

وزارة التعليم والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE HYDRAULIQUE

THESE DE MAGISTER

Présentée pour l'obtention du titre de MAGISTER

PAR

Melle *Nacima HADJ-RABIA*

Ingénieur d'état en Hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

INTITULEE :

Contribution à l'étude d'un modèle numérique bidimensionnel de transport de sédiments en suspension.

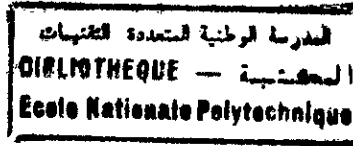
Soutenue le : 06 Juillet 1994
devant le Jury :

MM :

M.K. Berrah	Maitre de conf. à l' ENP (Alger)	Président
S. Mekbel	Docteur	Rapporteur
R. Kahawita	Professeur à l' EPM (Montréal)	Corapporteur
M. Bouhade	Maitre de conf. à l'USTHB (Alger)	Examineur
. Berkani	Maitre de conf. à l'ENP	Examineur
A. Bikek	Chargé de cours à l' ENP	Examineur
. Abdelbaki	DG au LEM (Alger)	Invité

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE HYDRAULIQUE

THESE DE MAGISTER

Présentée pour l'obtention du titre de MAGISTER

PAR

Melle *Nacima HADJ-RABIA*

Ingénieur d'état en Hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

INTITULEE :

Contribution à l'étude d'un modèle numérique bidimensionnel de transport de sédiments en suspension.

Soutenue le : 06 Juillet 1994
devant le Jury :

MM :

M.K. Berrah	Maitre de conf. à l' ENP (Alger)	Président
S. Mekbel	Docteur	Rapporteur
R. Kahawita	Professeur à l' EPM (Montréal)	Corapporteur
M. Bouhadef	Maitre de conf. à l'USTHB (Alger)	Examineur
. Berkani	Maitre de conf. à l'ENP	Examineur
A. Bikek	Chargé de cours à l' ENP	Examineur
. Abdelbaki	DG au LEM (Alger)	Invité

DEDICACE



A ceux qui me sont très chers .
A ceux qui m'ont soutenu et
encouragé durant toutes ces
années .

A ceux avec qui j'ai partagé tant
de peines mais aussi tant de joies.
A mes parents , à mes frères
et mes sœurs , je dédie ce modeste
travail.

REMERCIEMENTS

A toutes celles et à tous ceux
qui m'ont de près ou de loin
apporter leur aide, leur soutien et
leur amitié pour que ce travail
s'accomplisse, malgré les difficultés
et les conditions qui ont prévalu
durant ces dernières années ; je
tiens à leur exprimer en cette
occasion mes meilleurs
remerciements et à leur manifester
ma plus haute considération

Il me serait difficile et aussi

impardonnable d'omettre de préciser que durant ces années, combien laborieuses, j'ai eu la chance fortuite de connaître des personnes qui durant ce parcours ont su par leur présence dévouée, continue et leurs précieux conseils orienter et diriger mon travail ainsi présenté dans ce mémoire. A ces personnes, j'adresse mes meilleurs remerciements et qu'elles trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Pour finir je tiens à remercier l'ensemble des membres du Jury pour avoir bien voulu honorer par leur présence la cérémonie de soutenance.

- AVANT PROPOS -

Depuis la nuit des temps, l'homme a toujours été confronté aux rudes lois de la nature. La peine, le malheur et la douleur ont été souvent le lourd tribut qu'il devait concéder, afin d'assurer sa survie.

Pris dans la tourmente de l'ignorance, il dut, dans la résignation, subir la nature dans toute sa complexité.

Malgré, cela, l'homme fût toujours fasciné par ce qui l'entoure. Sa volonté de survivre l'obligea, guidé par l'instinct et la conservation de l'espèce, à lutter contre ces phénomènes mystérieux dont la nature l'accablait sans répit. Fort de son esprit d'observateur, développé par cette volonté, il comprit que la lutte était vaine et le combat inégal. Pour assurer sa pérennité, il devait au contraire apprivoiser son environnement en essayant de comprendre et d'interpréter chaque phénomène qu'il subissait.

Depuis, la SCIENCE naquit et l'homme célébra alors la RAISON dans toute sa dimension et renia enfin à jamais la SOUMISSION et la FATALITE .

Animé de cet élan et de cet élan libérateur, il alla conquérir le monde puis l'univers. Guidé par la soif du savoir, sortant des ténèbres de l'ignorance, intraitable et sans jamais s'avouer vaincu, il cumula inlassablement victoire sur victoire, arrachant à la nature concession sur concession, pour enfin parvenir à percevoir les premières lueurs de l'INTELLIGENCE .

Dès lors, désormais, d'ennemie qu'elle était la nature devint son amie, mais refusait toujours de livrer tout ces mystères. Chaque secret ne devait être concédé qu'au prix de durs efforts, de travail intense et de recherche ardue.

En vaillant conquérant, il conquiert la Pierre, puis le feu, compris et interpréta plusieurs phénomènes, bâtit et conçut plusieurs théories et fondements qui constituent aujourd'hui les bases et les principes de la

SCIENCE MODERNE .

La voie, étant tracée, la route est longue et parsemée de tant d'obstacles, de déceptions, de regrets, de remords, mais aussi d'infinies satisfactions. Aujourd'hui, plus que jamais, l'homme aspire à être libre et à vivre en parfaite harmonie avec son monde et son univers. Par sa volonté et son audace qui n'ont d'égale que sa témérité, l'homme parviendra peut être un jour, comme cet oiseau migrateur, à s'envoler de ses grandes ailes vers les firmaments de l'infini; pour enfin être libre et recevoir à jamais la consécration et la Grace Divine .

Pour terminer cet "avant propos", je tiens à préciser ici, que le travail que j'ai accompli, à travers ce mémoire , me paraît si modeste devant tant de complexité, de grandeur et de sublimité de notre monde. Cependant, j'en demeure profondément convaincue, qu'il constitue un petit pas de plus vers

LISTE DES SYMBOLES

a	distance au fond relative à une concentration de référence notée C_0
c	celerité $c = \sqrt{gH}$
C	concentration moyenne de la suspension
C_{10}	coefficient lié à la vitesse du vent V_{10}
D	diamètre équivalent du grain
f	paramètre de Coriolis
F_r	nombre de Froude
F_x	force de traînée
F_y	force de portance hydrodynamique
F,G,S	variables conservatives
g	accélération de la pesanteur
h	profondeur moyenne de l'écoulement.
H	Profondeur de l'écoulement. ($H = h + \eta$) avec η : élévation de la surface libre par rapport à la profondeur moyenne.
i,j,n	variables de discretisation
K	constante de Von.Karman
$L(\Delta t)$	opérateur de différences finies
l	longueur de mélange
N	coefficient de Manning
P	poids d'une particule pesée sous l'eau
R	nombre de Reynolds
Re	nombre de Reynolds de chute
R^*	nombre de Reynolds étoilé du grain
R_H	rayon hydraulique
S_d	source de dépôt.
S_{fx}, S_{fy}	pente de la ligne d'énergie selon les directions X et Y
S_{0x}, S_{0y}	pente du fond selon les directions X et Y
t	temps
U_m	vitesse d'écoulement moyennée sur la verticale
u', w'	fluctuation d'écoulement longitudinale et verticale
U_*	vitesse de cisaillement sur le fond
U_*c	vitesse critique de cisaillement sur le fond

u, v	vitesse d'écoulement moyennée sur la profondeur, selon l'axe des X et Y respectivement.
U, V	débit unitaire selon X et Y respectivement.
V_{10}	vitesse du vent à une hauteur de 10m au dessus de la surface libre de l'eau
x, y, z	coordonnées longitudinale, transversale et verticale
X_p	longueur de pénétration de Bognold
Z_f	élévation du fond (côte du fond)
W_c	vitesse de chute des particules solides
$\Delta x, \Delta y, \Delta t$	intervalles de discrétisation (des distances et des temps)
β	rapport de proportionnalité entre ζ_s et ζ_t
ζ_s	diffusivité turbulente des sédiments
ζ_t	viscosité turbulente
μ	viscosité dynamique
ν	viscosité cinématique
ρ	masse volumique de l'eau
ρ_s	masse volumique des sédiments
ρ_v	masse volumique de l'air
τ	contrainte locale ($\tau = \rho g R S$)
τ_t	contrainte de cisaillement turbulent. (de Reynolds)
τ_l	contrainte de cisaillement laminaire
τ_0	contrainte sur le fond
τ_{cr}	contrainte critique de début d'entraînement des sédiments
τ_x^v, τ_y^v	contraintes dues au vent selon les axes X et Y.

TABLES DES MATIERES

<u>Introduction</u>4
PREMIERE PARTIE : Définitions et analyses des mécanismes de transport de sédiments en suspension9
CHAPITRE I - Caractéristiques des sédiments11
I1- Caractéristiques physiques	
I2- Caractéristiques hydrauliques	
CHAPITRE II - Caractéristiques et mécanismes régissant le transport en suspension.16
II1- Roulement, glissement, saltation et suspension	
II2- Début de détachement des particules solide	
II3- Début du transport en suspension en régime turbulent.	
II4- Propriétés de l'écoulement turbulent	
II5- Répartition des concentrations des particules en suspension	
II6- Effets des mouvements des sédiments sur la résistance à l'écoulement	

DEUXIEME PARTIE : MODELISATION ;32
Modèle mathématique bidimensionnel horizontale	
CHAPITRE I - Modèle hydrodynamiques de B. Saint Venant36
I1- Base d'établissement	
I2- Hypothèses et modèle d'étude	
I3- Etablissement des équations	
I4- Conditions initiales et aux frontières	
CHAPITRE II - Modele bidimensionnel44
horizontale de transport en suspension	
II1- Choix du modèle	
II2- Présentation du modèle	
CHAPITRE III - Résolution numérique :48
méthode des différences finies	
III1- Introduction aux différences finies	
III2- Résolution du système hydrodynamique :	
schéma explicite de Mac Cormack	
III3- Résolution de l'équation de transport	
III4- Organigramme de calcul	

TROISIEME PARTIE : Application à un cas réel68

CHAPITRE I - Exemple d'application69

I1- Présentation generale

I2- Caractéristiques physiques et géométriques

I3- Caractéristiques hydrodynamiques

I4- Conditions aux limites :

Schematisation du code numérique

CHAPITRE II - Comparaison des resultats76

II1- Conditions de comparaison

II2- Courbes et resultats

II3- Interprétation et confrontation entre
le modèle établi et le cas simulé

QUATRIEME PARTIE : Conclusion et recommandation ...120

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

Introduction

I- Présentation

Longtemps, déjà, depuis l'antiquité, l'attention de l'homme a été captivée par les fleuves et les rivières. Leur influence sur l'environnement, comme le retrace l'histoire ancienne, suscita un grand intérêt auprès du savant et une grande inspiration auprès du poète. Longtemps il entretiendra un grand mythe à leur égard avant de s'intéresser, bien plus tard, à leur comportement. De leur compréhension d'abord, il évolura ensuite vers leur analyse en élaborant des théories des plus diverses et en mettant en évidence les mécanismes, par l'observation et la simulation, des lois qui régissent ces comportements; qui plus tard recevront l'appellation : " HYDRAULIQUE FLUVIALE ".

Comme nous le constaterons par la suite, cette discipline en fait, ne constitue pas une science exacte, mais un ensemble de concepts explicitant dans une certaine mesure la vie de ces voies fluviales. Cette voie peut être assimilée, à un système dynamique qui adapte sa vitesse, sa pente, ses rugosités et sa géométrie aux exigences que lui imposent l'homme et les contraintes dues aux changements hydrologiques, hydrauliques et géologiques qu'elle subit à travers le temps. Il est établi de nos jours, que les ajustements cités dessus sont dus essentiellement au TRANSPORT HYDRAULIQUE DE SEDIMENTS que nous nous proposons de développer dans le présent mémoire.

En effet, sous certaines conditions, tout écoulement à SURFACE LIBRE de l'eau, à souvent la possibilité de mettre en mouvement certains matériaux.

Pour le chercheur, ce transport hydraulique de FINES PARTICULES, revêt une grande importance vue son incidence dans les domaines les plus variées : climatologie, hydrologie, écologie, sédimentologie et transport solide, environnement, hydraulique et dynamique des écoulements...

II - BUT

Le but essentiel assigné à ce présent mémoire est de contribuer à l'élaboration d'un modèle numérique bidimensionnel, permettant la simulation du comportement de fines particules en suspension supposées peu cohésives.

L'écoulement biphasique liquide - solide considéré, est un écoulement à surface libre NON PERMANENT, GRADUELLEMENT VARIES.

Dans ce contexte nous releverons certains faits qui traduisent la complexité de l'étude portant objet de ce mémoire. En effet l'expérience indique que si l'énergie turbulente est suffisante pour vaincre le champ de pesanteur, alors les fines particules solides, avec des distances entre particules assez grandes, peuvent être mises en mouvement. Ce mode est dit " TRANSPORT EN SUSPENSION ".

Lorsque les dimensions des particules solides deviennent plus importantes, celles ci cheminent sur le fond sous l'action de forces hydrodynamiques. Ce phénomène n'est pas aussi simple en égard à sa complexité; la connaissance incomplète des mécanismes de base qui sont l'érosion, le transport, le dépôt et la consolidation des fines particules solides, demeure à nos jours l'une des causes essentielles de la difficulté de la SIMULATION NUMERIQUE du transport de sédiment et ce malgré le nombre considérable de modèles développés au cours des dix dernières années. C'est pourquoi nous tentons dans la première partie de ce document, de rappeler quelques définitions importantes à la compréhension du phénomène de transport.

Dans la deuxième partie, nous présentons un modèle mathématique représentatif de cet écoulement biphasique liquide-solide, basé sur les équations bidimensionnelles de Saint Venant et une équation de transport-diffusion. Un algorithme en différences finies est développé finalement pour solutionner ce système d'équation.

Le degré de complexité de l'écoulement BIPHASIQUE LIQUIDE-SOLIDE, impose des hypothèses simplificatrices comme il sera précisé plus loin .

LE MODELE MATHEMATIQUE , BIDIMENSIONNEL HORIZONTAL intégré sur la verticale , proposé pour résoudre l'écoulement biphasique, est constitué du modèle hydrodynamique de Saint Venant, et du modèle de transport en suspension traduisant l'évolution dans le temps et dans l'espace de la CONCENTRATION des sédiments .

L'Algorithme pour les besoins de notre étude est à pas fractionnés, basé sur le SCHEMA NUMERIQUE de MAG. GORMACK (différences finies explicitées).

Cet algorithme permettra de solutionner le SYSTEME HYPERBOLIQUE de SAINT.VENANT et déterminer ainsi la répartition, sur la profondeur, des caractéristiques HYDRODYNAMIQUES de l'écoulement. Pour cet écoulement un second algorithme de différences finies est développé pour résoudre le MODELE DE TRANSPORT SOLIDE EN SUSPENSION DE COLES et MILES.

Dans la troisième partie de cette étude nous présentons une application du MODELE NUMERIQUE ci avant, pour SIMULER le transport hydraulique de sédiments dans l'ouvrage hydraulique de Delaney (Canada). LES caractéristiques géométriques et physiques de cet ouvrage sont connues, et les particules solides seront supposées homogènes, non solubles et suffisamment fines de sorte que le mélange liquide-solide puisse être assimilé à un FLUIDE HOMOGENE.

III- Situation des travaux accomplis dans le domaine du transport solide en suspension

Selon la littérature consacré, Dupuit et Du Buat ont guidé la voie de la recherche par leurs travaux dans le domaine de l'hydraulique fluviale, et tentèrent les premiers de résoudre théoriquement le problème de la mise et du maintien en suspension des sédiments (1865); leur théorie est basée sur la différence des vitesses des écoulements, et de chute des particules solides.

Selon Jakuschoff (1932), Bartiot et Lechallas (1871) sont parmi les premiers à expliquer la suspension des particules comme étant causée par des tourbillons et des vortex eux mêmes créés par les contraintes de fond et les fluctuations de vitesses, idée également avancée par Boussinesq (1872), MacMath (1880) et Kennedy (1895).

Gilbert (1914) suggera que le processus de suspension dépend des directions des courants.

H.E.Hurst (1929) et O'Brien (1933) présentent quant à eux l'hypothèse de la turbulence.

Pour la majorité de ces travaux, la turbulence par ses effets est la cause principale du phénomène de transport, mais la difficulté est que son influence ne pouvait être exprimée ni mathématiquement ni physiquement. Il a fallu attendre Schmidt (1925) suivi de Prandtl (1926), pour que les portes de l'étude théorique soient ouvertes.

Cette recherche théorique expérimentale gagna en finesse par l'apparition toute récente des modèles de dispersion; qui supposent que les particules solides sont maintenues en suspension sous l'effet de la turbulence, et que les effets de celles ci sur les particules mêmes sont supposés analogues au procédé de la dispersion-diffusion (équation de diffusion Frank et al 1927).

Il y a lieu de relever que d'autres modèles plus simples ont été présentés sous forme de formules de transport par Du Boys (1879), Vanoni (1946), Meyer Peter et Muller (1948) Shield (1936), Einstein (1950), Einstein et Chien (1955), Engelund et Hansen (1967), Ackers et white (1973), yang (1973), Bridge et Dominic (1984).

Notons aussi qu'un grand nombre de travaux expérimentaux ont été effectués pour analyser le phénomène du transport solide : Newton (1951), Lane et Borland (1954), Brush et Wolman (1960), Suryanarayana (1969), sami et al (1980), Begin et Al (1981) . Sur la base de ces modèles de nombreux schémas numériques et codes de calcul ont été développés afin de résoudre les équations de transports solides. Les premières tentatives de simulation numériques de transport sont celles de Odd et Owen (1972) , Ariathurai et Krone (1974), puis Hayter et Mehta (1982), Coles et Miles (1983), Van Rijn (1984), Thomas et McAnally (1985), Teisson et Latteux (1986), Benqué et Al (1982), Falconer (1986), Kawahara et Umetsu (1986), Rahuel et Al (1989), Alonso et Al (1981), Karim et Al (1987), Lee et Odguard (1986), Lu et Shen (1986), Park et Jain (1987)

Il est important de noter que pour la plupart de ces modèles "cités", l'écoulement est supposé permanent, il est évident que cette hypothèse est bien loin de la réalité.

PREMIERE PARTIE

**DÉFINITIONS ET ANALYSES DES
MÉCANISMES DE TRANSPORT DE SEDIMENTS EN SUSPENSION
(MODÈLE UNIDIMENSIONNEL, ÉTAT PERMANENT)**

PREMIERE PARTIE

SOMMAIRE

CHAPITRE I : Caractéristiques des sédiments

- I1- Caractéristiques physiques .
- I2- Caractéristique hydraulique : vitesse de chute

CHAPITRE II : Caractéristiques et mécanismes régissant le transport en suspension en régime permanent

- II-1- Roulement, glissement, saltation, suspension
- II-2- Début de détachement des particules solides
 - II-2-1- Mécanismes de détachement
 - II-2-2- Approche expérimentale
 - II-2-3- Approche par la probabilité d'EINSTEIN
 - II-2-4- Formule du début d'entraînement à partir du fond
- II-3- Début du transport en suspension en régime turbulent
- II-4- Propriétés de l'écoulement turbulent
 - II-4-1- Définitions régime d'écoulement
 - II-4-2- Contrainte de cisaillement
 - II-4-3- Distribution verticale des vitesses :
formule de Von Karman
- II-5- Répartition des concentrations des particules en suspension
 - II-5-1- Distribution uniforme de la turbulence
 - II-5-2- Distribution non uniforme de la turbulence
- II-6- Effets des mouvements des sédiments sur la résistance à l'écoulement.

CHAPITRE I

I- Caractéristiques des sédiments

Dans ce chapitre, nous allons définir et préciser les caractéristiques physiques et hydrauliques, essentielles, qui permettent de prédire et d'étudier les mouvements des matériaux constituant les sédiments.

Nous considérerons, ici uniquement les caractéristiques les plus utilisées à savoir :

- Les caractéristiques physiques de volume : densité, dimensions, formes
- La caractéristique hydraulique : vitesse de chute.

I-1 Caractéristiques physiques:

I-1-1- Densité

Théoriquement la densité des sédiments est déterminée après analyse des minéraux constituant la particule.

Cependant et comme l'ont montré les expériences, on propose pour notre étude une densité de sable de l'ordre de 2,65.

I-1-2- Dimension et formes

La notion de " dimension des particules solides", étant un élément important qui intervient dans plusieurs paramètres présentant les écoulements biphasiques, liquide-solide; le comité international de sédimentation (1962) a décidé de normaliser la répartition granulométrique des matériaux prélevés dans les cours d'eau, en les regroupant en plusieurs classes granulométriques correspondants à des ouvertures de tamis connues; notons que la plus petite de ces ouvertures correspond à 1/16 mm, ce qui définit la limite des sables et des silts.

Vue l'irrégularité des formes des particules solides et leur diversité, le comité recommande aussi d'utiliser l'un des diamètres suivants :

- . Le diamètre nominal; qui est le diamètre d'une sphère de même volume que la particule solide,

. Le diamètre de sédimentation qui est le diamètre d'une sphère de même densité et de même vitesse de chute en eau calme à 20°C. Cette description étant liée directement au phénomène hydraulique, paraît plus satisfaisante; on la définit comme caractéristique hydraulique.

Notons que l'utilisation de ces diamètres nécessite l'introduction du coefficient de forme (CF) de Mc Nown (1950). Celui-ci dépend des trois dimensions caractéristiques de la particule dans l'espace : d_1, d_2, d_3

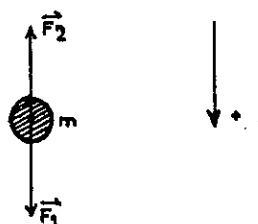
tel que : $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ et $C_F = d_3 / \sqrt{d_1 \cdot d_2}$

I-2- Caractéristique hydraulique : vitesse de chute

La notion de vitesse de chute d'une particule dans un liquide, constitue comme nous le constaterons par la suite, un paramètre important qui permet de caractériser le comportement hydrodynamique de celle-ci.

Pour définir cette notion, nous allons observer cette particule lors de son mouvement de pénétration dans le liquide.

La loi fondamentale de la dynamique appliquée à cette particule de masse m , qui se déplace dans un fluide visqueux sous l'action d'une force F_1 nous permet d'écrire l'équation du mouvement ci après :



\vec{F}_1 : étant la force appliquée sur la particule

\vec{F}_2 : étant la force résistante constituée de la poussée d'Archimède \vec{A} et de la force de frottement \vec{f}_t

m : étant la masse de la particule supposée être une sphère de diamètre D .

\vec{a} : l'accélération du mouvement de la particule sous l'effet de la force \vec{F}_1

donc

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \vec{F}_1 - \vec{A} - \vec{f}_t$$

ou

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 - \left[\frac{\pi D^3}{6} \rho g + Ct \rho g \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{W_L^2}{2g} \right] \quad \text{I.2-1}$$

En supposant la force \vec{F}_1 constante, l'accélération \vec{a} produit un accroissement continu de la vitesse de la particule W_p et un accroissement correspondant de la force de frottement du fluide de sorte qu'à un instant donné le premier membre eq.I.2.1 devienne nul. A ce moment l'accélération \vec{a} est également nulle et il n'y a plus d'augmentation ultérieure de la vitesse puisque le frottement fluide (f_t) et la poussée d'Archimède A sont exactement compensés par la force appliquée à la particule \vec{F}_1 .

A partir de ce moment la particule continue à se déplacer dans la direction de la force \vec{F}_1 avec une vitesse constante (mouvement uniforme) appelée vitesse limite, vitesse finale ou vitesse de chute. Cette vitesse qui est désignée par \vec{W}_s s'écrit

$$W_s = - W_{\text{liquide}}$$

(I.2.1) s'écrit alors,

$$F_1 - \frac{\pi D^3}{6} \rho g - Ct \rho g \frac{\pi D^2}{4} \frac{W_s^2}{2g} = 0$$

Dans le cas d'une force F_1 due seulement à la gravité nous obtenons

$$W_s^2 = \frac{\pi D^3 g (\rho_s - \rho)}{3 \cdot Ct \rho \frac{\pi D^2}{4}}$$

$$W_s^2 = \frac{4 D \cdot g}{3 C_t} \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho} \quad (I-2-2)$$

Le coefficient C_t désigné par coefficient de frottement dépend de la forme, des dimensions de la particule supposée ici comme étant une sphère et du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement :

$$Rw = \frac{W_s \cdot D}{\nu} \quad (I-2-3)$$

A partir des équations (I-2-2 et I-2-3) nous pouvons déduire que :

a) Pour un régime laminaire

$$Rw < 1, C_t = \frac{24}{Rw}$$

Nous obtenons la solution de stocks :

$$W_s^2 = \frac{4 \cdot D \cdot g}{3 \cdot \frac{24}{Rw}} \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho}$$

en utilisant (I-2.3) nous avons

$$W_s^2 = \frac{4 \cdot D \cdot g}{3 \cdot \frac{W_s \cdot D}{\nu}} \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho}$$

$$W_s = \frac{g \cdot D^2}{18 \cdot \nu} \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho} \quad (I-2.4)$$

b) Pour un régime turbulent

$Rw \geq 1000$; $Ct = 0,4$

$$W_s^2 = \frac{4 \cdot D \cdot g}{3 \cdot 0,4} \cdot \frac{(\rho_a - \rho)}{\rho}$$

$$W_s = \sqrt{\frac{10}{3} \cdot D \cdot g \left[\frac{\rho_a - \rho}{\rho} \right]} \quad (12.5)$$

c) Pour le régime de transition entre le cas a et le cas b nous

obtenons avec $Ct = f(Rw)$

$$W_s = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot D}{3 \cdot Ct} \left[\frac{\rho_a - \rho}{\rho} \right]} \quad (12.6)$$

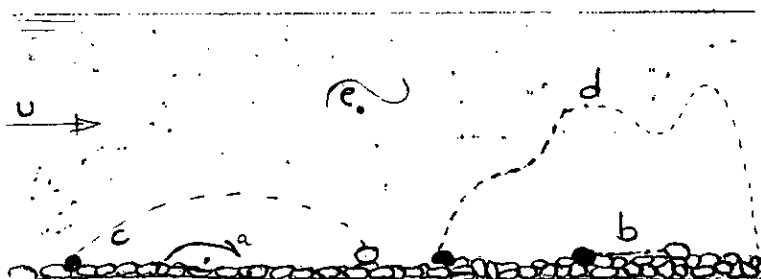
CHAPITRE II

Caractéristiques et mécanismes du transport en suspension en régime permanent turbulent

II-1- Roulement, glissement, saltation, suspension

Le transport de sédiments en suspension, en écoulement naturel ou artificiel, est étroitement lié au régime d'écoulement; au phénomène de la turbulence et à ces effets, aux caractéristiques physiques et hydrauliques des matériaux transportés, à l'évolution des matériaux du fond, aux caractéristiques du canal, et même à la salinité.

Dependant dans une même masse d'un mélange fluide-solide plusieurs phénomènes coexistent : glissement, roulement, saltation, suspension, dépôt et autres ... voir figure ci-après.



- a : roulement d : saltation prise du fluide ambiant
b : glissement e : suspension
c : saltation ou charriage

En ce qui concerne le transport par charriage et le transport par suspension; il est possible de séparer mécaniquement ces deux modes de transport .

En effet :

1) Le transport par CHARRIAGE comprend le GLISSEMENT le ROULAGE et les sauts effectués par les grains qui décollent légèrement du lit pour y retomber un peu plus loin, connu sous le nom de SALTATION .

Le transport par charriage s'effectue dans la zone proche du fond, mettant en jeu des chocs et des frottements entre particules. Le poids de ces particules n'est pas supporté par le fluide.

2) Le transport en SUSPENSION par contre, dominé par la turbulence, est caractérisé par une grande dispersion des particules solides qui sont soumises généralement à la turbulence de l'écoulement et soutenue par le fluide porteur.

Ces deux modes de transport; le transport de fond et celui par suspension sont régis par des phénomènes physiques différents; notre étude étant limité au transport par suspension, nous présentons ci après quelques définitions relatives à la suspension bien qu'en pratique les matériaux transportés étant non homogènes, on observe simultanément les deux modes de transport telque les particules les plus fines sont transportées par suspension et les plus importantes par charriage.

L'influence des phénomènes physico-chimique tels que la tension superficielle, les réactions chimiques, les phénomènes électriques ou électrostatiques, les variations de température... etc, sera supposée négligeable vue la complexité de ces réactions. Nous nous limiterons donc à l'étude des mouvements d'une dispersion de fines particules homogènes assimilables à des particules solides en suspension dans un fluide continue de caractéristiques physiques constantes.

II-2- Début de détachement des particules solides Seuil du mouvement de charriage

II-2-1- Mécanisme de détachement

Le détachement d'un grain dépend de plusieurs paramètres, essentiellement de la position de celui-ci, des caractéristiques de contact entre grain, et du nombre de Reynold, $U * D$

$$R^* = \frac{U * D}{\nu}, \text{ caractérisant}$$

l'écoulement autour du grain.

Soit un écoulement de Direction OX, dans un lit à fond plat, nous schématisons ici (fig II-2-1) une figure bidimensionnelle représentant les deux appuis A et B du grain étudié soumis à la force R, résultante des forces hydrodynamiques (F) et du poids pesé sous l'eau (P) du grain, telque $\vec{R} = \vec{F} + \vec{P}$

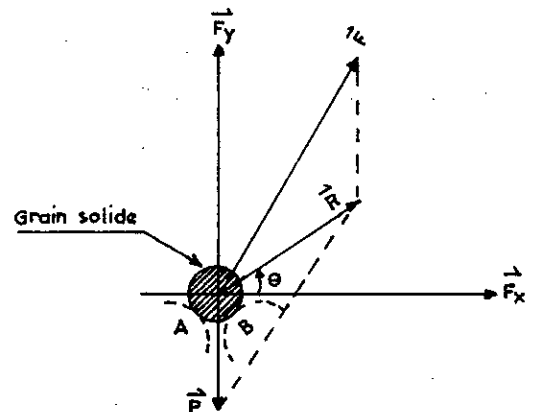


Fig:II.2.1

Selon les valeurs de l'angle θ , le grain peut quitter le lit ou rouler sans se décoller de celui-ci.

En régime turbulent le critère de début d'entraînement est donné par :

$$F_y/P \geq 1$$

P : étant le poids sous l'eau du grain

F_y : force de portance fluctuante sous l'effet de la turbulence, définie comme une fonction aléatoire stationnaire gaussienne par EINSTEIN et EL SAMI.

II-2-2- Approche expérimentale

La notion de seuil de mouvement est née expérimentalement en faisant augmenter progressivement les vitesses d'écoulement fluide sur le lit et en observant le comportement des particules solides à cet instant.

Ces expériences révèlent qu'à faible vitesse aucun grain ne bouge, mais dès qu'une certaine vitesse seuil est dépassée quelques particules commencent à progresser. Pour des vitesses plus importantes quelques grains se déplacent en saltation, et en augmentant encore la vitesse d'écoulement, les sauts effectués par les grains sont de plus en plus importants, et certains d'entre eux quittent complètement le fond du lit pour rester au sein du fluide, ces sédiments sont alors transportés en suspension.

II-2-3- Approche par la probabilité d'Einstein

Vue le caractère aléatoire de l'écoulement perturbateur du à la turbulence, Einstein proposa un seuil de mouvement lié à la probabilité de départ des grains, dans des conditions hydrauliques données, dites conditions critiques correspondant au début de mouvement. La théorie d'Einstein donne plus de rigueur mathématique à cette notion.

II-2-4- Formules du début d'entraînement à partir du fond

Les conditions de début de mouvement à partir du fond peuvent être établies à partir de la vitesse caractéristique du fond (u^* : vitesse de cisaillement ou de frottement) ou encore de la contrainte critique (τ_{cr}) au fond, établie après essais au laboratoire telque :

Pour des lits à fond plat et matériau homogène à granulométrie uniforme (forme sphérique) Shield (1936) exprime la contrainte tangentielle (τ_{cr}) au fond par :

$$\tau_{cr} = (\rho_s - \rho) g D f(R_*^*) \quad (\text{II-2-4-1})$$

où f est une fonction décrite sur la courbe de Shield. Notons que pour des écoulements à très forte pente (Froude > 1), et pour des tirants d'eau $H < 100 D$, le critère de Shield ne convient plus.

Pour des matériaux hétérogènes

Meyer - Peter et Muller (1948); proposent

$$\tau_{cr} = 0,047 (\rho_s - \rho) g \cdot D_{50} \quad \text{pour } 2KR_* < 500 \quad (\text{II-2-4-2})$$

$$R_* = \frac{U_* \cdot D}{\nu}$$

rem : on définit par D_{50} ; la valeur du diamètre D_i de la courbe granulométrique $P_i = 50$, tel que 50% de matériaux aient un diamètre inférieur à D_{50} .

Il est important de préciser que la formule (II-2-4-2), a été établie en régime permanent uniforme, pour un transport à granulométrie moyenne (0,4 à 30) mm en canal de forme géométrique régulière.

Il est clair que ces conditions ne se présenteront rarement. Mais faute de mieux. Cette formule est souvent extrapolée à d'autres conditions.

II-3- Début du transport en suspension

Le début de transport des particules en suspension est un problème plus complexe que celui relatif au charriage, car il est nécessaire ici de se baser sur la théorie de la turbulence élémentaire de la suspension.

L'analyse de cette théorie montre le caractère aléatoire du mouvement des grains, essentiellement des forces hydrodynamiques, de la forme des grains, de leurs positions dans l'écoulement et de leurs positions relatives les uns par rapport aux autres.

Alquier (1977) conçoit donc que les critères de début de transport en suspension ne peuvent être que des critères établis expérimentalement, ne pouvant représenter que des valeurs moyennées.

Bagnold (1966) et Engelund (1965), en se basant sur des résultats expérimentaux et sur des considérations théoriques proposent des critères pour représenter le mouvement de la suspension en comparant la vitesse de frottement U_* à la vitesse de chute des particules solides.

Bagnold (1954), indique que les particules solides ne peuvent être suspendues ou resuspendues que si l'intensité verticale de la turbulence au voisinage du fond, qui est de l'ordre de U_* , dépasse la vitesse de chute W_s , soit alors : $U_* / W_s \geq 1$.

D'autres formules proposées par la littérature comparent la vitesse moyenne critique à la vitesse de chute des particules; mais Murphy

(1982) montre que $\frac{U_*}{W_s} \approx 1$

n'est pas suffisante pour affirmer que les particules solides quittent le fond pour rejoindre la suspension et donc propose les deux conditions dépendantes suivantes :

- . La vitesse horizontale de la particule solide (U_p) doit être égale à la vitesse horizontale des particules fluide (U_F)
soit : $U_p = U_F$.

