروبوتات المتوازية ذات الكابل أنواع جديدة من الروبوتات المتوازية التي تتميز باستخدام الكابلات بدلا من الرافعات. في هذا العمل المتواضع هدفي هو تصميم نموذج مختلف أنواع الروبوتات المتوازية ذات الكابل.

نأخذ في الإعتبار ثلاثة نماذج: روبوت مع 2 كابلات درجة واحدة من الحرية (1 د.ح) لضمان الانتقال الخطي للنهية في بعد واحد، روبوت 3 كابلات مع اثنين من درجات الحرية (2 د.ح) مع الحركة في المستوي ببعدين، و الروبوت 4 كابلات مع اثنين من درجات الحرية (2 د.ح) مع الحركة في المستوي ببعدين. وتتبع هذه النماذج من الروبوتات بمحاكاة (مع ماتلاب) لانتقال النهاية، والتغيرات في أطوال والزوايا، والتوتر.

**الكلمات المفتاحية:** الروبوتات المتوازية ذات الكابل، الروبوتات ذات الكابل.

## Résumé :

Les robots parallèles à câbles sont de nouveaux types des robots parallèles qui se caractérisent par l'utilisation de câbles au lieu de vérins.

L'objectif a consisté de modéliser les différents types des robots parallèles à câbles. Trois structures seront considérées : un robot à 2 câbles à un degré de liberté (1 ddl) permettant d'assurer un déplacement linéaire de l'organe terminal selon une dimension, un robot à 3 câbles à deux degrés de liberté (2 ddl) avec un mouvement planaire à deux dimensions et un robot à 4 câbles à deux degrés de liberté (2 ddl) avec un mouvement planaire à deux dimensions.

La modélisation de ces robots est suivie d'une simulation (à l'aide du logiciel Matlab) des déplacements de l'organe terminal, des variations des longueurs, des angles, et des tensions sur le câble.

**Mots clés :** Robot parallèle à câbles, robot à câbles.

## Summary:

Cable parallel robots are new types of parallel robots which characterized by the use of cables instead of cylinders. In this modest work that I realized my goal was to model various types of parallel robots cables.

Three structures are considered: a robot with 2 cables one degree of freedom (1 df) to ensure a linear displacement of the end effector in one dimension, a 3 cables robot with two degrees of freedom (2 df) with planar movement in two dimensional and a 4 cables robot with two degrees of freedom (2 df) with planar movement in two dimensional.

The modeling of these robots is followed by a simulation (with Matlab) of displacement of the end effector, changes in lengths and angles, and tension.

**Keywords:** Cable direct driven robots, parallel robots.

# Remerciements

Au terme de ce Mémoire, je tiens à remercier tout naturellement en premier lieu **Dieu le tout Puissant** qui m'a donné la force, le courage et la patience de mener à terme ce travail.

Mes remerciements vont à Monsieur le Professeur, Mohamed BOUAZIZ, qui a bien voulu accepter de m'encadrer, de son précieux conseil et de sa disponibilité.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Abdellouhab ZAATRI de l'Université de Constantine pour l'aide très précieuse qu'il m'a prodiguée et pour ses orientations.

Je remercie les membres du jury qui ont bien voulu examiner ce modeste travail.

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants qui ont contribué à ma formation.

Mes sentiments vont également à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# DEDICACES

*Je dédie ce travail :*

*À mes très chers parents, mon père **Mohammed** et ma mère **Halima**, qui ont sacrifié leurs vies pour que je réussisse dans mes cursus scolaire et universitaire. Grâce à eux, j'ai pu atteindre ce niveau. Ils ont été toujours à mon côté en me soutenant dans les moments les plus difficiles. Ils étaient parents et amis. Que **Dieu** les bénisse et leurs donne bonne santé.*

*À ma grand-mère.*

*À mes frères et mes sœurs*

*À mon grand frère Abdelkader*

*À mes amis Amokrane mahdi, Bouzini said, Marhoune hamza, Djamil belkacem et à tous mes amis*

*À tous mes camarades de classe Mécanique promotion 2012.*

*Noureddine*



# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>01</b>
------------------------------------	-----------

## I. Chapitre I : ETAT DE L'ART

I.1 INTRODUCTION .....	03
I.2 PRESENTATION D'UN ROBOT PARALLELE A CABLES.....	04
I.3 AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES ROBOTS PARALLELES A CABLES.....	05
I.4 APPLICATIONS DES ROBOTS PARALLELES A CABLES.....	06
I.5 MODE DE CONTROLE PID DES ROBOTS PARALLELES A CABLES.....	10
I.6 CONCLUSION.....	12

## II. Chapitre II : MODELISATION DES ROBOTS PARALLELES A DEUX CABLES

II.1 NTRODUCTION.....	13
II.2 ROBOT PARALLELE A DEUX CABLES.....	13
II.3 MODELISATION GEOMETRIQUE DU ROBOT A DEUX CABLES.....	13
II.3.1 Modèle Géométrique Inverse (MGI).....	14
II.3.2 Modèle Géométrique Direct (MGD).....	14
II.4 MODELISATION CINEMATIQUE DIRECT .....	14

II.5	MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT.....	14
II.7	SIMULATION.....	16
II.7.1	Simulation du Modèle Géométrique Inverse .....	16
II.7.2	Variation des longueur des cables.....	18
II.8	CONCLUSION.....	18

### III. Chapitre III : MODELISATION DES ROBOTS PARALLELES A TROIS CABLES

III.1	INTRODUCTION.....	19
III.2	ROBOT PARALLELE A TROIS CABLES.....	20
III.3	MODELISATION GEOMETRIQUE DU ROBOT A TROIS CABLES.....	21
III.3.1	Modèle Géométrique Inverse (MGI).....	22
III.3.2	Modèle Géométrique Direct (MGD).....	23
III.4	MODELISATION CINEMATIQUE .....	24
III.4.1	Modèle Cinématique Inverse.....	24
III.4.2	Modèle Cinématique Direct.....	25
III.5	MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT.....	26
III.5.1	Modèle Dynamique de l'effecteur .....	26
III.5.2	Structure mécanique des moteurs .....	26
III.5.3	Modèle dynamique du système .....	26
III.6	L'ANALYSE STATIQUE DES FORCES.....	30
III.7	SIMULATION.....	33

III.7.1	Simulation du Modèle Géométrique Inverse .....	34
III.7.2	Simulation de la trajectoire de l'organe terminal .....	37
III.7.3	Variation des longueurs des câbles .....	40
III.7.4	Variation des angles des câbles par rapport à l'axe des abscisses.....	42
III.7.5	Simulation des tensions des câbles.....	42
III.8	CONCLUSION.....	43

#### IV. Chapitre IV : MODELISATION DES ROBOTS PARALLELES A QUATRE CABLES

IV.1	INTRODUCTION.....	44
IV.2	ROBOT PARALLELE A QUATRE CABLES.....	45
IV.3	MODELISATION GEOMETRIQUE DU ROBOT A QUATRE CABLES.....	46
IV.3.1	Modèle Géométrique Inverse (MGI).....	46
IV.3.2	Modèle Géométrique Direct (MGD).....	47
IV.4	MODELISATION CINEMATIQUE .....	47
IV.4.1	Modèle Cinématique Inverse.....	47
IV.4.2	Modèle Cinématique Direct.....	48
IV.5	MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT.....	49
IV.5.1	Modèle Dynamique de l'effecteur .....	49
IV.5.2	Structure mécanique des moteurs .....	49
IV.5.3	Modèle dynamique du système .....	50
IV.6	L'ANALYSE STATIQUE DES FORCES.....	53

IV.7 SIMULATION.....	59
IV.7.1 Simulation du Modèle Géométrique Inverse .....	59
IV.7.2 Simulation de la trajectoire de l'organe terminal .....	63
IV.7.3 Variation des longueurs des cables .....	66
IV.7.4 Variation des angles des cables par rapport à l'axe des abscisses.....	67
IV.8 CONCLUSION.....	68
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>69</b>

## **BIBLIOGRAPHIE**

## **ANNEXE**

# LISTE DES FIGURES

<b>Figure (I.1):</b> Exemple de robot parallèle à câbles.....	04
<b>Figure (I. 2.a) :</b> Caméra contrôlée par un mécanisme à câbles.....	06
<b>Figure (I. 2 .b):</b> Exemple de positionnement dans un stade (courtoisie de Skycam).....	06
<b>Figure (I.3):</b> MariBot (Rosati 2007).....	07
<b>Figure (I.4):</b> robot à quatre câbles Transporte un baril.....	07
<b>Figure (I.5):</b> Robot parallèle à Câbles utilisé dans les centrales solaires.....	08
<b>Figure (I.6) :</b> Vue globale d'un robot à 3 câbles.....	08
<b>Figure (I.7):</b> Le prototype mécanique de STRING-MAN.....	09
<b>Figure (I.8):</b> NIST Robocrane et FALCON.....	09
<b>Figure (I.9):</b> NeReBot pour la réadaptation supérieure de membre avec 3 ddl.....	12
<b>Figure (II.1):</b> robot parallèle à deux câbles.....	13
<b>Figure (II.2):</b> Organigramme calculant les différentes longueurs des 2 câbles du robot.	16
<b>Figure (II.3):</b> Organe terminal en position initial.....	17
<b>Figure (II.4):</b> Organe terminal en position quelconque.....	17
<b>Figure(II.5):</b> Variations des longueurs des 2 cables.....	18
<b>Figure (III.1):</b> Robot à trois câbles dans la position initial.....	20
<b>Figure (III.2):</b> Robot parallèle à trois câbles.....	21
<b>Figure (III.3):</b> Organe terminal à l'état initial.....	22
<b>Figure (III.4):</b> Organe terminal après un déplacement.....	22
<b>Figure (III.5):</b> Tension et couple sur la poulie.....	26

<b>Figure (III. 6):</b> Force statique 3 câbles plan CDDRs.....	30
<b>Figure (III.7):</b> Organigramme des longueurs et des angles des 3 câbles de robot.....	34
<b>Figure (III.8):</b> Organe terminal en position initial.....	35
<b>Figure (III.9):</b> Organe terminal en position (2, 5).....	36
<b>Figure (III.10):</b> Organe terminal en position (5, -4).....	36
<b>Figure (III.11):</b> Organigramme traçant la géométrie à 3 câbles avec la trajectoire circulaire.....	37
<b>Figure (III.12):</b> trajectoire circulaire de rayon $R=R_{max}/2$ .....	38
<b>Figure (III.13):</b> Organigramme traçant les variations des longueurs et des angles des câbles.....	39
<b>Figure (III.14):</b> Variations des langueurs des 3 câbles du robot pour $R=R_{max}/3$ .....	40
<b>Figure (III.15):</b> Variations des langueurs des 3 câbles du robot pour $R=R_{max}$ .....	41
<b>Figure(III.16):</b> Variations des longueurs des câbles sous forme polaire.....	41
<b>Figure(III.17):</b> Variations des angles des câbles.....	42
<b>Figure(III.18):</b> Tensions du robot parallèle à trois câbles.....	43
<b>Figure(IV.1):</b> robot parallèle à quatre câbles .....	44
<b>Figure(IV.2):</b> robot à quatre câbles dans la position initial.....	45
<b>Figure (IV.3):</b> robot parallèle à quatre câbles.....	46
<b>Figure (IV.4):</b> Tension et couple sur la poulie.....	49
<b>Figure (IV.5):</b> Force statique 4 câbles plan CDDRs.....	54
<b>Figure (IV.6):</b> Organigramme des longueurs et des angles des 4 câbles de robot.....	56
<b>Figure (IV.7):</b> Organe terminal en position initial.....	60
<b>Figure (IV.8):</b> Organe terminal en position (14, 7).....	61

<b>Figure (IV.9):</b> Organe terminal en position (10, -17).....	62
<b>Figure (IV.10):</b> Organigramme traçant la géométrie à 4 câbles avec la trajectoire circulaire.....	62
<b>Figure (IV.11):</b> trajectoire circulaire de rayon $R=R_{max}/2$ .....	64
<b>Figure (IV.12):</b> Organigramme traçant les variations des longueurs et des angles des câbles.....	65
<b>Figure (IV.13):</b> Variations des longueurs des 4 câbles du robot pour $R=R_{max}$ .....	66
<b>Figure(IV.14):</b> Variations des longueurs des câbles sous forme polaire.....	67
<b>Figure(IV.15):</b> Variations des angles des câbles.....	67

# NOMENCLATEURS

$\theta_i$  : Les angles entre l'horizontal et les câbles

$x$  : Déplacement de l'organe terminal suivant l'abscisse

$y$  : Déplacement de l'organe terminal suivant l'ordonnée

$\dot{x}$  : Vitesse de l'organe terminal

$\ddot{x}$  : Accélération de l'organe terminal

$F_R$ : Force résultante de toutes les tensions des câbles appliqués sur l'organe terminal

$C_i$  : Coefficients d'amortissement visqueux de chaque arbre de moteur

$J_i$  : Inerties de chaque moteur

$L_b$  : Coté de la base (cadre)

$L_{i0}$  : Longueurs initiales des câbles

$L_{i0x}$  : Projection suivant  $x$  des longueurs initiales des câbles

$L_{i0y}$  : Projection suivant  $y$  des longueurs initiales des câbles

$L_i$  : Longueurs des câbles après un déplacement

$L_{ix}$  : Projection suivant  $x$  des longueurs des câbles après un déplacement

$L_{iy}$  : Projection suivant  $y$  des longueurs des câbles après un déplacement

$\Delta L_i$  : Variations des longueurs des câbles

$\dot{L}$  : Vecteur vitesse des trois câbles

$M^{-1}$  : Matrice Jacobienne inverse de CDDRs

$m$  : Masse de l'organe terminal

$\beta_i$  : Angles de rotation des poulies

$r$  : Rayon de la poulie de chaque moteur

$t_i$  : Tensions des câbles

$\tau_i$  : Couples appliqués par les moteurs

$I_n$  : Matrice d'identité de dimension  $(n \times n)$

$Z$  : Vecteur arbitraire de dimension  $n$ .

$S$  : Matrice d'identité de dimension  $(2n \times n)$

$S^+$  : Pseudo-inverse de  $S$  par la méthode de Moore-Penrose de dimension  $(n \times 2n)$ .

$n_i$  : Composantes du vecteur de noyau  $N$

$\alpha$  : Scalaire arbitraire

$\lambda$  : Scalaire arbitraire



L : Lagrangien

D : Energie dissipation

$E_c$  : Energie cinétique

$E_p$  : Energie potentielle

Introduction

Générale

## **INTRODUCTION GENERALE**

Ce Projet de Fin d'Etudes a été proposé par le laboratoire de Technologies Avancées (LATA) de l'Université de Constantine. Il concerne l'étude et la simulation des robots parallèles à câbles destinés à être utilisés dans le domaine de la réhabilitation, généralement pour handicapés.

Les robots parallèles à câbles sont un nouveau type de robots parallèles qui ont la particularité d'utiliser des liaisons constituées de câbles au lieu de vérins. Ils sont principalement constitués d'une base fixe, d'une plate-forme mobile (organe terminal), des câbles reliant en parallèle la plate-forme à la base et d'un ensemble de poulies motorisées.

Ces robots ont peu de pièces mobiles, avec des masses réduites, et sont les plus adaptés à des tâches demandant de hautes performances telles que la rapidité et la précision et procurent un grand espace de travail. En déplaçant les points de raccordement des câbles, il est possible d'obtenir des manipulateurs reconfigurables. De plus, ils sont faciles à construire et à transporter. Par contre, les principaux inconvénients de ces manipulateurs parallèles résident dans la nature des câbles qui ne peuvent travailler que dans un seul sens celui de la traction.

L'objectif de ce travail consiste à étudier et à simuler le fonctionnement des robots à câbles. Trois structures seront considérées : robot à 2 câbles, robot à 3 câbles et robot à 4 câbles.

Le mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à l'état de l'art concernant les robots à câbles. Nous présentons quelques applications importantes relatives aux robots parallèles à câbles ainsi que quelques approches de commande présentées dans la littérature.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une description détaillée de la structure des robots à deux câbles. Nous établirons les différents modèles à savoir le modèle

géométrique inverse (MGI), le modèle géométrique direct (MGD), le modèle cinématique direct (MCD), ainsi que le modèle dynamique (MD). Et on établit les programmes de simulation.

Le chapitre trois est dédié à l'étude de la structure des robots à trois câbles. On va étudier les différents modèles, à savoir le modèle géométrique inverse (MGI), le modèle géométrique direct (MGD), le modèle cinématique direct (MCD), le modèle cinématique inverse (MCI), ainsi que le modèle dynamique (MD). Nous avons implémenté un programme de commande permettant de simuler le déplacement de l'organe terminal (effecteur).

Le chapitre quatre concerne l'étude des robots à quatre câbles. Comme au chapitre précédent, on va étudier les différents modèles le MGI, le MGD, le MCD, le MCI et le MD. Nous avons implémenté un programme de commande permettant de simuler le déplacement de l'effecteur.

# *Chapitre I :*

## ETAT DE L'ART

## **I. INTRODUCTION**

Il existe plusieurs types de robots : robots à roues, robots marcheurs, robots à chenille, robots manipulateurs, etc....

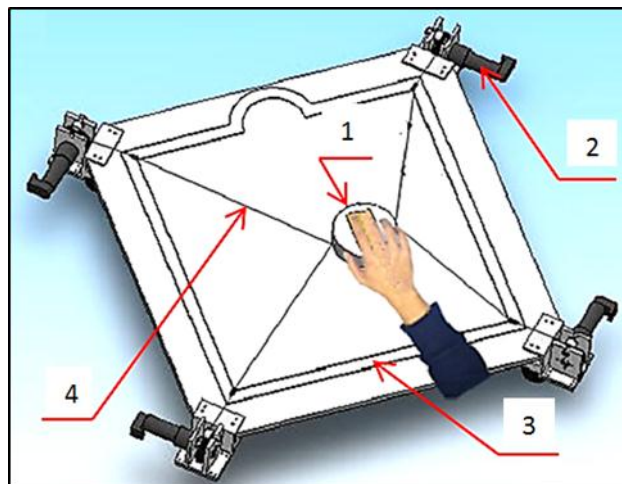
Les robots industriels sont les premiers à avoir été produits en grand nombre et ils sont encore la plus grande population robotique. Ces robots sont ceux qui se trouvent particulièrement sur les chaînes de montage, par exemple des robots soudeurs, de démolition, de nettoyage, d'emballage ou de surveillance. On trouve aussi en chirurgie médicale des robots qui se présentent sous forme de bras mécaniques couplés à un ordinateur ou par des bras articulés actionnés par le chirurgien et dont les mouvements sont reproduits par le robot en temps réel. Les robots domestiques peuvent faire de multiples tâches ou simplement nous divertir. Les robots militaires sont principalement utilisés pour la surveillance aussi bien dans les airs que dans la mer. Les robots explorateurs remplacent l'homme dans des environnements difficiles, par exemple pour prendre des photos de la planète. Lorsqu'on parle de robots, il ne faut pas oublier de mentionner les robots anthropomorphiques (robots ressemblant à l'être humain) qui sont probablement la principale motivation des roboticiens.

Aujourd'hui, il y a des nouveaux robots qui s'appellent robots à câbles. Ceux-ci sont à 2 ou plusieurs câbles. Ces robots peuvent se mouvoir suivant une direction (robots à 2 câbles), dans un plan ou dans l'espace (robots à 3 câbles ou plus). Nous allons nous intéresser aux robots dont le nombre de câbles est inférieur ou égal à 4 et dont le mouvement s'effectue dans un plan.

Dans ce chapitre, on va étudier l'état de l'art des robots à câbles, quelques applications relatives aux robots parallèles à câbles et l'approche de la commande PID.

## II. PRESENTATION D'UN ROBOT PARALLELE A CABLES

Un **robot parallèle à câbles** est un type particulier de robot parallèle utilisant des liaisons flexibles. Ces robots sont principalement constitués d'une base, d'une plate-forme mobile (organe terminal), de câbles reliant en parallèle la plate-forme à la base et d'un ensemble de treuils motorisés. Généralement, la base est fixe et chaque câble est attaché à la plate-forme à une de ses extrémités. Le câble est enroulé/déroulé par un des treuils à son autre extrémité. Les treuils sont habituellement solidaires de la base et, en agissant sur la longueur de leur câble respectif, ils permettent de contrôler la position et l'orientation de la plate-forme mobile. L'entraînement par câbles permet de réaliser des robots de grande dimension autorisant l'automatisation de tâches que les robots conventionnels ne peuvent pas réaliser.



**Figure (I.1):** Exemple de robot parallèle à câbles

- 1-Effecteur (organe terminal)
- 2-Poulie motorisé
- 3-Base
- 4-Câble

### III. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DES ROBOTS PARALLELES

#### A CABLES

Ce type de mécanisme présente malheureusement quelques particularités et inconvénients. La plus importante limitation, portant sur l'espace de travail, est due à l'action Unidirectionnelle des câbles pour la transmission des efforts, c'est à dire, le fait que les câbles ne peuvent que tirer l'effecteur, et pas le pousser. Aussi, le fait que les câbles soient des segments souples, et non des liens rigides, favorise les risques de vibration de l'effecteur mobile, ce qui occasionne une diminution de la précision du contrôle. Enfin, les interférences entre deux câbles ou entre un câble et l'effecteur peuvent également Limiter l'espace de travail, notamment lorsque les câbles sont nombreux et/ou croisés et/ou que les trajectoires à générer comportent des rotations de grande amplitude.

En revanche, ces inconvénients sont largement compensés par les nombreux avantages associés à l'actionnement par câbles d'une architecture parallèle. Tout d'abord, un grand espace de travail en comparaison avec les manipulateurs parallèles classiques, la masse et l'inertie de la partie mobile du mécanisme sont faibles étant donné que les actionneurs sont disposés sur la base fixe du manipulateur et que, tant que les dimensions du mécanisme sont raisonnables, les câbles sont légers.

En conséquence, les mécanismes parallèles actionnés par câbles ont la capacité de générer de grandes accélérations à l'effecteur (puisque la masse à déplacer est faible) et/ou de consommer peu d'énergie (puisque la puissance requise aux moteurs pour déplacer la plateforme mobile est moindre). De plus, ils ont une structure légère qui présente de bonnes propriétés dynamiques et facile à monter, à démonter, à stocker, à transporter et donc à utiliser. Leur géométrie (position des poulies actionnées à la base et position des points d'attache des câbles à l'effecteur) peut être aisément modifiée, mais cela requiert de vérifier que la nouvelle configuration conserve un espace atteignable capable de satisfaire aux exigences de l'application. Aussi, rapport charge utile/masse élevé, prix de construction réduit et économique et bonne portabilité.



