

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Département Génie mécanique



Mémoire de Magister

En
Génie Mécanique

Ecole Doctorale : Mécanique et Ingénierie des Systèmes
Option
Construction Mécanique

THÈME

*Torsion d'un disque rigide dans un
demi-espace élastique bicouche*

Présenté par :

Mouloud MERCHICHE

Dirigé par :

Belkacem KEBLI Maître de Conférences / A, ENP

Devant le jury composé de :

B. Tiliouine	Professeur,	E.N.P. Alger	Président
A. Nour	Professeur,	UMB. Boumerdes	Examinateur
B. Demri	Maître de conf / A,	E.N.P. Alger	Examinateur
M. Bouaziz	Maître de conf / A,	E.N.P. Alger	Examinateur

Année universitaire 2010 / 2011

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé à suivre mes études.

Je me dois de remercier Monsieur KEBLI Belkacem pour toute la volonté et le courage qu'il m'a donné pour l'achèvement de ce travail.

J'adresse mes remerciements au président et membres du Jury qui ont bien voulu accepter d'examiner ce mémoire en lui accordant de l'intérêt.

Je veux aussi exprimer ma vive reconnaissance envers tous les enseignants de l'E.N.P, particulièrement ceux du département de Génie Mécanique

Dédicaces

j'exprime ma reconnaissance et ma sympathie à , ma chere femme dida, à mes parents et mes frères dans la foi, mes collègues de E.N.P,... etc à toute personne qui de près ou de loin a rendu agréable mon séjour à Béjaia.

Table des matières

1	Introduction et étude bibliographique	1
2	Rappels mathématiques	6
2.1	Fonctions spéciales	6
2.1.1	Introduction	6
2.1.2	Fonction Gamma	6
2.1.2.1	Définition et propriétés	6
2.1.3	Fonctions de Bessel	8
2.1.3.1	Équations différentielles de Bessel	8
2.1.3.2	Équation indiciale	8
2.1.3.3	Equations de Bessel réduites	9
2.1.3.4	Fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce	9
2.1.4	Polynômes orthogonaux	11
2.2	Equations intégrales	12
2.2.1	Introduction	12
2.2.2	Equation de Volterra	13
2.2.3	Equation de Fredholm	13
2.2.3.1	Equation de Fredholm de première espèce	13
2.2.3.2	Equation de Fredholm de deuxième espèce	14
2.2.4	Réduction des équations intégrales duales en J_1 à des équations intégrales de Fredholm	14
2.2.5	Solution exacte du problème de torsion axisymétrique d'un demi- espace élastique.	16
2.2.6	Transformation des équations intégrales duales à un système algé- brique linéaire infini	18
3	Introduction à la théorie de l'élasticité	20
3.1	Introduction	20
3.2	Quelques hypothèses fondamentales	21
3.2.1	Hypothèse de continuité	21
3.2.2	Hypothèse d'homogénéité	22
3.2.3	Hypothèse d'isotropie	22
3.2.4	Hypothèse de proportionnalité	22
3.2.5	Hypothèse des petites déformations	23

3.3	Les modules élastiques	23
3.3.1	Module d'Young et coefficient de Poisson	23
3.3.2	Module de Coulomb	23
3.4	Elasticité linéaire	24
3.4.1	Loi de comportement - Loi de Hook	24
3.4.2	Equations supplémentaires en élasticité	25
3.4.2.1	Equations de Navier	25
3.5	Elasticité plane en coordonnées polaires	26
3.5.1	Equations générales	26
3.5.1.1	Vecteur déplacement et tenseur déformation	26
3.5.1.2	Relations entre les contraintes et les déformations	27
3.5.1.3	Equations nécessaires de l'équilibre	27
3.6	Elasticité tridimensionnelle en coordonnées semi-polaires	28
3.6.1	Equations de l'élasticité en coordonnées semi-polaires	28
3.7	Facteur d'intensité de contrainte	30
3.7.1	Différents modes de sollicitation	30
4	Déformation d'une plaque élastique épaisse par la torsion d'un disque rigide adhésif	33
4.1	Formulation et résolution du problème	33
4.2	Transformation des équations intégrales duales en un système algébrique linéaire et infini	37
4.3	Résultats numériques et discussions	40
4.3.1	Les expressions des déplacements et les contraintes	41
4.4	Conclusion	48
5	Torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique bi-couche par un disque rigide	49
5.1	Formulation et résolution du problème	49
5.1.1	Cas 1 : Le disque rigide adhère dans la première couche élastique	49
5.1.1.1	Résultats numériques et discussion.	55
5.1.1.2	Déplacements et contraintes dans le milieu élastique bi-couches	55
5.1.2	Cas 2 : Le disque rigide adhère dans le demi-espace élastique	65
5.1.2.1	Les expressions des déplacements et les contraintes	67
	Conclusion et perspectives	73
	Bibliographie	75
A	Annexes	78
A.1	quelques propriétés des fonctions gamma et beta	78
A.2	Méthode de factorisation triangulaire (décomposition <i>LU</i>)	79
A.3	Quelque formule élémentaire d'intégration numérique	80
A.4	Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cylindriques	81

ملخص

الدراسة الحالية تهتم بدراسة مسألتين متعلقتين بالدوران المحوري المحافظ. المسألة الأولى تدرس استجابة طبقة مرنة سميكة التشوه ناتج عن تدوير قرص صلب محشو بداخلها. أما المسألة الثانية فتعالج حالة وسط مرن ثنائي الطبقات محدود من جهة واحدة. باستعمال تحويل " هنكل " كلتا المسألتين تبسطان بأخذ الشروط الحدية المختلطة بعين الاعتبار إلى جملة معادلات تكاملية مزدوجة. بفضل النشور إلى سلسلة كثيرات الحدود " جاكوبي " نحصل على حل معادلة " فريدولم " التكاملية المرافقة بعد حل جملة لانهائية لمعادلات جبرية. حصلنا على بعض الحلول المتعلقة بحقل التشوهات والإجهاد وكذا معامل تركيز الجهد عند حافة القرص, ثم قمنا بتمثيلها بيانيا مع بعض التعليقات والاستنتاجات.

الكلمات المفتاحية : الطبقة المرنة, الدوران المحوري المحافظ, المعادلات التكاملية المزدوجة, معادلات " فريدولم " التكاملية, معامل تركيز الجهد.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions deux problèmes de torsion axisymétrique. Le premier problème consiste à étudier la déformation d'une couche élastique épaisse par la torsion d'un disque rigide adhésif. Le second problème analyse le cas d'un demi-espace élastique bicouche. A l'aide de la transformation intégrale de Hankel, les problèmes étudiés sont ramenés, en tenant compte des conditions limites mixtes, à un système d'équations intégrales duales. En utilisant des développements en série des polynôme de Jacobi, la solution de l'équation intégrale de Fredholm correspondante s'obtient par la résolution d'un système algébrique infini. Certains résultats concernant le champ des déplacements et des contraintes, Ainsi que le facteur d'intensité de contrainte au bord du disque sont donnés analytiquement et interprétés graphiquement.

Mots Clés : Couche élastique, torsion axisymétrique, équations intégrales duales, équations intégrales de Fredholm, facteur d'intensité de contrainte.

Abstract

We present in this work two axisymmetric torsion problems, the first consider an adhered rigid disc in an elastic layer. However, in the seconde problem, we study the response of a bi-layered elastic half-space twisted internally, likewise, by a rigid disc. The two cases when the rigid disc is acting in the first or in the second medium are considered separately. Using the Hankel integral transformation method, the mixed boundary-value problem is reduced to a system of dual integral equations. The solution of the corresponding Fredholm integral equation of the second kind is sought in the form of a Jacobi polynomial expansion. Then, the unknown coefficients are calculated by the truncation method from a system of infinite algebraic equations. The displacement and the stress fields are obtained numerically and plotted. The stress intensity factor at the edge of the rigid disc has been evaluated analytically. Some curves and discussions are carried out.

Keywords : Elastic layer, Axisymmetric torsion, Dual integral equations, Fredholm integral equation, stress intensity factor.

Chapitre 1

Introduction et étude bibliographique

La classe des problèmes traitant la déformation par torsion des milieux élastiques est un sujet d'intérêt considérable pour les mathématiques et la mécanique ingénierie. Des défauts se présentent sous forme de fissures et d'inclusions peuvent être rencontrées ou produites en de tels matériaux.

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique admet une symétrie de révolution autour de l'axe vertical et si le chargement et les conditions limites du problème étudié le sont aussi. Dans ce cas, la solution à obtenir est axisymétrique, c'est à dire indépendante de l'angle polaire.

La torsion d'une couche élastique par un poinçon rigide appliqué à la surface du milieu a été considérée la première fois par Reissner et Sagoci [1]. Depuis lors, des contributions importantes ont été réalisées par plusieurs auteurs, à savoir Bacci [2], Uflyand [3] et Florence [4],[5]. Pak et Saphores [6] ont étudié le problème de torsion axisymétrique pour un disque rigide adhésif d'un demi-espace élastique.

Les problèmes de torsion des milieux élastiques multicouches apparaissent dans différents domaines d'ingénierie tel que la mécanique des solides et des sols. Plusieurs travaux ont été consacrés pour ce type de problèmes. Généralement, les déformations de ces milieux sont dues à la torsion d'un disque rigide (Tamate et Saito [7] et Erguven [8]) ou bien à des contraintes de torsion pour le cas de domaines élastiques fissurés (Sih et Chen [9]).

Dans les travaux précédents, la méthode de la transformation intégrale de Hankel a été utilisée. Ces problèmes aux conditions limites mixtes sont réduits à un système d'équations intégrales duales. Ce qui ramène aussi les problèmes étudiées à des équations intégrales de

Fredholm de seconde espèce. Généralement, des solutions approximatives par la méthode itérative des séries entières sont obtenues pour ces dernières équations.

Dans notre travail, on considère deux problèmes de torsion axisymétrique de milieux élastiques par des disques rigides. Les cas étudiés concernent la couche élastique d'épaisseur H et le demi-espace élastique composé de deux couches généralisant le problème uni-couche présenté par Pak et Saphores [6]. La méthode de résolution des équations intégrales de Fredholm correspondantes diffère des méthodes utilisées dans les travaux cités précédemment. Dans le but d'obtenir une convergence rapide du système algébrique on est invité à utiliser le développement en séries de polynômes de Jacobi [10].

Le présent mémoire est réparti en quatre chapitres suivis d'une conclusion sur les résultats obtenus et d'une référence bibliographique des travaux utilisés.

Les rappels mathématiques sur les fonctions spéciales, les équations intégrales et transformations intégrales ont été exposés dans le premier chapitre. Certaines propriétés des fonctions de Bessel et des polynômes de Legendre sont aussi données.

Le second chapitre est consacré à quelques rappels sur la théorie de l'élasticité linéaire. Le système d'équilibre a été établi ainsi que les différentes lois sur la déformation élastique.

Dans le troisième et le quatrième chapitre, on donne les résultats obtenus dans le présent mémoire. Le problème de la torsion axisymétrique de la couche élastique par un disque rigide adhésif, ainsi que les étapes de résolution de l'équation d'équilibre en déplacement a été traité dans le troisième chapitre. Les résultats numériques et les conclusions sur le problème ont été formulés à la fois dans le même chapitre.

Dans le dernier chapitre on expose la résolution du second problème, à savoir la déformation par torsion d'un bicouche élastique. Deux cas ont été considérés séparément, disque rigide situé dans la couche ou le demi-espace élastique. Les résultats numériques et graphiques ont conclu l'étude du problème.

Des conclusions et des perspectives sur les problèmes considérés ont été faites, à la fin du mémoire.

Pake (1991) [6] "*Torsion of a rigid disc in a half-space*"

L'auteur a traité un problème pertinent à la réponse de la torsion axisymétrique d'un disque rigide qui adhère dans un demi espace élastique, homogène et isotrope. L'approche consiste à transformer le problème aux conditions limites mixtes en un système d'équations intégrales duales à l'aide de la transformation intégrale de Hankel. La solution correspondante est obtenue à partir de la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce en utilisant la méthode de quadrature (méthode itérative des séries entières).

Rahman (1995) [10] "*A note on the polynomial solution of a class of dual integral equations arising in mixed boundary value problems of elasticity*"

Dans ce document nous avons présenté une solution polynômiale à des types des équations intégrales duales qui surgissent dans les problèmes aux limites mixtes de la théorie d'élasticité. La méthode consiste à transformer les équations intégrales de Fredholm en un système d'équations algébriques infini, en assumant sa solution sous forme de série de polynômes de Jacobi.

La méthode est particulièrement appropriée à résoudre des problèmes des déformations axisymétriques, électrodynamiques compliqués, les problèmes de contact, fissuré et des problèmes contenant une inclusion. Elle peut également être avec succès mise en application pour résoudre des problèmes analogues de transfert de chaleur, d'acoustiques, d'électrostatique et d'électrodynamique. D'une manière primordiale, la méthode s'applique non seulement aux problèmes bidimensionnels et axisymétriques mais également aux problèmes non-axisymétriques.

Eurguven (1991) [8] "*Torsion of two bonded layers by a rigid disk*"

L'article consiste à étudier la torsion d'une couche élastique homogène et isotrope, d'épaisseur h_1 adhérant parfaitement à l'autre couche d'épaisseur h_2 qui est encastrée à l'extrémité. Les couches sont de module de rigidité μ_1 et μ_2 respectivement. Le problème est réduit à la solution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. L'équation intégrale a été remplacée par un système d'équations algébriques infini tronqué, et sa solution est obtenue par le calcul numérique en employant une méthode itérative. L'auteur donne les différentes approches du problème étudié dans lequel la solution est donnée approximativement par Reissner-Sagoci [11], [1]. Ensuite, il expose plusieurs graphes du moment de torsion en fonction de h_1 .

Florence (1961), (1972) [4] , [5] ”*Two contact problems for an elastic layer*”

L'article, s'intéresse à déterminer la répartition des contraintes, dues à la torsion d'un disque rigide de rayon a d'une couche épaisse élastique, encastrée à l'extrémité d'une fondation rigide. Le disque est fixé sur la surface libre de la couche. Dans l'analyse qui relève de la théorie classique d'élasticité linéaire, le problème est ramené à un système d'équations intégrales duales. La solution de l'équation est évaluée en utilisant la méthode de JC Cooke. Quelques courbes de contraintes sont tracées pour le cas de torsion.

Kalaba (1972) [12] ”*Initial value treatment for an elastic layer*”

L'article a présenté quelques valeurs initiales pour un problème aux limites mixtes de torsion axisymétrique d'une couche élastique. Le problème est exprimé en termes des équations intégrales duales. Ensuite, elles sont réduites à une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce avec un noyau continu. Un problème de valeur initiale a dérivé l'équation intégrale de Fredholm utilisant les invariants. Ceux-ci constituent une nouvelle approche analytique à des problèmes de torsion.

Bacci and Binati (1962) [2] ”*An approximate explicit solution for the local torsion of elastic*”

Un disque rigide adhère parfaitement à la surface supérieure d'une couche élastique épaisse fixée à un support indéformable. Une rotation est appliquée sur le disque autour de son axe. A l'aide de la transformée de Hankel, le problème aux conditions limites mixtes est décrit par une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Sous l'hypothèse que le rapport de l'épaisseur de la couche et le rayon du disque n'est pas extrêmement faible, une solution approchée explicitant ce problème est donnée par la méthode itérative des séries entières.

G. C. Sih and E. P. ChenTorsion [9] (1971) ”*of a laminar composite debonded over a penny-shaped area*”

S'intéressent à l'analyse de l'effet sur le composé laminaire imparfaitement collé, est examiné par une contrainte de torsion proche de la fissure circulaire. Le composé laminaire est modelé par quatre couches de différents matériaux, avec les deux couches externes

de taille infinie de module de rigidité μ_3 et μ_4 et adhère avec les deux couches intérieures d'épaisseurs h et de module de rigidité μ_1 et μ_2 , une fissure circulaire se produit à l'interface des deux couches intérieures.

L'analyse basée sur l'application de la méthode de transformé de Henkel, la solution du système d'équations intégrales duales peut être facilement prolongée à un système multicouches. Selon la taille du rapport d'épaisseur de la couche au rayon de la fissure, le décollement peut avoir lieu plutôt d'un mode stable ou instable. Les résultats analytiques indiquent également que l'influence de la taille de la couche, en abaissant l'intensité de la contrainte autour d'un défaut d'interface par rapport à l'état de contrainte dans un solide homogène contenant la même imperfection.

Les résultats numériques ont été obtenus et discutés aussi, pour les deux problèmes des géométries différentes. Quelques graphes de facteur d'intensité de contrainte en fonction du rapport d'épaisseur de la couche et le rayon de la fissure, de même en fonction du rapport de rigidité entre différentes couches, ont été exposés.

Chapitre 2

Rappels mathématiques

2.1 Fonctions spéciales

2.1.1 Introduction

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, on trouve un grand nombre qui sont des solutions d'équations différentielles du second ordre, sans que cette propriété soit exclusive. Ces fonctions sont toutefois très utiles, car elles apparaissent très souvent, dès que l'on cherche à résoudre des équations différentielles du second ordre dont les coefficients ne sont pas constants. Les fonctions spéciales sont disponibles en programmation sous la forme de bibliothèques. Elles sont aussi définies, pour un grand nombre d'entre elles, dans les logiciels de calcul symbolique (Maple, Mathematica, Matlab...). Dans la suite de ce chapitre, nous allons définir quelques fonctions spéciales qui permettront la résolution de notre problématique.

2.1.2 Fonction Gamma

2.1.2.1 Définition et propriétés

La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante [13] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

Quand la partie réelle de z est strictement positive, ($Re(z) > 0$), la formule d'Euler [13] donne une expression de la fonction Γ . En intégrant par parties l'équation (2.1), on peut

facilement montrer que :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

Cependant, nous pouvons évaluer l'intégrale pour certaines valeurs de z . pour une valeur de ($z = 1$), on donne :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (2.3)$$

Par récurrence on aura les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma(3) &= (2)(1) = (1), \\ \Gamma(4) &= (3)(2) = (6), \\ &\vdots \\ \Gamma(n + 1) &= n!. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avec cette définition, la fonction Γ apparaît comme un prolongement analytique de la fonction factorielle définie sur \mathbb{N} . La formule suivante permet de relier la fonction entre les valeurs situées dans le demi-plan complexe où $Re(z) > 1$ et celui où $Re(z) < 1$:

$$\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\Gamma(z) \sin(\pi z)} \quad (2.5)$$

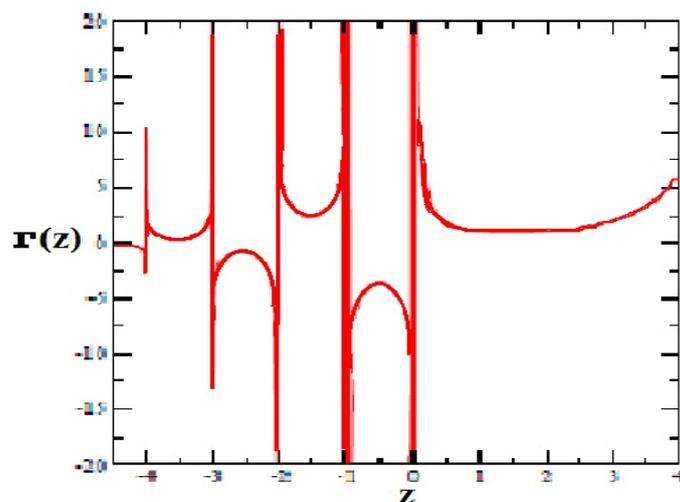


FIGURE 2.1 – La fonction $\Gamma(z)$ en fonction de z .

Les fonctions Beta qui sont notées avec un B , sont définies par la relation suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (2.6)$$

2.1.3 Fonctions de Bessel

2.1.3.1 Équations différentielles de Bessel

2.1.3.2 Équation indicelle

L'équation différentielle de Bessel est du type [14]

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (2.7)$$

où $y : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C} \ x \longmapsto y(x)$

avec

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}, \quad \nu \in \mathbf{R} \quad (2.8)$$

Cette équation que l'on rencontre dans de nombreux problèmes de physique, va surgir en résolvant certaines équations aux dérivées partielles avec la méthode de séparation des variables en coordonnées cylindriques. Pour cette raison, les solutions de cette équation s'appellent parfois les fonctions cylindriques. Pour une valeur fixe de ν , l'équation (2.7) est une équation différentielle du deuxième ordre linéaire et homogène qui admet $x_0 = 0$ comme point singulier. En vertu du théorème de Fuchs [15], l'équation (2.7) admet une solution de la forme :

$$y(x) = (x - x_0)^r f(x), \quad f(x_0) \neq 0, \quad x_0 = 0. \quad (2.9)$$

où f est développable en séries entières au voisinage de x_0 . L'introduction de $y = x^{r-2}$ dans (2.7) conduit, après simplification par $x^r f(x)$, à :

$$(r^2 - \nu^2)f + (2r + 1)xf' + x^2(f + f'') = 0 \quad (2.10)$$

En mettant $x = 0$ dans l'équation (2.10), on obtient l'équation indicelle :

$$r^2 - \nu^2 = 0 \quad (2.11)$$

2.1.3.3 Equations de Bessel réduites

L'équation (2.10) avec $r^2 = \nu^2$ mènera à l'équation de Bessel réduite :

$$xf'' + (2r + 1)f' + xf = 0 \tag{2.12}$$

où r peut prendre les valeurs $\pm\nu$. Nous donnons successivement les cas $r = +\nu$ et $r = -\nu$. Nous supposons $\nu \geq 0$ ce qui n'est aucunement restrictif compte tenu de la présence de ν^2 dans l'équation de départ (2.7).

a)- $r = +\nu \geq 0$. La solution de (2.7) est donc sous la forme :

$$y(x) = x^\nu f(x). \quad \nu \geq 0 \tag{2.13}$$

où la fonction $f(x)$, developable en série entière dans la variable x , satisfait :

$$xf'' + (2\nu + 1)f' + xf = 0 \tag{2.14}$$

est donnée par (Ref.[16], P. 120) :

$$f(x) = \frac{1}{2^{+\nu}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(+\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \tag{2.15}$$

b)- $r = -\nu \leq 0$. dans ce cas on remplace ν par $-\nu$. (En rappelant que $\Gamma(x)$ avec $x < 0$ est défini par utilisation répétée de $\Gamma(x) = x^{-1}\Gamma(x + 1)$ avec $\Gamma(-n) = \infty$ si $n \in N$). Ceci conduit à la solution de l'équation (2.12) :

$$g(x) = \frac{1}{2^{-\nu}} \sum_{p=p_{min}}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(-\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \tag{2.16}$$

où p_{min} est le petit entier positif ou nul tel que $(-\nu + p + 1 > 0)$ dans le cas $\nu \in N$ soit $p_{min} = 0$ dans le cas $\nu \in R \setminus N$.