- . La vitesse verticale de la particule solide (W_p), doit être égale à la vitesse de chute (W_s), soit : $W_p = W_s$

Par ailleurs, l'auteur indique que pour des valeurs du rapport U_* / W_s , dépassant largement l'unité, ces deux conditions sont vérifiées et la particule rejoint la suspension.

- . Pour calculer la vitesse de frottement (U_*), Rijn (1984) donne la formule expérimentale (laboratoires de Delft) :

$$U_* = 4 \frac{W_s}{D_{gr}} \quad \text{pour } 1 < D_{gr} \leq 10$$

$$U_* = 0,4 W_s \quad \text{pour } D_{gr} > 10$$

avec : $D_{gr} = D \sqrt[3]{\frac{g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}{\nu^2}}$

II-4- Propriétés de l'écoulement turbulent

II-4-1- Définitions des régimes d'écoulement

Les écoulements à surface libre sont caractérisés par cette surface libre de forme variable, en contact avec l'air et soumise généralement à la pression atmosphérique. Le régime de ces écoulements est défini

par un nombre adimensionnel dit nombre de Froude.

Par définition le nombre de froude représente le rapport de la vitesse moyenne du courant (u) à la vitesse de propagation $\left[\sqrt{g H} \right]$ onde superficielle infiniment petite le long du courant considéré

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g H}}$$

Si $\sqrt{g H} < u$, les ondes superficielles ne peuvent remonter vers l'amont, le régime d'écoulement est dit alors torrentiel ou supercritique et $Fr > 1$.

Si par contre $u < \sqrt{g H}$, les ondes superficielles remontent vers l'amont, le régime d'écoulement est dit fluvial ou infracritique et $Fr < 1$.

Le transport de sédiments en suspension est étroitement lié à la turbulence qui, elle, est caractérisée par une superposition de composantes moyennes et oscillatoires fluctuantes, comme cela a été démontré expérimentalement par Hagen (1797 - 1884) et Prandtl (1875 - 1953)..

Dans le cas du mécanisme du transport en suspension deux caractéristiques, essentielles peuvent intervenir : la contrainte de cisaillement et la distribution des vitesses.

II-4-2- Contrainte de cisaillement

Pour un écoulement bidimensionnel vertical à surface libre, l'équation de base des contraintes de cisaillement, est la résultante des contraintes laminaires dues à la viscosité dynamique (τ) et des contraintes de Reynolds dues aux fluctuations turbulentes (τ); telle que :

$$\tau_t = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{II-4-2-1})$$

$$\tau_t = -\rho u W \quad (\text{II-4-2-2})$$

Dans ce qui suit nous admettons que les contraintes de viscosité dynamique sont masquées par les contraintes générées par la turbulence. Par ailleurs en théorie de turbulence, on s'efforce de rechercher des lois qui permettent d'exprimer les tensions de Reynolds en fonction des caractéristiques du mouvement moyen. Adoptons pour cela, l'approche de Boussinesq qui permet d'écrire :

$$\overline{u W} = -\zeta_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{II-4-2-3})$$

$$\text{d'où } \tau_t = \rho \zeta_t \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{II-4-2-4})$$

et l'hypothèse de Prandtl (1875 - 1953) qui exprime cette

$$\text{contrainte par la relation } \tau_t = \rho l^2 \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \quad (\text{II-4-2-6})$$

Prandtl et ses collaborateurs définissent une longueur verticale "l" pendant, laquelle les caractéristiques de la turbulence sont conservées. Cette longueur dite longueur de mélange s'exprime en fonction de sa position sur la verticale telque :

.Près du fond la longueur de mélange est supposé proportionnelle à la distance du fond:

$$l = KZ \quad (\text{II-4-2-7})$$

.au dessus du fond, elle est donnée par l'expression :

$$l = KZ \sqrt{1 - \frac{Z}{H}} \quad (\text{II-4-2-8})$$

avec K : constante de karman

rem : les contraintes sont supposées nulles à la surface libre.

A partir des équations (II-4-2-6) et (II-4-2-7) et (II-4-2-8), nous déterminons la distribution des contraintes turbulentes :

a. Près du fond :

$$\tau_t = \rho K^2 Z^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (\text{II-4-2-7}) \text{ Bis}$$

à la limite du fond $\tau = \tau_0$

d. au dessus du fond :

$$\tau_t = \rho K^2 Z^2 \left(1 - \frac{Z}{H} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \quad (\text{II-4-2-8}) \text{ Bis}$$

II-4-3- Distribution verticale des vitesses

La répartition verticale des vitesses est déterminée après intégration des expressions ci-dessus, soit :

a/pres du fond:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sqrt{\tau_t / \rho}}{K} = \frac{1}{Z}$$

$\tau_t = \tau_0$ avec τ_0 : force tractrice unitaire, qui à l'état d'équilibre vaut $\tau_0 = \rho g R H J$.

d'où :

$u = \frac{u_*}{K} \ln Z + C'$	(II-4-3-1)
--------------------------------	------------

et $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$; u_* : vitesse de frottement au fond

C' : constante d'intégration

L'éq (II-4-1) obtenu est dite "loi universelle de Von Karman" de la distribution des vitesses appliquée aux canaux découverts en écoulement turbulent.

b/ au dessus du fond

- L'eq (II-4-2-8) bis permet d'écrire :

$$du = \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{K} \left(\frac{H}{H-Z} \right)^{1/2} \frac{1}{Z} dz$$

$$u = \int_a^H \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{K} \left(\frac{H}{H-Z} \right)^{1/2} \frac{1}{Z} dz \quad (\text{II-4-3-2})$$

II-5- Répartition des concentrations des particules en suspension

II-5-1- Distribution uniforme de la turbulence

Les particules solides en suspension dans un écoulement uniforme turbulent, sont entraînées et maintenues en suspension par l'effet combiné de la turbulence et de ses effets, dans ces conditions, et en présence du phénomène de brassage qui tend à homogénéiser la concentration des particules solides, équivalant à un mouvement vertical ascendant de celles ci, le taux volumique de sédiments transféré par unité de surface serait alors :

$$\zeta_s \frac{dc}{dz} \quad (\text{II-5-1-1})$$

C , étant la concentration volumique moyenne locale des sédiments.

ζ_s : coefficient de mélange déterminé expérimentalement.

En état d'équilibre de ces particules en suspension, et pour de faible concentration, ce taux de sédiments sera égale au taux volumique :

(CW_s) , d'où l'équation d'équilibre de la suspension :

$$CW_s + \zeta_s \frac{dc}{dz} = 0 \quad (\text{II-5-1-2})$$

Cette équation différentielle, traduit l'équilibre moyen du flux massique ascendant dû à la turbulence, au flux massique descendant dû à la gravité. Elle a été introduite par Schmidt (1925), à partir d'une étude de transport de fines particules dans l'air. L'intégration de cette équation permet de déterminer la distribution verticale de la concentration relative :

$$\frac{c}{C_a} = e^{-\int_a^z \frac{W_s}{\zeta_s} dz} \quad (\text{II-5-1-3})$$

avec (C_a) concentration de référence à la distance (a) au dessus du lit (généralement on admet $a = 2D$)

pour ζ_s supposé constante; $\frac{c}{C_a} = e^{-\frac{W_s}{\zeta_s}(z-a)} \quad (\text{II-5-1-4})$

La solution de cette équation dépend donc de la distribution du coefficient de mélange ζ_s ; celle-ci a été supposée parabolique par Rouse (1937), linéaire près du fond et constante ailleurs par Coleman (1969), triangulaire par Bhathacharya (1971), et récemment comme une combinaison d'une distribution parabolique et constante par Van Rijn (1987).

Toutefois, pour des raisons pratiques, il a été admis d'écrire l'égalité : $\zeta_s = \beta \zeta_t$ (II-5-1-4)

Pour déterminer la valeur de β facteur descriptif de la différence entre les deux coefficients, plusieurs travaux de recherches ont été effectués : Carsten (1952), à travers des analyses et mesures du mouvement d'oscillation d'une particule solide sphérique dans le fluide obtient :

$\beta \leq 1$ pour l'ensemble de ces expériences. Carsten présente alors une expression mathématique pour l'évaluation de " β " et propose pour des conditions pratiques (avec l'hypothèse $W_s = \text{cte}$) l'expression suivante:

- . Pour de fines particules solides : $\beta \approx 1$ donc $\zeta_s = \zeta_t$
- . Pour des particules grossiers : $\beta < 1$ donc $\zeta_s < \zeta_t$

Tchen (1947) définit le rapport des deux coefficients par le terme de "glissement", et montre que celui-ci dépend des masses volumiques des deux phases solide et liquide, ainsi que des dimensions des particules solides et de la fréquence des oscillations, ce glissement, étant voisin de l'unité ($\beta = 1$).

D'autres travaux expérimentaux, conduits par Brush et Al (1962), Matyukhin et Al (1966) et Majumdar et Al (1967) arrivent à la même conclusion; $\beta = 1$.

Des travaux de recherches menés aujourd'hui, tentent de trouver la meilleure approche à ce facteur, les travaux les plus récents sont ceux effectués par Motohiko Umeyama (1992) ceux-ci proposent: $1,05 \ll \beta \leq 1,30$ et concluent que la valeur du coefficient descripteur augmente avec l'augmentation, d'une part de la longueur du mélange (l), et d'autre part de la charge de sédiments près du fond du lit.

Souvent les fines particules en suspension sont supposées suivre le mouvement des particules fluides; $\beta = 1$

c.à.d l'égalité des coefficients de turbulence et de mélange, ceci nous mène à définir le concept de pénétration de Bagnold (1951) comme suit : La pénétration du sédiment dans le fluide exprime l'interaction existante entre le grain et le fluide, entre autre leur différence de vitesse.

Une longueur de pénétration notée (X_p), souvent comparée à la longueur de mélange (l), mesure la pénétration du grain dans l'écoulement tel que si le rapport (X_p/l) est faible alors le mouvement de turbulence a amplement le temps et l'espace pour amener le grain sous son contrôle, et ainsi le maintenir en suspension; mais dès que le rapport (X_p/l) devient important, le mouvement turbulent n'est plus assez long pour influencer le mouvement des sédiments.

II-5-2- Distribution non uniforme de la turbulence

En supposant une bonne pénétration des particules solides dans le fluide transporteur, l'hypothèse d'égalité des coefficients appliquée aux équations de Prandtl-Karman, la turbulence étant supposée non uniforme, l'éq (II-4-2-4) avec $\zeta_t = \zeta_*$, permet d'écrire

$$\zeta_0 = - \frac{\tau_0 / \rho}{dU/dz}$$

en adjoignant la distribution de contrainte obtenue par la combinaison des équations (II-4-2-7 bis) et (II-4-2-8 bis)

$$\tau_t = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (\text{II-5-2-1})$$

avec une distribution logarithmique des vitesses on obtient :

$$\frac{du}{dz} = \frac{\sqrt{\tau_0 / \rho}}{K} \frac{1}{z} \left(\frac{H}{H-z} \right)^{1/2} \quad (\text{II-5-2-2})$$

$$\zeta_0 = Kz \sqrt{\tau_0 / \rho} \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (\text{II-5-2-3})$$

Alors dans ces conditions l'équation de distribution de la concentration relative (II-5-1-3) sera après intégration :

$$\frac{C(z)}{C_0} = \left[\frac{H-z}{z} \frac{a}{H-a} \right]^A \quad (\text{II-5-2-4})$$

avec $A = \frac{U_0}{Ku_*}$ (dit paramètre de suspension)

et $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$

Le calcul de la concentration $c(z)$ permet d'évaluer le taux de transport de sédiment par suspension en poids par unité de temps et de largeur par l'expression :

$$q_s = \int_0^H c(z) \cdot u(z) \cdot dz \quad (II-5-2-5)$$

Zeller (1969) démontre que même la distribution d'une suspension d'argile peut être donnée par cette équation (II-5-2-4), Christiansen (1935) analyse l'écoulement des rivières pour comparer les résultats expérimentaux et ceux théoriques (Colorado et le Nil). En générale il trouve une bonne concordance en adoptant quelques hypothèses simplificatrices.

L'équation (II-5-2-4) paraît être applicable pour toute fraction de taille de sédiment: de l'argile au sable grossier : Anderson (1942), Lane et Al (1941) pour le Mississippi, Vanoni (1953) et Harrison (1963) pour le Missouri, Colby et Al (1955) pour le Niobrara, Nordin et Al (1963) pour le Rio grande.

Notons que le paramètre de la suspension $A = w_s/K \sqrt{\tau_0/\rho}$ peut être différent de cette expression, celle ci étant obtenue avec l'hypothèse d'une diffusivité égale ($\zeta_s = \zeta_v$) plutôt que proportionnelle.

Ippen (1934) critique l'équation (II-5-2-4), en constatant que celle ci donnait une concentration infinie au fond, et nulle à la surface libre. Ippen substitut la distribution des vitesses donnée par Von Karman par celle de Krey, et obtient ainsi une équation donnant une concentration finie au fond, et nulle à la surface libre.

La critique de Ippen a incité plusieurs chercheurs à se pencher sur certains points pouvant influencer ce résultat, tels que :

- la vitesse de chute et l'influence de la turbulence.
- l'effet de la température
- la variation du coefficient de mélange des sédiments (ζ_s), et sa relation avec la répartition des vitesses fluides considérées.
- la limite de validité de l'égalité ($\zeta_s = \zeta_v$)
- la variation du coefficient de Prandtl (K)
- la validité de l'équation de Schmidt

II-6- Effet du mouvement des sédiments sur la résistance à l'écoulement

Le maintien des particules solides en suspension dans l'écoulement provoque une dissipation d'énergie traduite par une réduction de la turbulence de l'écoulement, de sa viscosité turbulente, de la constante de Von Karman (K), et ainsi de la résistance à l'écoulement d'où un écoulement plus rapide, à condition que ce transport ne provoque pas de formation de ride sur le fond.

La variation de la constante universelle de Von Karman, qui prend une valeur $K = 0,4$ en eau claire non chargée et tend à l'abaissement ($K < 0,4$) en présence de sédiments, a été à l'origine de plusieurs travaux de recherches expérimentales :

Vanoni (1941-1964) et Einstein et Al (1954) déduisent que la réduction de cette constante en présence de sédiments signifie que le mélange est moins effectif.

Selon la théorie de Hino, la présence de fines particules de même densité que le fluide en écoulement turbulent, diminue la constante de Von Karman et augmente l'intensité de la turbulence avec l'augmentation de la concentration.

Cette théorie n'est plus valable pour des particules plus denses pour lesquelles il est constaté une faible réduction de l'intensité de la turbulence.

D'autres effets dus à la présence des sédiments, à savoir la densité et la distribution non uniforme de la concentration, provoquent quant à eux l'apparition des courants secondaires, dont l'origine cause ou résultat de la suspension reste une question non résolue pour certains auteurs ; Selon Vanoni c'est la première hypothèse qui serait vraie ; où une concentration même très légère suffit pour déformer le diagramme de la distribution des vitesses sur la totalité de la section du canal expérimental ; distribution qui aurait été symétrique dans un écoulement d'eau claire, dans d'autres cas la suspension a un effet de stabilisation qui transforme un diagramme distordu en une courbe uniforme et régulière. Vanoni déduit de ces résultats que les circulations transversales de ces expériences sont dues à l'augmentation de la densité des filets d'eau chargés de sable qui, étant plus lourds que le reste du courant, tendent à s'enfoncer, ce qui crée des composantes

verticales descendantes des vitesses, en même temps l'eau moins chargée et par conséquent plus légère a tendance à s'élever à la surface. Il en résulte probablement un certain nombre de courant hélicoïdaux secondaire dont la répartition dépend de la forme de périmètre mouillé et de la charge en sable.

DEUXIÈME PARTIE

MODÈLE MATHÉMATIQUE BIDIMENSIONNEL
HORIZONTAL
(ÉTAT NON PERMANENT)

DEUXIEME PARTIE

INTRODUCTION A LA SIMULATION

CHAPITRE I : MODELE HYDRODYNAMIQUE DE BARRE DE SAINT VENANT

- I1- Bases d'établissement
- I2- Hypotheses
- I3- Etablissement des équations du modele
- I4- Conditions initiales et conditions aux frontieres

CHAPITRE II : MODELE BIDIMENSIONNEL HORIZONTALE DE TRANSPORT DE SEDIMENTS EN SUSPENSION.

- II1- Choix du modele
- II2- Integration sur la verticale dans le cas d'un transport de sediments en suspension en ecoulement à surface libre.

CHAPITRE III : RESOLUTION NUMERIQUE "méthode des différences finies"

- III1- Introduction aux différences finies
- III2- Résolution du système hydrodynamique : schéma explicite de Mac Cormack.
- III3- Résolution de l'équation de transport : schéma explicite.
- III4- Organigramme de calcul.

I- Introduction à la simulation

Devant la complexité, des mécanismes et concepts, regissant l'hydraulique fluviale, il s'avère difficile et parfois voire impossible de déterminer directement les caractéristiques hydrodynamiques des différents types d'écoulements sans avoir recours à la technique de simulation soit par un modèle physique, soit par un modèle mathématique.

Jusqu'à récemment la simulation, d'un écoulement, par l'intermédiaire d'un modèle physique a constitué une technique d'approche assez efficace et souvent utilisée et ce a en juger par les résultats obtenus dans différents cas d'application.

Toutefois, de part les moyens importants qu'exige cette simulation dans sa mise en oeuvre, celle-ci génère parfois de coûts élevés et induit des hésitations sur son option auprès de l'utilisateur potentiel.

Cette contrainte (coûts) a permis, en encourageant la recherche portant sur d'autres possibilités, de mettre en évidence l'alternative utilisant les modèles mathématiques.

En effet, en partant des constatations établies à partir de la simulation par modèle physique à savoir, 'que le champ des vitesses et le process de melange constituent des facteurs essentiels influençant l'écoulement de l'eau dans un système donné', on commença alors à s'intéresser de pres à cette nouvelle alternative.

Ces modèles mathématiques "équations" traduisant la variation des vitesses d'un écoulement en fonction des différentes variables, mises en jeu dans un système donné, n'ont pu connaître un grand essor et une large utilisation que lorsque des moyens de calcul puissants ont fait leur apparition en l'occurrence les ordinateurs.

En conclusion, nous noterons qu'à la différence des modèles physiques, les modèles mathématiques, numériques constituent un moyen moderne de simulation relativement peu coûteux, flexible et rapide qui permet de traiter des problèmes pratiques impossibles à aborder par le calcul manuel.

CHAPITRE I

I- Modele hydrodynamique de Saint Venant

I1- Bases d'établissement

Pour nous permettre de déterminer, les champs de vitesses et de profondeur en tout point du domaine physique étudié lors d'un écoulement, non permanent, en eau peu profonde, sur fond fixe et véhiculant de fines particules solides, nous allons développer ci-apres un model hydrodynamique qui nous permettra de simuler le phénomène que nous nous proposons d'étudier dans ce mémoire. (voir figure I.2.1).

ce modèle hydrodynamique bidimensionnel est déterminé à partir du modèle mathématique régissant les écoulements à surface libre non permanent, qui lui même découle des principes fondamentaux de la mécanique à savoir le principe de conservation de la masse et de la conservation de quantité de mouvement

Les équations obtenues constituent une généralisation des équations différentielles de l'écoulement non permanent graduellement varié de Saint Venant avec deux dimensions " spatiales " (voir annexe), rappelons que les équations hyperboliques de Saint Venant (en eau peu profonde); proviennent de l'integration sur la profondeur de l'équation tridimensionnelles de Navier Stock, ceci avec l'hypothese d'une distribution hydrostatique de la pression.

le modele hydrodynamique présenté ci-après, tient compte;

- des effets dus à la resistance de l'écoulement, qui seront introduit par l'utilisation des formules empiriques décrivant les contraintes de frottement avec les parois solides tel que le fond du lit de la rivière.

- des diffusivités turbulentes (ζ_x, ζ_y) données par des fonctions variables dépendantes des champs de vitesses et de profondeur et d'autres paramètres dynamiques de l'écoulement.

notons que la majorité des travaux de recherches relatifs au transport en suspension considère une diffusivite constante.

- de la force de coriolis; (F_c) parametre de Coriolis due à la rotation de la terre.

- des effets du vent sur la surface libre de l'écoulement.

τ : contrainte de surface due au vent.

12. Hypothese et modèle d'étude

Les hypothèses adoptées et qui sont appliquées aux équations de conservation de masse et de quantité de mouvement (voir annexe) sont :

1. répartition uniforme des vitesses c.à.d que chaque vitesse calculée représente une vitesse moyennée sur la verticale (sur une colonne d'eau).

2. répartition hydrostatique des pressions.

3. écoulement à faible courbure (variation très progressive de la géométrie de la rivière (Conséquence de 1 et 2 ci dessus)).

4. faible pente (géométrique) du fond. ($\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$ et $\cos \alpha \approx 1$)

5. écoulement à surface libre, dans des cours d'eau très long, très large mais à faible profondeur.

cette hypothese permet d'ecrire $R_H \approx H$ par définition,

$$R_H = \frac{\text{surface mouille}}{\text{périmètre mouille}}$$

6. la géométrie (solide) du cour d'eau est invariable dans le temps.

7. les effets de frottement sur les parois ainsi que ceux de la turbulence sont représentés globalement par les formules de résistance relatives aux écoulements permanents, tels que

$$\tau = \rho g R_H J.$$

$$J = S_f$$

8. l'écoulement considéré est supposé homogène et incompressible.

9. Le milieu est adiabatique c.à.d sans échange de chaleur avec le milieu extérieur.

10. les forces extérieures appliquées au volume de contrôle étudié ayant permis de déterminer le système ci après sont les forces de :

- . Pression
- . Gravite.
- . Resistances dues aux frottements

MODELE D'ETUDE

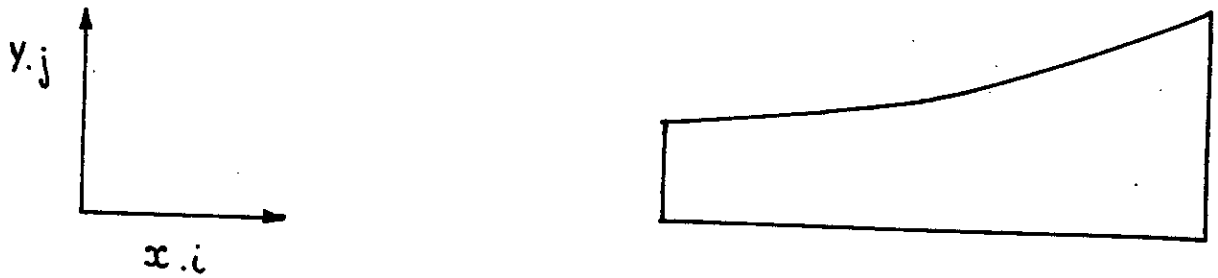
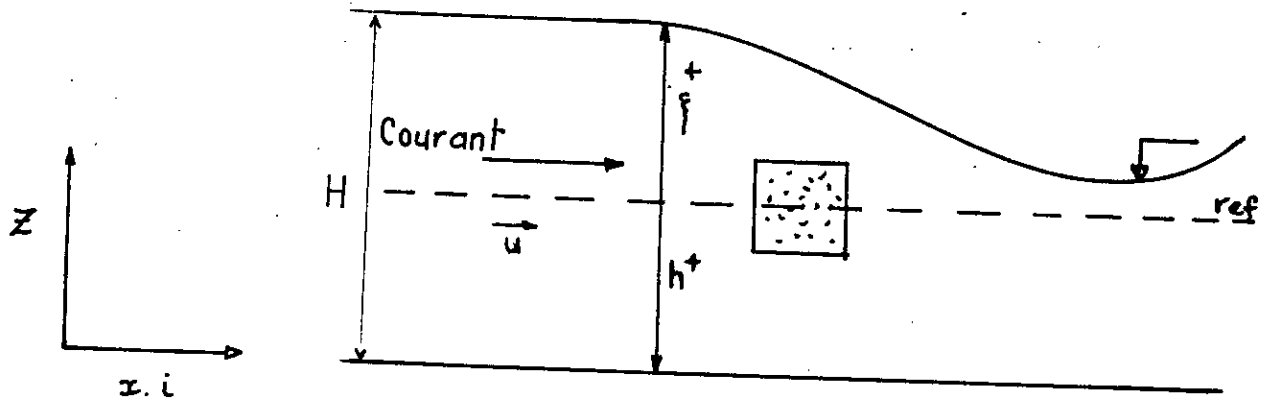


Fig I 2.1 CHOIX DES AXES

I.3 Etablissement des équations du modèle hydrodynamique de St Venant

On adoptons les hypothèses simplificatrices citées ci-avant et après intégration (voir annexe) nous obtenons le système d'équations hyperboliques suivant :

EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial uH}{\partial x} + \frac{\partial vH}{\partial y} = 0 \quad (I-3-1)$$

EQUATION DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT SELON X

$$\begin{aligned} \frac{\partial uH}{\partial t} + \frac{\partial uuH}{\partial x} + \frac{\partial uvH}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_x \frac{\partial uH}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_y \frac{\partial uH}{\partial y} \right) \\ &- gH \frac{\partial H}{\partial x} + gH (S_{0x} - S_{fx}) + F_c vH \\ &- \frac{\tau_x^v}{\rho} \end{aligned} \quad (I-3-2)$$

EQUATION DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT SELON Y

$$\begin{aligned} \frac{\partial vH}{\partial t} + \frac{\partial uvH}{\partial x} + \frac{\partial vvH}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_x \frac{\partial vH}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau_y \frac{\partial vH}{\partial y} \right) \\ &- gH \frac{\partial H}{\partial y} + gH (S_{0y} - S_{fy}) - F_c uH \\ &- \frac{\tau_x^v}{\rho} \end{aligned} \quad (I-3-3)$$

Après développement le système (II-3-1), (II-3-2), (II-3-3) est écrit sous une forme dite conservative telque :

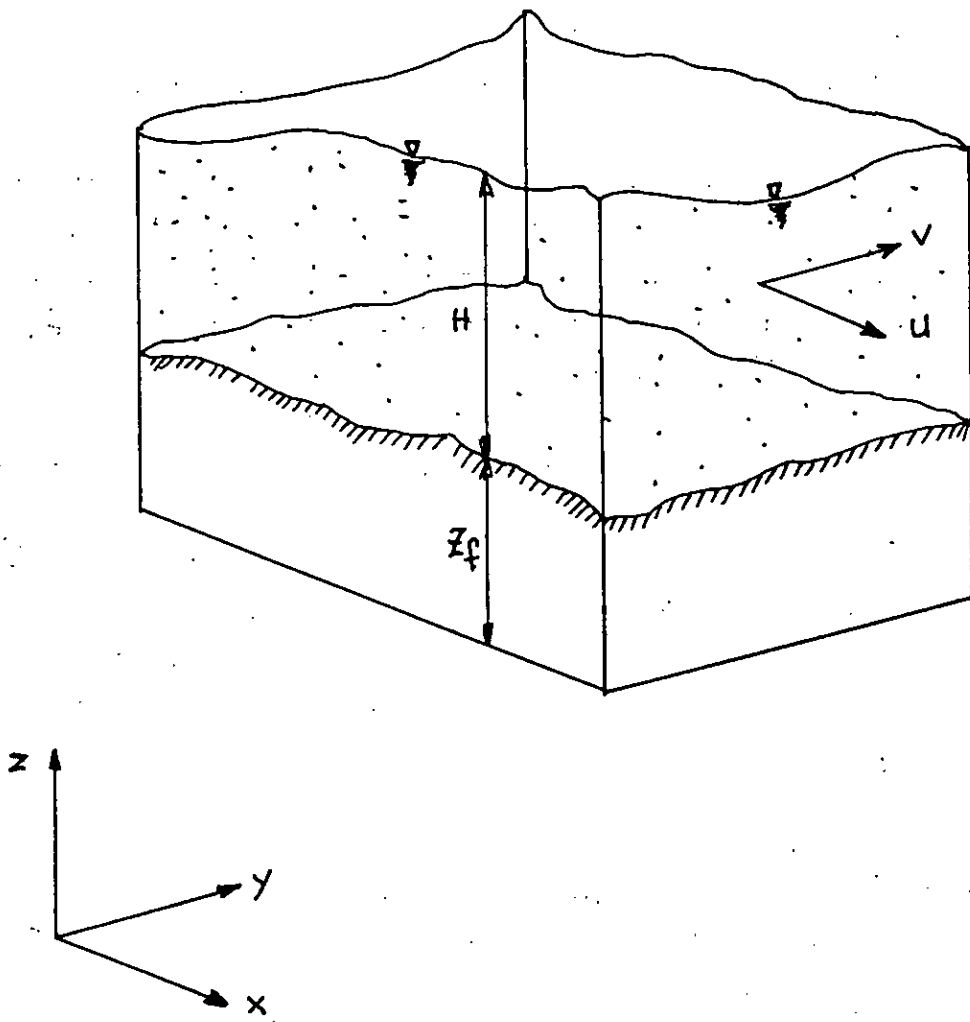


Fig I.3. VARIABLES DESCRIPTIVES

Equation de conservation de masse

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.3.1 bis})$$

Equation de conservation de la quantite de mouvement selon x

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = E_x \quad (\text{I.3.2 bis})$$

Equation de conservation de la quantite de mouvement selon y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = E_y \quad (\text{I.3.3 bis})$$

x et y sont des coordonnees horizontales, t : temps et H, U, V, définies telque:

H = H(x,y,t) : profondeur de l'ecoulement

U = U(x,y,t) = u(x,y,t) H(x,y,t) : (U) debit specifique unitaire selon x.

V = V(x,y,t) = v(x,y,t) H(x,y,t) : (V) debit specifique unitaire selon y.

F,G,S : variables conservatives definies comme :

$$F = F(x,y,t) = u^2 H + 1/2 g H^2$$

$$G = G(x,y,t) = u v H$$

$$S = S(x,y,t) = v^2 H + 1/2 g H^2$$

E_x, E_y : termes de sources définis par les expressions :

$$E_x = E_x(x,y,t) = gH (S_{ox} + S_f(x)) - F_{cV} - \frac{1}{\rho} \tau_x^v + \frac{\partial}{\partial x} (\zeta_x \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\zeta_y \frac{\partial U}{\partial y})$$

$$E_y = E_y(x, y, t) = gH (S_{0y} + S_{fy}) - F_c U - \frac{1}{\rho} \tau_{xy}^v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_x \times \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta_y \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

$$S_{fx} \approx \frac{N^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{10/3}} \quad S_{fy} \approx \frac{N^2 V \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{10/3}} \quad (\text{formule de Manning})$$

$$S_{0x} = - \frac{\partial Z_f}{\partial x} \quad S_{0y} = - \frac{\partial Z_f}{\partial y}$$

$$\zeta_x = K \sqrt{gU} / 6 \frac{H^{1/6}}{n} \quad \zeta_y = K \sqrt{gV} / 6 \frac{H^{1/6}}{n}$$

$$\tau_{xy}^v = \rho_V C_{10}^2 V_{10}$$

Dans toutes ces équations : (H) représente la profondeur de l'eau, (U) et (V) les débits spécifiques en x et y, (F_c) : paramètres de coriolis ; (Z_f) : élévation du fond ; (S_{fx}) et (S_{fy}) : pente de frottements du fond (voir fig I.3).

I.4- Conditions initiales et conditions aux frontières

Pour compléter le système d'équations (I.3.1 à I.3.3) bis), un ensemble de conditions initiales et aux frontières est nécessaire. Pour les écoulements à surface libre; Stocker résume le nombre de conditions aux frontières ouvertes à adopter selon le type d'écoulement (nombre de Froude) et le type de problème considéré, comme suit :

Pb	écoulement subscrique Fr < 1		écoulement supercritique Fr > 1	
	entrée	Sortie	Entrée	Sortie
1D	1	1	2	0
2D	2	1	3	0

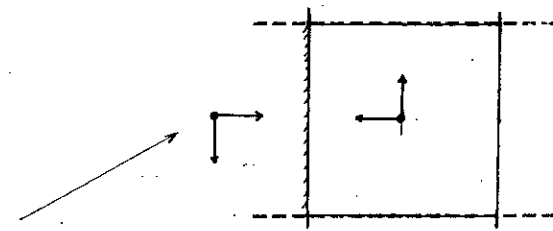
les conditions aux frontières fermées adoptées pour notre modèle sont :
représentées par le schéma suivant :

$$\frac{\partial H}{\partial x} , \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \quad (\text{pente de la surface libre dans la direction perpendiculaire à la paroi étant nulle})$$

$$u(i,j) = -u(i,j+1)$$

$$v(i,j) = -v(i+1,j)$$

points fictifs



II. Modèle bidimensionnel horizontal de transport de sédiments en suspension

II.1. Choix du modèle

Les formules classiques de transport établies pour des conditions, d'équilibre locale, instantannées d'écoulement (modèle d'Einstein 1950; Engelund et Hansen 1967) sont résolues sous certaines hypothèses loin d'être satisfaites dans la réalité, tel que l'hypothèse de l'écoulement unidimensionnel.

La précision de ces formules peut donc varier d'une rivière à une autre et d'une condition à une autre; il n'existe pas cependant d'équation universelle valable et applicable pour toutes conditions d'écoulement et de transport.

Entre ces modèles, dits simples et ceux tridimensionnels qui tentent de reproduire toute la réalité du phénomène étudié et de son environnement dit "modèle sophistiqué" nécessitant un temps de calcul relativement long (modèle de Sheng (1983); Markofsky et Al (1985), Koutitas et Al (1983)); la tendance actuelle consiste à développer des modèles bidimensionnels intégrés sur la verticale (modèles de Hayter (1983); Onislihi (1981); Ariatherai et Al (1977); Coles et Miles (1983); Thomas et Mc Anally (1985)).

Selon la littérature la distribution verticale (sur la profondeur) moyenne de la concentration d'une suspension en écoulement à surface libre est plus uniforme que celle horizontale, d'où les modèles moyennes sur la profondeur de l'écoulement.

C'est ce type de modèle qui est développé ci-après, et est adopté pour la simulation du transport de fines particules en suspension en écoulement à surface libre non permanent en eau peu profonde.