#### IV. LES APPLICATIONS DES ROBOTS PARALLELES A CABLES

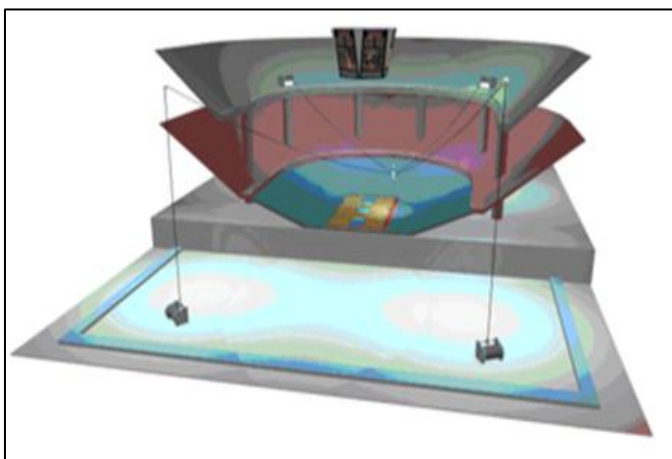
Il existe plusieurs applications des robots parallèles à câbles qu'on trouve dans les industries ainsi que dans la réhabilitation des handicapés. On citera quelques exemples d'applications typiques.

##### Application 1 :

L'application la plus répandue est bien entendu le Skycam (**Figure I.2.a**) et (**Figure I.2.b**). Une caméra robotisée utilisée pour la télédiffusion des parties de football. Celle-ci permet, entre autres, d'obtenir des plans de vue beaucoup plus près du terrain, ce qui amène une nouvelle dimension au spectacle télévisuel. Dans ce cas, il aurait été impensable de réaliser un robot à pattes rigides transportant la caméra considérant les dimensions du terrain. Pour cette même raison, d'autres ont utilisé ces mécanismes pour la manipulation et la manutention d'objets sur de grands espaces de travail.



**Figure (I. 2.a) :** Caméra contrôlée par un mécanisme à câbles

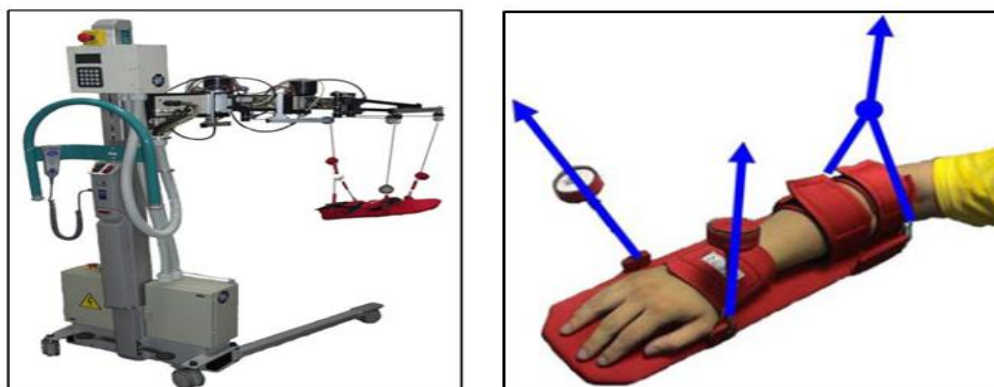


**Figure (I. 2 .b):** Exemple de positionnement dans un stade (courtoisie de Skycam)

##### Application 2 :

En particulier MariBot est un perfectionnement de NeReBot (neuro-robot de réadaptation), qui est à dispositif câble-suspendu pour la réadaptation supérieure de membre des patients de poteau-course, **Figure (I.3)**.

Trois fils en nylon permettent de convertir le mouvement tournant de trois moteurs à courant continu en trajectoire 3D du bras du patient.



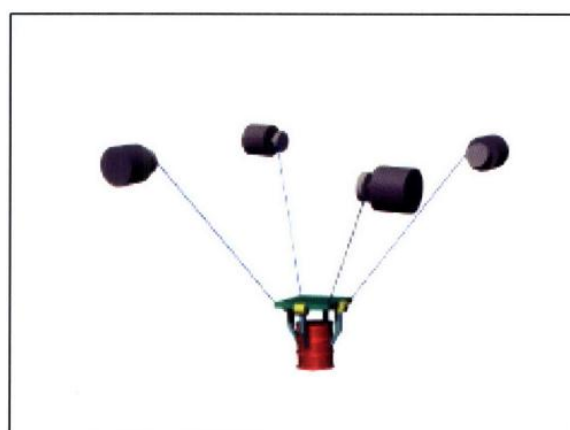
a. Vue du plein système

b. Arrangement de la plate-forme pour les bras supérieurs

**Figure (I.3):** MariBot (Rosati 2007)

### Application 3 :

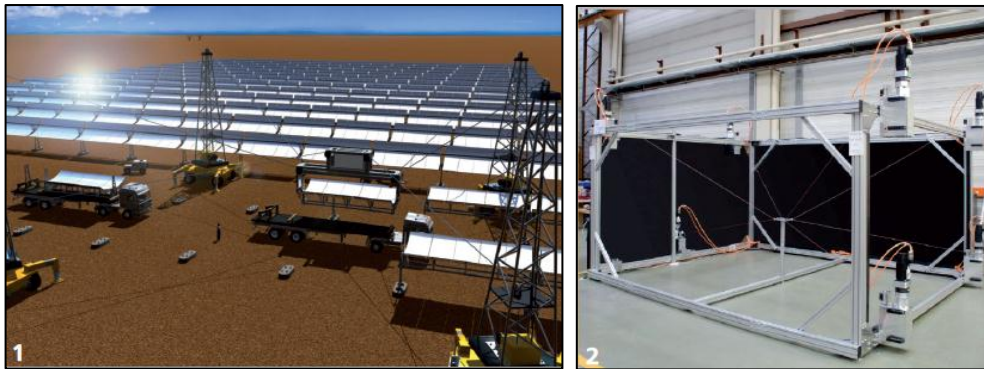
Un mécanisme parallèle a l'avantage d'être plus léger, rapide et d'avoir moins d'inertie, comme tous les moteurs peuvent être fixés à la base au lieu d'être répartis sur les membrures en mouvement. Cependant, il a tendance à être plus volumineux et à avoir un espace de travail restreint. C'est dans ce contexte que les mécanismes parallèles à câbles ont été développés.



**Figure (I.4):** robot à quatre câbles Transportant un baril [1]

**Application 4 :**

L'utilisation des robots pour la construction et de l'entretien de grandes usines et équipements promet des économies significatives. Les composants jusqu'ici grands et/ou lourds sont la plupart du temps manipulés en utilisant les grues conventionnelles.



**Figure (I.5):** Robot parallèle à câbles utilisé dans les centrales solaires

**Application 5 :**

Robot à 3 câbles réalisé par le Laboratoire des Applications et des Technologies Avancées **LATA** de Constantine. (La **Figure (I.6)** est prête du Laboratoire **LATA** de Constantine)



**Figure (I.6):** Vue globale d'un robot à 3 câbles

**Application 6 :**

Système à câbles pour la réadaptation de jambe. Ce système est appelé **STRING-MAN**. C'est un manipulateur à câbles pour soutenir le rétablissement de la thérapie [2]. Sa conception a été inspirée par le principe de corde marionnette. Il y a un tapis roulant qui permet le mouvement du patient. Les câbles sont reliés au tronc et au bassin humain au moyen d'une interface utilisateur. Le corps humain est l'organe terminal du robot.



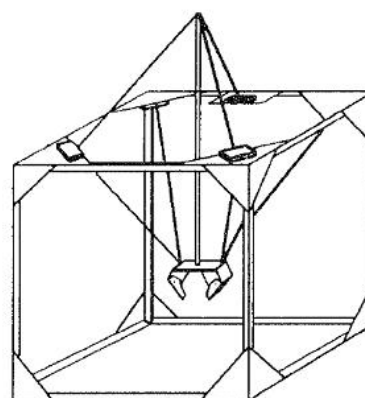
**Figure (I.7):** Prototype mécanique de STRING-MAN [2]

**Application 7 :**

Pour la manipulation et la manutention d'objets sur de grands espaces de travail, il y a le et le robot deux grues spécialisées coordonnant plusieurs enrouleurs afin de manipuler différents objets.



NIST Robocrane



FALCON

**Figure (I.8):** NIST Robocrane et FALCON

## V. MODE DE CONTROLE PID DES ROBOTS PARALLELES A CABLES

Comme Les robots parallèles à câbles sont un domaine d'étude très récent, les recherches se concentrent sur la commande de ces systèmes. Plusieurs systèmes ont abordés ce sujet.

- ❖ Le manipulateur hybride (parallèle / sériel) présenté par Williams et Gallina est commandé par un correcteur proportionnel dérivé(PD).
- ❖ Le robot à câble NeReBot et MariBot développé par le laboratoire de robotique du département de l'innovation mécanique et management à l'université de (PADUA) Italie, le contrôle se fait par un régulateur PID.
- ❖ Un robot à câble a six degrés de libertés développé par le laboratoire de mécanique de l'université Delaware, appliquant la commande par mode glissant pour contrôler le robot.
- ❖ Robot à câbles INCA Université de Strasbourg & CNRS utilisant la commande par vision.
- ❖ Un projet ambitieux de coopération mondiale pour développer la prochaine génération de radiotélescopes utilisant un robot à câble SKA (square kilometre array) pour fournir l'espace de travail important et d'accomplir le suivi grossier de l'alimentation, est commenté par un contrôleur FMRLC (un contrôleur composée d'un direct contrôleur flou, un modèle inverse de référence floue et un mécanisme d'apprentissage floue).

On citera en particulier les systèmes suivants : Manipulateur hybride (parallèle / sériel) qui sont présenté par Williams et Galina., NeReBot et MariBot.

### **Exemple1 : Manipulateur hybride (parallèle / sériel) présenté par Williams et Gallina.**

Ce type de manipulateur a été présenté pour la première fois par Gallina et Williams en 2002 [3]. Ils les ont utilisés dans les manipulateurs hybrides (parallèle/sériel) où

la translation se fait par un robot parallèle à câbles et la rotation se fait par un robot sériel. Ils sont commandés le robot par le régulateur PD

### **Exemple 2 : NeReBot et MariBot**

Nerebot (Robot de neuro réhabilitation) et un robot basé sur les câbles développé par le laboratoire de robotique du département de l'innovation mécanique et management à l'université de (PADUA) Italie. Il a trois degrés de liberté et a été conçu pour le traitement de réhabilitation pour post-choc [4].

La structure mécanique du manipulateur consiste en une colonne centrale et quatre tubes de liaisons en aluminium, **Figure (I.10.a)**. Trois câbles en plastique sont liés à une attelle dans laquelle le membre du patient est positionné. Chaque câble est conduit par un moteur débrosché positionné sur la base de la structure, le robot calcule une trajectoire spatiale de l'attelle en tirant les câbles.

La structure mécanique est établie d'une façon manuelle par le thérapeute par apport au besoin spécifique du patient et de la thérapie. C'est une tâche compliquée qui exige une expérience et une compétence technique. La position angulaire de chaque liaison et la position linéaire des points d'entrée des câbles à travers les liens doivent être établie.



La thérapie consiste en des mouvements répétitifs passifs performants des membres supérieurs du patient. Il y a une phase d'apprentissage durant laquelle le thérapeute déplace les membres à travers une trajectoire en sauvegardant les positions angulaires de chaque moteur.



a. Structure mécanique du robot Nerebot

b. Système pendant les essais

**Figure (I.10):** NeReBot pour la réadaptation supérieure de membre avec 3 ddl

Alors, la machine interpole des données acquises en trajectoire traduisant le mouvement produit par l'attelle.

Le control est obtenu en utilisant le software qui implémente l'ensemble du contrôle du mouvement (une position PID du contrôle séparé pour chaque moteur) et une interface graphique de l'utilisateur. Le contrôle est utilisé pour l'initialisation des paramètres principaux de la thérapie et de la rétroaction visuelle patiente.

## VI. CONCLUSION

Dans ce chapitre on a parlé sur les robots parallèles à câbles, ainsi que les avantages et inconvénients, suivis d'une quelques applications de ces robots.

# *Chapitre II :*

Modélisation  
des robots  
parallèles à  
deux câbles



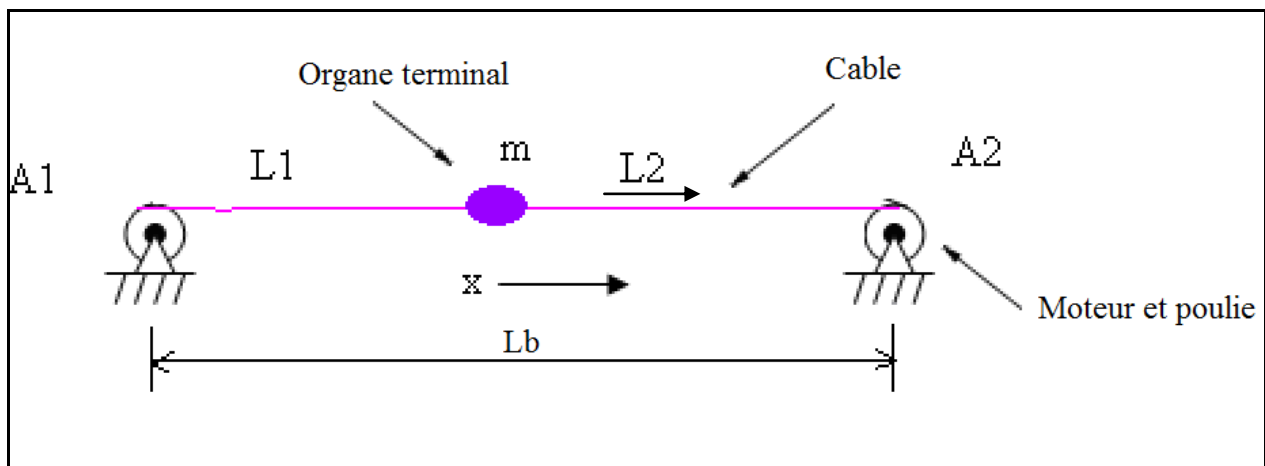
## I. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on va étudier la structure des robots parallèles à deux câbles qui permettent de réaliser un mouvement plan à un seul degré de liberté et présenter la modélisation géométrique directe et inverse, cinématique et dynamique de ces robots.

On a développé un programme de simulation permettant la commande en position de l'organe terminal.

## II. ROBOT PARALLELE A DEUX CABLES

Cette première structure schématise un robot parallèle à deux câbles motorisés. Les câbles de longueur  $L_1$  et  $L_2$  soutiennent l'organe terminal. La **Figure (II.1)** représente un robot à deux câbles avec l'organe terminal (effecteur) en position de repos ( $x=0$ ). Cet organe est repéré par un point (m). Quand on applique des couples  $\Gamma$  ( $\tau_1$   $\tau_2$ ) sur les moteurs, ces couples produisent des tensions  $T$  ( $t_1$ ,  $t_2$ ) appliquées sur les câbles. La force résultante  $f_x$  fait déplacer l'organe terminal (m).



**Figure (II.1) :** robot parallèle à deux câbles

## III. MODELISATION GEOMETRIQUE DU ROBOT A DEUX CABLES

Dans cette section, on cherche à établir le modèle géométrique direct et le modèle géométrique inverse pour le robot à 2 câbles.

### III.1 Modèle Géométrique Inverse (MGI)

Ce type de robot est facile à modéliser du fait que le mouvement du système est linéaire (1ddl). On a choisit comme repère le centre du robot. Donc à l'instant  $t = 0$  (l'organe terminal est situé sur l'origine du repère), les longueurs sont égales. On a alors :

$$L_{10} = L_{20} = \frac{Lb}{2}$$

Si on déplace l'effecteur, on obtient l'équation suivante :

$$L_1(t) = L_{10} + x(t) \quad , i=1 \dots 2, \quad (\text{II.1})$$

$$\text{Avec} \quad L_1(t) + L_2(t) = Lb = cte \quad \Rightarrow \quad L_2(t) = Lb - L_1(t) \quad (\text{II.2})$$

### III.2 Modèle Géométrique Direct (MGD)

Dans ce cas le modèle géométrique qui s'exprime le déplacement de l'organe terminal (1ddl) en fonction des longueurs des câbles est facile à résoudre dont l'équation s'écrivent :

$$x(t) = L_1(t) - L_{10} = Lb - L_2(t) - L_{10} = L_{20} - L_2(t) \quad (\text{II.3})$$

## IV. MODELISATION CINEMATIQUE DIRECT

Dans ce cas, la vitesse du câble est la même que celle de l'effecteur, la dérivé par port au temps de l'équation (II.3) donne :

$$\dot{x}(t) = \dot{L}_1(t) = -\dot{L}_2(t) \quad (\text{II.4})$$

Cette équation s'exprime le modèle cinématique inverse ainsi que le modèle cinématique direct.

## V. MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT

L'énergie cinétique du système est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\beta}^2$$

Avec  $J_1=J_2=J$  :

D'où :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + J \dot{\beta}^2$$

L'énergie potentielle du système est nul:  $E_p=0$

L'équation de Lagrange L est:  $L = E_c + E_p = E_c$

D'où la forme générale de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} = Q_i \quad \text{Avec} \quad Q_i = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \tau_1 - \tau_2$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \tau_1 - \tau_2$$

Avec :

$$D = \frac{1}{2} C_1 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} C_2 \dot{\beta}^2 \quad \text{Avec} \quad C_1 = C_2 = C \quad \text{et} \quad \beta = \frac{x}{r}$$

D'où :

$$D = C \dot{\beta}^2 = \frac{C}{r^2} \dot{x}^2$$

Après développement, l'équation dynamique de ce système s'écrit sous la forme suivante :

$$(r^2 m + 2J/r) \ddot{x} + (2C/r) \dot{x} = \tau_1 - \tau_2 \quad \text{(II.5)}$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre avec des paramètres constants et second membre constant.

Avec :

$r$  : Le rayon de la poulie de chaque moteur

$\beta$  : Angle de rotation de la poulie

$m$  : La masse de l'organe terminal

$C$  : Les coefficients d'amortissement visqueux de chaque arbre de moteur

$J$  : Les inerties du rotor et de la poulie de chaque moteur

$\tau(i)$  : Les couples appliqués par les moteurs

$L$  : Lagrangien

$D$  : Energie dissipation

$Q_i$  : Coefficients de la puissance virtuelle de toutes les actions mécaniques

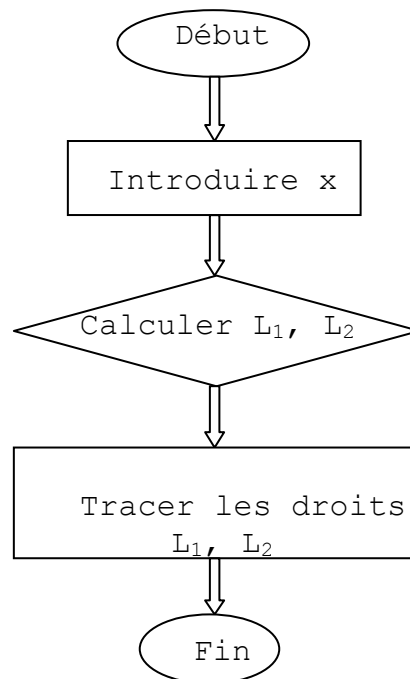
## VI. SIMULATION

Dans cette partie, on va développer des programmes sous Matlab pour la commande en position de l'organe terminal basé sur le modèle géométrique inverse. Les résultats de calculs sont représentés sous forme de graphe correspondant aux variations de longueurs câbles.

### VI.1 Simulation du Modèle Géométrique Inverse

On donne la valeur de  $(x)$  et on détermine les longueurs des câbles pour chaque déplacement de l'organe terminal.

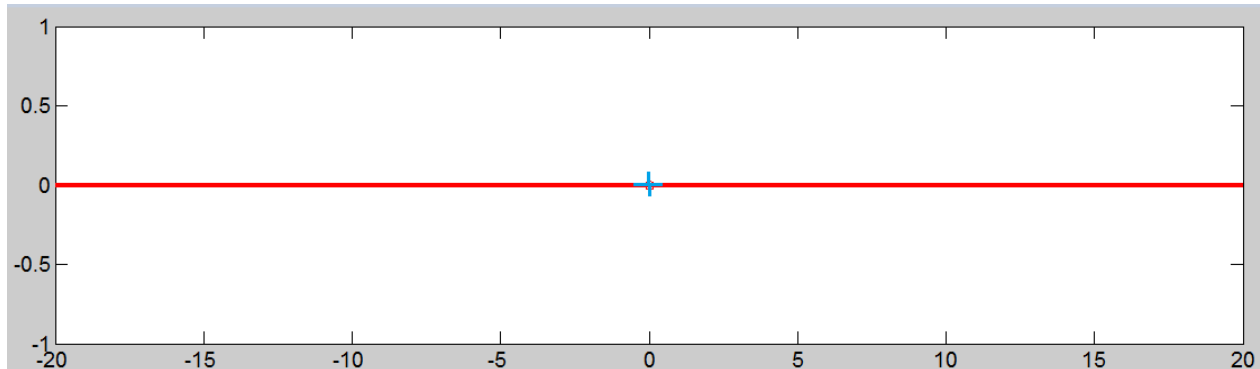
La **Figure (II.2)** illustre l'organigramme du programme calculant les différentes longueurs des 2 câbles du robot.



**Figure (II.2) :** Organigramme calculant les différentes longueurs des 2 câbles du robot.

La **Figure (II.3)** représente le robot à 2 câbles avec l'organe terminal en position de repos ( $x=0$ ). L'organe terminal est repère par un signe plus (+).

