

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Thèse
de
DOCTORAT



EN COTUTELLE AVEC L'UNIVERSITE DE BRETAGNE-SUD, LORIENT, FRANCE
Présentée par

BEKHOUCHA Ferhat
Magister en Construction Mécanique

SPECIALITE : GENIE MECANIQUE
OPTION : CONSTRUCTION MECANIQUE

Vibrations Non-linéaires des Poutres en Composite en Mouvement de Rotation

Soutenue le 25 juin 2015 devant le Jury d'examen :

| | | | |
|--------------------|------------------------------------|----------------------|---|
| Président | Arezki SMAILI | Professeur | ENP, Alger |
| Rapporteurs | Olivier THOMAS Faiza BOUMEDIENE | Professeur MC-HDR | ENSAM. de Lille, France USTHB, Alger |
| Examineurs | Laëtitia DUIGOU | MC | U. Bretagne Sud, France |
| Directeurs | Saïd RECHAK Jean-Marc CADOU | Professeur MC-HDR | ENP, Alger U. Bretagne Sud, France |

2015

Dédicaces

A mon père,

A la mémoire de ma mère,

A ma femme et mes enfants :

Meriem, Hiba, Abderrahmane et

Taha.

A mes frères et sœurs.

Remerciements

Les travaux de recherches présentés dans ce mémoire de thèse ont été réalisés entre deux établissements. Le laboratoire génie mécanique et développement (LGMD) à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger sous la direction de M. Said RECHAK et le laboratoire LIMATB à l'Université Bretagne-Sud, Lorient – France sous la direction de M. Jean-Marc CADOU. Je tiens à leur exprimer mes remerciements et mes reconnaissances les plus profondes pour leurs conseils, leurs encouragements et le partage de leurs connaissances scientifiques.

Je tiens à remercier M. Arezki SMAILI qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. J'adresse également mes sincères remerciements à M. Olivier THOMAS et Mlle. Faiza BOUMEDIENE d'avoir bien voulu rapporter ce travail et pour l'intérêt qu'ils lui ont témoigné. Mes remerciements vont également au membre de jury Mme. Laëtitia DUIGOU de l'équipe LG2M du LIMATB pour l'effort qu'elle m'a fourni et l'intérêt avec lequel elle a suivi les travaux de ma thèse. Ces conseils précieux m'ont beaucoup aidé à mener à bien ce travail.

Je n'oublie pas les personnes qui m'ont aidé de près et de loin dans mes travaux, spécialement Monsieur Abbas BENBELKACEM et Monsieur Yann GUEVEL pour les discussions scientifiques que nous avons eues. Je voudrais également remercier tout le personnel du LGMD de l'ENP-Alger et du LIMATB de l'UBS-Lorient.

Mes chaleureux remerciements vont à toute ma famille pour son soutien moral indéfectible et leurs invocations, ainsi que mes amis de Lorient.

ملخص: العمل المقدم في هذه الرسالة هو المساهمة في دراسة الاهتزازات غير الخطية للعوارض الدوارة ذات الخواص الموحدة و ذات المواد المركبة. يستند النموذج الرياضي المستخدم على صياغة جوهريّة و مدققة هندسيا ل هودجز، معدة لعوارض تتعرض لإزاحات كبيرة مع تشوهات صغيرة. وتتم الحلول في المجال الترددي بعد تفريد المكانية و الزمانية، باستخدام تقريب غالركين وطريقة التوازن المتناسق، مع شروط الحدود الموافق ل ملزم-حر. يتم التعامل مع النظام الديناميكي النهائي بطرق الاستمرار: طريقة تقاربية عديدة وطريقة طول شبه قوس، و التي تم الإعداد لها بخوارزميات تستند إلى هذه الطرق كما أجريت دراسة التقارب. هذه الدراسة تحيط بالجوانب: السكون، وتحليل الاهتزازات الخطي، الاهتزازات الحرة غير الخطية و المجبرة غير الخطية-الاهتزازات للعوارض الدوارة. تم اختبار هذه الخوارزميات للاستمرار على منحنيات الاستجابة لحالات مدروسة في المنشورات. ودراسة الرنين الداخلي والاستقرار للحلول التي تم الحصول عليها.

كلمات مفتاحية: الاهتزازات غير الخطية للعوارض المركبة. صياغة جوهريّة. طريقة غالركين. طريقة التوازن المتناسق. طرق الاستمرار. تفريع هوف.

Résumé : Le travail présenté dans ce manuscrit est une contribution à l'étude des vibrations non-linéaires des poutres isotropes et en composite, en mouvement de rotation. Le modèle mathématique utilisé est basé sur la formulation intrinsèque et géométriquement exacte de Hodges, dédiée au traitement des poutres ayant des grands déplacements et de petites déformations. La résolution est faite dans le domaine fréquentiel suite à une discrétisation spatio-temporelle, en utilisant l'approximation de Galerkin et la méthode de l'équilibrage harmonique, avec des conditions aux limites correspondantes aux poutres encastées-libres. Le système dynamique final est traité par des méthodes de continuation : la méthode asymptotique numérique et la méthode pseudo-longueur d'arc. Des algorithmes basés sur ces méthodes de continuation ont été développés et une étude comparative de convergence a été menée. Cette étude a cerné les aspects : statique, analyse modale linéaire, vibrations libres non-linéaires et les vibrations forcées non-linéaires des poutres rotatives. Ces algorithmes de continuations ont été testés pour le calculs des courbes de réponse sur des cas traités dans la littérature. La résonance interne et la stabilité des solutions obtenues sont étudiées.

Mots-clés : Vibration non-linéaires des poutres en composite. Formulation intrinsèque. Galerkin. Méthode de l'équilibrage harmonique. Continuation. Bifurcation Hopf.

Abstract : The work presented in this manuscript is a contribution to the non-linear vibrations of the isotropic beams and composite rotating beams study. The mathematical model used is based on the intrinsic formulation and geometrically exact of Hodges, developed for beams subjected to large displacements and small deformations. The resolution is done in the frequency domain after a spatial-temporal discretisation, by using the Galerkin approximation and the the harmonic balance method, with boundary conditions corresponding to the clamped-free. The final dynamic system is treated by continuation methods : asymptotic numerical method and the pseudo-arc length method, whose algorithms based on these continuation methods were developed and a convergence study was carried out. This study surround the aspects : statics, linear modal analysis, non-linear free vibrations and the non-linear forced vibrations of the rotating beams. These continuation algorithms were tested for the response curves calculations on cases elaborated in the literature. Internal resonance and the stability of the solutions obtained are studied.

Key words : Nonlinear vibration of composite beams. Intrinsic formulation, Galerkin method. Harmonic balance method. Continuation methods. Hopf bifurcationn.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Dédicaces | i |
| Remerciements | iii |
| Résumé | v |
| Table des matières | ix |
| Nomenclature | x |
| 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Introduction générale | 1 |
| 1.2 Etat de l'art | 3 |
| 1.2.1 Les théories des poutres | 3 |
| 1.2.2 Vibrations des poutres rotatives | 6 |
| 1.3 Les contributions de cette thèse | 16 |
| 1.4 Organisation de la thèse | 17 |
| 2 Analyse de la dynamique des structures non-linéaires | 19 |
| 2.1 Modélisation des systèmes dynamiques | 20 |
| 2.2 Méthodes de résolution des systèmes dynamiques | 23 |
| 2.2.1 Les méthodes temporelles | 23 |
| 2.2.2 Les méthodes fréquentielles | 25 |
| 2.2.3 Les méthodes de continuation | 26 |
| 2.3 Bifurcations des solutions stationnaires | 37 |
| 2.4 Stabilité des solutions stationnaires | 39 |
| 2.4.1 Théorie de Floquet | 41 |
| 2.4.2 Méthode de Hill | 43 |
| 2.5 Interactions modales | 45 |
| 2.6 Bilan du chapitre | 47 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Modèle dynamique non-linéaire des poutres | 48 |
| 3.1 | Théorie générale | 49 |
| 3.1.1 | Modélisation des poutres via l'analyse de la section transversale | 49 |
| 3.1.2 | La méthode asymptotique variationnelle (MAV) | 50 |
| 3.2 | Analyse de la section transversale | 54 |
| 3.2.1 | Cinématique des poutres | 55 |
| 3.2.2 | Formulation du champ de déformation | 60 |
| 3.2.3 | Energie de déformation | 62 |
| 3.2.4 | Réduction dimensionnelle | 63 |
| 3.3 | Equations d'équilibre non-linéaires et intrinsèques | 78 |
| 3.3.1 | Variation de l'énergie de déformation | 79 |
| 3.3.2 | Variation de l'énergie cinétique | 80 |
| 3.3.3 | Travail virtuel | 82 |
| 3.3.4 | Equations de mouvement intrinsèques | 82 |
| 3.3.5 | Equations constitutives | 83 |
| 3.3.6 | Equations cinématiques intrinsèques | 84 |
| 3.4 | Bilan du chapitre | 85 |
| 4 | Techniques d'aide à la résolution du problème | 87 |
| 4.1 | Discrétisation spatiale et temporelle | 88 |
| 4.1.1 | Approximation de Galerkin | 88 |
| 4.1.2 | Méthode de l'équilibrage harmonique | 97 |
| 4.2 | Calcul des déplacements | 100 |
| 4.3 | Analyse de la section transversale | 101 |
| 4.4 | Analyse statique linéaire | 110 |
| 4.5 | Bilan du chapitre | 114 |
| 5 | Vibrations libres non-linéaires des poutres rotatives | 115 |
| 5.1 | Analyse modale linéaire | 116 |
| 5.1.1 | Coefficients adimensionnels | 117 |
| 5.1.2 | Résultats numériques | 117 |
| 5.2 | Vibrations libres non-linéaires | 126 |
| 5.2.1 | Algorithme de branchement en un point de bifurcation Hopf via la MAN | 128 |

Table des matières

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.2.2 | Remarques | 134 |
| 5.2.3 | Résultats numériques | 135 |
| 5.3 | Bilan du chapitre | 145 |
| 6 | Vibrations forcées non-linéaires des poutres rotatives | 146 |
| 6.1 | Algorithmes de continuation pour les vibrations forcées non-linéaires . . | 147 |
| 6.1.1 | Algorithme de la méthode asymptotique numérique (MAN) . . . | 147 |
| 6.1.2 | Algorithme de la méthode pseudo-longueur d'arc (PLA) | 148 |
| 6.1.3 | Stabilité des solutions | 150 |
| 6.2 | Résultats numériques | 151 |
| 6.2.1 | Poutres prismatiques isotropes | 151 |
| 6.2.2 | Poutres en composites | 154 |
| 6.3 | Bilan du chapitre | 164 |
| | Conclusion générale et perspectives | 165 |
| | Annexe A : Approximation de Padé | 168 |
| | Annexe B : Algorithme de continuation de la MAN-Padé | 169 |
| | Annexe C : Calcul des modes de vibration | 170 |
| | Références bibliographiques | 174 |

Nomenclature

Liste des symboles

| | |
|---|---|
| a | Paramètre de continuation |
| \mathbf{a}_i | Vecteur unitaire du repère globale (\mathbf{a}) |
| A | Surface de la section transversale avant déformation |
| $\mathcal{A}_{ki}, \bar{\mathcal{A}}$ | Matrices utilisées dans les approximations de Galerkin et la balance harm. |
| \mathbf{b}_i | Vecteur unitaire, repère de la section transversale non déformée (\mathbf{b}) |
| \mathbf{B}_i | Vecteur unitaire, repère de la section transversale déformée (\mathbf{B}) |
| C^{AB} | Matrice de passage (transformation) du repère B vers A |
| \mathcal{D} | Matrice 6×6 relative à la loi de comportement |
| e_1 | Matrice unicolonne $[1 \ 0 \ 0]^T$ |
| f | Vecteur force distribuée appliqué par unité de longueur |
| \mathbf{g}_i | Base covariante à l'état non déformé |
| \mathbf{g}^i | Base contravariante à l'état non déformé |
| \mathbf{G}_i | Base covariante à l'état déformé |
| \mathbf{G}^i | Base contravariante à l'état déformé |
| F | Vecteur de la résultante des forces internes de la section transversale |
| \mathbf{g}_i | Base covariante à l'état non déformé |
| H | Vecteur du moment cinétique angulaire de la section transversale |
| $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_{23}$ | Moments d'inertie de la section transversale, éléments de la matrice \mathbb{I} |
| K | Vecteur de courbure de la poutre déformée |
| k | Vecteur de la courbure initiale |
| \mathcal{K} | Energie cinétique |
| L | Longueur de la poutre |
| M | Vecteur de la résultante des moment internes de la section transversale |
| m | Vecteur moment distribué appliqué par unité de longueur |
| P | Vecteur du moment cinétique linéaire de la section transversale |
| q | Vecteur des inconnues généralisées |

| | |
|---|--|
| \mathbf{r} | Vecteur position de l'origine du repère (\mathbf{b}) |
| \mathbf{R} | Vecteur position de l'origine du repère (\mathbf{B}) |
| \mathcal{R} | Fonctionnelle de la résiduelle |
| R | Rayon de courbure de la poutre avant déformation |
| $\bar{\mathcal{S}}$ | Matrice de rigidité 4×4 |
| \mathcal{S} | Matrice de rigidité 6×6 |
| \mathbf{u} | Vecteur de déplacement moyen de la section transversale |
| \mathcal{U} | Energie de déformation |
| V | Vecteur de vitesse de la ligne de référence |
| \mathbf{w} | $[w_1, w_2, w_3]^T$, vecteur déplacement du gauchissement |
| \mathcal{W} | Travail des forces appliquées |
| x_1, x_2, x_3 | repère lié à la section transversale non-déformée |
| \bar{x}_1, \bar{x}_2 | Offsets du centre de masse de la section transversale dans (b_i) |
| Δ | Matrice d'identité |
| γ | $[\gamma_{11}, 2\gamma_{12}, 2\gamma_{13}]^T$ |
| $\hat{\varepsilon}$ | Ordre de grandeur global des déformations |
| $\bar{\varepsilon}$ | $[\bar{\gamma}_{11}, \bar{\kappa}_1, \bar{\kappa}_2, \bar{\kappa}_3]^T$, vecteur de déformations généralisées de Newton-Euler |
| ε_t | $[\gamma_{11}, 2\gamma_{12}, 2\gamma_{13}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3]^T$, déformations généralisées de Timoshenko |
| $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ | Déformations de torsion et de flexion ($\kappa_i = K_i - k_i$) |
| λ | Paramètre de la fonctionnelle \mathcal{R} |
| μ | Masse par unité de longueur |
| ω | pulsation |
| Ω | Vecteur vitesse angulaire |
| χ | Tenseur du gradient de déformation |
| Γ | Tenseur de déformation 3-D |
| σ | Tenseur des contraintes 3-D |
| o | Asymptotiquement petit que |
| \sim | Asymptotiquement égale à |
| \mathcal{O} | Limite asymptotique en grandeur à |
| $\langle\langle \bullet \rangle\rangle$ | $\int_A \bullet \sqrt{g} dx_2 dx_3$ |
| $(\dot{\bullet})$ | $\partial(\bullet)/\partial t$ |
| $(\tilde{\bullet})$ | $-e_{ijk}(\bullet)_k$ |

| | |
|-------------------------|--|
| (\bullet') | $\partial(\bullet)/\partial x_1$ |
| $(\delta\bar{\bullet})$ | La barre indique qu'il n'est pas nécessaire que la variation de la quantité soit décrite |

Abréviations

| | |
|------|---|
| MAN | Méthode Asymptotique Numérique |
| MAV | Méthode Asymptotique Variationnelle |
| MEM | Méthode des Echelles Multiples |
| MNNs | Modes Normaux Non-linéaires |
| PLA | Pseudo-Longueur d'Arc (méthode de continuation) |
| VABS | Code d'analyse de la section transversale des poutres anisotropes |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Modèle mathématique de Hodges pour la dynamique des poutres | 86 |
| 4.1 | Rigidités d'une section transversale carrée avec matériau isotrope | 108 |
| 4.2 | Rigidités d'une section transversale carré avec matériau isotrope et cour- bure initiale $k_1 = 0.05$ | 109 |
| 4.3 | Rigidités d'une section transversale carré avec matériau orthotrope | 110 |
| 5.1 | Comparaison des deux premières fréquences naturelles d'une poutre ro- tative, isotrope et uniforme. Cas d'une poutre de Timoshenko, à l'ex- ception de la première ligne où EB indique une poutre Euler-Bernoulli ($\delta_h = 0, k_s G/E = 0.25$) | 119 |
| 5.2 | Comparaison des quatre premières fréquences naturelles en fonction de l'angle de tordage α , ($\beta = 1000, \gamma = 0, \delta_h = 0, \delta_i = 0.25, k_s G/E = 0.25$). Poutre encastree, non rotative et isotrope | 122 |
| 5.3 | Paramètres de la structure de la pale ATR [6, 7] | 124 |
| 5.4 | Les quatre premières fréquences naturelles de la pale ATR en fonction de la vitesse de rotation | 124 |
| 5.5 | Les premières fréquences naturelles ω_{fi} de battement et ω_{ai} d'exten- sion (rad/s), d'une poutre prismatique rotative à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$ en comparaison avec [11–13, 139] | 137 |
| 5.6 | Les premières fréquences naturelles de flexion ω_{fi} et de torsion ω_{ti} (rad/s) de la poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0$ et $\Omega_3 = 100 \text{ rad/s}$ | 141 |
| 6.1 | Nombre de pas, Temps de calcul UC et le résidu pour $\omega = [0, 25] \text{ rad/s}$. Cas de la pale ATR excitée harmoniquement au bout, ($F_0 = 20N$ and $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$) | 159 |

Liste des figures

| | | |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Continuation séquentielle | 29 |
| 2.2 | Continuation - méthode de Davidenko-Newton-Raphson | 30 |
| 2.3 | Continuation par longueur d'arc | 32 |
| 2.4 | Continuation par pseudo-longueur d'arc | 33 |
| 2.5 | Comparaison entre les méthodes de prédiction-correction et la MAN . . | 35 |
| 2.6 | (a) point tournant, (b) point de bifurcation transcritique | 38 |
| 2.7 | (a) point fourche super-critique, (b) point fourche sous-critique | 38 |
| 3.1 | Poutre 3-D en mouvement, décomposition en analyse 1-D et analyse 2-D | 51 |
| 3.2 | Schéma du modèle de poutre, repères et ligne de référence | 57 |
| 3.3 | Repères utilisés pour prendre en considération l'effet de cisaillement . . | 74 |
| 4.1 | Systèmes de coordonnées global et isoparamétrique | 103 |
| 4.2 | Relation entre le système de coordonnées global (x_1, x_2, x_3) et le sys- tème de coordonnées local du matériau (y_1, y_2, y_3) | 105 |
| 4.3 | Poutre isotrope avec section carrée | 108 |
| 4.4 | Poutre encastrée isotrope et uniforme - Géométrie et système de coor- données. | 111 |
| 4.5 | Déplacements et rotations le long de la poutre isotrope uniforme. Solu- tion analytique et solution numérique | 112 |
| 4.6 | Poutre-caisson en composite, section transversale [74] | 112 |
| 4.7 | Distribution des déplacements et des rotations le long de la poutre- caisson en composite | 114 |
| 5.1 | Poutre prismatique isotrope en mouvement de rotation | 118 |
| 5.2 | Effet de la vitesse de rotation sur les deux 1 ^{er} modes de flexion horizontal et transversal et sur le 1 ^{er} mode de torsion, Poutre isotrope avec $\beta = 70$ | 120 |
| 5.3 | Variation du 1er mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation, Poutre encastrée, isotrope et uniforme. | 121 |

Liste des figures

| | | |
|------|--|-----|
| 5.4 | Les quatre premiers modes de déformation avec leurs modes compagnons, $\alpha = 30^0$. Poutre encastree, isotrope et uniforme | 122 |
| 5.5 | Profil de la pale ATR et la composition des plis [169] | 123 |
| 5.6 | Pale ATR, les 1 ^{er} modes de flexion et de torsion, $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ | 125 |
| 5.7 | Pale ATR, les 1 ^{er} modes de flexion et de torsion, $\Omega_3 = 10 \text{ rad/s}$ | 125 |
| 5.8 | Schéma d'une poutre rotative, prismatique et isotrope [11–13, 139] . . . | 136 |
| 5.9 | Courbe d'épine dorsale correspondant au premier mode de battement non-linéaire. En utilisant la MAN-Padé | 138 |
| 5.10 | La précision de la courbe de réponse correspondante au premier mode de battement non-linéaire à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$, MAN-Padé | 138 |
| 5.11 | Les courbes de réponse de vibrations libre et forcée du premier mode de battement, poutre rotative à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$, MAN-Padé | 139 |
| 5.12 | Le déplacement axial associé au premier mode de battement non-linéaire, d'une poutre encastree prismatique et isotrope, à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$ | 139 |
| 5.13 | Les modes 2 et 3 de vibrations libres de battement, résidus et courbes de réponses forcées. Mode 2 (a, b, et c) et mode 3 (d, e, et f), MAN-Padé | 140 |
| 5.14 | Courbe de réponse libre du premier mode non-linéaire de battement - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, utilisant MAN-Padé, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$ | 142 |
| 5.15 | Précision de premier mode de battement - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, utilisant MAN-Padé, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$. . . | 142 |
| 5.16 | Couplage des déplacements et des rotations correspondant au premier mode non-linéaire de flexion en battement - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ et $\Omega_3 = 100 \text{ rad/s}$ | 143 |
| 5.17 | Courbe de réponse libre du 2 ^{eme} mode non-linéaire (de battement) - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, $F_0 = 1 \text{ N}$, MAN-Padé . . | 144 |
| 5.18 | Courbe de réponse libre du 3 ^{eme} mode non-linéaire (de torsion) - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, utilisant MAN-Padé | 144 |
| 6.1 | Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastree-libre, excitée harmoniquement à l'extrémité, $F_0 = 10^{-3} \text{ N}$, (• Padé et ■ séries) | 152 |

| | | |
|------|---|-----|
| 6.2 | Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastrée-libre, excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 10^2 N$ - Effet de la vitesse angulaire | 153 |
| 6.3 | Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastrée-libre, excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 5 \cdot 10^2 N$, $\Omega_3 = 0 \div 30 \text{ rad/s}$, (--- : solution instable) | 153 |
| 6.4 | Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastrée-libre, excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 10^2 N$, $L = 10m$. Effets du rayon du moyeu et du tordage | 154 |
| 6.5 | Courbes de réponse forcée d'une poutre-caisson en composite encastrée-libre, excitée harmoniquement à l'extrémité | 155 |
| 6.6 | Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement à l'extrémité $F_0 = 20N$, $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, Δ séries, et \square Padé. zone discontinue : solution instable | 156 |
| 6.7 | Précision de la MAN-série vs. PLA (Cas de la pale ATR excitée harmoniquement à l'extrémité, $F_0 = 20N$ et $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$) | 158 |
| 6.8 | Courbes de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout - Effet de l'amplitude de la force, $F_0 = 10N, 20N, 30N$ avec $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ | 160 |
| 6.9 | Courbes de réponse dans le plan et en dehors le plan de la pale ATR excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 20N$, $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$. Zones discontinues : solutions instables | 160 |
| 6.10 | Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout - Effet de la vitesse angulaire $F_0 = 20N$, et $\Omega_3 = 20 \text{ rad/s}$ | 161 |
| 6.11 | Courbes de réponse dans et en dehors le plan pour les cas $\Omega_3 = 0, 20 \text{ rad/s}$ | 162 |
| 6.12 | Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout - Effet de la vitesse angulaire $F_0 = 20N$, et $\Omega_3 = 20 \text{ rad/s}$ | 162 |
| 6.13 | Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 20N$ - influence de la vitesse angulaire | 163 |
| C.1 | Modes de vibration en 3D - Poutre prismatique isotrope avec $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ et un coefficient d'élancement $\beta = 70$ | 172 |
| C.2 | Modes de vibration en 3D - Poutre en composite ATR à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ (Les caractéristiques de la poutre ATR sont définies dans la sous-section 5.1.2.c.) | 173 |

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1.1 | Introduction générale | 1 |
| 1.2 | Etat de l'art | 3 |
| 1.2.1 | Les théories des poutres | 3 |
| 1.2.2 | Vibrations des poutres rotatives | 6 |
| 1.3 | Les contributions de cette thèse | 16 |
| 1.4 | Organisation de la thèse | 17 |

1.1 Introduction générale

L'analyse des vibrations des structures mécaniques est d'une grande importance dans le domaine industriel et technologique. Souvent, ces vibrations sont dangereuses causant des dommages et des bruits. Dans le cas de petites oscillations, elles sont linéarisées autour d'un point d'équilibre stationnaire. Elles sont largement étudiées et une multitude de méthodes analytiques et numériques ont été développées pour l'analyse de ce type de problèmes. Cependant, si les oscillations sont importantes une analyse non-linéaire des systèmes dynamiques et vibratoires découlant des équations de mouvement est essentielle pour comprendre le processus physique de ces systèmes. Ce sujet n'est pas récent, mais il connaît actuellement un regain d'intérêt pour des besoins de conception des structures dont les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement, ou de contrôle du bruit et des vibrations. Les poutres sont des éléments fondamentaux dans les structures d'ingénieries. Elles sont utilisées dans divers domaines. En mécanique et en aérospatiale, telles que, les pales des éoliennes et des hélicoptères, les hélices des turbopropulseurs, les aubes des

turbomachines, les bras manipulateurs, les antennes des avions et les panneaux des satellites. En génie civil, on peut citer les ponts et les hauts immeubles. Dans le domaine de la médecine, on trouve les bras et les mécanismes flexibles utilisés dans la chirurgie. Pour cela, l'étude statique et dynamique, théorique, numérique ou expérimentale de ce type de structure simple, est très importante pour l'appréhension du comportement notamment vibratoire des structures complexes et réelles et par conséquent pour faire un bon dimensionnement et un contrôle efficace.

Les structures en forme de poutres sont souvent sollicitées avec des charges dynamiques donnant lieu à des oscillations avec des amplitudes larges et des couplages entre les modes, et par conséquent, à des vibrations non linéaires. Des phénomènes importants surgissent dans les structures en présence des non-linéarités, tels que les sauts, les résonances internes et les interactions modaux accompagnés d'échanges d'énergie, de saturation, qui peuvent conduire dans certains cas au chaos. Ces phénomènes ne peuvent pas être expliqués ni modélisés par des modèles linéaires. Naturellement, il n'y a aucun système physique linéaire et par conséquent, les modèles linéaires sont limités à des domaines de fonctionnement restreint, telles que les petites amplitudes de vibration.

Ce travail s'inscrit dans le cadre des activités de recherches sur les systèmes dynamiques non-linéaires, des deux laboratoires LGMD de l'ENP – Algérie et LIMATB de l'UBS – France. Au LGMD, on poursuivait depuis des années des travaux de recherches sur la dynamique des structures en composite et le délaminage. Au LIMATB, des travaux de recherches ont été lancés depuis plusieurs années sur l'application et l'utilisation de la méthode de continuation la MAN, 'Méthode Asymptotique Numérique', dans l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires, notamment pour les structures mécaniques vibrantes.

Théoriquement, la non-linéarité se manifeste par des produits de variables dépendants entre elles et de leurs dérivées dans les équations de mouvement, les lois de comportement, et les conditions aux limites. Dans la dynamique des structures, les sources de non-linéarité peuvent être classées comme suit [123, 124] :

- Matériaux, quand la loi de comportement reliant les contraintes et les déformations est non linéaire. On peut citer à titre d'exemple le caoutchouc, les matériaux travaillant à haute température.
- Géométrique, ce type de non-linéarité est lié aux systèmes subissant de larges

1.2. Etat de l'art

déplacements ou déflexions. Elle se manifeste par des relations déformation-déplacement et courbure-déplacement non linéaires.

- Inertie, la non-linéarité est causée par les forces de Coriolis, gyroscopiques et centrifuges.
- Amortissement, qui est de nature un phénomène non linéaire. L'amortissement linéaire visqueux est une idéalisation.
- La non-linéarité due aux conditions aux limites, par exemple une poutre libre d'un côté et mise sur un appui simple avec un ressort de torsion de l'autre côté.
- D'autres types de non-linéarités existent, à titre d'exemple, celles liées à des systèmes avec un contact intermittent dans les rotules, une fissure, des forces magnétiques ou électriques, etc.

Dans ce travail, la non-linéarité considérée est géométrique résultant des grands déplacements et des grandes rotations.

Dans cette thèse, les vibrations non linéaires des poutres en mouvement de rotation avec des matériaux isotropes et composites sont étudiées. Ce travail s'inscrit dans l'optique de développement des outils numériques et des algorithmes permettant d'analyser efficacement le comportement vibratoire des structures. Cette analyse a deux aspects : l'aspect linéaire par la détermination des fréquences et des modes de vibration naturels, et l'aspect non linéaire par la détermination des courbes de réponse de vibrations libres et forcées non linéaires.

1.2 Etat de l'art

1.2.1 Les théories des poutres

De nombreuses théories des poutres ont été développées, elles sont basées sur des hypothèses diverses et conduisent à différents ordres de précision. Les premiers pas faits pour développer une théorie des poutres, ont été abordés par Daniel Bernoulli (1694). Sa contribution connue comme l'hypothèse de Bernoulli considère que la section transversale reste non déformée dans l'état déformé. Sa nouvelle position est définie par les relations entre les déplacements et les déformations. Leonhard Euler (1744), connu par son manuscrit 'elastica' [112], a étudié les poutres planes sans déformations de cisaillement. Des contributions ultérieures sont dues à Saint-Venant (1845)

par ses hypothèses liées à la torsion. Kirchhoff (1859) a fait une généralisation dans l'espace des travaux d'Euler. Love (1893), connu par la théorie des poutres appelée de Kirchhoff-Love, qui se caractérise par l'ajout d'une déformation axiale de traction. Les frères Cosserat (1907) ont fait une généralisation de la théorie de Kirchhoff, appelée la théorie de Cosserat spéciale. Toutes ces théories ne prennent pas en considération les déformations de cisaillement et par conséquent les sections transversales restaient toujours orthogonales à la ligne passant par les locus, i.e. les centres de gravité surfacique, le long de la poutre. La première amélioration a été faite par Timoshenko (1921) en tenant compte de l'effet de cisaillement. Un historique sur le développement de la théorie de l'élasticité, y compris les problèmes de flexion des poutres, a été détaillé dans Love [112] et Timoshenko [168]. Depuis ces premiers travaux jusqu'à nos jours, un nombre important de papiers visant à améliorer et développer ces théories ont été publiés, ce qui rend l'impossibilité de les citer tous.

En général, les théories des poutres peuvent être classées en trois catégories :

- (a) La théorie d'Euler-Bernoulli appelée la théorie classique des poutres.
- (b) Les théories des poutres de déformation de cisaillement, i.e. la théorie de Timoshenko qui est le premier ordre d'approximation du cisaillement, la théorie des poutres de cisaillement de troisième ordre, la théorie des poutres d'ordre supérieurs de cisaillement, et la théorie des poutres de cisaillement par couches applicables dans le cas des poutres en composite stratifiées
- (c) La théorie des poutres à trois dimensions.

La théorie d'Euler-Bernoulli est connue par les hypothèses dites d'Euler-Bernoulli :

(i) la section transversale reste plane après déformation, i.e. il n'a pas de gauchissement dans le plan (ii) seule la déformation axiale est prise en considération et (iii) une section perpendiculaire à la ligne de référence avant déformation reste perpendiculaire après déformation. Ces hypothèses s'appliquent seulement dans le cas des poutres élancées et isotopes. Pour mieux décrire l'état de la section transversale, la théorie de Timoshenko améliore la théorie d'Euler-Bernoulli par l'introduction des déformations de cisaillement du premier ordre, viennent ensuite les théories des poutres de troisième ordre et plus, qui améliorent la théorie de Timoshenko par l'introduction d'une distribution non uniforme de la déformation de cisaillement sur la section transversale. Cette déformation non uniforme, appelée aussi le gauchissement en dehors du

1.2. Etat de l'art

plan de la section transversale, peut être exprimée par un coefficient appelé facteur de correction de cisaillement qu'il faut ajouter quand on utilise la théorie de Timoshenko, Pai et Schultz [130]. Ce facteur de correction dépend de la forme de la section transversale. Dans les théories des poutres à trois dimensions, tous les gauchissements sont pris en considération : dans le plan et en dehors du plan de la section transversale et par conséquent les effets de toutes les contraintes en trois dimensions sont calculées, Nayfeh [124]. Dans cette théorie et dans les théories de cisaillement d'ordre supérieur, il n'est pas nécessaire de mettre un facteur de correction de cisaillement.

Les théories des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko peuvent être considérées comme des approximations à la théorie des poutres 3D, du moment qu'elles prennent comme point de départ les champs de déplacement et de déformation. Le cisaillement transversal est inversement proportionnel à l'élançement de la poutre, i.e. il est négligeable pour les poutres élancées, mais il est significatif pour les poutres courtes, où il faut appliquer la théorie de Timoshenko ou une autre théorie d'ordre supérieure.

Lorsque le centre de cisaillement et le centre de gravité surfacique 'locus' sont différents, c'est le cas d'une poutre isotrope avec une section transversale ayant moins de deux axes de symétrie, ou une poutre anisotrope, le mouvement de flexion va engendrer une torsion. La manière la plus simple pour étudier un tel couplage flexion-torsion est de joindre la théorie d'Euler-Bernoulli avec les hypothèses de Saint-Venant de torsion [68].

Dans le cas des poutres en composite, du fait que les matériaux hétérogènes utilisés sont fragiles en cisaillement, l'effet du cisaillement transversal et le gauchissement dû à la torsion deviennent importants, ce qui va engendrer des couplages entre les mouvements élastiques. Ces phénomènes sont présents dans les poutres avec une courbure initiale, comme par exemple une poutre vrillée. Ces mêmes phénomènes sont toujours présents lorsqu'il s'agit des poutres à parois minces ou épaisses, avec des sections ouvertes ou fermées, Jun et al.[94]. A cause de l'anisotropie et de la dissymétrie de la section transversale, d'autres effets peuvent surgir dans les poutres en composite tels que l'effet du bord libre et l'effet de trapèze appelé parfois l'effet bifilaire. Ce dernier effet traduit le couplage entre les mouvements d'extension et de torsion. Tous ces effets permettent de conclure que la théorie qu'il faut utiliser pour étudier les poutres anisotropes doit être non linéaire et doit permettre la détermination de toutes les com-

posantes du champ de déformation.

La nécessité de prendre en compte toutes les déformations a conduit au développement des théories des poutres dites géométriquement exactes, où la compatibilité entre ces déformations avec les équations d'équilibres est vérifiée indépendamment des magnitudes des déplacements et des rotations, autrement dit, il n'y a aucune approximation géométrique. Les chercheurs ont donné de l'importance à cet axe suite au premier travail de Reissner (1972) sur une théorie des poutres capable de traiter des grands déplacements avec des petites déformations et des rotations modérées [148]. Cette théorie des poutres dite théorie de déformation finie de Reissner est géométriquement exacte seulement en statique et en déformation plane, i.e. en 2D. Elle a été améliorée par des travaux tels que celui du Simo (1985) [156] qui a été une formulation dynamique en 3D de la théorie de Reissner. Par la suite, Simo et Vu-Quoc (1986) [157] ont implémenté ce modèle en utilisant la méthode des éléments finis. Toutefois, cette théorie souffre des singularités algébriques et de nombreuses techniques ont été proposées afin de l'améliorer. On peut citer par exemple l'utilisation de la formulation Lagrangienne et le changement de paramétrisation du champ de rotation [47, 92, 117]. Cette catégorie est plus compacte, mais elle est tout de même développée sur la base des hypothèses sur le champ de déplacement et elle est restreinte aux petites déformations.

En raison du présent travail consacré aux poutres isotropes et composites en mouvement de rotation, il est utile de se restreindre aux articles et aux livres pertinents et nécessaires, entre autres ceux qui ont traité principalement le comportement vibratoire des poutres rotatives.

1.2.2 Vibrations des poutres rotatives

Les poutres rotatives sont généralement des poutres élancées en matériaux composites, telles que les pales des hélicoptères, les pales des éoliennes et les hélices des propulseurs. Ces poutres sont exposées à des vibrations non linéaires et des instabilités dynamiques qui sont les conséquences des grands déplacements et des grandes rotations. On entend par vibrations des poutres rotatives les oscillations autour d'une position stationnaire (régime permanent) dans le repère local de la poutre, qui peuvent être déterminées en éliminant les termes temporels des équations d'équilibre de la

1.2. Etat de l'art

poutre rotative. Cette solution stationnaire est caractérisée par les fréquences et les vecteurs propres de vibrations, appelés modes de vibrations. Ces caractéristiques sont obtenues par une linéarisation des équations d'équilibres autour de la position stationnaire. Ces modes de vibrations concernent les modes de tractions, les modes de flexions dans les deux plans latéral et transversal, et les modes de torsion. Dans cette thèse, Les vibrations recherchées seront calculées par rapport à cette position stationnaire et la position finale d'un point matériel sera la somme des deux vecteurs de position obtenus.

La modélisation dynamique et vibratoire des poutres isotropes rotatives est plus riche en matière de références bibliographiques que celle des poutres en composites. Ceci est dû à ce que les chercheurs préfèrent toujours cerner les problèmes les plus simples avant de passer aux problèmes les plus complexes. A cet effet, les poutres isotropes et uniformes avec une double symétrie sont les premiers modèles étudiés. Sous l'effet du mouvement de rotation, il y a, en plus des forces centrifuges, deux autres forces induites par l'inertie : les forces de Coriolis et les forces gyroscopiques. Ces deux dernières forces sont souvent négligées afin de simplifier la résolution des modèles dynamiques obtenus.

Dans la littérature, à l'exception des introductions courtes dans les différents papiers publiés, il y a peu de travaux d'expertise et de synthèse relatifs aux vibrations des poutres rotatives. Dans le papier de Bazoune [23], une synthèse a été faite sur les modèles et les méthodes de résolution utilisés dans la détermination des caractéristiques dynamiques des poutres rotatives isotropes, i.e. les fréquences propres et les modes propres. Une synthèse faite par Hajianmaleki et Qatu [78] concerne les vibrations des poutres en composite et aborde dans une section l'effet rotatif. Cependant, d'autres synthèses ont été faites sur les modèles dynamiques des pales en composites des rotors telles que celles de Hodges [82, 84] et celle de Jung et al.[94]. Dans ce qui suit, les vibrations des poutres rotatives pour les deux cas poutres isotropes et poutres en composite sont passées en revue séparément.

1.2.2.a Vibrations des poutres isotropes rotatives

Le premier travail sur les poutres rotatives isotropes revient à Southwell et Gough [161], portant sur la détermination des caractéristiques vibratoires de flexion des poutres encastées avec une vitesse de rotation constante en se basant sur le théo-

rème d'énergie de Rayleigh. Une équation pour estimer les fréquences naturelles d'une poutre rotative a été suggérée, appelée l'équation de Southwell. Ce Travail a été étendu par un nombre important d'études. Nagaraj et Shanthakumar [118], Putter et Manor [143] ont étudié les modes naturels des poutres rotatives, d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko respectivement, avec les éléments finis. Hodges et Rutkowsky [87] ont utilisé plus tard la méthode des éléments finis version « hp » pour l'analyse des fréquences naturelles d'une poutre d'Euler-Bernoulli rotative avec l'effet du rayon du moyeu. Dans ces études il a été montré que les fréquences naturelles augmentent avec la vitesse de rotation conduisant ainsi à un accroissement de l'intensité des forces centrifuges et par conséquent à une rigidification de la poutre. Les équations d'équilibre relatives aux mouvements de flexion sont linéarisées par la troncature des termes non linéaires qui traduisent le couplage entre les mouvements de flexion et de traction causé par l'effet de Coriolis. Des modèles plus complexes ont été développés pour obtenir des fréquences naturelles précises, en introduisant d'autres effets tels que la variation de la section transversale, i.e. poutre fuselée, dans Klein [102], le vrillage dans Swaminathan et Rao [165], et en jumelant les effets du rayon du moyeu et l'angle de calage dans le papier du Yokoyama [177], les deux effets le fuselage et la masse au bout dans [100]. Des formulations hybrides ont été utilisées, où les déformations sont fonctions des coordonnées curvilignes le long de la poutre dans Yoo and Shin [179]. Dans ce dernier papier, on démontre que le couplage gyroscopique entre les mouvements de traction et de flexion diminue considérablement les fréquences propres et que cet effet est négligeable pour les poutres élancées. Récemment et dans le même contexte, d'autres modèles ont été développés sur la base de la théorie des poutres de Timoshenko, en introduisant les effets de la non uniformité de la section transversale, du vrillage et de l'offset i.e. le rayon du moyeu dans les travaux de Bazoune et al.[24]. Banerjee [20] a étudié les fréquences propres d'une poutre d'Euler-Bernoulli rotative avec diverses conditions aux limites et une section uniforme et fuselée en utilisant la méthode de la rigidité dynamique et les séries de Frobenius. Ce travail a été étendu aux poutres de Timoshenko rotatives par le même auteur [21], où une comparaison entre les deux modèles d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko a été donnée et discutée.

Récemment, Ozdemir et Kaya.[126] ont appliqué la méthode de transformation des différentielles sur les équations de mouvement finales d'une poutre d'Euler-Bernoulli fuselée. Ce travail a été étendu pour une poutre de Timoshenko et doublement fuselée

1.2. Etat de l'art

[127], où les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton en appliquant un schéma de troncature aux expressions des énergies potentielle et cinétique. La troncature est faite selon l'ordre de grandeur des termes. La même technique a été utilisée dans Hodges et Dowell[85], où les équations de mouvement ont été dérivées en utilisant le principe d'Hamilton et la méthode Newtonienne. Zhu [188] a utilisé les équations de Lagrange et la méthode de Rayleigh-Ritz pour étudier les vibrations libres transversales d'une poutre de Timoshenko doublement fuselée.

Tous ces travaux sont fondés sur des analyses modales linéaires et se sont limités globalement à l'étude de la sensibilité des fréquences propres et modes propres d'une poutre isotrope rotative aux différents effets d'inertie, géométrie et conditions aux limites. Cependant, quand la non-linéarité est importante sous l'effet par exemple des forces de Coriolis l'analyse vibratoire non linéaire est inévitable. Il y a quelques travaux qui ont traité l'aspect vibratoire non linéaire d'une poutre rotative, tels que les travaux de Rao et Carnegie [146, 147]. Ils ont étudié les vibrations libres et forcées dans le plan d'une poutre symétrique et rotative sous l'effet non linéaire des forces de Coriolis. Ce problème a été repris par Ansari [10] en ajoutant l'effet du vrillage, de la non uniformité et l'asymétrie de la section transversale. Pour la résolution il a utilisé une formulation de systèmes discrets. Les courbes de réponse forcées ont été comparées avec celles de Rao et Carnegie [147]. Brons et Kliem[43] ont étudié le flambement et les vibrations non linéaires des poutres montées sur un anneau rotatif et orientées à l'intérieur. Hamdane et Al-Bedoor[79] ont étudié les vibrations libres non linéaires d'une poutre rotative avec une courbure non linéaire en utilisant la méthode de transformation du temps. Dans [139], Pesheck et al. ont approché la géométrie et les surfaces invariantes pour construire les modes normaux non linéaires d'une poutre rotative d'Euler-Bernoulli. Le même travail a été repris par Apiwattanalungarn et al [11], où on montre que l'approximation de Galerkin présente une réduction plus exacte que les séries asymptotiques particulièrement pour les grands déplacements. Turhan et Bulut [63] ont étudié les vibrations non linéaires libres et forcées d'une poutre rotative d'Euler-Bernoulli avec une courbure non linéaire et des non-linéarités géométriques jusqu'aux termes cubiques. Les auteurs ont démontré qu'une poutre rotative peut changer de comportement du rigidifiant à l'assouplissant en fonction de la vitesse de rotation. Plus récemment des analyses modales non linéaires ont été faites. Arvin et Bakhtiari-Nejad [12] ont appliqué la méthode des échelles multiples sur les

équations de mouvement discrétisées par la méthode de Galerkin et obtenues à partir d'un modèle de poutre basé sur les relations de Von Karman. Arvin et al. [13] ont appliqué les mêmes techniques sur un modèle dynamique géométriquement exact développé par Lacarbonara et al. [104].

Dans les problèmes réels tels que les rotors des hélicoptères, des éoliennes et des turbopropulseurs, les vibrations de flexion se manifestent dans les deux plans perpendiculaires des pales. Le mouvement vibratoire est du type trois dimensions et seuls les modèles des poutres à trois dimensions peuvent représenter ces pales. Dans le cas où la section transversale ne présente aucun plan de symétrie, les modes de flexion dans les deux plans, les modes de torsion et les modes axiaux sont couplés. Les travaux de recherches qui ont été faits pour la détermination des caractéristiques vibratoires de ce type de poutres sont affectés aux formulations des équations de mouvement, autrement dit aux théories des poutres en trois dimensions, telles que la théorie linéaire de Houbolt et Brooks (1958) [90]. Peu de tentatives ont été faites pour la recherche des fréquences propres et les modes propres d'une poutre rotative en utilisant ces équations de mouvement vu le nombre important des termes non linéaires. Murthy (1976) [116] a utilisé la méthode de la matrice de transfert afin de déterminer les caractéristiques dynamiques des pales d'un rotor décrit par Houbolt et Brooks, où les équations de mouvement ont été réduites à des équations différentielles du premier ordre. Hodges et Dowell (1974) [85] ont dérivé des équations de mouvement non linéaires en utilisant le principe d'Hamilton et la méthode Newtonienne. Un schéma d'ordre de troncature a été appliqué où seulement les non-linéarités quadratiques sont retenues. Cependant, aucune tentative n'a été faite pour obtenir des résultats numériques à partir de ces équations de mouvement [23]. En utilisant les mêmes techniques, d'autres formulations non linéaires ont été développées telles que celle de Rosen et Friedmann (1978) [152] et celle de Crespo da Silva et Hodges (1986) [58]. Ces théories sont basées sur la théorie de base des poutres d'Euler-Bernoulli.

Dans les travaux précédemment cités, la vitesse de rotation est considérée constante. Il y a peu de travaux où la vitesse de rotation n'est pas constante. Il s'agit d'une accélération ou décélération et par conséquent ces études ont traité la dynamique des poutres rotatives particulièrement en présence des résonances internes. Les premiers travaux reviennent à Kammer et Schlack (1987) [95, 96] sur une poutre uniforme en mouvement de rotation. Young (1991) [180] a traité la dynamique des poutres vrillées

1.2. Etat de l'art

et fuselées avec des résonances combinées. Ghorashi et Nitzsche (2009) [74] ont cherché la réponse dynamique d'une pale en composite en accélération en utilisant des perturbations.

En plus des propriétés d'inertie et de rigidité, les poutres rotatives ont des propriétés d'amortissement. Cet amortissement peut être dû aux matériaux de construction, i.e., propriété inhérente aux matériaux, ou aux systèmes d'amortissement entre autres les vérins, les supports et les liaisons. Cependant pour les structures en mouvement de rotation, l'effet de l'amortissement est minime en comparaison aux autres effets de rigidification et par conséquent peut être ignoré [23].

En dehors des théories et des travaux numériques, il y a peu d'études expérimentales publiées, menées sur l'analyse modale des poutres rotatives. Parmi ces travaux nous pouvons citer celui du Wilkie et al. (1997) [176], qui a porté sur la détermination des fréquences propres d'une pale d'hélicoptère articulée. Une bonne concordance a été trouvée entre les valeurs mesurées et celles calculées avec le logiciel MSC/NASTRAN utilisant les éléments finis. Dans le papier de Bucher et Ewins[44], des études expérimentales sur les structures rotatives ont été sélectionnées et passées en revue.

1.2.2.b Vibrations des poutres en composite rotatives

Les poutres en composite rotatives, où le mouvement est dans un plan créé par son axe longitudinal, sont principalement liées aux pales des rotors des hélicoptères, aux pales des rotors des éoliennes et aux bras manipulateurs utilisés en aérospatial. Les couches formant les stratifiés sont composées d'une matrice qui est généralement une résine époxy renforcées par des fibres qui peuvent être en carbone, en Kevlar, en Aluminium, ou en verre. Le terme composé graphite-époxy est utilisé pour des matériaux en composite fabriqués à partir de fibres en carbone et une résine époxy. Ces matériaux sont devenus les plus utilisés dans les pales des rotors en raison des taux élevés de leurs caractéristiques mécaniques par rapport au poids, de leur résistance à la corrosion, de leur durée de vie longue relativement aux matériaux métalliques, et de la possibilité d'optimiser l'aéroélasticité des pales et l'incorporation des profils d'ailes adéquats à n'importe quel segment. Les structures en composite se caractérisent par le couplage élastique entre les mouvements d'extension, de flexions dans les deux plans, et de torsion. Par conséquent, les sections transversales ne resteront plus planes après déformation et l'effet du gauchissement est important. Le couplage est avantageux

dans quelques cas. Par exemple le couplage extension-torsion produit dans les pales des rotors d'hélicoptères ou des éoliennes des distributions différentes des angles de twist à chaque vitesse de rotation et produit en même temps des complications vibratoires. A cet effet, une théorie précise des poutres rotatives en composite s'avère très importante. Elle doit prendre en compte le mouvement global de n'importe quel point de la poutre et des sections transversales à géométrie et matériaux arbitraires. Une alternative pour traiter de telles structures composées des matériaux anisotropes et hétérogènes est la méthode des éléments finis tridimensionnelle qui devient très gourmande en terme de temps de calculs pour conduire à une précision acceptable.

Les premières études ont été consacrées aux caractéristiques vibratoires à l'état statique. Parmi ces travaux, nous citons celui du Abarcard et Cunniff (1972) [1]. Ils ont étudié les vibrations libres des poutres en composite, encastées-libres, et en présence des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation. Il faut comprendre par inertie de rotation celle acquise lors du déplacement transversal de chaque élément différentiel de la poutre en mouvement de flexion. Dans ce papier, les auteurs ont utilisé un modèle discret basé sur la méthode de Myklestad. Ils ont obtenu une bonne concordance entre les valeurs numériques et les valeurs expérimentales. Teo et Huang [166] ont présenté une analyse théorique des vibrations libres des poutres orthotropes et encastées-libres. Les auteurs ont utilisé l'approche énergétique en prenant en compte les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation. Ils ont trouvé que dans une petite plage d'orientation des fibres les modes de vibration des poutres orthotropes changent significativement. La conclusion la plus importante tirée à partir de ses premiers travaux c'est que la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli ne convient pas aux poutres en composite. Plus tard, les travaux de recherches ont été menés beaucoup plus sur la dynamique globale des pales en composite. Une étude de synthèse peut être trouvée dans le papier de Hodges [81]. Cependant, il y a peu de travaux qui ont traité les vibrations des poutres en composite rotatives et en particulier l'aspect non linéaire.

Stemple et al. [162] ont étudié les vibrations libres d'une poutre en composite à section rectangulaire non rotative et une poutre-caisson en composite rotative. Une bonne corrélation a été observée entre les résultats numériques obtenus sur la base d'une formulation des éléments finis et ceux issus de l'expérimentation. Dans les travaux de Chandiramani et al. [51, 52], deux analyses ont été faites sur les vibrations libres et forcées des poutres rotatives en composites à parois minces avec un caisson. Les deux

1.2. Etat de l'art

études ont été fondées sur la théorie des poutres à déformation de cisaillement du premier ordre et la théorie des poutres à déformation de cisaillement d'ordre supérieur respectivement tout en négligeant l'effet de Coriolis. Les auteurs ont montré qu'avec la deuxième théorie les fréquences propres enregistrent une augmentation considérable. Oh et al. [125] ont utilisé un modèle de poutre en composite à parois minces et rotative, qui prend en considération l'effet directionnel des fibres, le rayon du moyeu, le pré- vrillage et l'angle de calage. Les auteurs ont étudié l'effet de ces paramètres sur les fréquences propres et les modes propres. Dans [108], Lee et al. ont fait une analyse modale des poutres en composite avec des stratifiés symétriques en mouvement de rotation. En utilisant les variables de déformation hybrides pour dériver les équations de mouvement, les auteurs ont étudié l'effet de la vitesse de rotation, de l'orientation des fibres et du rayon du moyeu sur la variation des caractéristiques vibratoires. Ce travail a été étendu par Yoo et al. [107]. D'autres résultats numériques ont été présentés en comparaison avec ceux du logiciel ANSYS. Ghayour et al. [72] ont étudié les vibrations libres des poutres en composite rotatives avec des stratifiés symétriques mais fuselées, i.e. la section transversale symétrique change linéairement en épaisseur le long de la poutre. Ce changement se manifeste par un nombre de couches dans la partie libre réduit par rapport au nombre de couches de la partie encastree.

Les méthodes de calcul utilisées dans les travaux cités jusqu'ici, dont la résolution est basée sur la méthode des éléments finis, sont limitées aux sections transversales à double symétrie et ne peuvent traiter les poutres en composite rotatives avec des sections transversales à forme générale, ce qui correspond au cas général rencontré réellement. Dans le cas des poutres géométriquement non linéaires avec des sections transversales complexes présentant des matériaux anisotropes, les déplacements dus aux gauchissements dans le plan et en dehors de la section transversale sont importants et l'état de contraintes doit être calculé en trois dimensions. Parker (1979) [132, 133] a montré qu'une combinaison entre la solution de gauchissement de Saint-Venant avec un modèle de poutre unidimensionnelle et non linéaire est naturelle et peut représenter l'état de contraintes tridimensionnelles. Berdichevsky (1981) [31] a montré qu'avec la méthode asymptotique variationnelle développée par le même auteur en (1979) [30], le problème d'élasticité géométriquement non linéaire des poutres tridimensionnelles peut être découplé en un problème non linéaire unidimensionnel et un problème (généralement) linéaire d'une section transversale bidimensionnelle. Comme les gauchissements

sont des déplacements locaux relativement à la section transversale déformée, leur influence sur les forces d'inerties est négligeable. Cependant, ces déplacements locaux affectent les propriétés élastiques et par conséquent pour calculer l'état de contrainte tridimensionnel, il est nécessaire d'introduire l'effet du gauchissement dans l'expression de l'énergie de déformation et des lois de comportement [124, 129].

Dans le travail de pionnier de Giavotto et al. (1983) [75] les poutres en composite prismatiques ont été modélisées en utilisant le principe de Saint-Venant et le principe des travaux virtuels. Seules les solutions centrales seront connues à la fin des calculs. Une analyse de la section transversale basée sur la méthode des éléments finis a été développée fournissant une matrice de rigidité reliant les six déformations de la section transversale (trois déformations et trois courbures) aux chargements de la section, trois forces et trois moments. A l'issue de cette formulation, un code de calcul HANBA2 a été développé au niveau de la Polytechnique de Milan, Italie. La même approche a été utilisée par Borri et Mantegazza (1985) [39] et Borri et Merlini (1986) [38] pour modéliser la dynamique non linéaire des pales des rotors avec des courbures initiales. Le travail de Borri et Mantegazza [39] est la première formulation faite des équations de mouvement géométriquement exactes des pales rotatives. Hodges (1990) [81] a présenté une formulation non linéaire des poutres en composite rotatives initialement vrillées et courbées. Les équations de mouvement intrinsèques et géométriquement exactes ont été dérivées en utilisant une méthode mixte basée sur les deux approches Newtonienne et variationnelle. L'idée de base de Hodges est de pouvoir profiter de la décomposition, autrement dit la réduction, du problème d'élasticité non linéaire d'une poutre 3D en une analyse 2D linéaire et une analyse 1D non linéaire selon Berdichevsky [31] en utilisant la méthode variationnelle asymptotique. Ces travaux s'appuient sur les études menées par Danielson et Hodges (1987) [62] permettant de décrire le champ de déformations tridimensionnelles en fonction des déformations intrinsèques unidimensionnelles pour une poutre initialement vrillée et courbée.

L'analyse 2D linéaire permettra de fournir les constantes de rigidité de la section transversale sur la base d'une approximation asymptotique du gauchissement tridimensionnel. Ces rigidités peuvent être définies analytiquement pour des poutres isotropes avec une section transversale relativement simple. Ou dans le cas général, elles peuvent être déterminées par une application des éléments finis. Cette partie est appelée parfois l'analyse de la section transversale. La matrice de rigidité obtenue porte l'information

1.2. Etat de l'art

sur la position du centre du cisaillement [84, 184]. Dans les années 1990, Hodges et ses collaborateurs, principalement C. E. S. Cesnick, B. Popescu et W. Yu, ont développé le code VABS au cours de leurs travaux de doctorat [48, 140, 184]. Les étapes du développement de ce code sont présentées dans [84]. Actuellement, il y a deux versions du code VABS : la première qui est l'originale développée au niveau de l'Institut Technologique de Georgia et la deuxième développée plus tard au niveau de l'université de Michigan. Dans W. Yu et al. [185], une comparaison et une validation numérique a été faite entre la technique de réduction dimensionnelle basée sur la méthode variationnelle asymptotique et le code des éléments finis tridimensionnel ABAQUS. En traitant des poutres en composite, les auteurs ont trouvé qu'il y a une bonne corrélation entre les deux techniques de calcul que ce soit pour les variables unidimensionnelles des poutres ou pour les distributions des déformations et des contraintes sur les sections transversales. Avec ABAQUS, ces résultats sont obtenus avec un temps de calcul trois fois plus grand. Le travail de cette thèse est fondé sur cette théorie intrinsèque et géométriquement exacte des poutres en mouvement qui est basée sur l'analyse des sections transversales. Dans ce qui suit, cette théorie sera référencée par la théorie de Hodges. Plus tard, d'autres codes ont été développés pour l'analyse de la section transversale des poutres en composite tels que BECAS en développement depuis 2010 à l'Université Technique du Danemark [35, 36] et PreComp en développement depuis 2005 au niveau du NREL [33, 34]. Dans [36], une étude comparative est faite entre BECAS et VABS montrant leur concordance.

Concernant les vibrations poutres en composite rotatives, Hodges et al. [88] ont étudié l'effet de la vitesse de rotations sur les fréquences propres d'une série de poutres en composite avec des bouts déviés et qui se différencient de l'orientation des fibres des empilements. Les résultats numériques obtenus montrent une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux de Epps et Chandra [70]. Dans les travaux de Traugott et al. et Althoff et al. [6, 7, 169] les caractéristiques vibratoires d'une pale d'hélicoptère active ATR ont été calculées avec la méthode des éléments finis et la méthode de Galerkin. Les résultats montrent que la méthode de Galerkin converge plus rapidement que la méthode des éléments finis. Dans le travail de Palacios [131], les modes normaux non linéaires ont été construits à partir de la formulation intrinsèque de Hodges. Les applications numériques ont concerné des poutres isotropes et composites non rotatives en présentant les modes de vibrations libres linéaires et non linéaires.

1.3 Les contributions de cette thèse

Dans cette section nous résumons brièvement les contributions de cette thèse. Les travaux associés sont [25–29]

- Dans le domaine de l’analyse vibratoire non-linéaire des poutres rotatives, nous proposons une analyse vibratoire non-linéaire dans le domaine fréquentiel basée sur les équations intrinsèques et géométriquement exactes de Hodges. Les particularités de cette formulation sont les suivantes :
 - (i) Les variables de déplacement et de rotation ne sont pas présentes dans les équations finales, ce qui éloigne toute sorte de singularité mathématique dans les calculs.
 - (ii) Aucune approximation géométrique n’a été faite et par conséquent, primo la configuration de la poutre à l’état déformée est réelle et secundo, tous les effets inertiels sont pris en considération en leur état couplé.
 - (iii) Les poutres traitées sont avec des sections transversales uniformes mais la forme peut être générale telle qu’un profil d’aile, le cas des pales ou les ailes d’avions, ou une section à parois minces telle qu’une poutre-caisson.

Cette analyse vibratoire concernera les vibrations non-linéaires forcées et libres des poutres rotatives isotropes et anisotropes.

- Contrairement aux travaux précédents où la méthode asymptotique numérique ‘MAN’ est appliquée avant la discrétisation spatiale qui se fait généralement par les éléments finis [40], nous adaptons la MAN à un problème non-linéaire après la discrétisation spatiale.
- Nous proposons une méthode de calcul des branches bifurquant d’un point de Hopf à partir d’un point singulier avec un déficit de rang d’ordre 2. Cette méthode est basée sur la MAN et peut être généralisée à un problème avec un déficit de rang d’ordre supérieur.
- Nous présentons une étude comparative entre les deux méthodes de continuation, la MAN et la méthode pseudo-longueur d’arc.

1.4 Organisation de la thèse

Le présent document est organisé comme suit.