II.2. Le modèle bidimensionnel horizontal, intégré sur la verticale du transport de sédiment en suspension en écoulement à surface libre

Le modèle bidimensionnel horizontal de transport en suspension présenté dans cette thèse est basé sur la résolution de l'équation différentielle de dispersion suivante; traduisant un transport des fines suspension; par convection grâce au vitesse moyenne (u,v) et par diffusion par les diffusivités ζ_x, ζ_y Prises non constante dans cette étude :

$$\frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial HuC}{\partial x} + \frac{\partial HvC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[H\zeta_x \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[H\zeta_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] + S_d \quad (II.2.1)$$

Ce modèle décrit le transport d'une fine suspension en écoulement plan à surface libre homogène, supposée bien mélangé sur la profondeur, les rivières étant généralement de faible profondeur comparé à leur largeur, la substance forme vite un mélange en un temps relativement faible ; les courants secondaires ne sont pas pris en compte et l'évolution des fonds est très lente devant l'échelle des temps hydraulique. Lorsque cette évolution devient suffisamment importante pour réagir notablement sur l'écoulement, un nouveau calcul hydraulique doit être effectué sur la base d'une nouvelle bathymétrie.

Un terme de source représentant ici le débit unitaire déposé au fond, est pris en compte et, est donné par Krone telque :

$$S_d = - C W_s \left[1 - \frac{\tau}{\tau_d} \right] P \left[1 - \frac{\tau}{\tau_{cd}} \right]$$

Avec.

* τ_d contrainte critique de dépôt au dessus de laquelle aucun dépôt ne se produit.

* $P\left(1 - \frac{\tau}{\tau_d}\right)$ Opérateur de heaviside; probabilité de dépôt :

* $P\left(1 - \frac{\tau}{\tau_d}\right) \begin{cases} 0 & \tau > \tau_{cd} & \text{(sans dépôt)} \\ 1 & \tau \leq \tau_{cd} & \text{(avec dépôt)} \end{cases}$

la vitesse de chute est calculée selon une loi expérimentale (Krone et Owen) adoptée par Miles pour les faibles concentrations:

$$W_s = K.C$$

avec K, coefficient empirique dépendant du type de sédiment,

$$K = 0.001 \text{ ou } 0.002 \text{ m/s Kgm}^{-a}$$

Le développement du membre gauche de l'équation (II.2.1)

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial HC}{\partial t} + \frac{\partial HuC}{\partial x} + \frac{\partial HVC}{\partial y} \\ &= H \frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial H}{\partial t} + C \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{Hu}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + C \frac{\partial Hv}{\partial y} + \frac{Hv}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \\ &= C \left[\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} \right] + H \frac{\partial C}{\partial t} + Hu \frac{\partial C}{\partial x} + Hv \frac{\partial C}{\partial y} \end{aligned}$$

équation de continuité (= 0)

et le membre de droite soit :

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[H\zeta_x \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[H\zeta_y \frac{\partial C}{\partial y} \right] + S_d \\ &= H\zeta_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial H\zeta_x}{\partial x} + H\zeta_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial H\zeta_y}{\partial y} + S_d \end{aligned}$$

Pour nos calculs les produits

$$\frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y}$$

seront négligés .

d'ou la forme finale de l'équation de transport :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = \zeta_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \zeta_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{Sd}{H}$$

(II.2.2)

Cette équation est utilisée pour simuler le transport en suspension de fines particules solides dans l'écoulement défini par le modèle de S.Venant présenté en (I.3) c.à.d par les composantes de vitesses moyennes sur la profondeur; $u(x,y)$, $v(x,y)$ et la hauteur d'eau $H(x,y)$ à chaque pas de calcul.

Donc pour un champ de vitesse et de diffusivité connus, la résolution numérique de l'équation de transport (II.2.2) permet de déterminer l'évolution dans le temps et dans l'espace de la concentration moyenne sur la verticale c.à.d la fonction $C(x,y,t)$ et ce pour des conditions initiales et aux frontières bien définies:

Pour notre modèle ces conditions sont :

- frontières fermées .

$$\frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

c.à.d qu'il n'existe pas d'interpénétration de particules de part et d'autre des rives.

- frontières ouvertes .

* Dérivées premières nulles

c.à.d que la concentration est la même de part et d'autre de l'entrée/ sortie .

* Débit solide à l'entrée est connu.

CHAPITRE III

III- Résolution numérique : méthode des différences finies

III-1- Introduction aux différences finies

La méthode des différences finies consiste à transformer les équations à dérivée partielles représentatives du phénomène à étudier, en équations algébriques, et ce en se basant sur les développements en série de Taylor.

On matérialise cette approche dans l'espace, par une discrétisation du domaine continu, en introduisant une schématisation géométrique définie par un ensemble fini de mailles, délimité par des frontières et formant un réseau. La maille est représentative du plus petit détail de calcul. Les fonctions étant définies par leurs valeurs aux noeuds de ce maillage, la méthode consiste à approcher leur dérivées par des différences entre ces valeurs. Les équations discrétisées ne seront alors fonction que des valeurs aux noeuds du maillage, elles doivent permettre de déterminer les valeurs inconnues en fonction des valeurs connues (conditions initiales et aux frontières).

Notons que le nombre de maille constituant le réseau "domaine numérique", et par conséquent la capacité de l'ordinateur utilisé, limitera les capacités du calcul à représenter le détail. D'autre part la discrétisation en temps induit une perte de calcul à l'intérieur des pas de calcul.

Toutefois par manque de solution analytique, ce qui est souvent le cas, en MDF d'une manière générale, et pour les équations de Saint Venant en particulier, le champs d'application de ces méthodes "solution numérique" s'élargie avec l'avènement informatique. Plusieurs schémas de différences finies traitant des problèmes d'évolution existent dans la littérature; notons que d'une manière générale, ce sont les écoulements unidimensionnels qui ont fait l'objet d'application des différents schémas numériques, citons par exemples, les travaux de Mahmoud et Yevjevich (1975), de Abbot (1979), et ceux de Cunge et Al (1980), il est évident qu'une application bidimensionnelle serait plus proche de la réalité physique.

Pour notre cas, d'écoulement bidimensionnel, nous utiliserons un schéma explicite du second ordre bien adapté aux écoulements à surface libre pour résoudre le système hyperbolique de Saint Venant eq (I-3-1 à I-3-3 bis).

Ce schéma a permis d'obtenir d'excellents résultats pour les écoulements rapidement variés et graduellement variés il est de type: prédicteur-correcteur : schéma explicite de Mac Cormack (1971). Pour l'équation de transport-dispersion avec terme de convection (II-2-2) nous utiliserons un schéma explicite décentré dit " Up wind scheme".

III-2- Résolution du système hydrodynamique : schéma explicite de Mac Cormack

III-2-1- Définition

Le schéma de Mac Cormack est un schéma de différences finies de type à pas fractionnaires où l'opérateur bidimensionnel de différences finies est simplifié en deux opérateurs unidimensionnels appelés ; Prédicteur - Corrcteur.

III-2-2- Choix du schéma explicite de Mac Cormack

L'application du schéma de Mac Cormack aux équations d'écoulement non permanent à surface libre, a démontré son habilité à manier simultanément les calculs relatifs aux écoulements graduellement variés, et rapidement variés de plus la solution obtenue tiens compte des chocs et des discontinuités sans aucun traitement. Plusieurs testes unidimensionnels et bidimensionnels, démontrent la performance et la précision de ce schéma, même appliqué à des écoulements à géométrie irrégulière et bathymétrie variable.

III-2-3- Grilles numérique : discrétisation

Dans le but d'intégrer numériquement les équations différentielles partielles, le domaine physique continu est remplacé par un réseau de maille, ou l'ensemble des variables dépendantes sont définies. Deux types de grilles existent :

- "Fully dense" grille; où l'ensemble des variables dépendants sont définies au même noeud de la maille, représentant ces propriétés moyenne (fig III-2-3-a).

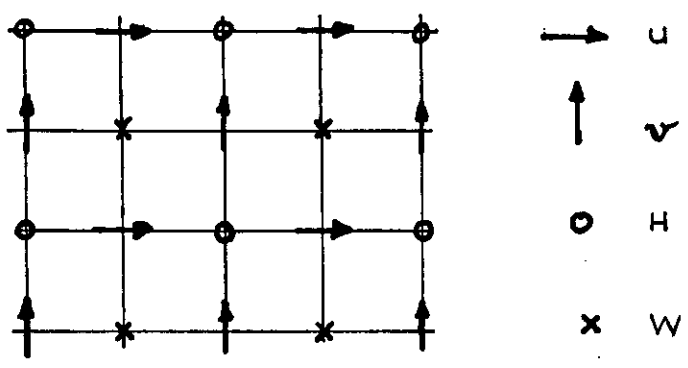


Fig (III.2.3.b).

"STAGGERED GRILLE"

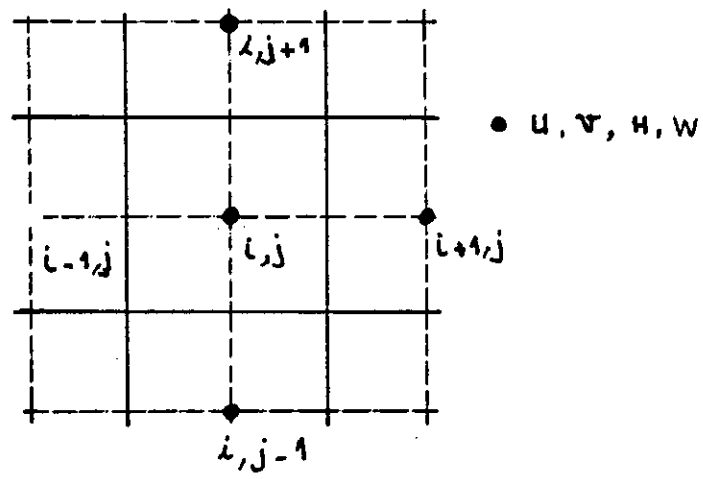


Fig (III.2.3.a).

"FULLY DENSE" GRILLE
 (UTILISE DANS LE SCHEMA
 DE MC CORMACK).

Fig III 2.3 GRILLE NUMERIQUE .

- "Staggered" grille; où les variables dépendants sont définies en des points différents de la maille (Fig III-2-3-b).

Notons que, ce dernier type de grille, génère souvent une diffusion numérique excessive comparé au "fully dense" grille. Cette diffusion artificielle peut créer une circulation numérique similaire à celle produite par des chocs ou des discontinuités.

En outre le "fully dense" grille est conceptuellement plus consistant que le staggered grille.

La figure (III-2-3-a) montre le "fully dense" grille utilisé dans Mac Cormack.

III-2-4- Description du schéma de Mac Cormack : application générale

Dans ce qui suit nous présentons une application type du schéma de Mac Cormack, pour cela nous considérons l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-2-4-1})$$

Soit la notion $U(x,y,t) = U_{i,j}^n$

avec la discrétisation spatiale $x = i \Delta x, \quad y = j \Delta y$

Δx : pas d'espace en x

Δy : pas d'espace en y .

Δt = pas de temps

et la discrétisation du temps $t(n) = t_0 + n\Delta t$

t_0 : temps initial

La solution obtenue au temps $t(n+1)$ par application d'un schéma de différence fines explicite au point (i,j) est de la forme :

$$U_{i,j}^{n+1} = L(\Delta t) U_{i,j}^n \quad (\text{III-2-4-2})$$

où $L(\Delta t)$ est l'opérateur explicite de différences finis, qui discrétise

l'équation différentielle partielle à résoudre, par conséquent toute

les valeurs nécessaires au calcul de $U_{i,j}^{n+1}$ sont initialement connues ou sont déjà calculées. Pour le schéma de Mac Cormack, l'opérateur bidimensionnel $L(\Delta t)$ est décomposé en séquences d'opérateurs unidimensionnels, telque l'eq (III-2-4-2)

$$U_{i,j}^{n+1} = \left[L_x(\Delta t_x) \quad L_y(\Delta t_y) \quad L_x(\Delta t_x) \right] U_{i,j}^n \quad (\text{III-2-4-3})$$

où $\Delta t_x = \frac{1}{2} \Delta t$ et $\Delta t_y = \frac{1}{2} \Delta t$

Chaque opérateur cité ci-dessus est composé de séquences : prédicteur-correcteur; de manière :

le prédicteur dans l'opérateur L_x discrétise les dérivées spatiales utilisant les différences arrière "backward" telque :

$$U_{i,j}^p = U_{i,j} - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i,j} - F_{i-1,j}) \quad (\text{III-2-4-4})$$

Alors que le correcteur utilise les différences avant "forward" :

$$U_{i,j}^c = \frac{1}{2} \left[U_{i,j} + U_{i,j}^p - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (F_{i+1,j}^p - F_{i,j}^p) \right] \quad (\text{III-2-4-5})$$

Nota : 'p' indique prédicteur, 'c' indique correcteur.

Similairement l'opérateur L_y est décomposé en prédicteur avec la notation " — ".

$$\overline{U}_{i,j}^p = U_{i,j} - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (G_{i,j} - G_{i,j-1}) \quad (\text{III-2-4-6})$$

et en correcteur :

$$\overline{U}_{i,j}^c = \frac{1}{2} \left[U_{i,j} + \overline{U}_{i,j}^p - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} (\overline{G}_{i,j+1}^p - \overline{G}_{i,j}^p) \right] \quad (\text{III-2-4-7})$$

Par contre l'opérateur L_x en phase finale est décomposé en prédicteur discrétisé en différence avant "forward"; et en correcteur discrétisé

en différence arrière "back ward".

III-2-5- Le schéma amélioré de Mac Cormack

Bien que le schéma "standard" de Mac Cormack ait prouvé son efficacité en traitant les problèmes relatifs aux écoulements compressibles (équations de Navier Stocks), certaines applications démontrent que celui ci possède des "Directions préférées", c.à.d que l'ordre d'application des séquences des opérateurs peut affecter la solution; tel que les séquences $(L_x L_y L_x)$ ou $(L_y L_x L_y)$ donnent des résultats différents pour le même problème de plus dans le cas de problèmes à géométrie symétrique, il résulte des valeurs non symétriques.

L'explication de cette différence est liée à la "molécule" de calcul, c.à.d à l'ensemble des points où la solution doit être connue à l'instant (t) .

Le schéma "de molécule" de Mac Cormack, représenté en fig (III-2-5-b), montre que quinze (15) points sont nécessaire pour obtenir la solution au point $(i, j, n+1)$, cet ensemble de point forme un rectangle qui peut être orienté en X ou en y ; alors soit que l'on utilise les séquences $(L_x L_y L_x)$ ou $(L_y L_x L_y)$. On recommande généralement d'utiliser la séquence qui possède le plus d'information.

Pour résoudre ce problème, une simple modification est introduite au schéma explicite de Mac Cormack (thèse de Garcia 1985), qui toutefois garde ces caractéristiques.

Cette modification qui a permis de solutionner des problèmes non linéaires instables, consiste à rendre le schéma indépendant du choix des séquences des opérateurs : le principe est de décomposer la séquence originale en une autre séquence telle :

$$(L_x L_y L_y^* L_x^*)$$

(III-2-5-4)

Pour les nouveaux opérateurs L_x^* et L_y^* les différences avant "forward" sont utilisées dans l'étape prédicteur et les différences arrière "backward" dans l'étape correcteur, c.à.d une application contraire des opérateurs L_x et L_y . Cette nouvelle séquence augmente le nombre de

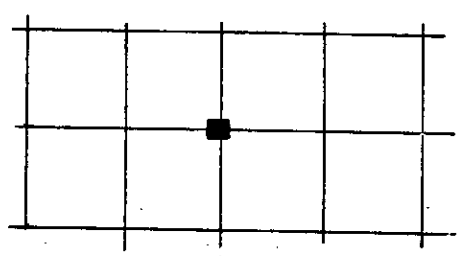
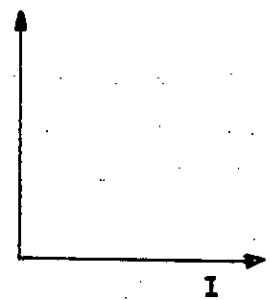


Fig (III.2.5 b)
MOLECULE DE CALCUL UTILISEE
DANS LE SCHEMA STANDARD DE
M.C. CORMACK.

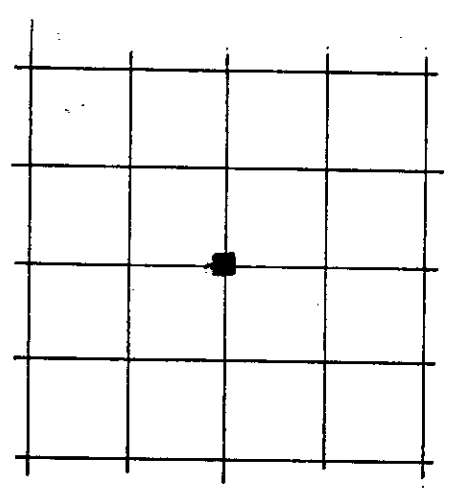


Fig (III.2.5. a)
MOLECULE DE CALCUL UTILISEE
DANS LE SCHEMA AMELIORE DE
M.C. CORMACK.

Fig. III-2.5 MOLECULE DE CALCUL.

points dans la molécule de calcul à 25 points, ceci transforme la molécule rectangulaire en molécule carré, fig (III-2-5-a). Il est évident que cette modification "amélioration", élimine l'idée d'orientation préférée, de plus la solution symétrique résultant de cas symétrique est bien vérifiée.

L'amélioration du schéma de Mac Cormack a été suffisamment testée et appliquée à des problèmes industriels réels (Garcia 1985).

III 2.6 - Stabilité du schéma de Mac Cormack amélioré

Chaque opérateur de Mac Cormack étant explicite, une condition de stabilité sévère est soumise au schéma, celle-ci est dictée par le critère du courant de Friedrich-Lewy (CFL) qui nous impose un pas de temps maximum comparé au pas de distance.

Pour les écoulements bidimensionnels, cette condition est donnée par l'expression :

$$\Delta t \leq \max \left[\frac{2 \Delta x}{(u+c)_{\max}} ; \frac{2 \Delta y}{(v+c)_{\max}} \right] \quad (\text{III-2-6})$$

$$\text{ou } c = \sqrt{gH}$$

III 2.7 - Application du schéma de Mac Cormack amélioré au modèle hydrodynamique

bidimensionnel :

Nous récrivons ci après le système d'équations hyperboliques aux dérivées partielles non linéaires, décrivant l'écoulement bidimensionnel non permanent à surface libre (eq I.3);

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = E_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = E_y$$

avec :

$$E_x = gH (S_{0x} - S'f_x) + fV - \frac{1}{\rho} \tau_x^v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_x \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta_y \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$E_y = gH (S_{0y} - S'f_y) - fU - \frac{1}{\rho} \tau_y^v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_x \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta_y \frac{\partial V}{\partial y} \right)$$

$$S_{0x} = - \frac{\partial z_f}{\partial x}$$

$$S_{0y} = - \frac{\partial z_f}{\partial y}$$

En adoptant l'écriture: $\bar{H} = H^p$ et $H = H^c$, La discrétisation du système ci dessus en schéma explicite de Mac Cormack amélioré, permet d'écrire pour chaque séquence :

1- Prédicteur L^*x

$$\overline{H}_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^n - \frac{\Delta t x}{\Delta x} (U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n)$$

$$\begin{aligned} \overline{U}_{i,j}^{n+1} = & U_{i,j}^n - \frac{\Delta t x}{\Delta x} (F_{i,j}^n - F_{i-1,j}^n) + g \Delta t x \left[\frac{H_{i,j}^n + H_{i-1,j}^n}{2} \right] \\ & \left[- \frac{Z_{fi,j}^n - Z_{fi-1,j}^n}{\Delta x} - S_{fx,i,j}^n \right] - \Delta t x \frac{\tau_{xij}^v}{\rho} + \frac{\Delta t x}{\Delta x z} \\ & \left\{ \left[U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n \right] \left[\frac{\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{2} \right] + \right. \\ & \left. \left[U_{i,j}^n - U_{i+1,j}^n \right] \left[\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}_{i,j}^{n+1} = & V_{i,j}^n - \frac{\Delta t x}{\Delta x} (G_{i,j}^n - G_{i-1,j}^n) + \frac{\Delta t x}{\Delta x z} \left\{ \left[V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n \right] \right. \\ & \left. * \frac{1}{2} \left[\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n \right] + \left[V_{i,j}^n - V_{i+1,j}^n \right] \left[\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n \right] \right\} \end{aligned}$$

2- Correcteur L^*x

$$H_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[H_{i,j}^n + \overline{H}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t x}{\Delta x} (U_{i+1,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+1}) \right]$$

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^n + \overline{U}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t x}{\Delta x} (F_{i+1,j}^{n+1} - F_{i,j}^{n+1}) + g \Delta t x \right]$$

$$\left[\frac{H_{i+1,j}^{n+1} + \overline{H}_{i,j}^{n+1}}{2} \right] * \left[\left[\frac{Z_{fi+1,j} - Z_{fi,j}}{\Delta x} \right] - S_{fx,i,j}^{n+1} \right] - \Delta t x \frac{\tau_{xij}^v}{\rho}$$

$$+ \frac{\Delta t x}{\Delta x^2} \left\{ \left[\overline{U}_{i-1,j}^{n+1} - 2\overline{U}_{i,j}^{n+1} + \overline{U}_{i+1,j}^{n+1} \right] \frac{1}{2} (\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i,j}) + \left[\overline{U}_{i+1,j}^{n+1} - \overline{U}_{i,j}^{n+1} \right] (\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i,j}) \right\}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} \left[\overline{V}_{i,j}^n + \overline{V}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t x}{\Delta x} \left(\overline{G}_{i+1,j}^{n+1} - \overline{G}_{i,j}^{n+1} \right) + \frac{\Delta t x}{\Delta x^2} \right. \\ & \left. \left\{ \left[\overline{V}_{i-1,j}^{n+1} - 2\overline{V}_{i,j}^{n+1} + \overline{V}_{i+1,j}^{n+1} \right] \frac{1}{2} (\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i,j}) + \left[\overline{V}_{i+1,j}^{n+1} - \overline{V}_{i,j}^{n+1} \right] (\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i,j}) \right\} \right] \end{aligned}$$

3- Prédicteur L*

$$\overline{H}_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^n - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left(V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n \right)$$

$$\overline{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left(G_{i,j}^n - G_{i,j-1}^n \right) + \frac{\Delta t y}{\Delta y^2}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} (\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}) \left[U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n \right] + \left[U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n \right] (\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j-1}) \right\}$$

$$\overline{V}_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left(S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n \right) + g \Delta t y \left[\frac{H_{i,j}^n + H_{i,j-1}^n}{2} \right]$$

$$\left[- \left(\frac{Z_{i,j} - Z_{i,j-1}}{\Delta y} \right) - S_{fy,i,j}^n \right] - \Delta t y \cdot \frac{\tau_{ij}^v}{\rho} + \Delta t y / \Delta y^2$$

$$\left\{ \frac{1}{2} (\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}) \left[V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n \right] + \left[V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n \right] (\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j-1}) \right\}$$

4- Correcteur L^*y

$$H_{i,j}^{n+1} = 1/2 \left[H_{i,j}^n + \overline{H_{i,j}^{n+1}} - \frac{\Delta t x}{\Delta y} \left(\overline{V_{i,j+1}^{n+1}} - \overline{V_{i,j}^{n+1}} \right) \right]$$

$$U_{i,j}^{n+1} = 1/2 \left[U_{i,j}^n + \overline{U_{i,j}^{n+1}} - \frac{\Delta t x}{\Delta y} \left(\overline{G_{i,j+1}^{n+1}} - \overline{G_{i,j}^{n+1}} \right) + \frac{\Delta t y}{\Delta y z} \right. \\ \left. \left\{ 1/2 \left(\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j} \right) \left(\overline{U_{i,j-1}^{n+1}} - 2\overline{U_{i,j}^{n+1}} + \overline{U_{i,j+1}^{n+1}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\overline{U_{i,j+1}^{n+1}} - \overline{U_{i,j}^{n+1}} \right) \left(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j} \right) \right\} \right]$$

$$V_{i,j}^{n+1} = 1/2 \left[V_{i,j}^n + \overline{V_{i,j}^{n+1}} - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left(\overline{S_{i,j+1}^{n+1}} - \overline{S_{i,j}^{n+1}} \right) \right. \\ \left. + g \Delta t y \left(\frac{\overline{H_{i,j+1}^{n+1}} + \overline{H_{i,j}^{n+1}}}{2} \right) \left[- \left(\frac{Z_{fi,j+1} + Z_{fi,j}}{\Delta y} \right) - \overline{S_{fy,i,j}^{n+1}} \right] - \right. \\ \left. \Delta t y \cdot \frac{\gamma_{i,j}}{\rho} + \frac{\Delta t y}{\Delta y z} \left\{ \left(\overline{V_{i,j-1}^{n+1}} - 2\overline{V_{i,j}^{n+1}} + \overline{V_{i,j+1}^{n+1}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 1/2 \left(\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j} \right) + \left(\overline{V_{i,j+1}^{n+1}} - \overline{V_{i,j}^{n+1}} \right) \left(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j} \right) \right\} \right]$$

5- le predicteur $L \underline{y}$

$$\overline{H_{i,j}^{n+1}} = H_{i,j}^n - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left(V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n \right)$$

$$\overline{U_{i,j}^{n+1}} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t x}{\Delta y} \left(G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n \right) + \frac{\Delta t y}{\Delta y z} \\ \left\{ 1/2 \left(\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j} \right) \left(U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j+1}^n \right) + \right. \\ \left. \left(U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n \right) \left(\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}_{i,j}^{n+1} = & V_{i,j}^n - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left[S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n \right] \\ & + g \Delta t y \left[\frac{H_{i,j+1}^n + H_{i,j}^n}{2} \right] \left[- \left(\frac{Z_{fi,j+1} - Z_{fi,j}}{\Delta y} \right) - S_{fy,i,j}^n \right] - \\ & \Delta t y \cdot \frac{\tau_{yij}^v}{\rho} + \frac{\Delta t y}{\Delta y z} \left\{ \left[V_{i,j-1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j+1}^n \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j} \right] + \left[V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n \right] \left[\zeta_{i,j+1} - \zeta_{i,j} \right] \right\} \end{aligned}$$

6- le correcteur L y :

$$H_{i,j}^{n+1} = 1/2 \left[H_{i,j}^n + \overline{H}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left[\overline{V}_{i,j}^{n+1} - \overline{V}_{i,j-1}^{n+1} \right] \right]$$

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} = & 1/2 \left[U_{i,j}^n + \overline{U}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left[\overline{G}_{i,j}^{n+1} - \overline{G}_{i,j-1}^{n+1} \right] + \frac{\Delta t y}{\Delta y z} \right. \\ & \left. \left\{ 1/2 \left[\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1} \right] \left[\overline{U}_{i,j-1}^{n+1} - 2\overline{U}_{i,j}^{n+1} + \overline{U}_{i,j+1}^{n+1} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. \left[\overline{U}_{i,j}^{n+1} - \overline{U}_{i,j-1}^{n+1} \right] \left[\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j-1} \right] \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}_{i,j}^{n+1} = & 1/2 \left[V_{i,j}^n + \overline{V}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t y}{\Delta y} \left[\overline{S}_{i,j}^{n+1} - \overline{S}_{i,j-1}^{n+1} \right] \right. \\ & + g \Delta t y \left[\frac{H_{i,j}^{n+1} + H_{i,j-1}^{n+1}}{2} \right] \left[- \left(\frac{Z_{fi,j} + Z_{fi,j-1}}{\Delta y} \right) - \overline{S}_{fy,i,j}^{n+1} \right] - \\ & \Delta t y \cdot \frac{\tau_{yij}^v}{\rho} + \frac{\Delta t y}{\Delta y z} \left\{ \left[\overline{V}_{i,j-1}^{n+1} - 2\overline{V}_{i,j}^{n+1} + \overline{V}_{i,j+1}^{n+1} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1} \right] + \left[\overline{V}_{i,j}^{n+1} - \overline{V}_{i,j-1}^{n+1} \right] \left[\zeta_{i,j} - \zeta_{i,j-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

7- le prédicteur L_x

$$\overline{H}_{i,j}^{n+1} = H_{i,j}^n - \frac{\Delta t x}{\Delta x} \left(U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n \right)$$

$$\overline{U}_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t x}{\Delta x} \left(F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n \right)$$

$$+ g \Delta t x \left[\frac{H_{i,j}^n + H_{i+1,j}^n}{2} \right] \left[- \left(\frac{Z_{fi+1,j} + Z_{fi,j}}{\Delta x} \right) - S_{fx,ij}^n \right] -$$

$$\Delta t x \cdot \frac{\tau_x^v}{\rho} + \frac{\Delta t x}{\Delta x^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\zeta_{i,j} + \zeta_{i+1,j} \right) \left(U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n \right) + \right.$$

$$\left. \left(U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n \right) \left(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i,j} \right) \right\}$$

$$\overline{V}_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - \frac{\Delta t x}{\Delta x} \left(G_{i+1,j}^n - G_{i,j}^n \right) + \frac{\Delta t x}{\Delta x^2}$$

$$\left\{ \left(V_{i-1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i+1,j}^n \right) \left(\frac{\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i,j}}{2} \right) + \right.$$

$$\left. \left(V_{i+1,j}^n - V_{i,j}^n \right) \left(\zeta_{i+1,j} - \zeta_{i,j} \right) \right\}$$

8- le correcteur L_x

$$H_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[H_{i,j}^n + \overline{H}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t x}{\Delta x} \left(\overline{U}_{i,j}^{n+1} - \overline{U}_{i-1,j}^{n+1} \right) \right]$$

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[U_{i,j}^n + \overline{U}_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t x}{\Delta x} \left(\overline{F}_{i,j}^{n+1} - \overline{F}_{i-1,j}^{n+1} \right) + g \Delta t x \right]$$

$$\left[\frac{H_{i,j}^{n+1} + H_{i-1,j}^{n+1}}{2} \right] \left[- \left(\frac{Z_{fi,j} + Z_{fi-1,j}}{\Delta x} \right) - S_{fx,ij}^{n+1} \right] -$$

$$\Delta t x \cdot \frac{\tau_x^v}{\rho} + \frac{\Delta t x}{\Delta x^2} \left\{ \left(U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1} \right) \right.$$

$$\left. \left(\frac{\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{2} \right) + \left(U_{i,j}^{n+1} - U_{i-1,j}^{n+1} \right) \left(\zeta_{i,j} - \zeta_{i-1,j} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{2} \left[v_{i,j}^n + v_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t x}{\Delta x} \left(G_{i,j}^{n+1} - G_{i-1,j}^{n+1} \right) + \frac{\Delta t x}{\Delta x z} \right. \\
& \left. \left\{ \left[v_{i-1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i+1,j}^{n+1} \right] \left(\frac{\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left[v_{i,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1} \right] \left(\zeta_{i,j} - \zeta_{i-1,j} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

III-3) Résolution de l'équation de transport : upwind explicité schéma

III-3-1) Définition

Les schémas de différences finies sont représentés essentiellement par trois types d'approches :

différences arrières - différences centrées - différences avant; ceci peut être résumer par l'expression :

$$\frac{\partial c}{\partial x} \text{ ij} = a \frac{c_{i+1,j} - c_{ij}}{\Delta x} + (1-a) \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{\Delta x} \quad a \in (0,1)$$

avec $a = 0$ pour les dérivées arrières

$a = 1/2$ pour les dérivées centrées

$a = 1$ pour les dérivées avant

Les dérivées centrées sont les plus précises. Malheureusement, elles sont toujours instables, et introduisent un phénomène qui fait diverger le calcul dans de nombreux cas (dit "Wiggle").

Les calculs de stabilité ont démontrés par contre que les dérivées décentrées du coté de l'écoulement " Upwind " détruisent le wiggle :

Nous utilisons donc :

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial x} = \frac{c_{ij} - c_{i-1,j}}{\Delta x} \quad \text{si } u_{ij} > 0$$

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial x} = \frac{c_{i+1,j} - c_{ij}}{\Delta x} \quad \text{si } u_{ij} < 0$$

Pour sa stabilité, le upwind étant un schéma explicite, il est limité par le nombre de CFL.

Notons enfin que la plupart des codes actuels emploient les dérivées " upwind ".

III-3-2) Application au modèle bidimensionnel du transport

Le schéma explicite de différence finies est utilisé ici pour déterminer les concentrations moyennes sur la verticale $c(x,y,t)$ et ce pour chaque pas de temps et de champ hydrodynamique $H(x,y,t)$, $U(x,y,t)$ et $V(x,y,t)$ obtenus à partir de la dernière séquence du schéma de Mac

Cormack.

Le domaine de calcul étant défini par le maillage rectangulaire de direction Ox et Oy , retenu pour le modèle hydrodynamique.

On note : C_{ij}^{n+1} la concentration en chaque noeud (i,j) , à l'instant $(t+\Delta t)$; la discrétisation de l'équation (II-2-2) développée permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^n}{\Delta t} = & - u_{ij} \frac{C_{ia,j}^n - C_{ib,j}^n}{\Delta x} - v_{ij} \frac{C_{i,ja}^n - C_{i,jb}^n}{\Delta y} \\ & + EPX_{ij} \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\ & + EPY_{ij} \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \\ & - S_{dij}^n / H_{ij} . \end{aligned}$$

en isolant la concentration C_{ij}^{n+1} on obtient :

$$\begin{aligned} C_{ij}^{n+1} = & - \Delta t \left\{ u_{ij} \frac{C_{ia,j}^n - C_{ib,j}^n}{\Delta x} + v_{ij} \frac{C_{i,ja}^n - C_{i,jb}^n}{\Delta y} \right\} \\ & + \Delta t \left\{ EPX_{ij} \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. EPY_{ij} \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right\} - \Delta t (S_{dij}^n / H_{ij}) + C_{ij}^n \end{aligned} \quad (III.3.1)$$

Pour cette dernière expression

ia, ib, ja, jb , prennent des valeurs de : $i, i-1, i+1, j, j-1, j+1$ selon le signe du produit H_u et H_v .