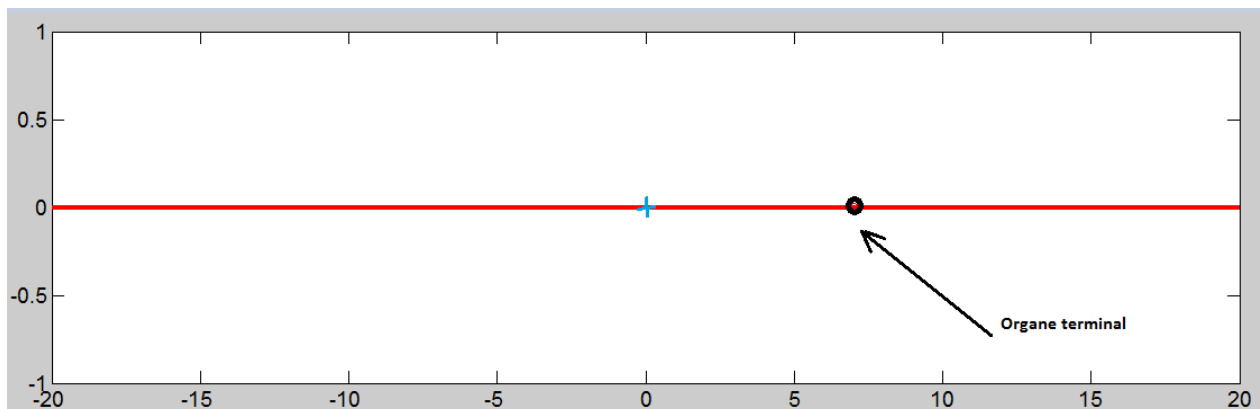
$x$ (cm)	$L_1$ (cm)	$L_2$ (cm)
0	20	20



**Figure (II.3) :** Organe terminal en position initiale

La **Figure (II.4)** montre l'organe terminal en position quelconque.

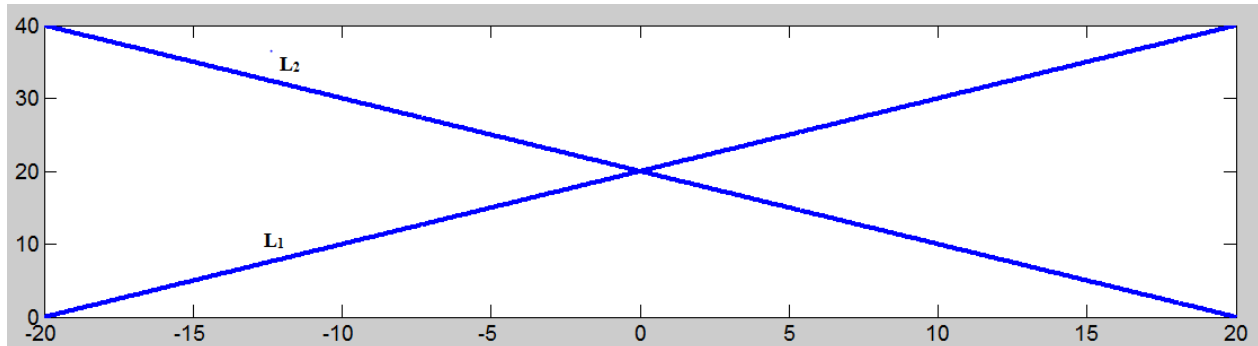
$x$ (cm)	$L_1$ (cm)	$L_2$ (cm)
5	25	15



**Figure (II.4) :** Organe terminal en position quelconque

## VI.2 Variation des longueur des cables

La **Figure (II.5)** permet de visualiser les variations des longueurs des câbles deux câbles de robot.



**Figure(II.5) :** Variations des longueurs des 2 cables

## VII. CONCLUSION

Ce chapitre récapitule les calculs de modélisation géométrique, cinématique et dynamique pour un robot à deux câbles (mouvement suivant une seule direction), suivis d'une simulation sur Matlab.

# Chapitre III :

## Modélisation des robots parallèles a trois câbles

## I. INTRODUCTION

Les robots parallèles à câbles CDDRs (Cable Direct Driven Robots) sont une catégorie particulière des robots parallèles pour lesquels l'effecteur est relié au sol uniquement par des câbles de longueur variable. Des actionneurs qui sont en général placés en bordure d'espace de travail permettent de commander la tension des câbles via un mécanisme d'enroulement. C'est la traction antagoniste de plusieurs systèmes d'enroulement qui génère la tension. Plus les câbles sont longs et plus la flexibilité augmente.

Parmi les robots parallèles, on distingue les robots à trois câbles qui permettent de réaliser un mouvement plan à deux degrés de liberté, dont l'espace de travail est triangulaire.

Dans ce chapitre on va étudier la structure des robots parallèles à trois câbles et présenter la modélisation géométrique directe et inverse, cinématique et dynamique de ces robots.

Les calculs seront suivis d'un programme de simulation basé sur le modèle géométrique inverse permettant la commande en position de l'organe terminal.

On utilisera la méthode de Moore-Penrose pour déterminer les tensions appliquées sur les câbles par les moteurs. A titre d'exemple, on simule les tensions nécessaires pour que l'effecteur poursuive une trajectoire circulaire tout en imposant une force constante le long du parcours.

La **Figure (III.1)** représente un robot à trois câbles, une base (cadre) fixe de forme triangulaire (triangle équilatéral) du côté  $L_b$  où la position de l'organe terminal est au centre du triangle avec :

$$L_{10} = L_{20} = L_{30} = \frac{L_b}{\sqrt{3}}$$



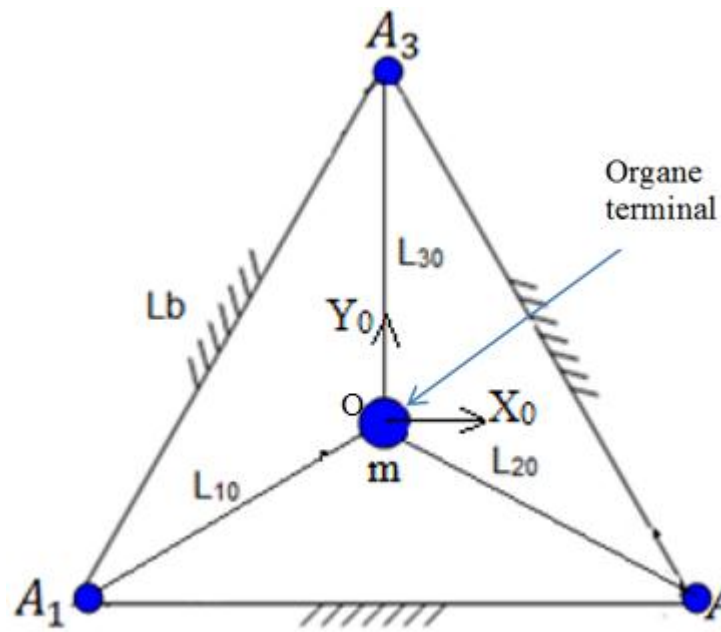


Figure (III.1) : Robot à trois câbles dans la position initial

## II. ROBOT PARALLELE A TROIS CABLES

La structure mécanique de ce robot est constituée par:

- une base (cadre) fixe de forme triangulaire (généralement équilatérale).
- une plateforme mobile, qui porte l'organe terminal.
- La base et la plateforme mobile sont liées à travers trois câbles.
- chaque câble est lié à la base par un actionneur (moteurs). **Figure (III.2)**

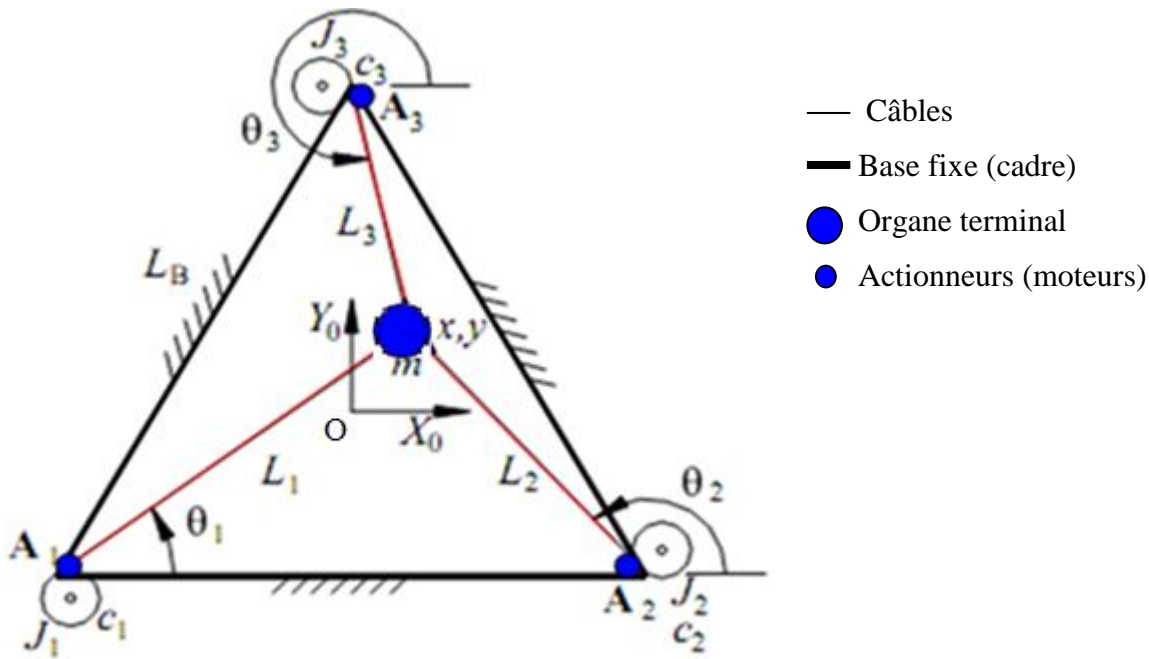


Figure (III.2): Robot parallèle à trois câbles

Quand on applique un couple  $\Gamma$  ( $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ) sur les moteurs, ces couples produisent des tensions  $T$  ( $t_1, t_2, t_3$ ) appliquées sur les câbles de longueur  $L_i$ .

La force résultante  $F_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} & F_{Ry} \end{pmatrix}^T$

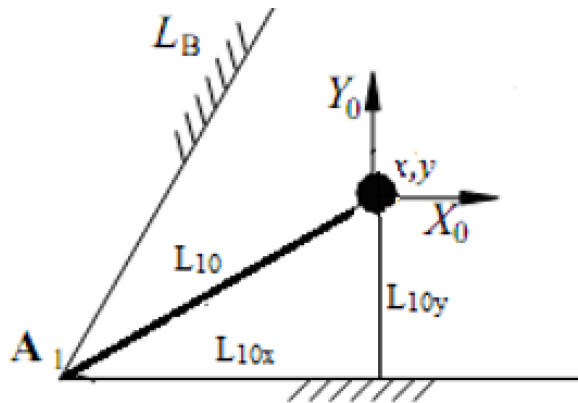
### III. MODELISATION GEOMETRIQUE

On va établir le modèle géométrique direct et le modèle géométrique inverse pour le robot 3 câbles. La cinématique inverse est exigée pour la commande, et la cinématique direct est exigée pour la simulation et la commande à base de détecteur.

### III.1. Modèle Géométrique Inverse (MGI)

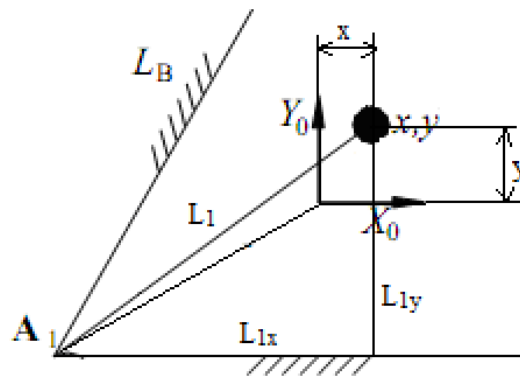
Ce modèle a pour but de déterminer la longueur du câble «  $L_i$  » et l'angle entre l'axe x et le câbles «  $\theta$  » en fonction de la position  $\{x, y\}$ . Le modèle géométrique inverse peut s'exprimer par les relations suivantes [5]:

A l'état initial : **Figure (III.3)**



**Figure (III.3):** Organe terminal à l'état initial

Après un déplacement : **Figure (III.4)**



**Figure (III.4):** Organe terminal après un déplacement

$$L_{i0} = \sqrt{(L_{i0x})^2 + (L_{i0y})^2}$$

$$L_{ix} = x - L_{i0x}$$

$$L_{iy} = y - L_{i0y}$$

$$L_i = \sqrt{L_{ix}^2 + L_{iy}^2} = \sqrt{(x - L_{i0x})^2 + (y - L_{i0y})^2} ; i=1\dots3 \quad (\text{III.1})$$

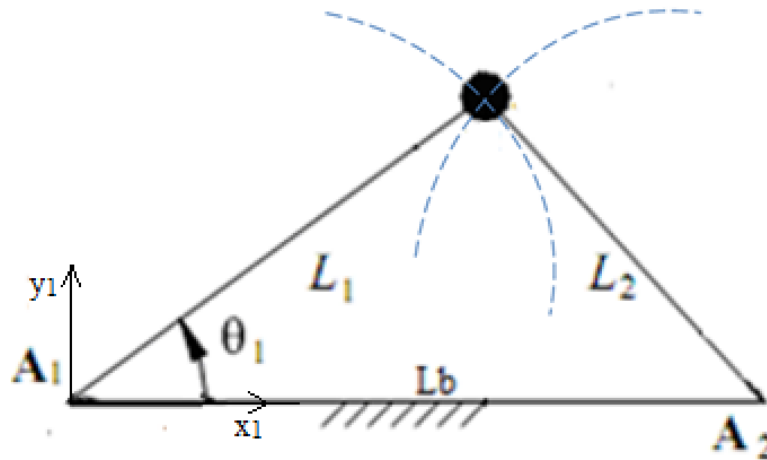
Les angles de câble :

$$\theta_i = \arctan g \left( \frac{y - L_{i0y}}{x - L_{i0x}} \right) ; i=1\dots3 \quad (\text{III.2})$$

### III.2. Modèle Géométrique Direct (MGD)

Le MGD exprime la position de l'effecteur  $M(x, y)$  en fonction des longueurs des câbles  $L_i$ . Pour les manipulateurs parallèles, le modèle géométrique directe est difficile à résoudre à cause de sa structure fermée (les angles  $\theta_i$  sont liés avec les longueurs des câbles  $L_i$ ). La relation entre la position  $X=(x, y)$  et les coordonnées généralisées est non linéaire.

Ce problème peut être simplifié en déplaçant le repère  $R(O, X_0, Y_0)$  au point  $A_1$ , ce qui donne les nouvelles coordonnées des points  $A_1=(0,0)^T$  et  $A_2=(-Lb,0)^T$ . Le point  $M$  représentant l'organe terminal du robot est l'intersection de deux cercles, l'un de centre  $A_1$  avec rayon  $L_1$ , et l'autre de centre  $A_2$  de rayon  $L_2$ .



On a :

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= L_1^2 \\ (Lb - x_1)^2 + y_1^2 &= L_2^2 \end{aligned}$$

Ce qi donne :

$$\begin{aligned} (Lb - x_1)^2 - x_1^2 &= L_2^2 - L_1^2 \\ x_1^2 - (Lb^2 + x_1^2 - 2 * x_1 * lb) &= L_1^2 - L_2^2 \\ 2 * x_1 * lb - Lb^2 &= L_1^2 - L_2^2 \end{aligned}$$

$$D'où : \begin{cases} x_1 = \frac{Lb^2 + L_1^2 - L_2^2}{2Lb} \\ y_1 = \sqrt{L_2^2 - (Lb - x_1)^2} = \sqrt{L_1^2 - x_1^2} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

La solution de modèle géométrique direct exige le choix la valeur positive de  $y$

#### IV. MODELISATION CINEMATIQUE

Dans cette partie nous présentons la modélisation inverse et directe de la vitesse de CDDRs plan à 3-câbles.

##### IV.1. Modèle Cinématique Inverse

Pour calculer le modèle cinématique inverse, nous considérons le  $i^{\text{ème}}$  vecteur suivant :  
De l'équation (III.1):

$$L_i = \sqrt{L_{ix}^2 + L_{iy}^2} = \sqrt{(x - L_{i0x})^2 + (y - L_{i0y})^2} ; i=1...3$$

$$L_i = (x - L_{i0x}) \sqrt{1 + \frac{(y - L_{i0y})^2}{(x - L_{i0x})^2}}$$

$$L_i = (x - L_{i0x}) \sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta_i} \quad (\text{de l'équation (III.2)})$$

Avec 
$$\text{tg} \theta_i^2 = \frac{\sin^2 \theta_i}{\cos^2 \theta_i}$$

D'où :

$$\begin{aligned} x &= L_{i0x} + L_i \cos(\theta_i) & y &= L_{i0y} + L_i \sin(\theta_i) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{i0x} + L_i \cos(\theta_i) \\ L_{i0y} + L_i \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si on le dérive  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  par rapport au temps et on inverse, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -L_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & L_i \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} \quad i=1..3 \quad (\text{III.4})$$

A partir de l'équation (III.4) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{L}(i) \\ \dot{\theta}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i)/L_i & \cos(\theta_i)/L_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad i=1..3 \quad (\text{III.5})$$

Comme nous nous intéressons à la longueur du câble actif en fonction de la position de l'effecteur, nous pouvons extraire la première ligne de (III.5) pour obtenir la vitesse cinématique de CDDRs.

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (\text{III.6})$$

## IV.2. Modèle Cinématique Direct

Pour obtenir le modèle cinématique direct, on doit inverser l'équation (III.6) qui nous donne  $\dot{X} = M^{-1} \dot{L}$ , donc la solution exige le calcul de la matrice jacobéenne inverse. En raison de redondance d'actionnement, M n'est pas carré mais de dimension (3x2) ce qui nous crée un problème de calcul de  $M^{-1}$ . Alors pour résoudre ce problème, nous avons utilisés le pseudo inverse de Moore-Penrose :

$$\dot{X} = M^+ \dot{L} \quad \text{où} \quad M^+ = (M^T M)^{-1} M^T.$$

Avec

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \end{pmatrix}$$

On peut écrire l'équation (III.6) sous la forme :  $\dot{X} = M^{-1} \dot{L}$  où:

$\dot{L}$  : Est le vecteur de vitesse du trois câbles.

$M^{-1}$  : est la matrice Jacobienne inverse de CDDRs.

$\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y})$  : est le vecteur de vitesse de l'organe terminal.

## V. MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT

### V.1. Modèle Dynamique de l'effecteur

Le modèle dynamique de l'effecteur est exprimé par la relation suivante [6].

$$m \ddot{X} = F_R$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Où  $m$  : est la matrice de masse

$\ddot{X}$  : Est le vecteur d'accélération de l'organe terminal

$F_R = (F_{Rx} \quad F_{Ry})^T$  : est la force résultante de toutes les tensions des câbles appliqués sur l'organe terminal

### V.2. Structure mécanique des moteurs

Le comportement dynamique du moteur est exprimé par l'équation :

$$J \ddot{\beta}_i + C \dot{\beta}_i = \tau - rT \quad (\text{III.8})$$

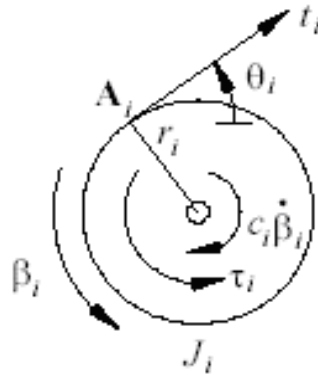


Figure (III. 5): Tension et couple sur la poulie

Avec :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}$$

Sont des matrices diagonales qui représentent les inerties et les coefficients d'amortissement visqueux de chaque moteur. Nous considérons que tous les rayons de la poulie sont identiques  $r_i = r$  ( $i=1,2,3$ ).  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$  est le vecteur des couples appliqués par les moteurs,  $T = (t_1, t_2, t_3)^T$  est le vecteur des tensions des câbles.  $\beta$  est l'angle de rotation de la poulie.

$$\text{Donc :} \quad T = \frac{1}{r} (\tau - J \ddot{\beta} - C \dot{\beta}) \quad (\text{III.9})$$

### V.3. Modèle dynamique du système

Le modèle dynamique global du système est obtenu par combinaison entre les modèles de l'organe terminal et des moteurs. Si on considère que les angles des poulies sont nuls quand la position de l'organe terminal est au centre de triangle  $X = (0,0)^T$ . Dans ce cas, on a aussi :

$$L_{10} = L_{20} = L_{30} = \frac{Lb}{2\cos 30^\circ} = \frac{Lb}{\sqrt{3}}$$

Par rapport à cette position, la relation entre les angles des rotations ( $\beta_i$ ) des poulies de rayon  $r$  et les variations des longueurs des câbles ( $\Delta L_i$ ) est :

$$\beta_i * r = -\Delta L_i \quad \text{Avec} \quad \Delta L_i = L_i - L_{i0} \quad (\text{III.10})$$

$$\text{Où} \quad L_i = \sqrt{(x - L_{i0x})^2 + (y - L_{i0y})^2} ; i=1...3$$

Et  $L_{i0}$  sont les longueurs initiales des câbles :  $L_{i0} = \sqrt{(L_{i0x})^2 + (L_{i0y})^2}$

$$\text{Donc :} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1(X) \\ \beta_2(X) \\ \beta_3(X) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} L_{10} - L_1 \\ L_{20} - L_2 \\ L_{30} - L_3 \end{pmatrix}$$

En dérivant  $\beta$  successivement par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\beta} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(X) \\ \dot{\beta}_2(X) \\ \dot{\beta}_3(X) \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix}$$



De l'équation (III.6) :

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{r} \left[ \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) & -\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \\ \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) & -\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \\ \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3) & -\dot{\theta}_3 \cos(\theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \right] \quad \text{(III.11)}$$

De (III.9) on obtient [6]:

$$T = \frac{1}{r} \left( \tau - J \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \beta}{\partial \dot{X}} \right) \dot{X} + \frac{\partial \beta}{\partial X} \ddot{X} \right) - C \frac{\partial \beta}{\partial \dot{X}} \dot{X} \right) \quad \text{(III.12)}$$

Avec

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial X} \dot{X}$$

$$\ddot{\beta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right) \dot{X} + \frac{\partial \beta}{\partial X} \ddot{X}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{x-L_{10x}}{L_1} & \frac{y-L_{10y}}{L_1} \\ \frac{x-L_{20x}}{L_2} & \frac{y-L_{20y}}{L_2} \\ \frac{x-L_{30x}}{L_3} & \frac{y-L_{30y}}{L_3} \end{bmatrix}$$

Du modèle cinématique inverse :

$$x = L_{i0x} + L_i \cos(\theta_i) \quad y = L_{i0y} + L_i \sin(\theta_i)$$

D'où :

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{bmatrix}$$

$$F_R = ST \quad \text{(III.13)}$$

où:  $S = \left\{ -\vec{L}_1, -\vec{L}_2, -\vec{L}_3 \right\}^T$  est une matrice de dimension  $(2 \times 3)$ .