Nous avons exposé dans ce premier chapitre, une introduction au problème, l'état de l'art sur les théories des poutres et spécifiquement les poutres rotatives et la contribution de cette thèse. Nous explorerons dans le chapitre 2, dans un premier temps les différentes techniques de modélisation des structures mécaniques non linéaires et ensuite les techniques de résolution des équations de mouvement et les méthodes de continuation. D'autres sections ont été dédiées aux spécificités des systèmes dynamiques non-linéaires telles que les bifurcations, l'étude de stabilité et les interactions modales.

Le chapitre 3 est consacré au modèle de poutre de Hodges utilisé dans ce travail. En premier lieu, nous passons en revue les théories des poutres et l'implication de la méthode variationnelle asymptotique MAV 'en anglais Variational Asymptotic Method - VAM' développée par Berdichevsky [30], utilisée pour la détermination de la matrice de rigidité de la section transversale des poutres. Ensuite, une section est dédiée à une description de l'analyse de la section transversale. Une dernière section est réservée aux équations intrinsèques et géométriquement exactes développées par Hodges [81, 83].

Le chapitre 4 présente les techniques et les outils utilisés dans la résolution du système dynamique final, tels que la discrétisation spatio-temporelle, le calcul des déplacements et des rotations à partir du vecteur de déplacement généralisé, l'analyse de la section transversale. La dernière section est réservée à l'analyse statique des poutres encastrées-libres avec des chargements simulant l'effet des forces centrifuges et des moments de flexion.

Le chapitre 5 est dédié à l'analyse modale et l'étude des vibrations libres non-linéaires des poutres isotropes et anisotropes. L'effet de la vitesse de rotation sur le comportement de la poutre, la rigidification et les fréquences naturelles a été étudié. Un algorithme est développé sur la base de la méthode asymptotique numérique pour le calcul des courbes de réponse aux vibrations libres avec une étude de convergence. Les résultats numériques ont porté sur les poutres isotropes et en composite avec une vitesse de rotation.

Le chapitre 6 est un complément du chapitre 5. Il est consacré aux vibrations forcées non-linéaires des poutres en mouvement de rotation. Deux algorithmes ont été

développés basés sur les méthodes de continuation ; la méthode asymptotique numérique et la méthode pseudo-longueur d'arc. Une étude de stabilité est présentée basée sur la méthode de Hill. Comme applications, des poutres isotropes et en composite ont été étudiées. Les excitations sont des forces concentrées harmoniques appliquées aux bouts des poutres. L'analyse faite, prend en considération l'effet de la vitesse de rotation et les paramètres géométriques des poutres.

Chapitre 2

Analyse de la dynamique des structures non-linéaires

Sommaire

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.1 | Modélisation des systèmes dynamiques | 20 |
| 2.2 | Méthodes de résolution des systèmes dynamiques | 23 |
| 2.2.1 | Les méthodes temporelles | 23 |
| 2.2.2 | Les méthodes fréquentielles | 25 |
| 2.2.3 | Les méthodes de continuation | 26 |
| 2.3 | Bifurcations des solutions stationnaires | 37 |
| 2.4 | Stabilité des solutions stationnaires | 39 |
| 2.4.1 | Théorie de Floquet | 41 |
| 2.4.2 | Méthode de Hill | 43 |
| 2.5 | Interactions modales | 45 |
| 2.6 | Bilan du chapitre | 47 |

Introduction

L'approche présentée dans cette thèse se limite à la dynamique non-linéaire des structures. Toutefois le domaine de la dynamique des systèmes non-linéaires concerne énormément de domaines, telles que la mécanique des fluides, la chimie, l'électronique, l'électromagnétisme et même l'écologie. L'étude d'un système non-linéaire revient à la détermination d'une réponse (sortie) suite à une excitation (entrée) et l'identification des principales caractéristiques telles que les points singuliers et les zones instables de fonctionnement. Cependant, avant d'arriver à cela il faut tout d'abord avoir le

système ou le modèle dynamique non-linéaire qui se résume généralement en des équations différentielles non-linéaires. De nombreux ouvrages ont été publiés traitant de la dynamique non-linéaire. Nous pouvons citer entre autres Nayfeh et Mook (2004) [123], Nayfeh et Balachandran (2004) [122], Seidel(2010) [153] et Marinka (2011) [113].

Dans ce chapitre, nous présentons les techniques de modélisation des systèmes dynamiques vibratoires et les techniques de calcul utilisées dans l'étude du comportement dynamique de ces systèmes et particulièrement les structures mécaniques soumises à des excitations périodiques. Les techniques de calcul utilisées sont souvent basées sur l'hypothèse que la solution recherchée est périodique. Cependant, cette périodicité n'est pas toujours évidente avec la présence des termes non-linéaires dans les équations de mouvement et peuvent donner lieu à des mouvements chaotiques. Dans ce travail, nous nous intéressons seulement aux techniques de calcul des solutions périodiques. Un intérêt particulier a été donné aux méthodes de résolution dans le domaine fréquentiel et les méthodes de continuation parce qu'elles constituent une base des développements des approches d'approximations décrites dans le chapitre 4. Nous donnerons ensuite un aperçu sur les particularités de ces systèmes non-linéaires entre autres les bifurcations et l'étude de la stabilité des solutions périodiques, qui sont d'une importance capitale pour l'identification des solutions physiquement observables. Enfin, nous exposerons les interactions modales qui peuvent surgir dans un système non-linéaire et changer complètement son comportement.

2.1 Modélisation des systèmes dynamiques

L'étude des vibrations non linéaires des poutres comme pour la plupart des systèmes dynamiques commence par la formulation des équations de mouvement et des conditions aux limites, autrement dit la formulation d'un modèle mathématique de poutre ou tout simplement un modèle de poutre. La précision d'un tel modèle est basée principalement sur le choix des hypothèses imposées lors du développement des équations de mouvement et des méthodes de résolution. Généralement, les équations de mouvement sont représentées par des équations aux dérivées partielles. Il y a deux techniques pour dériver ces équations de mouvement. La première technique est la méthode Newtonienne basée sur l'équilibre d'un élément différentielle de la poutre. La deuxième

2.1. Modélisation des systèmes dynamiques

technique est la méthode variationnelle qui consiste à déterminer les équations de mouvement par l'application du calcul des variations aux quantités d'énergie cinétique, le travail des forces et éventuellement l'énergie potentielle. Les approches couramment utilisées dans la formulation des systèmes mécaniques, accompagnées souvent par la définition des nouvelles coordonnées généralisées, sont le principe d'Hamilton, le principe des travaux virtuels et les équations de Lagrange.

Pour les structures continues telles que les poutres, la méthode variationnelle asymptotique de Berdichevsky (1976, 1981) peut être appliquée [30, 84]. Cette technique a l'avantage de ne pas utiliser les hypothèses d'Euler-Bernoulli et les hypothèses de Saint-Venant, dites ad hoc qui sont applicables seulement dans le cas des poutres construites de matériaux isotropes et homogènes avec des sections transversales simples, et ce qui posent problème pour les poutres à matériaux anisotropes et hétérogènes et avec des sections transversales complexes telles que les pales en composites [182]. Ces hypothèses ad hoc qui n'existent pas physiquement et que l'on ajoute pour résoudre le problème global vont forcer la solution finale suivant ces hypothèses ce qui va rigidifier le système à résoudre. Les déplacements obtenus seront par conséquent petits relativement à ceux que l'on peut avoir en utilisant la théorie d'élasticité $3D$.

Lorsque les équations aux dérivées partielles de mouvement sont obtenues par l'une des techniques citées ci-dessus, il y a deux approches générales pour leur traitement. Dans la première approche les équations aux dérivées partielles avec les conditions aux limites sont traitées directement soit numériquement ou analytiquement. Dans le cas d'un système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, les méthodes de perturbation telles que la méthode des échelles multiples peuvent être utilisées [121]. Dans la seconde approche, qui est introduite comme une alternative à l'approche directe et qui est devenue la plus utilisée, les équations aux dérivées partielles avec les conditions aux limites sont discrétisées en utilisant soit une méthode variationnelle soit une méthode de résidus pondérés [124]. Cette approche permet d'obtenir un système d'équations différentielles qui sera résolu numériquement ou analytiquement. Le point de départ de ces méthodes est de supposer une solution de la forme

$$X = \sum_{i=1}^{nf} \Phi_i x_i \quad (2.1)$$

où, $(\Phi_i, i = 1, 2, ..nf)$ sont des fonctions linéairement indépendantes qui satisfont les conditions aux limites et les x_i sont des coefficients à déterminer.

Les méthodes variationnelles sont basées sur le calcul des variations. La solution approchée est obtenue à partir d'une valeur extrême ou stationnaire d'une fonctionnelle, qui peut être l'énergie potentielle ou l'énergie complémentaire. Dans la dynamique des structures, la méthode variationnelle de Ritz, communément appelée méthode de Rayleigh-Ritz, est la plus utilisée. Cependant, les méthodes de résidus pondérés, sont basées sur la minimisation du résidu. Parmi ces méthodes nous pouvons citer la méthode de Galerkin, la méthode des moindres carrés et la méthode de collocation.

Classiquement, les équations différentielles du mouvement des systèmes mécaniques sont écrites sous la forme d'un système d'équations différentielles d'ordre 2 :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + \hat{F}(q, \dot{q}) = F_e(t) \quad (2.2)$$

$q(x, t)$ représente l'ensemble des variables dépendantes de l'espace et du temps caractérisant le système, appelé généralement le vecteur de déplacement, \dot{q} et \ddot{q} sont les vecteurs vitesse et accélération, M est la matrice de masse, C est celle de l'amortissement, K celle de rigidité et enfin \hat{F} et F_e représentent les termes non-linéaire et les sollicitations extérieures appliquées. L'objectif est de chercher la solution de q et d'étudier sa stabilité afin de déterminer si elle a un sens physique ou non. Le système linéaire obtenu, en éliminant le terme non-linéaire $\hat{F}(q, \dot{q})$ de (2.2) est appelé système linéaire sous-jacent ou associé. L'étude de ce dernier constitue une base de comparaison pour identifier le comportement typiquement non-linéaire. La forme d'écriture de l'équation (2.2) fait apparaître à la fois le vecteur de déplacement q et le vecteur de vitesse \dot{q} . Une autre écriture plus compacte et plus simple à résoudre où les deux inconnues sont regroupées dans un nouveau vecteur appelé vecteur d'état est la suivante :

$$A\dot{q} + Bq + \hat{F}(q, \dot{q}) = F_e(t) \quad (2.3)$$

Si le facteur temps n'apparaît pas dans les équations (2.2) ou (2.3), le système d'équation est dit système dynamique non-linéaire autonome. Dans le cas contraire le système est dit non-autonome. Le mot système dynamique se réfère aussi à un processus dynamique avec une existence physique. Par commodité, on utilisera la notation suivante,

2.2. Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

sous l'hypothèse de l'inversibilité de A :

$$\dot{q} = F(q, t) \quad (2.4)$$

Ces systèmes (2.3 ou 2.4) peuvent être transformés en un système d'équation algébrique tout en éliminant le facteur temps pour prendre la forme du formalisme suivant :

$$R(q, \lambda) = 0 \quad (2.5)$$

λ est un paramètre du système appelé paramètre de contrôle. Il peut représenter, l'amplitude de la force d'excitation, le taux d'amortissement, ou comme dans notre cas la pulsation de vibration du système dynamique ω .

2.2 Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

Les solutions analytiques sont privilégiées pour les systèmes dynamiques avec une faible non-linéarité. Elles peuvent être obtenues en faisant recours à la méthode de l'équilibrage harmonique ou à des méthodes de perturbation telles que la méthode de Lindstedt-Poincaré ou la méthode des échelles multiples. Ces solutions analytiques sont toujours approchées mais permettent d'établir des relations entre la réponse et les caractéristiques physiques du système. Dans le cas de forte non-linéarité, seules les méthodes purement numériques sont envisageables. Il est possible de les classer en deux catégories : les méthodes temporelles et les méthodes fréquentielles. Il faut noter que ces méthodes numériques peuvent être utilisées pour les systèmes avec une faible non-linéarité.

2.2.1 Les méthodes temporelles

Les méthodes temporelles, ou méthodes d'intégration directe, sont naturellement les plus adaptées pour la résolution des systèmes non-linéaires. Le mot "directe" indique qu'aucune transformation du système d'équations différentielles n'est nécessaire pour la résolution. Elles ont l'avantage d'être simple à utiliser et de pouvoir traiter tout type de systèmes non-linéaires y compris ceux qui peuvent avoir des solutions a périodiques ou chaotiques.

Ces méthodes temporelles consistent à déterminer la solution progressivement dans le temps, pas à pas, à partir d'un point de départ et des conditions initiales quelconques. Les vecteurs de vitesse \dot{q} et d'accélération \ddot{q} sont approchés par des formules de différences finies. La procédure la plus effective est la méthode des différences finies centrales [22]. Pour les systèmes du premier ordre (2.3), on peut citer comme méthode d'intégration directe, la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta. Pour les systèmes du second ordre (2.2), plusieurs méthodes d'intégration directe sont utilisées : la méthode de différences finies centrales, la méthode de Houbolt, la méthode de Newmark, la méthode de Wilson, la méthode HHT (Hilber-Huges-Taylor) dite la méthode α qui est une généralisation de celle de Newmark et possède un amortissement numérique, . . . etc [22, 91]. Ces dernières méthodes sont inconditionnellement stables et elles utilisent le schéma d'intégration implicite, où le calcul de la solution au temps t_{k+1} est basé sur l'utilisation des conditions d'équilibre à l'instant t_{k+1} . Si les conditions d'équilibre sont utilisées à l'instant t_k , le schéma d'intégration est dit explicite.

Tous les schémas implicites cités ci-dessus peuvent être utilisés dans les systèmes linéaires et les systèmes non-linéaires. Le choix de la méthode à utiliser pour une solution efficace dépend du problème étudié. Les schémas implicites sont généralement utilisés pour étudier la dynamique des structures, où la réponse est dominée par les modes basses fréquences, tandis que les schémas explicites sont utilisés beaucoup plus pour traiter les problèmes de dynamique, pour lesquels la contribution des moyennes et hautes fréquences est importante. Dans certains cas où les caractéristiques de rigidité et de masse peuvent être différentes d'une partie à l'autre, il est avantageux d'utiliser différentes méthodes d'intégration [22]. Dans le cas des systèmes non-linéaires la stabilité inconditionnelle des schémas implicites n'est plus valide et une restriction sur le pas de temps est nécessaire. L'estimation du pas temps critique Δt_c se fait analytiquement en linéarisant le système non-linéaire autour de la position d'équilibre à l'instant considérée.

Les méthodes d'intégration directes peuvent être coûteuses dans le sens où le temps de calcul nécessaire pour arriver au régime stationnaire. Cette partie de solution, qui nous intéresse le plus souvent, peut demander l'intégration du système sur des durées longues, particulièrement lorsque le système non-linéaire à résoudre est rigide et qu'il faut prendre des pas de temps très fins afin de garantir la stabilité et la convergence

2.2. Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

des calculs. A cet effet, les méthodes temporelles ne sont pas avantageuses pour l'étude des systèmes dynamiques paramétrés.

D'autres méthodes temporelles ont été développées sous l'hypothèse d'une réponse périodique telle que la méthode de tir et la méthode de collocation orthogonale. Ces méthodes ont l'avantage de ne pas prendre en compte la partie transitoire. La méthode de tir consiste en une optimisation de l'état initial du système de façon à ce que le cycle obtenu après constitue une période. Cette technique est beaucoup plus intéressante pour les systèmes de faible dimension, son application aux systèmes larges est généralement très coûteuse.

2.2.2 Les méthodes fréquentielles

Dans la recherche des réponses d'un système dynamique, on s'intéresse particulièrement aux réponses périodiques et stationnaires. Cet intérêt est fondé sur une connaissance a priori du comportement du système dynamique, connaissance acquise de l'expérimentation et des simulations numériques préalables. Ceci va nous permettre de décomposer la solution du système dynamique en série de Fourier. Cette décomposition en série infinie de fonction trigonométrique sera approchée par une série de Fourier tronquée. L'expérimentation montre que le contenu fréquentiel d'une réponse d'un système dynamique est souvent limité aux premiers modes. Ces concepts forment l'idée de base des méthodes fréquentielles. Parmi ces méthodes on peut citer la méthode de l'équilibrage harmonique connue sous le nom de la méthode de Fourier-Galerkin ou méthode de l'équilibrage harmonique, la méthode de l'équilibrage harmonique incrémentale, la méthode de Galerkin rapide dite FG (pour Fast Galerkin) et la méthode AFT (pour Alternating Frequency/Time). Ces méthodes sont passées en revue dans [120]. La méthode de l'équilibrage harmonique incrémentale est connue dans la littérature sous d'autres appellations : La méthode de Newton-Raphson/Galerkin ou la méthode de l'équilibrage harmonique/Newton-Raphson.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser à la méthode de l'équilibrage harmonique, qui sera utilisée ultérieurement dans les développements des chapitres 4 et 5. Elle a été largement utilisée dans la littérature pour étudier les vibrations non-linéaires forcées [17, 110] et les vibrations non-linéaires libres [17, 109, 150]. Le principe de base de cette méthode est de supposer que la solution recherchée est périodique et qu'elle

peut être écrite sous la forme de série de Fourier tronquée :

$$q(t) = \sum_{j=0}^{H-1} (q_j^c \cos j\omega t + q_j^s \sin j\omega t) \quad (2.6)$$

où H est le nombre d'harmoniques, q_j^c et q_j^s ($j = 0, H - 1$) sont les nouvelles inconnues à déterminer et ω est la pulsation fondamentale du système. Les harmoniques d'ordre supérieur ne sont pas prises en compte.

L'introduction de ces développements dans les équations de mouvement Eqs. (2.2 ou 2.3) conduit, après identification à zéro des coefficients des cosinus et sinus, à un système algébrique de taille $(2H - 1)$ fois la taille du vecteur des inconnues original q . La difficulté de cette méthode réside dans le nombre des harmoniques dominantes qu'il faut retenir. Cependant, elle a plusieurs avantages : elle n'est pas restreinte aux systèmes avec une non-linéarité faible ; elle permet de convertir le système différentiel en un système algébrique ; elle permet d'éviter la phase transitoire et par conséquent de réduire les coûts de calcul ; elle permet d'interpréter l'apport en vibration de chaque harmonique ; finalement lorsqu'elle est couplée avec une méthode de continuation, elle permet de décrire comment la solution périodique se comporte avec la fréquence.

Il faut noter que le principe de superposition utilisé dans les systèmes vibratoires linéaires et basé sur la détermination des caractéristiques modales, qui sont les fréquences et les modes propres, ne s'applique pas dans le cas des systèmes vibratoires non linéaires, où les fréquences varient en fonction des amplitudes. Cependant, pour les systèmes faiblement non-linéaires la méthode de linéarisation équivalente est utilisée dans la prédiction de la réponse des systèmes non-linéaires [123], où la solution stationnaire est considérée ayant la même fréquence que la source d'excitation. Il s'agit de chercher la meilleure approximation linéaire tout en minimisant l'erreur sur une période. Cette procédure de linéarisation n'est pas évidente pour un système avec une forte non-linéarité.

2.2.3 Les méthodes de continuation

Les algorithmes de continuation ont montré qu'ils sont un outil approprié pour l'analyse des vibrations non linéaires des systèmes continus. Le calcul des branches

2.2. Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

est lié aux calculs des bifurcations et leur classification. (types de points de bifurcation). Les solutions périodiques stationnaires qui permettent de calculer les branches solutions peuvent être obtenues avec des méthodes dans le domaine temporel telles que la méthode du tir [137] et la méthode de collocation orthogonale [67], ou avec des méthodes dans le domaine fréquentiel telles que la méthode de la l'équilibrage harmonique [28].

On s'intéresse dans cette section aux systèmes d'équations algébriques non-linéaires :

$$R(q, \lambda) = 0 \tag{2.7}$$

La fonction R représente le résidu, qui indique en même temps la convergence des méthodes de résolution. Par commodité, nous adopterons les notations suivantes : la jacobienne $R_{,q} = \partial R / \partial q = \partial R_i / \partial q_j$, souvent notée dans la littérature par J et $R_{,\lambda} = \partial R / \partial \lambda$.

Une méthode de continuation consiste à calculer une courbe solution, appelée branche, qui représente l'évolution de q en fonction de λ à partir d'un point initial (q_0, λ_0) . Ainsi (q, λ) est une solution statique de (2.7), indépendante du temps, appelée aussi un point fixe ou point d'équilibre. Les méthodes de continuation sont basées principalement sur le théorème des fonctions implicites suivant :

Théorème 1

Considérons une fonction $R(q, \lambda)$, avec $q \in \mathcal{R}^n$ et $\lambda \in \mathcal{R}$. (q_0, λ_0) est un point fixe de R . Si la fonction R est continuellement différentiable au voisinage de (q_0, λ_0) et si la matrice jacobienne de $R : J = R_{,q}$ est inversible en (q_0, λ_0) , alors l'équation (2.7) a une branche de solution unique $q(\lambda)$ au voisinage de (q_0, λ_0) .

La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [80, 103].

Deux catégories de méthodes de continuation se trouvent dans la littérature telle que les ouvrages de Allgower et Georg (1990) [5] et Nayfeh et Balachandran (2004) [122]. La première catégorie est la famille des méthodes prédiction-correction (PC), qui sont généralement basées sur l'algorithme de correction de Newton-Raphson. La deuxième catégorie est celle des méthodes dites simplicial ou piecewise-linear (PL). Cette seconde catégorie, moins répandue, est basée sur une approximation linéaire des

branches solutions. Pour plus de détail sur ces méthodes le lecteur est renvoyé à l'ouvrage de Allgower et Georg (1990) [5]. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux méthodes de prédiction-correction.

2.2.3.a Les méthodes de prédiction-correction

Les méthodes de continuation de type prédiction-correction sont utilisées dans de nombreux logiciels de continuation tels que AUTO [65] et MATCONT [64]. La branche solution est déterminée point par point à partir d'un point de départ (q_0, λ_0) . Chaque point solution (q_j, λ_j) est obtenu à partir d'un point précédent (q_{j-1}, λ_{j-1}) , en se basant sur les points suivants :

- La prédiction qui donne une estimation de la solution. La prédiction peut se faire par deux techniques : la prédiction par la tangente telle que la méthode de continuation pseudo-longueur d'arc développée par Keller [98] et la prédiction polynomiale telle que celle de la sécante.
- La correction satisfaisant un critère de convergence $|R(q_j, \lambda_j)| < \varepsilon$, où ε est un nombre très petit.
- La paramétrisation, c.-à-d. l'introduction d'un paramètre de chemin, qui peut être la mesure de la longueur de la branche. Le tracé de la branche solution est lié principalement au type de paramétrisation, c.-à-d. au choix du paramètre de chemin.
- Le contrôle de la distance entre deux points solutions consécutifs. On l'appelle le pas de contrôle.

La courbe solution est représentée discrètement par un ensemble de points générés successivement à partir d'un point initial qui est généralement imposé par les conditions initiales du problème ou obtenu avec la méthode d'homotopie ou une méthode itérative telle que celle du Newton-Raphson. Le paramètre de chemin peut être la mesure de la longueur de la branche tel que pour la méthode pseudo-longueur d'arc, comme il peut être le paramètre du système lui-même (λ) , comme par exemple dans les deux

2.2. Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

méthodes de continuation séquentielle et celle du Davidenko-Newton-Raphson [122]. Le tracé de la branche solution est lié principalement au type de paramétrisation, c.-à-d. au choix du paramètre de chemin. Le pas de contrôle doit suivre une stratégie de façon à ce que le nombre d'itérations de correction ne soit pas trop élevé (5 à 6 itérations par exemple).

La continuation séquentielle

La méthode séquentielle est la technique de continuation incrémentale la plus simple, appelée aussi continuation d'ordre zéro, ou continuation à paramètre naturel. Elle consiste à une analyse pas-par-pas en utilisant le paramètre du système (λ) comme paramètre de continuation. L'intervalle de λ est discrétisé en plusieurs pas définis par plusieurs points $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. La solution obtenue au point j , (q_j, λ_j) , est prise comme prédiction de la solution recherchée au point $j + 1$. La correction se fait par un schéma itératif de Newton-Raphson.

$$q_{j+1}^{k+1} = q_j^k + \Delta q^k \quad (2.8)$$

où, l'indice k indique le nombre des itérations avec pour $k = 1$, $q_{j+1}^1 = q_j$. Un paramètre de relaxation peut être ajouté à l'équation (2.8). Δq^k est la solution du système algébrique suivant obtenue par Newton-Raphson :

$$R_{,q}(q_{j+1}^k, \lambda_{j+1}) \Delta q^k = -R(q_{j+1}^k, \lambda_{j+1}) \quad (2.9)$$

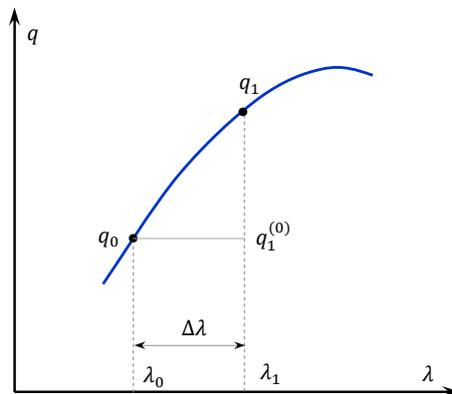


Figure 2.1 Continuation séquentielle

Pour un système algébrique compliqué, la jacobienne $R_{,q}$ peut être évaluée numérique-

ment. Dans le cas d'un point tournant ou un point de bifurcation, $R_{,q}$ présente une singularité et le schéma séquentiel échouera en ces point.

Méthode de continuation de Davidenko-Newton-Raphson

Similairement à la continuation séquentielle, la méthode de Davidenko-Newton-Raphson utilise le paramètre du système λ comme paramètre de chemin. Cette technique a été proposée par Davidenko (1953) [153]. La résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires avec comme conditions initiales (q_0, λ_0) peut se faire à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta. Cette dernière introduit des erreurs de troncature. A cet effet le point obtenu représente la prédiction. La correction du point prédit se fait par la méthode itérative Newton-Raphson. La différentiation de l'équation (2.7) donne

$$dR = R_{,q} dq + R_{,\lambda} d\lambda = 0 \quad (2.10)$$

ce qui va permettre de calculer la tangente à la branche à condition que la jacobienne $R_{,q}$ soit régulière.

$$\frac{dq}{d\lambda} = -R_{,q}^{-1} R_{,\lambda} \quad (2.11)$$

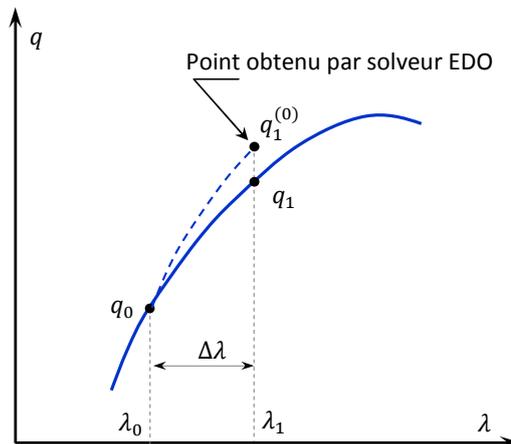


Figure 2.2 Continuation - méthode de Davidenko-Newton-Raphson

La correction du point prédit se fait par la méthode itérative Newton-Raphson. Cependant, cette technique de continuation échouera, aussi, aux points tournants et aux points de bifurcations à cause de la singularité (l'inversibilité) de la jacobienne

2.2. Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

R_q rencontrée dans la phase de correction. Pour surmonter la limitation des deux méthodes, la séquentielle et celle du Davidenko-Newton-Raphson, il faut choisir un paramètre de chemin différent. La variable q et le paramètre λ sont fonction de ce paramètre de chemin noté généralement ' a ' : $q = q(a)$ et $\lambda = \lambda(a)$.

Continuation par longueur d'arc

Cette technique utilise la longueur d'arc comme paramètre de chemin, ce qui revient à résoudre le problème paramétré suivant :

$$R(q(a), \lambda(a)) = 0 \quad (2.12)$$

avec les conditions initiales, $q = q_0$ et $\lambda = \lambda_0$ pour $a = 0$.

La différentiation de l'équation (2.12) par rapport à a donne

$$R_{,q} dq/da + R_{,\lambda} d\lambda/da = 0 \quad (2.13)$$

L'objectif est de calculer le vecteur tangent $(dq/da, d\lambda/da)$ que l'on note (q', λ') , qui va permettre d'obtenir un point de prédiction. Pour se faire, une équation doit être ajoutée. On peut utiliser celle de la normalisation Euclidienne

$$q'^T q' + \lambda'^2 = 1 \quad (2.14)$$

d'où, la prédiction s'obtient avec un pas Δa

$$q = q_0 + q' \Delta a \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda' \Delta a \quad (2.15)$$

On peut trouver dans la littérature d'autres propositions pour l'équation supplémentaire [153]. L'incrément Δa peut être fixé par l'utilisateur ou calculé automatiquement selon une certaine stratégie.

La correction peut se faire par une méthode itérative telle que Newton-Raphson, et le schéma prédiction-correction continu jusqu'à la fin de la courbe. Similairement à la technique séquentielle et la méthode de Davidenko-Newton-Raphson, ce schéma de continuation ne peut résister aux points tournants et aux points de bifurcation à cause

de la singularité de la jacobienne $R_{,q}$. Pour éliminer ce problème, un autre algorithme appelé : pseudo-longueur d'arc a été initialement proposé par Keller(1987) [122].

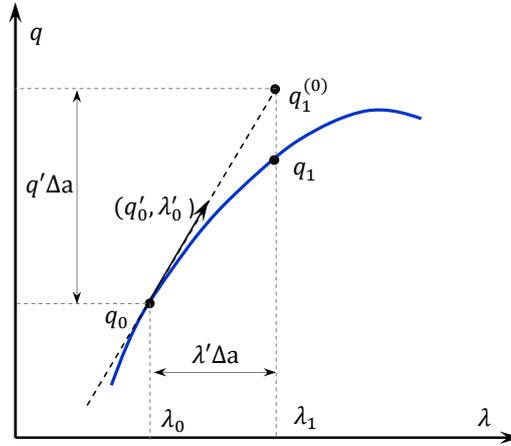


Figure 2.3 Continuation par longueur d'arc

Continuation par pseudo-longueur d'arc

Dans cette technique développée par Keller [66, 97], il s'agit d'utiliser une approximation de l'équation de paramétrisation (2.14) obtenue avec une multiplication de Δa et une discrétisation :

$$(q - q_0)q'_0 + (\lambda - \lambda_0)\lambda'_0 - \Delta a = 0 \quad (2.16)$$

Géométriquement, cette méthode consiste à chercher une solution dans un hyperplan perpendiculaire au vecteur tangent à la courbe au point (q_0, λ_0) et distant de Δa de ce dernier [66].

La même approche, avec un paramètre d'échelle introduit dans l'équation de paramétrisation, est utilisée dans la méthode de continuation appelée : méthode à longueur d'arc sphérique, développée par Riks [151] et Wempner [173] et utilisée dans plusieurs travaux tels que [56, 109, 149]. Une autre version de cette méthode est appelée : méthode à longueur d'arc cylindrique. Ces deux méthodes sont décrites avec plus de détail dans l'ouvrage [57].

La valeur du pas de continuation Δa peut être variable et suivre une stratégie de façon à ce que pour les zones qui nécessitent un grand nombre d'itérations et dépassent une certaine valeur recommandée (généralement 5 itérations), telles que pour

2.2. Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

les zones à courbure forte, la valeur du pas Δa est réduite. Cependant, dans le cas où la convergence est rapide cette valeur est augmentée.

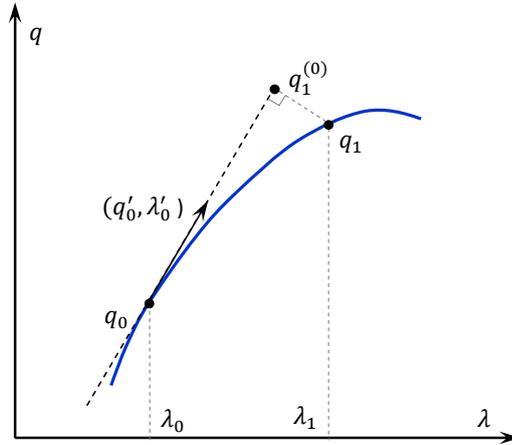


Figure 2.4 Continuation par pseudo-longueur d'arc

2.2.3.b Méthode asymptotique numérique

La méthode asymptotique numérique (MAN) est une procédure de résolution des problèmes non-linéaires basée sur une technique de perturbation. Les premiers travaux portant sur la mise en œuvre de la MAN revient à Damil et Potier-Ferry [61] et Azrar et al. [18, 19]. Cette méthode consiste à remplacer le système non-linéaire initial par une suite récurrente de problèmes linéaires. Pour cela, chaque inconnue du problème est développée sous forme d'une série entière en fonction d'un paramètre de contrôle $'a'$. Ces développements sont injectés dans le problème non-linéaire initial. L'identification par rapport au paramètre de contrôle permet d'obtenir une succession de systèmes linéaires. La résolution récursive de ces systèmes permet de déterminer une partie de la solution validée par le calcul du rayon de convergence des séries. Pour obtenir toute la branche solution, on applique la procédure à nouveau (continuation), avec comme point de départ le point solution défini par la limite de convergence de la partie de la solution précédente.

La MAN est considérée comme une extension des méthodes de type prédiction-correction où le prédicteur est d'ordre élevé sans aucune itération de correction. Cependant, pour améliorer la solution MAN, des correcteurs d'ordre supérieur ont été introduits à travers quelques transformations d'homotopie à la fin de chaque pas. Plusieurs algorithmes de correction ont été présentés dans [4, 105].

La MAN a été utilisée dans plusieurs domaines avec succès. Dans [142], une étude bibliographique a été présentée montrant les différentes applications qui ont touché les problèmes de flambement des structures, les vibrations non-linéaires des structures et la mécanique des fluides.

Perturbation

La MAN est une technique de perturbation. Le principe est de chercher une solution des inconnues $X = (q, \lambda)$ du système algébrique non-linéaire (2.12) sous forme d'une série entière en fonction d'un paramètre de chemin ' a ' à proximité d'une solution initiale (point de départ pour $a = 0$) $X_0 = (q_0, \lambda_0)$, qu'on considère connue :

$$X(a) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i X_i \quad (2.17)$$

Ces développements doivent être solution de (2.11), i.e. $R(q(a), \lambda(a)) = R(X(a)) = 0$. Le développement de Taylor de R donne :

$$\begin{aligned} R(X(a)) &= R\left(\sum_{i=0}^{i=\infty} a^i X_i\right) \\ &= R(X_0) + \left.\frac{\partial R}{\partial X}\right|_{X_0} (aX_1 + a^2X_2 + \dots) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 R}{\partial X^2}\right|_{X_0} (aX_1 + a^2X_2 + \dots)(aX_1 + a^2X_2 + \dots) + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

L'identification suivant les puissances de ' a ' conduit à l'écriture suivante :

$$R(X(a)) = aR_1 + a^2R_2 + \dots = 0 \quad (2.19)$$

Cette relation doit être vérifiée pour toute valeur de a , on en déduit une infinité d'équations linéaires qui vont nous permettre de déterminer successivement les termes de la série (2.17) :

$$R_p = 0, \text{ pour } p \geq 1 \quad (2.20)$$

Pour chaque ordre p , on a un système linéaire à résoudre en $X_p = (q_p, \lambda_p)$, qui s'écrit

2.2. Méthodes de résolution des systèmes dynamiques

sous la forme :

$$\left. \frac{\partial R}{\partial X} \right|_{X_0} X_p = F_p^{nl} \quad (2.21)$$

où le second membre F_p^{nl} , est entièrement déterminé et ne dépend que des ordres précédents. Il s'agit donc d'une succession de systèmes linéaires avec le même terme à gauche à inverser.

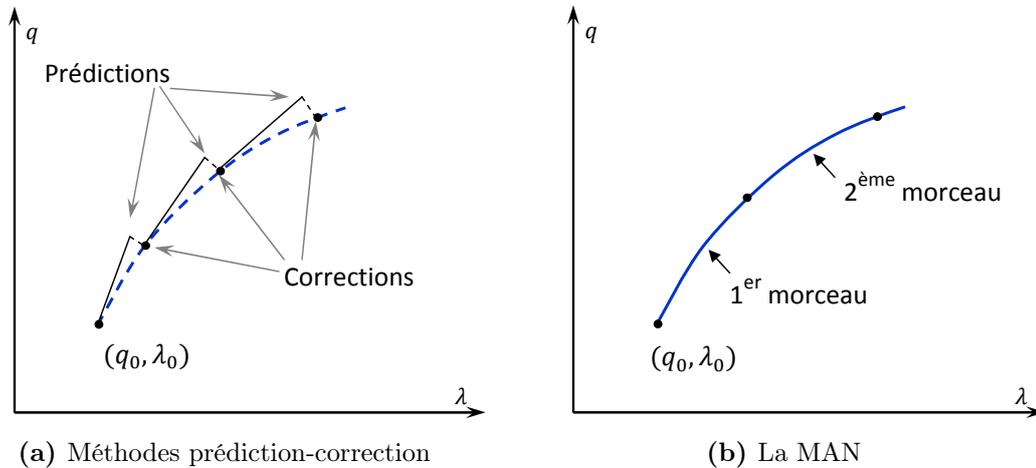


Figure 2.5 Comparaison entre les méthodes de prédiction-correction et la MAN

Définition du paramètre de chemin

Dans la pratique on est amené à tronquer la série entière (2.17) à un ordre de troncature n . A ce stade, les systèmes (2.21) sont sous déterminés : le nombre des équations est n , alors que, suite à la définition de X donnée dans (2.17), le nombre des inconnues est $n + 1$. Reste donc le paramètre de chemin ' a ' qui n'est pas encore défini. La définition la plus couramment utilisée correspond à la projection de l'incrément $(X - X_0)$ sur le vecteur tangent X_1 , dite projection sphérique [57]. Ceci se traduit par :

$$a = (X - X_0)^T \cdot X_1 = (q - q_0)^T \cdot q_1 + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1 \quad (2.22)$$

L'introduction du développement en série (2.17) dans cette dernière équation (2.22) et l'identification suivant les puissances de ' a ' fournissent des équations supplémentaires

permettant d'enlever l'indétermination :

$$\|q_1\|^2 + \lambda_1^2 = 1 \quad , \quad \text{à l'ordre } p = 1 \quad (2.23)$$

$$q_p^T q_1 + \lambda_p \lambda_1 = 0 \quad , \quad \text{à l'ordre } p = 2, \dots, n \quad (2.24)$$

Le paramètre de chemin peut être défini par une projection restreinte de l'incrément $(q - q_0)$ sur le vecteur tangent q_1 , dite projection cylindrique [57]. L'équation (2.22) se réduit à :

$$a = (q - q_0)^T \cdot q_1 \quad (2.25)$$

ainsi, les équations supplémentaires deviennent :

$$\|q_1\|^2 = 1 \quad , \quad \text{à l'ordre } p = 1 \quad (2.26)$$

$$q_p^T q_1 = 0 \quad , \quad \text{à l'ordre } p = 2, \dots, n \quad (2.27)$$

La résolution des systèmes linéaires en cascade permet de calculer les coefficients $(q_i$ et λ_i , pour $i = 1, \dots, n$) et par conséquent de déterminer une partie de la branche solution. Cette représentation polynomiale peut être améliorée par l'introduction des fractions de Padé :

$$X(a) = X_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{R_{(n-1-i)}(a)}{Q_{(n-1)}(a)} a^i X_i \quad (2.28)$$

où R_k et Q_k sont des polynômes d'ordre k . Ces fractions, appelées approximants de Padé, ont tous le même dénominateur. Cette représentation, testée dans [42, 119], permet d'augmenter la validité de la branche solution. Les racines du dénominateur Q_{n-1} , appelés pôles, préconisent des informations sur le comportement du système algébrique non-linéaire, des instabilités ou des points singuliers.

Technique de continuation de la MAN - Pilotage

Du fait que la solution recherchée est une série polynomiale tronquée, elle est forcément valable que jusqu'à une certaine valeur, appelée rayon de convergence. Un critère simple a été proposé par Cochelin (1994) [53] pour l'estimation du rayon de convergence, qualifié généralement de critère géométrique, puisqu'il est basé sur l'écart relatif

2.3. Bifurcations des solutions stationnaires

entre deux approximations d'ordre successif (n et $n - 1$). Il s'agit donc de calculer la valeur maximale a_{ms} pour laquelle la représentation en série est valide :

$$a_{ms} = \left(\eta_s \frac{\|q\|}{\|q_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (2.29)$$

où η_s est un petit nombre et représente la différence imposée entre les deux approximations successives. Il existe également d'autres critères basés sur la minimisation de l'augmentation du résidu d'une branche à l'autre [42] ou sur le calcul du plus petit pôle [71]. Dans le cas d'une représentation avec les approximants de Padé, la zone de validité $[0 \ a_{mp}]$ est définie par la valeur maximale a_{mp} , qui peut être calculée en utilisant le critère proposé par Elhage-Hussein (2000) [69] défini par :

$$\frac{\|q_n(a_{mp}) - q_{n-1}(a_{mp})\|}{\|q_n(a_{mp}) - q_0\|} \leq \eta_p \quad (2.30)$$

où η_p est un petit paramètre. Les paramètres η_s et η_p sont choisis par l'utilisateur. Ils définissent à la fois la longueur des pas et la convergence des solutions obtenues. La technique de calcul de a_{mp} est décrite dans l'annexe B.

Le critère de convergence sera donc vérifié pour toute valeur de ' a ' appartenant à l'intervalle $[0, a_{max}]$, définissant par conséquent la branche solution (à noter $a_{max} = a_{ms}$ ou a_{mp}). De la même manière, une autre branche peut être calculée avec comme point initial le point final de la branche solution précédente. Ces étapes définissent la technique de continuation par la MAN.

2.3 Bifurcations des solutions stationnaires

L'étude du comportement d'un système non-linéaire en fonction du changement d'un paramètre s'appelle la théorie des bifurcations. Un point est dit de bifurcation si la réponse du système change de nature (qualitativement) lorsqu'un paramètre du système évolue. Elle passera par exemple d'une réponse stable à une réponse instable ou d'une réponse statique à une réponse périodique. Le fondement mathématique de la théorie des bifurcations est l'objet de plusieurs éminents ouvrages tels que Wiggins (2003) [175], Nayfeh et Balachandran (2004) [122] et Seidel (2010) [153]. Dans la dynamique des structures continues, le phénomène des bifurcations concerne les

vibrations forcées et les vibrations libres non-linéaires. Il existe plusieurs types de bifurcation, qui dépendent principalement de la solution étudiée : stationnaire (statique) (2.5) ou périodique (2.4). Dans ce manuscrit, nous allons nous intéresser aux solutions stationnaires qui correspondront aux cas étudiés dans les chapitres qui vont suivre.

Un point de solution stationnaire est dit *point tournant* (appelé aussi *point limite*, *nœud-col*, en anglais *saddle-node* et *fold*) si la jacobienne R_q est de rang $n - 1$, i.e. singulière avec une valeur propre nulle, et la matrice $[R_q, R_\lambda]$ est de rang n . Cela correspond géométriquement à un maximum du paramètre λ , Figure (2.6a) et les branches solutions qui se rencontrent en ce point ont le même vecteur tangent. Cependant, un point solution est dit *bifurcation simple* si les deux matrices R_q et $[R_q, R_\lambda]$ sont de rang $n - 1$. La singularité de cette dernière matrice conduit à l'apparition de nouvelles branches. Dans le cas d'une bifurcation simple, deux configurations sont possibles : les bifurcations transcritiques, Figure (2.6b), et les bifurcations en fourche, Figure (2.7a, b). Les branches solutions n'ont pas les mêmes tangentes et elles ont un échange de stabilité.

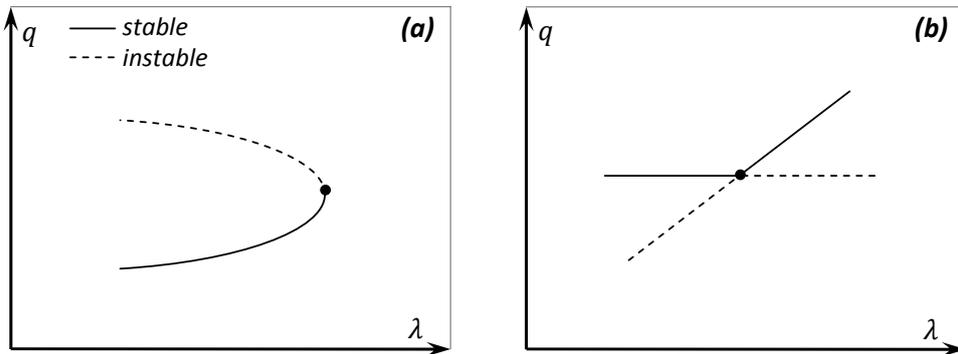


Figure 2.6 (a) point tournant, (b) point de bifurcation transcritique

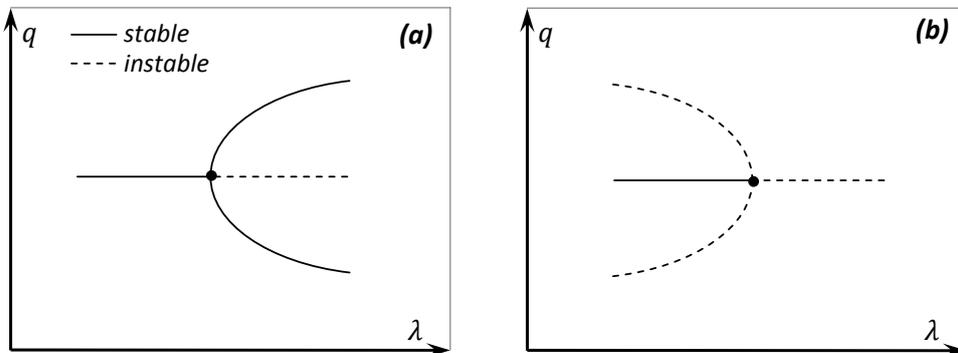


Figure 2.7 (a) point fourche super-critique, (b) point fourche sous-critique

2.4. Stabilité des solutions stationnaires

Lorsque la jacobienne $R_{,q}$ présente, en un point solution fixe (statique) q_0, λ_0 , une paire de valeurs propres purement imaginaires et conjuguées $\mu(\lambda_0) = \pm i\omega$ et tout le reste des valeurs propres ont des parties réelles non-nulles, on peut dire qu'il s'agit d'un point de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf ou de façon abrégée un point de bifurcation de Hopf, lorsque la condition suivante est satisfaite : $d\mu(\lambda_0)/d\lambda \neq 0$ en $\lambda = \lambda_0$, c'est la condition de transversalité et qui implique une vitesse transversale non-nulle [122, 153]. La branche solution statique devient périodique en temps au passage de ce point de bifurcation de Hopf avec une période initiale de $T_0 = 2\pi/\omega$. La condition de transversalité est généralement satisfaite et la bifurcation est dite dégénérée. Dans les vibrations non-linéaires des structures continues, le phénomène d'une bifurcation de Hopf est rencontré en vibrations libres.

Similairement aux points de bifurcation de fourche, Figure (2.7), lorsque les solutions périodiques au voisinage de la bifurcation est stable, i.e. lorsqu'il y a eu un échange de stabilité entre la branche de solutions statiques et la branche de solutions périodiques stationnaires, le point de bifurcation de Hopf est dit sur-critique. Dans le cas où la stabilité est perdue entre les deux branches de solutions, le point de bifurcation de Hopf est dit sous-critique.

La bifurcation flip dite aussi bifurcation de doublement de période est une bifurcation caractérisée par la perte de stabilité d'une solution mono-périodique et la naissance d'une solution 2-périodique, i.e. la naissance de deux branches solutions (fourche).

2.4 Stabilité des solutions stationnaires

Les méthodes de continuation et les méthodes fréquentielles exposées dans la section précédente convergent vers des solutions sans donner de précisions sur la stabilité de ses solutions. Or, une solution instable n'est pas observable physiquement. Une solution périodique est dite stable ou asymptotiquement stable si la réponse à une petite perturbation des conditions initiales reste petite lorsque le temps tend vers l'infini, i.e. il y a un bassin d'attraction. Sinon la solution stationnaire est instable, i.e. la solution s'éloigne de l'état d'équilibre initial vers un autre état d'équilibre suite à cette perturbation avec un changement significatif de la réponse du système. Dans le cas où la perturbation induite est grande on parle d'une stabilité globale. Dans ce manuscrit on

s'intéresse à la stabilité locale.

L'étude de stabilité est indispensable et permet de déterminer la stabilité des solutions, qui va se traduire par un calcul supplémentaire intervenant après la phase de calcul des solutions. Dans le domaine temporel, en utilisant les méthodes d'intégration directe, la solution ne converge pas pour un point solution instable et par conséquent ces méthodes peuvent détecter à priori les zones instables. La stabilité d'une solution périodique peut être étudiée, a posteriori, par le calcul de la matrice de monodromie. Dans le domaine fréquentiel, qui nous intéresse, la méthode la plus utilisée est celle de Hill basée sur la théorie de Floquet. Ces notions vont être définies ultérieurement.

Parmi les définitions mathématiques associées à la stabilité qui existe dans la littérature, on trouve : la stabilité au sens de Lyapunov, stabilité au sens de Poincaré (dite aussi orbitale), stabilité Lagrangienne, stabilité asymptotique, etc. Il est donc nécessaire de donner un aperçu sur ces approches et de préciser laquelle est la plus convenable pour l'étude des solutions périodiques stationnaires.

La stabilité de Lyapunov est la définition la plus connue. Une solution d'un système y est dite stable au sens de Lyapunov si, pour un petit nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que toute autre solution z pour laquelle $|y - z| < \delta$ en $t = t_0$ vérifie $|z - y| < \varepsilon$ pour tout $t > t_0$ [122]. Si de plus la condition $\lim_{t \rightarrow \infty} |z - y| = 0$ est vérifiée, la stabilité est dite asymptotique. Cette définition est appropriée pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre. Dans le sens de stabilité orbitale, introduite par Poincaré, une solution y d'un système, de trajectoire C , est dite stable si pour tout $t > t_0$, $distance(z, C) < \varepsilon$, ce qui signifie que les orbites sont proches l'une de l'autre. Une autre définition plus générale est celle de Lagrange : une solution y est stable au sens de Lagrange s'il existe un nombre positif L tel que pour tout $t > t_0$, $|y| < L$. Ce qui signifie que la solution est stable si elle est bornée, autrement dit, non divergente.

Les définitions de stabilité présentées ci-dessus permettent de conclure que pour notre cas, l'analyse des solutions périodiques, la définition la plus adéquate est celle de Poincaré ou orbitale. Cependant, cette définition a un sens de stabilité globale et ne donne aucun schéma explicite pour la détermination a posteriori de la stabilité des solutions périodiques. Dans ce qui suit, nous présentons un schéma explicite basé sur la théorie de Floquet (1883) [122].

2.4. Stabilité des solutions stationnaires

2.4.1 Théorie de Floquet

On considère le système dynamique (2.4) avec une solution périodique $(q_0(t), \lambda_0)$ avec une période T (T -périodique). La stabilité locale est étudiée en ajoutant une petite perturbation :

$$q(t) = q_0(t) + \delta q(t) \quad (2.31)$$

L'évolution de la solution perturbée $q(t)$ en fonction du temps est étudiée. Si $\delta q(t)$ tend vers zéro avec le temps, alors $q_0(t)$ est stable et si la perturbation augmente alors $q_0(t)$ est instable.

En substituant l'équation (2.31) dans (2.4), le développement de Taylor au premier ordre de F autour de la solution périodique q_0 de période T , tout en négligeant les ordres supérieurs, permet d'obtenir le système d'équations différentielles du 1^{er} ordre.

$$\delta \dot{q} = F_{,q}(t) \delta q, \quad \text{avec} \quad F_{,q}(t + T) = F_{,q}(t) \quad (2.32)$$

où, F est considérée du type C^2 , δq est un vecteur colonne de n variables indépendantes, avec comme conditions initiales $\delta q(t_0)$, et la matrice $F_{,q}$ de dimension $n \times n$ est T -périodique, (i.e. $F_{,q}(t + T) = F_{,q}(t)$). Cette matrice est fonction du temps.

Le système linéaire (2.32) a n solutions δq_i linéairement indépendantes. Ces solutions δq_i sont appelées solutions fondamentales. Les théorèmes 8.3 et A.1, dans Jordan et Smith [93], justifient l'existence et l'unicité de ces solutions. La matrice composée de ces dernières s'appelle la matrice fondamentale

$$Q(t) = [\delta q_1(t) \ \delta q_2(t) \ \dots \ \delta q_n(t)] \quad (2.33)$$

Cette matrice vérifie, bien évidemment, les équations d'équilibre du système dynamique :

$$\dot{Q}(t) = F_{,q}(t) Q(t) \quad (2.34)$$

La matrice Q représente une base des solutions, i.e. toute autre solution est une combinaison linéaire de ces colonnes

$$\delta q(t) = \sum_{i=1}^n c_i \delta q_i(t) \quad (2.35)$$

Comme les solutions $\delta q_i(t)$ sont T -périodiques, alors $\delta q_i(t+T)$ sont aussi des solutions et sont des combinaisons linéaires de $\delta q_i(t)$, d'où on peut écrire :

$$Q(t+T) = Q(t) \Phi \quad (2.36)$$

où, Φ est une matrice constante de dimension $(n \times n)$ appelée communément la matrice de monodromie.

A $t = 0$, $Q(T) = Q(0) \Phi$ et puisque $Q(0) = I$, matrice identité, on aura

$$\Phi = Q(T) \quad (2.37)$$

Le théorème de Floquet ([99], théorème 2.67, page 69) montre que la matrice fondamentale Q peut être écrite sous la forme d'un produit de deux matrices de dimension $(n \times n)$, tel que

$$Q(t) = P(t) e^{Bt} \quad (2.38)$$

où, $P(t)$ est une matrice $(n \times n)$ T -périodique et B est une matrice $(n \times n)$ constante et qui peut être complexe. Le fait que $Q(0) = I$, implique que $P(0) = I$ et par conséquent, en revenant à (2.37),

$$\Phi = e^{BT} \quad (2.39)$$

De (2.36), la solution après N périodes est $Q(N.T) = \Phi^{N+1}$, ce qui permet de conclure que la stabilité est gouvernée par les valeurs propres ρ_i de Φ , appelées les *multiplicateurs de Floquet*. En conséquence de l'écriture (2.39), ces multiplicateurs de Floquet peuvent être écrits sous la forme suivante

$$\rho_i = e^{\mu_i T} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.40)$$

où,

$$\mu_i = \frac{1}{T} \ln \rho_i + j \frac{2\pi k}{T}, \quad \text{avec } k \text{ entier et } j^2 = -1 \quad (2.41)$$

μ_i , appelés les *exposants de Floquet*, sont définis à une constante additive près $2\pi k/T$.

La stabilité de la solution périodique $q(t)$ s'obtient soit par les multiplicateurs de Floquet ρ_i , soit par les exposants de Floquet μ_i de la manière suivante [8, 122, 153] :

2.4. Stabilité des solutions stationnaires

- Si $\Re(\mu_i) < 0$ (ou $|\rho_i| < 1$) pour $i = 1, \dots, n$, toutes les solutions fondamentales δq_i tendent vers zéro en fonction du temps et par conséquent, la solution périodique $q_0(t)$ est dite asymptotiquement stable.
- Si $\Re(\mu_i) > 0$ (ou $|\rho_i| > 1$), la solution fondamentale δq_i augmente exponentiellement et la solution périodique $q_0(t)$ est instable.
- Si $\Re(\mu_i) = 0$ (ou $|\rho_i| = 1$), la stabilité peut être perdue dans les cas suivant :
 - $\rho_i = 1$ avec $Im(\rho_i) = 0$, ce cas peut correspondre à un point limite, un point de bifurcation transcritique, ou un point de bifurcation en fourche,
 - $\rho_i = -1$ avec $Im(\rho_i) = 0$, correspond à un point de bifurcation avec période double, i.e. une nouvelle branche est créée avec une période $2T$,
 - $|\rho_i| = 1$ avec $Im(\rho_i) \neq 0$, correspond à un point de bifurcation de Hopf secondaire ou un point de bifurcation de Neimark-Sacker [8].

Dans le cas d'un système dynamique autonome, i.e. la fonction R du système (2.5) dépend implicitement du temps, l'un des multiplicateurs de Floquet est toujours égale à l'unité ($\rho_i = 1$) et la stabilité est statuée par le reste des multiplicateurs.

L'étude de la stabilité des solutions périodiques basée sur le calcul de la matrice de monodromie dans le domaine temporel est largement utilisée. Il s'agit de calculer ses valeurs propres et de comparer leurs modules à l'unité, ce qui permet de statuer sur la stabilité. Plusieurs techniques existent pour le calcul de la matrice de monodromie [106], mais elles sont liées à des méthodes de calcul des solutions périodiques dans le domaine temporel.

2.4.2 Méthode de Hill

L'étude de la stabilité par la méthode basée sur la théorie de Floquet a l'avantage d'être précise mais elle est très coûteuse en termes de temps de calcul. Il existe une alternative dans le domaine fréquentiel, c'est la méthode de Hill, qui profite de l'avantage des méthodes fréquentielles d'être plus rapide. Dans le domaine fréquentiel la solution du système dynamique est décomposée en série de Fourier (2.6). Conjointement à cette décomposition, la méthode de Hill commence par la décomposition de la perturbation $\delta q_i(t)$ et de la jacobienne $R_{,q}(t)$ en série de Fourier.

La solution recherchée est écrite, comme dans (2.31), $q(t) = q_0(t) + \delta q(t)$. De (2.38), la perturbation est sous forme de Floquet, i.e. le produit d'un terme périodique avec un terme exponentiel,

$$\delta q = p(t) e^{\mu t} \quad (2.42)$$

où, $p(t)$ est un vecteur T -périodique et μ sont les exposants de Floquet. En substituant l'équation (2.42) dans l'équation de mouvement (2.2) et en utilisant une méthode d'équilibrage harmonique ($p(t) = \sum_{k=-N}^N P_k e^{jk\omega t}$), tel que dans [171], on obtient un problème aux valeurs propres quadratique de taille $n(2N + 1)$ de la forme (2.48) :

$$(H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2)P = 0 \quad (2.43)$$

qui peut être transformé en un problème aux valeurs propres linéaire de taille $2n(2N + 1)$ de la forme (2.48).

Cette méthode est connue par des résultats peu fiables pour les trois raisons suivantes [106, 158] : Primo, la précision dépend du nombre d'harmoniques retenues. Le résultat exact s'obtient avec un nombre infini mais dans la pratique, et il est évident que seul un nombre limité d'harmonique peut être utilisé. Secundo, cette méthode est coûteuse en terme de temps de calcul surtout pour des systèmes de grande taille. Tertio, l'existence de n valeurs propres supplémentaires, non-physiques, dans le problème linéaire aux valeurs propres peut conduire à une mauvaise évaluation de la stabilité. Pour éliminer les valeurs propres supplémentaires, non-physiques, Lazarus et Thomas ont proposé une technique pour filtrer ces valeurs propres [106]. La démarche est un peu différente de celle montrée ci-dessus. Chaque solution fondamentale est écrite sous forme de Floquet :

$$\delta q_i = p_i(t) e^{\mu_i t} \quad (2.44)$$

où, $p_i(t)$ est un vecteur T -périodique et μ_i sont les exposants de Floquet. Cette écriture conduit à la décomposition du vecteur $p_i(t)$ en série de Fourier au lieu de δq_i . La décomposition du vecteur $p_i(t)$ et de la matrice jacobienne $R_{,q}(t)$ donne :

$$p_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_i^k e^{jk\omega t} \quad (2.45)$$

$$R_{,q}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J^k e^{R_{,q}^k k\omega t} \quad (2.46)$$

2.5. Interactions modales

où, $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation, p_i^k sont des vecteurs de dimension n et R_q^k sont des matrices de dimension $n \times n$. En remplaçant les développements (2.45) dans le système (2.32) on obtient :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\mu_i + jk\omega) p_i^k e^{(\mu_i + jk\omega)t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} R_q^l p_i^k e^{[\mu_i + j(k+l)\omega]t} \quad (2.47)$$

Cette équation peut être réécrite sous forme d'un problème de valeurs propres de dimension infinie suivant [106] :

$$(H - \mu I)p = 0 \quad (2.48)$$

où, p et μ sont définis dans (2.42). H est la matrice de Hill avec des dimensions infinies

$$H = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & J^0 + j\omega I & J^{-1} & J^{-2} & \dots \\ \dots & J^1 & J^0 & J^{-1} & \dots \\ \dots & J^2 & J^1 & J^0 - j\omega I & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

On peut remarquer que cette matrice est complexe et n'est pas symétrique, ce qui n'est pas avantageux pour le calcul des valeurs propres. Pour des raisons numériques, la matrice H est tronquée. Les valeurs propres obtenues sont filtrées sur la base d'un critère lié aux valeurs médianes des vecteurs propres et seules n valeurs propres sont retenues celles qui représentent les exposants de Floquet. La comparaison de leurs parties réelles à zéro permet de statuer sur la stabilité de la solution périodique. Le nombre d'harmoniques utilisé pour la perturbation compte beaucoup plus pour la précision que le nombre d'harmoniques utilisé pour la solution [164]. Cette technique améliore la méthode de Hill classique et nous l'avons adopter pour l'analyse de la stabilité, dont l'efficacité a été démontrée dans [106, 138, 164, 167].