2.1.3.4 Fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce

Les fonctions de Bessel sont définies de la manière suivante :

Considérons l'équation différentielle du second ordre (2.7). Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce. La solution finie à l'origine notée $J_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de première espèce et la seconde solution notée $Y_\nu(x)$ est appelée fonction de Bessel de deuxième espèce.

La fonction de Bessel de première espèce $J_\nu(x)$ d'indice ν , avec ν réel, est définie par [16] :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad \nu \in R \quad (2.17)$$

où p_0 est le plus petite entier positif ou nul tel que $(+\nu + p + 1)$ dans le cas $\nu \in Z$ si ($\nu \in N$ alors p_0 est nul et si $-\nu \in N^*$ alors p_0 est la partie entière de $-\nu$). Soit $p_0 = 0$ dans le cas $\nu \in R \setminus Z$. Ainsi pour $\nu \leq 0$ c'est-à-dire en remplaçant ν par $-\nu$, l'expression (2.17) se met sous la forme [16] :

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(-\nu + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}, \quad \nu \in R \quad (2.18)$$

Dans le cas où ν n'est pas entier, les fonction J_ν et $J_{-\nu}$ sont linéairement indépendantes, la combinaison linéaire de J_ν et $J_{-\nu}$ définie par :

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)} \quad (2.19)$$

est appelée fonction de Bessel de deuxième espèce ou fonction de Neuman. Dans le cas $J_{-\nu} \in R \setminus Z$, les fonctions J_ν et $J_{-\nu}$ étant solutions de l'équation différentielle de Bessel (2.7), la fonction Y_ν est aussi solution de (2.7). Les propriétés de la fonction J_ν peuvent être traduites en termes de la fonction Y_ν . La figure (2.2) représente graphiquement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce pour les quatre premières valeurs entières de ν .

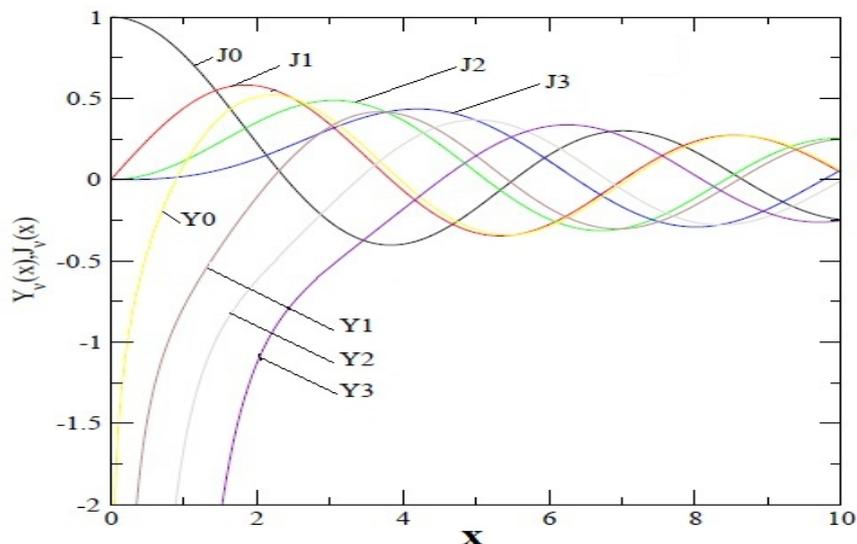


FIGURE 2.2 – Les quatre premières fonctions de Bessel entières de première espèce et de deuxième espèce.

Le comportement asymptotique des fonctions de Bessel de première et de seconde espèce est le suivant [17] :

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4)), \quad \nu \rightarrow \infty \tag{2.20}$$

$$Y_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4)), \quad \nu \rightarrow \infty \tag{2.21}$$

2.1.4 Polynômes orthogonaux

Le Polynôme $\Phi_n(x)$ est un système de degré n définis sur $a \leq x \leq b$, avec une fonction poids $w(x) > 0$ définie sur le même intervalle. La norme $\|\Phi_n(x)\|$ du polynôme $\Phi_n(x)$ comme suit :

$$\|\Phi_n(x)\|^2 = \int_a^b [\Phi_n(x)]^2 w(x) dx. \tag{2.22}$$

puis le système des polynômes $\Phi_n(x)$ serait orthogonal sur $a \leq x \leq b$ tout en respectant la fonction de poids $w(x)$ [18] si :

$$\int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) w(x) dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n; \\ 1 & , m = n . \end{cases} \tag{2.23}$$

La normalisation du système des polynômes $[\phi_n(x)]$, où $[\phi_n(x)] = \Phi_n(x)/\|\Phi_n(x)\|$, serait orthonormée pour $x \in [a, b]$ en respectant la fonction $w(x)$, là où $\|\Phi_n(x)\|$ s'appelle la norme de $\Phi_n(x)$ par suite nous donnons [18] :

$$\int_a^b \Phi_m(x)\Phi_n(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \|\Phi_n(x)\|^2, & m = n. \end{cases} \quad (2.24)$$

Les polynômes orthogonaux sont les solutions spéciales des équations différentielles linéaires de second ordre de coefficient variable défini sur l'intervalle $(a \leq x \leq b)$, dans lequel n apparaît comme paramètre.

Les polynômes de Jacobi

On appelle polynôme de Jacobi un polynôme netont $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ [16], définit par la relation générale suivant :

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] \quad (2.25)$$

Dans le cas où $\alpha = \beta = 0$, le polynôme de Jacobi se confond avec celui de Legendre défini par :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{2n}; \quad x \in [-1, 1] \quad (2.26)$$

vérifiant la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n; \\ \frac{2}{2n+1} & , m = n. \end{cases} \quad (2.27)$$

2.2 Equations intégrales

2.2.1 Introduction

Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale. Elles sont importantes dans plusieurs domaines physiques. Les équations de Fredholm et Volterra, etc, sont probablement leurs plus célèbres représentants. Elles apparaissent dans des problèmes de transfert d'énergie et des problèmes d'oscillations, d'une membrane ou d'un axe. Les problèmes d'oscillations peuvent aussi être résolus à l'aide d'équations différentielles. Les équations intégrales sont à priori moins simples à résoudre que les

équations algébriques ou les équations différentielles. Nous allons voir dans ce chapitre que pour des équations intégrales linéaires, une fois réalisée la discrétisation de ces équations, on se ramène au problème de la recherche de solutions d'un système linéaire.

2.2.2 Equation de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau K est tel que :

$$K(t, s) = 0 \quad s > t \quad (2.28)$$

Si l'une des limites d'intégration est variable, il s'agit d'une équation intégrale de Volterra. Des équations du premier et du second type de Volterra pourraient être :

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_a^t K(t, s)f(s)ds, \\ f(t) &= g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)f(s)ds \end{aligned} \quad (2.29)$$

Si la fonction connue g est identiquement nulle, l'équation intégrale est alors appelée équation intégrale homogène.

Si elle est différente de zéro, elle est appelée équation intégrale non-homogène.

Quelques équations intégrales de volterra est leurs solutions [19].

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[h(t) - h(a)]^\alpha} dt = g(x), \quad a < x < b \quad (2.30)$$

où $0 < \alpha < 1$ et h est une fonction strictement croissante sur $]a, b[$.

La solution de cette équation est :

$$f(t) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{h'(r)g(r)}{[h(t) - h(r)]^{1-\alpha}} dr \quad a < t < b \quad (2.31)$$

2.2.3 Equation de Fredholm

2.2.3.1 Equation de Fredholm de première espèce

L'une des équations intégrales les plus simples est l'équation intégrale de Fredholm de première espèce qui est définie par la relation suivante [15] :

$$g(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)ds \quad (2.32)$$

où $f(s)$ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer. $g(t)$ est le terme de source et $K(t, s)$ est le noyau de l'équation. Les limites d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

2.2.3.2 Equation de Fredholm de deuxième espèce

Si la fonction inconnue apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale, l'équation intégrale de Fredholm [15] est de deuxième espèce, définie par la relation suivante :

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)f(s)ds \quad (2.33)$$

où le paramètre λ est un facteur inconnu, qui joue le même rôle que la valeur propre en algèbre linéaire.

2.2.4 Réduction des équations intégrales duales en J_1 à des équations intégrales de Fredholm

Le problème de torsion axisymétrique d'un disque rigide dans un demi-espace élastique [6] se réduit à des équations duales ayant la forme :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} [1 + M(\lambda)] A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = r, & 0 \leq r < 1 \quad (a) \\ \int_0^\infty A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, & 1 < r < \infty \quad (b) \end{cases} \quad (2.34)$$

Afin de satisfaire l'équation homogène (2.34b) on pose :

$$A(\lambda) = \lambda \int_0^1 h(t) \sin(\lambda t) dt \quad (2.35)$$

En tenant compte de la formule intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \sin(\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0 & , t < r; \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} & , t > r. \end{cases} \quad (2.36)$$

et sachant que :

$$J_1(\lambda r) = -\frac{d}{d(\lambda r)} J_0(\lambda r) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d}{dr} J_0(\lambda r) \quad (2.37)$$

on aura :

$$\int_0^\infty A(\lambda)J_1(\lambda r)d\lambda = - \int_0^1 h(t) \frac{d}{dr} \left[\int_0^\infty \sin(\lambda t)J_0(\lambda r)d(\lambda) \right] dt = 0 \quad t \leq 1 < r \quad (2.38)$$

En portant maintenant l'expression de $A(\lambda)$ donnée par (2.35) dans l'équation (2.34a) et en effectuant ensuite l'interversion des intégrales on trouve :

$$\int_0^1 h(t) \left[\int_0^\infty \sin(\lambda t)J_1(\lambda r)d\lambda \right] + \int_0^1 h(t) \left[\int_0^\infty M(\lambda) \sin(\lambda t)J_1(\lambda r)d\lambda \right] dt = r \quad (2.39)$$

Transformons cette dernière équation à une équation d'Abel. Multiplions les deux membres de (2.39) par r , est en tenant compte de la relation (2.37), ce qui donne :

$$\int_0^\infty r \sin(\lambda t)J_1(\lambda r)d\lambda = - \int_0^\infty \sin(\lambda t) \frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(\lambda r)d\lambda \quad (2.40)$$

A l'aide d'une intégration par parties, cette intégrale est égale à :

$$\int_0^\infty t \cos(\lambda t)J_0(\lambda r)d\lambda \quad \text{or,} \quad \int_0^\infty \cos(\lambda t)J_0(\lambda r)d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r^2-t^2}} & , t < r ; \\ 0 & , t > r. \end{cases} \quad (2.41)$$

Par suite :

$$\int_0^r \frac{t h(t)}{\sqrt{r^2-t^2}} dt + \int_0^1 h(r) \left[\int_0^\infty M(\lambda)r \sin(\lambda r)J_1(\lambda r)d\lambda \right] dr = r^2 \quad (2.42)$$

La solution de l'équation (2.42) s'obtient en tenant compte de (2.34) et (2.35) par :

$$t h(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x^3}{\sqrt{t^2-x^2}} dx - \frac{2}{\pi} \int_0^1 h(r) \left[\int_0^\infty M(\lambda) \sin(\lambda r) \left(\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x^2 J_1(\lambda x)}{\sqrt{t^2-x^2}} dx \right) d\lambda \right] dr \quad (2.43)$$

En tenant compte des deux relations (A.2, A.3), on ramène l'équation (2.43) à l'équation intégrale de Fredholm :

$$h(t) + \int_0^1 h(r)K(r,t)dr = \frac{4t}{\pi}, \quad 0 \leq t < 1 \quad (2.44)$$

avec :

$$K(r,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty M(\lambda) \sin(\lambda r) \sin(\lambda t)d\lambda. \quad (2.45)$$

Finalement, la solution des équations duales s'obtient à l'aide de (2.44) et (2.36).

2.2.5 Solution exacte du problème de torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique.

Le problème est la torsion du disque rigide par un angle ω , de rayon a adhère sur la surface du milieu élastique figure.2.3.

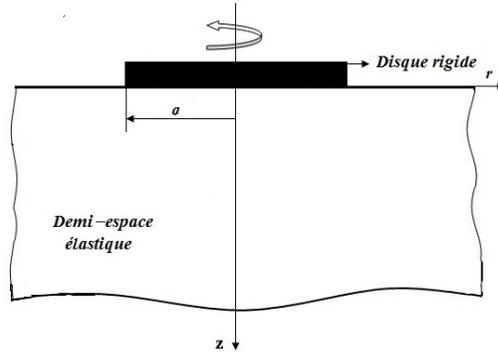


FIGURE 2.3 – Torsion du disque par un angle ω .

Les équations intégrales correspondantes sont :

$$\begin{cases} \int_0^\infty A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r, & 0 \leq r < a & \text{(a)} \\ \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, & a < r < \infty & \text{(b)} \end{cases} \quad (2.46)$$

posons :

$$A(\lambda) = \int_0^\infty t h(t) J_1(\lambda t) dt, \quad (2.47)$$

La relation (2.46b) est alors satisfaite $\forall h$ puisque :

$$\int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r) J_1(\lambda t) d\lambda = 0 \quad \forall r \neq t,$$

En sortant ensuite (2.47) dans (2.46a) on trouve :

$$\int_0^\infty t h(t) \left[\int_0^\infty J_1(\lambda r) J_1(\lambda t) d\lambda \right] dt = \int_0^\infty t h(r) \left[\int_0^\infty J_1(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda \right] dt = \omega r \quad (2.48)$$

avec $h(t) = 0, t > r$ et en tenant compte aussi de la formule :

$$J_1(\lambda r) J_1(\lambda t) d\lambda = \frac{2}{\pi (tr)^\nu} \int_0^{\min(t,r)} \frac{s^{2\nu}}{\sqrt{(t^2 - s^2)(r^2 - s^2)}} ds$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.48) par r avec le seconde terme $h(r) = 0$, on obtient.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^r th(t) \frac{s^2}{\sqrt{r^2 - s^2}} \left[\int_s^a \frac{h(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt \right] ds = \omega r^2, \quad 0 \leq r < a \quad (2.49)$$

Alors l'équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{f(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds = \omega r^2, \quad 0 \leq r < a \quad (2.50)$$

où :

$$f(s) = s^2 \int_s^a \frac{h(t)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dt \quad (2.51)$$

est une équation intégrale d'Abel, dont la solution s'obtient à l'aide de (2.46a, 2.47) :

$$\int_0^\infty t^{\mu-\nu+1} J_\mu(bt) J_\nu(at) dt = \begin{cases} \frac{b^\mu (a^2 - b^2)^{\nu-\mu-1}}{2^{\nu-\mu-1} a^\nu \Gamma(\nu-\mu)} & , a > b, \\ 0 & , a < b. \end{cases} \quad (2.52)$$

En tenant compte de l'unicité de la transformée inverse de, (2.46b, 2.47), on aura alors :

$$f(s) = \frac{2\omega}{3} \frac{d}{ds} s^3 = 2\omega s^2, \quad (2.53)$$

Maintenant, en tenant compte de (2.50, 2.53) et (2.46,2.48), on aura :

$$h(t) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_t^a \frac{f(x)}{x\sqrt{x^2 - r^2}} dx = \frac{4\omega t}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 0 \leq r < a \quad (2.54)$$

Finalement, en tenant compte de la formule (A.6), l'expression (2.47) nous donne :

$$A(\lambda) = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} J_1(\lambda t) dt = \frac{4\omega a}{\pi \lambda} \left[\frac{\sin(\lambda a)}{\lambda a} - \cos(\lambda a) \right] \quad (2.55)$$

avec : $\lambda \neq 0$

2.2.6 Transformation des équations intégrales duales à un système algébrique linéaire infini

On considère les expressions des équations intégrales duales [10] suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \lambda^{-2\alpha} [1 + \omega(\lambda)] f(\lambda) J_{\nu}(\lambda r) d\lambda = \Theta r, \quad 0 \leq r < 1 \quad (a) \\ \int_0^{\infty} f(\lambda) J_{\nu}(\lambda r) d\lambda = 0, \quad 1 < r < \infty \quad (b) \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Dans lesquelles $\omega(\lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, $G(r)$, $f(\lambda)$ sont des fonctions inconnues, $J_{\nu}(\lambda r)$ est la fonction de Bessel d'ordre un, ν l'ordre de la fonction et le paramètre α qui prend les valeurs $[-1, 1]$. La solution de ces équations s'obtient par :

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^{1+\alpha}}{2^{\alpha}} \int_0^1 u^{1+\alpha} J_{\nu-\alpha}(\lambda u) \varphi(u) du \quad (2.57)$$

où $\varphi(u)$ vérifie l'équation intégrale de Fredholm suivante :

$$\varphi(x) + x^{-\alpha} \int_0^1 u^{1+\alpha} K(x, u) \varphi(u) du = q(x) \quad (2.58)$$

avec :

$$K(x, u) = \int_0^{\infty} \lambda \omega(\lambda) J_{\nu-\alpha}(x\lambda) J_{\nu-\alpha}(u\lambda) d\lambda, \quad (2.59)$$

$$q(x) = \frac{\Theta 2^{1+2\alpha}}{x^{\nu} \Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{u^{2+\nu}}{(x^2 - u^2)^{1-\alpha}} du, \quad (2.60)$$

On cherche la solution de l'équation intégrale (2.58) sous la forme d'un développement en séries de polynômes de Jacobi.

$$\psi(x) = x^{\nu-2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\nu-\alpha, 0}(1+x^2), \quad (2.61)$$

où a_n sont les coefficients inconnus à déterminer et $P_n^{\nu-\alpha, 0}(1+x^2)$ polynôme de Jacobi.

En remplaçant la fonction $\psi(x)$ donnée par l'expression (2.61) dans l'équation intégrale (2.57). En multipliant les deux côtés de l'équation (2.58) par $x^2 P_n^{\frac{1}{2}, 0}(1-x^2)$.

Après l'intégration du résultat selon la variable x de 0 jusque 1 et en tenant compte de la condition d'orthogonalité du polynôme de Jacobi, nous obtenons l'expression du

système algébrique suivante :

$$\frac{a_m}{2(1 + \nu - \alpha + 2m)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n k_{mn} = q_m, \quad (2.62)$$

où :

$$k_{mn} = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} \omega(\lambda) J_{1+\nu-\alpha+2n}(\lambda) J_{1+\nu-\alpha+2m}(\lambda) d\lambda, \quad (2.63)$$

et :

$$q_m = \int_0^1 x^{1+\nu} q(x) P_m^{\nu-\alpha,0}(1-2x^2) dx, \quad (2.64)$$

Le second membre q_m est évalué par la formule intégrale de Gradshteyn et Ryzhik [20], ensuite la résolution du système algébrique linéaire se fait alors, en appliquant la Méthode de l'analyse numérique appelé la factorisation triangulaire (décomposition LU) (A.8 à A.14).

La fonction $f(\lambda)$ qu'on a considérée précédemment, représentant la solution des équations intégrales duales peut être aussi exprimée en séries de polynômes de Jacobi [10] par l'expression qui s'écrit comme suit :

$$f(\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{1+\nu-\alpha+2n}(\lambda) \quad (2.65)$$

Une fois les coefficients a_n sont déterminés par la relation (2.62), il est possible de trouver la fonction inconnue $f(\lambda)$ en utilisant la relation (2.65).

Conclusion

La connaissance des fonctions spéciales et les équations intégrales, nous permettent de construire le modèle mathématique d'un phénomène physique, et de simplifier le problème dans le but d'obtenir la solution sous forme analytique se prêtant facilement à l'analyse. Le problème simplifié facilite le choix d'un algorithme de calcul fiable et économique, bien adapté à la résolution sur ordinateur.

Avec ces outils mathématiques nous pouvons encore résoudre les systèmes d'équations intégrales, et de déterminer le champs des déplacement et des contraintes au voisinage de l'inclusion.

Chapitre 3

Introduction à la théorie de l'élasticité

3.1 Introduction

L'élasticité est l'étude du comportement des solides déformables élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. Cette discipline, née au XVII^e siècle, possède aujourd'hui une base mathématique bien établie. Ce chapitre introduit les concepts du point de vue de l'ingénieur et joint la physique à la mécanique appliquée.

Un corps solide soumis à l'action des forces intérieures ou extérieures subit des déformations ou des déplacements relatifs. Si les déplacements sont petits (ne dépassent pas une certaine valeur limite), la déformation disparaît en même temps que la force qui lui a donnée naissance. Dans tous les problèmes proposés, nous supposons que les corps soumis à l'action des forces, sont parfaitement élastiques ; c'est-à-dire qu'ils reprennent exactement leur forme primitive dès que les forces en question cessent d'agir.

Le développement de certaines théories d'élasticité à travers le temps est dû essentiellement à quelques phénomènes importants :

- a)- Le progrès qu'à connu le monde de l'expérimentation sur le comportement des corps en déformation.
- b)- Le développement rapide des théories mathématiques qui ont permis de passer des principes physiques aux méthodes analytiques puis numériques.

Notre problème suppose, au lieu d'une structure moléculaire des corps élastiques, un milieu élastique qui est homogène et uniformément distribué dans tout son volume, de sorte

que le plus petit élément détaché de ce corps possède les mêmes propriétés physiques que le corps lui-même. Pour simplifier la discussion, nous supposerons également que le corps est isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions.