Pour l'équation ainsi discrétisée sous cette forme, les coefficients de diffusion turbulente sont donnés par les expressions empiriques

(Elder 1959) suivantes :

$$EPX_{i,j} = 0.2 H_{i,j} V_* + 6 H_{i,j} U_*$$

$$EPY_{i,j} = 0.2 H_{i,j} U_* + 6 H_{i,j} V_*$$

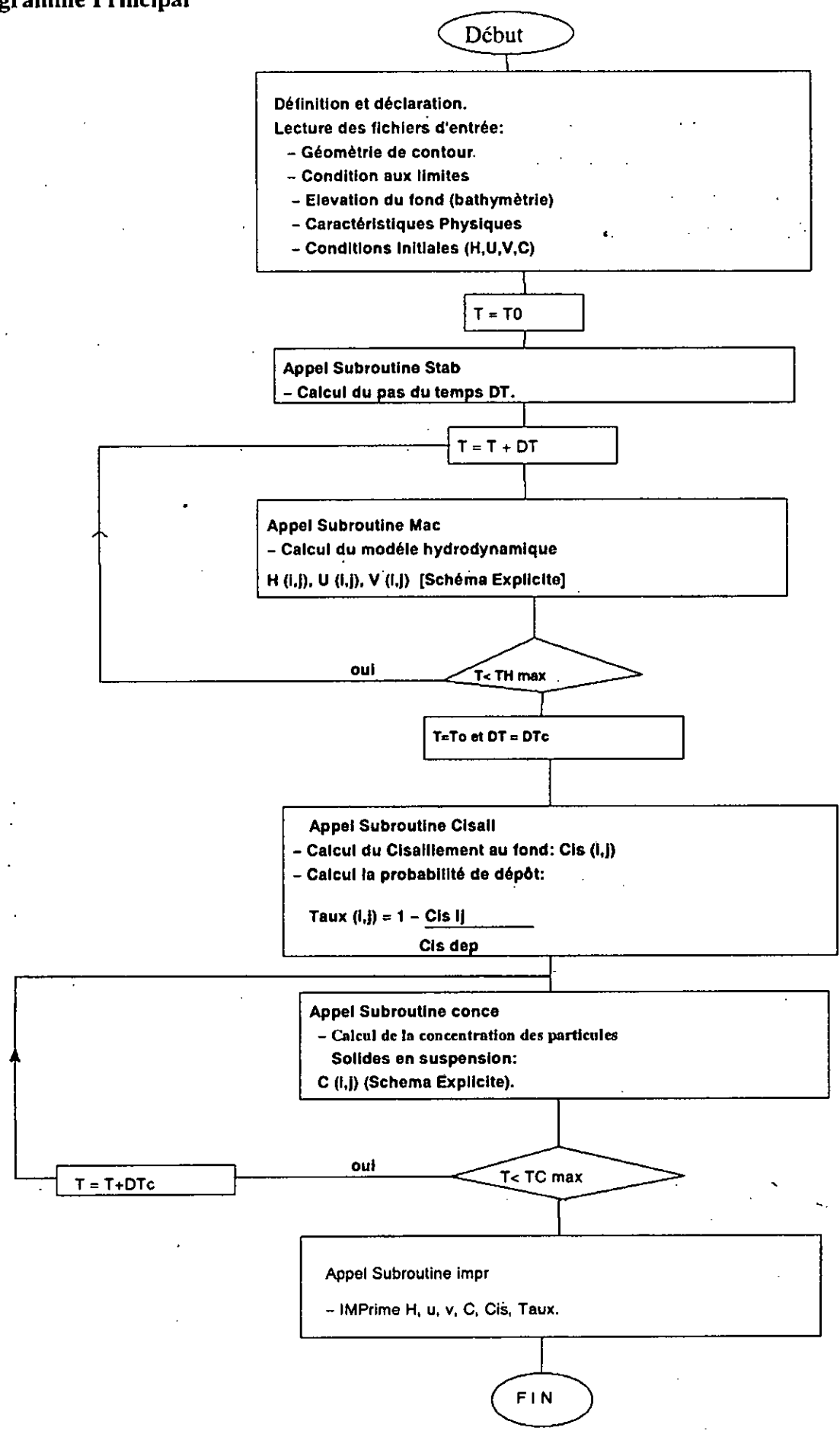
avec les vitesses de frottement U_* et V_* :

$$U_* = \sqrt{\tau_x i_{i,j} / \rho}$$

$$V_* = \sqrt{\tau_y i_{i,j} / \rho}$$

l'équation (III-3-1) est complétée par des conditions aux limites et initiales adaptées au modèle d'étude.

III - 4 Organigramme de calcul: Programme Principal



TROISIEME PARTIE

APPLICATION A UN CAS REEL

TROISIEME PARTIE

SOMMAIRE

CHAPITRE I- EXEMPLE D'APPLICATION

- I1- Présentation générale
- I2- Caractéristiques physiques et géométriques
- I3- Caractéristiques hydrodynamiques
- I4- Schématisation du code numérique

CHAPITRE II- Comparaison des résultats

- II1- Conditions de comparaison
- II2- courbes et résultats
- II3- Interprétation et confrontation entre le modèle établi et le cas simulé.

CHAPITRE I

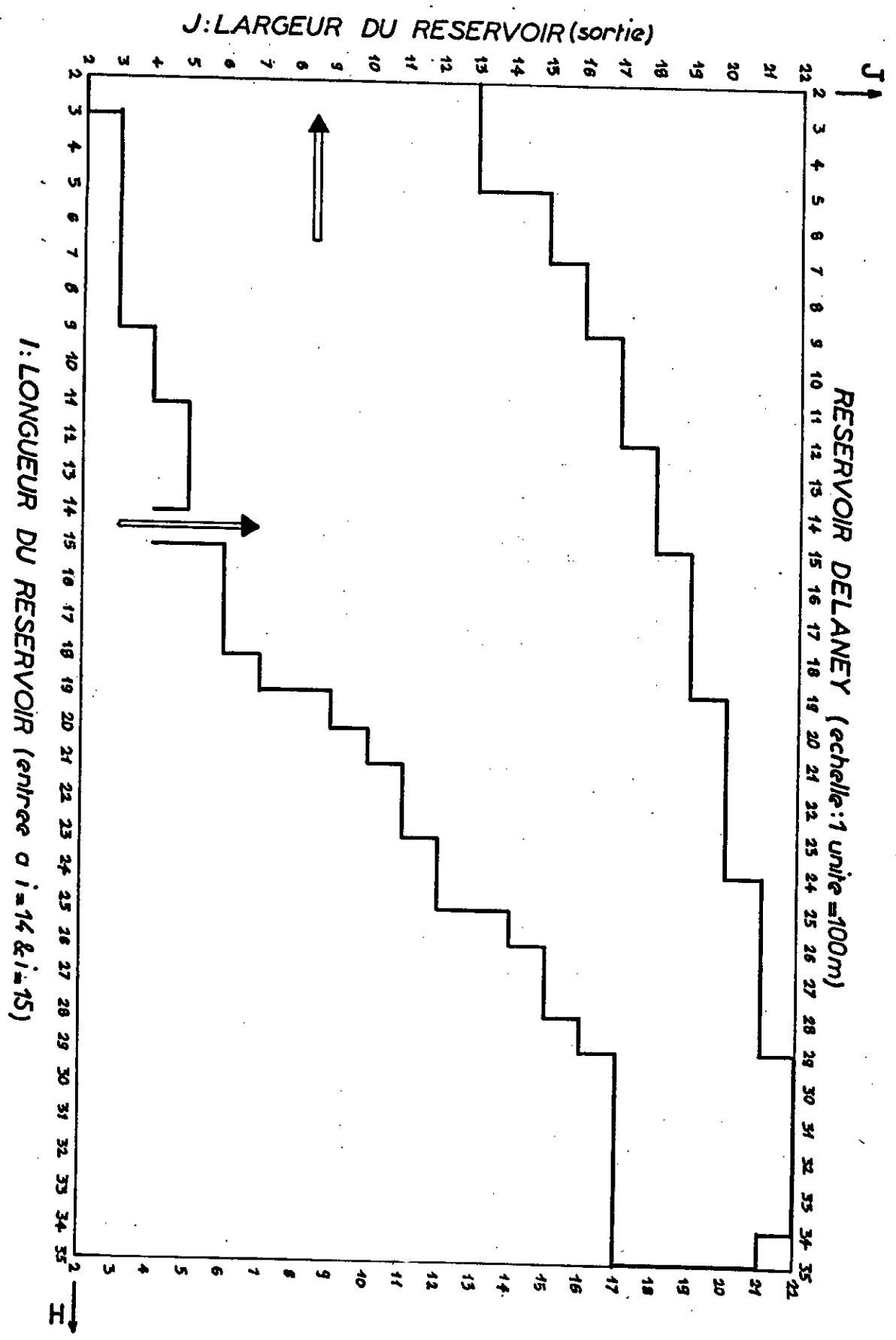
I- Exemple d'application

I1- Présentation générale:

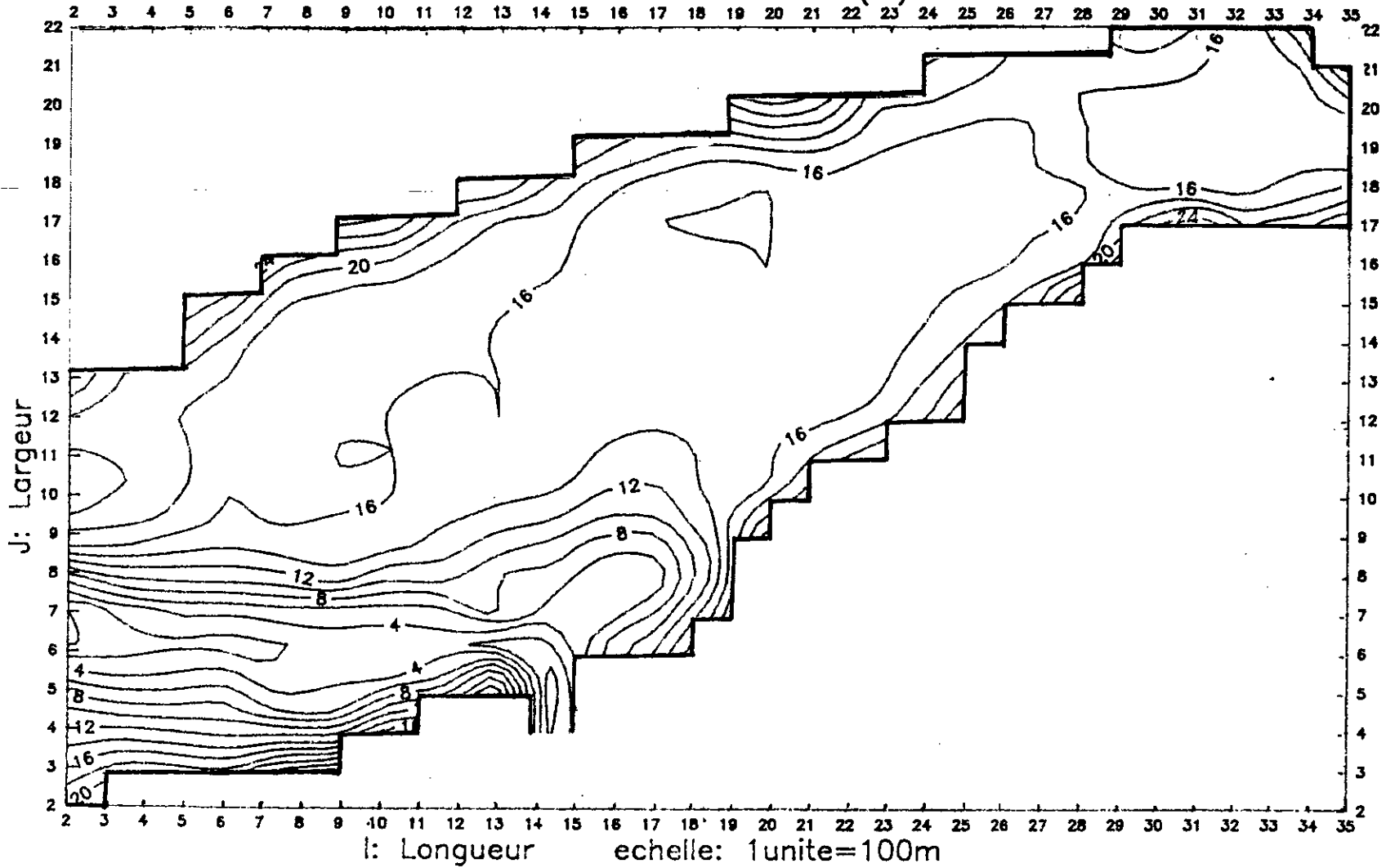
Pour nous permettre de vérifier et de tester les performances ainsi que la fiabilité du modèle mis au point; nous avons retenu une application portant sur un exemple répondant dans une certaine mesure à l'ensemble des conditions requises pour cet usage. Cet exemple est un ouvrage hydraulique, de configuration naturelle, alimenté par l'échappement d'une turbine hydraulique avec un débit liquide et un débit solide tous les deux constants.

Il convient, compte tenu des difficultés rencontrées à trouver un cas d'application approprié, de préciser que l'exemple que nous retenons ne constitue pas tout à fait l'idéal, car les valeurs devant servir de base de comparaison sont obtenues à partir d'une simulation découlant d'un modèle mathématique qui utilise les mêmes concepts que ceux que nous avons établis; sauf pour le modèle de transport où la méthode numérique utilisée est toutefois différente.

Cet exemple d'application, à défaut de mieux, peut être considéré comme une approche acceptable permettant, dans une certaine mesure, une comparaison objective.



BATHYMETRIE DU FOND (m)



I2 -Caractéristiques physiques et géométriques

Pour finaliser cette étude, nous nous proposons d'appliquer le modèle bidimensionnel de transport de sédiments développé dans ce mémoire à un ouvrage hydraulique de caractéristiques géométriques, physiques et hydrauliques connues.

Notons que le calcul du transport, ne s'effectue qu'après un certain temps nécessaire pour que l'écoulement devienne permanent ; le débit d'alimentation à cet instant est de $Q = 3400 \text{ m}^3/\text{s}$.

A l'instant $T_h = T_0$ (T_h pour le modèle hydrodynamique) ; la cote de la surface libre est $H_0 = 28 \text{ m}$, les débits spécifiques sont nuls. Et à l'instant $T_c = T_0$ (T_c pour que le modèle de transport), la concentration des particules solides est nulle partout sauf à l'entrée de l'ouvrage où une concentration permanente de 5 g/l est imposée.

LES CARACTERISTIQUES ESSENTIELLES DE L'OUVRAGE SONT :

LA largeur d'entrée dans l'ouvrage, $L = 200 \text{ m}$.

Le débit d'eau à l'instant initial $Q_{in} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$.

La masse volumique (supposée constante) du fluide porteur est de 1000 kg/m^3 .

La masse volumique des particules (du sable fin) est de 2650 kg/m^3 .

La contrainte de dépôt $\tau_d = 0.1 \text{ N/m}^2$.

le coefficient de rugosité de MANNING est $N = 0.025$.

la constante de VON KARMAN $G_k = 0.4$.

la vitesse du vent à 10 m de la surface libre est de $V = 10 \text{ m/s}$.

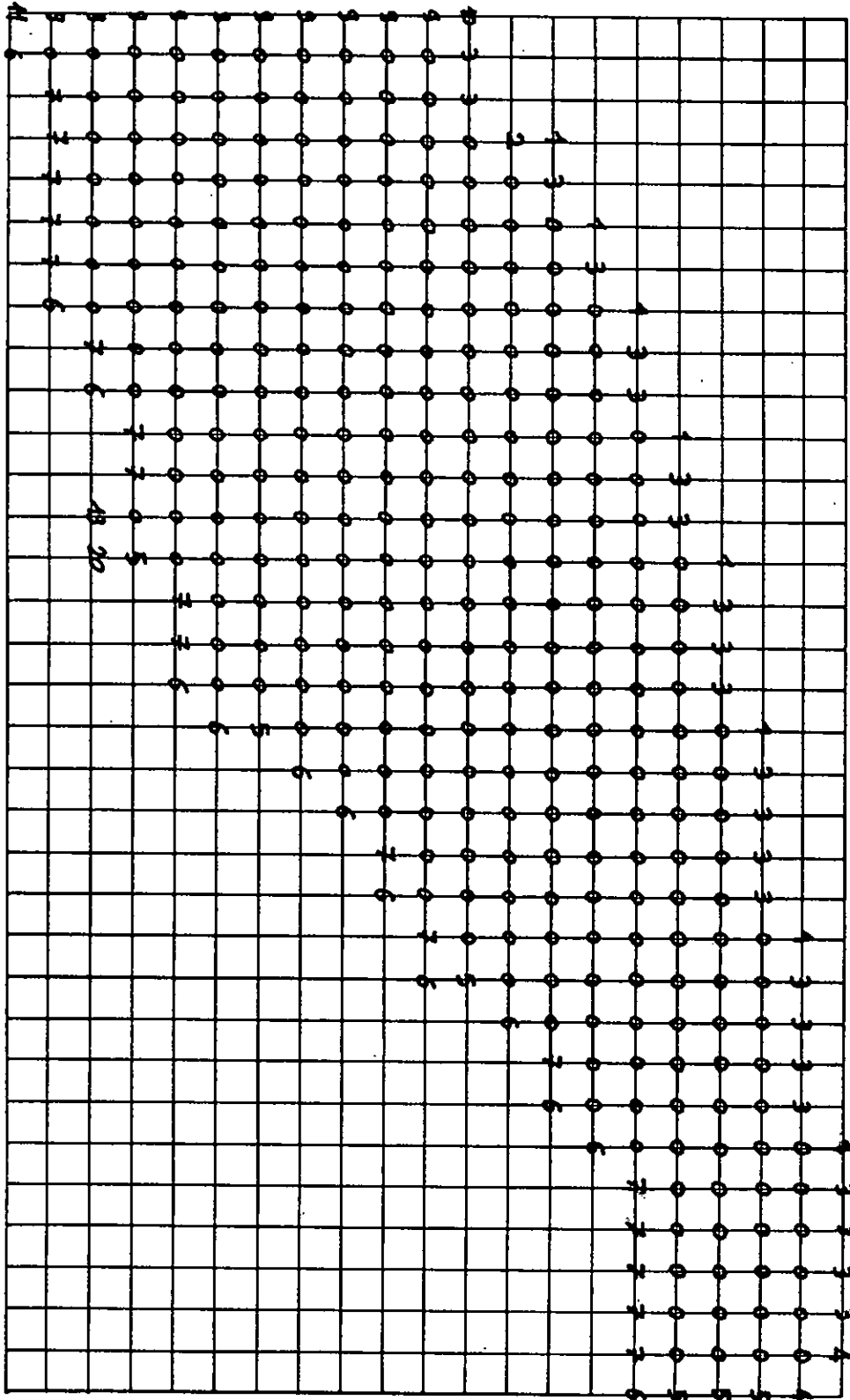
13- Caractéristiques hydrodynamiques

La configuration hydrodynamique qui prévaut dans l'ouvrage hydraulique constituant notre exemple dépend essentiellement du débit d'alimentation provenant de l'échappement d'une turbine .

En effet à l'état initial correspondant à un débit d'alimentation nul, l'ensemble du système considéré est au repos, et aucun écoulement n'a lieu.

Cette situation se traduit par un champ de vitesse nul à tout endroit et une cote de la surface libre de l'eau égale à 28m. Dès que le débit d'alimentation commence à croître et ce entre $T=0s$ et $30s$ il s'établit un écoulement transitoire non permanent . Au delà de $30s$ le débit cesse de croître, et se stabilise à $3400m^3/s$ alors que l'écoulement lui continue à être non permanent et ce jusqu'à l'instant correspondant à $T=3600s$. Au delà de cette limite l'écoulement devient permanent et le champ hydrodynamique qui s'établit alors, est utilisé comme donnée d'entrée pour la simulation du transport en suspension de l'exemple considéré.

IA - SCHEMATISATION DU CODE NUMERIQUE
(CONDITIONS AUX LIMITES) DONNEES GENERALES



CHAPITRE II

II- Comparaison des résultats

III -Conditions de comparaison

Le modèle développé permet de simuler l'ensemble des cas liés au transport hydraulique de sédiments satisfaisant aux hypothèses de base citées au début de cette étude.

Cependant vu son caractère générale dû essentiellement aux concepts ayant servi pour son élaboration ; une adaptation est souvent nécessaire. Cette adaptation porte, sur certaines conditions ou paramètres caractérisant le modèle vis à vis du cas à simuler.

Pour le cas qui nous intéresse, toutes les conditions fondamentales sont concordantes, sauf pour les coefficients de viscosités turbulentes qui sont variables pour le modèle établi et constantes pour le cas considéré. Aussi est il donc nécessaire, pour obtenir une comparaison objective, d'adapter le modèle à cette exigence en considérant ces coefficients comme constants.

II2 - COURBES ET RESULTATS

II2.1 Pour un coefficient de viscosité turbulente variable :

$$EPS = f(K, u, v)$$

II2.2 Pour un coefficient de viscosité turbulente constant :

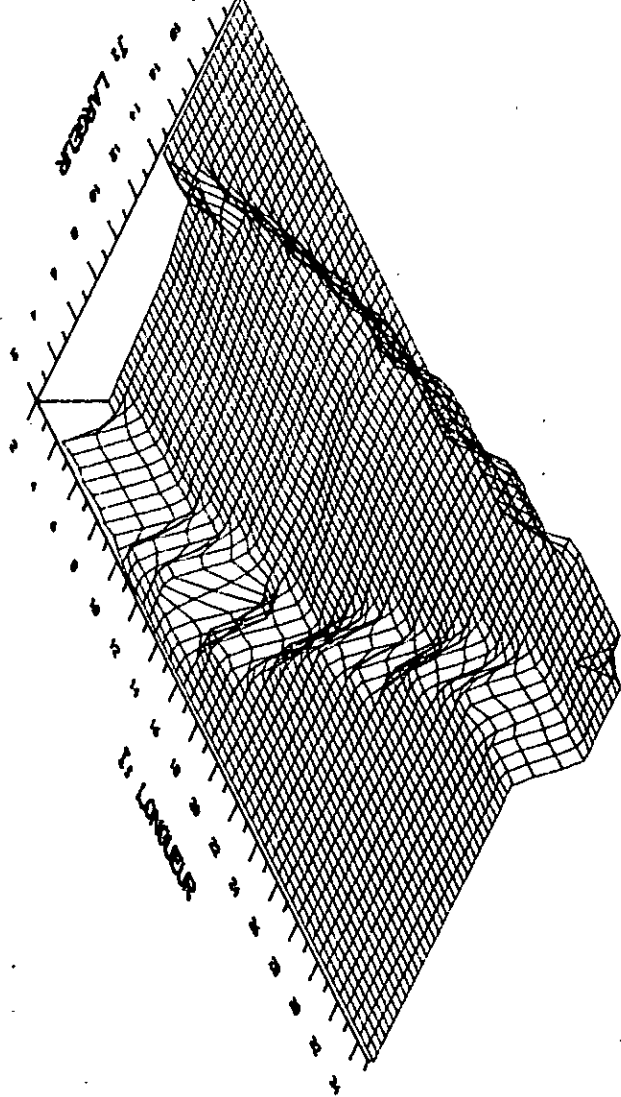
$$EPS = 1.$$

H2.1 - EPS = f(H,u,v)

H, I, J : TIRANT D'EAU (m)

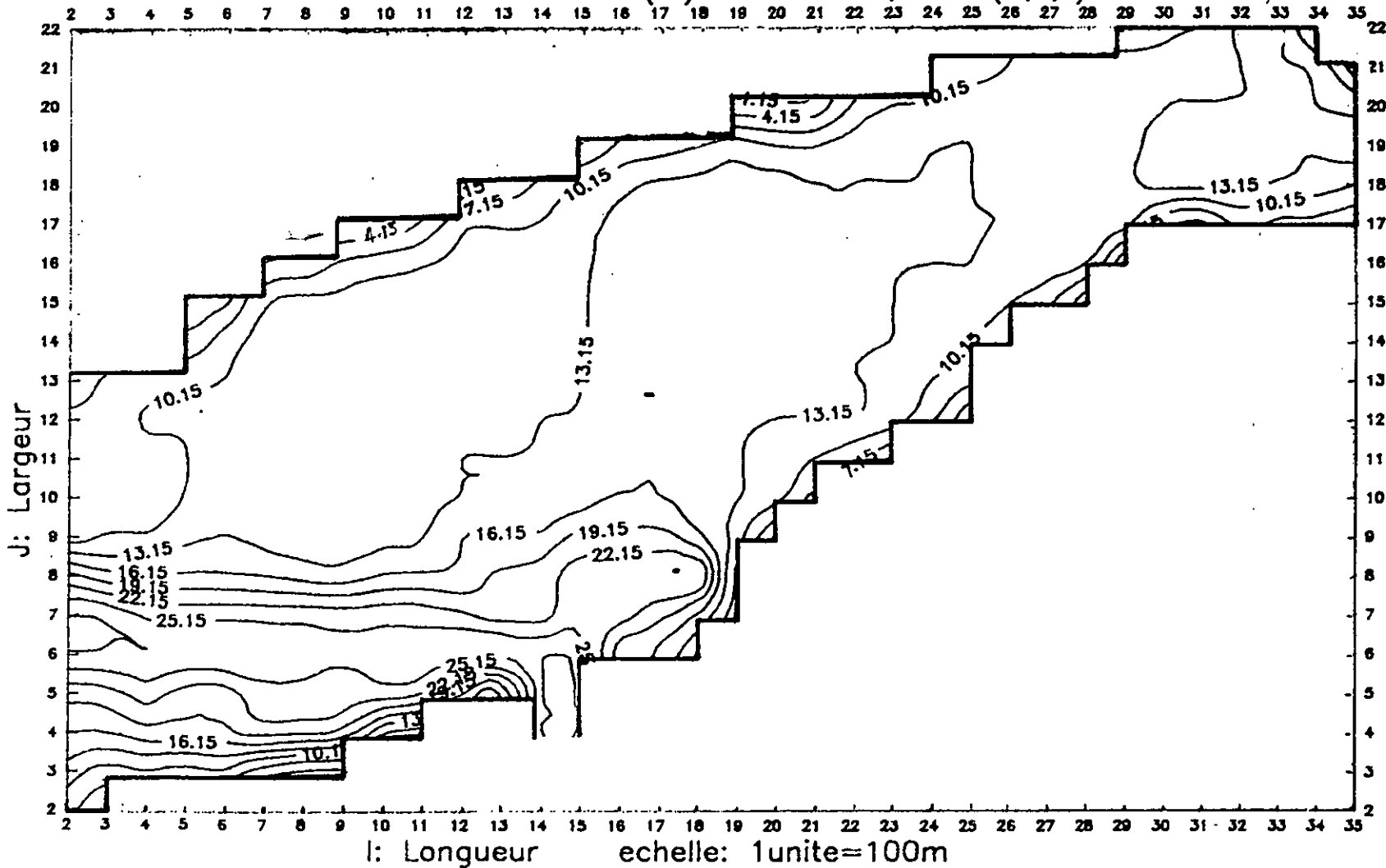
28. 828. 228. 428. 628. 828. 0

Handwritten scribbles

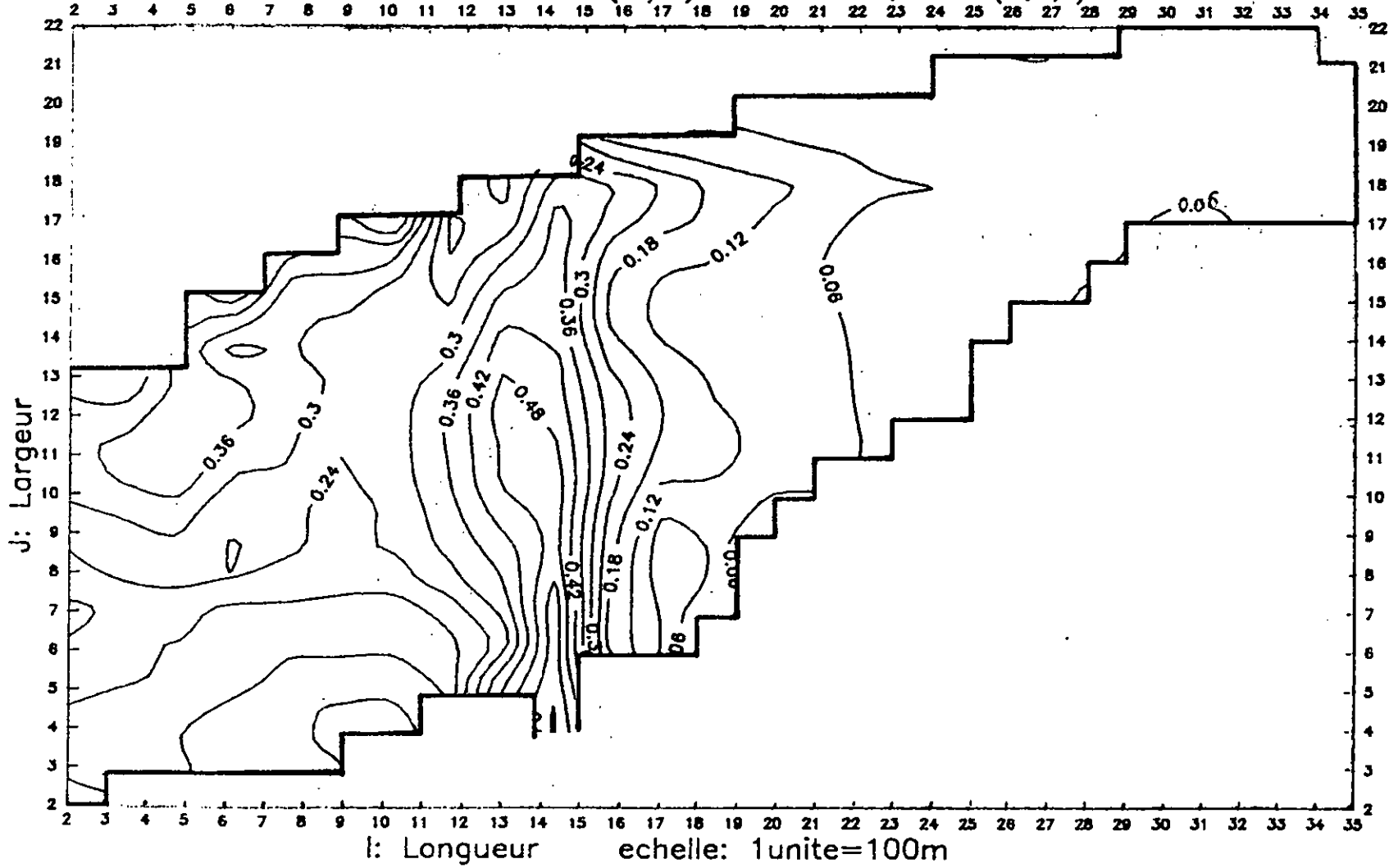


Modelo hidrodinámico EPS-r(H,u,v) • TH-3600

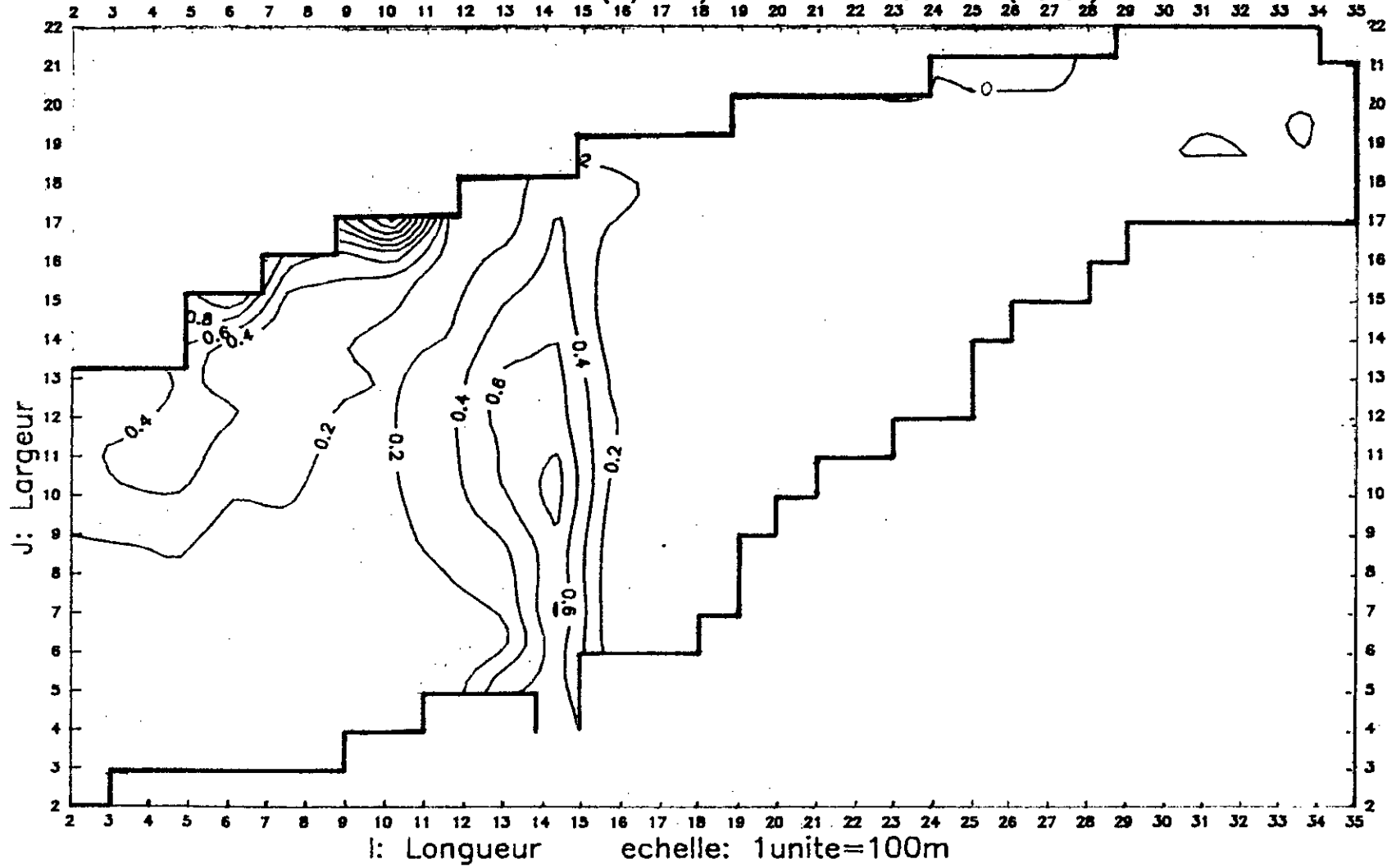
HAUTEUR D'ECOULEMENT (m) TH=3600s ,EPS=f(H,u,v)