2.5 Interactions modales

Parmi les phénomènes compliqués que peut exhiber la réponse d'un système non-linéaire, on trouve la contribution de plusieurs modes dues aux interactions modales.

Une interaction modale est définie par une relation spécifique entre deux ou trois fréquences propres du système, ou entre les fréquences propres et la fréquence d'excitation. L'interaction entre les modes peut conduire à une résonance interne (appelée aussi auto-paramétrée), une résonance externe combinée (dite aussi paramétrée), ou une interaction non-résonante [123]. Les poutres comme les autres types de structures ont été l'objet de plusieurs études numériques et expérimentales traitant les interactions modales en vibrations libres et forcées et avec différentes conditions aux limites [9, 59, 109, 128, 149, 163]. Pour plus de détail concernant ces phénomènes et leurs implications dans les systèmes discrets et continus, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Nayfeh et Mook (1995) [123]. Dans ce qui suit, nous définissons la terminologie utilisée dans la littérature concernant les interactions modales. On considère un système avec des fréquences naturelles ω_i ($i = 1, \dots, n$), soumis à une excitation externe d'une fréquence Ω . Cependant, il est utile de rappeler quelques notions de résonance sans interactions. On parle d'une résonance primaire quand la fréquence d'excitation est proche de l'une de ses fréquences naturelles (i.e., $\Omega \approx \omega_i$, $i = 1, \dots, n$). La résonance est dite subharmonique si $\Omega \approx k\omega_i$ avec k entier. Dans le cas où $\Omega \approx \omega/k$, la résonance est dite superharmonique.

Pour un système avec une non-linéarité cubique, une des interactions modales est la résonance interne qui peut avoir lieu dans les cas où les fréquences naturelles ω_i sont liées linéairement par une des relations suivantes : $\omega_i \approx \omega_j$, $\omega_i \approx 3\omega_j$, $\omega_i \approx |\pm 2\omega_j \pm \omega_k|$, ou $\omega_i \approx |\pm \omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l|$. Pour un système avec une non-linéarité quadratique, la résonance interne peut avoir lieu si $\omega_i \approx 2\omega_j$, ou $\omega_i \approx \omega_j + \omega_k$. Les résonances internes peuvent engendrer des couplages et des échanges d'énergie entre les modes. L'excitation d'un mode à fréquence supérieure peut produire une réponse dans une fréquence inférieure impliquée avec la première fréquence dans une résonance interne. Un mouvement plan d'une structure, par exemple une poutre symétrique, peut devenir instable et produit un mouvement en dehors du plan initial. Il peut arriver qu'en augmentant l'amplitude d'excitation et arrivant à un certain seuil, l'amplitude du mode à haute fréquence excitée n'augmente plus, elle est dite saturée, et toute l'énergie sera transférée au mode à basse fréquence.

Un autre type d'interactions modales peut se produire pour les systèmes soumis

2.6. Bilan du chapitre

à une force d'excitation harmonique simple avec une fréquence Ω . Ces interactions sont appelées les résonances externes combinées (ou paramétrées). Pour un système avec une non-linéarité cubique, ces résonances peuvent avoir lieu dans les conditions suivantes : $\Omega \approx 2 |\omega_i \pm \omega_j|$, $\Omega \approx |\pm 2 \omega_i \pm \omega_j|$, $\Omega \approx \frac{1}{2}(\omega_i \pm \omega_j)$, ou $\Omega \approx |\pm \omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k|$. Pour un système avec non-linéarité quadratique, ces résonances externes peuvent se produire si $\Omega \approx |\omega_i \pm \omega_j|$.

Les interactions modales non-résonantes transfèrent l'énergie des modes à haute fréquence aux modes à basse fréquence sans qu'il y ait une relation entre leurs fréquences. La seule raison pour que ce transfert d'énergie apparaisse est que ces modes soit largement espacés $\omega_i \ll \omega_j$.

2.6 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons présenté des rappels sur les notions et les outils d'analyse de la dynamique non-linéaire dans le but de donner au lecteur une vision large des différentes caractéristiques d'un comportement non-linéaire. Ceci est fait en vue de préparer la suite de l'étude consacrée aux vibrations non-linéaires des poutres rotatives. Parmi les méthodes de calcul présentées ici, on s'est intéressé en particulier aux deux méthodes de continuation : la méthode asymptotique numérique et à la méthode pseudo-longueur d'arc. Ces deux techniques de continuation opèrent dans le domaine fréquentiel et profitent de l'avantage en termes de temps de calcul. L'analyse de la stabilité sera fait *a posteriori* avec la méthode de Hill. Pour la recherche des solutions de la dynamique des poutres rotatives, nous optons pour les deux approches d'approximation suivantes : Galerkin-Equilibrage Harmonique-MAN et Galerkin-Equilibrage Harmonique-Pseudo-longueur d'arc. Ce choix basé sur l'hypothèse d'une réponse périodique et stationnaire, permettra de confirmer les résultats en faisant des comparaisons entre ces deux approches. Avant de passer à l'application de ces méthodes qui sera réalisée dans les chapitres (4 - 6), nous allons, tout d'abord, identifier notre système dynamique non-linéaire des poutres en mouvement de rotation, qui sera présenté dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Modèle dynamique non-linéaire des poutres

Sommaire

| | | |
|------------|--|-----------|
| 3.1 | Théorie générale | 49 |
| 3.1.1 | Modélisation des poutres via l'analyse de la section transversale . | 49 |
| 3.1.2 | La méthode asymptotique variationnelle (MAV) | 50 |
| 3.2 | Analyse de la section transversale | 54 |
| 3.2.1 | Cinématique des poutres | 55 |
| 3.2.2 | Formulation du champ de déformation | 60 |
| 3.2.3 | Energie de déformation | 62 |
| 3.2.4 | Réduction dimensionnelle | 63 |
| 3.3 | Equations d'équilibre non-linéaires et intrinsèques | 78 |
| 3.3.1 | Variation de l'énergie de déformation | 79 |
| 3.3.2 | Variation de l'énergie cinétique | 80 |
| 3.3.3 | Travail virtuel | 82 |
| 3.3.4 | Equations de mouvement intrinsèques | 82 |
| 3.3.5 | Equations constitutives | 83 |
| 3.3.6 | Equations cinématiques intrinsèques | 84 |
| 3.4 | Bilan du chapitre | 85 |

Introduction

Dans ce chapitre nous passons en revue le modèle dynamique des poutres utilisé dans cette thèse, il s'agit de la théorie des poutres anisotropes développée par Dewey

3.1. Théorie générale

H. Hodges et ses co-auteurs, particulièrement : Danielson [62], Atilgan [14], Cesnik [48], Popescu [140] et Yu [181]. Cette théorie, dont les premiers travaux ont été publiés à partir de 1987, reste jusqu'à nos jours en cours de développement. [145, 159]. Ces travaux, dont la plupart ont fait l'objet de thèses de doctorat, ont été regroupés, en 2006, dans un livre intitulé : 'Nonlinear composite beam theory' [84]. Cette théorie, qui est le fruit de plus de deux décennies de travaux, a pour objectif principal l'étude de la dynamique non-linéaire des rotors des hélicoptères et des éoliennes composés de pales en composite assujetties à de grands déplacements et à de grandes rotations. Cette théorie est basée principalement sur la théorie unidimensionnelle des poutres, initiée par Cosserat (1909) [55] et suivi par la formulation intrinsèque de Reissner (1972) [148], et la méthode asymptotique variationnelle (MAV), qui est une méthode d'approximation asymptotique développée par Berdichevsky (1979) [30].

Dans la première section nous présentons la théorie générale dans le but de répondre à la question relative au choix de cette théorie et de sa position relativement aux théories classiques, celles de Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Dans la même section, nous donnons une description de la méthode variationnelle asymptotique (MAV). La deuxième section sera consacrée à l'analyse de la section transversale d'une poutre en passant par la cinématique des poutres. Finalement, la troisième section sera dédiée à l'analyse de l'elastica, i.e. les équations de mouvement intrinsèques et géométriquement exactes.

3.1 Théorie générale

3.1.1 Modélisation des poutres via l'analyse de la section transversale

Les poutres sont des structures 3-D relativement longues. Il est peu pertinent de les modéliser avec la théorie de l'élasticité (3-D), dont les solutions analytiques sont restreintes à des cas simples. Pour les poutres en composite et avec des sections transversales à géométrie complexe on a recours, généralement, à la méthode des éléments finis et aux codes de calcul commerciaux. Les coûts sont extrêmement élevés surtout

lorsqu'on veut faire une analyse d'optimisation. A cet effet, on fait une réduction du problème en éliminant les petites dimensions et par conséquent le problème original de l'élasticité 3-D sera réduit à un problème 1-D. Les théories classiques d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko sont des modèles réduits et simples. Elles sont basées sur des hypothèses cinématiques *ad-hoc* concernant le champ de déplacement de la section transversale, ce qui induit la négligence de certaines déformations. Par exemple, pour les hypothèses de la section transversale rigide dans Euler-Bernoulli et Timoshenko, la réduction est faite par l'intégration des caractéristiques géométriques sur la section transversale. Pour les matériaux isotropes, les hypothèses *ad-hoc* sont généralement évidentes et justifiées, mais pour les matériaux composites ces hypothèses ne sont pas justifiées et toutes les déformations doivent être prises en considération. Une technique de réduction, qui ne fait pas appel aux hypothèses *ad-hoc*, est la MAV [30, 32, 84]. Elle permet de diviser le problème 3-D en un problème linéaire à travers les dimensions négligées, i.e., la section transversale 2-D, et un problème non-linéaire le long de la ligne de référence 1-D. La Figure 3.1 montre ce schéma de décomposition du problème 3-D. Pour obtenir un modèle réduit fiable, on peut appliquer la MAV sur l'énergie totale, puisque elle détermine complètement le comportement de la poutre, ainsi on aura à reproduire asymptotiquement une énergie équivalente tout en réduisant le modèle.

3.1.2 La méthode asymptotique variationnelle (MAV)

La MAV est une méthode d'analyse des fonctionnelles, développée par Berdichevsky (1979) [30]. Elle permet la minimisation des fonctions ayant un nombre fini d'inconnues et un ou quelques petits paramètres. C'est un outil très utile pour la construction des modèles réduits des structures du fait que le problème d'élasticité est généralement transformé en un problème de minimisation de la fonctionnelle de l'énergie potentielle, où il y a souvent quelques petits paramètres géométriques. La MAV est basée sur l'idée de négliger les petits termes dans la fonctionnelle de l'énergie, ce qui nécessite

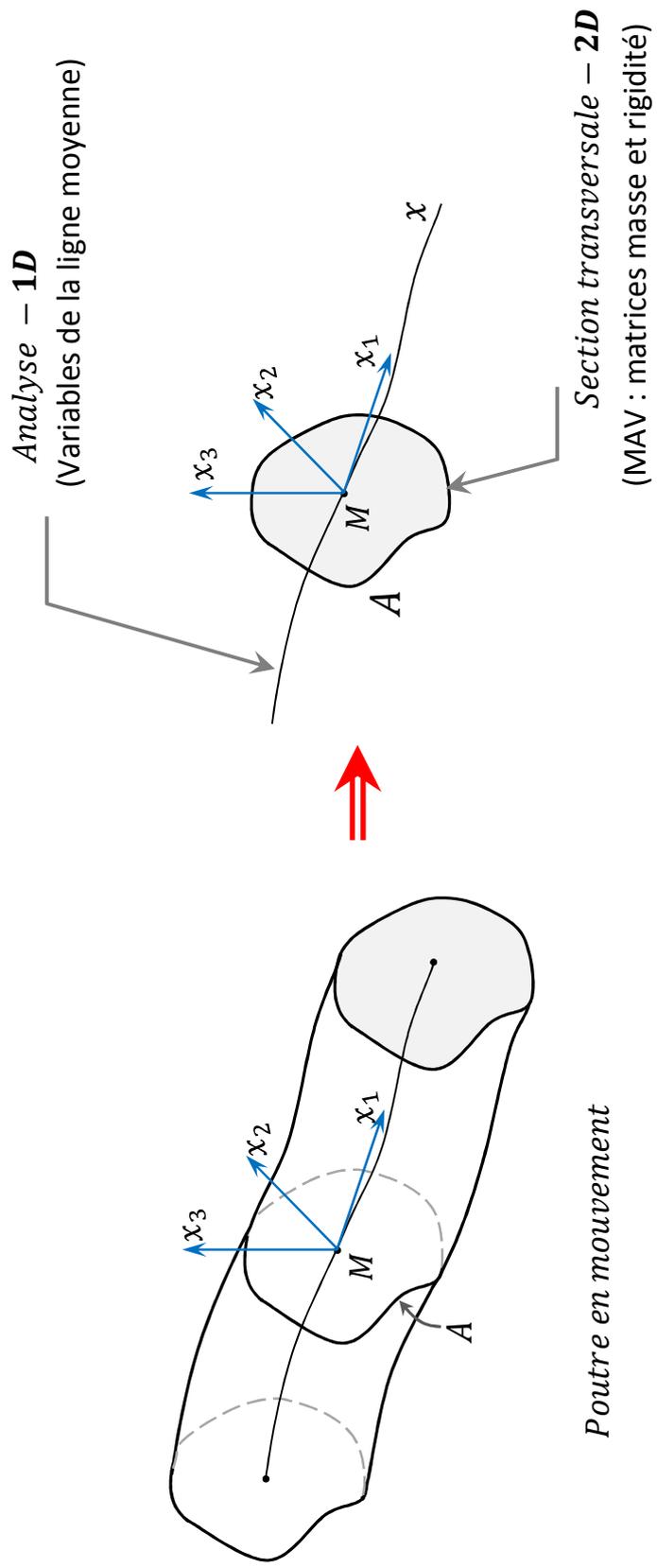


Figure 3.1 Poutre 3-D en mouvement, décomposition en analyse 1-D et analyse 2-D

la reconnaissance des petits termes et la compréhension de leurs effets dans la fonctionnelle, mais avant de décrire la technique d'application de la MAV, il est utile de rappeler quelques symboles utilisés souvent dans une analyse asymptotique (\mathcal{O} , o , \sim). Soit deux fonction $f(x)$ et $g(x)$ définies et continues dans un domaine \mathcal{D}_0 et possédant des limites quand $x \rightarrow x_0$ dans le domaine \mathcal{D}_0 , on définit :

- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ quand $x \rightarrow x_0$ si $|f(x)| \leq K|g(x)|$ aux environs de x_0 avec K constante. On dit que $f(x)$ est de l'ordre de $g(x)$ ou $f(x)$ est limitée en grandeur asymptotiquement par $g(x)$ quand $x \rightarrow x_0$.
- $f(x) = o(g(x))$ quand $x \rightarrow x_0$ si $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ aux environs de x_0 pour toute valeur positive de ε . On dit que $f(x)$ est asymptotiquement petite que $g(x)$.
- $f(x) \sim (g(x))$ quand $x \rightarrow x_0$ si $f(x) = g(x) + o(g(x))$ aux environs de x_0 . On dit que $f(x)$ est asymptotiquement égale à $g(x)$.

Soit une fonctionnelle $I(u, h)$ définie dans un domaine \mathcal{D} et dépendant d'une variable u et d'un petit paramètre h . On considère que la fonctionnelle $I(u, h)$ a un point stationnaire dépendant de h , noté \check{u}_h et que \check{u}_h tend vers \check{u}_0 pour $h \rightarrow 0$. Les questions qui se posent sont : Comment peut-on construire une fonctionnelle qui a \check{u}_0 pour point stationnaire ? Comment déterminer une fonctionnelle raffinée, dont le point stationnaire approche \check{u}_h avec une certaine précision ?

En premier lieu, on néglige tous les termes dans $I(u, h)$ dépendant de h , ce qui donne la fonctionnelle $I_0(u)$. Soit \mathcal{D}_0 l'ensemble des points stationnaires \check{u}_0 de $I_0(u)$. On fait maintenant le changement de variable suivant $u = \check{u}_0 + u_1$, où, $\check{u}_0 \in \mathcal{D}_0$ et u_1 est plus petit que \check{u}_0 dans un sens asymptotique, i.e., $u_1 \sim \mathcal{O}(\check{u}_0)$. En gardant dans la fonctionnelle $I(\check{u}_0 + u_1, h)$ les principaux termes contenant u_1 , on obtient une nouvelle fonctionnelle $I_1(\check{u}_0, u_1, h)$, où l'existence de \check{u}_0 est dû aux termes impliquant à la fois \check{u}_0 et u_1 . Maintenant on cherche les points stationnaires \check{u}_1 de la fonctionnelle $I_1(\check{u}_0, u_1, h)$, qui dépend de \check{u}_0 . On répète le processus jusqu'à ce que la différence entre deux solutions stationnaires successives soit inférieure à une petite valeur.

Pour construire une fonctionnelle raffinée en présence des termes de l'ordre $\varepsilon(h)$, i.e. il y a des petits termes en fonction du paramètre h , on doit les garder tous. Pour démontrer cela, on considère le problème de minimisation dans un espace \mathcal{D} d'une

3.1. Théorie générale

fonctionnelle quadratique $I(u, h)$ définie par :

$$I(u, h) = \mathcal{E}(u, u, h) - L(u, h) \quad (3.1)$$

$\mathcal{E}(u, v, h)$ est une fonctionnelle bilinéaire et symétrique en u et v et $L(u, h)$ est une fonctionnelle linéaire. On considère qu'on peut écrire ces deux fonctionnelles sous forme de développement en série en fonction du paramètre h

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v, h) &= \mathcal{E}_0(u, v) + \varepsilon(h) \mathcal{E}_1(u, v) + \varepsilon'(h) \mathcal{E}_2(u, v) \\ L(u, h) &= L_0(u) + \varepsilon(h) L_1(u) + \varepsilon'(h) L_2(u) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où, $\varepsilon'(h) = o(\varepsilon(h))$ et $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$

La première approximation u_0 du point minimum de la fonctionnelle $I(u, h)$ est le point minimum de $I_0 = \mathcal{E}_0(u, u) - L_0(u)$. u_0 satisfait l'équation d'Euler-Lagrange

$$2 \mathcal{E}_0(u, \bar{u}) - L_0(\bar{u}) = 0 \quad (3.3)$$

Mettons u sous la forme $u = u_0 + u^*$. En gardant dans $I(u, h)$ les termes dominants contenant u^* et les termes d'interaction dominants contenant u et u^* . En utilisant l'équation

$$2 \mathcal{E}_0(u, u^*) - L_0(u^*) = 0 \quad (3.4)$$

nous aurons la fonctionnelle suivante à résoudre pour le point minimum u^* :

$$I^*(u_0, u^*, h) = \mathcal{E}_0(u^*, u^*) + \varepsilon(h) \mathcal{E}_1(u_0, u^*) - \varepsilon(h) L_1(u^*) \quad (3.5)$$

Après la substitution de $u^* = \varepsilon(h) w$, on aura une nouvelle fonctionnelle à minimiser

$$I_1(u_0, u^*, h) = \varepsilon(h)^{-2} I^*(u_0, u^*, h) = \mathcal{E}_0(w, w) + \mathcal{E}_1(u_0, w) - L_1(w) \quad (3.6)$$

qui ne dépend pas du petit paramètre ε et par conséquent, $u^* \sim \varepsilon(h)$ et pour construire une solution de l'ordre de $\varepsilon(h)$, tous les termes de l'ordre de $\varepsilon(h)$ ne doivent pas être écartés.

La VAM est basée principalement sur l'évaluation de l'ordre asymptotique non seulement des termes (fonctions) de la fonctionnelle mais parfois aussi de leurs dérivées,

ce qui est lié à la notion de la longueur caractéristique. On considère une fonction $f(x)$ définie pour $x \in [a, b]$ et \bar{f} est la différence maximum de cette fonction entre deux points quelconque du domaine, i.e.

$$\bar{f} = \max_{x_1, x_2 \in [a, b]} |f(x_1) - f(x_2)| \quad (3.7)$$

Pour un nombre réel positif l suffisamment petit, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \leq \frac{\bar{f}}{l} \quad (3.8)$$

La constante l la plus grande satisfaisant cette inégalité est appelée la longueur caractéristique de la fonction $f(x)$ dans son domaine de définition. Cette définition de la longueur caractéristique permet d'estimer a priori les dérivées des fonctions, dit l'ordre de la dérivée de la fonction et noté

$$\mathcal{O}\left(\frac{df}{dx}\right) \sim \frac{\bar{f}}{l} \quad (3.9)$$

Si on a besoin d'estimer des dérivées d'ordre supérieures jusqu'à l'ordre k , la longueur caractéristique est la plus grande constante l satisfaisant toutes les inégalités suivantes :

$$\left| \frac{df}{dx} \right| \leq \frac{\bar{f}}{l}, \quad \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right| \leq \frac{\bar{f}}{l^2}, \quad \dots, \quad \left| \frac{d^k f}{dx^k} \right| \leq \frac{\bar{f}}{l^k} \quad (3.10)$$

3.2 Analyse de la section transversale

Cette section est consacrée à l'analyse variationnelle de la section transversale d'une poutre. Dans un premier temps nous nous intéressons à l'analogie avec la théorie classique d'Euler-Bernoulli, qui convient aux poutres élancées, où les déformations de cisaillement sont considérées nulles et le vecteur unitaire axial de la base vectorielle associée à l'état déformé est tangent à la ligne de déformation. Les approximations asymptotiques d'ordre zéro et d'ordre un sont étudiées. En deuxième partie, le modèle de poutre général est élargi vers l'analogie avec la théorie de Timoshenko. Les déformations de cisaillement sont présentes et le vecteur unitaire axial de la base vectorielle associée avec l'état déformé n'est pas tangent.

3.2. Analyse de la section transversale

3.2.1 Cinématique des poutres

La Figure 3.2 montre une poutre initialement courbée et pré-tordue représentée par la ligne de référence courbée mesurée par la coordonnée curviligne x_1 . Chaque point de la section à l'état déformé est associé à un point original dans la section transversale à l'état non déformé. La description de la cinématique peut se faire à partir d'un repère global (\mathbf{a}) avec des vecteurs unitaires $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, 3$, dont le mouvement est connu dans le référentiel inertiel. Deux repères locaux vont être définis (\mathbf{b}) et (\mathbf{B}). Le premier est associé à la section transversale de l'état non déformé avec un vecteur unitaire axial tangent à la ligne de référence de la poutre. Le deuxième associé à l'état déformé avec un vecteur unitaire axial, n'est pas nécessairement tangent sauf dans le cas d'une analogie avec la théorie classique d'Euler-Bernoulli.

Dans ce chapitre et la suite du manuscrit nous adoptons les conventions suivantes : les vecteurs et les tenseurs sont écrits en gras, les indices grecs prennent les valeurs 2 et 3, alors que les indices latins prennent les valeurs 1, 2, et 3. L'opérateur $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x_1$. Le symbole tilda transforme un vecteur en une matrice anti-symétrique $(\tilde{\cdot}) = -e_{ijk}(\cdot)_k$, avec e_{ijk} , tenseur de permutation dans un système de coordonnées cartésien. L'intégration d'une entité sur la section transversale est symbolisée par $\langle(\cdot)\rangle = \int_A(\cdot)dx_2dx_3$. La notation $\langle\langle(\cdot)\rangle\rangle = \int_A(\cdot)\sqrt{g}dx_2dx_3$ est aussi utilisée, avec g , déterminant du tenseur métrique avant déformation défini dans (3.13).

A l'état non déformé, la position d'un point matériel est défini par le vecteur $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ défini dans les coordonnées curvilignes x_1, x_2 et x_3 , où x_1 est la coordonnée curviligne le long de la ligne de référence, et x_α sont des coordonnées normales à la ligne de référence. En ce point, on peut définir une base dans le système de coordonnées curvilignes (x_1, x_2, x_3) appelée base vectorielle covariante et définie par [172] :

$$\mathbf{g}_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_i} \quad (3.11)$$

La base vectorielle contravariante associée est définie par [155] :

$$\mathbf{g}^i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\sqrt{g}} e_{ijk} \mathbf{g}_j \times \mathbf{g}_k \quad (3.12)$$

où g est le déterminant du tenseur métrique défini dans l'état non déformé

$$g = \det(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \quad (3.13)$$

Chaque point sur la ligne de référence est représenté par un vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{x}(x_1, 0, 0)$ dans le repère global. A partir de la définition (3.11), le repère (\mathbf{b}) de l'état non déformé avec des vecteurs unitaires $\mathbf{b}_i, i = 1, 2, 3$ est défini par :

$$\mathbf{b}_i(x_1, 0, 0) = \frac{\partial \mathbf{x}(x_1, 0, 0)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{r}(x_1)}{\partial x_i} = \mathbf{g}_i(x_1, 0, 0) \quad (3.14)$$

Ainsi, le vecteur $\mathbf{b}_1(x_1)$ est tangent à la ligne de référence et $\mathbf{b}_\alpha(x_1)$ définissent la section transversale non déformée. Le vecteur position d'une particule de la poutre peut être défini par :

$$\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{r}(x_1) + \boldsymbol{\xi}(x_2, x_3) \quad (3.15)$$

où, $\boldsymbol{\xi}(x_2, x_3) = x_\alpha \mathbf{b}_\alpha(x_1)$

Pour simplifier les dérivations, la ligne de référence est choisie comme celle formée par les locus des centres géométriques des surfaces transversales et les axes centraux sont le long de x_2 et x_3 . Dans ce chapitre et le reste du manuscrit, la dérivée spatiale par rapport à x_1 est notée par le symbole ($'$). Ainsi, de (3.14), on peut écrire : $\mathbf{r}' = \mathbf{b}_1$.

L'intégration de l'équation (3.15) sur la section transversale non déformée donne :

$$\langle \mathbf{x} \rangle = A \mathbf{r} + \langle x_\alpha \rangle \mathbf{b}_\alpha \quad (3.16)$$

avec $A = \langle 1 \rangle$. Le second terme à droite s'annule du fait que la ligne de référence de la poutre passe par les centres géométriques des sections. Ce qui permet de dire que \mathbf{r} représente la position moyenne de tous les points sur la section transversale :

$$\frac{\langle \mathbf{x} \rangle}{A} = \mathbf{r} \quad (3.17)$$

Lorsque la section transversale présente une obliquité, les propriétés géométriques et matérielles sont prises à partir de la section oblique, qui n'est pas normale à la ligne de référence. Le vecteur position d'une particule est calculé par rapport à un repère associé avec la section oblique noté \mathbf{c} avec les coordonnées y_α , i.e., le deuxième membre

3.2. Analyse de la section transversale

à droite de l'équation (3.15) devient : $\xi(y_2, y_3) = y_\alpha c_\alpha(x_1)$. Les vecteurs unitaires des deux repères sont liés par les cosinus directeurs de la section transversale oblique β_{ij} , i.e., $\mathbf{b}_i = \beta_{ij} \mathbf{c}_j$. Dans ce qui suit, nous nous intéressons au cas d'une section transversale sans obliquité. Pour plus de détail, nous renvoyons le lecteur aux références [140, 141].

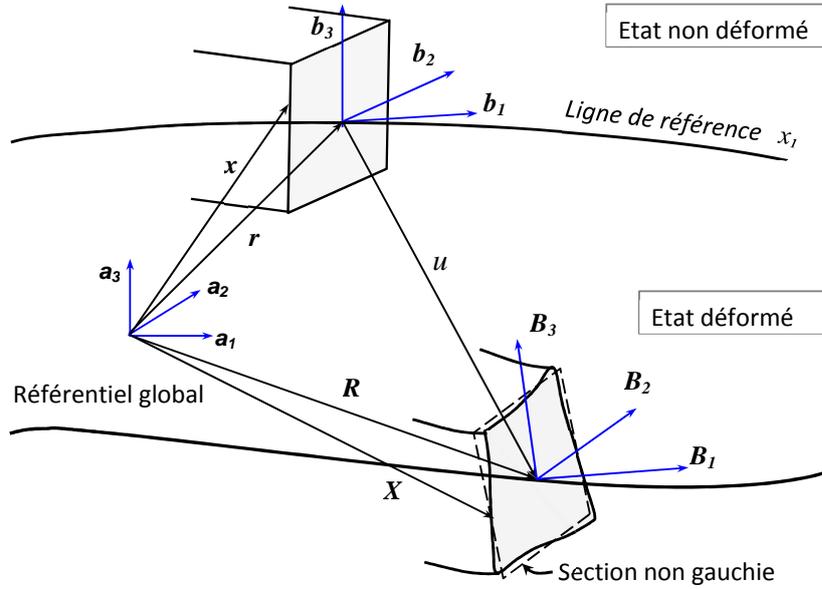


Figure 3.2 Schéma du modèle de poutre, repères et ligne de référence

A l'état non déformé, un point matériel précédemment spécifié par $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ sera présenté après déformation par un autre vecteur position $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$. Similairement à l'état non déformé, la base covariante en ce point est définie par :

$$\mathbf{G}_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_i} \quad (3.18)$$

Cette base n'est pas nécessairement orthogonale. Une base orthonormale \mathbf{B}_i est introduite telle que les vecteurs unitaires \mathbf{B}_α sont dans le plan de \mathbf{G}_α et s'obtiennent par une rotation rigide de la section transversale en x_1 [62]. Le vecteur \mathbf{B}_1 est normal au plan formé par \mathbf{B}_α , (i.e., $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3$). Il n'est pas tangent à la ligne de référence sauf dans le cas de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. La rotation relative entre ces deux repères (\mathbf{b}) et (\mathbf{B}) s'effectue par le moyen d'un tenseur orthogonal \mathbf{C}^{Bb} , appelé tenseur de rotation globale

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{C}^{Bb} \mathbf{b}_i \quad (3.19)$$

Similairement au vecteur \mathbf{x} dans (3.15), on peut représenter le vecteur position d'une particule de la poutre déformée dans le repère déformé (B), qui a initialement le vecteur position \mathbf{r} exprimé dans le repère non déformé (b), comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{R}(x_1) + \mathbf{C}^{Bb} [\boldsymbol{\xi}(x_2, x_3) + \mathbf{w}(x_1, x_2, x_3)] \\ &= \mathbf{R}(x_1) + x_\alpha \mathbf{B}_\alpha + w_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (3.20)$$

où, le vecteur $\mathbf{w} = w_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{b}_i$, représente le déplacement de gauchissement associé aux translations et rotations en corps rigide de la section transversale. Les composantes w_i décrivent les deux formes de gauchissement, dans le plan et en dehors du plan, des points matériels constituant la section transversale avant déformation.

L'ajout du gauchissement de cette façon dans l'équation (3.16) introduit des redondances, i.e. le champ de gauchissement, sur la surface de la section transversale, peut reproduire ses mouvements du corps rigide (dits modes du corps rigide), qui se résume en un déplacement axial, deux déplacements transversaux et une rotation autour de la ligne de référence. A cet effet, quatre contraintes sont à ajouter au champ de gauchissement pour éliminer ces redondances. Une des techniques (ce n'est pas la seule) est d'imposer des valeurs moyennes nulles de ces déplacements et rotation le long de la section transversale.

Les trois premières équations de ces contraintes sont donc définies comme suit :

$$\langle w_i \rangle = 0 \quad (3.21)$$

La quatrième contrainte est liée à la déformation de torsion. D'après la théorie de l'élasticité, la rotation locale autour de x_1 à n'importe quel point de la section transversale est :

$$\theta_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{B}_2 - \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{B}_3) + \frac{1}{2}(w_{3,2} - w_{2,3}) \quad (3.22)$$

Le fait que la rotation locale moyenne de la section transversale autour de l'axe x_1 soit

3.2. Analyse de la section transversale

indépendante du champ de gauchissement, implique :

$$\langle w_{3,2} - w_{2,3} \rangle = 0 \quad (3.23)$$

celà définit la quatrième contrainte. Les équations définissant les quatre contraintes (3.21, 3.23) peuvent être écrites sous la forme :

$$\langle \Gamma_c w \rangle = 0 \quad (3.24)$$

avec

$$\Gamma_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\partial_3 & \partial_2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

où, $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$.

Ces contraintes permettent aussi de définir le vecteur position moyen à l'état déformé, similairement à celui donné dans (3.17). L'intégration de l'équation (3.20) sur la surface transversale donne

$$\langle \mathbf{X} \rangle = A\mathbf{R} + \langle x_\alpha \rangle B_\alpha + \langle w_i \rangle B_i \quad (3.26)$$

où, le second terme à droite s'annule par le choix précédent de la ligne de référence. L'application de ces contraintes permet d'écrire :

$$\mathbf{R} = \frac{\langle \mathbf{X} \rangle}{A} \quad (3.27)$$

En posant $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, tel qu'il est montré sur la Figure (3.2), on peut dire que \mathbf{u} représente le déplacement moyen de tous les points se trouvant sur la section transversale avant déformation :

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{X} - \mathbf{x} \rangle}{A} \quad (3.28)$$

3.2.2 Formulation du champ de déformation

3.2.2.a Déformations généralisées 1-D

Les déformations généralisées 1-D, conformément à la théorie de Cosserat [84], sont exprimées en écriture tensorielle comme suit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{C}^{bB} \cdot \mathbf{R}' - \mathbf{r}' \\ \boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{C}^{bB} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{k}\end{aligned}\tag{3.29}$$

où, \mathbf{K} est le vecteur de courbure de l'état déformé exprimé dans le repère (\mathbf{B}) . $\boldsymbol{\gamma}$ et $\boldsymbol{\kappa}$ sont les vecteurs de déformations généralisées correspondants aux forces et aux moments respectivement :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= [\gamma_{11} \quad 2\gamma_{12} \quad 2\gamma_{13}]^T \\ \boldsymbol{\kappa} &= [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^T\end{aligned}\tag{3.30}$$

où, γ_{11} est la déformation d'extension, $2\gamma_{1\alpha}$ sont les déformations de cisaillement (d'ingénieur), κ_1 est la déformation de torsion (vrillage par unité de longueur) et κ_α sont les déformations de flexion.

\mathbf{k} et \mathbf{K} sont les vecteurs de courbure de l'état non déformé et de l'état déformé respectivement, définis par :

$$\begin{aligned}\mathbf{b}'_i &= \mathbf{k} \times \mathbf{b}_i \\ \mathbf{B}'_i &= \mathbf{K} \times \mathbf{B}_i\end{aligned}\tag{3.31}$$

Analogiquement à la vitesse angulaire, ces courbures sont liées aux matrices des cosinus directeurs comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{k}} &= (\mathbf{C}^{ba})' \mathbf{C}^{ab} \\ \tilde{\mathbf{K}} &= (\mathbf{C}^{Ba})' \mathbf{C}^{aB}\end{aligned}\tag{3.32}$$

3.2.2.b Champ de déformations 3-D

La réduction du système est basée sur la description de l'énergie de déformation emmagasinée dans ce système, il s'agit donc de définir le tenseur de déformation 3-D. En utilisant le concept de la décomposition du tenseur de rotation [62], l'expression des composantes du tenseur symétrique (3×3) de déformation de Jaumann-Bio-Cauchy,

3.2. Analyse de la section transversale

pour des petites déformations et rotations locales, est simplifiée en :

$$\Gamma_{ij} = \frac{\chi_{ij} + \chi_{ji}}{2} - \delta_{ij} \quad (3.33)$$

où, δ_{ij} est le symbole de Kronecker et χ_{ij} représente les composantes du tenseur du gradient de déformation exprimées par :

$$\chi_{ij} = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{G}_k \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{b}_j \quad (3.34)$$

\mathbf{G}_k et \mathbf{g}^k , définis dans (3.18) et (3.12), sont successivement la base vectorielle covariante de l'état déformé et la base vectorielle contravariante de l'état non déformé. En utilisant (3.15) et (3.31.a), la base vectorielle covariante de l'état non déformé est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{b}_1 + x_\alpha \mathbf{b}'_\alpha = (1 - x_2 k_3 + x_3 k_2) \mathbf{b}_1 - x_3 k_1 \mathbf{b}_2 + x_2 k_1 \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{b}_\alpha \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les vecteurs \mathbf{g}_α sont des vecteurs unitaires, mais le vecteur \mathbf{g}_1 n'est pas unitaire sauf si la poutre n'a pas une courbure initiale. Il est normal aux vecteurs \mathbf{g}_α dans le cas d'une poutre non tordue même si elle est courbée.

La racine carrée du déterminant du tenseur métrique de l'état non déformé est donnée par :

$$\sqrt{g} = \mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = 1 - x_2 k_3 + x_3 k_2 \quad (3.36)$$

La raison de l'utilisation du tenseur de Jaumann-Biot-Cauchy au lieu par exemple de celui de Cauchy-Green est que le tenseur de Jaumann-Biot-Cauchy est plus simple à exprimer en termes de déformations généralisées unidimensionnelles (1-D) pour pouvoir réduire asymptotiquement le champs de déformation 3-D. De plus, on démontre que lorsque les déformations sont petites, ces tenseurs de déformation sont équivalents [62].

Similairement à la base covariante \mathbf{g}_i , la base covariante \mathbf{G}_i de l'état déformé est déterminée en utilisant (3.31.b).

3.2.3 Energie de déformation

Le comportement d'une structure élastique est complètement déterminé par son énergie de déformation calculée à partir du champ de déformation 3-D. Notre objectif est de réduire asymptotiquement cette fonctionnelle à l'ordre adéquat, dont elle est fonction des déformations généralisées 1-D.

3.2.3.a Energie de déformation 1-D

Dans le cas d'une formulation analogue à Euler-Bernoulli, autrement dit lorsque la réduction du système se fait asymptotiquement en imitant Euler-Bernoulli, le vecteur \mathbf{B}_1 est tangent à la ligne de référence après déformation, les déformations de cisaillement généralisées ($2\gamma_{1\alpha}$) sont nulles et donc le vecteur de déformations généralisées 1-D comprend seulement 4 composantes :

$$\bar{\varepsilon} = [\bar{\gamma}_{11} \quad \bar{\kappa}_1 \quad \bar{\kappa}_2 \quad \bar{\kappa}_3]^T \quad (3.37)$$

L'énergie de déformation unidimensionnelle doit être écrite sous la forme suivante :

$$2\mathcal{U} = \bar{\varepsilon}^T \bar{\mathcal{S}} \bar{\varepsilon} \quad (3.38)$$

où, $\bar{\mathcal{S}}$ est la matrice de rigidité (4×4) correspondante. A noter ici que dans le cas de l'analogie avec Euler-Bernoulli les termes de déformation de cisaillement sont présents dans le champ de déformation 3-D défini par (3.32), mais ils seront éliminés aux cours des développements.

Dans le cas d'une formulation analogue à Timoshenko, le vecteur \mathbf{B}_1 n'est pas nécessairement tangent à la ligne de référence après déformation, les déformations de cisaillement généralisées ($2\gamma_{1\alpha}$) ne sont pas nulles et par conséquent le vecteur de déformations généralisées 1-D est étendu et comprend 6 composantes :

$$\varepsilon_t = [\gamma_{11} \quad 2\gamma_{12} \quad 2\gamma_{13} \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^T \quad (3.39)$$

L'énergie de déformation unidimensionnelle est écrite sous la forme suivante :

$$2\mathcal{U} = \varepsilon_t^T \mathcal{S} \varepsilon_t \quad (3.40)$$

3.2. Analyse de la section transversale

où, \mathcal{S} est la matrice de rigidité (6×6) correspondante.

Pour une poutre prismatique isotrope avec une section transversale symétrique, la matrice de rigidité, dans les deux cas d'analogie Euler-Bernoulli ou Timoshenko, est diagonale.

3.2.3.b Energie de déformation 3-D

L'énergie de déformation de la section transversale d'une poutre, dite énergie de déformation par unité de longueur, ou parfois densité de l'énergie de déformation, peut être écrite sous la forme suivante :

$$2\mathcal{U} = \langle\langle \Gamma^T \mathcal{D} \Gamma \rangle\rangle \quad (3.41)$$

où, $\langle\langle \bullet \rangle\rangle = \int_s (\bullet) \sqrt{g} dx_2 dx_3$ et Γ est un vecteur colonne regroupant les six composantes du tenseur de déformation symétrique de Jaumann-Biot-Cauchy défini dans (3.33) comme

$$\Gamma = [\Gamma_{11} \quad 2\Gamma_{12} \quad 2\Gamma_{13} \quad \Gamma_{22} \quad 2\Gamma_{23} \quad \Gamma_{33}]^T \quad (3.42)$$

\mathcal{D} (6×6) est la matrice relative à la loi de comportement, qui est définie par

$$\sigma = \mathcal{D} \Gamma \quad (3.43)$$

σ regroupe les composantes du tenseur de contrainte 3-D exprimé dans l'état non déformé, i.e. le repère (\mathbf{b}) , parce que les déformations 3-D, représentées par Γ , sont exprimées aussi dans ce repère.

3.2.4 Réduction dimensionnelle

La réduction dimensionnelle d'un problème de structure élastique par la MAV se fait asymptotiquement en approchant l'énergie de déformation tridimensionnelle 3-D (3.41), dont les déformations Γ_{ij} sont exprimées en fonction des déformations généralisées 1-D, à l'énergie de déformation unidimensionnelle 1-D (3.38 ou 3.40). Dans ce travail, on considère que l'effet du déplacement du gauchissement sur l'énergie cinétique et le travail des forces surfaciques et de volume appliquées sont négligés. Un

tel effet a été évoqué dans [183].

3.2.4.a Identification des petits paramètres

La première étape dans la réduction dimensionnelle consiste en l'identification des petits paramètres qui seront impliqués dans le processus de réduction. Le tenseur de déformation de Jaumann-Biot-Cauchy a été défini sous la forme simplifiée (3.33) suite à l'hypothèse des petites déformations, qui est imposée aussi sur les vecteurs de déformations généralisées (3.29). Cette hypothèse peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{O}(\Gamma) &= \max |\Gamma_{ij}(x_1, x_2, x_3)| \ll 1 \\ \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}) &= \max |\bar{\gamma}_1, h\bar{\kappa}_i| \ll 1 \\ \mathcal{O}(\varepsilon) &= \max |\gamma_1, h\kappa_i, \gamma_{1\alpha}| \ll 1 \end{cases} \quad (3.44)$$

On définit un ordre de grandeur globale des déformations noté comme suit :

$$\hat{\varepsilon} = \mathcal{O}(\Gamma) = \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}) = \mathcal{O}(\varepsilon) \ll 1 \quad (3.45)$$

Une autre inconnue impliquée dans le processus de réduction est le gauchissement \mathbf{w} défini dans (3.20). Les méthodes asymptotiques ont prouvé que le gauchissement est de l'ordre de $(h\hat{\varepsilon})$ [89], où h représente ici la caractéristique géométrique de la section transversale.

Deux autres caractéristiques géométriques impliquées dans le processus de réduction sont la longueur axiale de la poutre notée l et le rayon de courbure R défini par $R = 1/\sqrt{\mathbf{k}^T \mathbf{k}}$. On considère que l et R sont du même ordre et que $h^2/L^2 \sim h^2/R^2 \ll 1$ et on note $\bar{h} \sim h/L \sim h/R$. Suite à la définition de la longueur caractéristique donnée dans la section (1.2), on considère aussi que $(\)'$ est de l'ordre de $(\)/R$.

Dans ce travail, nous nous limitons à une analyse linéaire de la section transversale et par conséquent, il est adéquat d'éliminer les termes de déformation quadratiques et plus de l'énergie de déformation. Ces termes seront épargnés par exemple dans le cas d'une analyse de l'effet de trapèze [84].

3.2. Analyse de la section transversale

3.2.4.b Analogie avec la théorie classique d'Euler-Bernoulli

La réduction de la fonctionnelle de l'énergie de déformation exprimée en 3D (3.41) à une forme unidimensionnelle (3.38) ou (3.40) veut dire que l'inconnue à chercher est le vecteur de gauchissement $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$. A partir des relations (3.29, 3.30, 3.37) et en écartant (i.e. négligeant) les produits du gauchissement avec les déformations généralisées, on peut réarranger le vecteur colonne défini dans (3.42) sous la forme suivante :

$$\Gamma = \Gamma_h w + \Gamma_\varepsilon \bar{\varepsilon} + \Gamma_R w + \Gamma_l w' \quad (3.46)$$

où,

$$\begin{aligned} \Gamma &= [\Gamma_{11} \quad 2\Gamma_{12} \quad 2\Gamma_{13} \quad \Gamma_{22} \quad 2\Gamma_{23} \quad \Gamma_{33}]^T \\ w &= [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T \\ \bar{\varepsilon} &= [\gamma_1 \quad \kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^T \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les opérateurs Γ_h , Γ_ε , Γ_R et Γ_l sont définis par :

$$\Gamma_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\Gamma_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 & -x_2 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\Gamma_R = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \tilde{k} + I_3 k_1 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ O_3 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\Gamma_l = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} I_3 \\ O_3 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

où, O_3 est une matrice 3×3 nulle, I_3 une matrice 3×3 d'identité, et g est le déterminant du tenseur métrique de l'état non déformé défini dans (3.13), tel que pour une section transversale non oblique, $\sqrt{g} = 1 - x_2 k_3 + x_3 k_2$.

La décomposition du champ de déformation 3-D tel qu'il est montré dans (3.46) est très utile. Premièrement, il est devenu clair que ce champ de déformation 3-D est linéaire en fonction de ε , w et de ses dérivées. Deuxièmement, elle permet de définir l'apport de chaque opérateur dans le champ de déformation global. Le premier opérateur Γ_h indique l'effet du champ de gauchissement, le second opérateur Γ_ε indique l'effet des déformations généralisées liées à la ligne de référence, le troisième opérateur Γ_R montre l'effet de la courbure et le quatrième opérateur Γ_l indique l'influence de la longueur sur le champ de déformations globales.

Le premier opérateur Γ_h a une propriété importante dans la recherche d'une solution de gauchissement, c'est qu'il présente un noyau défini par :

$$\Gamma_h w = 0 \quad (3.52)$$

Ceci représente un système de six équations différentielles, qui admet pour solutions les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} w_1 &= c_1 \\ w_2 &= -c_4 x_3 + c_2 \\ w_3 &= c_4 x_2 + c_3 \end{aligned} \quad (3.53)$$

où, c_1 , c_2 , c_3 et c_4 sont des constantes arbitraires. On peut obtenir le noyau de l'opérateur Γ_h en mettant à chaque fois une des constantes égale à 1 et les autres nulles, i.e. $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, en suite $c_2 = 1$, $c_1 = c_3 = c_4 = 0$, ... etc. On obtient le noyau de l'opérateur Γ_h suivant :

3.2. Analyse de la section transversale

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Soit \mathcal{U}_0 la densité de l'énergie de déformation d'ordre zéro, telle que

$$2\mathcal{U}_0 = \langle\langle \Gamma_0^T \mathcal{D}\Gamma_0 \rangle\rangle \quad (3.55)$$

où, Γ_0 est l'approximation d'ordre zéro de Γ et est obtenue à partir de (3.46) en ne gardant que les termes prépondérants on obtient :

$$\Gamma_0 = \Gamma_h w + \Gamma_\varepsilon \bar{\varepsilon} \quad (3.56)$$

Rappelons que notre objectif est la recherche d'une solution du gauchissement w en fonction de $\bar{\varepsilon}$ qui doit minimiser l'énergie de déformation \mathcal{U}_0 tout en respectant les contraintes définies dans (3.52).

Pour pouvoir traiter des sections transversales avec des géométries arbitraires et des matériaux anisotropes, on utilise la méthode des éléments finis pour minimiser l'énergie de déformation. Le champ de gauchissement est discrétisé comme suit :

$$W(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{N}(x_2, x_3)V(x_1) \quad (3.57)$$

où, $\mathcal{N}(x_2, x_3)$ représente les fonctions de forme et V est un vecteur colonne des valeurs nodales des déplacements de gauchissement sur la section transversale. Substituant l'équation (3.57) dans (3.56) et par la suite dans (3.55) on obtient la version discrétisée de la fonctionnelle \mathcal{U}_0 :

$$2\mathcal{U}_0 = V^T E V + 2 V^T D_{h\varepsilon} + \bar{\varepsilon}^T D_{\varepsilon\varepsilon} \bar{\varepsilon} \quad (3.58)$$

où,

$$\begin{aligned} E &= \langle\langle [\Gamma_h S]^T \mathcal{D}[\Gamma_a S] \rangle\rangle \\ D_{h\varepsilon} &= \langle\langle [\Gamma_h S]^T \mathcal{D}\Gamma_\varepsilon \rangle\rangle \\ D_{\varepsilon\varepsilon} &= \langle\langle \Gamma_\varepsilon^T \mathcal{D}\Gamma_\varepsilon \rangle\rangle \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pour résoudre le problème numériquement, on aura besoin de discrétiser l'équation des contraintes (3.24)

$$V^T D_c = 0 \quad (3.60)$$

avec $D_c = \langle \Gamma_c S \rangle$

Similairement, la matrice du noyau (3.54) est discrétisée sous la forme :

$$\psi = S\Psi \quad (3.61)$$

où, la matrice Ψ contient les valeurs nodales de ψ , ce qui permet d'écrire $\Gamma_h S\Psi = 0$ et par conséquent, en revenant à (3.59), la matrice Ψ constitue aussi un noyau de E , i.e. $E\Psi = 0$, ou encore $\Psi^T E = 0$, à cause de la symétrie de E .

La dérivation de la solution d'ordre zéro est réduite maintenant à la minimisation de l'équation (3.58) objet de l'équation des contraintes (3.60), qui peut être résolu en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange et à l'aide des multiplicateurs de Lagrange notés ici (Λ) :

$$EV + D_{h\varepsilon}\bar{\varepsilon} = D_c\Lambda \quad (3.62)$$

En multipliant les deux cotés par Ψ^T et en utilisant la caractéristique de noyau de E , on obtient :

$$\Lambda = (\Psi^T D_c)^{-1} \Psi^T D_{h\varepsilon}\bar{\varepsilon} \quad (3.63)$$

De nouveau, l'utilisation de la caractéristique du noyau conduit à $\Lambda = 0$ du fait que $\Psi^T D_{h\varepsilon} = \langle\langle (\Gamma_h S\Psi)^T D\Gamma_\varepsilon \rangle\rangle = 0$, (i.e. $D_{h\varepsilon}$ est orthogonale au noyau Ψ), on obtient :

$$EV = -D_{h\varepsilon}\bar{\varepsilon} \quad (3.64)$$

Comme la partie droite de cette équation (3.64) est orthogonale au Ψ et en introduisant l'équation des contraintes (3.60) pour enlever la singularité, on obtient une solution de (3.64) notée V^* . La solution complète est :

$$V = V^* + \Psi\lambda \quad (3.65)$$

3.2. Analyse de la section transversale

où, λ est déterminé similairement à Λ :

$$\lambda = -(\Psi^T D_c)^{-1} D_c^T V^* \quad (3.66)$$

Finalement le champ de gauchissement, qui minimise la fonctionnelle (3.58) soumise à l'équation des contraintes (3.60) est :

$$V = \left[\Delta - \Psi \left(D_c^T \Psi \right)^{-1} D_c^T \right] V^* = V_0 = \hat{V}_0 \bar{\varepsilon} \quad (3.67)$$

Le gauchissement obtenu V_0 représente l'approximation d'ordre zéro de V . Il est maintenant fonction des déformations généralisées $\bar{\varepsilon}$ et il est de l'ordre de $\hat{\varepsilon}$.

L'injection de (3.67) dans l'expression de l'énergie de déformation (3.58) donne l'énergie de déformation par unité de longueur asymptotique à l'ordre $\mathcal{O}(\mu \hat{\varepsilon}^2)$ (μ est un paramètre caractérisant l'ordre des constantes élastiques du matériau) comme suit :

$$2 \mathcal{U}_0 = \bar{\varepsilon}^T (\hat{V}_0^T D_{h\varepsilon} + D_{\varepsilon\varepsilon}) \varepsilon \quad (3.68)$$

L'équation (3.68) prend la forme matricielle suivante :

$$2 \mathcal{U}_0 = \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{11} \\ \bar{\kappa}_1 \\ \bar{\kappa}_2 \\ \bar{\kappa}_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & \bar{S}_{34} \\ \bar{S}_{41} & \bar{S}_{42} & \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{11} \\ \bar{\kappa}_1 \\ \bar{\kappa}_2 \\ \bar{\kappa}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

ce qui implique une loi unidimensionnelle de la forme

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{M}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & \bar{S}_{14} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{24} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & \bar{S}_{34} \\ \bar{S}_{41} & \bar{S}_{42} & \bar{S}_{43} & \bar{S}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{11} \\ \bar{\kappa}_1 \\ \bar{\kappa}_2 \\ \bar{\kappa}_3 \end{Bmatrix} = \mathcal{S} \begin{Bmatrix} \bar{\gamma}_{11} \\ \bar{\kappa}_1 \\ \bar{\kappa}_2 \\ \bar{\kappa}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

où, \mathcal{S} est la matrice (4×4) de rigidité de la section transversale de la poutre (i.e. par unité de longueur), \bar{F}_1 est la force axiale, \bar{M}_1 est le moment de torsion et \bar{M}_α sont les

moments de flexion.

Ce modèle d'ordre zéro se rapporte au modèle de poutre d'Euler-Bernoulli généralisé avec un tordage et courbures initiaux. Il convient beaucoup plus à l'analyse statique et dynamique avec des fréquences basses des poutres élancées isotropes et anisotropes. Cependant, il peut donner de mauvais résultats lorsque le moment de torsion est prépondérant. Dans cette situation, pour que ce modèle puisse donner de bons résultats, la ligne de référence doit être définie par les locus des centres de cisaillement.

3.2.4.c Théorie raffinée - Approximation d'ordre 2

Le modèle d'Euler-Bernoulli généralisé est non précis lorsqu'il s'agit des poutres courtes où l'effet du cisaillement n'est pas négligeable. A cet effet, une approximation d'ordre supérieur de l'énergie de déformation est nécessaire. Une perturbation du premier ordre du champ de gauchissement par rapport au petit paramètre h est suffisante et conduit à une approximation du second ordre en h de l'énergie de déformation, i.e. $\mathcal{O}(h^2\hat{\varepsilon}^2)$.

La perturbation du champ de gauchissement est définie par :

$$V = V_0 + V_1 \quad (3.71)$$

où, V_1 est asymptotiquement plus petit d'un ordre que V_0 i.e. $V_1 \sim hV_0$. Substituant les équations (3.71), (3.57) et (3.46) dans l'équation (3.41), les termes prépondérants de l'énergie de déformation de la section transversale sont :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{U}_1 = & \bar{\varepsilon}^T (\hat{V}_0^T D_{h\varepsilon} + D_{\varepsilon\varepsilon}) \bar{\varepsilon} + 2(V_0^T D_{hR} V_0 + V_0^T D_{hl} V_0' + V_0^T D_{R\varepsilon} \bar{\varepsilon} + V_0'^T D_{l\varepsilon} \bar{\varepsilon}) + \\ & V_1^T E V_1 + 2V_1^T (D_{hR} V_0 + D_{hR}^T V_0 + D_{R\varepsilon} \bar{\varepsilon}) + 2V_1^T D_{hl} V_0' + 2V_0'^T D_{hl} V_1' + \\ & 2V_1'^T D_{l\varepsilon} \bar{\varepsilon} + V_0^T D_{RR} V_0 + 2V_0^T D_{Rl} V_0' + V_0'^T D_{ll} V_0' \end{aligned} \quad (3.72)$$

où,

$$\begin{aligned} D_{hR} &= \langle\langle [\Gamma_h S]^T \mathcal{D}[\Gamma_R S] \rangle\rangle & D_{RR} &= \langle\langle [\Gamma_R S]^T \mathcal{D}[\Gamma_R S] \rangle\rangle \\ D_{R\varepsilon} &= \langle\langle [\Gamma_R S]^T \mathcal{D}\Gamma_\varepsilon \rangle\rangle & D_{hl} &= \langle\langle [\Gamma_h S]^T \mathcal{D}[\Gamma_l S] \rangle\rangle \\ D_{ll} &= \langle\langle [\Gamma_l S]^T \mathcal{D}[\Gamma_l S] \rangle\rangle & D_{l\varepsilon} &= \langle\langle [\Gamma_l S]^T \mathcal{D}\Gamma_\varepsilon \rangle\rangle \\ D_{Rl} &= \langle\langle [\Gamma_R S]^T \mathcal{D}[\Gamma_l S] \rangle\rangle \end{aligned} \quad (3.73)$$

3.2. Analyse de la section transversale

Les quantités E , $D_{h\varepsilon}$ et $D_{\varepsilon\varepsilon}$ sont définies dans (3.59). Les termes prépondérants d'ordre 2 contenant V_1 ainsi que les termes d'interaction entre V_1 et les termes d'ordre inférieur sont :

$$2 \mathcal{U}_1^* = V_1^T E V_1 + 2V_1^T D_R \bar{\varepsilon} + 2V_1^T D_S \bar{\varepsilon}' \quad (3.74)$$

où,

$$D_R = (D_{hR} + D_{hR}^T) \hat{V}_0 + D_{R\varepsilon} \quad (3.75)$$

$$D_S = (D_{hS} - D_{hS}^T) \hat{V}_0 - D_{S\varepsilon} \quad (3.76)$$

Le problème à résoudre maintenant consiste en la minimisation de la fonctionnelle (3.73) conditionnée par les contraintes (3.59). De nouveau, cela peut se faire en résolvant l'équation d'Euler-Lagrange avec l'introduction des multiplicateurs de Lagrange :

$$E V_1 + D_R \bar{\varepsilon} + D_S \bar{\varepsilon}' = D_c \Lambda \quad (3.77)$$

En multipliant de part et d'autre par Ψ^T , on obtient l'expression de Λ :

$$\Lambda = (\Psi^T D_c)^{-1} \Psi^T (D_R \bar{\varepsilon} + D_S \bar{\varepsilon}') \quad (3.78)$$

Ce multiplicateur n'est pas nul en général comme dans l'approximation d'ordre zéro. L'équation linéaire (3.76) devient :

$$E V_1 = \left[D_c (\Psi^T D_c)^{-1} \Psi^T - \Delta \right] (D_R \bar{\varepsilon} + D_S \bar{\varepsilon}') \quad (3.79)$$

L'approximation du premier ordre du gauchissement, V_1 , peut être obtenue sous forme de la décomposition suivante :

$$V_1 = V_{1R} \bar{\varepsilon} + V_{1S} \bar{\varepsilon}' \quad (3.80)$$

V_{1R} et V_{1S} sont des nouveaux coefficients d'influence du gauchissement. En injectant l'expression (3.80) dans (3.72), on obtient l'énergie de déformation asymptotique d'ordre 2 exprimée par :

$$2 \mathcal{U}_1 = \bar{\varepsilon}^T A \bar{\varepsilon} + 2\bar{\varepsilon}^T B \bar{\varepsilon}' + \bar{\varepsilon}'^T C \bar{\varepsilon}' + 2\bar{\varepsilon}^T D \bar{\varepsilon}'' \quad (3.81)$$

où,

$$\begin{aligned}
 A &= \widehat{V}_0^T D_{h\varepsilon} + \widehat{V}_0^T (D_{hR} + D_{hR}^T + D_{RR}) \widehat{V}_0 + \widehat{V}_0^T D_{R\varepsilon} + V_{1R}^T D_R \\
 B &= \widehat{V}_0^T (D_{hl} + D_{Rl}) \widehat{V}_0 + D_{h\varepsilon}^T \widehat{V}_0 + (\widehat{V}_0^T D_{hl} + D_{l\varepsilon}^T) V_{1R} + \\
 &\quad \frac{1}{2} (D_R^T V_{1S} + V_{1R}^T D_{hl} \widehat{V}_0 + V_{1R}^T D_{hl}^T \widehat{V}_0 + V_{1R}^T D_{l\varepsilon}) \\
 C &= \widehat{V}_0^T D_{hl}^T V_{1S} + V_{1S}^T D_{hl}^T \widehat{V}_0 + V_{1S}^T D_{l\varepsilon} + \widehat{V}_0^T D_{ll}^T \widehat{V}_0 \\
 D &= (D_{l\varepsilon}^T + \widehat{V}_0^T D_{hl}) V_{1S}
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Cette approximation asymptotique de l'énergie de déformation à l'ordre 2 est liée à la théorie d'Euler-Bernoulli et la matrice A dans (3.81 et 3.82) est de taille 4×4 . Elle contient contrairement à l'approximation d'ordre zéro vue précédemment les corrections liées au tordage initial et aux courbures initiales. La présence des dérivées de $\bar{\varepsilon}$ rend difficile l'utilisation de la fonctionnelle (3.81), qui représente une approximation. Cela nécessite, aussi, l'introduction des conditions aux limites, dont l'interprétation physique n'est pas évidente et qui ne sont pas présentes dans les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

3.2.4.d Analogie avec la théorie de Timoshenko

La fonctionnelle présentée dans l'équation (3.81) est correctement asymptotique à l'ordre 2, i.e. elle est suffisamment précise. Cependant, comme elle ne peut traiter que les poutres élancées, elle est difficile à pratiquer. Une transformation a été faite à cette fonctionnelle pour pouvoir traiter les poutres courtes avec un tordage initial et des courbures initiales [183, 184], dont le cisaillement n'est pas nul. De plus ces poutres peuvent être soumises à des vibrations à hautes fréquences. Cela implique l'introduction des déformations généralisées de cisaillement $2\gamma_{1\alpha}$ et par conséquent la matrice de rigidité recherchée est de taille 6×6 .