D'après toutes les caractéristiques que contiennent les matériaux, les plus grandes découvertes qui ont contribué beaucoup plus au développement de la théorie de l'élasticité sont :

- a)- La découverte de la loi de Hooke en 1660.
- b)- La formulation des équations générales supplémentaires en élasticité par Navier en 1821 qui permettaient de réduire tous les problèmes des petites déformations des corps élastiques en un calcul mathématique.
- c)- En 1863, Airy a utilisé une autre méthode pour déterminer la distribution de contraintes dans un corps bidimensionnel. Il a constaté que les équations d'équilibres dans le cas de l'élasticité plane peuvent être combinées pour aboutir à une seule équation différentielle dont la variable est une fonction appelée fonction de contrainte ou fonction d'Airy. La détermination de cette fonction lui permet de déterminer les composantes de contraintes en tout point du corps.

Actuellement, les solutions de la majorité des problèmes rencontrés sont connues et les méthodes numériques découvertes récemment avec le développement de l'outil informatique viennent de confirmer ces solutions.

3.2 Quelques hypothèses fondamentales

Comme la théorie de l'élasticité, la mécanique des matériaux est basée sur plusieurs hypothèses fondamentales qui sont citées ci-dessous :

3.2.1 Hypothèse de continuité

Les solides sont constitués d'atomes dans lesquels la masse est répartie de façon uniforme. En effet, elle est presque entièrement concentrée dans les noyaux qui ne représentent qu'une proportion infime du volume total. De plus, les noyaux eux-mêmes sont de nature complexe.

La théorie de l'élasticité et la mécanique des structures se basent et se baseront probablement toujours sur l'hypothèse d'un milieu continu, rempli uniformément de matière en tous ses points, et ceci pour deux raisons :

- a) tenir compte de la constitution réelle de la matière conduirait à des lois totalement inutilisables à l'échelle macroscopique ;
- b) à cette échelle, les résultats obtenus à partir de l'hypothèse de continuité sont plus précis que les plus fines mesures réalisables actuellement, sous réserve évidemment que la solution mathématique du problème soit possible [21].

3.2.2 Hypothèse d'homogénéité

Nous admettrons que la matière est homogène, c'est-à-dire que ses propriétés mécaniques sont les mêmes en tous points du solide considéré. Cette hypothèse est généralement tout à fait suffisante. Si ce n'est pas le cas, on peut découper le solide en plusieurs parties considérées comme homogènes et étudier l'interaction de ces parties entre elles. Par exemple, les matériaux composites (matrices/fibres/strates).

Cependant, il arrive exceptionnellement que l'on soit obligé de prendre en considération une variation continue des propriétés mécaniques et abandonner ainsi l'hypothèse d'homogénéité. Exemple d'une pièce métallique dont la température varie fortement d'un endroit à un autre, ce qui entraîne des modifications importantes de certaines propriétés (par exemple le module d'élasticité) [21].

3.2.3 Hypothèse d'isotropie

Nous admettrons d'autre part que la matière est isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions autour d'un point.

Mis à part certains produits laminés, les métaux satisfont assez cette condition. Par contre, pour les matériaux composites stratifiés, l'hypothèse d'isotropie s'écarte trop de la réalité.

3.2.4 Hypothèse de proportionnalité

Comme nous l'avons déjà dit, la mécanique des structures est basée sur la loi énoncée par Hooke découverte en 1660 qui ne fut publiée qu'en 1978. Elle traduit la proportionnalité qui existe entre les contraintes et les déformations. C'est la base de toute la théorie de l'élasticité, et dont on peut donner l'expression générale suivante :

Dans un solide continu, les déformations sont liées en tous points aux contraintes par des relations linéaires et homogènes.

3.2.5 Hypothèse des petites déformations

l'expérience montre que dans les limites normales d'utilisation, les matériaux subissent des déformations relativement faibles par rapport aux dimensions du solide. En conséquence, les conditions d'équilibre établies par la statique pour les corps parfaits indéformables sont applicables. Cela revient à dire que les déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures. Les matériaux isotropes sont caractérisés par deux modules élastiques indépendants.

3.3 Les modules élastiques

3.3.1 Module d'Young et coefficient de Poisson

Vers 1800, Young s'intéresse à l'élasticité linéaire. En procédant à des essais de traction uniaxiale, il constate que la déformation ε selon l'axe de traction est proportionnelle à la contrainte σ appliquée. Il définit le coefficient de proportionnalité par la relation suivante [22] :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (3.1)$$

Poisson complète l'analyse en constatant que l'allongement ε_I dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement ε_{II} plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires. Il définit le coefficient positif de proportionnalité par [23] :

$$\nu = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_{II}} \quad (3.2)$$

3.3.2 Module de Coulomb

Coulomb procède à des essais de torsion (cisaillement pur) et constate que le glissement γ est proportionnel au cisaillement τ appliqué. Il définit le coefficient de proportionnalité $G = \frac{\tau}{\gamma}$. Le module de Coulomb G a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian.

3.4 Elasticité linéaire

3.4.1 Loi de comportement - Loi de Hook

La loi de comportement relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes. A chaque catégorie de matériau correspond un type de loi. Nous allons ici nous intéresser seulement aux matériaux isotropes, c'est à dire que la formulation de cette loi de comportement doit être identique quel que soit le référentiel utilisé. La loi de comportement peut s'écrire [24] :

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\varepsilon} + \lambda tr(\bar{\varepsilon}) I \quad (3.3)$$

et

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E}\bar{\sigma} - \frac{\nu}{E}tr\bar{\sigma}I \quad (3.4)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = G && \text{Premier coefficient de Lamé ou Module de Rigidité} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} && \text{Deuxième coefficient de Lamé} \\ E &= \frac{\nu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \nu} && \text{Module d'Young} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \nu)} && \text{Coefficient de Poisson} \end{aligned} \quad (3.5)$$

En notation indicielle, on obtient, dans n'importe quelle base (isotropie du comportement) :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\nu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\nu + 3\lambda)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (3.7)$$

On peut facilement constater avec ces relations que les bases principales de l'état de déformation et de l'état de contrainte sont confondues.

3.4.2 Equations supplémentaires en élasticité

Dans le cas général, nous aurons, grâce à la loi de comportement, suffisamment d'équations pour pouvoir traiter un problème d'élasticité. Toutefois, nous serons face à un système d'équations différentielles relativement délicat à résoudre. Il peut être utile d'employer des équations complémentaires qui traduisent, sous une autre forme, les lois de la physique. Les équations de Navier et les équations de Airy.

3.4.2.1 Equations de Navier

Ces dernières ne sont, en fait, que la traduction des équations d'équilibre en terme de déplacement. Pour cela, on utilise à la fois la loi de comportement et les relations déformations - déplacements. En effet, l'équation d'équilibre s'écrit en fonction des contraintes sous la forme [25] :

$$\operatorname{div} \sigma + f_\nu = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

où f_ν est le champ des forces volumiques extérieures, σ est tenseur des contraintes à l'état d'équilibre final et $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ variation de la masse volumique.

En utilisant la loi de comportement, puis la définition de déformation en fonction des déplacements qui est donnée par relation suivante

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.9)$$

et les forces volumiques agissant sur le milieu élastique sont négligées avec le terme $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ est nul car l'état final est à l'équilibre, Nous donnons l'expression de l'équation fondamentale de l'élasticité appelée aussi équation de Navier ou de Lamé sous la forme suivante [25] :

$$\mu \Delta u + (\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad (3.10)$$

Cette équation différentielle vectorielle n'est qu'une autre écriture de l'équation d'équilibre, mais pour un solide élastique à la loi linéaire isotrope en petites déformations. Les inconnues de cette équation sont les déplacements.

3.5 Elasticité plane en coordonnées polaires

3.5.1 Equations générales

3.5.1.1 Vecteur déplacement et tenseur déformation

En un point M de coordonnées polaires (r, θ) , considérons les axes mobiles OXY par rapport aux axes fixes Oxy figure 3.1. U et V les composantes du vecteur déplacement en M , suivant les axes OXY ; par le changement de variables $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, que les composantes ε_r , ε_θ , $\varepsilon_{r\theta}$ du tenseur déformation en M relativement aux axes OXY est données comme suites [24] :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + U \right) \\ 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - V \right)\end{aligned}\tag{3.11}$$

et que la rotation Θ en M est donnée par :

$$2\Theta = \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - V \right)$$

Inversement, si l'on connaît ε_r , ε_θ , $\gamma_{r\theta}$, les équations (3.11) permettent de calculer U et V . A condition que les composantes du tenseur déformation vérifient la condition d'intégrabilité :

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r}\tag{3.12}$$

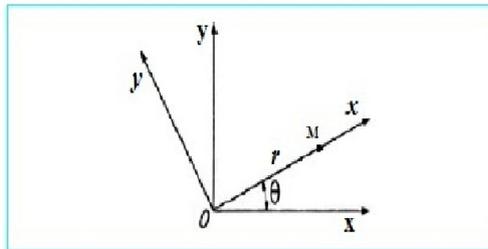


FIGURE 3.1 – Coordonnées polaires dans le plan.

3.5.1.2 Relations entre les contraintes et les déformations

Les composantes σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ du tenseur contrainte suivant OXY se déduisent des composantes du tenseur déformation par les formules suivantes [26] :

a) en déformation plane :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda\varpi + 2\mu\varepsilon_r \\ \sigma_\theta &= \lambda\varpi + 2\mu\varepsilon_\theta \\ \tau_{r\theta} &= 2\mu\gamma_{r\theta}\end{aligned}\tag{3.13}$$

avec ϖ désigne la dilatation cubique.

$$\varpi = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$$

b) en contrainte plane :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1+\nu^2}(\varepsilon_r - \nu\varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\nu^2}(\varepsilon_\theta - \nu\varepsilon_r) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{r\theta}\end{aligned}\tag{3.14}$$

Inversement, les composantes du tenseur des déformations se déduisent de celles du tenseur des contraintes par les formules suivantes :

a) en déformation plane :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta] \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r] \\ \gamma_\theta &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{r\theta}\end{aligned}\tag{3.15}$$

b) en contrainte plane :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \\ \gamma_\theta &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{r\theta}\end{aligned}\tag{3.16}$$

3.5.1.3 Equations nécessaires de l'équilibre

les composantes de la force de volume sur les axes OXY sont f_r et f_θ ; en écrivant l'équation d'équilibre d'un petit élément compris entre les arcs de cercles de rayons r et

$r + dr$ et entre les rayons d'angles polaires θ et $\theta + d\theta$, l'équation d'équilibre correspondante est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les composantes du tenseur des contraintes vérifient donc les équations d'équilibre (3.17).

3.6 Elasticité tridimensionnelle en coordonnées semi-polaires

3.6.1 Equations de l'élasticité en coordonnées semi-polaires

En un point P du corps défini par ses coordonnées semi-polaires (r, θ, z) est lié un trièdre mobile $Px'y'z'$ figure 3.2. Soient, relativement à ce trièdre :

u_r, v_θ, w_z les composantes du déplacement ;

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}, \tau_{r\theta}$ les composantes du tenseur contraintes ;

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}, \gamma_{r\theta}$ les composantes du tenseur déformation.

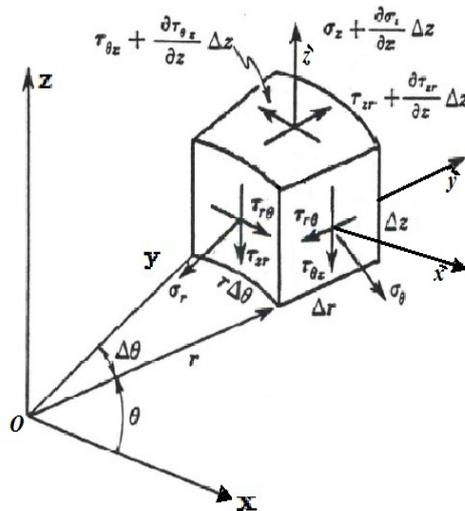


FIGURE 3.2 – Coordonnées cylindriques.

Les composantes du tenseur déformation se déduisent des composantes du déplacement

par les formules suivantes [26][24] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 2\gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \\
 2\gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\
 2\gamma_{zr} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

D'autre part, nous avons les composantes du tenseur des contraintes et les composantes du tenseur déplacements sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \lambda \operatorname{div} U + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\
 \sigma_\theta &= \lambda \operatorname{div} U + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \\
 \sigma_z &= \lambda \operatorname{div} U + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 \frac{\tau_{r\theta}}{\mu} &= \frac{\tau_{\theta r}}{\mu} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\
 \frac{\tau_{rz}}{\mu} &= \frac{\tau_{zr}}{\mu} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\
 \frac{\tau_{\theta z}}{\mu} &= \frac{\tau_{z\theta}}{\mu} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec

$$\operatorname{div} U = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3.20}$$

On se place ici dans le cadre des petits déplacements, et les forces de volume sont nulles.

Les équations nécessaires de l'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} &= 0, \\
 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.7 Facteur d'intensité de contrainte

Comme dans la section précédente, nous considérons un milieu élastique linéaire, homogène et isotrope qui subit des petites déformations et des petits déplacements. Ce corps est fissuré où il contient une inclusion circulaire. Nous nous intéressons au champ de contrainte au voisinage de l'inclusion. Ces contraintes dépendent de l'épaisseur de la plaque, de rayon de l'inclusion ainsi que la rigidité du milieu. Lorsque le rayon à fond d'entaille du défaut tend vers zéro, les contraintes en tête de celui-ci divergent. La description de cette singularité de contraintes demande de résoudre les équations de l'élasticité en imposant des conditions aux limites correspondant à une coupure dans le plan.

3.7.1 Différents modes de sollicitation

Les trois grandeurs importantes en élasticité sont aussi K_I , K_{II} et K_{III} : ce sont les facteurs d'intensité de contrainte qui correspondent aux trois modes de base de déplacement relatif à des lèvres de la fissure. Ils dépendent de la taille de la fissure et des charges appliquées. Ils déterminent à eux seuls les champs asymptotiques des contraintes et des déplacements. Pour cette raison, ce sont ces facteurs qui interviendront dans les critères de fissuration.

Les 3 modes fondamentaux [27] sont les suivants (figure .3.3) :

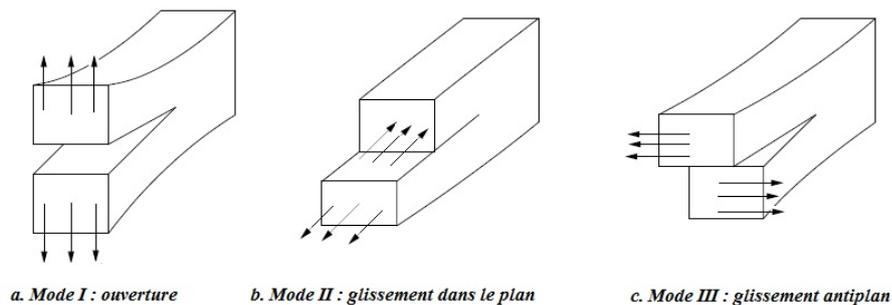


FIGURE 3.3 – Les différents modes de fissuration

Mode I : Mode d'ouverture où les lèvres de la fissure s'écartent l'une de l'autre selon la direction y , qui apparaît lors d'un chargement en tension σ_y . Le facteur d'intensité

de contrainte du mode I est défini par :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0, 0) \quad (3.22)$$

En cas de compression, il ne peut être négatif car cela signifierait que les lèvres se pénètrent et il faut alors tenir compte du contact entre les lèvres.

Mode II : Mode de glissement où les lèvres glissent l'une sur l'autre selon la direction perpendiculaire au front de fissure x , qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{xy} .

Le facteur d'intensité de contrainte du mode II est défini par :

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0, 0) \quad (3.23)$$

Mode III : Mode de déchirement où les lèvres se déplacent l'une par rapport à l'autre selon la direction parallèle au front de fissure z , qui apparaît lors d'un cisaillement τ_{yz} . Le facteur d'intensité de contrainte du mode III est défini par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (3.24)$$

Dans les problèmes de déformation axisymétrique, on utilise le système de coordonnées cylindriques. Dans le cas de l'inclusion d'un disque rigide d'épaisseur négligeable dans un demi-espace élastique, l'expression du facteur d'intensité de contrainte en mode *III* a été donnée par Rahman [10]. Il a pris comme exemple le problème de Pak [6] (figure.3.4). Alors, l'expression est donnée par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{2\pi(1-r)} \tau_{\theta z}(r, 0) \quad (3.25)$$

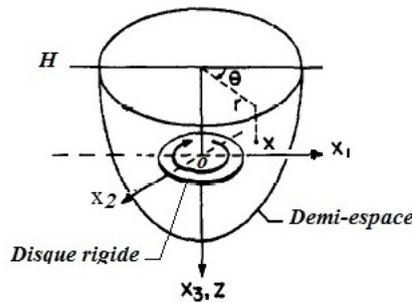


FIGURE 3.4 – Mode de sollicitation en torsion

Conclusion

Ce chapitre contient quelques hypothèses et des notions élémentaires d'élasticité linéaire qui vont être utilisées dans les chapitres à suivre. Les relations entre les modules d'élasticité et l'utilisation des équations Navier-Lamé nous permettent d'obtenir l'équation d'équilibre des problèmes traités. A travers les lois du comportement de l'élasticité linéaire et la mécanique de la rupture, nous pouvons donner quelques relations entre les contraintes et les déplacements ainsi que les contraintes et les coefficients d'intensité de contrainte pour les différents modes de sollicitation.

Chapitre 4

Déformation d'une plaque élastique épaisse par la torsion d'un disque rigide adhésif

4.1 Formulation et résolution du problème

On étudie le problème de déformation d'une couche épaisse élastique, homogène et isotrope due à la torsion d'un disque rigide adhésif. La plaque est fixée sur un appui indéformable. Une torsion d'angle Θ est appliquée au disque autour de son axe vertical indiqué sur la figure 4.1. Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont choisies comme système de référence. Par symétrie, Les vecteurs déplacements $u_r(r, z)$, $u_z(r, z)$, $u_\theta(r, z)$ sont indépendant de l'angle θ . Elles doivent satisfaire l'équation de Lamé en déplacement dans le milieu élastique.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \mu \left[\Delta u_r(r, z) - \frac{u_r(r, z)}{r^2} \right] + (\lambda + \mu) \frac{\partial I_\epsilon(r, z)}{\partial r} = 0 \\ \text{(b)} \quad & \Delta u_\theta(r, z) - \frac{u_\theta(r, z)}{r^2} = 0 \\ \text{(c)} \quad & \mu \Delta u_z(r, z) + (\lambda + \mu) \frac{\partial I_\epsilon(r, z)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $I_\epsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$, où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Pour ce type de problème de torsion axisymétrique, la seule composante non nulle de vecteur déplacement est la composante angulaire u_θ . Les modules de cisaillement et le coefficient de Poisson du milieu élastique sont notés par G et ν respectivement. En l'ab-

sence des forces extérieures , en résolvant le système d'équilibre précédent, l'équation de déplacement est donnée :

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0, \quad (4.2)$$

La relation entre contrainte et déplacement angulaire s'écrit :

$$\tau_{\theta z} = G \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad \tau_{\theta r} = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right). \quad (4.3)$$

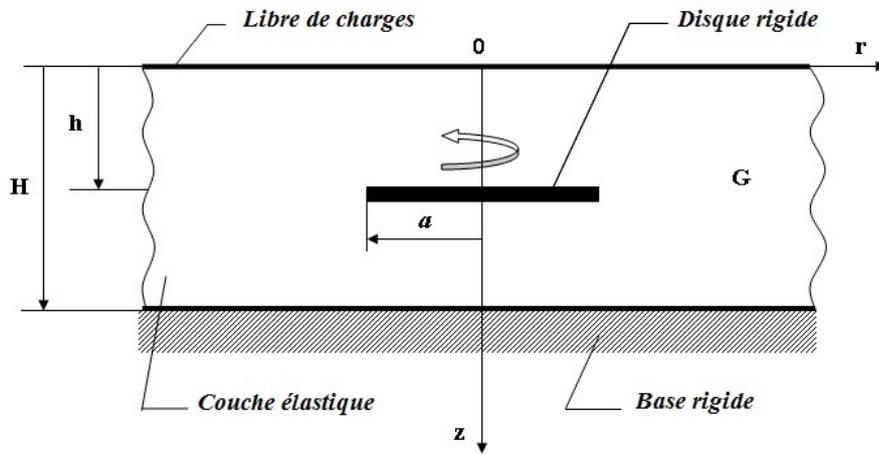


FIGURE 4.1 – Un disque rigide adhésif dans une couche élastique

Une méthode classique basée sur la transformée intégrale de Hankel est appliquée pour obtenir la forme générale de la solution u_θ :

$$F(\lambda, z) = \int_0^\infty r f(r, z) J_1(\lambda r) dr, \quad (4.4)$$

avec J_1 représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1. Sa transformée inverse est donnée par :

$$f(r, z) = \int_0^\infty \lambda F(\lambda, z) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (4.5)$$

En utilisant la transformation précédente, l'équation (4.2) devient :

$$\frac{\partial^2 U_\theta^{(i)}}{\partial z^2} - \lambda^2 U_\theta^{(i)} = 0, \quad (4.6)$$

où :

$$U_{\theta}^{(i)}(r, z) = \int_0^{\infty} r u_{\theta}^{(i)}(r, z) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (4.7)$$

La solution générale de l'équation (4.6) est donc :

$$u_{\theta}^{(i)}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda [A_i(\lambda) e^{-\lambda z} + B_i(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (4.8)$$

avec $i = 1, 2$ les indices correspondant, respectivement, aux régions $[0, h]$, $[h, H]$, et A_i , B_i sont des fonctions à déterminer. En injectant (4.8) dans (4.3) on obtient la forme des contraintes dans les deux régions

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(r, z) = -G \int_0^{\infty} \lambda^2 [A_i(\lambda) e^{-\lambda z} - B_i(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4.9)$$

Les conditions de continuité et aux limites du système à $z = h$ sont données par :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad u_{\theta}^{(1)}(r, h) &= \Theta r, & r &\leq a \\ \text{(b)} \quad [\tau_{\theta z}(r, h)] &= \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h + 0) - \tau_{\theta z}^{(1)}(r, h - 0) = 0, & r &> a \end{aligned} \quad (4.10)$$

et :

$$[u_{\theta}(r, h)] = u_{\theta}^{(2)}(r, h + 0) - u_{\theta}^{(1)}(r, h - 0) = 0, \quad r \geq 0 \quad (4.11)$$

où Θ est une constante. Comme le milieu élastique est encastré à ($z=H$), alors :

$$u_{\theta}^{(2)}(r, H) = 0, \quad r \geq 0 \quad (4.12)$$

Ans pour ($z=0$) les contraintes sont nulles, ce qui donne :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = 0, \quad r \geq 0 \quad (4.13)$$