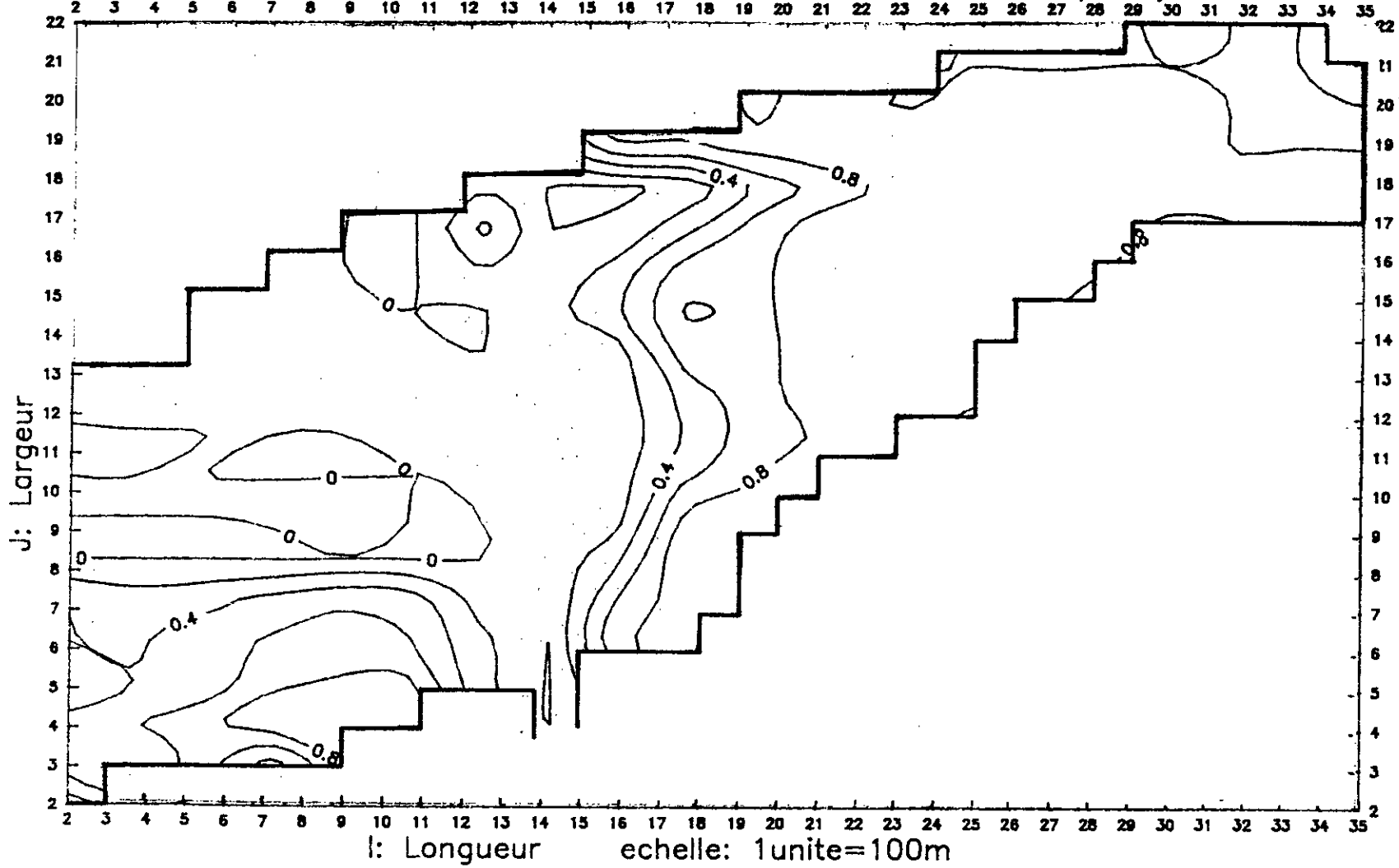
VITESSE D'ECOULEMENT (m/s) TH=3600s ,EPS=f(H,u,v)



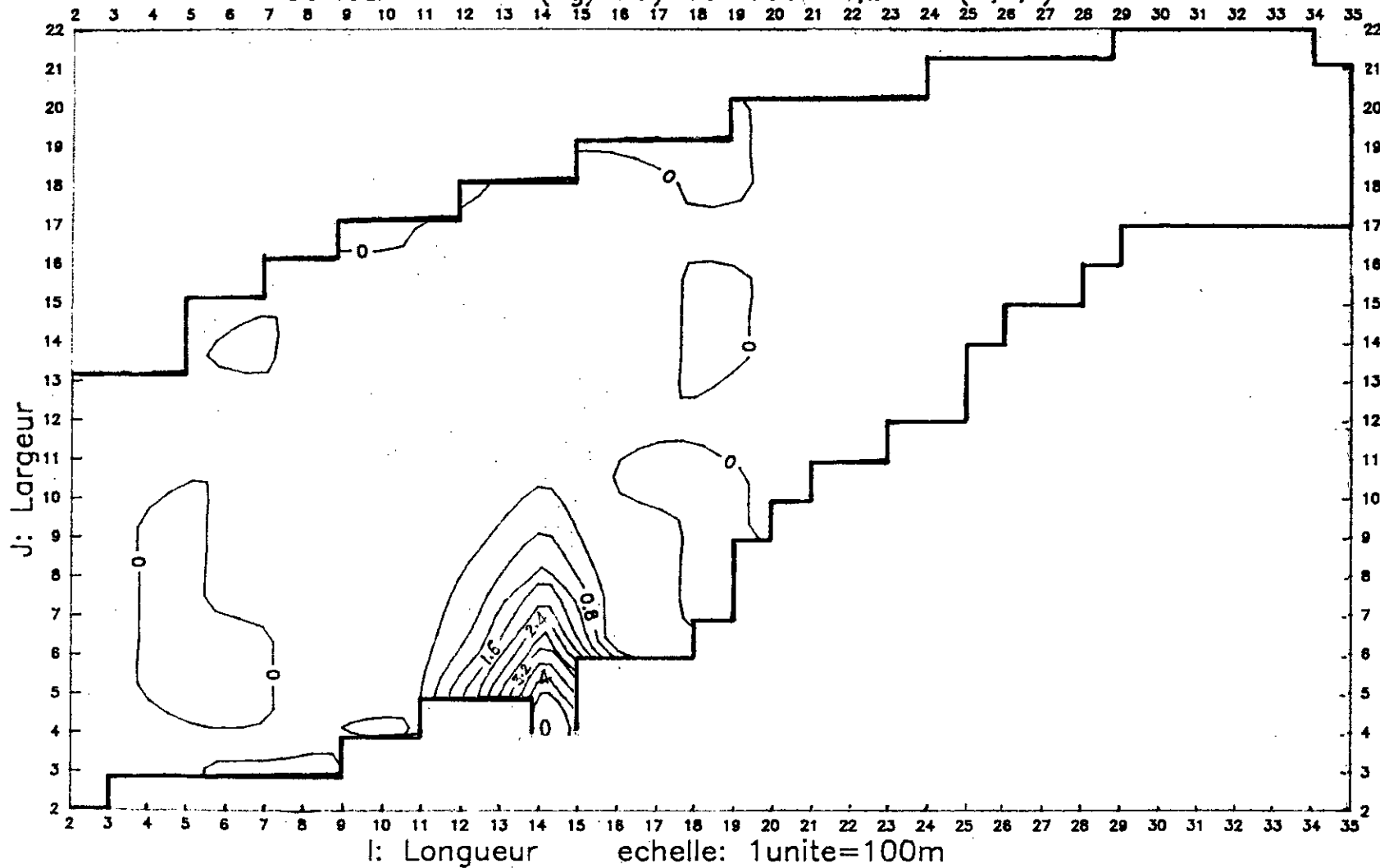
CISAILLEMENT AU FOND (N/m²) TH=3600s ,EPS=f(H,u,v)



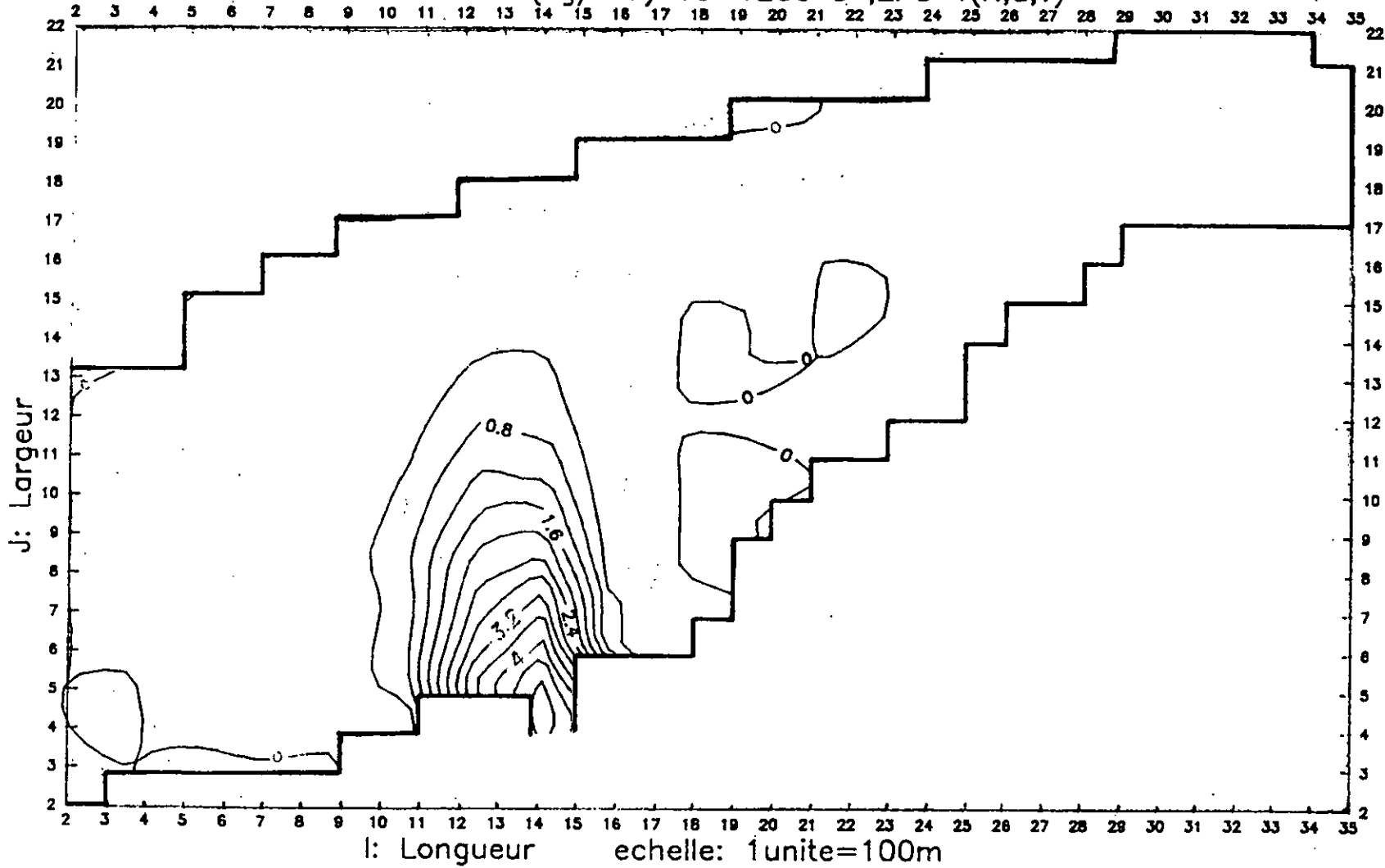
PROBABILITE DE DEPOT DES SEDIMENTS TH=3600 s ,EPS=f(H,u,v)



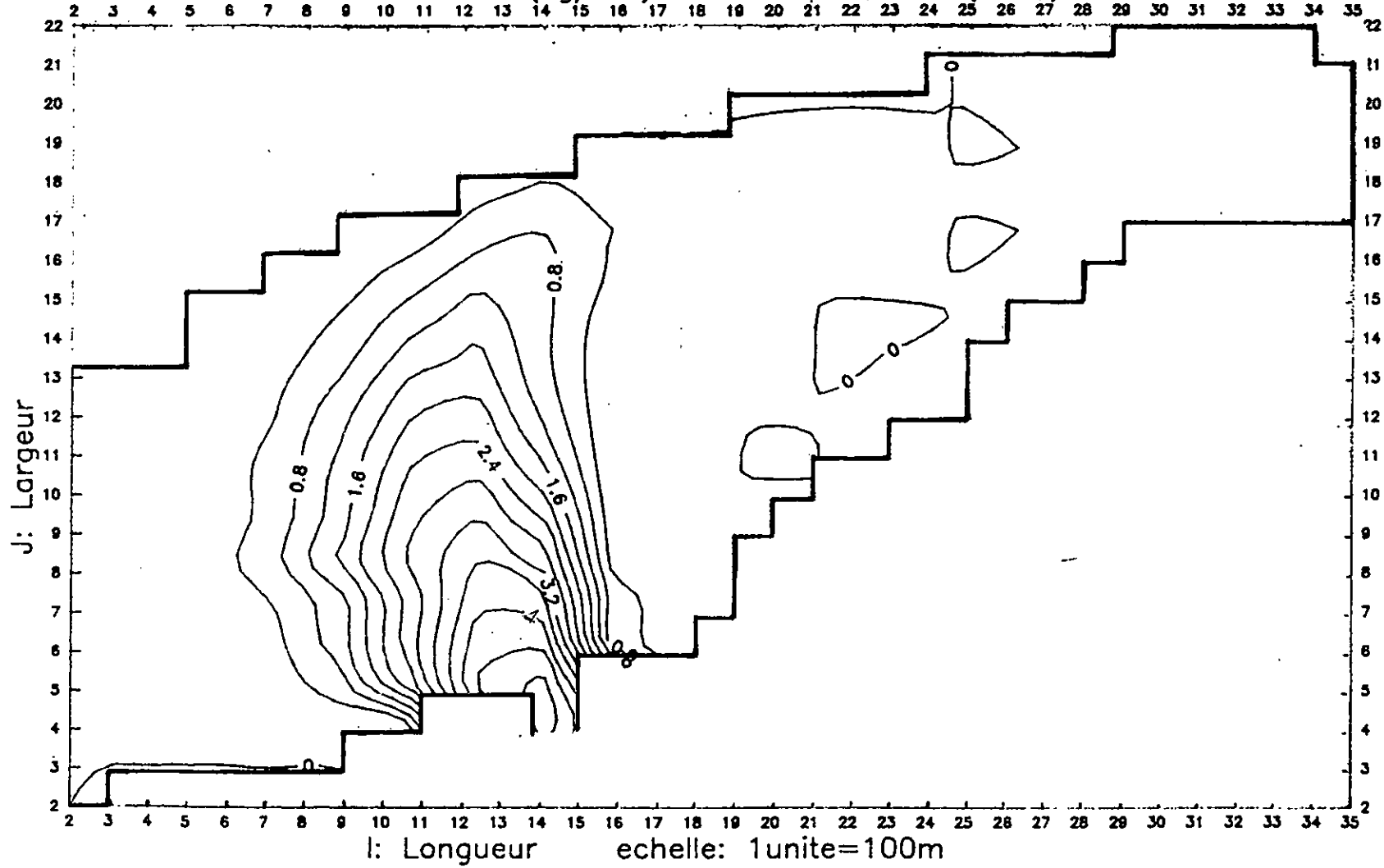
CONCENTRATION (kg/m³) TC=600 s ,EPS=f(H,u,v)



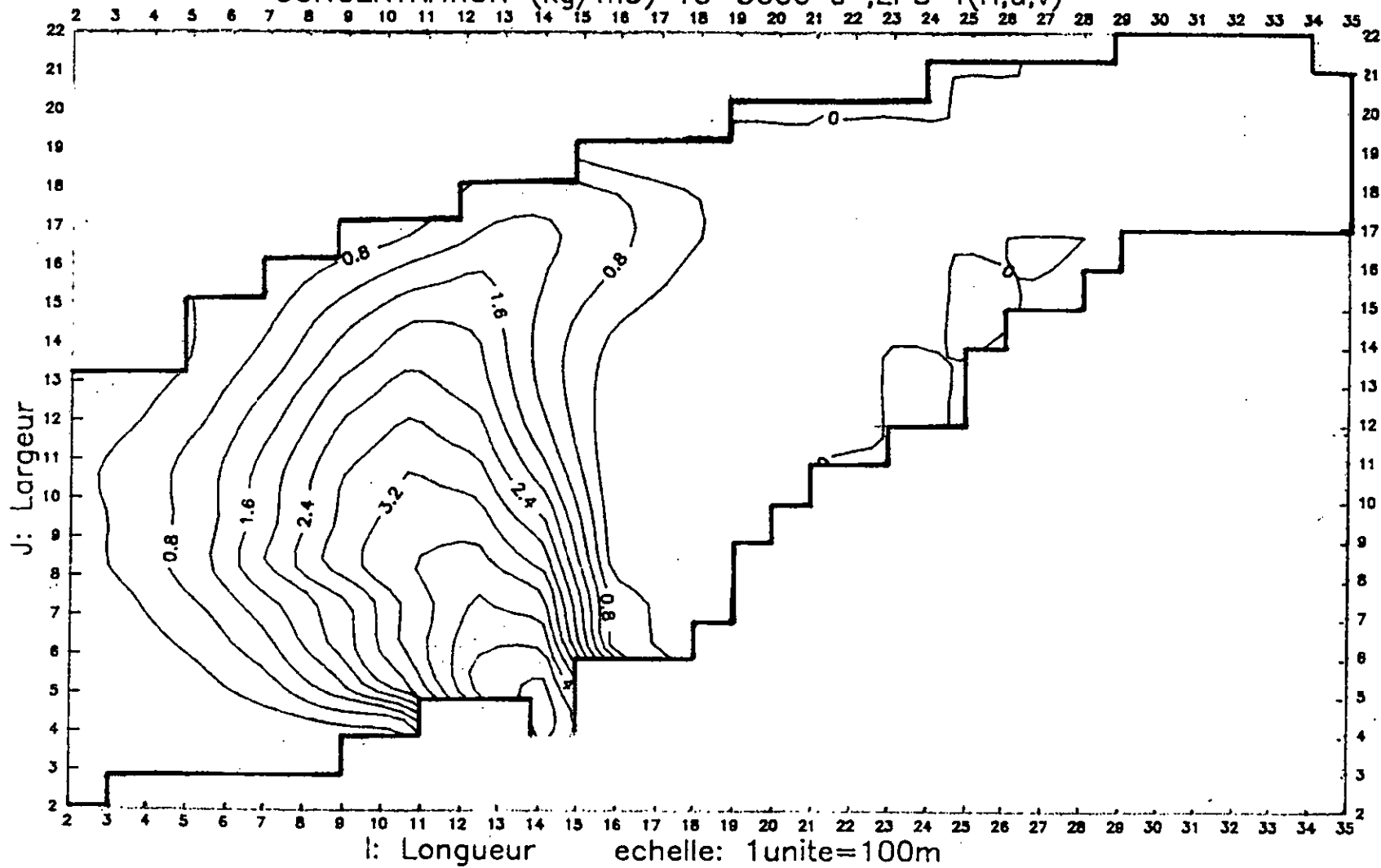
CONCENTRATION (kg/m³) TC=1200 s ,EPS=f(H,u,v)



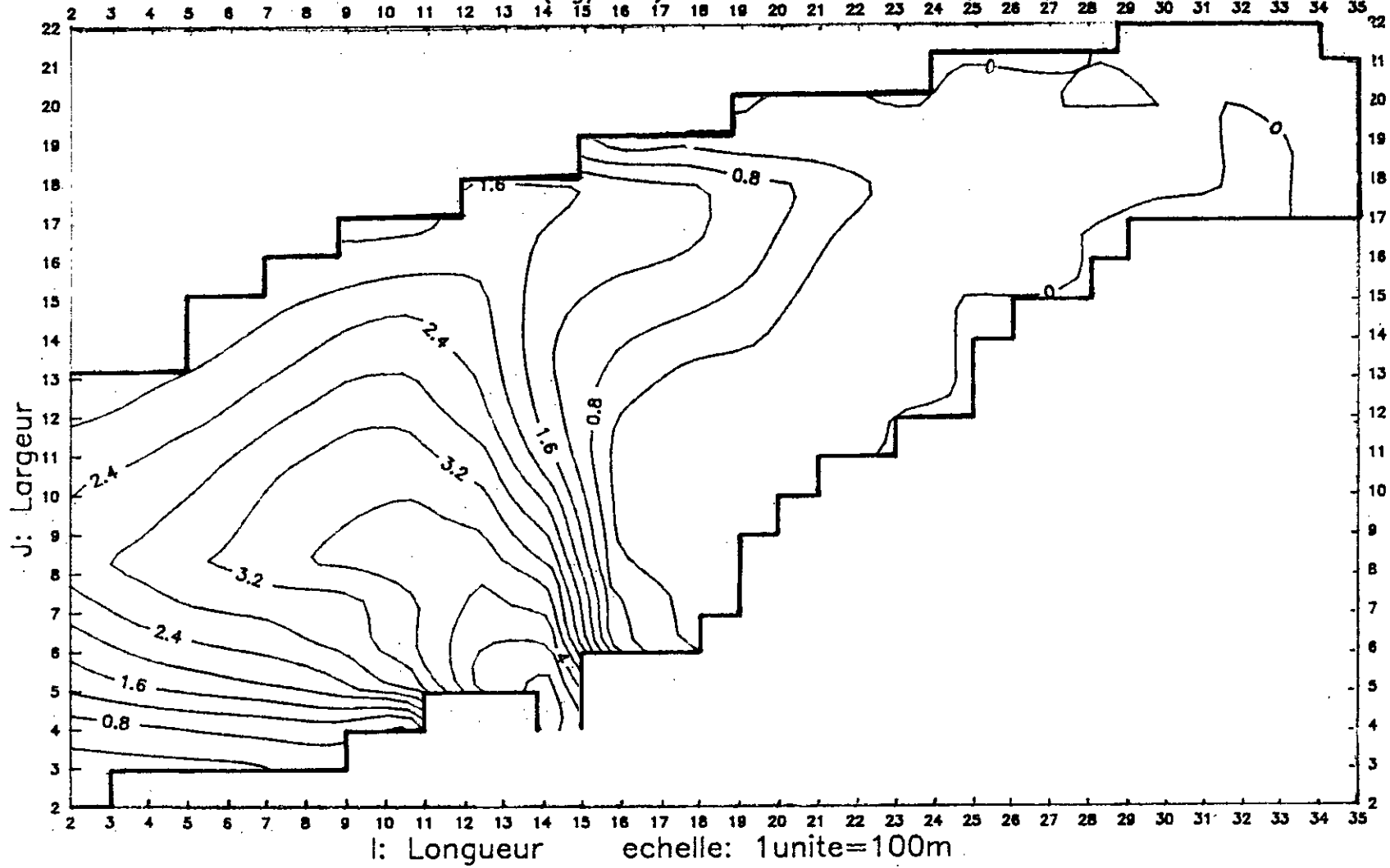
CONCENTRATION (kg/m³) TC=2400 s ,EPS=f(H,u,v)



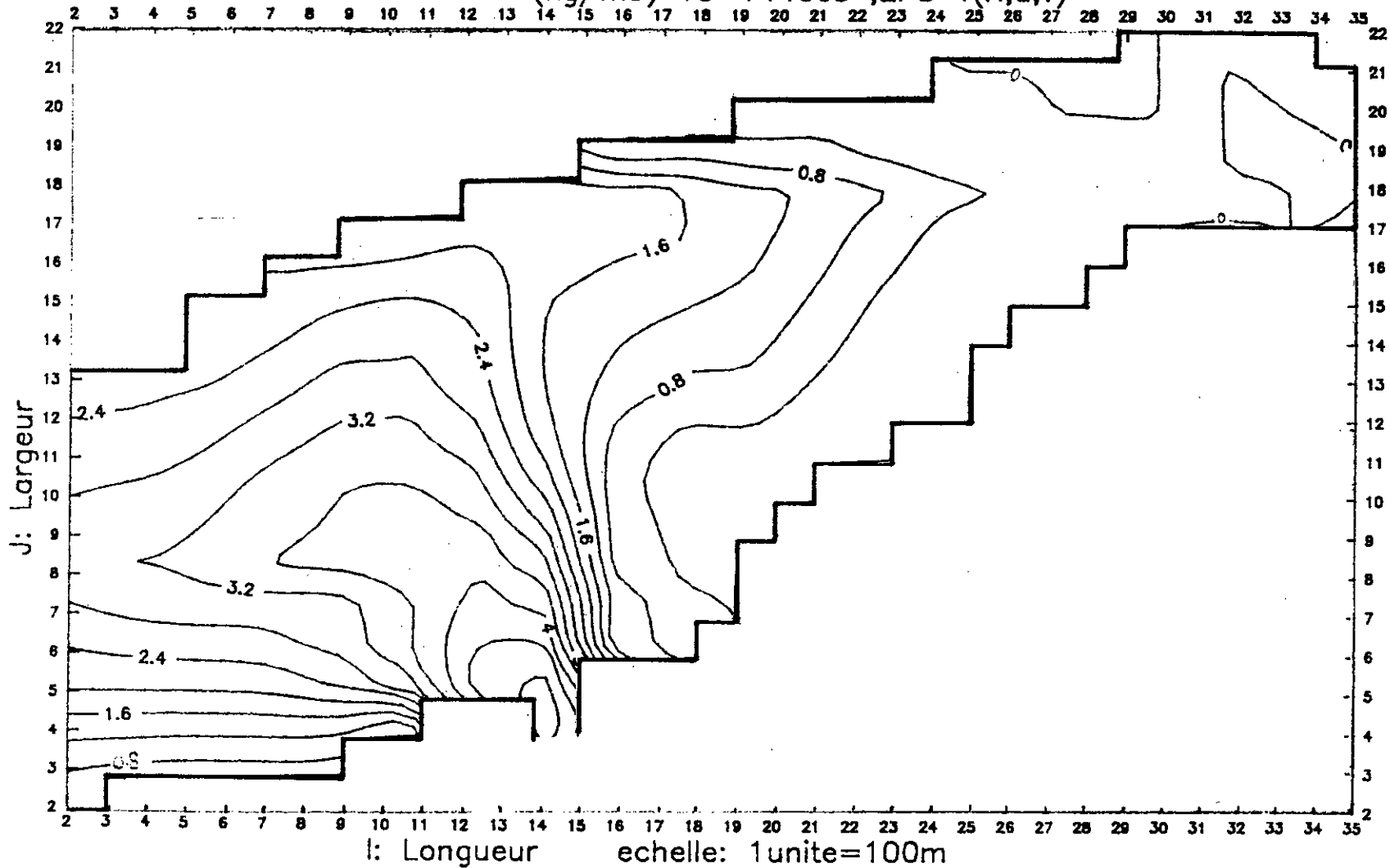
CONCENTRATION (kg/m³) TC=3600 s ,EPS=f(H,u,v)



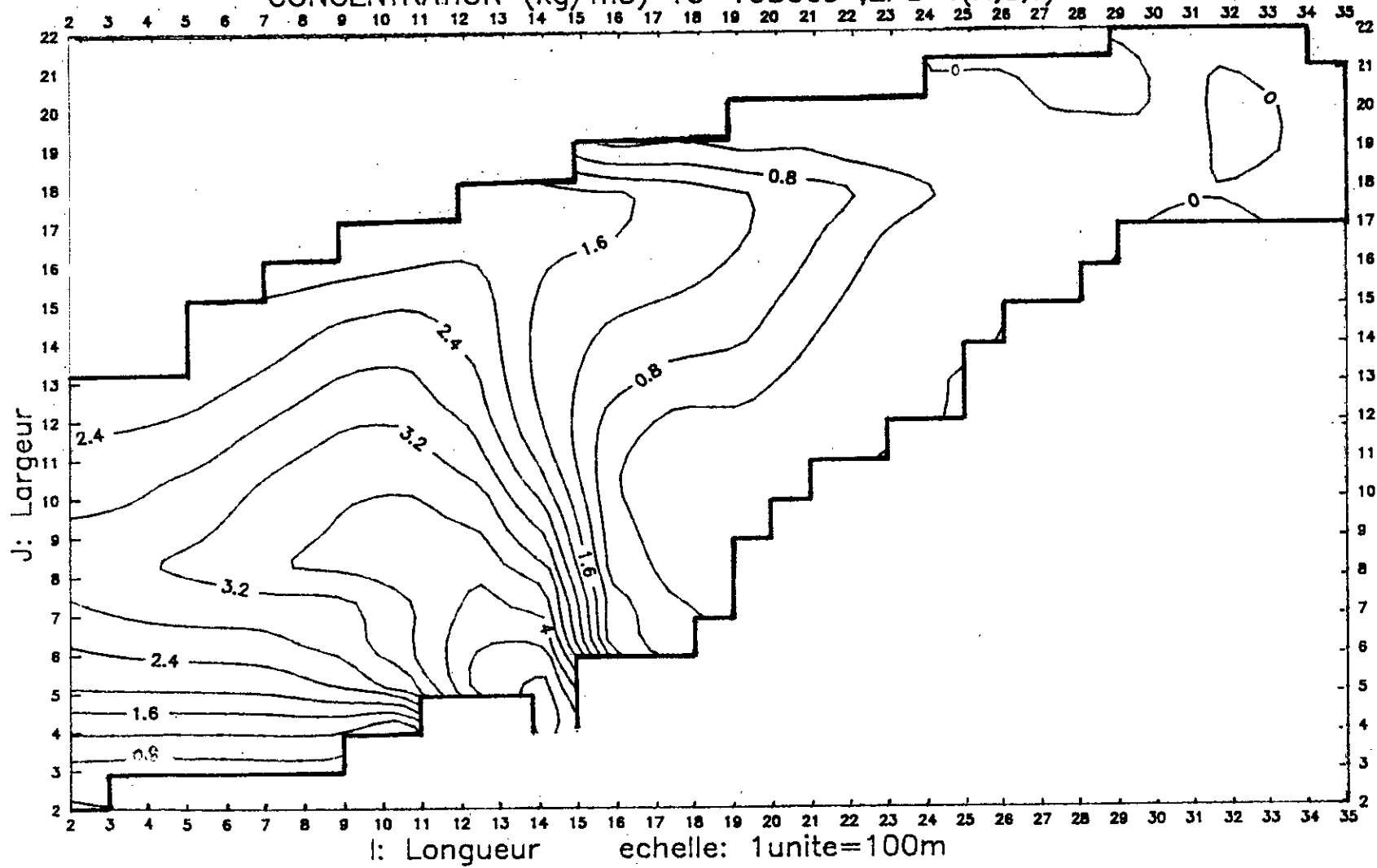
CONCENTRATION (kg/m³) TC=7200s EPS=f(H,u,v)



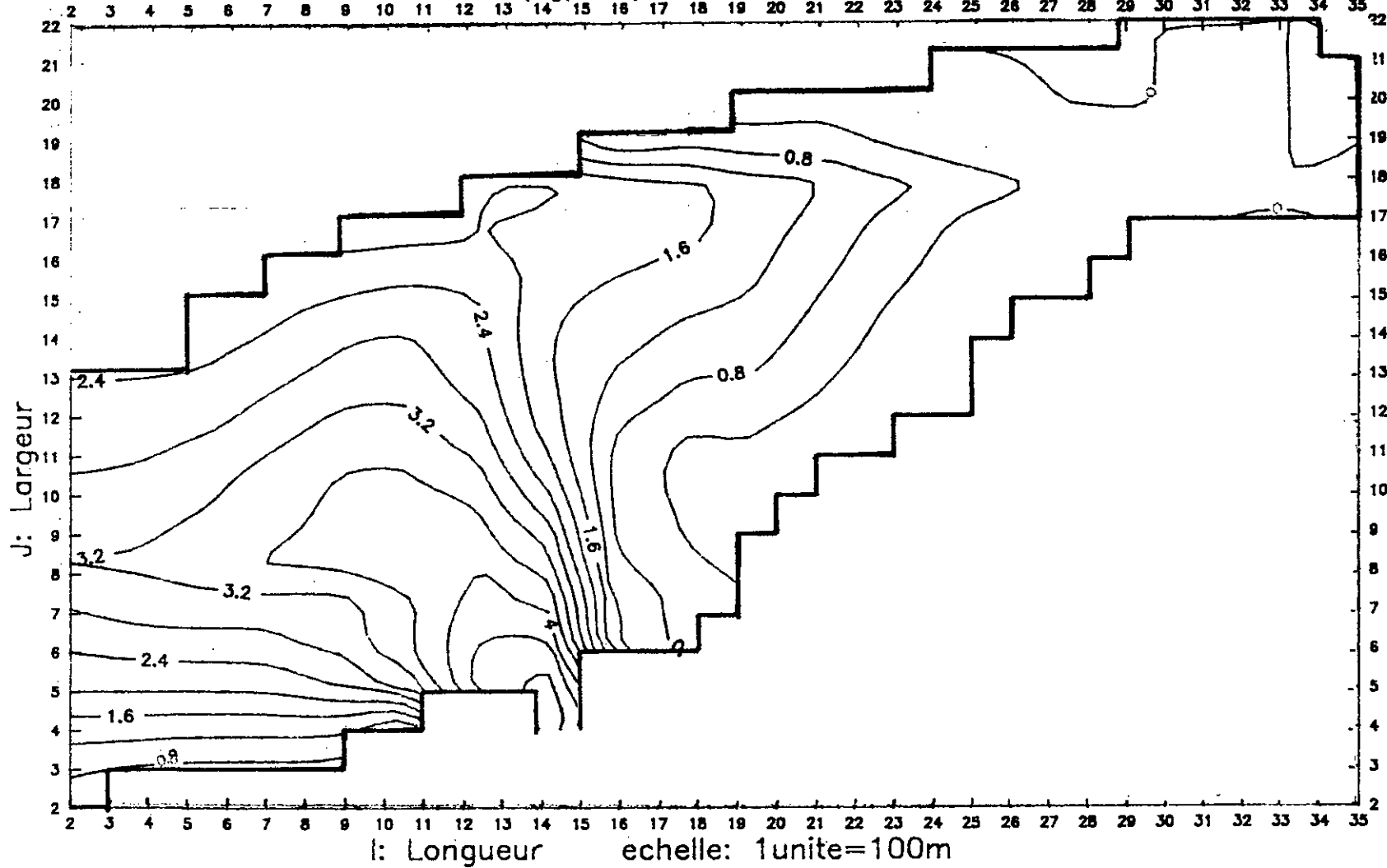
CONCENTRATION (kg/m³) TC=14400s ,EPS=f(H,u,v)