Les déformations de cisaillement sont caractérisées par l'introduction des angles d'orientation supplémentaires de la section transversale, appelés les angles de cisaillement notés $2\gamma_{12}$ et $2\gamma_{13}$. A cet état déformé, le vecteur \mathbf{B}_1 n'est pas tangent à la ligne de référence et les autres vecteurs \mathbf{B}_α sont parallèles au plan moyen de la section transversale. Pour que la transformation soit plus pratique, un nouveau repère (\mathbf{T}) est introduit tel que le vecteur unitaire axial \mathbf{T}_1 soit tangent à la ligne de référence.

3.2. Analyse de la section transversale

Les vecteurs \mathbf{T}_α sont déterminés par une rotation autour de \mathbf{T}_1 . La différence dans l'orientation entre les deux repères (\mathbf{T}) et (\mathbf{B}) est due aux angles de cisaillement. La Figure 3.3 montre la situation des deux repères (\mathbf{B}) et (\mathbf{T}) dans le plan $x_1 - x_3$. Sous l'hypothèse des petites déformations, on peut exprimer facilement \mathbf{B}_3 et pareil pour \mathbf{B}_2 dans le repère (\mathbf{T}) , ce qui permet d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_3 = \mathbf{T}_3 + (2\gamma_{13})\mathbf{T}_1 \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{T}_2 + (2\gamma_{12})\mathbf{T}_1 \end{cases} \quad (3.83)$$

Le vecteur \mathbf{B}_1 est défini par $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3$ et par conséquent la relation entre les deux bases vectorielles (\mathbf{B}) et (\mathbf{T}) peut être exprimée par la matrice de passage suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\gamma_{12} & -2\gamma_{13} \\ 2\gamma_{12} & 1 & 0 \\ 2\gamma_{13} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

Dans le repère (\mathbf{T}) , le fait que \mathbf{T}_1 soit choisi tangent à la ligne de référence signifie que les déformations de cisaillement font partie du champ de déplacement du gauchissement. Le vecteur position d'un point d'une particule de la poutre à l'état déformé dans le repère (\mathbf{T}) est défini par :

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}(x_1) + x_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \bar{w}_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{T}_i \quad (3.85)$$

où, $\mathbf{R}(x_1)$ représente le vecteur position d'un point sur la ligne de référence et $\bar{w}_i(x_1, x_2, x_3)$ représentent les fonctions de gauchissement dans le repère (\mathbf{T}) . Dans ce repère, le vecteur des déformations généralisées 1-D correspond à la théorie classique d'Euler-Bernoulli exprimé dans (3.36) par :

$$\bar{\varepsilon} = [\bar{\gamma}_{11} \quad \bar{\kappa}_1 \quad \bar{\kappa}_2 \quad \bar{\kappa}_3]^T \quad (3.86)$$

où, les déformations κ_i définissent donc la variation le long de x_1 des vecteurs unitaires \mathbf{T}_i telle que :

$$\mathbf{T}'_i = (\mathbf{k} + \bar{\kappa}) \times \mathbf{T}_i \quad (3.87)$$

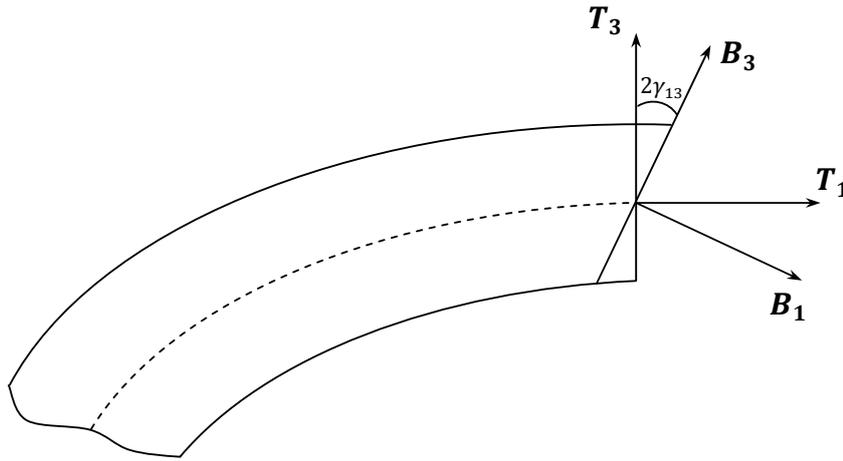


Figure 3.3 Repères utilisés pour prendre en considération l'effet de cisaillement

Dans le repère (**B**) les déformations généralisées de Timoshenko sont notées par :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= [\gamma_{11} \ \kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3]^T \\ \gamma_s &= [2 \ \gamma_{12} \ 2 \ \gamma_{13}]^T\end{aligned}\quad (3.88)$$

Les déformations généralisées classiques d'Euler-Bernoulli $\bar{\varepsilon}$ et les déformations généralisées de Timoshenko (ε et γ_s) sont liées cinématiquement comme suit [184] :

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + Q \gamma_s' + P \gamma_s \quad (3.89)$$

où,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_2 & k_3 \\ -k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Le champ de déformation 3-D considéré ici est basé sur le tenseur du gradient de déformation χ_{ij} exprimé dans le repère (**T**) :

$$\chi_{ij} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{G}_k \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{b}_j \quad (3.91)$$

A cet effet et similairement à l'analogie faite précédemment avec la théorie clas-

3.2. Analyse de la section transversale

sique généralisée, on aura les mêmes développements et la fonctionnelle de l'énergie de déformation asymptotique au second ordre sera exprimée par l'équation (3.81). L'objectif maintenant est de transformer et d'exprimer cette fonctionnelle en fonction des déformations généralisées de Timoshenko (ε et γ_s) comme suit :

$$2\mathcal{U} = \varepsilon^T X \varepsilon + 2\varepsilon^T Y \gamma_s + \gamma_s^T G \gamma_s \quad (3.92)$$

Les matrices $X(4 \times 4)$, $Y(4 \times 2)$ et $G(2 \times 2)$ sont les nouvelles inconnues à déterminer en fonction des matrices A, B, C et D exprimées dans (3.81 et 3.82). Une comparaison entre les formules (3.81) et (3.92) montre qu'il faut en premier lieu éliminer les dérivées de $\bar{\varepsilon}$. Pour cela, les équations de mouvement 1-D sans les forces distribuées d'une poutre initialement tordue et courbée ont été utilisées dans Popusco et Hogdes (2000) [141] et Yu et al. (2002) [184]. On montre dans [184] que suite à une approche de perturbation on trouve, à l'ordre zéro, les relations analytiques suivantes :

$$\begin{aligned} A &= X - YG^{-1}Y^T \\ Y &= B^T A^{-1}QG \\ G &= ((A^{-1}Q)^T C A^{-1}Q)^{-1} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Le calcul se fait dans l'ordre suivant : G , Y et X . Le passage au premier ordre nécessite la résolution d'un système matriciel plus compliqué. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux références [84, 141, 183, 184]. Les matrices G , Y et X peuvent être réarrangées sous forme d'une matrice \mathcal{S} (6×6) dite matrice de rigidité de la section transversale définie comme suit :

$$2\mathcal{U} = \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{13} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ 2\gamma_{12} \\ 2\gamma_{13} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} = \varepsilon_t^T \mathcal{S} \varepsilon_t \quad (3.94)$$

ou encore sous forme d'une loi unidimensionnelle

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} \varepsilon_t \quad (3.95)$$

avec, $\mathcal{F} = [F \ M]^T = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ M_1 \ M_2 \ M_3]^T$.

La matrice de rigidité \mathcal{S} sert comme donnée pour une analyse unidimensionnelle d'une poutre, elle contient également l'information sur le locus du centre de cisaillement de la poutre défini par $(-S_{34}/S_{44}, S_{24}/S_{44})$. Elle permet également, à partir des résultats fournis de l'analyse 1-D, de déterminer les composantes du champ de déformation et du champ de contrainte 3-D.

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à une analyse de la section transversale linéaire, i.e. basée sur la théorie de l'élasticité linéaire. Cependant, pour pouvoir traiter des phénomènes non-linéaires tels que l'effet de trapèze, l'analyse non-linéaire de la section transversale est nécessaire. Une telle approche a été présentée dans Popesco et Hodges (1998) [140].

3.2.4.e Relations de recouvrement

Les relations (3.69, 3.94) expriment des lois unidimensionnels 1-D des modèles classique et Timoshenko respectivement, où les matrices de rigidité obtenues à l'issue d'une analyse de la section transversale font les liens entre les déformations généralisées et les vecteurs de forces et moments appliqués. Cependant, pour que la modélisation soit complète, il faut déterminer les champs 3-D des déplacements, déformations et des contraintes par le biais des relations de recouvrement qui vont lier ces variables 3-D aux déformations généralisées et aux coordonnées locales de la section transversale.

Pour une poutre initialement tordue, courbée et modélisée en Timoshenko généralisé, les fonctions de gauchissement 3-D sont définies suite aux relations (3.57, 3.80) par :

$$w(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{N}(x_1, x_2) \left[(V_0 + V_{1R})\bar{\varepsilon} + V_{1S}\bar{\varepsilon}' \right] \quad (3.96)$$

où, V_0 , V_{1R} et V_{1S} sont des valeurs nodales de l'apport de l'approximation d'ordre zéro et des deux corrections dues aux courbures initiales et l'effet de cisaillement respectivement. Le terme $\bar{\varepsilon}$ représente les déformations généralisées 1-D classiques qui sont

3.2. Analyse de la section transversale

liées aux déformations généralisées de Timoshenko par (3.88).

Le champ de déplacement 3-D peut être obtenu en utilisant l'expression suivante :

$$U_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_1) + x_\alpha [C_{\alpha i}(x_1) - \delta_{\alpha i}] + C_{ij}(x_1)w_j(x_1, x_2, x_3) \quad (3.97)$$

où, C_{ij} sont les composantes de la matrice des cosinus directeurs de la section transversale, u_i le déplacement de la ligne de référence et U_i sont les composantes du champ de déplacement 3-D. C_{ij} et u_i sont obtenues à partir de l'analyse globale 1-D.

Le champ de déformation 3-D peut être obtenu en injectant (3.96) et (3.89) dans l'équation (3.46) tel que :

$$\begin{aligned} \Gamma = & [(\Gamma_h + \Gamma_R)(V_0 + V_{1R}) + \Gamma_\varepsilon](\varepsilon + Q \gamma'_s + P \gamma_s) + \\ & [(\Gamma_h + \Gamma_R)V_{1S} + \Gamma_l(V_0 + V_{1R})](\varepsilon' + Q \gamma''_s + P \gamma'_s) + \\ & \Gamma_l V_{1S}(\varepsilon'' + Q \gamma'''_s + P \gamma''_s) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Les dérivées des déformations généralisées de Timoshenko peuvent être déterminées à partir de la loi de comportement 1-D (3.95) comme suit :

$$\varepsilon_t = \mathcal{S}^{-1} \mathcal{F} \quad (3.99)$$

La première dérivée de \mathcal{F} est obtenue à partir des équations d'équilibre (Eq. 5.39) de Hodges (2006) [84] réarrangées sous la forme :

$$\mathcal{F}' = \mathcal{R} \mathcal{F} - \phi = \begin{bmatrix} \tilde{K} & O_3 \\ \tilde{e}_1 + \tilde{\gamma} & \tilde{K} \end{bmatrix} \mathcal{F} - \phi \quad (3.100)$$

où, $\phi = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ m_1 \ m_2 \ m_3]^T$, constitue les forces appliquées et d'inertie distribuées dans le repère \mathbf{B} , et O_3 est une matrice 3×3 nulle. La différentiation de l'équation (3.100) donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'' &= (\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}')\mathcal{F} + \mathcal{R}\phi - \phi' \\ \mathcal{F}''' &= (-\mathcal{R}^3 + \mathcal{R}\mathcal{R}' + 2\mathcal{R}'\mathcal{R} - \mathcal{R}'')\mathcal{F} + (-\mathcal{R}^2 + 2\mathcal{R}')\phi + \mathcal{R}\phi' - \phi'' \end{aligned} \quad (3.101)$$

Ayant \mathcal{F}' , \mathcal{F}'' et \mathcal{F}''' , on peut obtenir ε'_t , ε''_t et ε'''_t à partir de l'équation (3.99) et par conséquent les déformations généralisées de Timoshenko qui seront injectées par la suite dans (3.98) pour avoir le champ de déformation 3-D. Les dérivées de ϕ et k doivent être connues.

Finalement, le champ de contrainte est calculé en utilisant la loi de comportement (3.42).

3.3 Equations d'équilibre non-linéaires et intrinsèques

Dans cette section nous présentons les équations d'équilibre gouvernant la dynamique des poutres anisotropes obéissant à la théorie de Timoshenko généralisée. Ces équations d'équilibre sont composées de deux équations de mouvement et de deux équations cinématiques complémentaires. Les équations de mouvement intrinsèques et géométriquement exactes des poutres de Hodges (1990) [81] sont plus commodes pour l'analyse de la dynamique des poutres anisotropes avec des sections arbitraires et qui font l'objet de grands déplacements. Ces équations de mouvement sont basées sur une formulation mixte (i.e. utilisation des déplacements/rotations ainsi que des moments cinétiques linéaire et angulaire), en appliquant le principe d'Hamilton. En plus de ces équations intrinsèques de mouvement, qui ont montré un bon accord avec l'expérimentation, tel que dans Hodges et Patil (2004) [86], deux autres équations intrinsèques ont été ajoutées, Hodges (2003) [83], reliant les vitesses linéaires et angulaires généralisées avec les déformations généralisées.

Ces équations d'équilibre, appelées modèle dynamique des poutres de Hodges, ont les avantages suivants :

- Elles sont intrinsèques du fait qu'elles sont indépendantes du choix des variables des déplacements et des rotations et que ces variables ne figurent pas dans ces équations.
- Elles sont géométriquement exactes puisqu'il n'y a aucune approximation géométrique et par conséquent, elles peuvent modéliser les poutres avec grands déplacements, troisièmement, elles présentent une non-linéarité relativement faible par rapport à d'autres formulations (au maximum d'ordre 2), ce qui est avantageux pour la résolution et le traitement numérique de ces équations.

3.3. Equations d'équilibre non-linéaires et intrinsèques

- Elles tirent profit des caractéristiques unidimensionnelles et de l'analyse de la section transversale vue dans la section précédente et par conséquent elles sont adéquates pour les poutres initialement tordues et courbées avec des sections transversales et des matériaux arbitraires.

Les équations de mouvement sont dérivées à partir d'une formulation variationnelle en appliquant le principe d'Hamilton, qui peut être écrit comme suit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [\delta(\mathcal{K} - \mathcal{U}) + \delta\overline{\mathcal{W}}] dx_1 dt = \delta\overline{\mathcal{A}} \quad (3.102)$$

où, t_1 et t_2 sont des temps fixes arbitraires, L la longueur de la poutre, \mathcal{K} et \mathcal{U} sont l'énergie cinétique et l'énergie de déformation par unité de longueur, δ indice de variation Lagrangienne à un temps fixe, $\delta\overline{\mathcal{W}}$ est le travail virtuel des forces appliquées par unité de longueur, et $\delta\overline{\mathcal{A}}$ est l'action virtuelle due aux conditions aux limites en temps et en espace.

3.3.1 Variation de l'énergie de déformation

La variation de l'énergie de déformation est par rapport aux déformations généralisées exprimées par les deux vecteurs $\gamma = [\gamma_{11} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13}]^T$ et $\kappa = [\kappa_1 \ \kappa_2 \ \kappa_3]^T$. L'énergie de déformation est fonction de γ et κ , i.e. $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\gamma, \kappa)$, et à partir des équations (3.94) et (3.95), on peut déduire les dérivées partielles de \mathcal{U} définies par :

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \gamma} \right)^T \\ M &= \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \kappa} \right)^T \end{aligned} \quad (3.103)$$

où, les vecteurs F et M sont exprimés dans le repère de l'état déformé \mathbf{B} .

La variation de l'énergie de déformation par unité de longueur est exprimée en fonction des variations $\delta\gamma$ et $\delta\kappa$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 \delta\mathcal{U} &= \delta\gamma^T F + \delta\kappa^T M \\
 &= \left[(\overline{\delta q}')^T - \overline{\delta q}^T \tilde{K} - \overline{\delta\psi}^T (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}) \right] F + \\
 &\quad \left[(\overline{\delta\psi}')^T - \overline{\delta\psi}^T \tilde{K} \right] M
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

où, $\overline{\delta\psi} = -\delta C C^T$ avec $C = C^{Bb}$ est la matrice des cosinus directeurs correspondante au tenseur défini dans (3.19), $\overline{\delta q} = C\delta u$ avec u représentant les composantes du vecteur de déplacement moyen défini dans (3.28) et exprimé dans le repère \mathbf{b} , et $e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$. Pour plus de détails sur les expressions de $\delta\gamma$ et $\delta\kappa$ utilisées dans (3.104), le lecteur est renvoyé aux références [81, 84]

3.3.2 Variation de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique de la poutre est définie par :

$$\int_0^L \mathcal{K} \, dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^L \langle\langle \rho(\mathbf{v}^{\mathbf{mI}})^T \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{mI}} \rangle\rangle \, dx_1 \tag{3.105}$$

où, ρ est la densité de masse, $\mathbf{v}^{\mathbf{mI}}$ est la vitesse d'un point matériel \mathbf{m} dans un référentiel inertiel \mathbf{I} . L'énergie cinétique par unité de longueur est donc :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \langle\langle \rho(\mathbf{v}^{\mathbf{mI}})^T \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{mI}} \rangle\rangle \tag{3.106}$$

La vitesse $\mathbf{v}^{\mathbf{mI}}$ d'un point matériel \mathbf{m} dans le référentiel inertiel \mathbf{I} peut être exprimée en fonction de ces deux vitesses linéaire (V) et angulaire (Ω) mesurées dans \mathbf{B} par :

$$\mathbf{v}^{\mathbf{mI}} = V + \tilde{\Omega} \xi \tag{3.107}$$

où,

$$\begin{aligned}
 V &= C(v + \dot{u} + \tilde{\omega}u) \\
 \tilde{\Omega} &= -\dot{C}C + C\tilde{\omega}C
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

v est la vitesse linéaire de l'origine du repère \mathbf{b} (i.e. du point de ligne de référence), mesurée dans \mathbf{b} et ω est la vitesse de rotation du repère \mathbf{b} dans le référentiel \mathbf{I} et mesurée dans \mathbf{b} .

3.3. Equations d'équilibre non-linéaires et intrinsèques

En introduisant la masse par unité de longueur, le moment d'inertie et le moment d'inertie quadratique de masse définis par :

$$\begin{aligned}\mu &= \langle\langle \rho \rangle\rangle \\ \mu \bar{\xi} &= \langle\langle \rho \xi \rangle\rangle \\ \mathbb{I} &= \langle\langle \rho (\xi^T \xi \Delta - \xi \xi^T) \rangle\rangle\end{aligned}\tag{3.109}$$

la densité de l'énergie cinétique peut être écrite sous la forme :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} (\mu V^T V - 2\mu \Omega^T \tilde{V} \bar{\xi} + \Omega^T \mathbb{I} \Omega)\tag{3.110}$$

avec,

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} \dot{i}_2 + \dot{i}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{i}_2 & \dot{i}_{23} \\ 0 & \dot{i}_{23} & \dot{i}_2 \end{bmatrix}\tag{3.111}$$

$$\text{où, } \dot{i}_2 = \int_S \rho x_3^2 dx_2 dx_3, \quad \dot{i}_3 = \int_S \rho x_2^2 dx_2 dx_3 \quad \text{et} \quad \dot{i}_{23} = \int_S \rho x_2 x_3 dx_2 dx_3.$$

sont des moments quadratiques de masse.

A présent, nous pouvons définir les moments cinétique et angulaire noté P et H respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}P &= \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial V} \right)^T = \mu (V - \tilde{\xi} \Omega) \\ H &= \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \Omega} \right)^T = \mathbb{I} \Omega + \mu \tilde{\xi} V\end{aligned}\tag{3.112}$$

Pour pouvoir écrire l'expression de la variation de l'énergie cinétique par unité de longueur, il faut définir les variations de la vitesse linéaire δV et angulaire $\delta \Omega$. On démontre dans [81, 84] les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\delta V &= \dot{\bar{\delta}} q^T - \bar{\delta} q^T \tilde{\Omega} - \bar{\delta} \psi^T \tilde{V} \\ \delta \Omega &= \dot{\bar{\delta}} \psi^T - \bar{\delta} \psi^T \tilde{\Omega}\end{aligned}\tag{3.113}$$

Par conséquent, la variation de l'énergie cinétique par unité de longueur est :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{K} &= \delta\gamma^T P + \delta\kappa^T H \\ &= \left(\dot{\bar{\delta}q}^T - \bar{\delta}q^T \tilde{\Omega} - \bar{\delta}\psi^T \tilde{V} \right) P + \left(\dot{\bar{\delta}\psi}^T - \bar{\delta}\psi^T \tilde{\Omega} \right) H\end{aligned}\quad (3.114)$$

3.3.3 Travail virtuel

On considère que l'effet du gauchissement sur le travail virtuel des forces de volume et des forces de traction surfaciques est négligeable. Le travail virtuel des forces et des moments distribués appliqués par unité de longueur, notés par f et m respectivement, est donné par :

$$\bar{\delta}\mathcal{W} = \int_0^L \left(\bar{\delta}q^T f + \bar{\delta}\psi^T m \right) dx_1 \quad (3.115)$$

3.3.4 Equations de mouvement intrinsèques

A présent nous pouvons écrire la formulation variationnelle en appliquant le principe d'Hamilton :

$$\begin{aligned}& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \left(\dot{\bar{\delta}q}^T - \bar{\delta}q^T \tilde{\Omega} - \bar{\delta}\psi^T \tilde{V} \right) P + \left(\dot{\bar{\delta}\psi}^T - \bar{\delta}\psi^T \tilde{\Omega} \right) H \right. \\ & \quad - \left[(\bar{\delta}q')^T - \bar{\delta}q^T \tilde{K} - \bar{\delta}\psi^T (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma}) \right] F - \left[(\bar{\delta}\psi')^T - \bar{\delta}\psi^T \tilde{K} \right] M \\ & \quad \left. + \left(\bar{\delta}q^T f + \bar{\delta}\psi^T m \right) \right\} dx_1 dt \\ &= \int_0^L \left(\bar{\delta}q^T \hat{P} + \bar{\delta}\psi^T \hat{H} \right) \Big|_{t_1}^{t_2} dx_1 - \int_{t_1}^{t_2} \left(\bar{\delta}q^T \hat{F} + \bar{\delta}\psi^T \hat{M} \right) \Big|_0^L dt\end{aligned}\quad (3.116)$$

où, les quantités à droite avec chapeau ($\hat{\cdot}$) représentent les valeurs discrètes des conditions aux limites des force, moment, moment cinétique linéaire et moment cinétique angulaire.

3.3. Equations d'équilibre non-linéaires et intrinsèques

Après l'intégration par partie de l'équation (3.116) on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \bar{\delta q}^T \left\{ \left(F' + \tilde{K}F + f - \dot{P} - \tilde{\Omega}P \right) \right. \\
& \quad \left. + \bar{\delta \psi}^T \left[M' + \tilde{K}M + (\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\gamma})F + m - \dot{H} - \tilde{\Omega}H - \tilde{V}P \right] \right\} dx_1 dt \\
& = \int_0^L \left[\bar{\delta q}^T \left(\hat{P} - P \right) + \bar{\delta \psi}^T \left(\hat{H} - H \right) \right] \Big|_{t_1}^{t_2} dx_1 \\
& \quad - \int_{t_1}^{t_2} \left[\bar{\delta q}^T \left(\hat{F} - F \right) + \bar{\delta \psi}^T \left(\hat{M} - M \right) \right] \Big|_0^L dt
\end{aligned} \tag{3.117}$$

à partir de cette équation (3.117), les équations d'Euler-Lagrange nous donne les équations de mouvement intrinsèques :

$$\begin{aligned}
F' + \tilde{K}F + f & = \dot{P} + \tilde{\Omega}P \\
M' + \tilde{K}M + (\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\gamma})F + m & = \dot{H} + \tilde{\Omega}H + \tilde{V}P
\end{aligned} \tag{3.118}$$

3.3.5 Equations constitutives

Les variables dans les deux équations de mouvement sont liées entre elles par deux équations constitutives linéaires. La première concerne la matrice de rigidité \mathcal{S} , vue dans (3.94), et peut être écrite sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{V} \\ \mathbb{V}^T & \mathbb{W} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \mathcal{S} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} \tag{3.119}$$

La deuxième équation constitutive concerne la matrice masse \mathcal{M} reliant les moments cinétiques avec les vitesses généralisées. Elle est définie comme suit :

$$\begin{Bmatrix} P \\ H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^T & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \Omega \end{Bmatrix} = \mathcal{M} \begin{Bmatrix} V \\ \Omega \end{Bmatrix} \tag{3.120}$$

avec, $\mathbb{G} = \mu\Delta$ (Δ est une matrice d'identité 3×3) et les matrices \mathbb{I} et \mathbb{K} sont définies dans (3.111) et (3.109.b) respectivement. L'équation (3.120) peut être écrite sous la

forme :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & \mu\bar{x}_3 & -\mu\bar{x}_2 \\ 0 & \mu & 0 & -\mu\bar{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu\bar{x}_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\bar{x}_3 & \mu\bar{x}_2 & \dot{i}_2 + \dot{i}_3 & 0 & 0 \\ \mu\bar{x}_3 & 0 & 0 & 0 & \dot{i}_2 & \dot{i}_{23} \\ -\mu\bar{x}_2 & 0 & 0 & 0 & \dot{i}_{23} & \dot{i}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.121)$$

3.3.6 Equations cinématiques intrinsèques

La formulation, (3.18, 3.19, 3.20), est complétée par des équations cinématiques reliant les déformations aux déplacements et la matrice des cosinus directeurs, qui peuvent être obtenues suite à une écriture matricielle des équations (3.29) donnant [84] :

$$\begin{aligned} \gamma &= C(e_1 + u' + \tilde{k}u) - e_1 \\ \tilde{\kappa} &= -C C'^T + C \tilde{\kappa} C^T - \tilde{k} \end{aligned} \quad (3.122)$$

avec $C = C^{Bb}$, $\kappa = K - k$ et $e_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Les équations cinématiques intrinsèques sont obtenues par l'élimination des variables de déplacement et de rotation des équations des déformations généralisées et des vitesses généralisées [83, 84]. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned} V' + \tilde{K}V + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma})\Omega &= \dot{\gamma} \\ \Omega' + \tilde{K}\Omega &= \dot{\kappa} \end{aligned} \quad (3.123)$$

L'avantage de ces deux équations est qu'elles vont permettre d'établir des lois de conservation en temps et en espace et des schémas d'intégration simplifiés [83]. La formulation est maintenant complète, elle est intrinsèque et géométriquement exacte. Elle regroupe les deux équations de mouvement (3.118), les deux équations cinématiques (3.121) et les équations constitutives (3.119) et (3.120).

3.4 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté la théorie non-linéaire des poutres anisotropes développée par Hodges et ces collaborateurs, qui est composée de deux grands volets : L'analyse de la section transversale (2-D) qui est basée sur la MAV et la technique d'estimation des grandeurs prépondérantes permettant de faire la réduction dimensionnelle et la formulation intrinsèque et géométriquement exacte gouvernant le comportement dynamique d'une poutre. Cette formulation est constituée principalement des équations de mouvement, des équations cinématiques et les équations constitutives et tire profit des résultats obtenus de l'analyse de la section transversale. Avant de passer aux techniques de résolution utilisées dans ce travail, il est utile de synthétiser les équations vues dans le chapitre précédent.

Le modèle mathématique, résumé dans le tableau 3.1, est constitué de deux équations de mouvement. Ajoutant à ces équations aux dérivées partielles, i.e. différentiation par rapport à x_1 (noté dans le reste du document x) et par rapport au temps t , deux équations constitutives permettant de minimiser le nombre des inconnues. Au final, nous avons 8 équations pour 8 inconnues ($F(x, t)$, $M(x, t)$, $V(x, t)$, $\Omega(x, t)$, $P(x, t)$, $H(x, t)$, $\gamma(x, t)$ et $\kappa(x, t)$). Rappelons que $K = k + \kappa$ où k est la courbure initiale i.e. connue, et $e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$ est un vecteur unitaire. Par conséquent le système peut être résolu. Les équations constitutives servent à remplacer des variables en fonction d'autres. Les variables F , M , V et Ω sont plus pratiques pour exprimer les conditions aux limites. Ces variables sont dites primaires et γ , κ , P et H sont dites secondaires.

Les conditions aux limites

Une poutre de longueur L est conditionnée dans ces deux bouts. Des conditions aux limites peuvent être imposées soit sur les forces et moments appliqués soit sur les vitesses linéaires et angulaires, qui traduisent les conditions aux limites des déplacements et des rotations. Dans le cas d'une poutre rotative encastree à l'origine, d'autres conditions aux limites ont été étudiées dans [159, 160]. On choisit donc, de limiter les vitesses au niveau de la racine ($x = 0$) notées V^0 et Ω^0 et de limiter le nombre de chargement dans le bout de la poutre notés F^L et M^L .

Au bout ($x = L$), F^L et M^L sont la force et le moment appliqués. A l'origine ($x = 0$), les vitesses V^0 et Ω^0 sont nulles si le rayon du moyeu de fixation est nul.

Table 3.1

Modèle mathématique de Hodges pour la dynamique des poutres

| Les équations intrinsèques |
|--|
| $F' + \tilde{K}F + f = \dot{P} + \tilde{\Omega}P$ $M' + \tilde{K}M + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma})F + m = \dot{H} + \tilde{\Omega}H + \tilde{V}P$ $V' + \tilde{K}V + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma})\Omega = \dot{\gamma}$ $\Omega' + \tilde{K}\Omega = \dot{\kappa}$ |
| Les équations constitutives |
| $\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^T & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} P \\ H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{K} \\ \mathbf{K}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \Omega \end{Bmatrix}$ |
| Les conditions aux limites |
| <p>Poutre encastree-libre, en mouvement de rotation et excitée dans son bout</p> $V(0, t) = V^0$ $\Omega(0, t) = \Omega^0$ $F(L, t) = F^L$ $M(L, t) = M^L$ |

Chapitre 4

Techniques d'aide à la résolution du problème

Sommaire

| | | |
|------------|--|------------|
| 4.1 | Discrétisation spatiale et temporelle | 88 |
| 4.1.1 | Approximation de Galerkin | 88 |
| 4.1.2 | Méthode de l'équilibrage harmonique | 97 |
| 4.2 | Calcul des déplacements | 100 |
| 4.3 | Analyse de la section transversale | 101 |
| 4.4 | Analyse statique linéaire | 110 |
| 4.5 | Bilan du chapitre | 114 |

Introduction

La première partie de ce manuscrit a été consacrée aux traitements de la dynamique des poutres d'une manière générale. Nous nous intéressons dans ce travail aux vibrations non-linéaires libres et forcées de poutres en mouvement de rotation. Les vitesses de rotation sont considérées constantes (ou stationnaires). Les sections transversales sont uniformes le long des poutres. Elles peuvent être initialement tordues et courbées et peuvent aussi subir de grands déplacements. Pour tenir compte de tous les éléments précédents, un traitement spécifique des développements mathématiques introduits au chapitre précédent sera proposé. La première section est dédiée aux méthodes de discrétisations en espace et en temps pour pouvoir résoudre le problème dans le domaine fréquentiel tout en spécifiant les conditions aux limites. Cette forme de discrétisation spatio-temporelle, qui est valable pour l'étude des vibrations non-linéaires libres et forcées, va nous permettre de déterminer une fonctionnelle avec un vecteur

des coordonnées généralisées et en ayant comme paramètre la pulsation de vibration de la poutre. Dans la deuxième section, nous allons voir les relations permettant de calculer les déplacements et les vitesses d'un point spécifique à partir d'un vecteur de déplacement généralisé. La troisième section sera dédiée aux techniques de calcul des propriétés élastiques et inertielles, i.e. matrices de rigidité et de masse, découlant d'une analyse de la section transversale. Finalement, avant d'aborder la dynamique nonlinéaire des poutres rotatives, nous allons voir, à travers des exemples traités dans la littérature, une analyse statique de deux poutres une isotrope et l'autre en composite.

4.1 Discrétisation spatiale et temporelle

Dans la dynamique des structures, les équations d'équilibre sont généralement des équations aux dérivées partielles en espace et en temps. La résolution de ces équations nécessite en premier lieu une discrétisation dans l'espace pour les transformer en équations différentielles en temps. Pour les équations intrinsèques gouvernant la dynamique des poutres, cette discrétisation peut se faire par la méthode des éléments finis (MEF) dans son ordre faible dite 'version h ' [169], ou par des séries de fonctions dites 'version p ' [135], ou par une combinaison de la MEF et des séries de fonctions dite 'version hp ' [136]. On démontre dans [135] et [136] que l'approximation de Galerkin en utilisant les polynômes de Legendre est plus fiable que les autres techniques et qu'avec un petit nombre de fonctions la solution converge rapidement vers la solution théorique relativement à la méthode des éléments finis. La MEF est plus adaptée pour les poutres présentant des discontinuités et des changements dans les propriétés de la section transversale. Une discrétisation dans l'espace et dans le temps par la méthode des différences finies a été proposée dans [73, 74].

Dans ce travail, les poutres traitées ont des sections uniformes le long de la poutre. A cet effet, la discrétisation spatiale sera faite par l'approximation de Galerkin avec les polynômes de Legendre. Cette approximation est compatible avec le principe de l'énergie consistante, que l'on précisera ultérieurement.

4.1.1 Approximation de Galerkin

La méthode de Galerkin fait partie des méthodes des résidus pondérés telle que

4.1. Discrétisation spatiale et temporelle

la méthode de Rayleigh-Ritz utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Dans la dynamique des structures, ce sont des équations de mouvement en fonction de l'espace et du temps. Les variables sont exprimées par une somme de fonctions de comparaison qui vérifient les conditions aux limites. Une variable $w(x, t)$ est exprimée sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) q_i(t) \quad (4.1)$$

$\Phi_i(x)$ sont n fonctions spatiales indépendantes, appelées fonctions de comparaison et $q_i(t)$ sont les variables généralisées correspondantes. Le choix de la forme et du nombre des fonctions de comparaison est crucial pour avoir une solution précise. Dans ce qui suit nous allons voir deux approches de l'approximation de Galerkin, l'approche standard utilisée généralement dans la résolution des équations différentielles et l'approche basée sur un bilan d'énergie où les fonctions de pondération sont cohérentes avec le principe de conservation de l'énergie. Cette dernière approche est celle adoptée dans ce travail.

4.1.1.a Critère d'approximation de Galerkin

Une approximation conduit systématiquement à un résidu noté $R(w, x)$. On considère n fonctions de pondération $\Psi_i(x)$ dites aussi les fonctions test. Une approximation de Galerkin standard, telle que l'on peut la trouver dans la littérature, est basée sur l'hypothèse que R est orthogonal à $\Psi_i(x)$ et par conséquent l'intégral du résidu pondéré est nul :

$$\int_0^L \Psi_i R \, dx = 0 \quad (4.2)$$

où, par définition, l'orthogonalité de deux fonction $f(x)$ et $g(x)$ sur un domaine $[a, b]$ est définie par $\int_a^b f(x) g(x) \, dx = 0$, et le domaine d'intégration pour une poutre de longueur L est défini par $[0, L]$.

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions de pondération coïncident avec les fonctions de comparaison, i.e. :

$$\Psi_i(x) = \Phi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.3)$$

A partir du critère (4.2), on obtient n équations différentielles ordinaires en temps

seulement après l'élimination de la dépendance de l'espace par intégration. La résolution de ces équations différentielles permet de déterminer les fonctions $q_i(t)$. Lorsque le nombre des fonctions de comparaison/pondération n tend vers l'infini, il se trouve que le résidu R doit être orthogonal à une infinité de fonctions indépendantes et cela ne peut se faire que si le résidu lui même tend vers zéro et c'est ce qui démontre la convergence de la méthode de Galerkin. Cela permet de dire aussi que plus le nombre de fonction de comparaison est grand plus la convergence est bonne.

La méthode de Galerkin est utilisée dans les systèmes conservatifs avec des opérateurs auto-adjoints (symétriques) et dans les systèmes non-conservatifs possédant des opérateurs non-auto-adjoints (asymétriques) [115].

4.1.1.b Approximation basée sur un bilan d'énergie

La précision de la méthode de Galerkin dépend principalement du choix des fonctions de pondération qui jouent en même temps le rôle des fonctions de comparaison. Dans ce qui suit nous utilisons seulement la terminologie de fonction de pondération. Dans cette section nous allons voir comment choisir des fonctions de pondération cohérentes avec le bilan d'énergie d'une poutre en mouvement.

Considérons la pondération des équations aux dérivées partielles intrinsèques et des conditions aux limites résumées dans le tableau (3.1) :

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \left\{ \right. & V^T \left[F' + \tilde{K}F + f - \dot{P} - \tilde{\Omega}P \right] \\
 & + \Omega^T \left[M' + \tilde{K}M + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma})F + m - \dot{H} - \tilde{\Omega}H - \tilde{V}P \right] \\
 & + F^T \left[V' + \tilde{K}V + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma})\Omega - \dot{\gamma} \right] + M^T \left[\Omega' + \tilde{K}\Omega - \dot{\kappa} \right] \left. \right\} dx \\
 & - F(0, t)^T \left[V(0, t) - V^0 \right] - M(0, t)^T \left[\Omega(0, t) - \Omega^0 \right] \\
 & - V(L, t)^T \left[F(L, t) - F^L \right] - \Omega(L, t)^T \left[M(L, t) - M^L \right] = 0 \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

L'expression (4.4) peut être réduite suite à l'intégration par partie des deux termes $V^T F'$ et $M^T \Omega'$ comme suit :

$$\int_0^L \left\{ V^T F' + M^T \Omega' \right\} dx = \int_0^L \left\{ -V^{T'} F - M^{T'} \Omega \right\} dx + V^T F \Big|_0^L + M^T \Omega \Big|_0^L \quad (4.5)$$

4.1. Discrétisation spatiale et temporelle

En remplaçant ces termes dans (4.4) on obtient l'expression réduite suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L [V^T \dot{P} + \Omega^T \dot{H}] dx + \int_0^L [F^T \dot{\gamma} + M^T \dot{\kappa}] dx \\
 &= \int_0^L [V^T f + \Omega^T m] dx \\
 & \quad + [V(L, t)^T F^L + \Omega(L, t)^T M^L \\
 & \quad - F(0, t)^T V^0 - M(0, t)^T \Omega^0] = 0 \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Interprétation physique

Pour pouvoir interpréter l'équation (4.6), on introduit les expressions des taux de changement de l'énergie cinétique \dot{T} , de l'énergie potentielle \dot{U} , de la puissance due aux travail des forces distribuées P^{ext} et de la puissance due aux conditions aux limites y compris les forces concentrées appliquées aux limites (à $x = 0$ et $x = L$), notée P^{cl} . En premier lieu, cherchons les taux de changement des puissances cinétique et potentielle :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} V \\ \Omega \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^T & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ \Omega \end{Bmatrix} dx \Rightarrow \dot{T} = \int_0^L \begin{Bmatrix} V \\ \Omega \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^T & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\Omega} \end{Bmatrix} dx \quad (4.7)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{V} \\ \mathbb{V}^T & \mathbb{W} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} dx \Rightarrow \dot{U} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{V} \\ \mathbb{V}^T & \mathbb{W} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\kappa} \end{Bmatrix} dx \quad (4.8)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\dot{T} = \int_0^L [V^T \dot{P} + \Omega^T \dot{H}] dx \quad (4.9)$$

$$\dot{U} = \int_0^L [F^T \dot{\gamma} + M^T \dot{\kappa}] dx \quad (4.10)$$

Le taux du travail des forces et moments distribués, puisqu'il s'agit des forces/moments multipliés par des vitesse, est défini par :

$$\dot{W}^{ext} = \int_0^L [V^T f + \Omega^T m] dx \quad (4.11)$$

Finalement le taux des travaux dû aux conditions aux limites (y compris l'effet des forces concentrées appliquées aux limites) est défini par :

$$\dot{\mathcal{W}}^{cl} = V(L, t)^T F^L + \Omega(L, t)^T M^L - F(0, t)^T V^0 - M(0, t)^T \Omega^0 \quad (4.12)$$

A cet effet, l'équation (4.6) représente un bilan de conservation de l'énergie qui stipule que le taux de changement de l'énergie totale est égal aux taux des travaux subits par la poutre, i.e. :

$$\dot{T} + \dot{U} = \dot{\mathcal{W}}^{ext} + \dot{\mathcal{W}}^{cl} \quad (4.13)$$

Par conséquent, l'approximation de Galerkin appliquée aux équations intrinsèques (3.118, 3.123) fournira une meilleure solution numérique.

Approximation

Considérons que les variables primaires F , M , V et Ω sont approchées par les séries suivantes :

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i(x) f_i(t) \\ M(x, t) &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_i(x) m_i(t) \\ V(x, t) &= \sum_{i=1}^n \bar{V}_i(x) v_i(t) \\ \Omega(x, t) &= \sum_{i=1}^n \bar{\Omega}_i(x) \omega_i(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Chacune de ces variables est constituée de 3 composantes, d'où $\bar{F}_i(x)$, $\bar{M}_i(x)$, $\bar{V}_i(x)$ et $\bar{\Omega}_i(x)$ sont des matrices diagonales (3×3) et $f_i(t)$, $m_i(t)$, $v_i(t)$ et $\omega_i(t)$ sont des vecteurs (3×1). A titre d'exemple $F(x, t)$ peut être développée sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_1(x, t) \\ F_2(x, t) \\ F_3(x, t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \bar{F}_{1i}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{F}_{2i}(x) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{F}_{3i}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1i}(t) \\ f_{2i}(t) \\ f_{3i}(t) \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Afin de simplifier la procédure d'approximation de Galerkin, on définit un vecteur de coordonnées généralisées en temps $q(t)$ composé de $q_i(t)$ tel que :

4.1. Discrétisation spatiale et temporelle

$$\begin{aligned}
F(x, t) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^F(x) q_i(t), & \Phi_i^F(x) &= [\bar{F}_i(x) \ 0 \ 0 \ 0] \\
M(x, t) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^M(x) q_i(t), & \Phi_i^M(x) &= [0 \ \bar{M}_i(x) \ 0 \ 0] \\
V(x, t) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^V(x) q_i(t), & \Phi_i^V(x) &= [0 \ 0 \ \bar{V}_i(x) \ 0] \\
\Omega(x, t) &= \sum_{i=1}^n \Phi_i^\Omega(x) q_i(t), & \Phi_i^\Omega(x) &= [0 \ 0 \ 0 \ \bar{\Omega}_i(x)]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

où, $q_i(t) = [f_i(t), m_i(t), v_i(t), \omega_i(t)]^T$ et par conséquent, le vecteur des coordonnées généralisées total $q(t)$, de dimension $(12n \times 1)$, s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
q(t) &= [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T = \\
& [f_1(t), m_1(t), v_1(t), \omega_1(t), \dots, f_n(t), m_n(t), v_n(t), \omega_n(t)]^T \tag{4.17}
\end{aligned}$$

L'introduction de ces approximations dans l'équation (4.6) donne :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L \left\{ \begin{aligned}
& \Phi_k^{VT} [\mathbb{G}\Phi_i^V + \mathbb{K}\Phi_i^\Omega] \dot{q}_i + \Phi_k^{VT} [-\Phi_i^{F'} - \tilde{k}\Phi_i^F] q_i - \Phi_k^{VT} f \\
& + \Phi_k^{VT} [\tilde{\Phi}_i^\Omega (\mathbb{G}\Phi_j^V + \mathbb{K}\Phi_j^\Omega) - (\widetilde{\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M}) \Phi_j^F] q_i q_j \\
& + \Phi_k^{\Omega T} [\mathbb{K}^T \Phi_i^V + \mathbb{I}\Phi_i^\Omega] \dot{q}_i + \Phi_k^{\Omega T} [-\Phi_i^{M'} - \tilde{k}\Phi_i^M - \tilde{e}_1 \Phi_i^F] q_i - \Phi_k^{\Omega T} m \\
& + \Phi_k^{\Omega T} [\tilde{\Phi}_i^\Omega (\mathbb{K}^T \Phi_j^V + \mathbb{I}\Phi_j^\Omega) + \tilde{\Phi}_i^V (\mathbb{G}^T \Phi_j^V + \mathbb{K}\Phi_j^\Omega) - (\widetilde{\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M}) \Phi_j^M \\
& \quad - (\widetilde{\mathbb{R}\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{S}\Phi_i^M}) \Phi_j^F] q_i q_j \\
& + \Phi_k^{FT} [\mathbb{R}\Phi_i^F + \mathbb{S}\Phi_i^M] \dot{q}_i + \Phi_k^{FT} [-\Phi_i^{V'} - \tilde{k}\Phi_i^V - \tilde{e}_1 \Phi_i^\Omega] q_i \\
& + \Phi_k^{FT} [-\widetilde{(\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M}) \Phi_j^V - (\widetilde{\mathbb{R}\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{S}\Phi_i^M}) \Phi_j^\Omega] q_i q_j \\
& + \Phi_k^{MT} [\mathbb{S}^T \Phi_i^F + \mathbb{T}\Phi_i^M] \dot{q}_i + \Phi_k^{MT} [-\Phi_i^{\Omega'} - \tilde{k}\Phi_i^\Omega] q_i + \\
& \quad \Phi_k^{MT} [-\widetilde{(\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M}) \Phi_j^\Omega] q_i q_j \end{aligned} \right\} dx \\
& - \Phi_k^{FT}(0) [\Phi_k^V(0)] q_i + \Phi_k^{FT}(0) V^0 - \Phi_k^{MT}(0) [\Phi_k^\Omega(0)] q_i + \Phi_k^{MT}(0) \Omega^0 \\
& + \Phi_k^{VT}(L) [\Phi_k^F(L)] q_i - \Phi_k^{VT}(L) F^L + \Phi_k^{\Omega T}(L) [\Phi_k^M(L)] q_i - \Phi_k^{\Omega T}(L) M^L
\end{aligned} \tag{4.18}$$

En utilisant la notation d'Einstein, cette équation (4.18) peut être réorganisée sous une forme abrégée :

$$\mathcal{A}_{ki}\dot{q} + \mathcal{B}_{ki}q + \mathcal{C}_{kij}q \cdot q + \mathcal{D}_k + f_k + m_k = 0 \quad (4.19)$$

où, q est le vecteur des inconnues décrit dans (4.17) et les différents tenseurs sont définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ki} &= \int_0^L \left\{ \begin{aligned} &\Phi_k^{VT} [\mathbb{G}\Phi_i^V + \mathbb{K}\Phi_i^\Omega] + \Phi_k^{\Omega T} [\mathbb{K}^T\Phi_i^V + \mathbb{I}\Phi_i^\Omega] \\ &+ \Phi_k^{FT} [\mathbb{R}\Phi_i^F + \mathbb{S}\Phi_i^M] + \Phi_k^{MT} [\mathbb{S}^T\Phi_i^F + \mathbb{T}\Phi_i^M] \end{aligned} \right\} dx \\ \mathcal{B}_{ki} &= \int_0^L \left\{ \begin{aligned} &\Phi_k^{VT} [-\Phi_i^{F'} - \tilde{k}\Phi_i^F] + \Phi_k^{\Omega T} [-\Phi_i^{M'} - \tilde{k}\Phi_i^M - \tilde{e}_1\Phi_i^F] \\ &+ \Phi_k^{FT} [-\Phi_i^{V'} - \tilde{k}\Phi_i^V - \tilde{e}_1\Phi_i^\Omega] + \Phi_k^{MT} [-\Phi_i^{\Omega'} - \tilde{k}\Phi_i^\Omega] \end{aligned} \right\} dx \\ &\quad - \Phi_k^{FT}(0) [\Phi_k^V(0)] - \Phi_k^{MT}(0) [\Phi_k^\Omega(0)] \\ &\quad + \Phi_k^{VT}(L) [\Phi_k^F(L)] + \Phi_k^{\Omega T}(L) [\Phi_k^M(L)] \\ \mathcal{C}_{kij} &= \int_0^L \left\{ \begin{aligned} &\Phi_k^{VT} [\tilde{\Phi}_i^\Omega (\mathbb{G}\Phi_j^V + \mathbb{K}\Phi_j^\Omega) - (\widetilde{\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M})\Phi_j^F] \\ &+ \Phi_k^{\Omega T} [\tilde{\Phi}_i^\Omega (\mathbb{K}^T\Phi_j^V + \mathbb{I}\Phi_j^\Omega) + \tilde{\Phi}_i^V (\mathbb{G}^T\Phi_j^V + \mathbb{K}\Phi_j^\Omega) - (\widetilde{\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M})\Phi_j^M \\ &\quad - (\widetilde{\mathbb{R}\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{S}\Phi_i^M})\Phi_j^F] \\ &+ \Phi_k^{FT} [-\widetilde{(\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M})\Phi_j^V - (\widetilde{\mathbb{R}\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{S}\Phi_i^M})\Phi_j^\Omega] \\ &+ \Phi_k^{MT} [-\widetilde{(\mathbb{S}^T\Phi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Phi_i^M})\Phi_j^\Omega] \end{aligned} \right\} dx \\ \mathcal{D}_k &= \Phi_k^{FT}(0)V^0 + \Phi_k^{MT}(0)\Omega^0 - \Phi_k^{VT}(L)F^L - \Phi_k^{\Omega T}(L)M^L \\ f_k &= \int_0^L \left\{ -\Phi_k^{VT} f \right\} dx \\ m_k &= \int_0^L \left\{ -\Phi_k^{\Omega T} m \right\} dx \end{aligned} \quad (4.20)$$

Fonctions de pondération

Il faut maintenant définir les fonctions de pondération/comparaison pour pouvoir traiter numériquement la fonctionnelle (4.19). Ces fonctions de pondération doivent

4.1. Discrétisation spatiale et temporelle

répondre aux points suivants : orthogonalité, satisfaction des conditions aux limites et la possibilité de fournir une solution statique. Parmi les solutions qui peuvent être adoptées, les polynômes de Legendre décalés constituent une très bonne opportunité du fait de leur formule générique simple et par conséquent leurs simplicité d'intégration. Ils sont orthogonaux sur l'intervalle normalisé défini par :

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad (4.21)$$

Dans ce travail, ces fonctions de pondération/comparaison sont définies par :

$$\begin{aligned} \Phi_i^F &= \Psi^F P_i(\bar{x}), & \Psi^F &= [I \ 0 \ 0 \ 0] \\ \Phi_i^M &= \Psi^M P_i(\bar{x}), & \Psi^M &= [0 \ I \ 0 \ 0] \\ \Phi_i^V &= \Psi^V P_i(\bar{x}), & \Psi^V &= [0 \ 0 \ I \ 0] \\ \Phi_i^\Omega &= \Psi^\Omega P_i(\bar{x}), & \Psi^\Omega &= [0 \ 0 \ 0 \ I] \end{aligned} \quad (4.22)$$

où, P_i sont les polynômes de Legendre définis par les formules récursives suivantes [3] :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = 1 \\ P_2 = 2\bar{x} - 1 \\ P_k = \frac{(2(k-2) + 1)(2\bar{x} - 1)P_{k-1} - (k-2)P_{k-2}}{k-1} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

L'orthogonalité des polynômes de Legendres décalés est définie par :

$$\int_0^1 P_i(\bar{x}) P_j(\bar{x}) dx = \frac{1}{2j+1} \delta_{ij} \quad (4.24)$$

Les polynômes orthogonaux de Tchebychev constituent une autre alternative, mais ceux de Legendre adoptés pour ce travail sont plus simples à manipuler.

4.1.1.c Poutres à section uniforme avec courbure et chargement constant

Les poutres considérées dans ce travail ont des géométries (sections, courbures) constantes le long de leur ligne moyenne. Les chargements extérieurs sont également considérés constants. Pour ce cas spécifique, les tenseurs décrits dans (4.20) sont sim-

plifiés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ki} = & \mathcal{I}_{ki}^d \left\{ \Psi_k^{VT} [\mathbb{G}\Psi_i^V + \mathbb{K}\Psi_i^\Omega] + \Psi_k^{\Omega T} [\mathbb{K}^T\Psi_i^V + \mathbb{I}\Psi_i^\Omega] \right. \\ & \left. + \Psi_k^{FT} [\mathbb{R}\Psi_i^F + \mathbb{S}\Psi_i^M] + \Psi_k^{MT} [\mathbb{S}^T\Psi_i^F + \mathbb{T}\Psi_i^M] \right\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ki} = & \mathcal{I}_{ki}^{dd} \left\{ -\Psi_k^{VT}\Psi_i^F - \Psi_k^{\Omega T}\Psi_i^M - \Psi_k^{FT}\Psi_i^V - \Psi_k^{MT}\Psi_i^\Omega \right\} \\ & + \mathcal{I}_{ki}^d \left\{ -\Psi_k^{VT}\tilde{k}\Psi_i^F - \Psi_k^{\Omega T}(\tilde{k}\Psi_i^M + \tilde{e}_1\Psi_i^F) - \Psi_k^{FT}(\tilde{k}\Psi_i^V + \tilde{e}_1\Psi_i^\Omega) - \Psi_k^{MT}\tilde{k}\Psi_i^\Omega \right\} \\ & + \mathcal{I}_{ki}^{d0} \left[-\Psi_k^{FT}\Psi_i^V - \Psi_k^{MT}\Psi_i^\Omega \right] \\ & + \mathcal{I}_{ki}^{dL} \left[\Psi_k^{VT}\Psi_i^F + \Psi_k^{\Omega T}\Psi_i^M \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{kij} = & \mathcal{I}_{kij}^t \left\{ \Psi_k^{VT} \left[\tilde{\Psi}_i^\Omega (\mathbb{G}\Psi_j^V + \mathbb{K}\Psi_j^\Omega) - (\widetilde{\mathbb{S}^T\Psi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Psi_i^M})\Psi_j^F \right] \right. \\ & + \Psi_k^{\Omega T} \left[\tilde{\Psi}_i^\Omega (\mathbb{K}^T\Psi_j^V + \mathbb{I}\Psi_j^\Omega) + \tilde{\Psi}_i^V (\mathbb{G}^T\Psi_j^V + \mathbb{K}\Psi_j^\Omega) - (\widetilde{\mathbb{S}^T\Psi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Psi_i^M})\Psi_j^M \right. \\ & \quad \left. - (\widetilde{\mathbb{R}\Psi_i^F} + \widetilde{\mathbb{S}\Psi_i^M})\Psi_j^F \right] \\ & + \Psi_k^{FT} \left[-(\widetilde{\mathbb{S}^T\Psi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Psi_i^M})\Psi_j^V - (\widetilde{\mathbb{R}\Psi_i^F} + \widetilde{\mathbb{S}\Psi_i^M})\Psi_j^\Omega \right] \\ & \left. + \Psi_k^{MT} \left[-(\widetilde{\mathbb{S}^T\Psi_i^F} + \widetilde{\mathbb{T}\Psi_i^M})\Psi_j^\Omega \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{I}_k^0 \left[\Psi_k^{FT}V^0 + \Psi_k^{MT}\Omega^0 \right] + \mathcal{I}_k^L \left[-\Psi_k^{VT}F^L - \Psi_k^{\Omega T}M^L \right] \quad (4.28)$$

$$f_k = \mathcal{I}_k^s \left[\Psi_k^{VT}f \right] \quad (4.29)$$

$$m_k = \mathcal{I}_k^s \left[\Psi_k^{\Omega T}m \right] \quad (4.30)$$

où,

\mathcal{I}_k^s sont des intégrales d'une fonction simple.

\mathcal{I}_{ki}^d et \mathcal{I}_{ki}^{dd} sont des intégrales d'un produit de deux fonctions.

\mathcal{I}_{kij}^t des intégrales d'un produit de trois fonctions.

\mathcal{I}_k^0 et \mathcal{I}_k^L représentent les valeurs de $P_k(x)$ en $x = 0$ et $x = L$

\mathcal{I}_{ki}^{d0} et \mathcal{I}_{ki}^{dL} représentent les valeurs du produit $P_k(x)P_i(x)$ en $x = 0$ et $x = L$

4.1. Discrétisation spatiale et temporelle

Ces constantes sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k^s &= \int_0^L P_k(x) dx &= L \int_0^1 P_k(\bar{x}) d\bar{x} \\
\mathcal{I}_k^d &= \int_0^L P_k(x) P_i(x) dx &= L \int_0^1 P_k(\bar{x}) P_i(\bar{x}) d\bar{x} \\
\mathcal{I}_{ki}^{dd} &= \int_0^L P_k(x) P_i'(x) dx &= \int_0^1 P_k(\bar{x}) P_i'(\bar{x}) d\bar{x} \\
\mathcal{I}_{kij}^t &= \int_0^L P_k(x) P_i(x) P_j(x) dx &= L \int_0^1 P_k(\bar{x}) P_i(\bar{x}) P_j(\bar{x}) d\bar{x} \\
\mathcal{I}_k^0 &= P_k(0), & \mathcal{I}_k^L &= P_k(L) \\
\mathcal{I}_{ki}^{d0} &= P_k(0) P_i(0), & \mathcal{I}_{ki}^{dL} &= P_k(L) P_i(L)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

La détermination des coefficients (4.31) permet de calculer des tenseurs coefficients exprimés dans les équations (4.25 - 4.30). Pour une courbure initiale uniforme, les tenseurs \mathcal{A}_{ki} et \mathcal{C}_{kij} sont uniquement fonctions des matrices de rigidité et de masse de la section transversale. Le tenseur \mathcal{B}_{ki} est indépendant de ces matrices. L'effet des conditions aux limites se manifeste seulement dans le vecteur \mathcal{D}_k . Par conséquent la résolution de la fonctionnelle (4.19) repose principalement sur la détermination des matrices de rigidité et de masse.

4.1.2 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique est une technique couramment utilisée dans la littérature pour l'analyse des systèmes vibrants dans le domaine fréquentiel [17, 109, 110, 150]. L'excitation considérée est une force concentrée, harmonique et appliquée au bout libre de la poutre exprimée sous la forme :

$$F^L(t) = F_0 \cos \omega t \tag{4.32}$$

En conséquence, la réponse est supposée périodique et peut être discrétisée en série de Fourier tronquée sous la forme :

$$q(t) = \sum_{j=0}^{H-1} (q_j^c \cos j\omega t + q_j^s \sin j\omega t) \tag{4.33}$$

où, H est le nombre d'harmoniques, q_{cj} et q_{sj} sont les nouvelles inconnues à déterminer et ω est la pulsation d'excitation du système. Cette expression (4.33) est reportée dans l'équation (4.19) et on équilibre les coefficients des cosinus et des sinus. Suite à cet équilibrage, un nouveau vecteur inconnues (\bar{q}) est défini :

$$\bar{q} = [q_0^{cT} \quad q_1^{cT} \quad q_1^{sT} \cdots q_j^{cT} \quad q_j^{sT} \cdots q_{H-1}^{cT} \quad q_{H-1}^{sT}]^T \quad (4.34)$$

L'équation d'équilibre (4.19) est réécrite dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$R(\bar{q}, \omega) = \omega \bar{\mathcal{A}}\bar{q} + \bar{\mathcal{B}}\bar{q} + \bar{\mathcal{C}}\bar{q} \cdot \bar{q} + \bar{\mathcal{D}} = 0 \quad (4.35)$$

où, les matrices $\bar{\mathcal{A}}$, $\bar{\mathcal{B}}$, $\bar{\mathcal{C}}$ et $\bar{\mathcal{D}}$ sont dérivées à partir des matrices \mathcal{A}_{ki} , \mathcal{B}_{ki} , \mathcal{C}_{kij} et \mathcal{D}_k .