Les déplacements et les contraintes dans les deux régions ($0 < z \leq h$), ($h < z \leq H$) sont données respectivement sous les formes suivantes :

$$\begin{cases} u_{\theta}^{(1)}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda [A_1(\lambda) e^{-\lambda z} + B_1(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = -G \int_0^{\infty} \lambda^2 [A_1(\lambda) e^{-\lambda z} - B_1(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} u_{\theta}^{(2)}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda [A_2(\lambda)e^{-\lambda z} + B_2(\lambda)e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \tau_{\theta z}^{(2)}(r, z) = -G \int_0^{\infty} \lambda^2 [A_2(\lambda)e^{-\lambda z} - B_2(\lambda)e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, \end{cases} \quad (4.15)$$

La substitutions de ces expressions dans les équations (4.11), (4.12) et (4.13), permet d'obtenir le système algébrique suivant :

$$\begin{aligned} (a) \quad & A_1(\lambda) - B_1(\lambda) = 0, \\ (b) \quad & [A_1(\lambda) - A_2(\lambda)]e^{-\lambda h} + [B_1(\lambda) - B_2(\lambda)]e^{+\lambda h} = 0, \\ (c) \quad & A_2(\lambda)e^{-\lambda H} + B_2(\lambda)e^{\lambda H} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En résolvant le système (4.16), on exprime toutes les fonctions inconnues $A_1(\lambda)$, $A_2(\lambda)$ et $B_1(\lambda)$ en fonction de $B_2(\lambda)$ comme suit :

$$\begin{aligned} (a) \quad & A_1(\lambda) = \frac{e^{2\lambda h} - e^{2\lambda H}}{e^{2\lambda h} + 1} B_2(\lambda), \\ (b) \quad & B_1(\lambda) = \frac{e^{2\lambda h} - e^{2\lambda H}}{e^{2\lambda h} + 1} B_2(\lambda), \\ (c) \quad & A_2(\lambda) = -e^{2\lambda H} B_2(\lambda). \end{aligned} \quad (4.17)$$

En tenant compte des expressions précédentes et des conditions aux limites (4.10), nous obtenons les équations intégrales duales suivantes :

$$\begin{aligned} (a) \quad & \int_0^{\infty} \lambda (e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}) \frac{e^{2\lambda h} - e^{2\lambda H}}{e^{2\lambda h} + 1} B_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = \Theta r, & r \leq a \\ (b) \quad & \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 (e^{2\lambda H} + 1)}{\cosh(\lambda h)} B_2(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, & r > a \end{aligned} \quad (4.18)$$

En introduisant la fonction auxiliaire $\phi(\lambda)$ définie par :

$$\phi(\lambda) = \frac{\lambda^2 (e^{2\lambda H} + 1)}{\cosh(\lambda h)} B_2(\lambda),$$

le système d'équation (4.18) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (a) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \phi(\lambda) p(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = -2\Theta r, & r \leq a \\ (b) \quad \int_0^{\infty} \phi(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, & r > a \end{cases} \quad (4.19)$$

où :

$$p(\lambda) = 1 + \omega(\lambda)$$

et

$$\omega(\lambda) = -\frac{2 + e^{2\lambda h} - e^{2\lambda(H-h)}}{1 + e^{2\lambda H}}, \text{ dans laquelle } \omega(\lambda) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \infty.$$

4.2 Transformation des équations intégrales duales en un système algébrique linéaire et infini

Nous donnons la valeur $a = 1$ au rayon du disque. la solution générale du système (4.19) s'écrit sous la forme :

$$\phi(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\lambda u) \psi(u) du, \quad (4.20)$$

Sachant que $\psi(u)$ est une solution de l'équation intégrale de Fredholm du type :

$$\psi(x) + x^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} k(x, u) \psi(u) du = q(x), \quad (4.21)$$

où :

$$k(x, u) = \int_0^\infty \lambda \omega(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(x\lambda) J_{\frac{1}{2}}(u\lambda) d\lambda, \quad (4.22)$$

$$q(x) = \frac{4\Theta}{x\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{u^3}{(x^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} du. \quad (4.23)$$

Ensuite, on s'intéresse à chercher la solution d'équation (4.21) sous la forme d'un développement en série de polynômes de Jacobi. Sachant que la solution s'écrit comme suite :

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - x^2), \quad (4.24)$$

où a_n sont des coefficients à déterminer. Substituons la fonction $\psi(x)$ dans l'équation intégrale (4.21), multiplions en suite les deux membres de l'équation par $x^2 P_n^{\frac{1}{2},0}(1 - x^2)$. Après intégration du résultat selon la variable x de 0 à 1, en tenant compte de la condition d'orthogonalité des polynômes de Jacobi, On obtient le système d'équations algébriques infinies ci-dessous :

$$\frac{a_m}{4m + 3} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n k_{mn} = q_m, \quad (4.25)$$

Dans ce système on a :

$$k_{mn} = \int_0^\infty \lambda^{-1} \omega(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda, \quad (4.26)$$

et :

$$q_m = \int_0^1 x^2 q(x) P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2x^2) dx, \quad (4.27)$$

Le second membre q_m est évalué en faisant appel à la formule intégrale de Gradshteyn et Ryzhik [20], Sachant que :

$$P_m^{\frac{1}{2},0}(1-2x^2) = (-1)^m x^{-1} P_{2m+1}(x), \quad (4.28)$$

où $P_{2m+1}(x)$ est le polynôme du Legendre, on trouve les relations :

$$\begin{cases} m = 0; & q_0 = \frac{8\Theta}{3\sqrt{\pi}}, \\ m > 0; & q_m = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

En introduisant le nouveau coefficient $b_m = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\Theta} a_m$, nous réécrivons les équations (4.25) et (4.20) comme suit :

$$\frac{b_m}{3+4m} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n k_{mn} = \delta_{0m}, \quad (4.30)$$

et :

$$\phi(\lambda) = \frac{8\omega}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda} b_n J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda), \quad (4.31)$$

où δ_{0m} est le symbole de Kronecker's.

Par conséquent, l'expression de $B_2(\lambda)$ sera écrite comme :

$$B_2(\lambda) = \frac{8\Theta \cosh(\lambda h)}{3\sqrt{2\pi}(1+e^{2\lambda H})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda\sqrt{\lambda}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda), \quad (4.32)$$

Avant d'analyser le système infini (4.30), pour h arbitraire, nous considérons plusieurs cas distincts, pour lesquels l'équation intégrale associée admet une solution explicite.

Les cas particuliers

1. **Cas** : $h = 0$

Les équations intégrales duales (4.19) ont été étudiés approximativement par Ben-nati [2], Florence [4] et Kalaba [12].

2. **Cas** : $h = 0^+$ et $H \rightarrow \infty$.

L'expression (4.26) peut être réécrite comme suit :

$$k_{mn} = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda, \quad (4.33)$$

cette intégrale a été évalué par Rahman[10] [51, P.117] :

$$k_{mn} = \frac{\delta_{mn}}{4n+3}, \quad (4.34)$$

En tenant compte des relations (4.29), (4.34), d'après (4.30), nous obtenons

$$\begin{cases} m = 0; & b_0 = \frac{3}{2}, \\ m > 0; & b_m = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Pour des valeurs arbitraires de h et H , le système infini (4.30) a été résolu par une méthode numérique. Pour déterminer les déplacements, les contraintes et le facteur d'intensité de contrainte, les éléments de la matrice k_{mn} , donnés par (4.26) ont été évalués en utilisant la méthode d'intégration numérique de Simpson.

4.3 Résultats numériques et discussions

En général, la résolution de l'équation intégrale s'effectue par des méthodes numériques. Afin de déterminer les coefficients b_n , on est invité à évaluer les intégrales infinies k_{mn} du système (4.30). Pour des grandes valeurs de λ_0 , le noyau k_{mn} peut être approché par :

$$k_{mn} = \int_0^{\lambda_0} \lambda^{-1} \omega(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda \quad (4.36)$$

Cette intégrale se calcule numériquement en appliquant la formule de Simpson en choisissant $\lambda_0 = 1500$. Des calculs numériques d'essais ont montré au de la de $\lambda_0 = 1500$, les coefficients b_n tendent vers zéro. On prendre donc $\lambda_0 = 1500$ dans la suite dans calculs. lorsque la valeur de h/a diminue, la convergence de la suite b_n devient plus lente, on remarque que dix termes des coefficients sont suffisants pour calculer les déplacements, les contraintes et le facteur d'intensité de contrainte dans la couche élastique. Les coefficients b_n , sont donnés dans le tableau 4.1.

$h/a = 1$	$h/a = 2$	$h/a = 3$
2.990808254185141	2.998532546195600	2.999463751760756
-0.000622950389172	-0.000023867914537	-0.000003317990574
-0.000017359502999	-0.000000191847610	-0.000000011726025
-0.000000352030297	-0.000000001149090	-0.000000000033179
-0.000000005917519	-0.000000000005983	-0.000000000000080
-0.000000000085801	-0.000000000000029	-0.000000000000000
-0.000000000001073	-0.000000000000000	-0.000000000000000
-0.000000000000011	-0.000000000000000	-0.000000000000000
-0.000000000000000	-0.000000000000000	-0.000000000000000

TABLE 4.1 – La table de coefficients b_n

4.3.1 Les expressions des déplacements et les contraintes

En utilisant les expressions (4.17), (4.32), (4.15) et (4.14), les déplacements, les contraintes dans les deux régions peuvent être exprimées sous forme appropriée :

– **Les déplacements**

$$\begin{cases} u_{\theta}^{(1)}(r, z) = \frac{8\Theta}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} C_1(\lambda) \cosh(\lambda z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{\lambda}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \\ u_{\theta}^{(2)}(r, z) = \frac{8\Theta}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} C_2(\lambda) (e^{\lambda z} - e^{\lambda(2H-z)}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{\lambda}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \end{cases} \quad (4.37)$$

où :

$$C_1(\lambda) = \frac{e^{\lambda h} - e^{2\lambda(H-h)}}{e^{2\lambda H} + 1},$$

$$C_2(\lambda) = \frac{\cosh(\lambda h)}{(e^{2\lambda H} + 1)}$$

– **Les contraintes**

$$\begin{cases} \tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = \frac{8\Theta G}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} C_1(\lambda) \sinh(\lambda z) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda} b_n J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \\ \tau_{\theta z}^{(2)}(r, z) = \frac{8\Theta G}{3\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} C_2(\lambda) (e^{\lambda z} + e^{\lambda(2H-z)}) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda} b_n J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda. \end{cases} \quad (4.38)$$

Les figures (4.2-4.7) et (4.8-4.13) illustrent, respectivement, le comportement des déplacements et la répartition des contraintes pour quelques valeurs du paramètre z à travers le milieu élastique.

Les figures (4.2 à 4.7) montrent que les déformations augmentent au fur à mesure qu'on s'approche du niveau de l'inclusion, ainsi qu'elles sont inversement proportionnelles au rapport d'épaisseur supérieur $\frac{h}{a}$. La même remarque est aussi valable pour la contrainte de cisaillement, elle augment avec le rapport $\frac{z}{h}$.

Lorsque le rapport d'épaisseur de la couche augmente, la contrainte de cisaillement diminue dans la même région. Ce qui est illustré dans les figures (4.8 à 4.13).

Il est important de signaler que le comportement discontinu de la contrainte de cisaillement au bord du disque rigide ($z = h$), est déjà constaté par plusieurs autres auteurs Pak[6] et Bacci[2].

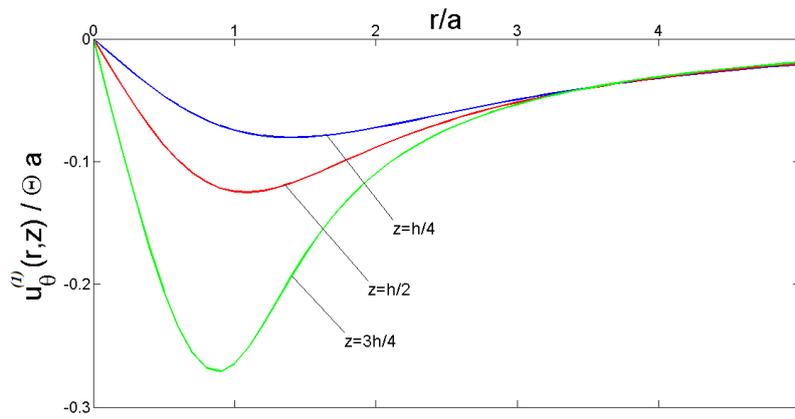


FIGURE 4.2 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h$; $\frac{h}{a} = 1$

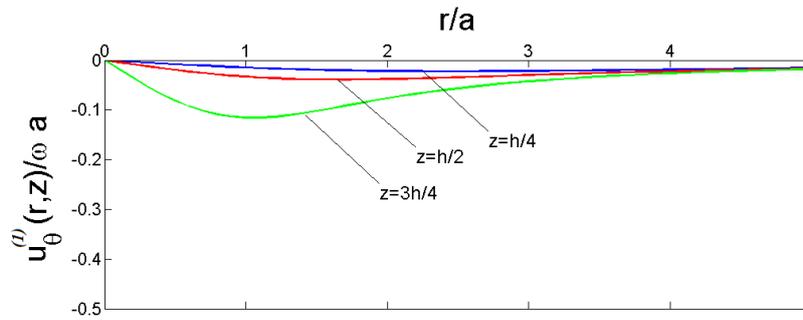


FIGURE 4.3 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h$; $\frac{h}{a} = 2$

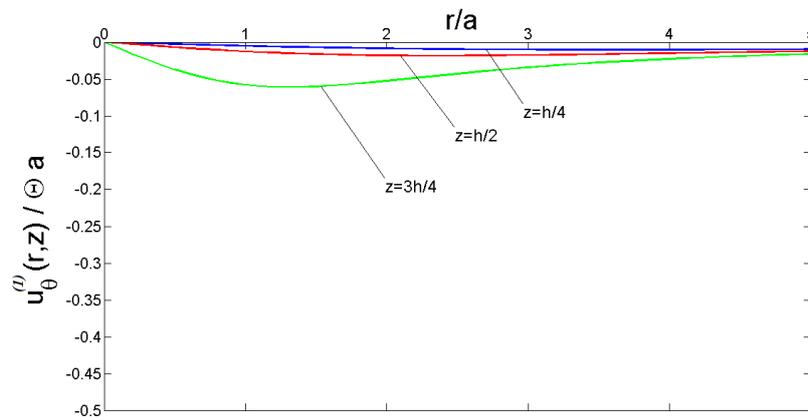


FIGURE 4.4 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h$; $\frac{h}{a} = 3$

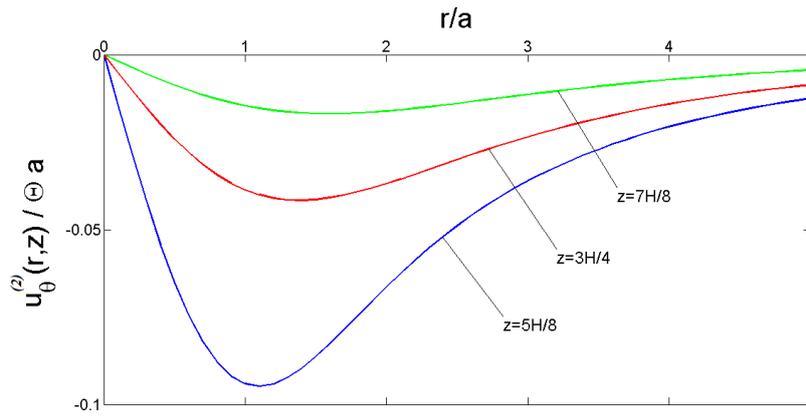


FIGURE 4.5 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h < z < H$; $\frac{h}{a} = 1$

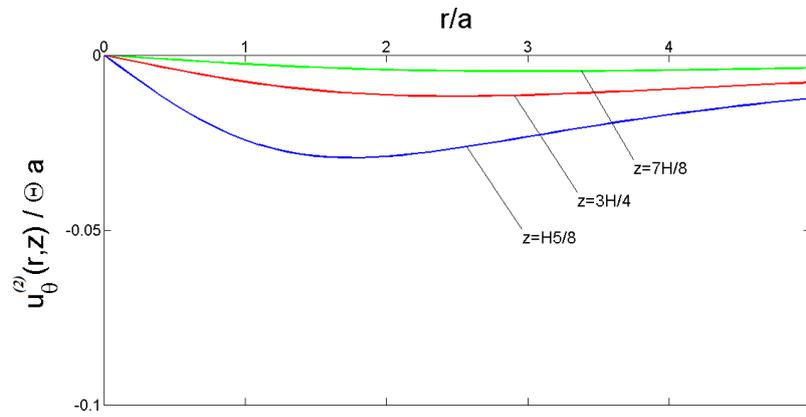


FIGURE 4.6 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h < z < H$; $\frac{h}{a} = 2$

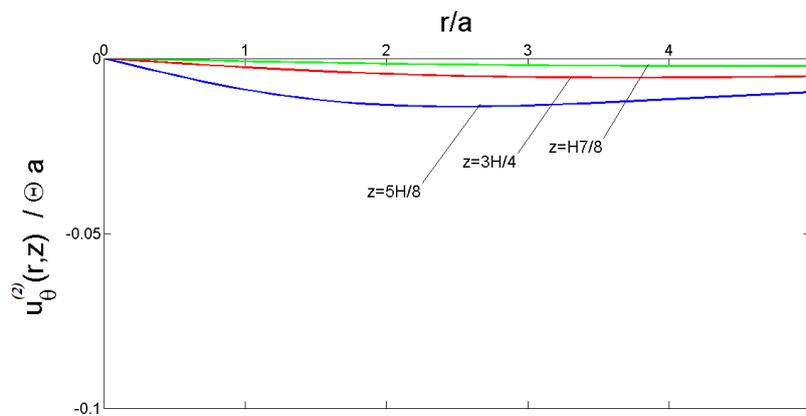


FIGURE 4.7 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h < z < H$; $\frac{h}{a} = 3$

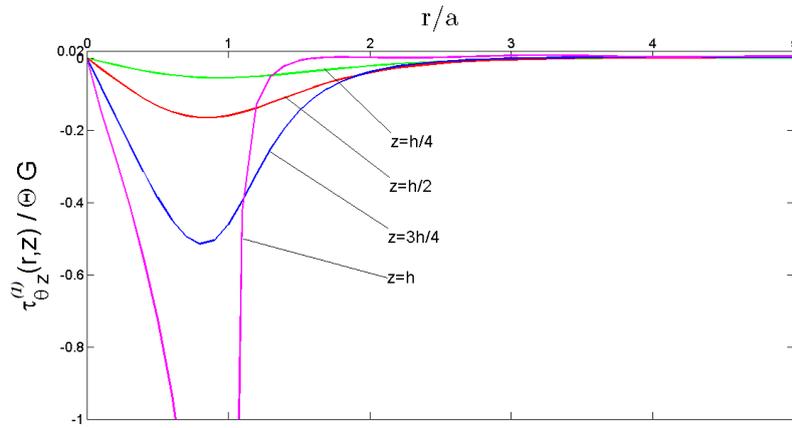


FIGURE 4.8 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h$; $\frac{h}{a} = 1$

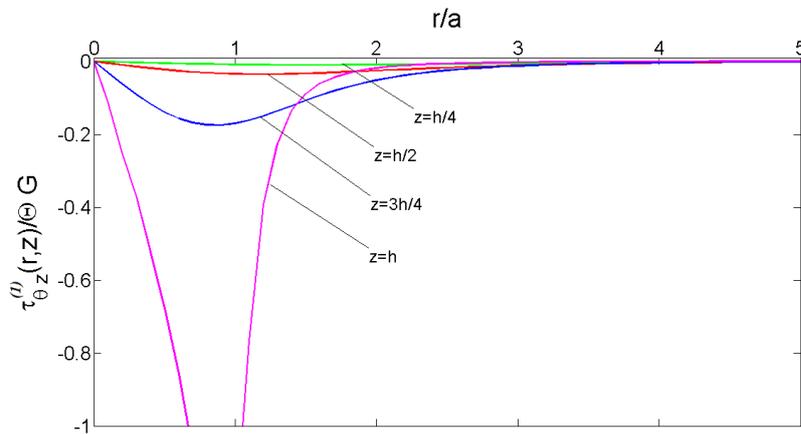


FIGURE 4.9 – champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h$; $\frac{h}{a} = 2$

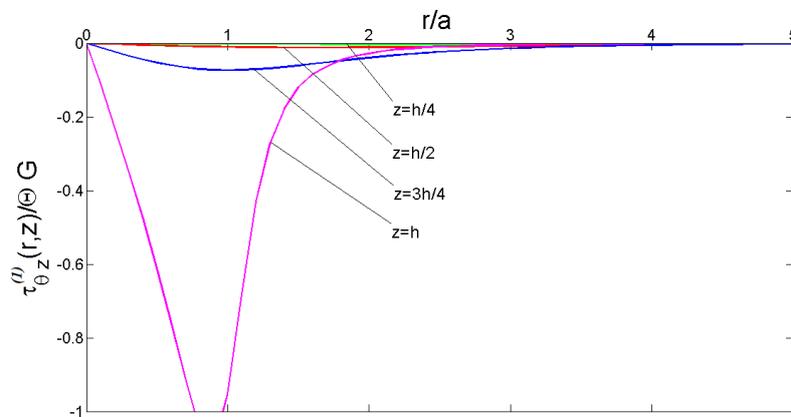


FIGURE 4.10 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h$; $\frac{h}{a} = 3$