$$S = \begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 & -\cos \theta_3 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\sin \theta_3 \end{pmatrix}$$

Enfin, en combinant (III.7), (III.12) et (III.13), l'ensemble des équations du modèle dynamique peut être exprimé dans une forme standard pour les systèmes robotiques:

$$M(X) \ddot{X} + N(X, \dot{X}) = S(X) \tau \quad (\text{III.14})$$

où  $M = r^* m + S(X) J \frac{\partial \beta}{\partial X}$

et  $N(X, \dot{X}) = S(X) \left( J \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial X} + C \frac{\partial \beta}{\partial X} \right) \dot{X}$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N(X, X^{\bullet}) = \begin{pmatrix} N_1(X, X^{\bullet}) \\ N_2(X, X^{\bullet}) \end{pmatrix}$$

Avec :

$$M_{11} = r^* m + \frac{J_1 \cos^2(\theta_1) + J_2 \cos^2(\theta_2) + J_3 \cos^2(\theta_3)}{r}$$

$$M_{12} = \frac{J_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + J_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) + J_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_3)}{r}$$

$$M_{21} = M_{12}$$

$$M_{22} = r^* m + \frac{J_1 \sin^2(\theta_1) + J_2 \sin^2(\theta_2) + J_3 (\sin^2 \theta_3)}{r}$$

$$N_{11} = (\cos(\theta_1)(C_1 \cos(\theta_1) - J_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)) + \cos(\theta_2)(C_2 \cos(\theta_2) - J_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) + \cos(\theta_3)(C_3 \cos(\theta_3) - J_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3))) / r$$

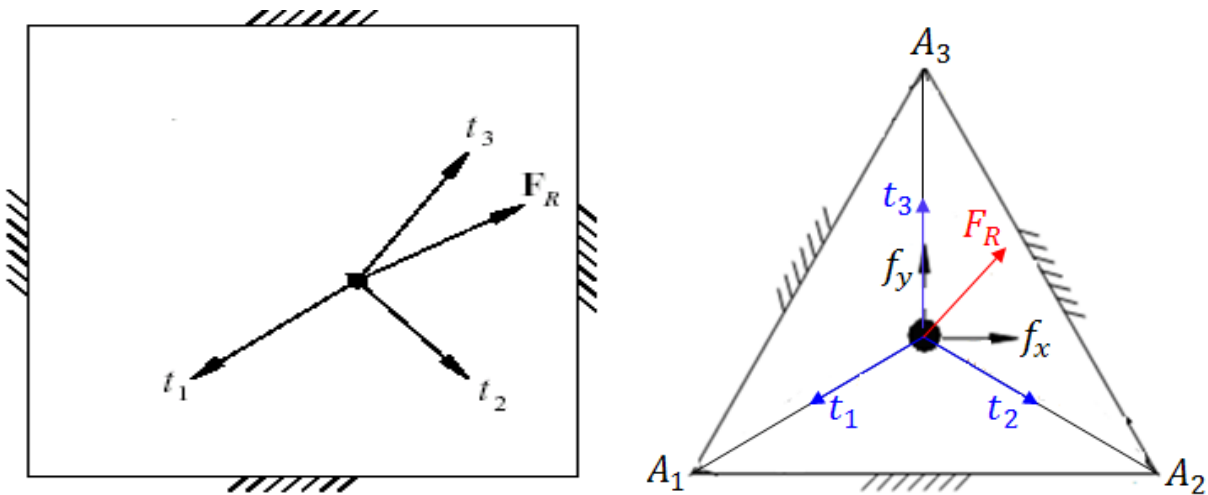
$$N_{12} = (\cos(\theta_1)(C_1 \sin(\theta_1) + J_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)) + \cos(\theta_2)(C_2 \sin(\theta_2) + J_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) + \cos(\theta_3)(C_3 \sin(\theta_3) + J_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3))) / r$$

$$N_{21} = (\sin(\theta_1)(C_1 \cos(\theta_1) - J_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)) + \sin(\theta_2)(C_2 \cos(\theta_2) - J_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)(C_3 \cos(\theta_3) - J_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3))) / r$$

$$N_{22} = (\sin(\theta_1)(C_1 \sin(\theta_1) + J_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)) + \sin(\theta_2)(C_2 \sin(\theta_2) + J_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) + \sin(\theta_3)(C_3 \sin(\theta_3) + J_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3))) / r$$

### VI. L'ANALYSE STATIQUE DES FORCES

Dans l'équilibre statique, la somme des forces extérieures exercées sur l'effecteur par les câbles doivent être égale à la force résultante  $F_R$  externe exercée sur l'environnement. La **Figure (III.6)** montre la statique du corps libre pour 3 câbles du CDDR plan.



**Figure (III. 6):** force statique 3 câbles plan CDDRs

L'équation suivante exprime cette relation:

$$\sum_{i=1}^3 t_i = - \sum_{i=1}^3 t_i \vec{L}_i = F_R \tag{III.14}$$

$$\text{où : } L_i = \{ \cos(\theta_i) \quad \sin(\theta_i) \}^T$$

Dans ce cas, la gravité est ignorée parce qu'elle est supposée perpendiculaire au plan du CDDR. L'équation **(III.14)** peut être exprimée comme :

$$ST = F_R$$

$$\text{où : } S = \left\{ -\vec{L}_1, -\vec{L}_2, -\vec{L}_3 \right\}^T \text{ est une matrice de dimension } (3 \times 2).$$

A partir de l'équation **(III.14)** on peut l'exprimer par :

$$\begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 & -\cos \theta_3 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\sin \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad \text{(III.15)}$$

L'équation **(III.15)** est sous-contrainte, ce qui signifie qu'il y a infini des solutions au vecteur des tensions  $T$  des câbles pour exercer la force  $F_R$ . Pour inverser cette équation (à exprimer les tensions des câbles  $T$  en fonction de  $F_R$ ), nous utilisons la notion de solution particulière et homogène.

$$T = S^+ F_R + (I_n - S^+ S) Z \quad \text{(III.16)}$$

$$\text{Avec : } S^+ = S^T (S S^T)^{-1}$$

où :

$I_n$  : est la matrice d'identité de dimension (3x3)

$Z$  : est un vecteur arbitraire de dimension 3.

$S^+$  : est le pseudo-inverse de  $S$  par la méthode de Moore-Penrose de dimension (3x2).

Le premier terme de **(III.16)** est la solution particulière, et le deuxième terme est la solution homogène. Pour la redondance d'actionnement du premier degré, une expression équivalente à l'équation **(III.16)** est :

$$T = \begin{pmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{(III.17)}$$

La solution particulière est le premier terme dans (III.17) et la solution homogène est exprimée comme le noyau du vecteur  $N$  ( $n_1, n_2, n_3$ ) multiplié par un scalaire arbitraire  $\alpha$ . Afin de déterminer si un point donné se trouve dans l'espace de travail statique pour un simple CDDRs il faut assurer que les tensions  $t_i$  ( $i=1..3$ ) sont positives pour toutes les forces exercées. Alors, il est nécessaire et suffisant que tous les composants du vecteur du noyau  $N$  ont le même signe ( $\forall n_i, n_i > 0$ , ou,  $n_i < 0$ )  $i=1..3$ . Si l'une de ces deux conditions n'est remplie, un scalaire  $\alpha$  peut être assuré tel que toutes les tensions soient positives. Mais si  $\exists n_i = 0$  alors le point donné n'appartient pas à l'espace de travail. Pour calculer les composantes du vecteur  $N$ , on utilise la méthode :

$n_i = (-1)^{i+1} |S_i|$  Où  $|S_i|$  est le facteur déterminant de sous-matrice de  $S$ , ce qui nous donne :

$$N = \begin{pmatrix} \sin(\theta_3 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ \sin(\theta_2 - \theta_1) \end{pmatrix} \quad \text{(III.18)}$$

La solution particulière est :

$$\begin{pmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_1 - \theta_3)}{\det} & \frac{\cos(\theta_3) \sin(\theta_1 - \theta_3) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\det} \\ \frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_2)}{\det} & \frac{\cos(\theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\det} \\ \frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_3 - \theta_1) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3 - \theta_2)}{\det} & \frac{\cos(\theta_2) \sin(\theta_3 - \theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_3)}{\det} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} fx \\ fy \end{bmatrix} \quad \text{(III.19)}$$

Avec :

$$S^+ = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_1 - \theta_3)}{\det} & \frac{\cos(\theta_3) \sin(\theta_1 - \theta_3) - \cos(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\det} \\ \frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_2)}{\det} & \frac{\cos(\theta_3) \sin(\theta_3 - \theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\det} \\ \frac{\sin(\theta_1) \sin(\theta_3 - \theta_1) + \sin(\theta_2) \sin(\theta_3 - \theta_2)}{\det} & \frac{\cos(\theta_2) \sin(\theta_3 - \theta_2) - \cos(\theta_1) \sin(\theta_1 - \theta_3)}{\det} \end{bmatrix}$$

et :

$$\det = \frac{1}{2} * (3 \sin^2(\theta_1 - \theta_2) + 3 \sin^2(\theta_1 - \theta_3) + 3 \sin^2(\theta_2 - \theta_3) - \sin^2(\theta_1 + \theta_2) - \sin^2(\theta_1 + \theta_3) - \sin^2(\theta_2 + \theta_3))$$

Les intervalles des angles des câbles admissibles.

Sont :

$$0 \leq \theta_1 \leq 60^\circ \quad , \quad 120^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ \quad \text{et} \quad 240^\circ \leq \theta_3 \leq 300^\circ .$$

Alors que les valeurs possibles de trois composants de N sont :

$$60^\circ \leq \theta_3 - \theta_2 \leq 180^\circ, -300^\circ \leq \theta_2 - \theta_1 \leq -180^\circ, \text{et} 60^\circ \leq \theta_2 - \theta_1 \leq 180^\circ$$

Pour assurer les tensions optimales il faut que :

$$t_{opt} = \begin{pmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \end{pmatrix} + \alpha_i \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \geq t_{\min}$$

$$\alpha_i = (t_{\min} - t_{pi}) / n_i \quad \alpha_i > 0 \text{ implique } n(i) > 0$$

$$t_{\min} = \text{Max} \left\{ \left\{ J \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \dot{x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \ddot{x} \right) + c \frac{\partial \beta}{\partial x} \dot{x}, 0 \right\} \right\} \quad \text{(II.20)}$$

Cette équation doit être vérifiée dans la simulation pour que les tensions doivent être positives.

## VII. SIMULATION

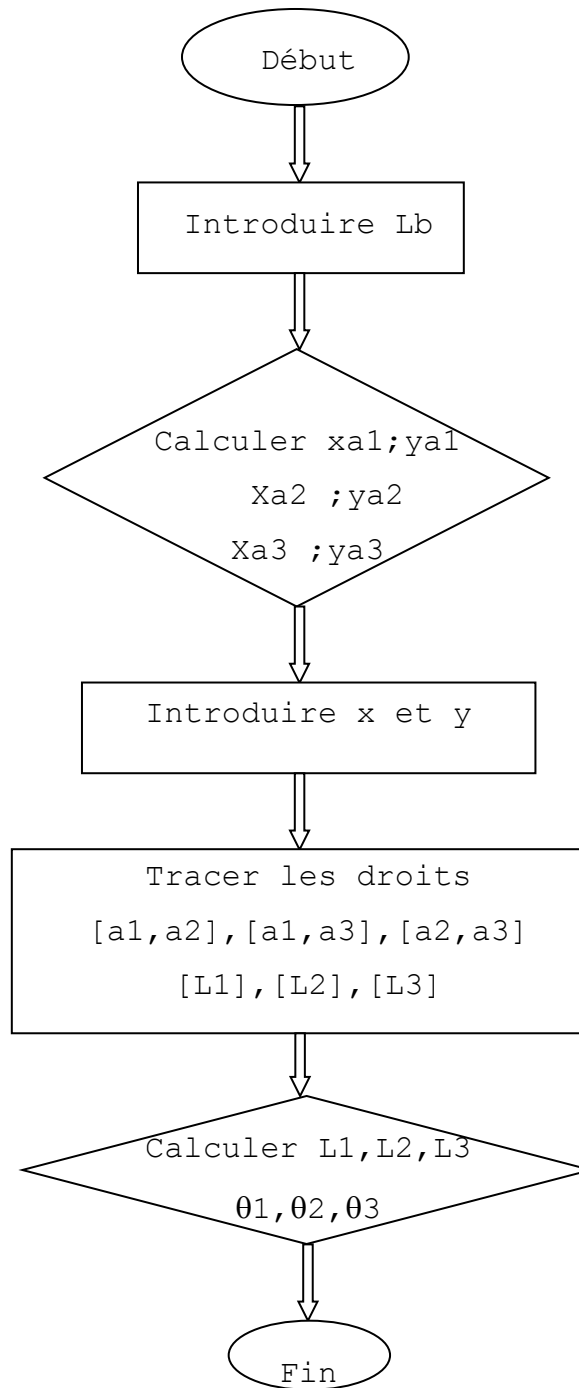
Dans cette section, on a développé des programmes sous Matlab pour la commande en position de l'organe terminal basé sur le modèle géométrique inverse. Les résultats de calculs sont représentés sous forme de graphes correspondant aux variations de longueurs et des angles des câbles.

Ainsi que, on a simulé les tensions nécessaires pour que l'effecteur poursuive une trajectoire circulaire tout en imposant une force constante le long du parcours.

### VII.1 Simulation du Modèle Géométrique Inverse

On donne les valeurs de  $(x, y)$  et on détermine les longueurs du câbles et les angles pour chaque déplacement de l'organe terminal.

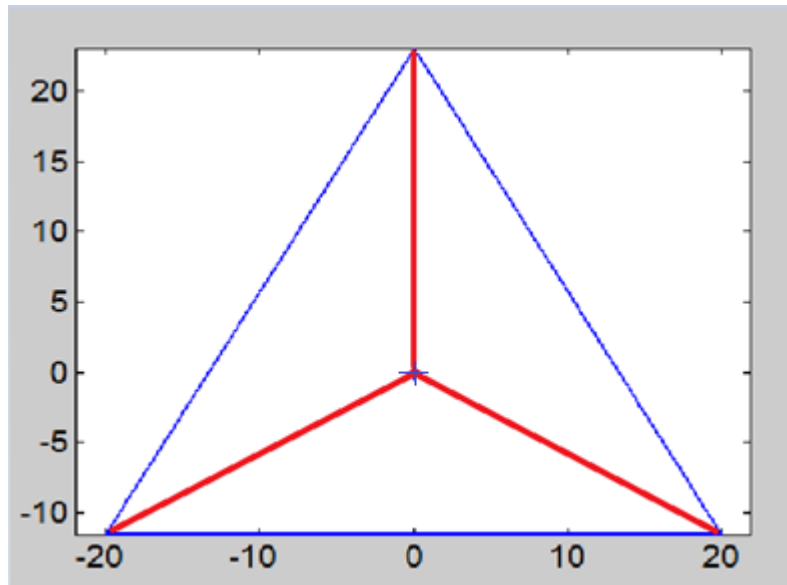
La **Figure (III.7)** illustre l'organigramme du programme calculant les différentes longueurs des 3 câbles du robot, ainsi que les angles que font ces câbles avec l'axe des abscisses.



**Figure (III.7):** Organigramme des longueurs et des angles des 3 câbles de robot

La **Figure (III.8)** représente le robot à 3 câbles avec l'organe terminal en position de repos ( $x=0, y=0$ ). L'organe terminal est repère par un signe plus (+).

x (cm)	y (cm)	L1 (cm)	L2 (cm)	L3 (cm)	$\theta_1$ (deg)	$\theta_2$ (deg)	$\theta_3$ (deg)
0	0	23.09	23.09	23.09	30	150	270



**Figure (III.8)** : Organe terminal en position initial

Les **Figure (III.9)** et **Figure (III.10)** Montrent quelques positions de l'organe terminal obtenues par le programme.

Exemple 1 :  $x=2\text{cm}, y=5\text{cm}$ .

x (cm)	y (cm)	L1 (cm)	L2 (cm)	L3 (cm)	$\theta_1$ (deg)	$\theta_2$ (deg)	$\theta_3$ (deg)
2	5	27.52	24.45	18.20	36.94	137.40	276.30



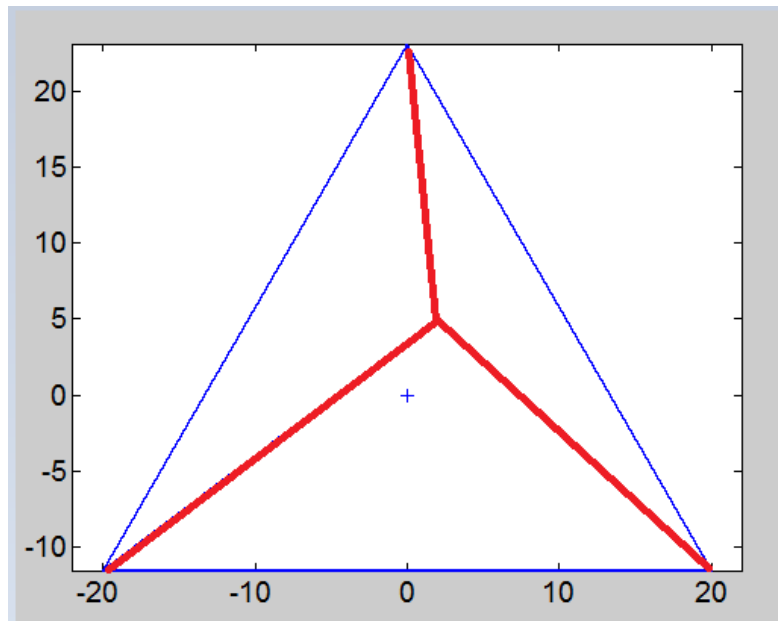


Figure (III.9) : Organe terminal en position (2, 5)

Exemple 2 :  $x=5\text{cm}$ ,  $y=-4\text{cm}$ .

x (cm)	y (cm)	L1 (cm)	L2 (cm)	L3 (cm)	$\theta_1(\text{deg})$	$\theta_2(\text{deg})$	$\theta_3(\text{deg})$
5	-4	26.11	16.79	27.55	16.79	153.29	280.45

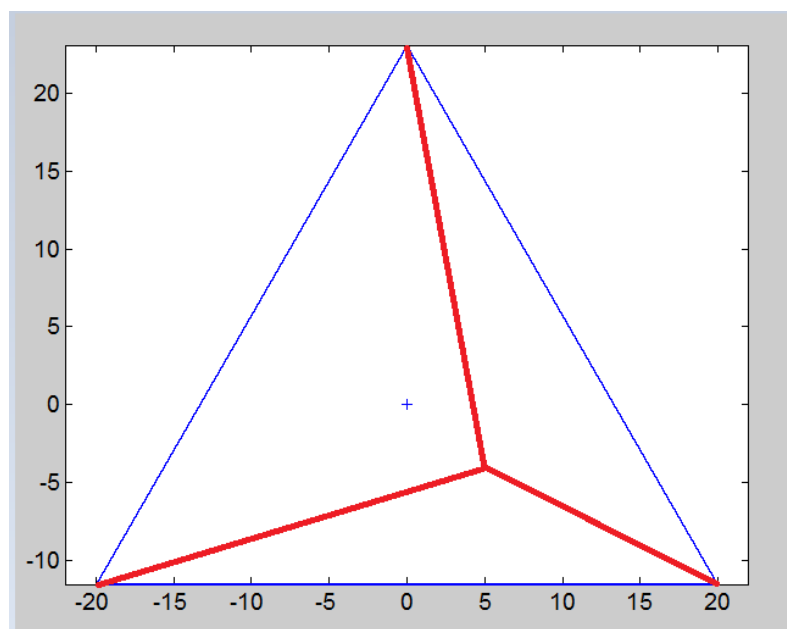


Figure (III.10) : Organe terminal en position (5, -4)

## VII.2 Simulation de la trajectoire de l'organe terminal

Dans cette partie, nous essayons de simuler les variations des longueurs des câbles, ainsi que les angles que font ceux-ci avec l'axes des abscisses, en fonction de l'angle polaire que fait le l'organe terminal.

On propose une trajectoire circulaire d'un rayon  $R$  et dont le centre est l'origine  $O$ .

Les équations paramétriques de cette trajectoire sont

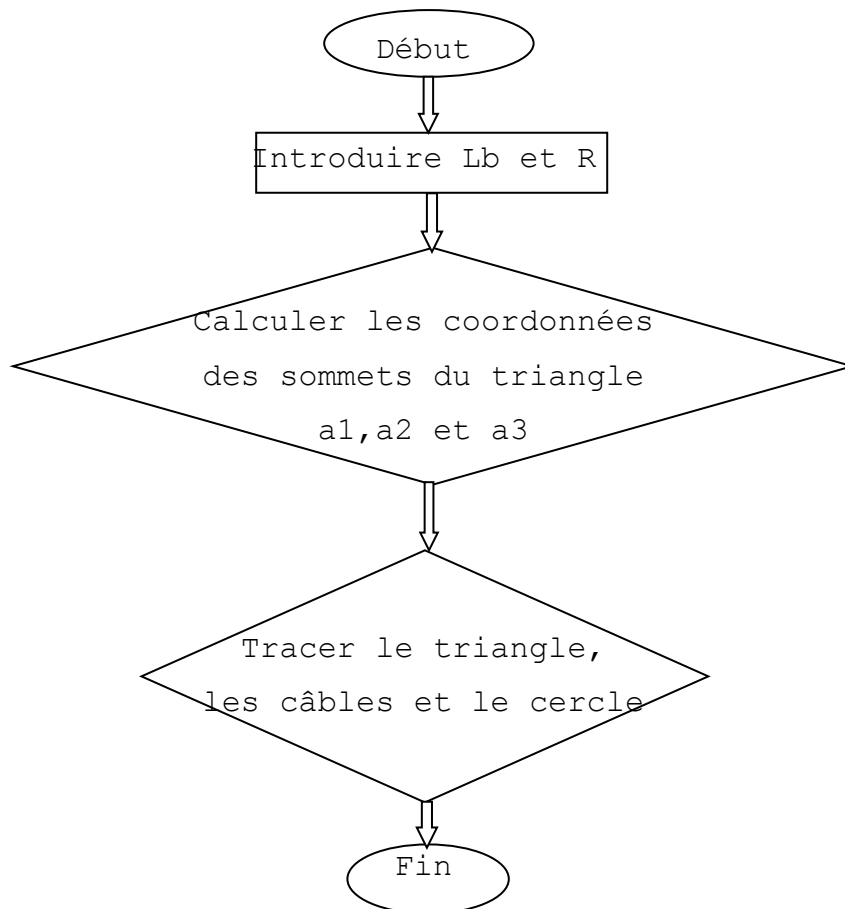
$$x = R \cos(\theta)$$

$$y = R \sin(\theta)$$

où  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et  $0 \leq R \leq R_{\max}$

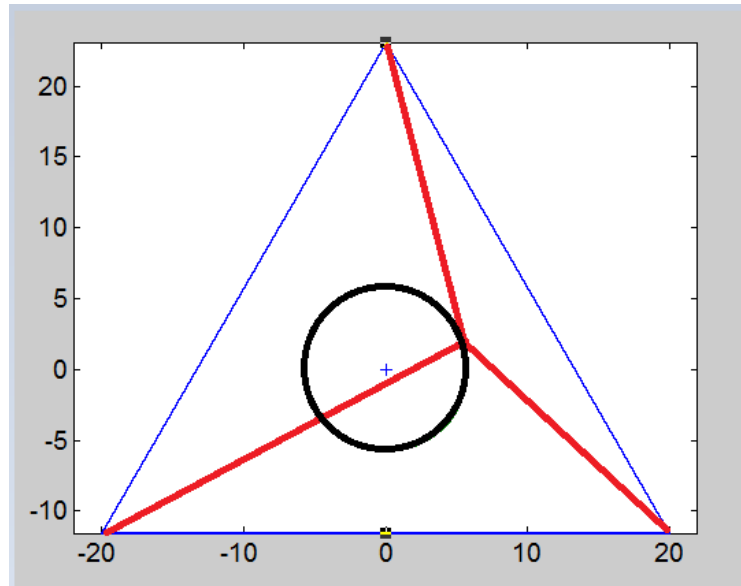
où  $R_{\max} = \frac{Lb}{2\sqrt{3}}$  est la distance entre le centre du triangle  $O$  et l'un des trois côtés.