Par exemple pour trois harmoniques, i.e. $H = 3$, le vecteur de déplacement généralisé $q(t)$ est donné par :

$$q(t) = q_0^c + q_1^c \cos \omega t + q_1^s \sin \omega t + q_2^c \cos 2\omega t + q_2^s \sin 2\omega t \quad (4.36)$$

Ce vecteur peut être écrit sous forme matricielle définissant le nouveau vecteur inconnues \bar{q} :

$$\bar{q} = [q_0^{cT} \quad q_1^{cT} \quad q_1^{sT} \quad q_2^{cT} \quad q_2^{sT}]^T \quad (4.37)$$

Le produit $\mathcal{B}_{ki}q$ est réécrit sous forme matricielle :

$$\mathcal{B}_{ki}q \equiv \bar{\mathcal{B}}\bar{q} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{ki} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_{ki} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{B}_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{B}_{ki} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_0^c \\ q_1^c \\ q_1^s \\ q_2^c \\ q_2^s \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

La matrice $\bar{\mathcal{A}}$ est obtenue après la dérivation de l'équation (4.36) par rapport au temps. Le premier terme est constant et a une dérivée nulle. Par conséquent, le produit $\mathcal{A}_{ki}\dot{q}$ aura une autre disposition :

4.1. Discrétisation spatiale et temporelle

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}_{ki} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathcal{A}_{ki} \\ 0 & 0 & 0 & -2\mathcal{A}_{ki} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Comme le produit $\mathcal{C}_{kij}q \cdot q$ est quadratique en q , il faut déterminer en premier lieu la représentation matricielle de $\bar{\mathcal{C}}\bar{q}$, qui peut être obtenue par un équilibrage harmonique du produit de deux vecteurs ayant le même ordre d'harmoniques :

$$\bar{\mathcal{C}}\bar{q} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{kij}(q_0^c) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^c}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^s}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_2^c}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_2^s}{2}) \\ \mathcal{C}_{kij}(q_1^c) & \mathcal{C}_{kij}(q_0^c + \frac{q_2^c}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_2^s}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^c}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^s}{2}) \\ \mathcal{C}_{kij}(q_1^s) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_2^s}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(q_0^c - \frac{q_2^c}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(-\frac{q_1^s}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^c}{2}) \\ \mathcal{C}_{kij}(q_2^c) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^c}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(-\frac{q_1^s}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(q_0^c) & 0 \\ \mathcal{C}_{kij}(q_2^s) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^s}{2}) & \mathcal{C}_{kij}(\frac{q_1^c}{2}) & 0 & \mathcal{C}_{kij}(q_0^c) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

La première composante du vecteur $\bar{\mathcal{D}}$ concerne la partie constante de \mathcal{D}_k donnée par les conditions aux limites. La deuxième partie est liée à l'amplitude F_0 de l'harmonique d'excitation $F^L(t) = F_0 \cos \omega t$, et le reste des composantes sont nulles.

$$\bar{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} D_k \\ F_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Dans le cas des vibrations libres, l'amplitude de la force d'excitation est posée nulle, e.i. $F_0 = 0$. La poutre peut également être sollicitée avec une force distribuée ou un moment distribué. Au lieu de F_0 dans l'équation (4.41) on met f_k ou m_k obtenus à partir de (4.29) et (4.30).

La fonctionnelle finale (4.35) est une équation algébrique avec \bar{q} comme inconnue et la pulsation ω comme paramètre. Cette fonctionnelle peut être traitée maintenant avec les méthodes de continuation définies précédemment dans le chapitre 2. Dans ce travail nous avons choisi d'utiliser deux techniques : la méthode pseudo-longueur d'arc (PLA) et la méthode

asymptotique numérique (MAN) avec ses deux versions en utilisant les développements en série et les fractions de Padé. Elles seront détaillées dans les chapitres 5 et 6 dédiés aux vibrations libres et forcées non-linéaires tout en montrant les spécificités de chaque cas traité. Dans le chapitre 6, une étude comparative est menée entre ces deux méthodes de continuation en terme de précision et temps de calcul.

Le resultat de ces calculs est représenté par la variation du vecteur de déplacement généralisé \bar{q} en fonction de la pulsation ω . Cependant, pour étudier les poutres, on fait généralement référence aux déplacements du point du milieu pour les poutres avec double encastrement ou avec double appuis simples, et aux déplacements du bout de la poutre pour les poutres encastrees-libres. La section suivante montre la méthode de calcul des déplacements et des rotations des sections transversales à partir du vecteur de déplacement généralisé.

4.2 Calcul des déplacements

Nous avons déjà mentionner dans le chapitre 3, que les équations d'équilibre sont intrinsèques, i.e. indépendantes des variables de déplacements et de rotation. Cependant, une fois calculées les déformations généralisées, les déplacements et les rotations peuvent être déterminés à partir des équations cinématiques (3.122). Les expressions les plus simples de ces équations sont obtenues dans le repère **(b)** comme suit :

$$\begin{aligned} u' + \tilde{k}u + e_1 - C^T(e_1 + \gamma) &= 0 \\ C' + (\tilde{\kappa} + \tilde{k})C - C\tilde{k} &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

La forme de ces équations nécessite une discrétisation spatiale suivant la coordonnée axiale x . Par conséquent, les déplacements et les rotations sont obtenus, dans un repère inertiel **(a)** par :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= [\bar{C}_n^{aB T}(\gamma_n + e_1) - e_1] dl + u_n \\ C_{n+1}^{aB} &= \left(\frac{\Delta}{dl} + \frac{\tilde{\kappa}_n + \tilde{k}_n}{2} \right)^{-1} \left(\frac{\Delta}{dl} - \frac{\tilde{\kappa}_n + \tilde{k}_n}{2} \right) C_n^{aB} \end{aligned} \quad (4.43)$$

avec, $\bar{C}_n^{aB} = (C_{n+1}^{aB} + C_n^{aB})/2$, $\bar{\kappa}_n = (\kappa_{n+1} + \kappa_n)/2$, Δ matrice identité (3×3) et dl le pas de discrétisation suivant x .

La formule discrétisée des équations (3.20, 3.96) permettant d'avoir le vecteur position de la ligne de référence à l'état déformé calculé dans le référentiel **a** est exprimée par :

$$R_{n+1} + u_{n+1} = R_n + u_n + \bar{C}_n^{aB}(\bar{\gamma}_n + e_1)dl \quad (4.44)$$

4.3. Analyse de la section transversale

Ces formules peuvent être utilisées à l'état initial non déformé, en éliminant les déformations, permettant de décrire la géométrie initiale en présence d'une courbure initiale :

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{ab} &= \left(\frac{\Delta}{dl} + \frac{\tilde{k}_n}{2} \right)^{-1} \left(\frac{\Delta}{dl} - \frac{\tilde{k}_n}{2} \right) C_n^{ab} \\ r_{n+1} &= r_n + \bar{C}_n^{ab} e_1 dl \end{aligned} \quad (4.45)$$

Les orientations de la section transversale sont obtenues à partir de la matrice des cosinus directeurs.

4.3 Analyse de la section transversale

La formulation intrinsèque décrite dans le chapitre 3 est basée principalement sur les équations constitutives (3.119, 3.120) et par conséquent sur les matrices de rigidité et de masse, appelées les constantes élastiques de la section transversale. Dans le cas des poutres isotropes avec des sections transversales prismatiques, ces constantes élastiques peuvent être déterminées analytiquement. Dans le cas où la ligne moyenne passe par le centre de gravité des sections transversales le long de la poutre, les matrices de rigidité et de masse sont diagonales. L'expression analytique de la matrice de masse est déduite de la matrice exprimée dans (3.121).

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_2 + i_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i_3 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Cependant, la matrice de rigidité est exprimée par :

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 GA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 GA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EI_{33} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

où, A , I_{22} , I_{33} et J sont les caractéristiques géométriques et inertielles de la section transversale. E et G sont les caractéristiques du matériau. k_1 et k_2 sont les coefficients de cisaillement, pour une section rectangulaire on prend la valeur $5/6$.

Dans le cas général où les sections transversales peuvent avoir une géométrie arbitraire avec des matériaux non homogènes et anisotropes, on fait recours à la solution numérique, i.e. la méthode des éléments finis, pour résoudre ce genre de problème. Ce choix naturel est adopté dans les deux codes commerciaux d'analyse des sections transversales des poutres VABS et BECAS.

Le premier code VABS, Variational Asymptotic Beam Sectional Analysis, développé au niveau de Georgia institute of technology, Georgia-Tech, par Hodges et ses collaborateurs, [48, 49, 84, 141, 184, 185]. Il est implémenté en Fortran. Le deuxième code BECAS, BEam Cross section Analysis Software, développé au niveau de DTU Mechanical engineering du Danemark par Blasques et ses collaborateurs [35, 36]. Il est implémenté en MATLAB. Ces deux codes sont en développement jusqu'à présent et ils ont été de plusieurs travaux de validations avec les méthodes analytiques et les codes commerciaux de conception assistée par ordinateur (CAO) 3D tels que ANSYS, NASTRAN et ABAQUS. [36, 184, 185].

Dans le cas général, la section transversale est discrétisée en éléments finis. Chaque élément doit être homogène dans son domaine et par conséquent il ne doit pas être positionné dans l'intersection des couches, tout en regroupant deux couches en même temps. L'élément fini isoparamétrique à huit nœuds est l'élément le plus précis, du fait de l'interpolation quadratique utilisée dans chaque côté permettant de discrétiser efficacement les frontières courbées. Pour discrétiser les couches à petites épaisseurs l'élément isoparamétrique à six nœuds est le plus efficace, tout en disposant sur le côté des deux nœuds dans le sens de l'épaisseur. Ceci fait l'objet de la première étape des codes de calcul cités auparavant, dite maillage de la section transversale. Un maillage d'une section transversale simple peut être fait manuellement mais une section transversale complexe nécessite l'intervention d'un générateur de maillage tels que ceux équipant les codes CAO.

Dans ce qui suit, nous donnons une brève description sur les principales notions et les étapes de calcul faites dans un code d'analyse des sections transversales des poutres, tel que le code VABS [48, 49], qui est basé sur une discrétisation par les éléments finis. Les éléments isoparamétriques sont généralement les éléments les plus convenables pour une géométrie arbitraire [22, 91].

Pour ces éléments finis isoparamétriques et parallèlement aux coordonnées curvilignes (éventuellement cartésiennes) x_2 et x_3 , il y aura des coordonnées naturelles liées à chaque élément ξ et η et dont leurs domaines de définition est $[-1, 1]$.

4.3. Analyse de la section transversale

Les coordonnées x_2 et x_3 sont définies à l'intérieur de chaque élément fini par :

$$\begin{cases} x_2 = \sum_{i=1}^{n_d} N_i x_{2i} \\ x_3 = \sum_{i=1}^{n_d} N_i x_{3i} \end{cases} \quad (4.48)$$

où, n_d est le nombre de nœuds par élément, N_i sont les fonctions de formes. Ces équations d'interpolation peut être réécrites sous forme matricielle :

$$\mathcal{X} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = N \mathcal{X}_i \quad (4.49)$$

où,

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & \cdots & N_{n_d} \\ N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & \cdots & N_{n_d} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

et,

$$\mathcal{X}_i^T = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots & x_{2n_d} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots & x_{3n_d} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

La figure (4.1) montre les systèmes de coordonnées isoparamétriques et globales utilisés, la numérotation des nœuds et la position des points d'intégration de Gauss pour un élément isoparamétrique à huit nœuds.

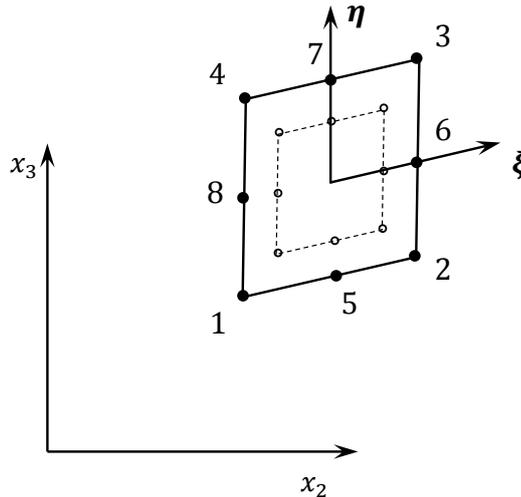


Figure 4.1 Systèmes de coordonnées global et isoparamétrique, position et numérotation des nœuds et position des points d'intégration de Gauss pour un élément isoparamétrique à 8 nœuds.

Les fonctions de forme utilisées dans la dérivation de l'élément isoparamétrique à 8 nœuds sont :

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_8) \\
 N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}(N_5 + N_6) \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_6 + N_7) \\
 N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}(N_7 + N_8) \\
 N_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \\
 N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
 N_7(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
 N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Les fonctions de formes utilisées dans la dérivation de l'élément à 6 nœuds peuvent être obtenues à partir de l'équation (4.52) en éliminant N_7 et N_8 . On peut utiliser la même technique dans la dérivation de l'élément à 4 nœuds

Les matrices de rigidité finales s'obtiennent à partir de l'assemblage des quantités exprimées dans (3.59), donnant une matrice de rigidité $\mathcal{S}_{4 \times 4}$, ou de l'assemblage des quantités (3.73), permettant de calculer les quantités (3.93) et donnant lieu à une matrice de rigidité $\mathcal{S}_{6 \times 6}$. Les composantes de la matrice de masse s'obtiennent en faisant un assemblage des quantités (3.109). L'assemblage de ces quantités se fait pour tous les éléments finis discrétisant le domaine, i.e., la section transversale. Chaque élément fini doit être spécifié par sa matrice des matériaux $\mathcal{D}_{6 \times 6}$, autrement dit la matrice relative à la loi de comportement, ainsi que par les angles d'orientation du stratifié et des fibres.

Dans le repère local de l'élément fini, i.e. sans prendre en compte les orientations du stratifié et des fibres, la matrice des matériaux notée \mathcal{D}_m est symétrique. Elle est obtenue à partir des relations (3.42, 3.43).

$$\mathcal{D}_m = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{11} & 0 & 0 & \mathcal{D}_{14} & 0 & \mathcal{D}_{16} \\ & \mathcal{D}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathcal{D}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathcal{D}_{44} & 0 & \mathcal{D}_{46} \\ \text{Symétrique} & & & & \mathcal{D}_{55} & 0 \\ & & & & & \mathcal{D}_{66} \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

4.3. Analyse de la section transversale

où,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{11} &= E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\lambda \\
 \mathcal{D}_{14} &= E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})/\lambda \\
 \mathcal{D}_{16} &= E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})/\lambda \\
 \mathcal{D}_{22} &= G_{12} \\
 \mathcal{D}_{33} &= G_{13} \\
 \mathcal{D}_{44} &= E_2(1 - \nu_{31}\nu_{13})/\lambda \\
 \mathcal{D}_{46} &= E_3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})/\lambda \\
 \mathcal{D}_{66} &= E_3(1 - \nu_{21}\nu_{12})/\lambda
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

avec, E_i sont les modules d'élasticité, G_{ij} sont les modules de cisaillement, ν_{ij} sont les coefficients de Poisson, et

$$\lambda = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{32}\nu_{23} - 2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32} \tag{4.55}$$

Afin de prendre en compte l'orientation du stratifié la matrice \mathcal{D}_m doit être multipliée par la matrice de passage T correspondante à l'orientation. La matrice des matériaux finale notée \mathcal{D} est exprimée par :

$$\mathcal{D} = T^T \mathcal{D}_m T \tag{4.56}$$

La figure 4.2 montre l'effet de l'orientation des fibres et la relation entre les deux repères. La matrice \mathcal{D}_m est définie dans le repère local du matériau, i.e. initial (y_1, y_2, y_3) , par contre la matrice \mathcal{D} est définie dans le repère global de la poutre avant déformation.

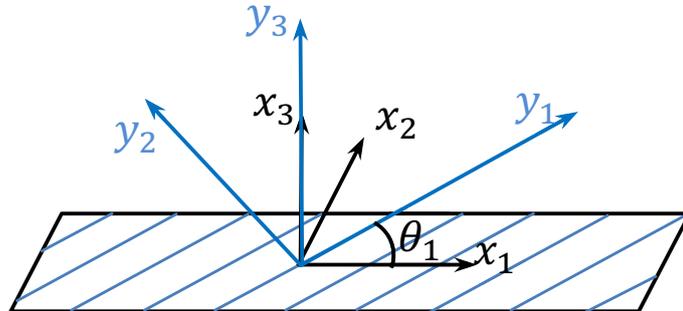


Figure 4.2 Relation entre le système de coordonnées global (x_1, x_2, x_3) et le système de coordonnées local du matériau (y_1, y_2, y_3)

La matrice des cosinus directeurs reliant ces deux repères est :

$$L = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

En utilisant l'écriture matricielle (3×3), la relation entre les tenseurs de déformations est exprimée par :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \text{Symétrique} & & \Gamma_{33} \end{bmatrix} = L^T \begin{bmatrix} \Gamma_{11_m} & \Gamma_{12_m} & \Gamma_{13_m} \\ & \Gamma_{22_m} & \Gamma_{23_m} \\ \text{Symétrique} & & \Gamma_{33_m} \end{bmatrix} L \quad (4.58)$$

En revenant à l'écriture du tenseur de déformations en vecteur colonne (3.42), on obtient une relation symilaire à (4.56) :

$$\Gamma = T^T \Gamma_m T \quad (4.59)$$

La matrice de passage T est obtenue en faisant la correspondance entre les termes de Γ et Γ_m ,

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 & 0 & \sin^2 \theta_1 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_1 \sin \theta_1 & \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin^2 \theta_1 & -2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 & 0 & \cos^2 \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Dans le cas de deux orientations successives, celle du stratifié et celle des fibres, on aura deux matrices de passage T_1 et T_2 . Ces matrices de passage peuvent être obtenues similairement que (4.60). La matrice des matériaux dans le repère global est exprimée par :

$$\mathcal{D} = T_2^T T_1^T \mathcal{D}_m T_1 T_2 \quad (4.61)$$

La plupart des termes à calculer et assembler dans les équations (3.59) et (3.73) sont fonctions de la matrice S des fonctions de formes, définie dans (3.57). Comme le vecteur de gauchissement a trois composantes, on peut le représenter matriciellement, pour un élément finis à 8

4.3. Analyse de la section transversale

noeuds, comme suit :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

et,

$$V = \left[V_{11} \quad V_{12} \quad V_{13} \quad V_{21} \quad V_{22} \quad V_{23} \quad \cdots \quad V_{81} \quad V_{82} \quad V_{83} \right]^T \quad (4.63)$$

Suite au changement de variables, les intégrales sur la surface des termes définis dans les équations (3.59) et (3.73) sont exprimées par :

$$\langle\langle(\cdot)\rangle\rangle = \int_A (\cdot) \sqrt{g} dx_2 dx_3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\cdot) \det J \sqrt{g} d\xi d\eta \quad (4.64)$$

où, $\det J$ est le déterminant de la jacobienne J défini par :

$$J = \mathcal{D}_{,\xi\eta} \mathcal{X}_i \quad (4.65)$$

la matrice \mathcal{X}_i est définie dans (4.51) et $\mathcal{D}_{,\xi\eta}$ est exprimé par :

$$\mathcal{D}_{,\xi\eta} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} & \cdots & N_{n_d,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} & \cdots & N_{n_d,\eta} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

avec, $N_{i,\xi} = \partial N_i / \partial \xi$ et $N_{i,\eta} = \partial N_i / \partial \eta$.

L'évaluation de ces intégrales (3.59, 3.73) se fait numériquement en utilisant les points d'intégration de Gauss.

Exemple 1 : Poutre isotrope avec section transversale carrée

Ce premier exemple montre la convergence des méthodes numériques (codes d'analyse des sections transversales) appliquées à une poutre isotrope avec une section carrée traitée dans [184] et présentée dans la figure 4.3. La section transversale a les dimensions 0.5 in. \times 0.5 in. subdivisée en 64 (8 \times 8) éléments finis quadrilatères à 8 noeuds. Les caractéristiques du matériaux sont : $E = 2.6 \times 10^7$ psi et $\nu = 0.3$. L'analyse de la section transversale donne la matrice de rigidité présentée dans le tableau 4.1. Les valeurs qui ne sont pas présentées sont nulles. Les présents résultats ont une erreur moyenne de 10^{-13} relativement aux résultats analytiques.

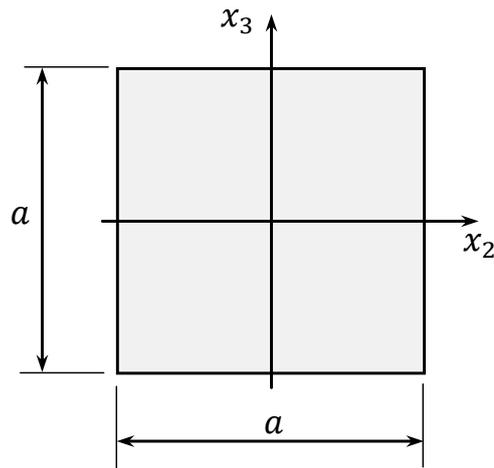


Figure 4.3 Poutre isotrope avec section carrée

Table 4.1

Rigidités d'une section transversale carrée avec matériau isotrope

| S | Analytique Eq. (4.47) | Présent | VABS [184] |
|----------|-----------------------|--------------------|--------------------|
| S_{11} | 6.5×10^6 | 6.5×10^6 | 6.5×10^6 |
| S_{22} | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 |
| S_{33} | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 |
| S_{44} | 8.79×10^5 | 8.79×10^5 | 8.79×10^5 |
| S_{55} | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 |
| S_{66} | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 |

Exemple 2 : Poutre isotrope avec section transversale carrée tordue

Cet exemple concerne la même poutre de l'exemple précédent, mais avec une courbure $k_1 = 0.05$, i.e. tordue. Avec une subdivision de 64 (8×8) éléments finis quadrilatères à 8 nœuds, l'analyse de la section transversale donne la matrice de rigidité présentée dans le tableau 4.2 en comparaison avec [184]. Les valeurs qui ne sont pas présentées sont nulles. Les présents résultats sont en parfaite cohérence avec ceux de [37] et [184].

4.3. Analyse de la section transversale

Table 4.2

Rigidités d'une section transversale carré avec matériau isotrope et courbure initiale $k_1 = 0.05$

| \mathcal{S} | Présent | [37] | [184] |
|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| S_{11} | 6.5×10^6 | 6.5×10^6 | 6.5×10^6 |
| S_{14} | 2.12×10^3 | 2.12×10^3 | 2.12×10^3 |
| S_{22} | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 |
| S_{24} | -1.36×10^3 | -1.36×10^3 | -1.36×10^3 |
| S_{33} | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 | 2.07×10^6 |
| S_{36} | -1.36×10^3 | -1.36×10^3 | -1.36×10^3 |
| S_{44} | 8.79×10^5 | 8.79×10^5 | 8.79×10^5 |
| S_{55} | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 |
| S_{66} | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 | 1.35×10^5 |

Exemple 3 : Poutre orthotrope avec section transversale carrée

Cet exemple concerne la même poutre carrée de l'exemple précédent, avec $a = 0.1 m$, mais cette fois-ci avec un matériau orthotrope. Les caractéristiques du matériaux sont les mêmes que celles utilisées dans [36] :

$$\begin{aligned} E_1 &= 480 \text{ GPa} \\ E_2 &= E_3 = 120 \text{ GPa} \\ G_{13} &= 50 \text{ GPa} \\ G_{12} &= G_{23} = 60 \text{ GPa} \\ \nu_{13} &= 0.26 \\ \nu_{12} &= \nu_{23} = 0.19 \end{aligned} \tag{4.67}$$

L'analyse de la section transversale donne la matrice de rigidité présentée dans le tableau 4.3. Le maillage est constitué de 64 (8×8) éléments finis quadrilatères à 8 nœuds. Les résultats montrent une bonne cohérence avec ceux de [37].

Table 4.3

Rigidités d'une section transversale carré avec matériau orthotrope

| \mathcal{S} | Présent | [37] |
|---------------|-----------------------|-----------------------|
| S_{11} | $0.480 \cdot 10^1$ | $0.480 \cdot 10^1$ |
| S_{22} | $5.039 \cdot 10^{-1}$ | $5.039 \cdot 10^{-1}$ |
| S_{33} | $4.201 \cdot 10^{-1}$ | $4.201 \cdot 10^{-1}$ |
| S_{44} | $7.737 \cdot 10^{-4}$ | $7.737 \cdot 10^{-4}$ |
| S_{55} | $4.001 \cdot 10^{-3}$ | $4.001 \cdot 10^{-3}$ |
| S_{66} | $4.001 \cdot 10^{-3}$ | $4.001 \cdot 10^{-3}$ |

Dans le reste du manuscrit, des poutres traitées dans la littérature, ont été sélectionnées pour étudier leurs comportements vibratoires non-linéaires libres et forcées. Pour chaque cas d'étude nous allons identifier leurs matrices de rigidité et de masse.

4.4 Analyse statique linéaire

Avant de passer à l'étude dynamique des poutres, il est important de vérifier la convergence de ce modèle en statique. Dans ce qui suit, nous allons étudier le comportement statique d'une poutre isotrope à section rectangulaire et d'une poutre-caisson en composite. Ces deux exemples ont été traités dans [74] du point de vue comportement dynamique dû à une accélération de la vitesse de rotation. En dynamique vibratoire des poutres rotatives, comme nous allons voir dans les chapitres suivants 5 et 6, les poutres sont sollicitées avec des forces axiales d'inertie et des forces/moments de flexion. Dans cette section, nous allons simuler statiquement cet état par un chargement composé d'une force axiale et un moment de flexion pure appliqués au bout libre d'une poutre encastree.

Cas 1 : Poutre isotrope à section rectangulaire

La figure 4.4 montre une poutre prismatique isotrope à section rectangulaire et encastree à son origine. Les caractéristiques géométriques et du matériaux sont :

4.4. Analyse statique linéaire

$$\begin{aligned}
 L &= 1 \text{ m} \\
 b &= 0.2 \text{ m}, \quad h = 0.1 \text{ m} \\
 A &= 0.02 \text{ m}^2 \\
 E &= 1.792 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \\
 \nu &= 0.3 \\
 \rho &= 1770 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

On applique un chargement au bout composé d'une force axiale F_1 et un moment de flexion pure M_2 avec les valeurs suivantes :

$$F_1 = 10 \text{ kN}, \quad M_2 = 1 \text{ kN.m} \tag{4.69}$$

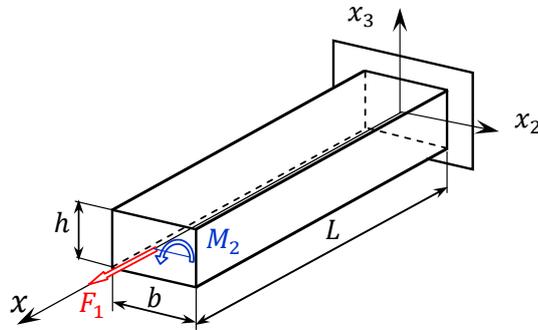


Figure 4.4 Poutre encastrée isotrope et uniforme - Géométrie et système de coordonnées.

Les solutions analytiques du vecteur de déplacement et de l'angle de rotation des sections transversales sont exprimées par :

$$\begin{aligned}
 u &= \left(\begin{matrix} \frac{F_1}{EA} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} - x \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M_2}{2EI_2} \end{matrix} \right) x \\
 \theta &= \begin{matrix} 0 \\ \frac{M_2}{EI_2} \\ 0 \end{matrix} x
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

Pour la procédure numérique, on calcule tout d'abord les matrices de rigidité et de masse à partir des équations (4.46, 4.47) ou le code d'éléments finis dédié à l'analyse de la section transversale :

$$S = \text{Diag} \left[358.00 \quad 113.46 \quad 113.46 \quad 0.3149 \quad 0.2983 \quad 1.1933 \right] \times 10^7 \tag{4.71}$$

$$\mathcal{M} = \text{Diag} \left[\begin{array}{cccccc} 35.4 & 35.4 & 35.4 & 0.1475 & 0.0295 & 0.1180 \end{array} \right] \quad (4.72)$$

La figure 4.5 montre les déplacements et les rotations des sections calculés par la méthode analytique et par le modèle actuel. Numériquement, il s'agit de résoudre le système (4.19) à un point fixe par la méthode Newton-Raphson. Les résultats montrent une bonne cohérence avec une erreur relative maximale de l'ordre de 10^{-5} . La méthode de calcul des déplacements à partir du vecteur de coordonnées généralisées est expliquée dans l'annexe C.

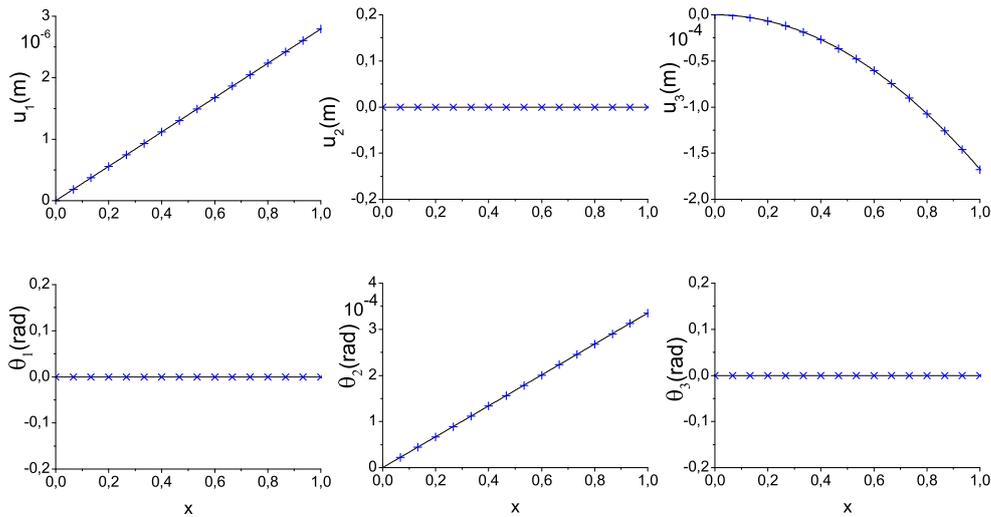


Figure 4.5 Déplacements et rotations le long de la poutre isotrope uniforme. Solution analytique en ligne continue, solution numérique en symbole (+) ou (x) .

Cas 2 : Poutre-caisson en composite

Comme le modèle converge bien statiquement pour une poutre isotrope, il est utile, à présent, de traiter une poutre en composite. La figure 4.6 montre un exemple de poutre-caisson en composite carrée. Ce modèle est traité dans [50, 74].

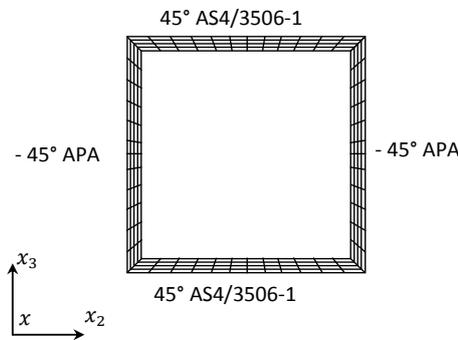


Figure 4.6 Poutre-caisson en composite, section transversale [74]

4.4. Analyse statique linéaire

Les caractéristiques géométriques sont définies par : une longueur de 10 *cm* et une distance de 2.5 *cm* entre les lignes médianes de chacun des deux côtés opposés, donnant une surface utile de $5.08 \times 10^{-5} m^2$.

Les cotés supérieur et inférieur sont formés de 4 couches du matériau AS4/3506-1 avec une orientation de 45° avec l'axe de la poutre et les cotés latéraux sont composés de 4 couches de APA en -45° . l'épaisseur de chaque couche est de 0.127 *mm*. La densité moyenne considérée est $\rho = 1770 kg/m^3$.

| AS4/3506-1 | APA | |
|--|--|--------|
| $E_1 = 142 \text{ GPa}$ | $E_1 = 42.2 \text{ GPa}$ | |
| $E_2 = 9.8 \text{ GPa}, E_3 = 0.8E_2$ | $E_2 = 17.5 \text{ GPa}, E_3 = 0.8E_2$ | (4.73) |
| $G_{12} = 6.0 \text{ GPa}$ | $G_{12} = 5.5 \text{ GPa}$ | |
| $G_{23} = 4.8 \text{ GPa}$ | $G_{23} = 4.4 \text{ GPa}$ | |
| $\nu_{12} = 0.3, \nu_{13} = \nu_{12}, \nu_{23} = 0.42$ | $\nu_{12} = 0.354, \nu_{13} = \nu_{12}, \nu_{23} = 0.42$ | |

Suite au (4.8), les matrices \mathbb{U} , \mathbb{V} et \mathbb{W} de taille (3×3) formant la matrice de rigidité \mathcal{S} calculée par la code de calcul VABS [74], sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{U} &= \begin{bmatrix} 7.977 \times 10^5 & -0.9873 & -0.8575 \\ -0.9873 & 2.5482 \times 10^5 & 4.6845 \times 10^{-3} \\ -0.8575 & 4.6845 \times 10^{-3} & 2.296 \times 10^5 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{V} &= \begin{bmatrix} -1.5056 \times 10^3 & -7.3017 \times 10^{-3} & 1.348 \times 10^{-3} \\ -3.897 \times 10^{-3} & 1.962 \times 10^3 & 5.9626 \times 10^{-5} \\ 1.0716 \times 10^{-2} & 9.912 \times 10^{-5} & -2.8055 \times 10^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbb{W} &= \begin{bmatrix} 86.95 & 2.1193 \times 10^{-4} & 1.6532 \times 10^{-4} \\ 2.1193 \times 10^{-4} & 90.397 & 3.6091 \times 10^{-6} \\ 1.6532 \times 10^{-4} & 3.6091 \times 10^{-6} & 79.4434 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Les matrices \mathbb{G} , \mathbb{K} et \mathbb{I} , formant la matrice de masse \mathcal{M} , sont exprimées par :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G} &= \rho A \Delta_{3 \times 3} \\
 \mathbb{K} &= 0_{3 \times 3} \\
 \mathbb{I} &= \begin{bmatrix} 9.9555 & 0 & 0 \\ 0 & 4.9777 & 0 \\ 0 & 0 & 4.9777 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \times 1770
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Similairement à la poutre isotrope du premier cas, on applique le chargement suivant,

$$F_1 = 100 \text{ N}, \quad M_2 = 10 \text{ N.m} \quad (4.76)$$

Suite à ce chargement similaire à celui appliqué sur la poutre isotrope du premier cas, les déplacements et les rotations de la poutre-caisson en composite sont présentés sur la figure 4.7. On peut remarquer l'effet du couplage dans les structure en composite ; le déplacement u_2 et les rotations θ_1 et θ_3 ne sont pas nuls contrairement au cas de la poutre isotrope.

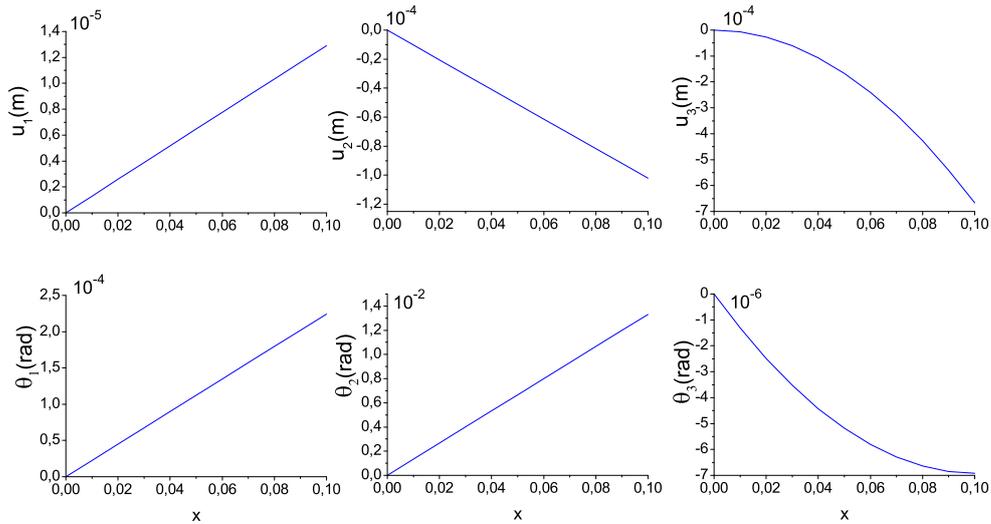


Figure 4.7 Distribution des déplacements et des rotations le long de la poutre-caisson en composite

Les angles θ_1 , θ_2 et θ_3 sont obtenues à partir de la matrice des cosinus directeurs C et représentent les orientations de la section transversale. Elles sont différentes des pentes de la ligne de référence définies par la dérivée du déplacement (u'). La matrice C et u' sont liés par la relation (3.122.a).

4.5 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons décrit les outils et éléments requis pour la résolution de notre modèle de poutre, tels que les techniques de discrétisation, l'analyse de la section transversale et le calcul des déplacements. Une analyse statique linéaire de deux exemples de poutre a été menée permettant de valider le modèle statiquement. La fonctionnelle algébrique obtenue permettra de traiter les problèmes de vibrations libres ainsi que les vibrations forcées non-linéaires. Les méthodes de continuation, précédemment introduites, seront alors utilisées. Ces études sont l'objet des chapitres 5 et 6.

Chapitre 5

Vibrations libres non-linéaires des poutres rotatives

Sommaire

| | | |
|------------|---|------------|
| 5.1 | Analyse modale linéaire | 116 |
| 5.1.1 | Coefficients adimensionnels | 117 |
| 5.1.2 | Résultats numériques | 117 |
| 5.2 | Vibrations libres non-linéaires | 126 |
| 5.2.1 | Algorithme de branchement en un point de bifurcation Hopf via la MAN | 128 |
| 5.2.2 | Remarques | 134 |
| 5.2.3 | Résultats numériques | 135 |
| 5.3 | Bilan du chapitre | 145 |

Introduction

L'étude des vibrations libres est d'une importance capitale dans une étude dynamique des poutres flexibles et rotatives. Elle permet à travers une analyse modale linéaire et non-linéaire de déterminer le spectre des premières fréquences à grandes énergies, d'inspecter l'existence des résonances et des échanges d'énergies et de donner une idée sur le comportement de ces structures en vibrations forcées. Dans la première section de ce chapitre, nous allons procéder à une analyse modale linéaire du modèle dynamique présenté dans les chapitres 3 et 4. Cette analyse sera concrétisée par une étude comparative avec les résultats issus de la littérature ou les paramètres mis en jeu seront adimensionnels. La deuxième section sera dédiée à l'analyse des vibrations libre non-linéaires. Une méthode numérique sera présentée, elle permet de calculer les branches solutions à partir des points de bifurcation à double singularité dite

de Hopf (co-rang 2). Les applications montrées dans ce chapitre concerneront les poutres prismatiques isotropes et des poutres en composite, où l'effet de la vitesse de rotations sur les courbes de réponses sera examiné. Les poutres sélectionnées sont traitées et étudiées dans la littératures sous d'autres aspects et avec d'autres techniques de calcul.

Les résultats présentées dans ce chapitres ont fait l'objet des travaux suivants : [25, 26, 28, 29].

5.1 Analyse modale linéaire

Les fréquences naturelles sont obtenues à partir d'une linéarisation de l'une des équations d'équilibre (4.19) ou (4.35) autour de la solution stationnaire ($\dot{q} = 0, q = q_0$) ou ($\dot{\bar{q}} = 0, \bar{q} = \bar{q}_0$), tout en éliminant les excitations externes, i.e., sans force concentrée et sans force ou moment distribués ($F_0 = 0, f_k = 0, m_k = 0$). L'utilisation de l'équation (4.35) fait ressortir les superharmoniques sous l'effet de l'équilibrage harmonique. Dans le cas de l'équation (4.19), la fonction à linéariser est :

$$\mathcal{G}(\dot{q}, q) = \mathcal{A}_{ki}\dot{q} + \mathcal{B}_{ki}q + \mathcal{C}_{kij}q \cdot q + \mathcal{D}_k = 0 \quad (5.1)$$

Le développement de Taylor au voisinage de ($\dot{q} = 0, q = q_0$) et limité au premier ordre donne :

$$\mathcal{G}(\dot{q}, q) = \mathcal{G}(\dot{q}_0, q_0) + \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\dot{q}_0, q_0)} \Delta \dot{q} + \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} \right|_{(\dot{q}_0, q_0)} \Delta q = 0 \quad (5.2)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\dot{q}_0, q_0) &= 0 \\ \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{q}} \right|_{(\dot{q}_0, q_0)} &= \mathcal{A}_{ki} \\ \left. \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} \right|_{(\dot{q}_0, q_0)} &= \mathcal{B}_{ki} + (\mathcal{C}_{kij} + \mathcal{C}_{kji})q_0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le problème aux valeurs propres se résume en :

$$\hat{\mathcal{A}}_{ki}\Delta \dot{q} + \hat{\mathcal{B}}_{ki}\Delta q = 0 \quad (5.4)$$

$$\text{avec } \hat{\mathcal{A}}_{ki} = \mathcal{A}_{ki} \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{B}}_{ki} = \mathcal{B}_{ki} + (\mathcal{C}_{kij} + \mathcal{C}_{kji})q_0$$

Ensuite nous insérons une solution harmonique $\Delta q = X e^{\omega t}$ [135], où X est le vecteur propre, appelé le mode de vibration, et ω est la fréquence propre. L'équation algébrique correspondante à ce problème de valeurs propres est :

$$[-\omega \hat{\mathcal{A}}_{ki} + \hat{\mathcal{B}}_{ki}]X = 0 \quad (5.5)$$

5.1. Analyse modale linéaire

Les modes de vibrations des déplacements et des rotations sont déterminés à partir du vecteur propre X et nécessitent certaines manipulations. La méthode de calcul des déplacements et la configurations finale en 3D des poutres en modes de vibration est présentée dans l'annexe C.

5.1.1 Coefficients adimensionnels

Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec la littérature, plusieurs paramètres adimensionnels sont introduits [127, 188] :

$$\begin{aligned}\Omega^* &= \Omega_3 T, & \omega^* &= \omega T \\ T &= \sqrt{\frac{\mu L^4}{E i_2}}, & \delta_h &= \frac{r}{L} \\ \delta_i &= \frac{i_2}{i_3}, & \beta &= \sqrt{\frac{AL^2}{i_2}}\end{aligned}\tag{5.6}$$

où, r est le rayon du moyeu, μ est la masse par unité de longueur, i_2 et i_3 sont les moments d'inertie quadratiques de la section transversale autour des axes x_2 et x_3 respectivement. Les variables Ω^* , ω^* , δ_h , δ_i et β représentent le taux de la vitesse angulaire, le taux de la fréquence, le taux du rayon du moyeu, le taux des moments d'inertie quadratiques et le taux de l'élanement, respectivement.

5.1.2 Résultats numériques

Comme application de l'analyse modale linéaire vue précédemment, nous allons présenter une étude comparative avec la littérature utilisant des théories classiques des poutres. Ceci va nous permettre premièrement de valider l'approche de résolution du modèle et deuxièmement de comprendre le phénomène de couplage entre les modes, qui constitue une source de non-linéarité. Dans ce qui suit, des poutres isotropes et des poutres en composite sont examinées.

5.1.2.a Poutre isotrope prismatique

La figure 5.1 montre la géométrie et les repères utilisés pour une poutre prismatique en mouvement de rotation. Le code utilisé pour le calcul des fréquences naturelles est implémenté en MATLAB, où les propriétés de la section transversale sont obtenues de la littérature [6, 7, 73, 127, 184]. Le nombre des fonctions de comparaison dans l'approximation de Galerkin est pris $n_f = 10$, ce nombre est optimal et il a été utilisé dans les cas étudiés dans [135].

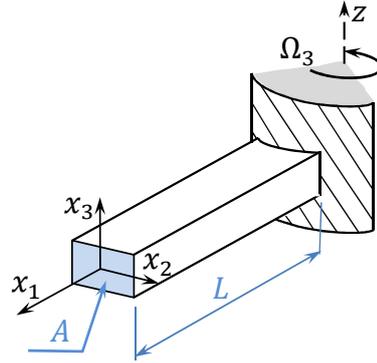


Figure 5.1 Poutre prismatique isotrope en mouvement de rotation

Le tableau 5.1 montre la variation des deux premières fréquences naturelles de flexion latérale d'une poutre uniforme par rapport au taux de l'élanement β et la vitesse angulaire adimensionnelle Ω^* . Les fréquences naturelles sont obtenues à partir de l'équation (5.5) en utilisant la fonction (`eig`) appliquée sur des matrices de taille (120×120) . Les résultats obtenus montrent une cohérence parfaite avec ceux trouvés dans les références [127, 188], dans les deux cas : poutre de Euler-Bernoulli, qui correspond à $(\beta \geq 1000)$ et la poutre de Timoshenko sans vitesse angulaire ($\Omega^* = 0$). Pour la poutre de Timoshenko avec vitesse angulaire ($\beta = 50$ à 10), les fréquences naturelles obtenues sont plus petites que celles reportées dans [127, 188]. La différence est plus significative avec l'augmentation de la vitesse angulaire. La raison est que les expressions de l'énergie utilisées dans ces travaux sont approchées alors que celle utilisée dans notre modèle est sans approximation car les équations de mouvement sont exactes. Un résultat similaire est obtenu dans [179] ; où les effets de cisaillement et d'inertie sont négligés. Il a été montré dans la référence précédente, que le couplage gyroscopique entre les mouvements d'extension et de flexion diminue significativement les fréquences naturelles et que cet effet de couplage devient négligeable avec l'augmentation du taux de l'élanement.

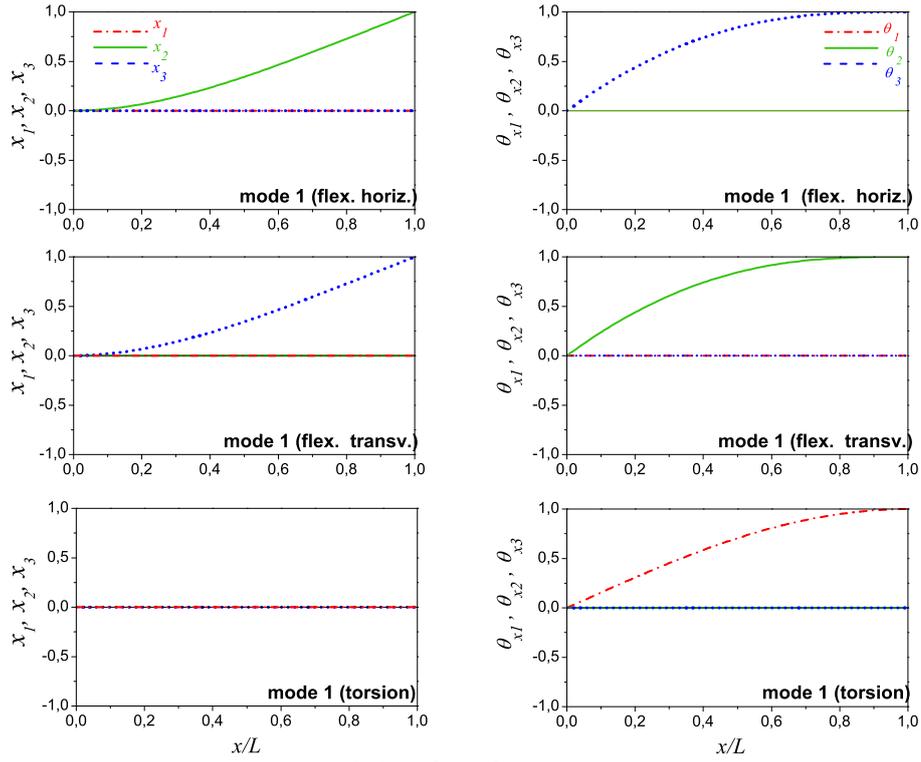
En effet, dans [188], les équations de mouvement sont dérivées en utilisant les équations de Lagrange à partir des expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique qui sont obtenues d'un ensemble de variables de déformation hybrides. Ces équations sont simplifiées en négligeant le couplage entre les deux mouvements de traction et de flexion. Une simplification similaire est utilisée dans [187]. Ces termes de couplage ne sont pas apparants dans les équations de mouvement dérivées dans [127], basées sur le principe d'Hamilton, où les énergies cinétique et potentielle sont basées sur un schéma de troncature. Ce type de théorie est abordé dans [84], chapitre 1. A cause de ces approximations les résultats présentés dans [127] et [188] sont relativement proches.

Les figures 5.2 a et b, présentent l'effet de la vitesse de rotation sur le premier mode de flexion horizontal, le premier mode de flexion transversal et sur le premier mode de torsion.

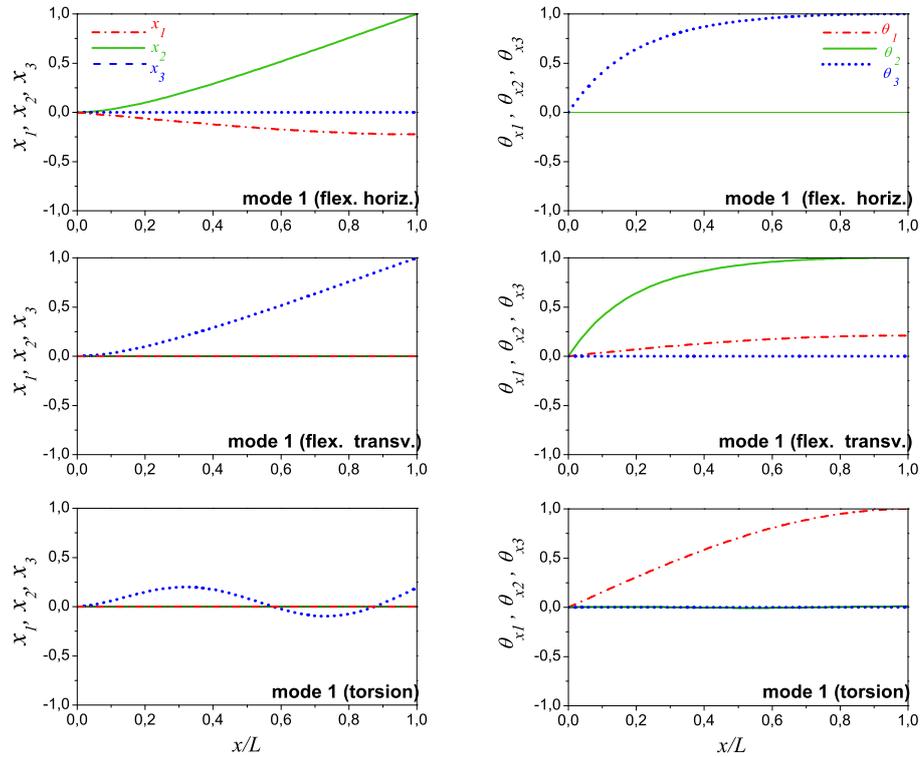
Table 5.1

Comparaison des deux premières fréquences naturelles d'une poutre rotative, isotrope et uniforme. Cas d'une poutre de Timoshenko, à l'exception de la première ligne où EB indique une poutre Euler-Bernoulli ($\delta_h = 0$, $k_s G/E = 0.25$)

| β | $\Omega^* = 0$ | | $\Omega^* = 4$ | | $\Omega^* = 8$ | | | | |
|---------|----------------|---------|----------------|---------|----------------|---------|---------|---------|---------|
| | Présent | [127] | [188] | Présent | [127] | [188] | Présent | [127] | [188] |
| EB | 3.5160 | 3.5160 | 3.5059 | 5.5850 | 5.5850 | 5.5850 | 9.2568 | 9.2568 | 9.2568 |
| | 22.0345 | 22.0345 | 22.0296 | 24.2733 | 24.2733 | 24.2726 | 29.9954 | 29.9954 | 29.9950 |
| 50 | 3.4998 | 3.4998 | 3.5000 | 5.5564 | 5.5616 | 5.5623 | 9.1947 | 9.2096 | 9.2132 |
| | 21.3547 | 21.3547 | 21.3692 | 23.5630 | 23.6061 | 23.6240 | 29.1908 | 29.3215 | 29.3501 |
| 25 | 3.4527 | 3.4527 | 3.4534 | 5.4730 | 5.4951 | 5.4980 | 9.0113 | 9.0854 | 9.0975 |
| | 19.6497 | 19.6497 | 19.6965 | 21.5680 | 21.9557 | 22.0126 | 27.3632 | 27.7082 | 27.7933 |
| 16.67 | 3.3787 | 3.3787 | 3.3803 | 5.3408 | 5.3954 | 5.4013 | 8.7107 | 8.9209 | 8.9423 |
| | 17.547 | 17.547 | 17.6251 | 19.6555 | 19.9662 | 20.0593 | 24.8949 | 25.8362 | 25.9651 |
| 12.5 | 3.2837 | 3.2837 | 3.2863 | 5.1680 | 5.2749 | 5.2840 | 8.2793 | 8.7456 | 8.7746 |
| | 15.4883 | 15.4883 | 15.5873 | 17.5032 | 18.0628 | 18.1781 | 22.4037 | 24.0479 | 24.1961 |
| 10 | 3.1738 | 3.1738 | 3.1774 | 4.9635 | 5.1448 | 5.1570 | 7.8468 | 8.5735 | 8.6077 |
| | 13.6607 | 13.6607 | 13.7694 | 15.6020 | 16.3946 | 16.5184 | 20.8700 | 22.3506 | 22.4979 |



(a) - Cas $\Omega^* = 0$



(b) - Cas $\Omega^* = 12$

Figure 5.2 Effet de la vitesse de rotation sur le 1^{er} mode de flexion horizontal, sur le 1^{er} mode de flexion transversal et sur le 1^{er} mode de torsion. Les déplacements et les rotations correspondants. Poutre encastree, isotrope et uniforme avec $\beta = 70$

5.1. Analyse modale linéaire

Chaque mode de flexion est présenté avec une courbe de rotation correspondante à ce mode. Le déplacement axial correspondant est d'ordre faible. Dans la figure 5.2 a, cas sans vitesse de rotation, on peut remarquer que ces modes ne sont pas couplés. Cependant, la figure 5.2b montre que sous l'effet de la vitesse de rotation ($\Omega^* = 12$), le premier mode de flexion dans le plan de rotation (i.e. horizontal) est couplé avec l'extension, le premier mode de flexion dans le plan transversal (i.e. battement) est couplé avec la torsion et le premier mode de torsion est couplé avec la flexion transversal. Ce couplage entre ces mouvements, qui est observé aussi bien pour les poutres d'Euler-Bernoulli que pour celles de Timoshenko [111], est le résultat d'une non-linéarité dans l'équation de mouvement. Cette non-linéarité devient apparente quand la vitesse de rotation n'est pas nulle. Ceci est expliqué par le fait que la matrice C_{kijq} dans (5.1) est nulle quand il n'y a pas de vitesse de rotation[28].

La figure 5.3 montre l'effet de la vitesse de rotation sur le premier mode de flexion dans le plan de rotation. On remarque que ce mode tend vers une droite au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente. Ceci est dû à ce que la poutre se rigidifie en augmentant la vitesse de rotation. Ce résultat est similaire à celui donné dans [179].

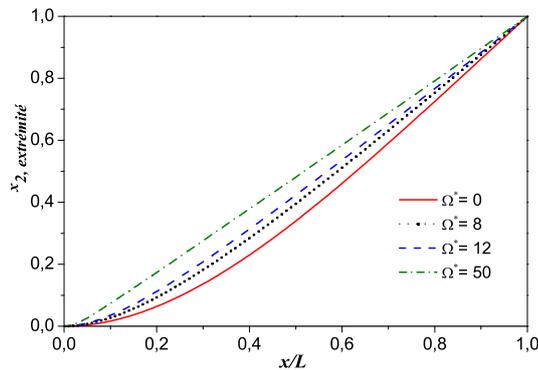


Figure 5.3 Variation du 1er mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation, Poutre encastree, isotrope et uniforme.

5.1.2.b Poutre isotrope tordue

Le couplage entre les modes vu précédemment est causé par la vitesse angulaire, peut aussi être causé seulement par la courbure de la poutre. Le tableau 5.2 présente les quatre premières fréquences naturelles adimensionnelles d'une poutre prismatique d'Euler-Bernoulli tordue, pour différents angles de tordage (α) et sans vitesse angulaire. La figure 5.4 montre les modes propres pour un angle de tordage $\alpha = 30^\circ$. Du point de vue convergence, on peut remarquer qu'il y a une cohérence parfaite entre les résultats de cette étude et ceux donnés

Table 5.2

Comparaison des quatre premières fréquences naturelles en fonction de l'angle de tordage α , ($\beta = 1000, \gamma = 0, \delta_h = 0, \delta_i = 0.25, k_s G/E = 0.25$).

Poutre encastree, non rotative et isotrope

| | α° | Présent | [187] | [178] |
|-----------------|----------------|---------|---------|---------|
| 1 ^{re} | 30 | 1.7623 | 1.7622 | 1.7623 |
| | 60 | 1.7748 | 1.7748 | 1.7748 |
| | 90 | 1.7950 | 1.7950 | 1.7950 |
| 2 ^{me} | 30 | 3.4793 | 3.4793 | 3.4793 |
| | 60 | 3.3798 | 3.3798 | 3.3799 |
| | 90 | 3.2425 | 3.2426 | 3.2425 |
| 3 ^{me} | 30 | 11.1691 | 11.1691 | 11.1693 |
| | 60 | 11.6044 | 11.6040 | 11.6046 |
| | 90 | 12.2646 | 12.2644 | 12.2649 |
| 4 ^{me} | 30 | 21.4475 | 21.4470 | 21.4489 |
| | 60 | 20.1533 | 20.1531 | 20.1545 |
| | 90 | 18.7295 | 18.7301 | 18.7307 |

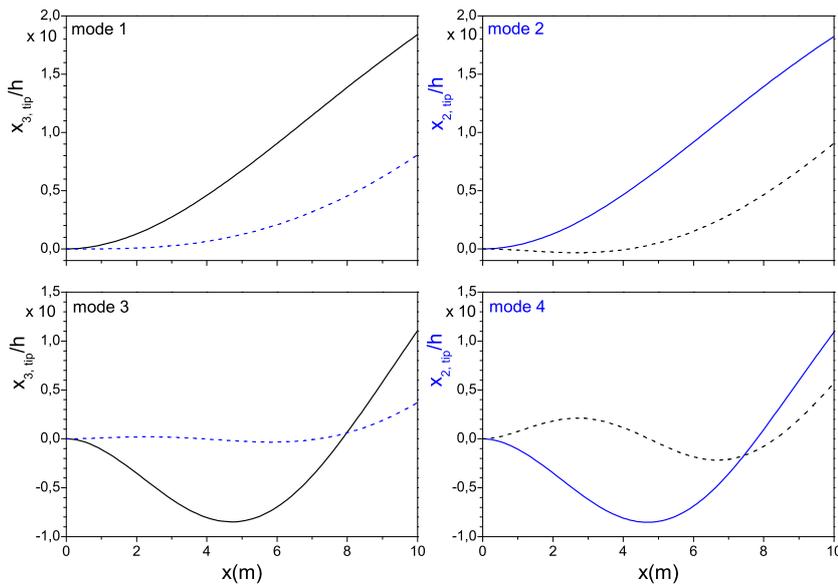


Figure 5.4 Les quatre premiers modes de déformation avec leurs modes compagnons, $\alpha = 30^\circ$ et $L = 10 \text{ m}$, (—) : mode menant, (---) : mode compagnon
Poutre encastree, isotrope et uniforme

5.1. Analyse modale linéaire

dans [178, 187]. Ces fréquences adimensionnelles sont calculées en utilisant i_2 au lieu de i_3 dans (5.6) afin de pouvoir comparer les résultats avec la littérature. Les valeurs relatives au deuxième et au quatrième modes sont proches des valeurs présentées dans le tableau 5.1. Dans les deux papiers [178, 187], les expressions de l'énergie potentielle sont dérivées à partir d'une formulation hybride des variables de déformation. Les termes de couplage entre les mouvements d'extension et de flexion sont ignorés. Il est remarqué aussi que les termes de la matrice de rigidité appartenant à \mathbb{V} Eq. (3.119), composante de la matrice de rigidité \mathcal{S} , n'ont qu'une petite influence sur les fréquences naturelles.