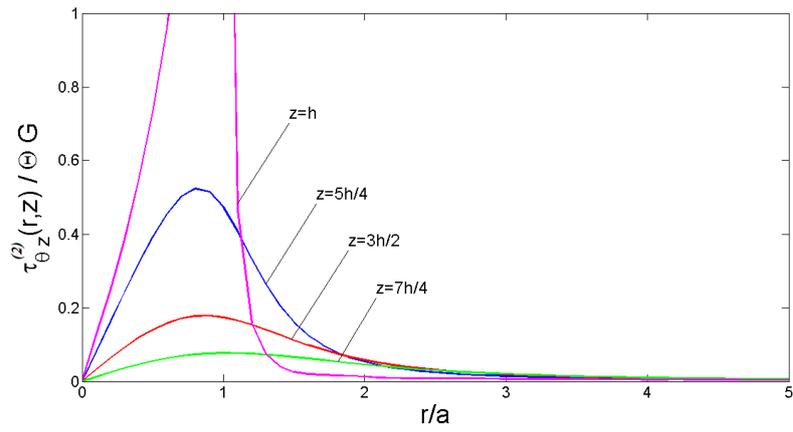


FIGURE 4.11 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h < z < H$; $\frac{h}{a} = 1$

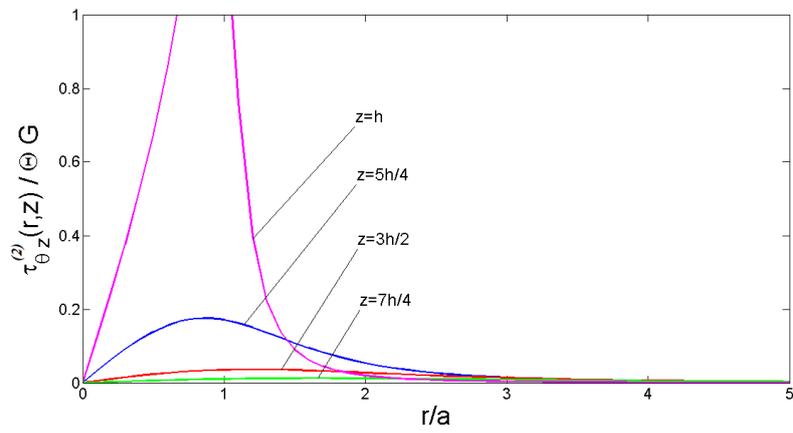


FIGURE 4.12 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h < z < H$; $\frac{h}{a} = 2$

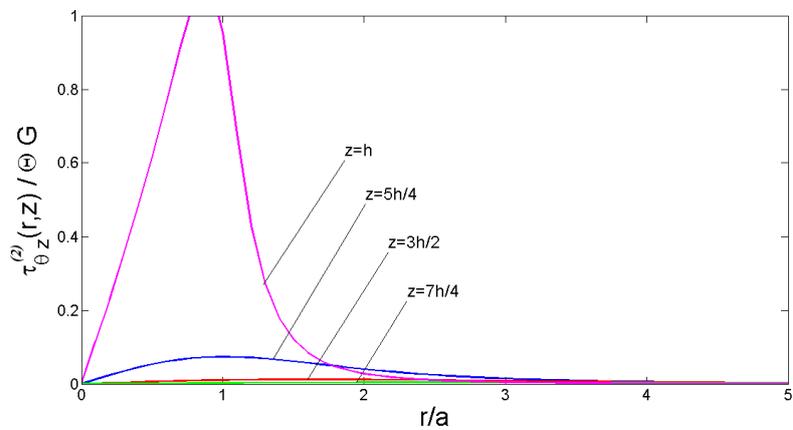


FIGURE 4.13 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h < z < H$; $\frac{h}{a} = 3$

La quantité la plus intéressante dans le domaines pratique (particularité dans la mécanique de la rupture linéaire) est le facteur d'intensité de contrainte [10] qui est donné par :

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{2\pi(1-r)} \tau_{\theta z}^{(1)}(r, h). \quad (4.39)$$

$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, h)$ est la contrainte de torsion sous le disque, son expression est :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, h) = \frac{8\Theta G}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} F(\lambda, r) d\lambda, \quad (4.40)$$

où :

$$F(\lambda, r) = \sqrt{\lambda} E(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r),$$

et :

$$E(\lambda) = \frac{e^{\lambda h} - e^{2\lambda(H-h)}}{1 + e^{2\lambda H}} \sinh(\lambda h).$$

En utilisant la formule asymptotique de la fonction de Bessel de première espèce, pour λ assez grand, donnée par :

$$J_\nu(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} \cos\left(\lambda - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.41)$$

On obtient :

$$\begin{cases} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) \simeq \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} (-1)^{n+1} \cos(\lambda), \\ J_1(\lambda r) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \cos\left(\lambda r - \frac{3\pi}{4}\right), \\ E(\lambda) \simeq -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.42)$$

Ainsi, on trouve :

$$F(\lambda, r) = \sqrt{\lambda} E(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) \simeq G(\lambda, r) = -\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\sqrt{\lambda r}} \cos(\lambda) \cos\left(\lambda r - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (4.43)$$

Par conséquent, on aura :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{2\pi(1-r)} \int_0^{\infty} F(\lambda, r) d\lambda, \quad (4.44)$$

Pour le calcul de cette limite on décompose l'intégrale comme suit :

$$\int_0^{\infty} [F(\lambda, r) - G(\lambda, r)] d\lambda + \int_0^{\infty} G(\lambda, r) d\lambda, \quad (4.45)$$

A partir de la convergence uniforme de l'intégrale, on aura :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{2\pi(1-r)} \int_0^\infty [F(\lambda, r) - G(\lambda, r)] d\lambda = 0. \quad (4.46)$$

Par suite, on obtient :

$$K_{III} = -\frac{8\Theta G}{3\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1-r}{r}} H(\lambda, r), \quad (4.47)$$

où :

$$H(\lambda, r) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(\lambda) \cos\left(\lambda r - \frac{3\pi}{4}\right) d\lambda. \quad (4.48)$$

Remarquons aussi :

$$H(\lambda, r) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda\zeta) + \sin(\lambda\zeta)}{\sqrt{\lambda}} d\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda\zeta') - \sin(\lambda\zeta')}{\sqrt{\lambda}} d\lambda, \quad (4.49)$$

où :

$$\begin{aligned} \zeta &= 1 - r, \\ \zeta' &= 1 + r \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs d'intégrales de Fresnel :

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt = \int_0^\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{2}, \quad (4.50)$$

On obtient :

$$H(\lambda) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-r}}. \quad (4.51)$$

Enfin nous trouvons l'expression simple du facteur d'intensité de contrainte K_{III} du problème proposé donné seulement en termes des coefficients b_n par :

$$K_{III} = \frac{4\Theta G}{3\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n. \quad (4.52)$$

La figure. 4.14 montre la variation du facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction du rapport h/a . lorsque l'épaisseur de couche devient grande, les valeurs du facteur K_{III} augmentent. Dans le cas particulier du demi-espace élastique, le rayon a n'a pas d'influence sur la valeur de K_{III} .

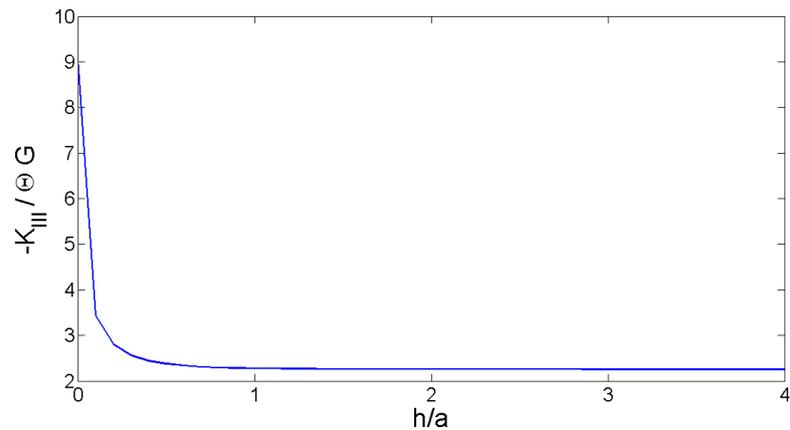


FIGURE 4.14 – La variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de h/a

4.4 Conclusion

Moyenant la transformation intégrale de Hankel, le problème aux conditions limites mixtes à été réduit à un système d'équations intégrales duales. La solution de ces dernières équations, nous permet d'exprimer les déplacements, Les contraintes et le facteur d'intensité de contrainte à une somme sous forme des coefficient du système algébrique infini, contrairement à la méthode classique, qui se calcule sous forme d'un développement en séries de fonctions de Jacobi.

Chapitre 5

Torsion axisymétrique d'un demi-espace élastique bi-couche par un disque rigide

5.1 Formulation et résolution du problème

5.1.1 Cas 1 : Le disque rigide adhère dans la première couche élastique

Un milieu élastique bicouche composé d'un demi-espace et d'une couche élastique. Les modules de cisaillement de ces milieux sont G_2 et G_1 , respectivement. La déformation du milieu bicouche est due à la torsion du disque rigide adhésif d'un angle Θ autour de son axe verticale. Le disque de rayon a est situé dans le plan $z = h_1$. Les systèmes des coordonnées cylindriques (r, θ, z) est choisi comme système de référence. En l'absence des forces de volume, les seules relations liants les contraintes au déplacement sont :

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = G_i \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial z}, \quad \tau_{\theta r}^{(i)} = G_i r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_{\theta}^{(i)}}{r} \right), \quad i = 1, 2 \quad (5.1)$$

L'équation d'équilibre en contraintes est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \tau_{\theta r}}{\partial r^2} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{r \partial r} - \frac{\tau_{\theta r}}{r^2} + \frac{\partial^2 \tau_{\theta z}}{\partial z^2} = 0, \quad (5.2)$$

En remplaçant les relations (5.1) dans l'équation (5.2), on obtient l'équation différentielle gouvernante en u_θ

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0, \quad (5.3)$$

La géométrie du milieu composé est représenté dans la figure 5.1.

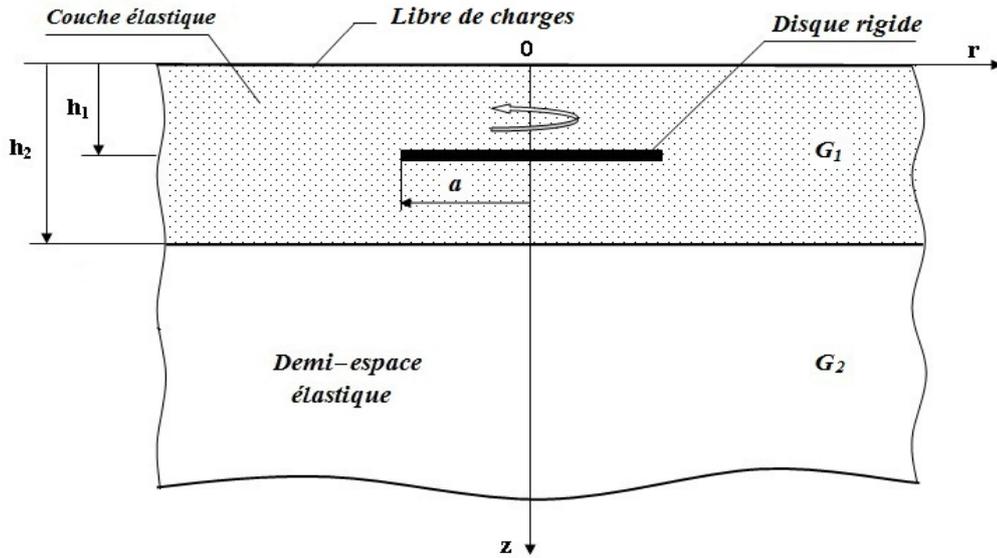


FIGURE 5.1 – Torsion par un disque adhésif dans une couche élastique

La forme générale de la solution u_θ dans le milieu élastique peut être obtenue par application de la transformation intégrale de Hankel (4.4). Son inverse (4.5) est donné dans la section précédente. Tout en respectant la direction radiale, en tenant compte des conditions de régularité à l'infinie, la solution s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} u_\theta^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \lambda [A_1(\lambda) e^{-\lambda z} + B_1(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, & 0 < z < h_1, \\ u_\theta^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \lambda [A_2(\lambda) e^{-\lambda z} + B_2(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda. & h_1 < z < h_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

$$u_\theta^{(2)}(r, z) = \int_0^\infty \lambda A_3(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad h_2 < z < \infty \quad (5.5)$$

A partir des relations (5.1), (5.4) et (5.5) on trouve les expressions des contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = -G_1 \int_0^\infty \lambda^2 [A_1(\lambda) e^{-\lambda z} - B_1(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, & 0 < z < h_1 \\ \tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = -G_1 \int_0^\infty \lambda^2 [A_2(\lambda) e^{-\lambda z} - B_2(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda, & h_1 < z < h_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r, z) = -G_2 \int_0^\infty \lambda^2 A_3(\lambda) e^{-\lambda z}. \quad h_2 < z < \infty \quad (5.7)$$

Les conditions aux limites et de continuité du problème sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) = 0, & r \geq 0 \\ \text{(b)} \quad & [u_\theta(r, h_1)] = u_\theta^{(1)}(r, h_1 + 0) - u_\theta^{(1)}(r, h_1 - 0) = 0, & r \geq 0 \\ \text{(c)} \quad & [u_\theta(r, h_2)] = u_\theta^{(2)}(r, h_2 + 0) - u_\theta^{(2)}(r, h_2 - 0) = 0, & r \geq 0 \\ \text{(d)} \quad & [\tau_{\theta z}(r, h_2)] = \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h_2 + 0) - \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h_2 - 0) = 0. & r \geq 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Cependant, les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} u_\theta^{(1)}(r, h_1 - 0) &= \Theta r, & r \leq a \\ [\tau_{\theta z}(r, h_1)] &= \tau_{\theta z}^{(1)}(r, h_1 - 0) - \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h_1 + 0) = 0. & r > a \end{aligned} \quad (5.9)$$

Étant donné les conditions libres (5.8a) en $z = 0$, on obtient :

$$A_1(\lambda) = B_1(\lambda), \quad (5.10)$$

D'autre part, les conditions de continuité (5.8c) et (5.8d) donnent :

$$\begin{aligned} A_2(\lambda)e^{\lambda h_2} + B_2(\lambda)e^{-\lambda h_2} &= A_3(\lambda)e^{-\lambda h_2}, \\ G_2 A_2(\lambda)e^{\lambda h_2} - G_2 B_2(\lambda)e^{-\lambda h_2} &= -G_3 A_3(\lambda)e^{-\lambda h_2}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

La condition (5.8b) requiert :

$$A_1(\lambda)e^{\lambda h_1} + B_1(\lambda)e^{-\lambda h_1} = A_2(\lambda)e^{\lambda h_1} + B_2(\lambda)e^{-\lambda h_1}, \quad (5.12)$$

Par suite, les quatre fonctions inconnues peuvent être exprimées en fonction de $A_1(\lambda)$ en

résolvant l'ensemble des équations (5.10-5.12), ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1(\lambda) = A_1(\lambda), \\ A_2(\lambda) = \frac{2(1-\alpha)\cosh(\lambda h_1)}{(1-\alpha)e^{\lambda h_1} + (1+\alpha)e^{-2\lambda h_2}e^{-\lambda h_1}} A_1(\lambda), \\ B_2(\lambda) = \frac{2(1+\alpha)\cosh(\lambda h_1)}{(1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}e^{\lambda h_1} + (1+\alpha)e^{-\lambda h_1}} A_1(\lambda), \\ A_3(\lambda) = \frac{4\cosh(\lambda h_1)}{(1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}e^{\lambda h_1} + (1+\alpha)e^{-\lambda h_1}} A_1(\lambda). \end{array} \right. \quad (5.13)$$

où $\alpha = \frac{G_2}{G_1}$.

Par conséquent, les déplacements et les contraintes dans la première région ($0 \leq z \leq h_2$) s'expriment par :

$$u_{\theta}^{(1)}(r, z) = \int_0^{\infty} 2\lambda \cosh(\lambda z) A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.14)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = G_1 \int_0^{\infty} 2\lambda^2 \sinh(\lambda z) A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.15)$$

Pour $h_1 < z < h_2$, on a :

$$u_{\theta}^{(1)}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda C(\lambda) [(1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}e^{\lambda z} + (1+\alpha)e^{-\lambda z}] A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.16)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, z) = G_1 \int_0^{\infty} \lambda^2 C(\lambda) [(1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}e^{\lambda z} - (1+\alpha)e^{-\lambda z}] A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (5.17)$$

où :

$$C(\lambda) = \frac{2\cosh(\lambda h_1)}{(1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}e^{\lambda h_1} + (1+\alpha)e^{-\lambda h_1}}$$

Tandis que les déplacements et les contraintes dans le demi-espace ($h_2 \leq z \leq \infty$) peuvent être écrits par :

$$u_{\theta}^{(3)}(r, z) = \int_0^{\infty} 2\lambda C(\lambda) e^{-\lambda z} A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.18)$$

$$\tau_{\theta z}^{(3)}(r, z) = -G_2 \int_0^{\infty} 2\lambda^2 C(\lambda) e^{-\lambda z} A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5.19)$$

Les conditions aux limites mixtes (5.9) permettent de déterminer la fonction inconnue

$A_1(\lambda)$ à partir des équations intégrales duales suivantes :

$$\begin{cases} \int_0^\infty 2\lambda \cosh(\lambda h_1) A_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = \Theta r, & r \leq a \\ \int_0^\infty \lambda^2 \frac{(1+\alpha) - (1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}}{(1+\alpha)e^{-\lambda h_1} + (1-\alpha)e^{-\lambda(2h_2-h_1)}} A_1(\lambda) d\lambda = 0, & r > a \end{cases} \quad (5.20)$$

Introduisons la fonction auxiliaire $\phi^{(1)}(\lambda)$ définie par :

$$\phi^{(1)}(\lambda) = \lambda^2 \frac{(1+\alpha) - (1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}}{(1+\alpha)e^{-\lambda h_1} + (1-\alpha)e^{-\lambda(2h_2-h_1)}} A_1(\lambda), \quad (5.21)$$

Par suite, le système (5.20) sera réécrit sous la forme simplifiée donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \gamma(\lambda) \phi^{(1)}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 2\Theta r, & r \leq a \\ \int_0^\infty \phi^{(1)}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, & r > a \end{cases} \quad (5.22)$$

Soit maintenant :

$$\gamma(\lambda) = 1 + \frac{(1-\alpha)(2 + e^{2\lambda h_1})e^{-2\lambda h_2} + (1+\alpha)e^{-2\lambda h_1}}{(1+\alpha) - (1-\alpha)e^{-2\lambda h_2}} = 1 + \omega^{(1)}(\lambda), \quad (5.23)$$

Remarquons que $\omega^{(1)}(\lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. Par conséquent, la solution du système précédent s'obtient sous la forme générale suivante :

$$\phi^{(1)}(\lambda) = \lambda \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\lambda u) \varphi(u) du, \quad (5.24)$$

où $\varphi(u)$ vérifie l'équation intégrale de Fredholm suivant :

$$\varphi(x) + x^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} k^{(1)}(x, u) \psi(u) du = q(x), \quad (5.25)$$

avec,

$$k^{(1)}(x, u) = \int_0^\infty \lambda \omega^{(1)}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(x\lambda) J_{\frac{1}{2}}(u\lambda) d\lambda, \quad (5.26)$$

$$q(x) = \frac{4\Theta}{x\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{u^3}{(x^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} du. \quad (5.27)$$

On cherche la solution de l'équation (5.25) sous la forme d'un développement en séries de polynômes de Jacobi (4.24).

Après avoir substituer l'équation (4.24) dans (5.25) et multiplier les deux termes par

l'expression $x^2 P_n^{\frac{1}{2},0}(1-x^2)$, en intégrant ensuite le résultat suivant la variable x de 0 à 1 et en utilisant la condition d'orthogonalité des polynômes de Jacobi, on obtient le système algébrique infini suivant :

$$\frac{a_m}{4m+3} + a_n k_{mn}^{(1)} = q_m, \quad (5.28)$$

dans lequel on a :

$$k_{mn}^{(1)} = \int_0^\infty \lambda^{-1} \omega^{(1)}(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda, \quad (5.29)$$

Le second membre q_m est donné par la formule (4.27). Celle-ci, est évaluée en faisant appel à la formule (4.28) et celle de Gradshteyn et Ryzhik [20]. Ainsi :

$$\begin{cases} m = 0; & q_0 = \frac{8\Theta}{3\sqrt{\pi}}, \\ m > 0; & q_m = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Introduisons les coefficients normalisés :

$$b_m = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\Theta} a_m \quad (5.31)$$

On écrit le système (5.28) comme suit :

$$\frac{b_m}{4m+3} + b_n k_{mn}^{(1)} = \delta_{m0}, \quad (5.32)$$

Par conséquent, la résolution du système algébrique infini (5.32) est obtenue en utilisant la même procédure citée dans le chapitre précédent. D'où le développement en série de la fonction auxiliaire $\phi^{(1)}(\lambda)$ est exprimé par :

$$\phi^{(1)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 \lambda \sqrt{\frac{\lambda}{2}} u^{\frac{3}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\lambda u) P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2u^2) du, \quad (5.33)$$

La fonction $\phi^{(1)}(\lambda)$ peut être donnée en fonction des b_n comme suit :

$$\phi^{(1)}(\lambda) = \frac{8\Theta}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda} b_n J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda), \quad (5.34)$$

D'où, $A_1(\lambda)$ est donnée par :

$$A_1(\lambda) = D(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda\sqrt{\lambda}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda), \quad (5.35)$$

telle que :

$$D(\lambda) = \frac{8\Theta}{3\sqrt{2\pi}} \frac{(1 + \alpha)e^{-\lambda h_1} + (1 - \alpha)e^{-\lambda(2h_2 - h_1)}}{(1 + \alpha) - (1 - \alpha)e^{-2\lambda h_2}}. \quad (5.36)$$

5.1.1.1 Résultats numériques et discussion.

Afin de déterminer les coefficients b_n , les intégrales infinies $k_{mn}^{(1)}$ du système (5.32) sont à évaluer numériquement. Pour des valeurs suffisamment grandes de λ_0 , le noyau $k_{mn}^{(1)}$ peut être approché par :

$$k_{mn}^{(1)} = \int_0^{\lambda_0} \lambda^{-1} \omega^{(1)}(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda \quad (5.37)$$

L'intégrale se calcule en suite numériquement à l'aide de la formule de Simpson. Dans ce cas il suffit de choisir $\lambda_0 = 1500$. La convergence des coefficients b_n est montrée dans le tableau 5.1. Remarquons que la convergence s'avère plus lente lorsque on augmente le rapport du module de rigidité α . Il est noté que les dix premiers coefficients de la suite b_n son suffisants pour calculer le champs des déplacements, les contraintes et le facteur d'intensité de contrainte.