La **Figure(III.11)** montre l'organigramme du programme traçant la géométrie à 3 câbles, avec la trajectoire circulaire parcourue par l'organe terminal.



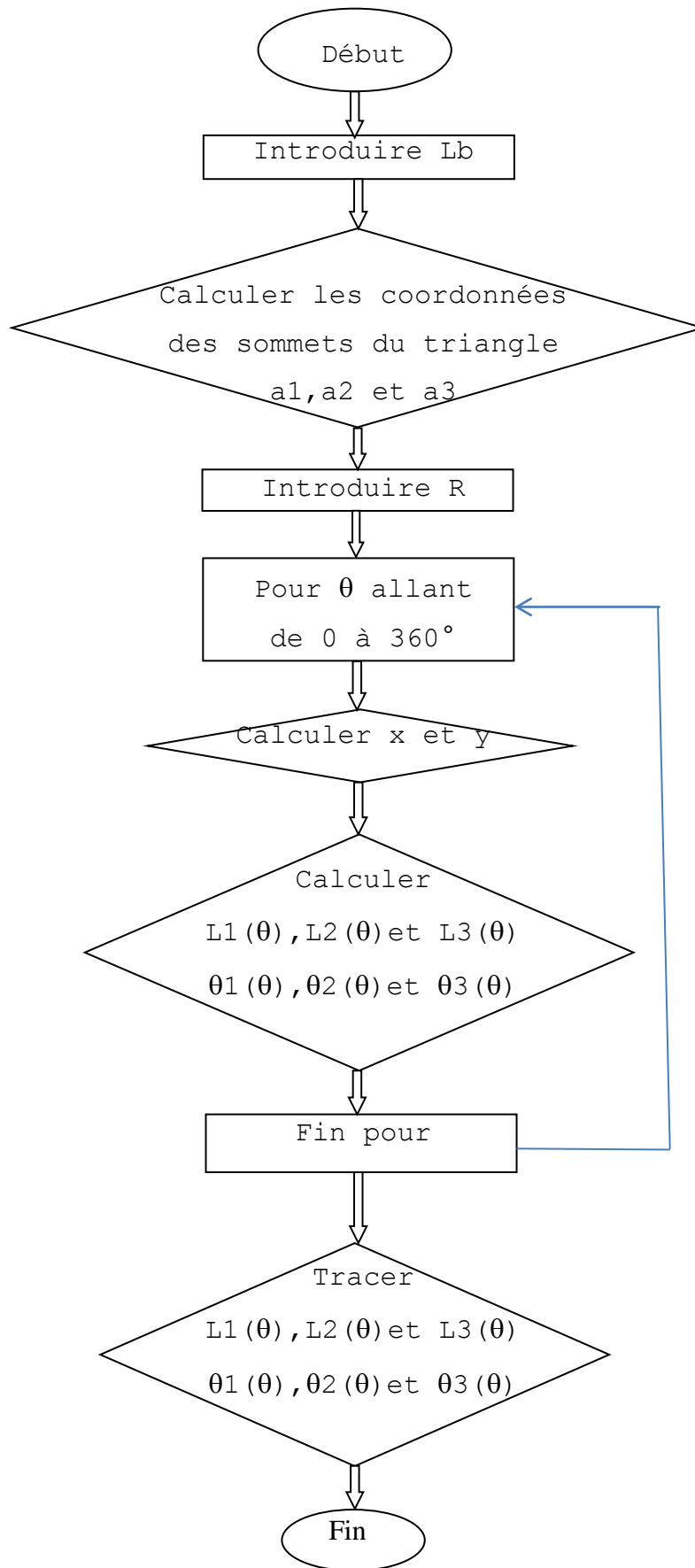
**Figure(III.11)** : Organigramme traçant la géométrie à 3 câbles avec la trajectoire circulaire

Pour une trajectoire circulaire de rayon  $R=R_{\max}/2$  la géométrie de problème ressemble à la **Figure(III.12)**.



**Figure(III.12)** : trajectoire circulaire de rayon  $R=R_{\max}/2$

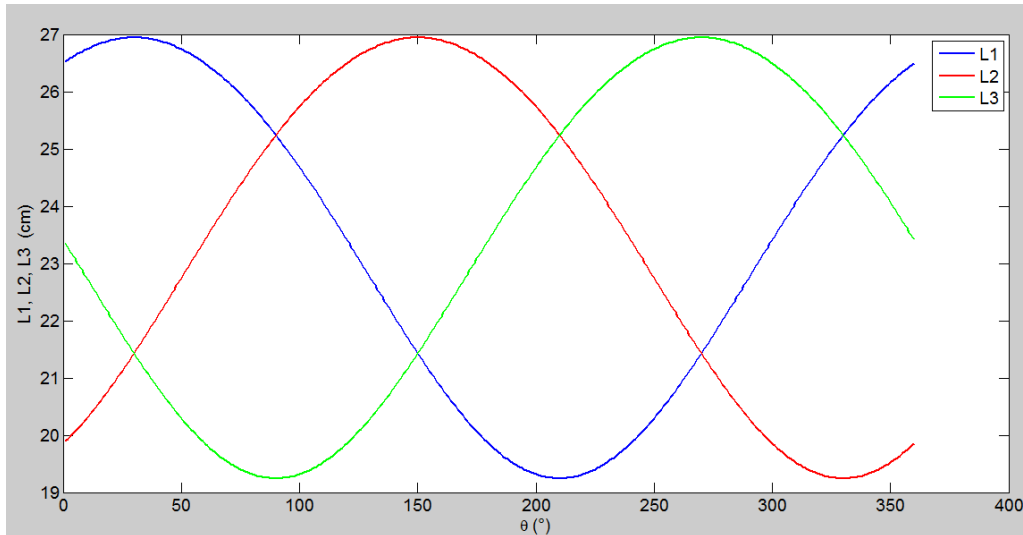
La **Figure(III.13)** illustre l'organigramme du programme traçant les variations des longueurs, des câbles et les angles de ceux-ci par rapport à l'axe des abscisses, en fonction de l'angle polaire que fait l'organe terminal lorsqu'il rebrousse la trajectoire circulaire.



Figure(III.13) : Organigramme traçant les variations des longueurs et des angles des câbles

### VII.2.1 Variation des longueur des cables

Pour une trajectoire circulaire de rayon  $R=R_{\max}/3$ , les variations des longueurs des 3 cables sont représentées par la **Figure(III.14)**.

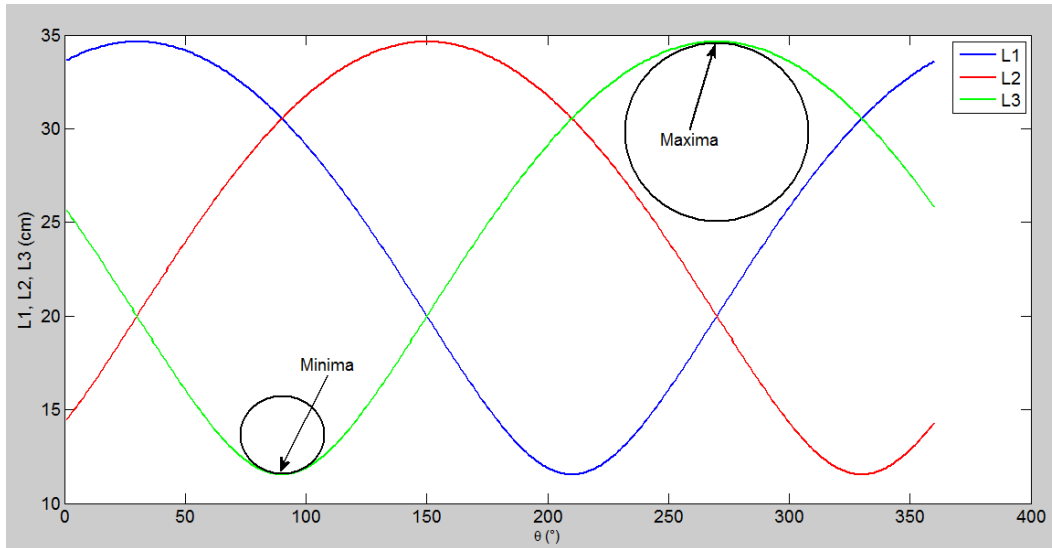


**Figure(III.14)** : Variations des longueurs des 3 cables du robot pour  $R=R_{\max}/3$

Comentaires :

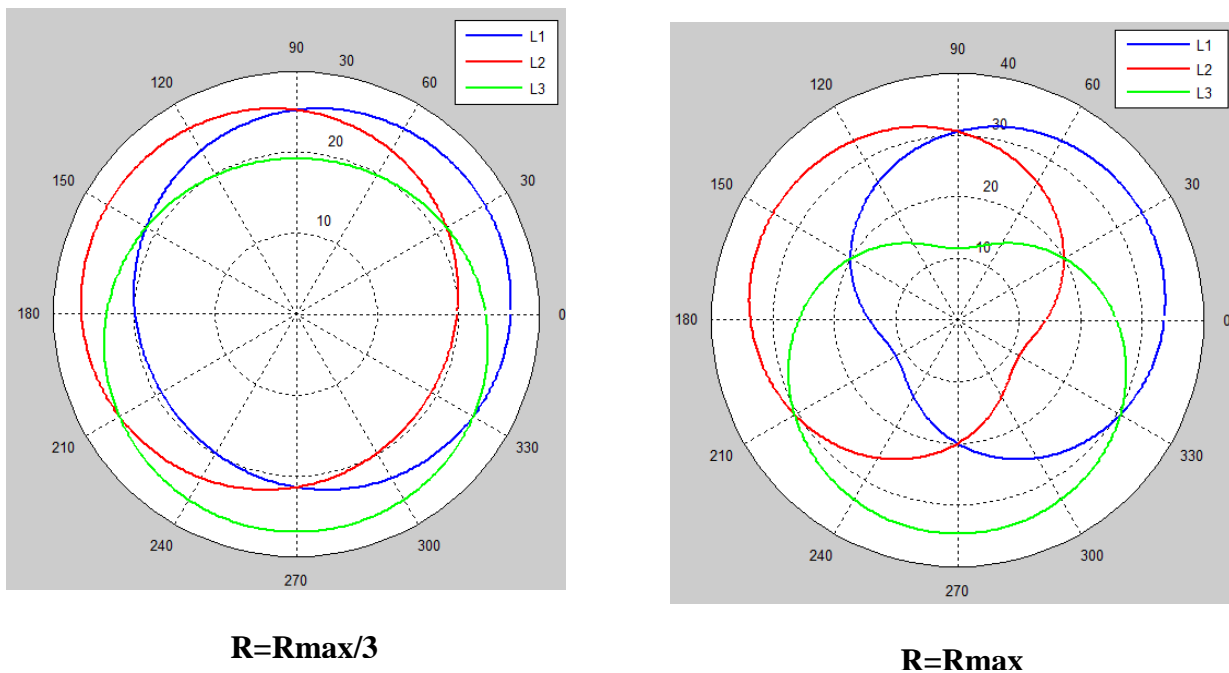
1. On remarque que les variations des longueurs des cables sont  $2\pi$ -periodiques.
2. Les variations des longueurs des 3 cables sont similaires, et se reproduisent alternativement chaque  $120^\circ$ .
3. Remarquons aussi, que les allures de ces courbes sont non-sinusoidales, i.e. le rayon de courbure aux minimas sont inférieurs aux rayons de courbures aux maximas. Cette différence devient plus visible au fure et à mesure que le rayon de la trajectoire circulaire augmente, cf. la **Figure(III.15)**.

Pour une trajectoire circulaire de rayon  $R=R_{max}$ , les variations des longueurs des 3 câbles sont représentées par la **Figure(III.15)**.



**Figure(III.15) :** Variations des longueurs des 3 câbles du robot pour  $R=R_{max}$

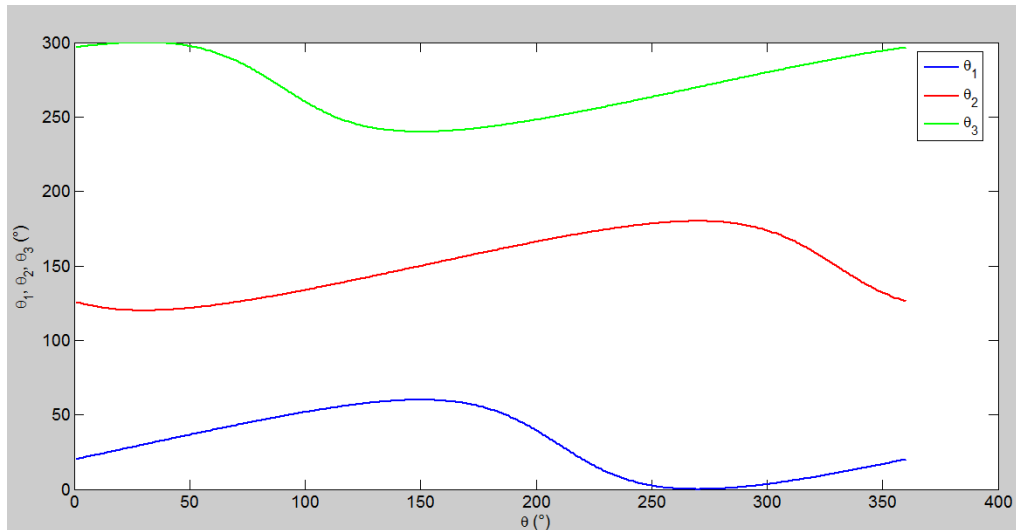
La **Figure(III.16)** permet de visualiser les variations des longueurs des câbles en fonction de l'angle polaire que fait l'organe terminal, présentées sous une forme polaire.



**Figure(III.16) :** variations des longueurs des câbles sous forme polaire

### VII.2.2 Variation des angles des câbles par rapport à l'axe des abscisses

La **Figure(III.17)** montre les variations des angles ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ) que font les câbles par rapport l'axe des abscisses en fonction de l'angle polaire que fait l'organe terminal.

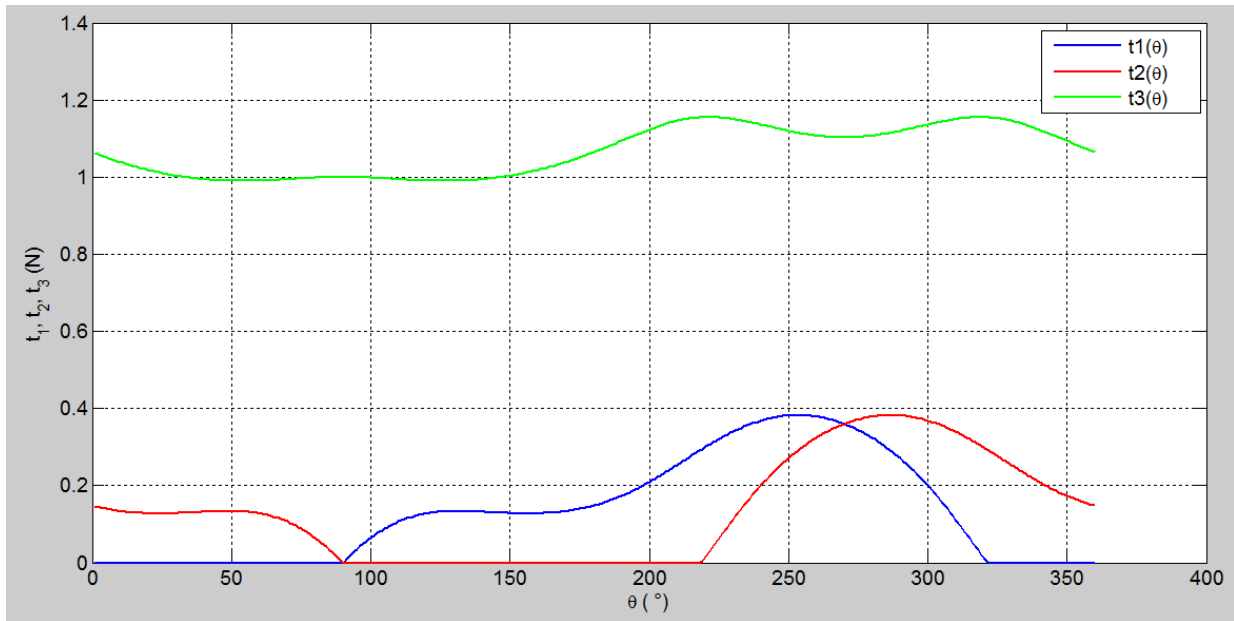


**Figure(III.17) :** Variations des angles des câbles

### VII.3 Simulation des tensions des câbles

Pour déterminer les tensions appliquées sur les câbles par les moteurs, on a utilisé la méthode de Moore-Penrose.

Par suite, les tensions nécessaires ont été simulées pour que l'effecteur poursuive une trajectoire circulaire tout en imposant une force constante le long du parcours. **Figure (III.18)**



**Figure (III.18) :** Tensions du robot parallèle à trois câbles

On remarque que le 3<sup>ème</sup> câble possède des valeurs de tension plus importantes que celles des deux autres câbles, et ce, quel que soit  $\theta$ .

Remarquons aussi qu'à  $\theta=90^\circ$  et à  $\theta=270^\circ$ , le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>ème</sup> câble possèdent la même tension, 0 et 0.3601N, respectivement.

## VIII. CONCLUSION

Ce chapitre récapitule les calculs de modélisation géométrique, cinématique et dynamique pour un robot à trois câbles (mouvement suivant deux direction), suivis d'une simulation sur Matlab des déplacements de l'organe terminal, des variations des longueurs, des variations des angles, et les tensions.



# Chapitre IV :

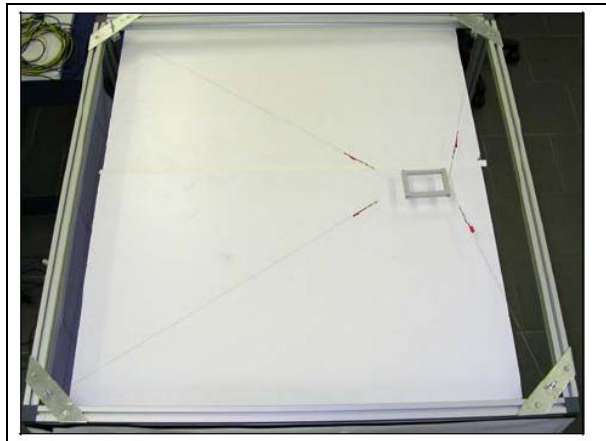
## Modélisation des robots parallèles a quatre câbles

## I. INTRODUCTION

Parmi les robots parallèles, on distingue les robots à quatre câbles qui permettent de réaliser un mouvement plan bidimensionnel à deux degrés de liberté, dont l'espace de travail est généralement de forme carré.

Dans ce chapitre on va étudier la structure des robots parallèles à quatre câbles et présenter la modélisation géométrique directe et inverse, cinématique et dynamique de ces robots.

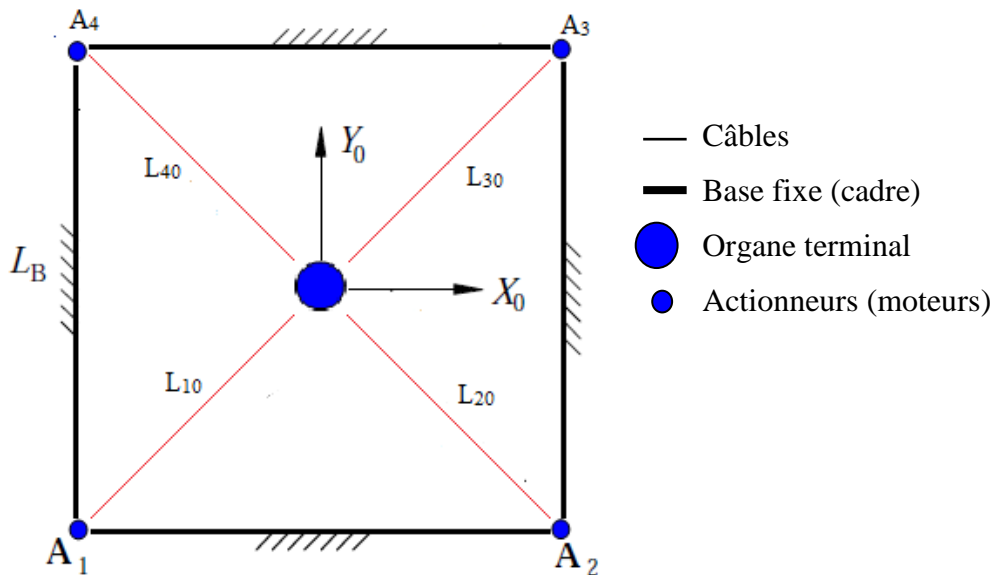
Comme dans le chapitre précédent, on va établir des programmes de simulation en Matlab basé sur le modèle géométrique inverse permettant la commande en position de l'organe terminal, des variations des longueurs et les variations des angles.