Ces quatre premières fréquences naturelles adimensionnelles correspondent aux modes de flexion comme suit : ω_{1,x_3} , ω_{1,x_2} , ω_{2,x_3} et ω_{2,x_2} , respectivement. A cause du tordage, l'excitation de la poutre suivant un de ces modes, appelé menant, va induire un autre mode, appelé mené ou compagnon, dans la direction transversale. La figure 5.4 montre les modes de déformation de ces fréquences naturelles avec leurs modes compagnons correspondants à l'angle $\alpha = 30^\circ$. On peut remarquer que les modes compagnons ont le même ordre de grandeur que les modes excités et qu'ils ne sont pas couplés avec l'extension et la torsion, ce qui explique la bonne concordance des résultats présentés dans le tableau 5.2

5.1.2.c poutre en composite ATR

Comme exemple d'analyse modale d'une poutre en composite, nous étudions la pale du rotor principal d'hélicoptère, appelée ATR : Active Twist Rotor, traitée dans les papiers [7, 154, 169]. La figure 5.5 montre le profil et la composition des plis dans chaque zone. Cette pale est conçue pour un rotor articulé, elle est fabriquée à partir des fibres de verre type E et S et des fibres actives AFC : Actif Fiber Composite, formant un profil d'aile du type NACA 0012 et une longueur $L = 1.397\text{ m}$. Pour plus de détails sur cette pale, nous renvoyons le lecteur aux références [154, 169].

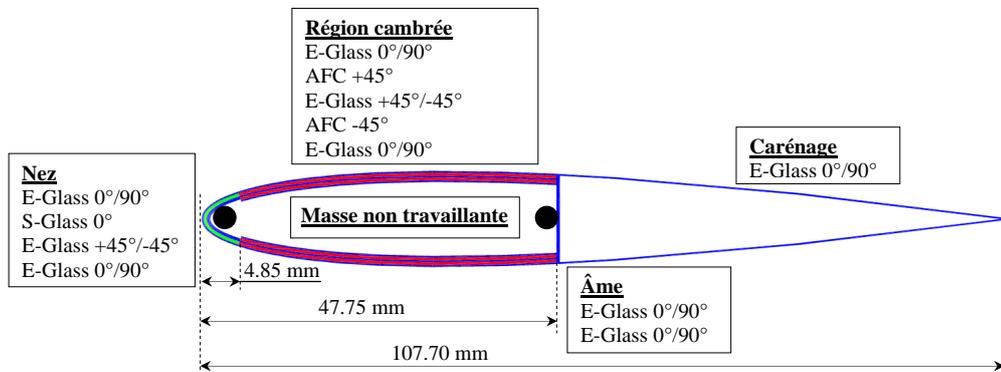


Figure 5.5 Profil de la pale ATR et la composition des plis [169]

Chapitre 5. Vibrations libres non-linéaires des poutres rotatives

Les paramètres de la structure sont donnés dans le tableau 5.3. Ces paramètres sont déterminés en utilisant la ligne de référence passant par le centre de gravité surfacique des sections transversales. Les axes x_2 et x_3 sont principaux, i.e. $i_{23} = 0$ et le centre de gravité massique est localisé en $(\bar{x}_2 = -6.9240 \times 10^{-4} \text{ m}, \bar{x}_3 = 0 \text{ m})$. Pour une raison de simplicité, nous considérons que les forces des actionneurs caractérisées par des forces/moments de couplage ne sont pas présentes.

Table 5.3

Paramètres de la structure de la pale ATR [6, 7]

| | | |
|--|--|--|
| $L = 1.3970 \text{ m}$ | $\mu = 6.9310 \times 10^{-1} \text{ kgm}^{-1}$ | |
| $\bar{x}_2 = -6.9240 \times 10^{-4} \text{ m}$ | $\bar{x}_3 = 0. \text{ m}$ | |
| $i_2 = 6.4630 \times 10^{-6} \text{ kgm}$ | $i_3 = 3.7018 \times 10^{-4} \text{ kgm}$ | $i_{23} = 0. \text{ kgm}$ |
| $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_{33} \end{bmatrix}$ | $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{V}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{V}_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{W}_{33} \end{bmatrix}$ |
| $\mathbf{U}_{11} = 1.6377 \times 10^6 \text{ N}$ | $\mathbf{U}_{22} = 2.0300 \times 10^5 \text{ N}$ | $\mathbf{U}_{33} = 2.3150 \times 10^4 \text{ N}$ |
| $\mathbf{V}_{13} = -9.7975 \times 10^3 \text{ Nm}$ | $\mathbf{V}_{31} = -1.4820 \times 10^2 \text{ Nm}$ | |
| $\mathbf{W}_{11} = 3.5330 \times 10^1 \text{ Nm}^2$ | $\mathbf{W}_{22} = 3.9868 \times 10^1 \text{ Nm}^2$ | $\mathbf{W}_{33} = 1.1381 \times 10^3 \text{ Nm}^2$ |

Table 5.4

Les quatre premières fréquences naturelles de la pale ATR en fonction de la vitesse de rotation

| Mode | $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ | $\Omega_3 = 10 \text{ rad/s}$ | $\Omega_3 = 20 \text{ rad/s}$ | |
|--------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------|
| | [169] | Présent | Présent | Présent |
| $1^{er}/x_3$ | 13.68 | 13.64 | 17.44 | 25.53 |
| $1^{er}/x_2$ | 70.76 | 70.60 | 70.73 | 71.10 |
| $2^{me}/x_3$ | 86.71 | 84.40 | 88.13 | 98.47 |
| $3^{me}/x_3$ | 248.8 | 232.0 | 235.5 | 246.5 |

5.1. Analyse modale linéaire

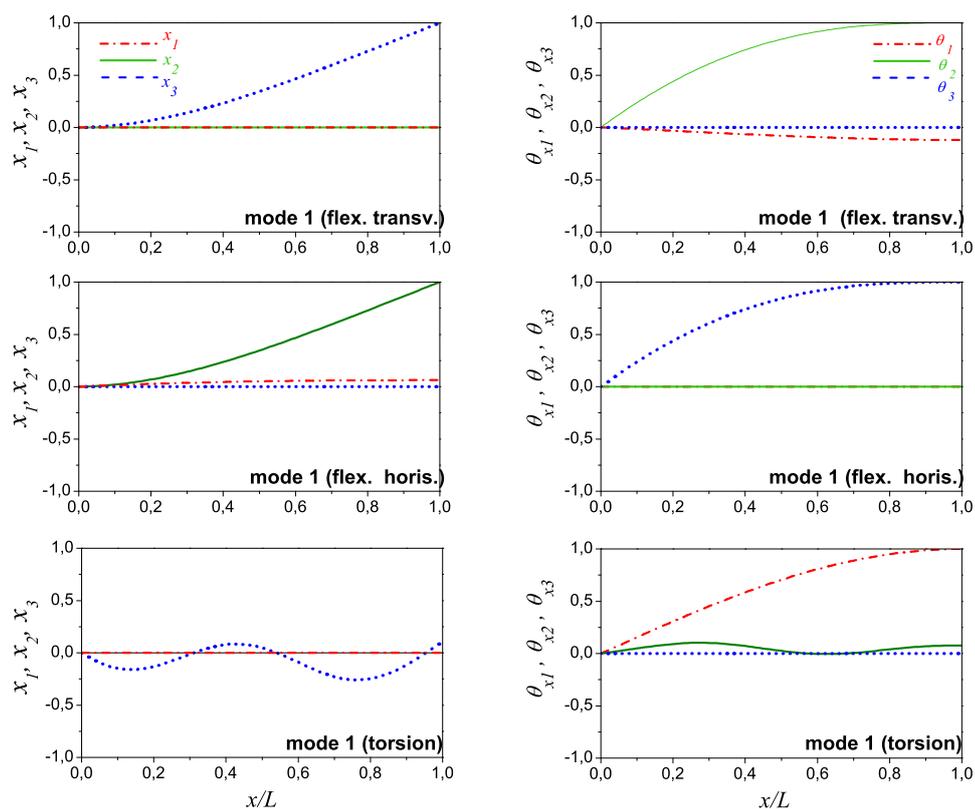


Figure 5.6 Pale ATR, les 1^{er} modes de flexion et de torsion, $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$.

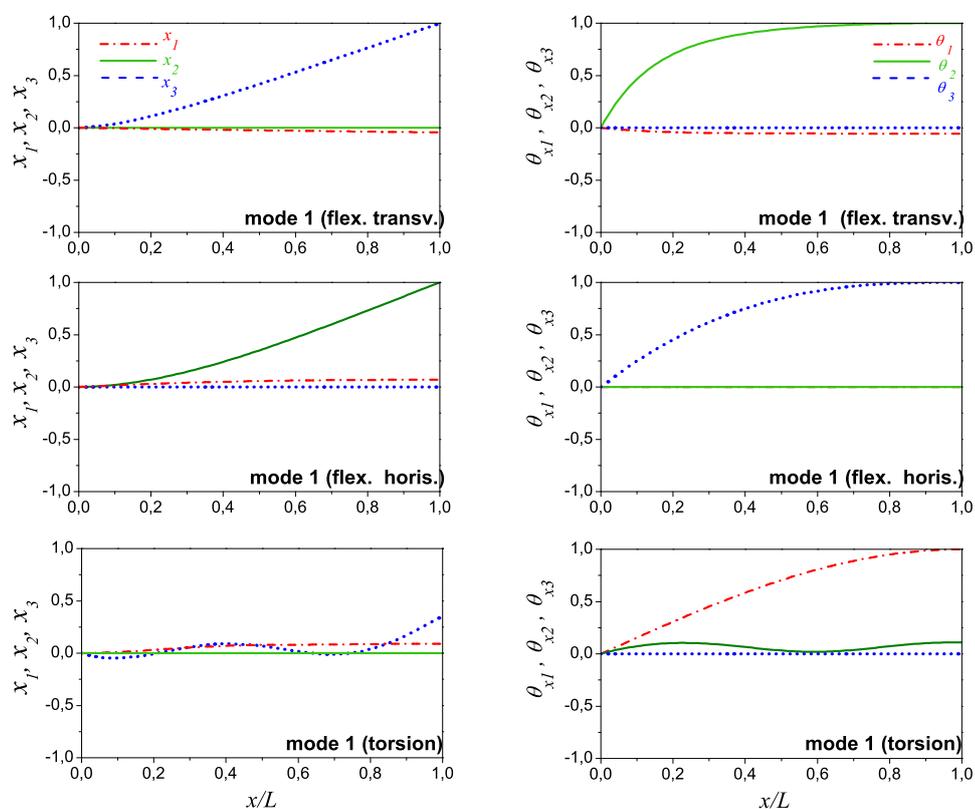


Figure 5.7 Pale ATR, les 1^{er} modes de flexion et de torsion, $\Omega_3 = 10 \text{ rad/s}$.

Le tableau 5.4 présente les quatre premières fréquences naturelles de flexion. La comparaison avec la littérature s'est limitée à la référence qui présente des fréquences naturelles de la pale sans vitesse de rotation et calculées par la MEF. On montre dans [135] que la méthode de Galerkin utilisée dans nos calculs est plus précise que la MEF.

Les figures 5.6 et 5.7 montrent le couplage des modes 1, 2 et 5, correspondants aux modes : le 1^{er} mode de flexion transversal, le 1^{er} de flexion horizontal (dans la plan de rotation, appelé aussi flexion de corde) et le 1^{er} mode de torsion respectivement. La figure 5.6 concerne l'état statique, i.e. sans vitesse de rotation. Le couplage des modes est dû à la non-homogénéité du matériau. On peut remarquer que le 1^{er} mode de flexion transversal est couplé avec le premier mode de torsion, le 1^{er} mode de flexion de corde est couplé avec le premier mode d'extension, et le 1^{er} mode de torsion est couplé avec un mode de flexion de battement. La figure 5.7 montre ces couplages en ajoutant la vitesse de rotation. Ils deviennent plus complexes et d'autres modes ont été impliqués. Le 1^{er} mode de battement est couplé encore avec un mode d'extension. Pour le 1^{er} mode de flexion de corde le 1^{er} mode de torsion, on peut remarquer que les modes en couplages sont influencés aussi par l'effet de la vitesse de rotation est deviennent plus rigides.

En conclusion, le phénomène de couplage entre les modes peut être causé par l'un des effets suivants : la vitesse de rotation, la courbure de la poutre, ou la non-homogénéité et la non-isotropie du matériau. Le couplage entre les modes induit des non-linéarités dans le comportement vibratoire des poutres. La vitesse de rotation a des effets multiples sur une poutre, elle rigidifie la poutre, elle couple les modes et elle change les fréquences naturelles, généralement on enregistre des augmentations. Dans la littératures [111, 177, 179], des descriptions qualitatives sont données sur l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation, tout en jouant sur l'implication des termes gyroscopiques et en faisant varier l'élanement de la poutre et le rayon du moyeu. Dans le chapitre 6, nous discuterons l'aspect lié au phénomène de résonance interne relatif au changement de la vitesse de rotation.

La section suivante est dédiée à l'étude des vibrations libres non-linéaires, où un nouvel algorithme est développé pour le calcul des branches solutions à partir des points de bifurcation avec double singularités.

5.2 Vibrations libres non-linéaires

Dans la plupart des systèmes mécaniques dynamiques, les effets gyroscopiques sont omniprésents et mènent à des opérateurs non auto-adjoints. Ceci peut être causé également par l'application de la méthode de l'équilibrage harmonique sur les équations différentielles

5.2. Vibrations libres non-linéaires

d'équilibre afin de les convertir en des équations algébriques. Les valeurs propres obtenues sont complexes sous forme de paires conjuguées et ont par conséquent des vecteurs propres complexes conjugués à droites et à gauches [134]. Quand il n'y a aucun amortissement, les valeurs propres sont des paires conjuguées purement imaginaires. Un exemple de tels systèmes dynamiques, est le système des équations intrinsèques de la dynamique non linéaire des poutres anisotropes. Ces équations comme présentées dans [28, 81, 83] contiennent des termes gyroscopiques et présentent donc un système dynamique gyroscopique non-linéaire et conservatif.

Les points de bifurcations simples (points singuliers simples) correspondent à un co-rang 1. Ils sont généralement associés aux vibrations libres et aux flambements des structures. Ils ont été étudiés considérablement avec différentes méthodes de continuation. A titre d'exemple, nous pouvons citer les études traitant les vibrations libres non-linéaires des poutres et des plaques [109, 150, 163] avec la méthode de continuation pseudo-longueur d'arc, où le vecteur propre linéaire correspondant à la valeur propre considérée est utilisé comme approximation du point de départ. Dans [16], la MAN est utilisée, basée sur les conditions d'orthogonalité obtenues à partir de la réduction de Lyapunov-Schmidt et avec un premier vecteur de déplacement nul, la solution triviale, qui n'est pas toujours le cas. Dans [77], les mêmes techniques ont été utilisées. Elles sont appliquées dans le cadre de la mécanique des fluides avec quelques nouvelles réflexions. Ces techniques sont toutes fondées sur l'hypothèse que le noyau de l'opérateur tangent est composé d'un seul vecteur. Formellement, cette hypothèse est insuffisante avec un problème de bifurcation co-rang 2 ou plus et doit être améliorée.

Le problème de bifurcation avec un co-rang 2 est considéré comme un problème de valeur propre double ou un problème avec un point singulier double dans [15, 45, 174]. Un cas particulier de ce problème est les vibrations libres d'un système dynamique en présence de forces gyroscopiques, où la branche solution bifurque d'un point d'état d'équilibre statique vers un état dynamique et périodique. Par définition, il concerne un problème de bifurcation de Hopf [8, 153], qui est classé également comme une bifurcation dynamique [122]. Un point de bifurcation de Hopf est caractérisé par une paire de valeurs propres complexes purement imaginaires et conjuguées pour chaque mode. Le théorème de bifurcation de Hopf peut être trouvé dans la littérature, par exemple le théorème 2.11 dans [153]. Si une des conditions n'est pas respectée, par exemple l'état de transversalité, le point de bifurcation de Hopf est qualifié de dégénéré. Pour le traitement des bifurcations de Hopf, il y a équivalence entre les approches du domaine fréquentiel et celles du domaine temporel [114]. La méthode asymptotique numérique est principalement basée sur le théorème de fonction implicite, qui se tient pour le noyau unidimensionnel (co-rang 1) c.-à-d. la bifurcation simple, et est généralisée

pour des noyaux avec des dimensions plus élevées (co-rang ≥ 2), voir le théorème I.5.1 et le théorème I.19.2 dans [101].

Dans ce travail, un nouvel algorithme utilisant la méthode asymptotique numérique est présenté pour résoudre des problèmes de bifurcation de co-rang 2 avec un seul paramètre. Cet algorithme peut être étendu aux problèmes d'ordre élevé de co-rang $n \geq 2$. Pour la mise en œuvre, nous allons appliquer cet algorithme à la formulation intrinsèque Eqs. (3.118, 3.123).

5.2.1 Algorithme de branchement en un point de bifurcation Hopf via la MAN

Dans ce qui suit nous allons déterminer, en premier lieu, la solution statique des équations intrinsèques spécifiques aux vibrations libres et définir la liaison avec le point de bifurcation. Ensuite, nous allons appliquer la MAN et résoudre le problème. Les développements montrés dans cette partie ont fait l'objet de la publication [29].

5.2.1.a Equations d'équilibre - vibrations libres non-linéaires

Dans le cas des vibrations libres la poutre est sans excitation (forces ou moments). Les équations intrinsèques Eqs. (3.118, 3.123) deviennent :

$$\begin{aligned}
 F' + (\tilde{\kappa} + \tilde{\kappa})F &= \dot{P} + \tilde{\Omega}P \\
 M' + (\tilde{k} + \tilde{\kappa})M + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma})F &= \dot{H} + \tilde{\Omega}H + \tilde{V}P \\
 V' + (\tilde{\kappa} + \tilde{\kappa})V + (\tilde{e}_1 + \tilde{\gamma})\Omega &= \dot{\gamma} \\
 \Omega' + (\tilde{\kappa} + \tilde{\kappa})\Omega &= \dot{\kappa}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Similairement à (4.35), ce système d'équations différentielles est réduit à une équation algébrique nonlinéaire dans le domaine fréquentiel,

$$\mathcal{R}(\bar{q}, \omega) = \omega \bar{\mathcal{A}}\bar{q} + \bar{\mathcal{B}}\bar{q} + \bar{\mathcal{C}}\bar{q} \cdot \bar{q} + \bar{\mathcal{D}} = 0 \tag{5.8}$$

où le vecteur $\bar{\mathcal{D}}$ contient seulement l'effet des conditions aux limites. Cette fonctionnelle (5.8) peut être réécrite sous forme d'opérateurs :

$$\mathcal{R}(\bar{q}, \omega) = \omega \bar{\mathcal{A}}\bar{q} + L\bar{q} + Q(\bar{q}, \bar{q}) = 0 \tag{5.9}$$

avec $L(\cdot) = \bar{\mathcal{B}}(\cdot) + \bar{\mathcal{D}}$ est l'opérateur linéaire, et $Q(\cdot, \cdot) = \bar{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ est l'opérateur quadratique. Nous rappelons que \bar{q} est l'inconnue et ω est un paramètre.

5.2. Vibrations libres non-linéaires

Dans le cas général, la fonctionnelle $\mathcal{R}(\bar{q}, \omega)$ est considérée comme étant une application C^2 de $\mathbb{R} \times Y$, avec Y est un espace Banach.

5.2.1.b Solution de l'état stationnaire

La solution de l'état stationnaire \bar{q}_{0s} de $\mathcal{R}(\bar{q}, \omega)$ est obtenue en écartant le terme temporel $\omega \bar{A} \bar{q}$ des équations. (5.8) et (5.9), i.e. quand la dérivée en temps du vecteur inconnu \bar{q} est nulle, et utilisant une méthode itérative incrémentale, la plus connue est le schéma itératif de Newton-Raphson. Ainsi, \bar{q}_{0s} est la solution du problème non-linéaire suivant :

$$\mathcal{R}_s(\bar{q}) = L\bar{q}_{0s} + Q(\bar{q}_{0s}, \bar{q}_{0s}) = 0 \quad (5.10)$$

Cette solution de l'état stationnaire \bar{q}_{0s} n'est pas une solution triviale à cause de la présence du vecteur constant \bar{D} dans l'opérateur linéaire L .

Le système non-linéaire (5.9) peut être résolu avec la méthode de continuation pseudo-longueur d'arc [28]. Cependant, pour ce problème des vibrations libres des poutres rotatives, la MAN est plus adéquate [29].

5.2.1.c Méthode Asymptotique Numérique - MAN

La MAN consiste à introduire des développements en séries des inconnues (\bar{q} et ω) en fonction d'un paramètre de chemin a dans la fonctionnelle (5.9) donnant une succession de systèmes linéaires. Ces développements sont définis à partir d'un point solution régulier et connu (\bar{q}_0, ω_0) , tel qu'il est montré dans la section 2.2.3.

$$\begin{cases} \bar{q}(a) = \bar{q}_0 + \sum_{j=1}^n a^j \bar{q}_j \\ \omega(a) = \omega_0 + \sum_{j=1}^n a^j \omega_j \end{cases} \quad (5.11)$$

où, \bar{q}_j and ω_j sont les nouvelles inconnues à déterminer, et n est l'ordre de troncature des développements asymptotiques.

Le paramètre de chemin peut être défini par une projection restreinte de l'incrément $(\bar{q} - \bar{q}_0)$ sur le vecteur tangent \bar{q}_1 , dite projection cylindrique [57],

$$a = (\bar{q} - \bar{q}_0)^T \cdot \bar{q}_1 \quad (5.12)$$

L'insertion des développements polynomiales (5.12) dans (5.9) et (5.11), tout en égalisant les puissances en a , donne des systèmes linéaires sauf à l'ordre zéro qui est non-linéaire :

Ordre 0

$$\mathcal{R}(\bar{q}_0, \omega_0) = \omega_0 \bar{\mathcal{A}}\bar{q}_0 + \bar{\mathcal{B}}\bar{q}_0 + \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_0, \bar{q}_0) + \bar{\mathcal{D}} = 0 \quad (5.13)$$

L'ordre zéro est lié au premier point de la branche, où ω_0 est la fréquence naturelle du mode choisi. Comme le vecteur $\bar{\mathcal{D}}$ a seulement la composante de la première harmonique (statique) non nulle, le produit $\bar{\mathcal{A}}\bar{q}_0$ est égale à zéro. Le vecteur \bar{q}_0 correspond à la solution de l'état stationnaire \bar{q}_{0s} et par conséquent, le point de bifurcation est ($\bar{q}_0 = \bar{q}_{0s}, \omega_0$). Par définition c'est un point de bifurcation de Hopf qui relie un état d'équilibre statique à un mouvement périodique (vibration libre non-linéaire). Donc, à l'ordre 0 on aura,

$$\mathcal{R}(\bar{q}_0, \omega_0) = \bar{\mathcal{B}}\bar{q}_0 + \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_0, \bar{q}_0) + \bar{\mathcal{D}} = 0 \quad (5.14)$$

Dans les développements suivants, le terme $\bar{\mathcal{A}}\bar{q}_0$ est éliminé.

Ordre 1

$$\begin{cases} L_t^0 \bar{q}_1 = 0 \\ \bar{q}_1^T \cdot \bar{q}_1 = 1 \end{cases} \quad (5.15)$$

où, $L_t^0(\cdot)$ est l'opérateur tangent calculé au point de bifurcation (\bar{q}_0, ω_0) , il est exprimé par :

$$L_t^0(\cdot) = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{q}}(\bar{q}_0, \omega_0) = \omega_0 \bar{\mathcal{A}}(\cdot) + \bar{\mathcal{B}}(\cdot) + \bar{\mathcal{C}}(\cdot, \bar{q}_0) + \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_0, \cdot) \quad (5.16)$$

et $\bar{q}_1 \in \text{Null}(L_t^0)$ i.e. le noyau de L_t^0 .

Le tenseur $\bar{\mathcal{C}}$ est du troisième ordre et il peut être réécrit d'une façon équivalente en notation indicielle comme : $\bar{\mathcal{C}} \equiv \bar{\mathcal{C}}_{kij}$. Ainsi, $\bar{\mathcal{C}}(\cdot, \bar{q}_0)$ avec une permutation des indices est équivalent à $\bar{\mathcal{C}}_{kji}(\bar{q}_0, \cdot)$. Ce terme sera noté dans ce qui suit par $\bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_0, \cdot)$.

Comme résultat, on aura $\bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_i, \bar{q}_j) \neq \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_j, \bar{q}_i)$ sauf si $\bar{q}_i = \bar{q}_j$, et par conséquent, l'expression (5.16) peut être réécrite comme :

$$L_t^0(\cdot) = [\omega_0 \bar{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{B}} + \bar{\mathcal{C}}\bar{q}_0 + \bar{\mathcal{C}}\bar{q}_0](\cdot) \quad (5.17)$$

5.2. Vibrations libres non-linéaires

Ordre $2 \leq p \leq n$

$$\begin{cases} L_t^0 \bar{q}_p = D_p \\ \bar{q}_1^T \cdot \bar{q}_p = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

avec

$$D_p = - \sum_{i=1}^{p-1} \omega_{p-i} \bar{A} \bar{q}_i + \bar{C} \bar{q}_i \cdot \bar{q}_{p-i} \quad (5.19)$$

Une fois les inconnues calculées à chaque ordre, la solution polynomiale Eq.(5.11) est remplacée par les approximants de Padé définis dans (2.28) [60, 69]. L'estimation des rayons de convergence est faite avec l'un des critères définis dans (2.29) ou (2.30). La précision de la solution est fonction de l'ordre de troncature n , du paramètre de précision η_{ms} ou η_p ainsi que de la précision du point initial.

5.2.1.d Calcul des branches solutions post-bifurcation

Pour résoudre les systèmes d'équations Eqs.(5.15 - 5.19), des manipulations particulières doivent être faites. Par exemple, le calcul du vecteur tangent \bar{q}_1 , nécessite la projection du système linéaire de l'ordre 2 sur les vecteurs propres de gauche. Ceci est expliqué dans la section 5.2.1.e. Similairement, pour résoudre le système linéaire de l'ordre p pour $2 \leq p \leq n$, on doit projeter le système linéaire de l'ordre $p+1$ sur les vecteur propres à gauche pour déterminer la partie droite du système linéaire de l'ordre p . Ceci est expliqué dans 5.2.1.f.

5.2.1.e Le vecteur tangent \bar{q}_1

Comme nous l'avons mentionné précédemment (en 5.2), en présence des termes gyroscopiques, le noyau est de dimension 2 et à cet effet on définit les noyaux et le rang suivants :

$$\begin{aligned} Null(L_t^0) &= Span\{\bar{q}_{t1}, \bar{q}_{t2}\} \\ Null(L_t^{0T}) &= Span\{\bar{q}_{\phi1}, \bar{q}_{\phi2}\} \\ Rang(L_t^0) &= \{y \in Y : \bar{q}_{\phi1}^T \cdot y = 0\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\text{avec, } \bar{q}_{ti}^T \cdot \bar{q}_{tj} = \bar{q}_{\phi i}^T \cdot \bar{q}_{\phi j} = \bar{q}_{ti}^T \cdot \bar{q}_{\phi j} = \delta_{ij}$$

où, $\bar{q}_{ti} (i = 1, 2)$ sont les vecteurs propres conjugués correspondants à ω_0 appelés les modes de déformation tels que :

$$L_t^0 (\bar{q}_{ti}) = [\omega_0 \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} \bar{q}_0 + \bar{C} \bar{q}_0] (\bar{q}_{ti}) \quad (5.21)$$

et $\bar{q}_{\phi j} (j = 1, 2)$ sont les vecteurs propres de gauche, satisfaisant les relations suivantes

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\phi j}^T \cdot L_t^0 &= 0^T \\ \text{ou } L_t^{0T} \cdot \bar{q}_{\phi j} &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

et par conséquent la relation suivante est vérifiée :

$$\bar{q}_{\phi j}^T \cdot L_t^0(v) = 0^T \quad \forall v \in Y \quad (5.23)$$

Comme dans [77], les vecteurs propres de gauche, $\bar{q}_{\phi j}$ peuvent être déterminés par un système augmenté, en utilisant les expressions (5.22.b) et (5.20.d) comme suit :

$$\begin{bmatrix} L_t^{0T} & \bar{q}_{tj} \\ \bar{q}_{tj}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_{\phi j} \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Le noyau est composé de deux vecteurs $\{\bar{q}_{t1}, \bar{q}_{t2}\}$. Ainsi, le vecteur tangent recherché \bar{q}_1 au point (\bar{q}_0, ω_0) est écrit dans cette base comme suit :

$$\bar{q}_1 = \alpha \bar{q}_{t1} + \beta \bar{q}_{t2} \quad (5.25)$$

α et β sont des constantes à déterminer par une projection du système linéaire de l'ordre 2 sur les deux vecteurs propres de gauche, tout en vérifiant la condition $\bar{q}_1^T \cdot \bar{q}_1 = 1$ décrite dans Eq. (5.15.b). Sans tenir compte de l'équation du paramètre de chemin et la valeur de ω_1 , le second ordre est défini par :

Ordre 2

$$\begin{cases} L_t^0(\bar{q}_2) = \omega_1 \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_1 + \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_1, \bar{q}_1) \\ \bar{q}_1^T \cdot \bar{q}_2 = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

En projetant l'équation (5.26.a) sur les vecteurs propres à gauche $\bar{q}_{\phi j} (j = 1, 2)$ et en utilisant l'équation (5.22), on obtient :

$$\bar{q}_{\phi j}^T L_t^0(\bar{q}_2) = \omega_1 \bar{q}_{\phi j}^T \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_1 + \bar{q}_{\phi j}^T \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_1, \bar{q}_1) = 0, \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad (5.27)$$

En utilisant l'expression (5.12) définissant le paramètre de chemin 'a' qui nécessite que $\omega_1 \neq 0$ (projection cylindrique) et à partir de l'équation (5.27) on obtient :

$$\bar{q}_{\phi j}^T \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_1, \bar{q}_1) = 0, \quad \text{for } j = 1, 2 \quad (5.28)$$

5.2. Vibrations libres non-linéaires

Ce qui implique que $\bar{q}_{\phi k}^T \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_i, \bar{q}_j) = 0$ pour k, i et $j = 1, 2$. Ceci correspond à un point de bifurcation de Hopf du type dégénéré, à cause de la condition de transversalité qui n'est pas respectée [101, 153].

En annulant le terme restant dans l'expression (5.26), on obtient :

$$\bar{q}_{\phi j}^T \bar{\mathcal{A}}(\alpha \bar{q}_{t1} + \beta \bar{q}_{t2}) = 0, \quad \text{for } j = 1, 2 \quad (5.29)$$

Cette dernière expression représente deux équations indépendantes, ce qui donne deux solutions paramétriques. On peut mettre $\alpha = 1$ pour obtenir β et normaliser le vecteur obtenu $\bar{q}_1 = \alpha \bar{q}_{t1} + \beta \bar{q}_{t2}$, condition donnée dans (5.15.b), où β peut prendre une des deux valeurs :

$$\beta = -\frac{\bar{q}_{\phi j}^T \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_{t1}}{\bar{q}_{\phi j}^T \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_{t2}}, \quad \text{for } j = 1, 2 \quad (5.30)$$

Pour chaque solution de \bar{q}_1 , le vecteur \bar{q}_2 est obtenu en résolvant le système linéaire (5.26.a). En pratique, une seule solution du vecteur tangent \bar{q}_1 est utile.

5.2.1.f Calcul des vecteurs \bar{q}_p for $p > 2$

Résoudre le système linéaire à l'ordre de troncature $p > 2$ implique la détermination de la partie droite D_p , dont l'unique inconnue est ω_{p-1} . Cette dernière peut être déterminée par une projection de l'équation (5.18.a) sur les vecteurs tangents de gauche ($\bar{q}_{\phi j}$ for $j = 1, 2$) pour donner :

$$\omega_{p-1} = -\frac{\bar{q}_{\phi j}^T \left[\sum_{i=2}^{p-i} \omega_{p-i} \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_i + \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_i, \bar{q}_{p-i}) \right]}{\bar{q}_{\phi j}^T \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_1} \quad (5.31)$$

La condition d'orthogonalité (5.18.b) peut être obtenue en mettant ($\bar{q}_{\phi j}^T \cdot \bar{q}_{ti} = 0$, pour $i = 1$ et 2), ainsi l'équation singulière (5.18.a) est résolue par le système augmenté :

$$\begin{bmatrix} L_t^{0T} & \bar{q}_{t1} & \bar{q}_{t2} \\ \bar{q}_{t1}^T & 0 & 0 \\ \bar{q}_{t2}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_p \\ k1 \\ k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

5.2.2 Remarques

Remarque 1 : Equivalence de l'algorithme avec la réduction de Lyapunov-Schmidt

En analysant la solution globale (5.5), on peut remarquer que le vecteur de déplacement généralisé est composé de trois parties : La première partie est le vecteur de déplacement initial \bar{q}_0 , la deuxième partie est la contribution de la solution triviale du vecteur tangent définie par : $g_1(a) \cdot \bar{q}_1 = g_1(a) \cdot (\alpha \cdot \bar{q}_{t1} + \beta \cdot \bar{q}_{t2})$, avec $g_1(a)$ peut être $g_1(a) = a$ ou $f_1(a)$ selon le développement utilisé, polynomial ou les approximants de Padé, et finalement la troisième partie définie par la forme générale $\sum_{j=1}^{n-1} g_j(a) \cdot \bar{q}_j$ qui est orthogonale à la solution triviale et par conséquent à la deuxième partie. On peut conclure que la solution globale est équivalente à la réduction de Lyapunov-Schmidt utilisée généralement pour la résolution des problèmes de singularité.

Dans le cas d'un point de bifurcation Hopf non-dégénéré, où $\bar{q}_{\phi k}^T \bar{C}(\bar{q}_i, \bar{q}_j) \neq 0$, l'expression (5.27) donne deux équations avec trois inconnues (α , β and ω_1), et pour résoudre le problème une équation additionnelle doit être ajoutée tout en respectant la condition d'orthogonalité telle que la réduction de Lyapunov-Schmidt soit toujours vérifiée.

Remarque 2 : Equivalence entre l'équation algébrique de bifurcation et le système linéaire du second ordre de la MAN

L'expression (5.27) peut aussi être obtenue en faisant la différentiation du second ordre de la fonctionnelle $\mathcal{R}(\bar{q}, \omega) = 0$, appelée l'équation algébrique de bifurcation [76]. La première différentiation en un point général (\bar{q}, ω) donne :

$$\mathcal{R}_{\bar{q}} \bar{q}' + \mathcal{R}_{\omega} \omega' = 0 \quad (5.33)$$

où,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\bar{q}} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{q}}(\bar{q}, \omega) = \omega \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}\bar{q} + \bar{C}\bar{q} \\ \mathcal{R}_{\omega} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega}(\bar{q}, \omega) = \bar{A}\bar{q} \\ \bar{q}' &= \frac{\partial \bar{q}}{\partial a}, \quad \omega' = \frac{\partial \omega}{\partial a} \end{aligned} \quad (5.34)$$

avec 'a', le paramètre de chemin défini dans (5.12).

Au point de bifurcation (\bar{q}_0, ω_0) le vecteur tangent associé $(\bar{q}', \omega')^T$ est $(\bar{q}_1, \omega_1)^T$. Posons $\mathcal{R}_{\bar{q}}^0 = L_t^0 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{q}_0}(\bar{q}_0, \omega_0)$ et $\mathcal{R}_{\omega}^0 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega_0}(\bar{q}_0, \omega_0)$. A partir des équations (5.33, 5.23), il s'ensuit

5.2. Vibrations libres non-linéaires

que $\mathcal{R}_\omega^0 \in \text{Range}(L_t^0)$.

La seconde différentiation de la fonctionnelle $\mathcal{F}(\bar{q}, \omega)$ calculée en (\bar{q}_0, ω_0) donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\bar{q}}^0 \cdot \bar{q}'' + \mathcal{R}_\omega^0 \omega'' &= -[\mathcal{R}_{\bar{q}\bar{q}}^0 \bar{q}' \cdot \bar{q}' + 2\mathcal{R}_{\bar{q}\omega}^0 \bar{q}' \cdot \omega' + \mathcal{R}_{\omega\omega}^0 \omega' \cdot \omega'] \\ &= -[\mathcal{R}_{\bar{q}\bar{q}}^0 \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_1 + 2\mathcal{R}_{\bar{q}\omega}^0 \bar{q}_1 \cdot \omega_1 + \mathcal{R}_{\omega\omega}^0 \omega_1 \cdot \omega_1] \end{aligned} \quad (5.35)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\bar{q}\bar{q}}^0 &= \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \bar{q}^2}(\bar{q}_0, \omega_0) = \bar{\mathcal{C}} + \bar{\mathcal{C}} \\ \mathcal{R}_{\bar{q}\omega}^0 &= \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \bar{q} \partial \omega}(\bar{q}_0, \omega_0) = \mathcal{R}_{\omega \bar{q}}^0 = \bar{\mathcal{A}} \\ \mathcal{R}_{\omega\omega}^0 &= \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial \omega^2}(\bar{q}_0, \omega_0) = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

En projetant l'équation (5.35) sur les vecteurs propres de gauche \bar{q}_{ϕ_j} ($j = 1, 2$) et en utilisant (5.23) avec le fait que, $\mathcal{R}_\omega^0 \in \text{Range}(\mathcal{R}_{\bar{q}}^0)$ et $\bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_1, \bar{q}_1) = \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_1, \bar{q}_1)$, on obtient que la partie droite de l'équation (5.35) doit être dans le *Range* de $\mathcal{R}_{\bar{q}}^0$ et par conséquent la même expression (5.27) est obtenue multipliée par 2,

$$2 [\omega_1 \bar{q}_{\phi_j}^T \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_1 + \bar{q}_{\phi_j}^T \bar{\mathcal{C}}(\bar{q}_1, \bar{q}_1)] = 0, \quad \text{for } j = 1, 2 \quad (5.37)$$

En résumé, le premier et le deuxième ordre de troncature correspondent à la première et la seconde différentiation de la fonctionnelle en (\bar{q}_0, ω_0) respectivement, ce qui permet de dire que le développement asymptotique donné par la MAN est équivalent au développement de Taylor de la fonctionnelle \mathcal{R} en (\bar{q}_0, ω_0) , et les ordres de troncature supérieurs sont des termes de correction.

5.2.3 Résultats numériques

Dans cette section, des simulations numériques des vibrations libres de deux cas de poutres encastrées et en mouvement de rotation ont été réalisées pour démontrer l'efficacité de cet algorithme. En premier lieu, nous simulons une poutre isotrope et dans le deuxième cas une poutre en composite. Les poutres ont des sections transversales uniformes et les vitesses de rotations sont considérées constantes. En se basant sur les études précédentes, le nombre des fonctions de comparaison utilisées dans l'approximation de Galerkin est choisi $n_f = 10$. Ce nombre a été utilisé dans tous les cas présentés dans [135], où on a montré qu'il est

optimal. Le nombre des harmoniques $H = 3$ est adopté pour un temps de calcul optimal [28]. Les paramètres adoptés de la MAN sont : l'ordre de troncature n est supérieur à 15 et le paramètre de précision η_p est inférieur à 10^{-4} [28, 41, 77]. Les courbes sous forme d'épine dorsale présentées ici sont obtenues avec un seul pas de la MAN.

5.2.3.a Poutre isotrope prismatique

La poutre isotrope utilisée dans cet exemple est la même que celle utilisée dans [11–13, 139] pour modéliser une pale d'un rotor avec une vitesse linéaire subsonique au bout de la pale. Elle est présentée sur la figure 5.8 et a pour caractéristiques : longueur $L = 9\text{ m}$, densité par unité de longueur $\mu = 10\text{ kg/m}$, rigidité de flexion $EI = 3.99 \times 10^5\text{ Nm}^2$, rigidité axiale $EA = 2.23 \times 10^8\text{ N}$, rayon du moyeu $r = 0.5\text{ m}$, et une vitesse angulaire constante $\Omega_3 = 30\text{ rad/s}$.

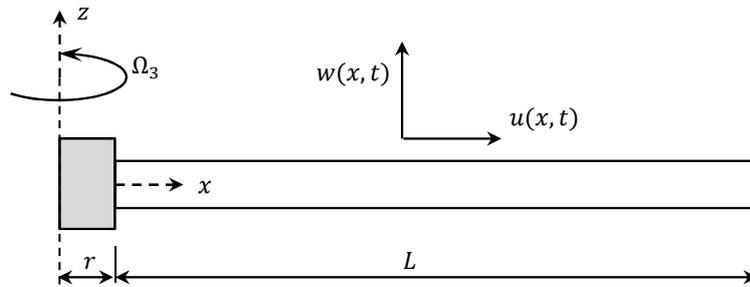


Figure 5.8 Schéma d'une poutre rotative, prismatique et isotrope [11–13, 139]

Les papiers [11–13, 139] ont traité l'aspect non linéaire des vibrations de flexion en utilisant des modèles dynamiques non-linéaires pour construire les modes normaux non-linéaires (MNNs). Dans [139], les auteurs ont utilisé le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli et les séries asymptotiques et les variétés invariantes pour la construction des modes normaux non-linéaires. La référence [11] montre que l'approche basée sur Galerkin présente une meilleure réduction que les séries asymptotiques utilisées dans [139], particulièrement pour les grands déplacements. Dans [12], le modèle de poutre a été basé sur les relations de déplacements-déformations de Von Karman. Les auteurs ont appliqué la méthode des échelles multiples (MEM) sur les équations de mouvement discrétisées par une réduction de Galerkin afin de construire les MNNs. Dans [13], le modèle dynamique utilisé est basé sur une formulation géométriquement exacte tout en utilisant la MEM pour construire les MNNs.

Le tableau 5.5 présente les fréquences naturelles transversales (de battement) et axiales (d'extension), notées respectivement par ω_{fi} et ω_{ai} . On peut remarquer qu'il y a une concordance parfaite entre les présents résultats et ceux de [13]. Les différences avec [11, 139] sont

5.2. Vibrations libres non-linéaires

dues au modèle dynamique basé sur Euler-Bernoulli, et avec [12] à cause des relations de Von Karman utilisées comme l'unique source de géométrie non-linéaire.

Pour les courbes de réponse, les figures suivantes concernent le déplacement transversal de battement du bout de la poutre. La figure 5.9 montre deux courbes solutions correspondant aux deux vecteurs propres associés à la première fréquence naturelle, en utilisant la MAN avec les approximants de Padé, un ordre de troncature $n = 20$ et un paramètre de convergence $\eta_p = 10^{-9}$. La courbe $C3$ (valeur absolue de $C2$) est ajoutée afin de faciliter la comparaison. On remarque qu'il n'y a pas de symétrie entre les deux solutions. A cette vitesse angulaire $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$, la poutre exhibe un comportement durcissant, identique à celui montré dans [11, 139]. Cependant, elle exhibe un comportement assouplissant dans [12, 13].

Dans les papiers [12, 13], les courbes solutions sont présentées avec une amplitude maximale très faible, alors que pour ce type de géométries de poutres flexibles, une courbe solution doit être plus significative avec une amplitude ayant un ordre de grandeur important et accompagnée d'une étude de précision. Pour cette dernière raison et pour valider l'efficacité de notre approche, premièrement, le résidu tout le long de la courbe solution, défini par la fonctionnelle elle-même, i.e. l'équation (4.35), est présenté dans la figure 5.10, avec une valeur moyenne autour de 10^{-5} . Deuxièmement, la courbe solution obtenue est présentée avec la courbe de réponse forcée dans la figure 5.11, ce qui indique, encore une fois, la précision des résultats obtenus. Les réponses forcées non-linéaires des poutres rotatives sont le sujet du papier [28] et il fera l'objet du chapitre suivant.

La figure 5.12 montre le déplacement axial lié aux mouvements de battement du premier mode. Au point de bifurcation, i.e. à l'état stationnaire, les forces centrifuges entraînent une extension de la poutre et par conséquent l'extrémité de la poutre aura un déplacement axial positif. L'augmentation du déplacement vertical le long de la courbe de réponse entraîne une diminution de ce déplacement axial.

Table 5.5

Les premières fréquences naturelles ω_{fi} de battement et ω_{ai} d'extension (rad/s), d'une poutre prismatique rotative à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$ en comparaison avec [11–13, 139]

| | ω_{f1} | ω_{f2} | ω_{f3} | ω_{f4} | ω_{a1} | ω_{a2} |
|------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Présent | 33.99 | 95.67 | 199.75 | 349.20 | 825.84 | 2473.14 |
| Pesheck et al. 2002 [139] | 34.03 | 95.84 | 200.5 | 351.5 | 824.1 | 2473.9 |
| Apiwattanalungarn et al. 2003 [11] | 34.03 | 95.84 | 200.49 | 351.49 | - | - |
| Arvin et al. 2011 [12] | 35.06 | 95.04 | 201.23 | 352.08 | 823.65 | 2472.40 |
| Arvin et al. 2012 [13] | 34.00 | 95.75 | 200.19 | 350.72 | 823.65 | 2472.40 |

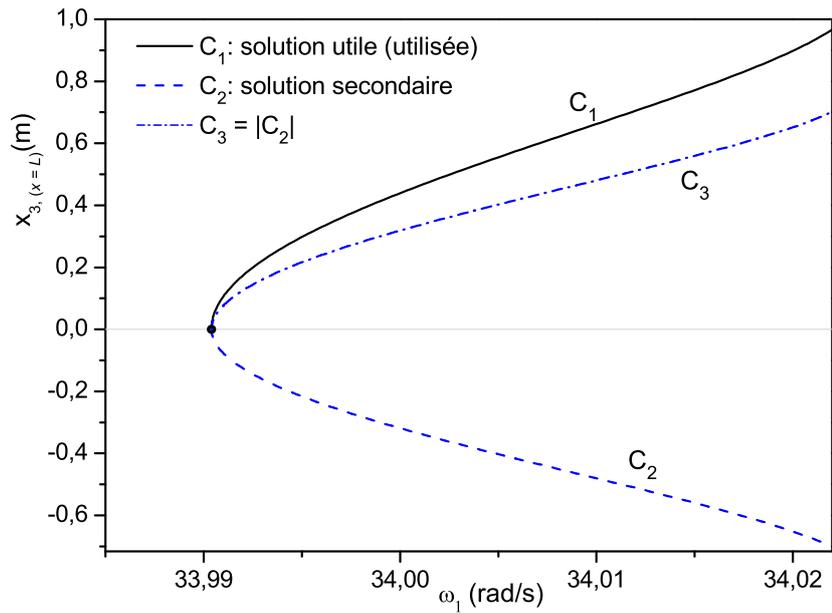


Figure 5.9 Courbe d'épine dorsale correspondant au premier mode de battement non-linéaire d'une poutre encastree, prismatique et isotrope. En utilisant la MAN-Padé, avec $n = 20$, $\eta_p = 10^{-9}$ et $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$ - (•) solution stationnaire.

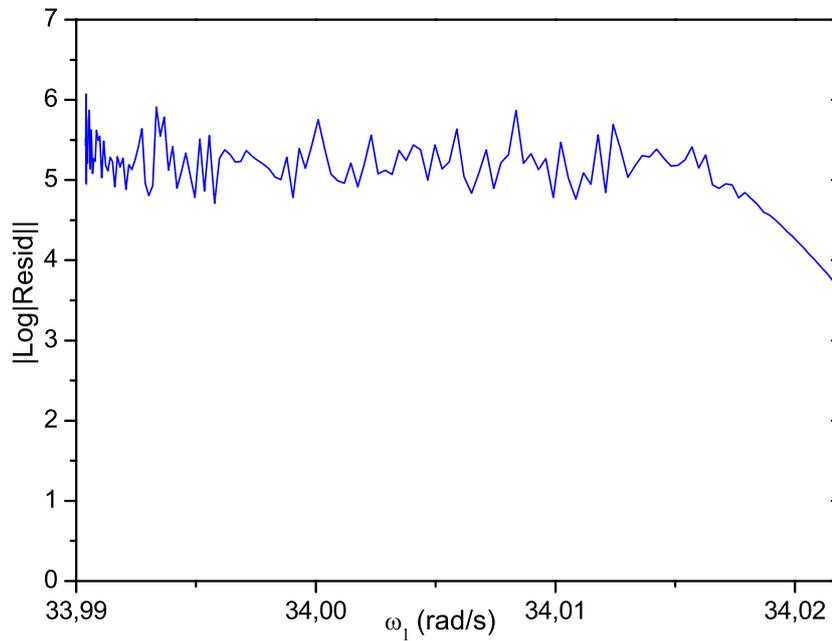


Figure 5.10 La précision de la courbe de réponse correspondante au premier mode de battement non-linéaire, d'une poutre encastree prismatique et isotrope, à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$, MAN-Padé, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$

5.2. Vibrations libres non-linéaires

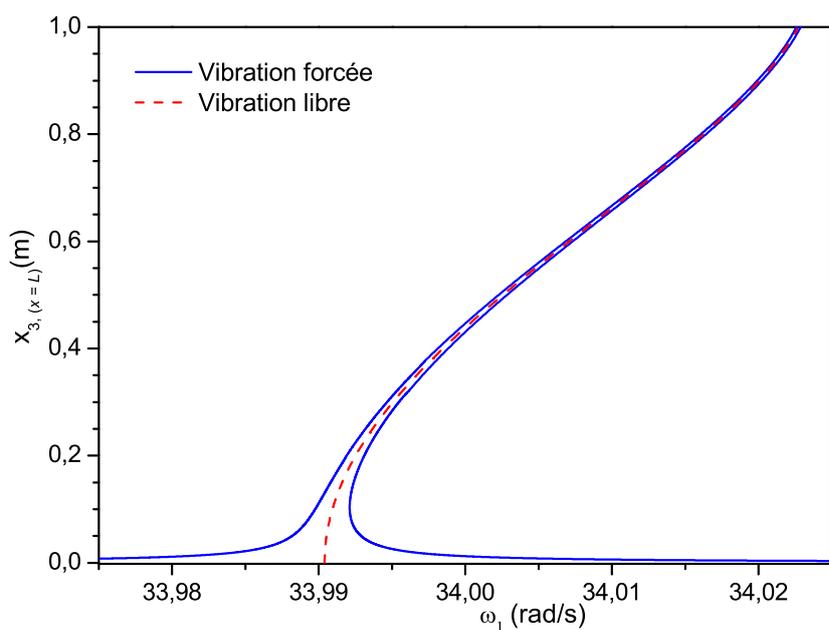


Figure 5.11 Les courbes de réponse de vibrations libre et forcée du premier mode de battement, d'une poutre encastree prismatique et isotrope, à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$, MAN-Padé, avec $n = 20$, $\eta_p = 10^{-9}$ et une amplitude de la force appliquée $F_0 = 1 \text{ N}$

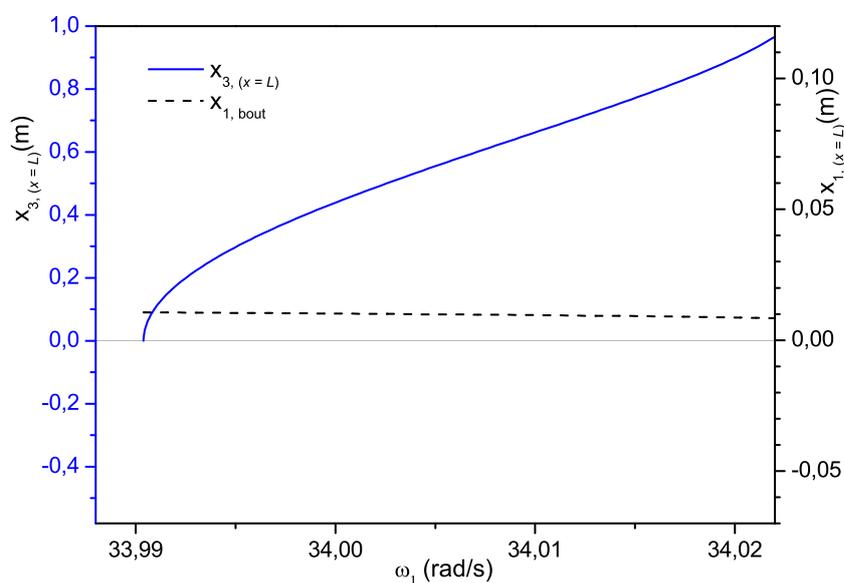


Figure 5.12 Le déplacement axial associé au premier mode de battement non-linéaire, d'une poutre encastree prismatique et isotrope, à $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$

La figure 5.13 résume le comportement du deuxième et du troisième mode non-linéaire de battement et la précision des calculs. Ceci démontre, encore une fois, l'efficacité de cette approche. Ces deux modes exhibent un comportement adoucissant.

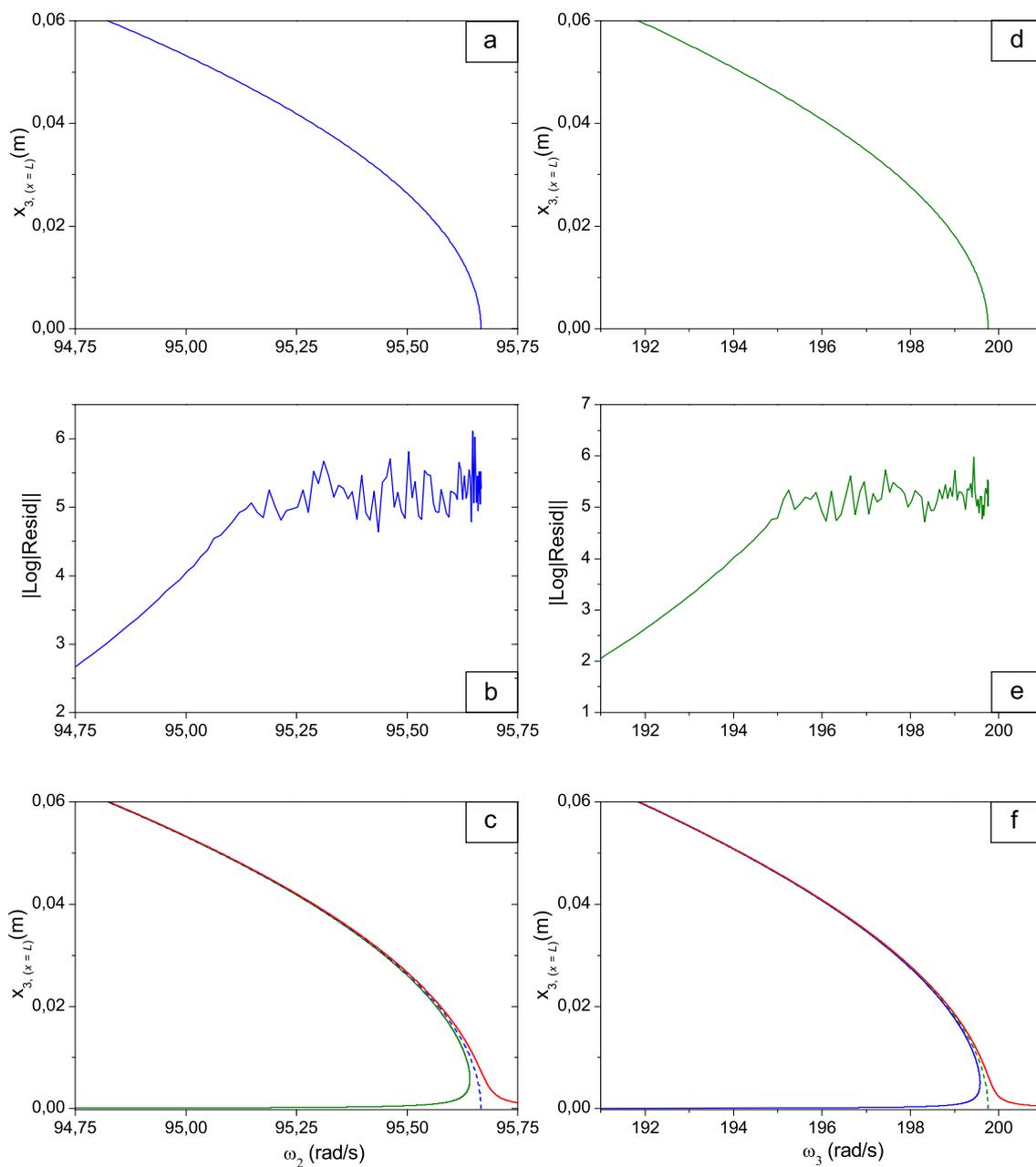


Figure 5.13 Les modes 2 et 3 de vibrations libres de battement, résidus et courbes de réponses forcées d'une poutre encastree prismatique et isotrope. Mode 2 (a, b, et c) et mode 3 (d, e, et f), en utilisant la MAN-Padé, $n = 20$, $\eta_p = 10^{-9}$, $\Omega_3 = 30 \text{ rad/s}$ et des amplitudes de forces $F_0 = 2, 20N$ respectivement

5.2. Vibrations libres non-linéaires

5.2.3.b poutre en composite ACA

Comme exemple de vibrations libres non-linéaires d'une poutre en composite rotative, nous avons repris la poutre-caisson en composite, figure 4.6, étudiée statiquement dans le chapitre 4. Les caractéristiques géométriques, les propriétés des matériaux et les matrices de masse et de rigidité sont définies dans la section 4.4 page (111) et peuvent être trouvées dans [74]. Dans ce papier, l'auteur a étudié l'effet de l'accélération, du repos jusqu'à 100 rad/s , sur la dynamique de la poutre. Pour la simplicité, les forces des actionneurs caractérisées par le couplage forces-moments ne sont pas considérées.

Les quatre premières fréquences naturelles à $\Omega_3 = 0$ et 100 rad/s sont présentées dans la tableau 5.6. On peut remarquer que ces fréquences ne sont pas trop influencées par ce changement de vitesse angulaire. La figure 5.14 montre la courbe d'épine dorsale du premier mode de battement correspondant à la première fréquence dans le tableau 5.6. La courbe du résidu correspondante est présentée dans la figure 5.15 avec une valeur moyenne de 10^{-8} .

Pour les poutres en composite, les déplacements et les rotations sont couplés. La figure 5.16 présente ces variables couplées correspondants au premier mode non-linéaire de flexion en battement à $\Omega_3 = 0$ (courbes continues) et 100 rad/s (courbes discontinues). On peut remarquer que, similairement aux fréquences naturelles, ces courbes sont pratiquement collées et ne sont pas influencées par le changement de la vitesse angulaire. Les déplacements de battement et de corde du bout $x_{2, tip}$ and $x_{3, tip}$ et les rotations correspondantes $\theta x_{3, tip}$ and $\theta x_{2, tip}$ sont du même ordre de grandeur et elles sont importantes relativement aux déplacement axial $x_{1, tip}$ et à la torsion $\theta x_{1, tip}$ respectivement.

Similairement à la poutre prismatique isotrope traitée dans la section 5.3.a, les figures 5.17 et 5.18 montrent les courbes de réponse en épines dorsales du deuxième mode de flexion en battement et le premier mode de torsion correspondants aux deuxième et troisième fréquences propres au repos. La courbe de réponse de vibration libre du deuxième mode de flexion est

Table 5.6

Les premières fréquences naturelles de flexion ω_{fi} et de torsion ω_{ti} (rad/s) de la poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0$ et $\Omega_3 = 100 \text{ rad/s}$

| Ω_3 (rad/s) | ω_{f1} | ω_{f2} | ω_{t1} | ω_{f3} |
|---------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | 8882.25 | 9966.60 | 33687.99 | 41106.02 |
| 100 | 8882.52 | 9966.78 | 33687.95 | 41106.47 |

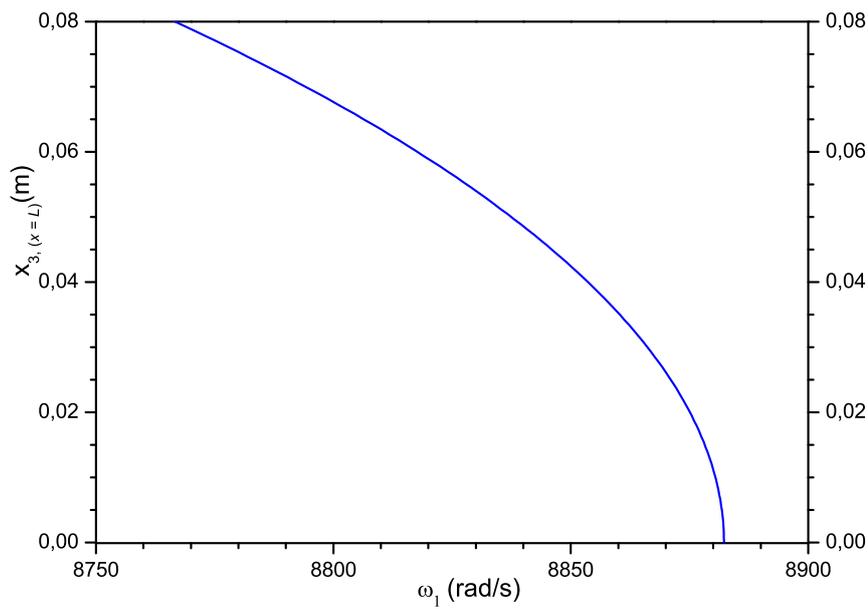


Figure 5.14 Courbe de réponse libre du premier mode non-linéaire de battement - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, utilisant MAN-Padé, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$

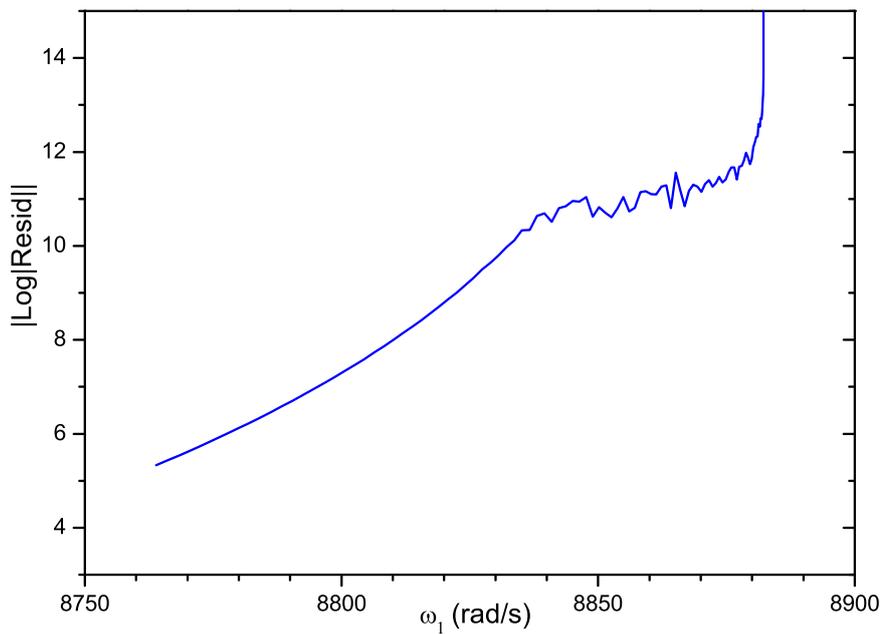


Figure 5.15 Précision de premier mode de battement - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, utilisant MAN-Padé, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$

5.2. Vibrations libres non-linéaires

présentée avec la courbe de réponse forcée dans figure 5.17. La précision dans les deux cas est approximativement d'une valeur moyenne de 10^{-5} . La dernière courbe présente une non-linéarité faible.