$\alpha = 0.1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$
2.274927927391783	2.663921033807180	3.083418023608558
-0.153869064677778	-0.087368183651883	0.002734951180410
-0.011890198510177	-0.007293069568189	-0.000198719859237
0.000354878465356	0.000197619005338	0.000088938955020
0.000139296883410	0.000085639758950	0.000018431114300
0.000004675622818	0.000003029637152	0.000000623134297
-0.000001307363753	-0.000000801433644	-0.000000163692167
-0.000000128812562	-0.000000080688120	-0.000000016671491
0.000000008802813	0.000000005349486	-0.000000001058769
0.000000002097515	0.000000001305117	0.000000000265531
0.000000000004136	0.000000000003836	0.000000000001051
-0.000000000026788	-0.000000000016617	-0.000000000003368
-0.00000000001535	-0.00000000000967	-0.00000000000199

TABLE 5.1 – La Table de coefficients b_n pour différentes valeurs de α

5.1.1.2 Déplacements et contraintes dans le milieu élastique bi-couches

les résultats numériques pour les déplacements et les contraintes à travers les couches élastiques s'obtiennent, en utilisant les équations (5.35), (5.13) et les expressions (5.4-5.7).

- Dans la région $0 \leq z \leq h_1$

$$u_{\theta}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} D(\lambda) \cosh(\lambda z) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.38)$$

$$\tau_{\theta}^{(1)} = 2G_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} D(\lambda) \sinh(\lambda z) \sqrt{\lambda} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.39)$$

- La seconde région $h_1 \leq z \leq h_2$ correspond à :

$$u_{\theta}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{C(\lambda)D(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} [(1-\alpha)e^{\lambda(z-2h_2)} + (1+\alpha)e^{-\lambda z}] J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.40)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = G_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} C(\lambda) D(\lambda) [(1-\alpha)e^{\lambda(z-2h_2)} - (1+\alpha)e^{-\lambda z}] J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5.41)$$

A partir des conditions de continuité (5.8c, 5.8d), le déplacement et la contrainte correspondants dans la région ($h_2 \leq z \leq \infty$) sont :

$$u_{\theta}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\lambda}} C(\lambda) D(\lambda) e^{-\lambda z} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5.42)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = -2G_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda} C(\lambda) D(\lambda) e^{-\lambda z} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.43)$$

On remarque que dans les figures 5.2 à 5.4 si on se situe sur un point dans la même région, en faisant varier le paramètre α de 0.1 à 10, la variation des déplacements est inversement proportionnelle au rapport G_2/G_1 . Ainsi, les déplacements sont optimaux au voisinage de la frontière du disque, tandis que ces derniers tendent vers zéro en s'éloignant de la frontière du disque.

Les figures 5.5 à 5.7 illustrent que le comportement du déplacements dans la région $h_1 < z < h_2$ est le même que précédemment, tout en gardant la proportionnalité du paramètre α .

Dans le demi-espace élastique, les déplacements illustrés dans les figures 5.8 à 5.10 tendent vers zéro en s'éloignant de la surface du disque.

Les contraintes sont des fonctions croissantes par rapport au coefficient α pour $0 < z < h_1$ et $h_1 < z < h_2$ dans la même région z/h_1 et z/h_2 respectivement cf (5.11-5.16). Cependant, les contraintes cf (5.17-5.19) dans le demi-espace élastique sont inversement proportionnelles au rapport de rigidité G_2/G_1 dans la même région z/h_2 .

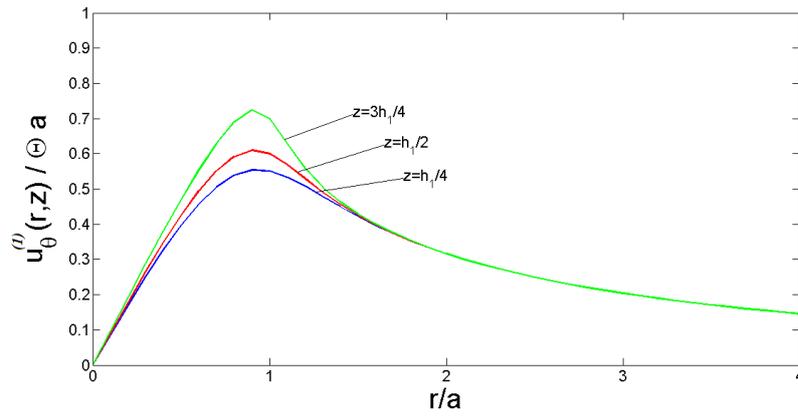


FIGURE 5.2 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 0.1$

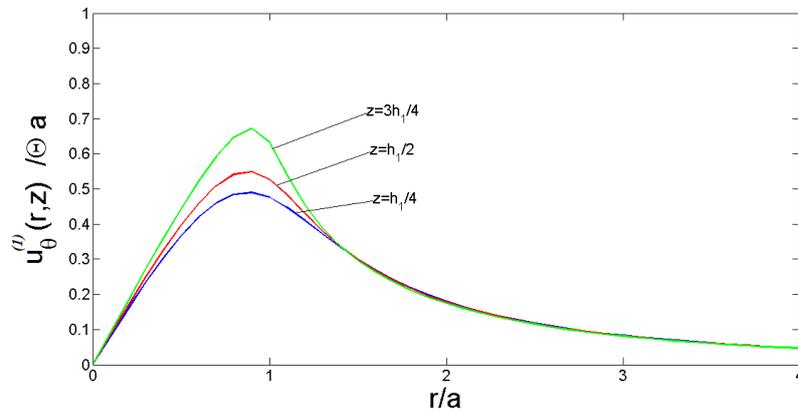


FIGURE 5.3 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 1$

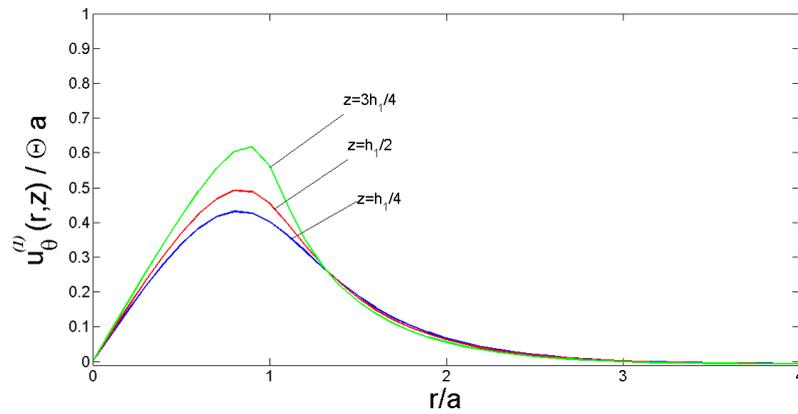


FIGURE 5.4 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 10$

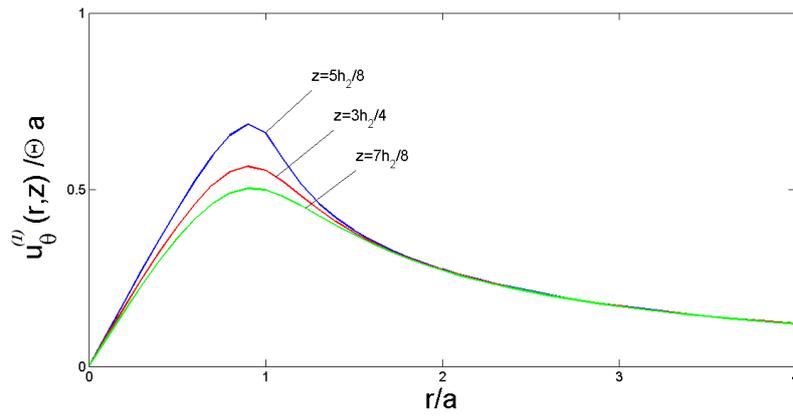


FIGURE 5.5 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 0.1$

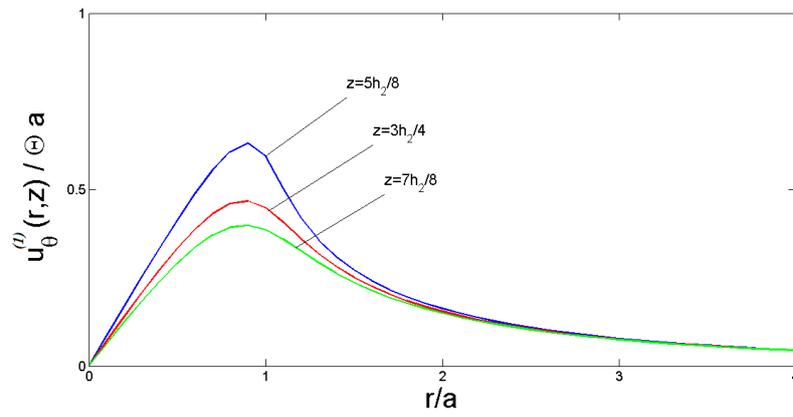


FIGURE 5.6 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 1$

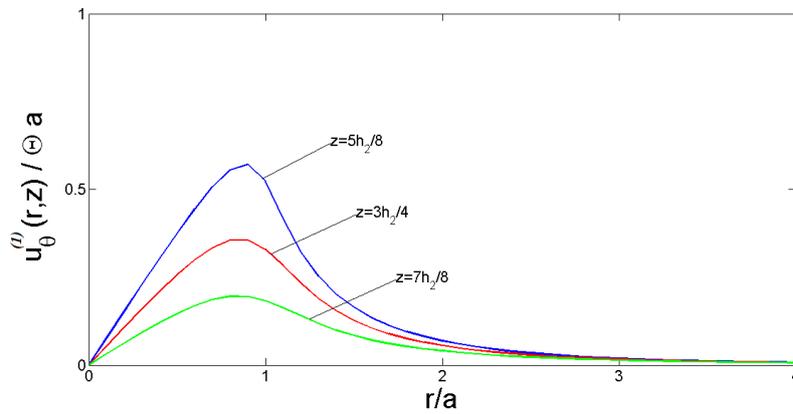


FIGURE 5.7 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 10$

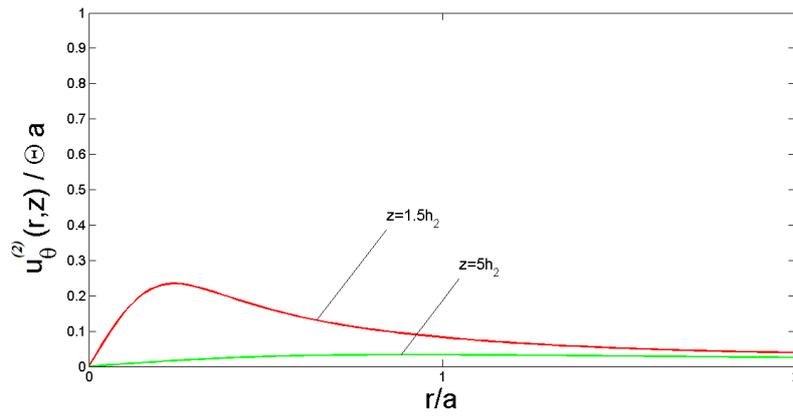


FIGURE 5.8 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 0.1$

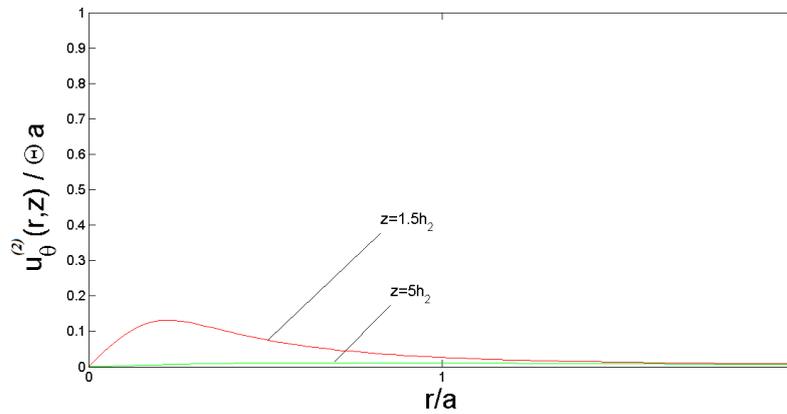


FIGURE 5.9 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 1$

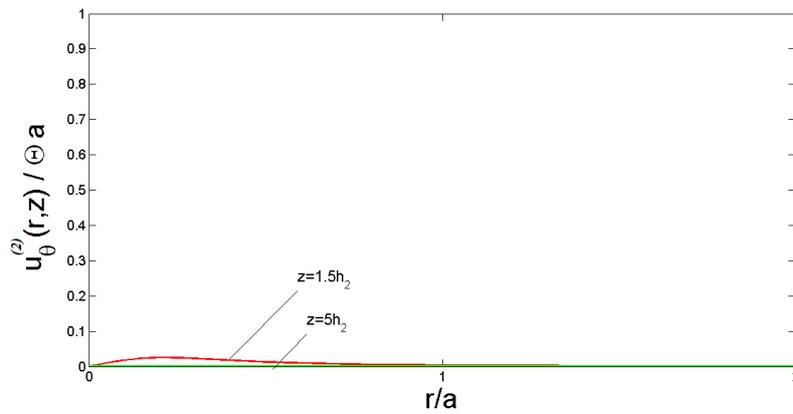


FIGURE 5.10 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 10$

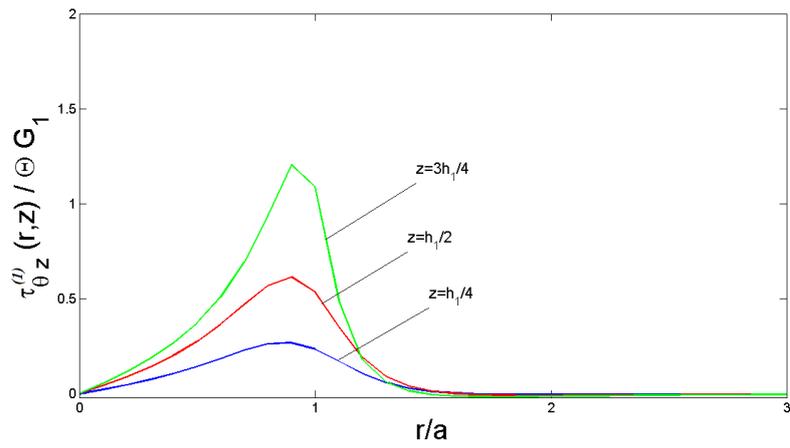


FIGURE 5.11 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 0.1$

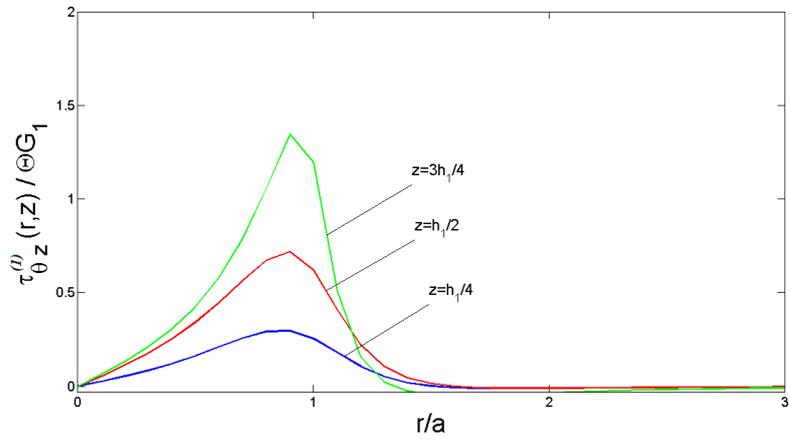


FIGURE 5.12 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 1$

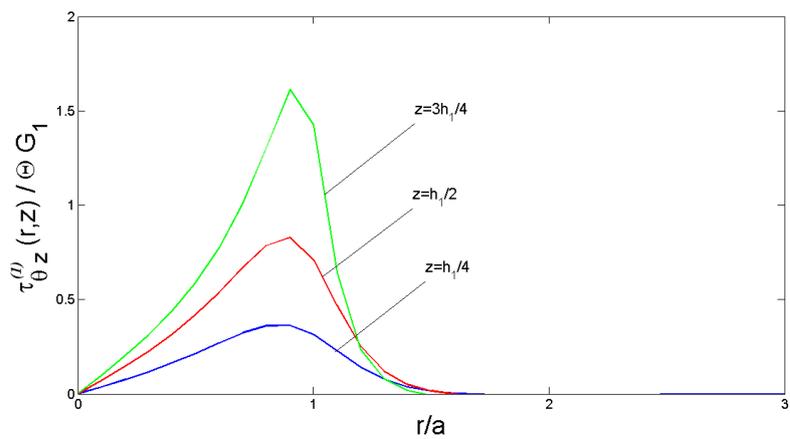


FIGURE 5.13 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 10$

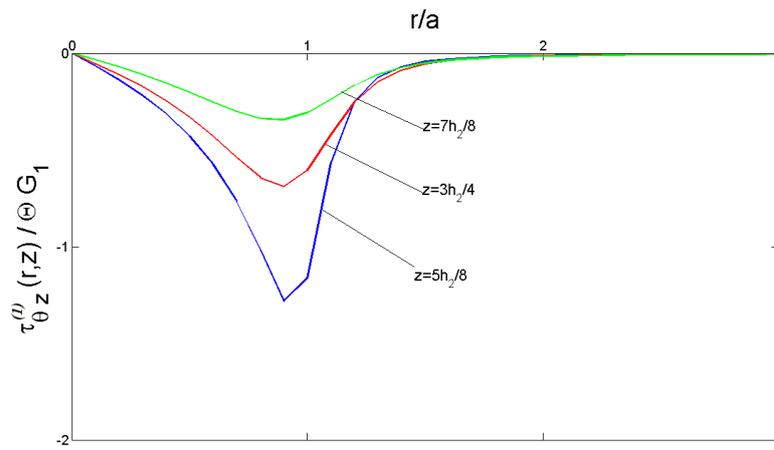


FIGURE 5.14 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 0.1$

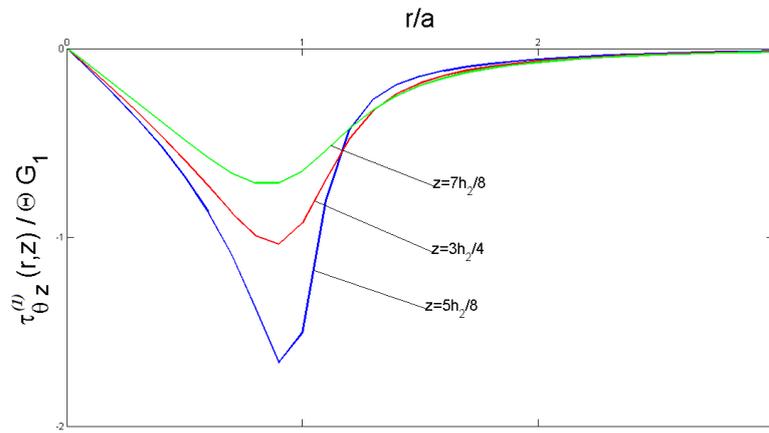


FIGURE 5.15 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 1$

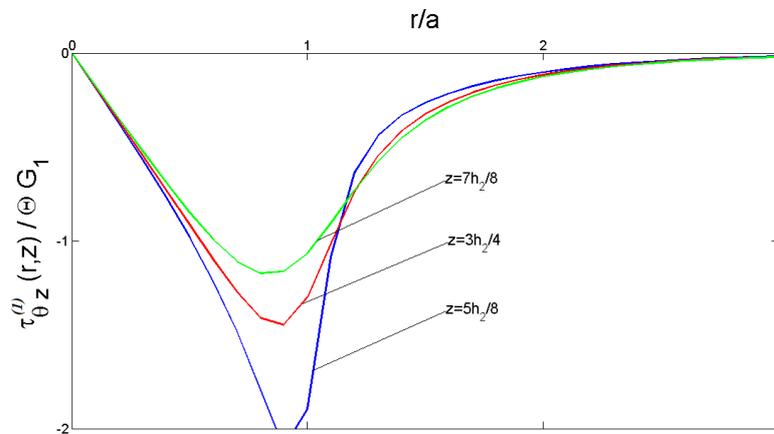


FIGURE 5.16 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 0.1$

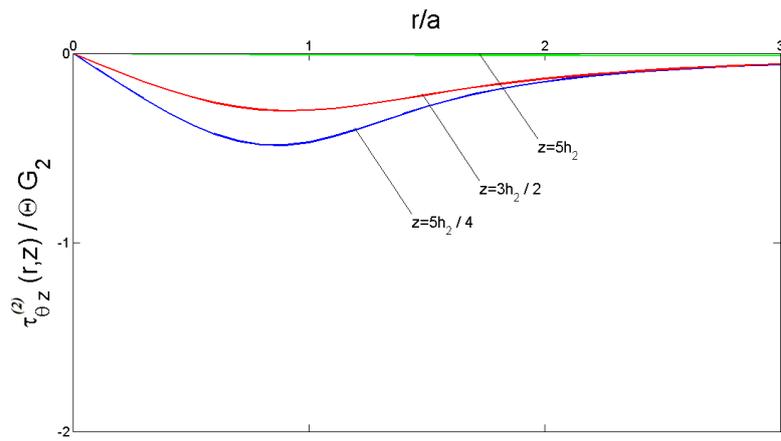


FIGURE 5.17 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 0.1$

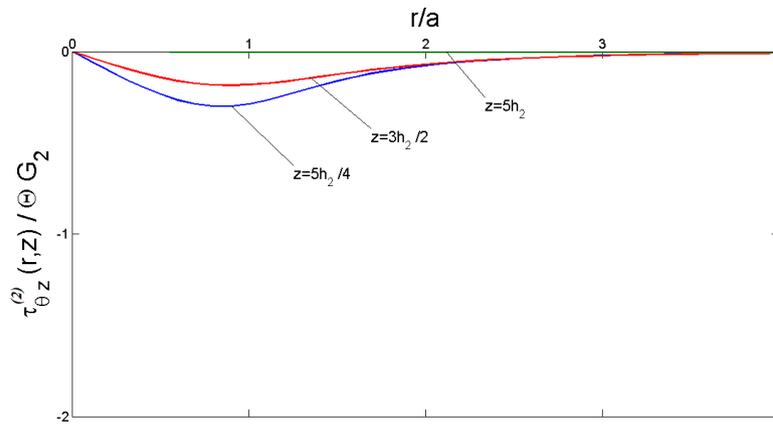


FIGURE 5.18 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 1$

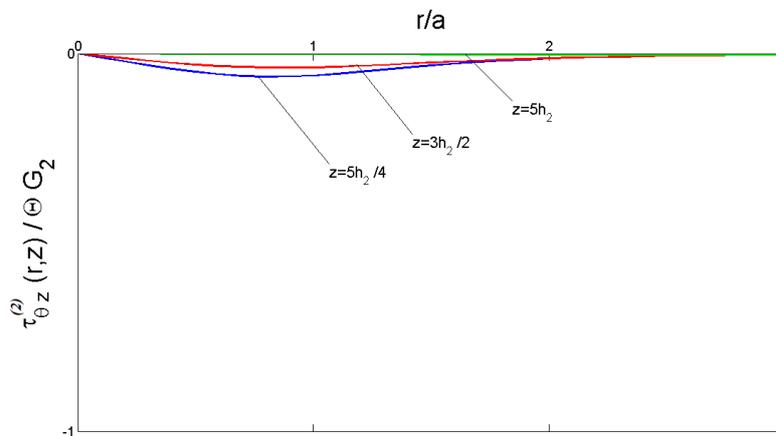


FIGURE 5.19 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 10$

Cas où le disque est situé dans la première couche élastique. le facteur d'intensité de contrainte est donné par l'expression suivante :

$$K_{III}^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{2\pi(1-r)} \tau_{\theta z}^1(r, h_1) \quad (5.44)$$

Sachant que $\tau_{\theta z}^{(1)}(r, h_1)$ est la contrainte de cisaillement à l'interface du disque.