**Figure(IV.1)** : robot parallèle à quatre câbles [7]

La **Figure (IV.2)** représente un robot à quatre câbles a une base (cadre) fixe de forme carrée du coté  $L_b$ , la position de l'organe terminal est au centre de carrée avec :

$$L_{10} = L_{20} = L_{30} = L_{40} = \frac{L_b\sqrt{2}}{2}$$



Figure(IV.2) : robot à quatre câbles dans la position initial

## II. ROBOT PARALLELE A 4 CABLES

La structure mécanique de ce robot est constituée aussi par:

- une base (cadre) fixe de forme carrée.
- une plateforme mobile, qui porte l'organe terminal.
- La base et la plateforme mobile sont liées à travers quatre câbles.
- chaque câble est lié à la base par un actionneur (moteurs). **Figure (IV.3)**

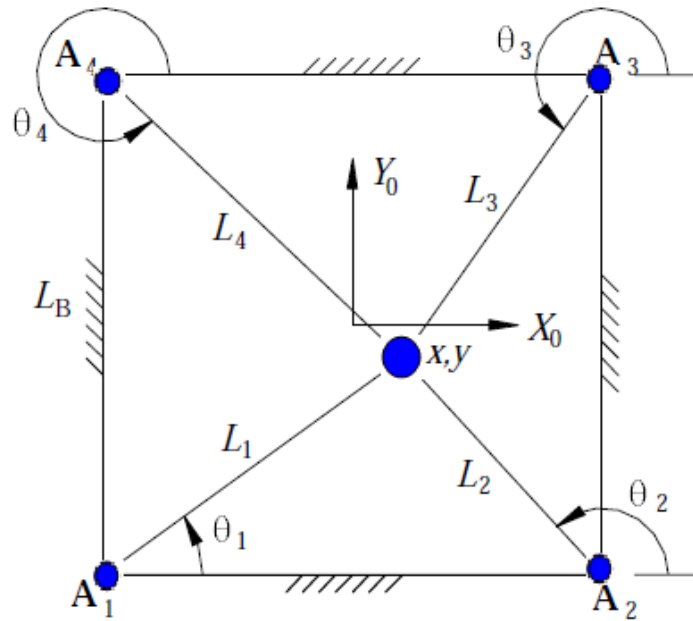


Figure (IV.3) : robot parallèle à quatre câbles

Si on applique un couple  $\Gamma$  ( $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ ) sur les moteurs, ces couples engendrent des tensions  $T$  ( $t_1, t_2, t_3, t_4$ ) appliquées sur les câbles de longueur  $L_i, i=1 \dots 4$ .

La force résultante  $F_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} & F_{Ry} \end{pmatrix}^T$

### III. MODELISATION GEOMETRIQUE

Dans cette section, on cherche à établir le modèle géométrique direct et le modèle géométrique inverse pour le robot 4 câbles.

#### III.1 Modèle Géométrique Inverse (MGI)

Dans ce modèle on va déterminer la longueur du câble «  $L_i$  » et l'angle entre l'axe  $x$  et le câbles «  $\theta_i$  » en fonction de la position  $\{x, y\}$ . Le modèle géométrique inverse peut s'exprimer par les relations suivantes :

$$L_{i0} = \sqrt{(L_{i0x})^2 + (L_{i0y})^2}$$

$$L_{ix} = x - L_{i0x}$$

$$L_{iy} = y - L_{i0y}$$

$$L_i = \sqrt{L_{ix}^2 + L_{iy}^2} = \sqrt{(x - L_{i0x})^2 + (y - L_{i0y})^2} ; i=1 \dots 4 \tag{IV.1}$$

Les angles de câble :

$$\theta_i = \arctan g \left( \frac{y - L_{i0y}}{x - L_{i0x}} \right) \quad ; i=1 \dots 4 \quad (\text{IV.2})$$

### III.2. Modèle Géométrique Direct (MGD)

Le MGD exprime la position de l'effecteur  $M(x, y)$  en fonction des longueurs des câbles  $L_i$ . Pour les manipulateurs parallèles, le modèle géométrique directe est difficile à résoudre à cause de sa structure fermée (les angles  $\theta_i$  sont liés avec les longueurs des câbles  $L_i$ ). La relation entre la position  $X=(x, y)$  et les coordonnées généralisées est non linéaire.

Ce problème peut être simplifié en déplaçant le repère  $R(O, X_0, Y_0)$  au point  $A_1$ , ce qui donne les nouvelles coordonnées des points  $A_1=(0,0)^T$  et  $A_2=(Lb,0)^T$ . Le point  $M$  représentant l'organe terminal du robot est l'intersection de deux cercles, l'un de centre  $A_1$  avec rayon  $L_1$ , et l'autre de centre  $A_2$  de rayon  $L_2$ .

$$\begin{cases} x = \frac{Lb^2 + L_1^2 - L_2^2}{2Lb} \\ y = \sqrt{L_1^2 - x^2} \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

La solution de modèle géométrique direct exige le choix la valeur positive de  $y$

## IV. MODELISATION CINEMATIQUE

Nous présentons dans cette partie la modélisation inverse et directe de la vitesse de CDDRs plan à 4 câbles.

### IV.1. Modèle Cinématique Inverse

Pour calculer le modèle cinématique inverse, nous considérons le  $i^{\text{eme}}$  vecteur suivant :

$$x = L_{i0x} + L_i \cos(\theta_i) \quad y = L_{i0y} + L_i \sin(\theta_i)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{i0x} + L_i \cos(\theta_i) \\ L_{i0y} + L_i \sin(\theta_i) \end{pmatrix}$$

Si on le dérive  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  par rapport au temps et on inverse, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -L_i \sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & L_i \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} \quad i=1\dots 4 \quad (\text{IV.4})$$

A partir de l'équation (IV.4) on obtient :

$$\begin{pmatrix} \dot{L}(i) \\ \dot{\theta}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i)/L_i & \cos(\theta_i)/L_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad i=1\dots 4 \quad (\text{IV.5})$$

Comme nous nous intéressons à la longueur du câble actif en fonction de la position de l'effecteur, nous pouvons extraire la première ligne de (IV.5) pour obtenir la vitesse cinématique de CDDRs.

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \\ \dot{L}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

## IV.2. Modèle Cinématique Direct

Pour obtenir le modèle cinématique direct, on doit inverser l'équation (IV.6) qui nous donne  $\dot{X} = M^{-1} \dot{L}$ , donc la solution exige le calcul de la matrice jacobéenne inverse. En raison de redondance d'actionnement, M n'est pas carré mais de dimension (4x2) ce qui nous crée un problème de calcul de  $M^{-1}$ . Alors pour résoudre ce problème, nous avons utilisés le pseudo inverse de Moore-Penrose :

$$\dot{X} = M^+ \dot{L} \quad \text{où} \quad M^+ = (M^T M)^{-1} M^T.$$

Avec

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix}$$

On peut écrire l'équation (IV.6) sous la forme :  $\dot{X} = M^{-1}L$  où:

$\dot{L}$  : Est le vecteur de vitesse du trois câbles.

$M^{-1}$  : est la matrice Jacobienne inverse de CDDRs.

$\dot{X} = (\dot{x}, \dot{y})$  : est le vecteur de vitesse de l'organe terminal.

## V. MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT

### V.1. Modèle dynamique de l'effecteur

Le modèle dynamique de l'effecteur est exprimé par la relation suivante.

$$m\ddot{X} = F_R$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} \quad \text{(IV.7)}$$

Où  $m$  : est la matrice de masse

$\ddot{X}$  : Est le vecteur d'accélération de l'organe terminal

$F_R = (F_{Rx} \quad F_{Ry})^T$  : est la force résultante de toutes les tensions des câbles appliqués sur l'organe terminal

### V.2. Structure mécanique des moteurs

Le comportement dynamique du moteur est exprimé par l'équation :

$$J\ddot{\beta} + C\dot{\beta} = \tau - rT \quad \text{(IV.8)}$$

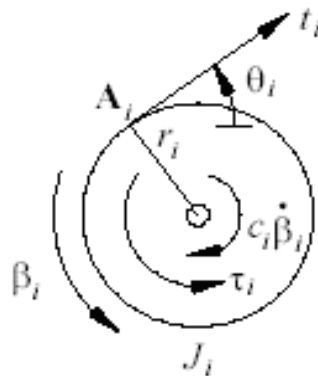


Figure (IV.4): Tension et couple sur la poulie

$$\text{Avec : } J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}$$

Sont des matrices diagonales qui représentent les inerties et les coefficients d'amortissement visqueux de chaque moteur. Nous considérons que tous les rayons de la poulie sont identiques  $r_i = r (i=1,2,3,4)$ .  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)^T$  est le vecteur des couples appliqués par les moteurs,  $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)^T$  est le vecteur des tensions des câbles.  $\beta$  est l'angle de rotation de la poulie.

$$\text{Donc : } T = \frac{1}{r} (\tau - J \ddot{\beta} - C \dot{\beta}) \quad (\text{IV.9})$$

### V.3 Modèle dynamique du système

Le modèle dynamique global du système est obtenu par combinaison entre les modèles de l'organe terminal et des moteurs. Si on considère que les angles des poulies sont nuls quand la position de l'organe terminal est au centre de carré  $X = (0,0)^T$ , on a aussi :

$$L_{10} = L_{20} = L_{30} = L_{40} = \frac{Lb\sqrt{2}}{2}$$

La relation entre les angles des rotations ( $\beta_i$ ) des poulies de rayon  $r$  et les variations des longueurs des câbles ( $\Delta L_i$ ) est :

$$\beta_i * r = -\Delta L_i \quad \text{Avec} \quad \Delta L_i = L_i - L_{i0} \quad (\text{IV.10})$$

$$\text{Où} \quad L_i = \sqrt{(x - L_{i0x})^2 + (y - L_{i0y})^2} ; i=1...4$$

Et  $L_{i0}$  sont les longueurs initiales des câbles :  $L_{i0} = \sqrt{(L_{i0x})^2 + (L_{i0y})^2}$

$$\text{Donc : } \beta = \begin{pmatrix} \beta_1(X) \\ \beta_2(X) \\ \beta_3(X) \\ \beta_4(X) \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} L_{10} - L_1 \\ L_{20} - L_2 \\ L_{30} - L_3 \\ L_{40} - L_4 \end{pmatrix}$$



En dérivant  $\beta$  successivement par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\beta} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(X) \\ \dot{\beta}_2(X) \\ \dot{\beta}_3(X) \\ \dot{\beta}_4(X) \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}$$

De l'équation (IV.6) :

$$\dot{\beta} = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\bullet \\ y^\bullet \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{r} \left[ \begin{pmatrix} \theta_1^\bullet \sin(\theta_1) & -\theta_1^\bullet \cos(\theta_1) \\ \theta_2^\bullet \sin(\theta_2) & -\theta_2^\bullet \cos(\theta_2) \\ \theta_3^\bullet \sin(\theta_3) & -\theta_3^\bullet \cos(\theta_3) \\ \theta_4^\bullet \sin(\theta_4) & -\theta_4^\bullet \cos(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^\bullet \\ y^\bullet \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_4) & \sin(\theta_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\bullet\bullet} \\ y^{\bullet\bullet} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{IV.11})$$

De (IV.9) on obtient [6]:

$$T = \frac{1}{r} \left( \tau - J \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right) \dot{X} + \frac{\partial \beta}{\partial X} \ddot{X} \right) - C \frac{\partial \beta}{\partial X} \dot{X} \right) \quad (\text{IV.12})$$

Avec

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\partial \beta}{\partial X} \dot{X} \\ \ddot{\beta} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \beta}{\partial X} \right) \dot{X} + \frac{\partial \beta}{\partial X} \ddot{X} \\ \frac{\partial \beta}{\partial X} &= -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{x-L_{10x}}{L_1} & \frac{y-L_{10y}}{L_1} \\ \frac{x-L_{20x}}{L_2} & \frac{y-L_{20y}}{L_2} \\ \frac{x-L_{30x}}{L_3} & \frac{y-L_{30y}}{L_3} \\ \frac{x-L_{40x}}{L_4} & \frac{y-L_{40y}}{L_4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Du modèle cinématique inverse :

$$x = L_{i0x} + L_i \cos(\theta_i) \quad y = L_{i0y} + L_i \sin(\theta_i)$$

D'où :

$$\frac{\partial \beta}{\partial X} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_3 & \cos \theta_3 \\ \cos \theta_4 & \sin \theta_4 \end{bmatrix}$$

$$F_R = ST \tag{IV.13}$$

où:  $S = \left\{ -\vec{L}_1 - \vec{L}_2, -\vec{L}_3, -\vec{L}_4 \right\}^T$  est une matrice de dimension  $(2 \times 4)$ .

$$S = \begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 & -\cos \theta_3 & -\cos \theta_4 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\sin \theta_3 & -\sin \theta_4 \end{pmatrix}$$

Enfin, en combinant (IV.7), (IV.12) et (IV.13), l'ensemble des équations du modèle dynamique peut être exprimé dans une forme standard pour les systèmes robotiques:

$$M(X) \ddot{X} + N(X, \dot{X}) = S(X) \tau \tag{IV.14}$$

où :

$$M = r * m + S(X) J \frac{\partial \beta}{\partial X}$$

et :

$$N(X, \dot{X}) = S(X) \left( J \frac{d}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial X} + C \frac{\partial \beta}{\partial X} \right) \dot{X}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N(X, X^{\bullet}) = \begin{pmatrix} N_1(X, X^{\bullet}) \\ N_2(X, X^{\bullet}) \end{pmatrix}$$

Avec :

$$M_{11} = r * m + \frac{J_1 \cos^2(\theta_1) + J_2 \cos^2(\theta_2) + J_3 \cos^2(\theta_3) + J_4 \cos^2(\theta_4)}{r}$$

$$M_{12} = \frac{J_1 \cos(\theta_1) \sin(\theta_1) + J_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2) + J_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_3) + J_4 \cos(\theta_4) \sin(\theta_4)}{r}$$

$$M_{21} = M_{12}$$

$$M_{22} = r * m + \frac{J_1 \sin^2(\theta_1) + J_2 \sin^2(\theta_2) + J_3 (\sin^2 \theta_3) + J_4 (\sin^2 \theta_4)}{r}$$

$$N_{11} = (\cos(\theta_1)(C_1 \cos(\theta_1) - J_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)) + \cos(\theta_2)(C_2 \cos(\theta_2) - J_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) + \cos(\theta_3)(C_3 \cos(\theta_3) - J_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3)) + \cos(\theta_4)(C_4 \cos(\theta_4) - J_4 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_4))) / r$$

$$N_{12} = (\cos(\theta_1)(C_1 \sin(\theta_1) + J_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)) + \cos(\theta_2)(C_2 \sin(\theta_2) + J_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) + \cos(\theta_3)(C_3 \sin(\theta_3) + J_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3)) + \cos(\theta_4)(C_4 \sin(\theta_4) + J_4 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4))) / r$$

$$N_{21} = (\sin(\theta_1)(C_1 \cos(\theta_1) - J_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)) + \sin(\theta_2)(C_2 \cos(\theta_2) - J_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)) + \sin(\theta_3)(C_3 \cos(\theta_3) - J_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_3)) + \sin(\theta_4)(C_4 \cos(\theta_4) - J_4 \dot{\theta}_4 \sin(\theta_4))) / r$$

$$N_{22} = (\sin(\theta_1)(C_1 \sin(\theta_1) + J_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)) + \sin(\theta_2)(C_2 \sin(\theta_2) + J_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)) + \sin(\theta_3)(C_3 \sin(\theta_3) + J_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_3)) + \sin(\theta_4)(C_4 \sin(\theta_4) + J_4 \dot{\theta}_4 \cos(\theta_4))) / r$$

## VI. L'ANALYSE STATIQUE DES FORCES

Dans l'équilibre statique, la somme des forces extérieures exercées sur l'effecteur par les câbles doivent être égale à la force résultante  $F_R$  externe exercée sur l'environnement. La **Figure (IV.5)** montre la statique du corps libre pour 4 câbles du CDDR plan.

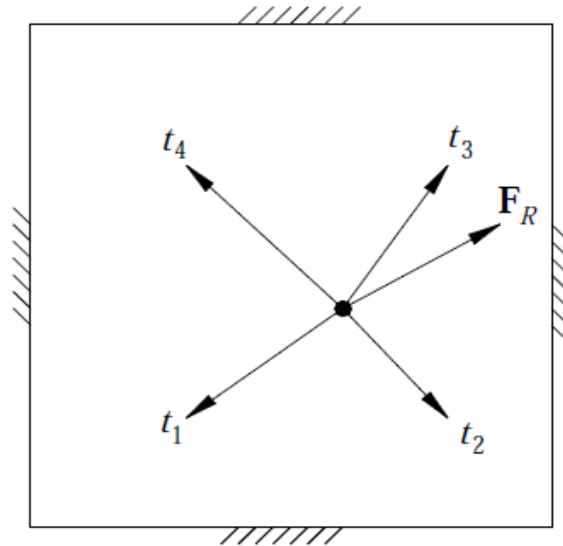


Figure (IV.5): Force statique 4 câbles plan CDDRs

L'équation suivante exprime cette relation:

$$\sum_{i=1}^4 t_i = -\sum_{i=1}^4 t_i \vec{L}_i = F_R \quad (\text{IV.15})$$

$$\text{où : } L_i = \{ \cos(\theta_i) \quad \sin(\theta_i) \}^T$$

Dans ce cas, la gravité est ignorée parce qu'elle est supposée perpendiculaire au plan du CDDR. L'équation (IV.14) peut être exprimée comme :

$$S^*T = F_R$$

$$\text{où : } S = \left\{ -\vec{L}_1, -\vec{L}_2, -\vec{L}_3, -\vec{L}_4 \right\}^T \text{ est une matrice de dimension } (2 \times 4).$$

A partir de l'équation (IV.14) on peut l'exprimer par [8]:

$$\begin{pmatrix} -\cos \theta_1 & -\cos \theta_2 & -\cos \theta_3 & -\cos \theta_4 \\ -\sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & -\sin \theta_3 & -\sin \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

L'équation **(IV.15)** est sous-contrainte, ce qui signifie qu'il y a infini des solutions au vecteur des tensions  $T$  des câbles pour exercer la force  $F_R$ . Pour inverser cette équation (à exprimer les tensions des câbles  $T$  en fonction de  $F_R$ ), nous utilisons la notion de solution particulière et homogène.

$$T = S^+ F_R + (I_n - S^+ S)Z \quad (\text{IV.16})$$

où:

$I_n$  : est la matrice d'identité de dimension (4x4)

$Z$  : est un vecteur arbitraire de dimension 4.

$S^+$  : est le pseudo-inverse de  $S$  par la méthode de Moore-Penrose de dimension (4x2).

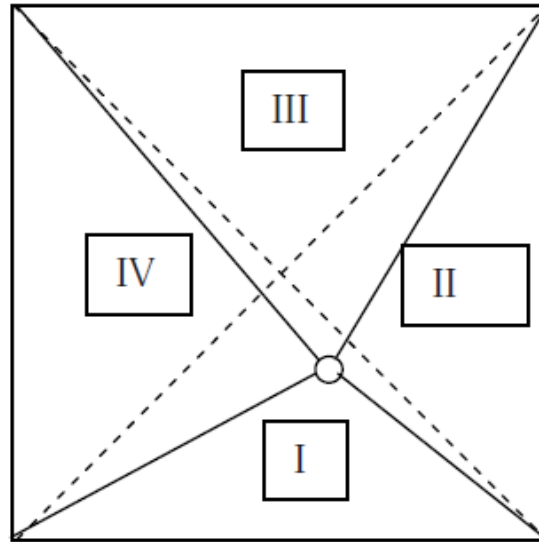
Le premier terme de **(IV.16)** est la solution particulière, et le deuxième terme est la solution homogène. Pour la redondance d'actionnement du premier degré, une expression équivalente à l'équation **(IV.16)** est :

$$T = \begin{pmatrix} t_{p1} \\ t_{p2} \\ t_{p3} \\ t_{p4} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

la solution particulière est le premier terme dans **(IV.17)** et la solution homogène est exprimée comme le noyau du vecteur  $N$  ( $n_1, n_2, n_3, n_4$ ) multiplié par un scalaire arbitraire  $\alpha$  plus le vecteur  $P$  ( $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) multiplié par un scalaire arbitraire  $\lambda$ . Afin de déterminer si un point donné se trouve dans l'espace de travail statique pour un simple CDDRs, si :

$$\alpha \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Divisant l'espace de travail en quatre zones comme illustrer dans la **Figure (IV.6)**, pour démontrer que l'espace de travail entière est dans l'espace de travail statique.



**Figure (IV.6) :** Robot à 4 câbles à 4 zones d'espace de travail

Cas I : Supposons que l'organe terminal est dans la première zone. Une base possible pour l'espace nul est :

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_4 - \theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_4)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(IV.19)}$$

Si l'organe terminal se trouve à l'intérieur de la zone I. Les intervalles des angles des câbles sont :

$$0 \leq \theta_1 \leq 45^0 \quad , \quad 135^0 \leq \theta_2 \leq 180^0 \quad , \quad 225^0 \leq \theta_3 \leq 270^0 \quad \text{et} \quad 270^0 \leq \theta_4 \leq 315^0$$

Avec :

$$\begin{aligned} 90^\circ &\leq \theta_4 - \theta_2 \leq 135^\circ \\ 90^\circ &\leq \theta_2 - \theta_1 \leq 180^\circ \\ -270^\circ &\leq \theta_1 - \theta_3 \leq -180^\circ \\ -315^\circ &\leq \theta_1 - \theta_4 \leq -225^\circ \end{aligned}$$

Donc toutes les fonctions sinus en **(IV.19)** sont combinaison positif ou nul et tous les combinaisons des N et M (avec  $\alpha$  et  $\lambda$  positif) comporte toujours des composantes positives comme l'exige **(IV.18)**.

En conclusion, la première zone appartient à l'espace de travail statique.