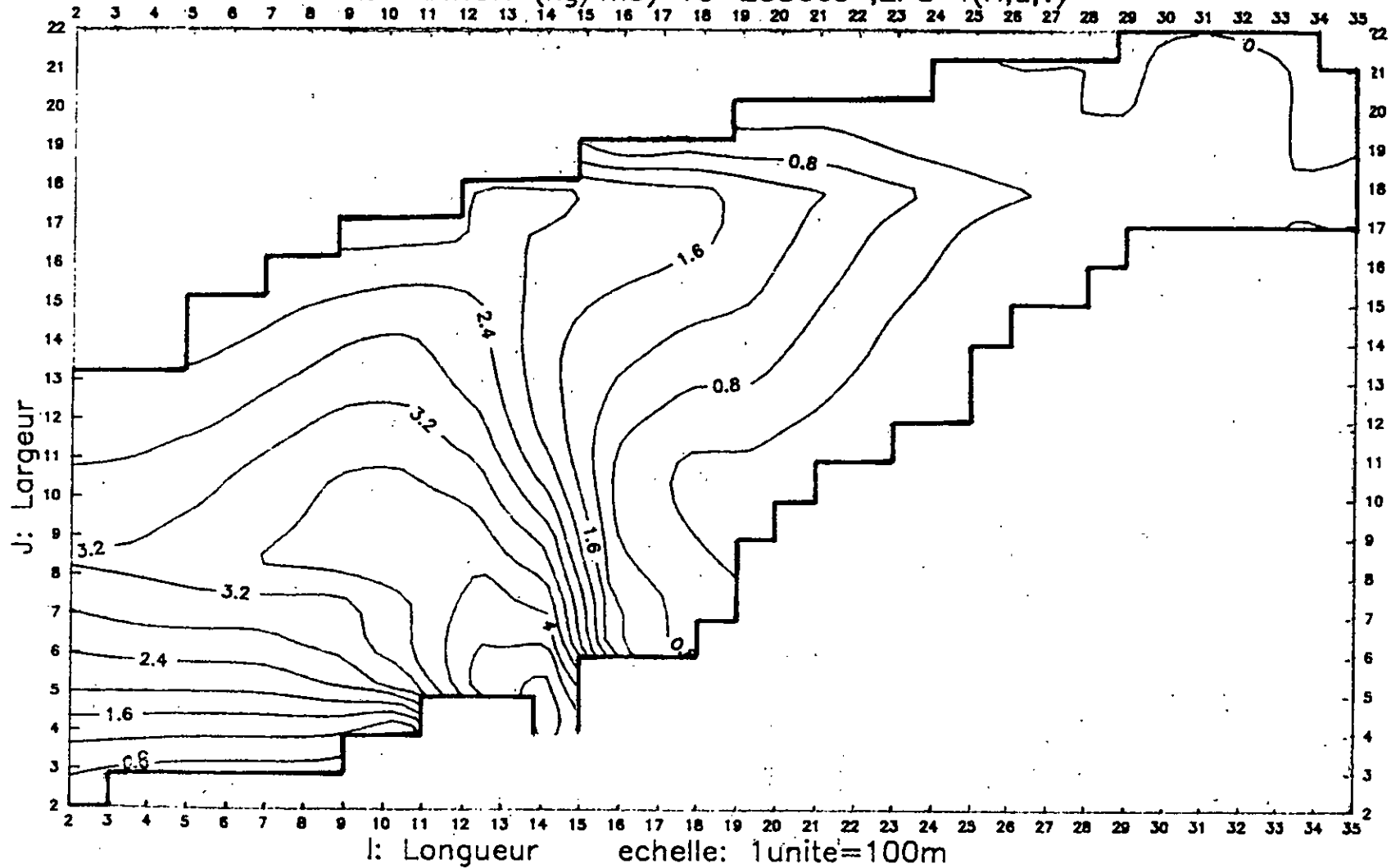
CONCENTRATION (kg/m³) TC=10800s ,EPS=f(H,u,v)



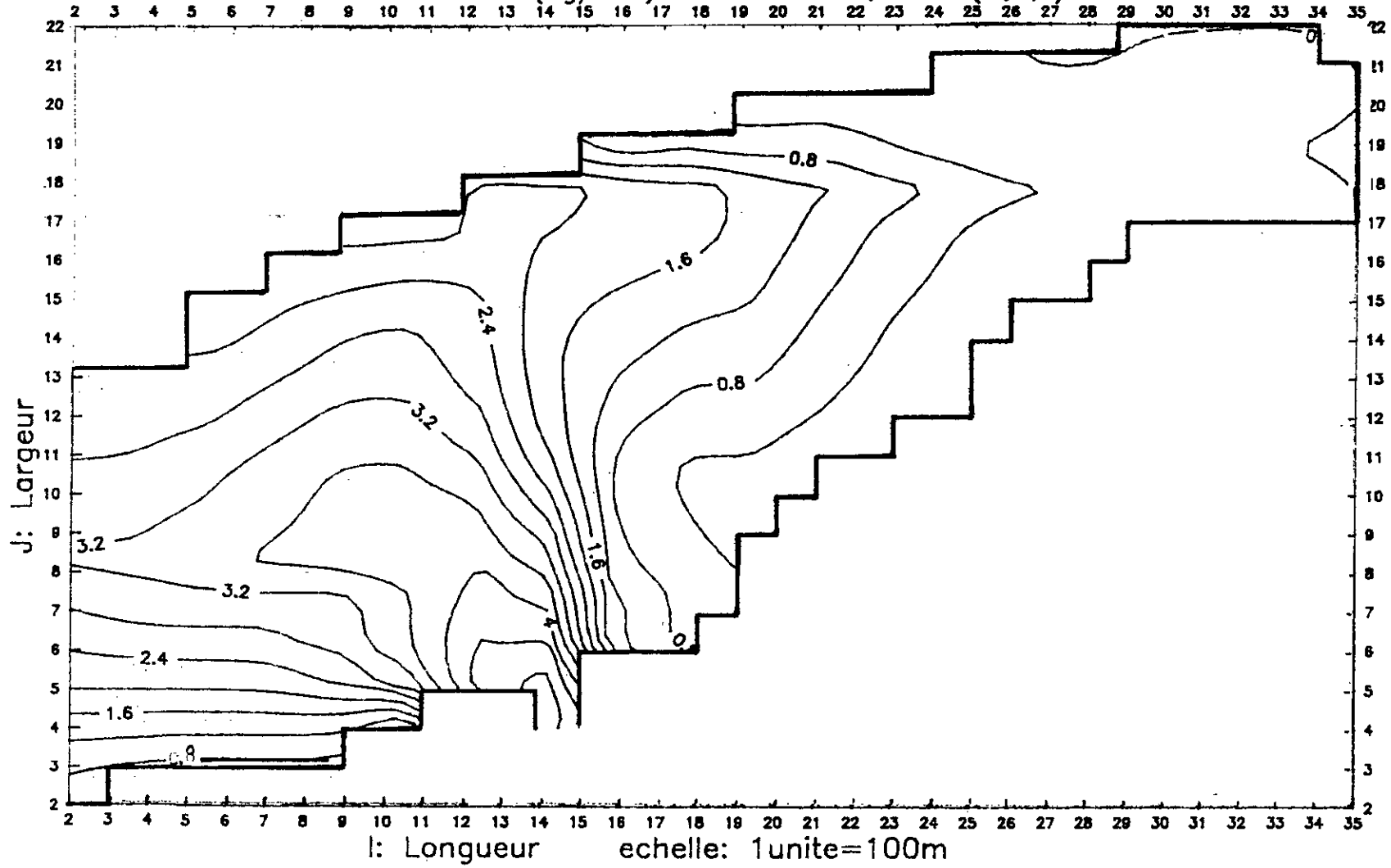
CONCENTRATION (kg/m³) TC= 21600s ,EPS=f(H,u,v)



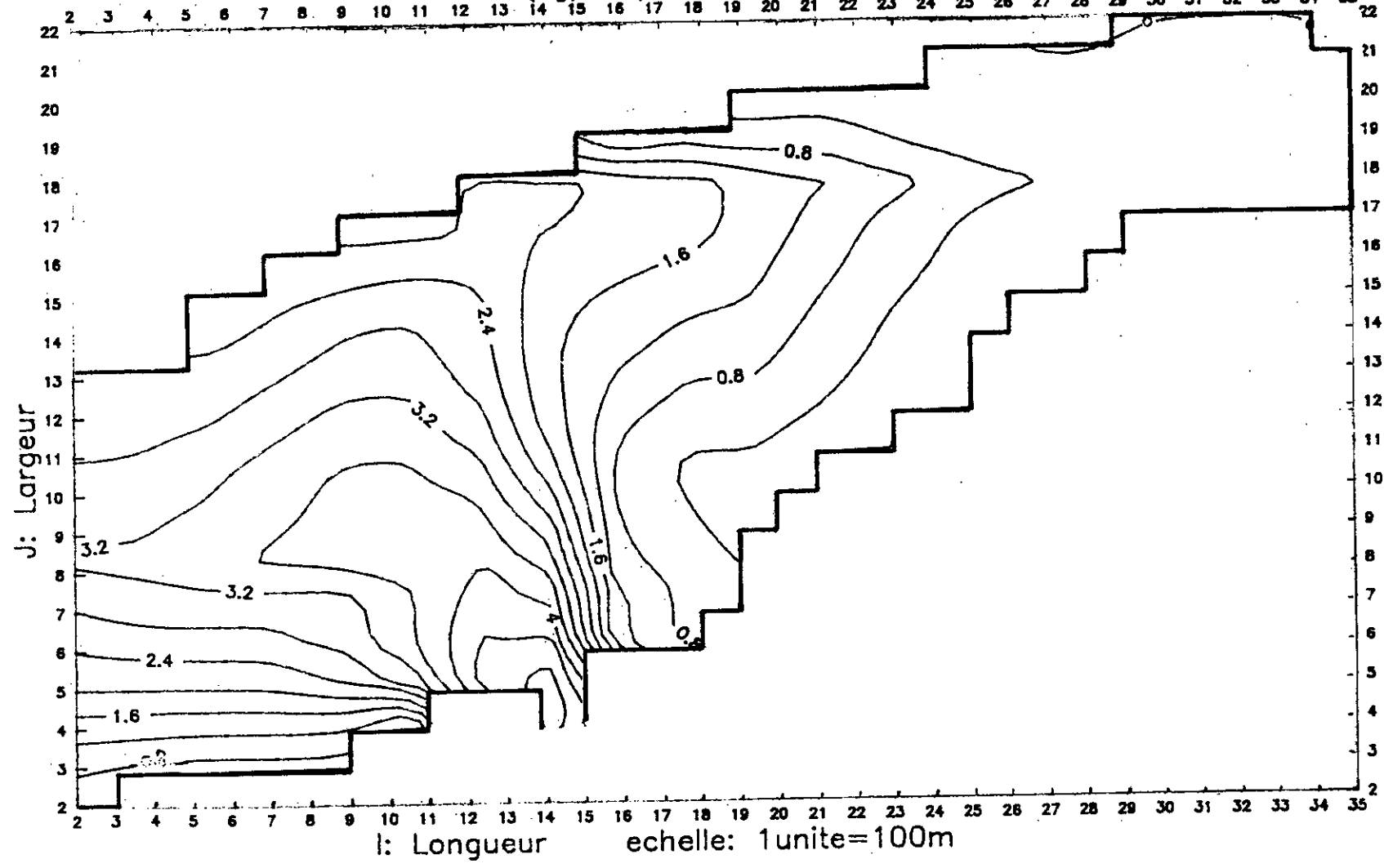
CONCENTRATION (kg/m³) TC=28800s ,EPS=f(H,u,v)



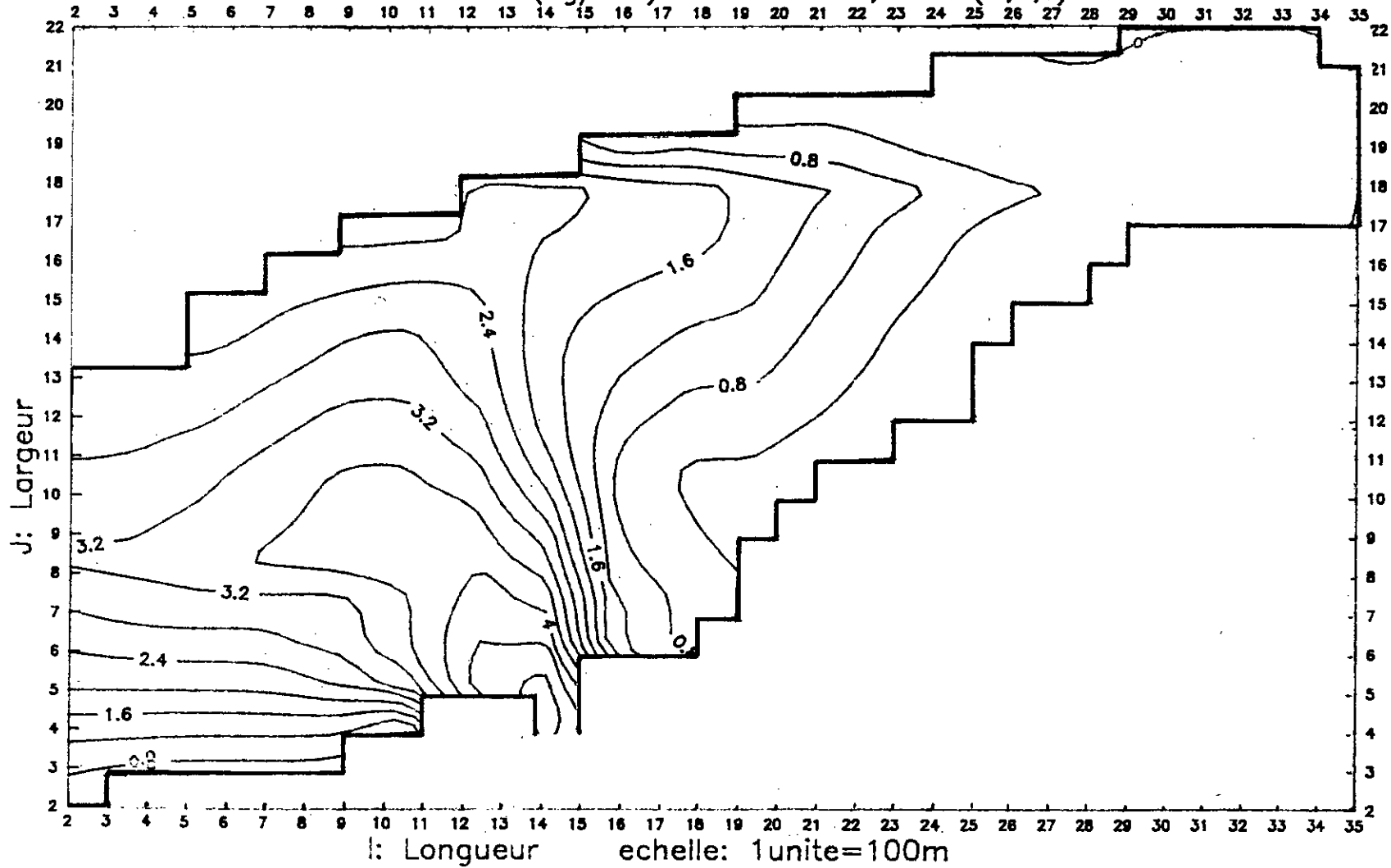
CONCENTRATION (kg/m³) TC=43200s ,EPS=f(H,u,v)



CONCENTRATION (kg/m³) TC=50400s ,EPS=f(H,u,v)

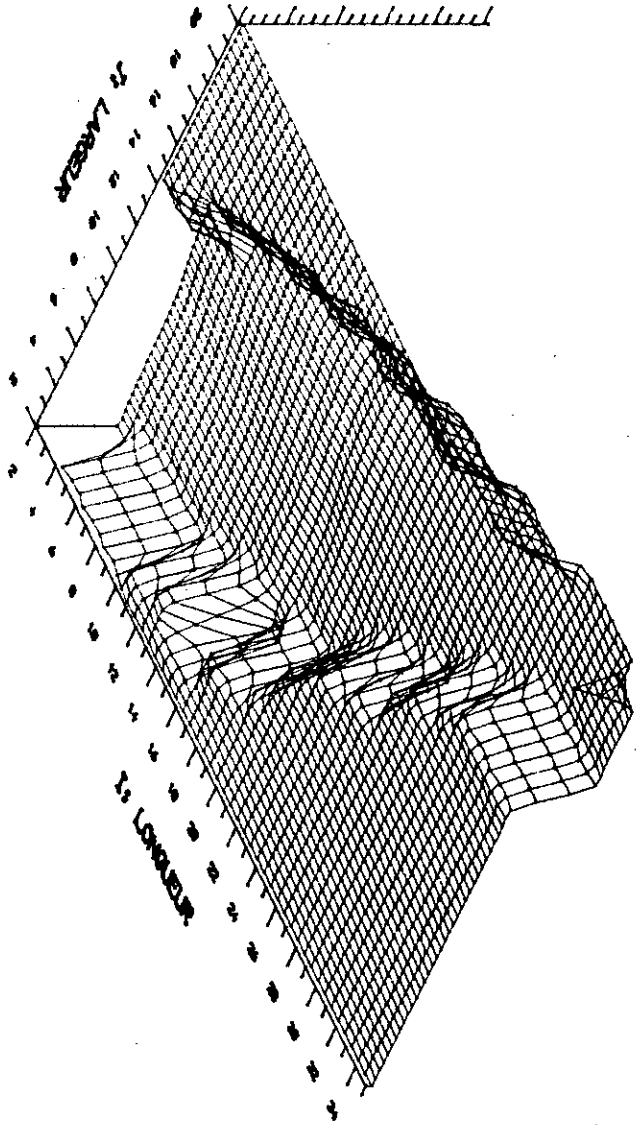


CONCENTRATION (kg/m³) TC=64800s ,EPS=f(H,u,v)



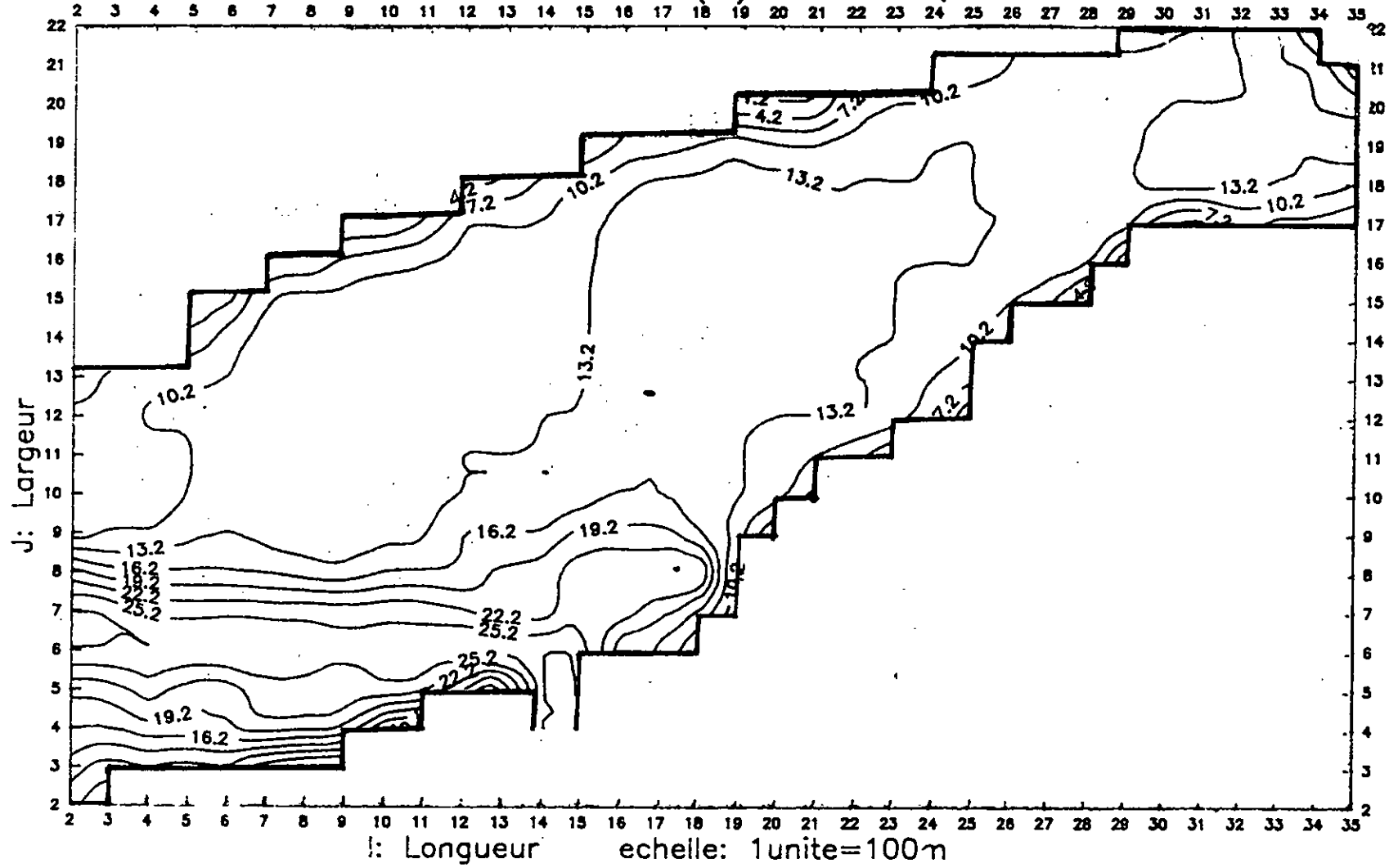
H. I. J. : TIRANT D'EAU (m)

† 20, 220, 220, 420, 620, 820, 0

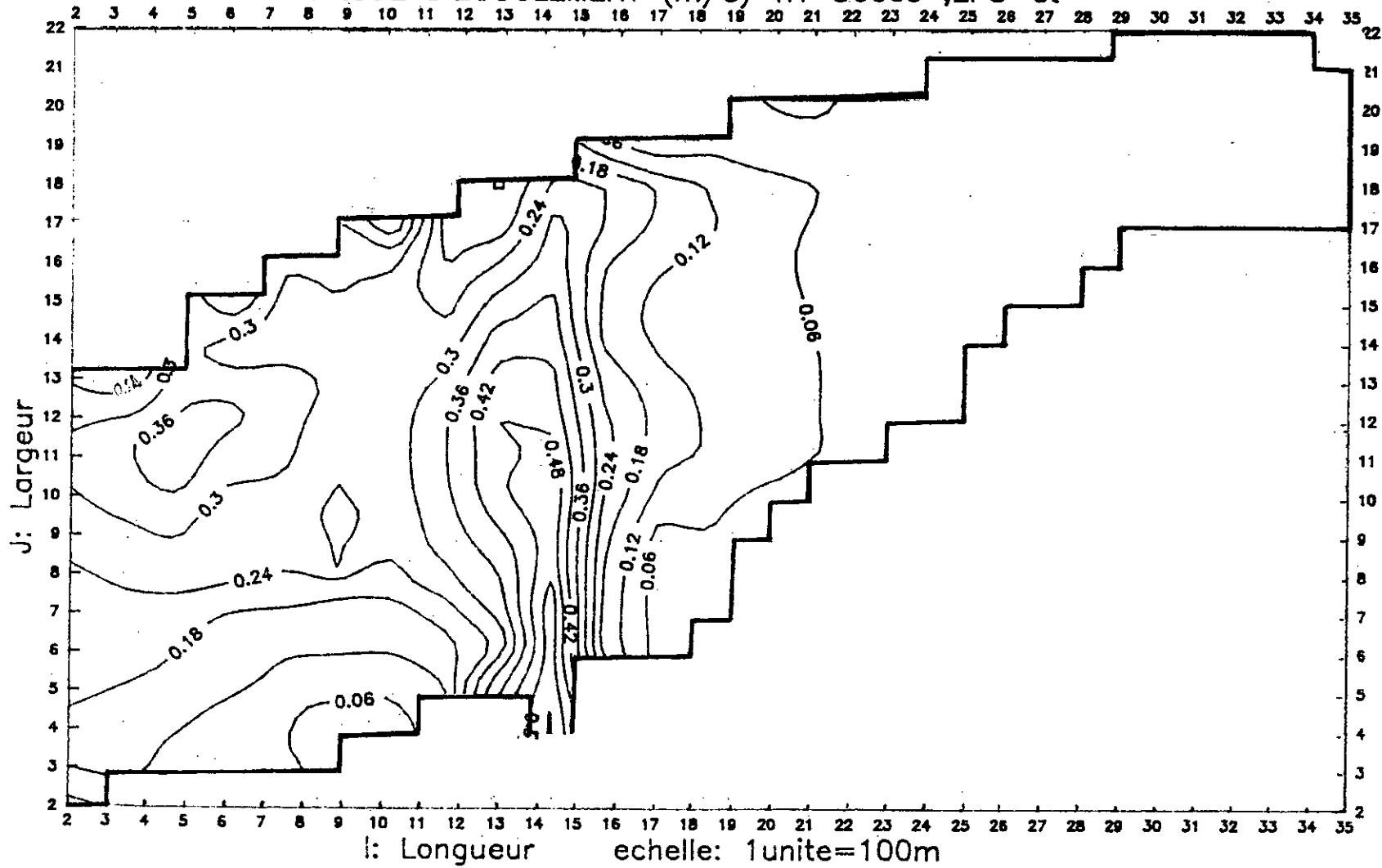


Modelo hidrodinamico EPS-01 • TH-36000

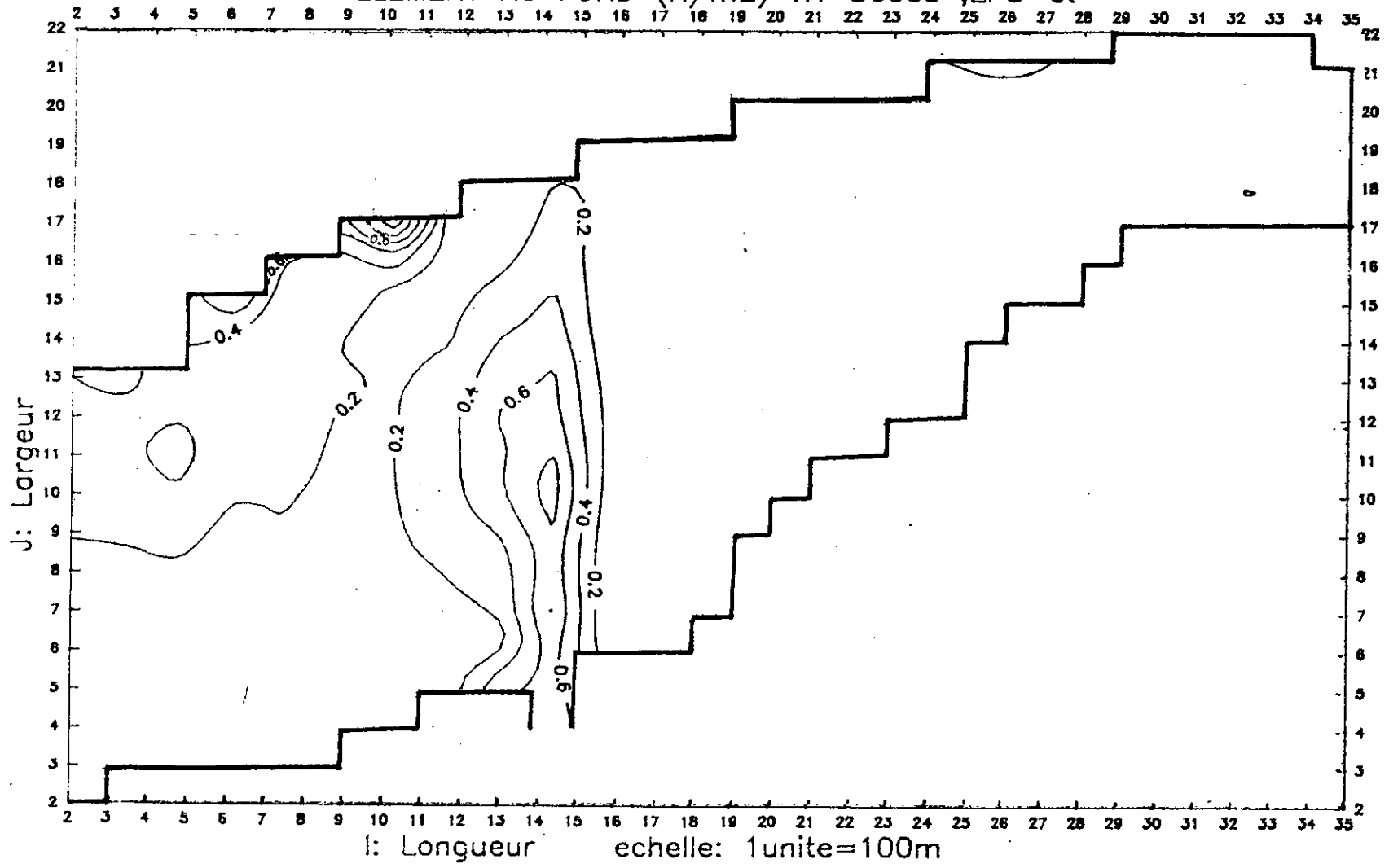
HAUTEUR D'ECOULEMENT(m) TH=3600s ,EPS=ct



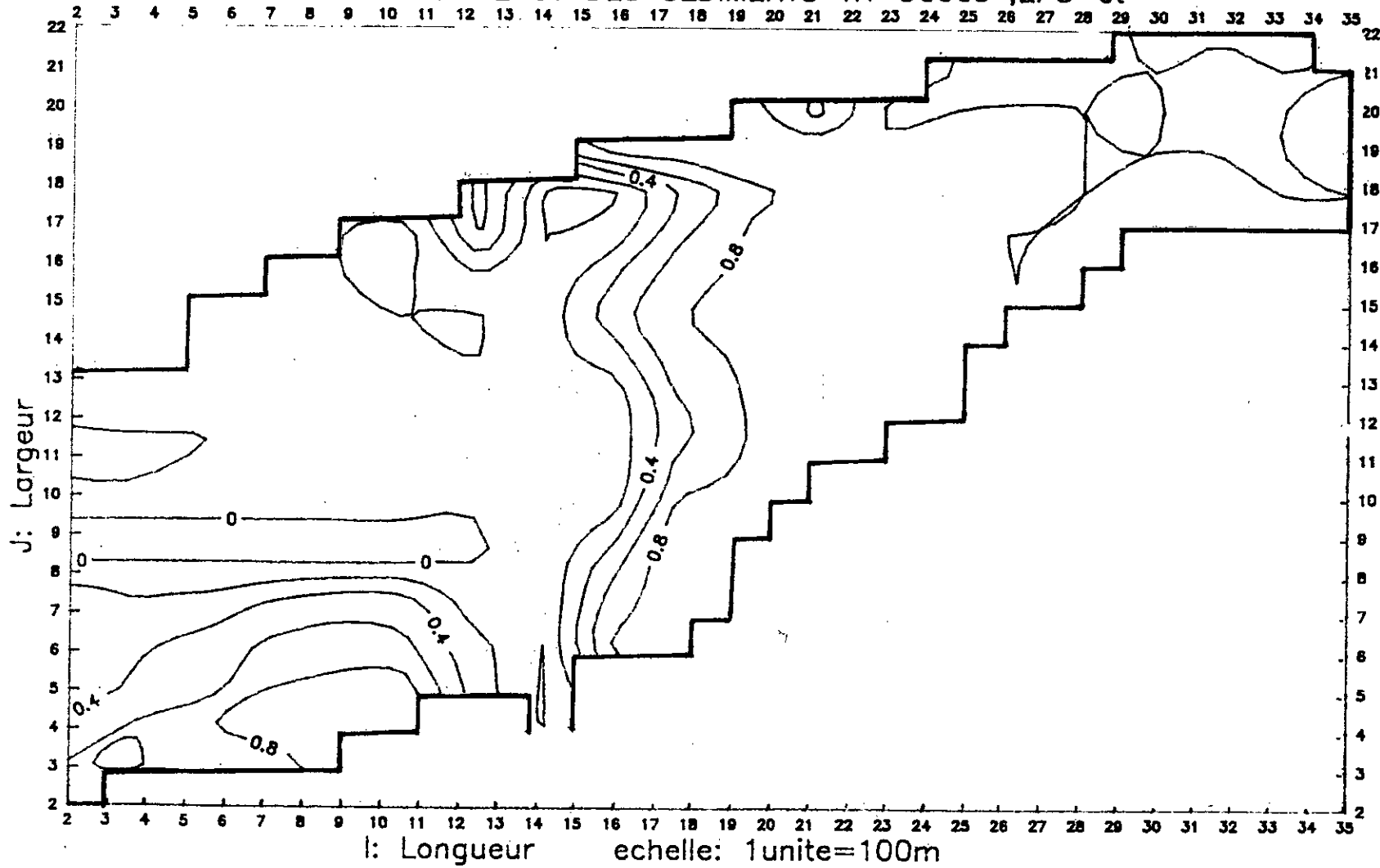
VITESSE D'ECOULEMENT (m/s) TH=3600s ,EPS=ct