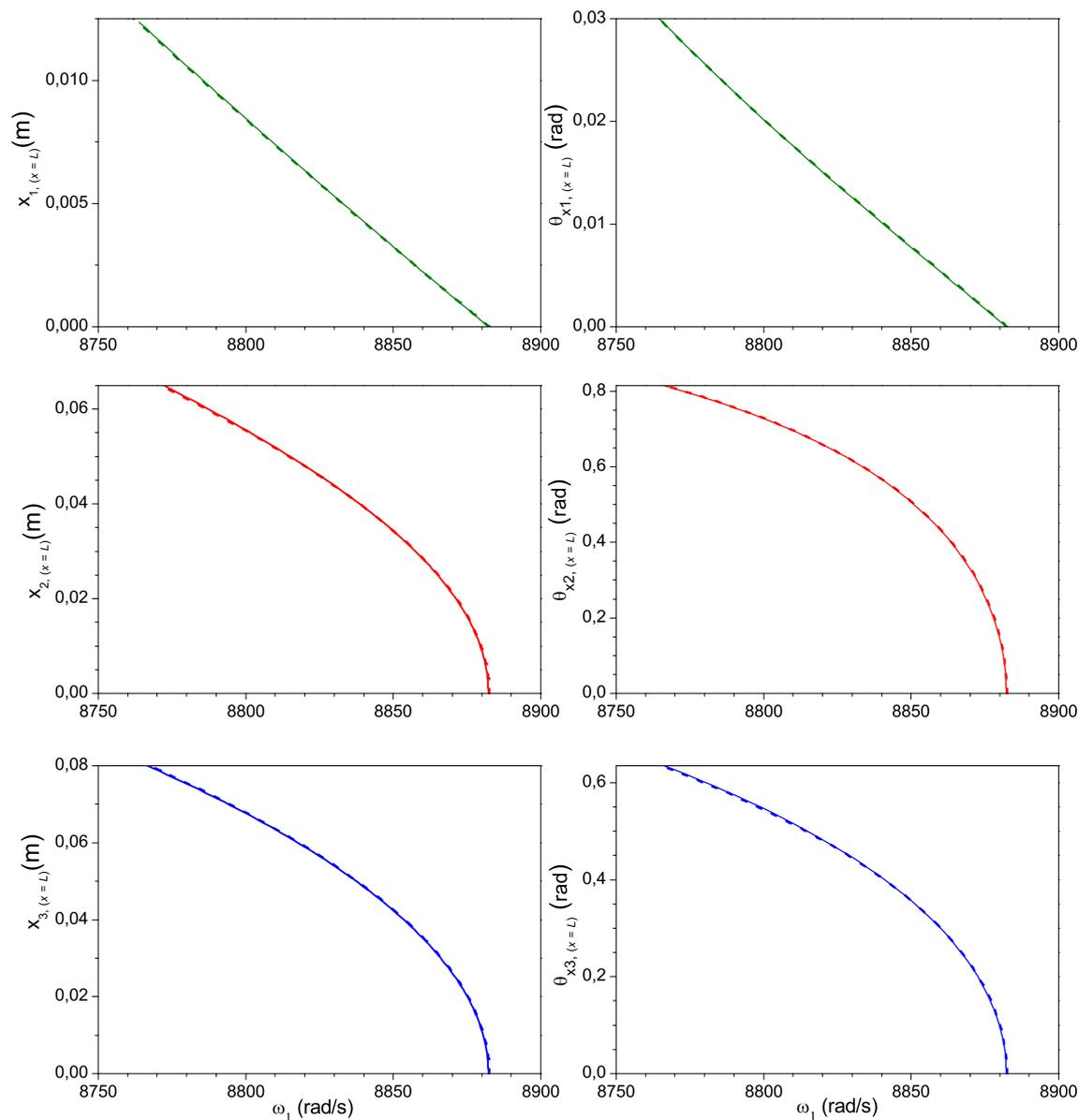


Figure 5.16 Couplage des déplacements et des rotations correspondants au premier mode non-linéaire de flexion en battement - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ (—) et $\Omega_3 = 100 \text{ rad/s}$ (---), avec $n = 20$ and $\eta_p = 10^{-9}$

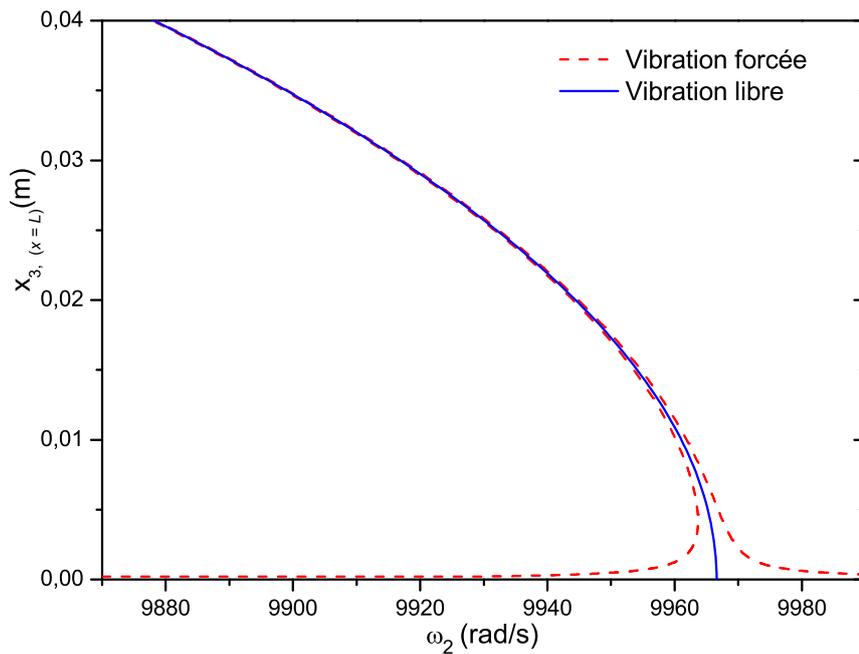


Figure 5.17 Courbe de réponse libre du 2^{eme} mode non-linéaire (de battement) - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, $F_0 = 1 \text{ N}$, MAN-Padé, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$

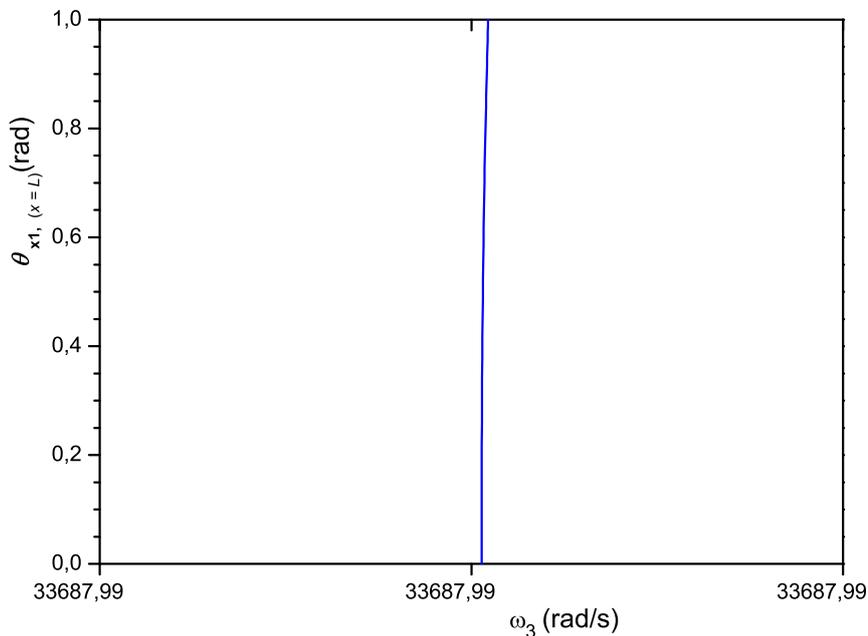


Figure 5.18 Courbe de réponse libre du 3^{eme} mode non-linéaire (de torsion) - Poutre-caisson en composite à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, utilisant MAN-Padé, avec $n = 20$ et $\eta_p = 10^{-9}$

5.3. Bilan du chapitre

A partir des courbes des résidus, figures 5.10, 5.13b, 5.13e, et 5.15, une perte de précision est observée, qui est discutée dans [28]. Cette perte de précision de la MAN peut être améliorée par l'introduction d'un correcteur dans les calculs, telle que la méthode proposée dans [46], qui a l'avantage d'améliorer la qualité de la solution sans augmenter le temps de calcul.

En terme de stabilité, lorsque la courbe du mode principal exhibe un comportement durcissant, la bifurcation de Hopf est super-critique, et la stabilité est échangée localement. Cependant, dans le cas d'un comportement assouplissant la bifurcation de Hopf est sous-critique, et la courbe de réponse (la branche solution) est localement instable [153].

Il faut noter que seules les courbes de réponses libres sont déterminées par un seul pas. Les courbes de réponses forcées sont déterminées par plusieurs pas. Ceci s'explique par le fait que l'équation du paramètre de chemin 5.12 est moins contraignante que celle utilisée dans le chapitre suivant 6.2.

5.3 Bilan du chapitre

Ce chapitre était destiné à étudier les vibrations libres non-linéaires des poutres rotatives dans le domaine fréquentiel en utilisant les méthodes de continuation. L'analyse modale linéaire a permis de déterminer les causes principales de la non-linéarité pour les deux types de poutres : les poutres prismatiques isotropes et les poutres en composite. Les fréquences naturelles obtenues sont comparées avec la littérature et l'effet de la vitesse de rotation sur le comportement des poutres est étudié.

Un nouvel algorithme pour le calcul des branches solutions à partir des points de bifurcation de Hopf (co-rang 2) a été développé. Cet algorithme est basé sur la MAN et la réduction de Lyapunov-Schmidt. Les applications se sont limitées, aux calculs des courbes de réponse des vibrations libres non-linéaires (courbes d'épine dorsales). Cependant, la technique peut être utilisée dans d'autres domaines d'application en rapport avec les points de bifurcations de Hopf dégénérés et non-dégénérés. Une attention particulière a été donnée à l'effet du couplage entre les variables de déplacements qui sont omniprésentes dans le cas des poutres en composite.

Il a été démontré que le système linéaire du second ordre, i.e. deuxième ordre de troncature, est équivalent à l'équation algébrique de bifurcation utilisée dans la littérature et obtenue à partir de la seconde différentiation de la fonctionnelle.

Comme complément de cette étude, nous étudions, dans le chapitre suivant, les vibrations forcées non-linéaires des poutres rotatives en utilisant un autre algorithme de la MAN en parallèle avec la méthode de continuation pseudo-longueur d'arc.

Chapitre 6

Vibrations forcées non-linéaires des poutres rotatives

Sommaire

| | |
|--|------------|
| 6.1 Algorithmes de continuation pour les vibrations forcées non-linéaires | 147 |
| 6.1.1 Algorithme de la méthode asymptotique numérique (MAN) . . . | 147 |
| 6.1.2 Algorithme de la méthode pseudo-longueur d'arc (PLA) | 148 |
| 6.1.3 Stabilité des solutions | 150 |
| 6.2 Résultats numériques | 151 |
| 6.2.1 Poutres prismatiques isotropes | 151 |
| 6.2.2 Poutres en composites | 154 |
| 6.3 Bilan du chapitre | 164 |

Introduction

L'étude des vibrations forcées est d'une importance capitale, elle permet de comprendre le comportement dynamique des poutres et par conséquent d'en faire un bon contrôle et un dimensionnement adéquat. Ce chapitre est dédié à l'analyse des vibrations forcées des poutres rotatives dans le domaine fréquentiel. La première section est consacrée à l'établissement de deux algorithmes : le premier est basé sur la MAN et le deuxième sur la méthode pseudo-longueur d'arc. La deuxième section est dédiée aux résultats numériques, qui porteront sur des poutres prismatiques isotropes et des poutres composites. Dans le cas des poutres isotropes et sans courbure, nous allons confirmer encore une fois que la source de non-linéarité est la vitesse de rotation. Des phénomènes vibratoires tels que la résonance interne et la saturation

6.1. Algorithmes de continuation pour les vibrations forcées non-linéaires

accompagnant généralement les vibrations forcées sont rencontrées dans le cas de la poutre en composite ATR, vue dans le chapitre précédent. Ces phénomènes sont identifiés et analysés.

6.1 Algorithmes de continuation pour les vibrations forcées non-linéaires

6.1.1 Algorithme de la méthode asymptotique numérique (MAN)

Dans cette section, un algorithme de continuation basé sur la MAN est développé pour résoudre le problème de vibrations forcées (4.35) et obtenir les courbes de réponse. Les inconnues sont le vecteur de déplacement généralisé \bar{q} et la fréquence ω , qui peuvent être développés sous forme de séries de puissance (2.17, 5.11) en fonction d'un paramètre de chemin 'a' au voisinage d'une solution régulière (\bar{q}_0, ω_0) , qui est supposée connue :

$$\begin{cases} \bar{q}(a) = \bar{q}_0 + \sum_{j=1}^n a^j \bar{q}_j \\ \omega(a) = \omega_0 + \sum_{j=1}^n a^j \omega_j \end{cases} \quad (6.1)$$

dans lequel \bar{q}_j et ω_j sont les nouvelles inconnues que l'on doit calculer. Le paramètre de chemin 'a' peut être défini comme la projection des incréments de \bar{q} et ω sur le vecteur tangent (\bar{q}_1, ω_1) , dite projection sphérique [57], :

$$a = (\bar{q} - \bar{q}_0)^T \bar{q}_1 + (\omega - \omega_0) \omega_1 \quad (6.2)$$

En introduisant les développements (6.1) dans les équations (4.35) et (6.2) et égalisant les termes ayant les mêmes puissances en 'a', on obtient des systèmes linéaires à l'exception du système d'ordre zéro qui est non-linéaire :

Ordre 0

$$\mathcal{R}(\bar{q}_0, \omega_0) = \omega_0 \bar{A} \bar{q}_0 + \bar{B} \bar{q}_0 + \bar{C} \bar{q}_0 \cdot \bar{q}_0 + \bar{D} = 0 \quad (6.3)$$

L'ordre zéro est lié au premier point de la branche. Généralement ω_0 est choisi égal à zéro, ainsi \bar{q}_0 correspond à la solution de l'état stationnaire et peut être obtenue avec une méthode itérative telle que celle de Newton-Raphson. Ce calcul est fait seulement pour le pas initial de la méthode de continuation.

Ordre 1

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\bar{q}} \bar{q}_1 = -\omega_1 \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_0 \\ \bar{q}_1^T \cdot \bar{q}_1 + \omega_1^2 = 1 \end{cases} \quad (6.4)$$

Ordre p

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\bar{q}} \bar{q}_p = D_p \\ \bar{q}_1^T \cdot \bar{q}_p + \omega_1 \omega_p = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\text{avec } D_p = -\omega_p \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_0 - \sum_{i=1}^{p-1} \omega_{p-1} \bar{\mathcal{A}} \bar{q}_i + \bar{\mathcal{C}}_{\bar{q}_i} \cdot \bar{q}_{p-i}$$

où la Jacobienne, considérée régulière en \bar{q}_0 , est définie par :

$$\mathcal{R}_{\bar{q}} = \omega_0 \bar{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{B}} + 2\bar{\mathcal{C}} \bar{q}_0 \quad (6.6)$$

Comme il a été expliqué dans le chapitre 5, les solutions polynomiales (6.1) peuvent être améliorées avec l'introduction des fractions de Padé. Ces solutions sont bien concordantes dans un domaine de validité $[0 \ a_{ms}]$, ou $[0 \ a_{mp}]$ et diverge en dehors de ce domaine. Les limites a_{ms} (ou a_{mp}) peuvent être calculées automatiquement en utilisant un des deux critères (2.29) ou (2.30).

En réappliquant itérativement cet algorithme, en prenant un point de la zone de validité comme le nouveau point de départ du prochain pas, rend possible la détermination de toute la courbe réponse.

6.1.2 Algorithme de la méthode pseudo-longueur d'arc (PLA)

Un autre algorithme basé sur la méthode pseudo-longueur d'arc (PLA) [122] est présenté dans le but de valider les résultats obtenus avec la MAN. Cette méthode est un schéma prédicteur-correcteur et il est basé sur deux étapes :

Step 1 : Prédiction

La différentiation de l'équation (4.35) par rapport au paramètre de chemin en (\bar{q}_0, ω_0) donne :

$$\mathcal{R}_{\bar{q}} \bar{q}'_0 + \mathcal{R}_{\omega} \omega'_0 = 0 \quad (6.7)$$

6.1. Algorithmes de continuation pour les vibrations forcées non-linéaires

où, $\mathcal{R}_{\bar{q}}$ et \mathcal{R}_{ω} sont les dérivées par rapport à \bar{q} et ω .

Pour un vecteur tangent normalisé ($\bar{q}'_0{}^T \cdot \bar{q}'_0 + \omega'_0{}^2 = 1$), on aura :

$$\omega'_0 = \pm(1 + z^T \cdot z)^{-1/2} \quad (6.8)$$

où à partir de (6.7),

$$\bar{q}'_0 = \omega'_0 z, \text{ avec } z = -\mathcal{R}_{\bar{q}}^{-1} \mathcal{R}_{\omega} \quad (6.9)$$

Le signe dans (6.9) détermine la direction de continuation. Par conséquent, le point de prédiction est obtenu avec un pas de continuation Δs :

$$\begin{cases} \bar{q}_1 = \bar{q}_0 + \bar{q}'_0 \Delta s \\ \omega_1 = \omega_0 + \omega'_0 \Delta s \end{cases} \quad (6.10)$$

Step 2 : Correction

Ce point est corrigé le long de la normale du vecteur tangent $(\bar{q}'_0{}^T, \omega'_0{}^T)^T$. On obtient une seconde équation :

$$\mathbf{G}(\bar{q}, \omega) = (\bar{q} - \bar{q}_0)^T \bar{q}'_0 + (\omega - \omega_0) \omega'_0 - \Delta s = 0 \quad (6.11)$$

où, s est la coordonnée curviligne.

Les équations (4.35) et (6.11) définissent le système non-linéaire à résoudre par la méthode de Newton-Raphson. Les inconnues à l'itération $(k + 1)$ sont définies par :

$$\begin{cases} \bar{q}_{k+1} = \bar{q}_k + \Delta \bar{q} \\ \omega_{k+1} = \omega_k + \Delta \omega \end{cases} \quad (6.12)$$

En introduisant ces deux incréments dans les équations (4.35) et (6.11) et en négligeant les termes du second ordre en $\Delta \bar{q}$ et $\Delta \omega$, on obtient le système linéaire suivant à résoudre par la méthode itérative de Newton :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\bar{q}} \Delta \bar{q} + \mathcal{R}_{\omega} \Delta \omega = -\mathcal{R}(\bar{q}, \omega) \\ \bar{q}'^T \Delta \bar{q} + \omega' \Delta \omega = -\mathbf{G}(\bar{q}, \omega) \end{cases} \quad (6.13)$$

6.1.3 Stabilité des solutions

L'étude de la stabilité locale est cruciale pour statuer si les solutions obtenues sont physiquement possibles ou non. La section 2.4 du chapitre 2, page (39), donne une description sur l'étude de la stabilité locale, qui se fait en ajoutant une perturbation à la solution considérée q_0 à ω_0 :

$$q(t) = q_0(t) + Q(t) \quad (6.14)$$

La stabilité de q_0 est liée au comportement de la perturbation Q . Si la perturbation disparaît avec le temps, alors q_0 est stable, et si elle augmente alors q_0 est instable. La perturbation est d'abord étudiée dans le domaine temporel et ensuite en appliquant la méthode de l'équilibrage harmonique on passe au domaine fréquentiel, ce qui est convenable pour les deux méthodes de continuation : la MAN et la PLA. En substituant l'équation (6.14) dans (4.19) et en développant le résultat sous forme d'une série de Taylor aux environs de q_0 tout en préservant seulement les termes linéaires de la perturbation, on obtient :

$$\mathcal{A}_{ki}\dot{Q} + \mathcal{B}_{ki}Q + 2\mathcal{C}_{kij}q_0 \cdot Q = 0 \quad (6.15)$$

Utilisant la forme de Floquet, la perturbation peut être exprimée comme le produit d'un terme périodique par un terme exponentiel :

$$Q(t) = e^{\xi t} \sum_{j=0}^{\bar{H}-1} (Q_j^c \cos j\omega t + Q_j^s \sin j\omega t) \quad (6.16)$$

où, ξ sont les exposants de Floquet à déterminer. En insérant l'équation (6.16) dans (6.15) et utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique, on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\{(-\bar{M}\bar{K}) - \mu\Delta\}\bar{Q} = 0 \quad (6.17)$$

où, $\bar{Q} = [Q_0^{cT} \ Q_1^{cT} \ Q_1^{sT} \ \dots \ Q_{\bar{H}-1}^{cT} \ Q_{\bar{H}-1}^{sT}]^T$, Δ est la matrice identité, \bar{H} est le nombre des harmoniques utilisées dans l'étude de stabilité. Comme il est noté dans [163], \bar{H} peut être différent du nombre des harmoniques H utilisées dans l'étape de continuation. Pour $\bar{H} = 3$,

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{ki} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{ki} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A}_{ki} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

6.2. Résultats numériques

et \bar{K} est définie par :

$$\bar{K} = \omega_0 \bar{A} + \bar{B} + 2\bar{C}\bar{q}_0 \quad (6.19)$$

Le nombre des exposants de Floquet nécessaires pour déterminer la stabilité de la solution est ($12 n_f$) et ils seront sélectionnés parmi toutes les valeurs propres du système (6.17). Nous adoptons la méthode de sélection utilisée dans [106], basée sur la comparaison de la médiane des vecteurs propres.

Par définition, si x_j est la j^{eme} composante du vecteur x , la médiane est $\sum_j j|x_j|/\sum_j |x_j|$.

Les valeurs propres sélectionnées correspondent aux vecteurs propres ayant les valeurs médianes les plus proches de la valeur $[12 n_f(2\bar{H} - 1)]/2$. Ces exposants de Floquet $\xi_i, i = 1, \dots, 12 n_f$ sont utilisés pour définir la stabilité de la solution.

Si $\Re(\xi_i) < 0$ pour tout i , la solution est asymptotiquement stable.

Si $\Re(\xi_i) > 0$ pour tout $i = 1, \dots, 12 n_f$, la solution est instable.

6.2 Résultats numériques

Dans cette partie, des simulations numériques des vibrations forcées des poutres isotropes et des poutres en composite encastées-libres et rotatives sont faites. Cette analyse prend en considération l'effet des différentes conditions telles que la vitesse angulaire et le rayon du moyeu. Les codes utilisés sont implémentés en utilisant l'environnement MATLAB, alors que les propriétés des sections transversales sont prises de la littérature [6, 7, 73, 127]. En se basant sur les études précédentes, le nombre des fonctions de comparaison est pris $n_f = 10$, montré optimal et utilisé dans tous les cas traités dans [135]. Le nombre des harmoniques $H = 3$ est adopté dans [40, 144] et $\bar{H} = 6$ pour l'étude de la stabilité [163]. Les paramètres choisis pour la MAN sont : l'ordre de troncature $n = 15$ [77], le paramètre de précision est pris $\eta_s = 10^{-4}$ pour la continuation avec la MAN-séries et $\eta_p = 10^{-4}$ pour la MAN-Padé [2, 40], contre un paramètre de précision $\varepsilon = 10^{-7}$ pour la méthode de Newton-Raphson. Pour la méthode de continuation PLA, le pas est pris $\Delta s \leq 1.5$ dans le but d'obtenir une courbe lisse.

6.2.1 Poutres prismatiques isotropes

La figure 6.1 montre la courbe de réponse forcée, relative aux trois premiers modes de flexion de battement, d'une poutre prismatique isotrope excitée par une force concentrée harmonique au bout. Sur l'axe des x , la fréquence est adimensionnelle. La poutre étudiée

ici est traitée dans [73] pour modéliser une pale articulée d'un rotor et étudiée statiquement dans le chapitre 4, page(111). Les valeurs numériques sont : $A = 0.2 \times 0.1 = 0.02 \text{ m}^2$, $E = 1.792 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1770 \text{ kg/m}^3$, $L = 10 \text{ m}$. Pour obtenir trois modes, quatre points initiaux, soit trois étapes sont nécessaires pour la MAN-Padé alors que la MAN-série utilise plusieurs tronçons et quatre segments discontinus. Les valeurs de fréquences naturelles correspondent à celles d'Euler-Bernoulli sans vitesse de rotation présentées dans le tableau Tab5.1.

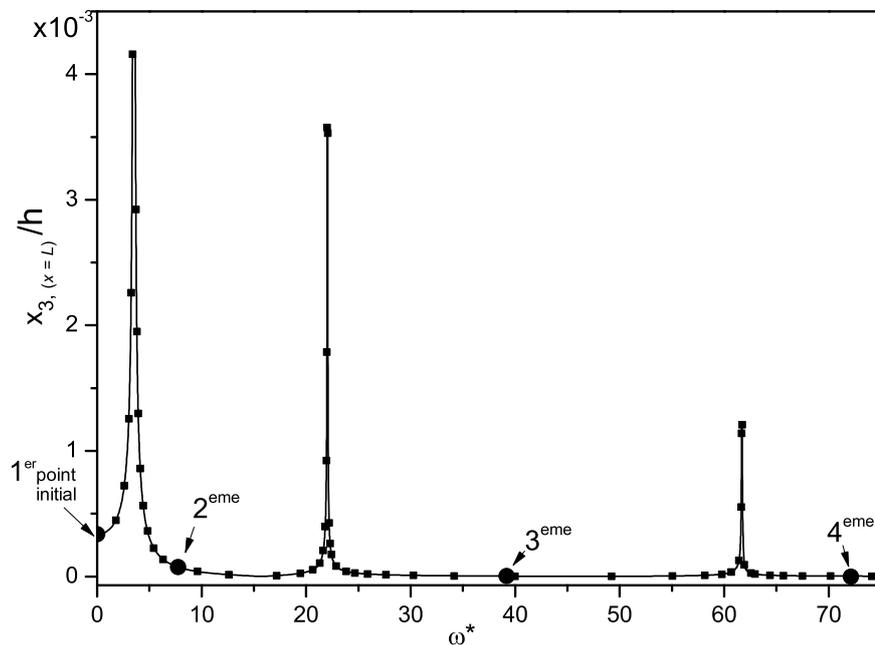


Figure 6.1 Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastrée-libre, excitée harmoniquement à l'extrémité, $F_0 = 10^{-3} \text{ N}$, (● Padé et ■ séries)

La figure 6.2 montre l'effet de la vitesse angulaire sur la courbe réponse du premier mode d'une poutre excitée harmoniquement au bout. On peut remarquer que la fréquence, qui représente le premier mode de flexion de battement, augmente avec la vitesse angulaire et la courbe de réponse devient non-linéaire. La figure 6.3 montre que cette non-linéarité dépend de la valeur de la vitesse angulaire, et que la poutre exhibe un comportement durcissant. Il est indiqué dans [63] qu'une poutre rotative peut exhiber un comportement durcissant ou adoucissant en fonction des conditions géométriques et cinématiques.

6.2. Résultats numériques

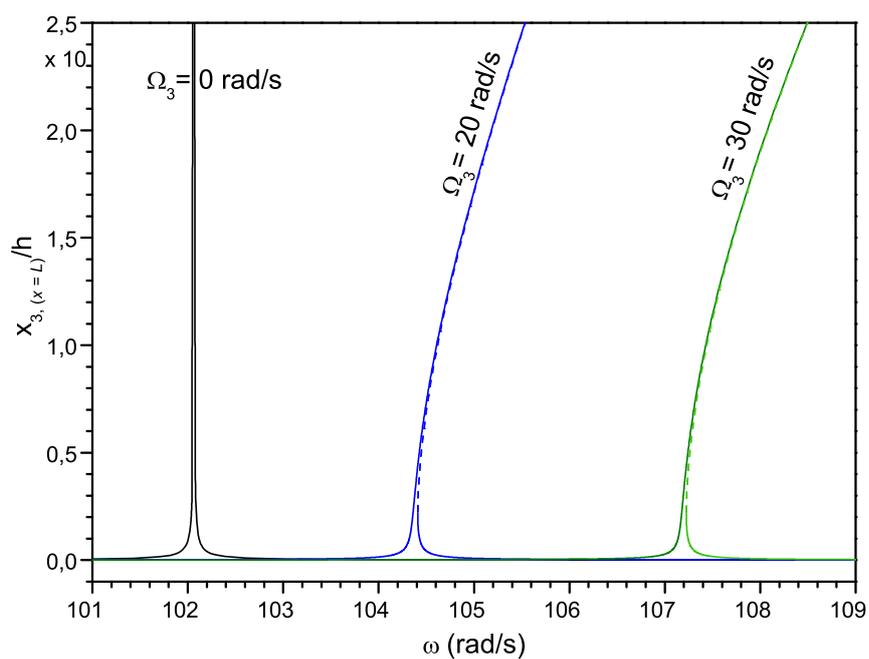


Figure 6.2 Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastree-libre, excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 10^2 N$ - Effet de la vitesse angulaire

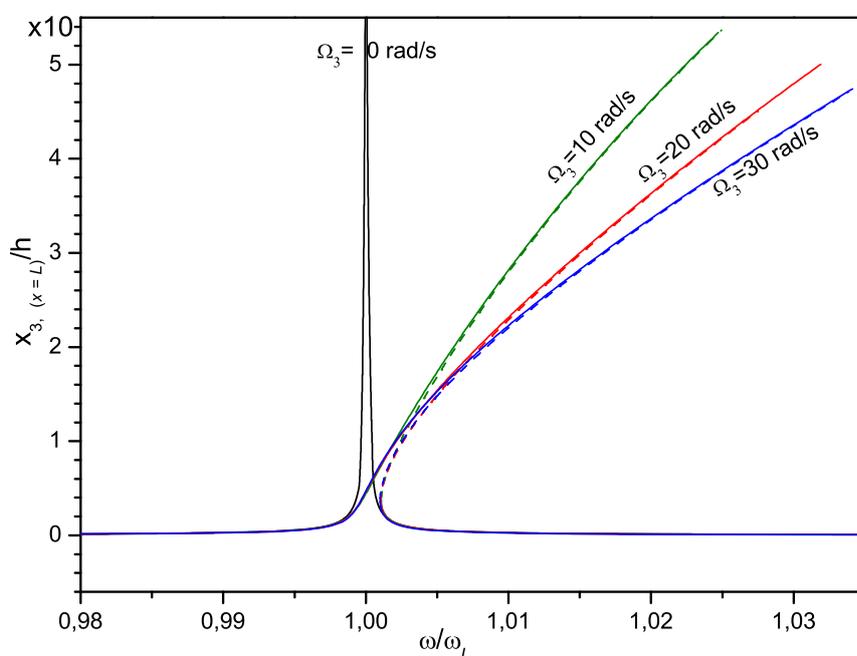


Figure 6.3 Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastree-libre, excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 5 \cdot 10^2 N$, $\Omega_3 = 0 \div 30 \text{ rad/s}$, (--- : solution instable).

Intéressons nous maintenant aux effets des paramètres : Le rayon du moyeu et l'angle de tordage sur les fréquences naturelles. La figure 6.4 est un zoom montrant l'influence de ces paramètres sur les caractéristiques dynamiques sur une poutre rotative. La non-linéarité enregistrée avec l'introduction de ces paramètres n'est pas significative. On peut remarquer que les courbes de réponse se déplacent à droite et que les fréquences naturelles augmentent avec ces paramètres.

Par conséquent, pour une poutre prismatique et isotrope, la cause principale de la non-linéarité est la vitesse angulaire. Le terme de non-linéarité dans (4.35), i.e. le tenseur \bar{C} , disparaît dans le cas d'une vitesse angulaire nulle.

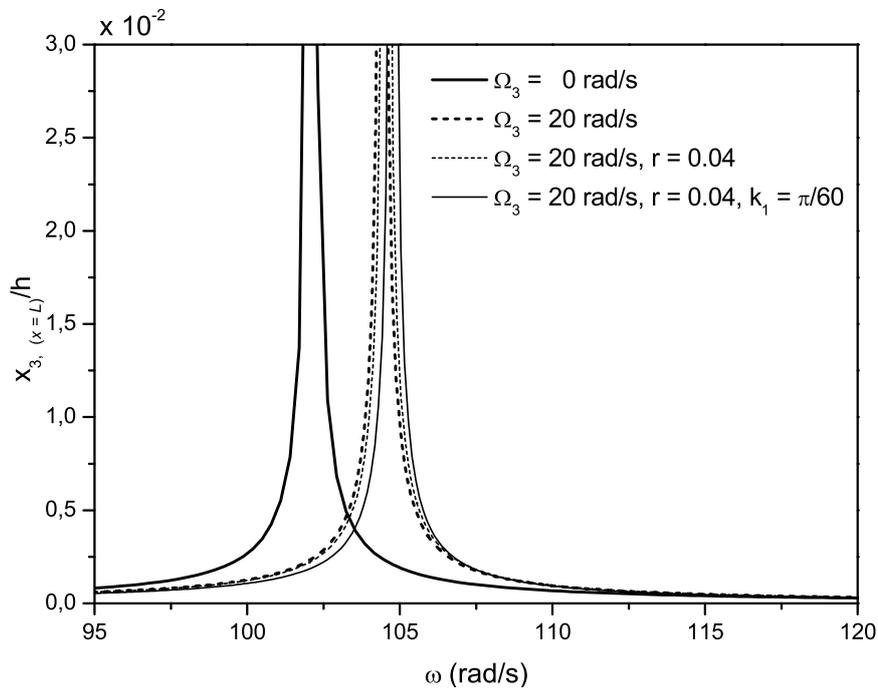


Figure 6.4 Courbe de réponse d'une poutre prismatique, isotrope, encastrée-libre, excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 10^2 N$, $L = 10m$. Effets du rayon du moyeu et du tordage

6.2.2 Poutres en composites

Dans cette partie et pour mieux comprendre les phénomènes relatifs aux résonances internes et aux couplages entre les modes de vibration, deux exemples ont été sélectionnés : le premier exemple concerne une poutre en composite sans résonance interne et le deuxième exemple concerne une poutre en composite avec résonance interne. Ces phénomènes d'interactions modales sont fréquents dans le cas des vibrations forcées des poutres en composite. ils sont accompagnés par des échanges d'énergie entre ces modes.

6.2. Résultats numériques

6.2.2.a Poutres en composites sans résonance interne

Nous revenons à l'exemple de la poutre-caisson en composite, étudiée statiquement dans le chapitre 4, page (112), et les vibrations libres non-linéaires dans le chapitre 5, page (141). Nous avons montré, à travers les figures 5.14 et 5.16, que la vitesse de rotation n'a pas d'influence significative sur le comportement des courbes de réponses du mode menant, i.e. suivant x_3 , et les autres mode en couplage. Les fréquences naturelles sont présentées sur le tableau 5.6. Regardons maintenant l'effet de l'amplitude de l'excitation. La figure 6.5 montre l'effet de l'amplitude de l'excitation sur le comportement des courbes de réponse forcées. On remarque que ces courbes s'élargissent en augmentant l'amplitude de l'excitation et que toutes les courbes tendent vers l'infini. Les autres modes couplés enregistrent aussi le même comportement.

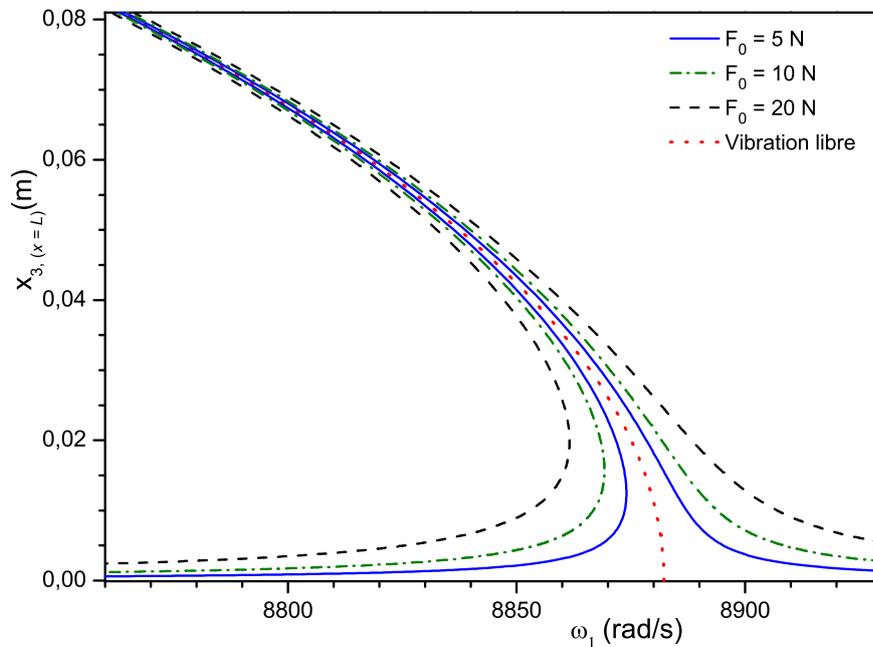


Figure 6.5 Courbes de réponse forcée d'une poutre-caisson en composite encastree-libre, excitée harmoniquement à l'extrémité – effets de l'amplitude d'excitation

6.2.2.b Poutres en composites avec résonance interne

Le modèle de poutre en composite choisi pour ce cas est la pale ATR, décrite et étudiée dans le chapitre précédent du côté analyse modale linéaire. Elle est présentée aussi dans [7, 154, 169]. Dans ces papiers, seulement l'effet de la vitesse angulaire sur les fréquences naturelles a été étudié. Nous allons étudier, à présent, les courbes de réponse des vibrations forcées

non-linéaires de cette pale encastrée et avec vitesse angulaire. Les forces des actionneurs caractérisées par leurs couplages forces-moments ne sont pas considérées. Les caractéristiques géométriques et les matrices de rigidité et de masse sont identifiées dans le tableau 5.3

Le tableau 5.4 présente les quatre premières fréquences naturelles. On peut remarquer que pour ces cas de vitesses angulaires, $\omega_{2/x_3} \approx \omega_{1/x_3} + \omega_{1/x_2}$, ce qui est identifié par la résonance interne, qui implique plus de deux fréquences naturelles du type flexion-flexion [27, 124, 170, 186]. Ce phénomène disparaît pour les vitesses angulaires $\Omega_3 > 20 \text{ rad/s}$. Dans [28], l'interaction entre ces modes et l'échange d'énergie sont discutés dans les deux cas avec et sans vitesse angulaire.

La figure 6.6 montre la courbe de réponse, obtenue par deux méthodes de continuation : la MAN et la PLA. Elle représente le premier mode de flexion en battement, où l'amplitude de la force harmonique appliquée au bout est de $F_0 = 20N$ et sans vitesse angulaire. On peut remarquer que la non-linéarité est plus prononcée pour cette poutre anisotrope et qu'il y a une cohérence parfaite entre les deux méthodes de continuation. Les solutions instables sont présentées par les lignes discontinues. Malgré l'absence d'amortissement, aussi bien dans le modèle mathématique que dans les procédures numériques, la courbe de réponse exhibe un comportement de structure avec amortissement. Ce dernier est dû à la résonance

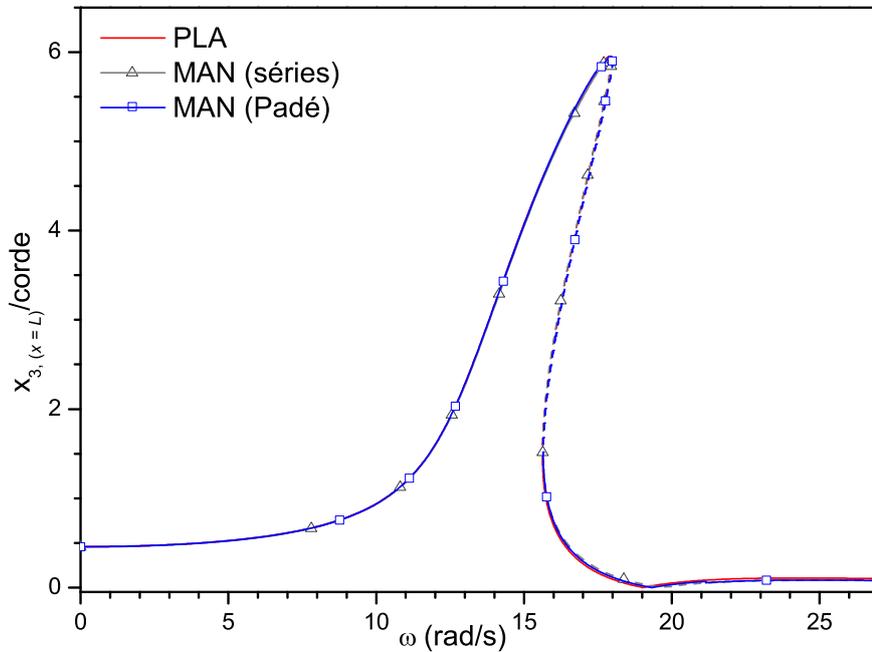


Figure 6.6 Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement à l'extrémité $F_0 = 20N$, $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$, Δ séries, et \square Padé. zone discontinue : solution instable

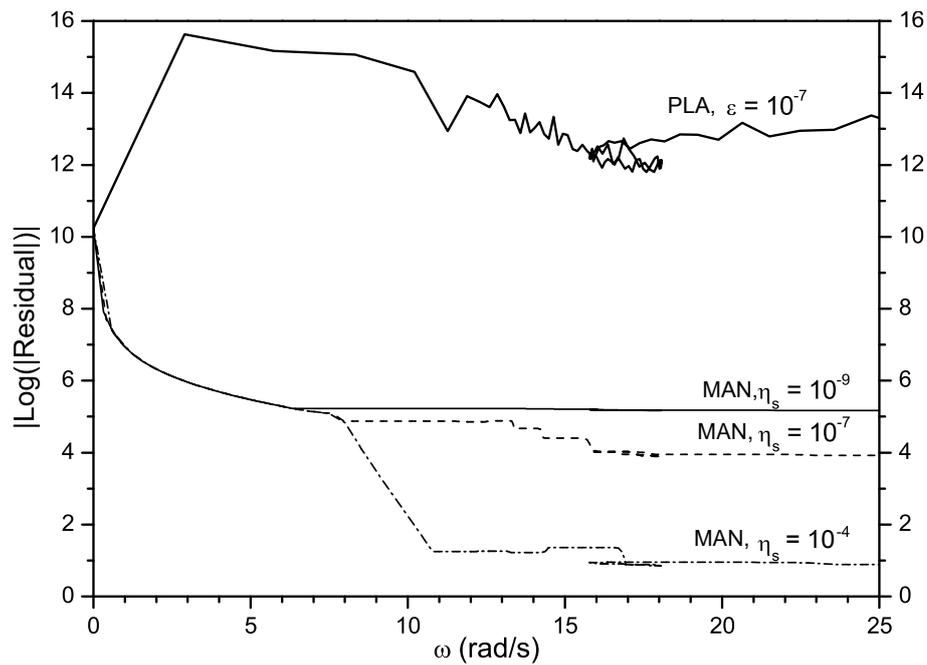
6.2. Résultats numériques

interne entre les déplacements de battement et de corde, ce qui rend apparent l'effet gyroscopique et par conséquent il s'agit du phénomène pseudo-amortissement [54]. Ceci explique, le décalage à l'intérieur de la fréquence naturelle quand l'amplitude de l'excitation augmente, tel qu'il est montré dans la figure 6.8.

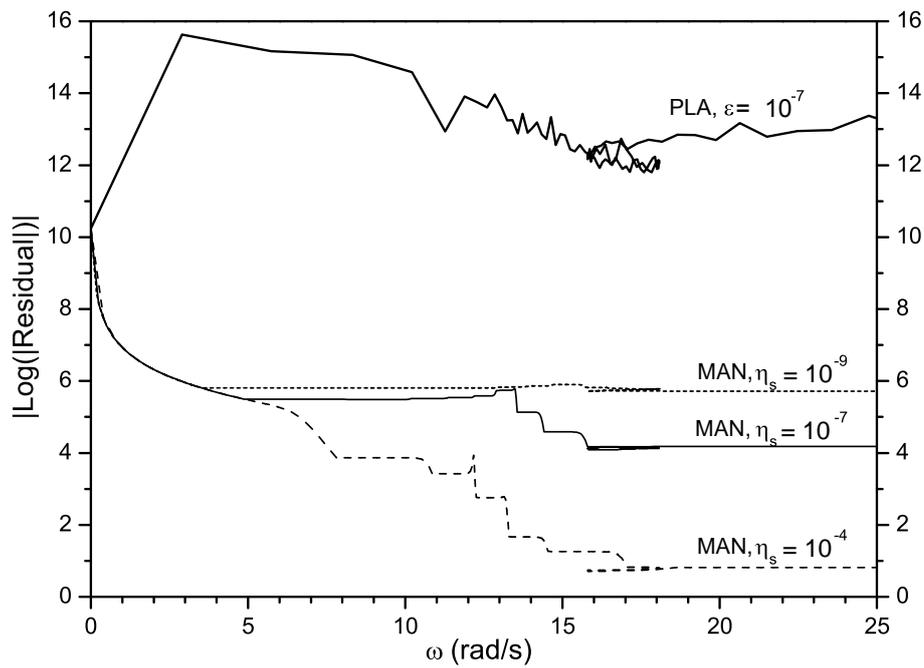
Les figures 6.7(a, b), montre une évaluation de la précision de ces deux méthodes de continuation autour du premier mode ($0 \leq \omega \leq 25 \text{ rad/s}$), le résidu est obtenu à partir de la norme du vecteur $\mathcal{R}(\bar{q}, \omega)$, Eq. (4.35), en se basant sur les paramètres de convergence indiqués sur ces deux figures. L'ordre de troncature est pris $n = 15$ dans la figure 6.7a, et $n = 20$ dans la figure 6.7b. On peut remarquer que la PLA est plus précise que la MAN malgré l'augmentation de l'ordre de troncature, mais comme il est représenté sur le tableau 6.1, la MAN est généralement moins coûteuse en terme de temps de calcul d'unité centrale (UC) que la PLA pour des tolérances de l'ordre ($\eta_s = 10^{-7}$). Ceci est principalement dû au nombre d'inversions de la matrice jacobienne, qui est inférieur avec la MAN qu'avec la PLA. Un autre avantage d'utilisation de la MAN réside dans l'expression analytique de la solution obtenue, sous forme d'une série polynomiale ou même avec les approximants de Padé, et le pas qui est ajusté automatiquement et adapté à la difficulté de la branche, au lieu d'une solution point par point obtenue avec la méthode itérative PLA, avec un pas (Δs) (6.11).

De plus, le tableau 6.1 montre que le temps de calcul UC augmente avec l'ordre de troncature, alors que le nombre de pas (i.e. le nombre des inversions des matrices) diminue. Ceci est dû au temps de construction de la partie droite D_p (6.5) qui est plus grand, pour le nombre des inconnues considérées \bar{q}_i , que le temps pour inverser la matrice Jacobienne. Dans les applications classiques de la MAN, où la discrétisation spatiale est réalisée avec la méthode des éléments finis, une partie importante du temps de calcul est utilisée dans la triangulation de la matrice Jacobienne quand le nombre des inconnues est important.

La figure 6.8 montre l'effet de la magnitude d'excitation pour une poutre non-rotative. Pour ce cas, la courbe de réponse des vibrations libres bifurque du point ($\bar{q} = 0, \omega_1 = 13.64 \text{ rad/s}$). Si on ajoute une vitesse de rotation, le point de bifurcation change ($\omega > \omega_1, \bar{q} \neq 0$), correspondant au nouvel état stationnaire. On peut remarquer que l'amplitude maximale de ces courbes de réponse est insensible à l'amplitude de la force d'excitation. Ce phénomène, appelé saturation, se produit dans les réponses forcées d'un système dynamique avec une non-linéarité quadratique en présence d'une résonance interne[123].



(a) Ordre de troncature $n = 15$



(b) Ordre de troncature $n = 20$

Figure 6.7 Précision de la MAN-série vs. PLA (Cas de la pale ATR excitée harmoniquement à l'extrémité, $F_0 = 20N$ et $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$)

Table 6.1
 Nombre de pas, Temps de calcul UC et le résidu pour $\omega = [0, 25] \text{ rad/s}$. Cas de la pale ATR excitée harmoniquement au bout,
 ($F_0 = 20N$ and $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$)

| | Méthode asymptotique numérique (MAN - séries) | | | | | Pseudo-longueur d'arc | |
|--|---|--------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------|-------------------------|
| | Ordre de troncature n=15 | Ordre de troncature n=20 | PLA | | | | |
| Tolérance | $\eta_s = 10^{-4}$ | $\eta_s = 10^{-7}$ | $\eta_s = 10^{-9}$ | $\eta_s = 10^{-4}$ | $\eta_s = 10^{-7}$ | $\eta_s = 10^{-9}$ | $\varepsilon = 10^{-7}$ |
| Nombre de pas | 14 | 24 | 34 | 13 | 19 | 24 | 284 |
| Temps UC (s) | 117 | 198 | 288 | 185 | 271 | 340 | 224 |
| $ \text{Log}_{10}(\text{Résidu}) $ à $\omega = 25\text{rad/s}$ | 0.815 | 3.92 | 5.17 | 0.89 | 4.18 | 5.72 | 13.22 |

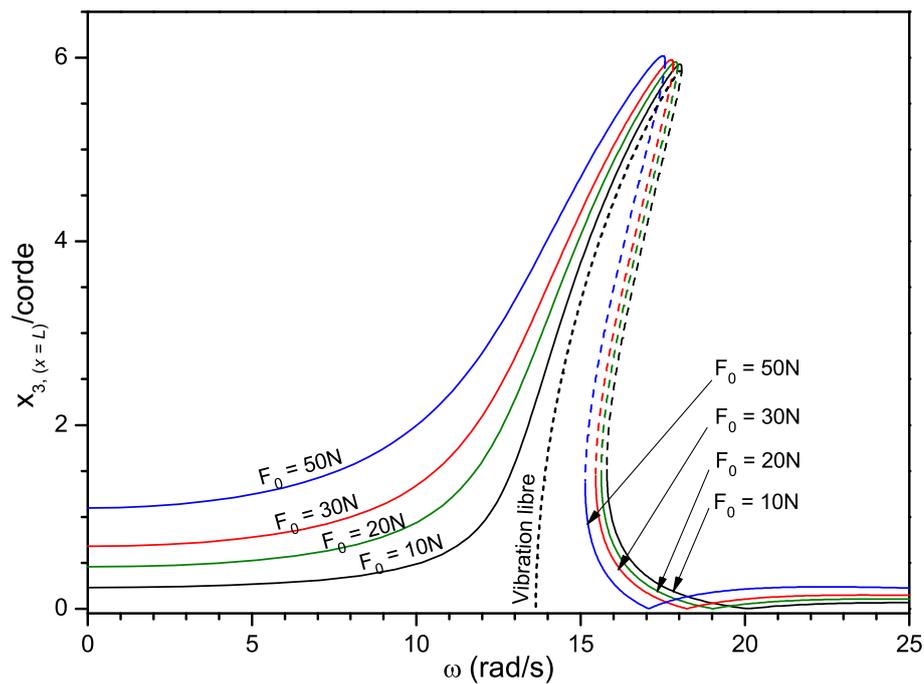


Figure 6.8 Courbes de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout - Effet de l'amplitude de la force, $F_0 = 10N, 20N, 30N$ avec $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$

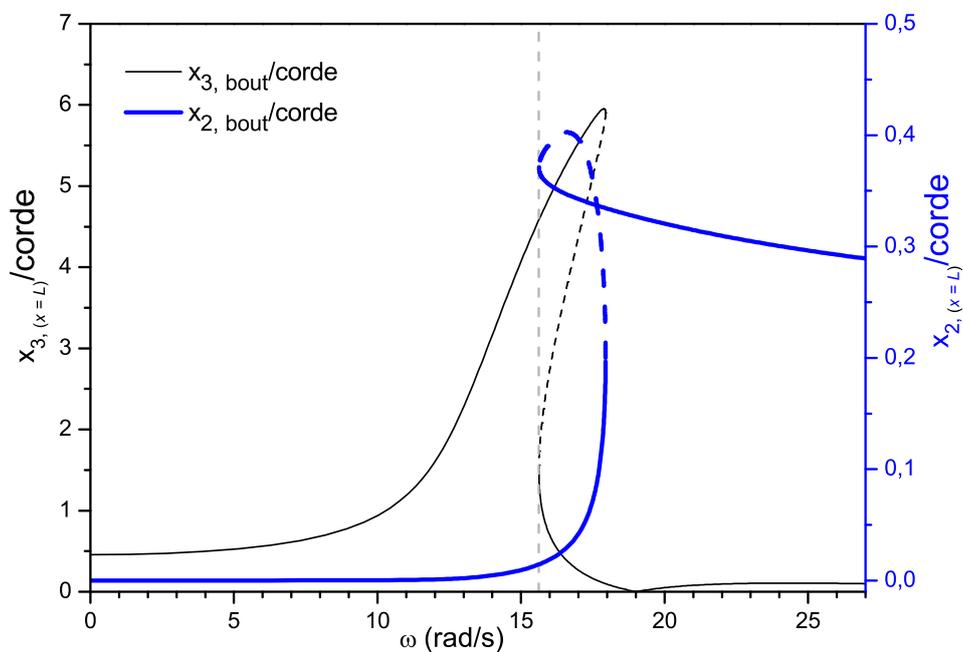


Figure 6.9 Courbes de réponse dans le plan et en dehors le plan de la pale ATR excitée hamonique au bout, $F_0 = 20N, \Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$.
Zones discontinues : slolutions instables

6.2. Résultats numériques

La figure 6.9 montre comment sous l'effet de cette résonance, le premier mode de flexion en battement est accompagné par un autre mode en flexion latéral (corde). On peut remarquer qu'il n'y a pas de branches secondaires et par conséquent le mode compagnon est dû à la fois au couplage et à la résonance interne. Cette courbe du mode accompagnateur est similaire au résultat de [186].

L'amplitude maximale du mode accompagnateur correspond à l'amplitude minimale du mode menant (de battement). Ceci est expliqué par un échange partiel de l'énergie. Il est expliqué dans [186] que lorsqu'une poutre excitée au voisinage du mode de flappement ω_{1/x_3} présentant une résonance interne du type flexion-flexion, il y'aura une interaction et un échange d'énergie avec le mode de corde ω_{1/x_2} .

La figure 6.10 illustre le nouveau format de la courbe de réponse induit par l'introduction d'une vitesse angulaire $\Omega_3 = 20 \text{ rad/s}$. On peut remarquer que la courbe, obtenue par les deux méthodes de continuation MAN série/Padé et la PLA, est distordue et le comportement durcissant est devenu adoucissant sous l'effet de la vitesse angulaire, particulièrement au début de la courbe. La fréquence naturelle du premier mode a augmenté de 13.64 à 25.53 rad/s , comme il est montré dans le tableau 5.4.