Cas II : Supposons que l'organe terminal est dans la deuxième zone. On peut choisir des différents espaces nuls:

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin(\theta_4 - \theta_3)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_3 - \theta_2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(IV.20)}$$

Si l'organe terminal se trouve à l'intérieur de la zone II. Les intervalles des angles des câbles sont :

$$0 \leq \theta_1 \leq 45^\circ, \quad 90^\circ \leq \theta_2 \leq 135^\circ, \quad 225^\circ \leq \theta_3 \leq 270^\circ \quad \text{et} \quad 315^\circ \leq \theta_4 \leq 360^\circ$$

Avec :

$$\begin{aligned} 45^\circ &\leq \theta_4 - \theta_3 \leq 135^\circ \\ -225^\circ &\leq \theta_2 - \theta_4 \leq -180^\circ \\ -270^\circ &\leq \theta_1 - \theta_3 \leq -180^\circ \\ 45^\circ &\leq \theta_2 - \theta_1 \leq 135^\circ \\ 90^\circ &\leq \theta_3 - \theta_2 \leq 180^\circ \end{aligned}$$

Donc toutes les fonctions sinus en **(IV.20)** sont combinaison positif ou nul et tous les combinaisons des N et M (avec  $\alpha$  et  $\lambda$  positif) comporte toujours des composantes positives. En conclusion, la deuxième zone appartient à l'espace de travail statique.

Les deux derniers cas sont similaires. Choisissez:

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \\ \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \\ \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin(\theta_4 - \theta_3)} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Constituent une base appropriée pour le secteur III. Et:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_3 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\theta_2 - \theta_4)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_4 - \theta_1)} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

Constituent une base appropriée pour le secteur IV.

La conclusion pour chaque cas est identique, à savoir les troisième et quatrième zones font également partie de l'espace de travail statique, y compris tous les bords des triangles internes.

Le seul point que nous n'a pas pris en compte est le centre du carré, mais dans ce cas la base de l'espace vide est constitué par un seul vecteur  $N = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$ , clairement ce cas particulier est à l'intérieur de l'espace de travail statique car elle facilement vérifie **(IV.18)**.

Les bords du carré de base (qui correspond à cinématique singularités) et tous les points à l'extérieur de la base carrée sont en dehors de l'espace de travail statique. Ce résultat est logique compte tenu des robots à 3 câbles, résultats obtenus depuis l'ajout d'un autre câble ne peut qu'aider l'espace de travail statique.



## VII. SIMULATION

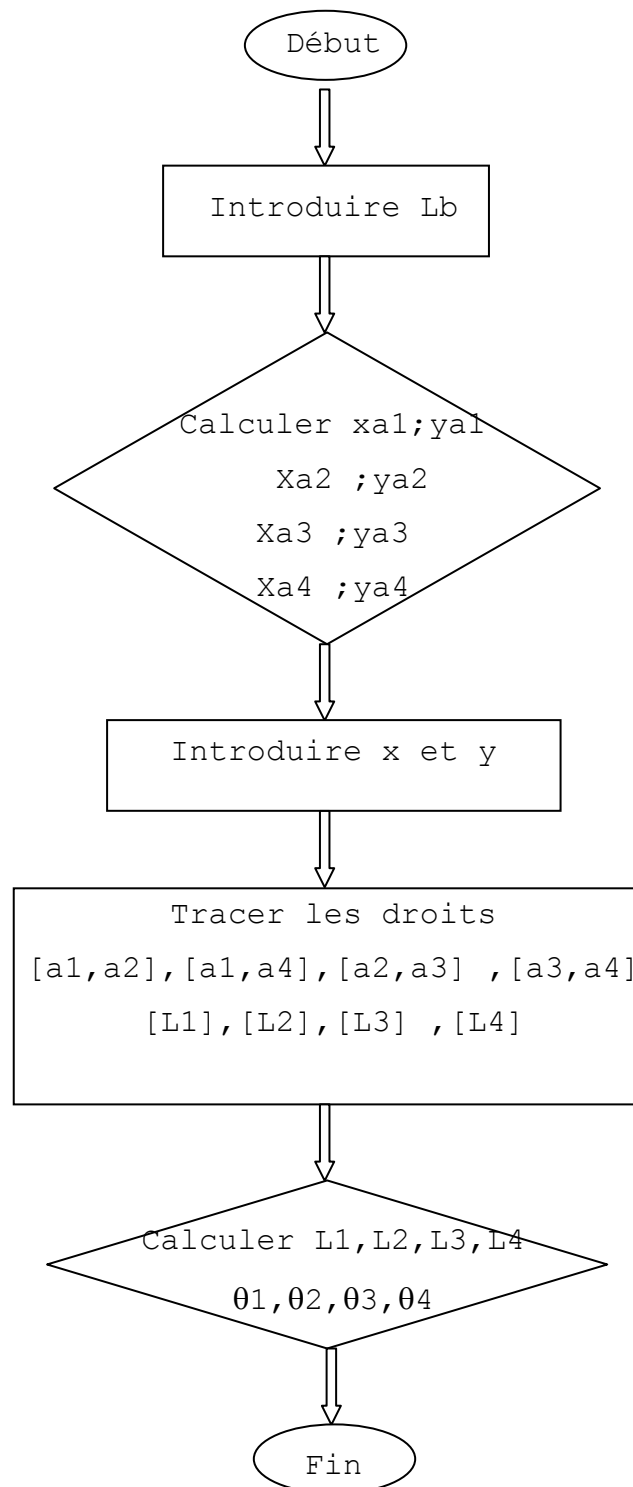
Dans cette section on a développé des programmes sous Matlab pour la commande en position de l'organe terminal d'un robot 4 câbles, basé sur le modèle géométrique inverse. Les résultats de calculs sont représentés sous forme de graphes correspondant aux variations de longueurs et des angles des câbles. Il permet également la visualisation graphique du système.

Ainsi que, on a simulé les tensions nécessaires pour que l'effecteur poursuive une trajectoire circulaire tout en imposant une force constante le long du parcours.

### VII.1 Simulation du Modèle Géométrique Inverse

On donne les valeurs de  $(x, y)$  et on détermine les longueurs du câbles et les angles pour chaque déplacement de l'organe terminal.

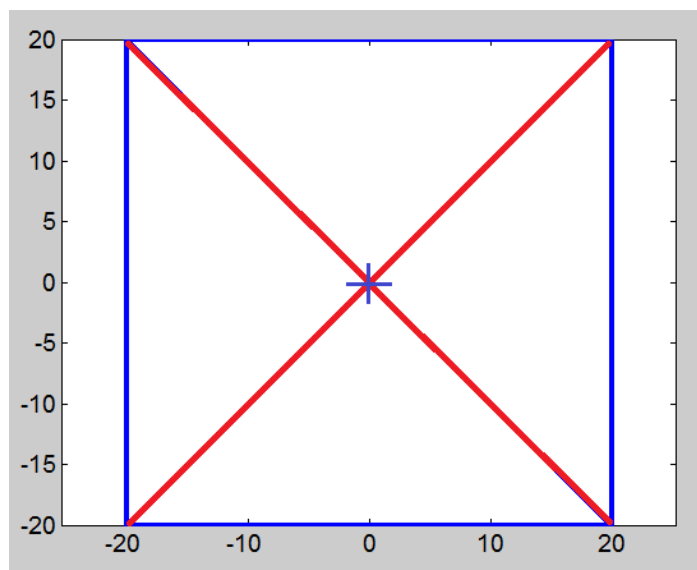
La **Figure (IV.6)** illustre l'organigramme du programme calculant les différentes longueurs des 4 câbles du robot ( $L_1, L_2, L_3, L_4$ ), ainsi que les angles ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ) que font ces câbles avec l'axe des abscisses.



**Figure (IV.6) :** Organigramme des longueurs et des angles des 4 câbles de robot

La **Figure (IV.7)** représente le robot à 4 câbles avec l'organe terminal en position de repos ( $x=0, y=0$ ). L'organe terminal est repère par un signe plus (+).

$x_p$ (cm)	$y_p$ (cm)	$l_a$ (cm)	$l_b$ (cm)	$l_c$ (cm)	$l_d$ (cm)	$\theta_1$ (deg)	$\theta_2$ (deg)	$\theta_3$ (deg)	$\theta_4$ (deg)
0	0	28.28	28.28	28.28	28.28	45	135	225	315



**Figure (IV.7)** : Organe terminal en position initial

Les **Figure (IV.8)** et **Figure (IV.9)** montrent quelques positions de l'organe terminal obtenues par le programme.

Exemple 1 :  $x_p=14$ cm,  $y_p=7$ cm.

$x_p$ (cm)	$y_p$ (cm)	$l_a$ (cm)	$l_b$ (cm)	$l_c$ (cm)	$l_d$ (cm)	$\theta_1$ (deg)	$\theta_2$ (deg)	$\theta_3$ (deg)	$\theta_4$ (deg)
14	7	43.41	27.65	14.31	36.40	38.45	102.52	245.22	339.07

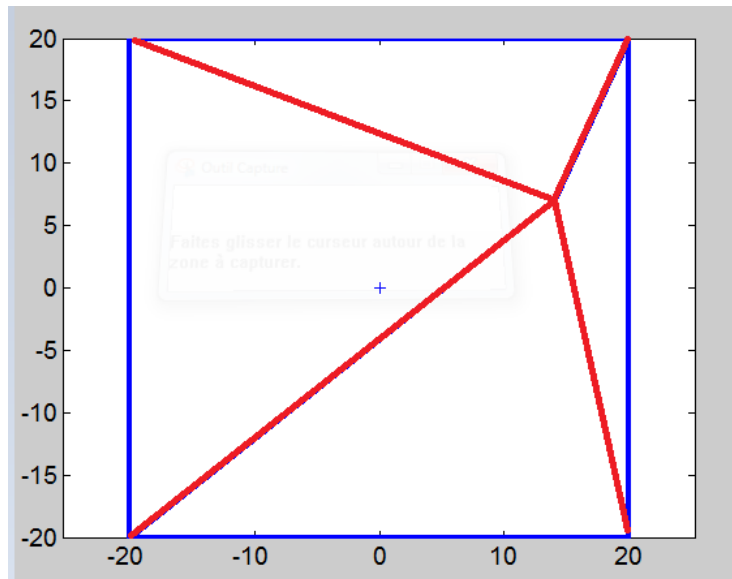


Figure (IV.8) : Organe terminal en position (14, 7)

Exemple 1 :  $x_p=10\text{cm}$ ,  $y_p=-17\text{cm}$ .

$X_p$ (cm)	$y_p$ (cm)	$l_a$ (cm)	$l_b$ (cm)	$l_c$ (cm)	$l_d$ (cm)	$\theta_1$ (deg)	$\theta_2$ (deg)	$\theta_3$ (deg)	$\theta_4$ (deg)
10	-17	30.14	10.44	38.32	47.63	5.71	163.30	254.87	309.03

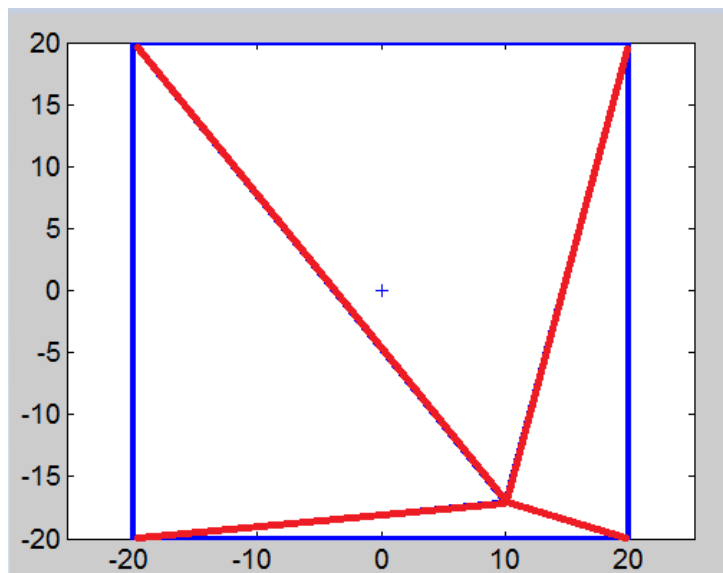


Figure (IV.9) : Organe terminal en position (10, -17)

## VII.2. Simulation de la trajectoire de l'organe terminal

Dans cette partie, nous essayons de simuler les variations des longueurs des câbles, ainsi que les angles que font ceux-ci avec l'axe des abscisses, en fonction de l'angle polaire que fait l'organe terminal.

On propose une trajectoire circulaire d'un rayon  $R$  et dont le centre est l'origine  $O$ .

Les équations paramétriques de cette trajectoire sont

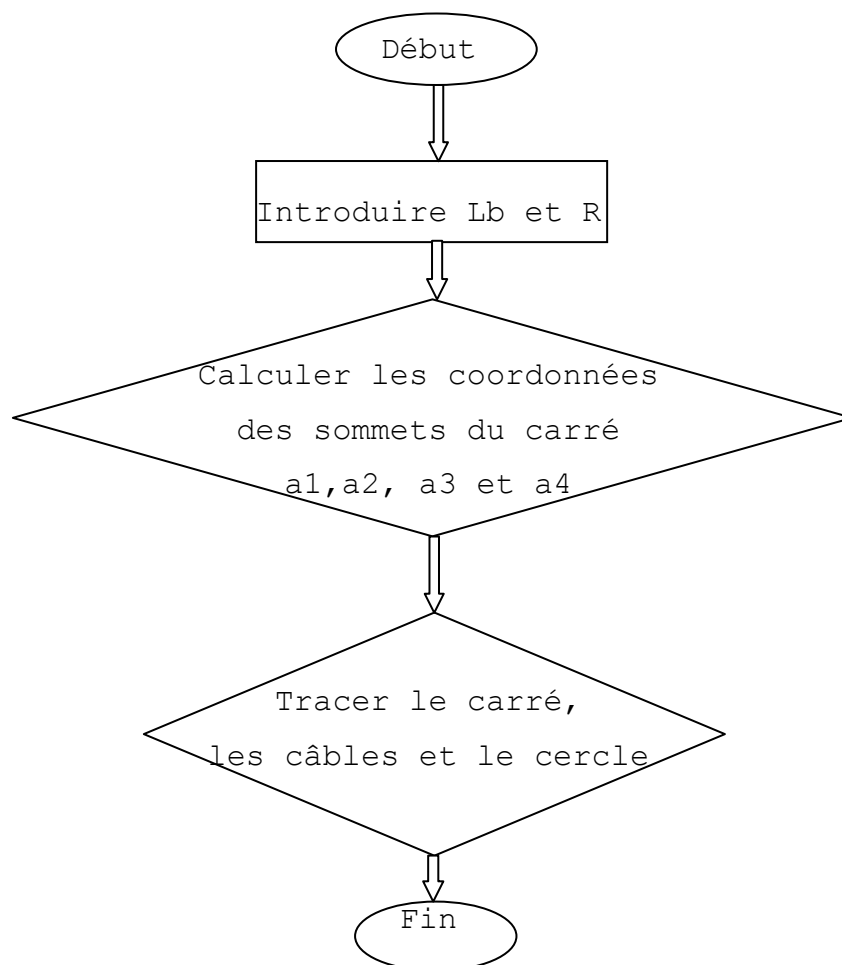
$$x = R \cos(\theta)$$

$$y = R \sin(\theta)$$

où  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et  $0 \leq R \leq R_{\max}$

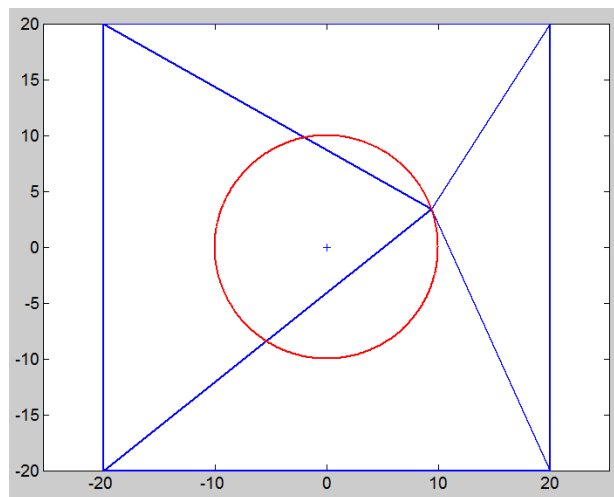
où  $R_{\max} = L/2$  est la distance entre le centre du carré  $O$  et l'un des quatre côtés.

La **Figure (IV.10)** montre l'organigramme du programme traçant la géométrie à 4 câbles, avec la trajectoire circulaire parcourue par l'organe terminal.



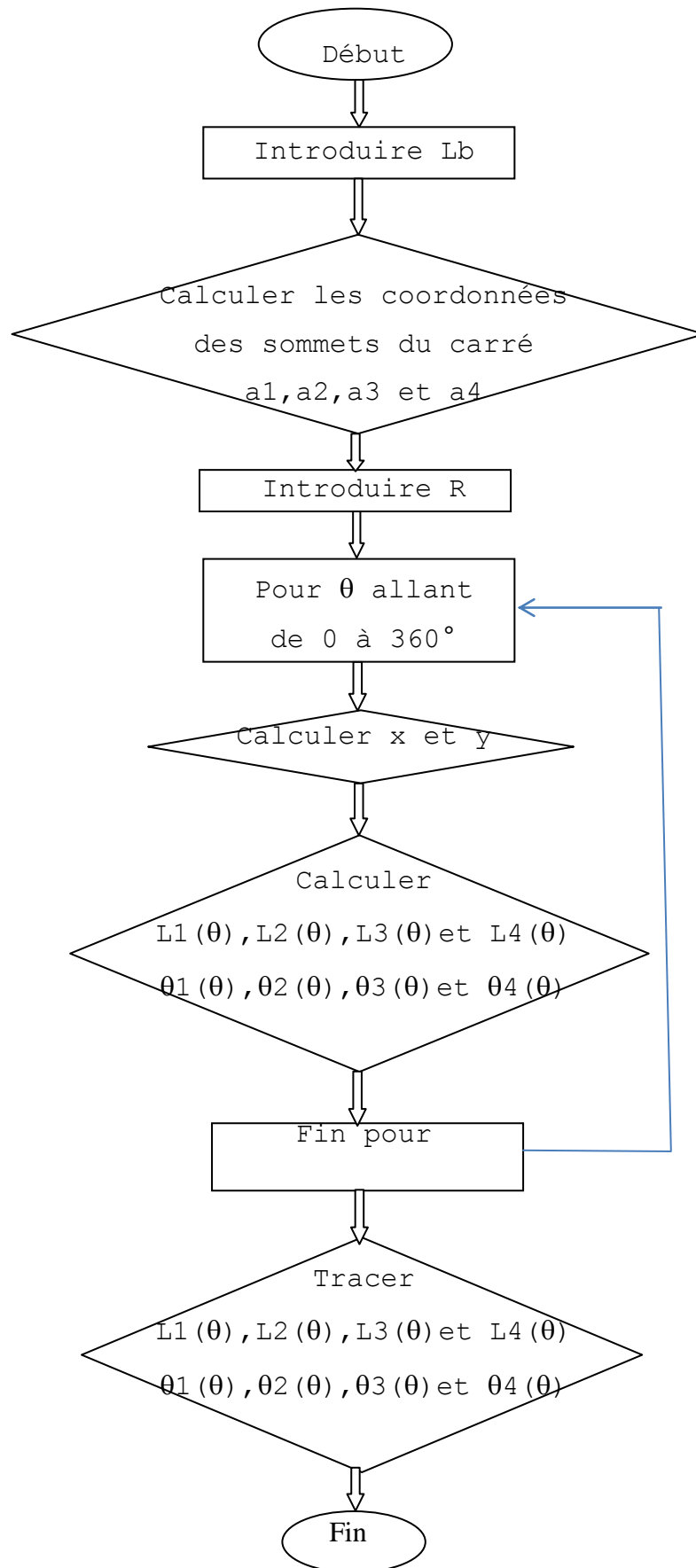
**Figure(IV.10)** : Organigramme traçant la géométrie à 4 câbles avec la trajectoire circulaire

Pour une trajectoire circulaire de rayon  $R=R_{\max}/2$  la géométrie de problème ressemble à la **Figure (IV.11)**.



**Figure (IV.11)** : trajectoire circulaire de rayon  $R=R_{\max}/2$

La **Figure (IV.12)** illustre l'organigramme du programme traçant les variations des longueurs, des câbles et les angles de ceux-ci par rapport à l'axe des abscisses, en fonction de l'angle polaire que fait l'organe terminal lorsqu'il rebrousse la trajectoire circulaire.

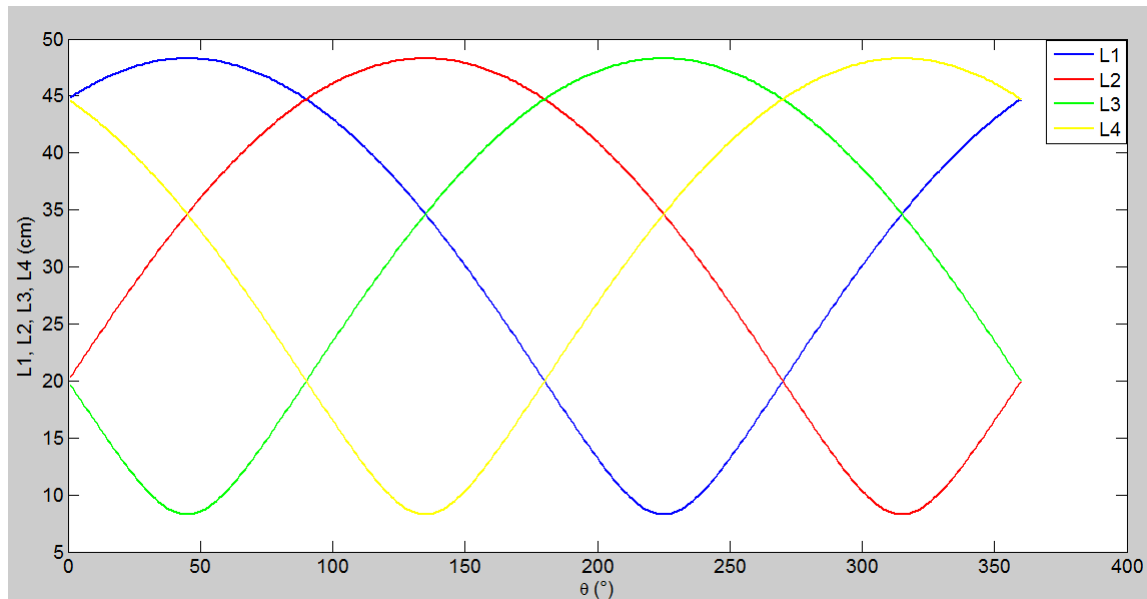


Figure(IV.12) : Organigramme traçant les variations des longueurs et des angles des câbles

### VII.2.1. Variation des longueur des cables

Pour une trajectoire circulaire de rayon  $R=R_{max}$ , les variations des longueurs des 4 cables sont représentées par la **Figure (IV.13)**.