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r, h_1) = 2G_1 \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} D(\lambda) \sinh(\lambda h) \sqrt{\lambda} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.45)$$

En tenant compte de l'équivalence asymptotique à l'infinie de la fonction de Bessel de première espèce et les intégrales cos et sin de Frenel, on obtient une expression analytique du facteur d'intensité de contrainte $K_{III}^{(1)}$.

$$K_{III}^{(1)} = -q_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \quad (5.46)$$

Cas Particulier

Lorsque $h_2 \rightarrow \infty$ et $\alpha = 1$, les équations intégrales duales (5.22) du problème sont résolues approximativement par la méthode des quadrature Pak et Saphores [6]. Si $h_1 = 0^+$, l'expression (5.29) peut être réécrite comme suit :

$$K_{III}^{(1)} = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda, \quad (5.47)$$

Cette équation intégrale est évaluée par [20] sous la forme :

$$K_{III}^{(1)} = \frac{\delta_{mn}}{4n+3}, \quad (5.48)$$

Compte tenu des équations (5.30) et (5.48) à partir de (5.32) on obtient :

$$\begin{cases} m = 0; & b_0 = \frac{3}{2}. \\ m > 0; & b_m = 0. \end{cases} \quad (5.49)$$

Quelques résultats dans le cas $h_2 \rightarrow \infty$ et $\alpha = 1$ sont donnés dans la figure 5.20. Cette figure montre une bonne compatibilité avec celles correspondant à Pak et Saphores [6] où $\eta = \frac{h_1}{a}$.

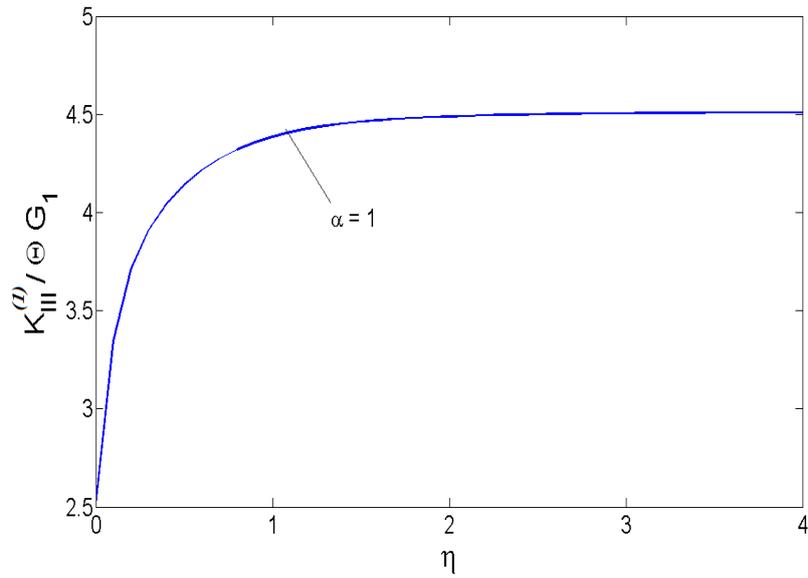


FIGURE 5.20 – Variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de η

Pour les deux valeurs de $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 10$, les graphes du facteur d'intensité de contrainte sont représentés dans la figure 5.21.

Pour un rapport de rigidité $\alpha < 1$ si le rapport η augmente $K_{III}^{(1)}$ augmente aussi puis se stabilise à une valeurs constante. Par contre, pour $\alpha > 1$, $K_{III}^{(1)}$ diminue puis se stabilise à la même valeurs.

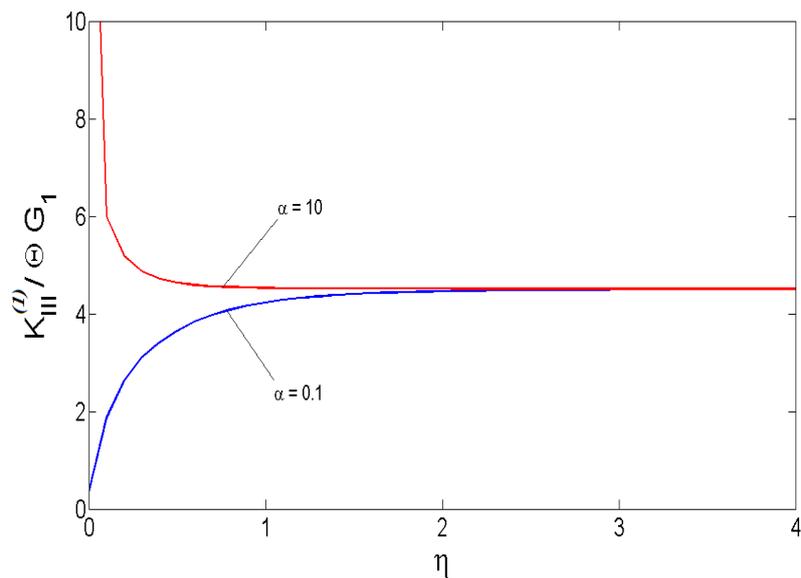


FIGURE 5.21 – Variation de facteur d'intensité de contrainte en fonction de η

5.1.2 Cas 2 : Le disque rigide adhère dans le demi-espace élastique

Dans ce deuxième cas, nous considérons le problème qui analyse la déformation d'un milieu bicouche dû à la torsion du disque rigide émergé dans le demi-espace élastique figure 5.22.

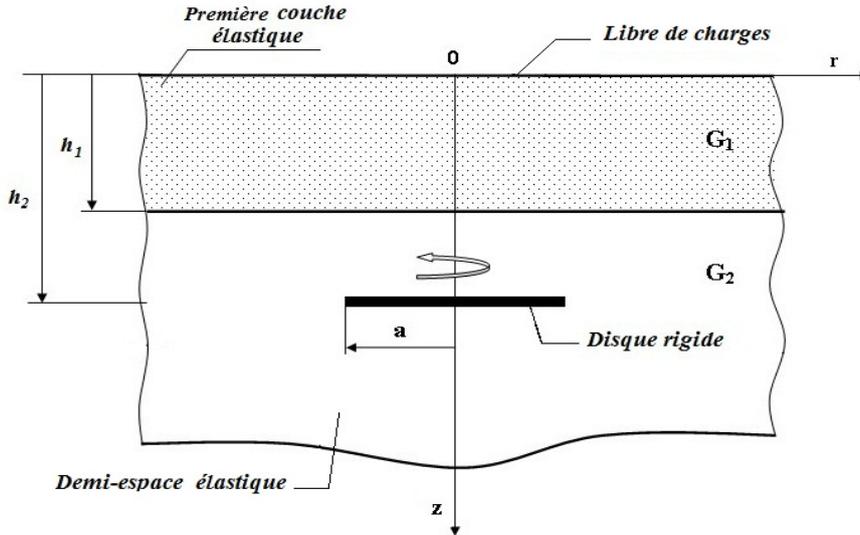


FIGURE 5.22 – Torsion du milieu élastique bicouche par un disque rigide adhésif dans le demi-espace

Ansi, les conditions aux limites mixtes de problème proposé sont données telles que :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \tau_{\theta z}^{(1)}(r, 0) &= 0 & r \geq 0 \\
 \text{(b)} \quad [u_{\theta}(r, h_1)] &= u_{\theta}^{(2)}(r, h_1 + 0) - u_{\theta}^{(1)}(r, h_1 - 0) = 0, & r \geq 0 \\
 \text{(c)} \quad [\tau_{\theta z}(r, h_1)] &= \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h_1 + 0) - \tau_{\theta z}^{(1)}(r, h_1 - 0) = 0, & r \geq 0 \\
 \text{(d)} \quad [u_{\theta}(r, h_2)] &= u_{\theta}^{(3)}(r, h_2 + 0) - u_{\theta}^{(2)}(r, h_2 - 0) = 0, & r \geq 0 \\
 \text{(e)} \quad [\tau_{\theta z}(r, h_2)] &= \tau_{\theta z}^{(3)}(r, h_2 + 0) - \tau_{\theta z}^{(2)}(r, h_2 - 0) = 0, & r > a \\
 \text{(f)} \quad u_{\theta}^{(2)}(r, h_2 - 0) &= \Theta r. & r \leq a
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

La vérification des conditions mixtes (5.50e) et (5.50f) nous fournissent un système d'équations intégrales duales suivant :

$$\begin{cases} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \phi_1(\lambda) (1 + \omega^{(2)}(\lambda) J_1(\lambda r)) d\lambda = 2\Theta r, & r \leq a \\ \int_0^\infty \phi_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, & r > a \end{cases} \quad (5.51)$$

avec :

$$\omega^{(2)}(\lambda) = \frac{\cosh(\lambda h_1) - \frac{1}{\alpha} \sinh(\lambda h_1)}{\cosh(\lambda h_1) + \frac{1}{\alpha} \sinh(\lambda h_1)} e^{-\lambda(h_2-h_1)}.$$

en remarque dans ce cas que $\omega^{(2)}(\lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

De même, l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce correspondante est donnée par l'expression (4.21) dont le noyau $k^{(2)}(x, u)$ s'écrit :

$$k^{(2)}(x, u) = \int_0^\infty \lambda \omega^{(2)}(\lambda) J_{\frac{1}{2}}(x\lambda) J_{\frac{1}{2}}(u\lambda) d\lambda. \quad (5.52)$$

A l'aide des expressions (4.24), (4.27) et (4.28) données dans le chapitre trois, le système algébrique infini correspondant au problème posé est :

$$\frac{a_m}{4m+3} + \sum_{n=0}^\infty a_n k_{mn}^{(2)} = q_m, \quad (5.53)$$

avec :

$$k_{mn}^{(2)} = \int_0^\infty \lambda^{-1} \omega^{(2)}(\lambda) J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda) d\lambda, \quad (5.54)$$

Les tables ci-dessous montrent les valeurs des coefficients b_n pour des différentes valeurs de α .

$h_2/h_1 = 10$	
$\alpha = 0.1$	$\alpha = 10$
3.000066818096408	2.999812904299327
0.000000242934154	-0.000000596968000
0.000000000381354	-0.000000000707953
0.000000000000540	-0.000000000000795
0.000000000000001	-0.000000000000001
0.000000000000000	-0.000000000000000

TABLE 5.2 - Table des coefficients b_n avec h_2/h_1 et α

$h_2/h_1 = 2$	
$\alpha = 0.1$	$\alpha = 10$
3.075701690895703	2.915692778708423
0.010648586031169	-0.010584646513997
0.000704089593493	-0.000677974793789
0.000029715129234	-0.000028244600496
0.000000686812464	-0.000000643946832
-0.000000009274597	0.000000009315030
-0.000000001749083	0.000000001680086
-0.000000000085157	0.000000000081271
-0.000000000001691	0.000000000001600
0.000000000000065	-0.000000000000063
0.000000000000000	-0.000000000000007

TABLE 5.3 - Table des coefficients b_n avec h_2/h_1 et α

Notons que la convergence de la suite des coefficients b_n devient lente en diminuant le paramètre d'épaisseur h_2/h_1 et le rapport de rigidité α . Cependant, le quotient α n'a pas une influence sur la vitesse de convergence.

5.1.2.1 Les expressions des déplacements et les contraintes

Les déplacements et les contraintes dans les deux régions ($0 \leq z \leq h_1$) et ($h_1 \leq z \leq h_2$) sont respectivement :

$$u_{\theta}^{(1)} = \frac{8\Theta}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\lambda z)}{\sqrt{\lambda}\beta e^{\lambda c}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.55)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{8\Theta G_1}{3\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda} \sinh(\lambda z)}{\beta e^{\lambda c}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.56)$$

$$u_{\theta}^{(2)} = \frac{4\Theta}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{\alpha_- e^{-\lambda(z-h_1)} + \alpha_+ e^{\lambda(z-h_1)}}{\sqrt{\lambda}\alpha_+ e^{\lambda c}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.57)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = \frac{4\Theta G_2}{3\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda}(\alpha_+ e^{\lambda(z-h_1)} - \alpha_- e^{-\lambda(z-h_1)})}{\alpha_+ e^{\lambda c}} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.58)$$

Pour la troisième région ($h_2 \leq z \leq \infty$), on obtient :

$$u_{\theta}^{(2)} = \frac{4\Theta}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{\alpha_- e^{-\lambda c} + \alpha_+ e^{\lambda c}}{\sqrt{\lambda} \alpha_+ e^{\lambda c}} e^{-\lambda(z-h_2)} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda, \quad (5.59)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = -\frac{4\Theta G_2}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda}(\alpha_- e^{-\lambda c} + \alpha_+ e^{\lambda c})}{\alpha_+ e^{\lambda c}} e^{-\lambda(z-h_2)} J_{2n+\frac{3}{2}}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (5.60)$$

où :

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \cosh(\lambda h_1) + \frac{1}{\alpha} \sinh(\lambda h_1), \\ \alpha_- &= \cosh(\lambda h_1) - \frac{1}{\alpha} \sinh(\lambda h_1), \\ \mathcal{C} &= (h_2 - h_1). \end{aligned}$$

Le facteur d'intensité de contrainte correspondant au problème proposé est donné par :

$$K_{III}^{(3)} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sqrt{2\pi(1-r)} \tau_{\Theta z}^2(r, h_2), \quad (5.61)$$

D'où, l'expression finale de $K_{III}^{(3)}$ en fonctions des b_n est :

$$K_{III}^{(3)} = \frac{-4\Theta G_2}{3\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad (5.62)$$

Dans la suite, on donne quelques graphes représentant les déplacements et les contraintes correspondants au cas du disque qui adhère dans le demi-espace élastique.

On remarque que le champ de contraintes et du déplacements diminuent en s'éloignant du disque rigide, de même, dans la même région z/h_1 le rapport de rigidité α augmente les contraintes et les déplacements décroissent dans la zone $0 < z < h_1$. Une remarque inverse a été notée dans le cas de demi-espace élastique avec ce rapport.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la même méthode présentée dans le chapitre 4 pour la résolution des équations intégrales duales du problème axisymétrique bicouche. Cette approche diffère des travaux antérieurs ramenant l'étude du problème à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Cette méthode nous a permis aussi de déterminer le champ de contraintes et du déplacement dans les différentes régions en variant le rapport de rigidité G_2/G_1 . Cette démarche nous a donné quelques résultats du problème du Pak [6] qui a été étudié approximativement par la méthode des quadratures.

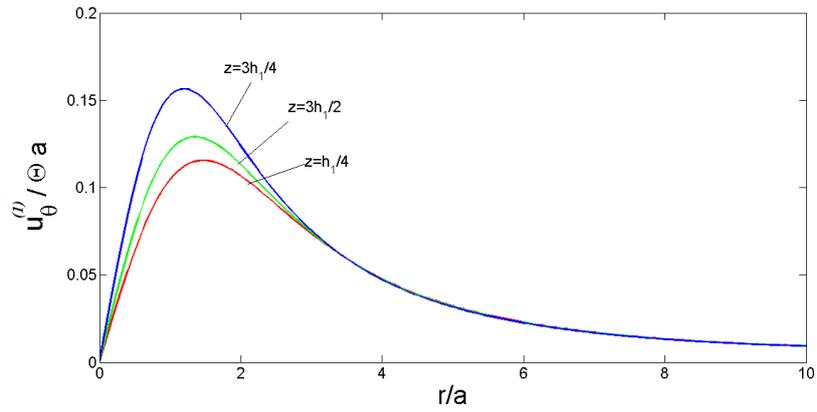


FIGURE 5.23 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 0.1$

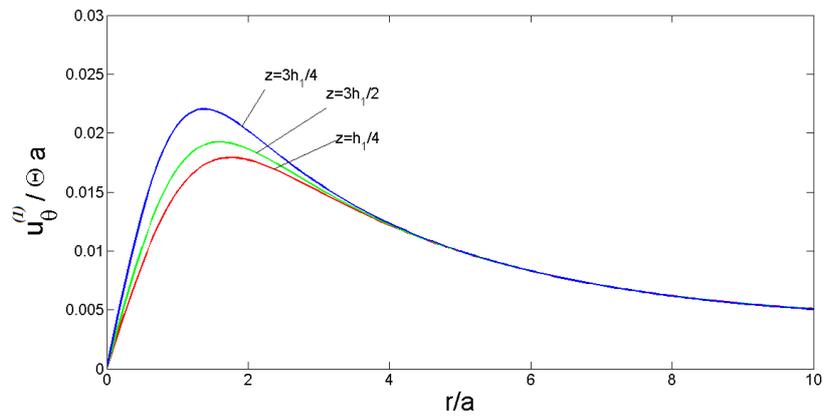


FIGURE 5.24 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 10$

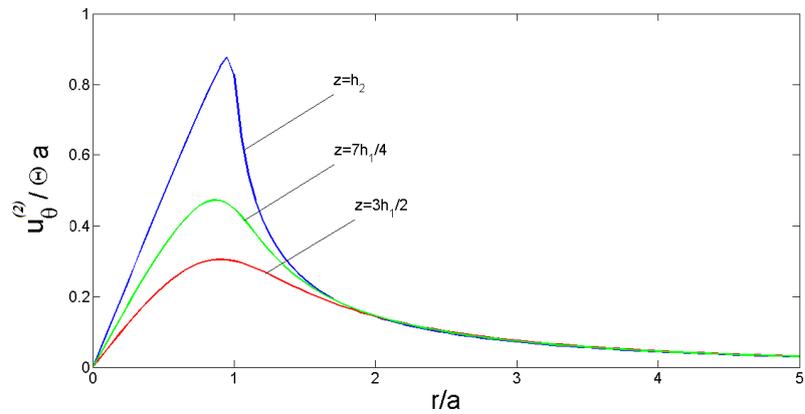


FIGURE 5.25 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 0.1$

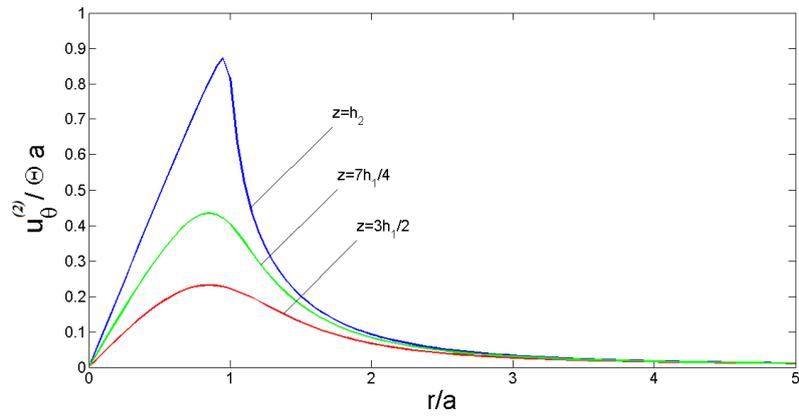


FIGURE 5.26 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 10$

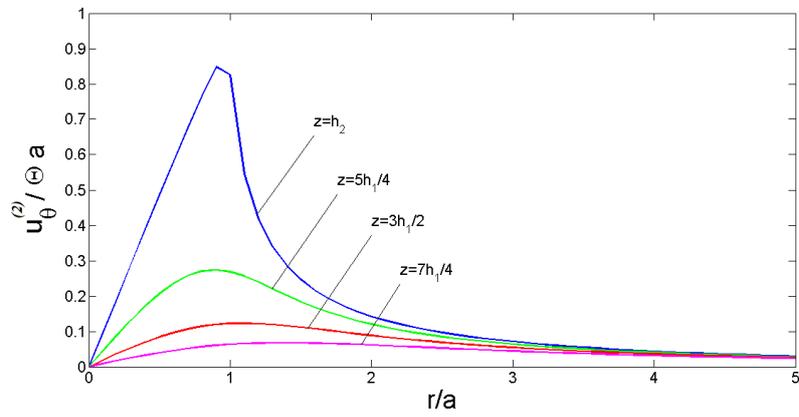


FIGURE 5.27 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 0.1$

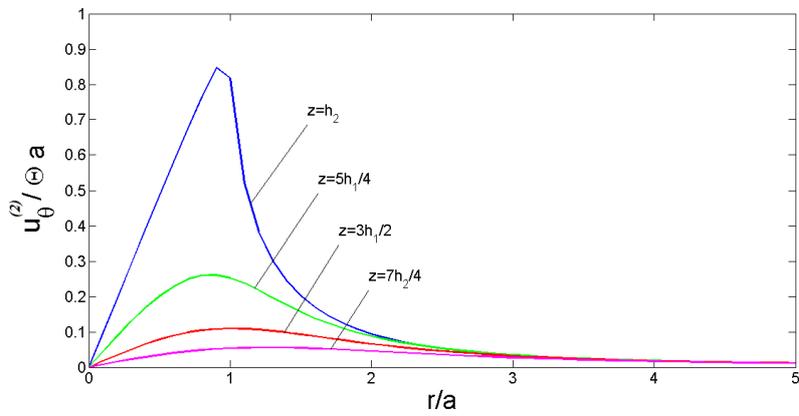


FIGURE 5.28 – Champ de déplacement $u_{\theta}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 10$