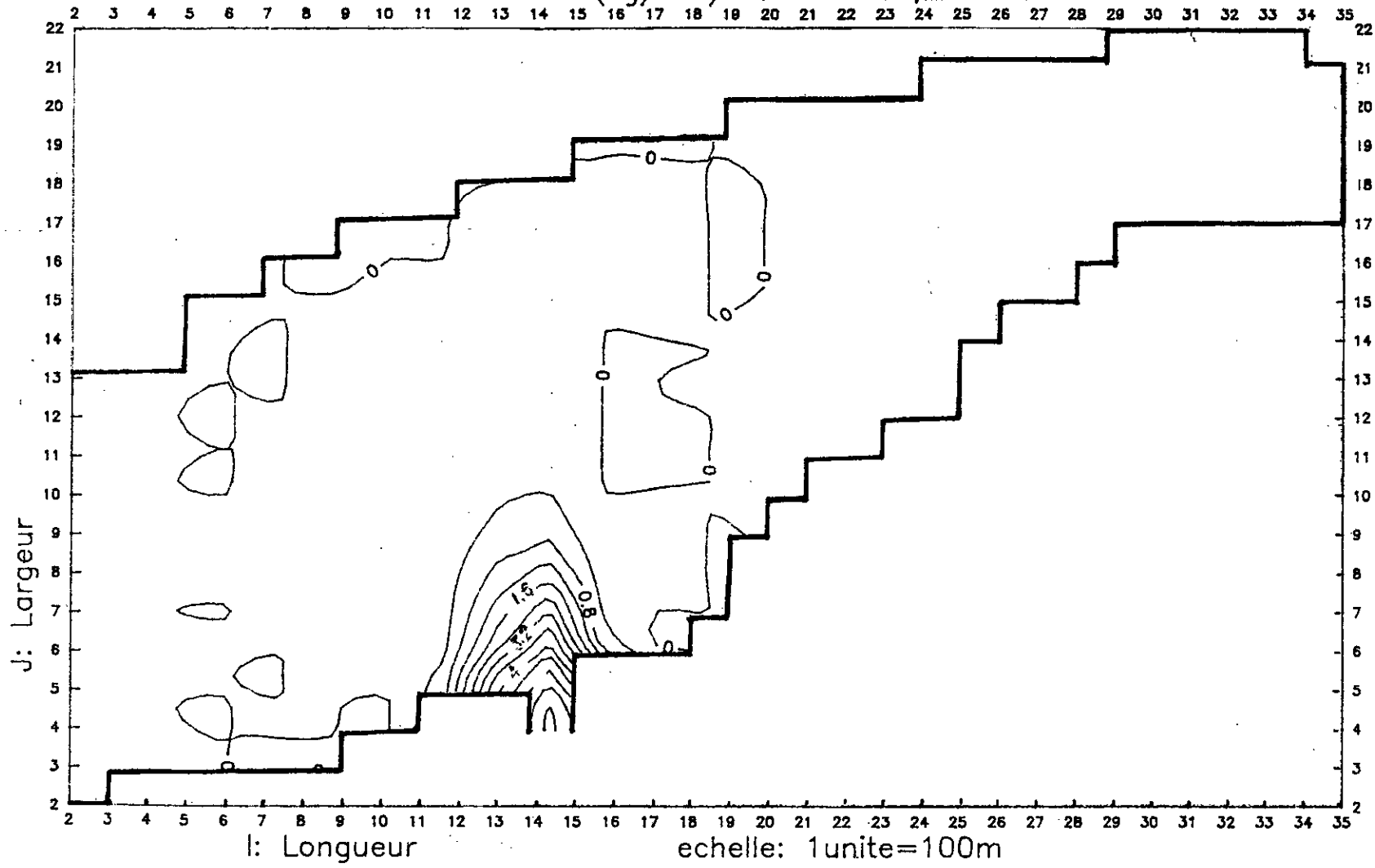
CISAILLEMENT AU FOND (N/m²) TH=3600s ,EPS=ct



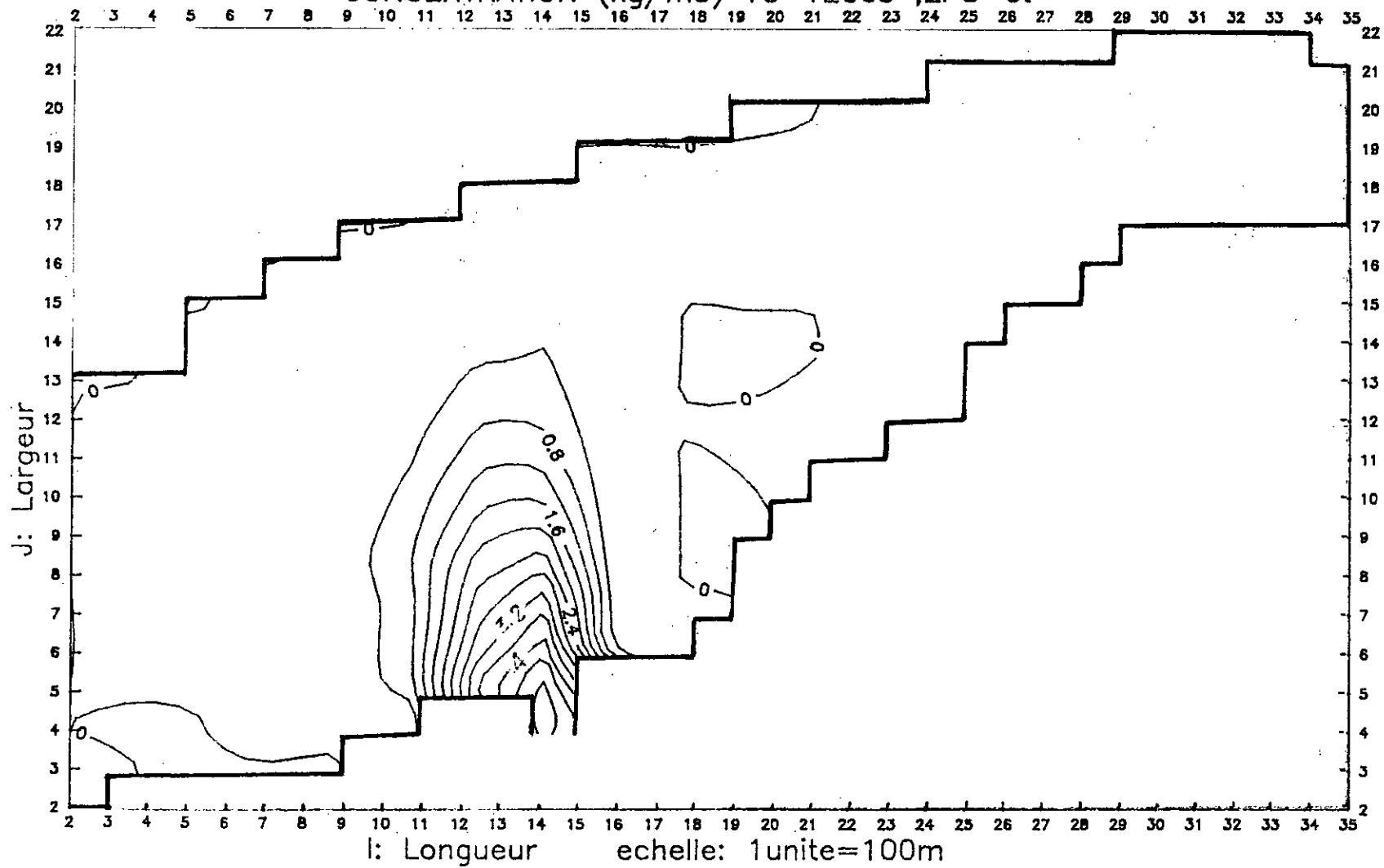
PROBABILITE DE DEPOT DES SEDIMENTS TH=3600s ,EPS=ct