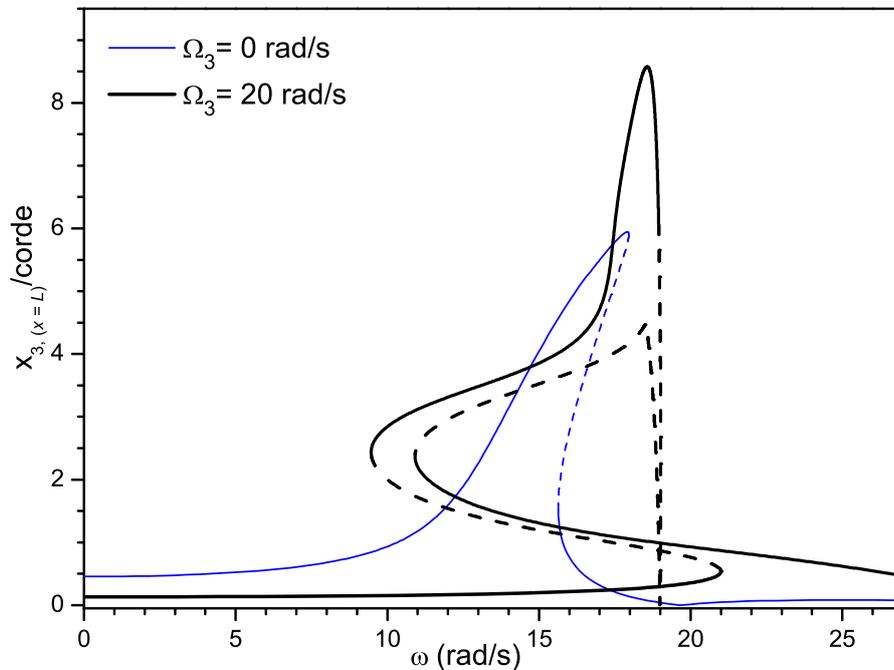


Figure 6.10 Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout— Effet de la vitesse angulaire $F_0 = 20N$, et $\Omega_3 = 20 \text{ rad/s}$

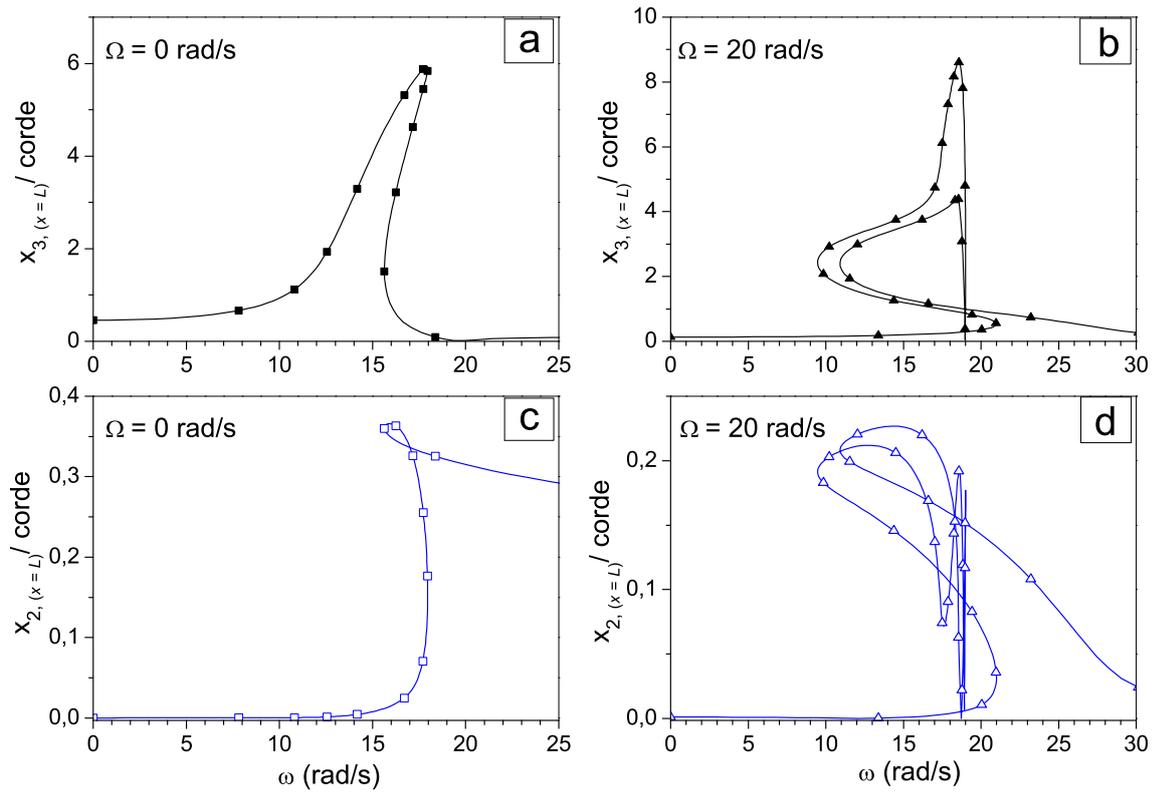


Figure 6.11 Courbes de réponse dans le plan et en dehors le plan de la pale ATR excitée harmoniquement au bout, pour les cas $\Omega_3 = 0$ rad/s et $\Omega_3 = 20$ rad/s. Les symboles indiquent les points initiaux de la MAN

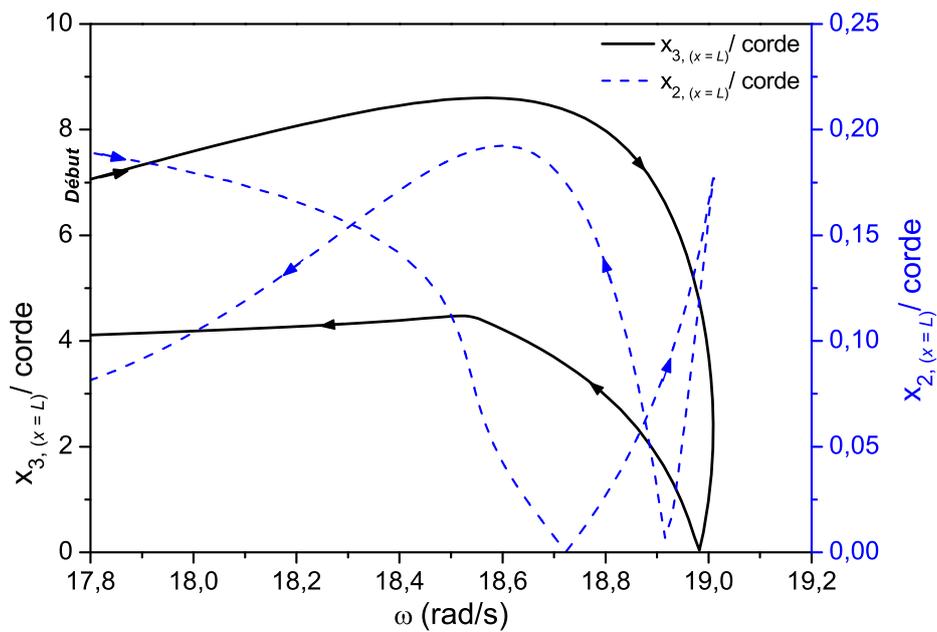


Figure 6.12 Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout— Effet de la vitesse angulaire $F_0 = 20N$, et $\Omega_3 = 20$ rad/s

6.2. Résultats numériques

La figure 6.11 récapitule les courbes de réponse des modes en résonance avec et sans vitesse angulaire. Les sauts remarquables sur 6.11(b,d) correspondent aux cas avec vitesse de rotation. Ils se manifestent autour de ($\omega \approx 19 \text{ rad/s}$) et ils sont dus à un échange intermittent d'énergie, tel qu'il est montré sur la figure 6.12 [27].

La figure 6.13 illustre les courbes de réponse de cette pale pour deux valeurs de la vitesse angulaire ; 10 et 20 rad/s . La fréquence naturelle change mais le comportement général reste le même. Ce comportement, qui est observé aussi pour d'autres valeurs de vitesse angulaire, nous permet de conclure que la vitesse angulaire transforme le comportement dynamique de la pale ATR du durcissant en adoucissant.

Les nouvelles courbes de réponse ont des zones instables, qui commencent à partir du premier point tournant, où un saut peut survenir. L'amplitude de résonance est plus petite que dans le cas sans vitesse angulaire, ce qui donne un aspect amortissant à la pale. On peut également remarquer la diminution de la réponse à l'état stationnaire, i.e. le point initial de la courbe. Un autre point singulier est observé à $\omega = 18.986 \text{ rad/s}$. Celui-ci ne peut être atteint à cause des sauts aux points tournants.

En terme de convergence, comme il est montré dans le tableau 5.4, le meilleur résidu final pour la MAN-série est obtenu avec une tolérance $\eta_s = 10^{-4}$. La méthode PLA est plus précise, avec au maximum (3 à 4) itérations dans l'étape de correction.

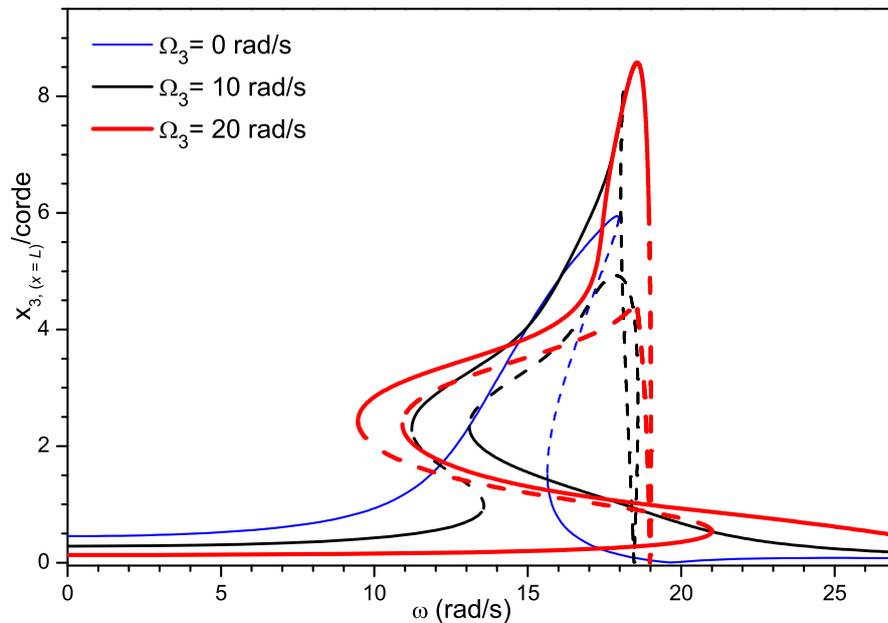


Figure 6.13 Courbe de réponse de la pale ATR excitée harmoniquement au bout, $F_0 = 20N$ - influence de la vitesse angulaire

6.3 Bilan du chapitre

Dans ce chapitre nous avons étudié les vibrations non-linéaires des poutres isotropes et anisotropes excitées avec des forces concentrées harmoniques aux bouts. Des algorithmes basés sur les méthodes de continuation, la méthode asymptotique numérique et la méthode pseudo-longueur d'arc, sont développées et utilisées dans les solutions numériques. En traitant une poutre en composite, une étude comparative de convergence entre ces deux méthodes de continuation a été faite. On montre que la méthode pseudo-longueur d'arc est coûteuse, mais elle est la plus précise.

La non-linéarité rencontrée dans le cas des poutres isotropes est due à la vitesse de rotation et elle est faible. Cependant, une forte non-linéarité a été observée pour la poutre en composite, en présence d'une résonance interne de type flexion-flexion. Les courbes de réponse ont été distordues sous l'effet de la vitesse angulaire avec l'apparition de quelques points singuliers expliqués par la présence de la résonance interne et un échange intermittent d'énergie.

Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté dans ce manuscrit est une contribution à l'étude des vibrations non-linéaires des poutres isotropes et des poutres en composite en mouvement de rotation. Le modèle mathématique est basé sur la formulation intrinsèque et géométriquement exacte de Hodges, basée sur deux principes : la décomposition du tenseur de déformation et la méthode asymptotique variationnelle (VAM). Cette formulation utilise les déformations généralisées, qui constituent des variables unidimensionnelles (1D), et les caractéristiques découlant de l'analyse de la section transversale (2D). Pour des sections transversales avec une géométrie arbitraire et des matériaux anisotropes, l'analyse de la section transversale se fait par la méthode des éléments finis. Cette formulation permet le traitement des poutres ayant des grands déplacements et petites déformations. Cette étude a cerné les aspects : statique, analyse modale linéaire, vibrations libres non-linéaires et les vibrations forcées non-linéaires des poutres rotatives.

La résolution est faite dans le domaine fréquentiel suite à une discrétisation spatio-temporelle, en utilisant l'approximation de Galerkin et la méthode de l'équilibrage harmonique, où le système d'équations aux dérivées partielles a été transformé en un système dynamique d'une non-linéarité relativement faible, i.e. quadratique. Ce système dynamique est représenté par une équation algébrique avec un vecteur de déplacement généralisé comme inconnue et la pulsation du système comme paramètre. Les conditions aux limites correspondent aux poutres encastées-libres.

Pour la détermination du spectre des fréquences propres des poutres rotatives, le problème de vecteurs/valeurs propres a été déterminé en ajoutant une perturbation au système temporel. Les analyses modales faites dans cette étude ont concerné les poutres avec et sans vitesse de rotation ; les poutres isotropes d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko et les poutres en composite. L'effet des termes gyroscopiques et la non-linéarité due à la vitesse de rotation ont été identifiés.

Pour la résolution du système dynamique non-linéaire, des algorithmes de continuation ont été développés, en se basant sur la MAN avec deux versions : séries et approximants de Padé et la PLA pour chaque cas d'étude ; i.e. le cas des vibrations libres non-linéaires et le cas des vibrations forcées non-linéaires. Une étude comparative de convergence a été menée donnant l'avantage à la PLA d'un point de vue précision et à la MAN de point de vue temps UC. L'algorithme des vibrations libres non-linéaires est basé sur la MAN seulement. Il

permet la résolution d'un problème de branchement avec un point de bifurcation ayant une double singularité de type Hopf dégénéré, caractérisé par deux valeurs propres imaginaires conjuguées et deux vecteurs propres. Cet algorithme de branchement est basé sur la réduction de Lyapunov-Schmidt et il est limité aux problèmes de $\text{co-rang} = 2$.

Il a été démontré que l'équation algébrique de bifurcation est équivalente au deuxième ordre de la MAN et par conséquent, les développements en série de la MAN sont équivalents au développement de Taylor et du fait que le système dynamique est quadratique, les termes supérieurs à deux sont des termes de correction.

Les algorithmes de continuation ont été testés pour le calcul des courbes de réponse tout en jouant sur les différents paramètres qui peuvent surgir dans le cas d'une poutre rotative : l'anisotropie du matériau, le rayon du moyeu, l'angle de tordage, la section transversale, la vitesse de rotation et la résonance interne. La stabilité des solutions obtenues est étudiée dans chaque cas en utilisant un algorithme basé sur la méthode de Hill. Les valeurs propres du système perturbé sont sélectionnées suite à un critère sur la valeur moyenne des vecteurs propres correspondants.

Dans le cas des vibrations libres et forcées non-linéaires, l'effet du couplage des modes et les échanges d'énergie ont été étudiés particulièrement en présence d'une résonance interne. Les applications vues dans ce manuscrit ont concerné des cas traités dans la littérature permettant de faire la comparaison et d'éprouver à chaque fois la convergence et la précision du modèle mathématique et les méthodes de résolution utilisées.

Cette étude est restreinte aux poutres rotatives avec des sections transversales uniformes le long de la poutres. Elle peut être élargie aux poutres avec des actionneurs intégrés ou avec des sections qui changent axialement, ayant un seul cône ou double cône, tout en utilisant la même formulation intrinsèque et les propriétés découlant de l'analyse de la section transversale.

L'analyse des sections transversales des poutres isotropes et anisotropes est expliquée dans la section 4.3. Le code éléments finis que nous avons actuellement, basé sur cette section, permet seulement le calcul des matrices de rigidité et de masse des sections transversales des poutres isotropes et avec des géométries simples. Pour les poutres en composite traitées dans cette thèse, nous avons utilisé les données trouvées dans la littérature. Néanmoins, le présent code de l'analyse de la section transversale pourra être élargie à des sections transversales anisotropes avec des géométries complexes. Ceci nécessite l'utilisation d'un meilleur d'éléments finis.

Les techniques de réduction utilisées dans les codes des éléments finis sont devenues de plus en plus efficaces. Une étude comparative entre notre modèle et la méthode des éléments

finis 3D appliquée aux poutres en composite rotatives serait une grande opportunité.

La même procédure peut être appliquée pour l'étude des vibrations non-linéaires des plaques et des coques en composite, qui modélisent parfois les structures minces mieux que les poutres, telles que les aubes des turbines et les structures à parois minces, où l'effet de la température est parfois important. Ces travaux peuvent aussi être fondés sur des formulations intrinsèques et géométriquement exactes pour les plaques et les coques.

L'algorithme développé pour la résolution du problème de branchement en point de bifurcation de Hopf est limité à un co-rang de 2 et appliqué aux vibrations libres non-linéaires des poutres rotatives, mais il peut être appliqué à d'autres systèmes dynamiques non-linéaires tels que la mécanique des fluides et les réactions chimiques. Il peut aussi être étendu pour des problèmes ayant un co-rang supérieur en poursuivant la même méthodologie.

Annexe A : Approximation de Padé

Dans la MAN, la représentation polynomiale du vecteur de déplacement généralisé q est la suivante :

$$q(a) - q_0 = \sum_{j=1}^n a^j q_j \quad (\text{A.1})$$

où, n est l'ordre de troncature et q_0 est une solution initiale et a est le paramètre de chemin. Afin d'étendre le domaine de validité de la représentation (A.1) et par conséquent réduire le nombre de pas nécessaires pour obtenir toute la solution, une approximation rationnelle est utilisée, basée sur des fractions rationnelles ayant le même dénominateur, appelées les approximants de Padé.

$$q(a) - q_0 = \sum_{i=1}^{n-1} a^i f_i(a) q_i \quad (\text{A.2})$$

où, $f_i(a)$ sont les approximants de padé, déterminés dans la MAN de la manière suivante :

- (1) La base $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ est orthonormalisée par la procédure de Gram-Schmidt (la plus utilisée), donnant une base notée $(q_1^*, q_2^*, q_3^*, \dots, q_n^*)$ et déterminée comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1} q_1^* = q_1 \\ \alpha_{i,i} q_i^* = q_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} q_j^* \\ q_i^{*T} q_j^* = \delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

On obtient une nouvelle expression de (A.1) dans la base (q_i^*) :

$$q(a) - q_0 = \sum_{i=1}^n a^i \bar{f}_i(a) q_i^* \quad (\text{A.4})$$

où, $\bar{f}_i(a)$ sont des séries définies par : $\bar{f}_i(a) = \sum_{k=0}^{n-i} \alpha_{i+k,i} a^k$.

- (2) Les séries $\bar{f}_i(a)$ seront remplacés par des fractions $f_i(a) = \frac{D_{(n-1-i)}(a)}{D_{(n-1)}(a)}$, ayant le même dénominateur $D_{(n-1)}(a)$ afin de limiter le nombre de pôles. Ces polynômes sont définis par :

$$D_i(a) = 1 + B_1 a + B_2 a^2 + \dots + B_i a^i \quad (\text{A.5})$$

avec, $B_i = (\alpha_{p,p-i} + \sum_{k=1}^{i-1} B_k \alpha_{p-k,p-i}) / \alpha_{p-i,p-i}$

- (3) La première racine du dénominateur (i.e. le premier pôle) est calculée par une méthode de résolution d'équations algébriques, telle que l'algorithme de Bairstow.

Annexe B : Algorithme de continuation de la MAN-Padé

L'algorithme de continuation de la MAN basé sur les approximants de Padé est résumé comme suit :

- (1) Calcul de la solution en série (polynomiale)
 - Calcul des vecteurs de la série jusqu'à l'ordre n
 - Calcul de la limite de validité a_{ms} de la solution polynomiale (2.29)
- (2) Calcul des approximants de Padé (Annexe A)
 - Orthogonalisation de Gram-Schmidt
 - Calcul de dénominateur et de son premier pôle réel r
- (3) Choix de la solution
 - Si $|r| < |a_{ms}|$, on considère la solution polynomiale
 - Si $|r| > |a_{ms}|$, c'est généralement le cas, on calcul par une dichotomie la limite de validité de la représentation rationnelle a_{mp} dans l'intervalle $[a_{ms}, r]$, en appliquant le critère (2.30). i.e. la première itération sera donc de voir si $(a_{ms} + r)/2$ vérifie ce critère. Si oui on passe à la moitié droite de l'intervalle précédent. Le nombre de subdivisions faites dans l'algorithme de dichotomie peut être limité à une valeur choisi entre 20 et 100.
- (4) Le dernier point de l'une des deux représentations choisies, correspondant à $a = a_{ms}$ ou $a = a_{mp}$, est le nouveau point initial. Retour au point (1).

Annexe C : Calcul des modes de vibration

La résolution du problème aux valeurs/vecteurs propres (5.5) permet d'obtenir des couples (λ_i, Y_i) , dont le vecteur propre Y_i correspond aux variables suivants (4.17) :

$$Y_i \equiv [f_1, m_1, v_1, \omega_1, \dots, f_n, m_n, v_n, \omega_n]^T \quad (\text{C.1})$$

où, les coefficients $(f_i, m_i, v_i, \omega_i)$ correspondent aux variables (F, M, V, Ω) . En vibration des structures, on s'intéresse beaucoup plus aux modes de vibrations en déplacements $u = [x_1, x_2, x_3]^T$ et en rotations $\theta = [\theta_{x1}, \theta_{x2}, \theta_{x3}]^T$. Dans ce modèle dynamique, dont les vibrations sont calculés autour d'une position d'équilibre, ces modes sont déterminés de la manière suivante :

- (1) On fait une extraction directe du vecteur force F et du vecteur moment M à partir du vecteur propre Y_i en utilisant les équations (4.16) et (4.22).
- (2) On détermine les vecteurs de déformations généralisées γ et κ en utilisant l'équation constitutive définie dans le tableau 3.1.

$$\begin{Bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{U} & \mathbb{V} \\ \mathbb{V}^T & \mathbb{W} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

- (3) Les déformations généralisées sont liées aux déplacements par les relations (3.122) :

$$\begin{aligned} \gamma &= C(e_1 + u' + \tilde{k}u) - e_1 \\ \tilde{\kappa} &= -C C'^T + C \tilde{\kappa} C^T - \tilde{k} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La forme discrétisée de ces équations (C.3) est la suivante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= [C_n^T (\gamma_n + e_1) - e_1] \Delta x + u_n \\ C_{n+1} &= C_n + e^{\tilde{\kappa} \Delta x} - I_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

où, les rotations sont déterminées à partir de la matrice des cosinus directeur $C = C^{Bb}$, qui représente l'orientation du repère après déformation (**B**) dans le repère avant déformation (**b**).

Les modes de déformations et les déplacements statiques, tels qu'ils sont présentés dans les chapitres précédents, sont calculés à partir de deux relations discrétisées (C.4), qui concernent uniquement les déplacements de la ligne moyenne de la poutre. Les modes des vitesses V et Ω sont obtenus directement du vecteur propre Y_i (C.1) et doivent être équivalents à un coefficient près (la fréquence λ) aux modes de déplacement et de rotation. Ce double calcul permet de vérifier l'exactitude des résultats.

- (4) Le déplacement d'un point p de la section transversale, défini par les coordonnées locales $X_p = [0, x_{p,2}, x_{p,3}]^T$, est déterminé par la relations suivante :

$$u_p = x + u_n + C_n^T \cdot X_p \quad (\text{C.5})$$

Les figures (C.1) et (C.2) présentent les premiers modes de vibrations en 3D d'une poutre isotrope et prismatique et d'une poutre en composite ATR à une vitesse de rotation nulle. Concernant la poutre en composite ATR, les déplacements dûs aux couplages discutés dans le chapitre 5 sont relativement faibles par rapport aux dimension de la poutre et apparaissent pas dans les figures. Ces figures sont obtenues en utilisant la fonction (`patch`) de Matlab, dédiée au dessin de polygones en 3D.

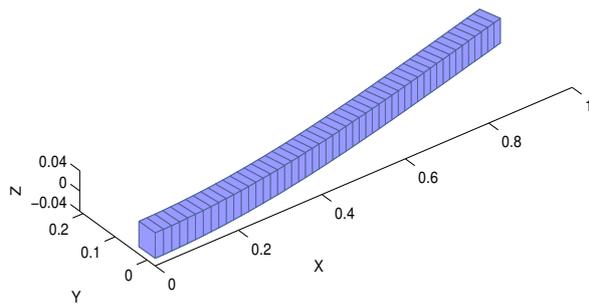
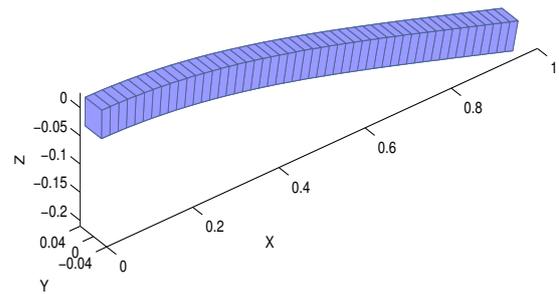
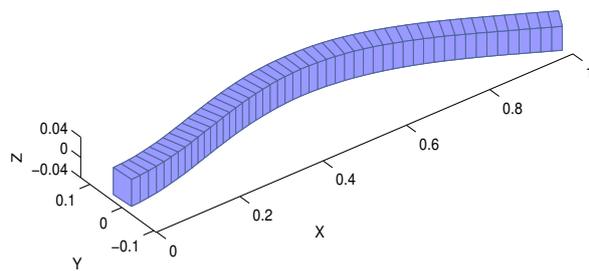
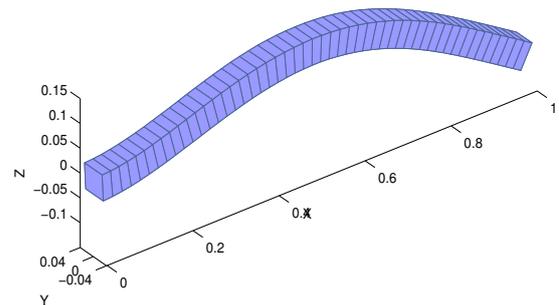
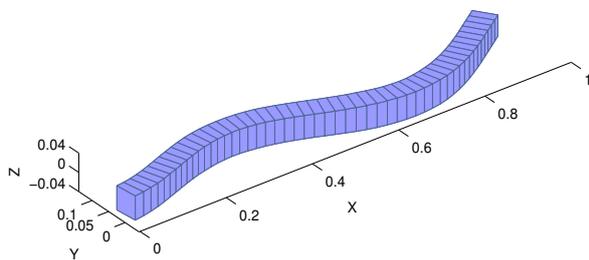
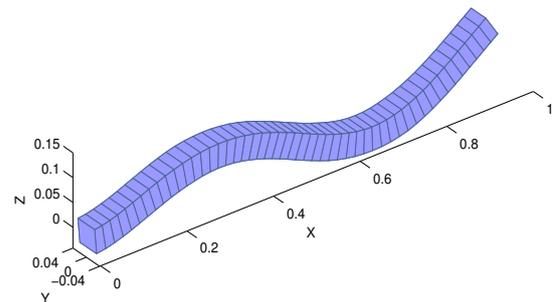
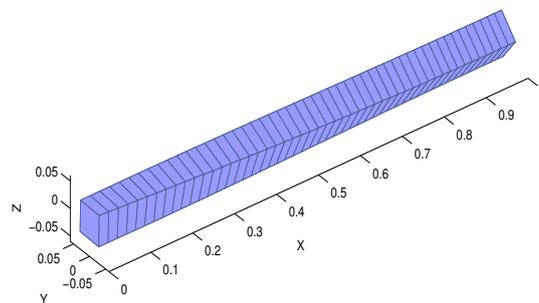
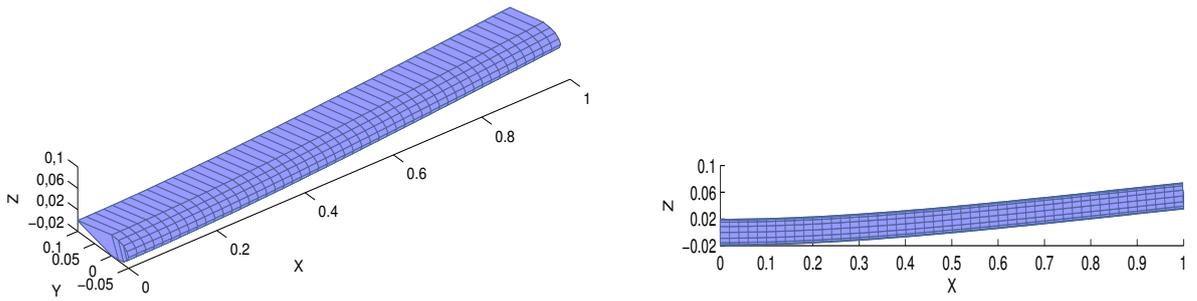
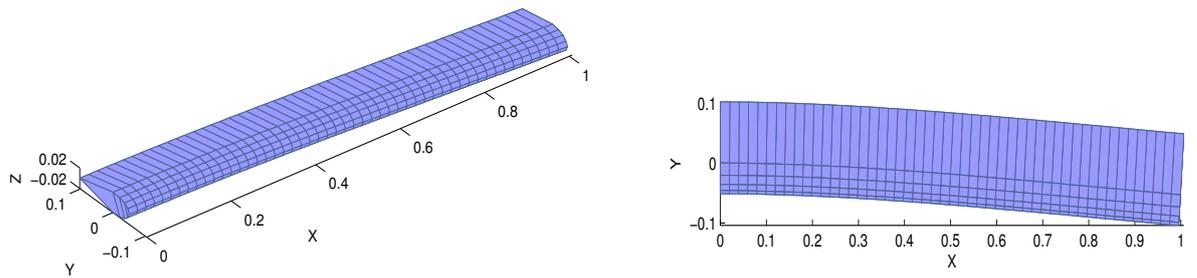
1^{er} mode de flexion (z)1^{er} mode de flexion (y)2^{eme} mode de flexion (z)2^{eme} mode de flexion (y)3^{eme} mode de flexion (z)3^{eme} mode de flexion (y)1^{er} mode de torsion

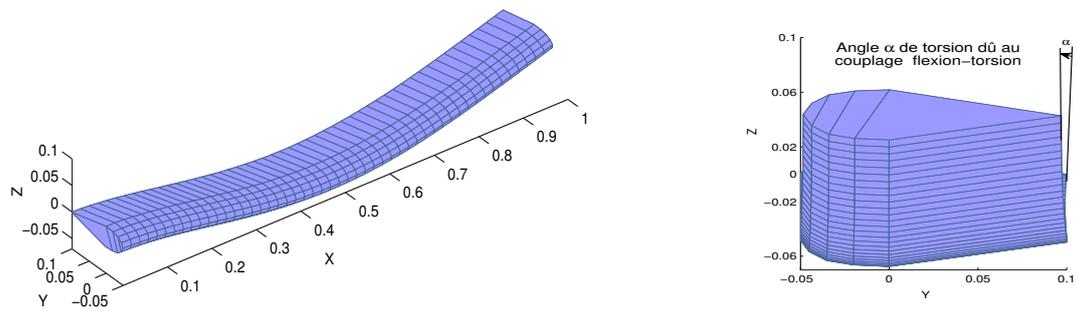
Figure C.1 Modes de vibration en 3D - Poutre prismatique isotrope avec $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$ et un coefficient d'élanement $\beta = 70$



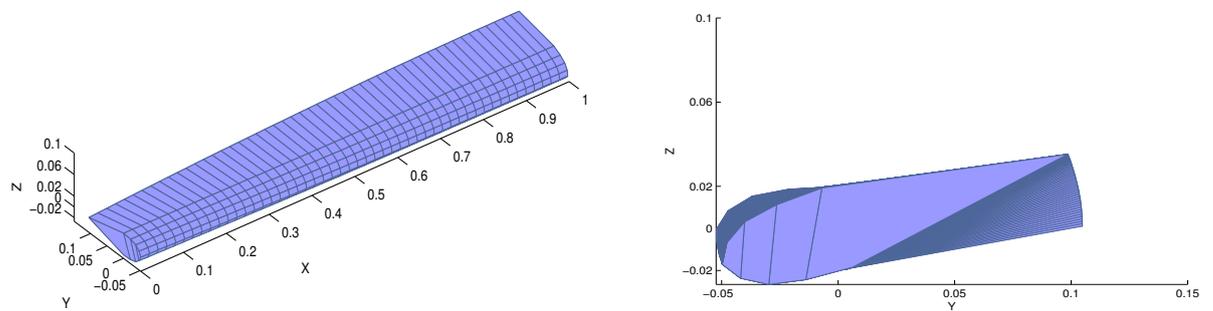
1^{er} mode de flexion (z)



1^{er} mode de flexion (y)



2^{eme} mode de flexion (z)



1^{er} mode de torsion

Figure C.2 Modes de vibration en 3D - Poutre en composite ATR à $\Omega_3 = 0 \text{ rad/s}$
(Les caractéristiques de la poutre ATR sont définies dans la sous-section 5.1.2.c.)

Références bibliographiques

- [1] ABARCAR, R. B., AND CUNNIFF, P. F. The vibration of cantilever beams of fiber reinforced materials. *AIAA Journal* 6 (1972), 504–517.
- [2] ABDOUN, F., AZRAR, L., DAYA, E. M., AND POTIER-FERRY, M. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures* 87 (2009), 91–100.
- [3] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. *Handbook of mathematical functions*. Dover Pub., New York, 1968.
- [4] AGGOUNE, W., ZAHROUNI, H., AND POTIER-FERRY, M. High order prediction-correction algorithms for unilateral contact problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 168 (2004), 1–9.
- [5] ALLGOWER, E., AND GEORG, K. *Introduction to numerical continuation methods*. Springer, New York, 1990.
- [6] ALTHOFF, M., PATIL, M., AND TRAUOGOTT, J. Nonlinear modeling and control design of active helicopter blades. *Journal of the American Helicopter Society* 57 (2012), 1–11.
- [7] ALTHOFF, M., PATIL, M. J., AND TRAUOGOTT, J. P. Nonlinear modeling and control design of active helicopter blades. *In proceeding of the 14th adaptive structures conference, Newport, Rhode Island* (2006), AIAA–2006–2040.
- [8] AMABILI, M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [9] ANDERSON, T. J., NAYFEH, A. H., AND BALACHANDRAN, B. Coupling between high-frequency modes and a low-frequency mode : Theory and experiment. *Nonlinear Dynamics* 11 (1996), 17–36.
- [10] ANSARI, K. A. Nonlinear flexural vibrations of a rotating pretwisted beam. *Computers and Structures* 5 (1975), 101–118.
- [11] APIWATTANALUNGGARN, P., SHAW, S. W., PIERRE, C., AND JIANG, D. Finite-element-based nonlinear modal reduction of a rotating beam with large-amplitude motion. *Journal of Vibration and Control* 9 (2003), 235–263.
- [12] ARVIN, H., AND BAKHTIARI-NEJAD, F. Non-linear modal analysis of a rotating beam. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (2011), 877–897.
- [13] ARVIN, H., LACARBONARA, W., AND BAKHTIARI-NEJAD, F. A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades - part 2 : flapping nonlinear normal modes. *Nonlinear Dynamics* 70 (2012), 2279–2301.
- [14] ATILGAN, A. R. *Towards a unified analysis methodology for composite rotor blades*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, U.S.A., 1992.

Références bibliographiques

- [15] ATILI, B. S. A direct method for the characterization and computation of bifurcation points with corank 2. *Computing* 48 (1992), 149–159.
- [16] AZRAR, L., BENAMAR, R., AND POTIER-FERRY, M. An asymptotic-numerical method for large-amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibrations* 220 (1999), 695–727.
- [17] AZRAR, L., BOUTYOUR, E., AND POTIER-FERRY, M. Nonlinear forced vibrations of plates by an asymptotic numerical method. *Journal of Sound and Vibrations* 252 (2002), 657–674.
- [18] AZRAR, L., COCHELIN, B., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. An asymptotic-numerical method to compute bifurcation branches, in. *New Advances in Computational Structural Mechanics, Amsterdam (Elsevier publisher)* (1992), 117–131.
- [19] AZRAR, L., COCHELIN, B., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. An asymptotic-numerical method to compute the post-puckling behavior of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), 1251–1277.
- [20] BANERJEE, J. R. Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *J. Sound Vib.* 233 (2000), 857–875.
- [21] BANERJEE, J. R. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beams. *J. Sound Vib.* 247 (2001), 97–115.
- [22] BATHE, K. J. *Finite element procedure*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [23] BAZOUNE, A. Survey on modal frequencies of centrifugally stiffened beams. *Shock and Vibration Digest* 37 (2005), 449–469.
- [24] BAZOUNE, A., KHULIEF, Y. A., AND STEPHEN, N. G. Further results for modal characteristics of rotating tapered Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibrations* 219 (1999), 157–174.
- [25] BEKHOUCHA, F., ATMANI, Y., CADOU, J. M., DUIGOU, L., AND RECHAK, S. Vibrations libres non linéaires des poutres en mouvement de rotation. *9ème Journées de Mécanique de l'EMP - Alger, le 08-09 avril 2014* (2014), .
- [26] BEKHOUCHA, F., CADOU, J. M., DUIGOU, L., AND RECHAK, S. Branchement en une bifurcation Hopf. vibrations libres non linéaires des poutres rotatives. *4ème Journée MAN organisée à l'UBS - Lorient, le 22 mai 2014* (2014), .
- [27] BEKHOUCHA, F., CADOU, J. M., DUIGOU, L., AND RECHAK, S. Nonlinear forced vibrations of rotating composite beams with internal combination resonance. *In proceeding of the 5th International conference on Design and Modeling of Mechanical Systems, CMSM'2013* (March 25-27, 2013), Djerba, Tunisia.
- [28] BEKHOUCHA, F., RECHAK, S., DUIGOU, L., AND CADOU, J. M. Nonlinear forced vibrations of rotating anisotropic beams. *Nonlinear Dynamics* 74 (2013), 1281–1296.

Références bibliographiques

- [29] BEKHOUCHA, F., RECHAK, S., DUIGOU, L., AND CADOU, J. M. Branch switching at Hopf bifurcation analysis via asymptotic numerical method : Application to nonlinear free vibrations of rotating beams. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 22 (2015), 716–730.
- [30] BERDICHEVSKY, V. L. Variational–asymptotic method of constructing a theory of shells. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* 43 (1979), 664–687.
- [31] BERDICHEVSKY, V. L. On the energy of an elastic rod. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* 45 (1981), 518–529.
- [32] BERDICHEVSKY, V. L. *Variational principles of continuum mechanics - I. Fundamentals*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [33] BIR, G. User’s guide to precomp (pre-processor for computing composite blade properties). *Tech. report - National Renewable Energy Laboratory (NREL)* (2006), .
- [34] BIR, G., AND MIGLIORE, P. Preliminary structural design of composite blades for two- and three-blade rotors. *Technical report - (NREL)* (2004), .
- [35] BLASQUES, J. P. *Optimal design of laminated composite beams*. Thèse de doctorat, DTU Mechanical engineering, Denmark, 2011.
- [36] BLASQUES, J. P., AND LAZAROV, B. Becas a beam cross section analysis tool for anisotropic and inhomogeneous sections of arbitrary geometry. *RISO-R 1785 Technical report* (2011), .
- [37] BORRI, M., GHIRINGHELLI, G. L., AND MERLINI, T. Linear analysis of naturally curved and twisted anisotropic beams. *Composites Engineering* 2 (1992), 433–456.
- [38] BORRI, M., AND MERLINI, T. A large displacement formulation for anisotropic beam analysis. *Meccanica* 21 (1986), 30–37.
- [39] BORRI, M., AND MONTEGAZZA, P. Some contributions on structural and dynamic modeling of helicopter rotor blades. *L’Aerotecnica Missili e Spazio* 64 (1985), 143–154.
- [40] BOUMEDIENE, F., MILOUDI, A., CADOU, J., AND DUIGOU, L. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures* 87 (2009), 1508–1515.
- [41] BOUTYOUR, E. H., ZAHROUNI, H., POTIER-FERRY, M., AND BOUDI, M. Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 60 (2004), 1987–2012.
- [42] BRAIKAT, B., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. Méthodes asymptotiques numériques pour la plasticité. *Revue Européenne. Elém. Finis* 6 (1997), 337–357.
- [43] BRONS, M., AND KLIEM, W. Nonlinear analysis of the buckling and vibration of a rotating elasticum. *International Journal of Mechanical Sciences* 36 (1994), 673–681.
- [44] BUCHER, I., AND EWINS, D. J. Modal analysis and testing of rotating structures. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Serie A* 359 (2001), 61–96.

Références bibliographiques

- [45] BÖHMER, K., AND MEI, Z. Regularization and computation of a bifurcation problem with corank 2. *Computing* 41 (1989), 307–316.
- [46] CADOU, J. M., DUIGOU, L., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. Convergence acceleration of iterative algorithms. applications to thin shell analysis and Navier–Stokes equations. *Computers and Structures* 43 (2008), 253–264.
- [47] CARDONA, A., AND GÉRADIN, M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 26 (1988), 2403–2438.
- [48] CESNIK, C. E. S. *Cross-sectional analysis of initially twisted and curved composite beams*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Tech., Atlanta, Georgia, U.S.A., 1994.
- [49] CESNIK, C. E. S., AND HODGES, D. H. VABS : a new concept for composite rotor blade cross-sectional modelling. *J. Am. Helicopter Soc.* 42 (1997), 27–38.
- [50] CESNIK, C. E. S., AND PALACIOS, R. Modeling piezocomposite actuators embedded in slender structures. in *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Norfolk, VA.* (2003), AIAA–2003–1803.
- [51] CHANDIRAMANI, N. K., LIBRESCU, L. I., AND SHETE, C. D. On the free-vibration of rotating composite beams using a higher-order shear formulation. *Aerospace Science and Technology* 6 (2002), 545–561.
- [52] CHANDIRAMANI, N. K., SHETE, C. D., AND LIBRESCU, L. I. Vibration of higher-order-shearable pretwisted rotating composite blades. *International Journal of Mechanical Sciences* 45 (2003), 2017–2041.
- [53] COCHELIN, B., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. Asymptotic numerical methods and Padé approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), 187–213.
- [54] COMBESCURE, D., AND LAZARUS, A. Refined finite element modelling for the vibration analysis of large rotating machines : Application to the gas turbine modular helium reactor power conversion unit. *J. Sound Vib.* 318 (2008), 1262–1280.
- [55] COSSERAT, B., AND COSSERAT, F. *Théorie des Corps Déformables*. Hermann, Paris, 1909.
- [56] CRISFIELD, M. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Computers and Structures* 13 (1981), 55–62.
- [57] CRISFIELD, M. *Non-linear finite element analysis of solids and structures, Vol.1, Essentials*. John Wiley & Sons, Chichester, 1991.
- [58] DA SILVA, M. R. M. C., AND HODGES, D. H. Nonlinear flexure and torsion of rotating beams with application to helicopter rotor blades – I. formulation. *Vertica* 10 (1986), 151–169.
- [59] DA SILVA, M. R. M. C., AND ZARETZKY, C. L. Nonlinear flexural–flexural–torsional interactions in beams including the effect of torsional dynamics. I : primary resonance. *Nonlinear Dynamics* 5 (1994), 3–23.

Références bibliographiques

- [60] DAMIL, N., CADOU, J. M., AND POTIER-FERRY, M. Mathematical and numerical connections between polynomial extrapolations and Padé approximants. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 20 (2004), 699–707.
- [61] DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. *International Journal of Engineering Science* 28 (1990), 943–957.
- [62] DANIELSON, D. A., AND HODGES, D. H. Nonlinear beam kinematics by decomposition of the rotation tensor. *Journal of Applied Mechanics* 54 (1987), 258–262.
- [63] Ö. TURHAN, AND BULUT, G. On nonlinear vibrations of a rotating beam. *Journal of Sound and Vibrations* 322 (2009), 314–335.
- [64] DHOOGHE, A., GOVAERTS, W., AND KUZNETSOV, Y. Numerical continuation of fold bifurcations of limit cycles in matcont. *Transactions on Mathematical Software (ACM - TOMS)* 29 (2003), 141–164.
- [65] DOEDEL, E. J. Auto : A program for the automatic bifurcation analysis of autonomous systems. *Congressus Numerantium* 30 (1981), 256–284.
- [66] DOEDEL, E. J. Numerical analysis and control of bifurcation problems - (i) bifurcation in finite dimensions. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 1 (1991), 493–520.
- [67] DOEDEL, E. J., AND OLDEMAN, B. E. Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. *Concordia University Monreal, Canada* (<http://indy.cs.concordia.ca/auto/>), (Dernière visite avril 2014).
- [68] DOKUMACI, E. An exact solution for coupled bending and torsion vibrations of uniform beams having single cross-sectional symmetry. *J. Sound Vib.* 119 (1987), 443–449.
- [69] ELHAGE-HUSSEIN, A., POTIER-FERRY, M., AND DAMIL, N. A numerical continuation method based on Padé approximants. *Int. J. Solids Struct.* 37 (2000), 6981–7001.
- [70] EPPS, J. J., AND CHANDRA, R. The natural frequencies of rotating composite beams with tip sweep. *Journal of the American Helicopter Society* 41 (1996), 29–36.
- [71] GERVAIS, J. J., AND SADIKY, H. A new steplength control for continuation with the asymptotic numerical method. *IMA Journal of Numerical Analysis* 22 (2002), 207–229.
- [72] GHAYOUR, R., GHAYOUR, M., AND ZIAEI-RADA, S. Vibration analysis of tapered rotating composite beams using the hierarchical finite element. *Applied and Computational Mechanics* 4 (2010), 157–170.
- [73] GHORASHI, M. Nonlinear analysis of the dynamics of articulated composite rotor blades. *Nonlinear Dynamics* 67 (2012), 227–249.
- [74] GHORASHI, M., AND NITZSCHE, F. Nonlinear dynamic response of accelerating composite rotor blade using perturbations. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 4 (2009), 693–718.

Références bibliographiques

- [75] GIAVOTTO, V., BORRI, M., MANTEGAZZA, P., GHIRINGHELLI, G., CARMASCHI, V., MAFFIOLI, G. C., AND MUSSI, F. Anisotropic beam theory and applications. *Computers and Structures* 16 (1983), 403–413.
- [76] GOVAERTS, W. J. F. *Numerical methods for bifurcations of dynamical equilibria*. SIAM, 2000.
- [77] GUEVEL, Y., BOUTYOUR, E. H., AND CADOU, J. M. Automatic detection and branch switching methods for steady bifurcation in fluid mechanics. *Journal of Computational Physics* 230 (2011), 3614–3629.
- [78] HAJIANMALEKI, M., AND QATU, M. S. Vibrations of straight and curved composite beams : A review. *Composites Structures* 100 (2013), 218–232.
- [79] HAMDAN, M. N., AND AL-BEDDOOR, B. O. Non-linear free vibrations of a rotating flexible arm. *Journal of Sound and Vibrations* 242 (2001), 839–853.
- [80] HILDEBRANDT, T., AND GRAVES, L. Implicit functions and their differentials in general analysis. *A.M.S. Transactions* 29 (1927), 127–153.
- [81] HODGES, D. H. A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams. *Int. J. Solids Struct.* 26 (1990), 1253–1273.
- [82] HODGES, D. H. Review of composite rotor blade modeling. *AIAA Journal* 28 (1990), 561–565.
- [83] HODGES, D. H. Geometrically exact, intrinsic theory for dynamics of curved and twisted anisotropic beams. *AIAA Journal* 41 (2003), 1131–1137.
- [84] HODGES, D. H. *Nonlinear composite beam theory*. AIAA, Reston VA, 2006.
- [85] HODGES, D. H., AND DOWELL, E. H. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. *NASA TN D-7818* (1974), .
- [86] HODGES, D. H., AND PATIL, M. J. Technical note : correlation of geometrically-exact beam theory with the princeton data. *Journal of the American Helicopter Society* 49 (2004), 357–360.
- [87] HODGES, D. H., AND RUTKOWSKI, M. J. Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite element method. *AIAA Journal* 19 (1981), 1459–1466.
- [88] HODGES, D. H., SHANG, X., AND CESNIK, C. E. S. Finite element solution of nonlinear intrinsic equations for curved composite beams. *Journal of the American Helicopter Society* 41 (1996), 313–321.
- [89] HODGES, D. H., AND YU, W. A rigorous, engineer-friendly approach for modelling realistic, composite rotor blades. *Wind Energy* 10 (2007), 179–193.
- [90] HOUBOLT, J. C., AND BROOKS, G. W. Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of pre-twisted non-uniform rotor blades. *NACA Report 1346* (1958), .

Références bibliographiques

- [91] HUGHES, T. J. R. *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [92] IBRAHIMBEGOVIĆ, A., FREY, F., AND KOŽAR, I. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995), 3653–3673.
- [93] JORDAN, D. W., AND SMITH, P. *Nonlinear ordinary differential equations. An introduction for scientists and engineers*. Oxford Univ. Press Inc, N Y, 2007, 4th ed.
- [94] JUNG, S. N., NAGARAJ, V. T., AND CHOPRA, I. Assessment of composite rotor blade modeling techniques. *Journal of the American Helicopter Society* 44 (1999), 188–205.
- [95] KAMMER, D. C., AND SCHLACK, A. L. J. Effects of non-constant spin rate on the vibration of a rotating beam. *Journal of Applied Mechanics* 54 (1987), 305–310.
- [96] KAMMER, D. C., AND SCHLACK, A. L. J. Effects of non-constant spin rate on the vibration of a rotating beam. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design* 109 (1987), 138–143.
- [97] KELLER, H. B. Numerical solutions of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. *in application of bifurcation theory Rabinowiz. Ed. Academic Press* (1977), 359–384.
- [98] KELLER, H. B. *Lectures on numerical methods in bifurcation problems*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [99] KELLEY, W., AND PETERSON, A. *The theory of differential equations. Classical and qualitative, 2nd ed.* Springer, 2010.
- [100] KHULIEF, Y. A. Vibration frequencies of a rotating tapered beam with end mass. *Journal of Sound and Vibrations* 134 (1989), 87–97.
- [101] KIELHÖFER, H. *Bifurcation theory, An introduction with application to PDEs*. Springer, 2004.
- [102] KLEIN, L. Transvers vibrations of non-uniform beam. *Journal of Sound and Vibrations* 37 (1974), 491–505.
- [103] KRAUSKOPF, B., OSINGA, H., AND J.GALÁN-VIOQUE. *Numerical continuation methods for dynamical systems, Path following and BVP*. Springer, 2007.
- [104] LACARBONARA, W., ARVIN, H., AND BAKHTIARI-NEJAD, F. A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades - part 1 : linear model properties. *Nonlinear Dynamics* 70 (2012), 659–675.
- [105] LAHMAM, H., CADOU, J.-M., ZAHROUNI, H., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. High-order predictor-corrector algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (2002), 685–704.
- [106] LAZARUS, A., AND THOMAS, O. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *C. R. Mech.* 338 (2010), 510 – 517.

Références bibliographiques

- [107] LEE, H. H. Y. S. H., AND SHIN, S. H. Flapwise bending vibration analysis of rotating multi-layered composite beams. *Journal of Sound and Vibrations* 286 (2005), 745–761.
- [108] LEE, S. H., SHIN, S. H., AND YOO, H. H. Flapwise bending vibration analysis of rotating composite cantilever beams. *KSME International Journal* 18 (2004), 240–245.
- [109] LEWANDOWSKI, R. Non-linear free vibrations of beams by the finite element and continuation methods. *Journal of Sound and Vibrations* 170 (1994), 577–593.
- [110] LEWANDOWSKI, R. Nonlinear steady state vibrations of beams excited by vortex shedding. *Journal of Sound and Vibrations* 252 (2002), 675–696.
- [111] LIN, S. C., AND HSIAO, K. M. Vibration analysis of rotating Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibrations* 240 (2001), 303–322.
- [112] LOVE, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, N Y, 1944.
- [113] MARINCA, V., AND HERISANU, N. *Nonlinear dynamical systems in engineering, some approximate approaches*. Springer, 2011.
- [114] MEES, A. I., AND CHUA, L. O. The hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems. *IEEE Transactions on Circuit and Systems I* 26 (1979), 235–254.
- [115] MEIROVITCH, L. *Fundamentals of vibrations*. McGraw-Hill Singapore, 2001.
- [116] MURTHY, V. R. Dynamic characteristics of rotor blades. *Journal of Sound and Vibrations* 49 (1976), 483–500.
- [117] MÄKINEN, J. Total lagrangian reissner’s geometrically exact beam element without singularities. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 70 (2006), 1009–1048.
- [118] NAGARAJ, V. T., AND SHANTAKUMAR, P. Rotor blade vibration by the galerkin finite element method. *Journal of Sound and Vibrations* 43 (1975), 575–577.
- [119] NAJAH, A., COCHELIN, B., DAMIL, N., AND POTIER-FERRY, M. A critical review of asymptotic numerical method. *Arch. Comput. Methods Eng.* 5 (1998), 3–22.
- [120] NARAYANAN, S., AND SEKAR, P. A frequency domain based numerical-analytical method for non-linear dynamical systems. *J. Sound Vib.* 211 (1998), 409–424.
- [121] NAYFEH, A. H. *Perturbation methods*. John Wiley & son, 1973.
- [122] NAYFEH, A. H., AND BALANCHANDRAN, B. *Applied nonlinear dynamics analytical, computational and experimental methods*. Wiley-VCH, 2004.
- [123] NAYFEH, A. H., AND MOOK, D. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & son, 1995.
- [124] NAYFEH, A. H., AND PAI, P. F. *Linear and nonlinear structural mechanics*. John Wiley & son, 2004.
- [125] OH, S.-Y., SONG, O., AND LIBRESCU, L. Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams. *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), 1203–1224.

Références bibliographiques

- [126] OZDEMIR, O. O., AND KAYA, M. O. Flexural vibration analysis of double tapered rotating euler–bernoulli beam by using the differential transform method. *Meccanica* 41 (2006), 661–670.
- [127] OZDEMIR, O. O., AND KAYA, M. O. Flapwise bending vibration analysis of rotating double-tapered Timoshenko beam. *Archive Applied Mechanics* 78 (2008), 379–392.
- [128] PAI, P. F., AND NAYFEH, A. H. Non-linear non-planar oscillations of a cantilever beam under lateral base excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 25 (1990), 455–474.
- [129] PAI, P. F., AND NAYFEH, A. H. A fully nonlinear theory of curved and twisted composite rotor blades accounting for warpings and threedimensional stress effects. *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), 1309–1340.
- [130] PAI, P. F., AND SCHULTZ, M. J. Shear correction factors and an energy consistent beam theory. *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), 1523–1540.
- [131] PALACIOS, R. Nonlinear normal modes in an intrinsic theory of anisotropic beams. *Journal of Sound and Vibrations* 330 (2009), 1772–1792.
- [132] PARKER, D. F. An asymptotic analysis of large deflections and rotations of elastic rods. *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), 361–377.
- [133] PARKER, D. F. Shear correction factors and an energy consistent beam theory. *Journal of Applied Mechanics* 46 (1979), 861–866.
- [134] PATIL, M. J. Decoupled second-order equations and modal analysis of a general nonconservative system. *Presented at AIAA Dynamics specialists conference, Atlanta* (2000), AIAA–2000–1654.
- [135] PATIL, M. J., AND ALTHOFF, M. Energy-consistent, galerkin approach for the nonlinear dynamics of beams using intrinsic equations. *Journal of Vibration and Control* 17 (2010), 1748–1758.
- [136] PATIL, M. J., AND HODGES, D. H. Variable-order finite elements for nonlinear, fully intrinsic beam equations. *J. Mech. Mater. Struct.* 6 (2011), 479–493.
- [137] PEETERS, M., VIGUIÉ, R., SÉRANDOUR, G., KERSCHEN, G., AND GOLINVAL, J. C. Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mech. Syst. Signal Pr.* 23 (2009), 195–216.
- [138] PELETAN, L., BAGUET, S., TORKHANI, M., AND J.-RICHARDET, G. A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. *Nonlinear Dynamics* 72 (2013), 671–682.
- [139] PESHECK, E., PIERRE, C., AND SHAW, S. W. Modal reduction of a nonlinear rotating beam through nonlinear normal modes. *J. Vib. Acoust.* 124 (2002), 229–236.
- [140] POPESCU, B. *Asymptotically correct refinements in numerical cross-sectional analysis of composite beams*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Tech., Georgia., 1998.

Références bibliographiques

- [141] POPESCU, B., HODGES, D. H., AND CESNIK, C. E. S. Obliqueness effects in asymptotic cross-sectional analysis of composite beams. *Comput. Struct.* 76 (2000), 533–543.
- [142] POTIER-FERRY, M., AND CADOU, J.-M. Basic ann algorithms for path following problems. *Revue Européenne des Eléments Finis* 13 (2004), 9–32.
- [143] PUTTER, S., AND MANOR, H. Natural frequencies of radial rotating beams. *Journal of Sound and Vibrations* 56 (1978), 175–185.
- [144] PÉRIGNON, F. *Vibrations forcées de structures, élastiques; non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, France, 2004.
- [145] RAJAPOGAL, A. *Advancements in rotor blade cross-sectional analysis using the variational-asymptotic method*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, U.S.A., 2014.
- [146] RAO, J. S., AND CARNEGIE, W. On one-dimensional finite-strain beam theory : the plane problem. *Journal of the Royal Aeronautical Society* 74 (1970), 161–165.
- [147] RAO, J. S., AND CARNEGIE, W. Non-linear vibrations of rotating cantilever blades treated by the ritz averaging process. *Aeronautical Journal* (1972), 566–569.
- [148] REISSNER, E. On one-dimensional finite-strain beam theory : the plane problem. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 23 (1972), 795–804.
- [149] RIBEIRO, P., AND PETYT, M. Non-linear vibrations of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method. *J. Sound Vib.* 224 (1999), 591–624.
- [150] RIBEIRO, P., AND PETYT, M. Non-linear free vibration of isotropic plates with internal resonance. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 35 (2000), 263–278.
- [151] RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), 529–551.
- [152] ROSEN, A., AND FRIEDMANN, P. Nonlinear equations of equilibrium for elastic helicopter or wind turbine blades undergoing moderate deformation. *NASA Technical Report CR-9478* (1978), .
- [153] SEIDEL, R. *Practical bifurcation and stability analysis*. Springer, 2010.
- [154] SHIN, S., AND CESNIK, C. Integral twist actuation of helicopter rotor blades for vibration reduction. *NASA Techdoc 20010110792* (2001), .
- [155] SIMMONDS, J. G. *A brief on tensor analysis*. Springer-Verlag Inc., NY, 1994, 2 ed.
- [156] SIMO, J. C. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49 (1985), 55–70.
- [157] SIMO, J. C., AND VU-QUOC, L. A three-dimensional finite strain rod model. part II. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58 (1986), 79–116.
- [158] SINHA, S., AND WU, D. H. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *Journal of Sound and Vibrations* 151 (1991), 91–117.

Références bibliographiques

- [159] SOTOUDEH, Z. *Nonlinear static and dynamic analysis of beam structures using fully intrinsic equations*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Tech., Georgia., 2011.
- [160] SOTOUDEH, Z., AND HODGES, D. H. Modeling beams with various boundary conditions using fully intrinsic equations. *J. Appl. Mech.* 78 (2011), article 031010.
- [161] SOUTHWELL, R., AND GOUGH, F. The transverse vibration of airscrew blades. *British A. R. C. Reports and Memoranda no. 766* (1921), .
- [162] STEMPLE, A. D., RHIM, J.-W., AND KIM, Y. H. Vibration analysis of rotating composite beams using a finite element model with warping degrees of freedom. *Computational Mechanics* 16 (1995), 258–265.
- [163] STOYKOV, S., AND RIBEIRO, P. Nonlinear free vibrations of beams in space due to internal resonance. *Journal of Sound and Vibrations* 330 (2011), 4574–4595.
- [164] STOYKOV, S., AND RIBEIRO, P. Stability of nonlinear periodic vibrations of 3d beams. *Nonlinear Dynamics* 66 (2011), 335–353.
- [165] SWAMINATHAN, M., AND RAO, J. Vibrations of rotating pretwisted and tapered blades. *Mechanism and Machine Theory Journal* 12 (1977), 331–337.
- [166] TEOH, L. S., AND HUANG, C. C. The vibration of beams of fiber reinforced material. *Journal of Sound and Vibration* 51 (1977), 467–473.
- [167] THOMAS, O., AND LAZARUS, A. Une méthode fréquentielle pour le calcul de la stabilité de vibrations périodiques. in *CSMA 10e Colloque National en Calcul des Structures* (2011), Presqu’île de Giens (Var).
- [168] TIMOSHENKO, S. P. *History of strength of materials*. Dover, New York, 1983.
- [169] TRAUGOTT, J. P., PATIL, M., AND HOLZAPFL, F. Nonlinear modeling of integrally actuated beams. *Aerospace Science and Technology* 10 (2006), 509–518.
- [170] VAKAKIS, A. F. Fundamental and subharmonic resonances in a system with a ‘1-1’ internal resonance. *Nonlinear Dynamics* 3 (1992), 123–143.
- [171] VON-GROLL, G., AND EWINS, D. J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *J. Sound Vib.* 241 (2001), 223–233.
- [172] WEMPNER, G., AND TALASLIDIS, D. *Mechanics of Solids and Shells, Theories and Approximations*. CRC Press, 2003.
- [173] WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures* 7 (1971), 1581–1599.
- [174] WERNER, B., AND SPENCE, A. The computation of symmetry-breaking bifurcation point. *Journal of Numerical Analysis* 21 (1984), 388–399.
- [175] WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. Springer-Verlag Inc., New York, 2003, 2nd ed.

Références bibliographiques

- [176] WILKIE, W. K., MIRICK, P. H., AND LANGSTON, C. W. Rotating shake test and modal analysis of a model helicopter rotor blade. *NASA TM 4760* (1997), .
- [177] YOKOYAMA, T. Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams. *International Journal of Mechanical Sciences* 30 (1988), 743–755.
- [178] YOO, H. H., PARK, J. H., AND PARK, J. Vibration analysis of rotating pre-twisted blades. *Computers and Structures Journal* 79 (2001), 1811–1819.
- [179] YOO, H. H., AND SHIN, S. H. Vibration analysis of rotating cantilever beams. *Journal of Sound and Vibrations* 212 (1998), 807–828.
- [180] YOUNG, T. H. Dynamic response of a pretwisted, tapered beam with non-constant rotating speed. *Journal of Sound and Vibrations* 150 (1991), 435–446.
- [181] YU, W. *Variational asymptotic modeling of composite dimensionally reducible structures*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Techn., Georgia, U.S.A., 2002.
- [182] YU, W. Beam models (unpublished). Utah State University, Logan, Utah, 2012.
- [183] YU, W., HODGES, D. H., AND HO, J. C. Variational asymptotic beam sectional analysis – an updated version. *Int. J. Eng.. Sci.* 59 (2012), 40–64.
- [184] YU, W., HODGES, D. H., VOLOVOI, V., AND CESNIK, C. E. S. On Timoshenko-like modeling of initially curved and twisted composite beams. *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), 5101–5121.
- [185] YU, W., VOLOVOI, V. V., HODGES, D. H., AND HONG, X. Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis. *AIAA Journal* 40 (2002), 2105–2112.
- [186] ZARETZKY, C. L., AND SILVA, M. R. M. C. D. Nonlinear flexural-flexural-torsional interactions in beams including the effect of torsional dynamics.ii : combination resonance. *Nonlinear Dynamics* 5 (1994), 161–180.
- [187] ZHU, T. L. The vibrations of pre-twisted rotating Timoshenko beams by rayleigh-ritz method. *Archive Applied Mechanics* 47 (2011), 395–408.
- [188] ZHU, T. L. Free flapwise vibration analysis of rotating double-tapered Timoshenko beams. *Archive Applied Mechanics* 82 (2012), 479–494.