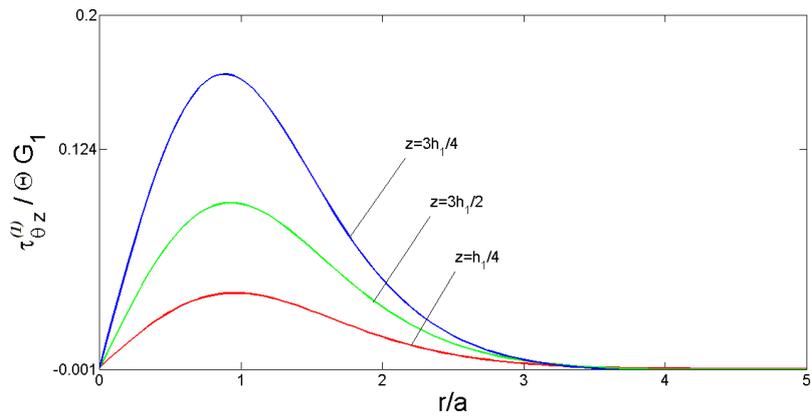


FIGURE 5.29 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 0.1$

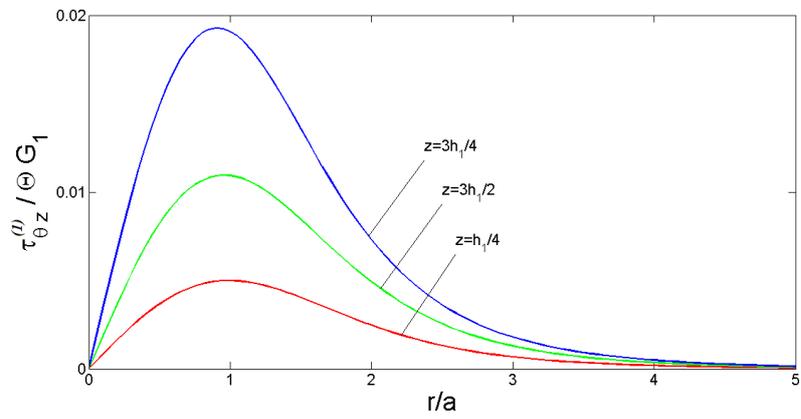


FIGURE 5.30 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(1)}$, $0 < z < h_1$; $\alpha = 10$

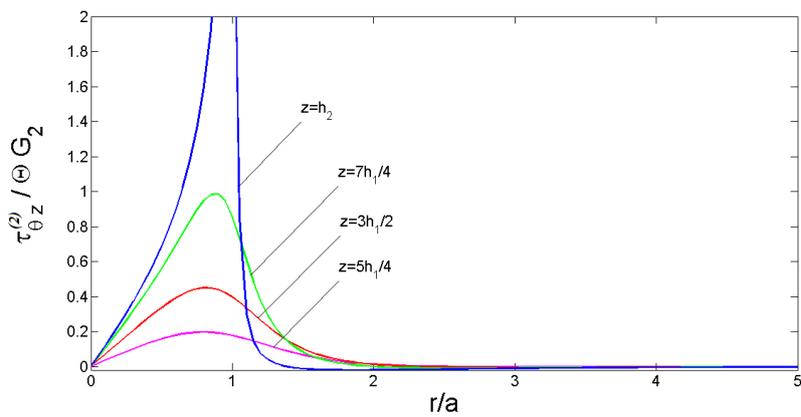


FIGURE 5.31 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 0.1$

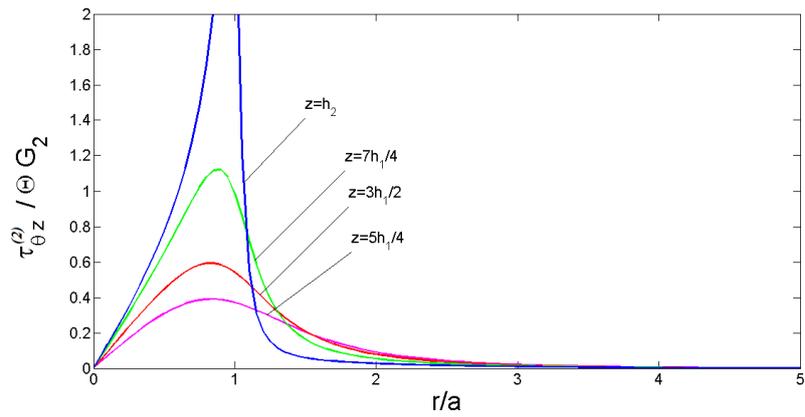


FIGURE 5.32 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h_1 < z < h_2$; $\alpha = 10$

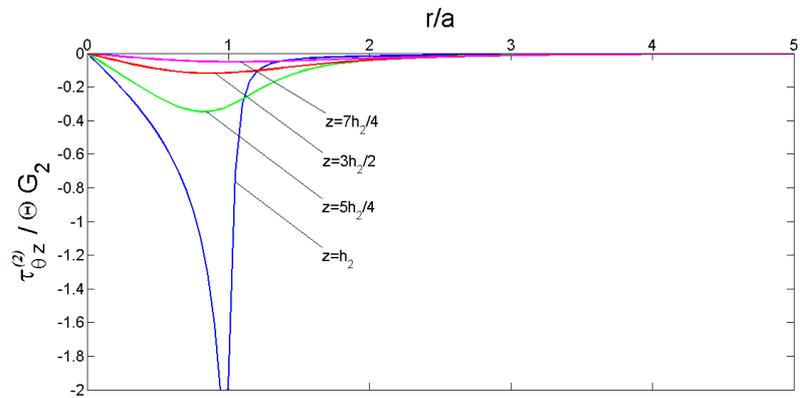


FIGURE 5.33 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 0.1$

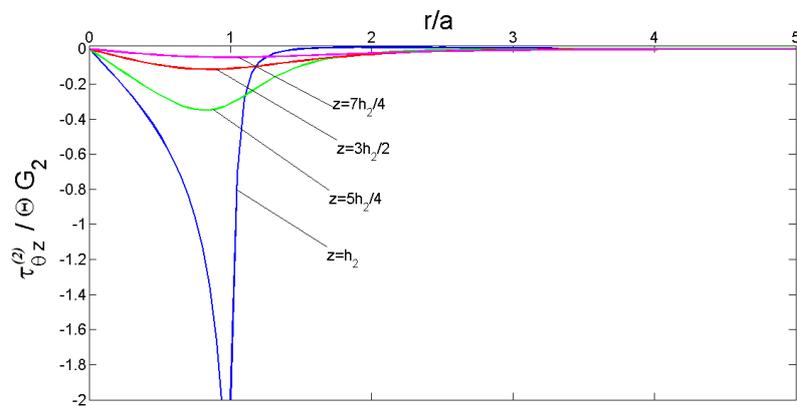


FIGURE 5.34 – Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^{(2)}$, $h_2 < z < \infty$; $\alpha = 10$

Conclusions et perspectives

Nous avons étudié deux problèmes de torsion axisymétrique par un disque rigide adhésif : une couche et un bicouche élastiques.

La transformation de Hankel nous a permis de ramener l'équation d'équilibre du problème qui est une équation différentielle aux dérivées partielles (E.D.P) en une équation différentielle ordinaire (E.D.O) simple dont la solution est transformée à son tour, à l'aide de la transformation de Hankel et son inverse, à la solution globale du problème.

Etant donné le problème aux valeurs limites est mixtes, sa solution, en tenant compte des conditions limites, est définie en deux intervalles ($r \leq a$) et ($r > a$) complémentaires à l'aide de deux équations intégrales appelées équations intégrales duales.

En utilisant des développements en séries des polynômes de Jacobi, les solutions des équations intégrales de Fredholm correspondantes s'obtiennent par la résolution de deux systèmes algébriques infinis.

Les coefficients des systèmes tronqués, respectifs, sont donnés sous forme de suites convergentes pour différentes valeurs des grandeurs physiques des milieux élastiques.

Des remarques sur le travail se résument comme suit :

- Plus le rapport d'épaisseur ($\frac{h}{a}$) est grand plus la convergence des coefficients est rapide. Les déplacements et les contraintes décroissent avec l'augmentation de ce rapport.
- Plus le rapport de rigidité α est grand plus la convergence des coefficients est rapide, dans le cas où le disque adhère dans la première couche élastique, les déplacements radiaux diminuent et les contraintes tangentielles augmentent. Dans le demi-espace sont inversement proportionnels avec ce rapport.
- plus les rapports h_2/h_1 et α augmentent plus la convergence de la suite b_n est devenue rapide.
- Quand l'épaisseur de la couche ($\frac{h}{a}$) devient grande, le facteur d'intensité de contrainte

augmentent puis se stabilise.

- Quand le rapport de rigidité $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$ le facteur d'intensité de contrainte se stabilise à une constante.

Concernant les perspectives des résultats obtenus, nous envisageons d'appliquer l'outil analytique développé dans le mémoire à toute une classe de problèmes. Les problèmes de torsion axisymétrique concernés sont :

1. Déformation d'un milieu élastique par la torsion de deux disques rigides coaxiaux de rayons différents. Ceci généralise le travail de Bacci utilisant la propriété de symétrie ;
2. Torsion axisymétrique de milieux ayant une fissure externe par un disque rigide adhésif dans les cas de l'espace et du demi-espace élastiques ;
3. Résolution des problèmes précédents dans le cas multicouches.

Ces problèmes aux conditions doublement mixtes se ramènent, par la méthode de la transformation intégrale de Hankel, à des systèmes d'équations intégrales duales couplé.

Bibliographie

- [1] H. F. Sagoci. Forced torsion oscillations of an elastic half-space II. *J. Appl. Phys*, 15 :655–662, 1944.
- [2] A. Bacci and S. Bennati. An approximate explicit solution for the local torsion of elastic layer. *Mech Struct Mach*, 12 :226–244, 1962.
- [3] Y. S. Uflyand. Torsion of an elastic layer. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 129 :997–999, 1959.
- [4] A. L. Florence. Two contact problems for an elastic layer. *J. Franklin Inst*, 293 :345–353, 1972.
- [5] A. L. Florence. Two contact problems for an elastic layer. *Quart J Mech Appl Math*, 14 :253–259, 1961.
- [6] R. Y. S. Pak and J. D. M. Saphores. Torsion of a rigid disc in a half-space. *Int. J. Engng. Sci*, 29 :1–12, 1991.
- [7] O. Tamate and T. Saito. On the twisting of two elastic layers bonded to a rigid foundation. *Trans. of the Japan Soc. of Mechanical Engineers*, 341 :33–40, 1975.
- [8] M. E. Erguven. Torsion of two bonded layers by a rigid disk. *Meccanica*, 26 :117–123, 1991.
- [9] G. C. Sih and E. P. Chen. Torsion of a laminar composite debonded over a penny-shaped area. *J. Franklin. Inst*, 293 :251–261, 1971.
- [10] M. Rahman. A note on the polynomial solution of a class of dual integral equations arising in mixed boundary value problems of elasticity. *Z. Angew. Math. Phys*, 46 :107–121, 1995.
- [11] E. Reissner and H. F. Sagoci. Forced torsional oscillations of an elastic half-space I. *J. Appl. Phys*, 15 :652–654, 1944.
- [12] R. E. Kalaba and E. A. Zagusting. Initial value treatment for an elastic layer. *J. Franklin Inst*, 293 :345–353, 1972.

- [13] H. B. Wilson. L. H. Turcotte. D. Halpern. *Advanced mathematics and mechanics applications using matlab*. Chapman, HALL/CRC, 2003.
- [14] F. Bowman. *Introduction to Bessel function*. Doverpublication Inc. 1958.
- [15] Alan. Jeffrey Hui-Hui. Dai. Handbook of mathematical formulas and integrals. *Fourth edition elsevier Inc.*, page 540, 2008.
- [16] A. Nikiforov. V. Ouvarov. *Fonctions spéciales de la physique mathématique*. 340 p., Edition Mir (moscou), 1977.
- [17] W. W. Bell. Special function for scientists and engineers. *second edition*. Oxford University Press, London., page 247, 1968.
- [18] S. Mauch. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. 2001.
- [19] L. Debnath and D. Bhatta. Integral transforms and their applications. *Seventh edition*. Hall/CRC., page 12 :703, 2007.
- [20] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. Tables of integrals, series, and products, seventh edition. *Academic Press, New York*, page 1200, 2007.
- [21] S. Forest. M. Amestoy. S. Cantournet. G. Damamme. S. Kruch. *Mécanique des milieux continus*. Ecole des mines de paris, 2006.
- [22] B. Barthélémy. *Notions pratique de mécanique de la rupture*.Edition Eyrolles. 1980.
- [23] Jean-Claude Charmet. *Mécanique de solide et des matériaux*.Dunod. 2004.
- [24] S. Timoshenko. J.N. Goodier. *Theory of elasticity*. New york toronto london, 1951.
- [25] Michel Amestoy Samuel Forest. *Mécanique des milieux continus*. Cours de l'école des mines de paris, 2005.
- [26] L. M. Milne-Thomson. *Systèmes élastiques palans*. Dunod, 1968.
- [27] R. Labbens. *Introduction à la mécanique de la rupture*.Dunod. 1980.
- [28] W. D. Collins. The forced torsional oscillations of an elastic half-space and an elastic stratum. *Proc Lond Math Soc*, 12 :226–244, 1962.
- [29] D. G. Duffy. Mixed boundary value problems. *Chapman Hall/CRC*, page 688, 2008.
- [30] E. E. Gdoutos. *Fracture Mechanics*. Springer, 2005.
- [31] J. H. Heinbockel. Introduction to tensor calculus and continuum mechanics. page 500, 1996.
- [32] H. Joulak. Quasi-orthogonalité avancées et application. *Thèse de doctorat*. Université des sciences et technologies de lille, pages 2–5, 2007.

- [33] B. Doran M. Ismail T-Y. Lam E. Lutwak. Encyclopedia of mathematics and its applications. *Press syndicate of the university of cambridge.*, 71 :664, 2000.
- [34] M. Maya. Cours de mécanique des milieux continus. *Centre d'enseignement et de recherche de CLUNY*, page 90, 2010.
- [35] James Nearing. *Mathematical tools for physics*. Copyright, 2006.
- [36] V. Parton. P. Perline. *Méthodes de la théorie mathématique de l'élasticité*. 1981.
- [37] C. Constanda. S. Potapenko. *Integral methods in science and engineering*. 2000.
- [38] V. Rektch. *Problèmes de la théorie d'élasticité*.
- [39] Martin. H. Sadd. *Elasticity, theory, applications and numerics*. Elsevier, 2005.
- [40] I. N. Sneddon. Note on a boundary value problem of reissner and sagoci. *J. Appl. Phys*, 18 :130–132, 1947.
- [41] P. Viot. *Méthodes d'analyse numérique. Second Edition*. Dunod. 2003.
- [42] D. Zwilluncer. *Standar mathematical tables and formula*. CRC Press. LLC, 2003.
- [43] I. Mandel. *Cours de mécanique des milieux continus*. Editions Jacques Gabay, paris, 1994.

Chapitre A

Annexes

A.1 quelques propriétés des fonctions gamma et beta

$$\int_0^1 r^{x-1}(1-r)^{y-1}dr = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{A.1})$$

avec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\xi^3}{t^2 - \xi^2} d\xi = \frac{2}{3}t^2 \quad (\text{A.2})$$

calcul de l'intégrale

$$J = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\xi^2 J_1(\lambda\xi)}{t^2 - \xi^2} d\xi \quad (\text{A.3})$$

S'obtient en tenant compte de la formule (6.567.1)[20] donnée par

$$\int_0^1 x^{\nu+1}(1-x)^\mu J_\nu(bx)dx = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1) J_{\nu+\mu+1}(b)}{b^{\mu+1}}, \quad (b > 0, \nu > -1, \mu > -1) \quad (\text{A.4})$$

prenant ensuite $\nu = 1, \mu = \frac{-1}{2}$ la relation A.4 devient

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} J_{\frac{3}{2}}(\lambda\xi) = \frac{1}{b} \left[\frac{\sin(b)}{b} - \cos(b) \right]. \quad (\text{A.5})$$

finalement la relation A.3 nous donne

$$J = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\xi^2 J_1(\lambda\xi)}{t^2 - \xi^2} d\xi = t \sin(\lambda t) \quad (\text{A.6})$$

Le rapport d'orthogonalité des polynômes de Jacobi est donné par [20]

$$\int_0^1 \frac{P_n^{\alpha,\beta}(1-2x^2)P_m^{\alpha,\beta}(1-2x^2)}{2^{-2-\alpha-\beta}x^{-1-2\alpha}(1-x^2)^{-\beta}} dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2n+1)} \delta_{mn}, \quad (\text{A.7})$$

A.2 Méthode de factorisation triangulaire (décomposition LU)

La méthode consiste à décomposer la matrice A en un produit de deux matrices triangulaire L et U . Comme ce la nous permet-il de résoudre le système $A.x = b$, il suffit de remarquer que :

$$A.x = L.U.x = b \quad (\text{A.8})$$

Pour les éléments de L :

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, \quad j < i, \quad i = 1, 2, 3... \quad (\text{A.9})$$

Pour les éléments de U :

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right], \quad i \leq j, \quad j = 1, 2, 3... \quad (\text{A.10})$$

et de poser $U.x = y$. La résolution du système linéaire se fait alors en deux étapes :

$$L.y = b \quad (\text{A.11})$$

$$L.x = y \quad (\text{A.12})$$

qui sont deux systèmes triangulaires. On utilise d'abord une descente triangulaire sur la matrice L pour obtenir y : - $y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$
- pour $i = 2, 3, 4, \dots, n$:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k}{L_{ii}} \quad (\text{A.13})$$

et par suite une remontée triangulaire sur la matrice U pour obtenir la solution recherchée
 x . - $u_{ii} = 1$;
- $x_n = y_n$;

- pour $i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$:

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \quad (\text{A.14})$$

A.3 Quelques formules élémentaires d'intégration numérique

Dans la plupart des cas, les fonctions analytiques, du fait de leurs complexités, ne sont pas intégrables analytiquement. Dans d'autres cas, on a des fonctions qui sont évaluées numériquement en différents points de l'intervalle où ces dernières sont données, et l'intégrale de ces types de fonctions ne peut être obtenue que par des approches numériques. Dans notre étude, on s'intéresse aux méthodes utilisées fréquemment ; à savoir la méthode de Simpson.

Méthode de Simpson

Soit I l'intégrale de $f(x)$ sur l'intervalle $I = [a, b]$ et f continue sur même intervalle.

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{A.15})$$

Par la méthode de Simpson, I s'écrit :

$$I_2, m(f) = \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + 4 \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_m) \right]. \quad (\text{A.16})$$

où, l'erreur de calcul est donnée par

$$E \approx -(b-a) \frac{h^4}{180} \overline{f''''} \quad (\text{A.17})$$

et $\overline{f''''}$ est la moyenne de $f''''(x)$ sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Exemple :

une fonction définie par $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$ sur l'intervalle $[0, 2]$ avec la méthode de Simpson pour $n=2, \dots, n=16$.

Solution :

La liste du programme 'msimp.m' est la suivante :

`clc;`

`clear;`

```

Iexact = 4.006994;
a = 0; b = 2;
n = 1;
fork = 1 : 4
n = 2 * n;
h = (b - a)/n;
i = 1 : n + 1;
x = a + (i - 1) * h;
f = sqrt(1 + exp(x));
I = h/3 * (f(1) + 4 * sum(f(2 : 2 : n)) + f(n + 1));
if n > 2
I = I + h/3 * 2 * sum(f(3 : 2 : n));
end
erreur = abs(Iexact - I)/Iexact;
end

```

A.4 Formulaire d'analyse tensorielle en coordonnées cylindriques

Coordonnées cylindriques

Définition des coordonnées

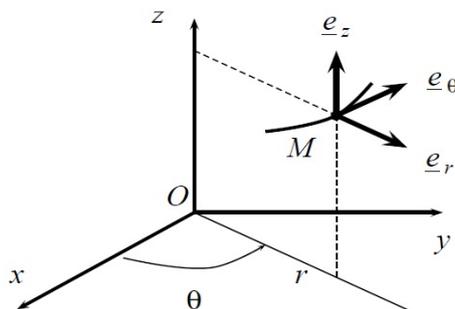


FIGURE A.1 – Coordonnées cylindriques.

$$OM = re_r + ze_z \quad (\text{A.18})$$

$$dM = dre_r + rd\theta e_\theta + dze_z \quad (\text{A.19})$$

$$e_r = \frac{\partial OM}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial OM}{\partial \theta}, \quad e_z = \frac{\partial OM}{\partial z} \quad (\text{A.20})$$

Champ scalaire

champ scalaire

$$U(r, \theta, z) \quad (\text{A.21})$$

gradient

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} e_r + \frac{\partial U}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} e_z \quad (\text{A.22})$$

Laplacien

$$\Delta = \text{div}(\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{A.23})$$

Champ de vecteurs

champ de vecteurs

$$U = u_r(r, \theta, z)e_r + u_\theta(r, \theta, z)e_\theta + u_z(r, \theta, z)e_z \quad (\text{A.24})$$

gradient

$$[\nabla U] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

divergence

$$\text{div}U = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.26})$$

Laplacien

$$\Delta U = \text{div}(\nabla U) = \left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial u_r}{r^2} \right) e_r + \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{r^2} \right) e_\theta + \Delta u_z e_z \quad (\text{A.27})$$