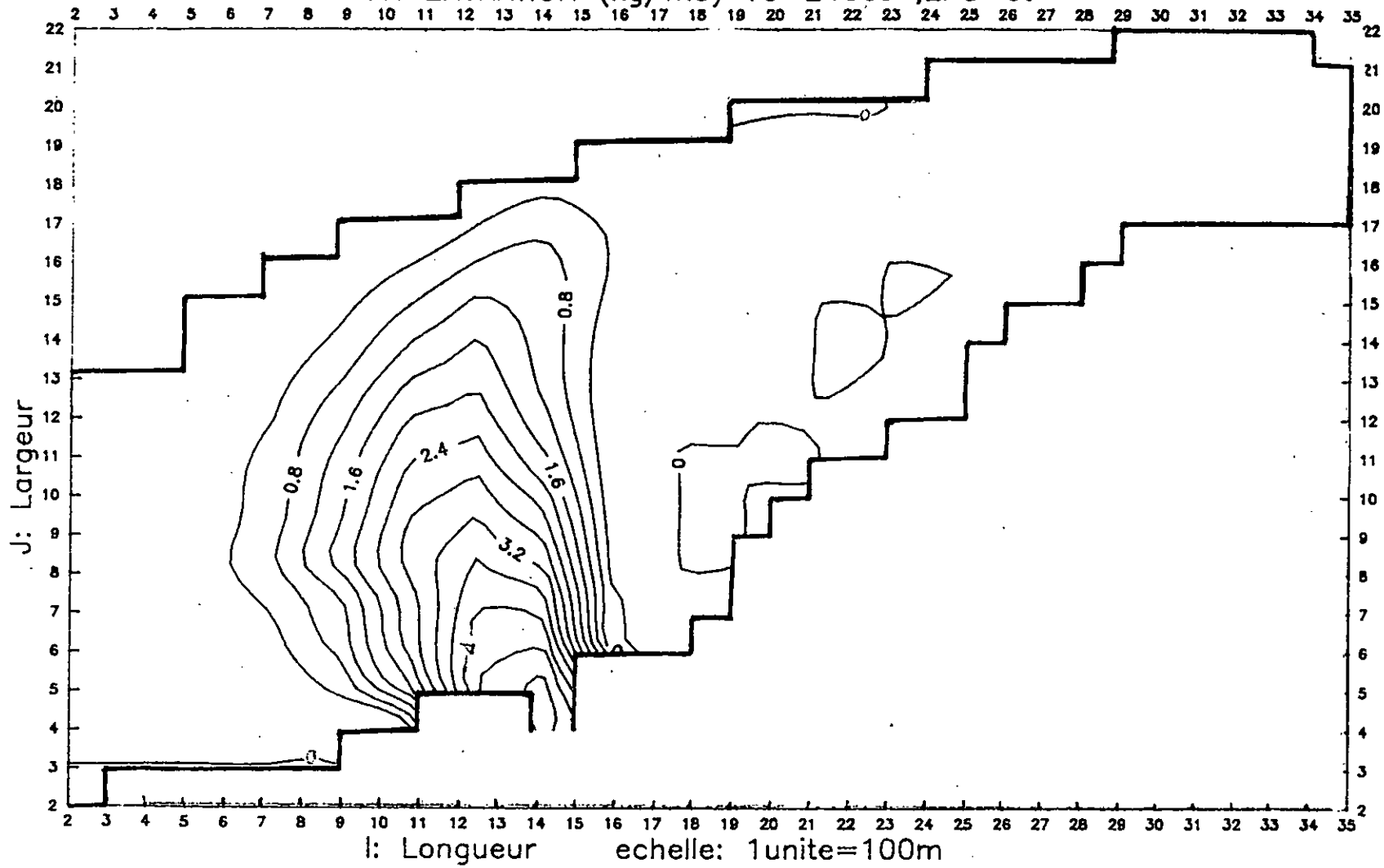
CONCENTRATION (kg/m³) TC=600 s ,EPS=ct



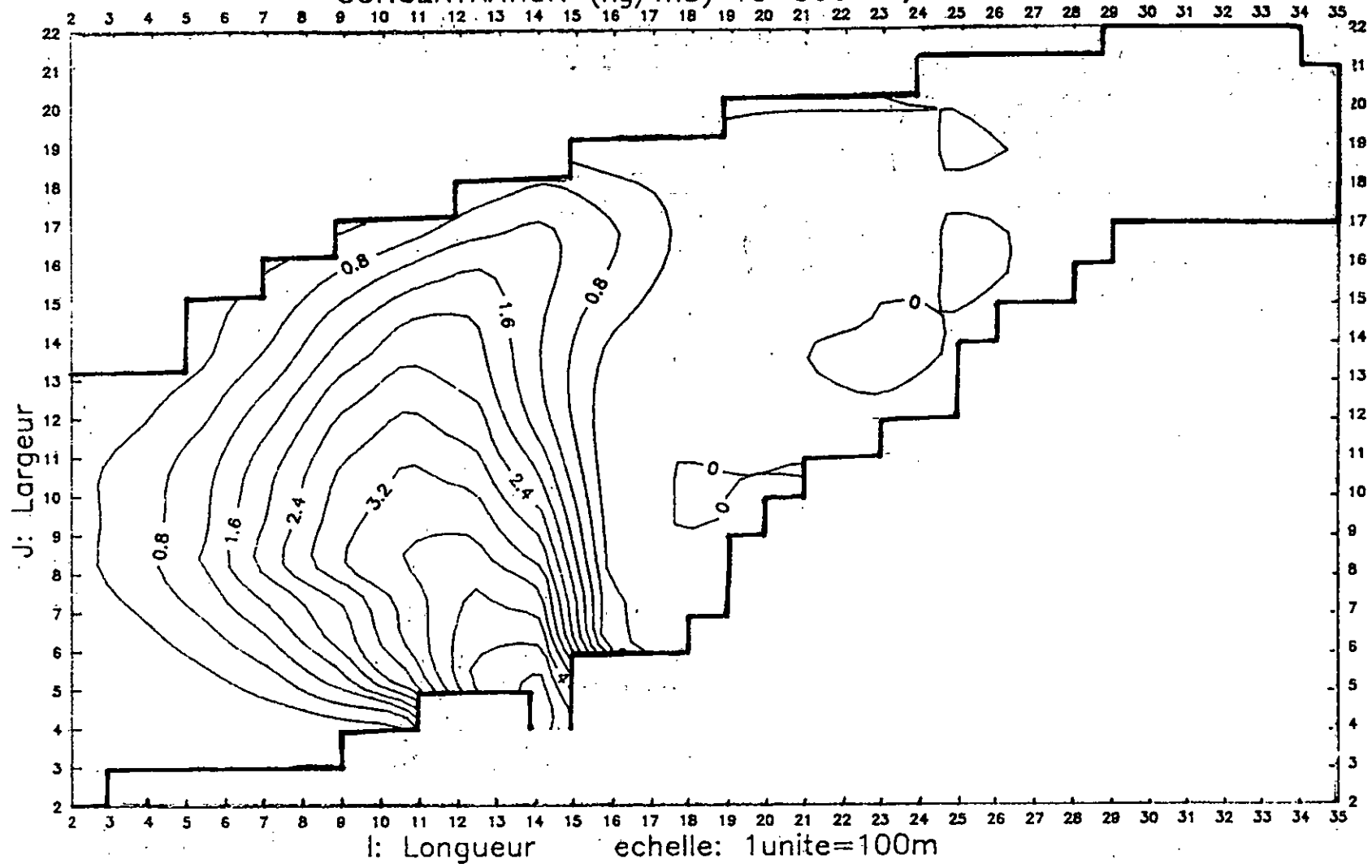
CONCENTRATION (kg/m³) TC=1200s ,EPS=ct



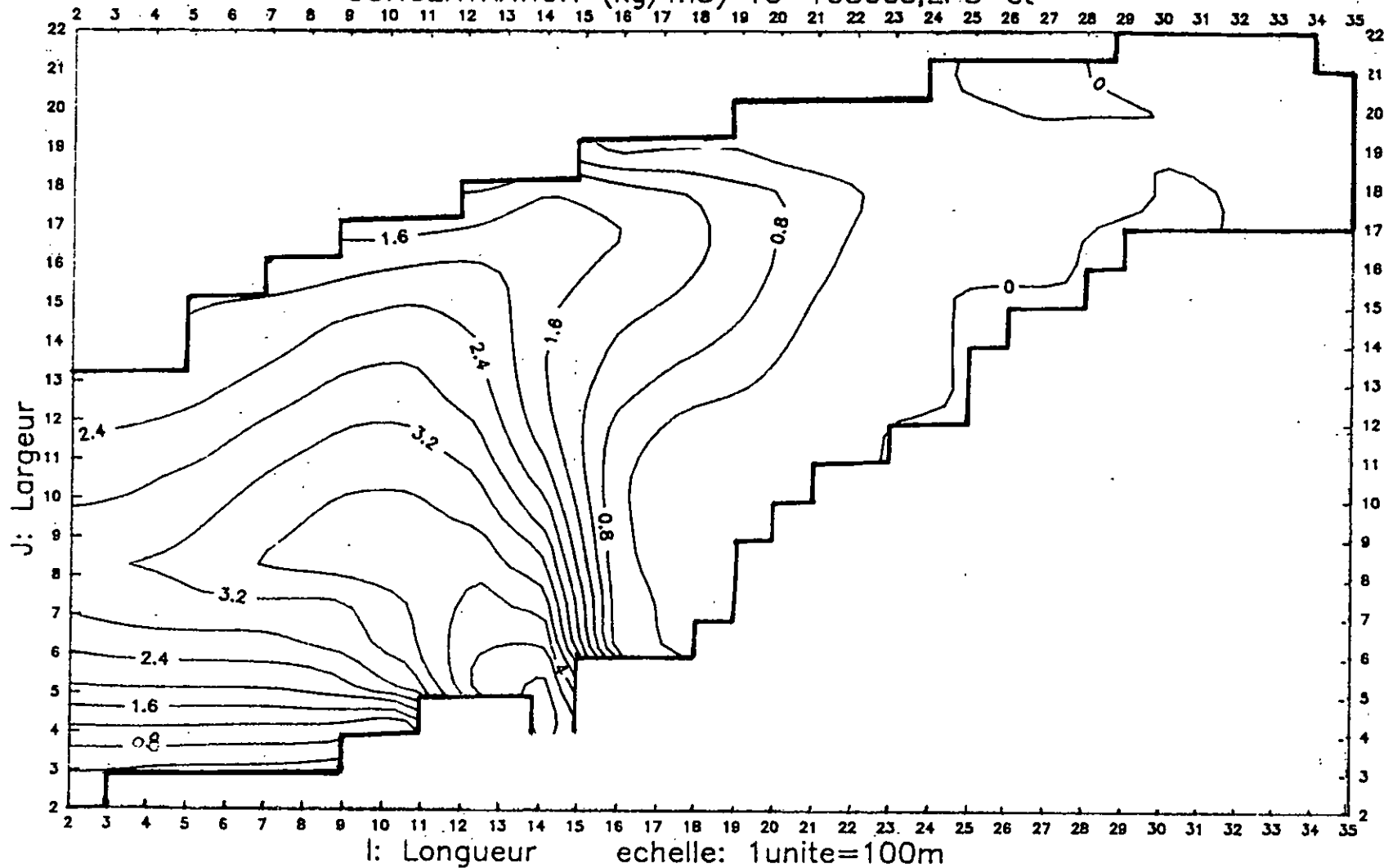
CONCENTRATION (kg/m³) TC=2400s ,EPS=ct



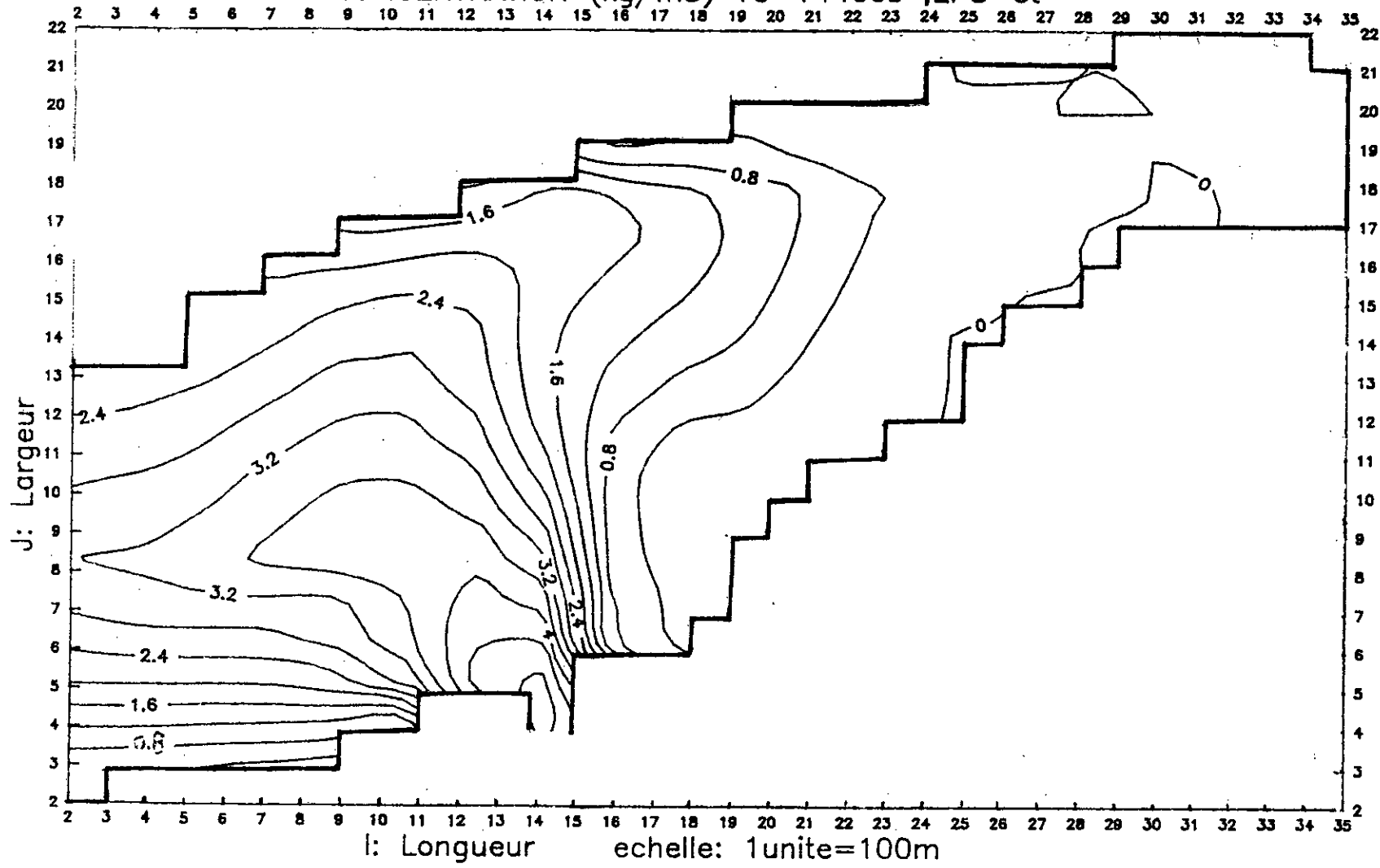
CONCENTRATION (kg/m³) TC=3600s ,EPS=ct



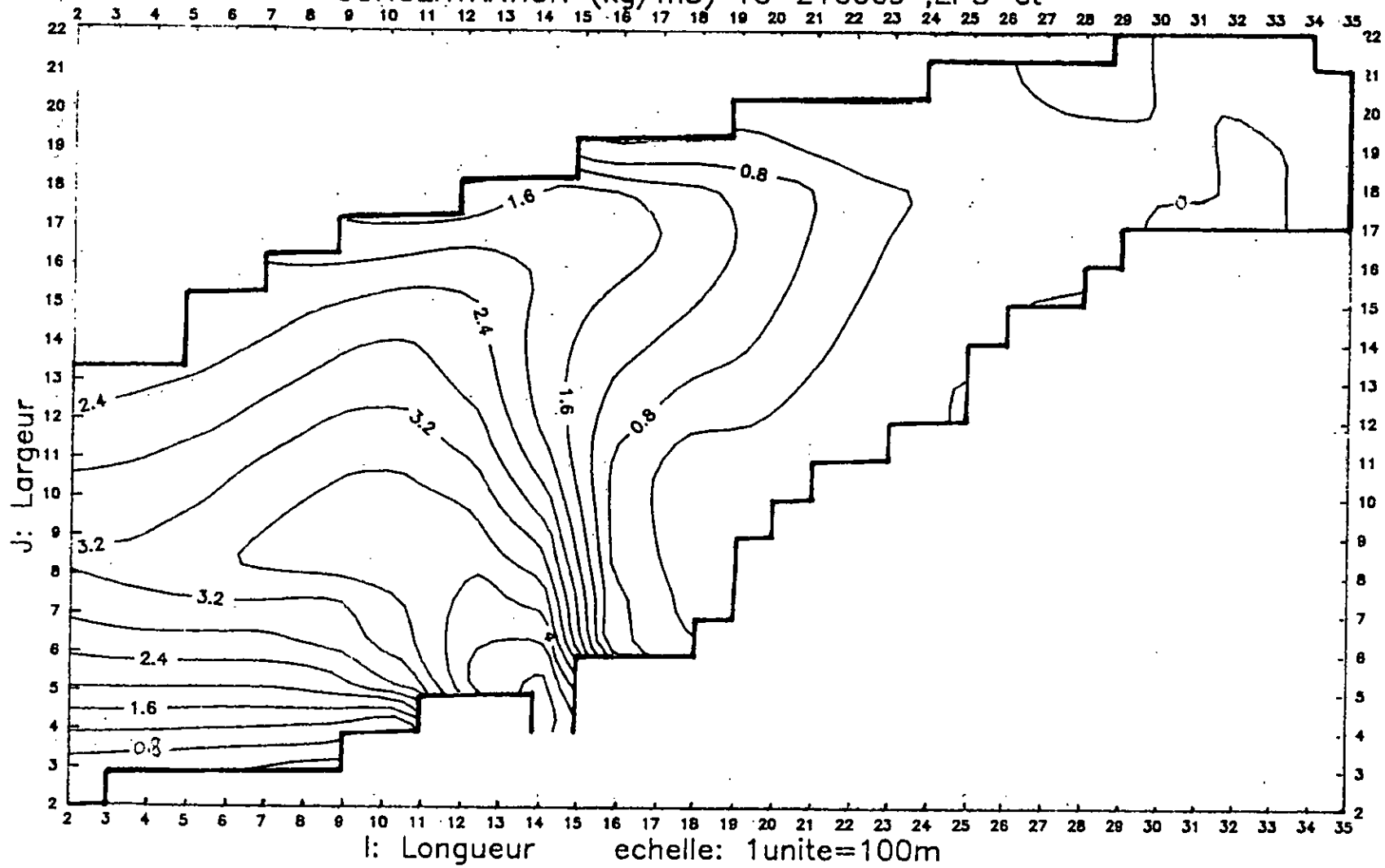
CONCENTRATION (kg/m³) TC=10800s, EPS=ct



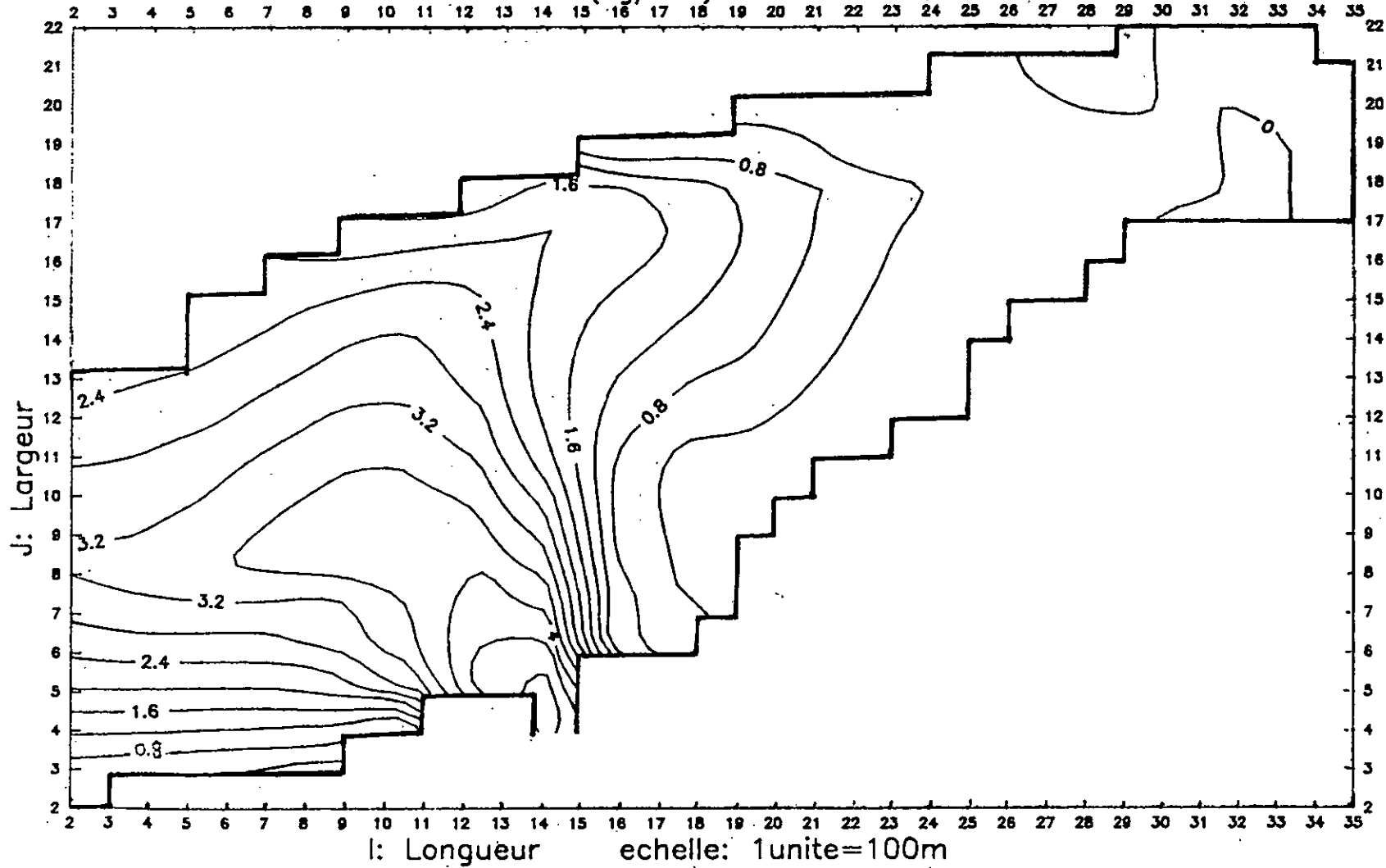
CONCENTRATION (kg/m³) TC=14400s ,EPS=ct



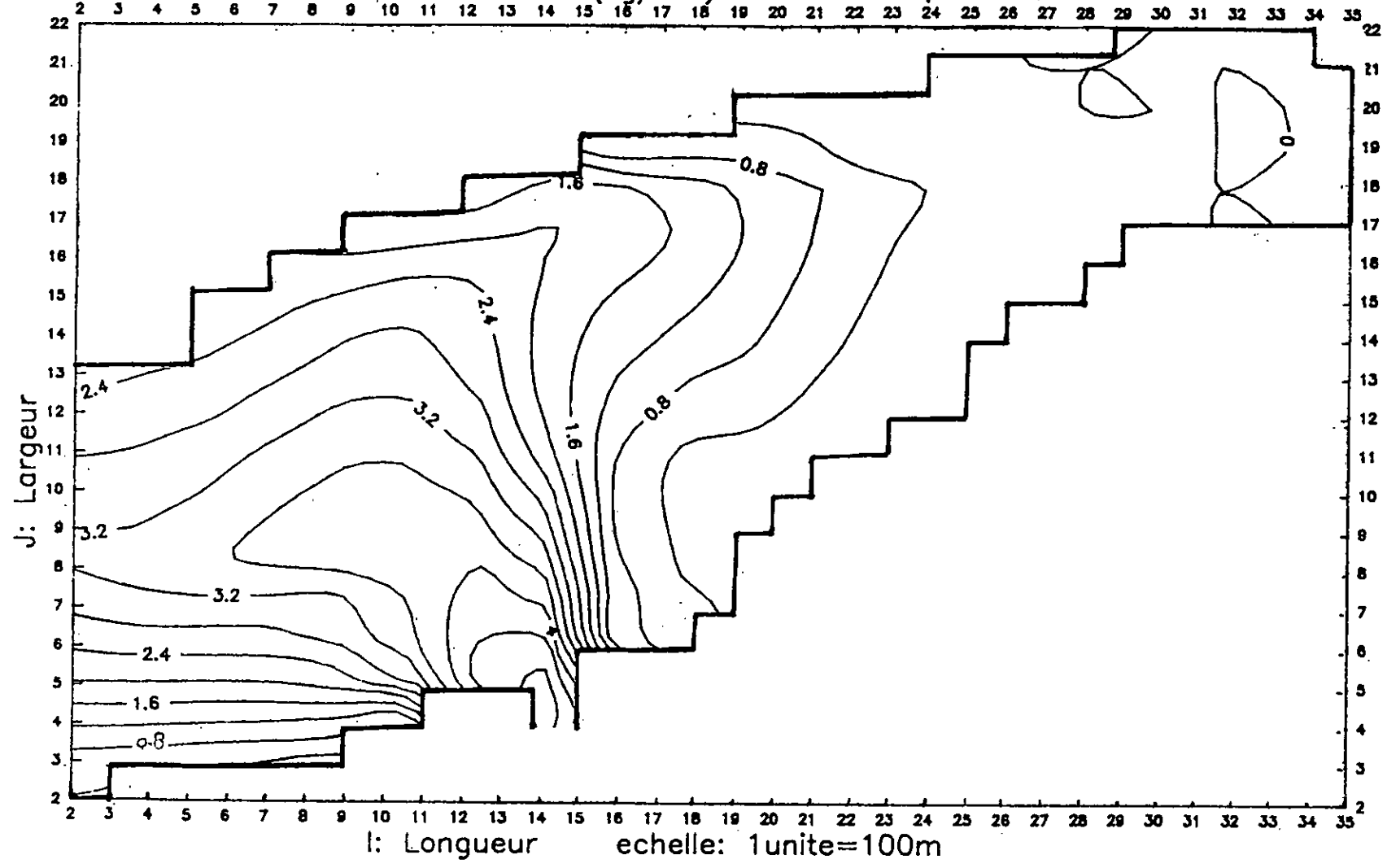
CONCENTRATION (kg/m³) TC=21600s ,EPS=ct



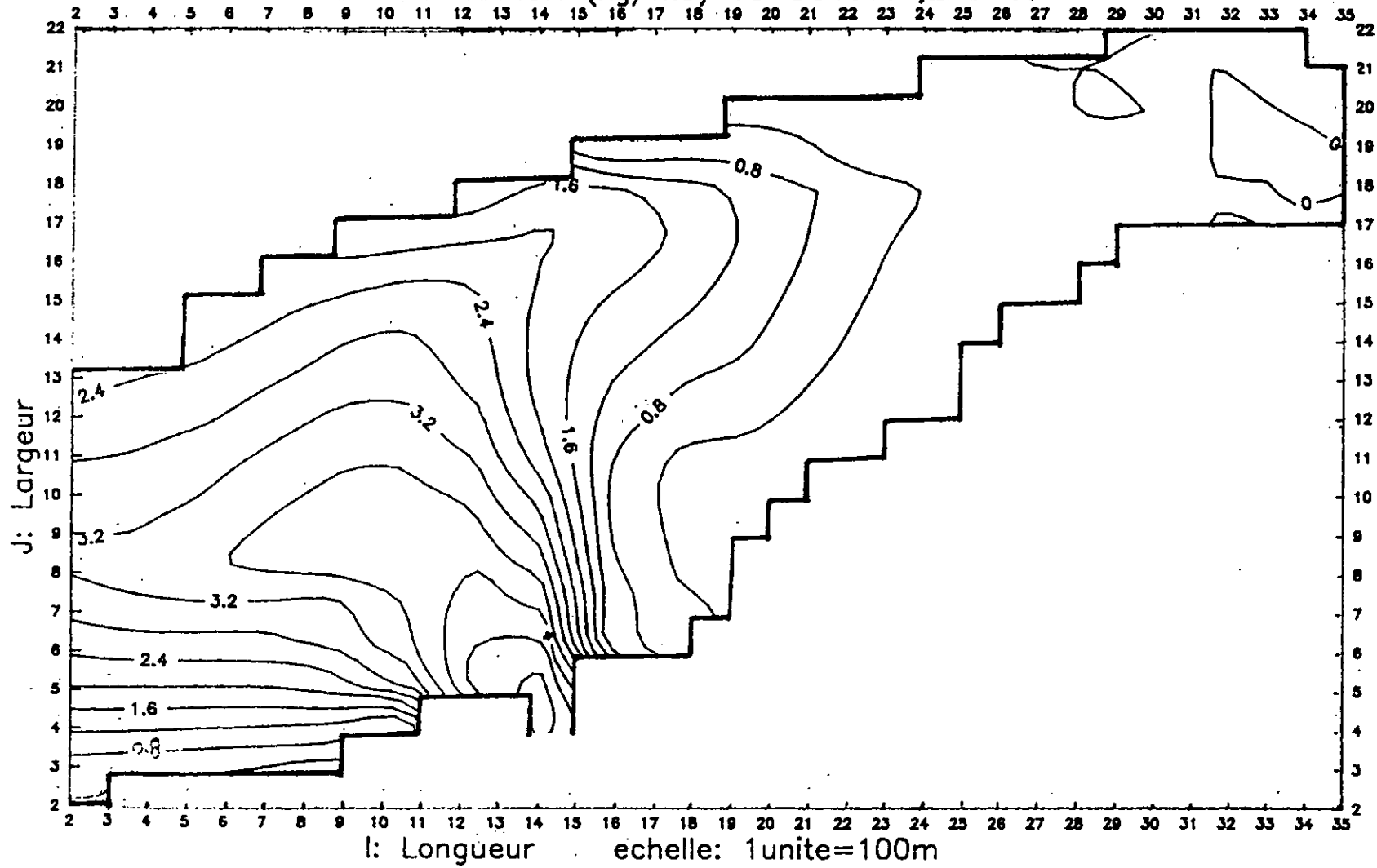
CONCENTRATION (kg/m³) TC=28800s ,EPS=ct



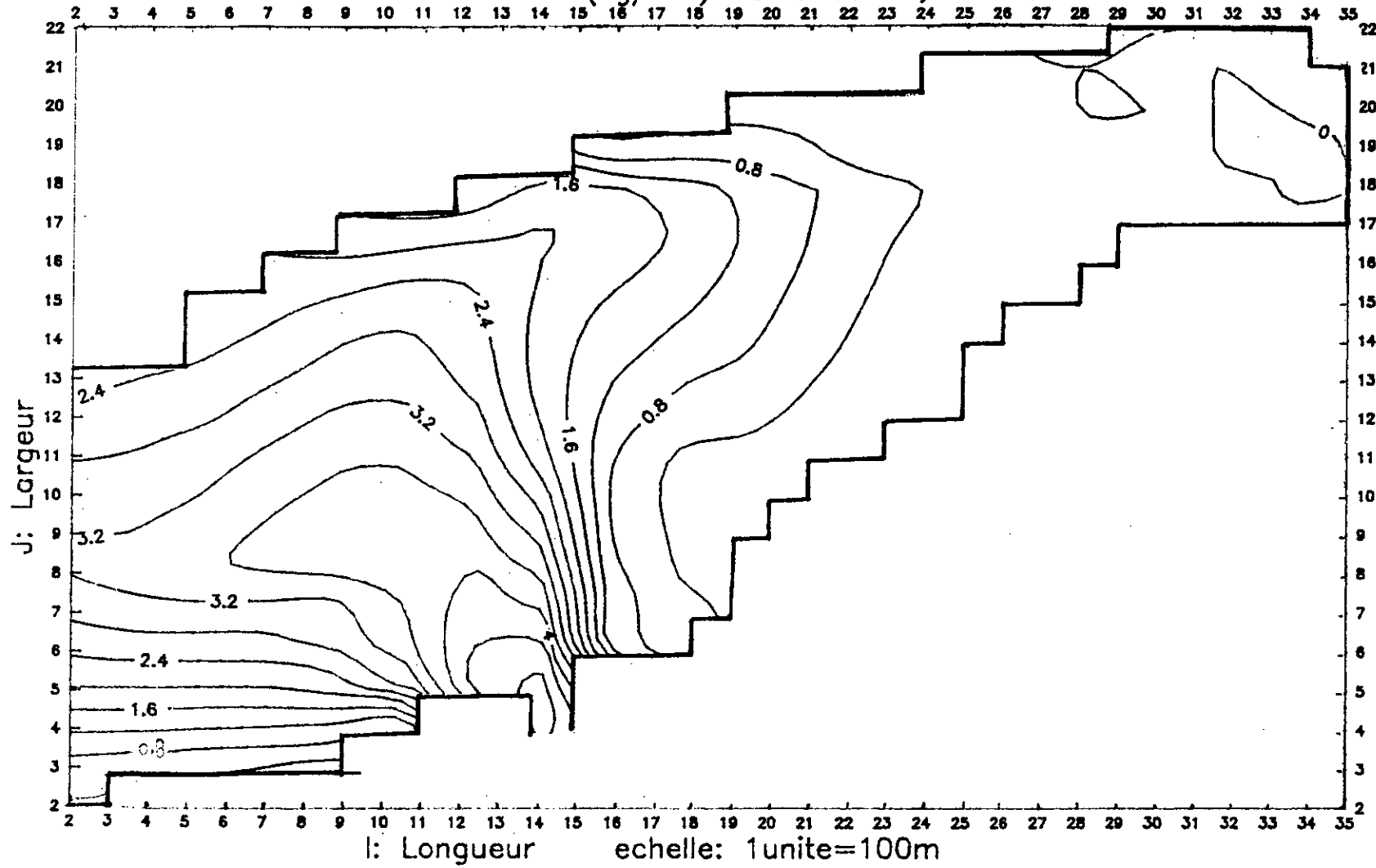
CONCENTRATION (kg/m³) TC=43200s ,EPS=ct



CONCENTRATION (kg/m³) TC=50400s ,EPS=ct



CONCENTRATION (kg/m³) TC=64800s ,EPS=ct



113-Interprétation et confrontation entre le modèle établi et le cas simulé

L'interprétation qui suit portera essentiellement sur les courbes d'isoconcentration obtenues à partir du modèle de transport en suspension établi dans la deuxième partie de cette étude. Durant cette simulation nous mettrons en évidence l'évolution dans le temps de la concentration des fines particules de sable et ce jusqu'à l'équilibre, ainsi que leur répartition à l'intérieur de l'ouvrage hydraulique et ce pour une durée de dix huit (18) heures, avec des temps intermédiaires qui sont:

Tc: 10 - 20 - 40 minutes

Tc: 1 - 2 - 3 - 4 - 6 - 8 - 12 - 14 - 18 heures.

Pour la simulation considérée, le code de calcul établi, détermine le champ hydrodynamique relatif, pour une bathymétrie, et quelques caractéristiques physiques à préciser lors de l'application.

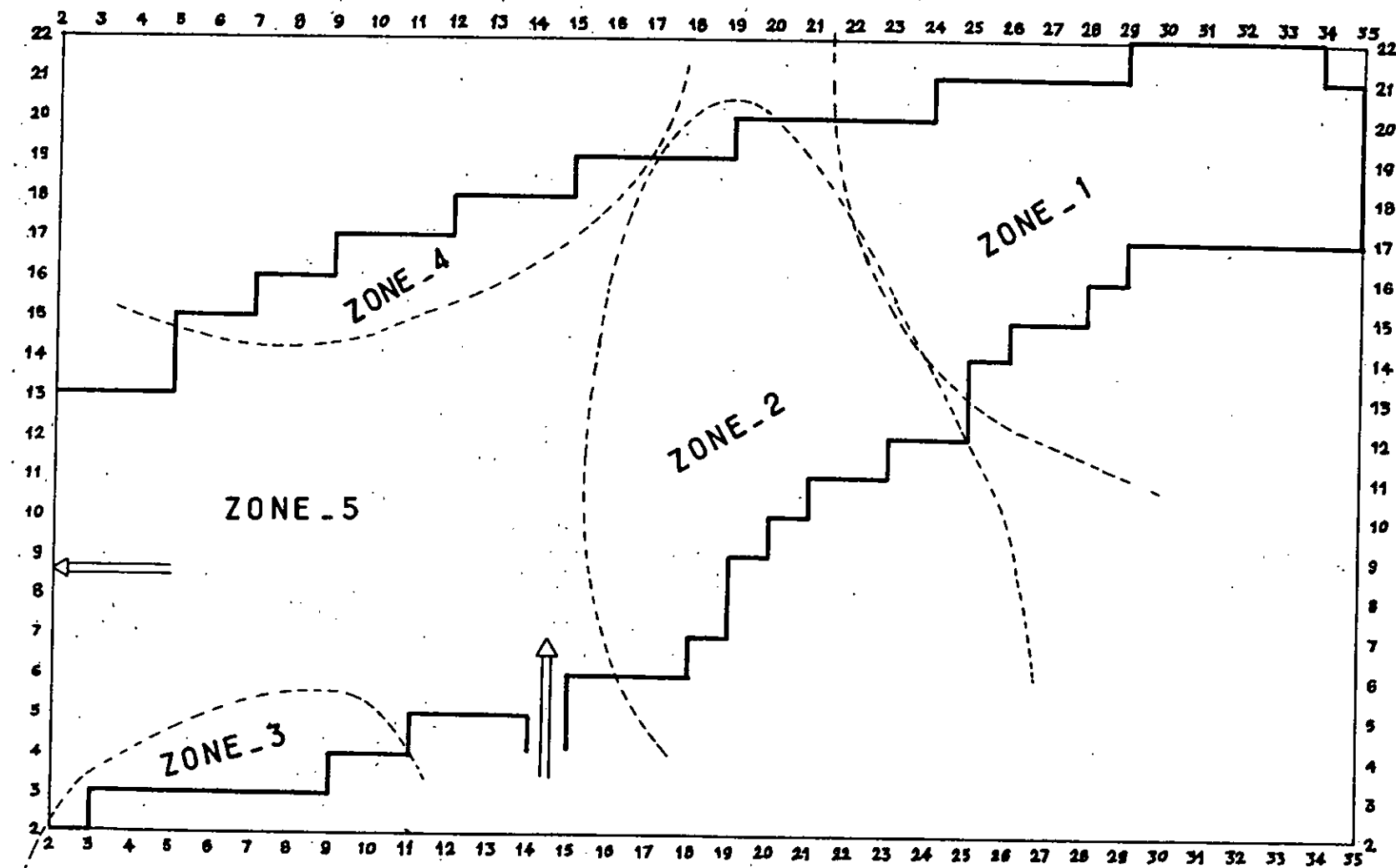
Les courbes isohauteurs et isovitesses calculées par ce code sont présentées ci avant.

Selon les courbes d'isoconcentration obtenues durant cette simulation et présentées ci avant on constate le déplacement progressif de la suspension depuis l'entrée de l'ouvrage; où celle-ci est maximale ($C_0 = 5 \text{ kg/m}^3$) avec une orientation très accentuée, vers la sortie de celui-ci. L'orientation ainsi observée se confond avec celle du champ de vitesse.

Aux temps intermédiaires suivants nous relevons que:

à $T_c = 1 \text{ h}$: la suspension atteint la sortie sans toutefois atteindre l'extrémité droite fermée de l'ouvrage.

à $T_c = 18 \text{ h}$: l'écoulement en suspension est en équilibre, à l'extrémité droite nous ne relevons aucune suspension.



ZONE D'INTERPRETATION DES RESULTATS

La courbe $Q_s(t)$ ci avant représentant la variation du débit solide transporté par suspension tel que:

$$Q_s(t) = \sum (Hu)_{i,j} C_{i,j} \Delta Y$$

illustre bien cette évolution.

Pour faciliter l'interprétation et la confrontation entre le modèle et le cas à simuler nous avons départagé celui ci en cinq zones distinctes:

ZONE 1

Selon l'ensemble des courbes et résultats ponctuels obtenus, la concentration dans cette zone tend vers zéro et ce depuis le début de la simulation jusqu'à l'état d'équilibre.

Ce résultat est toutefois prévisible à partir des courbes d'isovitesses, de cisaillement et de la probabilité de dépôt obtenues. En effet on relève que:

Les vitesses U_{ij} sont de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-4} m/s

Le cisaillement τ_{ij} est inférieur au cisaillement critique de dépôt et est de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-5} n/m²

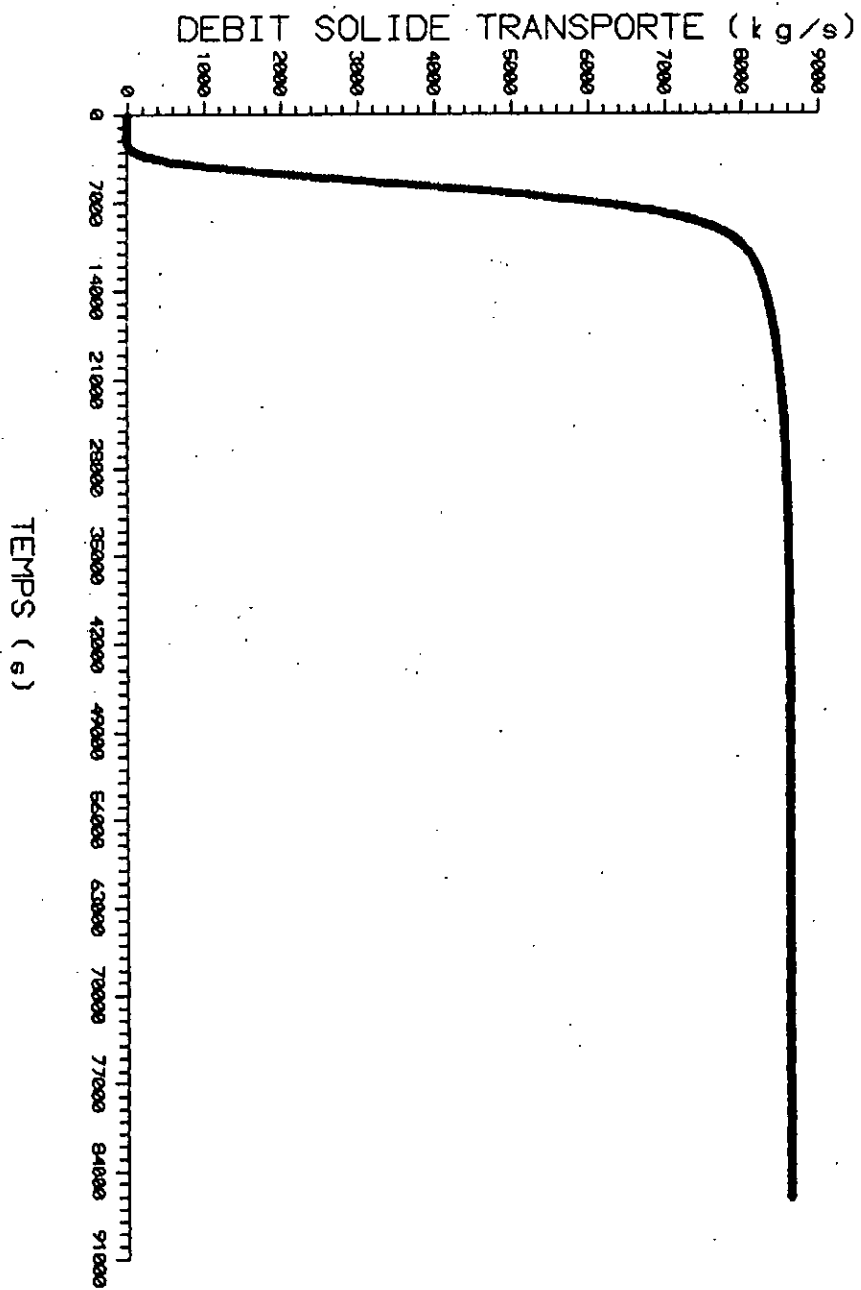
La probabilité de dépôt est de l'ordre de l'unité.

Ces éléments nous permettent de considérer la zone 1 comme étant une zone à FAIBLE-CAPACITE-DE TRANSPORT ET DE-
DEPOT -PROBABLE.

ZONES: 2 -3-4

zone: 2

La concentration relevée dans cette zone est faible, et est inférieure à 0,8 kg/m³ en moyenne.



Les vitesses relevées sur les courbes obtenues à partir du modèle hydrodynamique sont faibles également ; elles sont de l'ordre de 10^{-2} m/s

Le cisaillement est inférieur au cisaillement critique (10^{-4} à 10^{-2} n/m²)

La probabilité de dépôt avoisine l'unité.

zone: 3

La concentration dans cette zone varie entre 0,4 et 1,5 Kg/m³

Les vitesses relevées de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} m/s

Le cisaillement est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-2} n/m²

La probabilité de dépôt est proche de l'unité.

zone: 4.

Cette zone est aussi à faible concentration en suspension

$C < 0,5$ kg/m³

Les vitesses relevées varient de 10^{-3} à 10^{-2} m/s

Le cisaillement de l'ordre 10^{-4} à 10^{-3} n/m²

La probabilité de dépôt avoisine l'unité

Les zones 2 - 3 et 4 possèdent des caractéristiques proches de celles de la zone 1 avec toutefois la différence que ces zones peuvent constituer une région à circulation relativement faible et à long terme une région à dépôt probable.

zone: 5

Le cisaillement moyen relatif à cette zone est toujours supérieur au cisaillement critique de dépôt ; ceci correspond à une probabilité de dépôt nulle. d'autre part les vitesses calculées ici varient entre une valeur maximale très proche de l'entrée de l'ouvrage évaluée à 0,74 m/s ($i=14$, $j=10$) et une valeur minimale de l'ordre de 0,2 m/s au point de coordonnées $i=15$, $j=15$.

relativement à ces résultats cette zone doit être une zone à forte capacité de transport. En effet et selon nos calculs de transport et comme le montrent les courbes d'isoconcentration présentées ci-avant, l'évolution de la concentration est nettement plus importante dans cette zone qu'ailleurs; où on voit une évolution progressive de la suspension.

Pour terminer, nous noterons après comparaison que les résultats que nous avons obtenus, à travers l'interprétation ci avant peuvent être considérés comme similaires à ceux obtenus lors de l'étude menée à l'école polytechnique de Montréal (1983) par A MATTARD et suivi par Monsieur René KAHAWITA. On remarque aussi que le modèle hydrodynamique établi dans ce mémoire tient compte d'une diffusivité variable à la différence du cas considéré où celle ci est constante , Dans ces deux cas et malgré cette différence nous constatons que les résultats obtenus sont quasiment identiques. Toutefois pour une meilleure certitude nous avons adapté notre modèle en tenant compte d'une diffusivité constante et les résultats obtenus sont pratiquement les mêmes que ceux que l'on retrouve dans l'étude réalisée par MATTARD

QUATRIEME PARTIE

Conclusion et recommandation

CONCLUSION

L'intérêt accordé aux phénomènes de transport de sédiments, à travers les différents travaux de recherches relevés dans la littérature spécialisée dans ce domaine dénote l'importance que revêt ce sujet complexe et souvent aléatoire de par son caractère spécifiquement naturel.

L'utilisation des modèles mathématiques, pour simuler ces phénomènes, constitue un moyen efficace permettant d'arriver à des résultats acceptables. Ce moyen demeure attractif par son coût relativement faible malgré son caractère qui ne traduit pas souvent la réalité.

En effet, la plupart des modèles développés pour simuler fidèlement les phénomènes de transport solides tel qu'ils se produisent réellement, n'ont put constituer à ce jour que des approches souvent très controversées par les nombreuses hypothèses qui les soutendent. On constate que ces hypothèses qui fixent les bases de ces modèles sont émises beaucoup plus pour faciliter la résolution des différentes équations et expliciter certains paramètres que pour améliorer l'approche des aspects qui caractérisent ces phénomènes de transport eux mêmes.

Les expériences menées en laboratoire ont toutefois permis d'améliorer sensiblement la fidélité de ces modèles de simulation, en cernant, par des considérations empiriques, les paramètres essentielles mis en jeu dans leur élaboration.

Le travail accompli dans ce mémoire, s'inscrivant dans cet ordre d'idée ne constitue qu'une modeste contribution à l'élaboration d'un modèle numérique à même de simuler ce phénomène de transport.

Pour pouvoir vérifier notre modèle nous avons procédé à une

simulation d'un cas comme décrit dans la troisième partie de ce mémoire. A travers les résultats obtenus nous pouvons conclure que le modèle ainsi élaboré répond à l'objectif assigné.

Toutefois nous noterons que les conclusions qui découlent de cette simulation ne sont qu'approximatives du fait qu'elles sont tributaires dans une large mesure des hypothèses adoptées à l'origine.

Cette simulation ainsi établie permet de déterminer le comportement du sédiment en suspension en écoulement à surface libre ; ce qui constitue un moyen efficace permettant de prévoir le meilleur emplacement de l'ouvrage hydraulique projeté .

Le code de calcul développé dans cette thèse peut donc être largement exploité en matière d'envasement des ouvrages hydrauliques et minimiser les coûts des opérations de dragage.

Pour terminer, nous disons que le modèle de simulation que nous avons élaboré demeure perfectible selon le cas et selon le besoin, malgré les résultats obtenus et gagnerait beaucoup plus en fiabilité à travers des améliorations qui pourront être apportées à l'occasion d'autres opportunités afin que la réalité soit le mieux approchée que possible.

BIBLIOGRAPHIE:

BIBLIOGRAPHIE:

Abbot M.B, Mc Cowan A.D et Warren L.R

" Accuracy of short wave numerical models " .

Journal of Hydraulic Engineering , vol 110 N° 10 , Octobre 1984 ,
ASCE.

Alquier.M

" Le transport solide dans les canaux découverts et les rivières
naturelles " .

Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique,
d'informatique et de l'Hydraulique.

Institut Nationale Polytechnique de Toulouse ,Edition 1976/1977 .

Benqué J.P , Cunge J.A , ASCE.M , Feuillet J, Hauguel A , and Holly
F.M , JR., M.ASCE.

" New methode for tidal current computation " .

Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of
the American Society of Civil Engineers, ASCE, vol. 108, N°WW3,
August, 1982. ISSN 0148-9895/82/0003-/\$01.00.

Blumberg A.F , ASCE A.M

" Numerical model of estuarine circulation " .

Journal of the Hydraulics Division , Proceedings of the American
Society of Civil Engineers, ASCE , vol. 103, N°HY3, March, 1977 .

Bisson.J

" Modélisation d'écoulement à surface libre en deux dimensions
utilisant le schéma implicite " .

Ecole Polytechnique de Montréal ,Mémoire M.S.C.A, Mai 1987 .

Burnage.H

" Migration de particules dans un écoulement turbulent ".
La Houille Blanche N° 7/8 1987.

Chabard J.P , Daubert.O et Goutal.N

" Cours de simulation numérique du L.N.H, notion de base sur
l'analyse numérique T1 ".
Electricité De France (E.D.F) 1989 ,Département Laboratoire
Nationale d'Hydraulique.

Chow V.T

" Open channel Hydraulics ".
Mc Graw Hill, New york 1959

Christian Le Provost et Melio Saenz.

" Simulation numérique de la propagation non-lineaire d'une onde
longue dans un canal de profondeur constante. Comparaison de
quelques methodes aux differences finies " .
Academy of Grenoble ,Institute of Mechanics .
Oceanology N°9, 1978.

Coles.P et Miles G.V

" Tow dimensional model of mud transport ".
Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol 109 N°1 January 1983.

Cunge J.A , Holly F.M et Verwey A

" Practical aspects of computational river Hydraulics ".
Pitman Advanced Publishing Program Boston.London.Melbourne.
Publications Pitman 1980.

Cunge J.A

" Simulation des écoulements non permanent dans les rivières et
canaux ".
Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique ,Grenoble 1988.

Falconer R.A

" Temperature distributions in tidal flow field ".
Environmental Engineering vol 110 N°6 Decembre 1984.

Fauconnier.R

" Stabilité et précision des schémas aux différences finies.
Application à la résolution de l'équation de la chaleur avec
conditions aux limites" .
Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics.
N° 381 Mars 1980 ,Serie: Theories et méthodes de calcul.

Fennema R.J et Chaudhry H.M

" Explicite methods for 2D transient free surface flows ".
Journal of Hydraulic Engineering ,ASCE ,vol 116 N°8 August 1990.

Fortier.A

" Mécanique des suspensions "
Masson et Cie Editeurs 1967 Paris .

Fujisaki.K , Tanigawa.H et Awaya.Y

" On the dispersion phenomena of suspended solid in turbulent open
channel flow ".
Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering, vol 6, N°2
Decembre 1988.

Garcia.R and Kahawita.R

" Numerical solution of the Saint Venant equation with the Mac
Cormack finite difference scheme ".
International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 6 ,1986.

Garcia.P , Saviron J.M

" Mac Cormack 's method for the numerical simulation of one
dimensional discontinuous unsteady open channel flow ".
Journal of Hydraulic Research vol 30 N°1, 1992.
International Association of Hydraulic Research .

Graf W.H

" Hydraulics of sediment transport "

Copyright 1984 by Water Resources Publications ,Colorado ,U.S.A 1984.

Hassanzadeh.Y

" Velocity and concentration distribution in liquid/solid two phase free surface flow "

La Houille Blanche N°1 ,1979 .

Henderson F.M

" Open channel flow "

Mac Millan publishing Co, INC. New York 1966.

Collier Macmillan Publishers London.

Hey R.D et Bathurst J.C et Thorne G.R

" Gravel-bed rivers fluvial processes engineering and Management ".
Edition 1985.

Holly.Jr and Rahuel J.L

" New numerical / physical framework for mobile-bed modelling "

Part 1 : Numerical and physical principes

Part.2 : Test application

Journal of Hydraulic Research vol 28, 1990 N4 (part1) et N5 (part2)

Hervouet J.M

" A presentation of shallow water equations "

E.D.F , Direction des Etudes et Recherches.

92 NI B0013 du 11 Juin 1991.

Hug.M

" Mécanique des fluides appliquée "

Edition Eyrolles 1975.

Landau.L et Lifchitz.E

" Mécanique des fluides " Tome VI.

Edition Mir Moscou 1971.

Lebreton.J

" Dynamique fluviale " .

E.D.F Collection de la Direction des Etudes et Recherches .
Eyrolles 1974.

Leliavsky.S

" Précis d'Hydraulique fluviale " .

Dunod Paris 1961.

Lin P.N , Huan.J et Xinquen.Li

" Insteady transport of suspended load at small concentrations " .

Journal of Hydraulic Engineering ASCE, vol 109, N° 1, Janvier 1983.

Mattard.A

" Modélisation numérique bidimensionnelle du transport de sédiments fin " .

Ecole Polytechnique de Montréal , Aout 1983.

Monardier.P et Rouas.G

" La modélisation du transport solide en rivière " .

La Houille Blanche N°3/4 1989.

Niekerk A.V , Vogel K.R , Slinger Land R.L et Bridge J.S

" Routing of heterogeneous sediment over movable bed : model development " .

Journal of Hydraulic Engineering, ASCE , vol 118 , N°2 Feb 1992.

Oana L.A

" Analyse des différents aspects de la sédimentation dans un réseau hydrographique " .

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (PH.D), Mai 1991.

Département de Génie Civil , Ecole Polytechnique de Montréal.

Pechon.P et Hervouet J.M

" Modélisation numérique des écoulements à surface libre ".
La Houille Blanche N°2 ,1991.

Poinsot.T

" Differences finies en énergétiques " version 3.
Laboratoire E.M.2.C ,Ecole Centrale de Paris 1989.

Safaie.B et Asce A.M

" Wind stress at air Water interface ".
Journal of Waterway , Port, Coastal and Ocean Engineering ,ASCE ,
vol 110 N°2 MAY 1984.

Teisson.G

" Cohesive suspended sediment transport : feasibility and
limitations of numerical modeling ".
Journal of Hydraulic Research ,vol 29. N°6 ,1991.

Tsujimoto.T and Saito.A

" Non equilibrium profile of suspended sediment concentration "
Journal of Hydroscience Engineering ,vol 9. N°1, Mai,1991 .

Uan .M

" Etude d'une modélisation de transport solide en rivière ".
E.D.F ; Laboratoire Nationale de l'Hydraulique ,Rapport N°2 ,1983.

Umeyama.M

" Vertical distribution of suspended sediment in uniforme
open channel flow ".
Journal of Hydraulic Engineering , ASCE ,vol 118 N°6 ,June 1992.

Voogt.L , Rijin.L.C.V et Berg.J.H.V.D

" sediment transport of fine sands at high velocity ".
Journal of Hydraulic Engineering , ASCE ,vol 117 N°7 ,July 1991.

Wu.J

" Wind stress and surface roughness at air sea interface ".
Journal of Geophysical Research , vol 74 N° 2, Janvier 1969.

Yalin.S

" Sur la mécanique du mouvement des matériaux solides ".
La Houille Blanche ,N°6 ,1958.

Yang C.T

" Sediment transport and river Engineering "
U.S Bureau of reclamation Engineering and Research Center Denver
Federal Center , Denver , Colorado. 80225. U.S.A

Zhan.H

" some aspect of sediment transport ".
Ecole polytechnique de Montréal ,P.H.D 1991.

ANNEXE - A -

ANNEXE

I- Equations générale de conservation

(Equations fondamentale de la mécanique)

La méthode classique pour établir les équations générales de l'écoulement est l'application des équations de bilan; pour cela, nous considérons un volume de contrôle de domaine (D) continue et de surface (Ω), à l'intérieur duquel on dresse le bilan d'une propriété extensive :

1) Conservation de la masse

En appliquant ce 1^{er} principe au mouvement du fluide contenu dans le volume de contrôle (D, Ω), est traduit par l'expression :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} \rho \, d\omega = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

Cette relation exprime que la masse du volume de contrôle (D) reste invariable au cours du temps.

2- Conservation de la quantité de mouvement

Soient ϕ la résultante des forces extérieures appliquées aux volume de contrôle, M la résultante des quantités de mouvement du même système;

le principe fondamentale de la dynamique peut s'écrire sous la forme

$$\phi = \frac{dM}{dt}$$

avec

$$M = \iiint_{D(t)} \rho \, V \, d\omega$$

(V : Vecteur vitesse)

Les forces extérieures comprennent les forces de volume et les forces de surface.

. Si F est la force; la résultante des forces de volume est égale à

$$M = \iiint_{D(t)} \rho F \, d\omega$$

. Soit T le tenseur des contraintes en un point.

La résultante des forces de surface est égale à :

$$\iint_{S(t)} T n \, d\Omega \quad (n : \text{normale extérieur au domaine})$$

n étant la normale extérieure au domaine, en tenant compte des relations précédentes, la loi globale de conservation de la quantité de mouvement se traduit par la relation :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} \rho V \, d\omega = \iiint_{D(t)} \rho F \, d\omega + \iint_{\Omega(t)} T n \, d\Omega$$

(A. I. 2)

II- Equation de Saint Venant

L'intégration des équations fondamentales de la mécanique (équations de conservation) sous certaines hypothèses simplificatrices, permet de déterminer le système d'équation hyperbolique de Saint Venant.

Le volume de contrôle de domaine (D) est représenté ici par un prisme de base Δx , Δy et de la profondeur $H(x,y,t)$

II-1- Intégration de l'équation de conservation de la masse

$$\text{Soit } m = \iiint_D \rho \, d\omega$$

masse du fluide, délimitée par le domaine continue (D).
 Selon le principe de conservation de la masse appliqué au prisme (volume de contrôle) considéré; est traduit par

$$\frac{d}{dt} = \iiint_{D(t)} \rho \, d\omega = 0 \quad (\text{A.II.1})$$

par définition, cette intégrale de volume est égale à la somme

$$\iiint_{D(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\omega + \iint_{\Omega(t)} \rho \cdot v \cdot n \, d\Omega = 0$$

d'autre part :

le théoreme d'Ostrogradski : permet d'écrire :

$$\iint_{\Omega(t)} \rho \cdot v \cdot n \, d\Omega = \iiint_{D(t)} \text{div} (\rho v) \, d\omega$$

d'où

$$\iiint_{D(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho h \, dx \, dy + \iiint_{D(t)} \text{div} (\rho h V) \, dx \, dy = 0$$

donc quelque soit, le domaine continue D(t) (géométrie constante dans le temps, l'équation générale :

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} \, dx \, dy + \text{div} (\rho V) \, h \, dx \, dy = 0$$

et finalement l'équation de conservation de la masse

$$\boxed{\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho h V) = 0} \quad (\text{A.II.1.2})$$

$\rho = \text{cte}$: pour un écoulement fluide homogène incompressible

d'où :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} h V = 0} \quad (\text{A.II.1.3})$$

II-2- Intégration de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

Soit $M = \iiint_{D(t)} \rho V \, d\omega$, résultant des quantité de mouvement appliqué au

mouvement du fluide délimité par le domaine (D). Le principe de la conservation de la quantité de mouvement appliqué au prisme (volume de contrôle) ci avant, s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} \rho V \, d\omega = \iiint_{D(t)} \rho F \, d\omega + \iint_{\Omega(t)} T n \, d\Omega \quad (\text{A.II.2})$$

par définition, l'intégrale de gauche s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} \rho V \, d\omega = \iiint_{D(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho V \, d\omega + \iint_{\Omega} \rho V V n \, d\Omega$$

Le théoreme d'Ostrogradsky transforme la dernière intégrale de surface en intégrale de volume telle que :

$$\iint_{\Omega} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega = \iiint_{D(t)} \operatorname{div} (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) \, d\omega$$

$$\text{d'où} \quad \frac{d}{dt} \iiint_{D(t)} \rho \mathbf{V} \, d\omega = \iiint_{D(t)} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} \, d\omega + \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) \, d\omega$$

l'intégrale de droite l'éq (A.II.2) représente la somme des forces extérieures appliquées au système considéré (D), elles sont de deux types:

. Force de volume : $\iiint_D \rho \mathbf{F} \, d\omega$

. Force de surface : $\iint_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, d\Omega = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{T} \, d\omega$

. L'équation (A.II.2) s'écrit alors :

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} \, d\omega + \iiint_{D(t)} \operatorname{div} (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \iiint_{D(t)} \rho \mathbf{F} \, d\omega + \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} \, d\omega$$

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{h} \, d\omega + \iiint_{D(t)} \operatorname{div} (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) \cdot \mathbf{h} \, d\omega = \iiint_{D(t)} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{h} \, d\omega + \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{h} \, d\omega$$

d'où l'éq de conservation de la quantité de mouvement généralisée, (géométrie constante dans le temps)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{h} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) \cdot \mathbf{h} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{h} + \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \mathbf{h} \quad (\text{A.II.2.1})$$

pour $\rho = \text{cte}$

$$\frac{\partial v_h}{\partial t} + \text{div} (hV) = h F + \frac{1}{\rho} \text{div} T h \quad (\text{A.II.2.2})$$