$R=R_{max}$



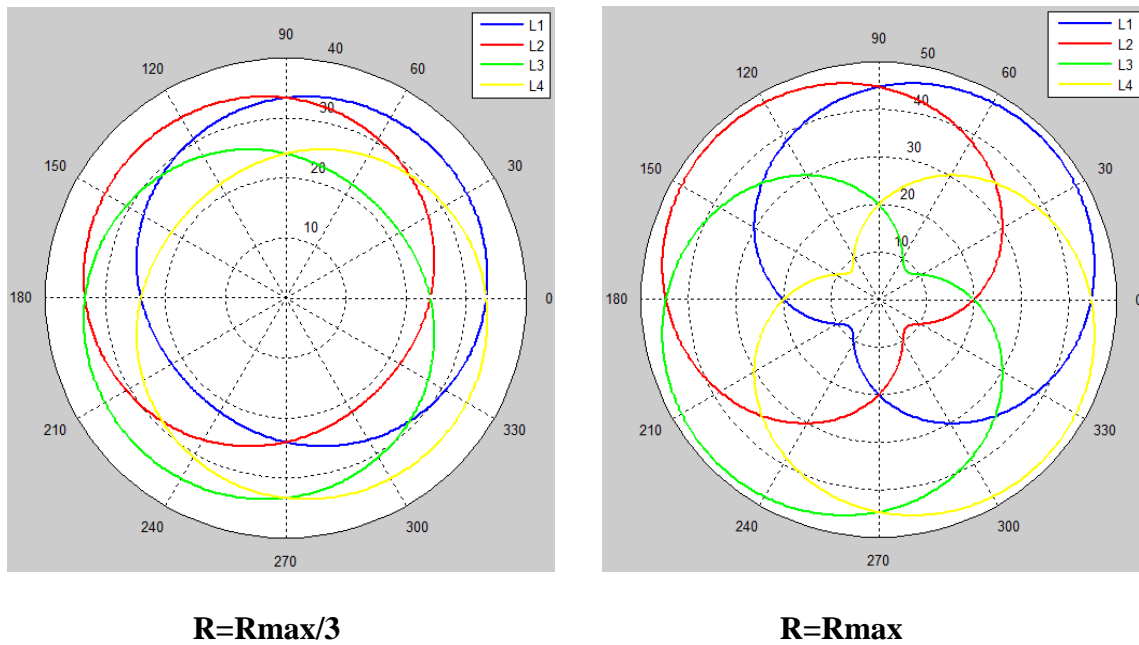
**Figure (IV.13) :** Variations des longueurs des 3 cables du robot pour  $R=R_{max}$

Comentaires :

1. On remarque que les variations des longueurs des cables sont  $2\pi$ -periodiques.
2. Les variations des longueurs des 4 cables sont similaires, et se reproduisent alternativement chaque  $90^\circ$ .
3. Remarquons aussi, que les allures de ces courbes sont non-sinusoidales, i.e. le rayon de courbure aux minimas sont inférieurs aux rayons de courbures aux maximas. Cette différence devient plus visible au fure et à mesure que le rayon de la trajectoire circulaire augmente.



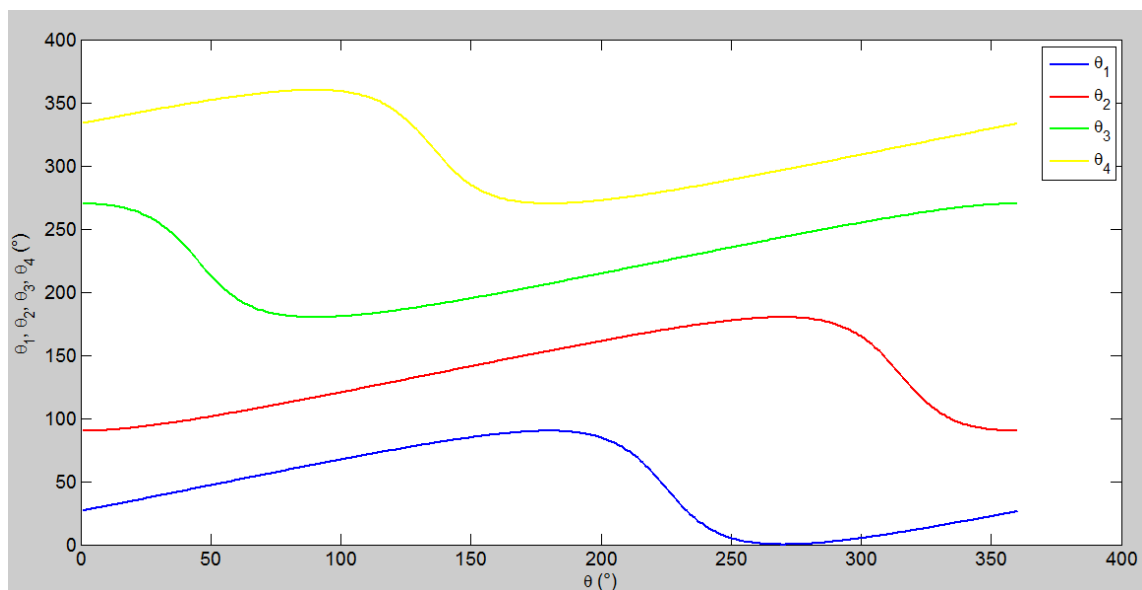
La **Figure (IV.14)** permet de visualiser les variations des longueurs des câbles en fonction de l'angle polaire que fait l'organe terminal, présentées sous une forme polaire.



**Figure (IV.14) :** variations des longueurs des câbles sous forme polaire

### VII.2.1. Variation des angles des câbles par rapport à l'axe des abscisses

La **Figure (IV.15)** montre les variations des angles ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ) que font les câbles par rapport l'axe des abscisses en fonction de l'angle polaire que fait l'organe terminal.



**Figure (IV.15) :** Variations des angles des câbles

**VIII. CONCLUSION**

Ce chapitre récapitule les calculs de modélisation géométrique, cinématique et dynamique pour un robot à quatre câbles (mouvement suivant deux directions). La modélisation de ce robot est suivie d'une simulation (avec le logiciel Matlab) des déplacements de l'organe terminal, des variations des longueurs et des angles.

Conclusion

Générale

## **CONCLUSION GENERALE**

Dans le cadre de ce Projet de Fin d'Etudes, nous avons étudié les structures et le comportement des robots parallèles à câbles unidimensionnels (2 câbles) et bidimensionnels (3 et 4 Câbles).

On établit les expressions du modèle géométriques directe et inverse, les expressions des modèles cinématique directe et inverse, l'étude statique des forces et les modèles dynamiques inverses.

Les programmes effectués sous Matlab permettent la programmation du modèle géométrique inverse pour la commande en position de l'effecteur terminal des trois types de robots (2, 3 et 4 câbles). Le programme détermine les éléments caractéristiques des câbles et la visualisation graphique du système.

Pour l'analyse statique des forces et compte tenu de la spécification de notre système, à savoir que le nombre des câbles est supérieur au nombre de degrés de liberté, nous avons utilisé la méthode de Moore-Penrose pour déterminer les tensions appliquées sur les câbles par les moteurs. A titre d'exemple, nous avons simulé les tensions nécessaires pour que l'effecteur terminal poursuive une trajectoire circulaire tout en imposant une force constante le long du parcours.

En perspective, on peut envisager de détailler l'étude sur la technologie des robots parallèles à câbles, et ce, en focalisant l'intérêt sur l'aspect commande et régulation. Il est nécessaire de noter que ce type de systèmes est réalisable et économiquement non-coûteux, ce qui encourage à réaliser un système pareil au sein de l'atelier du Département Génie Mécanique.

# BIBLIOGRAPHIE

## A. Ouvrages et Revues :

- [1] Bosscher, P.; "Disturbance Robustness Measures and Wrench-Feasible Workspace Generation Techniques for Cable-Driven Robots, "Doctoral Dissertation, Georgia Institute of Technology, 2004
- [2] Surdilovic D. and Bernhardt R, "STRING-MAN: a New Wire-Robot Gait Rehabilitation", Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), New Orleans, 2004, pp. 2031-2036.
- [3] Fritz J. and Dolores H. Russ College of Engineering and Technology of Ohio University. Planar Cable Direct Driven Robot: Hardware Implementation.
- [4] Rosati G., Gallina P., Masiero S., and Rossi A., "Design of a New 5 D.O.F. Wire-Based Robot for Rehabilitation", Proceedings of the 2005 IEEE 9th International Conference on Rehabilitation Robotics, Chicago, 2005, pp. 430-433.
- [5] Robert L. Williams II and Paolo Gallina "Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part I: Kinematics and Statics "2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference September 9-12, 2001, Pittsburgh, PA.
- [6] Robert L. Williams II and Paolo Gallina and Aldo Rossi "Planar Cable-Direct-Driven Robots, Part II: Dynamics and Control "2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference September 9-12, 2001, Pittsburgh, PA.
- [7] E.Ottaviano, M.Ceccarelli,M.Toti,C.Avila carrasco{ CaTraSys(Cassino Traking System) :A Wire System for Experimental Evaluation of Robot Workspace} journal of robotics and mechatronics,Vol.14,pp78-87,2002.

## B. Sites Internet :

1. <http://robot.gmc.ulaval.ca/fr/recherche/theme201.html>
2. <http://arnetminer.org/person/paolo-gallina-32514.html>
3. [http://fr.wikipedia.org/wiki/Robot\\_parall%C3%A8le](http://fr.wikipedia.org/wiki/Robot_parall%C3%A8le)

# ANNEXE

## Programme de deux câbles :

```
clear,clc
disp('introduction des valeurs de x et de y');
x=input('doner la valeur de x ');
y=input('donner la valeur de y');
x1=[-20 20];y1=[0 0];
plot(x1,y1),hold on
if (y>0)
    disp('coordonnées hord domaine');
else
x2=[-20 x];y2=[0 y];
x3=[20 x];y3=[0 y];
plot(x,y,'or'),hold on
plot(x2,y2,'r'),hold on
plot(x3,y3,'r'),hold on
l10=20;
l20=20;
l1=l10+x
l2=(l20+l10)-l1
plot(0,0,'+'),hold on
end
```

## Programme de trois câbles

### 1. Représentation graphique du point mobile

```
%=====
%===== Représentation graphique du point mobile =====
%=====
clear all;clc;

% Insérer la longueur du côté du triangle:
Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du triangle sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/(2*sqrt(3));
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/(2*sqrt(3));
```

```

xa3=0; ya3=Lb/sqrt(3);

% Insérer le rayon du cercle parcouru par le point mobile:
% PS: Ne pas dépasser Lb/(2*sqrt(3)), sinon le point mobile sort du
contour!
%R=0;

% Insérer l'angle polaire (en degré) que fait le point mobile par rapport
% à l'axe des abscisses:
%Theta=45;

% Les coordonnées cartésiennes du point mobile:
%[x,y]=pol2cart(deg2rad(Theta),R)
x=0
y=0
if ((y<=((ya2-ya3)/xa2)*x+ya3) && (y>=ya1) && (y<=((ya1-ya3)/xa1)*x+ya3))
% Représentation graphique du triangle et le point mobile lié aux sommets:
l1=sqrt((x-xa1).^2+(y-ya1).^2)
l2=sqrt((x-xa2).^2+(y-ya2).^2)
l3=sqrt((x-xa3).^2+(y-ya3).^2)
theta_1=atand((y-ya1)/(x-xa1))
theta_2=180-atand((y-ya2)/(xa2-x))
theta_3=270+asind(x/l3)
X=[xa1 ya1;xa2 ya2;xa3 ya3;x y]
dt = DelaunayTri(X);
triplot(dt);hold on;plot(0,0,'+');hold off;
else
    display('Coordonnées hors domaine');
    X=[xa1 ya1;xa2 ya2;xa3 ya3];
    dt = DelaunayTri(X);
    triplot(dt);hold on;plot(0,0,'+');hold off;

end
axis equal

```

## 2. Triangle avec cercle

```

%===== triangle + cercle =====
clear all;clc;

% Insérer la longueur du côté du triangle:

```

```

Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du triangle sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/(2*sqrt(3));
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/(2*sqrt(3));
xa3=0; ya3=Lb/sqrt(3);

% Insérer le rayon du cercle parcouru par le point mobile:
% PS: Ne pas dépasser Lb/(2*sqrt(3)), sinon le point mobile sort du
contour!
Rmax=Lb/(2*sqrt(3));
R=Rmax/2;
xyp=R*cosd(20);
yyp=R*sind(20);
X=[xa1 ya1;xa2 ya2;xa3 ya3;xyp yyp];
dt = DelaunayTri(X);
triplot(dt);hold on;plot(0,0,'+');hold on;
s=0:.01:2*pi;
x=R.*cos(s);
y=R.*sin(s);
plot(x,y,'r');hold off
axis equal

```

### 3. Les graphes des longueurs

```

%=====
%===== les graphes des longueurs =====
%=====

clear all;clc;

% Insérer la longueur du côté du triangle:
Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du triangle sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/(2*sqrt(3));
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/(2*sqrt(3));
xa3=0; ya3=Lb/sqrt(3);

```



```

% Insérer le rayon du cercle parcouru par le point mobile:
% PS: Ne pas dépasser Lb/(2*sqrt(3)), sinon le point mobile sort du
contour!
Rmax=Lb/(2*sqrt(3));
R=Rmax/1;
% Calcul des distances séparant le point mobile des sommets:
for theta=1:360
[x,y]=pol2cart(deg2rad(theta),R);
l1(theta)=sqrt((x-xa1).^2+(y-ya1).^2);
l2(theta)=sqrt((x-xa2).^2+(y-ya2).^2);
l3(theta)=sqrt((x-xa3).^2+(y-ya3).^2);
end

% Représentation polaires des variations de ces distances par rapport à
% l'angle polaire que fait le point mobile:
t=[1:360].*pi./180;
polar(t,l1);hold on;
polar(t,l2,'r');hold on;
polar(t,l3,'g');hold off;

% Représentation graphique des variations de ces distances par rapport à
% l'angle polaire que fait le point mobile:
t=1:360;
plot(t,l1);hold on;
plot(t,l2,'r');hold on;
plot(t,l3,'g');hold off;

```

#### 4. Les graphes des angles

```

%=====
%===== Variations des thetas =====
%=====

clear all;clc;

% Insérer la longueur du côté du triangle:
Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du triangle sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/(2*sqrt(3));

```

```

xa2=Lb/2; ya2=-Lb/(2*sqrt(3));
xa3=0; ya3=Lb/sqrt(3);

% Insérer le rayon du cercle parcouru par le point mobile:
% PS: Ne pas dépasser Lb/(2*sqrt(3)), sinon le point mobile sort du
contour!
Rmax=Lb/(2*sqrt(3));
R=Rmax/2;
% Calcul des distances séparant le point mobile des sommets:
for theta=1:360
[x,y]=pol2cart(deg2rad(theta),R);
l1(theta)=sqrt((x-xa1).^2+(y-ya1).^2);
l2(theta)=sqrt((x-xa2).^2+(y-ya2).^2);
l3(theta)=sqrt((x-xa3).^2+(y-ya3).^2);
theta_a(theta)=atand((y-ya1)/(x-xa1));
theta_b(theta)=180-atand((y-ya2)/(xa2-x));
theta_c(theta)=270+asind(x/l3(theta));
end

% Représentation graphique des variations de ces distances par rapport à
% l'angle polaire que fait le point mobile:
t=1:360;
plot(t,theta_a);hold on;
plot(t,theta_b,'r');hold on;
plot(t,theta_c,'g');hold off;

```

## 5. Calcul des tensions

```

% Insérer la longueur du côté du triangle:
clear all;clc;

Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du triangle sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/(2*sqrt(3));
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/(2*sqrt(3));
xa3=0; ya3=Lb/sqrt(3);

Rmax=Lb/(2*sqrt(3));
R=3*Rmax/4;

F=[0;1];
for theta=1:360
[x,y]=pol2cart(deg2rad(theta),R);

```

```

l1(theta)=sqrt((x-xa1).^2+(y-ya1).^2);
l2(theta)=sqrt((x-xa2).^2+(y-ya2).^2);
l3(theta)=sqrt((x-xa3).^2+(y-ya3).^2);

theta_1(theta)=atand((y-ya1)/(x-xa1));
theta_2(theta)=180-atand((y-ya2)/(xa2-x));
theta_3(theta)=270+asind(x/l3(theta));

S=[-cosd(theta_1(theta))  -cosd(theta_2(theta))  -cosd(theta_3(theta));
   -sind(theta_1(theta))  -sind(theta_2(theta))  -sind(theta_3(theta))];

SS=pinv(S);
alpha=.5025;

T=SS*F+alpha.*[sind(theta_3(theta)-theta_2(theta));sind(theta_1(theta)-
theta_3(theta));sind(theta_2(theta)-theta_1(theta))];
for i=1:3
    if T(i)<0
        T(i)=0;
    end
    TT(:,theta)=T;
end
end
t1=TT(1,:);
t2=TT(2,:);
t3=TT(3,:);
plot(t1);hold on;plot(t2,'r');hold on;plot(t3,'g');hold off;

```

## Programmes 4 câbles

### 1. Représentation graphique du point mobile

```

%=====
%===== Représentation graphique du point mobile =====
%=====

clear all;clc;

% Insérer la longueur du côté du carré:
Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du carré sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/2;
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/2;
xa3=Lb/2; ya3=Lb/2;
xa4=-Lb/2; ya4=Lb/2;

% Les coordonnées cartésiennes du point mobile:
x=0
y=0

```

```

% Représentation graphique du carrée et le point mobile lié aux sommets:
l1=sqrt((x-xa1).^2+(y-ya1).^2)
l2=sqrt((x-xa2).^2+(y-ya2).^2)
l3=sqrt((x-xa3).^2+(y-ya3).^2)
l4=sqrt((x-xa4).^2+(y-ya4).^2)
theta_a=atand(abs(y-ya1)/abs(x-xa1))
theta_b=180-atand(abs(y-ya2)/abs(xa2-x))
theta_c=270-atand(abs(xa3-x)/abs(y-ya3))
theta_d=360-atand(abs(y-ya4)/abs(xa4-x))
X=[xa1 ya1;xa2 ya2;xa3 ya3;xa4 ya4;x y];
dt = DelaunayTri(X);
triplot(dt);hold on;plot(0,0,'+');hold off;
axis equal

```

## 2. Carré avec cercle

```

%===== carré + cercle =====
clear all;clc;

% Insérer la longueur du côté du triangle:
Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du carré sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/2;
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/2;
xa3=Lb/2; ya3=Lb/2;
xa4=-Lb/2; ya4=Lb/2;

% Insérer le rayon du cercle parcouru par le point mobile:
% PS: Ne pas dépasser Lb/2, sinon le point mobile sort du contour!
Rmax=Lb/2;
R=Rmax/2;
xyp=R*cosd(20);
yyp=R*sind(20);
X=[xa1 ya1;xa2 ya2;xa3 ya3;xa4 ya4;xyp yyp];
dt = DelaunayTri(X);
triplot(dt);hold on;plot(0,0,'+');hold on;
s=0:.01:2*pi;
x=R.*cos(s);

```

```

y=R.*sin(s);
plot(x,y,'r');hold off
axis equal

```

### 3. Les graphes des longueurs

```

%=====
%===== Variations des longueurs =====
%=====

clear all;clc;

% Insérer la longueur du côté du carrée:
Lb=40;

% Les coordonnées des sommets du carrée sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/2;
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/2;
xa3=Lb/2; ya3=Lb/2;
xa4=-Lb/2; ya4=Lb/2;

% Insérer le rayon du cercle parcouru par le point mobile:
Rmax=Lb/2;
R=Rmax;

% Calcul des distaces séparant le point mobile des sommets:
for theta=1:360
[x,y]=pol2cart(deg2rad(theta),R);
l1(theta)=sqrt((x-xa1).^2+(y-ya1).^2)
l2(theta)=sqrt((x-xa2).^2+(y-ya2).^2)
l3(theta)=sqrt((x-xa3).^2+(y-ya3).^2)
l4(theta)=sqrt((x-xa4).^2+(y-ya4).^2)
end

% Représentation polaires des variations de ces distances par rapport à
% l'angle polaire que fait le point mobile:
t=[1:360].*pi./180;
polar(t,l1);hold on;
polar(t,l2,'r');hold on;

```

```
polar(t,13,'g');hold on;
polar(t,14,'y');hold off;
```

```
% Représentation graphique des variations de ces distances par rapport à
% l'angle polaire que fait le point mobile:
```

```
t=1:360;
plot(t,11);hold on;
plot(t,12,'r');hold on;
plot(t,13,'g');hold on;
plot(t,14,'y');hold off;
```

#### 4. Les graphes des angles

```
%=====
%===== Variations des angles =====
%=====
```

```
clear all;clc;
```

```
% Insérer la longueur du côté du carrée:
```

```
Lb=40;
```

```
% Les coordonnées des sommets du carrée sont calculées à partir de Lb,
% donc ne pas touchez les valeurs suivantes!
```

```
xa1=-Lb/2; ya1=-Lb/2;
xa2=Lb/2; ya2=-Lb/2;
xa3=Lb/2; ya3=Lb/2;
xa4=-Lb/2; ya4=Lb/2;
```

```
% Insérer le rayon du cercle parcouru par le point mobile:
```

```
Rmax=Lb/2;
```

```
R=Rmax;
```

```
% Calcul des distaces séparant le point mobile des sommets:
```

```
for theta=1:360
[x,y]=pol2cart(deg2rad(theta),R);
theta_a(theta)=atand(abs(y-ya1)/abs(x-xa1))
theta_b(theta)=180-atand(abs(y-ya2)/abs(xa2-x))
theta_c(theta)=270-atand(abs(xa3-x)/abs(y-ya3))
theta_d(theta)=360-atand(abs(y-ya4)/abs(xa4-x))
end
```

```
t=1:360;  
plot(t,theta_a);hold on;  
plot(t,theta_b,'r');hold on;  
plot(t,theta_c,'g');hold on;  
plot(t,theta_d,'y');hold off;
```